

ANNALI  
DI  
MATEMATICA  
PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

**Luigi Bianchi** in Pisa

**Ulisse Dini** in Pisa

**Giuseppe Jung** in Milano

**Corrado Segre** in Torino

---

SERIE III. \* TOMO XVII.

---

MILANO

TIPO-LITOGRAFIA REBESCHINI DI TURATI E C.

OFFICINA CARTE VALORI

—  
1910.

# INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XVII.º (SERIE III.ª)

---

	PAG.
Lösung bestimmter Integrale durch Veränderung des Integrationsweges. — <i>Fr. Iseli</i> . . . . .	1
Sull'integrazione delle equazioni fondamentali dell'elettrodinamica. — <i>Angelo Tonolo</i> . . . . .	29
Studi sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse. — <i>Eugenio Elia Levi</i> . . . . .	61
Sulla permutabilità della trasformazione $H$ colla trasformazione $B_k$ nella teoria delle superficie applicabili sulle quadriche. — <i>Antonio Signorini</i> . . . . .	89
Dimostrazione d'un teorema sopra i massimi e minimi delle funzioni di più variabili indipendenti. — <i>Cesare Russyan</i> . . . . .	105
Equazioni integrali e valori eccezionali. — <i>Guido Fubini</i> . . . . .	111
Saggio di una teoria generale delle equazioni dell'equilibrio elastico per un corpo isotropo. — <i>Orazio Tedone</i> . . . . .	141
Saggio di Geometria differenziale dei complessi di rette. — <i>Gustavo Sannia</i> . . . . .	179
Intorno alle possibili distribuzioni della massa nell'interno della Terra. — <i>P. Pizzetti</i> . . . . .	225
Studi sulle equazioni differenziali lineari, per riguardo ai loro integrali normali. — <i>Ulisse Dini</i> . . . . .	259
Le superficie a curve sezioni di genere 3. — <i>Gaetano Scorza</i> . . . . .	281

---

# Lösung bestimmter Integrale durch Veränderung des Integrationsweges.

(Von D.<sup>r</sup> FR. ISELI, in Winterthur.)

---

Eine der interessantesten Operationen beim Lösen bestimmter Integrale ist die Veränderung des Integrationsweges. Man gelangt hiebei häufig auf ganz einfache Art zu Resultaten, die durch Anwendung anderer Verfahren nur mühsam gefunden werden können. In vorliegender Arbeit sollen einige Integrale in obgenannter Weise gelöst werden.



## Das Integral der Gammafunktion.

Als Ausgangspunkt unserer Untersuchungen wählen wir das Weyrstrass'sche Definitionsintegral der Gammafunktion

$$\int e^x x^{-a} dx = \frac{2i\pi}{\Gamma(a)}. \quad (1)$$

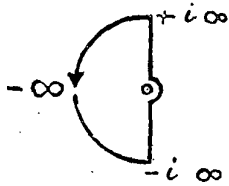


Dasselbe hat für alle endlichen  $a$  einen Sinn. Der Integrationsweg soll nun wie folgt verändert werden: Ausgehend von  $-\infty$  folge die Variable dem südlichen Horizonte bis zum Punkte  $-i\infty$ , durchschreite dann die negative Hälfte der imaginären Axe bis in die Nähe des Nullpunktes, umgehē den-

selben östlich, bewege sich weiter der positiven Hälfte der imaginären Axe entlang nach  $+i\infty$  und kehre dann dem Horizonte nach gehend nach  $-\infty$  zurück. Bei dieser Veränderung des Integrationsweges kann Integral (1) den Wert nicht ändern, weil beim Ausdehnen des Weges die beiden Pole des Integrals, nämlich 0 und  $+\infty$  nicht überschritten werden.

Somit ist

$$\int e^x x^{-a} dx = \frac{2i\pi}{\Gamma(a)}. \quad (2)$$



Nun substituieren wir hierin  $x = \rho e^{i\varphi}$ , wo  $\rho$  Radius vector und  $\varphi$  die Variable sei. Dann ist

$$\int e^x x^{-a} dx = i \rho \int e^{\rho e^{i\varphi}} e^{i\varphi(1-a)} d\varphi.$$

Wenn nun  $\rho$  sehr gross ist, so sind mit dem letzten Integral gleichwertig

$$\rho^{1-a} \int e^{\rho e^{i\varphi}} d\varphi = \rho^{1-a} \int e^{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} d\varphi$$

und weil  $e^{i\varphi\sin\varphi}$  eine periodische Funktion ist, so fällt, um den Wert des Integrals in beliebigen Punkten des westlichen Horizontes zu schätzen, in Betracht allein  $\rho^{1-a} \int e^{\rho\cos\varphi} d\varphi$ , woraus sich für  $\cos\varphi = z$  gesetzt, ergibt

$$= \rho^{1-a} \int \frac{e^{\rho z}}{\sqrt{1-z^2}} dz$$

Da die Convergenz des Integrals (1) in  $-\infty$  der Exponentialfunktion  $e^x$  wegen ohne weiteres erkenntlich ist, so kann dieser Punkt, für den  $\varphi = \pi$  und  $z = -1$  ist, ausser acht gelassen werden. Für alle übrigen Punkte des westlichen Horizontes hat die Wurzel  $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$  einen von Null verschiedenen Wert und fällt bei einer Schätzung des Integrals in einem solchen Punkte gegenüber der Exponentialfunktion  $e^{\rho z}$  nicht in Betracht. Somit resultiert



nach Weglassung des negativen Vorzeichens

$$e^{1-a} \int e^{az} dz = \frac{e^{az}}{a}$$

$e^{az}$  verschwindet so lange, als  $z$  negativ bleibt. Hieraus ergibt sich, dass  $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$  sein muss.

Somit hat Integral (1) in jedem Punkte des westlichen Horizontes, unabhängig vom Parameter  $a$ , den Wert NULL.

Es entspringt daher als neue Integralform

$$\int_{-(\gamma+i\delta)\infty}^{-(\alpha-i\beta)\infty} e^x x^{-a} dx = \frac{2i\pi}{\Gamma(a)}, \quad (3)$$

wo  $\alpha$  und  $\gamma > 0$  und  $\beta$  und  $\delta \geq 0$  sind. Die Variable umgeht den Nullpunkt östlich. Die Endpunkte des Integrationsweges liegen in beliebigen Punkten des westlichen Horizontes.

Es soll nun untersucht werden, unter welcher Bedingung Integral (1) auch in  $\pm i\infty$  verschwindet. In diesen Grenzlagen ist  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  oder  $= \frac{3\pi}{2}$  und  $e^{az}$  wird zur Einheit.

Die Convergenz ist so lange sicher als  $\text{recp. } a > 0$  (\*).

Daher ist

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^x x^{-a} dx = \frac{2i\pi}{\Gamma(a)}, \quad \text{recp. } a > 0. \quad (4)$$

Die Variable weicht dem Nullpunkt östlich aus.

Umgeht sie denselben aber westlich, so verschwindet das Integral. Dem Integrationsweg darf der ganze westliche Horizont angefügt werden. Der so verlängerte Weg bildet nun die Begrenzung eines Flächenstückes, auf dem die Funktion  $e^x x^{-a}$  überall eindeutig und stetig ist. Somit ist

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^x x^{-a} dx = 0, \quad \text{recp. } a > 0. \quad (5)$$

Die Variable weicht dem Nullpunkt westlich aus.

---

(\*) Recp. bedeutet: *Reelle Componente von a.*

Wird die Variable  $x$  durch  $-x$  ersetzt, so folgt

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-x} x^{-a} dx = 0, \quad \text{recp. } a > 0 \quad (6)$$

wo die Variable dem Nullpunkt nun östlich ausweicht.

Substituiert man in den Gleichungen (4) und (6)  $x = iz$ , so entspringen die zwei folgenden Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz} z^{-a} dz = \frac{2\pi}{\Gamma(a)} e^{\frac{i\pi a}{2}}, \quad \text{recp. } a > 0 \quad (7)$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz} z^{-a} dz = 0, \quad \text{recp. } a > 0. \quad (8)$$

Beide Male wird der Nullpunkt südlich umgangen.

Durch Addition von (7) und (8) entsteht

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos z z^{-a} dz = \frac{\pi}{\Gamma(a)} e^{\frac{i\pi a}{2}} \quad (9)$$

Subtrahiert man aber (8) von (7)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin z z^{-a} dz = -\frac{i\pi}{\Gamma(a)} e^{\frac{i\pi a}{2}} \quad (10)$$

An beide Gleichungen knüpfen sich wieder die Bedingungen, dass  $\text{recp. } a > 0$  und dass der Nullpunkt südlich umgangen werde. Gilt aber für dieselben  $0 < \text{recp. } a < 1$ , so darf der Nullpunkt betreten werden. Jetzt zerlegen wir Integral (9) in zwei Integrale, von denen das eine von  $-\infty$  bis  $0$ , das andere von  $0$  bis  $+\infty$  geht. Also

$$\int_{-\infty}^0 \cos z z^{-a} dz + \int_0^{\infty} \cos z z^{-a} dz = \frac{\pi}{\Gamma(a)} e^{\frac{i\pi a}{2}}$$

$$0 < \text{recp. } a < 1.$$

Im ersten möge  $z = e^{-ix} z$  gesetzt werden.

$$e^{i\pi a} \int_0^{\infty} \cos z z^{-a} dz + \int_0^{\infty} \cos z z^{-a} dz = \frac{\pi}{\Gamma(a)} e^{\frac{i\pi a}{2}}$$

$$e^{-\frac{i\pi a}{2}} \int_0^{\infty} \cos z z^{-a} dz + e^{\frac{i\pi a}{2}} \int_0^{\infty} \cos z z^{-a} dz = \frac{\pi}{\Gamma(a)}$$

$$\int_0^{\infty} \cos z z^{-a} dz = \frac{\pi}{\Gamma(a) 2 \cdot \cos \frac{a\pi}{2}}$$

Multipliziert man Zähler und Nenner der rechten Seite mit  $\sin \frac{a\pi}{2}$ , so resultiert

$$\int_0^{\infty} \cos z z^{-a} dz = \frac{\pi \cdot \sin \frac{a\pi}{2}}{\Gamma(a) \sin a\pi}$$

Nach einem bekannten Theorem ist

$$\frac{\pi}{\Gamma(a) \sin a\pi} = \Gamma(1-a),$$

also

$$\int_0^{\infty} \cos z z^{-a} dz = \sin \frac{a\pi}{2} \Gamma(1-a)$$

für  $a = 1 - b$  gesetzt

$$\int_0^{\infty} \cos z z^{b-1} dz = \cos \frac{b\pi}{2} \Gamma(b) \tag{11}$$

$0 < \text{re} p. b < 1.$

Analog erhält man aus (10)

$$\int_0^{\infty} \sin z z^{b-1} dz = \sin \frac{b\pi}{2} \Gamma(b) \tag{12}$$

$0 < \text{re} p. b < 1.$

Die Gleichungen (11) und (12) sind unter der Bezeichnung « Dirichlet'sche Formeln » bekannt.

Integral (12) behält seine Bedeutung auch dann noch, wenn im Grenzfalle  $b = \varepsilon = 0$  wird. Dann ist

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z^{1-\varepsilon}} dz = \sin \frac{\varepsilon \pi}{2} \Gamma(\varepsilon).$$

Da  $\varepsilon$  sehr klein ist, so darf  $\sin \frac{\varepsilon \pi}{2} = \frac{\varepsilon \pi}{2}$  gesetzt werden.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z^{1-\varepsilon}} dz = \frac{\pi}{2} \varepsilon \cdot \Gamma(\varepsilon) = \frac{\pi}{2} \Gamma(1 + \varepsilon).$$

Wird jetzt  $\varepsilon = 0$ , so ist, da  $\Gamma(1) = 0! = 1$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2}. \quad (13)$$

Für  $b = \frac{1}{2}$  entspringen aus (11) und (12) die weiteren Beziehungen

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos z}{\sqrt{z}} dz = \int_0^{\infty} \frac{\sin z}{\sqrt{z}} dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (14)$$

Ersetzt man nun  $z$  durch  $z^2$ , so erzielt man die Relationen

$$\int_0^{\infty} \cos z^2 dz = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad \int_0^{\infty} \sin z^2 dz = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (15)$$

Multipliziert man die zweite Gleichung mit  $i$ , so gewinnt man durch Addition

$$\int_0^{\infty} e^{iz^2} dz = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \left[ \sqrt{\frac{1}{2}} + i \sqrt{\frac{1}{2}} \right] = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}. \quad (16)$$

Die Beziehungen (15) und (16) sollen im folgenden § direkt hergeleitet werden.

§ 2.

Das Integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

Wenn reep.  $a > 0$  ist, so kann die Gammafunktion durch folgendes Integral definiert werden :

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx = \Gamma(a). \tag{1}$$

Wenn  $a = 1/2$ , und  $x = x^2$  so ist

$$2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \tag{2}$$

woraus für  $x = e^{-\frac{i\pi}{4}} \cdot \sqrt{b} \cdot z$  gesetzt, folgt

$$\int_{-e^{\frac{i\pi}{4}} \infty}^{e^{\frac{i\pi}{4}} \infty} e^{ibz^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{\frac{i\pi}{4}}. \tag{3}$$

Der Integrationsweg ist die Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten, und das Integral besitzt in den Endpunkten desselben den Wert Null. Es kann nun aber leicht nachgewiesen werden, dass dasselbe nicht nur in den zwei genannten Punkten verschwindet, sondern auch in bestimmten andern Teilen des unendlichen Horizontes. Man findet diese, wenn  $z = \rho e^{i\varphi}$  substituiert wird, wo  $\rho$  als Radius vector sehr gross ist. Dadurch folgt

$$\int e^{ibz^2} dz = i \rho \int e^{ib\rho^2 e^{2i\varphi}} e^{i\varphi} d\varphi = i \rho \int e^{ib\rho^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)} e^{i\varphi} d\varphi.$$

Mit diesen Integralen ist im Horizonte gleichwertig

$$\rho \int e^{-b\rho^2 \sin 2\varphi} d\varphi$$

woraus für  $\sin 2\varphi = v$  substituiert, entspringt

$$\varrho \int e^{-b\varrho^{2v}} d v = - \frac{e^{-b\varrho^{2v}}}{b \varrho}.$$

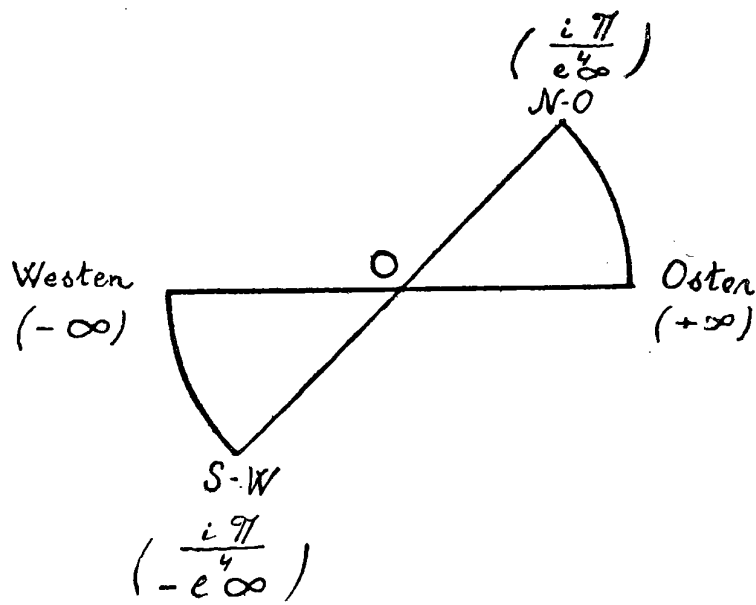
Soll der letzte Wert verschwinden, so muss, da  $b$  positiv sein soll, die Variable  $v$  auch positiv ist

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$$

sein.

( $\varphi$  darf die Phasen  $0$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  oder  $\frac{3\pi}{2}$  annehmen wegen des Faktors  $\varrho$  im Nenner).

Es ergibt sich hieraus, dass das Integral (3) im I. und im III. Quadranten



längs des Horizontes verschwindet, die Grenzlagen  $0$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  und  $\frac{3\pi}{2}$  inbegriffen.

Daher ist es erlaubt, den Integrationsweg in (3) um zwei Strecken zu verlängern.

Wir führen die Variable aus dem Westpunkte  $(-\infty)$  dem Horizonte ent-

lang nach Südwesten  $\left(-e^{\frac{i\pi}{4}} \infty\right)$ , von da geradlinig nach Nordosten  $\left(e^{\frac{i\pi}{4}} \infty\right)$  und dann wieder dem Horizonte folgend nach dem Ostpunkte  $(+\infty)$ . Der Wert des Integrals längs der drei Strecken ist aber gleich demjenigen längs der Realitätsgeraden. Es gilt daher

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ibz^2} dz &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(bz^2) dz + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(bz^2) dz = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\pi}{b}} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

woraus sich sofort ergibt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(bz^2) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(bz^2) dz = \sqrt{\frac{\pi}{2b}} \quad (4)$$

oder

$$\int_0^{\infty} \cos(bz^2) dz = \int_0^{\infty} \sin(bz^2) dz = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2b}}. \quad (5)$$

Wird  $b=1$ , so folgt als Spezialfall

$$\int_0^{\infty} \cos z^2 dz = \int_0^{\infty} \sin z^2 dz = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (6)$$

Vertauscht man in (5)  $z^2$  durch  $z$ , so ergibt sich

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(bz)}{\sqrt{z}} dz = \int_0^{\infty} \frac{\sin(bz)}{\sqrt{z}} dz = \sqrt{\frac{\pi}{2b}}. \quad (7)$$

Setzt man schliesslich in

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ibz^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{\frac{i\pi}{4}}$$

für  $b=1$ , so ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz^2} dz = \sqrt{\pi} \cdot e^{\frac{i\pi}{4}} \quad \text{und hieraus} \quad \int_0^{\infty} e^{iz^2} dz = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{\frac{i\pi}{4}}. \quad (8)$$

Nun stimmen die Relationen (6) und (8) mit den Resultaten (15) und (16) des vorigen §, die wir als Spezialfälle erhalten haben, vollständig überein.

Aus Integral (2) können noch andere, allgemeine Integrale dadurch abgeleitet werden, dass man hierin substituiert  $x = (a + ib)z$ , wo  $a$  und  $b$  positiv. Dann ergibt sich zunächst

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\left(\frac{a-ib}{a^2+b^2}\right)\infty}^{+\left(\frac{a-ib}{a^2+b^2}\right)\infty} e^{-(a^2-b^2+2iab)z^2} (a+ib) dz = \sqrt{\pi}$$

und

$$\int_{-(a-ib)\infty}^{+(a-ib)\infty} e^{-(a^2-b^2+2iab)z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{a+ib} = \frac{(a-ib)\sqrt{\pi}}{a^2+b^2}. \quad (9)$$

Wie verhält sich das letzte Integral im Horizonte?

Es sei  $z = \rho e^{i\varphi}$ , wo  $\rho$  und  $\varphi$  die frühere Bedeutung haben.

$$\int e^{-(a^2-b^2+2iab)z^2} dz = i \rho \int e^{-\rho^2(a^2-b^2+2iab)e^{2i\varphi}} e^{i\varphi} d\varphi,$$

welch letzterem Integral sich im Horizonte analog verhält

$$\rho \int e^{-\rho^2(a^2-b^2+2iab)(\cos^2\varphi+i\sin^2\varphi)} d\varphi. \quad (10)$$

Nun sind drei Fälle zu unterscheiden, nämlich  $b < a$ ,  $b = a$ ,  $b > a$ .

*Fall. I.*  $b < a$ . In diesem Falle ist  $a^2 - b^2$  eine positive Zahl. Bedenkt man überdies, dass diejenigen Exponentialfunktionen, deren Exponenten mit der imaginären Grösse  $i$  multipliziert sind; für die Untersuchungen der Convergenz des Integrals im Horizont ausser Betracht fallen, so fliesst aus (10)

$$\rho \int e^{-\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)} d\varphi. \quad (11)$$

Da es sich nur um ganz rohe Schätzung des Integrals (9) handelt und die Convergenz desselben in erster Linie von den Vorzeichen der als Exponenten vorkommenden trigonometrischen Funktionen und in zweiter Linie



vom Faktor  $q$  im Nenner des nun folgenden Integrals abhängt, so ist es erlaubt, das letzte Integral mit  $2(\cos 2\varphi + \sin 2\varphi)$  zu multiplizieren. Daher:

$$\frac{1}{e} \int e^{q^2(\cos 2\varphi - \sin 2\varphi)} 2q^2 (\cos 2\varphi + \sin 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{e} e^{-q^2(\cos 2\varphi - \sin 2\varphi)}. \quad (12)$$

Der letzte Wert verschwindet für ein sehr grosses  $q$ , wenn  $\cos 2\varphi \geq 0$  und gleichzeitig  $\sin 2\varphi \leq 0$  ist.

$\cos 2\varphi$  ist positiv oder Null, wenn

$2\varphi$  geht von  $-\frac{\pi}{2}$  bis  $+\frac{\pi}{2}$ , also  $\varphi$  geht von  $-\frac{\pi}{4}$  bis  $+\frac{\pi}{4}$  oder

$2\varphi \gg \frac{3\pi}{2} \gg \frac{5\pi}{2}$ , »  $\varphi \gg \frac{3\pi}{4} \gg \frac{5\pi}{4}$ .

$\sin 2\varphi$  ist negativ oder Null, wenn

$2\varphi$  geht von  $\pi$  bis  $2\pi$ , also  $\varphi$  geht von  $\frac{\pi}{2}$  bis  $\pi$  oder

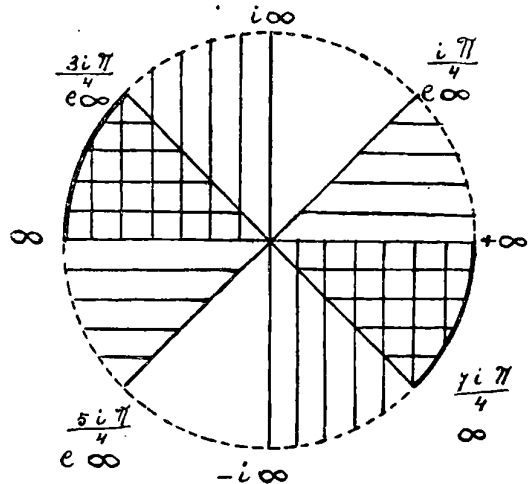
$2\varphi \gg 3\pi \gg 4\pi$ , »  $\varphi \gg \frac{3\pi}{2} \gg 2\pi$ .

Auch in den Grenzfällen, wo  $q$  die Werte  $-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$  oder  $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$  annimmt, ist die Convergenz der bezüglichen Werte sicher.

Die Verbindung beider Convergenzbedingungen ergibt, dass die Variable in nebenstehender Figur in den doppelt schraffierten Gebieten ins Unendliche gehen darf, ohne dass Integral (9) sinnlos würde.

Weil vorausgesetzt wurde, dass  $b < a$  sei, so liegt der Punkt  $(a - ib) \infty$  auf dem Bogen

$e^{\frac{7i\pi}{4}} \infty$  bis  $+\infty$  und der Punkt  $-(a - ib) \infty$  auf dem Bogen  $e^{\frac{3i\pi}{4}} \infty$  bis  $-\infty$ .



Die horizontalen Striche bezeichnen die Gebiete, in denen  $\frac{1}{e^{-q^2 \cos 2\varphi}}$ , die verticalen, in denen  $\frac{1}{e^{q^2 \sin 2\varphi}}$  im Horizonte verschwindet.

Da wir sicher sind, dass Integral (9) längs der zwei genannten Bogen in jedem Punkte verschwindet, so dürfen wir den geradlinigen Integrationsweg  $-(a - i b) \infty$  bis  $(a - i b) \infty$  so verlängern, bis der Anfangspunkt desselben in  $-\infty$ , der Endpunkt aber in  $+\infty$  liegt. Dann ziehen wir den Integrationsweg, den wir uns als sehr langen Faden denken können, in  $-\infty$  und in  $+\infty$  an und bekommen so aus (9)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a^2 - b^2 + 2iab)z^2} dz = \frac{(a - i b) \sqrt{\pi}}{a^2 + b^2} \quad (13)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-(a^2 - b^2 + 2iab)z^2} dz = \frac{(a - i b) \sqrt{\pi}}{2(a^2 + b^2)} \quad (14)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-(a^2 - b^2)z^2} \cos(2abz^2) dz = \frac{a \sqrt{\pi}}{2(a^2 + b^2)} \quad (15)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-(a^2 - b^2)z^2} \sin(2abz^2) dz = \frac{b \sqrt{\pi}}{2(a^2 + b^2)} \quad (16)$$

Nun werde in (15) und (16) substituiert:

$$a^2 - b^2 = q^2 \quad (17)$$

und

$$2ab = r \quad (18)$$

Die Rechnung ergibt

$$a^2 = \frac{q^2 + \sqrt{q^4 + r^2}}{2}; \quad b^2 = \frac{r^2}{2(q^2 + \sqrt{q^4 + r^2})}$$

Nun addieren wir die Quadrate von (17) und (18) und erhalten

$$(a^2 + b^2)^2 = q^4 + r^2; \quad a^2 + b^2 = \sqrt{q^4 + r^2}.$$

Somit

$$\frac{a \sqrt{\pi}}{2(a^2 - b^2)} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2\pi(\sqrt{q^4 + r^2} + q^2)}{q^4 - r^2}}$$

und

$$\frac{b \sqrt{\pi}}{2(a^2 + b^2)} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2\pi(\sqrt{q^4 + r^2} - q^2)}{q^4 - r^2}}.$$

Daher:

$$\int_0^{\infty} e^{-q^2 z^2} \cos(r z^2) dz = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2\pi(\sqrt{q^4 + r^2} + q^2)}{q^4 + r^2}} \quad (19)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-q^2 z^2} \sin(r z^2) dz = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2\pi(\sqrt{q^4 + r^2} - q^2)}{q^4 + r^2}} \quad (20)$$

(Die zwei letzten Integrale findet man auch in GUST. FERD. MEYER, bestimmte Integrale, Seite 288).

Fall II.  $b = a$ . In diesem Falle reduziert sich (w) auf

$$e \int e^{-2iq^2 a^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)} d\varphi$$

und weiter entspringt, da es sich nur um sehr rohe Schätzung handelt

$$e \int e^{\rho^2 \sin 2\varphi} d\varphi; \quad \sin 2\varphi = z$$

$$e \int e^{\rho^2 z} dz = \frac{1}{\rho} e^{\rho^2 z}, \quad \text{d. h. } z \text{ muss}$$

negativ oder Null sein. Also muss

$$2\varphi \text{ gehen von } \pi \text{ bis } 2\pi \text{ und } \varphi \text{ von } \frac{\pi}{2} \text{ bis } \pi$$

$$2\varphi \quad \gg \quad 3\pi \quad \gg \quad 4\pi \quad \gg \quad \varphi \quad \gg \quad \frac{3\pi}{2} \quad \gg \quad 2\pi.$$

Es darf also  $\varphi$  im II. und IV. Quadranten ins Unendliche gehen, die Grenzlagen inbegriffen. Die Endpunkte des Integrationsweges in (9) liegen in diesen Gebieten. Wir verlängern denselben bis  $-\infty$  und  $+\infty$ . Hieraus ziehen wir den Faden in den zwei genannten Punkten an, und es folgen die Integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2ia^2 z^2} dz = \frac{1-i}{2a} \sqrt{\pi}; \quad \int_0^{\infty} e^{-2ia^2 z^2} dz = \frac{1-i}{4a} \sqrt{\pi} \quad (21)$$

und wenn  $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$$\int_0^{\infty} e^{-iz^2} dz = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{i\pi}{4}} \quad (22)$$

$$\int_0^{\infty} \cos(z^2) dz = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad \int_0^{\infty} \sin(z^2) dz = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (23)$$

Ebenso gut wie wir den Integrationsweg nach  $-\infty$  und  $+\infty$  verlängert haben, können wir die Variable nach  $+i\infty$  und  $-i\infty$  gehen lassen, ohne dass sich der Wert des Integrals ändert. Ziehen wir nun den Weg wieder an, so bekommen wir

$$\int_{+i\infty}^{-i\infty} e^{-2ia^2 z^2} dz = \frac{1-i}{2a} \sqrt{\pi} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{i\pi}{4}} \quad (24)$$

und für  $z = iz$  substituiert

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2ia^2 z^2} dz = \frac{1+i}{2a} \sqrt{\pi} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{i\pi}{4}} \quad (25)$$

$a = \sqrt{\frac{1}{2}}$  gesetzt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz^2} dz = \sqrt{\pi} \cdot e^{\frac{i\pi}{4}}; \quad \int_0^{\infty} e^{iz^2} dz = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot e^{\frac{i\pi}{4}} \quad (26)$$

$$\int_0^{\infty} \cos z^2 dz = \int_0^{\infty} \sin z^2 dz = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (27)$$

*Fall III.*  $b > a$ .

Für diesen Fall fließt aus (10)

$$\varrho \int e^{\varrho^2(\cos 2\varphi + \sin 2\varphi)} d\varphi,$$

und behandelt man dieses Integral wie (11), so ergibt sich

$$\frac{1}{\varrho} e^{\varrho^2(\cos 2\varphi + \sin 2\varphi)} \quad (28)$$

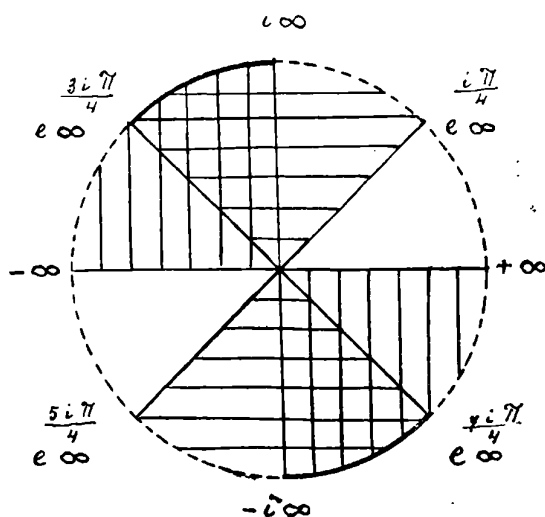
Somit muss  $\cos 2\varphi \leq 0$  und  $\sin 2\varphi \leq 0$  sein. Der ersten Bedingung wird genügt, wenn

$$2\varphi \text{ geht von } \frac{\pi}{2} \text{ bis } \frac{3\pi}{2}, \text{ also } \varphi \text{ geht von } \frac{\pi}{4} \text{ bis } \frac{3\pi}{4} \text{ oder}$$

$$2\varphi \gg \frac{5\pi}{2} \gg \frac{7\pi}{2}, \gg \varphi \gg \frac{5\pi}{4} \gg \frac{7\pi}{4}.$$

Die Gegenden, welche der Sinusfunktion zufolge betreten werden dürfen, sind die gleichen, wie diejenigen, die aus (12) hervorgehen.

Schraffieren wir wieder die durch den  $\cos.$  erlaubten Gebiete horizontal, die durch den  $\sin.$  erlaubten vertical, so gelangen wir zu folgendem Bild.



Das Integral verschwindet also im Horizonte nur längs der Bogen  $e^{3i\pi/4} \infty$  bis  $i\infty$  und  $e^{5i\pi/4} \infty$  bis  $-i\infty$ .

Da die Convergenz auch für alle Grenzlagen fest steht, so geht, wenn der Integrationsweg entsprechend verlängert und dann angezogen wird, das folgende Integral hervor:

$$\int_{+i\infty}^{-i\infty} e^{-(a^2-b^2+2iab)z^2} dz = \frac{(a-ib)\sqrt{\pi}}{a^2+b^2} \quad (29)$$

oder für  $z = -iz$  gesetzt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(a^2-b^2+2iab)z^2} dz = \frac{(b+ia)\sqrt{\pi}}{a^2-b^2} \quad (30)$$

$$\int_0^{\infty} e^{(a^2-b^2)z^2} \cos(2abz^2) dz = \frac{1}{2} \frac{b\sqrt{\pi}}{a^2+b^2} \quad (31)$$

$$\int_0^{\infty} e^{(a^2-b^2)z^2} \sin(2abz^2) dz = \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{\pi}}{a^2-b^2} \quad (32)$$

Da  $b > a$  ist, so ist  $b^2 - a^2 = q^2$ , eine positive Zahl. Ferner sei  $2ab = r$ . Dann resultiert aus den zwei letzten Integralen

$$\int_0^{\infty} e^{-q^2 z^2} \cos(r z^2) dz = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2\pi(\sqrt{q^4 + r^2} + q^2)}{q^4 + r^2}} \quad (33)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-q^2 z^2} \sin(r z^2) dz = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2\pi(\sqrt{q^4 + r^2} - q^2)}{q^4 + r^2}}. \quad (34)$$

Da die Formeln (19) und (20) mit (33) und (34) völlig übereinstimmen, so darf daraus geschlossen werden, dass es gleichgültig ist, ob in der Substitution  $x = (a + ib)z$ , wodurch (2) transformiert wurde,  $b <$  oder  $> a$  sei.

---

Andere Folgerungen des Integrals  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  sind die Integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-kz^2} \cos(2\alpha z) dz = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{-\frac{\alpha^2}{k}}$$

und

$$\int_0^{\infty} e^{-kz^2} \sin(2\alpha z) dz = 0,$$

welche mit Hilfe der Substitution  $x = \alpha z + ib$  und einigen leicht zu bewältigenden Umrechnungen erhalten werden können.

(Siehe auch MEYER, bestimmte Integrale, Seite 278 und Prof. D. I. H. GRAF, Beitrag zur Auswertung bestimmter Integrale mittels Veränderungen des Weges, 1884).

---

§ 3.

Das Integral 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ic\vartheta}}{(k+i\mathcal{S})^a} d\mathcal{S}.$$

Wir fanden in § 1

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^x x^{-a} dx = \frac{2i\pi}{\Gamma(a)}, \quad \text{recp. } a > 0. \quad (1)$$

Die Variable  $x$  umgeht den Nullpunkt in östlicher Richtung. Für  $x = cy$  gesetzt, wird aus (1)

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{cy} y^{-a} dy = \frac{2i\pi}{\Gamma(a)} c^{a-1}.$$

Da  $c > 0$  ist, weicht die Variable dem Nullpunkt östlich aus. Nun sei  $y = k + i\mathcal{S}$ , und es folgt

$$\int_{-\infty+ik}^{+\infty+ik} \frac{e^{ic\vartheta}}{(k+i\mathcal{S})^a} d\mathcal{S} = \frac{2\pi}{\Gamma(a)} c^{a-1} \cdot e^{ck}. \quad (2)$$

Der neue Pol  $ik$  wird von der Variablen  $\mathcal{S}$  in einem Halbkreise südlich umgangen. Mit Ausnahme desselben ist der Integrationsweg eine zur Realitätsgeraden parallele Linie. Wir verändern ihn so, dass die Variable aus  $-\infty + ik$  zuerst dem Horizont entlang nach  $-\infty$  dann längs der Realitätsgeraden nach  $+\infty$  und von hier nach  $+\infty + ik$  geht.

Nun untersuchen wir das Integral im Horizont. Es verhält sich längs desselben annähernd wie

$$\int e^{ic\vartheta} \mathcal{S}^{-a} d\mathcal{S}, \quad \text{woraus für } \mathcal{S} = \rho e^{i\varphi}$$

substituiert, roh gerechnet, resultiert

$$\rho^{1-a} \int e^{ic\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} d\varphi$$

und weiter, da  $c > 0$

$$\int_0^\pi e^{1-a} e^{-\varrho \sin \varphi} d\varphi$$

$$\int_0^\pi e^{1-a} e^{-\varrho v} dv = - \frac{e^{-\varrho v}}{\varrho} \Big|_0^\pi$$

$$\frac{e^{-\varrho v}}{\varrho}$$

$$\frac{e^{-\varrho v}}{\varrho} \text{ ist so lange Null, als } v \geq 0 \text{ ist.}$$

$$\text{Somit muss, da } v = \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi \text{ sein. Daher verschwindet (2) im ganzen nördlichen Horizont, auch in den beiden Grenzlagen } \varphi = 0 \text{ und } \varphi = \pi. \text{ Dann aber folgt unmittelbar aus (2)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ic\vartheta}}{(k + i\vartheta)^n} d\vartheta = \frac{2\pi}{\Gamma(a)} c^{a-1} e^{-ck}. \quad (4)$$

Der Integrationsweg liegt seiner ganzen Ausdehnung nach in der Realitätsgeraden.

Da das Integral im ganzen nördlichen Horizonte Null ist, darf derselbe beigefügt werden, ohne dass sich der Wert des Integrals ändert. Wird zudem  $a$  eine ganze, positive Zahl  $n$ , so ist der Weg eine geschlossene Curve, und kann ins Endliche herein rechtläufig um  $ik$  zusammen gezogen werden. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ic\vartheta}}{(k + i\vartheta)^n} d\vartheta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ic\vartheta}}{(k + i\vartheta)^n} d\vartheta = \frac{2\pi}{(n-1)!} c^{n-1} e^{-ck}. \quad (5)$$



In (4)  $\vartheta = -\tilde{\vartheta}$  substituiert, ergibt


$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ic\vartheta}}{(k - i\tilde{\vartheta})^n} d\tilde{\vartheta} = \frac{2\pi}{\Gamma(a)} c^{a-1} e^{-ck}. \quad (6)$$

Der neue Pol  $-ik$  liegt südlich des Weges.

Das Integral verschwindet im ganzen südlichen Horizonte. Wird  $a$  eine



positive, ganze Zahl, so erhält man, wie leicht ersichtlich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ic\mathfrak{z}}}{(k-i\mathfrak{z})^n} d\mathfrak{z} = \int \frac{e^{ic\mathfrak{z}}}{(k-i\mathfrak{z})^n} d\mathfrak{z} = \frac{2\pi}{(n-1)!} c^{n-1} e^{-ck}. \quad (7)$$


Es kann auf einfache Weise bewiesen werden, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ic\mathfrak{z}}}{(k-i\mathfrak{z})^n} d\mathfrak{z} = 0 \quad \text{ist.} \quad (8)$$

Die beiden Pole des Integrals, nämlich  $-ik$  und  $-i\infty$  liegen südlich des Integrationsweges, und es darf letzterem der ganze nördliche Horizont beigelegt werden, ohne dass sich der Wert des Integrals ändert. Die Integrationscurve ist dann unabhängig vom Parameter  $a$ , stets geschlossen, und der Integrand innerhalb derselben überall endlich und stetig. Somit verschwindet das Integral.

Analog ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ic\mathfrak{z}}}{(k+i\mathfrak{z})^n} d\mathfrak{z} = 0. \quad (9)$$

Hier liegen die beiden Pole  $+ik$  und  $+i\infty$  nördlich des Weges. Der südliche Horizont darf beigelegt werden.

Durch Addition und Subtraktion der Integrale (4), (6), (8) und (9) kann man weitere Resultate erhalten.

(4) + (9)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(c\mathfrak{z})}{(k+i\mathfrak{z})^n} d\mathfrak{z} = \frac{\pi}{\Gamma(n)} c^{n-1} e^{-ck} \quad (10)$$

(9) - (4) oder (4) - (9)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(c\mathfrak{z})}{(k+i\mathfrak{z})^n} d\mathfrak{z} = -\frac{i\pi}{\Gamma(n)} c^{n-1} e^{-ck} \quad (11)$$

(6) + (8)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(c \mathcal{S})}{(k - i \mathcal{S})^a} d\mathcal{S} = \frac{\pi}{\Gamma(a)} c^{a-1} e^{-ck} \quad (12)$$

(8) - (6) oder (6) - (8)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(c \mathcal{S})}{(k - i \mathcal{S})^a} d\mathcal{S} = -\frac{i\pi}{\Gamma(a)} c^{a-1} e^{-ck} \quad (13)$$

(4) + (8)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ic\mathcal{S}}}{(k^2 + \mathcal{S}^2)^a} d\mathcal{S} = \frac{\pi}{k \Gamma(a)} c^{a-1} e^{-ck}. \quad (14)$$

Aus (14) folgt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(c \mathcal{S})}{(k^2 + \mathcal{S}^2)^a} d\mathcal{S} = \frac{\pi}{k \Gamma(a)} c^{a-1} e^{-ck} \quad (15)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(c \mathcal{S})}{(k^2 + \mathcal{S}^2)^a} d\mathcal{S} = 0. \quad (16)$$

Aus (15)

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(c \mathcal{S})}{(k^2 + \mathcal{S}^2)^a} d\mathcal{S} = \frac{\pi}{2k \Gamma(a)} c^{a-1} e^{-ck}. \quad (17)$$

In (17) sei  $a = 1$ .

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(c \mathcal{S})}{k^2 + \mathcal{S}^2} d\mathcal{S} = \frac{\pi}{2k} \cdot e^{-ck} \quad (18)$$

(18) ist ein Laplace'sches Integral.

(8) - (4) oder (4) - (8)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{S} \cdot e^{ic\mathcal{S}}}{(k^2 + \mathcal{S}^2)^a} d\mathcal{S} = \frac{i\pi}{\Gamma(a)} c^{a-1} e^{-ck} \quad (19)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathfrak{S} \sin(c \mathfrak{S})}{(k^2 + \mathfrak{S}^2)^a} d\mathfrak{S} = \frac{\pi}{\Gamma(a)} c^{a-1} e^{-ck} \quad (20)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathfrak{S} \cos(c \mathfrak{S})}{(k^2 + \mathfrak{S}^2)^a} d\mathfrak{S} = 0. \quad (21)$$

Aus (20)

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathfrak{S} \sin(c \mathfrak{S})}{(k^2 + \mathfrak{S}^2)^a} d\mathfrak{S} = \frac{\pi}{2 \Gamma(a)} c^{a-1} e^{-ck} \quad (22)$$

$a = 1$

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathfrak{S} \sin(c \mathfrak{S})}{k^2 + \mathfrak{S}^2} d\mathfrak{S} = \frac{\pi}{2} e^{-ck}. \quad (23)$$

Auch (23) ist ein Laplace'sches Integral.

Ist in (11)  $0 < \operatorname{recp.} a < 1$ , so gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(c \mathfrak{S})}{\mathfrak{S}^a} d\mathfrak{S} = - \frac{i \pi}{\Gamma(a)} c^{a-1} e^{\frac{i \pi a}{2}}.$$

Hieraus:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\sin(c \mathfrak{S})}{\mathfrak{S}^a} d\mathfrak{S} + \int_0^{\infty} \frac{\sin(c \mathfrak{S})}{\mathfrak{S}^a} d\mathfrak{S} = - \frac{i \pi}{\Gamma(a)} c^{a-1} e^{\frac{i \pi a}{2}}.$$

Im ersten Integral  $\mathfrak{S}$  durch  $-\mathfrak{S}$  ersetzt

$$\int_0^{\infty} \sin(c \mathfrak{S}) v^{-a} d\mathfrak{S} = \frac{\pi c^{a-1}}{2 \Gamma(a) \sin \frac{a \pi}{2}} = \frac{\pi c^{a-1} \cos \frac{a \pi}{2}}{\Gamma(a) \sin a \pi}; \quad \frac{\pi}{\Gamma(a) \sin a \pi} = \Gamma(1-a)$$

$$\int_0^{\infty} \sin(c \mathfrak{S}) \mathfrak{S}^{-a} d\mathfrak{S} = \frac{\cos \frac{a \pi}{2} \Gamma(1-a)}{c^{1-a}}$$

$a = 1 - b$  gesetzt

$$\int_0^{\infty} \sin(c \mathfrak{S}) v^{b-1} d\mathfrak{S} = \frac{\sin \frac{b \pi}{2} \Gamma(b)}{c^b} \quad (24)$$

woraus für  $c = 1$ ,  $b = \varepsilon$ , wo  $\varepsilon$  sehr klein, wird

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \mathcal{S}}{b^{1-\varepsilon}} d\mathcal{S} = \sin \frac{\varepsilon \pi}{2} /(\varepsilon)$$

Aber  $\sin \frac{\varepsilon \pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \varepsilon$  und

$$\frac{\pi}{2} \varepsilon \cdot /(\varepsilon) = \frac{\pi}{2} /(\overline{1 + \varepsilon}) = \frac{\pi}{2}.$$

Daher, wenn  $\varepsilon = 0$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \mathcal{S}}{\mathcal{S}} d\mathcal{S} = \frac{\pi}{2} \quad (25)$$

Aus (10) erhält man durch Wiederholung des soeben angewendeten Verfahrens

$$\int_0^{\infty} \cos(c \mathcal{S}) \mathcal{S}^{b-1} d\mathcal{S} = \frac{\cos \frac{b \pi}{2} /(\overline{b})}{c^b} \quad (26)$$

(24) und (26) sind die Dirichlet'schen Formeln, die wir für  $c = 1$  schon in § 1 gefunden haben.

#### § 4.

$$\text{Das Integral } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathcal{S}}{(k + i \mathcal{S})^a (l \pm i \mathcal{S})^b}$$

Das Eulersche Integral 1. Art, 2. Form lautet

$$\int x^{a-1} (1+x)^n dx = \frac{n! 2^i \sin a \pi}{a(a+1)(a+2) \dots (a+n)} \quad (1)$$



(Siehe Einleitung in die Theorie der Gammafunktion von Herrn Prof. D.<sup>r</sup> GRAF, Seite 8).

$n$  bedeutet eine *positive*, ganze Zahl. Daher ist der Punkt  $x = -1$  stetsfort zugänglich.

Nun ersetzen wir  $n$  durch  $b - 1$  und  $a - 1$  durch  $-a$ . Dann folgt nach Anwendung der Relation  $\Gamma(a) \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a \pi}$

$$\int x^{-a} (1+x)^{b-1} dx = 2i\pi \cdot \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a) \Gamma(b-a+1)}.$$



Es ist leicht einzusehen, dass das Integral keine einschneidende Änderung erleidet, wenn  $b$  aufhört, eine *ganze*, positive Zahl zu sein. Es behält seine Gültigkeit auch dann, wenn  $b$  eine complexe Grösse ist. Allerdings muss *recp.*  $b > 0$  sein. Es gilt also

$$\int x^{-a} (1+x)^{b-1} dx = 2i\pi \cdot \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a) \Gamma(b-a+1)} \quad (2)$$



*recp.*  $b > 0$  oder  $z = \frac{x}{1+x}$  gesetzt

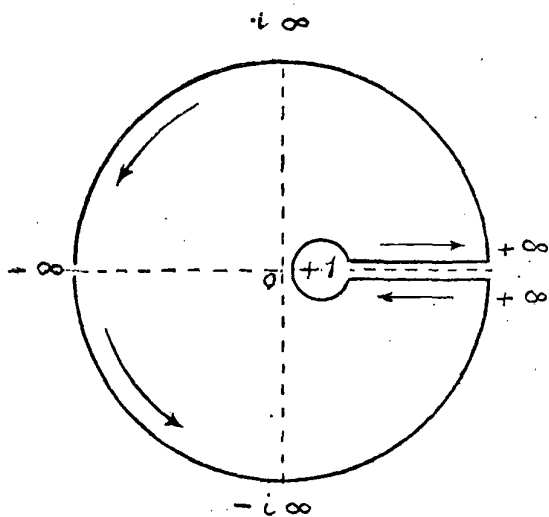
$$\int z^{-a} (1-z)^{b-1} dz = 2i\pi \cdot \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a) \Gamma(b-a+1)} \quad (3)$$



*recp.*  $b > 0$ .

Mittels der Substitution  $z = \rho e^{i\varphi}$  findet man, dass Integral (3) im *ganzen* Horizont verschwindet, wenn *recp.*  $b > 0$  ist.

Daher darf die Variable folgenden Weg einschlagen: Aus  $-\infty$  gehe sie über  $-i\infty$  nach  $+\infty$ , dann der Realitätsgeraden entlang um  $+1$  herum zurück nach  $+\infty$  und schliesslich über  $+i\infty$  nach  $-\infty$ .



Aber längs des Horizontes verschwindet das Integral. Somit bleibt als Integrationsweg einzig übrig eine rückläufige Schlinge aus  $+\infty$  um  $+1$ .

$$\int z^{-a} (1-z)^{a-b-1} dz =$$



$$= \int z^{-a} (1-z)^{a-b-1} dz =$$



$$= 2i\pi \cdot \frac{|(b)|}{|(a)| |(b-a+1)|} \quad (4)$$

Wir setzen in (3)  $a-b-1 = -b$  und bezeichnen den sich ergebenden Wert des Integrals nach den Parametern  $a$  und  $b$  im Nenner mit  $f(a, b)$

$$\int z^{-a} (1-z)^{-b} dz = 2i\pi \cdot \frac{|(a+b-1)|}{|(a)| |(b)|} = f(a, b) \quad (5)$$



recp.  $(a+b) > 1$ .

Entsprechend wird nach (4)

$$\int z^{-a} (1-z)^{-b} dz = 2i\pi \cdot \frac{|(a+\overline{b}-1)|}{|\overline{a}| |\overline{b}|} = f(a, b). \quad (6)$$



Das letzte Integral transformiert sich durch  $1-z=y=z$  in

$$\int z^{-b} (1-z)^{-a} dz = 2i\pi \cdot \frac{|(\overline{b}+\overline{a}-1)|}{|\overline{b}| |\overline{a}|} = f(b, a). \quad (7)$$



recp.  $a+b > 1$ .

Aus (5) und (7) folgt

$$f(a, b) = f(b, a)$$

d. h.

Beim Eulerschen Integral 1. Art, 2. Form dürfen die beiden Parameter mit einander vertauscht werden, ohne dass sich der Wert des Integrals ändert.

Wir fügen Integral (5) die Wege  $-i\infty$  bis  $-\infty$  und  $-\infty$  bis  $+i\infty$  bei und erhalten

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} z^{-a} (1-z)^{-b} dz = 2i\pi \cdot \frac{|(a+\overline{b}-1)|}{|\overline{a}| |\overline{b}|}. \quad (9)$$

Die Variable weicht dem Nullpunkt östlich aus. Jetzt substituieren wir  $z = \frac{v}{m}$ , wo recp.  $m > 0$  sein soll. Da das Integral im ganzen Horizont verschwindet, ergibt sich

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} v^{-a} (m-v)^{-b} dv = 2i\pi \cdot \frac{|(a+\overline{b}-1)|}{|\overline{a}| |\overline{b}| m^{a+b-1}}$$

$v = k + w$  gesetzt, wo  $0 < \text{recp. } k < \text{recp. } m$ .

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} (k+w)^{-a} (m-k-w)^{-b} dw = 2i\pi \cdot \frac{|(a+\overline{b}-1)|}{|\overline{a}| |\overline{b}| m^{a+b-1}}$$

$m - k = l$ , wo nun  $\text{recp. } l > 0$  ist.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (k+w)^{-a} (l-w)^{-b} dw = 2i\pi \frac{|(a+\overline{b}-1)|}{|\overline{a}| |\overline{b}| (k+l)^{a+b-1}}. \quad (10)$$

Der Integrationsweg liegt ganz in der imaginären Axe.  
Schliesslich werde  $w = i\mathfrak{z}$  substituiert

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathfrak{z}}{(k+i\mathfrak{z})^a (l-i\mathfrak{z})^b} = \frac{2\pi}{(k+l)^{a+b-1}} \frac{|(a+\overline{b}-1)|}{|\overline{a}| |\overline{b}|}. \quad (11)$$

$\text{recp. } a + b > 1$ .

Der Integrationsweg liegt ganz in der Realitätsgeraden.  
(Siehe MEYER, bestimmte Integrale, Seite 205).

Aus (11) erhält man sofort

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\mathfrak{z}}{(k+i\mathfrak{z})^a (l-i\mathfrak{z})^b} = \int \frac{d\mathfrak{z}}{(k+i\mathfrak{z})^a (l-i\mathfrak{z})^b} = \\ & \begin{array}{c} \leftarrow -\infty \quad \leftarrow -i\mathfrak{k} \quad \leftarrow -i\mathfrak{l} \quad \leftarrow -\infty \\ \text{(Diagram showing two paths in the complex plane, one above the real axis with poles at } -i\mathfrak{k} \text{ and } -i\mathfrak{l} \text{, and one below it.)} \end{array} \\ & = \frac{2\pi}{(k+l)^{a+b-1}} \frac{|(a+\overline{b}-1)|}{|\overline{a}| |\overline{b}|}, \quad \text{recp. } a + b > 1. \quad (12) \end{aligned}$$

Auf sehr einfache Weise kann die Richtigkeit der Beziehung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathfrak{z}}{(k+i\mathfrak{z})^a (l+i\mathfrak{z})^b} = 0, \quad \text{recp. } (a+b) > 1 \quad (13)$$

eingesehen werden.

Weil die reellen Componenten von  $k$  und  $l$  positiv sind, so liegen die beiden Pole des Integrals,  $i\mathfrak{k}$  und  $i\mathfrak{l}$ , nördlich des Weges. Wir fügen demselben die Südhälfte des Horizontes bei. Der Integrand ist innerhalb der abgegrenzten Fläche überall endlich und stetig, somit das Integral vom Werte Null.

Wir setzen in (11).



$b = a$  und  $l = k = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{(1 + \zeta^2)^a} = 2 \int_0^{\infty} \frac{d\zeta}{(1 + \zeta^2)^a} = 2\pi \cdot \frac{|\overline{2a-1}|}{(|\overline{a}|)^2 2^{2a-1}}$$

$\zeta^2 = x$  gesetzt.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{1/2-1}}{(1+x)^a} dx = 2\pi \cdot \frac{|\overline{2a-1}|}{(|\overline{a}|)^2 2^{2a-1}}. \quad (14)$$

Das letzte Integral aber ist ein Euler'sches. Es kann nach der Formel gelöst werden

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} dx = \frac{|\overline{a}| |\overline{b}|}{|\overline{a+b}|}$$

Somit ist

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{1/2-1}}{(1+x)^a} dx = 2\pi \cdot \frac{|\overline{2a-1}|}{(|\overline{a}|)^2 2^{2a-1}} = \frac{\left|\overline{\left(\frac{1}{2}\right)}\right| |\overline{a-1/2}|}{|\overline{a}|}$$

Substituiert man für  $2a-1 = b = a$  und berücksichtigt, dass  $\left|\overline{\left(\frac{1}{2}\right)}\right| = \sqrt{\pi}$  ist, so erhält man

$$\left|\overline{\left(\frac{1}{2}\right)}\right| \cdot |\overline{2a}| = 2^{2a-1} |\overline{a+1/2}| |\overline{a}|. \quad (15)$$

Dies ist der Satz über die Verdoppelung des Arguments der Gammafunktion.

Anschliessend an diese Cauchy'schen Integrale soll zum Schlusse noch das Dirichlet'sche Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\zeta\theta}}{(\zeta^2 + \zeta^3) \cdot (k + i\zeta)^a \cdot (k_1 + i\zeta)^{a_1} \cdot (k_2 + i\zeta)^{a_2} \dots} d\zeta$$

gelöst werden.

Es wird sich zeigen, dass die Lösung desselben ein ausserordentlich einfaches Problem ist.

Wir setzen voraus,  $c$  sei reell und positiv und  $l, k, k_1, k_2, \dots, a, a_1, a_2, \dots$  seien complexe Constanten, deren reelle Bestandteile positiv seien. Dann verschwindet das Integral längs des südlichen Horizontes.

Derselbe darf also dem geradlinigen Integrationsweg, der von  $-\infty$  bis  $+\infty$  geht, angefügt werden. Die Pole des Integrals sind  $\pm il, +ik, +ik_1, +ik_2 \dots +i\infty$ . Es liegt also nur ein einziger, nämlich  $-il$ , südlich des geradlinigen Weges  $-\infty$  bis  $+\infty$ , *d. h.* nur dieser wird durch die Integrationscurve eingeschlossen. Alle andern sind ausserhalb derselben. Der Pol  $-il$  ist kein Verzweigungspunkt. Die Variable  $\mathcal{S}$  kehrt also nach *einem* Umlauf um denselben auf ihren ursprünglichen Wert zurück. Somit kann das Integral nach der Cauchy'schen Formel ausgemittelt werden. Es ist

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ic\mathcal{S}}}{(l^2 + \mathcal{S}^2) \cdot (k + i\mathcal{S})^a \cdot (k_1 + i\mathcal{S})^{a_1} \cdot (k_2 + i\mathcal{S})^{a_2} \dots} d\mathcal{S} = \\ & = \int \frac{e^{-ic\mathcal{S}}}{(l^2 + \mathcal{S}^2) \cdot (k + i\mathcal{S})^a \cdot (k_1 + i\mathcal{S})^{a_1} \cdot (k_2 + i\mathcal{S})^{a_2} \dots} d\mathcal{S} = \\ & \quad \textcircled{-il} \\ & = \frac{\pi e^{-cl}}{l} \cdot \frac{1}{(k+l)^a (k_1+l)^{a_1} (k_2+l)^{a_2} \dots} \end{aligned} \quad (16)$$

Winterthur, April 1909.

# Sull'integrazione delle equazioni fondamentali dell'elettrodinamica.

[Di ANGELO TONOLO, a Casale sul Sile (Treviso).]

---

Scopo precipuo del presente lavoro, è quello di integrare il sistema delle equazioni indefinite di MAXWELL-HERTZ: più precisamente, di assegnare le espressioni delle forze elettromagnetiche nei punti interni di un dato campo  $S$ , nella ipotesi che siano dati per ogni istante di tempo i valori delle forze stesse al contorno  $\sigma$  del campo. È ciò, tanto nella ipotesi di un contorno fisso; quanto variabile col tempo. Per ottenere gli integrali dell'anzidetto sistema, mi sono servito, nel caso del contorno fisso, della formula di KIRCHHOFF relativa alla equazione canonica dei piccoli moti. Nel caso del contorno mobile, ho usato il metodo di integrazione sviluppato dal prof. TEDONE nella Nota: *Sulla dimostrazione della formula che rappresenta analiticamente il principio di Huyghens* (\*). Esso è in sostanza una estensione di un metodo d'integrazione dovuto al prof. VOLTERRA, esposto in ispecial modo nella Memoria: *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes* (\*\*).

Ho trattato dapprima il caso della superficie fissa (Cap. II), e ho dimostrato innanzitutto che, dalla conoscenza per qualsiasi istante di tempo delle forze elettromagnetiche in  $\sigma$ , segue quella della rispettiva derivata normale (Cap. II, § 1). Sono riuscito poi, mediante opportune trasformazioni, a presentare l'espressione definitiva degli integrali sotto forma notevolmente semplice (Cap. II, § 1).

L'estensione al caso di un contorno variabile col tempo, si compie senza forti difficoltà, e dà luogo a delle espressioni per le forze elettromagnetiche, non molto diverse da quelle ottenute nel caso del contorno fisso (Cap. III, § 5).

Di questi miei risultati ho fatto la verifica, dimostrando che essi soddi-

---

(\*) *Reale Accademia dei Lincei* (Vol. V, Serie 5.<sup>a</sup>, pag. 357-360).

(\*\*) *Acta mathematica* (Tom. XVIII).

sfano effettivamente le equazioni indefinite di MAXWELL-HERTZ (Cap. II, § 3; Cap. III, § 5).

Spero di poter mostrare prossimamente l'interesse delle dette formule, facendone applicazione a qualche quistione concreta. Qui mi sono limitato ad un unico esempio: quello dei campi elettromagnetici stazionari, per i quali le mie espressioni possono farsi rientrare in formole note (Cap. II, § 4).

Il problema che mi sono proposto, fu già risoluto, nel caso del contorno fisso, dal prof. LOVE nella Memoria: *The integrations of the equations of propagation of electric waves* (\*), mediante introduzione di tre sistemi ausiliari di soluzioni delle equazioni indefinite dotate di singolarità caratteristiche. Però le formole finali di questo autore sono assai complicate: a me pare di avere raggiunto un perfezionamento, così concettuale, come formale. Spero quindi di non meritare biasimo, se sono tornato sopra un argomento, che già era stato svolto dal prof. LOVE, e illustrato con interpretazioni del più alto interesse.

## CAPITOLO I.

### Considerazioni preliminari.

Sia  $S_1$  un mezzo non polarizzabile, indefinito, omogeneo, isotropo, in riposo, in cui avvengono fenomeni elettrodinamici. Rappresentino:  $A = \frac{1}{C}$  la inversa della velocità della luce in tale mezzo;  $t$  il tempo;  $x, y, z$ , le coordinate Cartesiane ortogonali dei punti di  $S_1$ ;  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  rispettivamente la forza elettrica e magnetica corrispondenti a ciascun punto del mezzo; e finalmente  $S$  una parte del campo  $S_1$ , priva di sorgenti di elettricità, non percorsa da correnti elettriche, e limitata da una superficie chiusa  $\sigma$ , fissa, oppure variabile col tempo. A questo campo  $S$  si riferiranno costantemente le ricerche che mi accingo ad esporre.

Premetto innanzitutto il significato di alcuni simboli che, in seguito, verranno frequentemente adoperati, e richiamo alcune formole delle quali avrò bisogno di servirmi.

---

(\*) *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* (Vol. 197, 1901, pag. 1-45).

Siano:  $F(x, y, z, t)$  una funzione regolare (\*) di  $x, y, z, t$ , in un certo campo;  $x_1, y_1, z_1, t_1$ , quattro valori rispettivamente fissati per detti argomenti;  $z = z(x, y)$  una funzione regolare di  $x$  e di  $y$ . Si ponga:

$$r = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}; \quad t = t_1 - Ar.$$

Ciò posto, col simbolo  $\frac{dF}{du}$  ( $u = x, y$ ) intendo la derivata di  $F$  rispetto ad  $u$ , quando si pensa che questa variabile comparisce esplicitamente, nonchè in  $z$  e in  $t$ , (derivata totale). Col simbolo  $\frac{DF}{Du}$  ( $u = x, y, z$ ) intendo la derivata di  $F$  rispetto ad  $u$ , quando si pensa che questa variabile comparisce esplicitamente, nonchè in  $t$  (pel tramite di  $r$ ). Finalmente col simbolo  $\frac{\partial F}{\partial u}$  ( $u = x, y, z, t$ ) intendo la derivata nel senso ordinario (derivata parziale).

*La formula di Kirchhoff.* — Una superficie  $\sigma$  chiusa, fissa nello spazio, limiti un campo  $S$ . Denotino:  $n$  la direzione della normale che entra nello spazio  $S$ ;  $r$  la distanza di un punto qualunque del contorno, da un punto  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  interno, prefissato, ma qualunque;  $U = U(x, y, z, t)$  una funzione regolare negli argomenti, che soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - C^2 \Delta U = 0.$$

Sia  $t_1$  un istante fissato, e si convenga che il simbolo  $\left(\frac{dU}{dn}\right)_{t=t_1-Ar}$  rappresenti la funzione che si ottiene sostituendo, a derivazione normale eseguita,  $t_1 - Ar$  a  $t$ . Allora il valore che detta funzione assume nel punto  $P_1$  e nell'istante  $t_1$ , è dato dalla seguente formula dovuta a KIRCHHOFF (\*\*):

$$4\pi U(x_1, y_1, z_1, t_1) = - \int_{\sigma} \left[ \frac{1}{r} \left(\frac{dU}{dn}\right)_{t=t_1-Ar} - U(x, y, z, t_1 - Ar) \frac{d}{dn} \frac{1}{r} + \frac{A}{r} \frac{\partial U(x, y, z, t_1 - Ar)}{\partial t_1} \frac{dr}{dn} \right] d\sigma.$$

(\*) Per funzioni regolari intendo funzioni monodrome, finite, continue, (o almeno atte alla integrazione), assieme alle derivate che ho bisogno di considerare.

(\*\*) KIRCHHOFF, *Vorles über math. Physik* (Band II, pag. 22-30). — VOLTERRA, *Sul principio di Huyghens* «Nuovo Cimento» (Serie III, Tomo XXXI, Anno 1892). — TEDONE, *Reale Accademia dei Lincei* (Vol. V, Serie 5.<sup>a</sup>, pag. 357-360). — BURGATTI, *Sulla formula di Kirchhoff e sue estensioni* «Nuovo Cimento» (Serie V, Tomo XIV, Anno 1907).

*Le equazioni di Maxwell-Hertz.* — In ogni punto di  $S$ , le componenti delle forze elettromagnetiche sono legate dalle seguenti equazioni di MAXWELL-HERTZ (\*):

$$A \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{E}, \quad A \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{H},$$

$$\text{Div } \mathbf{H} = 0, \quad \text{Div } \mathbf{E} = 0.$$

Da queste, come è noto, si possono con facilità far discendere le altre (\*\*):

$$(E_n) \quad \square E_n = 0,$$

$$(H_n) \quad \square H_n = 0;$$

nelle quali  $E_n$ ,  $H_n$ , denotano rispettivamente la componente della forza elettrica e magnetica secondo l'asse delle  $n$  (indicando con questa lettera uno qualunque degli assi coordinati).

Ciò premesso, mi avvio alla risoluzione del problema che mi occupa, nella ipotesi della superficie fissa.

## CAPITOLO II.

### Superficie fissa.

#### § 1. ENUNCIATO DEL PROBLEMA, E SUA RISOLUZIONE.

Indichi  $\sigma$  il contorno chiuso, fisso, che limita il campo elettromagnetico  $S$ . Siano date le componenti della forza elettrica e magnetica, per qualsiasi istante di tempo, e su ogni punto di  $\sigma$ , in modo da soddisfare quelle relazioni (in numero di due) che sono necessaria conseguenza delle equazioni

---

(\*) Le notazioni vettoriali che qui si trovano, sono quelle proposte dai sigg. BURALFORTI e MARCOLONGO. (Cfr. *Rend. del Circolo Matematico di Palermo*. Tom. XXIII e XXIV.)

(\*\*) Il simbolo  $\square$  definisce l'operazione  $A^2 \frac{\partial}{\partial t^2} \Delta$ , ove  $\Delta$  è l'operatore di LAPLACE.

di MAXWELL-HERTZ (\*). Mi propongo il problema della determinazione univoca di dette componenti in qualunque istante nei punti interni a  $\sigma$ .

*Espressione della derivata normale di  $E_x$  (\*\*).* — Innanzitutto dimostro che, nelle ipotesi ora enunciate, il valore della derivata normale delle componenti delle forze elettromagnetiche risulta di conseguenza. A tale scopo sia:

$$f(x, y, z) = 0$$

l'equazione di  $\sigma$ : ne prendo un pezzo per il quale valga la rappresentazione:

$$z = z(x, y);$$

e pongo con MONGE:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Osservo che, su questo pezzo di  $\sigma$ ,  $E_u(x, y, z, t_1 - Ar)$  diviene la funzione  $E_u(x, y, z(x, y), t_1 - Ar)$ , la quale, per le ipotesi ammesse, è conosciuta. Considero perciò il sistema:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d E_x}{d x} + A \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} p, & (1) \\ \frac{d E_x}{d y} + A \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_x}{\partial z} q, & (2) \\ \frac{d E_y}{d x} + A \frac{\partial E_y}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial z} p, & (3) \\ \frac{d E_y}{d y} + A \frac{\partial E_y}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z} q. & (4) \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

(\*) Che questa ipotesi sia necessaria risulta dalle considerazioni seguenti: Sia  $P$  un punto di  $\sigma$ : si assuma l'asse delle  $z$  nella direzione della normale in  $P$  a  $\sigma$ , con che la direzione degli altri due assi risulta ovviamente fissata. Fra le otto equazioni indefinite di MAXWELL-HERTZ, soltanto le due:

$$A \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}; \quad A \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x},$$

involgono derivate tangenziali: e perciò esse devono essere identicamente soddisfatte dai dati in superficie.

(\*\*) In ciò che segue mi riferisco costantemente alla forza elettrica; facilmente si vedrà come le considerazioni che svolgerò, siano senz'altro applicabili alla forza magnetica.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE_z}{dx} + A \frac{\partial E_z}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} p, & (5) \\ \frac{dE_z}{dy} + A \frac{\partial E_z}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} q, & (6) \\ A \frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, & (7) \\ A \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, & (8) \\ A \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}. & (9) \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

In esso, le prime sei equazioni discendono dalla regola di derivazione delle funzioni composte: le rimanenti sono tre delle otto ricordate equazioni indefinite di MAXWELL-HERTZ. Sottraendo la (2) dalla (3), tenendo presente la (9) ho:

$$\frac{dE_y}{dx} - \frac{dE_x}{dy} + A \frac{\partial E_y}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} - A \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} - A \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} p - \frac{\partial E_x}{\partial z} q. \quad (10)$$

Sommando la (1) con la (4) ricordando che:

$$\text{Div } \mathbf{E} = 0,$$

si trae:

$$\frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + A \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} + A \frac{\partial E_y}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{\partial E_x}{\partial z} p + \frac{\partial E_y}{\partial z} q. \quad (11)$$

Poichè dalle (5) e (8) scende l'equazione:

$$A \frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{dE_z}{dx} + A \frac{\partial E_z}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial z} p,$$

si ha, in virtù della (11), che:

$$\begin{aligned} \left( \frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} \right) p + A p \left( \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} \right) + A \frac{\partial E_z}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} + A \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_x}{\partial z} p^2 + \frac{\partial E_y}{\partial z} p q; \end{aligned}$$



d'onde per la (10):

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} = & \frac{1}{1+p^2+q^2} \left[ \left( \frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + A \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} + A \frac{\partial E_y}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} \right) p + \right. \\ & + \left( \frac{dE_x}{dy} - \frac{dE_y}{dx} + A \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} - A \frac{\partial E_y}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} \right) q + \\ & \left. + \left( \frac{dE_z}{dx} + A \frac{\partial E_z}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} + A \left( \frac{\partial H_y}{\partial t} + q \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Quindi per le (1) e (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial y} = & \frac{dE_x}{dy} + A \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{q}{1+p^2+q^2} \left[ \left( \frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + A \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} + A \frac{\partial E_y}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} \right) p + \right. \\ & + \left( \frac{dE_x}{dy} - \frac{dE_y}{dx} + A \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} - A \frac{\partial E_y}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} \right) q + \\ & \left. + \left( \frac{dE_z}{dx} + A \frac{\partial E_z}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} + A \left( \frac{\partial H_y}{\partial t} + q \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} = & \frac{dE_x}{dx} + A \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{p}{1+p^2+q^2} \left[ \left( \frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + A \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} + A \frac{\partial E_y}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} \right) p + \right. \\ & + \left( \frac{dE_x}{dy} - \frac{dE_y}{dx} + A \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} - A \frac{\partial E_y}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} \right) q \\ & \left. + \left( \frac{dE_z}{dx} + A \frac{\partial E_z}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} + A \left( \frac{\partial H_y}{\partial t} + q \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Se ora si indicano con  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , i coseni direttori della normale, volta verso l'interno dello spazio  $S$ , e si eseguono alcune semplici trasformazioni, si trova (\*):

$$\begin{aligned} \frac{dE_x}{dn} = & \beta \left( \frac{dE_x}{dx} + A \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} \right) - \alpha \left( \frac{dE_y}{dy} + A \frac{\partial E_y}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} \right) + \\ & + \gamma \left( \frac{dE_z}{dx} + A \frac{\partial E_z}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} \right) + A \left( \gamma \frac{\partial H_y}{\partial t} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

(\*) Si assume  $\alpha = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ ;  $\beta = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ ;  $\gamma = -\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ .

Questa espressione per  $\frac{d E_x}{d n}$ , assieme alle altre due per  $\frac{d E_u}{d n}$  ( $u = y, z$ ) dimostra quanto ho asserito in principio di questo paragrafo. Si badi però, (ciò che del resto è evidente), che nelle derivate parziali che compariscono in essa espressione si deve porre,  $t = t_1 - A r$ .

Per ragioni che scaturiranno in seguito, è opportuno trasformare l'espressione (II) ora ottenuta per la  $\frac{d E_x}{d n}$ . In virtù delle equazioni (3), (4), (5) del sistema (I), la (II) può anche scriversi così:

$$\begin{aligned} \frac{d E_x}{d n} = & \beta \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial z} p \right) - \alpha \left( \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z} q \right) + \gamma \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} p \right) + \\ & + A \frac{\partial}{\partial t} (H_y \gamma - H_z \alpha) = \left( \beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial E_y}{\partial z} (\beta p - \alpha q) + \\ & + \gamma \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} p \right) + A \frac{\partial}{\partial t} (H_y \gamma - H_z \beta). \end{aligned}$$

Ovvero per la nota della pagina precedente:

$$\frac{d E_x}{d n} = \left( \beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) + \left( \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + A \frac{\partial}{\partial t} (H_y \gamma - H_z \beta). \quad (\text{III})$$

Ora si osservi che l'espressione (II) di  $\frac{d E_x}{d n}$  è stata ricavata in base alla ipotesi che si tratti di un pezzo di superficie  $\sigma$ , per il quale valga la rappresentazione:

$$z = z(x, y).$$

Importa stabilire che l'espressione sussiste in ogni caso. All'uopo si osservi che sarà lecito risolvere rispetto a  $z$  la:

$$f(x, y, z) = 0,$$

ogni qualvolta:

$$\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0,$$

ogni qualvolta cioè le normali ai punti del pezzo di contorno considerato, non siano parallele al piano  $xy$ . Può darsi però, che per qualche pezzo di  $\sigma$ , questo fatto non si verifichi; allora non è più lecito porre la sua equazione

sotto l'aspetto anzidetto. In tale contingenza però la :

$$f(x, y, z) = 0,$$

sarà certamente risolubile rispetto ad una delle altre due variabili:  $x$  ed  $y$ . Se questa è la  $y$ , siccome le equazioni cui soddisfa  $E_x$ , hanno comportamento perfettamente simmetrico rispetto ad  $y$  e rispetto a  $z$ , basta evidentemente un materiale scambio di notazione per ritrovare la (II). Se questa è la  $x$ , basterà invece osservare che l'espressione di  $\frac{dE_x}{dn}$ , deve far riscontro alla (III), che era valida nella ipotesi della risolubilità rapporto a  $z$ . Per far vedere ciò, basta considerare un sistema di equazioni, analogo al sistema (I), dedotto dalla ipotesi che sia :

$$x = x(y, z),$$

ed eseguire un procedimento di calcolo simile a quello precedentemente usato.

*Espressione di  $E_x$ , e delle altre componenti delle forze elettromagnetiche.* — Applicando la formula di KIRCHHOFF alla equazione ( $E_u$ ) del Cap. I ove si faccia  $u = x$ , tenendo conto della espressione (III) per  $\frac{dE_x}{dn}$ , si trae :

$$4\pi E_x(x_1, y_1, z_1, t_1) = - \\ - \int_{\sigma} \left[ \frac{1}{r} \left( \beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) + \left( \gamma \frac{\partial E_x}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + A \frac{\partial}{\partial t_1} (H_y \gamma - H_z \beta) \right] - \\ - E_x \frac{d}{dn} \frac{1}{r} + \frac{A}{r} \frac{\partial E_x}{\partial t_1} \frac{dr}{dn} \Big] d\sigma.$$

Si osservi che, nelle derivate parziali rispetto a  $x, y, z$ , che compariscono sotto il segno  $\int$ , si deve pensare posto,  $t = t_1 - Ar$ . Inoltre si è scritto  $E_x$  invece di  $E_x(x, y, z, t_1 - Ar)$ : le derivate parziali rispetto a  $t_1$ , hanno poi ovvio significato.

Ora trasformerò la espressione di  $E_x(x_1, y_1, z_1, t_1)$  in modo che in essa figurino le componenti di  $\mathbf{E}$  secondo determinate direzioni.

A tale scopo pongo:

$$I = - \int_{\sigma} \frac{1}{r} \left\{ \beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right\} + \left\{ \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_z}{\partial z} \right\} d\sigma.$$

$$I_1 = - \int_{\sigma} \frac{1}{r} \left\{ \beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right\} d\sigma.$$

$$I_2 = - \int_{\sigma} \frac{1}{r} \left\{ \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_z}{\partial z} \right\} d\sigma.$$

Denoto con  $S'$  lo spazio contenuto in  $S$ , limitato da  $\sigma$  e dalla superficie sferica  $\sigma_0$ , avente il centro nel punto di coordinate  $x_1, y_1, z_1$  e un raggio conveniente, che indico ancora con  $r$ . L'integrale  $I_1$  si può allora scrivere così:

$$I_1 = - \int_{\sigma + \sigma_0} \frac{1}{r} \left\{ \beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right\} d\sigma + \int_{\sigma_0} \frac{1}{r} \left\{ \beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right\} d\sigma_0.$$

Si ha poi, ricordando il significato dei simboli spiegato nel Cap. I:

$$\frac{D}{Dx} \frac{E_y}{r} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{E_y}{r} - A \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial E_y}{\partial t_1};$$

d'onde moltiplicando per  $\beta$ , e integrando a tutto il contorno  $\sigma + \sigma_0$ :

$$\int_{\sigma + \sigma_0} \beta \frac{D}{Dx} \frac{E_y}{r} d\sigma = \int_{\sigma + \sigma_0} \beta \frac{\partial}{\partial x} \frac{E_y}{r} d\sigma - A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma + \sigma_0} E_y \beta \frac{\partial r}{\partial x} d\sigma.$$

Analogamente:

$$\int_{\sigma + \sigma_0} \alpha \frac{D}{Dy} \frac{E_y}{r} d\sigma = \int_{\sigma + \sigma_0} \alpha \frac{\partial}{\partial y} \frac{E_y}{r} d\sigma - A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma + \sigma_0} E_y \alpha \frac{\partial r}{\partial y} d\sigma.$$

Ma per il lemma di GREEN:

$$\int_{\sigma + \sigma_0} \beta \frac{D}{Dx} \frac{E_y}{r} d\sigma = - \int_{S'} \frac{\partial}{\partial y} \frac{D}{Dx} \frac{E_y}{r} dS';$$

$$\int_{\sigma + \sigma_0} \alpha \frac{D}{Dy} \frac{E_y}{r} d\sigma = - \int_{S'} \frac{\partial}{\partial x} \frac{D}{Dy} \frac{E_y}{r} dS';$$

dalle quali si trae:

$$\int_{\sigma+\sigma_0} \beta \frac{D E_y}{D x} d\sigma - \int_{\sigma+\sigma_0} \alpha \frac{D E_y}{D y} d\sigma = 0.$$

Quindi:

$$\int_{\sigma+\sigma_0} \frac{1}{r} \left\{ \beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right\} d\sigma = \int_{\sigma+\sigma_0} E_y \left( \alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) d\sigma -$$

$$- A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma+\sigma_0} E_y \left( \alpha \frac{\partial r}{\partial y} - \beta \frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{d\sigma}{r}.$$

Risulta perciò:

$$I_1 = - \int_{\sigma} E_y \left( \alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) d\sigma + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} E_y \left( \alpha \frac{\partial r}{\partial y} - \beta \frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{d\sigma}{r} -$$

$$- \int_{\sigma_0} E_y \left( \alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) d\sigma_0 + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma_0} E_y \left( \alpha \frac{\partial r}{\partial y} - \beta \frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{d\sigma_0}{r} +$$

$$+ \int_{\sigma_0} \frac{1}{r} \left\{ \beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right\} d\sigma_0.$$

Si osservi che:

$$\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{1}{r^2} \left( \beta \frac{\partial r}{\partial x} - \alpha \frac{\partial r}{\partial y} \right),$$

la quale espressione è identicamente nulla sulla superficie sferica  $\sigma_0$ . Ne consegue:

$$\int_{\sigma_0} E_y \left( \alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) d\sigma_0 = 0$$

$$A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma_0} E_y \left( \alpha \frac{\partial r}{\partial y} - \beta \frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{d\sigma_0}{r} = 0.$$

Dacchè in coordinate sferiche  $r, \vartheta, \varphi$ , si ha:

$$d\sigma_0 = r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi,$$

è chiaro che:

$$\int_{\sigma_0} \left\{ \frac{1}{r} \right\} \left\{ \beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right\} d\sigma_0$$

converge a zero assieme ad  $r$ . Risulta quindi, col tendere di  $r$  a zero:

$$I_1 = - \int_{\sigma} E_y \left( \alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) d\sigma + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} E_y \left( \alpha \frac{\partial r}{\partial y} - \beta \frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{d\sigma}{r}.$$

In modo del tutto analogo si trae:

$$I_2 = - \int_{\sigma} E_z \left( \alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) d\sigma + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} E_z \left( \alpha \frac{\partial r}{\partial z} - \gamma \frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{d\sigma}{r}.$$

Si ha perciò, in virtù degli integrali  $I_1$  e  $I_2$  ora ottenuti:

$$\begin{aligned} I &= - \int_{\sigma} \left[ E_y \left( \alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) + E_z \left( \alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) \right] d\sigma + \\ &+ A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} \left[ E_y \left( \alpha \frac{\partial r}{\partial y} - \beta \frac{\partial r}{\partial x} \right) + E_z \left( \alpha \frac{\partial r}{\partial z} - \gamma \frac{\partial r}{\partial x} \right) \right] \frac{d\sigma}{r} = \\ &= \int_{\sigma} \left[ \left\{ E_x \alpha + E_y \beta - E_z \gamma \right\} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \left\{ E_x \frac{\partial r}{\partial x} + E_y \frac{\partial r}{\partial y} + E_z \frac{\partial r}{\partial z} \right\} \alpha \right] d\sigma + \\ &+ A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} \left[ \left\{ E_x \frac{\partial r}{\partial x} + E_y \frac{\partial r}{\partial y} + E_z \frac{\partial r}{\partial z} \right\} \alpha - \left\{ E_x \alpha + E_y \beta + E_z \gamma \right\} \frac{\partial r}{\partial x} \right] \frac{d\sigma}{r}. \end{aligned}$$

la quale espressione, denotando con  $E_r$  e con  $E_n$  rispettivamente la componente di  $\mathbf{E}$  secondo il raggio  $r$  e secondo la normale  $n$  al contorno  $\sigma$  volta verso l'interno di  $S$ , si trasforma nell'altra:

$$I = \int_{\sigma} (E_r \cos n x - E_n \cos r x) \frac{d\sigma}{r^2} + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (E_r \cos n x - E_n \cos r x) \frac{d\sigma}{r}.$$

La espressione per  $E_x(x_1, y_1, z_1, t_1)$  trovata precedentemente, può perciò essere scritta così:

$$\begin{aligned} 4 \pi E_x(x_1, y_1, z_1, t_1) = & \int_{\sigma} (E_r \cos n x - E_n \cos r x - E_x \cos r n) \frac{d \sigma}{r^2} + \\ & + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (E_r \cos n x - E_n \cos r x - E_x \cos r n) \frac{d \sigma}{r} + \\ & + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (H_z \cos n y - H_y \cos n z) \frac{d \sigma}{r}. \end{aligned}$$

Per le altre due componenti di  $\mathbf{E}$  si avranno le espressioni:

$$\begin{aligned} 4 \pi E_y(x_1, y_1, z_1, t_1) = & \int_{\sigma} (E_r \cos n y - E_n \cos r y - E_y \cos r n) \frac{d \sigma}{r^2} + \\ & + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (E_r \cos n y - E_n \cos r y - E_y \cos r n) \frac{d \sigma}{r} + \\ & + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (H_x \cos n z - H_z \cos n x) \frac{d \sigma}{r}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \pi E_z(x_1, y_1, z_1, t_1) = & \int_{\sigma} (E_r \cos n z - E_n \cos r z - E_z \cos r n) \frac{d \sigma}{r^2} + \\ & + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (E_r \cos n z - E_n \cos r z - E_z \cos r n) \frac{d \sigma}{r} + \\ & + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (H_y \cos n x - H_x \cos n y) \frac{d \sigma}{r}. \end{aligned}$$

Per trovare le formule che danno le componenti di  $\mathbf{H}$  basta osservare che il sistema di equazioni (I) è identico, nella forma, a quello che si dovrebbe considerare per determinare le componenti della forza magnetica, a meno del cambiamento di segno di  $A$  in  $-A$ , nelle ultime tre equazioni. Si avrà perciò:

$$\begin{aligned} 4 \pi H_x(x_1, y_1, z_1, t_1) = & \int_{\sigma} (H_r \cos n x - H_n \cos r x - H_x \cos r n) \frac{d \sigma}{r^2} + \\ & + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (H_r \cos n x - H_n \cos r x - H_x \cos r n) \frac{d \sigma}{r} - \\ & - A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (E_z \cos n y - E_y \cos n z) \frac{d \sigma}{r}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4\pi H_y(x_1, y_1, z_1, t_1) &= \int_{\sigma} (H_x \cos ny - H_n \cos ry - H_y \cos rn) \frac{d\sigma}{r^2} + \\
&+ A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (H_r \cos ny - H_n \cos ry - H_y \cos rn) \frac{d\sigma}{r} - \\
&- A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (E_r \cos nz - E_z \cos nx) \frac{d\sigma}{r}. \\
4\pi H_z(x_1, y_1, z_1, t_1) &= \int_{\sigma} (H_r \cos nz - H_n \cos rz - H_z \cos rn) \frac{d\sigma}{r^2} + \\
&+ A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (H_r \cos nz - H_n \cos rz - H_z \cos rn) \frac{d\sigma}{r} - \\
&- A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (E_y \cos nx - E_x \cos ny) \frac{d\sigma}{r}.
\end{aligned}$$

È quasi superfluo avvertire che si è scritto  $E_n$ ,  $H_n$ , in luogo di  $E_n(x, y, z, t_1 - Ar)$ ,  $H_n(x, y, z, t_1 - Ar)$ . ( $n = x, y, z, r, n$ ).

## § 2. OSSERVAZIONI SULL'INTEGRAZIONE DELL'EQUAZIONE $\square E_u = 0$ .

Se  $E_u$  soddisfa in  $S$  l'equazione differenziale:

$$\square E_u = 0, \quad (1)$$

e se sono conosciuti sul contorno  $\sigma$  che limita  $S$ , per qualsiasi istante di tempo i suoi valori, e quelli della sua derivata normale, la formula di KIRCHHOFF applicata alla (1) dà il valore della funzione  $E_u$  in un punto interno  $P_1$ , generico, ma prefissato, in qualunque istante di tempo. E tale valore, col tendere del punto  $P_1$  ad un punto generico  $P$  del contorno, tende al valore che in detto punto viene assunto da  $E_u$ . Ciò accade pure per la sua derivata di direzione.

Si supponga ora che siano dati arbitrariamente, per qualsiasi istante di tempo, sul contorno  $\sigma$  i valori di  $E_u$ , e della sua derivata normale. In tale contingenza sorgono le domande:



a) L'espressione data dalla applicazione della formula di KIRCHHOFF alla (1), rappresenta una funzione che in  $S$  soddisfa detta equazione?

b) Quando il punto  $P_1$  tende a  $P$ , i valori di  $E_u$  e della sua derivata di direzione, tendono rispettivamente ai valori che per  $E_u$  e per  $\frac{d E_u}{d n}$ , vennero assegnati in  $P$ ?

La prima domanda ammette risposta affermativa, come è facile vedere eseguendo delle ovvie derivazioni sulla espressione di cui è parola.

Per renderci conto della domanda (b), si consideri ciò che avviene nel caso statico, cioè quando le forze non variano col tempo. In tale circostanza la componente  $E_u$  soddisfa in  $S$  l'equazione di LAPLACE:

$$\Delta E_u = 0.$$

Ora è noto che, se si dànno arbitrariamente sul contorno  $\sigma$  i valori di  $E_u$ , oppure quelli della  $\frac{d E_u}{d n}$ , si può determinare in  $S$  rispettivamente in modo univoco, o a meno di una costante arbitraria, una funzione armonica che ottempera alle condizioni al contorno. Ne consegue, che le due successioni di valori in superficie non possono assegnarsi ad arbitrio, ma che anzi una è necessaria conseguenza dell'altra. Ciò lascia presumere che, nel caso delle forze variabili col tempo, la domanda (b) non ammetta, in generale, risposta affermativa.

Si deve però osservare, che ciò accade quando si vuole l'integrale della (1) regolare in tutto  $S$ . Il fatto (b) si verifica (il fatto (a) si verifica pure) invece, quando si esige la soluzione della (1) in una regione assai ristretta dello spazio, (*soluzione locale*, secondo HADAMARD) la quale però non ha importanza per il problema fisico di cui mi occupo.

Dimostrò infatti il sig. HADAMARD che, se si considera la funzione data dalla applicazione della formula di KIRCHHOFF alla equazione (1) in una piccola striscia di spazio avente per sezione mediana (mi si permetta la parola) la superficie stessa, in essa regione la funzione ottempera anche alla condizione (b).

Del resto, se i dati in superficie sono olomorfi, il teorema di CAUCHY-KOWALESKA, assicura in detta striscia l'esistenza, l'unicità, e la analiticità di una soluzione della equazione (1), che soddisfa le condizioni al contorno.

Queste soluzioni locali esistono sempre, quando la varietà che porta i dati è una superficie fissa. Invero le considerazioni del sig. HADAMARD, e il

teorema di CAUCHY-KOWALESKA, perdono la loro validità soltanto quando i dati del problema sono sopra una « varietà caratteristica. » Ora, seguendo la definizione di BEUDON e HADAMARD (\*), si trova subito che, nel nostro caso, le varietà caratteristiche:

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

sono integrali della equazione:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 - \left(A \frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 = 0.$$

Se ne deduce, in particolare, che nessuna superficie fissa può essere caratteristica.

### § 3. GLI OTTENUTI INTEGRALI SODDISFANO IL SISTEMA DI EQUAZIONI DI MAXWELL-HERTZ.

Nelle ipotesi che  $E_u$  e  $H_u$  soddisfino le equazioni ( $E_u$ ) ed ( $H_u$ ) del Capitolo I, e che siano dati al contorno  $\sigma$  che limita  $S$  per qualsiasi istante di tempo i loro valori, in modo, che siano rispettate le condizioni imposte dall'enunciato del problema che mi sono proposto di risolvere, le espressioni che ho trovato per queste funzioni nel § 1, fanno conoscere i valori che dette funzioni assumono nei punti di  $S$ , in qualsiasi istante di tempo. Ma non si può dire che esse espressioni soddisfino le equazioni di MAXWELL-HERTZ, perchè se le equazioni ( $E_u$ ) ed ( $H_u$ ) ne sono necessaria conseguenza, non sussiste però la reciproca.

Dimostrerò ora che, nelle ipotesi ammesse nell'enunciato del problema, gli integrali  $E_u$  e  $H_u$  prima ottenuti, soddisfano pure il sistema di MAXWELL-HERTZ.

A tale uopo si consideri, ad esempio, la funzione:

$$f = A \frac{\partial H_y}{\partial t} - \frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial x},$$

---

(\*) BEUDON, *Sur les caractéristiques des équations aux dérivées partielles* (Bulletin de la Société mathématique de France. Tom. 25, 1908. — HADAMARD, *Lçons sur la propagation des ondes, etc.* (Hermann, Paris, 1903, p. 263-271).

la quale è identicamente nulla per qualsiasi istante di tempo, quando il punto  $x, y, z$ , è situato sul contorno. Ora io dimostrerò che la derivata normale di  $f$  è pure zero. Con ciò l'annullarsi di  $f$  anche nei punti appartenenti ad  $S$ , discenderà dalla formula di KIRCHHOFF, che è effettivamente applicabile, perchè anche  $f$  soddisfa la equazione canonica dei piccoli moti. Per semplificare i calcoli, procedo nel modo seguente.

Fissato un punto generico  $P$  di  $\sigma$ , si assuma l'asse delle  $z$  nella direzione della normale  $n$  in  $P$  a  $\sigma$ ; con chè la direzione degli altri due assi risulta ovviamente fissata. Dalla precedente espressione di  $f$  si trae allora:

$$\frac{df}{dn} = A \frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial z}.$$

Poichè per qualsiasi punto di  $S$ :

$$\square E_x = 0,$$

e in qualsiasi punto di  $\sigma$ :

$$\text{Div } \mathbf{E} = 0;$$

sarà ancora:

$$\frac{df}{dn} = A \frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) - A^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}.$$

Ma, essendo per qualsiasi istante di tempo, sopra  $\sigma$ :

$$A \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y},$$

si avrà:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dn} &= A \frac{\partial^2 H_z}{\partial t \partial y} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left( A \frac{\partial H_z}{\partial t} - \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \equiv 0. \quad \text{c. d. d.} \end{aligned}$$

## § 4. CASO DEI CAMPI ELETTROMAGNETICI STAZIONARI.

*Un corollario del lemma di Stokes.* — Conservando le notazioni precedenti, sia  $V$  una generica funzione regolare dei punti del contorno chiuso  $\sigma$ . Applicando il lemma di STOKES alle funzioni:

$$0; \quad V \frac{\partial}{\partial z_1}; \quad -V \frac{\partial}{\partial y_1};$$

si trae:

$$\int_{\sigma} \left[ - \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( V \frac{\partial}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( V \frac{\partial}{\partial z_1} \right) \right\} \alpha + \frac{\partial}{\partial x} \left( V \frac{\partial}{\partial y_1} \right) \beta + \frac{\partial}{\partial x} \left( V \frac{\partial}{\partial z_1} \right) \gamma \right] d\sigma = 0.$$

Esplicitando le derivate ed osservando che:

$$\frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y} \frac{1}{r} = - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \frac{1}{r}; \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y_1} \frac{1}{r} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y} \frac{1}{r}, \quad \text{ecc.}$$

si ricava:

$$\int_{\sigma} \left[ V \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \frac{1}{r} \right\} \alpha - \left\{ \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{r} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{r} \right\} \alpha + \left\{ V \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y} \frac{1}{r} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{r} \right\} \beta + \right. \\ \left. + \left\{ V \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial z} \frac{1}{r} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{r} \right\} \gamma \right] d\sigma = 0.$$

Poichè nel nostro caso:

$$\frac{\Delta}{2} \frac{1}{r} = 0;$$

si avrà:

$$\int_{\sigma} \left[ V \left\{ - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{1}{r} \alpha + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y} \frac{1}{r} \beta + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial z} \frac{1}{r} \gamma \right\} + \frac{\partial V}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} \alpha + \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{r} \beta + \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{r} \gamma \right\} - \right. \\ \left. - \left\{ \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{r} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{r} \right\} \alpha \right] d\sigma = 0.$$

Se poi si osserva che :

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial u_1^2} = -\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial u^2} (u = x, y, z); \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1 \partial n} = -\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1^2} \alpha + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1 \partial y} \beta + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1 \partial z} \gamma,$$

si trae la formola che contiene il corollario del lemma anzidetto :

$$\int_{\sigma} V \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1 \partial n} d\sigma = \int_{\sigma} \left( \frac{dV}{dr} \cos nx - \frac{\partial V}{\partial x} \cos rn \right) \frac{d\sigma}{r^2}.$$

Analogamente si trae :

$$\int_{\sigma} V \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial u_1 \partial n} d\sigma = \int_{\sigma} \left( \frac{dV}{dr} \cos nu_1 - \frac{\partial V}{\partial u_1} \cos rn \right) \frac{d\sigma}{r^2} \quad (u_1 = y_1, z_1).$$

Ciò premesso, si osservi che le espressioni di  $E_u$  e di  $H_u$  trovate nel § 1, nel caso dei campi elettromagnetici stazionari, si riducono alle seguenti :

$$4\pi E_u(x_1, y_1, z_1) = \int_{\sigma} \left[ E_r \cos nu - E_n \cos ru - E_n \cos rn \right] \frac{d\sigma}{r^2}. \quad (1)$$

( $u = x, y, z$ )

$$4\pi H_u(x_1, y_1, z_1) = \int_{\sigma} \left[ H_r \cos nu - H_n \cos ru - H_n \cos rn \right] \frac{d\sigma}{r^2}. \quad (2)$$

In virtù delle equazioni indefinite di MAXWELL-HERTZ, le forze  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$  derivano da potenziali armonici. Dimostrerò ora, considerando, per esempio, la forza elettrica, che le formole (1) sono sostanzialmente identiche a quelle che si otterrebbero, derivando la classica formola di GREEN :

$$4\pi V(x_1, y_1, z_1) = - \int_{\sigma} \left[ \frac{1}{r} \frac{dV}{dn} - V \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right] d\sigma,$$

relativa al potenziale  $V$  di detta forza.

Si ha infatti, derivando rispetto ad  $u_1 : (u_1 = x_1, y_1, z_1)$

$$4 \pi \frac{\partial V(x_1, y_1, z_1)}{\partial u_1} = - \int_{\sigma} \left[ E_n \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{1}{r} - V \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial n} \frac{1}{r} \right] d \sigma;$$

ovvero, per il lemma ora trovato :

$$4 \pi \frac{\partial V(x_1, y_1, z_1)}{\partial u_1} = \int_{\sigma} \left[ E_n \cos n u - E_n \cos r u - E_n \cos r n \right] \frac{d \sigma}{r^2},$$

d'onde :

$$4 \pi \frac{\partial V(x_1, y_1, z_1)}{\partial u_1} = E_n. \quad \text{c. d. d.}$$

### CAPITOLO III.

#### Superficie mobile.

##### § 6. ESPRESSIONI DELLE FORZE ELETTROMAGNETICHE FORNITE DAL PROCEDIMENTO GREEN-VOLTERRA.

S'interpretino  $x, y, z, t$ , come coordinate Cartesianhe ortogonali dei punti di uno spazio  $S_4$  a quattro dimensioni, e indichino:  $\Sigma_1$  una varietà a tre dimensioni e  $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$  un punto di  $S_4$ . Questi elementi siano tali che la varietà conica  $C$  (*conoide caratteristico*):

$$c(t_1 - t) = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2},$$

stacchi sulla varietà  $\Sigma_1$  una porzione finita  $\Sigma$  tale, che le parallele condotte all'asse delle  $t$ , dai punti di un piccolo intorno di  $P_1$ , la intersechino in un solo punto. Denotino ancora:  $S'_4$  quella parte di  $S_4$  che è limitata dalla varietà conica  $C$ , dalla varietà cilindrica  $\Gamma$  di raggio  $\varepsilon$  (piccolo a piacere):

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 = \varepsilon^2$$

e dalla varietà  $\Sigma'$  staccata su  $\Sigma$ , dalle dette varietà;  $n$  la direzione della nor-

male al contorno di  $S'_4$ , che entra in tale spazio, e si ponga  $\cos nx = \alpha$ ,  $\cos ny = \beta$ ,  $\cos nz = \gamma$ ,  $\cos nt = \delta$ . Si supponga che in  $S'_4$  si abbia  $t_1 > t$ . Siano date per qualsiasi istante di tempo sopra  $\Sigma$  le componenti delle forze elettromagnetiche, in modo da soddisfare le condizioni (che si è visto essere in numero di due) che sono necessaria conseguenza delle equazioni di MAXWELL-HERTZ. Mi propongo il problema della determinazione univoca di dette componenti nel punto  $P_1$ .

Indichino  $U$  ed  $E_x$  (si conservano i simboli precedentemente usati) due funzioni regolari dei punti dello spazio limitato da  $C$  e da  $\Sigma$ , che ivi soddisfino l'equazione:

$$\square = 0.$$

Si avrà:

$$\int_{S'_4} (U \square E_x - E_x \square U) dS'_4 = 0;$$

ovvero, integrando per parti:

$$\left. \begin{aligned} & - \int_{c+\Gamma+\Sigma'} U \left\{ \frac{\partial E_x}{\partial t} \delta - c^2 \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} \alpha + \frac{\partial E_x}{\partial y} \beta + \frac{\partial E_x}{\partial z} \gamma \right) \right\} d\Sigma + \\ & + \int_{c+\Gamma+\Sigma'} E_x \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \delta - c^2 \left( \frac{\partial U}{\partial x} \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \gamma \right) \right\} d\Sigma = 0. \end{aligned} \right\} \quad (M)$$

La funzione:

$$c \frac{t_1 - t}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}} - 1,$$

è regolare in  $S_4$  e soddisfa in esso, come è facile provare, l'equazione  $\square = 0$ ; inoltre essa si annulla sulla varietà conica  $C$ . La si assuma quale funzione  $U$ . Si ponga:

$$M_1 = \int_{c+\Gamma+\Sigma'} U \left\{ \frac{\partial E_x}{\partial t} \delta - c^2 \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} \alpha + \frac{\partial E_x}{\partial y} \beta + \frac{\partial E_x}{\partial z} \gamma \right) \right\} d\Sigma.$$

Se si risguardano come conosciute le componenti delle forze elettromagnetiche anche su  $C$  e su  $\Gamma$ , sarà lecito considerare un sistema di equazioni, identico a quello (I) considerato nel caso del contorno fisso, con la sola differenza che, nelle equazioni di esso, la variabile  $t$  deve essere considerata come indipendente, e mai dovrà essere sostituita da  $t_1 - Ar$ . Applicando a

detto sistema il procedimento che ho usato per calcolare la  $\frac{dE_x}{dn}$  nel caso del contorno fisso, si trae:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} \alpha + \frac{\partial E_x}{\partial y} \beta + \frac{\partial E_x}{\partial z} \gamma = & \left( \beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) + \left( \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + \\ & + A \left( \gamma \frac{\partial H_y}{\partial t} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

In virtù di tale formula, la  $M_1$  può anche scriversi così:

$$\begin{aligned} M_1 = \int_{C+\Gamma+\Sigma} U \left\{ \frac{\partial E_x}{\partial t} \delta - c^2 \left[ \left( \beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) + \left( \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + A \left( \gamma \frac{\partial H_y}{\partial t} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) \right] \right\} d\Sigma. \end{aligned}$$

Poichè  $U$  e  $\delta$  sono nulli rispettivamente su  $C$  e su  $\Gamma$ , sarà:

$$\int_{C+\Gamma+\Sigma} U \frac{\partial E_x}{\partial t} \delta d\Sigma = \int_{\Sigma} U \frac{\partial E_x}{\partial t} \delta d\Sigma.$$

Per la trasformazione esposta nel § 1, tenendo presente che  $t$  è qui variabile indipendente, si trae:

$$\begin{aligned} \int_{C+\Gamma+\Sigma} U \left[ \left( \beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) + \left( \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \right] d\Sigma = \\ = \int_{C+\Gamma+\Sigma} \left[ E_y \left( \alpha \frac{\partial U}{\partial y} - \beta \frac{\partial U}{\partial x} \right) + E_z \left( \alpha \frac{\partial U}{\partial z} - \gamma \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] d\Sigma. \end{aligned}$$

Ma è facile constatare che sulle varietà conica e cilindrica sussistono le identità:

$$\alpha \frac{\partial U}{\partial y} - \beta \frac{\partial U}{\partial x} = 0; \quad \alpha \frac{\partial U}{\partial z} - \gamma \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

Si avrà perciò:

$$\begin{aligned} \int_{C+\Gamma+\Sigma} U \left[ \left( \beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) + \left( \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \right] d\Sigma = \\ = \int_{\Sigma} \left[ E_y \left( \alpha \frac{\partial U}{\partial y} - \beta \frac{\partial U}{\partial x} \right) + E_z \left( \alpha \frac{\partial U}{\partial z} - \gamma \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] d\Sigma. \end{aligned}$$



Finalmente per l'annullarsi di  $U$  su  $C$ :

$$\int_{c+r+\Sigma'} U \left[ \gamma \frac{\partial H_y}{\partial t} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial t} \right] d\Sigma = \int_{r+\Sigma'} U \left[ \gamma \frac{\partial H_y}{\partial t} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial t} \right] d\Sigma.$$

Sarà quindi, per le trasformazioni ora eseguite:

$$M_1 = \int_{\Sigma'} U \frac{\partial E_x}{\partial t} \delta d\Sigma - c^2 \int_{\Sigma'} \left[ E_y \left( \alpha \frac{\partial U}{\partial y} - \beta \frac{\partial U}{\partial x} \right) + E_z \left( \alpha \frac{\partial U}{\partial z} - \gamma \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] d\Sigma - \\ - c \int_{r+\Sigma'} U \left[ \gamma \frac{\partial H_y}{\partial t} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial t} \right] d\Sigma.$$

Se si osservano i calcoli fatti nel § 1, ricordando che (\*):

$$u = c \frac{t_1 - t}{r} - 1,$$

e ponendo:

$$E_n = E_x \cos nx + E_y \cos ny + E_z \cos nz$$

$$E_r = E_x \cos rx + E_y \cos ry + E_z \cos rz,$$

facilmente si trae:

$$M_1 = \int_{\Sigma'} \left( c \frac{t_1 - t}{r} - 1 \right) \left( \frac{\partial E_x}{\partial t} \cos nt + c \frac{\partial H_z}{\partial t} \cos ny - c \frac{\partial H_y}{\partial t} \cos nz \right) d\Sigma + \\ + c^3 \int_{\Sigma'} \left( E_r \cos nx - E_n \cos rx \right) \frac{t_1 - t}{r^2} d\Sigma - c \int_r \left( c \frac{t_1 - t}{r} - 1 \right) \left( \gamma \frac{\partial H_y}{\partial t} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) d\Sigma.$$

Si ponga ancora:

$$M_2 = \int_{c+r+\Sigma'} E_x \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \delta - c^2 \left( \frac{\partial U}{\partial x} \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \gamma \right) \right\} d\Sigma.$$

Si osservi che sulla varietà conica sussiste l'identità:

$$\frac{\partial U}{\partial t} \delta - c^2 \left( \frac{\partial U}{\partial x} \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \gamma \right) = 0;$$

---

(\*) Si è posto  $r = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$ .

e sulla varietà cilindrica si ha :

$$\delta = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \gamma = -c \frac{t_1 - t}{r^2} = -c \frac{t_1 - t}{\varepsilon^2};$$

cosicchè :

$$M_2 = c^3 \int_{\Gamma} E_x \frac{t_1 - t}{\varepsilon^2} d\Sigma + \int_{\Sigma'} E_x \left[ c^3 \frac{t_1 - t}{r^2} \cos nr - \frac{c}{r} \cos nt \right] d\Sigma.$$

Indicando con  $d\omega$  l'elemento di superficie sferica di raggio unitario, sarà :

$$\varepsilon^2 d\omega dt$$

l'elemento della varietà cilindrica. Perciò denotando con  $t_0$  la coordinata  $t$  del punto ove la retta  $x = x_1, y = y_1, z = z_1$ , incontra la varietà  $\Sigma$ , e  $\omega$  la superficie della sfera ora considerata, risulta :

$$M_2 = c^3 \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) dt \int_{\omega} E_x d\omega + \int_{\Sigma'} E_x \left[ c^3 \frac{t_1 - t}{r^2} \cos nr - \frac{c}{r} \cos nt \right] d\Sigma.$$

Per queste trasformazioni e, ove si ricordi che, per un noto teorema :

$$4\pi E_x(x_1, y_1, z_1, t) = \int_{\omega} E_x d\omega,$$

l'identità (M) può anche scriversi così :

$$\begin{aligned} 4\pi c^3 \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) E_x(x_1, y_1, z_1, t) dt + c \int_{\Gamma} \left( c \frac{t_1 - t}{\varepsilon} - 1 \right) \left( \gamma \frac{\partial H_y}{\partial t} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) d\Sigma = \\ = c^3 \int_{\Sigma'} (E_r \cos nx - E_n \cos rx - E_x \cos rn) \frac{t_1 - t}{r^2} d\Sigma + \\ + \int_{\Sigma'} \left( c \frac{t_1 - t}{r} - 1 \right) \left( \frac{\partial E_x}{\partial t} \cos nt + c \frac{\partial H_z}{\partial t} \cos ny - c \frac{\partial H_y}{\partial t} \cos nz \right) d\Sigma + \\ + c \int_{\Sigma'} E_x \cos nt \frac{d\Sigma}{r}. \end{aligned}$$

E questa, facendo tendere  $\varepsilon$  allo zero, si trasforma nell'altra :

$$\begin{aligned}
 4\pi c^3 \int_{t_0}^{t_1} E_x(x_1, y_1, z_1, t) (t_1 - t) dt = \\
 = c^3 \int_{\Sigma} (E_r \cos nx - E_n \cos rx - E_x \cos rn) \frac{t_1 - t}{r^2} d\Sigma + \\
 + \int_{\Sigma} \left( c \frac{t_1 - t}{r} - 1 \right) \left( \frac{\partial E_x}{\partial t} \cos nt + c \frac{\partial H_z}{\partial t} \cos ny - \frac{\partial H_y}{\partial t} \cos nz \right) d\Sigma + \\
 + c \int_{\Sigma} E_x \cos nt \frac{d\Sigma}{r}.
 \end{aligned}$$

Derivando due volte rispetto a  $t_1$ , ricordando che sulla intersezione di  $C$  con  $\Sigma$  sussiste l'identità :

$$c \frac{t_1 - t}{r} - 1 = 0,$$

ciò che permette di derivare come se la porzione  $\Sigma$ , fosse indipendente da  $t_1$ , e dividendo per  $c^3$ , si ottiene finalmente la formula :

$$\begin{aligned}
 4\pi E_x(x_1, y_1, z_1, t_1) = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Sigma} (E_r \cos nx - E_n \cos rx - E_x \cos rn) \frac{t_1 - t}{r^2} d\Sigma + \\
 + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\Sigma} \left( A \frac{\partial E_x}{\partial t} \cos nt + \frac{\partial H_z}{\partial t} \cos ny - \frac{\partial H_y}{\partial t} \cos nz \right) \frac{d\Sigma}{r} + \\
 + A^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Sigma} E_x \cos nt \frac{d\Sigma}{r}.
 \end{aligned}$$

In modo analogo si trova :

$$\begin{aligned}
 4\pi E_y(x_1, y_1, z_1, t_1) = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Sigma} (E_r \cos ny - E_n \cos ry - E_y \cos rn) \frac{t_1 - t}{r^2} d\Sigma + \\
 + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\Sigma} \left( A \frac{\partial E_y}{\partial t} \cos nt + \frac{\partial H_r}{\partial t} \cos nz - \frac{\partial H_z}{\partial t} \cos nx \right) \frac{d\Sigma}{r} + \\
 + A^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Sigma} E_y \cos nt \frac{d\Sigma}{r}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4\pi E_z(x_1, y_1, z_1, t_1) &= \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int (E_r \cos nz - E_n \cos rz - E_z \cos rn) \frac{t_1 - t}{r^2} d\Sigma + \\
&+ A \frac{\partial}{\partial t_1} \int \left( A \frac{\partial E_z}{\partial t} \cos nt + \frac{\partial H_y}{\partial t} \cos nx - \frac{\partial H_x}{\partial t} \cos ny \right) \frac{d\Sigma}{r} + \\
&+ A^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int E_z \cos nt \frac{d\Sigma}{r}.
\end{aligned}$$

Le componenti della forza magnetica  $\mathbf{H}$ , mercè l'osservazione fatta nel caso del contorno fisso, risultano ovviamente dalle precedenti componenti della forza  $\mathbf{E}$ .

Le trovate espressioni per le forze elettromagnetiche soddisfano, nelle ipotesi ammesse nell'enunciato del problema, il sistema di equazioni di MAXWELL-HERTZ. A questa conclusione si arriva come segue. Si consideri la funzione  $f$  del § 3: in virtù del calcolo ivi esposto è:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \gamma = 0.$$

Se ora si applica a detta funzione il procedimento GREEN-VOLTERRA, per la identità ora scritta, si trova che  $f$  si annulla anche nel punto  $P_1$ .

## § 6. DISCUSSIONE DELLE FORMULE TROVATE.

Se si dà alla coordinata  $t$  del paragrafo precedente il suo significato ordinario (tempo), il problema ora trattato si può enunciare così:

Sia  $\sigma$  una superficie chiusa, mobile, dello spazio fisico sulla quale, per ogni istante di tempo, siano date le componenti della forza elettrica e magnetica in modo da soddisfare le condizioni (che si è visto, nel Cap. II, essere in numero di due) che sono necessaria conseguenza delle equazioni indefinite di MAXWELL-HERTZ. Mi propongo il problema della determinazione univoca di dette componenti, in qualsiasi istante di tempo, nei punti interni a  $\sigma$ .

Una superficie variabile col tempo dello spazio ordinario, si può riguardare come una varietà fissa dello spazio  $S_4$  a quattro dimensioni. Ma non è

lecito dare « *a priori* » per espressioni delle forze elettromagnetiche quelle trovate nel paragrafo precedente, per il fatto che la varietà che porta i dati in detto paragrafo, deve soddisfare certe condizioni restrittive. Le quali, tradotte in linguaggio ordinario, impongono delle restrizioni alla mobilità del contorno. Perciò, per potere assumere per espressioni delle forze elettromagnetiche quelle del § 5, occorrerà esaminare, in base alle speciali ipotesi cinematiche che caratterizzano la variabilità del contorno, se sono soddisfatte le condizioni restrittive ammesse per la varietà  $\Sigma_1$ . Quando questo sia constatato, gioverà liberare le trovate espressioni dalla forma iperspaziale, mettendo in evidenza lo spazio fisico e il tempo.

### § 7. CASI PARTICOLARI NOTEVOLI.

Si consideri una superficie fissa e chiusa dello spazio fisico. Essa, nello spazio  $S_4$ , si può considerare come una varietà cilindrica con le generatrici parallele all'asse delle  $t$ . Limito « inferiormente » detta varietà con uno spazio piano  $\Omega$  di equazioni  $t = t_0$ , indico con  $\Lambda$  quel semicilindro nel quale  $t > t_0$  (\*), e considero la varietà  $\Lambda + \Omega$ . Essa soddisfa le condizioni ammesse per la  $\Sigma_1$  del § 5.

Dimostrerò ora che le espressioni per le forze elettromagnetiche di detto paragrafo si riducono, nelle ipotesi ora ammesse, a quelle trovate nel caso del contorno fisso. È evidente, del resto, che ciò debba avvenire. A tale uopo si indichi con  $\sigma$  l'intersezione di  $\Lambda$  con  $\Omega$ , e si supponga ulteriormente che la intersezione della varietà  $\Lambda + \Omega$  con la varietà conica  $C$ , appartenga a  $\Lambda$ .

Ora si osservi che sulla varietà  $\Lambda$ :

$$\cos n t = 0, \quad (1)$$

e sullo spazio  $\Omega$ :

$$t = t_0 = \text{Costante}; \quad \cos n x = \cos n y = \cos n z = \cos r n = 0; \quad \cos n t = 1. \quad (2)$$

Ciò posto (prendendo in ispeciale considerazione la espressione del § 5

---

(\*) « Inferiormente » sta a significare che si ha su  $\Lambda$   $t > t_0$ .

ottenuta per  $E_x$ ), si ponga :

$$N = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Sigma} (E_r \cos nx - E_n \cos rx - E_x \cos rn) \frac{t_1 - t}{r^2} d\Sigma.$$

La varietà  $\Sigma$  è composta ora dalle due varietà  $\Lambda$  e  $\Omega$ ; per cui :

$$N = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Lambda} (E_r \cos nx - E_n \cos rx - E_x \cos rn) \frac{t_1 - t}{r^2} d\Lambda + \\ + \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Omega} (E_r \cos nx - E_n \cos rx - E_x \cos rn) \frac{t_1 - t}{r^2} d\Omega.$$

Ma per le relazioni (2) :

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Omega} (E_r \cos nx - E_n \cos rx - E_x \cos rn) \frac{t_1 - t}{r^2} d\Omega = 0;$$

cosicchè resta :

$$N = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Lambda} (E_r \cos nx - E_n \cos rx - E_x \cos rn) \frac{t_1 - t}{r^2} d\Lambda.$$

Se si osserva che sull'intersezione di  $C$  con  $\Lambda$  :

$$c \frac{t_1 - t}{r^2} - 1 = 0,$$

ossia :

$$t = t_1 - Ar;$$

e che la varietà semicilindrica  $\Lambda$  può pensarsi decomposta in striscie di ampiezza  $d\sigma$  comprese fra due generatrici vicinissime, si vede che :

$$N = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\sigma} d\sigma \int_{t_0}^{t_1 - Ar} (E_r \cos nx - E_n \cos rx - E_x \cos rn) \frac{t_1 - t}{r^2} dt.$$

La funzione sotto il segno d'integrale semplice, racchiusa tra parentesi,

è indipendente da  $t_1$ ; cosicchè, esplicitando la derivata seconda, si trae:

$$N = \int_{\sigma} (E_r^{(*)} \cos nx - E_n^{(*)} \cos rx - E_z^{(*)} \cos rn) \frac{d\sigma}{r^2} + \\ + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (E_r^{(*)} \cos nx - E_n^{(*)} \cos rx - E_z^{(*)} \cos rn) \frac{d\sigma}{r}.$$

In questi integrali si sono segnate con asterisco quelle funzioni nelle quali al posto di  $t$  deve esser posto  $t_1 - Ar$ : questa notazione sarà mantenuta in seguito.

Si ponga ancora:

$$N_1 = A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\Sigma} \left( A \frac{\partial E_x}{\partial t} \cos nt + \frac{\partial H_z}{\partial t} \cos ny - \frac{\partial H_y}{\partial t} \cos nz \right) \frac{d\Sigma}{r},$$

e si noti che il contributo relativo a  $\Omega$  è nullo, perchè l'integrale risulta indipendente da  $t_1$ ; mentre sopra  $\Lambda$ ,  $\cos nt = 0$ . Rimane così:

$$N_1 = A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\Lambda} \left( \frac{\partial H_z}{\partial t} \cos ny - \frac{\partial H_y}{\partial t} \cos nz \right) \frac{d\Lambda}{r} = \\ = A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} d\sigma \int_{t_0}^{t_1 - Ar} \left( \frac{\partial H_z}{\partial t} \cos ny - \frac{\partial H_y}{\partial t} \cos nz \right) \frac{dt}{r} = \\ = A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} \left( H_z^{(*)} \cos ny - H_y^{(*)} \cos nz \right) \frac{d\sigma}{r}.$$

Finalmente per le (1) e (2):

$$A^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Sigma} E_x \cos nt \frac{d\Sigma}{r} = 0.$$

In virtù di queste trasformazioni di  $N$  e  $N_1$ , risulta:

$$4\pi E_x(x_1, y_1, z_1, t_1) = \int_{\sigma} (E_r^{(*)} \cos nx - E_n^{(*)} \cos rx - E_z^{(*)} \cos rn) \frac{d\sigma}{r^2} + \\ + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (E_r^{(*)} \cos nx - E_n^{(*)} \cos rx - E_z^{(*)} \cos rn) \frac{d\sigma}{r} + \\ + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (H_r^{(*)} \cos ny - H_y^{(*)} \cos nz) \frac{d\sigma}{r}:$$

espressione che è identica a quella ottenuta per  $E_x(x_1, y_1, z_1, t_1)$  nel caso del contorno fisso.

Si supponga finalmente che una superficie chiusa dello spazio ordinario si muova rigidamente di moto traslatorio uniforme. Essa genera allora, nello spazio  $S_4$ , una varietà cilindrica. Limite « inferiormente » detta varietà con uno spazio piano  $\Omega$ , e indico con  $\Lambda$  il semicilindro nel quale  $t > t_0$ . La varietà  $\Lambda + \Omega$  ottempera alle condizioni ammesse per la  $\Sigma_1$ , e perciò le espressioni delle forze elettromagnetiche sono quelle trovate nel § 5, a patto che le generatrici del conoide caratteristico incontrino a distanza finita quelle della varietà cilindrica. Il che avviene certamente, ogni qualvolta non siano eguali gli angoli che dette rette formano rispettivamente con l'asse delle  $t$ . Questa condizione impone una restrizione alla mobilità della superficie: dico che essa è certamente soddisfatta, quando la velocità  $v$  del moto del contorno è diversa da quella  $c$  della luce.

Invero, se  $(x_0, y_0, z_0)$  è la posizione occupata da un punto generico della superficie mobile nell'istante  $t = 0$ , e  $v_x, v_y, v_z$ , sono le componenti della velocità  $v$  secondo gli assi  $x, y, z$ , le equazioni del moto di detto punto saranno:

$$x = x_0 + v_x t, \quad y = y_0 + v_y t, \quad z = z_0 + v_z t.$$

Sono queste le equazioni, che assieme alla identità:

$$t = t,$$

danno quelle della generatrice che passa per il punto  $(x_0, y_0, z_0, 0)$  della varietà cilindrica, considerata nello spazio  $S_4$ . Indicando con  $\lambda$  un fattore di proporzionalità, i coseni direttori di detta generatrice  $g$ , saranno:

$$\cos g x = \lambda v_x, \quad \cos g y = \lambda v_y, \quad \cos g z = \lambda v_z, \quad \cos g t = \lambda.$$

D'onde per essere:

$$\cos^2 g x + \cos^2 g y + \cos^2 g z + \cos^2 g t = 1;$$

sarà:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}};$$



quindi:

$$\cos g t = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \quad (3)$$

D'altra parte, se si dice  $g_1$  una generica generatrice della varietà conica  $C$ , si ha (\*):

$$\operatorname{tg} g_1 t = c;$$

d'onde:

$$\cos g_1 t = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}. \quad (4)$$

Per poter determinare il valore di  $E_u$  e di  $H_u$  nel punto  $P_1$ , si deve avere:

$$(g t) \mid - (g_1 t),$$

ovvero, per le (3) e (4):

$$v \mid c. \quad \text{c. d. d.}$$

Casale sul Sile (Treviso).

---

(\*) Ciò si deduce dalla equazione di  $C$ .



# Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse.

(Di EUGENIO ELIA LEVI, a Genova.)

---

## § I.

1. Sia  $f(x, y)$  una funzione monodroma (\*) analitica di due variabili complesse  $x = x_1 + i x_2$ ,  $y = y_1 + i y_2$ . Si dice che  $f(x, y)$  è *regolare* nel punto  $(\xi, \eta)$  se nell'intorno di questo punto è sviluppabile in serie di potenze di  $x - \xi$ ,  $y - \eta$ ; si dice che in  $(\xi, \eta)$  ha un *punto singolare non essenziale*, se è possibile trovare una serie di potenze  $p_0(x - \xi, y - \eta)$  tale che il prodotto  $p_0(x - \xi, y - \eta) f(x, y)$  sia regolare nel punto  $(\xi, \eta)$ ; e cioè quando la  $f(x, y)$  si può porre nella forma  $f(x, y) = \frac{p_1(x - \xi, y - \eta)}{p_0(x - \xi, y - \eta)}$  dove  $p_1(x - \xi, y - \eta)$  indica essa pure una serie di potenze di  $x - \xi$ ,  $y - \eta$ . Ogni altro punto sarà per la funzione un *punto singolare essenziale* (\*\*).

Nel presente lavoro mi propongo di mostrare che le varietà formate dai punti singolari *essenziali* soddisfanno a condizioni assai restrittive; o, il che è lo stesso, che i campi in cui una funzione può essere meromorfa (\*\*\*) sono di natura particolare. Così verrà mostrato che è erronea l'affermazione del WEIERSTRASS che, analogamente a quanto avviene per le funzioni di una sola

---

(\*) Sovente per la validità di quanto segue si potrà anche considerare un ramo monodromo di una funzione polidroma.

(\*\*) Così sono punti singolari essenziali anche quelli di un campo (lacunare) cui non si possa giungere per prolungamento analitico.

(\*\*\*) E cioè in cui la funzione può non avere punti regolari e punti singolari non essenziali: secondo WEIERSTRASS si direbbe: *in cui una funzione può avere comportamento di una funzione razionale*.

variabile, assegnato ad arbitrio un campo continuo a 4 dimensioni nello spazio in cui sono rappresentate le variabili complesse  $x, y$ , esiste sempre una funzione meromorfa in esso, che ha singolarità essenziali in ogni punto del contorno di questo (\*).

La natura degli insiemi di punti singolari di una funzione analitica è già stata studiata dall'HARTOGS (\*\*) nei suoi bei lavori partendo sia dalla formula di CAUCHY sia dagli sviluppi in serie di potenze: però l'HARTOGS non riesce a scindere nelle sue considerazioni i punti singolari essenziali dai non essenziali, cosicchè i suoi risultati nulla ci dicono sui punti singolari essenziali limiti di punti singolari non essenziali; e limitano la natura dei campi in cui la funzione può essere regolare, e non di quelli in cui può essere meromorfa.

Le deduzioni di questo lavoro hanno comune fondamento nel semplicissimo teorema del § I (n. 4 e 5) secondo il concetto esposto nel n. 6. Nel § II mostro come da questo solo principio e nel campo più ampio ora ricordato si possano facilmente dedurre tutti i principali risultati che l'HARTOGS ottenne per varie vie. Nel § III determino alcune proprietà differenziali delle *ipersuperficie* che possono costituire la frontiera di un campo in cui una funzione analitica di due variabili complesse è meromorfa.

Tutti i risultati di questo lavoro si estendono senza difficoltà essenziali alle funzioni di più variabili.

2. Un'equazione  $\varphi(x, y) = 0$ , dove  $\varphi$  è una funzione analitica di  $x$  ed  $y$ , determina nello spazio a 4 dimensioni, in cui si rappresentano i punti  $(x, y)$ , una varietà a due dimensioni di natura particolare: indicherò queste varietà

(\*) WEIERSTRASS, *Untersuchungen über die 2 r-fach periodischen Functionen von r Veränderlichen*. Crelles Journal, 89, Werke II, pag. 123-133: Wird aus dem Gebiete von  $r$  complexen Veränderlichen  $u_1, u_2, \dots, u_r$  auf irgend eine Weise ein 2 r-fach ausgedehntes Continuum ausgeschieden, so lassen sich stets eindeutige Functionen von  $u_1, \dots, u_r$  bestimmen, welche sich an allen Stellen im Innern dieses Continuum, aber an keiner Stelle seiner Begrenzung wie rationale Functionen verhalten.

(\*\*) FRITZ HARTOGS: — 1.º *Zur Theorie der analytischen Functionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, etc.* Math. Annalen, Bd. 62, pag. 1-88. — 2.º *Einige Folgerungen aus der Cauchy'schen Integralformel bei Functionen mehrerer Veränderlichen*. Münchener Sitzungsberichte, Bd. 36 (1906). — 3.º *Ueber die aus den singulären Stellen einer analytischen Function mehrerer Veränderlichen bestehenden Gebiete*. Acta Mathematica, Vol. 32 (1909), pag. 57-79. — Vedi anche il rapporto riassuntivo dell'HARTOGS nei Jahresber. der Deutscher Math. Vereinigung, 16 (1907), pag. 223 e ss. *Ueber neuere Untersuchungen auf dem Gebiete der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen*.

col nome di *varietà* o *superficie caratteristiche* (\*): in particolare un'equazione lineare tra  $x$  ed  $y$  rappresenta un *piano caratteristico*.

Un punto di una superficie caratteristica  $\varphi(x, y) = 0$  può essere: *regolare* o *critico* se la superficie può nell'intorno di esso essere rappresentata col dare  $x$  (od  $y$ ) in serie di potenze intere o fratte di  $y$  (od  $x$ ); *singolare* se è un punto singolare di  $\varphi(x, y)$  limite di punti in cui è  $\varphi(x, y) = 0$ .

Con queste definizioni risulta che noi potremo parlare di *multiplicità di intersezione* di un piano caratteristico con una superficie caratteristica in un punto regolare o critico per questa: risulta pure che, data una superficie caratteristica che in  $(\xi, \eta)$  abbia un punto regolare o critico, esiste un intorno  $\sigma$  di  $(\xi, \eta)$  sufficientemente piccolo ed un numero  $m$  tale che ogni piano caratteristico  $x = \text{cost.}$  ha in  $\sigma$  al più  $m$  punti — contato ognuno colla sua molteplicità, — comuni con essa, fatta eccezione per il piano  $x = \xi$  che può appartenere alla superficie medesima.

Applichiamo queste considerazioni ai punti singolari non essenziali di una funzione  $f(x, y)$ . Se  $(\xi, \eta)$  è un tale punto, e se precisamente nell'intorno di esso è  $f(x, y) = \frac{p_1(x - \xi, y - \eta)}{p_0(x - \xi, y - \eta)}$ , i soli punti singolari di  $f(x, y)$  che esistono nell'intorno di  $(\xi, \eta)$  sono punti singolari non essenziali i quali appartengono alla varietà caratteristica  $p_0(x - \xi, y - \eta) = 0$ :  $(\xi, \eta)$  è su essa un punto regolare o critico. Ne segue:

*Osservazione I.* Se  $(\xi, \eta)$  è un punto regolare o singolare non essenziale di  $f(x, y)$  si può trovare un intorno  $\sigma$  di esso ed un numero  $m$ , tale che ogni piano  $x = \text{cost.}$  abbia in  $\sigma$  al più  $m$  punti singolari di  $f(x, y)$  tutti non essenziali, fatta eventualmente eccezione per il piano  $x = \xi$  che può far parte della varietà caratteristica di punti singolari non essenziali cui appartiene  $(\xi, \eta)$ . Infatti se  $(\xi, \eta)$  è regolare non esistono punti singolari nel suo intorno: si può fare  $m = 0$ . Se  $(\xi, \eta)$  è singolare non essenziale è questa un'immediata conseguenza del fatto che i punti singolari di  $f(x, y)$  nell'intorno di  $(\xi, \eta)$  costituiscono una varietà caratteristica per cui  $(\xi, \eta)$  è regolare o critico.

L'osservazione precedente vale pure quando si conti ogni punto  $(\xi', \eta')$  singolare non essenziale per  $f(x, y)$  come multiplo secondo il numero che

---

(\*) Seguendo la terminologia proposta dal LEVI-CIVITA: *Sulle funzioni analitiche di due o più variabili complesse*. Rend. della R. Accademia dei Lincei, (1905), vol. XIV, sem. 2, pag. 492-9. Tali varietà sono invero le varietà caratteristiche rispetto al problema di CAUCHY per il noto sistema di equazioni cui devono soddisfare la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di una funzione di due variabili.

rappresenta l'ordine del polo che  $f(\xi' y)$  ha in  $y = \eta'$  (\*). Invero tale ordine è sempre inferiore all'ordine infinitesimale di  $p_0(x - \xi, y - \eta)$  in  $x = \xi', y = \eta'$ .

*Osservazione II.* Se un piano  $x = \xi$  non è tutto di punti singolari non essenziali per  $f(x y)$ , ma su esso esistono infiniti punti singolari non essenziali di  $f(x y)$ , ogni punto  $(\xi \eta)$  limite di questi punti singolari non essenziali è un punto singolare essenziale di  $f(x y)$ . Infatti tale punto per l'osservazione precedente non può essere nè regolare, nè singolare non essenziale.

3. Aggiungiamo un lemma sullo sviluppo di LAURENT.

LEMMA. *Sia  $f(x y)$  una funzione regolare nei punti in cui*

$$|x| \leq \delta, \quad k_1 \geq |y| \geq k_2.$$

*Essa si svilupperà in serie di LAURENT rapporto ad  $y$  con coefficienti funzioni analitiche di  $x$  per  $x \leq \delta$ :*

$$f(x y) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_n(x) y^n. \quad (1)$$

*Condizione necessaria e sufficiente affinchè questa funzione sia meromorfa nel campo  $x \leq \delta, y \leq k_1$ , è che esista un numero finito  $l + 1$  di funzioni — analitiche — di  $x$ :  $A_0(x), A_1(x), \dots, A_l(x)$  tali che sia identicamente per  $n < 0$ :*

$$A_0(x) g_{n-l}(x) + A_1(x) g_{n-l+1}(x) + \dots + A_l(x) g_n(x) = 0. \quad (2)$$

Per maggior chiarezza premettiamo l'osservazione che, se delle funzioni  $A_0, A_1, \dots, A_l$  esistono le quali soddisfano alle (2), esse potranno certamente ritenersi funzioni regolari analitiche di  $x$  per  $x \leq \delta$ . Infatti osserviamo che le  $g_n(x)$  sono funzioni analitiche regolari per  $|x| \leq \delta$ ; e quindi, se le (2) sono equazioni compatibili nelle  $A_i(x)$ , esse si possono risolvere con funzioni analitiche di  $x$  regolari per  $x \leq \delta$ .

Ciò posto, la condizione è sufficiente. Infatti la funzione

$$\psi(x y) = f(x y) \cdot [A_0(x) y^l + A_1(x) y^{l-1} + \dots + A_l(x)]$$

sarà come la  $f(x y)$  una funzione regolare per  $|x| \leq \delta, k_1 \geq y \geq k_2$ . Ma

(\*) È noto che i soli punti in cui la funzione  $f(\xi' y)$  della variabile  $y$  può avere un polo sono i punti  $(\xi' y)$  in cui  $f(x y)$  ha una singolarità non essenziale: non viceversa.

per (1) e (2) essa si svilupperà in questo campo nella forma

$$\psi(xy) = \sum_0^{\infty} [A_0(x)g_{n-1}(x) + A_1(x)g_{n-2}(x) + \dots + A_l(x)g_n(x)]y^n$$

e cioè per sole potenze positive di  $y$ : onde segue che essa è regolare analitica per  $|x| \leq \delta$ ,  $|y| \leq k_1$ . Quindi si avrà che

$$f(xy) = \frac{\psi(xy)}{A_0(x)y^l + A_1(x)y^{l-1} + \dots + A_l(x)},$$

come quoziente di due funzioni analitiche regolari nel campo  $|x| \leq \delta$ ,  $|y| \leq k_1$ , sarà meromorfa nel campo medesimo.

La condizione è necessaria. Infatti poichè  $f(xy)$  è regolare per  $|x| \leq \delta$ ,  $|y| \geq k_2$ , nessun piano  $x = x_0$  con  $|x_0| \leq \delta$  è una varietà di punti singolari non essenziali di  $f(xy)$ : onde per l'osservazione II del n. 2 su esso esiste nel cerchio  $|y| \leq k_2$  un numero finito di punti singolari non essenziali. Sia  $m_{x_0}$  il numero di tali punti sul piano  $x = x_0$ , ognuno contato colla molteplicità che ha il polo di  $f(x_0y)$  in esso:  $m_{x_0}$  avrà per  $|x_0| \leq \delta$  un massimo  $l$ . Infatti ove questo non esistesse, vi sarebbe un punto  $(\xi, \eta)$  con  $|\xi| \leq \delta$  e  $|\eta| \leq k_2$  tale che si troverebbero piani  $x = x_0$  che dentro ad un intorno arbitrariamente piccolo di esso, avrebbero un numero di punti singolari non essenziali superiore ad ogni numero fissato grande a piacere: e ciò contraddice per l'osservazione I del n. 2 all'ipotesi che  $(\xi, \eta)$  sia un punto regolare non essenziale.

Concludendo su ogni piano  $x = x_0$  (con  $|x_0| \leq \delta$ )  $f(x_0y)$  ha al più  $l$  poli, distinti o coincidenti, entro il cerchio  $|y| \leq k_2$  e quindi entro il cerchio  $|y| \leq k_1$ ; onde potremo costruire un'equazione

$$A_0(x)y^l + A_1(x)y^{l-1} + \dots + A_l(x) = 0 \quad (3)$$

tale che per ogni valore di  $x$  i poli di  $f(xy)$  siano tra le radici di essa, ciascuno contato colla sua molteplicità. La funzione

$$f(xy) [A_0(x)y^l + A_1(x)y^{l-1} + \dots + A_l(x)]$$

sarà quindi su ogni piano  $x = \text{cost.}$  una funzione della variabile  $y$  regolare entro il cerchio  $|y| \leq k_1$  onde il suo sviluppo per potenze di  $y$  deve mancare di potenze negative. E ciò richiede che le  $A_i(x)$  così costruite soddisfacciano identicamente alle equazioni (2).

*Corollario.* Il numero  $l$  che compare nel precedente enunciato è un limite superiore per il numero dei punti singolari non essenziali di  $f(x, y)$  appartenenti ad un piano  $x = x_0$  con  $|x_0| < \delta$ .

4. Premesso questo lemma possiamo dimostrare il seguente

**TEOREMA.** Sia  $f(x, y)$  una funzione analitica di  $x$  ed  $y$  che nel punto  $(0, 0)$  abbia una singolarità essenziale, mentre nei punti di un certo intorno  $|y| \leq k$  dell'origine appartenenti al piano  $x = 0$  sia meromorfa. Dato un numero  $\varepsilon$  piccolo a piacere, è sempre possibile trovare un numero  $\delta$  tale che in ogni piano  $x = x_0$  con  $|x_0| \leq \delta$  esista sempre almeno un punto singolare essenziale per  $f(x, y)$  per cui è  $|y| \leq \varepsilon$  (\*).

Intanto possiamo supporre che nei punti del piano  $x = 0$  la funzione sia generalmente regolare: poichè altrimenti i punti generici del piano  $x = 0$  sarebbero tutti punti singolari non essenziali, e quindi esisterebbe un numero  $n$  tale che  $x^n f(x, y)$  avrebbe ancora come  $f(x, y)$  il punto  $(0, 0)$  come punto singolare essenziale, e sarebbe meromorfa, ma generalmente regolare per  $x = 0, y \neq 0$ .

Ciò posto le nostre ipotesi dicono che  $f(x, y)$  può avere dei punti singolari non essenziali nei punti  $(0, y)$  con  $y \neq 0$ , ma l'unico punto limite che essi possono avere è, per l'osservazione II del n. 2, il punto  $(0, 0)$ . Onde fissato  $\varepsilon$ , potremo trovare nel piano  $(0, y)$  una corona circolare di centro l'origine limitata dai cerchi di raggio  $k_1$  e  $k_2$  ( $k_1 > k_2$ ), interna ad ambedue i cerchi  $|y| \leq k_1, |y| \leq \varepsilon$ , tale che in qualunque punto di essa e del suo contorno  $f(x, y)$  sia regolare: onde per il teorema di LAURENT nel campo medesimo si potrà sviluppare in serie di potenze positive e negative di  $y$ :

$$f(x, y) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_n(x) y^n$$

dove le  $g_n(x)$  sono funzioni analitiche di  $x$  per  $|x| \leq \delta$ . E poichè il punto  $(0, 0)$  è un punto singolare essenziale, per il lemma precedente le  $g_n(x)$  non soddisfanno alcun sistema del tipo (2) per  $|x| \leq \delta$ .

Ne viene che per  $|x_0| \leq \delta$  la  $f(x, y)$  ha sul piano  $x = x_0$  entro il cerchio  $|y| \leq k_2$  — e quindi a fortiori entro il cerchio  $|y| \leq \varepsilon$  — almeno un punto singolare essenziale. Invero, ove ciò non fosse, la  $f(x, y)$  sarebbe meromorfa

---

(\*) Pel caso che  $f(x, y)$  sia regolare nei punti  $x = 0, 0 < |y| \leq k$ , questo teorema è stato dimostrato dall'HARTOGS, l. c. 2.º; e poi con una dimostrazione del tipo di quella usata nel testo in l. c. 3.º.



in tutti i punti del piano  $x = x_0$ ,  $|y| \leq k$ , e vi avrebbe un numero finito di punti singolari non essenziali, poichè altrimenti per l'osservazione II del n. 2 esso sarebbe tutto di punti singolari non essenziali il che è contrario all'ipotesi che per  $x = x_0$ ,  $k_1 \geq |y| \geq k_2$ ,  $f(x, y)$  sia regolare. Quindi esisterebbe un campo  $|x_0 - x| \leq \delta'$ ,  $|y| \leq k_1$ , in cui la funzione  $f(x, y)$  avrebbe solo un numero finito di punti singolari non essenziali su ogni piano  $x = \text{cost.}$ : e quindi si svilupperebbe in una serie di LAURENT:

$$f(x, y) = \sum_{-\infty}^{\infty} g'_n(x) y^n, \quad (5)$$

le  $g'_n(x)$  essendo funzioni regolari analitiche di  $x$  per  $|x - x_0| \leq \delta'$ : e per il lemma del n. precedente esisterebbe un numero  $l$  tale che le  $g'_n(x)$  soddisfanno (per  $n < 0$ ) ad un sistema del tipo (2). Ma poichè i campi  $|x - x_0| \leq \delta'$ ,  $k_1 \geq |y| \geq k_2$ , e  $|x| \leq \delta$ ,  $k_1 \geq |y| \geq k_2$  hanno un campo a quattro dimensioni comune, i due sviluppi (4) e (5) coincidono: e ciò è assurdo poichè le  $g_n(x)$  di (4) non possono soddisfare alcun sistema del tipo (2).

*Corollario.* *L'insieme dei punti singolari essenziali di una funzione analitica di due variabili complesse è perfetto (\*).* Infatti esso è chiuso: e per il teorema precedente non contiene alcun punto isolato.

5. Il teorema precedente si può immediatamente estendere quando al punto (00) si sostituisca un punto  $(\xi, \eta)$  generico, alla famiglia dei piani caratteristici  $x = \text{cost.}$ , una famiglia di varietà caratteristiche *regolare* nell'intorno del punto  $(\xi, \eta)$ . Con quest'ultima espressione vogliamo indicare una famiglia di superficie caratteristiche regolari nell'intorno di  $(\xi, \eta)$  dipendenti analiticamente da un parametro  $\alpha$  per modo che per ogni punto dell'intorno passi una ed una sola superficie della famiglia. Perchè l'equazione  $\varphi(x, y, \alpha)$  rappresenti una tale famiglia occorre quindi e basta: 1.<sup>o</sup> che per  $\alpha = \alpha_0$  sia  $\varphi(\xi, \eta, \alpha_0) = 0$ ; 2.<sup>o</sup> che per ogni punto  $(x, y)$  dell'intorno di  $(\xi, \eta)$  passi una ed una sola superficie della famiglia, in altri termini che l'equazione  $\varphi(x, y, \alpha) = 0$  si possa risolvere rapporto ad  $\alpha$ , e cioè che sia  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)_{(\xi, \eta, \alpha_0)} \neq 0$ ; 3.<sup>o</sup> che  $(\xi, \eta)$  ed ogni punto dell'intorno sia regolare per la superficie passante per esso,

---

(\*) Era noto che un punto singolare non può essere isolato, e quindi che l'insieme dei punti singolari è perfetto. Il corollario ci dice che esso rimane perfetto se ne sopprimiamo l'insieme dei punti singolari non essenziali.

e cioè che una almeno delle variabili  $x$  oppure  $y$  si possa esprimere per una serie di potenze intere di  $y$  od  $x$  rispettivamente; deve esser quindi

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{(\xi, \eta, \alpha_0)} \neq 0, \text{ oppure } \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{(\xi, \eta, \alpha_0)} \neq 0.$$

Ciò posto, a dimostrare la nostra affermazione, si scriva l'equazione della famiglia regolare di superficie nella forma  $\psi(x, y) = \alpha$ , il che per 2.<sup>o</sup> è possibile:

e sia ad es.:  $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{(\xi, \eta)} \neq 0$ . Si faccia la trasformazione di variabili  $x' = \psi(x, y) - \alpha_0$ ,

$y' = y - \eta$ ; poichè è  $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{(\xi, \eta)} \neq 0$ , è questa una trasformazione regolare nel

punto  $(\xi, \eta)$ . Una funzione  $f(x, y)$  che abbia in  $(\xi, \eta)$  una singolarità essenziale e che sia meromorfa nei punti della superficie  $\psi(x, y) = \alpha_0$  diversi da  $(\xi, \eta)$ , diviene una funzione  $F(x', y')$  avente una singolarità essenziale in  $(0, 0)$  e meromorfa negli altri punti di  $x' = 0$ . Essa avrà quindi nell'intorno di  $x' = 0$   $y' = 0$  un punto singolare essenziale almeno su ogni piano  $x' = \text{cost.}$ ; e cioè la  $f(x, y)$  avrà un punto singolare essenziale almeno nell'intorno di  $(\xi, \eta)$  su ogni superficie  $\psi(x, y) = \alpha$ . Conchiuderemo dunque col seguente

**TEOREMA.** *Se  $(\xi, \eta)$  è un punto singolare essenziale per la funzione analitica, monodroma  $f(x, y)$ , e si ha una famiglia regolare analitica di superficie caratteristiche nell'intorno di  $(\xi, \eta)$  tale che in questo intorno sulla superficie passante per  $(\xi, \eta)$ , la  $f(x, y)$  è meromorfa tranne che nel punto  $(\xi, \eta)$ , sopra ogni superficie della famiglia esiste nell'intorno di  $(\xi, \eta)$  un punto singolare essenziale almeno di  $f(x, y)$ .*

6. Sarà questo il teorema fondamentale per le considerazioni che seguono. Poichè ogni volta che, dato un insieme di punti, si può prendere una famiglia analitica di superficie caratteristiche regolare in un punto  $(\xi, \eta)$  dell'insieme, tale che una di esse contenga il solo punto  $(\xi, \eta)$  dell'insieme, ma infinite ne esistono che non ne contengono alcuno, potremo concludere che l'insieme dato non può essere l'insieme dei punti singolari essenziali di una funzione analitica.

Ci verrà sovente utile la seguente osservazione: *Se  $\varphi(x, y) = 0$  è una superficie caratteristica regolare in  $(\xi, \eta)$ , la famiglia che se ne ottiene assoggettandola a tutte le traslazioni che portano  $(\xi, \eta)$  nei vari punti di un piano caratteristico per  $(\xi, \eta)$  non tangente a  $\varphi(x, y) = 0$ , è regolare in  $(\xi, \eta)$ .*

Infatti se  $X - \xi - p(Y - \eta) = 0$  è un tal piano, la famiglia è data da  $\varphi(x + p\alpha, y + \alpha) = 0$ : e si ha:

- 1.° per  $\alpha = 0$ ,  $\varphi(\xi, \eta) = 0$ ;
- 2.° poichè  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)_{(\xi, \eta, 0)} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)_{(\xi, \eta, 0)} p + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{(\xi, \eta, 0)}$  ed il piano  $X - \xi = p(Y - \eta)$  non è tangente a  $\varphi(x, y) = 0$  sarà certamente  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)_{(\xi, \eta, 0)} \neq 0$ .
- 3.° poichè  $\varphi(x, y) = 0$  è regolare in  $(\xi, \eta)$ , è  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)_{(\xi, \eta, 0)} \neq 0$  oppure è  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{(\xi, \eta, 0)} \neq 0$ .

§ II.

7. Sia  $E$  un insieme perfetto di punti,  $O$  un punto arbitrario fisso dello spazio,  $r(O, P)$  la distanza di  $O$  dal punto generico  $P$  di  $E$ . Se esiste un punto  $P'$  di  $E$  tale che  $r(O, P')$  sia il massimo dei valori che  $r(O, P)$  prende nell'intorno di  $P'$ , non può esistere una funzione analitica monodroma la quale abbia l'insieme  $E$  come insieme di punti singolari essenziali.

Si supponga per semplicità che  $O$  sia l'origine, che le coordinate di  $P'$  siano  $(\xi, \eta)$  e che ad es. sia  $\xi \neq 0$ .

Osserviamo anzitutto che è sempre possibile costruire una superficie caratteristica data da un'equazione

$$x = \xi + a(y - \eta) + b(y - \eta)^2 + c(y - \eta)^3 + \dots \tag{1}$$

passante per  $P'$ , regolare in questo punto e tale che i suoi punti nell'intorno di  $P'$  diversi da  $P'$  abbiano da  $O$  una distanza maggiore (non mai uguale) di  $r(O, P')$ : basta perciò disporre convenientemente dei valori di  $a$  e  $b$ . Invero, posto  $a = a_1 + i a_2$ ,  $b = b_1 + i b_2$ , le equazioni reali contenute in (1) sono

$$\left. \begin{aligned} x_1 - \xi_1 &= a_1(y_1 - \eta_1) - a_2(y_2 - \eta_2) + b_1(y_1 - \eta_1)^2 - \\ &\quad - b_2(y_2 - \eta_2)^2 + 2b_2(y_1 - \eta_1)(y_2 - \eta_2) + \dots \\ x_2 - \xi_2 &= a_2(y_1 - \eta_1) + a_1(y_2 - \eta_2) + b_2(y_1 - \eta_1)^2 - \\ &\quad - b_1(y_2 - \eta_2)^2 + 2b_1(y_1 - \eta_1)(y_2 - \eta_2) + \dots \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

Quindi posto  $\varphi(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2) = \frac{1}{2} r^2(O, P)$  dove  $x_1, x_2$

sono date dalle (2) sarà:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\right)_{(\xi\eta)} &= \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \eta_1 & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\right)_{(\xi\eta)} &= \xi_2 a_1 - \xi_1 a_2 + \eta_2 \\ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2}\right)_{(\xi\eta)} &= 1 + |\alpha|^2 + 2(\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2) & \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2}\right)_{(\xi\eta)} &= 1 + |\alpha|^2 - 2(\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2) \\ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1 \partial y_2}\right)_{(\xi\eta)} &= 2(\xi_2 b_1 - \xi_1 b_2). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Affinchè dunque la  $\varphi$  e quindi la distanza da  $O$  dei punti di (1) abbia un minimo effettivo nel punto  $(\xi, \eta)$  basterà che: 1.º le  $a_1 a_2$  siano determinate per modo che

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\right)_{(\xi\eta)} &\equiv \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \eta_1 = 0 \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\right)_{(\xi\eta)} &\equiv \xi_2 a_1 - \xi_1 a_2 + \eta_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

il che è sempre possibile poichè il determinante di queste equazioni lineari è uguale a  $-|\xi|^2 \neq 0$  per ipotesi; 2.º inoltre  $b_1$  e  $b_2$  siano tali che

$$0 > \left[ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1 \partial y_2}\right)_{(\xi\eta)}^2 - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} \right]_{(\xi\eta)} \equiv 4|\xi|^2 \cdot |b|^2 - (1 + |\alpha|^2)^2 \quad (5)$$

e

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2}\right)_{(\xi\eta)} > 0. \quad (6)$$

Ma quanto a (5) basterà prendere  $|b| < \frac{1 + |\alpha|^2}{2|\xi|}$  perchè risulti soddisfatta; ed allora la (6) sarà soddisfatta di necessità poichè  $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2}\right)_{(\xi\eta)}$  e  $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2}\right)_{(\xi\eta)}$  avranno certamente il medesimo segno, e precisamente lo stesso segno della loro somma, che per le (3) è

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2}\right)_{(\xi\eta)} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2}\right)_{(\xi\eta)} = 1 + |\alpha|^2 > 0.$$

Ciò posto, supponiamo dato un insieme  $E$  quale è stato detto nell'enunciato. Costruiamo come si è fatto ora una superficie caratteristica  $S$  passante per  $P'$ , regolare in  $P'$ , tale che tutti i suoi punti nell'intorno di  $P'$  abbiano

da  $O$  una distanza maggiore di  $r(O P')$  ed assoggettiamo  $S$  a tutte le traslazioni che portano  $P'$  in un punto del piano caratteristico passante per  $O P'$ . Questo piano non può essere il piano tangente in  $(\xi \eta)$  a  $S$ ; infatti le (4) esprimono precisamente che il piano caratteristico tangente a  $S$  giace nell'iperpiano  $\xi_1 (X_1 - \xi_1) + \xi_2 (X_2 - \xi_2) + \eta_1 (Y_1 - \eta_1) + \eta_2 (Y_2 - \eta_2) = 0$ , normale alla retta che congiunge  $O$  con  $P'$ , la quale è invece contenuta nel piano caratteristico  $O P'$ . Quindi pel n. 6 la famiglia di superficie caratteristiche così costruita è regolare nel punto  $P'$ . E delle superficie di questa famiglia, la superficie  $S$  ha nell'intorno di  $P'$  il solo punto  $P'$  comune con  $E$ ; mentre le infinite superficie  $S'$  che si hanno per una traslazione sufficientemente piccola lungo la retta  $\overrightarrow{O P'}$  nel verso da  $O$  a  $P'$ , non hanno nell'intorno di  $P'$  alcun punto comune con  $E$  (\*). Se ora fosse  $E$  l'insieme dei punti singolari essenziali di una funzione  $f(x y)$  meromorfa e monodroma, la superficie  $S$  non avrebbe nell'intorno di  $P'$  che il solo punto  $P'$  singolare essenziale per  $f(x y)$ , e le superficie  $S'$  non avrebbero punti singolari essenziali per  $f(x y)$ : ora questo contraddice al teorema del n. 5: quindi è assurda l'esistenza di  $f(x y)$ .

*Corollarii. I. L'insieme dei punti singolari di una funzione  $f(x y)$  non può contenere una parte perfetta isolata tutta al finito.* Poichè evidentemente in una tale parte esisterebbe un punto quale il punto  $P'$  del teorema precedente.

In particolare si può dare a questo corollario la forma seguente:

*II. Se una funzione  $f(x y)$  è meromorfa in tutti i punti di una ipersuperficie chiusa, è meromorfa all'interno di essa (\*\*).* Onde segue ad esempio che una funzione monodroma, meromorfa di due variabili non può avere spazii lacunari tutti al finito. È questo un primo teorema che contraddice all'affermazione del WEIERSTRASS richiamata al n. 1: ne vedremo tosto altri anche più interessanti nei nn. seguenti e nel § III.

8. Dal precedente teorema è però agevole trarre conseguenze un po' più nascoste che i precedenti corollarii.

*Consideriamo nei piani  $y = \text{cost.}$  il cerchio  $|x| \leq r$ , nei piani  $x = \text{cost.}$*

(\*) Poichè per tale traslazione il punto  $P'$  si allontanerà da  $O$  e lo stesso accadrà dei punti di un intorno di  $P'$ .

(\*\*) Per le funzioni oloforme in tutti i punti di una ipersuperficie chiusa vedi HARTOGS, l. c., Münch. Sitz. Ber.

un campo  $B_1$ , che supponiamo tutto interno al cerchio  $|y| \leq r_1$ , e chiamiamo  $C_1$  il suo contorno. Supponiamo che una funzione  $f(xy)$  sia meromorfa:

a) in tutti i punti  $(0, y)$  dove  $y$  è in  $B_1$  o su  $C_1$ ,

b) in tutti i punti  $(xy)$  dove  $y$  è su  $C_1$  e  $|x| < r$ ;

allora potremo affermare che la funzione  $f(xy)$  è meromorfa in tutti i punti  $(xy)$  dove  $|x| < r$  ed  $y$  è in  $B_1$ .

Se il teorema non fosse vero, esisterebbe un punto singolare essenziale  $(\xi, \eta)$  per cui  $|\xi| < r$  ed  $\eta$  è in  $B_1$ : poniamo  $|\xi| = \rho$ .

Facciamo allora la trasformazione  $X = \frac{k}{x}$  dove  $k = \frac{r_1 r \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$ . La funzione  $f(xy)$  diverrà una funzione  $F(Xy)$ ; e siccome la funzione  $f(xy)$  è meromorfa nei punti  $(0, y)$  quando  $y$  è in  $B_1$  o su  $C_1$ , e quindi pure esiste un numero  $\sigma$  tale che  $f(xy)$  è meromorfa in tutti i punti  $(xy)$  per cui  $y$  è in  $B_1$  o su  $C_1$  e  $|x| \leq \sigma$ , anche la  $F(Xy)$  è meromorfa in tutti i punti  $(X, y)$  per cui  $|X| \geq \frac{k}{\sigma}$  e  $y$  è in  $B_1$  o su  $C_1$ ; e poichè la funzione  $f(xy)$  è meromorfa in tutti i punti  $(xy)$  per cui  $|x| < r$  ed  $y$  è su  $C_1$ , la  $F(Xy)$  è pure meromorfa in tutti i punti  $(Xy)$  per cui  $|X| > \frac{k}{r} = \frac{r_1 \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$  e  $y$  su  $C_1$ ; ed infine  $F(Xy)$  avrà nel punto  $\left(\frac{k}{\xi}, \eta\right)$ , per l'ipotesi fatta su  $f(xy)$ , un punto singolare essenziale interno al campo  $\left[|X| > \frac{r_1 \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}, y \text{ in } B_1\right]$ .

Consideriamo l'insieme  $E_1$  dei punti singolari essenziali di  $F(Xy)$  all'interno o sul contorno del campo  $\left[|X| > \frac{r_1 \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}, y \text{ in } B_1 \text{ o su } C_1\right]$ ; sarà questo un insieme perfetto tutto al finito, e di più, poichè la funzione  $F(Xy)$  è meromorfa per  $y$  su  $C_1$  ed  $|X| > \frac{r_1 \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$ , se esistono punti di  $E_1$  sul contorno del campo essi appartengono necessariamente alla varietà  $|X| = \frac{r_1 \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$ ,  $y$  in  $B_1$ . D'altra parte se diciamo  $R$  il massimo della distanza di un punto di  $E_1$  dall'origine, poichè  $\left(\frac{k}{\xi}, \eta\right)$  è un punto di  $E_1$  sarà certamente  $R \geq \sqrt{\frac{k^2}{\rho^2} + |\eta|^2} \geq \frac{k}{\rho} = \frac{r r_1}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$ . Ne segue che un punto  $P'$  di  $E_1$  il quale disti dall'origine di  $R$  è certamente interno al campo  $\left[|X| > \frac{r_1 \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}, y \text{ in } B_1 \text{ o su } C_1\right]$ .

$y$  in  $B_1$  o su  $C_1$ ], perchè la sfera  $|X|^2 + |y|^2 = R^2$  incontra la varietà  $|X| = \frac{r_1 \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$  in punti per cui è  $|y| = \sqrt{R^2 - \frac{r_1^2 \rho^2}{r^2 - \rho^2}} \geq r_1$  e quindi certo all'esterno del campo  $B_1$ .

Trovandosi  $P'$  all'interno — e non sul contorno — del campo  $\left[ |X| > \frac{r_1 \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}, y \text{ in } B_1 \right]$ , ne segue che nell'intorno di  $P'$  non si trovano altri punti singolari essenziali di  $F(Xy)$  oltre a quelli di  $E_1$ ; onde il punto  $P'$  si troverà nelle condizioni del teorema del n. precedente: il che è assurdo. Quindi anche  $f(xy)$  non può certamente avere un punto singolare essenziale all'interno del campo  $|x| < r, y \text{ in } B_1$  c. v. d.

9. Invece di considerare sui piani  $y = \text{cost.}$  il cerchio  $|x| = r$ , si potrà evidentemente considerare un campo  $B$  che si possa rappresentare conformemente su un cerchio di raggio  $r$ : poichè se  $x' = \psi(x)$  è la funzione analitica della variabile  $x$  che dà questa rappresentazione conforme, la trasformazione  $x' = \psi(x), y = y$  sarà regolare per  $x$  interno a  $B$  ed  $y$  qualunque, onde muta la funzione  $f(xy)$  in una funzione  $F(x'y)$  che sarà meromorfa all'interno del campo  $[|x'| < r, y \text{ in } B]$ , allora ed allora soltanto che la funzione  $f(xy)$  è meromorfa per  $x$  interno al campo  $B$  ed  $y$  interno al campo  $B_1$ . Onde potremo concludere:

*Se  $B$  rappresenta un campo qualunque nei piani  $y = \text{cost.}$  che si possa rappresentare conformemente su un cerchio ed  $x = a$  è un punto di esso, se  $B_1$  rappresenta un campo interno al cerchio  $|y| \leq r_1$  e  $C_1$  ne indica il contorno, se infine  $f(xy)$  è una funzione meromorfa*

- a) in tutti i punti  $(ay)$  dove  $y$  è in  $B_1$  o su  $C_1$ ,
- b) in tutti i punti  $(xy)$  dove  $x$  è in  $B$  e  $y$  su  $C_1$ ,

*allora potremo affermare che la funzione  $f(xy)$  è meromorfa in tutti i punti  $(xy)$  per cui  $x$  è in  $B$  ed  $y$  in  $B_1$  o su  $C_1$  (\*).*

10. Sia  $f(xy)$  una funzione meromorfa sul piano  $x = 0$  quando  $y$  è interno ad un certo campo  $B_1$  tutto al finito o sul contorno  $C_1$  di esso; sopra ogni piano  $y = y_0, y_0$  essendo un punto di  $B_1$  o  $C_1$ , esisterà un massimo

(\*) Pel caso che la  $f(xy)$  sia olomorfa vedi HARTOGS, l. c. 2.<sup>o</sup>

cerchio di centro  $x=0$  entro cui  $f(x, y)$  è meromorfa. Diciamo  $R_{y_0}$  il raggio di tale cerchio (\*): sarà  $R_{y_0}$  la minima distanza dal piano  $x=0$  dei punti singolari essenziali di  $f(x, y)$  appartenenti al piano  $y=y_0$ . Osserviamo subito per la  $R_y$  la seguente proprietà:

*La funzione  $R_y$  è semicontinua inferiormente; ossia, assegnato un numero  $\varepsilon$ , è sempre possibile trovare un numero  $\delta$  tale che per  $|y - y_0| < \delta$  sia  $R_y \geq R_{y_0} - \varepsilon$ .*

Infatti ove ciò non fosse esisterebbero infiniti valori  $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots$  tali che  $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = y_0$  e  $R_{y_i} < R_{y_0} - \varepsilon$ . I punti singolari essenziali  $(x_i, y_i)$  con  $|x_i| = R_{y_i}$  che si trovano nei piani  $y = y_i$  avrebbero allora un punto limite  $(x_0, y_0)$  con  $|x_0| \leq R_{y_0} - \varepsilon$ , e questo sarebbe necessariamente un punto singolare essenziale, il che è assurdo poichè per ipotesi entro al cerchio  $|x| < R_{y_0}$  sul piano  $y = y_0$  non esistono punti singolari essenziali.

Ma dal teorema del n. 8 segue una proprietà ancora più notevole:

*Se  $p_y$  è una funzione reale di  $y_1$  ed  $y_2$ , definita in  $B_1$ , che sul contorno  $C_1$  soddisfa alla limitazione  $0 < p_y \leq R_y$  ed all'interno di  $B_1$  all'equazione  $\Delta''_2 \log p_y = 0$  (\*\*), in tutti i punti di  $B_1$  sarà pure*

$$p_y \leq R_y. \quad (7)$$

Infatti su  $C_1$ , poichè è  $0 < p_y \leq R_y$ ,  $\log p_y$  è sempre finito: l'ipotesi che in  $B_1$  sia  $\Delta''_2 \log p_y = 0$  porta che  $\log p_y$  sia sempre finita e regolare: quindi sarà sempre  $p_y > 0$  anche all'interno di  $B_1$ .

Indichiamo con  $q_y$  la funzione coniugata di  $\log p_y$  — fissandone arbitrariamente la costante additiva —; le funzioni

$$\varphi(y) = \log p_y + i q_y$$

$$\psi(y) = e^{\varphi(y)} = p_y e^{iq_y}$$

sono funzioni regolari analitiche di  $y$  in  $B_1$ ; e sarà  $|\psi(y)| = p_y > 0$ .

(\*) L'HARTOGS chiama analogamente  $R'_x$  la minima distanza di un punto singolare essenziale o no del piano  $x=x_0$  dal piano  $y=0$ . Cfr. l. c., *Math. Ann.* E mediante considerazioni sugli sviluppi in serie dimostra per questa funzione proprietà analoghe a quelle che seguono nel testo. Cfr. specialmente i §§ 5, 6, 8, 10.

(\*\*) Poniamo qui e nel seguito  $\Delta'_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ ,  $\Delta''_2 = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$ .



Facciamo allora la trasformazione

$$X = \frac{x}{\psi(y)} \quad Y = y. \quad (8)$$

È questa una trasformazione regolare invertibile in tutti i punti per cui  $y$  è interno a  $B_1$  o su  $C_1$ ; e se, come segue dall'ipotesi che su  $C_1$  sia  $R_y \geq p_y$  la  $f(x, y)$  è meromorfa

a) nei punti  $(0, y)$  per cui  $y$  è in  $B_1$  o su  $C_1$ ,

b) nei punti  $(x, y)$  quando  $y$  è su  $C_1$  e  $|x| < p_y$ ;

la funzione  $F(X, Y)$  trasformata di  $f(x, y)$  per la (8) è meromorfa

a') nei punti  $(0, Y)$  per cui  $Y$  è in  $B_1$  o su  $C_1$ ,

b') nei punti  $(X, Y)$  per cui  $Y$  è su  $C_1$  e  $|X| < 1$ .

Segue dal teorema del n. 8 che  $F(X, Y)$  è meromorfa in tutti i punti  $(X, Y)$  per cui  $Y$  è in  $B_1$  o su  $C_1$ , e  $|X| < 1$ ; ossia che  $f(x, y)$  è meromorfa in tutti i punti per cui  $y$  è in  $B_1$  o su  $C_1$ , e  $|x| < |\psi(y)| = p_y$ . Quindi sarà certo  $R_y \geq p_y$ : c. v. d.

Dai due teoremi dimostrati per  $R_y$  seguono, ragionando come fa l'HARTOGS nella Memoria citata dei *Math. Ann.* al § 8 (n. 1, Zusatz, pag. 47 e 48; e n. 3), i seguenti corollarii:

1.º *Mantenute le notazioni del teorema precedente, se anche in un sol punto  $y_0$  interno a  $B_1$  è  $R_{y_0} = p_{y_0}$  sarà allora ovunque in  $B_1$*

$$R_y = p_y;$$

2.º *Se  $R_y$  ammette le derivate dei primi due ordini rapporto ad  $y_1$  e  $y_2$ , essa soddisfa alla disuguaglianza*

$$\Delta''_2 \log R_y \leq 0.$$

Il teorema precedente ed il suo primo corollario sono — insieme col teorema fondamentale del § I — i teoremi su cui fonda l'HARTOGS tutti i ragionamenti che svolge nella Memoria citata degli *Acta Mathematica*: senza ripeterli quindi noi potremo conchiudere coi seguenti enunciati che si ottengono da quelli dell'HARTOGS mutando le parole « funzione regolare » e « punto singolare » nelle parole « funzione meromorfa » e « punto singolare essenziale. »

1. *Se  $x = 0$   $y = 0$  è un punto singolare essenziale per una funzione ana-*

litica  $f(x, y)$  monodroma (\*) di  $x$  ed  $y$ ; e se l'insieme dei punti singolari essenziali di  $f(x, y)$  in un certo intorno  $|x| < \rho, |y| < \rho'$  dell'origine è così costituito che in ogni piano  $x = x_0$  di esso vi sia al più un punto singolare essenziale mentre nei residui la funzione è meromorfa, esiste allora su ogni piano  $x = \xi$  dove  $\xi$  appartiene ad un conveniente intorno dello zero un punto singolare essenziale  $(\xi, \varphi(\xi))$ , e la funzione  $\varphi(\xi)$  è una funzione analitica regolare di  $\xi$  (l. c., pag. 70).

II. Se nelle stesse condizioni del teorema precedente su ogni piano  $x = \xi \neq 0$  esistono proprio  $r$  punti singolari essenziali di  $f(x, y)$   $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$ , le loro funzioni simmetriche elementari sono funzioni regolari analitiche di  $\xi$ ; od in altri termini le  $\tau_i(\xi)$  sono funzioni analitiche di  $\xi$  le quali per  $\xi = 0$  hanno al più un punto di diramazione (l. c., pag. 76).

Non tralascieremo di notare che la proprietà dimostrata per la funzione  $R_y$  è in certa qual guisa caratteristica per essa: precisamente che se è assegnata una funzione  $U_y$  reale, finita, avente derivate prime e seconde finite e continue e soddisfacente alla condizione  $\Delta''_2 U_y = 0$  in un campo  $T$ , è sempre possibile trovare una funzione  $f(x, y)$  per cui la funzione  $R_y$  sia in  $T$  uguale ad  $e^{U_y}$ . Infatti in queste ipotesi L'HARTOGS costruisce (\*\*) una funzione  $\varphi(x, y)$  che ha in ogni piano  $y = y_0$  sopra il cerchio di raggio  $e^{U_y}$  e centro l'origine un punto singolare essenziale o no, ed è regolare all'interno del cerchio: basterà allora considerare la funzione  $f(x, y) = e^{\varphi(x, y)}$ , perchè la nuova funzione ottenuta pure restando regolare all'interno di quei cerchi abbia sul contorno di essi una singolarità essenziale.

### § III.

11. Sia  $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$  una ipersuperficie  $S$  dello spazio a 4 dimensioni: vogliamo esaminare quando essa possa essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitica meromorfa: in altri termini vogliamo

---

(\*) Evidentemente si può anche supporre  $f(x, y)$  un ramo monodromo nell'intorno del punto (00) di una funzione polidroma. L'HARTOGS tratta anche il caso in cui  $f(x, y)$  abbia un punto critico in (00), non sarebbe difficile anche a noi raggiungere con qualche complemento la stessa estensione.

(\*\*) L. c., *Math. Ann.*, § 10.

vedere quando la  $S$  è tale che esiste una funzione analitica meromorfa in una delle regioni  $\Pi$  che hanno  $S$  per frontiera per cui tutti i punti di  $S$  siano singolari essenziali. Cambiando al più il segno di  $\varphi$  possiamo supporre che la regione  $\Pi$  sia quella in cui è

$$\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) > 0.$$

Applicheremo ancora il teorema del § I. Consideriamo un punto  $P \equiv (\xi, \eta)$  di  $S$ , e supponiamo di poter costruire una superficie caratteristica  $\Sigma$  che passi per  $P$ , ed ivi sia regolare e tocchi l'ipersuperficie  $S$ , ed infine non abbia nell'intorno di  $P$  altri punti comuni con  $S$ . Essa cadrà nell'intorno di  $P$  tutta in una delle due regioni in cui  $S$  divide lo spazio: affinché nella regione  $\varphi > 0$  possa esistere una funzione  $f(x, y)$  che ammetta  $S$  come frontiera, è necessario che ogni tale superficie caratteristica cada nella regione  $\varphi < 0$ .

Infatti associamo  $\Sigma$  alle traslazioni che portano  $P$  nei punti del piano caratteristico che contiene la normale a  $S$  per  $P$ ; poichè questo piano non è tangente a  $\Sigma$ , la famiglia di superficie così generata è una famiglia regolare in  $P$ . Inoltre le superficie corrispondenti ad una traslazione sufficientemente piccola diretta secondo la normale a  $S$  in  $P$  volta verso la regione in cui cade  $\Sigma$  non hanno nell'intorno del punto  $P$  punti comuni con  $S$  (\*). Se quindi  $\Sigma$  giacesse nella regione  $\varphi > 0$ , la  $f(x, y)$  sarebbe meromorfa in tutti i punti di  $\Sigma$  dell'intorno di  $P$ , fuori che in  $P$ , e meromorfa in tutti i punti dell'intorno di  $P$  di queste superficie: e ciò per il teorema I è assurdo.

12. Cerchiamo dunque di costruire una superficie caratteristica  $\Sigma$  che goda rispetto a  $S$  nel punto  $(\xi, \eta)$  delle proprietà dette sopra. Supporremo che la  $\varphi$  abbia le derivate dei primi due ordini finite e continue. In un punto regolare di  $S$  non si avrà  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = 0$ ; onde sarà  $\Delta'_1 \varphi = 0$  oppure  $\Delta''_1 \varphi = 0$  (\*\*).

(\*) Tale affermazione è geometricamente evidente: ci si può ridurre all'intuizione geometrica nello spazio a 3 dimensioni segnando con un iperpiano variabile attorno alla normale a  $S$  in  $P$ .

(\*\*) In modo analogo a quanto si fece al n. 10 poniamo

$$\Delta'_1 = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2; \quad \Delta''_1 = \left( \frac{\partial}{\partial y_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y_2} \right)^2; \quad \Delta'_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}; \quad \Delta''_2 = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}.$$

Supporremo, per fissare le idee, che nel punto  $(\xi, \eta)$  sia  $\Delta'_1 \varphi \neq 0$ .

La superficie  $\Sigma$  sia allora data come nel § II dall'equazione tra le variabili complesse:

$$x = \xi + a(y - \eta) + b(y - \eta)^2 + c(y - \eta)^3 + \dots \quad (1)$$

e cioè dal sistema di equazioni tra le variabili reali:

$$\left. \begin{aligned} x_1 - \xi_1 &= a_1(y_1 - \eta_1) - a_2(y_2 - \eta_2) + b_1(y_1 - \eta_1)^2 - \\ &\quad - b_1(y_2 - \eta_2)^2 - 2b_2(y_1 - \eta_1)(y_2 - \eta_2) + \dots \\ x_2 - \xi_2 &= a_2(y_1 - \eta_1) + a_1(y_2 - \eta_2) + b_2(y_1 - \eta_1)^2 - \\ &\quad - b_2(y_2 - \eta_2)^2 + 2b_1(y_1 - \eta_1)(y_2 - \eta_2) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Calcolando il valore di  $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)$  nei punti di  $\Sigma$  avremo dunque, ricordando che  $P$  è su  $S$  ossia che  $\varphi(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) &= (y_1 - \eta_1) \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} a_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right] + \\ &\quad + (y_2 - \eta_2) \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} a_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} a_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \right] + \\ &\quad + (y_1 - \eta_1)^2 \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} b_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} b_2 + A_1 \right] + \\ &\quad + (y_2 - \eta_2)^2 \left[ -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} b_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} b_2 + C_1 \right] + \\ &\quad + 2(y_1 - \eta_1)(y_2 - \eta_2) \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} b_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} b_2 + B_1 \right] + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

i termini trascurati essendo di ordine maggiore del secondo nelle quantità  $y_1 - \eta_1, y_2 - \eta_2$ . Nella (3) si deve intendere che le  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}$  siano calcolate nel punto  $(\xi, \eta)$ : inoltre  $A_1, B_1, C_1$  non dipendono da  $b_1$  e  $b_2$  e precisamente è:

$$\left. \begin{aligned} 2A_1 &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} a_1^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} a_1 a_2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} a_2^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_1} a_1 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_1} a_2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2}, \\ B_1 &= - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) a_1 a_2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} (a_1^2 - a_2^2) + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_1} \right) a_1 - \\ &\quad - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_1} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_2} \right) a_2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1 \partial y_2}, \\ 2C_1 &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} a_1^2 - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} a_1 a_2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} a_2^2 - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_2} a_2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_2} a_1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

dove però le derivate seconde debbono intendersi tutte calcolate in un punto intermedio del segmento che unisce  $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$  con  $(x_1, x_2, y_1, y_2)$ . Affinchè la superficie  $\Sigma$  data da (2) abbia il solo punto  $P$  comune con  $S$  occorrerà intanto che sia

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} a_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} a_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} a_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = 0. \quad (5)$$

Per l'ipotesi che in  $(\xi, \eta)$  sia  $\Delta'_1 \varphi = 0$  queste equazioni ammettono sempre soluzione; e precisamente si ha

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{\Delta'_1 \varphi} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \right\} \\ a_2 &= \frac{1}{\Delta'_1 \varphi} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Affinchè  $\Sigma$  sia dunque una delle superficie richieste occorre che  $a_1$  ed  $a_2$  siano dati dalle (6); riconosciamo subito con ciò che necessariamente è anche soddisfatta la condizione che  $\Sigma$  ed  $S$  siano tangenti poichè le (5) esprimono precisamente che il piano tangente a  $\Sigma$  giace nell'iperpiano tangente a  $S$ .

Ma le condizioni precedenti non bastano ad assicurare che  $\Sigma$  abbia il solo punto  $P$  comune con  $S$ ; perciò basterà invece determinare  $b_1$  e  $b_2$  per modo che la forma quadratica costituita dai termini di secondo grado di (3) sia definita: ed anzi per la supposta continuità delle derivate seconde di  $\varphi$ , basterà che sia definita quella forma che si ottiene da questa col prendere per le derivate seconde delle  $\varphi$  che compaiono nei coefficienti di quella forma i valori che esse assumono nel punto  $(\xi, \eta)$ ; — e così intenderemo di fare d'ora in poi —. Ed allora affinchè  $\Sigma$  giaccia nel campo  $\varphi < 0$  occorrerà che la forma sia definita negativa.

Ora affinchè questa forma sia definita occorre si abbia

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} b_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} b_2 + B_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} b_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} b_2 + A_1 \right) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} b_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} b_2 - C_1 \right) < 0 \quad (7)$$

ed allora essa sarà definita positiva o negativa a seconda che è  $> 0$  oppure  $< 0$  la somma dei coefficienti di  $(y_1 - \eta_1)^2$  e  $(y_2 - \eta_2)^2$ ; ossia secondo che

$$A_1 + C_1 > 0 \quad \text{oppure} \quad A_1 + C_1 < 0.$$

Ma perchè  $b_1$  e  $b_2$  si possano determinare per modo che (7) sia soddisfatta occorre e basta che sia  $A_1 + C_1 \neq 0$ : perchè se  $A_1 + C_1 = 0$  basta

determinare  $b_1$  e  $b_2$  colle condizioni che  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} b_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} b_2 + B_1 = 0$  e che  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} b_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} b_2$  sia compreso fra  $-A_1$  e  $C_1$  perchè risulti soddisfatta la (7), mentre se  $A_1 = -C_1$  il primo membro di (7), come somma di due quadrati, risulterà  $\geq 0$ .

Concludiamo dunque che se  $A_1 + C_1 > 0$  si può rendere la nostra forma definita positiva, se  $A_1 + C_1 < 0$ , la si può rendere definita negativa. E quindi infine che affinchè non si possa costruire una superficie  $\Sigma$  come quella indicata al n. precedente, oppure che essa cada necessariamente nella regione  $\varphi < 0$ , occorre sia

$$A_1 + C_1 \leq 0. \quad (8)$$

Sostituiamo ad  $A_1$ ,  $C_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  i valori dati da (4) e (6): la (8) diviene

$$A_1 + C_1 = \frac{1}{2\Delta'_1\varphi} \left\{ \Delta'_2\varphi \cdot \Delta''_1\varphi + \Delta''_2\varphi \cdot \Delta'_1\varphi - 2 \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \right] \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_2} \right] - \right. \\ \left. - 2 \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right] \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_1} \right] \right\} \leq 0. \quad (9)$$

Poichè si è supposto  $\Delta'_1\varphi > 0$  e quindi  $\Delta'_1\varphi > 0$ , la (9) si tradurrà quindi nel chiedere che la parte tra parentesi del secondo membro di (9) sia  $\leq 0$ . In tale forma la condizione (9) viene ad essere simmetrica nelle due coppie di variabili  $x_1$ ,  $x_2$  ed  $y_1$ ,  $y_2$ , onde essa risulta indipendente dalla ipotesi che sia  $\Delta'_1\varphi > 0$  piuttosto che  $\Delta''_1\varphi < 0$ .

Raccogliendo:

*Affinchè una ipersuperficie  $S$  di equazione  $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$  possa essere frontiera per una funzione  $f(x, y)$  analitica, monodroma, meromorfa in uno dei campi in cui essa divide lo spazio (od in parte di esso) è necessario che la quantità*

$$\mathcal{Q}\varphi \equiv \Delta'_2\varphi \cdot \Delta''_1\varphi + \Delta''_2\varphi \cdot \Delta'_1\varphi - 2 \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \right\} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_2} \right\} - \\ - 2 \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right\} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_1} \right\} \right\} \quad (10)$$

*conservi nei punti di  $S$  un segno determinato.*

Se si ha sempre  $\mathfrak{G} \varphi \leq 0$  una funzione  $f(x, y)$  che abbia  $S$  come frontiera può esistere solo nel campo in cui è  $\varphi > 0$ ; se si ha sempre  $\mathfrak{G} \varphi \geq 0$  una funzione  $f(x, y)$  che abbia  $S$  per frontiera può esistere solo nel campo  $\varphi < 0$ .

Corollario. Le sole ipersuperficie  $\varphi = 0$  che possono essere frontiera comune per due funzioni  $f(x, y)$  meromorfe l'una nel campo  $\varphi > 0$ , l'altra nel campo  $\varphi < 0$  sono le soluzioni dell'equazione differenziale

$$\mathfrak{G} \varphi = 0. \tag{11}$$

13. Sarebbe ora assai interessante rispondere alla domanda: *Le condizioni precedenti sono caratteristiche per le ipersuperficie che possono essere frontiera di qualche funzione analitica?* Con maggior precisione: *data una funzione  $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$  tale che nei punti della ipersuperficie  $\varphi = 0$  (o di un pezzo di essa) sia sempre  $\mathfrak{G} \varphi \geq 0$ , esiste sempre una funzione  $f(x, y)$  analitica, monodroma, meromorfa nei punti del campo  $\varphi < 0$  dell'intorno della ipersuperficie, che abbia l'ipersuperficie medesima (o quella parte di essa) come frontiera e cioè come varietà di punti singolari essenziali?*

Non mi è riuscito di dare a questa domanda una risposta esauriente; mi pare tuttavia che non sia privo di interesse il mostrare come nel caso particolare in cui la funzione  $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)$  soddisfaccia nei punti in cui  $\varphi = 0$  all'equazione

$$\mathfrak{G} \varphi = 0 \tag{11}$$

è realmente possibile costruire funzioni meromorfe sia nel campo  $\varphi < 0$  che nel campo  $\varphi > 0$  che abbiano per frontiera l'ipersuperficie  $S$  od almeno una parte di essa sufficientemente limitata: risultato che mi pare renda molto probabile che anche alla domanda più generale fatta sopra si dovrà rispondere affermativamente.

Dimostriamo perciò il seguente lemma che mi pare anche interessante per se medesimo:

*Le ipersuperficie  $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$  tali che nei loro punti la funzione  $\varphi$  soddisfa l'equazione (11) sono tutte e sole le ipersuperficie dello spazio a quattro dimensioni composte con una semplice infinità di superficie caratteristiche.*

Affinchè l'ipersuperficie

$$\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0 \tag{12}$$

sia composta con  $\infty^1$  superficie caratteristiche è necessario e sufficiente che si possa trovare una funzione  $\psi(x_1, x_2, y_1, y_2)$  tale che associando alla (12) l'e-

quazione

$$\psi(x_1, x_2, y_1, y_2) = \alpha \quad (13)$$

dove  $\alpha$  indica un parametro arbitrario, si possano dalle (12) e (13) ricavare ad es.: le  $x_1, x_2$  in funzione di  $y_1, y_2$  in modo che risultino soddisfatte le equazioni

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \quad \frac{\partial x_1}{\partial y_2} = -\frac{\partial x_2}{\partial y_1} \quad (14)$$

Al sistema formato dalle (12) e (13) se ne può evidentemente sostituire uno equivalente in cui la  $\psi$  risulti indipendente da  $x_1$  (o da  $x_2$ ): onde al posto della (13) potremo supporre di avere un'equazione del tipo

$$\psi(x_2, y_1, y_2) = \alpha \quad (15)$$

Le equazioni (14) si possono allora scrivere

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial y_2} &= 0 \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial y_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

e queste dovranno essere soddisfatte per  $x_1, x_2, y_1, y_2$  soddisfacenti a (12).

Le (16) sono un sistema di equazioni lineari alle derivate parziali per la  $\psi(x_2, y_1, y_2)$ ; affinchè esso ammetta una soluzione non costante occorre che sia completo (\*). Formiamo l'alternata delle due equazioni, ricordando che nell'eseguire questo calcolo occorre pensare le variabili  $x_1, x_2, y_1, y_2$

---

(\*) Può essere utile la considerazione che segue, la quale permette di prevedere, diremo così, sinteticamente che il risultato del calcolo del testo che esprime che il sistema (16) è completo, deve riportarci all'equazione  $\mathcal{C}\varphi = 0$ . Si ammetta perciò che, come è dimostrato nel n. seguente, una ipersuperficie composta di superficie caratteristiche possa sempre essere frontiera comune per due funzioni  $f(x, y)$  meromorfe l'una nel campo  $\varphi > 0$ , l'altra nel campo  $\varphi < 0$ . Ne segue per il n. 12 che per  $\varphi = 0$  dovrà necessariamente essere soddisfatta l'equazione di secondo ordine  $\mathcal{C}\varphi = 0$ . Ma d'altro canto l'esprimere che il sistema (16) è, per  $\varphi = 0$ , completo porta evidentemente ad un'equazione di secondo ordine che  $\varphi$  deve soddisfare nei punti  $\varphi = 0$ . Questa equazione non può quindi differire dall'equazione  $\mathcal{C}\varphi = 0$ .



legate dalla (12): otterremo l'equazione

$$\begin{aligned}
 & \left[ \Delta''_2 \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_1} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \right] \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \\
 & + \left[ -\Delta'_2 \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_1} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right] \frac{\partial \psi}{\partial y_1} + \\
 & + \left[ -\Delta'_2 \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_1} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \right] \frac{\partial \psi}{\partial y_2} = 0.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Ed affinché questa equazione sia conseguenza di (16) occorrerà che il determinante dei coefficienti di (16) e (17) sia nullo: sviluppando i calcoli si ottiene che deve essere perciò — nei punti di (12) —

$$\mathfrak{C} \varphi = 0.$$

Inversamente, soddisfatta questa equazione, il sistema (16) è completo; e presa una qualunque sua soluzione quale primo membro di (15), le (15) segano sulla varietà (12) un sistema semplicemente infinito di superficie caratteristiche. La simmetria rapporto alle variabili  $x_1, x_2$ , e  $y_1, y_2$  del risultato indica che questo è indipendente dall'aver supposto la (12) risolubile rapporto a  $x_1$ . Il lemma è quindi pienamente dimostrato.

14. Per provare ora che preso un pezzo sufficientemente piccolo di una ipersuperficie  $S$  soddisfacente a (11) è sempre possibile costruire una funzione analitica esistente nell'intorno di  $S$  da una parte prefissata e che ha  $S$  per frontiera noi dimostreremo che, almeno quando si suppone il campo che si considera sufficientemente piccolo, si può sempre immergere la semplice infinità di superficie caratteristiche costituenti  $S$  in una doppia infinità tale che per ogni punto del campo passi una ed una sola superficie  $S$  caratteristica. Costruiremo poi una funzione analitica ( $\neq 0$ ) che si annulli sopra infinite delle superficie caratteristiche così costruite aventi per insieme limite tutte le superficie di  $S$ : una tale funzione avrà evidentemente su  $S$  tutti punti singolari essenziali.

Il primo punto è quasi evidente. Supponiamo che l'origine sia un punto di  $S$  e che ad essa corrisponda il valore  $\alpha = 0$  del parametro  $\alpha$  nelle (15). Supponiamo come precedentemente che il sistema (12), (15) sia nell'intorno dell'origine risolubile rapporto  $x_1$  ed  $x_2$ : avremo

$$x_1 = \Phi_1(y_1, y_2, \alpha) \quad x_2 = \Phi_2(y_1, y_2, \alpha)$$

$\Phi_1$  e  $\Phi_2$ , essendo funzioni armoniche coniugate di  $y_1, y_2$ , e funzioni derivabili di  $\alpha$ ; almeno in un certo campo attorno ai valori  $y_1 = y_2 = \alpha = 0$ . Potremo anche scrivere:

$$x = \Phi(y, \alpha) \quad (18)$$

$\Phi$  essendo funzione analitica della variabile complessa  $y$  e derivabile della variabile reale  $\alpha$ . Avremo inoltre

$$\left| \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right|^2 = \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} \right)^2 = - \frac{\Delta'_1 \varphi}{\left[ \frac{\partial (\varphi \psi)}{\partial (x_1 x_2)} \right]^2} = 0.$$

Consideriamo allora l'insieme di superficie caratteristiche

$$x = \Phi(y, \alpha) + k \beta, \quad (19)$$

dove  $\beta$  è una variabile reale,  $k$  è un numero complesso  $\neq 0$ , e, tale che il

rapporto  $\frac{\left( \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)_{y, \alpha=0}}{k}$  è ancora un numero complesso (non reale). Le (19) comprendono come caso particolare per  $\beta = 0$  le superficie (18): di più in ogni punto dell'intorno dell'origine passa una ed una sola superficie caratteristica (19). Basta osservare che le (19) equivalgono alle

$$x_1 - \Phi_1(y_1, y_2, \alpha) - k_1 \beta = 0 \quad x_2 - \Phi_2(y_1, y_2, \alpha) - k_2 \beta = 0$$

e che nel punto  $x = y = \alpha = \beta = 0$  si ha che il determinante funzionale di queste equazioni rapporto ad  $\alpha$  e  $\beta$  è

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} k_2 - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} k_1 = k \Im \left[ \frac{\left( \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)_{y, \alpha=0}}{k} \right]$$

dove  $\Im(\mu)$  indica il coefficiente dell'immaginario di  $\mu$ : e quindi per le ipotesi fatte su  $k$  è certo  $\neq 0$ .

Noi potremo quindi nell'intorno dell'origine determinare un campo  $C$  interno al campo  $x < \rho$ ,  $y < \rho$  tale che per ogni punto appartenente a  $C$  passa una ed una sola superficie caratteristica (19) corrispondente ad  $\alpha < \sigma$ ,  $\beta < \sigma$ ; ed inversamente ad ogni valore  $\alpha < \sigma$ ,  $\beta < \sigma$  corrisponde una superficie (19) i cui punti aventi coordinata  $y$  minore in modulo a  $\rho$  sono interni a  $C$ . È chiaro per continuità che le superficie (19) per cui  $\beta > 0$

apparterranno ad una medesima delle regioni in cui  $S$  divide lo spazio, ad es.: alla  $\varphi > 0$ , le superficie per cui  $\beta < 0$  apparterranno all'altra.

Passiamo ora alla costruzione della funzione  $f(x, y)$ . Consideriamo perciò un insieme di punti  $(\alpha_n, \beta_n)$  tale che sia sempre  $\beta_n > 0$  (o sempre  $\beta_n < 0$ ) e che l'insieme derivato di esso sia l'insieme  $\alpha \leq \sigma, \beta = 0$ . Basta, perciò per es.: numerare al modo solito i valori razionali di  $\alpha$  minori di  $\sigma$  e prendere per  $\alpha_n$  l' $n$ -esimo punto in tale numerazione, per  $\beta_n$  il valore  $\frac{1}{n}$ .

Consideriamo allora il prodotto infinito (\*):

$$\Pi_n \left( \frac{x - \Phi(y, \alpha_n) - k \beta_n}{x - \Phi(y, \alpha_n)} \right) e^{p_n(x, y)} = \Pi_n \left( 1 - \frac{k}{n(x - \Phi(y, \alpha_n))} \right) e^{p_n(x, y)} \quad (20)$$

dove

$$p_n(x, y) = \left. \begin{aligned} & \frac{k}{n(x - \Phi(y, \alpha_n))} + \frac{1}{2} \frac{k^2}{n^2(x - \Phi(y, \alpha_n))^2} + \dots \\ & \dots + \frac{1}{n} \frac{k^n}{n^n(x - \Phi(y, \alpha_n))^n} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

È facile vedere che il prodotto (20) è uniformemente convergente in ogni campo  $\Gamma$  appartenente a  $C$  il quale non contenga alcun punto di  $S$ . Se ammettiamo per un momento tale convergenza, esso rappresenterà evidentemente una funzione analitica di  $x$  ed  $y$ , nulla su tutte le superficie caratteristiche (19) corrispondenti ai valori  $\alpha_n$  e  $\beta_n$  di  $\alpha$  e  $\beta$ ; e quindi, come dicemmo, una funzione che esiste nel campo  $\beta > 0$  ossia  $\varphi > 0$ , ed ha necessariamente  $S$  come frontiera. È chiaro che si potrebbe costruire una funzione analoga nel campo  $\varphi < 0$  col porre  $\beta_n = -\frac{1}{n}$ ; e con ciò resta dimostrato il nostro teorema.

Occorre quindi solo dimostrare la convergenza uniforme in un qualunque campo  $\Gamma$  del prodotto (20). Indichiamo perciò con  $d$  la minima distanza dei punti di  $\Gamma$  da  $S$ . Sarà per un qualunque punto  $(x_0, y_0)$  di  $\Gamma$ ,  $x_0 - \Phi(y_0, \alpha_n) \geq d$ : infatti  $x_0 - \Phi(y_0, \alpha_n)$  rappresenta la distanza del punto  $(x_0, y_0)$  dal punto in cui il piano  $y = y_0$  incontra la superficie  $x = \Phi(y, \alpha_n)$ , la quale appartiene tutta ad  $S$ . Fissato allora un numero  $\varepsilon$  piccolo a piacere, dividiamo i numeri  $n$

(\*) Il ragionamento che segue non è che la ripetizione sotto forma leggermente diversa del classico ragionamento del WEIERSTRASS relativo alla scomposizione di una funzione intera in fattori primarii.

in due classi a seconda che  $\left| \frac{k}{nd} \right| \geq 1 - \varepsilon$  oppure che  $\left| \frac{k}{nd} \right| < 1 - \varepsilon$ : la prima conterrà solo un numero finito di valori di  $n$ : poichè sarà  $n \leq \frac{k}{(1 - \varepsilon)d}$ : noi nel considerare il prodotto (20) lasceremo da parte questi valori di  $n$ . Per gli altri valori di  $n$  si ha

$$\left| \frac{k}{n(x - \Phi(y, \alpha_n))} \right| \leq \left| \frac{k}{nd} \right| < 1 - \varepsilon,$$

quindi i fattori corrispondenti di  $n$  in (20) non si annulleranno mai per  $(x, y)$  in  $\Gamma$ : e per dimostrare che (20) converge uniformemente ad un limite  $\neq 0$  basterà dimostrare la convergenza della serie dei logaritmi dei singoli termini. Ora per (21) tale serie è

$$-\sum_n \left( \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{n+m} \frac{k^{n+m}}{n^{n+m} (x - \Phi(y, \alpha_n))^{n+m}} \right). \quad (22)$$

Ma per  $(x, y)$  in  $\Gamma$  e

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+m} \frac{k^{n+m}}{n^{n+m} (x - \Phi(y, \alpha_n))^{n+m}} \right| &< \\ &< \left| \frac{1}{n^{n+1} d^{n+1}} \right| \left| \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{k^n}{n^n d^n} \right| \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{k^{n+1}}{n^{n+1} d^{n+1}}; \end{aligned}$$

onde segue che la serie dei moduli di (22) converge più rapidamente della serie

$$\frac{1}{\varepsilon} \sum (1 - \varepsilon)^{n+1} = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

e quindi converge uniformemente in  $\Gamma$ .

Onde resta pienamente dimostrato il nostro enunciato.

15. Ove si interpretino i risultati degli studi precedenti come risultati relativi al sistema di equazioni alle derivate parziali cui soddisfa la parte reale di una funzione di due variabili complesse, si ottengono indicazioni non prive di valore. È noto che, assegnare i valori di una tale funzione sopra l'ipersuperficie contorno di campo, è assegnare condizioni sovrabbon-

danti; quali siano le condizioni cui devono soddisfare tali valori è un problema ancora assai oscuro non ostante gli sforzi di parecchi studiosi. Orbene, da quanto precede risulta che dette condizioni portano non solo sulla natura della funzione assegnata, ma anche e principalmente su quella dell'ipersuperficie considerata; in quanto che, se, per es., si suppone questa ipersuperficie analitica, non potrebbe assegnarsi su essa una funzione non analitica a meno che l'ipersuperficie stessa non soddisfaccia, rispetto al campo che essa limita, alle condizioni del n. 12

Ottobre 1909.



# Sulla permutabilità della trasformazione $H$ colla trasformazione $B_k$ nella teoria delle superficie applicabili sulle quadriche.

(Del Dott. ANTONIO SIGNORINI, a Pisa.)

---

§ 1. Siano  $Q, \bar{Q}$  due quadriche corrispondenti in una proiettività  $\Omega$  che cangi la schiera confocale a  $Q$  nella schiera confocale a  $\bar{Q}$ . Come è noto (V. BIANCHI, *Lezioni di Geometria Differenziale*, Vol. III, §§ 68 e segg.) se noi le immaginiamo immerse in due spazi a curvatura costante, eguale e differente, esse risulteranno sempre coniugate in deformazione, cioè si corrispondono per sistemi coniugati attuali e per linee geodetiche, e ogni deformata  $S$  di  $Q$  determinerà intrinsecamente una deformata  $\bar{S}$  di  $\bar{Q}$  corrispondente ad  $S$  per sistemi coniugati attuali e per linee geodetiche: la sua coniugata in deformazione.

Supponiamo dapprima che lo spazio a curvatura costante in cui è immersa la  $Q$ , sia lo spazio ordinario, e consideriamo una congruenza  $B_k$  relativa alla quadrica  $Q$ , le cui falde focali chiameremo  $S, S_1$ . Immaginiamo che la  $S$  si applichi su  $Q$ , seco trascinando i segmenti focali  $\overline{FF_1}$  della congruenza  $B_k$ , e i secondi piani focali  $\pi_1$ . Siano  $M, M_1$  le posizioni finali di  $F, F_1$  e  $\sigma_1$  la posizione finale di  $\pi_1$ . Per le note proprietà della trasformazione  $B_k$ , il luogo dei punti  $M_1$  sarà una quadrica  $Q_k$  confocale a  $Q$ , e il luogo dei piani  $\sigma_1$  l'involuppo aderente alla quadrica stessa. L'omografia  $\Omega$  cambierà  $Q_k$  in una quadrica  $\bar{Q}_k$  confocale a  $\bar{Q}$ , e quindi il segmento  $\overline{MM_1}$ , corrispondente per l'omografia stessa al segmento  $\overline{M\bar{M}_1}$ , sarà tangente in  $\bar{M}$  a  $\bar{Q}$  ed avrà il secondo estremo sopra  $\bar{Q}_k$ , e il piano  $\bar{\sigma}_1$ , corrispondente per  $\Omega$  a  $\sigma_1$ , passerà oltre che pel segmento  $\overline{M\bar{M}_1}$  anche per la generatrice di  $\bar{Q}_k$  uscente da  $\bar{M}_1$ .

Supponiamo ora che  $\bar{Q}$  si deformi nella superficie  $\bar{S}$  coniugata in deformazione ad  $S$ , seco trascinando i segmenti  $\overline{M\bar{M}_1}$  e i piani  $\bar{\sigma}_1$ : siano  $\bar{F}, \bar{F}_1, \bar{\pi}_1$

le posizioni finali di  $\overline{M}$ ,  $\overline{M}_1$ ,  $\overline{\sigma}_1$ . Allora, se la curvatura dello spazio in cui si suppone immersa la  $\overline{Q}$  è nulla o positiva, è noto che la congruenza  $X$  dei raggi  $\overline{F}\overline{F}_1$  godrà di proprietà del tutto analoghe a quelle della congruenza  $B_k$  da cui siamo partiti. In particolare, colle denominazioni in uso nella teoria della trasformazione  $B_k$ , avremo che

- α) la congruenza  $X$  è una congruenza  $W$ ;
- β) la seconda falda focale della congruenza  $X$  è la superficie luogo dei punti  $\overline{F}_1$ , e il secondo involuppo focale è l'involuppo luogo dei piani  $\overline{\pi}_1$ ;
- γ) la seconda falda  $\overline{S}_1$  della congruenza  $X$  è come la prima  $\overline{S}$  applicabile sulla quadrica  $\overline{Q}$  e la legge d'applicabilità tra  $\overline{S}$ ,  $\overline{S}_1$  è data dall'affinità d'IVORY tra le quadriche  $\overline{Q}$ ,  $\overline{Q}_k$ ;
- δ) la deformata  $\overline{S}_1$  di  $\overline{Q}$  è coniugata in deformazione alla deformata  $S_1$  di  $Q$ .

Noi ci proponiamo ora di dimostrare che queste proprietà sussistono indipendentemente dal valore della curvatura dello spazio in cui si immagina immersa  $\overline{Q}$  (\*), ciò che in particolare serve a dimostrare anche per lo spazio iperbolico l'esistenza di una trasformazione delle deformate delle quadriche dello spazio stesso dotata di proprietà del tutto analoghe a quelle di cui gode la trasformazione  $B_k$  dello spazio ordinario.

Possiamo enunciare brevemente l'insieme dei risultati cui così perverremo dicendo che *la trasformazione  $H$  è permutabile colla trasformazione  $B_k$* .

Cominceremo dal premettere alcune osservazioni, basandoci sulle quali potremo arrivare abbastanza semplicemente al nostro scopo.

§ 2. Siano  $S$ ,  $\overline{S}$  due superficie coniugate in deformazione in due spazi a curvatura costante qualunque. Deformiamo la  $S$  intorno ad una sua asintotica  $a$  e in ogni sua configurazione consideriamo una congruenza  $W$  — che diremo  $C$  — tale che la abbia per prima falda focale e conservi sempre lungo l'asintotica  $a$  gli stessi segmenti focali in ampiezza ed orientazione. Contemporaneamente consideriamo le deformate corrispondenti di  $\overline{S}$  — ciascuna delle quali si potrà ottenere dando ad  $\overline{S}$  una conveniente deformazione intorno alla sua asintotica  $\overline{a}$  che corrisponde all'asintotica  $a$  di  $S$  — e per ciascuna di tali deformate consideriamo la congruenza  $\overline{C}$  ottenuta tirando pei suoi punti le rette nelle direzioni corrispondenti — secondo la legge primitiva di corrispondenza tra  $S$ ,  $\overline{S}$  — alle direzioni dei raggi della congruenza  $C$ :

---

(\*) Cf. BIANCHI, l. c., § 78 (pag. 235), ove la proprietà in discorso trovasi enunciata.



intanto la congruenza  $\bar{C}$  sarà una congruenza  $W$ . (V. BIANCHI, op. cit., Vol. III, § 74.)

Vogliamo ora dimostrare che tutte le congruenze  $\bar{C}$  hanno lungo  $\bar{a}$  gli stessi segmenti focali. Su  $S$  ed  $\bar{S}$  assumiamo come linee coordinate  $v = \text{cost.}$  le linee involupate su tali superficie dai raggi delle congruenze  $C, \bar{C}$  e come linee  $u = \text{cost.}$  le loro linee a tangenti coniugate, che evidentemente si corrisponderanno secondo la legge primitiva di corrispondenza tra  $S, \bar{S}$ . Supponiamo, ad es., che  $S$  sia immersa nello spazio ordinario, ed  $\bar{S}$  nello spazio iperbolico di raggio  $R$ . Sia  $d$  la lunghezza del segmento focale di  $C$  nel punto generico  $F$  di  $S$ : mantenendo le solite notazioni per gli elementi intrinseci di  $S$ , posto

$$l = \frac{d}{\sqrt{E}}$$

si trova (V. BIANCHI, op. cit., III, 74)

$$\frac{1}{l} = - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{Bmatrix}.$$

Diciamo poi  $\bar{x}_i (i=0, 1, 2, 3)$  le coordinate di WEIERSTRASS del punto  $\bar{F}$  di  $\bar{S}$  corrispondente ad  $F, \bar{\xi}_i (i=0, 1, 2, 3)$  i coseni della normale in  $\bar{F}$  ad  $\bar{S}, \bar{\sigma}$  l'ampiezza del segmento focale della congruenza  $\bar{C}$  in  $\bar{F}$ : avremo allora, adoperando per gli elementi intrinseci di  $\bar{S}$  le solite notazioni contrassegnate con un soprasségno, avremo allora per le coordinate  $\bar{x}_i (i=0, 1, 2, 3)$  del secondo fuoco  $\bar{F}'$  del segmento stesso

$$\bar{x}' = \cosh \frac{\bar{\sigma}}{R} \bar{x} + \sinh \frac{\bar{\sigma}}{R} \frac{1}{\sqrt{\bar{E}}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{u}}.$$

Se formiamo le derivate delle  $\bar{x}'$ , applicando le note formole

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial \bar{u}^2} = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{Bmatrix} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{u}} + \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{Bmatrix} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{v}} + \frac{\bar{E}}{R^2} \bar{x} + \frac{\bar{D}}{R} \bar{\xi} \text{ etc.}$$

posto

$$\bar{p} = \cosh \frac{\bar{\sigma}}{R} \quad \bar{l} = \frac{1}{\sqrt{\bar{E}}} \sinh \frac{\bar{\sigma}}{R}$$

$$\bar{A} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{u}} + \frac{\bar{E}}{R^2} \bar{l} \quad \bar{B} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{v}} + \frac{\bar{F}}{R^2} \bar{l}$$

$$\bar{L} = \frac{\partial l}{\partial u} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{vmatrix} l + \bar{p}, \quad \bar{M} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{vmatrix} \bar{l}$$

$$\bar{P} = \frac{\partial l}{\partial v} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{vmatrix} l, \quad \bar{Q} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{vmatrix} \bar{l} + p$$

si ottiene subito, essendo  $\bar{D}' = 0$

$$\frac{\partial \bar{x}'}{\partial u} = \bar{A} x + \bar{L} \frac{\partial x}{\partial u} + \bar{M} \frac{\partial x}{\partial v} + \bar{D} l \bar{\xi}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial v} = \bar{B} x + \bar{P} \frac{\partial x}{\partial u} + \bar{Q} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Ora, dovendo il segmento  $\bar{F}\bar{F}'$  toccare in  $\bar{F}'$  la superficie luogo dei punti  $\bar{F}'$ , dovrà essere

$$\begin{vmatrix} x'_0 & x'_1 & x'_2 & \bar{x}'_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u} & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial u} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_0}{\partial v} & \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Questa relazione, tenendo conto delle formole ora trovate, si riduce immediatamente all'altra

$$\bar{Q} = 0$$

che ci dà

$$\frac{p}{\bar{l}} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{vmatrix}.$$

D'altra parte  $S, \bar{S}$  sono coniugate in deformazione, quindi, posto

$$\lambda = \sqrt{\frac{\bar{k}}{K}}$$

sarà (V. BIANCHI, op. cit., § 69)

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} = 2 \left[ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{vmatrix} \right]$$

cioè

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} = -\frac{2\sqrt{E}}{d} - 2 \frac{\sqrt{E}}{\operatorname{tgh} \frac{\sigma}{h}}. \quad (1)$$

Sia ora  $S^*$  una superficie ottenuta da  $S$  deformatola intorno all'asintotica  $a$ ,  $\bar{S}^*$  la deformata corrispondente di  $\bar{S}$ , che otterremo deformando convenientemente  $\bar{S}$  intorno ad  $\bar{a}$ ,  $C^*$  una congruenza  $W$  avente per prima falda focale  $S^*$  e i segmenti focali in comune con  $C$  lungo  $a$ ,  $\bar{C}^*$  la congruenza  $W$  che ad essa corrisponde per  $\bar{S}^*$ .

Intanto i segmenti focali di  $\bar{C}$ ,  $\bar{C}^*$  lungo  $\bar{a}$  avranno la stessa orientazione. Per dimostrare che hanno anche la stessa ampiezza scriviamo la formola che corrisponde per le due superficie  $S^*$ ,  $\bar{S}^*$  e le due congruenze  $C^*$ ,  $\bar{C}^*$  alla (1): contrassegnando con un asterisco gli elementi che corrispondono nel caso in questione a quelli primitivamente considerati, avremo

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial u^*} = -\frac{2\sqrt{E^*}}{d^*} + 2 \frac{\sqrt{E^*}}{\operatorname{tgh} \frac{\sigma^*}{R}} \quad (1)^*$$

ove ancora

$$\lambda = \sqrt{\frac{k}{K}}.$$

Ora se indichiamo con

$$v(u^* v^*) = \text{cost.} \quad u(u^* v^*) = \text{cost.}$$

le equazioni delle antiche linee coordinate rispetto alle nuove, nei punti delle linee  $a$ ,  $\bar{a}$  avremo

$$\frac{\partial v}{\partial u^*} = 0$$

perchè ivi le linee  $v$ ,  $v^*$  hanno la stessa direzione, e quindi sarà

$$\sqrt{E^*} = \sqrt{E} \frac{\partial u}{\partial u^*} \quad \sqrt{E^*} = \sqrt{E} \frac{\partial u}{\partial u^*}$$

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial u^*} = \frac{\partial \log \lambda}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial u^*}$$

e infine per la (1)\*

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} = -2 \frac{\sqrt{E}}{d^*} + 2 \frac{\sqrt{E}}{\operatorname{tg} \frac{\sigma^*}{R}}.$$

Confrontando questa formola colla (1), risulta evidente che se  $d = d^*$  sarà pure  $\sigma = \sigma^*$ . c. d. d.

§ 3. Consideriamo ora in generale due rigate  $A, A_1$  immerse ad es. nello spazio iperbolico di raggio  $R$ . Assunta in ambedue come direttrice la linea di stringimento, indicando con  $u$  il valore algebrico dell'arco di generatrice che intercede tra un punto  $P$  della direttrice e un punto qualunque di  $A$ , con  $\theta$  l'angolo che in  $P$  la generatrice di  $A$  pel punto stesso forma colla direttrice, con  $l_i$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) i coseni di direzione di tal retta nel punto  $P$ , con  $v$  l'arco della direttrice contato da un suopunto arbitrario, avremo per l'elemento lineare di  $A$ :

$$d s^2 = d u^2 + 2 \cos \theta d u d v + \left( M^2 \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} + 1 \right) d v^2 \quad (1)$$

ove

$$M^2 = R^2 (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 - l_0^2) + 1.$$

Analogamente, contrassegnando con un indice gli elementi corrispondenti per  $A_1$ , sarà, posto  $u_1 = u$

$$d s_1^2 = d u^2 + 2 \cos \theta_1 d u d v_1 + \left( M_1 \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} + 1 \right) d v_1^2. \quad (1)_1$$

Se anche su  $A_1$ , invece dell'arco  $v_1$  della relativa linea di stringimento, assumiamo come parametro l'arco stesso  $v$  della linea di stringimento di  $A$ , definendo  $v_1$  in funzione di  $v$  mediante la relazione

$$\frac{M}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{M_1}{\operatorname{sen} \theta_1} \quad (\alpha)$$

l'elemento lineare di  $A_1$  assumerà la forma

$$d s_1^2 = d u^2 + 2 \cos \theta_1 v_1 d u d v + \left( M_1^2 \operatorname{senh}^2 \frac{u_1}{R} + 1 \right) v_1^2 d v^2$$

e poichè la curvatura relativa di  $A$ ,  $A_1$  è data rispettivamente da

$$k = \frac{1}{R^2} \frac{\operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} \cosh^2 \frac{u}{R}}{\left(\operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} + \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{M^2}\right)^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} + \cosh^2 \frac{u}{R}}{\operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} + \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{M^2}}$$

$$k_1 = \frac{1}{R^2} \frac{\operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} \cosh^2 \frac{u}{R}}{\left(\operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} + \frac{\operatorname{sen}^2 \theta_1}{M_1^2}\right)^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} + \cosh^2 \frac{u}{R}}{\operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} + \frac{\operatorname{sen}^2 \theta_1}{M_1^2}}$$

in punti corrispondenti a valori eguali dei parametri  $u$ ,  $v$  le due superficie avranno egual curvatura.

Viceversa se in una corrispondenza tra due rigate si conservano le linee di stringimento, le generatrici e gli archi delle generatrici, e i valori della curvatura, necessariamente, scritti gli elementi lineari delle due rigate nella forma (1)  $(1)_1$ , varrà la relazione ( $\alpha$ ).

Ora per il nostro scopo è utile osservare che se nella corrispondenza stabilita tra  $A$ ,  $A_1$  dall'eguaglianza dei valori dei parametri  $u$ ,  $v$  si corrispondono le asintotiche curvilinee delle due superficie, si corrisponderanno anche le traiettorie ortogonali delle generatrici. Diciamo secondo il solito

$$D \quad D' \quad D''$$

e

$$D_1 \quad D'_1 \quad D''_1$$

i coefficienti delle seconde forme fondamentali di  $A$ ,  $A_1$  rispettivamente nel sistema di coordinate  $u$ ,  $v$  e nel sistema di coordinate  $u$ ,  $v_1$ . Evidentemente sarà

$$D = D_1 = 0$$

e la seconda forma fondamentale di  $A_1$  in coordinate  $u$ ,  $v$  sarà data da

$$2 D'_1 v'_1 d u d v + D''_1 v'^2_1 d v^2$$

e quindi le equazioni delle asintotiche curvilinee per  $A$  ed  $A_1$  in coordinate  $u$ ,  $v$  saranno date rispettivamente da

$$2 D' d u + D'' d v = 0$$

$$2 D'_1 v'_1 d u + D''_1 v'^2_1 d v = 0.$$

Ora in base alla relazione ( $\alpha$ ) si vede subito che

$$D'_1 v'_1 = D' \frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta} v'_1; \quad (\beta)$$

se dunque su  $A, A_1$  si devono corrispondere le asintotiche curvilinee dovrà essere

$$D''_1 v'_1 = D'' \frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta} v'_1. \quad (\gamma)$$

Scriviamo ora l'equazioni di CODAZZI per la rigata  $A_1$  in coordinate  $u, v$ . Siccome si trova subito calcolando e riferendosi anche per  $A_1$  a questo sistema di parametri

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{R} \frac{\cos \theta M^2 \cosh \frac{u}{R} \operatorname{senh} \frac{u}{R}}{M^2 \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} + \operatorname{sen}^2 \theta}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{R} \frac{M^2 \cosh \frac{u}{R} \operatorname{senh} \frac{u}{R}}{M^2 \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} + \operatorname{sen}^2 \theta}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{M \frac{dM}{dv} \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} + \frac{1}{R} \cos \theta M^2 \cosh \frac{u}{R} \operatorname{senh} \frac{u}{R} + \cos \theta \operatorname{sen} \theta \frac{d\theta}{dv}}{M^2 \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} + \operatorname{sen}^2 \theta}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}_1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_1 = -\frac{1}{R} \frac{\cos \theta_1 M_1^2 v'_1 \cosh \frac{u}{R} \operatorname{senh} \frac{u}{R}}{M_1^2 \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} + \operatorname{sen}^2 \theta_1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}_1 = \frac{1}{R} \frac{M^2 \cosh \frac{u}{R} \operatorname{senh} \frac{u}{R}}{M_1^2 \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} + \operatorname{sen}^2 \theta_1}$$

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \right| &= \frac{M_1 \frac{dM_1}{dv} \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} + \left(1 + M_1^2 \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R}\right) v_1'' +}{M_1^2 \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} + \operatorname{sen}^2 \theta_1} \\ &+ \frac{\frac{1}{R} \cos \theta_1 M_1^2 v_1' \operatorname{senh} \frac{u}{R} \cosh \frac{u}{R} - \frac{1}{v_1'} \cos \theta_1 \frac{d}{dv} (\cos \theta_1 v_1')}{M_1^2 \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} + \operatorname{sen}^2 \theta_1} \end{aligned}$$

la prima equazione per  $A$ , si riduce immediatamente alla corrispondente per  $A$ :

$$-\frac{\partial D'}{\partial u} + \left[ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \right] D' = 0$$

e quindi è senz'altro soddisfatta. Dalla seconda otteniamo poi per le  $(\beta)$   $(\gamma)$

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} \theta_1 v_1' \frac{\partial D''}{\partial u} - \operatorname{sen} \theta_1 v_1' \frac{\partial D'}{\partial v} - D' \frac{d}{dv} \left( \frac{v_1' \operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta} \right) +}{+ \left[ \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right]} D' v_1' \operatorname{sen} \theta_1 - \left[ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \right] v_1' \frac{D'' \operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta} = 0. \end{aligned}$$

Tenendo conto della 2.<sup>a</sup> equazione di CODAZZI per la rigata  $A$ , cioè

$$\frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial v} + \left[ \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right] D' - \left[ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \right] D'' = 0$$

e dei valori trovati pei simboli di CHRISTOFFEL, dovremo dunque avere

$$\frac{d}{dv} \log \left( \frac{v_1' \operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta} \right) + \left[ \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right] = 0$$

ed anche

$$\frac{d}{dv} \log \left( \frac{v_1' \operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta} \right) + \frac{M \frac{dM}{dv} \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} + \frac{2}{R} \cos \theta M^2 \cosh \frac{u}{R} \operatorname{senh} \frac{u}{R} + \cos \theta \operatorname{sen} \theta \frac{d\theta}{dv}}{M^2 \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} + \operatorname{sen}^2 \theta}$$

$$\frac{M_1 \frac{dM_1}{dv} \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} + \left(1 + M_1^2 \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R}\right) v_1'' + \frac{2}{R} \cos \theta_1 v_1' M_1^2 \cosh \frac{u}{R} \operatorname{senh} \frac{u}{R} - \frac{\cos \theta_1}{v_1'} \frac{d(\cos \theta_1 v_1')}{dv}}{M_1^2 \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} + \operatorname{sen}^2 \theta_1} = 0$$

relazione che in conseguenza della ( $\alpha$ ) si può anche scrivere

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} \left\{ \frac{M^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{d}{dv} \log \left( \frac{v'_1 \operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta} \right) + \frac{M}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{dM}{dv} - \frac{M_1}{\operatorname{sen}^2 \theta_1} \frac{dM_1}{dv} - \frac{M_1^2 v''_1}{\operatorname{sen}^2 \theta_1 v'_1} \right\} + \\ + \frac{2}{R} \operatorname{senh} \frac{u}{R} \cosh \frac{u}{R} \frac{M^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} (\cos \theta - v'_1 \cos \theta_1) + \frac{d}{dv} \log \left( \frac{v'_1 \operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta} \right) + \\ + \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \frac{d\theta}{dv} - \frac{v''_1}{v'_1 \operatorname{sen}^2 \theta_1} + \frac{\cos \theta_1}{v'_1 \operatorname{sen}^2 \theta_1} \frac{d}{dv} (v'_1 \cos \theta_1) = 0. \end{aligned}$$

Essendo, sempre in conseguenza della ( $\alpha$ ), nullo il coefficiente di  $\operatorname{senh}^2 \frac{u}{R}$ , affinchè sussista questa relazione per qualunque sistema di valori di  $u, v$ , sarà necessario e sufficiente che sia

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos \theta_1 v'_1 \\ \frac{d}{dv} \log \frac{v'_1 \operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta} &= - \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \frac{d\theta}{dv} + \frac{v''_1}{v'_1 \operatorname{sen}^2 \theta_1} - \frac{\cos \theta_1}{v'_1 \operatorname{sen}^2 \theta_1} \frac{d}{dv} (v'_1 \cos \theta_1). \end{aligned}$$

La prima di queste equazioni ci dà immediatamente la proprietà che avevamo in vista. Dalla seconda otteniamo poi subito:

$$v'_1 \operatorname{sen} \theta_1 \frac{d}{dv} (v'_1 \operatorname{sen} \theta_1) + \cos \theta \frac{d}{dv} \cos \theta - v''_1 v'_1 = 0$$

cioè:

$$\frac{d}{dv} (\cos^2 \theta - v'^2_1 \cos^2 \theta_1) = 0$$

ciò che mostra che questa seconda equazione è una conseguenza della prima.

Vediamo così che le relazioni ammesse tra  $A, A_1$  non portano di necessità a concludere che queste due rigate sono identiche. Questo accadrà allora ed allora soltanto che sia  $v'_1 = 1$ , cioè quando la corrispondenza fissata tra  $A, A_1$ , dall'eguaglianza delle coordinate  $u, v$  sia una corrispondenza conforme.

§ 4. Premesso tutto questo veniamo a dimostrare le proprietà enunciate in ( $\alpha$ ) ( $\beta$ ) ( $\gamma$ ) ( $\delta$ ) al § 1. Intanto la proprietà ( $\alpha$ ) è evidente perchè le congruenze  $B_k$  sono congruenze  $W$  e in generale date due superficie  $S, \bar{S}$  coniugate in deformazione, ad una congruenza  $W$  per l'una corrisponde sempre una congruenza  $W$  per l'altra (V. BIANCHI, op. cit., § 69). Per dimostrare la proprietà ( $\beta$ ) osserviamo in primo luogo ch'essa sussiste nel caso limite che  $S, \bar{S}$  si riducano rispettivamente a  $Q, \bar{Q}$  e quindi la seconda falda focale  $S_1$  della congruenza  $B_k$  considerata si riduca ad una generatrice di  $Q_k$ . Basandoci su quanto abbiamo dimostrato al § 2 potremo di qui dedurre subito che la proprietà ( $\beta$ ) vale in generale.



Siano infatti  $\alpha, \alpha'$  le asintotiche di  $S$  per  $F$ ,  $\bar{\alpha}, \bar{\alpha}'$  le linee corrispondenti di  $\bar{S}$ , cioè le asintotiche di  $\bar{S}$  per  $\bar{F}$ . Deformiamo la  $S$  intorno all'asintotica  $\alpha$  fino a ridurla una rigata  $R$ , e nella nuova configurazione consideriamo la congruenza  $B_k^{(R)}$  che ha in comune colla congruenza primitiva il segmento focale in  $F$  e quindi anche tutti i segmenti focali lungo  $\alpha$  e i secondi piani focali nei punti dell'asintotica della seconda falda focale corrispondente ad  $\alpha$ . Al tempo stesso consideriamo la deformata rigata  $\bar{R}$  di  $S$  corrispondente ad  $R$ , deformata che evidentemente si potrà ottenere deformando  $S$  intorno ad  $\bar{\alpha}$ , e consideriamo anche la congruenza  $X^{(\bar{R})}$  che si ottiene tirando pei suoi punti i raggi nelle direzioni corrispondenti alle direzioni dei raggi della congruenza  $B_k^{(R)}$  considerata per  $S$ . Per i risultati del § 2 potremo subito affermare che le congruenze  $\bar{X}, X^{(\bar{R})}$  avranno in comune lungo  $\alpha$  i segmenti focali, e quindi in  $\bar{F}$  sia il segmento focale che l'angolo dei piani focali sarà in ambedue lo stesso. Deformiamo ora la rigata  $R$  intorno alla sua generatrice per  $F$  fino a ridurla alla quadrica  $Q$  e nelle singole configurazioni  $R'$ , esclusa dapprima la configurazione finale, consideriamo le congruenze  $B_k(R')$  che hanno in comune in  $F$  il segmento focale colla  $B_k^{(R)}$ . Al tempo stesso consideriamo le deformate (rigate)  $\bar{R}'$  di  $\bar{R}$  corrispondenti alle deformate  $R'$  di  $R$ , superficie che si potranno ottenere deformando convenientemente  $\bar{R}$  intorno alla sua generatrice per  $\bar{F}$ , e per ognuna di tali deformate  $\bar{R}'$  consideriamo la congruenza  $X^{(R')}$  che corrisponde alla congruenza  $B_k^{(R')}$  che consideriamo per  $R'$ . Tutte le congruenze così ottenute evidentemente avranno in comune in  $\bar{F}$  il segmento focale e l'angolo dei piani focali. Ora se  $R'$  si riduce a  $Q$ , il segmento focale della congruenza  $B_k^{(R')}$  in  $F$  diviene il segmento  $MM_1$  e il secondo piano focale  $\pi_1$  diviene il piano  $\sigma_1$ : al tempo stesso per il modo con cui la  $X^{(R')}$  è dedotta dalla  $B_k^{(R')}$ , il segmento focale in  $\bar{F}$  della congruenza  $X^{(R')}$  si riduce al segmento  $\bar{M}\bar{M}_1$  e il secondo piano focale in tale congruenza al piano  $\bar{\sigma}_1$ . Possiamo dunque concludere che se deformiamo le  $Q$  mantenendole invariabilmente uniti i segmenti  $\bar{M}\bar{M}_1$  e i piani  $\sigma_1$  fino a coincidere colla  $\bar{S}$ , a deformazione compiuta il segmento  $\bar{M}\bar{M}_1$  diverrà il segmento focale della congruenza  $X$  e il piano  $\bar{\sigma}_1$  il secondo piano focale della congruenza stessa, il che è appunto quanto volevamo dimostrare.

§ 5. Per dimostrare le proprietà  $\delta)$   $\gamma)$  cominciamo dal supporre che  $S, S_1$  siano superficie rigate  $R, R_1$ : in tal caso anche la superficie  $S$  sarà una superficie rigata  $\bar{R}$ . Di più per le note proprietà della trasformazione  $B_k$  nel caso delle deformate rigate delle quadriche, la rigata della congruenza  $B_k$  considerata, circoscritta ad  $R$  secondo la generatrice  $g$  per  $F$ , risulterà iden-

tica alla quadrica  $q$  ottenuta congiungendo ogni punto della generatrice corrispondente di  $Q$  col punto in cui il piano tangente nel punto stesso a  $Q$  taglia una certa generatrice  $r_1$  di  $Q_k$ . Vuol dire che anche la rigata della congruenza  $X$  circoscritta ad  $\bar{R}$  secondo la generatrice  $g$  per  $\bar{F}$ , risulterà identica alla quadrica  $q$  che si ottiene congiungendo ogni punto della generatrice corrispondente di  $\bar{Q}$  col punto in cui il piano tangente nel punto stesso a  $Q$  taglia la generatrice  $r_1$  di  $Q_k$  che nell'omografia  $\Omega$  corrisponde alla generatrice  $r_1$  di  $Q_k$ . Di più evidentemente, per quanto abbiamo dimostrato nel paragrafo precedente, questa retta  $\bar{r}_1$ , nelle posizioni  $g_1$  che assume quando  $\bar{Q}$ , trascinando seco  $q$  si deforma nella superficie  $\bar{S}$ , ci darà la linea che corrisponde a  $\bar{g}$  sulla seconda falda focale della congruenza  $X$ , superficie che sarà dunque anch'essa una rigata  $\bar{R}_1$ .

Prendiamo ora a considerare anche la rigata  $\bar{R}^*$ , coniugata in deformazione ad  $R_1$ , e la congruenza  $X^*$  che si ottiene conducendo pei suoi punti le rette nelle direzioni corrispondenti alle direzioni secondo le quali sono tangenti ad  $R_1$  i raggi della congruenza  $B_k$  considerata. Diremo  $\bar{F}^*$ , il punto di  $\bar{R}^*$ , che corrisponde al punto  $F_1$  di  $R_1$ ,  $\bar{F}^*$  l'altro fuoco del raggio della congruenza  $X^*$  per  $\bar{F}^*$ .

Supponiamo ora che  $R_1$  si applichi su  $Q$  seco trascinando i segmenti focali  $\bar{F}_1\bar{F}$  e siano  $M^*$ ,  $M^*$  le posizioni finali di  $F_1$ ,  $F$ : il luogo dei punti  $M^*$  sarà evidentemente la quadrica  $Q_k$ , e le coppie di punti  $M$ ,  $M^*$  e  $M_1$ ,  $M^*$  saranno corrispondenti nell'affinità d'IVORY tra le quadriche  $Q$ ,  $Q_k$ . Diciamo  $\bar{M}^*$ ,  $\bar{M}^*$  i punti che corrispondono su  $\bar{Q}$ ,  $\bar{Q}_k$  ai punti  $M^*$ ,  $M^*$  nell'omografia  $\Omega$ . Intanto il punto  $\bar{M}^*$ , ci darà la posizione che assume  $\bar{F}^*$ , quando  $\bar{R}^*$  si applica su  $Q$ : se poi il punto  $\bar{M}^*$  si smuove sulla generatrice di  $\bar{Q}$  che corrisponde alla generatrice  $\bar{g}^*$  di  $\bar{R}^*$  per  $\bar{F}^*$ , anche il punto  $\bar{M}^*$  descriverà una retta, e il luogo delle rette  $\bar{M}^*$ ,  $\bar{M}^*$  sarà una quadrica  $\bar{q}^*$ .

Colle denominazioni introdotte, essendo la relazione tra le due falde  $R$ ,  $R_1$  della congruenza  $B_k$  considerata perfettamente reciproca, per quanto precede potremo senz'altro affermare che se  $\bar{Q}$  si deforma in  $\bar{R}^*$ , seco trascinando invariabilmente unita la quadrica  $\bar{q}^*$ , la posizione finale del segmento  $\bar{M}^*$ ,  $\bar{M}^*$ , sarà il segmento focale  $\bar{F}^*$ ,  $\bar{F}^*$  di  $\bar{X}^*$  uscente da  $\bar{F}^*$ , e quindi anche la posizione finale della generatrice di  $\bar{q}^*$  che è luogo dei punti  $\bar{M}^*$ , sarà la linea che corrisponde alla retta  $\bar{g}^*$  di  $\bar{R}^*$  sulla seconda falda focale della congruenza  $X^*$ , superficie che sarà dunque anch'essa una rigata  $\bar{R}^*$ .

Noi dimostreremo ora che con un movimento rigido si può far coincidere ogni punto  $\bar{F}_1$  di  $\bar{R}_1$  col punto corrispondente  $\bar{F}^*$  di  $\bar{R}^*$ . Per far questo

è essenziale osservare che per le proprietà elementari dell'affinità d'IVORY tra le quadriche  $\bar{Q}$ ,  $\bar{Q}_k$  e per il fatto che l'affinità d'IVORY tra le quadriche  $Q$ ,  $Q_k$  per l'omografia  $\Omega$  si trasforma nell'affinità d'IVORY tra le quadriche  $\bar{Q}$ ,  $\bar{Q}_k$ , la quadrica  $\bar{q}$  risulta identica alla quadrica  $\bar{q}^*$  e precisamente esiste un movimento rigido che porta i singoli punti  $\bar{M}$ ,  $\bar{M}_1$  sui punti corrispondenti  $\bar{M}^*$ ,  $\bar{M}_1^*$ . Segue di qui immediatamente che nella corrispondenza di  $\bar{R}_1$  ad  $\bar{R}_1^*$ , in cui sono omologhi i punti  $\bar{F}_1$ ,  $\bar{F}_1^*$ , non solo risultano corrispondenti le asintotiche e le generatrici, ma anche le generatrici si corrispondono per archi eguali, e in punti corrispondenti sono eguali i valori della curvatura: per quanto abbiamo dimostrato al § 3 si corrisponderanno dunque anche le traiettorie ortogonali delle generatrici. D'altra parte alla direzione di  $\bar{R}_1$  per  $\bar{F}_1$  coniugata alla direzione del segmento focale  $\bar{F}_1\bar{F}$ , corrisponde su  $R_1$  la direzione per  $F_1$  coniugata alla direzione del segmento focale  $F_1F$ : le direzioni dei due segmenti  $\bar{F}_1\bar{F}$ ,  $F_1F$  in  $\bar{F}_1$ ,  $F_1$  saranno dunque direzioni corrispondenti di  $\bar{R}_1$ ,  $R_1$ . Vuol dire che anche le direzioni dei segmenti  $\bar{F}_1\bar{F}$ ,  $\bar{F}_1^*\bar{F}^*$  in  $\bar{F}_1$ ,  $\bar{F}_1^*$  saranno direzioni corrispondenti di  $\bar{R}_1$ ,  $\bar{R}_1^*$ . Ora gli angoli formati in  $\bar{F}_1$ ,  $\bar{F}_1^*$  da tali segmenti colle generatrici di  $\bar{R}_1$ ,  $\bar{R}_1^*$  pei punti stessi, sono eguali per l'identità delle quadriche  $\bar{q}$ ,  $\bar{q}^*$ . Vediamo dunque che la terna di raggi per  $\bar{F}_1$  formata dalla retta  $\bar{F}_1\bar{F}$ , dalla generatrice di  $\bar{R}_1$ , è dalla tangente alla traiettoria ortogonale delle generatrici di  $\bar{R}_1$  per  $\bar{F}$ , è sovrapponibile alla terna di raggi omologa uscente da  $\bar{F}_1$ , e questo trae di conseguenza che la corrispondenza di  $\bar{R}_1$  ad  $\bar{R}_1^*$ , in cui sono omologhi i punti  $\bar{F}_1$ ,  $\bar{F}_1^*$  è una corrispondenza conforme. Per quanto abbiamo osservato in fine al § 3 vediamo dunque che le due rigate  $\bar{R}_1$ ,  $\bar{R}_1^*$  sono identiche e che la legge di corrispondenza stabilita dall'identità tra le due rigate è proprio quella enunciata. Con questo resta dimostrato che la rigata  $\bar{R}_1$  non è altro che la rigata  $\bar{R}_1^*$  coniugata in deformazione ad  $R_1$ .

Di più, l'affinità d'IVORY tra  $Q$ ,  $Q_k$  trasformandosi per l'omografia  $\Omega$  nell'affinità d'IVORY tra le quadriche  $\bar{Q}$ ,  $\bar{Q}_k$ , vediamo anche che il punto  $\bar{M}^*$  di  $\bar{Q}$  su cui si applica  $\bar{F}_1^*$ , quando  $\bar{R}_1^*$  si distende su  $\bar{Q}$  è il punto che corrisponde nell'affinità d'IVORY tra  $\bar{Q}$ ,  $\bar{Q}_k$  al punto  $\bar{M}_1$  posizione finale di  $\bar{F}_1$  quando  $\bar{R}$  si distende su  $\bar{Q}$  seco trascinando i segmenti  $\bar{F}$ ,  $\bar{F}_1$ : Possiamo dunque ancora dire che la legge d'applicabilità tra le due rigate  $\bar{R}$ ,  $\bar{R}_1$  è data dall'affinità d'IVORY tra le quadriche  $\bar{Q}$ ,  $\bar{Q}_k$ . Con ciò restano completamente dimostrate anche le proprietà  $\delta\gamma$ ). Vediamo dunque che, almeno nel caso che  $\bar{S}$  sia una rigata  $\bar{R}$ , sarà perfettamente giustificato chiamare congruenza  $\bar{B}_k$  la con-

gruenza che corrisponde per tal superficie ad una congruenza  $B_k$  relativa ad una superficie (rigata) ad essa coniugata in deformazione.

§ 6. Veniamo ora a dimostrare le proprietà  $\delta)$   $\gamma)$  in generale. Manteniamo le notazioni del § 1 e di più diciamo  $\bar{S}^*$  la deformata di  $\bar{Q}$  coniugata in deformazione ad  $S_1$ ,  $X^*$  la congruenza che per essa corrisponde alla congruenza  $B_k$  considerata per  $S_1$ : sia inoltre  $\bar{S}^*$  la seconda falda focale di questa congruenza,  $\bar{F}^*$  il punto di  $\bar{S}^*$ , che corrisponde al punto  $F_1$  di  $S_1$ ,  $\bar{F}^*$  il secondo fuoco del raggio della congruenza  $X^*$  uscente da  $\bar{F}^*$ . Dimosteremo che esiste un movimento rigido che sovrappone  $\bar{S}_1$  ad  $\bar{S}^*$  facendo coincidere punti  $\bar{F}_1$ ,  $\bar{F}^*$ , corrispondenti ad uno stesso punto  $F_1$  di  $S_1$ .

Per giungere al nostro scopo prendiamo a considerare le rigate  $R$ ,  $R'$  circoscritte ad  $S$  lungo le asintotiche  $a$ ,  $a'$  per  $F$  secondo il teorema di CHIEFFI applicato ad  $S$  in corrispondenza del sistema di geodetiche deformate delle rette ad es. del 1.<sup>o</sup> sistema di  $Q$ . Consideriamo anche le rigate  $R_1$ ,  $R'_1$  circoscritte ad  $S_1$  lungo le asintotiche  $a_1$ ,  $a'_1$  per  $F_1$  secondo le direzioni corrispondenti a quelle delle generatrici delle rigate  $R$ ,  $R'$ .  $R_1$  ed  $R'_1$  avranno in comune la generatrice per  $F_1$ , e per le note proprietà della trasformazione  $B_k$   $R$  ed  $R_1$ ,  $R'$  ed  $R'_1$  risulteranno trasformate l'una dell'altra mediante la stessa trasformazione  $B_k$  che trasforma  $S$  in  $S_1$ . Alle due coppie di rigate  $R$ ,  $R'$  e  $R_1$ ,  $R'_1$  corrisponderanno per  $\bar{S}$ ,  $\bar{S}^*$  due coppie di rigate  $\bar{R}$ ,  $\bar{R}'$  e  $\bar{R}^*$ ,  $\bar{R}'^*$  circoscritte a tali superficie lungo le loro asintotiche  $\bar{a}$ ,  $\bar{a}'$  e  $\bar{a}^*$ ,  $\bar{a}'^*$  passanti rispettivamente per  $\bar{F}$ ,  $\bar{F}^*$ . Di più, per quanto precede, i segmenti focali delle congruenze  $X$ ,  $X^*$  uscenti dai punti di  $\bar{a}$ ,  $\bar{a}'$  e  $\bar{a}^*$ ,  $\bar{a}'^*$ , si potranno considerare evidentemente come segmenti focali di congruenze  $\bar{B}_k$  relative alle deformate rigate  $\bar{R}$ ,  $\bar{R}'$ ,  $\bar{R}^*$ ,  $\bar{R}'^*$  di  $\bar{Q}$  corrispondentemente alla quadrica  $\bar{Q}_k$  confocale a  $\bar{Q}$ . Le seconde falde focali  $\bar{R}_1$ ,  $\bar{R}'_1$ ,  $\bar{R}^*$ ,  $\bar{R}'^*$  di queste congruenze risulteranno rispettivamente circoscritte ad  $\bar{S}_1$  e  $\bar{S}^*$  lungo le asintotiche  $\bar{a}_1$ ,  $\bar{a}'_1$  e  $\bar{a}^*$ ,  $\bar{a}'^*$  per  $\bar{F}_1$ ,  $\bar{F}^*$  e inoltre si potrà sovrapporre  $\bar{R}_1$  ad  $\bar{R}^*$ ,  $\bar{R}'_1$  ad  $\bar{R}'^*$ , rispettivamente con un movimento rigido che porta l'asintotica  $\bar{a}_1$  di  $\bar{R}_1$  sull'asintotica  $\bar{a}^*$  di  $\bar{R}^*$ , facendo coincidere ogni punto  $\bar{F}_1$  di  $\bar{a}_1$  col corrispondente  $\bar{F}^*$  di  $\bar{a}^*$ , e con un movimento rigido che porta l'asintotica  $\bar{a}'_1$  di  $\bar{R}'_1$  sull'asintotica  $\bar{a}'^*$  di  $\bar{R}'^*$ , facendo coincidere ogni punto  $\bar{F}'_1$  di  $\bar{a}'_1$  col corrispondente  $\bar{F}'^*$  di  $\bar{a}'^*$ . Di più le due rigate  $\bar{R}_1$  ed  $\bar{R}'_1$  hanno in comune la generatrice per  $\bar{F}_1$  e le due rigate  $\bar{R}^*$ ,  $\bar{R}'^*$ , che per quanto abbiamo ora visto sono ad esse congruenti, hanno in comune la generatrice pel punto corrispondente  $\bar{F}^*$ . Vuol dire che la configurazione delle due rigate  $\bar{R}_1$ ,  $\bar{R}'_1$  sarà sovrapponibile alla configurazione delle due rigate  $\bar{R}^*$ ,  $\bar{R}'^*$ .

Possiamo dunque concludere che secondo la corrispondenza fissata tra  $\bar{S}'_1$  ed  $\bar{S}^*_1$ , le asintotiche di queste superficie risultano congruenti e formano in punti corrispondenti angoli eguali, e questo basta, evidentemente, per poter concludere che le due superficie secondo la corrispondenza stessa risultano congruenti, cioè la superficie  $\bar{S}_1$  non è altro che la deformata  $\bar{S}^*_1$  di  $\bar{Q}$  coniugata in deformazione ad  $S_1$ .

Di più la legge d'applicabilità tra  $\bar{S}$ ,  $\bar{S}^*_1$  è ancora data evidentemente dall'affinità d'IVORY tra le quadriche  $\bar{Q}$ ,  $\bar{Q}_k$ .

Con ciò resta completamente dimostrato quanto volevamo.

---



# Dimostrazione d'un teorema sopra i massimi e minimi delle funzioni di più variabili indipendenti.

[Di CESARE RUSSYAN, a Kharkoff (Russia).]

---

Nella presente Nota vien data una dimostrazione del teorema seguente della teoria dei massimi e minimi delle funzioni di più variabili indipendenti: « Se per un sistema di valori  $x = a, y = b, \dots, z = c$  delle variabili indipendenti  $x, y, \dots, z$  si annullano tutte le derivate della funzione data  $f(x, y, \dots, z)$  « fino a quelle dell'ordine  $2n - 1$  inclusive; se la forma

$$\ll A_{2n} = \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + \dots + l \frac{\partial}{\partial z} \right)^{2n} f(a, b, \dots, c)$$

« è definita e se, infine, tutte le derivate parziali  $1.^{\circ}, 2.^{\circ}, \dots, 2n.^{\circ}$  sono finite « e continue in un intorno qualunque del punto considerato  $x = a, y = b, \dots, z = c$ , allora la funzione data  $f(x, y, \dots, z)$  ha nello stesso punto un massimo o un minimo. »

La dimostrazione di questo teorema, data dal sig. U. DIXI (\*), è basata sulla proprietà del polinomio

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{k}{h} \frac{\partial}{\partial y} + \dots + \frac{l}{h} \frac{\partial}{\partial z} \right)^{2n} f(a, b, \dots, c)$$

di avere il limite inferiore del suo valore assoluto diverso da zero in tutto il campo infinito di valori delle variabili indipendenti  $\frac{k}{h}, \dots, \frac{l}{h}$ , perciò è possibile di dimostrare l'esistenza dell'intorno del punto  $x = a, y = b, \dots,$

---

(\*) *Lezioni di analisi infinitesimale* autografate a Pisa nel 1877 e pubblicate a Pisa nel 1907.

$z = c$  abbastanza piccolo, nei punti del quale il resto

$$R_{2n} = \frac{1}{2n!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + \dots + l \frac{\partial}{\partial z} \right)^{2n} f(a + \theta h, b + \theta k, \dots, c + \theta l)$$

sia diverso da zero per tutti i sistemi di valori di  $h, k, \dots, l$ , che non siano tutti nulli, ed abbia sempre il segno di  $A_{2n}$ .

L'altra dimostrazione, data dal GENOCCHI, è basata sul teorema che il rapporto di due forme qualunque del medesimo grado pari, essendo il denominatore una forma definita, ha ambedue i limiti finiti, sotto la supposizione che le variabili delle forme non siano tutte nulle. Questo teorema è dimostrato per mezzo del cangiamento delle variabili indipendenti delle forme:

$$x = x_1 \sqrt{x^2 + y^2 + \dots + z^2}, \dots, z = z_1 \sqrt{x^2 + y^2 + \dots + z^2}.$$

Ma cionondimeno io credo sia utile di dare ancora una dimostrazione dello stesso teorema, perchè questa è, a mio credere, molto semplice.

Si ha così a dimostrare, che se tutte le condizioni del teorema suindicato sono soddisfatte, esiste sempre un numero positivo  $\delta$ , sufficientemente piccolo, tale che per

$$x - a < \delta, \dots, z - c < \delta$$

la differenza

$$f(x, y, \dots, z) - f(a, b, \dots, c)$$

non muta mai il segno.

A causa delle ipotesi fatte sulle derivate 1.°, 2.°, 3.°, ...,  $(2n)^\circ$  della funzione data nell'intorno dato del punto  $x = a, y = b, \dots, z = c$  esiste per gli stessi valori di variabili  $x, y, \dots, z$  la formola di TAYLOR:

$$f(x, y, \dots, z) - f(a, b, \dots, c) = \\ - \frac{1}{2n!} \left[ (x - a) \frac{\partial}{\partial x} + \dots + (z - c) \frac{\partial}{\partial z} \right]^{2n} f[a + \theta(x - a), \dots, c + \theta(z - c)],$$

o, indicando per brevità le differenze  $x - a, \dots, z - c$  con  $h, \dots, l$ , la formola

$$f(a + h, b + k, \dots, c + l) - f(a, b, \dots, c) = \\ = \frac{1}{2n!} \left[ h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + \dots + l \frac{\partial}{\partial z} \right]^{2n} f(a + \theta h, b + \theta k, \dots, c + \theta l).$$



Esaminiamo il segno del resto

$$R_{2n} = \frac{1}{2n!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + \dots + l \frac{\partial}{\partial z} \right)^{2n} f(a + \theta h, b + \theta k, \dots, c + \theta l)$$

per i valori considerati di  $h, k, \dots, l$ , che non sono tutti nulli.

Noi abbiamo evidentemente

$$R_{2n} = \frac{1}{2n!} A_{2n} \left( 1 + \frac{2n! R_{2n} - A_{2n}}{A_{2n}} \right).$$

Consideriamo il rapporto

$$\frac{2n! R_{2n} - A_{2n}}{A_{2n}},$$

che è uguale a

$$\frac{\left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + \dots + l \frac{\partial}{\partial z} \right)^{2n} [f(a + \theta h, b + \theta k, \dots, c + \theta l) - f(a, b, \dots, c)]}{\left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + \dots + l \frac{\partial}{\partial z} \right)^{2n} f(a, b, \dots, c)},$$

e cerchiamo il suo valore assoluto.

Cangiamo perciò le variabili  $h, k, \dots, l$  nel modo seguente. Sia  $p$  un numero positivo qualunque, dato a piacere; sia poi  $L$  il più grande fra i valori assoluti delle variabili  $h, k, \dots, l$ , e sia, p. es.,  $L = |l|$ . Poniamo

$$h = \frac{L}{p} h_1, \quad k = \frac{L}{p} k_1, \dots, \quad l = \frac{L}{p} l_1.$$

Ne risulta, che

$$|h_1| \leq p, \quad |k_1| \leq p, \dots, \quad \text{con} \quad |l_1| = p,$$

e così uno almeno fra i valori assoluti delle nuove variabili è uguale a  $p$ ; gli altri non superano  $p$ . Perciò tutto il campo dei valori delle variabili  $h_1, k_1, \dots, l_1$  può ottenersi nel modo seguente: ogni variabile  $h_1, k_1, \dots, l_1$  considerata separatamente e successivamente riceve i valori  $\pm p$ , mentre le altre ricevono allora ciascuna un continuo di valori nell'intervallo  $(-p, p)$ .

Dopo questo cangiamento si avrà:

$$\begin{aligned} & \frac{2n! R_{2n} - A_{2n}}{A_{2n}} = \\ & = \frac{\left( h_1 \frac{\partial}{\partial x} + k_1 \frac{\partial}{\partial y} + \dots + l_1 \frac{\partial}{\partial z} \right)^{2n} [f(a + \theta h, b + \theta k, \dots, c + \theta l) - f(a, b, \dots, c)]}{\left( h_1 \frac{\partial}{\partial x} + k_1 \frac{\partial}{\partial y} + \dots + l_1 \frac{\partial}{\partial z} \right)^{2n} f(a, b, \dots, c)}. \end{aligned}$$

Indichiamo la forma definita nel denominatore con  $A'_{2n}$ . Si può dimostrare che esiste un numero positivo  $P_{2n}$  tale, che

$$A'_{2n} > P_{2n}$$

per tutti i valori considerati delle variabili  $h_1, k_1, \dots, l_1$ .

Infatti, se la forma  $A'_{2n}$  potesse prendere nel campo considerato valori numericamente piccoli a piacere, in virtù della sua continuità essa dovrebbe annullarsi, il che è impossibile, poichè la forma  $A'_{2n}$  è definita ed una almeno delle variabili  $h_1, k_1, \dots, l_1$  ha il valore  $\pm p$  diverso da zero.

Sia allora  $\eta$  il più grande dei valori assoluti dei moltiplicatori dei coefficienti di  $h_1, k_1, \dots, l_1$  nel numeratore, che hanno tutti la forma

$$\left( \frac{\partial^{2n} f(x, y, \dots, z)}{\partial x^m \partial y^r \dots \partial z^u} \right)_{\substack{x=a+\theta h \\ y=b+\theta k \\ z=c+\theta l}} - \left( \frac{\partial^{2n} f(x, y, \dots, z)}{\partial x^m \partial y^r \dots \partial z^u} \right)_{\substack{x=a \\ y=b \\ z=c}}$$

Allora si avrà evidentemente

$$\frac{2n! R_{2n} - A_{2n}}{A_{2n}} < \frac{\rho^{2n} p^{2n}}{P_{2n}} \eta^2 \quad (*)$$

dove  $\rho$  è il numero delle variabili  $x, y, \dots, z$ ;  $p, P_{2n}$  sono costanti, ma  $\eta$  è variabile con  $h, k, \dots, l$ . Ora le derivate dell'ordine  $2n$  sono continue e finite nel punto  $x = a, y = b, \dots, z = c$ ; esiste perciò un numero positivo  $\delta$ , abbastanza piccolo, tale che per

$$h < \delta, \quad k < \delta, \dots, \quad l < \delta$$

si ha

$$\eta < \frac{P_{2n}}{\rho^{2n} p^{2n}}$$

Allora per gli stessi valori di  $h, k, \dots, l$ , ma che non siano tutti nulli,

(\*) Si potrebbe dimostrare in modo simile che nel caso di due forme qualunque  $A_{2n}, B_{2n}$  del medesimo grado pari, dove  $A_{2n}$  è la forma definita, si ha sempre

$$\left| \frac{B_{2n}}{A_{2n}} \right| < \binom{2n + \rho - 1}{\rho - 1} \frac{p^{2n}}{P_{2n}} \eta,$$

dove  $\eta$  è il più grande dei valori assoluti dei coefficienti costanti della forma  $B_{2n}$ .

avremo che

$$\left| \frac{2^n n! R_{2^n} - A_{2^n}}{A_{2^n}} \right| < 1$$

ed il resto

$$R_{2^n} = \frac{1}{2^n n!} A_{2^n} \left( 1 + \frac{2^n n! R_{2^n} - A_{2^n}}{A_{2^n}} \right)$$

sarà diverso da zero ed avrà il segno costante, identico con quello della forma definita  $A_{2^n}$ .

Noi abbiamo dunque dimostrato che esiste un numero positivo  $\delta$  tale, che per tutti i valori di  $x, y, \dots, z$  nell'intorno dato, pei quali

$$|x - a| < \delta, \quad y - b < \delta, \dots, \quad z - c < \delta,$$

la differenza

$$f(x, y, \dots, z) - f(a, b, \dots, c)$$

sarà diversa da zero quando una almeno della differenza  $x - a, y - b, \dots, z - c$  non è zero, ed avrà il segno costante, identico con quello della forma definita  $A_{2^n}$ , cioè che la funzione data  $f(x, y, \dots, z)$  ha per  $x = a, y = b, \dots, z = c$  un massimo o un minimo.



# Equazioni integrali e valori eccezionali.

(Memoria di GUIDO FUBINI, a Torino.)

---

## INTRODUZIONE.

Alla ormai classica teoria del FREDHOLM delle equazioni integrali l'HILBERT portò un complemento essenziale con le sue 5 *Mittheilungen* delle *Göttinger Nachrichten* (1904-1906), in cui egli svolge la teoria delle equazioni lineari a nucleo (KERN) *simmetrico*, e la teoria delle forme quadratiche a infinite variabili. La teoria delle equazioni simmetriche, dei loro valori eccezionali e relativi sviluppi in serie trovò nuova, diretta trattazione nelle Memorie dello SCHMIDT, e in special luogo nella sua Dissertazione: *Entwicklung willkürlicher Functionen nach Systemen vorgeschriebener* (Göttingen, 1905). Le forme quadratiche con un numero infinito di variabili servirono specialmente all'HILBERT per gettare le basi della teoria delle equazioni integrali polari, ai suoi discepoli (HILB, WEYL, PLANCHEREL) per lo studio delle equazioni integrali a *nucleo singolare*.

A me parve che la teoria delle equazioni integrali avrebbe ricevuto maggior semplicità e generalità, se si fosse potuta abbandonare la via indiretta delle forme quadratiche con infinite variabili, e che si sarebbe potuto per via semplice e breve portare questi studii più generali alla stessa perfezione, a cui è giunta la teoria delle ordinarie equazioni integrali a nucleo *simmetrico*. Tale previsione trovò conferma nelle ricerche, che saranno esposte in questo lavoro; ove svolgerò completamente la teoria delle equazioni integrali polari; così importante per lo studio più generale dei *problemi al contorno*. Come vedremo, i risultati dell'HILBERT vengono completati e generalizzati. In particolare, p. es., alla funzione indicata con  $V(s)$  non si impone più la condizione di avere un numero finito di cambiamenti di segno. Chiudono il lavoro alcuni cenni di possibili estensioni del metodo o dei risultati ottenuti (\*).

---

(\*) Mentre questa Memoria si sta stampando, nei *Comptes Rendus* escono alcune note del sig. MARTY, ove con metodi affatto differenti dai nostri si studiano le stesse questioni.

Non mi occupo qui *ex professo* delle equazioni integrali a nucleo simmetrico singolare (per le quali dò un solo risultato), perchè di esse l'HELLINGER promette (\*) di occuparsi prossimamente. Delle equazioni polari singolari tratterò in un altro lavoro.

E ora un breve cenno del metodo seguito in questa Memoria. Anche nel caso attuale, come per le equazioni a nucleo simmetrico, una difficoltà assai grave consiste nella dimostrazione dell'esistenza dei valori eccezionali. In un caso estremamente particolare, e facendo uso dei risultati del FREDHOLM, il MAX MASON riuscì a dimostrarne l'esistenza *col principio di minimo*, pur senza giungere fino agli sviluppi in serie relativi. Il metodo del resto assai indiretto del MAX MASON spinse l'HOLMGREN ad approfondire (\*\*) l'applicazione del principio di minimo alle equazioni integrali a nucleo simmetrico. Ma nè il metodo del MASON, troppo indiretto e particolare, nè il metodo dell'HOLMGREN sembrano estendibili al nostro problema più generale. Così, p. es., la disuguaglianza dello SCHWARZ

$$\left( \int_a^b \varphi \psi \, dx \right)^2 \leq \int_a^b \varphi^2 \, dx \int_a^b \psi^2 \, dx \quad (a, b = \text{cost.}),$$

così utile allo SCHMIDT e all'HOLMGREN, non può servire al caso attuale, dove non si può a priori trovare un limite superiore per l'integrale del quadrato di una funzione eccezionale.

Queste difficoltà vengono superate, osservando che infiniti problemi di minimo possono servire ugualmente per giungere alla considerazione dei valori eccezionali, e scegliendo poi tra essi uno specialmente adatto alla dimostrazione dei teoremi di esistenza. Le dimostrazioni, che useremo, in parte sono analoghe a quelle dello SCHMIDT e dell'HOLMGREN, ma assai spesso se ne discostano completamente per la maggiore complessità di questi studii più generali. Non ci limiteremo poi ai teoremi strettamente indispensabili alla costruzione della teoria, ma ci occuperemo anche di qualche altra questione, che ci sembra avere qualche interesse di per sè stessa (\*\*).

(\*) Cfr. *Neue Begründung der Theorie, etc.* (Journal für die reine u. a. Mathem., Bd. 136).

(\*\*) *Sur la théorie des équations linéaires, etc.* Arkiv för Mathem. Astron. och Fysik, Band 3 (1906).

(\*\*\*) Classi particolari di problemi al contorno, e di equazioni polari sono state studiate dal Dott. PICONE nella sua bella Memoria: *Sui valori eccezionali di un parametro, ecc.* (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa; 1909) (vol. 11). Anche qui si trova che i valori eccezionali corrispondono a problemi di minimo; ma questi risultati sono troppo legati alla natura particolare della questione trattata, perchè se ne possa trarre un metodo generale per studiare le equazioni integrali polari.

Nella Mem. del PICONE si troveranno anche numerose indicazioni bibliografiche.

Se al posto di  $V(s)$  ponessimo nelle seguenti pagine una funzione simmetrica di  $s$  e  $t$ , otterremo di nuovo la teoria delle equazioni integrali a nucleo simmetrico.

### § 1. PRIME NOTAZIONI; IL CASO ELEMENTARE.

Con  $a, b$  indicheremo due costanti ( $a < b$ ); tutte le volte che parleremo di una funzione di una o più variabili, noi supporremo questa funzione definita per tutti i valori delle variabili dell'intervallo  $a \dots b$  (estremi inclusi).

E, salvo indicazione esplicita contraria, con  $\int f(s) ds$  (che noi chiameremo senz'altro l'integrale di  $f(s)$ ) indicheremo l'integrale definito  $\int_a^b f(s) ds$ . Così

pure con  $\int f(x, y) dx, \iint f(x, y) dx dy, \dots$  indicheremo gli integrali  $\int_a^b f(x, y) dx,$

$\int_a^b \int_a^b f(x, y) dx dy, \dots$  Con  $K(s, t)$  indicheremo una *funzione simmetrica* delle

variabili  $s, t$  (che chiameremo anche *il nucleo*); con  $V(s)$  indicheremo una *funzione integrabile* della  $s$ , che assuma solo i valori  $+1, -1$ , cosicchè sia  $|V(s)| = 1$ . Ecco le ulteriori ipotesi che faremo su queste funzioni:

1.<sup>o</sup> Se  $|\varphi(s)|$  è *funzione continua*,  $\int K(s, t) \varphi(s) ds$  è *funzione continua di  $t$* .

2.<sup>o</sup> Le funzioni  $K_{(a,s)}^{(2)} = \int K(s, \rho) K(\rho, t) d\rho$  e  $H_2(s, t) = \int K(s, \rho) V(\rho) K(\rho, t) d\rho$  sono *funzioni continue di  $s, t$* .

3.<sup>o</sup>  $K(s, t)$  è un *nucleo definito positivo*; in altre parole, se  $u(s)$  è *continuo*, è  $L_1(u) = \iint K(s, t) u(s) u(t) ds dt \geq 0$ .

Le prime due di queste proprietà ci assicurano che al nucleo  $K(s, t)$  è applicabile la teoria di HILBERT-SCHMIDT per i nuclei simmetrici. Da esse discende qualche altra proprietà, assai importante per noi. Così, per es., se  $t_1, t_2$  sono due punti del solito intervallo  $a \dots b$ , l'integrale

$$I(t_1, t_2) = \int \int K(\rho, \sigma) V(\rho) V(\sigma) [K(\rho, t_1) - K(\rho, t_2)][K(\sigma, t_1) - K(\sigma, t_2)] d\rho d\sigma$$

è uguale a

$$\int [H_2(\rho, t_1) - H_2(\rho, t_2)] V(\rho) K(\rho, t_1) d\rho + \int [H_2(\rho, t_2) - H_2(\rho, t_1)] V(\rho) K(\rho, t_2) d\rho.$$

E, per la nota disuguaglianza di SCHWARZ è

$$|I(t_1, t_2)| \leq \sum_{i=1}^2 \sqrt{\int [H_2(\rho, t_2) - H_2(\rho, t_1)]^2 d\rho} K^{(2)}(t_1, t_2).$$

Essendo  $K^{(2)}(s, t)$  continua,  $\sqrt{K^{(2)}(t_1, t_2)}$  è inferiore in modulo a una costante  $P$ , indipendente da  $t_1, t_2$ . Essendo  $H_2$  continuo, dato un numero  $\frac{\varepsilon}{P}$  piccolo a

piacere, si può trovare un numero  $\eta$  tale che  $\sqrt{\int [H_2(\rho, t_2) - H_2(\rho, t_1)]^2 d\rho} \leq \frac{\varepsilon}{2P}$ , se  $|t_1 - t_2| < \eta$ . Quindi:

4.<sup>o</sup>) Dato un numero  $\varepsilon$  piccolo a piacere, esiste un numero  $\eta$  tale che, se  $|t_1 - t_2| \leq \eta$ , è:

$$|I(t_1, t_2)| = \left| \iint K(\rho, \sigma) V(\rho) V(\sigma) [K(\rho, t_1) - K(\rho, t_2)] [K(\sigma, t_1) - K(\sigma, t_2)] d\rho d\sigma \right| \leq \varepsilon.$$

Vale pure il teorema:

5.<sup>o</sup>) L'integrale  $f(t) = \int V(s) K(s, t) H_2(s, t) ds$  è funzione continua di  $t$ .

Infatti, nelle solite notazioni

$$f(t_1) - f(t_2) \leq \int [H_2(s, t_1) - H_2(s, t_2)] V(s) K(s, t_1) ds + \int H_2(s, t_2) [V(s) K(s, t_1) - V(s) K(s, t_2)] ds.$$

Come sopra, si dimostra, che il primo integrale del secondo membro è infinitesimo per  $t_1 = t_2$ . E, altrettanto avviene del secondo, perchè, essendo  $H_2(s, t_2)$  continuo,  $\int H_2(s, t_2) V(s) K(s, t) ds$  è per la 1.<sup>a</sup> proprietà di  $K(s, t)$  funzione continua di  $t$ .

Porremo:

$$\left. \begin{aligned} L_1(u, v) &= \iint K(s, t) u(s) v(t) ds dt; \\ L_2(u, v) &= \iint H_2(s, t) u(s) v(t) ds dt; \\ L_1(u) &= L_1(u, u); \quad L_2(u) = L_2(u, u). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



Uno degli scopi del presente lavoro è quello di costruire per le soluzioni dell'equazione  $\int K(s, t) V(s) \varphi(s) ds = \lambda \varphi(t)$  una teoria affatto analoga a quella di HILBERT-SCHMIDT per i nuclei simmetrici. E non sarà forse inopportuno premettere allo studio del caso generale quello di un caso semplice, che noi chiameremo il *caso elementare*: il caso cioè, in cui il modulo  $K(s, t)$  si può porre sotto la forma  $\sum_1^n u_i(s) v_i(t)$ , dove  $n$  è un intero positivo finito, le  $u_i$  e le  $v_i$  sono funzioni di una sola variabile.

Non condurremo la ricerca relativa fino al termine, accontentandoci di dimostrare le formole fondamentali della teoria: formole che al § 8 generalizzeremo a ogni nucleo  $K(s, t)$ . Cosicchè, in parte almeno, il nostro studio si può interpretare come un'estensione al caso generale delle proprietà dei *nuclei elementari*.

Osserviamo intanto che se una delle  $u_i$  (una delle  $v_i$ ) fosse eguale a una combinazione lineare della restante, noi potremmo (sostituendo ad essa questa combinazione lineare), diminuire il numero  $n$  degli addendi della nostra somma. Cosicchè, se  $n$  è ridotto al suo minimo valore, allora tanto le  $u_i$  che le  $v_i$  sono linearmente indipendenti. Esprimendo che  $K(s, t)$  è simmetrico nelle variabili  $s, t$ , troviamo facilmente che ognuna delle  $u_i(s)$  è combinazione lineare delle  $v_i(s)$ . Cosicchè infine si trova che  $K(s, t) = \sum_1^n a_{ik} v_i(s) v_k(t)$ , dove le  $a_{ik}$  sono costanti, soddisfacenti alle  $a_{ik} = a_{ki}$ . E, sostituendo alle  $v_i$  loro opportune combinazioni lineari  $w_i$ , possiamo immaginare  $K(s, t)$  scritto sotto la forma  $\sum_1^n \varepsilon_i w_i(s) w_i(t)$ , dove  $\varepsilon_i = \pm 1$ . Ricordando la terza proprietà di  $K$  si trova che non può essere  $\varepsilon_i = -1$  per nessun valore di  $i$ . Cosicchè sarà  $K(s, t) = \sum_1^n w_i(s) w_i(t)$ .

Indicando con  $\alpha_i$  dei parametri, è evidente che  $\iint V(s) \left[ \sum_1^n \alpha_i w_i(s) \right]^2 ds$  è una forma quadratica  $\sum c_{ik} \alpha_i \alpha_k$  delle  $\alpha$ , dove le  $c$  sono costanti, determinate dalle  $w$ , ma indipendenti dalle  $\alpha$ . È ben noto che si può trovare una trasformazione *ortogonale*  $\alpha_i = \sum_k p_{ik} \beta_k$  in guisa che sia

$$\sum c_{ik} \alpha_i \alpha_k = \sum \mu_i \beta_i^2 \quad (\mu_i = \text{cost.}).$$

Di più sarà

$$\sum_i \alpha_i w_i = \sum_{i,k} p_{ik} \beta_k w_i = \sum_k \beta_k z_k$$

se si pone

$$z_k = \sum_i p_{ik} w_i;$$

e perciò

$$w_i = \sum_k p_{ik} z_k; \quad K(s, t) = \sum_i z_i(s) z_i(t) = \sum_i w_i(s) w_i(t).$$

Si ha poi identicamente (per qualsiasi valore delle  $\beta, \beta'$ )

$$\int V(s) \sum_i \beta_i z_i(s) \sum_k \beta'_k z_k(s) ds = \sum_i \mu_i \beta_i \beta'_i.$$

E, posto  $\beta_i = z_i(\sigma)$ ,  $\beta'_i = z_i(\tau)$ , dove  $\sigma, \tau$  sono punti del solito intervallo  $a \dots b$ , se ne deduce

$$H_2(\sigma, \tau) = \sum \mu_i z_i(\sigma) z_i(\tau).$$

Posto  $\beta'_i = z_i(\tau)$ , se ne deduce

$$\int V(s) K(s, \tau) \sum \beta_i z_i(s) ds = \sum \mu_i \beta_i z_i(\tau)$$

donde

$$\int V(s) K(s, \tau) z_i(s) ds = \mu_i z_i(\tau)$$

$$\int V(s) z_i^2(s) ds = \mu_i$$

$$\iint V(s) z_i(s) K(s, \tau) V(\tau) z_i(\tau) ds d\tau = \mu_i^2.$$

Se  $\mu_i \neq 0$  si ponga  $\varphi_i = \frac{z_i}{\sqrt{|\mu_i|}}$ . Varranno le:

$$\int V(s) \varphi_i^2(s) ds = \varepsilon_i \quad (\varepsilon_i = \pm 1);$$

$$\int K(s, \tau) V(s) \varphi_i(s) ds = \mu_i \varphi_i(\tau);$$

$$\iint K(s, t) V(s) \varphi_i(s) V(\tau) \varphi_i(\tau) ds d\tau = |\mu_i|;$$

$$H_2(s, \tau) = \sum \mu_i |\mu_i| \varphi_i(\sigma) \varphi_i(\tau); \quad \mu_i = \varepsilon_i |\mu_i|.$$

Sono queste le formole che corrispondono a quelle più generali, che troveremo più avanti nel § 8 per i nuclei generali, e che costituiscono il fondamento della nostra teoria.

§ 2. DISUGUAGLIANZE E LEMMI FONDAMENTALI.

Se  $\frac{1}{l_1}, \frac{1}{l_2}, \frac{1}{l_3} \dots$  sono i valori eccezionali, disposti in ordine crescente per l'equazione integrale

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int \varphi(t) K(s, t) dt$$

e se  $z_1, z_2, \dots$  sono le corrispondenti soluzioni di questa equazione (ove si ponga  $\lambda = \frac{1}{l_i}, f(s) = 0$ ) formanti un sistema ortogonale normale, e infine se  $u(s), v(s)$  sono funzioni integrabili insieme ai loro quadrati, è noto che in virtù della 4.<sup>a</sup> proprietà ammessa per  $K(s, t)$  le  $l_i$  sono positive, e che:

$$L_1(u, v) = \iint K(s, t) u(s) v(t) ds dt = \sum_i l_i \left( \int z_i(s) u(s) ds \right) \left( \int z_i(s) v(s) ds \right) \quad (2)$$

$$\iint K^{(2)}(s, t) u(s) v(t) ds dt = \sum_i l_i^2 \left( \int z_i(s) u(s) ds \right) \left( \int z_i(s) v(s) ds \right). \quad (2)^{\text{bis}}$$

Dalla (2) si deduce per le (1)

$$L_1(u) \leq l_1 \sum_i \left[ \int z_i(s) u(s) \right]^2 \leq l_1 \int u^2(s) ds.$$

E, si può dire, in questa disuguaglianza è il fondamento del problema di minimo studiato dall'HOLMGREN. Noi invece partiremo dalla (2)<sup>bis</sup> (\*) osservando che da essa si deduce

$$\iint K^{(2)}(s, t) u(s) u(t) ds dt \leq l_1 \sum_i \left( \int z_i(s) u(s) ds \right)^2 = l_1 L_1(u).$$

Ma ora, poichè per le (1),

$$\begin{aligned} L_2(u)_1 &= \left| \int V(\rho) \left[ \int K(\rho, s) u(s) ds \right] \left[ \int K(\rho, t) u(t) dt \right] d\rho \right| = \\ &= \int V(\rho) \left[ \int K(\rho, s) u(s) ds \right]^2 d\rho \leq \int \left[ \int K(\rho, s) u(s) ds \right]^2 d\rho = \\ &= \iint K^{(2)}(s, t) u(s) u(t) ds dt, \end{aligned}$$

(\*) Potremmo anche partire dalle formole analoghe relative ai nuclei  $K^{(m)}(s, t)$  ove sia  $K^{(m)}(s, t) = \int K(s, \rho) K^{(m-1)}(\rho, t) d\rho$ .

avremo :

$$L_2(u) \leq l_1 L_1(u) \quad (l_1 = \text{cost.}) \quad (3)$$

che è la disuguaglianza fondamentale per la nostra attuale ricerca, e che si potrebbe dimostrare direttamente.

Per la 4.<sup>a</sup> proprietà di  $K(s, t)$  avremo, se  $h, k$  sono costanti qualsiasi:

$$L_1(hu + kv) = h^2 L_1(u) + 2hk L_1(u, v) + k^2 L_1(v) \geq 0$$

(per tutti i valori di  $h, k$ ).

Quindi

$$|L_1(u, v)| \leq \sqrt{L_1(u)} \sqrt{L_1(v)}. \quad (3)^{\text{bis}}$$

Così pure, se noi in (3) alla  $u$  sostituiamo  $hu + kv$ , otteniamo:

$$h^2 [l_1 L_1(u) \pm L_2(u)] + 2hk [l_1 L_1(u, v) \pm L_2(u, v)] + k^2 [l_1 L_1(v) \pm L_2(v)] \geq 0$$

donde :

$$|l_1 L_1(u, v) \pm L_2(u, v)| \leq \sqrt{l_1 L_1(u) \pm L_2(u)} \sqrt{l_1 L_1(v) \pm L_2(v)}$$

ossia per (3), (3)<sup>bis</sup>

$$|L_2(u, v)| \leq 3l_1 \sqrt{L_1(u)} \sqrt{L_1(v)}. \quad (3)^{\text{ter}}$$

Riassumendo, otteniamo:

TEOR. 1.<sup>o</sup> Se  $u, v$  sono funzioni integrabili insieme ai loro quadrati, e se

$$L_1(u) \leq m \quad L_1(v) \leq M \quad (m, M = \text{cost.})$$

allora è:

$$|L_1(u, v)| \leq \sqrt{mM}; \quad |L_2(u)| \leq l_1 m; \quad |L_2(v)| \leq l_1 M; \quad |L_2(u, v)| \leq 3l_1 \sqrt{mM}.$$

Supponiamo p. es. che  $L_1(u) = 0$ ; poniamo nelle formole precedenti  $m = 0$ ; si trova  $L_1(u, v) = 0$ , qualunque sia la funzione  $v$  integrabile, a quadrato  $v^2$  pure integrabile. Se ne deduce immediatamente:

TEOR. 2.<sup>o</sup> Se  $u$  è una funzione integrabile insieme al suo quadrato che soddisfa alla  $L_1(u) = 0$  allora  $\int K(s, t) u(s) ds = 0$ , escluso al più un aggregato di misura nulla di valori della  $t$ . Se poi  $|u(s)|$  è continua, allora (per la 1.<sup>a</sup> proprietà di  $K$ ) è  $\int K(s, t) u(s) ds = 0$  per ogni valore della  $t$ .

Osserviamo che

$$\int H_2(s, t) u(s) ds = \iint K(s, \rho) [V(\rho) K(\rho, t)] u(s) ds d\rho = L_1(u, f)$$

dove, considerando per un momento  $t$  come parametro, si è posto :

$$f(\rho) = V(\rho) K(\rho, t).$$

Ora

$$\begin{aligned} L_1(f) &= \iint V(s) K(s, t) K(s, \sigma) V(\sigma) K(\sigma, t) ds d\sigma - \\ &= \int V(s) K(s, t) H_2(s, t) ds \end{aligned}$$

è, per le ipotesi fatte, su  $K$ , funzione continua della  $t$  (proprietà 5.<sup>a</sup>). Quindi:  $L_1(f)$  ha un limite superiore finito  $Q$ ; e in virtù di (3)<sup>bis</sup> si conclude:

TEOR. 3.<sup>o</sup> Se  $u$  è integrabile insieme al suo quadrato, ed  $L_1(u)$  è inferiore a una costante  $m$ , allora  $\left| \int H_2(s, t) u(s) ds \right| \leq \sqrt{Qm}$  ( $Q = \text{cost.}$ ).

In modo simile si trova, se  $t_1, t_2$  sono due punti del solito intervallo  $a \dots b$ , che

$$\left| \int H_2(s, t) u(s) ds - \int H_2(s, t_2) u(s) ds \right| = \left| L_1[\varphi, u] \right| \leq \sqrt{L_1(u) L_1(\varphi)}$$

dove, considerando  $t_1, t_2$  per un momento come parametri, si è posto

$$\varphi(\rho) = V(\rho) [K(\rho, t_1) - K(\rho, t_2)].$$

E, per la proprietà 4.<sup>a</sup> di  $K(s, t)$  si conclude:

TEOR. 4.<sup>o</sup> Se  $u$  è integrabile insieme al suo quadrato, e se  $L_1(u) \leq m$ , allora  $\int H_2(s, t_1) u(s) ds$  è funzione continua di  $t$ ; e precisamente è

$$\left| \int H_2(s, t_1) u(s) ds - \int H_2(s, t_2) u(s) ds \right| \leq \sqrt{\varepsilon m} \quad \text{per} \quad t_1 - t_2 \leq \varepsilon.$$

Da questi teoremi con un procedimento affatto simile a quello scoperto dall'HILBERT, e già applicato dall'HOLMGREN, si può dedurre che:

TEOR. 5.<sup>o</sup> Siano date infinite funzioni  $u_1, u_2, u_3, \dots$  integrabili insieme al loro quadrato soddisfacenti alle  $L_1(u_i) \leq m$ , dove  $m$  è una costante. Dalla precedente successione si può estrarre una successione subordinata  $u_{i_1}, u_{i_2}, u_{i_3}, \dots$  in guisa che  $\int H_2(s, t) u_{i_n}(s) ds$  tenda uniformemente a una funzione limite continua  $\psi(t)$ . Infatti per il teor. 3.<sup>o</sup> gli integrali  $\int H_2(s, t) u_{i_n}(s) ds$  sono tutti inferiori in valore assoluto a una stessa costante  $\sqrt{Qm}$ ; col metodo di HILBERT si dimostra allora l'esistenza di una successione subordinata, in

guisa che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int H_2(s, t) u_{i_n}(s) ds$  esista per tutti i valori **razionali** della  $t$ . In virtù del teor. 4.<sup>o</sup>, questa successione tenderà uniformemente a un limite per tutti i valori della  $t$  (\*).

### § 3. SISTEMI POLARI E DISUGUAGLIANZE RELATIVE.

Se  $\varphi_1, \varphi_2$  sono due funzioni integrabili insieme ai loro quadrati, tali che  $\int V(s) \varphi_1(s) \varphi_2(s) ds = 0$ , io dirò che  $\varphi_1$  è *polare a* (oppure *con*)  $\varphi_2$ . Se più funzioni  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$  integrabili insieme ai loro quadrati soddisfano alle

$$\int V(s) \varphi_i^2(s) ds = \varepsilon_i \quad (\varepsilon_i = \pm 1) \quad \int V(s) \varphi_i(s) \varphi_k(s) ds = 0 \quad (\text{per } i \neq k) \quad (4)$$

noi diremo che esse formano *un sistema polare normale*.

(\*) Vale infatti il seguente teor.: *Se una successione di funzioni  $\psi_n(t)$  tende a un limite in un gruppo  $G$  di punti denso in tutto l'intervallo  $a \dots b$ , e se, dato un numero  $\varepsilon$  piccolo a piacere, esiste un numero  $\eta$  tale che  $|\psi_n(t_1) - \psi_n(t_2)| \leq \varepsilon$  per  $|t_1 - t_2| \leq \eta$ , la successione delle  $\psi_n$  tende uniformemente a un limite per ogni valore di  $t$ . Se infatti  $t$  è un punto qualsiasi di  $a \dots b$ , potremo trovare un punto  $t_1$  di  $G_2$  tale che  $|\psi_n(t) - \psi_n(t_1)| < \frac{\varepsilon}{3}$  per ogni valore di  $n$ .*

Potremo poi trovare un numero  $m$  così grande che per  $p \geq m, q \geq m$  sia  $|\psi_p(t_1) - \psi_q(t_1)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ ; sarà quindi  $|\psi_p(t) - \psi_q(t)| \leq \varepsilon$ . Ciò che dimostra che le  $\psi_n$  tendono a un limite  $\psi(t)$  in ogni punto dell'intervallo  $a \dots b$ . Io dico che vi tendono in modo uniforme. Possiamo infatti dividere l'intervallo in un numero abbastanza grande di pezzetti parziali, tale che in ognuno di questi pezzetti ciascuna delle  $\psi_n$  abbia un'oscillazione minore di  $\frac{\varepsilon}{3}$ . Scelto poi in ognuno di questi pezzetti un punto  $A$ , potremo trovare un intero  $m$  tale che per  $n > m$  sia  $|\psi_n - \psi| \leq \frac{\varepsilon}{3}$  in tutti questi punti  $A$  (che sono in numero finito). Io dico che in ogni punto  $B$  di  $a \dots b$  è  $|\psi_n - \psi| \leq \varepsilon$ . Infatti, se  $A$  è quel punto da noi precedentemente scelto, che cade nello stesso pezzetto a cui appartiene  $B$ , è

$$|\psi_n(B) - \psi(B)| \leq |\psi_n(B) - \psi_n(A)| + |\psi_n(A) - \psi(A)| + |\psi(A) - \psi(B)|.$$

E quindi poichè per le nostre ipotesi è anche  $|\psi(A) - \psi(B)| = \lim |\psi_n(B) - \psi_n(A)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ , se ne deduce tosto che per  $n > m$  per ogni punto  $B$  del nostro intervallo è

$$|\psi_n(B) - \psi(B)| \leq \varepsilon. \quad \text{c. d. d.}$$

Se due sistemi di funzioni sono tali, che ogni funzione di un sistema è combinazione lineare delle funzioni dell'altro sistema, diremo che i due sistemi di funzioni sono *equivalenti*.

Oss. I. Se un sistema di  $n$  funzioni integrabili insieme ai loro quadrati è tale che nessuna loro combinazione lineare  $\varphi$  soddisfa alla  $\int V(s) \varphi^2(s) ds = 0$ , allora il sistema è equivalente a un sistema polare normale. La dimostrazione si compie immediatamente col procedimento di induzione completa (da  $n$  a  $n + 1$ ).

Oss. II. Se la funzione  $\varphi$  integrabile insieme al suo quadrato soddisfa alla  $\int K(s, t) V(s) \varphi(s) ds = \lambda \varphi(t)$  ( $\lambda \neq 0$ ;  $\lambda = \text{cost.}$ ), e se  $\varphi$  non è identicamente nullo, allora  $\int V(s) \varphi^2(s) ds \neq 0$ . Infatti per l'ipotesi fatta

$$\lambda \int V(s) \varphi^2(s) ds = L_1 [V(s) \varphi(s)].$$

Se questo integrale fosse nullo, per il teor. 2.<sup>o</sup> sarebbe  $\int K(s, t) V(s) \varphi(s) ds = 0$ , e quindi anche  $\lambda \varphi(t) = 0$ , escluso al più un aggregato di punti di misura nulla. Quindi  $\int K(s, t) V(s) \varphi(s) ds$ , ed anche  $\varphi(s)$  sarebbero identicamente nulli.

Oss. III. Se un sistema di funzioni  $\varphi$  integrabili insieme ai loro quadrati e linearmente indipendenti soddisfa alla  $\int K(s, t) \varphi(s) ds = \lambda \varphi(t)$  ( $\lambda \neq 0$ ;  $\lambda = \text{cost.}$ ), allora detto sistema è equivalente a un sistema polare normale. Ciò è conseguenza immediata delle ultime osservazioni.

Sia ora dato un sistema di costanti  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  e di funzioni corrispondenti  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  (integrabili insieme ai loro quadrati) tali che

$$\int K(s, t) V(s) \varphi_i(s) ds = \mu_i \varphi_i(t). \quad (5)$$

Supponiamo che quelle delle  $\varphi_i$  che corrispondono a costanti  $\mu_i$ , tra di loro uguali siano linearmente indipendenti: per l'oss. III potremo a esse sostituire un sistema equivalente polare normale. Se poi  $\mu_i = \mu_k$ , allora da (5)

si deduce  $L_1 [V(s) \varphi_i(s), V(s) \varphi_k(s)] = \mu_i \int V(s) \varphi_i(s) \varphi_k(s) ds$ . Scambiando  $i, k$ , e sostenendo membro a membro, si avrà

$$L_1 [V(s) \varphi_i(s), V(s) \varphi_k(s)] = \int V(s) \varphi_i(s) \varphi_k(s) ds = 0. \quad (6)$$

Quindi:

TEOR. 6.<sup>o</sup> *Le funzioni  $\varphi_i$  formano nelle nostre ipotesi un sistema polare normale. In ogni caso funzioni  $\varphi_i, \varphi_k$  corrispondenti a costanti  $\mu_i, \mu_k$  distinte sono polari l'una all'altra.*

Dalle (5), si deduce per (4)

$$L_1 [V(s) \varphi_i(s)] = \varepsilon_i \mu_i. \quad (7)$$

Quindi per la 3.<sup>a</sup> proprietà di  $K$  è  $\varepsilon_i \mu_i > 0$ , ossia  $\varepsilon_i$  ha il segno di  $\mu_i$ , e  $\varepsilon_i \mu_i = |\mu_i|$ . Similmente si trova

$$\int H_2(s, t) V(s) \varphi_i(s) ds = \mu_i^2 \varphi_i(t); \quad L_2 [V(s) \varphi_i(s)] = \varepsilon_i \mu_i^2 - \mu_i |\mu_i|. \quad (8)$$

Sia ora  $f$  una funzione integrabile insieme al suo quadrato. Posto

$$c_i = \varepsilon_i \int f(s) \varphi_i(s) ds, \quad (9)$$

si deduce per le (4) ... (8) che:

$$0 \leq L_1 [f - \sum V \varphi_i c_i] = L_1 (f) - 2 \sum c_i L_1 [f, V \varphi_i] + \sum c_i^2 L_1 (V \varphi_i) + \left. \begin{aligned} &+ 2 \sum_{i \neq k} c_i c_k L_1 (V \varphi_i, V \varphi_k) = L_1 (f) - \sum |\mu_i| c_i^2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

donde

$$L_1 (f) \geq \sum |\mu_i| c_i^2 \quad (11)$$

ossia

$$L_1 (f) \geq \sum |\mu_i| \left( \int f(s) \varphi_i(s) ds \right)^2.$$

Noteremo infine le seguenti identità:

$$\left. \begin{aligned} L_1 [f - \sum c_i V(s) \varphi_i(s)] &= \iint F_1^{(n)}(s, t) f(s) f(t) ds dt; \\ L_2 [f - \sum c_i V(s) \varphi_i(s)] &= \iint F_2^{(n)}(s, t) f(s) f(t) ds dt \end{aligned} \right\} \quad (12)$$



ove

$$\left. \begin{aligned} F_1^{(n)}(s, t) &= K(s, t) - \sum_i |\mu_i| \varphi_i(s) \varphi_i(t); \\ F_2^{(n)}(s, t) &= H_2(s, t) - \sum_i \mu_i \varphi_i(s) \varphi_i(t) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

cosicchè  $F_2^{(n)}(s, t) = \int F_1^{(n)}(s, \rho) V(\rho) F_1^{(n)}(\rho, t) d\rho$  si deduce da  $F_1^{(n)}$ , come  $H_2(s, t)$  da  $K(s, t)$ .

Le  $F_1^{(n)}$ ,  $F_2^{(n)}$  dipendono soltanto da  $K$  e dalle  $\varphi_i$ : non dalla  $f$ .

La prima delle (12) dimostra che  $F_1^{(n)}$  è, come  $K$ , un nucleo definito positivo (perchè il suo primo membro non è mai negativo).

Se  $F_1^{(n)}$  è un nucleo elementare, anche  $K$  è un nucleo elementare (§ 1).

Infine osserviamo che le funzioni

$$g(s) = f(s) - \sum c_i V(s) \varphi_i(s)$$

sono tutte e sole le funzioni polari alle  $V \varphi_i$ . (E quindi le  $Vg$  sono le funzioni polari alle  $\varphi_i$ .)

Posto in (11)  $f(s) = V(s) K(s, t)$ , e ricordando (5) si ottiene, se  $P$  è una costante maggiore di  $L_1[V(s) K(s, t)]$  (\*),

$$P \geq \sum |\mu_i|^3 \varphi_i^2(t) \quad (14)$$

donde, integrando rispetto a  $t$ :

$$P(b-a) \geq \sum |\mu_i|^3 \int |V(t) \varphi_i^2(t)| dt \geq \sum |\mu_i|^3 \left| \int V(t) \varphi_i^2(t) dt \right| = \sum |\mu_i|^3. \quad (15)$$

#### § 4. CONVERGENZE DI ALCUNE SERIE (\*\*).

Le formole (5), (15) del § 3 valgono, per quanto sia grande il numero  $n$  delle funzioni  $\varphi_i$ .

(\*) Questo integrale  $\iint V(\sigma) K(\sigma, t) K(\sigma, \tau) V(\tau) K(\tau, t) d\sigma d\tau$  è evidentemente limitato, perchè è uguale a  $\int H_2(t, \tau) V(\tau) K(\tau, t) dt$ , che (proprietà 5.<sup>a</sup> di  $K(s, t)$ ) è una funzione continua, e quindi limitata, della  $t$ .

(\*\*) I teoremi di questo paragrafo sono generalizzazioni di teoremi noti per le equazioni integrali simmetriche: le dimostrazioni sono però affatto nuove.

Cosicchè, se le funzioni  $\varphi_i$  sono in numero infinito, dalle (11), (15) possiamo trarre i teoremi:

TEOR. 7.<sup>o</sup> Se  $f$  è integrabile insieme al suo quadrato, la serie

$$\sum |\mu_i| \left( \int f \varphi_i \, ds \right)^2$$

converge e non supera  $L_1(f)$ .

TEOR. 8.<sup>o</sup> La serie  $\sum |\mu_i|^3$  converge. Di costanti  $\mu_i$  uguali a una stessa costante  $\mu$  ( $\neq 0$ ) ce ne può essere al più un numero finito.

Poichè (se  $u, v$  sono funzioni integrabili insieme ai loro quadrati) vale la:

$$\left| \int u \varphi_i \, ds \right| \left| \int v \varphi_i \, ds \right| \leq \frac{1}{2} \left\{ \left[ \int u \varphi_i \, ds \right]^2 + \left[ \int v \varphi_i \, ds \right]^2 \right\},$$

ne deduciamo, in virtù del teor. 7.<sup>o</sup>:

TEOR. 9.<sup>o</sup> Se  $u, v$  sono funzioni integrabili insieme ai loro quadrati, la serie

$$\sum_i |\mu_i| \left( \int u \varphi_i \, ds \right) \left( \int v \varphi_i \, ds \right)$$

è assolutamente convergente, e ha una somma che in valore assoluto è inferiore a

$$\frac{1}{2} [L_1(u) + L_1(v)].$$

Se  $f = u = v$ , il teor. 9.<sup>o</sup> si riduce al teor. 7.<sup>o</sup>

Dal teor. 9.<sup>o</sup> si deduce che, se  $p(t)$  è una funzione integrabile insieme al suo quadrato, la serie

$$S(\sigma) = \sum |\mu_i| \int K(\sigma, s) V(s) \varphi_i(s) \, ds \int p(s) \varphi_i(s) \, ds \quad (16)$$

è assolutamente convergente. Noi indicheremo con  $S_n(\sigma)$  e con  $S(\sigma)$  la somma dei primi  $n$  termini di (29), e la somma della serie completa.

Se  $\sigma_1, \sigma_2$  sono due punti del solito intervallo  $a \dots b$ , sarà

$$\left. \begin{aligned} & |S_n(\sigma_1) - S_n(\sigma_2)| = \\ & = \left| \sum_{i=1}^n |\mu_i| \left[ \int \left\{ K(\sigma_1, s) - K(\sigma_2, s) \right\} V(s) \varphi_i(s) \, ds \right] \int p(s) \varphi_i(s) \, ds \right|. \end{aligned} \right\} (17)$$

Ora se  $a_i, b_i$  sono  $2n$  numeri reali qualunque, e  $p_i$  sono numeri positivi

( $i = 1, 2, \dots, n$ ) dalla

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_1 \sqrt{p_1} & a_2 \sqrt{p_2} \dots & a_n \sqrt{p_n} \\ b_1 \sqrt{p_1} & b_2 \sqrt{p_2} \dots & b_n \sqrt{p_n} \end{array} \right\|^2 \geq 0$$

si deduce

$$\sum_{i=1}^n p_i a_i^2 \sum_{i=1}^n p_i b_i^2 \geq \left( \sum_{i=1}^n p_i a_i b_i \right)^2.$$

Posto

$$p_i = |\mu_i|; \quad a_i = \int \left\{ K(\sigma_1, s) - K(\sigma_2, s) \right\} V(s) \varphi_i(s) ds; \quad b_i = \int p(s) \varphi_i(s) ds$$

se ne deduce, in virtù di (17):

$$\begin{aligned} & |S_n(\sigma_1) - S_n(\sigma_2)| \leq \\ & \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |\mu_i| \left[ \int \left\{ K(\sigma_1, s) - K(\sigma_2, s) \right\} V(s) \varphi_i(s) ds \right]^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |\mu_i| \left( \int p(s) \varphi_i(s) ds \right)^2} \end{aligned}$$

donde, per la (11), si trae:

$$|S_n(\sigma_1) - S_n(\sigma_2)| \leq \sqrt{L_1 [p(s)]} \sqrt{L_1 \left[ V(s) \left\{ K(s, \sigma_1) - K(s, \sigma_2) \right\} \right]}.$$

Per la 4.<sup>a</sup> proprietà di  $K(s, t)$ , dato un numero  $\varepsilon$  piccolo a piacere, si potrà perciò trovare un numero  $|n|$  tale che  $|S_n(\sigma_1) - S_n(\sigma_2)| \leq \varepsilon$  per  $|\sigma_1 - \sigma_2| \leq \eta$  (per ogni valore di  $n$ ). E, in virtù del teor. dimostrato in nota al § 2, si ottiene, ricordando che  $S(\sigma)$  converge (assolutamente) per ogni valore di  $\sigma$ :

TEOR. 10.<sup>o</sup> *La serie  $S(\sigma)$  data da (16) (nell'ipotesi che  $p(t)$  e  $p^2(t)$  siano integrabili) converge assolutamente e uniformemente in tutto l'intervallo  $a \leq \sigma \leq b$ .*

### § 5. IL TEOREMA FONDAMENTALE.

Vogliamo ora rispondere alla domanda:

*Quando esiste una funzione  $\varphi$  non nulla, e una costante  $\mu$  tale che*

$$\int K(s, t) V(s) \varphi(s) ds = \mu \varphi(t) \quad [\varphi \text{ e } \varphi^2 \text{ integrabili}], \quad (\mu \neq 0)? \quad (5)^{\text{bis}}$$

Noi diremo che una funzione  $u$  appartiene al campo funzionale  $\{u\}$ , se  $u$  ed  $u^2$  sono integrabili, e se  $L_1(u) = 1$ . Per il teor. 1.<sup>o</sup> del § 2, i valori di  $L_2(u)$ , quando  $u$  varia in  $\{u\}$  hanno un limite inferiore  $m_1$ , e un limite superiore  $M_1$  finiti (\*). Con  $\mu_1$  indicheremo indifferentemente l'una o l'altra delle quantità  $m_1, M_1$ . Estenderemo alle  $m_1, M_1$  le solite proprietà, che il calcolo delle variazioni dimostra per i minimi ed i massimi di un integrale. Per ipotesi si possono trovare delle funzioni  $u_1, u_2, u_3, \dots$  di  $\{u\}$  tali che

$$L_1(u_n) = 1; \quad L_2(u_n) = \mu_1 + \varepsilon_n \quad \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \right). \quad (18)$$

Per il teor. 5.<sup>o</sup> del § 2 possiamo estrarne una successione subordinata  $u_{i_1}, u_{i_2}, u_{i_3}, \dots$  in guisa che gli integrali  $\int H_2(s, t) u_{i_n}(s) ds$  tendano per  $n \rightarrow \infty$  uniformemente a un limite  $\psi(t)$ . E, se noi prescindiamo da quelle delle  $u$  che non appartengono a questa successione subordinata, potremo porre  $u_{i_n} = u_n$ . Quindi:

TEOR. 11. *L'integrale  $\int H_2(s, t) u_n(s) ds$  tende uniformemente a una funzione limite  $\psi(t)$  continua.*

Siano ora  $v_1, v_2, v_3, \dots$  funzioni integrabili insieme ai loro quadrati, tali che gli integrali  $L_1(v_n)$  abbiano un limite superiore finito  $N_1$ . Per il teor. 1.<sup>o</sup> del § 2 sarà:

$$\left. \begin{aligned} |L_1(u_n, v_n)| &\leq \sqrt{N}; & L_2(v_n) &\leq l_1 N; & |L_2(u_n, v_n)| &\leq 3 l_1 \sqrt{N}; \\ |L_2(u_n)| &= |\mu_1 + \varepsilon_n| && \leq l_1. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Se  $h, k$  sono costanti arbitrarie, è, in virtù di (18), (19)

$$L_1[h u_n + k v_n - k u_n L_1(u_n, v_n)] = h^2 + k^2 A_n \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} L_2[h u_n + k v_n - k u_n L_1(u_n, v_n)] &= \\ = h^2 (\mu_1 + \varepsilon_n) + 2 h k [L_2(u_n, v_n) - (\mu_1 + \varepsilon_n) L_1(u_n, v_n)] &+ k^2 B_n \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

(\*) Eccettuato al più qualche nucleo *elementare*, è  $m_1 \leq 0, M_1 \geq 0$ . Infatti, se non ci troviamo nel caso elementare, le costanti  $l_i$  (§ 2) sono in numero infinito, e  $\lim_{i \rightarrow \infty} l_i = 0$ . Posto

$u_i = \frac{z_i}{\sqrt{l_i}}$  (cfr. le (2) e (2)<sup>bis</sup> del § 2) si ha  $L_1(u_i) = 1$ ;  $\int K^{(2)}(s, t) u_i(s) u_i(t) ds dt = l_i$ , e quindi  $|L_2(u_i)| \leq l_i$ . Dunque, pur lasciando la  $(u)$  nel campo funzionale  $\{u\}$ , l'integrale  $L_2(u)$  si può ridurre in modulo piccolo a piacere. c. d. d.

dove

$$0 \leq A_n = L_1 [v_n - u_n L_1(u_n, v_n)] = L_1(v_n) - [L_1(u_n, v_n)]^2 \leq N \quad (22)$$

$$\begin{aligned} |B_n| &= |L_2[v_n - u_n L_1(u_n, v_n)]| = \\ &= |L_2(v_n) - 2L_2(u_n, v_n)L_1(u_n, v_n) + L_2(u_n)[L_1(u_n, v_n)]^2| \leq 8L_1 N. \end{aligned} \quad (23)$$

Ora  $\mu_1$  è il limite superiore (se  $\mu_1 = M_1$ ) o il limite inferiore (se  $\mu_1 = m_1$ ) del rapporto  $\frac{L_2(u)}{L_1(u)}$ , quando  $u$  è una funzione integrabile insieme al suo quadrato per cui  $L_1(u) \neq 0$ .

Se quindi  $h \neq 0$ , e perciò anche l'integrale (20) è diverso da zero, la differenza tra l'integrale (21) e l'integrale (20) moltiplicato per  $\mu_1$  è una forma quadratica delle  $h, k$  che ha segno costante (non è positiva se  $\mu_1 = M_1$ ; non è negativa se  $\mu_1 = m_1$ ). Questa differenza è uguale a

$$k^2 \varepsilon_n + 2hk [L_2(u_n, v_n) - (\mu_1 + \varepsilon_n)L_1(u_n, v_n)] + k^2 (B_n - \mu_1 A_n).$$

E, per quanto dicemmo, è quindi:

$$|L_2(u_n, v_n) - (\mu_1 + \varepsilon_n)L_1(u_n, v_n)| \leq \sqrt{\varepsilon_n (B_n - \mu_1 A_n)} \leq 3\sqrt{L_1 N \varepsilon_n}.$$

Il secondo membro di questa disuguaglianza tende a zero per  $n = \infty$ ; altrettanto avviene quindi del primo membro, ossia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ v_n(s) ds \int H_2(s, t) u_n(t) dt - (\mu_1 + \varepsilon_n) \int K(s, t) u_n(t) dt \right\} = 0. \quad (24)$$

Poniamo in (24)  $v_n(s) = K(s, t) V(s)$ ; per le (18) e per il teor. 11 si avrà:

$$\int K(s, t) V(s) \psi(s) ds = \mu_1 \psi(t). \quad (25)$$

Posto in (24) successivamente  $v_n(s) = V(s) \psi(s)$  e  $u_n(s) = u_n(s)$  si trova (per la (25)):

$$\begin{aligned} \int V(s) \psi^2(s) ds &= \mu_1 \lim (\mu_1 + \varepsilon_n) \int \psi(s) u_n(s) ds \\ \lim \int u_n(s) \psi(s) ds &= \lim (\mu_1 + \varepsilon_n) L_1(u_n) = \mu_1 \end{aligned}$$

donde

$$\int V(s) \psi^2(s) ds = \mu_1^2. \quad (26)$$

Le (25), (26) danno poi

$$L_1 [V(s)\psi(s)] = \iint K(s, t) V(s)\psi(s) V(t)\psi(t) ds dt = \mu_1 \int V(t)\psi^2(t) dt = \mu_1^2 \quad (27)$$

$$L_2 [V(s)\psi(s)] = \mu_1^5. \quad (28)$$

Distinguiamo ora tre casi:

1.º) Le costanti  $m_1, M_1$  sono entrambe differenti da zero. Se fosse  $m_1 = M_1$ , vorrebbe dire che, se  $u$  è funzione integrabile insieme al suo quadrato, allora dalla  $L_1(u) = 1$  seguirebbe la  $L_2(u) = m_1 = M_1$ . E i precedenti ragionamenti perderebbero il loro interesse, in quanto che ha solo un significato formale parlare di minimi o massimi di una funzione costante. Ma osserviamo che nelle nostre ipotesi dovrebbe essere

$$\iint [H_2(s, t) - m_1 K(s, t)] u(s) u(t) ds dt = 0$$

per ogni funzione  $u$  di  $\{u\}$ ; e ciò può avvenire soltanto se vale la

$$H_2(s, t) = m_1 K(s, t) \quad (*)$$

ossia la

$$\int K(s, \rho) V(s) K(s, t) ds = m_1 K(\rho, t).$$

La ricerca, difficile per via diretta, di trovare i nuclei  $K$  che soddisfano alla precedente uguaglianza si compie nel modo più semplice coi nostri metodi. Infatti in tal caso, la funzione  $K(s, \rho)$  (dove si consideri  $\rho$  come un parametro) considerata come funzione della sola  $s$ , soddisfa all'equazione (5)<sup>bis</sup> ove si ponga  $\mu = m_1 \neq 0$  (e  $\varphi(s) = K(s, \rho)$ ). Ma per la seconda parte del teor. 8.º del § 3 può esistere solo un numero *finito* di funzioni linearmente indipendenti che soddisfino alla (5)<sup>bis</sup> con uno stesso valore di  $\mu$  differente da zero. Quindi le funzioni di  $s$ , che si ottengono dando a  $\rho$  in  $K(s, \rho)$  un valore arbitrario, si riducono a combinazioni lineari di un numero finito di funzioni della  $s$ . E quindi  $K(s, t)$  è un nucleo elementare: la cui teoria è già stata esaurita al § 1 (\*\*).

(\*) Oppure (ciò che per noi è lo stesso) se, cambiando valori di  $K(s, t)$  in un gruppo di punti di misura nulla, è  $H_2(s, t) = m_1 K(s, t)$ .

(\*\*) Un nucleo *elementare* appartiene al tipo discusso, se le costanti  $\mu_i$  (cfr. per le notazioni il § 1) sono tutte uguali fra loro. Il risultato del testo si può anche dimostrare ricordando che (come abbiamo già visto in nota in questo stesso paragrafo), se il nucleo  $K(s, t)$  non è elementare, è  $m_1 \leq 0, M_1 \geq 0$ ; se  $K(s, t)$  non è un nucleo elementare, non può essere  $m_1 = M_1 \neq 0$ .

Possiamo dunque supporre senz'altro  $m_1 \neq M_1$ . Indicando allora ancora con  $\mu_1$  una delle due costanti  $m_1, M_1$ , ponendo poi  $\varepsilon = +1$ , oppure  $\varepsilon = -1$  secondo che  $\mu_1 > 0$ , oppure  $\mu_1 < 0$ , e infine ponendo  $\varphi = \frac{\psi}{\mu_1 \sqrt{|\mu_1|}}$  si trarrà dalle (25) ... (28)

$$\left. \begin{aligned} \int K(s, t) V(s) \varphi(s) ds &= \mu_1 \varphi(t); & \int V(s) \varphi^2(s) ds &= \varepsilon = \frac{\mu_1}{|\mu_1|}. \\ L_1(V\varphi) &= |\mu_1|; & L_2(V\varphi) &= \mu_1 |\mu_1|. \end{aligned} \right\} (29)$$

La funzione  $u = \frac{V\varphi}{\sqrt{|\mu_1|}}$  appartiene a  $\{u\}$ , e fa assumere a  $L_2(u)$  proprio il valore *minimo* o *massimo*  $\mu_1$ . Noi, per evitare ambiguità, indicheremo rispettivamente con  $\varphi_1$  e con  $\Phi_1$  quella delle due funzioni  $\varphi$  che corrisponde a  $\mu = m_1$ , oppure a  $\mu = M_1$ .

2.º) Una sola delle costanti  $m_1, M_1$  è nulla. A quella di queste costanti, che è differente da zero, potremo applicare tutti i ragionamenti precedenti, provando così l'esistenza o di una funzione  $\varphi_1$  che soddisfa alle (29), ove si ponga  $\varphi = \varphi_1, \mu = m_1$  (se  $m_1 \neq 0$ ) oppure di una funzione  $\Phi_1$  che soddisfa alle (29), ove si ponga  $\varphi = \Phi_1, \mu = M_1$  (se  $M_1 \neq 0$ ). Quanto poi a quello dei valori di  $\mu$  che è nullo, il nostro metodo ci dimostra soltanto che la funzione  $\psi$  corrispondente è nulla. Che, se poi  $L_2(u)$  raggiungesse effettivamente il valore zero, p. es. per  $u = v(s)$ , allora (posto in (24)  $u_n = v$ ) si trova che  $\int H_2(s, t) v(s) ds = 0$ .

3.º) Entrambe le costanti  $m_1, M_1$  sono nulle. In questo caso  $H_2(s, t) = 0$ . Ma allora è ben certo che non esiste alcuna soluzione non identicamente nulla di (5)<sup>bis</sup>, qualunque sia il valore (differente da zero) dato alla  $\mu$ . Infatti, moltiplicando (5)<sup>bis</sup> per  $V(t) K(t, \sigma)$  e integrando rispetto a  $t$  si trova

$$\int H_2(\sigma, s) \varphi(s) ds = \mu \int V(t) K(t, \sigma) \varphi(t) dt = \mu^2 \varphi(\sigma).$$

Poichè  $H_2 = 0, \mu \neq 0$ , se ne deduce infatti che  $\varphi$  dovrebbe essere identicamente nullo, contro il supposto.

## § 6. I SUCCESSIVI VALORI ECCEZIONALI.

Dal § 5 si sa, che se  $H_2(s, t)$  non è identicamente nullo, esiste almeno una soluzione  $\varphi$  non identicamente nulla di (5)<sup>bis</sup>, dove  $\mu$  ha un valore  $m_1$  oppure  $M_1$  differente da zero. Questo valore di  $\mu$  e la funzione  $\varphi$  corrispondente si diranno: *valore eccezionale* (EIGENWERT) e *funzione eccezionale*. Noi vogliamo ora vedere come si possano determinare tutti i valori eccezionali, e le funzioni corrispondenti. Escludiamo senz'altro dalla nostra ricerca i nuclei *elementari*. E, per fissare le idee, supponiamo  $m_1 \neq 0$ . Esiste dunque una funzione  $\varphi_1$  soddisfacente alle (29) ove si ponga  $\mu = m_1$ . Ripetiamo i ragionamenti applicati al nucleo  $K$  nel § 5 per il nuovo nucleo

$$F_1^{(1)} = K(s, t) - |m_1| \varphi_1(s) \varphi_1(t);$$

ne dedurremo facilmente l'esistenza di un valore eccezionale  $m_2 \geq m_1$ , e di una corrispondente funzione eccezionale  $\varphi_2$ , polare a  $\varphi_1$ , per il nucleo primitivo  $K(s, t)$ . Applichiamo poi il nostro procedimento al nucleo

$$F_1^{(2)} = K(s, t) - \sum_1^2 |m_i| \varphi_i(s) \varphi_i(t);$$

e così continuiamo indefinitamente. Altrettanto facciamo, partendo (se  $M_1 \neq 0$ ) da  $\Phi_1$  e  $M_1$ . Troveremo così tutti i valori eccezionali cercati, e le funzioni corrispondenti. Non sarà male studiare questo procedimento nei singoli particolari. Per le identità (12), (13) del § 3, e per l'osservazione fatta nel § 3 per le funzioni  $f(s) = \sum c_i \varphi_i(s) V(s)$ , studiare il limite inferiore e superiore di  $\int \int F_1^{(1)}(s, t) u(s) u(t) ds dt = \int \int \int F_1^{(1)}(s, \rho) V(\rho) F_1^{(1)}(\rho, t) u(s) u(t) ds dt d\rho$ , quando  $u, u^2$  sono integrabili, e  $\int \int F_1^{(1)}(s, t) u(s) u(t) = 1$ , equivale a studiare il limite inferiore e superiore di  $L_2(u)$ , quando  $u$  appartiene a  $\{u\}$ , ed è polare con  $\varphi_1, V$ . Questo studio non ha significato nel solo caso che sia  $F_1^{(1)} = 0$ , ma in tal caso la (13) del § 3 (ove si ponga  $n = 1, \mu_1 = m_1$ ) dimostra che  $K$  è un *nucleo elementare*. Il limite inferiore, che noi troveremo, è un numero  $m_2$  evidentemente non minore di  $m_1$ ; il limite superiore è ancora  $M_1$ ,



come si vede facilmente (\*); e noi perciò limiteremo la nostra attenzione al limite  $m_2 \geq m_1$ . Se  $m_2 = 0$ , noi non possiamo affermare l'esistenza della funzione  $\varphi_2$ ; cosicchè la successione che volevamo costruire resta limitata alla sola funzione  $\varphi_1$ . Se  $m_2 = M_1 \neq 0$ , allora (per quanto dicemmo al § 5 per il caso  $m_1 = M_1 \neq 0$ ) il nucleo  $F_1^{(1)}$  è un nucleo elementare; e (per i risultati del § 3) è elementare anche  $K(s, t)$ . Rimane da esaminare il caso in cui  $m_2 \neq M_1, m_2 \neq 0$ .

In questo caso si dimostra col nostro metodo l'esistenza di una funzione  $\varphi_2$ , che soddisfa alle (29), quando a  $K, \nu_2, \varphi$  si sostituiscano ordinatamente  $F_1^{(1)}, m_2, \varphi_2$ , che soddisfa cioè alle

$$\int [K(s, t) - |m_1| \varphi_1(s) \varphi_1(t)] V(s) \varphi_2(s) ds = m_2 \varphi_2(t),$$

$$\int V(s) \varphi_2^2(s) ds = \frac{m_2}{|m_2|}, \quad \text{ecc.}$$

(\*) Infatti, se  $M_1 \neq 0$ , la funzione  $f = \frac{V \Phi_1}{\sqrt{|M_1|}}$  è polare con  $V \varphi_1$ , appartiene a  $\{u\}$  e fa assumere a  $L_2(f)$  proprio il valore massimo  $M_1$ . Se invece  $M_1 = 0$ , allora se  $u$  è una funzione tale che  $L_1(u) \neq 0$ , e se  $u, u^2$  sono integrabili, è  $m_1 \leq \frac{L_2(u)}{L_1(u)} \leq 0$ . È allora  $m_1 < 0$ ,  $\int V \varphi_1^2 ds = -1$ ; la funzione  $v = u + V \varphi_1 \int u(s) \varphi_1(s) ds$  è polare con  $V \varphi_1$ , soddisfa alle  $L_1(v) = L_1(u) + m_1 \left( \int u \varphi_1 ds \right)^2, L_2(v) = L_2(u) + m_1^2 \left( \int u \varphi_1 ds \right)^2$ . Sia  $u_1, u_2, \dots$  una successione tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_2(u_n) = 0$ ; e sia  $v_1, v_2, \dots$  la successione corrispondente delle funzioni  $v$ . Io dico che si può scegliere la successione delle  $u$ , in guisa che da un certo valore di  $n$  in poi sia  $L_1(v_n) \neq 0$ . Infatti, se così non fosse, sarebbe identicamente  $L_1(u) + m_1 \left( \int u \varphi_1 ds \right)^2 = 0$  e quindi  $K(s, t) + m_1 \varphi_1(s) \varphi_1(t) = 0$ : cioè  $K(s, t)$  sarebbe un *nucleo elementare*. Possiamo dunque supporre che da un certo punto in poi  $L_1(v_n) \neq 0$ . Il rapporto

$$\frac{L_2(v_n)}{L_1(v_n)} = \frac{L_2(u_n) + m_1^2 \left( \int u \varphi_1 ds \right)^2}{L_1(u_n) + m_1 \left( \int u \varphi_1 ds \right)^2} \geq \frac{L_2(u_n)}{L_1(u_n)}$$

perchè  $m_1 < 0, m_1 L_1(u_n) \leq L_2(u_n)$ . Quindi  $\frac{L_2(v_n)}{L_1(v_n)}$  ha un limite superiore non minore di quello di  $\frac{L_2(u_n)}{L_1(u_n)}$ , e quindi ha proprio per limite superiore  $M_1 = 0$ . c. d. d.

Moltiplicando la prima di queste equazioni per  $V(t) \varphi_1(t)$  e integrando rispetto alla  $t$ , se ne deduce immediatamente che  $\varphi_2$  è polare alla  $\varphi_1$  e che quindi  $\int [F_1^{(1)}(s, t)] V \varphi_2(s) ds = \int [K(s, t) - |m_1| \varphi_1(s) \varphi_1(t)] V(s) \varphi_2(s) ds = \int K(s, t) V \varphi_2(s) ds$ , e che perciò  $\varphi_2$  soddisfa proprio alle (29), ove soltanto si ponga  $\varphi = \varphi_2$ ,  $\mu = m_2$ , ed è polare a  $\varphi_1$ .

Così possiamo continuare indefinitamente, costruendo la successione polare normale di funzioni  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$  e di costanti  $m_1 \leq m_2 \leq m_3, \dots$ , le quali soddisfano alle (29), ove si ponga  $\varphi = \varphi_i$ ,  $\mu = m_i$ . Questa successione sarà limitata, ossia conterrà un numero finito  $n$  di termini nel solo caso che  $m_{n+1} = 0$ . (Se  $m_i = 0$ , l'intera successione non esiste.)

In modo analogo, partendo dalle  $\Phi_1, M_1$ , si può costruire una successione affatto analoga di funzioni  $\Phi_1, \Phi_2, \dots$  e di costanti  $M_1 \geq M_2 \geq M_3, \dots$  soddisfacenti alle (29), quando vi si ponga  $\varphi = \Phi_i$ ,  $\mu = M_i$ , e costituenti un sistema polare normale. E questa successione conterrà un numero limitato  $n$  di termini nel solo caso che  $M_{n+1} = 0$ .

(Dalla successione delle  $\varphi_i$  si passa a quelle delle  $\Phi_i$ , mutando  $V(s)$  in  $-V(s)$ ).

Le costanti  $m_i$  (eccetto al più la  $m_{n+1}$  se la successione delle  $m_i$  contiene solo  $n$  costanti) sono negative. Infatti ciò è evidente se  $m_{n+1} = 0$ , perchè  $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n \leq m_{n+1} = 0$ ; se invece le  $m_i$  sono in numero infinito, si noti che in virtù del teor. 8.º del § 4, la serie  $\sum |m_i|^3$  converge; quindi  $\lim_{i \rightarrow \infty} m_i = 0$ ; e, poichè le  $m_i$  non decrescono mai al crescere dell'indice  $i$ , esse sono tutte negative. Così pure le costanti  $M_i$  (eccetto al più la  $M_{n+1}$ , se la successione delle  $M_i$  contiene sole  $n$  costanti) sono tutte positive (\*). Quindi le funzioni  $\varphi_i$  corrispondono a valori eccezionali del parametro  $\mu$  distinti da quelli corrispondenti alle funzioni  $\Phi_i$ . E per il teor. 6.º del § 3 il sistema delle  $\varphi_i, \Phi_i$  costituiscono un sistema polare normale. Poichè le  $m_i$  (negative) crescono, e le  $M_i$  (positive) decrescono al crescere di  $i$ , noi potremo ordinarle complessivamente in un'unica successione  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$  tale che  $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq |\mu_3| \dots$ . Indicheremo (variando leggermente le attuali notazioni) le funzioni  $\varphi$  o  $\Phi$  corrispondenti con  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$

(\*) Ciò si poteva dedurre anche da quanto dicemmo nella prima delle note al § 5. Se il nucleo  $K$  non è un nucleo elementare, neanche i nuclei successivi  $F_1^{(n)}, \dots$  che ne deduciamo col metodo del testo sono elementari (§ 3). E per la nota citata i corrispondenti limiti superiori sono nulli o positivi, gli inferiori nulli o negativi.

Avremo che le funzioni  $\varphi_i$  formano un sistema polare normale, che esse soddisfano alle (29), ove si ponga  $\varphi = \varphi_i$ ,  $\mu = \nu_i$ . E, per il modo stesso con cui esse sono state determinate, se  $f$  è una funzione di  $\{u\}$  polare con  $V\varphi_1, V\varphi_2, \dots, V\varphi_{i-1}, V\varphi_i$ , è  $|L_2(u)| \leq |m_{i+1}|$ . Se  $L_1(u) = -1$ , ma  $L_1(u) \neq 0$ , è invece  $|L_2(u)| \leq |m_{i+1}| L_1(u)$ .

§ 7. IL SISTEMA COMPLETO DELLE FUNZIONI ECCEZIONALI.

Può essere interessante il dimostrare direttamente che con le precedenti ricerche abbiamo trovato tutti i possibili valori eccezionali di  $\mu$  e anche, si può dire, tutte le corrispondenti funzioni eccezionali.

Cominciamo intanto a far vedere che un valore eccezionale non può essere immaginario; cioè che se una funzione  $\varphi$  non identicamente nulla soddisfa alla (5)<sup>bis</sup> del § 3, allora  $\mu$  è certamente reale. Posto infatti  $\mu = \alpha + i\beta$  ( $i = \sqrt{-1}$ ),  $\varphi(s) = u(s) + i v(s)$ , la (5)<sup>bis</sup> si sdoppia nelle:

$$\left. \begin{aligned} \iint K(s, t) V(s) u(s) ds &= \alpha u(t) - \beta v(t) \\ \iint K(s, t) V(s) v(s) ds &= \alpha v(t) + \beta u(t). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Moltiplicando queste equazioni rispettivamente per  $V(t)v(t)$  e  $V(t)u(t)$ , e integrando rispetto a  $t$ , si trova

$$L_1(Vu, Vv) = \alpha \int Vuv dt - \beta \int Vv^2 dt = \alpha \int Vuv dt + \beta \int Vu^2 dt.$$

Cosicchè, se  $\beta \neq 0$ , è

$$\int Vu^2 dt + \int Vv^2 dt = 0 \quad (\text{se } \beta \neq 0). \quad (31)$$

Moltiplicando le (30) rispettivamente per  $V(t)u(t)$  e  $V(t)v(t)$ , integrando rispetto a  $t$ , e sommando si trova per (31):

$$L_1(Vu) + L_1(Vv) = 0.$$

Ma poichè per la 3.<sup>a</sup> proprietà di  $K$ , è  $L_1(Vu) \geq 0$ ,  $L_1(Vv) \geq 0$ , se ne deduce:

$$L_1(Vu) = L_1(Vv) = 0.$$

Per il teor. 2.<sup>o</sup> del § 2, sarà

$$\int K(s, t) V(s) u(s) ds = \int K(s, t) V(s) v(s) ds = 0,$$

eccettuato al più un gruppo di punti di misura nulla; dalle (30) si deduce che altrettanto avverrà per le  $u, v$ ; e quindi, per le (30) stesse  $u = v = 0$ . Se dunque  $\varphi$  non è identicamente nullo, è  $\beta = 0$ . c. d. d.

Sia ora  $\mu$  un valore eccezionale (che sappiamo già reale); e sia, se possibile,  $\mu$  differente da tutte le costanti  $\mu_i$ , determinate al § 6.

Allora per il teor. 6.<sup>o</sup> del § 3, la funzione eccezionale corrispondente  $\varphi$  sarebbe polare a tutte le funzioni  $\varphi_i$ ; per l'oss. II del § 3 sarebbe  $L_1(V\varphi) = 0$ ; e per l'ultimo teor. del § 6 la frazione  $\frac{L_2(V\varphi)}{L_1(V\varphi)}$  sarebbe piccola a piacere. Ma per la (5)<sup>bis</sup> questa frazione è uguale a  $\mu$ . Quindi sarebbe  $\mu = 0$  contro l'ipotesi.

Supponiamo ora in fine che il valore eccezionale  $\mu$  sia uguale a un certo numero delle costanti  $\mu_i$ , p. es., a  $\mu_i = \mu_{i+1} = \dots = \mu_{i+n}$ . Dico che la funzione eccezionale corrispondente  $\varphi$  è combinazione lineare delle  $\varphi_i, \dots, \varphi_{i+n}$ . Infatti, togliendo dalla  $\varphi$  una conveniente combinazione lineare delle  $\varphi_i, \dots, \varphi_{i+n}$  si può ottenere una nuova funzione, che ancora soddisfa alla (5)<sup>bis</sup>, ed è polare con le  $\varphi_i, \dots, \varphi_{i+n}$ . Come nel caso precedente si prova che questa funzione è polare anche con  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+n+1}, \varphi_{i+n+2}, \dots$  e che quindi (se  $\mu = 0$ ) essa è identicamente nulla.

### § 8. SVILUPPI IN SERIE.

Sia ora  $f(s)$  una funzione integrabile insieme al suo quadrato. La funzione  $f(s) - \sum_1^n c_i V(s) \varphi_i(s)$ , dove  $c_i = \varepsilon_i \int f(s) \varphi_i(s) ds$  (cfr. il § 3), è polare con  $V\varphi_1, V\varphi_2, \dots, V\varphi_n$ . E quindi per l'ultimo teor. del § 6 è

$$L_2 \left[ f(s) - \sum_1^n c_i V(s) \varphi_i(s) \right] \leq |\mu_{n+1}| A_n$$

dove (cfr. le (10) del § 3)

$$A_n = L_1 \left[ f(s) - \sum_1^n c_i V(s) \varphi_i(s) \right] = L_1(f) - \sum_1^n |\mu_i| c_i^2 \leq L_1(f).$$

(Cfr. la Nota in fine della Memoria.)

Per la (2)<sup>a</sup> delle (13) del § 3 è perciò

$$\left| L_2(f) - \sum_1^n \mu_i |\mu_i| \left( \int f(s) \varphi_i(s) ds \right)^2 \right| \leq |\mu_{n+1}| A_n.$$

Poichè, se le  $\mu$  sono in numero limitato, l'ultima è uguale a zero; e, se sono in numero illimitato,  $\lim_{i=\infty} \mu_i = 0$  mentre  $|A_i| \leq L_1(f)$ , avremo dall'ultima formola :

Se  $f(s)$  ed  $f^2(s)$  sono integrabili, allora

$$L_2(f) = \sum_i \mu_i |\mu_i| \left( \int f(s) \varphi_i(s) ds \right)^2. \quad (32)$$

Questa uguaglianza corrisponde all'ultima delle formole trovate al § 1 per i nuclei *elementari*.

Posto in (32)  $f(s) = u(s) + v(s)$  (supposte  $u, u^2, v, v^2$  integrabili), e sottraendo dalla formola così ottenuta la (32) ove si ponga successivamente  $f = u$  e  $f = v$ , si ottiene

$$L_2(u, v) = \sum_i \mu_i |\mu_i| \int u(s) \varphi_i(s) ds \int v(s) \varphi_i(s) ds. \quad (33)$$

Sia ora  $p(t)$  una funzione integrabile insieme al suo quadrato. Posto

$$g(s) = \int H_2(s, t) p(t) dt, \quad (34)$$

cerchiamo di sviluppare  $g(s)$  in una serie  $S$  di funzioni  $\varphi_i$ , ponendo

$$g(s) = \sum_i c_i \varphi_i(s).$$

Calcolando i coefficienti  $c_i$  della  $S$  al modo di FOURIER, si trova

$$c_i = \varepsilon_i \int V(s) \varphi_i(s) g(s) ds.$$

La serie  $S(s)$  da studiare si può porre sotto la forma equivalente

$$\begin{aligned} S(s) &= \sum c_i \varphi_i(s) = \sum \varepsilon_i \varphi_i(s) \int V(t) \varphi_i(t) g(t) dt = \\ &= \sum \varepsilon_i \varphi_i(s) \iint V(t) \varphi_i(t) H_2(t, \tau) p(\tau) dt d\tau = \\ &= \sum \varepsilon_i \mu_i \varphi_i(s) \iint \varphi_i(\rho) V(\rho) K(\rho, \tau) p(\tau) d\rho d\tau = \\ &= \sum \varepsilon_i \mu_i^2 \varphi_i(s) \int \varphi_i(\tau) p(\tau) d\tau = \\ &= \sum |\mu_i| \int K(s, t) \varphi_i(t) V(t) dt \int \varphi_i(t) p(t) dt. \end{aligned}$$

Da quest'ultima forma di  $S$  si riconosce per il teor. 10.<sup>o</sup> del § 4, che la serie  $S$  è assolutamente e uniformemente convergente. Noi dimostreremo ora che essa è uguale a  $g(s)$ . Infatti, se  $q(s)$  e  $q^2(s)$  sono funzioni integrabili, dalle (33), (34) si ottiene:

$$\begin{aligned} \int g(s) q(s) ds &= L_2(p, q) = \sum_i |\mu_i| \mu_i \int q(s) \varphi_i(s) ds \int \varphi_i(t) p(t) dt = \\ &= \int q(s) ds \left\{ \sum_i |\mu_i| \int K(s, t) V(t) \varphi_i(t) dt \int \varphi_i(t) p(t) dt \right\}. \end{aligned}$$

Ossia, per la convergenza uniforme di  $S(s)$ , si ha che è identicamente, comunque sia scelta la funzione  $q(s)$  integrabile insieme a  $q^2(s)$ ,

$$\int g(s) q(s) ds = \int S(s) q(s) ds.$$

E, poichè la  $g(s)$  è continua per la (34), e la  $S(s)$  è pure continua, perchè definita da una serie uniformemente convergente di funzioni continue, sarà  $S(s) = g(s)$ . Donde si deduce:

Ogni funzione  $f(s)$  che si può scrivere sotto la forma  $\int H_2(s, t) p(t) dt$  (essendo  $p(t)$  e  $p^2(t)$  integrabili) è sviluppabile in una serie assolutamente e uniformemente convergente  $\sum c_i \varphi_i(s)$  di funzioni eccezionali. Ed è

$$c_i = \varepsilon_i \int f(s) \varphi_i(s) V(s) ds.$$

### § 9. RISOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE INTEGRALE.

#### DETERMINAZIONE DIRETTA DEI VALORI ECCEZIONALI.

Sia data l'equazione integrale

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int H_2(s, t) \varphi(t) V(t) dt \quad (f \text{ ed } f^2 \text{ integrabili}) \quad (34)$$

dove  $\varphi(t)$  è la funzione incognita. Noi anzitutto la risolveremo con metodo analogo a quello dello SCHMIDT per le equazioni integrali simmetriche. Posto  $\varphi(s) = f(s) + g(s)$ , si trova:

$$g(s) = \lambda \int H_2(s, t) [f(t) + g(t)] V(t) dt.$$

Supposto che  $g(s)$  esista e che  $g$  e  $g^2$  siano integrabili, i risultati del § 8 dimostrano che si può porre

$$g(s) = \sum c_i \varphi_i(s)$$

dove

$$\begin{aligned} c_i &= \varepsilon_i \int g(s) \varphi_i(s) V(s) ds = \\ &= \varepsilon_i \lambda \iint H_2(s, t) [f(t) + g(t)] \varphi_i(s) V(s) V(t) ds dt = \\ &= \varepsilon_i \lambda \mu_i^2 \int f(t) \varphi_i(t) V(t) dt + \varepsilon_i \lambda \int \mu_i^2 \varphi_i(t) \sum V(t) c_j \varphi_j(t) dt = \\ &= \varepsilon_i \lambda \mu_i^2 \int f(t) \varphi_i(t) V(t) dt + \lambda \mu_i^2 c_i. \end{aligned}$$

donde

$$c_i = \frac{\varepsilon_i \lambda \mu_i^2 \int f(t) \varphi_i(t) V(t) dt}{1 - \lambda \mu_i^2}$$

e

$$g(s) = \lambda \sum |\mu_i| \frac{\mu_i \varphi_i(s)}{1 - \lambda \mu_i^2} \int f(t) \varphi_i(t) V(t) dt.$$

Posto che  $\lim_{i \rightarrow \infty} (1 - \lambda \mu_i^2) = 1$ ,  $\mu_i \varphi_i(s) = \int K(s, t) V(t) \varphi_i(t) dt$ , si deduce dal teor. 10.<sup>o</sup> del § 4 che la precedente serie converge assolutamente e uniformemente: ciò che legittima i calcoli precedenti.

La nostra funzione  $g(s)$  [o  $\varphi(s)$ ] esiste; e, considerata come funzione di  $\lambda$ , è analitica, ed a distanza finita ha soltanto dei poli semplici: i punti  $\lambda = \frac{1}{\mu_i^2}$ .

Se poniamo  $f(s) = H_2(r, s)$ , si trova che la funzione  $G(r, s)$ , che soddisfa alla

$$H_2(r, s) = G(r, s) - \lambda \int H_2(s, t) G(r, t) V(t) dt$$

è data da:

$$G(r, s) = H_2(r, s) + \lambda \sum \varepsilon_i \mu_i^2 \frac{\varphi_i(s) \varphi_i(r)}{1 - \lambda \mu_i^2}. \quad (35)$$

Questa funzione si può chiamare il *nucleo risolvente* della (34), perchè

dalla (34) si trae:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int G(s, r) f(r) V(r) dr \quad (\text{che risolve la (34)}). \quad (34)^{\text{bis}}$$

La  $G(r, s)$  ha per poli i soli punti  $\lambda = \frac{1}{\mu_i^2}$ , ed è regolare in tutti gli altri punti a distanza finita, in particolare per  $\lambda = 0$ . Nell'intorno del punto  $\lambda = 0$  la  $G$  è sviluppabile in una serie di potenze, che si calcola facilmente, e si trova essere

$$\sum_{i=0}^{\infty} H_2^{(i)}(r, s) \lambda^i \quad (36)$$

dove

$$H_2^{(0)}(r, s) = H_2(r, s); \quad H_2^{(i)}(r, s) = \int H_2^{(i-1)}(r, t) H_2(t, s) V(t) dt \quad \text{per } i > 0.$$

Dalla (35) possiamo dedurre facilmente una serie di potenze a coefficienti costanti, che ha per poli tutti e soli i punti  $\lambda = \frac{1}{\mu_i^2}$ . Ciò avviene infatti per

$$\begin{aligned} \int V(r) G(r, r) dr &= \int V(r) H_2(r, r) dr + \lambda \sum \frac{\mu_i^4}{1 - \lambda \mu_i^2} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \int V(r) H_2^{(i)}(r, r) dr. \end{aligned}$$

Ora di questa ultima serie i coefficienti sono facilmente calcolabili; e, poichè essa rappresenta una funzione analitica coi poli nei soli punti  $\frac{1}{\mu_1^2}, \frac{1}{\mu_2^2}, \dots$  (posti in ordine non decrescente), procedimenti e metodi ben classici permettono di determinare successivamente questi poli: dopo di che si potranno facilmente assegnare i relativi residui della  $G(r, s)$ , e quindi le funzioni  $\varphi_i$  (come limiti o come integrali di espressioni note).

#### § 10. OSSERVAZIONI VARIE.

I nostri metodi si estendono quasi senza modificazione ai problemi di minimo e massimo per l'integrale

$$\Lambda(u) = \iint \left[ \iint K(r, \rho) V(\rho, \sigma) K(\sigma, s) d\rho d\sigma \right] u(r) u(s) dr ds$$



quando  $V(\rho, \sigma)$  sia una tale funzione simmetrica delle  $\rho, \sigma$ , che

$$|\Lambda(u)| \leq h L_1(u)$$

dove  $h$  è una costante indipendente da  $u$ .

Questa osservazione è utile, p. es., se si volessero esporre contemporaneamente la teoria delle equazioni polari, e la teoria delle equazioni a nucleo simmetrico  $V(\rho, \sigma)$ .

È assai più importante osservare, che se  $K(r, s)$  è un nucleo simmetrico definito positivo singolare, per il quale ammettiamo soltanto la validità del teor. 1.º del § 2, si può dimostrare col metodo del § 5 la risolubilità *approssimata* dell'equazione omogenea (5), e la corrispondente esistenza di almeno un valore eccezionale  $\mu_i$ . La prima parte del § 5 dimostra infatti in tal caso l'esistenza di una successione di funzioni  $u_n$ , tali che  $u_n$  e  $u_n^2$  sono integrabili, che  $L_1(u_n) = 1$ , e che valga la (24), quando le  $v_n$  sono scelte in guisa che  $L_1(v_n)$  non cresca oltre ogni limite.

*Nota.* Il ragionamento delle prime righe del § 8 è ispirato all'analogo dell'HÖLMEGREN. Esso è in difetto, soltanto se una delle quantità

$$A_n = L_1 \left[ f(s) - \sum_1^n c_i V(s) \varphi_i(s) \right] = L_1(f) - \sum_1^n \mu_i |c_i|^2$$

è nulla. Supponiamo che questo avvenga per  $n = m$ .

Poichè le  $A_n$  (mai negative) decrescono al crescere di  $n$ , sarà  $c_n = 0$  per  $n > m$ . Dal teor. 2.º del § 2 e dalla  $A_m = 0$  si deduce (poichè  $c_i = 0$  per  $i > m$ )

$$\begin{aligned} \int K(s, t) f(s) ds &= \sum_1^m c_i \int K(s, t) V(s) \varphi_i(s) ds = \\ &= \sum_1^m c_i \mu_i \varphi_i(t) \end{aligned}$$

(escluso al più un aggregato di misura nulla).

Poichè  $L_2(f) = \int V(t) \left[ \int K(s, t) f(s) ds \right]^2 dt$ , se ne deduce facilmente che anche in questo caso vale la (32) del § 8. Cosicchè i risultati del § 8 sono assolutamente generali.



# Saggio di una teoria generale delle equazioni dell'equilibrio elastico per un corpo isotropo.

(Di ORAZIO TEDONE, a Genova.)

MEMORIA III.

(Ellissoide di rotazione.)

I. DIGRESSIONE SULLE FUNZIONI SFERICHE.

1. *Richiamo delle proprietà fondamentali e notazioni.* Indichiamo, adottando un sistema di notazioni molto usato, col simbolo  $P_m(t)$  la funzione sferica semplice (polinomio di LÉGENDRE) della variabile  $t$  d'ordine  $m$  di prima specie e col simbolo  $Q_m(t)$  la funzione sferica semplice di  $t$  dello stesso ordine  $m$  e di seconda specie. Poniamo, inoltre:

$$\left. \begin{aligned} P_{m,i}(t) &= (1-t^2)^{\frac{i}{2}} \frac{d^i P_m(t)}{d t^i}, & Q_{m,i}(t) &= (1-t^2)^{\frac{i}{2}} \frac{d^i Q_m(t)}{d t^i}, \\ P_{m,0} &= P_m, & Q_{m,0} &= Q_m. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Il sistema delle funzioni  $P_{m,i}$ ,  $Q_{m,i}$  è completamente definito dalle posizioni (1) e dalle relazioni:

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t P_0(t); \quad Q_0(t) = \frac{1}{2} \log \frac{t+1}{t-1}, \quad Q_1(t) = t Q_0(t) - 1. \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} (m+1) P_{m+1} &= (2m+1) t P_m - m P_{m-1}, \\ (m+1) Q_{m+1} &= (2m+1) t Q_m - m Q_{m-1} \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

e tutta la teoria di queste funzioni è racchiusa, quindi, nelle (1), (2), (2').

Le (2') mostrano che  $P_m$  si esprime per mezzo di  $P_0$  e  $P_1$  come  $Q_m$  si esprime per mezzo di  $Q_0$  e  $Q_1$  e le corrispondenti espressioni potrebbero scriversi immediatamente sotto forma di determinanti.  $P_m(t)$  è un polinomio di grado  $m$  in  $t$ , mentre

$$Q_m(t) = \frac{1}{2} P_m(t) \log \frac{t+1}{t-1} - Z_m(t), \quad (3)$$

dove  $Z_m(t)$  è un polinomio di grado  $m-1$  della stessa variabile  $t$  che soddisfa, come  $P_m$  e  $Q_m$ , alle relazioni ricorrenti (2') e, solo, differisce da esse per i valori iniziali che sono:

$$Z_1 = 1 = P_0, \quad Z_2 = \frac{3}{2} P_1.$$

Il sistema delle funzioni  $P_{m,i}$ ,  $Q_{m,i}$  può essere definito, com'è noto, anche con l'aiuto di equazioni differenziali ordinarie e dei valori che esse acquistano per un dato valore di  $t$  conformemente alle (1), (2), (2').  $P_m$  e  $Q_m$  sono, infatti, due integrali particolari distinti dell'equazione

$$\frac{d}{dt} \left[ (1-t^2) \frac{dV}{dt} \right] + m(m+1)V = 0, \quad (4)$$

$\frac{d^i P_m}{dt^i}$  e  $\frac{d^i Q_m}{dt^i}$  sono due integrali particolari distinti dell'equazione

$$(1-t^2) \frac{d^2 V}{dt^2} - 2(i+1)t \frac{dV}{dt} + (m-i)(m+i+1)V = 0 \quad (4')$$

e  $P_{m,i}$ ,  $Q_{m,i}$  sono tali per l'equazione

$$\frac{d}{dt} \left[ (1-t^2) \frac{dV}{dt} \right] + \left[ m(m+1) - \frac{i^2}{1-t^2} \right] V = 0. \quad (4'')$$

Ciò, per  $i \leq m$ . Per  $i > m$ ,  $\frac{d^i P_m}{dt^i}$  e  $P_{m,i}$  sono identicamente nulli, mentre  $\frac{d^i Q_m}{dt^i}$  e  $Q_{m,i}$  continuano a soddisfare alle (4') e (4''). Dell'altro integrale di queste due equazioni, in quest'ultimo caso, non ne avremo bisogno e perciò non ce ne occupiamo. Al contrario ci sarà utile notare ancora le formule

seguenti che discendono subito dalle (4'), (2) e (2') :

$$\left. \begin{aligned} & \left[ (1-t^2)^{-\frac{i}{2}} P_{m,i} \right]_{t=1} = \left( \frac{d^i P_m}{d t^i} \right)_{t=1} = \\ & = \frac{(m-i+1)(m+i)}{2i} \left( \frac{d^{i-1} P_m}{d t^{i-1}} \right)_{t=1} = \frac{1}{2^i i!} \frac{(m+i)!}{(m-i)!}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} & \left[ (1-t^2)^{\frac{i}{2}} Q_{m,i} \right]_{t=1} = \left[ (1-t^2)^i \frac{d^i Q_m}{d t^i} \right]_{t=1} = \\ & = 2(i-1) \left[ (1-t^2)^{i-1} \frac{d^{i-1} Q_m}{d t^{i-1}} \right]_{t=1} = 2^{i-1} (i-1)! \end{aligned} \right\} \quad (5')$$

delle quali la prima vale anche per  $i=0$ .

2. *Relazioni differenziali fra le funzioni  $P_{m,i}$  e fra le  $Q_{m,i}$ .* Chiamo relazioni differenziali fra le funzioni  $P_{m,i}$  ovvero  $Q_{m,i}$  le relazioni che passano fra queste funzioni di indici diversi e le loro derivate prime. La scelta di questa denominazione mi è consigliata anche dalla maniera con la quale esse sono qui ricavate, che è perfettamente generale e può servire a trovare utili formole anche in altri casi analoghi.

Se  $x, y, z$  sono le coordinate cartesiane di un punto e poniamo :

$$x = \rho t, \quad y = \rho \sqrt{1-t^2} \cos \omega, \quad z = \rho \sqrt{1-t^2} \sin \omega; \quad |t| \leq 1, \quad (6)$$

le funzioni :

$$\left. \begin{aligned} & \rho^m P_{m,i}(t) \frac{\cos i \omega}{\sin i \omega}, \quad \rho^{-(m+1)} P_{m,i}(t) \frac{\cos i \omega}{\sin i \omega}, \\ & \rho^m Q_{m,i}(t) \frac{\cos i \omega}{\sin i \omega}, \quad \rho^{-(m+1)} Q_{m,i}(t) \frac{\cos i \omega}{\sin i \omega} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

sono, per ogni sistema di valori degli indici  $m$  ed  $i$ , funzioni armoniche, cioè, espresse in coordinate cartesiane  $x, y, z$  per mezzo delle (6), soddisfano all'equazione

$$\Delta^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (8)$$

ed espresse in coordinate polari  $\rho, t, \omega$  soddisfano all'equazione trasformata della (8)

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left[ (1-t^2) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] + \frac{1}{1-t^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} = 0. \quad (8')$$

Viceversa, se una funzione armonica è il prodotto di una funzione di  $t$  per  $\rho^m \frac{\cos i \omega}{\sin i \omega}$  ovvero per  $\rho^{-(m+1)} \frac{\cos i \omega}{\sin i \omega}$  quella funzione di  $t$  soddisfa alla (4'') e, se  $m$  ed  $i$  sono interi con  $m \geq i$ , essa è pure una combinazione lineare a coefficienti costanti di  $P_{m,i}(t)$  e  $Q_{m,i}(t)$ .

Ora, la nostra osservazione fondamentale è che, se  $\varphi$  è una funzione armonica qualunque, anche:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= t \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1-t^2}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \cos \omega \sqrt{1-t^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \frac{t}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \frac{\sin \omega}{\rho \sqrt{1-t^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \sin \omega \sqrt{1-t^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \frac{t}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{\cos \omega}{\rho \sqrt{1-t^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

sono funzioni armoniche. Applicando quest'osservazione e le altre già fatte prima alle due funzioni armoniche

$$\rho^m P_{m,i}(t) \cos i \omega, \quad \rho^{-(m+1)} P_{m,i}(t) \cos i \omega,$$

si trova che devono sussistere le relazioni seguenti:

$$\left. \begin{aligned} (1-t^2) \frac{d P_{m,i}}{d t} + m t P_{m,i} &= (m+i) P_{m-1,i}, \\ (1-t^2) \frac{d P_{m,i}}{d t} - (m+1) t P_{m,i} &= -(m-i+1) P_{m+1,i}, \\ m, i &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{1-t^2} \left( t \frac{d P_{m,i}}{d t} - m P_{m,i} \right) + i \frac{P_{m,i}}{\sqrt{1-t^2}} &= P_{m-1,i+1}, \\ \sqrt{1-t^2} \left( t \frac{d P_{m,i}}{d t} + (m+1) P_{m,i} \right) + i \frac{P_{m,i}}{\sqrt{1-t^2}} &= P_{m+1,i+1}, \\ m, i &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{1-t^2} \left( t \frac{d P_{m,i}}{d t} - m P_{m,i} \right) - i \frac{P_{m,i}}{\sqrt{1-t^2}} &= -(m+i)(m+i-1) P_{m-1,i-1}, \\ \sqrt{1-t^2} \left( t \frac{d P_{m,i}}{d t} + (m+1) P_{m,i} \right) - i \frac{P_{m,i}}{\sqrt{1-t^2}} &= -(m-i+1)(m-i+2) P_{m+1,i-1}, \\ m, i &= 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

badando di porre lo zero al posto di quelle  $P$  in cui il secondo indice risulti maggiore del primo. Applicando le stesse osservazioni alle due funzioni

$$\rho^m Q_{m,i}(t) \cos i \omega, \quad \rho^{-(m+1)} Q_{m,i}(t) \cos i \omega,$$

si trova un sistema di relazioni perfettamente analogo al precedente contenente le  $Q_{m,i}$  invece delle  $P_{m,i}$  che, per brevità, non staremo a scrivere. Se, infine, le stesse osservazioni si applicano alle funzioni (7) che contengono a fattore  $\sin i \omega$ , invece di  $\cos i \omega$ , si ricade nelle formole già trovate.

Tutte queste formole si stabiliscono con metodo uniforme con l'aiuto delle osservazioni indicate, delle (5), (5') e delle altre proprietà delle  $P$ ,  $Q$  già ricordate, finchè il secondo indice delle  $P$  o delle  $Q$ , che compaiono al secondo membro delle (I), (II), (III) è minore ovvero eguale del primo. Nel caso contrario che può accadere quando  $m = i, i + 1$ , le formole stesse si possono verificare direttamente, tenendo conto di quelle già dimostrate. Solo è da osservare ancora che, per le  $Q_{m,i}$  nel caso  $m = 0, i = 0$ , valgono soltanto le seconde dei due gruppi (I) e (II) e ciò si verifica subito tenendo conto della

$$(1 - t^2) \frac{d Q_0}{d t} = 1. \tag{I'}$$

Altre formole analoghe alle precedenti si possono ottenere derivando le (I), (II), (III) ed eliminando poi le derivate seconde con l'aiuto dell'equazione differenziale (4''). Da tutte queste formole se ne possono poi ottenere facilmente altre che contengano le  $P_{m,i}$  ovvero le  $Q_{m,i}$  liberi da segni di derivazione. Fra tutte queste formole noteremo soltanto quelle che si ottengono eliminando le derivate di  $P_{m,i}$  fra le due formole appartenenti a ciascuno dei gruppi (I), (II), (III) di cui avremo subito bisogno e cioè:

$$\left. \begin{aligned} (2m + 1) t P_{m,i} &= (m - i + 1) P_{m+1,i} + (m + i) P_{m-1,i} \\ (2m + 1) \sqrt{1 - t^2} P_{m,i} &= P_{m+1,i+1} - P_{m-1,i+1}, \\ (2m + 1) \sqrt{1 - t^2} P_{m,i} &= -(m - i + 1) (m - i + 2) P_{m+1,i-1} + \\ &\quad + (m + i) (m + i - 1) P_{m-1,i-1}. \end{aligned} \right\} \tag{IV}$$

3. *Sul prodotto di due serie di funzioni sferiche.* Essendo  $t$  ed  $\omega$  le due variabili definite dalle (6), ricordiamo che ogni funzione  $\mathfrak{S}$  soddisfacente a condizioni generalissime che non staremo a ricordare, data su una sfera di raggio uno si può sviluppare in serie di funzioni sferiche sotto la

forma

$$\mathcal{S} = \sum_0^{\infty} \sum_0^m (\mathbf{A}_{m,i} \cos i \omega + \mathbf{B}_{m,i} \sin i \omega) P_{m,i}(t). \quad (10)$$

Ora una quistione interessante che in numerosi casi particolari è suscettibile di applicazione e che, malgrado ciò, non è stata ancora, ch'io sappia, sufficientemente approfondita, è la seguente: *Date due serie di funzioni sferiche svilupparne il prodotto in una serie analoga.* Noi ci occuperemo qui soltanto del caso particolarmente importante per la nostra quistione in cui uno dei fattori si riduce ad una delle tre funzioni

$$t, \quad \sqrt{1-t^2} \cos \omega, \quad \sqrt{1-t^2} \sin \omega, \quad (11)$$

mentre l'altro fattore è la serie generale (10). Bastano al nostro scopo le (IV). Con l'aiuto di esse si trova facilmente:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{S} t &= \sum_0^{\infty} \sum_0^m (\mathfrak{A}_{m,i} \cos i \omega + \mathfrak{B}_{m,i} \sin i \omega) P_{m,i}(t), \\ \mathcal{S} \sqrt{1-t^2} \cos \omega &= \sum_0^{\infty} \sum_0^m (\mathfrak{A}'_{m,i} \cos i \omega + \mathfrak{B}'_{m,i} \sin i \omega) P_{m,i}(t), \\ \mathcal{S} \sqrt{1-t^2} \sin \omega &= \sum_0^{\infty} \sum_0^m (\mathfrak{B}''_{m,i} \cos i \omega - \mathfrak{A}''_{m,i} \sin i \omega) P_{m,i}(t) \end{aligned} \right\} \quad (V)$$

dove:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A}_{m,i} &= \frac{m+i+1}{2m+3} \mathbf{A}_{m+1,i} + \frac{m-i}{2m-1} \mathbf{A}_{m-1,i}, \\ \mathfrak{A}'_{m,i} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(m+i+1)(m+i+2)}{2m+3} \mathbf{A}_{m+1,i+1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(m-i-1)(m-i)}{2m-1} \mathbf{A}_{m-1,i+1} - \frac{\mathbf{A}_{m+1,i-1}}{2m+3} + \frac{\mathbf{A}_{m-1,i-1}}{2m-1} \right], \\ \mathfrak{A}''_{m,i} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(m+i+1)(m+i+2)}{2m+3} \mathbf{A}_{m+1,i+1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(m-i-1)(m-i)}{2m-1} \mathbf{A}_{m-1,i+1} + \frac{\mathbf{A}_{m+1,i-1}}{2m+3} - \frac{\mathbf{A}_{m-1,i-1}}{2m-1} \right] \end{aligned} \right\} \quad (V')$$

e, mutando nei secondi membri le  $\mathbf{A}_{m,i}$  nelle  $\mathbf{B}_{m,i}$ , si ottengono le corrispondenti espressioni di  $\mathfrak{B}_{m,i}$ ,  $\mathfrak{B}'_{m,i}$ ,  $\mathfrak{B}''_{m,i}$ . Solo è da osservare che, per  $i=0$ , vanno cancellati i termini contenenti le  $\mathbf{A}$  o le  $\mathbf{B}$  con qualche indice nega-



tivo e, per  $i = 1$ , va soppresso il fattore  $\frac{1}{2}$  agli ultimi due termini di  $\mathfrak{A}'_{m,i}$ ,  $\mathfrak{A}''_{m,i}$  come a quelli di  $\mathfrak{B}'_{m,i}$ ,  $\mathfrak{B}''_{m,i}$ .

In seguito avremo occasione di applicare replicatamente le (V), (V'). In tutti questi casi al posto della serie  $\mathfrak{S}$  vi compariranno altre serie analoghe in cui le costanti  $\mathbf{A}_{m,i}$ ,  $\mathbf{B}_{m,i}$  sono sostituite da costanti come  $A_{m,i} P_{m,i}$ ,  $B_{m,i} P_{m,i}$ ,  $C_{m,i} P_{m,i}$ , ecc., ovvero  $A_{m,i} P'_{m,i}$ ,  $B_{m,i} P'_{m,i}$ , ecc., prodotti delle costanti  $A_{m,i}$ ,  $B_{m,i}$ ,  $C_{m,i}$ , ecc., per i valori che la funzione  $P_{m,i}$  o la sua derivata assume per un valore costante dell'argomento. Noi stabiliamo di indicare le espressioni a destra delle (V') costruite con costanti prodotti di una lettera italiana majuscola accompagnata dagli indici  $m$  ed  $i$  e del valore di  $P_{m,i}$  corrispondente ad un valore fisso dell'argomento come  $A_{m,i} P_{m,i}$ ,  $B_{m,i} P_{m,i}$ , ecc., rispettivamente ancora con i simboli:

$$\mathfrak{A}_{m,i}, \mathfrak{A}'_{m,i}, \mathfrak{A}''_{m,i}; \mathfrak{B}_{m,i}, \mathfrak{B}'_{m,i}, \mathfrak{B}''_{m,i}; \text{ ecc.},$$

e con gli stessi simboli con sopra un punto se al posto di  $P_{m,i}$  vi compare  $P'_{m,i}$ . A questo modo sarà, p. es.:

$$\mathfrak{A}_{m,i} = \frac{m+i+1}{2m+3} P_{m+1,i} A_{m+1,i} + \frac{m-i}{2m-1} P_{m-1,i} A_{m-1,i},$$

$$\dot{\mathfrak{A}}_{m,i} = \frac{m+i+1}{2m+3} P'_{m+1,i} A_{m+1,i} + \frac{m-i}{2m-1} P'_{m-1,i} A_{m-1,i}$$

ecc.

## II. SULLE FUNZIONI ARMONICHE DELL'ELLIPSOIDE DI ROTAZIONE.

1. *Introduzione di coordinate curvilinee.* Dinotando ancora con  $x, y, z$  le coordinate cartesiane di un punto nello spazio, poniamo adesso:

$$x = h \rho t, \quad y = h \cos \omega \sqrt{\rho^2 - 1} \sqrt{1 - t^2}, \quad z = h \sin \omega \sqrt{\rho^2 - 1} \sqrt{1 - t^2} \quad (12)$$

dove  $h$  è una costante numerica,  $|t| \leq 1$  ed  $\omega$  varia fra 0 e  $2\pi$ . Il sistema di coordinate curvilinee che così introduciamo è ben noto: le superficie  $\omega = \text{cost.}$  sono i piani passanti per l'asse  $z$  e le superficie  $\rho = \text{cost.}$ ,  $t = \text{cost.}$  sono, rispettivamente, le quadriche:

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2 + z^2}{\rho^2 - 1} = h^2, \quad \frac{x^2}{t^2} - \frac{y^2 + z^2}{1 - t^2} = h^2.$$

In seguito  $\sqrt{1-t^2}$  sarà assunta sempre positiva e, precisato il senso di  $\sqrt{\rho^2-1}$ , definiremo la  $\sqrt{1-\rho^2}$  della cui considerazione avremo, in seguito, bisogno, con l'equazione

$$\sqrt{1-\rho^2} = \sqrt{-1} \sqrt{\rho^2-1}. \quad (13)$$

Distinguiamo ora i due casi:

a)  $h, \rho$  reali e  $|\rho| \geq 1$ . Le quadriche  $\rho = \text{cost.}$  sono ellissoidi allungati di rotazione intorno all'asse  $x$  e le quadriche  $t = \text{cost.}$  sono iperboloidi a due falde di rotazione intorno allo stesso asse. In questo caso supporremo che  $\sqrt{\rho^2-1}$  sia positiva e possiamo limitarci anche a considerare per  $h$  e  $\rho$  solo valori positivi.

b)  $h, \rho$  puramente immaginari. Le quadriche  $\rho = \text{cost.}$  sono ellissoidi schiacciati di rivoluzione intorno all'asse  $x$  e le quadriche  $t = \text{cost.}$  iperboloidi ad una falda di rotazione intorno allo stesso asse. In questo caso assumeremo positiva la radice  $\sqrt{1-\rho^2}$  ed allora  $\sqrt{\rho^2-1}$  sarà definita dalle (13) e possiamo limitarci a considerare per i coefficienti dell'immaginario di  $h$  e  $\rho$  valori positivi.

Con queste convenzioni le (12) fanno corrispondere sempre ad ogni punto dello spazio un solo sistema di valori per  $\rho, t, \omega$  e viceversa.

2. *Funzioni armoniche dell'ellissoide di rotazione.* L'equazione di LAPLACE, trasformata nelle coordinate curvilinee  $\rho, t, \omega$ , si scrive

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[ (\rho^2 - 1) \frac{\partial U}{\partial \rho} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[ (1 - t^2) \frac{\partial U}{\partial t} \right] + \frac{\rho^2 - t^2}{(\rho^2 - 1)(1 - t^2)} \frac{\partial^2 U}{\partial \omega^2} = 0$$

e, se conveniamo di porre:

$$\Phi_{m,i} = P_{m,i}(t) P_{m,i}(\rho), \quad \Psi_{m,i} = P_{m,i}(t) Q_{m,i}(\rho), \quad (14)$$

avremo in:

$$\Phi_{m,i} \begin{matrix} \cos i \omega \\ \text{sen } i \omega \end{matrix}, \quad \Psi_{m,i} \begin{matrix} \cos i \omega \\ \text{sen } i \omega \end{matrix} \quad m = 0, 1, 2, \dots, \infty; \quad i \leq m \quad (15)$$

le funzioni *armoniche elementari* dell'ellissoide di rotazione.

Per togliere ogni ambiguità aggiungiamo che nel caso b) intendiamo che sia

$$Q_0(\rho) = \sqrt{-1} \arctg \frac{\rho}{\sqrt{-1}}$$

l'arco essendo compreso fra 0 e  $\frac{\pi}{2}$ .

Sia ora  $\rho = r$  un ellissoide determinato e supponiamo che sia data una funzione dei punti della sua superficie sviluppata in serie di funzioni sferiche. Allora la funzione  $\theta$  armonica e regolare nell'interno dell'ellissoide  $\rho = r$  e che sulla superficie assume i valori dati, sarà data dalla formola

$$\theta = \sum_0^{\infty} \sum_0^m (A_{m,i} \cos i \omega + B_{m,i} \sin i \omega) \Phi_{m,i}, \quad (16)$$

mentre la funzione  $\theta$  armonica e regolare all'esterno dello stesso ellissoide che sulla superficie assume quegli stessi valori sarà data dalla formola

$$\theta = \sum_0^{\infty} \sum_0^m (A_{m,i} \cos i \omega + B_{m,i} \sin i \omega) \Psi_{m,i} \quad (16')$$

le  $A_{m,i}$ ,  $B_{m,i}$  essendo però delle costanti determinate in modo diverso nel 1.º caso e nel 2.º caso.

La funzione armonica e regolare nell'interno dello spazio compreso fra l'ellissoide  $\rho = r$  ed un ellissoide confocale, che assume su queste superficie valori sviluppabili in serie di funzioni sferiche sarà rappresentata dalla somma di due serie analoghe alla (16) e (16').

3. *Derivate delle funzioni armoniche elementari dell'ellissoide di rotazione rispetto alle coordinate cartesiane.* Dalle regole generali di trasformazione delle variabili ricaviamo subito:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{h(\rho^2 - t^2)} \left[ (\rho^2 - 1) t \frac{\partial}{\partial \rho} + (1 - t^2) \rho \frac{\partial}{\partial t} \right], \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\sqrt{\rho^2 - 1} \sqrt{1 - t^2}}{h(\rho^2 - t^2)} \cos \omega \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - t \frac{\partial}{\partial t} \right) - \frac{\sin \omega}{h \sqrt{\rho^2 - 1} \sqrt{1 - t^2}} \frac{\partial}{\partial \omega}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\sqrt{\rho^2 - 1} \sqrt{1 - t^2}}{h(\rho^2 - t^2)} \sin \omega \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - t \frac{\partial}{\partial t} \right) + \frac{\cos \omega}{h \sqrt{\rho^2 - 1} \sqrt{1 - t^2}} \frac{\partial}{\partial \omega}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Di qui, ponendo:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{m,i} &= \frac{1}{2m+3} [P_{m+2,i}(\rho) P_{m,i}(t) - P_{m+2,i}(t) P_{m,i}(\rho)], \\ \psi_{m,i} &= \frac{1}{2m+3} [Q_{m+2,i}(\rho) P_{m,i}(t) - P_{m+2,i}(t) Q_{m,i}(\rho)] \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

e con l'aiuto delle (I), (II), (III), si trova facilmente :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Phi_{m,i} \begin{matrix} \cos i \omega \\ \text{sen } i \omega \end{matrix} \right) &= \frac{(m+i)(m-i+1)}{h(\rho^2-t^2)} \varphi_{m-1,i} \begin{matrix} \cos i \omega \\ \text{sen } i \omega \end{matrix}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \Phi_{m,i} \begin{matrix} \cos i \omega \\ \text{sen } i \omega \end{matrix} \right) &= \frac{\sqrt{-1}}{2h(\rho^2-t^2)} \left[ \varphi_{m-1,i+1} \begin{matrix} \cos (i+1) \omega \\ \text{sen } (i+1) \omega \end{matrix} + \right. \\ &\quad \left. + (m-1, i-1) \varphi_{m-1,i-1} \begin{matrix} \cos (i-1) \omega \\ \text{sen } (i-1) \omega \end{matrix} \right], \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \Phi_{m,i} \begin{matrix} \cos i \omega \\ \text{sen } i \omega \end{matrix} \right) &= \frac{\pm \sqrt{-1}}{2h(\rho^2-t^2)} \left[ \varphi_{m-1,i+1} \begin{matrix} \text{sen } (i+1) \omega \\ \cos (i+1) \omega \end{matrix} - \right. \\ &\quad \left. - (m-1, i-1) \varphi_{m-1,i-1} \begin{matrix} \text{sen } (i-1) \omega \\ \cos (i-1) \omega \end{matrix} \right], \end{aligned} \right\} (19)$$

nell'ultima delle quali formole va scelto il segno + o il segno - a seconda che si tratta della funzione trigonometrica superiore o della inferiore e dove

$$(m, i) = (m+i+1)(m+i+2)(m-i+1)(m-i+2). \quad (19_1)$$

Le (19) valgono per ogni sistema di valori  $m > 0, i > 0$ , mentre per  $m > 0, i = 0$  le ultime due vanno modificate secondo le altre formole :

$$\frac{\partial \Phi_{m,0}}{\partial y} = \frac{\sqrt{-1}}{h(\rho^2-t^2)} \varphi_{m-1,1} \cos \omega, \quad \frac{\partial \Phi_{m,0}}{\partial z} = \frac{\sqrt{-1}}{h(\rho^2-t^2)} \varphi_{m-1,1} \text{sen } \omega. \quad (19')$$

Le derivate delle funzioni  $\Psi_{m,i} \begin{matrix} \cos i \omega \\ \text{sen } i \omega \end{matrix}$  rispetto ad  $x, y, z$  con  $m > 0$  si ottengono dalle (19), (19') ponendo le  $\Psi_{m,i}, \psi_{m,i}$  al posto delle  $\Phi_{m,i}, \varphi_{m,i}$ . Quando poi sia  $m = 0$  si hanno le nuove formole seguenti :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Psi_{0,0}}{\partial x} &= -\frac{t}{h(\rho^2-t^2)}, \quad \frac{\partial \Psi_{0,0}}{\partial y} = -\sqrt{-1} \frac{\rho}{h(\rho^2-t^2)} P_{1,1}(t) Q_{0,1}(\rho) \cos \omega, \\ \frac{\partial \Psi_{0,0}}{\partial z} &= -\sqrt{-1} \frac{\rho}{h(\rho^2-t^2)} P_{1,1}(t) Q_{0,1} \text{sen } \omega. \end{aligned} \right\} (19'')$$

I secondi membri delle (19), (19'), (19'') sono a loro volta funzioni armoniche e devono perciò potersi sviluppare in serie di funzioni armoniche elementari. Si raggiunge questo scopo tenendo conto della identità

$$\left. \begin{aligned} (2m+1)(\rho^2-t^2) \Phi_{m,i} &= (m-i+1)(m-i+2) \varphi_{m,i} - \\ &\quad - (m+i)(m+i-1) \varphi_{m-2,i} \end{aligned} \right\} (VI)$$

che vale per ogni sistema di valori degli indici se si conviene di porre eguali a zero le  $\varphi$  con qualche indice negativo, e della identità analoga relativa a  $\Psi_{m,i}$  che, per  $m > 1$ , si deduce dalla (VI) con le solite sostituzioni, mentre, per  $m = 0$ ,  $m = 1$ , diventa:

$$\left. \begin{aligned} (\rho^2 - t^2) \Psi_{0,0} &= 2\psi_{0,0} + \rho, & (\rho^2 - t^2) \Psi_{1,0} &= 2\psi_{1,0} + \frac{t}{3}, \\ (\rho^2 - t^2) \Psi_{1,1} &= \frac{2}{3} [\psi_{1,1} + \rho P_{1,1}(t) Q_{0,1}(\rho)]. \end{aligned} \right\} \quad (VI)$$

Dalle (VI) discende infatti:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi_{m,i}}{\rho^2 - t^2} &= \frac{(m+i)!}{(m-i+2)!} \sum_{i,i+1}^m (2k+1) \frac{(k-i)!}{(k+i)!} \Phi_{k,i}, \\ \frac{\psi_{m,i}}{\rho^2 - t^2} &= - \frac{(m+i)!}{(m-i+2)!} \sum_{m+2}^{\infty} (2k+1) \frac{(k-i)!}{(k+i)!} \Psi_{k,i} \end{aligned} \right\} \quad (VII)$$

nella prima delle quali formole va scelto, per l'indice inferiore,  $i$  ovvero  $i+1$  per modo che esso sia pari o dispari insieme ad  $m$  e l'accento sulle sommatorie ricorda che l'indice  $k$  percorre tutti e soli quei valori per cui  $k \equiv m \pmod{2}$ . In particolare si ha:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho}{t^2 - \rho^2} &= \sum_0^{\infty} (4k+1) \Psi_{2k,0}, & \frac{t}{\rho^2 - t^2} &= \sum_0^{\infty} (4k+3) \Psi_{2k+1,0}, \\ \frac{\rho P_{1,1}(t) Q_{0,1}(\rho)}{\rho^2 - t^2} &= \sum_0^{\infty} (4k+3) \frac{(2k)!}{(2i+2)!} \Psi_{2k+1,1}. \end{aligned} \right\} \quad (VII')$$

Dalle prime due di quest'ultimo gruppo di formole discende l'altra nota ed elegante

$$\frac{1}{\rho - t} = \sum_0^{\infty} (2k+1) \Psi_{k,0}.$$

Per il seguito potranno riuscire utili anche le formole seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi_{m,i} \frac{\cos i \omega}{\sin i \omega} &= \\ &= \frac{1}{\rho^2 - t^2} \left[ \rho (\rho^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \rho} + t (1 - t^2) \frac{\partial}{\partial t} \right] \Phi_{m,i} \frac{\cos i \omega}{\sin i \omega} = \\ &= \frac{1}{(2m+1)(\rho^2 - t^2)} \left[ m(m-i+1)(m-i+2) \varphi_{m,i} + \right. \\ &\quad \left. + (m+1)(m+i)(m+i-1) \varphi_{m-2,i} \right] \frac{\cos i \omega}{\sin i \omega}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
& \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \Phi_{m,i} \frac{\cos i \omega}{\sin i \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \Phi_{m,i} \frac{\cos i \omega}{\sin i \omega} = \mp i \Phi_{m,i} \frac{\sin i \omega}{\cos i \omega}, \\
& \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi_{m,i} \frac{\cos i \omega}{\sin i \omega} = \\
& = \frac{\sqrt{-1}}{2(\rho^2 - t^2)} \frac{\sin(i+1)\omega}{\cos(i+1)\omega} \frac{1}{2m+1} [(m-i+1)\varphi_{m,i+1} + (m+i)\varphi_{m-2,i+1}] \pm \\
& \quad \pm \frac{\sqrt{-1}}{2(\rho^2 - t^2)} \frac{\sin(i-1)\omega}{\cos(i-1)\omega} \frac{(m+i)(m-i+1)}{2m+1} \times \\
& \quad \quad \times [(m-i+1)(m-i+2)(m-i+3)\varphi_{m,i-1} + \\
& \quad \quad + (m+i)(m+i-1)(m+i-2)\varphi_{m-2,i-1}], \\
& \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \Phi_{m,i} \frac{\cos i \omega}{\sin i \omega} = \\
& = \frac{\sqrt{-1}}{2(\rho^2 - t^2)} \frac{\cos(i+1)\omega}{\sin(i+1)\omega} \frac{1}{2m+1} [(m-i+1)\varphi_{m,i+1} + (m+i)\varphi_{m-2,i+1}] + \\
& \quad + \frac{\sqrt{-1}}{2(\rho^2 - t^2)} \frac{\cos(i-1)\omega}{\sin(i-1)\omega} \frac{(m+i)(m-i+1)}{2m+1} \times \\
& \quad \quad \times [(m-i+1)(m-i+2)(m-i+3)\varphi_{m,i-1} + \\
& \quad \quad + (m+i)(m+i-1)(m+i-2)\varphi_{m-2,i-1}]
\end{aligned} \tag{20}$$

e quelle perfettamente analoghe relative alla funzione  $\Psi_{m,i} \frac{\cos i \omega}{\sin i \omega}$ . Solo è da osservare che nell'ultimo caso accennato le formole vanno modificate per i valori particolari  $m=0$  ed  $m=1$ . Queste modificazioni è agevole trovare e non insistiamo più a lungo su questo formulario preliminare. Vogliamo però ancora far notare che così, seguendo i suggerimenti che spontaneamente ci offriva il nostro problema, siamo riusciti a trovare e a porre nella miglior luce le principali formole sulle funzioni sferiche.

III. RISOLUZIONE DEL PROBLEMA

NEL CASO IN CUI SULLA SUPERFICIE ELLISSOIDALE SONO DATI GLI SPOSTAMENTI.

1. *Caso in cui è nota anche la dilatazione elementare.* Sia  $\sigma$  la superficie dell'ellissoide  $\rho = r$  che limita il nostro corpo elastico ed  $S$  lo spazio finito da esso occupato. Ricordiamo quindi che, nell'ipotesi che sien nulle le forze di massa che, per ora, esplicitamente facciamo e che sia nota la dilatazione elementare relativa, la soluzione del problema è data dalle formole:

$$u = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} u \frac{dG}{dn} d\sigma - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} x \theta + \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu} \int_{\sigma} \xi \theta \frac{dG}{dn} d\sigma, \dots \quad (21)$$

dove, secondo le nostre abituali notazioni,  $u, v, w$  sono le componenti dello spostamento,  $G$  la funzione di GREEN,  $\theta$  la dilatazione elementare,  $n$  la normale a  $\sigma$  diretta verso l'interno di  $S$ ,  $\xi, \eta, \zeta$  i valori delle coordinate  $x, y, z$  su  $\sigma$  e  $\lambda, \mu$  le due costanti di LAMÉ. Per la costruzione effettiva delle (21), invece di servirci dell'espressione di  $G$ , preferiamo seguire l'altra strada che passiamo subito ad indicare. I primi termini dei secondi membri delle (21) sono le funzioni armoniche e regolari in  $S$  che su  $\sigma$  acquistano i valori dati per  $u, v, w$ ; possiamo, senz'altro, ritenerli noti e sviluppati in serie di funzioni armoniche elementari dell'ellissoide di rotazione secondo le formole:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} u \frac{dG}{dn} d\sigma &= \sum_0^{\infty} \sum_0^m (a_{m,i} \cos i\omega + b_{m,i} \sin i\omega) \Phi_{m,i}, \\ \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} v \frac{dG}{dn} d\sigma &= \sum_0^{\infty} \sum_0^m (a'_{m,i} \cos i\omega + b'_{m,i} \sin i\omega) \Phi_{m,i}, \\ \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} w \frac{dG}{dn} d\sigma &= \sum_0^{\infty} \sum_0^m (a''_{m,i} \cos i\omega + b''_{m,i} \sin i\omega) \Phi_{m,i}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Se poi supponiamo nota anche la dilatazione  $\theta$  e data dalla formola

$$\theta = \sum_0^{\infty} \sum_0^m (A_{m,i} \cos i\omega + B_{m,i} \sin i\omega) \Phi_{m,i}, \quad (23)$$

allora le (21) saranno costruite quando avremo costruiti, per mezzo dei dati

del problema speciale di cui ora ci occupiamo, gli ultimi termini dei secondi membri di esse. Ora, notando che su  $\sigma$  è:

$$\xi = c t, \quad \eta = c_1 \sqrt{1-t^2} \cos \omega, \quad \zeta = c_1 \sqrt{1-t^2} \sin \omega$$

dove

$$c = h r, \quad c_1 = h \sqrt{r^2 - 1}, \quad (24)$$

applicando le (V), si trovano subito i risultati richiesti. Così le (21) si possono scrivere:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_0^\infty \sum_0^m \left\{ \left[ a_{m,i} - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} \left( x A_{m,i} - c \frac{\mathfrak{A}_{m,i}}{P_{m,i}} \right) \right] \cos i \omega + \right. \\ &\quad \left. + \left[ b_{m,i} - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} \left( x B_{m,i} - c \frac{\mathfrak{B}_{m,i}}{P_{m,i}} \right) \right] \sin i \omega \right\} \Phi_{m,i}, \\ v &= \sum_0^\infty \sum_0^m \left\{ \left[ a'_{m,i} - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} \left( y A_{m,i} - c_1 \frac{\mathfrak{A}'_{m,i}}{P_{m,i}} \right) \right] \cos i \omega + \right. \\ &\quad \left. + \left[ b'_{m,i} - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} \left( y B_{m,i} - c_1 \frac{\mathfrak{B}'_{m,i}}{P_{m,i}} \right) \right] \sin i \omega \right\} \Phi_{m,i}, \\ w &= \sum_0^\infty \sum_0^m \left\{ \left[ a''_{m,i} - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} \left( z A_{m,i} - c_1 \frac{\mathfrak{B}''_{m,i}}{P_{m,i}} \right) \right] \cos i \omega + \right. \\ &\quad \left. + \left[ b''_{m,i} - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} \left( z B_{m,i} + c_1 \frac{\mathfrak{A}''_{m,i}}{P_{m,i}} \right) \right] \sin i \omega \right\} \Phi_{m,i} \end{aligned} \right\} (21)$$

dove le  $P_{m,i}$  senz'argomento stanno ad indicare le  $P_{m,i}(r)$ , convenzione che vogliamo tener ferma anche per il seguito, e le  $\mathfrak{A}_{m,i}$ ,  $\mathfrak{B}_{m,i}, \dots, \mathfrak{B}''_{m,i}$  rappresentano i simboli introdotti in I, 3, costruiti con le  $A_{m,i}$ ,  $B_{m,i}$  e le  $P_{m,i}(r)$ .

2. *Determinazione della dilatazione elementare.* Risolto così il problema speciale del n.º prec., si risolverà completamente il problema propostoci in principio, determinando la dilatazione  $\theta$  dall'equazione

$$\left. \begin{aligned} &\frac{3\lambda + 5\mu}{2\mu} \theta + \frac{\lambda + \mu}{2\mu} \left( x \frac{\partial \theta}{\partial x} + y \frac{\partial \theta}{\partial y} + z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - \\ &- \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu} \left( \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\sigma \xi \theta \frac{dG}{dn} d\sigma + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\sigma \eta \theta \frac{dG}{dn} d\sigma + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\sigma \zeta \theta \frac{dG}{dn} d\sigma \right) - \\ &- \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\sigma u \frac{dG}{dn} d\sigma + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\sigma v \frac{dG}{dn} d\sigma + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\sigma w \frac{dG}{dn} d\sigma \right) = 0. \end{aligned} \right\} (25)$$

Eseguito le derivazioni secondo le regole date dalle (19), (19'), (20),



moltiplicando, quindi, per  $\rho^2 - t^2$  e facendo uso della (VI) per trasformare  $(\rho^2 - t^2) \theta$ , si trova per risultato

$$\left. \begin{aligned} \sum_0^{\infty} \sum_0^m \left\{ \left[ \frac{(m+i+1)(m+i+2)}{2m+5} R_{m,i} A_{m+2,i} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(m-i+1)(m-i+2)}{2m+1} S_{m,i} A_{m,i} - T_{m,i} \right] \cos i \omega + \right. \\ \left. + \left[ \frac{(m+i+1)(m+i+2)}{2m+5} R_{m,i} B_{m+2,i} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(m-i+1)(m-i+2)}{2m+1} S_{m,i} B_{m,i} - T'_{m,i} \right] \sin i \omega \right\} \varphi_{m,i} = 0 \end{aligned} \right\} (25')$$

dove, per  $i > 1$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_{m,i}}{P_{m+2,i}} &= \frac{-3\lambda - 5\mu + (m+3)(\lambda + \mu)}{(\lambda + \mu) P_{m+2,i}} - r \frac{m-i+2}{P_{m+1,i}} - \\ &\quad - \frac{\sqrt{1-r^2}}{2 P_{m+1,i-1}} + \frac{(m-i+1)(m-i+2)\sqrt{1-r^2}}{2 P_{m+1,i+1}}, \\ \frac{S_{m,i}}{P_{m,i}} &= -\frac{3\lambda + 5\mu + m(\lambda + \mu)}{(\lambda + \mu) P_{m,i}} + r \frac{m+i+1}{P_{m+1,i}} - \\ &\quad - \frac{\sqrt{1-r^2}}{2 P_{m+1,i-1}} + \frac{(m+i+1)(m+i+2)\sqrt{1-r^2}}{2 P_{m+1,i+1}}, \\ T_{m,i} &= \frac{\mu}{h(\lambda + \mu)} [2(m+i+1)(m-i+2) a_{m+1,i} + \\ &\quad + \sqrt{-1} (a'_{m+1,i-1} - b''_{m+1,i-1}) + \sqrt{-1} (m, i) (a'_{m+1,i+1} + b''_{m+1,i+1})], \\ T'_{m,i} &= \frac{\mu}{h(\lambda + \mu)} [2(m+i+1)(m-i+2) b_{m+1,i} + \\ &\quad + \sqrt{-1} (b'_{m+1,i-1} + a''_{m+1,i-1}) + \sqrt{-1} (m, i) (b'_{m+1,i+1} - a''_{m+1,i+1})]. \end{aligned} \right\} (26)$$

Per  $i = 1$ , le  $R_{m,1}$ ,  $S_{m,1}$  rientrano nella legge generale espressa dalle (26), mentre le  $T_{m,1}$ ,  $T'_{m,1}$  se ne discostano soltanto perchè i termini che contengono  $a'_{m+1,0} - b''_{m+1,0}$  e  $b'_{m+1,0} + a''_{m+1,0}$  vanno moltiplicati per 2. Per  $i = 0$ , invece,  $R_{m,0}$ ,  $S_{m,0}$  si deducono da  $R_{n,i}$ ,  $S_{n,i}$ , oltre che facendo  $i = 0$ , anche sopprimendo i termini che contengono  $P_{m+1,-1}$  a denominatore e moltiplicando per 2 gli ultimi termini,  $T'_{n,0}$  non ha significato e  $T_{m,0}$  si deduce da  $T_{m,i}$ , oltre che ponendo  $i = 0$ , anche sopprimendo il termine in  $a'_{m+1,-1} - b''_{m+1,-1}$ .

Passando dalla (25) alla (25') abbiamo introdotto un fattore estraneo  $\rho^2 - t^2$ ; per ritornare alla (25) ed ottenere il primo membro sviluppato in serie di armoniche elementari, dividiamo la (25') per  $\rho^2 - t^2$  e quindi sostituiamo a  $\frac{\Phi_{m,i}}{\rho^2 - t^2}$  la sua espressione data dalla (VII). Affinchè l'equazione che così si ricava sia soddisfatta identicamente, devono essere soddisfatte le equazioni seguenti nelle  $A_{m,i}$ :

$$\sum_0^\infty \frac{(m+i+2k)!}{(m-i+2k+2)!} \left[ \frac{(m+i+2k+1)(m+i+2k+2)}{2m+4k+5} R_{m+2k,i} A_{m+2k+2,i} - \right. \\ \left. - \frac{(m-i+2k+1)(m-i+2k+2)}{2m+4k+1} S_{m+2k,i} A_{m+2k,i} - T_{m+2k,i} \right] = 0 \quad (27)$$

ed equazioni perfettamente analoghe devono essere soddisfatte dalle  $B_{m,i}$ . Ordinando le (27) rispetto alle  $A$  esse possono scriversi anche:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(m+i)!}{(m-i)!} S_{m,i} \frac{A_{m,i}}{2m+1} - \\ & - \sum_1^\infty \frac{(m+i+2k)!}{(m-i+2k)!} (R_{m+2k-2,i} - S_{m+2k,i}) \frac{A_{m+2k,i}}{2m+4k+1} = \\ & = - \sum_0^\infty \frac{(m+i+2k)!}{(m-i+2k+2)!} T_{m+2k,i} \end{aligned} \right\} (27')$$

e devono valere, come le (27), per tutti i valori di  $i=0, 1, 2, \dots, \infty$  e di  $m=i, i+1, i+2, \dots, \infty$ .

Basta occuparci della determinazione delle sole  $A$  perchè le  $B$  sono date da formole perfettamente analoghe. Si può, inoltre, osservare che ad ogni valore di  $i$  corrisponde un problema distinto e che, fissato  $i$ , il corrispondente problema si scinde, alla sua volta, in altri quattro problemi distinti: la determinazione delle  $A_{m,i}$ , ovvero  $B_{m,i}$ , con  $m \equiv i \pmod{2}$  e la determinazione delle  $A_{m,i}$ , ovvero  $B_{m,i}$ , con  $m \equiv i+1 \pmod{2}$ .

3. *Determinazione della dilatazione elementare. Continuazione.* Le equazioni (27), ovvero le (27'), sono equivalenti alle altre:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(m+i+1)(m+i+2)}{2m+5} R_{m,i} A_{m+2,i} - \frac{(m-i+1)(m-i+2)}{2m+1} S_{m,i} A_{m,i} = T_{m,i}, \\ & i = 0, 1, 2, \dots, \infty, \quad m = i, i+1, \dots, \infty \end{aligned} \right\} (28)$$

ed alle :

$$\begin{aligned}
 (2i)! S_{i,i} \frac{A_{i,i}}{2i+1} - \sum_k^{\infty} \frac{(2i+2k)!}{(2k)!} (R_{i+2k-2,i} - S_{i+2k,i}) \frac{A_{i+2k,i}}{2i+4k+1} = \\
 = - \sum_0^{\infty} \frac{(2i+2k)!}{(2k+2)!} T_{i+2k,i}, \\
 (2i+1)! S_{i+1,i} \frac{A_{i+1,i}}{2i+3} - \sum_k^{\infty} \frac{(2i+2k+1)!}{(2k+1)!} (R_{i+2k-1,i} - S_{i+2k+1,i}) \frac{A_{i+2k+1,i}}{2i+4k+3} = \\
 = - \sum_0^{\infty} \frac{(2i+2k+1)!}{(2k+3)!} T_{i+2k+1,i}
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\sum_k^{\infty}} \right\} (28')$$

( $i = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ).

Per passare ora alla effettiva determinazione delle costanti  $A_{m,i}$ , poniamo mente, dapprima, che

$$R_{m,i} = S_{m,i} \quad (29)$$

relazione che si verifica facilmente con l'aiuto delle (IV) e che vale per ogni sistema di valori di  $m$  e di  $i$ . Osserviamo poi che la (28), in virtù della (29), si scrive

$$\frac{(m+i+2)!}{(m-i+2)!} \frac{A_{m+2,i}}{2m+5} = \frac{(m+i)!}{(m-i)!} \frac{A_{m,i}}{2m+1} + \frac{(m+i)!}{(m-i+2)!} \frac{T_{m,i}}{R_{m,i}}$$

e da questa si deduce subito

$$\begin{aligned}
 \frac{(m+i+2k)!}{(m-i+2k)!} \frac{A_{m+2k,i}}{2m+4k+1} = \frac{(m+i)!}{(m-i)!} \frac{A_{m,i}}{2m+1} + \\
 + \sum_0^{k-1} \frac{(m+i+2j)!}{(m-i+2j+2)!} \frac{T_{m+2j,i}}{R_{m+2j,i}}.
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\sum_0^{k-1}} \right\} (30)$$

Questa equazione ci fornisce i valori delle  $A_{i+2k,i}$ , qualunque sia  $k$ , per mezzo di  $A_{i,i}$  ed i valori delle  $A_{i+2k+1,i}$  per mezzo di  $A_{i+1,i}$ . Le (28') ci determineranno poi  $A_{i,i}$  e  $A_{i+1,i}$ . Eliminando, p. es., dalla prima delle (28') le  $S_{m,i}$  e le  $A_{i+2k,i}$  con  $k > 0$  per mezzo delle (29) e (30), quell'equazione si riduce facilmente all'altra

$$\left\{ (2i)! \frac{A_{i,i}}{2i+1} + \sum_0^{\infty} \frac{(2i+2j)!}{(2j+2)!} \frac{T_{i+2j,i}}{R_{i+2j,i}} \right\} \lim_{k \rightarrow \infty} R_{i+2k,i} = 0,$$

e, poichè  $\lim_{k \rightarrow \infty} R_{i+2k,i}$  è finito e diverso da zero, si trova

$$(2i)! \frac{A_{i,i}}{2^{i+1}} = - \sum_0^{\infty} \frac{(2i+2j)!}{(2j+2)!} \frac{T_{i+2j,i}}{R_{i+2j,i}} \quad (*) \quad (31)$$

In modo analogo si determina  $A_{i+1,i}$ . La soluzione del problema proposti è compendiatò nelle formole:

$$\left. \begin{aligned} \frac{(m+i)!}{(m-i)!} \frac{A_{m,i}}{2^{m+1}} &= - \sum_0^{\infty} \frac{(m+i+2j)!}{(m-i+2j+2)!} \frac{T_{m+2j,i}}{R_{m+2j,i}} \\ \frac{(m+i)!}{(m-i)!} \frac{B_{m,i}}{2^{m+1}} &= - \sum_0^{\infty} \frac{(m+i+2j)!}{(m-i+2j+2)!} \frac{T'_{m+2j,i}}{R_{m+2j,i}} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

che valgono per ogni sistema di valori di  $m$  ed  $i$ .

Osserviamo ancora che la prima delle (32), e cose analoghe valgono per la seconda, si può dedurre subito dalla (30) facendo tendere  $k$  ad  $\infty$  ed osservando che il primo membro di quest'ultima tende a zero in virtù della convergenza della serie (23) che dev'essere supposta; inoltre che la (30) è conseguenza soltanto delle (28) e che queste ultime si ottengono annullando i coefficienti di  $\varphi_{m,i}$  nella (25').

4. *Verifiche sulla soluzione ottenuta.* Per giustificare completamente i nostri calcoli, conviene dimostrare, innanzitutto, che  $R_{m,i}$ , come  $P_{m,i}$ , è diversa da zero per ogni sistema di valori di  $m$  e di  $i$  e per ogni valore che il loro argomento  $r$  può acquistare; inoltre conviene pure dimostrare che  $\lim_{m \rightarrow \infty} R_{m,i}$  è effettivamente finito e diverso da zero. Per questo, come per il seguito, converrà tener presenti i valori assintotici, per  $m = \infty$ , di  $P_{m,i}$  e di  $m!$ . Adoperando il noto simbolo  $\sim$  per indicare che una funzione è assintotica di un'altra, ricordiamo che, per  $t$  reale e  $|t| \leq 1$ :

$$\sqrt{-1}^i P_{m,i}(t) \sim (m+i)^{i-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi \sin \theta}} \cos \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right], \quad t = \cos \theta, \quad (33)$$

che, in ogni altro caso in cui l'argomento  $r$  della  $P_{m,i}$  non è reale e contem-

(\*) Se le (22) sono semplici somme in modo che  $a_{m,i}, b_{m,i}, \dots, b''_{m,i}$ , da un certo valore di  $m$  in poi, si annullano, anche le  $T_{m,i}, T'_{m,i}$  si annullano da un certo punto in poi. In questo caso la soluzione del problema si ottiene più facilmente ponendo eguali a zero tutte le  $A_{m,i}, B_{m,i}$  che compaiono in quelle delle (28), o omologhe, i cui secondi membri sono nulli. Le altre costanti sono allora determinate da un sistema finito di equazioni fra altrettante incognite.

poraneamente  $r \leq 1$ , è:

$$\sqrt{-1}^i P_{m,i} \sim (m+i)^{i-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \xi^m (1-\xi^2)^{i-\frac{1}{2}} \quad (33')$$

dove  $\xi = r - \sqrt{r^2 - 1}$  ed il segno di  $\sqrt{r^2 - 1}$  è scelto in modo che  $\xi < 1$ . Ricordiamo pure che

$$m! \sim m^{m+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} e^{-m} (*). \quad (34)$$

Osserviamo ora che, a causa delle (IV), possiamo scrivere:

$$\left. \begin{aligned} R_{m,i} - S_{m,i} &= -\frac{2\mu}{\lambda + \mu} - \frac{2m}{2m+1} \\ &- \frac{1}{2(2m+1)} \left[ (m+i)(m+i+1) \frac{P_{m-1,i-1}}{P_{m+1,i-1}} + \right. \\ &\left. + (m+i+1)(m+i+2) \frac{P_{m-1,i+1}}{P_{m+1,i+1}} - 2(m+i)(m+i+1) \frac{P_{m-1,i}}{P_{m+1,i}} \right] \end{aligned} \right\} (35)$$

per cui, tenendo conto della (33'), si ha subito:

$$R_{m,i} \sim \lim_{m \rightarrow \infty} R_{m,i} = -\frac{2\mu}{\lambda + \mu} - 1. \quad (36)$$

In conseguenza della (5) si trova che:

$$\lim_{r \rightarrow 1} R_{m,i} = -\frac{2\mu}{\lambda + \mu} - 1 < 0$$

mentre

$$\lim_{r \rightarrow \infty} R_{m,i} = -\frac{2\mu}{\lambda + \mu} - \frac{2m}{2m+1} < 0.$$

E di qui discende che, al variare di  $r$  per valori reali da  $+1$  a  $+\infty$ ,  $R_{m,i}$  può acquistare soltanto un numero pari di radici; ma, al variare di  $r$  nel modo indicato, la parte di  $R_{m,i}$  col segno  $+$  e quella col segno  $-$  variano tutte e due sempre nello stesso senso alla guisa di esponenziali, come si prova facilmente, perciò  $R_{m,i}$  non potrebbe annullarsi che una volta al più nel detto intervallo. Questa contraddizione si toglie soltanto ammettendo che  $R_{m,i}$  non si annulli mai quando  $r$  varia da  $+1$  a  $+\infty$ . In maniera analoga si proverebbe che  $R_{m,i}$  non si annulla mai quando  $r$  è puramente immaginario.

(\*) Vedi: HEINE, Handbuch der Kugelfunctionen, I.<sup>er</sup> Band, pag. 171 e seg. e pag. 231.

Resta ancora da esaminare la questione fondamentale della convergenza della serie ottenuta per  $\theta$ . Supponiamo perciò che le serie (22) che rappresentano gli integrali  $\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} u \frac{dG}{dn} d\sigma$ ,  $\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} v \frac{dG}{dn} d\sigma$ ,  $\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} w \frac{dG}{dn} d\sigma$  sieno assolutamente ed uniformemente convergenti. Tenendo presente la formola

$$\sqrt{-1}^i P_{m,i}(t) = \frac{(m+i)!}{\pi m!} \int_0^{\pi} (t + \cos \varphi \sqrt{t^2 - 1})^m \cos i \varphi d\varphi$$

siamo allora condotti a supporre che le serie:

$$\sum_i^{\infty} |a_{m,i} P_{m,i}| \frac{(m+i)!}{m!}, \quad \sum_i^{\infty} |b_{m,i} P_{m,i}| \frac{(m+i)!}{m!}, \dots$$

sieno convergenti per qualunque valore di  $i$ , e che quindi

$$\lim_{m=\infty} \left| \frac{a_{m,i} P_{m,i}}{a_{m-1,i} P_{m-1,i}} \right| = |\xi|^{-1} \lim_{m=\infty} \left| \frac{a_{m,i}}{a_{m-1,i}} \right| < 1, \quad |\xi|^{-1} \lim_{m=\infty} \left| \frac{b_{m,i}}{b_{m-1,i}} \right| < 1, \dots \quad (37)$$

per qualunque valore di  $i$ . E basterà allora dimostrare che, in conseguenza di queste ipotesi, le serie:

$$\sum_i^{\infty} |A_{m,i} P_{m,i}| \frac{(m+i)!}{m!}, \quad \sum_i^{\infty} |B_{m,i} P_{m,i}| \frac{(m+i)!}{m!}$$

sono convergenti per ogni valore di  $i$ . La dimostrazione del nostro assunto si può, chiaramente, scomporre in parti distinte, indipendenti fra loro, e per ciascuna delle quali la dimostrazione si fa nella stessa maniera. Ci limiteremo perciò a considerare solo il caso in cui sono diverse da zero le  $a_{m,i}$  con  $i$  fisso ed  $m$  variabile da  $i$  ad  $\infty$ , mentre le altre  $a_{m,i}$  e le  $b_{m,i}$ ,  $a'_{m,i}, \dots, b''_{m,i}$  sono nulle. Allora, delle costanti  $A_{m,i}$ ,  $B_{m,i}$ , sono diverse da zero soltanto le  $A_{m,i}$  con  $i$  fisso ed eguale al precedente valori di  $i$  ed  $m$  variabile da  $i$  ad  $\infty$ , e sono determinate dalle formole:

$$\frac{(m+i)!}{(m-i)!} \frac{A_{m,i}}{2m+1} = - \frac{2\mu}{h(\lambda+\mu)} \sum_0^{\infty} \frac{(m+i+2j+1)!}{(m-i+2j+1)!} \frac{a_{m+2j+1,i}}{R_{m+2j,i}}. \quad (32')$$

Il rapporto del valore assoluto di un termine al precedente nella serie a secondo membro della (32'), ha per limite, per  $m = \infty$ :

$$\lim_{m=\infty} \left| \frac{a_{m+2j+1,i}}{a_{m+2j-1,i}} \right| < |\xi|^2 < 1,$$

perciò, almeno per  $m$  sufficientemente grande,

$$|A_{m,i}| < \frac{2\mu}{h|\lambda + \mu|} (2m + 1) \frac{m + i + 1}{m - i + 1} \frac{\alpha_{m+1,i}}{|R_{m,i}|} \frac{1}{1 - \xi^2}.$$

E da questo risultato discende immediatamente la convergenza della serie

$$\sum_{m=i}^{\infty} |A_{m,i} P_{m,i}| \frac{(m + i)!}{m!}.$$

5. *Soluzioni elementari.* Chiamiamo soluzioni elementari del nostro problema quelle soluzioni che si ottengono supponendo tutte le costanti  $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta''$  eguali a zero, meno una che si assumerà, invece, eguale ad uno e che chiameremo *costante eccezionale*. Vi sono quindi sei tipi distinti di soluzioni elementari che ora vogliamo passare a descrivere rapidamente.

a) La costante eccezionale è  $\alpha_{p,i}$ . In questo caso, di tutte le  $T$  e  $T'$ , è diversa da zero soltanto

$$T_{p-1,i} = \frac{2\mu}{h(\lambda + \mu)} (p + i)(p - i + 1).$$

Tutte le  $B$  sono nulle e, delle  $A$ , sono diverse da zero soltanto:

$$A_{p-1,i}, A_{p-3,i}, \dots, A_{i,i}, \quad \text{ovvero,} \quad A_{p-1,i}, A_{p-3,i}, \dots, A_{i+1,i}$$

a seconda che  $p \equiv i + 1 \pmod{2}$ , ovvero  $p \equiv i \pmod{2}$  e sono date dall'equazione generica

$$\frac{(m + i)!}{(m - i)!} \frac{A_{m,i}}{2m + 1} = \frac{2\mu}{h(\lambda + \mu)} \frac{(p + i)!}{(p - i)!} \frac{1}{R_{p-1,i}}. \quad (32_a)$$

b) La costante eccezionale è  $\beta_{p,i}$ . La corrispondente soluzione elementare si ottiene dalla precedente, per la parte che riguarda  $\theta$ , scambiando le  $A_{m,i}$  con le  $B_{m,i}$ .

c) La costante eccezionale è  $\alpha'_{p,i}$ . Tutte le  $T$  e  $T'$  sono nulle ad eccezione di:

$$T_{p-1,i+1} = \sqrt{-1} \frac{\mu}{h(\lambda + \mu)}, \quad T_{p-1,i-1} = \sqrt{-1} \frac{\mu}{h(\lambda + \mu)} (p - 1, i - 1);$$

tutte le  $B$  sono nulle e, delle  $A$ , sono diverse da zero le  $A_{m,i+1}$  per cui:

$$i + 1 \leq m \leq p - 1, \quad m \equiv p - 1 \pmod{2}$$

e le  $A_{m,i-1}$  per cui

$$i-1 \leq m \leq p-1, \quad m \equiv p-1 \pmod{2}$$

e sono determinate dalle equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \frac{(m+i+1)!}{(m-i-1)!} \frac{A_{m,i+1}}{2m+1} &= \sqrt{-1} \frac{\mu}{h(\lambda+\mu)} \frac{(p+i)!}{(p-i)!} \frac{1}{R_{p-1,i+1}}, \\ \frac{(m+i-1)!}{(m-i+1)!} \frac{A_{m,i-1}}{2m+1} &= \sqrt{-1} \frac{\mu}{h(\lambda+\mu)} \frac{(p+i)!}{(p-i)!} \frac{1}{R_{p-1,i-1}}. \end{aligned} \right\} \quad (32_b)$$

d) La costante eccezionale è  $b'_{p,i}$ . La corrispondente soluzione elementare si deduce dalla precedente come la soluzione elementare b) dalla a), scambiando le  $A_{m,i}$  con le  $B_{m,i}$ .

e) La costante eccezionale è  $a''_{p,i}$ . In questo caso le  $A$  sono tutte nulle e le  $B$  diverse da zero hanno gli stessi indici delle  $A$  diverse da zero nel caso c). Ponendo nelle (32<sub>b</sub>)  $B_{m,i+1}$  al posto di  $A_{m,i+1}$ ,  $-B_{m,i-1}$  al posto di  $A_{m,i-1}$ , si ottengono subito le formole che danno i valori delle  $B$  diverse da zero in questo caso.

f) La costante eccezionale è  $b''_{p,i}$ . In quest'ultimo caso le  $B$  sono tutte nulle e le  $A$  diverse da zero sono quelle stesse del caso c); soltanto va cambiato il segno alle  $A_{m,i+1}$ .

È bene rammentare che, per  $i=0$ ,  $i=1$ , anche le soluzioni elementari vanno modificate in conformità alle osservazioni precedentemente fatte.

Le soluzioni elementari sono polinomi nelle coordinate cartesiane  $x, y, z$  di grado  $p$ , ossia di grado eguale al primo indice della costante eccezionale come risulta subito notando che il grado di  $\Phi_{m,i} e^{i\omega\sqrt{-1}}$  in  $x, y, z$  è appunto  $m$ .

#### IV. CASO IN CUI SULLA SUPERFICIE ELLISSOIDALE SONO DATE LE TENSIONI.

1. *Condizioni in superficie e condizioni di fissità.* Supponiamo ancora nulle le forze di massa, teniamo ferme tutte le notazioni avanti introdotte e ricordiamo, quindi, che, indicando, come di solito, con  $L, M, N$  le componenti della tensione unitaria esterna applicata ai punti della superficie  $\sigma$  dell'ellissoide  $\rho = r$  e con  $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$  le componenti della rotazione elementare,



le condizioni in superficie si scrivono :

$$\left. \begin{aligned} L &= -\lambda \theta \cos n x - 2\mu \left( \frac{du}{dn} + \varpi_3 \cos n y - \varpi_2 \cos n z \right), \\ M &= -\lambda \theta \cos n y - 2\mu \left( \frac{dv}{dn} + \varpi_1 \cos n z - \varpi_3 \cos n x \right), \\ N &= -\lambda \theta \cos n z - 2\mu \left( \frac{dw}{dn} + \varpi_2 \cos n x - \varpi_1 \cos n y \right). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Noi supporremo che i valori dati per  $L$ ,  $M$ ,  $N$  abbiano la forma :

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{r^2 - t^2} L &= \sum_0^\infty \sum_0^m (L_{m,i} \cos i \omega + \bar{L}_{m,i} \sin i \omega) P_{m,i}(t), \\ \sqrt{r^2 - t^2} M &= \sum_0^\infty \sum_0^m (M_{m,i} \cos i \omega + \bar{M}_{m,i} \sin i \omega) P_{m,i}(t), \\ \sqrt{r^2 - t^2} N &= \sum_0^\infty \sum_0^m (N_{m,i} \cos i \omega + \bar{N}_{m,i} \sin i \omega) P_{m,i}(t), \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

tenendo conto però che, dovendo  $L$ ,  $M$ ,  $N$  corrispondere ad un problema di equilibrio, devono essere soddisfatte le note condizioni :

$$\left. \begin{aligned} \int_\sigma L d\sigma = \int_\sigma M d\sigma = \int_\sigma N d\sigma = 0, \\ \int_\sigma (\eta N - \zeta M) d\sigma = \int_\sigma (\zeta L - \xi N) d\sigma = \int_\sigma (\xi N - \eta L) d\sigma = 0, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

le quali, come facilmente si vede, richiedono che sia :

$$\left. \begin{aligned} L_{0,0} = M_{0,0} = N_{0,0} = 0, \\ N_{1,1} = \bar{M}_{1,1}, \quad \sqrt{r^2 - 1} \bar{L}_{1,1} = r N_{1,0}, \quad r M_{1,0} = \sqrt{r^2 - 1} L_{1,1}. \end{aligned} \right\} \quad (40')$$

È pure noto che quando, come nel nostro caso, in un problema d'equilibrio elastico sono date le tensioni in superficie, la deformazione del corpo elastico richiesta è determinata solo a meno di uno spostamento rigido. Ci è lecito quindi aggiungere alle condizioni precedenti le altre che lo spostamento e la rotazione elementare si annullino nel centro dell'ellissoide.

2. *Trasformazione delle condizioni in superficie.* I coseni di direzione della normale interna alla superficie del nostro ellissoide sono dati dalle

formole :

$$\cos nx = -\frac{\xi}{r^2 \sqrt{\frac{\xi^2}{r^4} + \frac{\eta^2 + \zeta^2}{(r^2 - 1)^2}}}, \quad \cos ny = -\frac{\eta}{(r^2 - 1) \sqrt{\frac{\xi^2}{r^4} + \frac{\eta^2 + \zeta^2}{(r^2 - 1)^2}}},$$

$$\cos nz = -\frac{\zeta}{(r^2 - 1) \sqrt{\frac{\xi^2}{r^4} + \frac{\eta^2 + \zeta^2}{(r^2 - 1)^2}}}$$

le quali, tenendo conto dei valori di  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , possono porsi sotto la forma :

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{r^2 - t^2} \cos nx &= -\sqrt{r^2 - 1} \frac{\xi}{c}, & \sqrt{r^2 - t^2} \cos ny &= -r \frac{\eta}{c_1}, \\ \sqrt{r^2 - t^2} \cos nz &= -r \frac{\zeta}{c_1}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

E da queste, tenendo conto delle (17), discende

$$\sqrt{r^2 - t^2} \frac{d}{dn} = -\frac{\sqrt{r^2 - 1}}{h} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \right)_{\rho=r}. \quad (41)$$

In conseguenza di questi risultati le (38) si possono scrivere :

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{r^2 - t^2} L &= \lambda \theta \sqrt{r^2 - 1} \frac{\xi}{c} + 2\mu \left[ \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{h} \left( \frac{\partial u}{\partial \rho} \right)_{\rho=r} + \varpi_3 r \frac{\eta}{c_1} - \varpi_2 r \frac{\zeta}{c_1} \right], \\ \sqrt{r^2 - t^2} M &= \lambda \theta r \frac{\eta}{c_1} + 2\mu \left[ \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{h} \left( \frac{\partial v}{\partial \rho} \right)_{\rho=r} + \varpi_1 r \frac{\zeta}{c_1} - \varpi_3 \sqrt{r^2 - 1} \frac{\xi}{c} \right], \\ \sqrt{r^2 - t^2} N &= \lambda \theta r \frac{\zeta}{c_1} + 2\mu \left[ \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{h} \left( \frac{\partial w}{\partial \rho} \right)_{\rho=r} + \varpi_2 \sqrt{r^2 - 1} \frac{\xi}{c} - \varpi_1 r \frac{\eta}{c_1} \right] \end{aligned} \right\} \quad (38')$$

nelle quali deve intendersi di aver posto dappertutto  $\rho = r$ .

Per risolvere il nostro problema noi supporremo, come ci è lecito, che la cercata deformazione dell'ellissoide abbia la forma precedentemente determinata e rappresentata dalle (21'), (32). Così la nostra quistione si trasforma nell'altra di determinare le costanti  $a_{m,i}$ ,  $b_{m,i}, \dots, b''_{m,i}$  per mezzo delle  $L_{m,i}$ ,  $\bar{L}_{m,i}, \dots, \bar{N}_{m,i}$  in modo che sieno soddisfatte le (38'). Poichè però in queste equazioni, oltre a  $\theta$ , compaiono  $\varpi_1$ ,  $\varpi_2$ ,  $\varpi_3$  sarà necessario di calcolare queste quantità per mezzo delle costanti  $a_{m,i}, \dots, b''_{m,i}$  allo stesso modo come nel problema precedente abbiamo calcolato  $\theta$ . Supponiamo per ora di aver fatto

questo calcolo e di aver posto le funzioni armoniche  $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$  sotto la forma :

$$\varpi_j = \sum_0^{\infty} \sum_0^m (C_{m,i,j} \cos i \omega + D_{m,i,j} \sin i \omega) \Phi_{m,i}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (42)$$

Notando allora che

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)_{\rho=r} = \sum_1^{\infty} \sum_0^m (a_{m,i} \cos i \omega + b_{m,i} \sin i \omega) P'_{m,i} P_{m,i}(t) - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} \frac{\xi}{r} \theta +$$

$$+ \frac{\lambda + \mu}{2\mu} c \sum_0^{\infty} \sum_0^m \left[ \left( \mathfrak{A}_{m,i} \frac{P'_{m,i}}{P_{m,i}} - \mathfrak{A}_{m,i} \right) \cos i \omega + \left( \mathfrak{B}_{m,i} \frac{P'_{m,i}}{P_{m,i}} - \mathfrak{B}_{m,i} \right) \sin i \omega \right] P_{m,i}(t),$$

ecc.,

dove  $P'_{m,i}$  indica la derivata di  $P_{m,i}$  rispetto al suo argomento e  $\theta$  va presa per  $\rho = r$ , basterà sostituire questi risultati nelle (38'), quindi applicare ripetutamente le (V) per avere anche i secondi membri di queste equazioni sviluppati in serie di funzioni sferiche. Servendoci sempre delle notazioni indicate alla fine di I, 3, potremo scrivere :

$$\sqrt{r^2 - t^2} L = 2\mu \sum_0^{\infty} \sum_0^m \left\{ \left[ \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{h} P'_{m,i} a_{m,i} - \frac{1}{2} \sqrt{r^2 - 1} \mathfrak{A}_{m,i} + \right. \right.$$

$$\left. + r (\mathfrak{C}'_{m,i,3} - \mathfrak{D}''_{m,i,2}) + \frac{\lambda + \mu}{2\mu} r \sqrt{r^2 - 1} \left( \mathfrak{A}_{m,i} \frac{P'_{m,i}}{P_{m,i}} - \mathfrak{A}_{m,i} \right) \right] \cos i \omega +$$

$$+ \left[ \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{h} P'_{m,i} b_{m,i} - \frac{1}{2} \sqrt{r^2 - 1} \mathfrak{B}_{m,i} + r (\mathfrak{D}'_{m,i,3} + \mathfrak{C}''_{m,i,2}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda + \mu}{2\mu} r \sqrt{r^2 - 1} \left( \mathfrak{B}_{m,i} \frac{P'_{m,i}}{P_{m,i}} - \mathfrak{B}_{m,i} \right) \right] \sin i \omega \left\{ P_{m,i}(t), \right.$$

$$\left. \right\} \quad (38'')$$

$$\sqrt{r^2 - t^2} M = 2\mu \sum_0^{\infty} \sum_0^m \left\{ \left[ \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{h} P'_{m,i} a'_{m,i} - \frac{r}{2} \mathfrak{A}'_{m,i} + r \mathfrak{D}''_{m,i,1} - \right. \right.$$

$$\left. - \sqrt{r^2 - 1} \mathfrak{C}_{m,i,3} + \frac{\lambda + \mu}{2\mu} (r^2 - 1) \left( \mathfrak{A}'_{m,i} \frac{P'_{m,i}}{P_{m,i}} - \mathfrak{A}'_{m,i} \right) \right] \cos i \omega +$$

$$+ \left[ \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{h} P'_{m,i} b'_{m,i} - \frac{r}{2} \mathfrak{B}'_{m,i} - r \mathfrak{C}''_{m,i,1} - \sqrt{r^2 - 1} \mathfrak{D}_{m,i,3} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda + \mu}{2\mu} (r^2 - 1) \left( \mathfrak{B}'_{m,i} \frac{P'_{m,i}}{P_{m,i}} - \mathfrak{B}'_{m,i} \right) \right] \sin i \omega \left\{ P_{m,i}(t), \right.$$

$$\left. \right\}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{r^2 - t^2} N = 2\mu \sum_0^m \sum_0^m \left\{ \left[ \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{h} P'_{m,i} a''_{m,i} - \frac{r}{2} \mathfrak{B}''_{m,i} + \sqrt{r^2 - 1} \mathfrak{C}_{m,i,2} - \right. \right. \\
\left. \left. - r \mathfrak{C}'_{m,i,1} + \frac{\lambda + \mu}{2\mu} (r^2 - 1) \left( \mathfrak{B}''_{m,i} \frac{P'_{m,i}}{P_{m,i}} - \mathfrak{B}''_{m,i} \right) \right] \cos i\omega + \right. \\
\left. + \left[ \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{h} P'_{m,i} b''_{m,i} + \frac{r}{2} \mathfrak{A}''_{m,i} + \sqrt{r^2 - 1} \mathfrak{D}_{m,i,2} - r \mathfrak{D}'_{m,i,1} - \right. \right. \\
\left. \left. - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} (r^2 - 1) \left( \mathfrak{A}''_{m,i} \frac{P'_{m,i}}{P_{m,i}} - \mathfrak{A}''_{m,i} \right) \right] \sin i\omega \right\} P_{m,i}(t)
\end{aligned} \quad (38'')$$

ed eguagliando nei secondi membri delle (39) e (38'') i coefficienti di  $P_{m,i}(t) \frac{\cos i\omega}{\sin i\omega}$  troviamo le equazioni fondamentali della nostra questione:

$$\begin{aligned}
\frac{L_{m,i}}{2\mu} = \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{h} P'_{m,i} a_{m,i} - \frac{1}{2} \sqrt{r^2 - 1} \mathfrak{A}_{m,i,3} + r (\mathfrak{C}'_{m,i,3} - \mathfrak{D}''_{m,i,2}) + \\
+ \frac{\lambda + \mu}{2\mu} r \sqrt{r^2 - 1} \left( \mathfrak{A}_{m,i} \frac{P'_{m,i}}{P_{m,i}} - \mathfrak{A}_{m,i} \right),
\end{aligned} \quad (43)$$

ecc.

3. *Calcolo di  $\varpi_1$ .* Per calcolare  $\varpi_1$  partiremo dalla relazione

$$\begin{aligned}
2\varpi_1 = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} v \frac{dG}{dn} d\sigma - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} v \frac{dG}{dn} d\sigma \right) - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} \left( z \frac{\partial \theta}{\partial y} - y \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \\
+ \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu} \left( \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \zeta \theta \frac{dG}{dn} d\sigma - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \eta \theta \frac{dG}{dn} d\sigma \right).
\end{aligned} \quad (44)$$

Procedendo come in III, per la determinazione di  $\theta$ , dopo aver moltiplicata la (44) per  $\rho^2 - t^2$  ed aver ordinato rispetto alle  $\varrho_{m,i}$ , si trovano subito le equazioni seguenti:

$$\begin{aligned}
\frac{(m+i+1)(m+i+2)}{2m+5} (2C_{m+2,i,1} + \bar{R}_{m,i} B_{m+2,i}) - \\
- \frac{(m-i+1)(m-i+2)}{2m+1} (2C_{m,i,1} + \bar{S}_{m,i} B_{m,i}) = \bar{T}_{m,i} \\
\frac{(m+i+1)(m+i+2)}{2m+1} (2D_{m+2,i,1} - \bar{R}_{m,i} A_{m+2,i}) - \\
- \frac{(m-i+1)(m-i+2)}{2m+1} (2D_{m,i,1} - \bar{S}_{m,i} A_{m,i}) = \bar{T}'_{m,i}
\end{aligned} \quad (45)$$

dove, per  $i > 1$ :

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_{m,i} = \bar{S}_{m,i} &= \frac{\lambda + \mu}{2\mu} \left[ i + \frac{\sqrt{1-r^2} P_{m+2,i}}{2 P_{m+1,i-1}} + \frac{(m-i+1)(m-i+2)\sqrt{1-r^2} P_{m+2,i}}{2 P_{m+1,i+1}} \right] = \\ &= \frac{\lambda + \mu}{2\mu} \left[ i + \frac{\sqrt{1-r^2} P_{m,i}}{2 P_{m+1,i-1}} + \frac{(m+i+1)(m+i+2)\sqrt{1-r^2} P_{m,i}}{2 P_{m+1,i+1}} \right], \\ \bar{T}_{m,i} &= -\frac{\sqrt{-1}}{2h} [b'_{m+1,i-1} + a''_{m+1,i-1} - (m, i)(b'_{m+1,i+1} - a''_{m+1,i+1})], \\ \bar{T}'_{m,i} &= -\frac{\sqrt{-1}}{2h} [-a'_{m+1,i-1} + b''_{m+1,i-1} + (m, i)(a'_{m+1,i+1} + b''_{m+1,i+1})]. \end{aligned} \right\} (46)$$

Per  $i = 1$ ,  $R_{m,1}$  ed  $S_{m,1}$  rientrano nella legge generale, mentre  $\bar{T}_{m,1}$  e  $\bar{T}'_{m,1}$  se ne discostano perchè i termini in parentesi col secondo indice 0 vanno ancora moltiplicati per 2. Per  $i = 0$ , infine, vale soltanto la prima delle (45) in cui è da porre, naturalmente,  $B_{m+2,0} = B_{m,0} = 0$  ed è semplicemente:

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_{m,0} &= \frac{\lambda + \mu}{4\mu} \frac{(m+1)(m+2)\sqrt{1-r^2} P_{m+2}}{P_{m+1,1}}, \\ \bar{T}_{m,0} &= \frac{\sqrt{-1}}{2h} (m, 0)(b'_{m+1,1} - a''_{m+1,1}). \end{aligned} \right\} (46')$$

4. *Eliminazione di  $\varpi_2$  e  $\varpi_3$ .* Invece di calcolare in modo analogo al precedente  $\varpi_2$  e  $\varpi_3$  dalle equazioni che si deducono dalla (44) con le solite permutazioni circolari, allo scopo di ottenere la soluzione del nostro problema più semplicemente, procederemo nel modo seguente. Dalle due note equazioni:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu \left( \frac{\partial \varpi_2}{\partial z} - \frac{\partial \varpi_3}{\partial y} \right) = 0, \quad \frac{\partial \varpi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varpi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varpi_3}{\partial z} = 0, \quad (47)$$

eseguendo in esse le derivazioni secondo le regole date dalle (19), (19'), si ricava:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{-1} (\lambda + 2\mu) (m+i)(m-i+1) A_{m,i} + \mu [D_{m,i-1,2} + C_{m,i-1,3} - \\ - (m-1, i)(D_{m,i+1,2} - C_{m,i+1,3})] &= 0, \\ \sqrt{-1} (\lambda + 2\mu) (m+i)(m-i+1) B_{m,i} + \mu [D_{m,i-1,3} - C_{m,i-1,2} + \\ + (m-1, i)(D_{m,i+1,3} + C_{m,i+1,2})] &= 0, \\ 2\sqrt{-1} (m+i)(m-i+1) C_{m,i,1} + D_{m,i-1,3} - C_{m,i-1,2} - \\ - (m-1, i)(D_{m,i+1,3} + C_{m,i+1,2}) &= 0, \\ 2\sqrt{-1} (m+i)(m-i+1) D_{m,i,1} - (D_{m,i-1,2} + C_{m,i-1,3}) - \\ - (m-1, i)(D_{m,i+1,2} - C_{m,i+1,3}) &= 0 \end{aligned} \right\} (48)$$

e queste relazioni, per un  $i$  fissato, valgono per  $m = i + 1, i + 2, \dots$ ; soltanto, per  $i = 1$ , i termini col secondo indice eguale a zero vanno moltiplicati per 2. Dalle (48) otteniamo subito:

$$\begin{aligned}
 & 2\mu(m-i)(m+i+1)(D_{m,i+1,2} - C_{m,i+1,3}) = \\
 & \qquad \qquad \qquad = \sqrt{-1}[(\lambda + 2\mu)A_{m,i} + 2\mu D_{m,i,1}], \\
 & 2\mu(D_{m,i-1,2} + C_{m,i-1,3}) = \\
 & \qquad \qquad \qquad = -\sqrt{-1}(m+i)(m-i+1)[(\lambda + 2\mu)A_{m,i} - 2\mu D_{m,i,1}], \\
 & 2\mu(D_{m,i-1,3} - C_{m,i-1,2}) = \\
 & \qquad \qquad \qquad = -\sqrt{-1}(m+i)(m-i+1)[(\lambda + 2\mu)B_{m,i} + 2\mu C_{m,i,1}], \\
 & 2\mu(m-i)(m+i+1)(D_{m,i+1,3} + C_{m,i+1,2}) = \\
 & \qquad \qquad \qquad = -\sqrt{-1}[(\lambda + 2\mu)B_{m,i} - 2\mu C_{m,i,1}],
 \end{aligned}
 \tag{48'}$$

e queste nuove relazioni valgono come quelle da cui sono dedotte, per ogni  $i$  fissato, per  $m = i + 1, i + 2, \dots$ . Però, con l'aiuto delle altre due equazioni che si ottengono dalla prima delle (47) con permutazioni circolari, troviamo subito che sussistono anche le equazioni che si deducono dalla seconda e terza delle (48') facendo  $m = i$ , sicchè può affermarsi che le (48') valgono per ogni sistema di valori di  $m$  ed  $i$  per i quali i due membri di ciascuna di esse hanno un significato. Soltanto si deve ancora avvertire che, per  $i = 1$ , i primi membri della 2.<sup>a</sup> e 3.<sup>a</sup> delle (48') vanno moltiplicati per 2 e che per  $i = 0$  sussistono solo la 1.<sup>a</sup> e la 4.<sup>a</sup> purchè si sopprima nei primi membri il fattore 2 e si ponga naturalmente,  $B_{m,0} = D_{m,0,1} = 0$ .

Con l'aiuto delle (48') riusciamo facilmente ad eliminare  $\varpi_2$  e  $\varpi_3$  e a costruire un sistema di equazioni nelle quali compaiono soltanto  $\theta$  e  $\varpi_1$  per mezzo delle costanti con le quali sono costruiti i loro sviluppi.

5. *Costruzione delle equazioni in  $\theta$  e  $\varpi_1$ . Caso in cui  $i > 0$ .* Per costruire queste equazioni poniamo in  $T_{m,i}$ ,  $T'_{m,i}$ ,  $\bar{T}_{m,i}$ ,  $\bar{T}'_{m,i}$  al posto delle  $a_{m,i}, \dots, b''_{m,i}$  le loro espressioni ricavate dalle (43). Poichè  $a_{m,i}, \dots, b''_{m,i}$  compaiono nelle  $T_{m,i}, \dots, \bar{T}'_{m,i}$  soltanto per mezzo delle combinazioni  $a_{m+1,i}$ ,  $b_{m+1,i}$ ,  $a'_{m+1,i-1} - b''_{m+1,i-1}$ ,  $a'_{m+1,i+1} + b''_{m+1,i+1}$ ,  $b'_{m+1,i-1} + a''_{m+1,i-1}$ ,  $b'_{m+1,i+1} - a''_{m+1,i+1}$  ed in queste combinazioni le costanti di  $\varpi_2$  e  $\varpi_3$  compaiono sempre accoppiate come nei primi membri delle (48'), si riesce agevolmente ad eliminare dalle espressioni di  $T_{m,i}, \dots, \bar{T}'_{m,i}$  le  $a_{m,i}, \dots$  e le costanti di  $\varpi_2$  e di  $\varpi_3$  e ad ottenere dalle (28), (45) le richieste equazioni. Queste si dividono in due sistemi distinti: uno contenente le  $A_{m,i}$ ,  $D_{m,i,1}$  e l'altro le  $B_{m,i}$ ,  $C_{m,i,1}$  i quali però differiscono solo pel

nome delle incognite e per i valori dei termini noti. Basterà dunque occuparsi del primo di essi. Seguendo i calcoli indicati si trova senza difficoltà:

$$\left. \begin{aligned}
 T_{m,i} &= T^*_{m,i} + \frac{(m+i+1)(m+i+2)}{2m+5} [(R_{m,i} + R^*_{m,i}) A_{m+2,i} + H_{m,i} D_{m+2,i,1}] - \\
 &\quad - \frac{(m-i+1)(m-i+2)}{2m+1} [(S_{m,i} + S^*_{m,i}) A_{m,i} + H_{m,i} D_{m,i,1}], \\
 \bar{T}'_{m,i} &= \bar{T}'^*_{m,i} + \frac{(m+i+1)(m+i+2)}{2m+5} [(-\bar{R}_{m,i} + \bar{R}^*_{m,i}) A_{m+2,i} + (2 + K_{m,i}) D_{m+2,i,1}] - \\
 &\quad - \frac{(m-i+1)(m-i+2)}{2m+1} [(-\bar{S}_{m,i} + \bar{S}^*_{m,i}) A_{m,i} + (2 + K_{m,i}) D_{m,i,1}]
 \end{aligned} \right\} (49)$$

dove  $R_{m,i} = S_{m,i}$ ,  $\bar{R}_{m,i} = \bar{S}_{m,i}$  hanno i significati che abbiamo loro già attribuiti ed inoltre è:

$$\left. \begin{aligned}
 T^*_{m,i} &= \frac{1}{2(\lambda + \mu)\sqrt{r^2 - 1}} \left[ 2(m+i+1)(m-i+2) \frac{L_{m+1,i}}{P'_{m+1,i}} - \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{-1} \frac{\bar{N}_{m+1,i-1} - M_{m+1,i-1}}{P'_{m+1,i-1}} + \sqrt{-1} (m, i) \frac{\bar{N}_{m+1,i+1} + M_{m+1,i+1}}{P'_{m+1,i+1}} \right], \\
 R^*_{m,i} = S^*_{m,i} &= \frac{\mu}{2(\lambda + \mu)} \frac{r}{1 - r^2} \left[ (i-1) \frac{P_{m+1,i-1}}{P'_{m+1,i-1}} - (i+1) \frac{P_{m+1,i+1}}{P'_{m+1,i+1}} \right] - \\
 &\quad - m - r^2 - r \frac{(m+2) P_{m+1,i} - (m-i+2) P'_{m+2,i}}{P'_{m+1,i}} + \\
 &\quad + \frac{(m-i+3) P_{m+2,i-1} + \sqrt{1-r^2} P'_{m+2,i}}{2 P'_{m+1,i-1}} + \\
 &\quad + \frac{(m-i+1) P_{m+2,i+1} - (m-i+1)(m-i+2) \sqrt{1-r^2} P'_{m+2,i}}{2 P'_{m+1,i+1}}, \\
 H_{m,i} &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{r}{1 - r^2} \left[ -2i \frac{P_{m+1,i}}{P'_{m+1,i}} + (i-1) \frac{P_{m+1,i-1}}{P'_{m+1,i-1}} + (i+1) \frac{P_{m+1,i+1}}{P'_{m+1,i+1}} \right],
 \end{aligned} \right\} (50)$$

$$\begin{aligned}
 \bar{T}'_{m,i} &= \frac{1}{4\mu\sqrt{1-r^2}} \left[ \frac{\bar{N}_{m+1,i-1} - M_{m+1,i-1}}{P'_{m+1,i-1}} + (m,i) \frac{\bar{N}_{m+1,i+1} + M_{m+1,i+1}}{P'_{m+1,i+1}} \right], \\
 \bar{R}'_{m,i} = \bar{S}'_{m,i} &= -\frac{1}{4} \frac{r}{1-r^2} \left[ (i-1) \frac{P_{m+1,i-1}}{P'_{m+1,i-1}} + (i+1) \frac{P_{m+1,i+1}}{P'_{m+1,i+1}} \right] + \\
 &+ \frac{\lambda + \mu}{4\mu} \left[ 2i + \frac{(m-i+3)P_{m+2,i-1} + \sqrt{1-r^2}P'_{m+2,i}}{P'_{m+1,i-1}} - \right. \\
 &\left. - \frac{(m-i+1)P_{m+2,i+1} - (m-i+1)(m-i+2)\sqrt{1-r^2}P'_{m+2,i}}{P'_{m+1,i+1}} \right], \\
 K_{m,i} &= -1 + \frac{r}{2(1-r^2)} \left[ (i-1) \frac{P_{m+1,i-1}}{P'_{m+1,i-1}} - (i+1) \frac{P_{m+1,i+1}}{P'_{m+1,i+1}} \right].
 \end{aligned} \tag{50'}$$

Questi risultati valgono finchè  $i \geq 1$ ; per  $i = 1$  i termini di  $T'_{m,i}$ ,  $\bar{T}'_{m,i}$  che hanno a denominatore  $P'_{m+1,0}$  vanno moltiplicati per 2.

Dalle equazioni che così si ottengono è facile eliminare una volta  $\theta$  ed una volta  $\varpi_1$ . Si trovano così le equazioni:

$$\begin{aligned}
 \frac{(m+i+1)(m+i+2)}{2m+5} A_{m+2,i} - \frac{(m-i+1)(m-i+2)}{2m+1} A_{m,i} &= \\
 &= \frac{K_{m,i} T'_{m,i} - H_{m,i} \bar{T}'_{m,i}}{H_{m,i} \bar{R}'_{m,i} - K_{m,i} R'_{m,i}}, \\
 \frac{(m+i+1)(m+i+2)}{2m+5} D_{m+2,i,1} - \frac{(m-i+1)(m-i+2)}{2m+1} D_{m,i,1} &= \\
 &= \frac{R'_{m,i} \bar{T}'_{m,i} - \bar{R}'_{m,i} T'_{m,i}}{H_{m,i} \bar{R}'_{m,i} - K_{m,i} R'_{m,i}},
 \end{aligned} \tag{51}$$

da cui, finalmente, si ottiene:

$$\frac{(m+i)!}{(m-i)!} \frac{A_{m,i}}{2m+1} = - \sum_0^{\infty} \frac{(m+i+2j)!}{(m-i+2j+2)!} \frac{K_{m+2j,i} T'_{m+2j,i} - H_{m+2j,i} \bar{T}'_{m+2j,i}}{H_{m+2j,i} \bar{R}'_{m+2j,i} - K_{m+2j,i} R'_{m+2j,i}}, \tag{52}$$

ed una formola perfettamente analoga per le  $D_{m,i,1}$ .

5°. *Caso in cui  $i = 0$ .* Il caso in cui  $i = 0$  è particolarmente importante perchè quando si tratti di una *deformazione di rotazione*,  $\theta$  e  $\varpi_1$  sono rappresentati completamente da termini di questa specie ed anche perchè la determinazione di essi è molto più semplice che nel caso generale. Essendo, infatti, nulle le  $B_{m,0}$  e le  $D_{m,0,1}$  le  $A_{m,0}$ ,  $C_{m,0,1}$  soddisfano fin dal principio ad equa-



zioni distinte. Si ha intanto :

$$T_{m,0} = T^*_{m,0} + \frac{(m+1)(m+2)}{2m+5} (R_{m,0} + R^*_{m,0}) A_{m+2,0} - \frac{(m+1)(m+2)}{2m+1} (S_{m,0} + S^*_{m,0}) A_{m,0} \quad (53)$$

con

$$T^*_{m,0} = \frac{1}{2(\lambda + \mu)\sqrt{r^2 - 1}} \left[ 2(m+1)(m+2) \frac{I_{m+1,0}}{P'_{m+1}} + \sqrt{-1} (m, 0) \frac{\bar{M}_{m+1,1} + \bar{N}_{m+1,1}}{P'_{m+1,1}} \right], \quad (53')$$

$$R^*_{m,0} = S^*_{m,0} = -m + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{r}{1 - r^2} \frac{P_{m+1,1}}{P'_{m+1,1}} - r \frac{P_{m+2} - (m+2)\sqrt{1-r^2}P'_{m+2}}{\sqrt{1-r^2}P'_{m+1}} + (m+1) \frac{P_{m+2,1} - (m+2)\sqrt{1-r^2}P'_{m+2}}{P'_{m+1,1}}$$

e similmente :

$$\bar{T}_{m,0} = \bar{T}^*_{m,0} + (2 + K_{m,0}) (m+1)(m+2) \left( \frac{C_{m+2,0,1}}{2m+5} - \frac{C_{m,0,1}}{2m+1} \right) \quad (54)$$

con

$$\bar{T}^*_{m,0} = \frac{(m, 0)}{4\mu\sqrt{1-r^2}} \frac{N_{m+1,1} - \bar{M}_{m+1,1}}{P'_{m+1,1}}, \quad K_{m,0} = -1 - \frac{r}{1-r^2} \frac{P_{m+1,1}}{P'_{m+1,1}}, \quad (54')$$

quindi :

$$\frac{A_{m,0}}{2m+1} = \sum_0^\infty \frac{T^*_{m+2j,0}}{(m+2j+1)(m+2j+2)R^*_{m,0}}, \quad \frac{C_{m,0,1}}{2m+1} = \sum_0^\infty \frac{\bar{T}^*_{m+2j,0}}{(m+2j+1)(m+2j+2)K_{m,0}}. \quad (55)$$

Si osservi quì che essendo  $K_{0,0} = 0$ , come pure, a causa delle (40'),  $\bar{T}^*_{0,0} = 0$ ,  $C_{0,0,1}$  resta indeterminato.

6. *Determinazione delle altre incognite.* I coefficienti degli sviluppi di  $\sigma_2$  e di  $\sigma_3$  sono subito determinati dalle (48') tranne quelli per cui  $m = i$  e per i quali le (48') ci danno soltanto due equazioni. Per la loro completa determinazione bisogna procurarsi altre equazioni; e queste possono essere quelle che si ottengono eguagliando a zero i coefficienti di  $\varphi_{i,i} \cos i\omega$  nelle equazioni analoghe alla (44), in  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ , moltiplicate per  $\rho^2 - t^2$ . Con l'aiuto di queste equazioni, delle (48') e delle (43) si determinano tutte le costanti del nostro

problema; in particolare le  $a_{m,i}, \dots, b''_{m,i}$ . Soltanto, per  $m = i = 0$ , le (43) sono identicamente soddisfatte in virtù delle (48') ed  $\alpha_{0,0}, \alpha'_{0,0}, \alpha''_{0,0}$ , com'era da aspettarsi, restano indeterminate. Lo stesso accade di  $C_{0,0,2}, C_{0,0,3}$  come si riscontrerebbe facilmente.

Sulle soluzioni elementari e sulla questione delle verifiche valgono cose analoghe a quelle che abbiamo detto alla fine di III e non crediamo utile fermarci più a lungo su queste quistioni.

#### V. ELLISSOIDE RIGIDO DI ROTAZIONE IMMERSO IN UN MEZZO ELASTICO INDEFINITO.

1. Non vi sono difficoltà speciali nel trasportare le soluzioni precedenti al caso di un mezzo elastico indefinito esterno ad un ellissoide di rotazione. Fermandoci, per fissare le idee; al caso in cui sulla superficie dell'ellissoide sieno dati gli spostamenti, possiamo subito asserire che valgono ancora le (21), (22), (23) e (21') con la sola avvertenza di porre le  $\Psi_{m,i}$  al posto delle  $\Phi_{m,i}$  e di cambiare dappertutto le  $P_{m,i}$  dell'argomento  $r$  nelle corrispondenti  $Q_{m,i}$  dello stesso argomento. Nel passaggio però dalla (25) alla (25') bisogna tener conto che, per ogni valore di  $i$ , le  $\Psi_{m,i}$  conservano un significato e vanno considerate anche per  $m = i - 1$  ed  $m = i - 2$  e che per  $i = 0$  ed  $i = 1$  le formole preliminari si allontanano dal tipo generale quando si applicano a  $\Psi_{0,0}, \Psi_{1,0}, \Psi_{1,1}$ . Sussistono così delle equazioni perfettamente analoghe alle (28), ma a queste, per ogni valore di  $i > 0$ , vanno aggiunte quattro equazioni e, per  $i = 0$ , due. Allora, se si tratta, per es., della determinazione delle  $A_{m,i}$  con  $m \equiv i \pmod{2}$ , abbiamo una prima equazione che contiene soltanto  $A_{i,i}$  e che quindi ce la determina, mentre dalle altre equazioni del tipo delle (28) si determinano successivamente  $A_{i+2,i}, A_{i+4,i}, \dots$ . Per questi nuovi problemi ci limiteremo a questi accenni perchè la trascrizione di tutto il sistema di formole non è giustificato dalle difficoltà che si devono superare (\*).

---

(\*) Determinate le soluzioni elementari per il problema interno e per quello esterno per cui uno degli spostamenti acquista sulla superficie valori proporzionali a  $P_{m,i}(t) \frac{\cos i \omega}{\sin i \omega}$  e gli altri due si annullano, la combinazione lineare a coefficienti costanti di esse ci fornirà una soluzione elementare del problema d'equilibrio elastico di un corpo compreso fra due ellissoidi di rotazione confocali.

Ci contenteremo, tanto per dare un esempio, di considerare il caso semplice di un ellissoide rigido di rotazione immerso in un mezzo elastico indefinito e di ricercare la deformazione che subisce il mezzo elastico quando l'ellissoide subisce un moto elicoidale infinitesimo intorno all'asse di rotazione.

2. Questo problema si scinde in due parti distinte e si ha la prima quando l'ellissoide subisce soltanto una rotazione infinitesima intorno all'asse di rotazione. Si riconosce subito che a questo caso compete una dilatazione elementare nulla. E se la rotazione in discorso ha la forma:

$$u = 0, \quad v = -p z, \quad w = p y \quad (56)$$

dove  $p$  indica la grandezza della rotazione, per risolvere il problema, basterà costruire le funzioni armoniche all'esterno dell'ellissoide che sulla superficie acquistino i valori (56). La soluzione di quest'altro problema è semplice e già nota. Se indichiamo con  $V$  il potenziale esterno all'ellissoide di una massa di densità costante  $\delta$  distribuita nell'interno dell'ellissoide stesso, è

$$V = \pi h^3 r (r^2 - 1) \delta \int_{\lambda}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{s} - \frac{y^2 + z^2}{s - h^2} \right) \frac{ds}{(s - h^2) \sqrt{s}}$$

dove  $\lambda$  è la radice positiva dell'equazione  $\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2 + z^2}{\lambda - h^2} = 1$ ; e si avrà per la soluzione del nostro problema:

$$u = 0, \quad v = \frac{\partial V}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad (57)$$

se si determina la densità  $\delta$  dall'equazione

$$2\pi h^3 r (r^2 - 1) \delta \int_{h^2 r^2}^{\infty} \frac{ds}{(s - h^2)^2 \sqrt{s}} = p.$$

3. Occupiamoci ora dell'altra parte della quistione, di ricercare cioè la deformazione del mezzo elastico quando l'ellissoide subisce una traslazione infinitesima di grandezza  $\alpha$  secondo l'asse di rotazione. In questo caso deve essere sulla superficie dell'ellissoide

$$u = \alpha, \quad v = w = 0, \quad (58)$$

e si riconosce subito che tutti i coefficienti  $A_{m,i}$  e  $B_{m,i}$ , nello sviluppo di  $\theta$

sono nulli tranne quelli della forma  $A_{2k+1,0}$  e che, come risulta dalle equazioni analoghe alle (28'), è pure, per qualunque valore di  $k$ ,

$$\frac{A_{2k+1,0}}{4k+3} = \frac{1}{3} A_{1,0},$$

sicchè

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{A_{1,0}}{3} \sum_0^{\infty} (4k+3) P_{2k+1}(t) Q_{2k+1}(\rho) = \\ &= \frac{A_{1,0}}{3} \sum_0^{\infty} (4k+3) \Psi_{2k+1,0} = \frac{A_{1,0}}{3} \frac{t}{\rho^2 - t^2}, \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

mentre  $A_{1,0}$  è determinato in funzione di  $\alpha$  dall'equazione

$$\left[ \frac{\lambda + \mu}{2\mu} \left( \frac{r Q_1}{Q_0} + 7 \right) + 1 \right] \frac{A_{1,0}}{3} = - \frac{\alpha}{h}. \quad (60)$$

Gli spostamenti stessi, in fine, si costruiscono senza difficoltà.

## VI. CASO IN CUI DEBBANO CONSIDERARSI ANCHE LE FORZE DI MASSA.

1. In una Memoria del Circ. mat. di Palermo (\*) abbiamo già dato metodi generali per la soluzione di problemi di equilibrio elastico quando intervengono forze di massa. Dal punto di vista teorico, è noto che tutto si riduce a trovare una soluzione particolare delle equazioni indefinite dell'equilibrio elastico in cui sia tenuto conto anche delle forze di massa; e si conoscono diversi modi per raggiungere questo scopo. Ma resta sempre la questione di scegliere opportunamente fra queste diverse soluzioni particolari e di adoperarle nel miglior modo perchè, in ciascun caso particolare che si abbia a trattare, i calcoli e le formole riescano i più semplici possibili.

2. Noi qui vogliamo limitarci alla considerazione del caso in cui le forze di massa ammettono un potenziale  $F$  per cui le equazioni indefinite dell'equilibrio elastico abbiano la forma

$$\Delta^2 u + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial F}{\partial x}, \dots \quad (61)$$

(\*) Anno 1903.

Nel caso più semplice in cui  $F$  è armonica ed in superficie son dati gli spostamenti, risolviamo il problema aggiungendo rispettivamente ai secondi membri delle (21') le quantità note:

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{2\nu} \left( x F - \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \zeta F \frac{dG}{dn} d\sigma \right), & V &= \frac{1}{2\mu} \left( y F - \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \eta F \frac{dG}{dn} d\sigma \right), \\ & & W &= \frac{1}{2\mu} \left( z F - \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \zeta F \frac{dG}{dn} d\sigma \right) \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

e determinando  $\theta$  dall'equazione (25) in cui il secondo membro, invece che eguale a zero, si ponga eguale a  $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}$ . La quistione nuova resta sostanzialmente della stessa natura di quella risolta in III.

Si passa dal caso in cui son dati in superficie gli spostamenti a quello in cui son date le tensioni con lo stesso metodo indicato in IV.

Lasciando da parte il caso di  $F$  qualunque, limiteremo ancora le nostre ulteriori considerazioni a quello in cui

$$F = A x^2 + B (y^2 + z^2) \quad (63)$$

quando si chiedi che sulla superficie dell'ellissoide sieno nulle le tensioni. In questa quistione sono compresi come quistioni particolari quelle della determinazione della deformazione di un ellissoide di rotazione rotante uniformemente intorno al suo asse e quella di un ellissoide le cui particelle si attraggono secondo la legge di NEWTON, se riteniamo  $A$  e  $B$  due costanti indeterminate. In questo caso conviene assumere la soluzione particolare delle (61) sotto la forma:

$$U = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad V = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad W = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \text{con} \quad (\lambda + 2\mu) \Delta^2 \Phi = F. \quad (64)$$

Si può perciò porre

$$\Phi = \frac{x^2}{2(\lambda + 2\mu)} \left[ \frac{1}{6} (A - 2B) x^2 + B (y^2 + z^2) \right]$$

e quindi:

$$U = \frac{x}{\lambda + 2\mu} \left[ \frac{1}{3} (A - 2B) x^2 + B (y^2 + z^2) \right], \quad V = \frac{B x^2 y}{\lambda + 2\mu}, \quad W = \frac{B x^2 z}{\lambda + 2\mu} \quad (65)$$

con la dilatazione elementare relativa

$$\Theta = \frac{1}{\lambda + 2\mu} [A x^2 + B (y^2 + z^2)]. \quad (66)$$

Calcolando le tensioni in superficie corrispondenti a questa deformazione con l'aiuto delle (38'), si trova subito che esse sono della forma:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{r^2 - t^2} L &= L_{1,0} P_{1,0}(t) + L_{3,0} P_{3,0}(t), \\ \sqrt{r^2 - t^2} M &= [M_{1,1} P_{1,1}(t) + M_{3,1} P_{3,1}(t)] \cos \omega, \\ \sqrt{r^2 - t^2} N &= [\bar{N}_{1,1} P_{1,1}(t) + \bar{N}_{3,1} P_{3,1}(t)] \sin \omega, \\ \bar{N}_{1,1} &= M_{1,1}, \quad \bar{N}_{3,1} = M_{3,1}. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

E, se poniamo la soluzione della nostra quistione sotto la forma

$$u_1 = U - u, \quad v_1 = V - v, \quad w_1 = W - w,$$

essa allora si riduce alla ricerca della deformazione  $u, v, w$ , caso particolare di quella determinata in IV, per cui le tensioni in superficie acquistano i valori (67). Si trova subito che, qualunque sieno  $L_{1,0}, L_{3,0}, M_{1,1}, M_{3,1}$ , la deformazione è di rotazione con  $\varpi_1 = 0$ ,  $\theta$  funzione di secondo grado ed  $u, v, w$  di terzo grado in  $x, y, z$ . Con l'aiuto di queste indicazioni possiamo costruire anche direttamente  $u, v, w$ . Per essere infatti  $\varpi_1 = 0$  si può porre:

$$\theta = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \varpi_2 = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \varpi_3 = -\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

dove  $\psi$  è una funzione armonica e quindi:

$$\left. \begin{aligned} u &= x \left[ \alpha x^2 - \left( \frac{3}{2} \alpha + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \alpha \right) (y^2 + z^2) + \beta \right], \\ v &= y \left[ \left( a - \frac{3}{2} \alpha \right) x^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{3}{2} \alpha + \frac{\lambda}{\mu} \alpha \right) (y^2 + z^2) + \frac{1}{2} (b - \beta) \right], \\ w &= z \left[ \left( a - \frac{3}{2} \alpha \right) x^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{3}{2} \alpha + \frac{\lambda}{\mu} \alpha \right) (y^2 + z^2) + \frac{1}{2} (b - \beta) \right] \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

con:

$$\theta = a (2x^2 - y^2 - z^2) + b, \quad \varpi_2 = -\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} a x z, \quad \varpi_3 = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} a x y. \quad (69)$$

In questa soluzione compaiono le quattro costanti arbitrarie  $a, b, \alpha, \beta$  le quali devono essere determinate in modo che sieno soddisfatte le condizioni in superficie. Senza passare per il tramite delle funzioni sferiche, si possono determinare queste costanti costruendo i secondi membri delle (38') per la deformazione  $u_1, v_1, w_1$  ed eguagliandoli a zero. Basta porre eguali a zero i coefficienti delle varie potenze di  $\xi, \eta, \zeta$  per ottenere le quattro equazioni richieste.

#### OSSERVAZIONE FINALE.

Fermandoci al problema risolto in III, possiamo osservare che, cambiando in tutte le formole ivi contenute,  $a_{m,i}, b_{m,i}, \dots, b''_{m,i}, A_{m,i}, B_{m,i}$  in  $\frac{a_{m,i}}{r^m}, \frac{b_{m,i}}{r^m}, \dots, \frac{b''_{m,i}}{r^m}, \frac{A_{m,i}}{r^m}, \frac{B_{m,i}}{r^m}$ , cambiando quindi  $\rho$  e  $r$  rispettivamente in  $\frac{\rho}{h}$  ed  $\frac{r}{h}$  e facendo tendere  $h$  a zero, si ottiene la soluzione del problema analogo per la sfera; mentre sviluppando secondo le potenze di  $h$  e tenendo conto delle potenze più basse si ottiene la soluzione dello stesso problema per un ellissoide pochissimo differente dalla sfera.

È chiaro poi che queste considerazioni sono estendibili anche agli altri problemi risolti nella presente Memoria.





# Saggio di Geometria differenziale dei complessi di rette.

(Di GUSTAVO SANNIA, a Torino.)

---

## INTRODUZIONE.

Nella Memoria: *Nuova esposizione della geometria infinitesimale delle congruenze rettilinee* (\*) e in due successive *Note* (\*\*) ho posto come base dello studio delle congruenze di raggi due forme differenziali quadratiche in due variabili, che rappresentano, l'una il quadrato dell'angolo di due raggi infinitamente vicini della congruenza, l'altra il momento dei medesimi raggi. In tal modo ho raggiunto lo scopo che si era proposto il KUMMER (\*\*\*): costruire una teoria delle congruenze rettilinee parallela alla teoria delle superficie fondata da GAUSS.

Due forme differenziali quadratiche hanno pure adoperato il FIBBI (\*\*\*\*) ed il FUBINI (\*.) per rappresentare una congruenza di raggi in uno spazio di curvatura costante; *ma nessun tentativo in questo senso è stato fatto finora per i complessi di rette.*

In questa Memoria io ne dò un primo saggio, ponendo come base di tutta la teoria le stesse forme quadratiche che ho adoperato per le congruenze. Esse saranno ternarie, perchè la posizione di un raggio di un complesso si può far dipendere dai valori di tre parametri indipendenti; ma la

---

(\*) *Annali di Matematica*, tom. XV della serie III (1909), pag. 143.

(\*\*) *Nuove formole utili per lo studio delle congruenze rettilinee e Sull'inviluppata media di una congruenza di rette* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XLIV e XLV, 1909-10).

(\*\*\*) *Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme* (Crelles Journal, vol. 57, 1859).

(\*\*\*\*) *I sistemi doppiamente infiniti di raggi negli spazi di curvatura costante* (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, tom. VII, 1895).

(\*.) *Il parallelismo di Clifford negli spazi ellittici* (ibid., tom. IX, 1900).

*Annali di Matematica*, Serie III, Tomo XVII.

prima forma sarà necessariamente riducibile, perchè dipende solo dalla *direzione* dei raggi del complesso. Queste direzioni sono al più  $\infty^2$ , quindi potremo supporre che la prima forma sia già ridotta a contenere non più di due parametri essenziali. Tale ipotesi non produce evidentemente diminuzione di generalità; anzi il lasciare tre parametri non essenziali nella prima forma è (dal punto di vista geometrico) andar contro alla natura dell'ente geometrico che quella forma rappresenta.

Nel corso del lavoro mi occorrerà spesso di invocare i risultati contenuti nella citata Memoria degli *Annali*: li supporrò noti senz'altro al lettore e farò precedere dalla lettera *A* le citazioni che vi si riferiscono.

Per la vastità dell'argomento dovrò limitarmi ad esporre, in questo primo saggio, solo i concetti fondamentali del metodo, e a non uscire dal campo dei complessi generali, tralasciando quelle proprietà che spettano solo a complessi particolari. Tuttavia io spero che quanto dirò sarà sufficiente a provare l'efficacia del nuovo metodo, il quale ha tutti i vantaggi che presentano i metodi cosiddetti *intrinseci*.

I complessi che considero sono generali, algebrici o trascendenti, ma reali, quindi tutte le funzioni che introdurrò saranno funzioni reali di variabili reali. Rispetto a queste funzioni dico una volta per tutte che le supporrò *finite e continue insieme con tutte quelle derivate che mi occorreranno*, sia pure limitatamente a regioni opportune del loro campo di esistenza.

Nel corso del lavoro il lettore incontrerà alcune proprietà geometriche note, che non ho creduto conveniente di omettere in una esposizione sistematica. Ma del tutto nuovo è lo studio delle singolarità dei complessi e nuova è la considerazione dei raggi *bisingolari*, i quali apportano nuova luce nello studio delle singolarità. E per la prima volta sono qui studiati in modo sistematico i complessi definiti dalle espressioni esplicite delle coordinate di una retta generica in funzione di tre parametri indipendenti: infatti finora sono stati studiati sistematicamente solo i complessi definiti da una equazione fra le coordinate di retta (con speciale riguardo ai complessi algebrici) (\*).

---

(\*) Limitandomi alle trattazioni sistematiche, citerò KOENIGS, *Sur les propriétés infinitesimales de l'espace réglé* (Thèse, 1882); ZINDLER, *Liniengeometrie*, Bd. II; JESSOP, *A treatise on the line complex* (Cambridge, 1903).

**Definizioni.**

1. Sopra ogni retta dello spazio fissiamo ad arbitrio un punto *origine*  $M$  ed il verso positivo. Una retta sarà allora individuata dalle coordinate  $x, y, z$  del punto  $M$  e dai coseni direttori  $X, Y, Z$  del suo verso positivo, rispetto a tre assi cartesiani ortogonali; quindi per definire analiticamente un *complesso* o *sistema*  $\infty^3$  di raggi basta dare

$$x, y, z, X, Y, Z$$

in funzione di tre parametri indipendenti  $u, v, w$ .

I raggi del complesso aventi una data direzione  $(X_0, Y_0, Z_0)$  corrisponderanno alle soluzioni  $(u, v, w)$  del sistema

$$X(u, v, w) = X_0, \quad Y(u, v, w) = Y_0, \quad Z(u, v, w) = Z_0.$$

Or queste equazioni non sono indipendenti, essendo

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2 = 1,$$

quindi la matrice jacobiana

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial X}{\partial w} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial w} \\ \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

avrà la caratteristica 0, 1 o 2. Se la caratteristica è 1, allora  $X, Y, Z$  sono riducibili a funzioni di un sol parametro essenziale, quindi le direzioni dei raggi del complesso sono  $\infty^1$ , ed il complesso è costituito dalle rette che si appoggiano ad una data curva all'infinito; se la caratteristica è 0, allora  $X, Y, Z$  sono costanti ed il complesso degenera in una stella impropria.

Noi escluderemo questi complessi dalle nostre considerazioni (\*), cioè *supporremo che la precedente matrice abbia la caratteristica due.*

---

(\*) La nostra trattazione esige questa esclusione, ma non per questo può esser condannata *a priori*, perchè i complessi esclusi hanno poco interesse. Del resto non mancano esempi

Ne segue che  $X, Y, Z$  saranno funzioni di due soli parametri essenziali: noi supporremo che esse siano già ridotte ad essere funzioni di questi parametri che indicheremo con  $u$  e  $v$ . Invece  $x, y, z$  saranno funzioni, non solo di  $u$  e  $v$ , ma anche di un terzo parametro  $w$ .

Diremo  $u, v, w$  le *coordinate (interne)* del raggio del complesso che esse individuano.

Essendo  $u, v$  parametri essenziali per  $X, Y, Z$ , anche la matrice

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

avrà la caratteristica due in tutto un campo a due dimensioni delle variabili  $u$  e  $v$ , quindi il suo quadrato per orizzontali sarà essenzialmente positivo:

$$\Sigma \left( \frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 \cdot \Sigma \left( \frac{\partial X}{\partial v} \right)^2 - \left( \Sigma \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} \right)^2 > 0 \quad (*). \quad (1)$$

Affinchè il complesso non degeneri in una congruenza, bisognerà supporre inoltre che per tutti i valori di  $u, v$  del campo considerato non sieno contemporaneamente nulle

$$\frac{\partial x}{\partial w}, \quad \frac{\partial y}{\partial w}, \quad \frac{\partial z}{\partial w}.$$

Se per due valori  $u = u_0, v = v_0$  di un tal campo le funzioni  $X, Y, Z$  assumono i valori  $X_0, Y_0, Z_0$ , vi saranno nel complesso  $\infty^1$  raggi aventi la direzione  $(X_0, Y_0, Z_0)$ , i quali passeranno per i punti di coordinate

$$x(u_0, v_0, w), \quad y(u_0, v_0, w), \quad z(u_0, v_0, w),$$

ove  $w$  è arbitraria. Dunque *nel complesso esistono  $\infty^2$  cilindri.*

di metodi analoghi che presentano analoghe eccezioni: dallo studio delle superficie mediante la *rappresentazione sferica di Gauss* sono escluse le superficie sviluppabili; il metodo di KUMMER (loc. cit.) per lo studio delle congruenze di raggi, non considera quelle i cui raggi hanno soltanto  $\infty^1$  direzioni.

(\*) Col simbolo  $\Sigma$  indicheremo costantemente una somma di tre termini che si dedurranno dal primo cambiandovi rispettivamente  $x, X$  in  $y, Y$  e in  $z, Z$ .

Se poi  $(X_0, Y_0, Z_0)$  è una direzione assegnata *a priori*, vi saranno nel complesso cilindri le cui generatrici hanno questa direzione, se esistono coppie  $u_0, v_0$  di valori di  $u, v$  che soddisfanno le equazioni

$$X(u, v) = X_0, \quad Y(u, v) = Y_0, \quad Z(u, v) = Z_0,$$

delle quali due sole sono indipendenti.

Per un punto fissato al finito  $P(x_0, y_0, z_0)$  passeranno raggi del complesso, se sarà possibile determinare terne di valori reali per  $u, v, w$  soddisfacenti al sistema di due equazioni

$$\frac{x(u, v, w) - x_0}{X(u, v)} = \frac{y(u, v, w) - y_0}{Y(u, v)} = \frac{z(u, v, w) - z_0}{Z(u, v)}.$$

Se esiste una soluzione  $u_0, v_0, w_0$  del sistema e se per questi valori non sono tutti nulli i minori di secondo ordine di una certa matrice funzionale, il sistema definirà due delle variabili in funzione della terza (per es.  $u$  e  $v$  in funzione di  $w$  in un intorno di  $w_0$  e tali che per  $w = w_0$  sia  $u = u_0, v = v_0$ ). In questo senso si può dire che se per un punto  $P$  al finito passa un raggio del complesso, ne passeranno in generale (\*)  $\infty^1$  costituenti un cono, il *cono del complesso* relativo al punto  $P$ .

Se dall'origine  $O$  dagli assi cartesiani conduciamo il raggio  $g'$  parallelo al raggio  $g(u, v, w)$  del complesso e lo sechiamo con la sfera che ha per centro  $O$  e per raggio 1, otteniamo il punto  $M'(X, Y, Z)$  *immagine sferica* di  $g$ . Variando  $g$  nel complesso,  $g'$  descrive infinite volte una stella di centro  $O$ , mentre  $M'$  descrive infinite volte la sfera o una regione di essa.

2. Un sistema  $\infty^2$  di raggi scelti fra quelli del complesso, costituisce una *congruenza* del complesso. Noi considereremo sempre soltanto quelle congruenze che sono analiticamente definite da una equazione

$$f(u, v, w) = 0$$

tra le coordinate  $u, v, w$ , ove  $f$  sia una funzione finita e continua con le sue derivate prime in un campo opportuno; supporremo anche che  $f$  sia tale che la precedente equazione permetta di considerare una delle variabili come funzione (finita, continua e derivabile delle altre due).

---

(\*) D'ora innanzi quando diremo che una certa proprietà si verifica *in generale*, vorremo intendere che essa si verifica, *purchè non sieno soddisfatte certe condizioni, traducibili in equazioni tra le coordinate  $u, v, w$ .*

Se per esempio è possibile dare all'equazione della congruenza (o di una regione di essa) la forma

$$w = \varphi(u, v),$$

si può asserire che i punti all'infinito distinti dei raggi delle congruenze sono  $\infty^2$  ossia che l'immagine sferica della congruenza ricopre tutta una regione della sfera di centro 0 e di raggio 1. Tale è per esempio una *congruenza w*, cioè di equazione  $w = \text{costante}$ .

Se invece si può dare all'equazione della congruenza la forma

$$u = \varphi(v) \quad \text{o} \quad v = \psi(u),$$

i punti all'infinito distinti dei raggi della congruenza saranno soltanto  $\infty^1$ , cioè l'immagine sferica della congruenza si ridurrà ad una linea. Queste congruenze sfuggono alla trattazione generale della Memoria A (come pure a quella di KUMMER). Noi le chiameremo con ZINDLER (loc. cit.) *congruenze cilindriche*, perchè evidentemente si possono generare dando un moto continuo ad un cilindro il quale, durante il moto, si infletta conservando rigide le sue generatrici rettilinee. Tali sono le *congruenze u* o *v*, cioè di equazione  $u = \text{cost.}$  o  $v = \text{cost.}$

Le congruenze *u*, *v* e *w* sono le *congruenze coordinate* del complesso.

Due congruenze del complesso

$$\varphi(u, v, w) = 0, \quad \psi(u, v, w) = 0$$

si tagliano secondo una *superficie rigata* (o semplicemente *rigata*) del complesso. Se  $\varphi$  e  $\psi$  sono indipendenti da *w*, la rigata è un cilindro (o sistema di cilindri) intersezione di due congruenze cilindriche. Per esempio, sono cilindri le *rigate w* lungo le quali varia la sola *w*, cioè aventi per equazioni  $u = \text{cost.}$ ,  $v = \text{cost.}$

Non sono cilindri le *rigate u* o *v*, cioè lungo le quali varia solo *u* o solo *v*.

Le rigate *u*, *v*, *w* sono le *rigate coordinate* del complesso. Per ogni raggio del complesso ne passa una di ciascun sistema.

Notiamo infine che, giusta le ipotesi fatte, *ci sarà lecito eseguire un qualsiasi cambiamento di variabili del tipo*

$$u' = u'(u, v), \quad v' = v'(u, v), \quad w' = w'(u, v, w)$$

con

$$\frac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)} = 0, \quad \frac{\partial w'}{\partial w} = 0,$$

ma non altri.

### Forme quadratiche fondamentali.

3. Consideriamo nel complesso due raggi infinitamente vicini

$$g(u, v, w), \quad g'(u + du, v + dv, w + dw)$$

e supponiamo in primo luogo che non sieno contemporaneamente nulli  $du$  e  $dv$ .

L'angolo di  $g$  e  $g'$  è misurato dalla distanza  $ds'$  delle loro immagini sferiche

$$(X, Y, Z), \quad (X + dX, Y + dY, Z + dZ),$$

quindi è dato dalla formola

$$ds'^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2. \quad (2)$$

Introducendo le variabili  $u, v$ , si ha

$$ds'^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad (3)$$

ove  $E, F, G$  sono funzioni note di  $u, v$ :

$$E = \sum \left( \frac{\partial X}{\partial u} \right)^2, \quad F = \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v}, \quad G = \sum \left( \frac{\partial X}{\partial v} \right)^2. \quad (4)$$

Giusta le ipotesi fatte nel § 1, le funzioni  $E$  e  $G$  sono essenzialmente positive e, per la (1), è anche positiva la funzione  $EG - F^2$ , la cui radice quadrata positiva indicheremo costantemente con  $\Delta$ . Ne segue che la forma differenziale quadratica binaria (3) è definita positiva: la chiameremo la *prima forma fondamentale* del complesso.

Or consideriamo la *minima distanza*  $d\sigma$  tra  $g$  e  $g'$ . I suoi coseni direttori sono dati dalle formole (\*)

$$\cos(d\sigma, x) = \frac{\left( E \frac{\partial X}{\partial v} - F \frac{\partial X}{\partial u} \right) du + \left( F \frac{\partial X}{\partial v} - G \frac{\partial X}{\partial u} \right) dv}{\Delta \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}}, \dots, \quad (5)$$

nelle quali conveniamo di assumere per valore del radicale il positivo.

(\*) Cfr. BIANCHI, *Lezioni di Geometria Differenziale*, vol. I, § 137.

Nel passaggio da  $g$  a  $g'$  il punto  $M(x, y, z)$  origine di  $g$  diventa il punto  $(x + dx, y + dy, z + dz)$  di  $g'$ , quindi evidentemente

$$d\sigma = \sum \cos(d\sigma, x) dx;$$

ne segue che il momento  $\mu$  di  $g$  e  $g'$

$$\mu = d s' d \sigma$$

è espresso da

$$\begin{aligned} \mu = \frac{1}{\Delta} \sum \left[ \left( E \frac{\partial X}{\partial v} - F \frac{\partial X}{\partial u} \right) du + \left( F \frac{\partial X}{\partial v} - G \frac{\partial X}{\partial u} \right) dv \right] \times \\ \times \left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw \right) \end{aligned}$$

ossia da

$$-\mu = D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2 + 2M du dw + 2N dv dw, \quad (6)$$

ove  $D, D', D'', M, N$  (ed  $r_0$ ) sono funzioni note di  $u, v, w$ , definite dalle formule seguenti:

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{F}{\Delta} \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{E}{\Delta} \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}, \\ D' + \Delta r_0 &= \frac{F}{\Delta} \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{E}{\Delta} \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v}, \\ D' - \Delta r_0 &= \frac{G}{\Delta} \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{F}{\Delta} \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}, \\ D'' &= \frac{G}{\Delta} \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{F}{\Delta} \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} 2M &= \frac{F}{\Delta} \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial w} - \frac{E}{\Delta} \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w}, \\ 2N &= \frac{G}{\Delta} \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial w} - \frac{F}{\Delta} \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Chiameremo *seconda forma fondamentale* del complesso la forma differenziale quadratica ternaria (6).

Le due forme (3) e (6), per il loro significato geometrico, sono indipendenti, non solo dalla scelta delle coordinate  $u, v, w$ , ma anche dalla scelta del punto  $M$  origine di  $g$ , quindi non si alterano cambiando questo punto su  $C$ .



Dalle (7) e (8) seguono le formole inverse

$$\left. \begin{aligned} \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{E D' - F D}{\Delta} - E r_0, & \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{E D'' - F D'}{\Delta} - F r_0, \\ \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{F D' - G D}{\Delta} - F r_0, & \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{F D'' - G D'}{\Delta} - G r_0, \end{aligned} \right\} (7')$$

$$\sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial w} = 2 \frac{E N - F M}{\Delta}, \quad \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w} = 2 \frac{F N - G M}{\Delta}. \quad (8)$$

4. Or supponiamo  $du = dv = 0$ . Allora l'angolo  $ds'$  (3) di  $g$  e  $g'$  sarà nullo, a prescindere da infinitesimi di ordine superiore, e però i due raggi dovranno essere considerati come paralleli; sarà quindi anche nullo il momento  $\mu = ds' d\sigma$  ma non sarà nulla in generale la loro distanza  $d\sigma$ . In tal caso non valgono i calcoli fatti per ottenere la (6); tuttavia questa può ritenersi come valida anche in questo caso, perchè, ponendovi  $du = dv = 0$ , da  $\mu = 0$ , come dev'essere.

#### Teorema fondamentale.

5. Definito analiticamente un complesso, le formole (4), (7) e (8) permettono di calcolare i coefficienti delle due forme fondamentali (3) e (6) del complesso. Ora proponiamoci la quistione inversa: date due forme dei tipi (3) e (6), esistono complessi che le ammettono rispettivamente come prima e seconda forma fondamentale? quanti sono? come si costruiscono?

Anzitutto osserviamo che la (3), per essere prima forma fondamentale di un complesso, deve rappresentare il quadrato dell'elemento lineare della sfera di raggio 1, riferita ad un doppio sistema di coordinate curvilinee  $(u, v)$ : per ciò è necessario e sufficiente che essa sia una forma definita positiva, quindi

$$\Delta^2 = EG - F^2 > 0,$$

ed inoltre che essa abbia la curvatura eguale a  $+1$  (\*), ciò che è espresso

(\*) BIANCHI, loc. cit., § 72.

dall'eguaglianza (\*)

$$\frac{1}{2\Delta} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{F}{E\Delta} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{\Delta} \frac{\partial G}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{2}{\Delta} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{\Delta} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{F}{E\Delta} \frac{\partial E}{\partial u} \right) \right\} = 1. \quad (9)$$

Notiamo anche le altre equivalenti (\*\*)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \begin{vmatrix} 11 \\ 2 \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial u} \begin{vmatrix} 12 \\ 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 11 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 12 \\ 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 11 \\ 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 22 \\ 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 12 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 11 \\ 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 12 \\ 2 \end{vmatrix}^2 &= E, \\ \frac{\partial}{\partial u} \begin{vmatrix} 12 \\ 1 \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial v} \begin{vmatrix} 11 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 12 \\ 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 11 \\ 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 22 \\ 1 \end{vmatrix} &= F, \\ \frac{\partial}{\partial v} \begin{vmatrix} 12 \\ 2 \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial u} \begin{vmatrix} 22 \\ 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 12 \\ 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 11 \\ 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 22 \\ 1 \end{vmatrix} &= F, \\ \frac{\partial}{\partial u} \begin{vmatrix} 22 \\ 1 \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial v} \begin{vmatrix} 12 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 22 \\ 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 12 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 22 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 11 \\ 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 12 \\ 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 22 \\ 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 12 \\ 1 \end{vmatrix}^2 &= G, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ove i simboli di CHRISTOFFEL  $\begin{vmatrix} r s \\ t \end{vmatrix}^{(***)}$  si intendono formati con i coefficienti della forma (3).

È poi noto (\*\*\*\*) che, soddisfatte queste condizioni, la ricerca delle tre funzioni  $X, Y, Z$  di  $u, v$  soddisfacenti alle (4) dipende dall'integrazione di una equazione differenziale del tipo di RICCATI.

Supponiamo dunque note queste funzioni ed osserviamo che allora, non essendo nullo il determinante

$$\left. \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} & X \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} & Y \\ \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v} & Z \end{vmatrix} = \sqrt{EG - F^2} = \Delta, \right\} \quad (10)$$

è possibile determinare, ed in un sol modo, tre funzioni  $\alpha, \beta, \gamma$  di  $u, v, w$ ,

(\*) BIANCHI, loc. cit., § 43, formola (17).

(\*\*) Ibid., § 37, formole (IV).

(\*\*\*) Ibid., § 43.

(\*\*\*\*) Ibid., §§ 43, 72.

tali che risulti

$$\left. \begin{aligned} \alpha \frac{\partial X}{\partial u} + \beta \frac{\partial X}{\partial v} + \gamma X &= A, \\ \alpha \frac{\partial Y}{\partial u} + \beta \frac{\partial Y}{\partial v} + \gamma Y &= B, \\ \alpha \frac{\partial Z}{\partial u} + \beta \frac{\partial Z}{\partial v} + \gamma Z &= C, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ove  $A, B, C$  sono funzioni date di  $u, v, w$ .

Ponendo

$$A = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad B = \frac{\partial y}{\partial u}, \quad C = \frac{\partial z}{\partial u},$$

indi moltiplicando le equazioni che ne risultano per

$$\frac{\partial X}{\partial u}, \quad \frac{\partial Y}{\partial u}, \quad \frac{\partial Z}{\partial u} \quad \text{e} \quad \frac{\partial X}{\partial v}, \quad \frac{\partial Y}{\partial v}, \quad \frac{\partial Z}{\partial v}$$

e sommando, si ha per le (4) e (7)

$$E\alpha + F\beta + \gamma \sum X \frac{\partial X}{\partial u} = \frac{ED' - FD}{\Delta} - Er_0,$$

$$F\alpha + G\beta + \gamma \sum X \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{FD' - GD}{\Delta} - Fr_0;$$

intanto da

$$\sum X^2 = 1$$

segue derivando

$$\sum X \frac{\partial X}{\partial u} = \sum X \frac{\partial X}{\partial v} = 0,$$

quindi le precedenti danno

$$\alpha = \frac{D'}{\Delta} - r_0, \quad \beta = -\frac{D}{\Delta}.$$

Ponendo invece

$$A = \frac{\partial x}{\partial v}, \quad B = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad C = \frac{\partial z}{\partial v}$$

ed operando allo stesso modo, si ottiene

$$\alpha = \frac{D''}{\Delta}, \quad \beta = -\left(\frac{D'}{\Delta} + r_0\right).$$

Infine, ponendo

$$A = \frac{\partial x}{\partial w}, \quad B = \frac{\partial y}{\partial w}, \quad C = \frac{\partial z}{\partial w}$$

ed operando allo stesso modo, si trova per le (4) e (8')

$$E\alpha + F\beta = 2 \frac{EN - FM}{\Delta}, \quad F\alpha + G\beta = 2 \frac{FN - GM}{\Delta},$$

da cui

$$\alpha = 2 \frac{N}{\Delta}, \quad \beta = -2 \frac{M}{\Delta}.$$

Raccogliendo, otteniamo le formole

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \left( \frac{D'}{\Delta} - r_0 \right) \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{D}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial v} + \gamma X, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{D''}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial u} - \left( \frac{D'}{\Delta} + r_0 \right) \frac{\partial X}{\partial v} + \gamma' X, \\ \frac{\partial x}{\partial w} &= 2 \frac{N}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial u} - 2 \frac{M}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial v} + \gamma'' X, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

con le analoghe in  $y, Y$  e in  $z, Z$ . In esse  $r_0$  è funzione arbitraria di  $u, v, w$  e  $\gamma, \gamma', \gamma''$  sono tre funzioni da determinare.

Perciò formiamo le condizioni di integrabilità del sistema (12) e degli analoghi:

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial x}{\partial w} \right), \quad \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial x}{\partial w} \right) \quad (13)$$

con le analoghe in  $y$  e  $z$ .

La prima conduce ai risultati seguenti (\*):

$$\gamma = \frac{b_{112}}{\Delta} - \frac{\partial r_0}{\partial u}, \quad \gamma' = - \left( \frac{b_{221}}{\Delta} + \frac{\partial r_0}{\partial v} \right) \quad (14)$$

e

$$\frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{b_{221}}{\Delta} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{b_{112}}{\Delta} \right) \right\} = H, \quad (15)$$

ove

$$H = \frac{2FD' - ED'' - GD}{EG - F^2} \quad (16)$$

(\*) Per la dimostrazione vedi A, §§ 21, 22, 23.

e

$$\left. \begin{aligned} b_{112} &= \frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} D + \left( \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \right) D' + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} D'' \\ b_{221} &= \frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} D + \left( \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) D' - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} D'' \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

oppure

$$\left. \begin{aligned} \frac{b_{112}}{\Delta} &= \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{D}{\Delta} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{D'}{\Delta} \right) + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{D}{\Delta} - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{D'}{\Delta} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{D''}{\Delta} \\ \frac{b_{221}}{\Delta} &= \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{D''}{\Delta} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{D'}{\Delta} \right) + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{D}{\Delta} - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{D'}{\Delta} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{D''}{\Delta} \end{aligned} \right\} \quad (17')$$

La prima delle (12) dà

$$\frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{D'}{\Delta} - r_0 \right) \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{D}{\Delta} \right) \frac{\partial X}{\partial v} + X \frac{\partial \gamma}{\partial w}$$

e la terza dà

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial x}{\partial w} \right) &= 2 \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{N}{\Delta} \right) \frac{\partial X}{\partial u} - 2 \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{M}{\Delta} \right) \frac{\partial X}{\partial v} + X \frac{\partial \gamma''}{\partial u} + \\ &+ 2 \frac{N}{\Delta} \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} - 2 \frac{M}{\Delta} \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} + \gamma'' \frac{\partial X}{\partial u} \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial x}{\partial w} \right) &= \left[ 2 \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{N}{\Delta} \right) + 2 \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{N}{\Delta} - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{M}{\Delta} + \gamma'' \right] \frac{\partial X}{\partial u} + \\ &+ 2 \left[ - \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{M}{\Delta} \right) + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{N}{\Delta} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{M}{\Delta} \right] \frac{\partial X}{\partial v} + \left( \frac{\partial \gamma''}{\partial u} + 2 \frac{FM - EN}{\Delta} \right) X, \end{aligned}$$

in virtù delle identità (\*)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} &= \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial X}{\partial v} - EX, \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} &= \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial X}{\partial v} - FX, \\ \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} &= \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial X}{\partial v} - GX; \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

(\*) BIANCHI, loc. cit., § 72.

dunque la seconda delle (13) diventa

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{D'}{\Delta} - r_0 \right) - 2 \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{N}{\Delta} \right) - 2 \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \left\{ \frac{N}{\Delta} \right. + 2 \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \left\{ \frac{M}{\Delta} - \gamma'' \right\} \right] \frac{\partial X}{\partial u} + \\ & + \left[ 2 \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{M}{\Delta} \right) - \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{D}{\Delta} \right) + 2 \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \left\{ \frac{M}{\Delta} \right. - 2 \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \left\{ \frac{N}{\Delta} \right\} \right] \frac{\partial X}{\partial v} + \\ & + \left( \frac{\partial \gamma}{\partial w} - \frac{\partial \gamma''}{\partial u} - 2 \frac{FN - EN}{\Delta} \right) X = 0, \end{aligned}$$

ed in virtù delle identità (\*)

$$\frac{\partial \log \Delta}{\partial u} = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial \log \Delta}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad (19)$$

si trasforma facilmente nell'altra

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{D'}{\Delta} - r_0 \right) - \frac{2}{\Delta} \frac{\partial N}{\partial u} + 2 \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \left\{ \frac{M}{\Delta} \right. + 2 \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \left\{ \frac{N}{\Delta} - \gamma'' \right\} \right] X + \\ & + \left[ \frac{2}{\Delta} \frac{\partial M}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{D}{\Delta} \right) - 2 \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \left\{ \frac{M}{\Delta} \right. - 2 \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \left\{ \frac{N}{\Delta} \right\} \right] \frac{\partial X}{\partial v} + \\ & + \left( \frac{\partial \gamma}{\partial w} - \frac{\partial \gamma''}{\partial u} - 2 \frac{FM - EN}{\Delta} \right) X. \end{aligned}$$

Questa eguaglianza e le altre due analoghe che si ottengono cambiandovi  $X$  in  $Y$  o in  $Z$ , sono lineari ed omogenee nei coefficienti di  $\frac{\partial X}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial X}{\partial v}$ ,  $X$  col determinante (10) non nullo, e però dànno:

$$\gamma'' = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial D'}{\partial w} - \frac{\partial r_0}{\partial w} - \frac{2}{\Delta} \frac{\partial N}{\partial u} + 2 \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \left\{ \frac{M}{\Delta} \right. + 2 \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \left\{ \frac{N}{\Delta} \right\}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial D}{\partial w} = 2 \frac{\partial M}{\partial u} - 2 \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \left\{ \frac{M}{\Delta} \right. - 2 \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \left\{ \frac{N}{\Delta} \right\}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial w} - \frac{\partial \gamma''}{\partial u} = 2 \frac{FM - EN}{\Delta}. \quad (22)$$

(\*) BIANCHI, loc. cit., § 56.

Analogamente si trova che la terza delle condizioni (13) esige che sia

$$\gamma'' = -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial D'}{\partial w} - \frac{\partial r_0}{\partial w} + \frac{2}{\Delta} \frac{\partial M}{\partial v} - 2 \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} \frac{M}{\Delta} - 2 \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} \frac{N}{\Delta}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial D''}{\partial w} = 2 \frac{\partial N}{\partial v} - 2 \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} M - 2 \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} N, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \gamma''}{\partial v} - \frac{\partial \gamma'}{\partial w} = 2 \frac{FN - GM}{\Delta}. \quad (25)$$

Le (14), (15), (20), ..., (25) sono condizioni necessarie e sufficienti per la integrabilità delle (12): supponendole soddisfatte, le (12) danno mediante quadrature un'unica terna di funzioni  $x, y, z$  di  $u, v, w$  (a meno di costanti additive). Queste tre funzioni insieme con  $X, Y, Z$  definiscono completamente (§ 1) un unico complesso che ammette le forme (3) e (6) come fondamentali.

Le dette condizioni possono semplificarsi.

Presa ad arbitrio una funzione  $r_0$  di  $u, v, w$ , le (14) danno  $\gamma$  e  $\gamma'$ . Si hanno poi per  $\gamma''$  due espressioni distinte (20) e (23), le quali però debbono dare per  $\gamma''$  valori eguali, quindi dev'essere

$$\frac{\partial D'}{\partial w} = \frac{\partial M}{\partial v} + \frac{\partial N}{\partial u} - 2 \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} M - 2 \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} N. \quad (26)$$

Prendendo la semisomma delle due espressioni di  $\gamma''$ , si ha l'altra più semplice

$$\gamma'' = \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u} \right) - \frac{\partial r_0}{\partial w}. \quad (27)$$

Sostituendo i valori (14) e (27) di  $\gamma, \gamma'$  e  $\gamma''$  nelle (22) e (25), si ha

$$\frac{1}{\Delta} \frac{\partial b_{112}}{\partial w} + 2 \frac{EN - FM}{\Delta} = \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u} \right) \right], \quad (28)$$

$$- \frac{1}{\Delta} \frac{\partial b_{221}}{\partial w} + 2 \frac{FN - GM}{\Delta} = \frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u} \right) \right]. \quad (29)$$

Raccogliendo: le funzioni incognite  $\gamma, \gamma', \gamma''$  hanno i valori (14) e (27), e le relazioni che legano i coefficienti delle due forme fondamentali sono sei, cioè le (15), (21), (24), (26), (28) e (29). Ma si può dimostrare che le ultime due sono superflue, cioè deducibili dalle altre quattro. Infatti la prima delle

(17) dà

$$\frac{\partial b_{112}}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial D}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial D}{\partial w} \right) - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \end{Bmatrix} \frac{\partial D}{\partial w} + \\ + \left( \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{Bmatrix} \right) \frac{\partial D'}{\partial w} + \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{Bmatrix} \frac{\partial D''}{\partial w}$$

ossia, per le (21), (24) e (26),

$$\frac{\partial b_{112}}{\partial w} = \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 N}{\partial u^2} - \left[ \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{Bmatrix} \right] \left( \frac{\partial M}{\partial v} + \frac{\partial N}{\partial u} \right) + \\ + 2 \left[ \frac{\partial}{\partial u} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{Bmatrix} \right] M + \\ + 2 \left[ \frac{\partial}{\partial u} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{Bmatrix} \right] + \\ + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{Bmatrix}^2 - \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & \end{Bmatrix} \Big] N;$$

or si vede facilmente che questa coincide con la (28), se si tengono presenti le (9) e la prima delle (19).

Allo stesso modo si prova che la (29) si può omettere. Tuttavia la (28) e la (29) possono essere utili, come pure la seguente

$$\frac{2}{\Delta} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{FN - GM}{\Delta} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{FM - EN}{\Delta} \right) \right\} = \frac{\partial H}{\partial w}, \quad (30)$$

che si deduce derivando la (28) rispetto ad  $u$  e la (29) rispetto a  $v$ , poi sottraendole e tenendo presente la (15).

Da quanto precede raccogliamo il seguente teorema fondamentale:

*Sieno date due forme quadratiche differenziali, una con due variabili  $u$  e  $v$ , definita ed a curvatura  $+1$*

$$ds'^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad (\alpha)$$

*ed una con tre variabili  $u, v, w$  del tipo*

$$- \mu = D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2 + 2M du dw + 2N dv dw. \quad (\beta)$$

*Affinchè esista un complesso che le ammetta rispettivamente come prima e seconda forma fondamentale, è necessario e sufficiente che tra i loro coeffi-*



cienti passino le quattro relazioni seguenti :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial w} &= \frac{\partial M}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix} M - \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{Bmatrix} N, \\ \frac{\partial D'}{\partial w} &= \frac{\partial M}{\partial v} + \frac{\partial N}{\partial u} - 2 \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} M - 2 \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} N, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial D''}{\partial w} &= \frac{\partial N}{\partial v} - \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} M - \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} N, \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

$$\frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{b_{221}}{\Delta} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{b_{112}}{\Delta} \right) \right\} = H, \quad (II)$$

ove  $H$  ha il valore (15) e  $b_{112}$ ,  $b_{221}$  i valori (17) o (17').

Il complesso è unico (a prescindere da movimenti nello spazio).

Per costruirlo, basta conoscere i coseni direttori  $X, Y, Z$  di una sua retta generica in funzione di  $u, v$  e le coordinate  $x, y, z$  di un punto di questa retta in funzione di  $u, v, w$ : i primi si ottengono integrando un'equazione di RICCATI, le seconde si calcolano poi con quadrature mediante le formole

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \left( \frac{D'}{\Delta} - r_0 \right) \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{D}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial v} + \left( \frac{b_{112}}{\Delta} - \frac{\partial r_0}{\partial u} \right) X, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{D''}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial u} - \left( \frac{D'}{\Delta} + r_0 \right) \frac{\partial X}{\partial v} - \left( \frac{b_{221}}{\Delta} + \frac{\partial r_0}{\partial v} \right) X, \\ \frac{\partial x}{\partial w} &= 2 \frac{N}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial u} - 2 \frac{M}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial v} + \left[ \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u} \right) - \frac{\partial r_0}{\partial w} \right] X \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

e le analoghe in  $y, Y$  e in  $z, Z$ , dove  $r_0$  è una funzione arbitraria di  $u, v, w$ .

Le  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  posson ben chiamarsi le equazioni intrinseche del complesso che individuano. Noi d'ora innanzi supporremo sempre che un complesso sia definito dalle sue equazioni intrinseche; quindi esprimeremo tutti gli elementi geometrici che incontreremo mediante i coefficienti di esse e le loro derivate, ed ogni particolare proprietà di un complesso la tradurremo in una o più eguaglianze tra i detti coefficienti e le loro derivate, distinte dalle relazioni fondamentali (I) e (II).

### Direzioni di spazio rigato.

6. Consideriamo due raggi infinitamente vicini del complesso

$$g(u, v, w), \quad g'(u + du, v + dv, w + dw)$$

e supponiamo che non sia  $du = dv = 0$ .

Il piano  $\Pi$  determinato da  $g$  e dalla direzione della minima distanza  $d\sigma$  tra  $g$  e  $g'$  si chiama *piano centrale* di  $g$  relativo a  $g'$ , ed il punto  $Q$  ove  $d\sigma$  incontra  $g$  *punto centrale* di  $g$  relativo a  $g'$ . Essi sono piano e punto centrale di  $g$  per ogni superficie rigata passante per  $g$  e  $g'$ , e  $Q$  è un punto della *linea di stringimento* per ognuna di tali rigate. È noto che queste sono tutte *raccordate* lungo  $g$  (ossia si toccano in tutti i punti di  $g$ ): il piano tangente comune, nel punto  $Q$  è il piano centrale, ed in ogni altro punto di  $g$  è quello determinato dalla nota di legge di HAMILTON (\*) sulla *distribuzione dei piani tangenti*

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{t}{p}, \quad (31)$$

ove  $t$  è l'ascissa del punto rispetto al punto centrale  $Q$ ,  $\Psi$  è l'angolo che il piano tangente corrispondente fa col piano centrale  $\Pi$ , e  $p$  è il *parametro distributore*

$$p = \frac{d\sigma}{ds'}. \quad (32)$$

Se  $p = 0$ ,  $g$  e  $g'$  si incontrano nel punto centrale  $Q$ , il piano tangente è stazionario lungo  $g$  ed è il piano  $gg'$ , perpendicolare al piano centrale (salvo nel punto  $Q$  ove è indeterminato); allora le rigate passanti per  $g$  e  $g'$  si comportano in  $g$  come superficie sviluppabili.

In ogni caso il piano tangente nel punto all'infinito di  $g$ , *piano asintoto* di  $g$  relativo a  $g'$ , è perpendicolare al piano centrale. Se  $p = 0$ , esso è il piano  $gg'$ .

---

(\*) Questa legge è comunemente attribuita a CHASLES; ma in realtà fu data per la prima volta da HAMILTON, come ha fatto osservare il prof. SEGRE nella Nota: *Monge e le congruenze generali di rette* (Biblioteca Matematica, 1907-8, pag. 321).

La corrispondenza tra i punti e i piani di  $g$  determinata dalla legge di HAMILTON è una proiezione (di CHASLES). Se  $p = 0$ , essa è degenera col punto singolare  $g g' \equiv Q$  e col piano singolare  $g g'$ .

7. Il piano centrale di  $g$  relativo a  $g'$  è individuato dal fatto che esso passa per  $g$  e contiene la direzione di  $d\sigma$ , i cui coseni direttori (5) sono noti. Il parametro distributore  $p$  (32) è misurato dal rapporto cambiato di segno delle due forme fondamentali del complesso

$$p = - \frac{D d u^2 + 2 D' d u d v + D'' d v^2 + 2 M d u d w + 2 N d v d w}{E d u^2 + 2 F d u d v + G d v^2}. \quad (33)$$

Finalmente per costruire il punto centrale  $Q$ , basta conoscere la sua ascissa  $r$  rispetto all'origine  $M(x, y, z)$  di  $g$ , la quale è (A, § 13)

$$r = - \frac{\sum d x d X}{\sum d X^2};$$

quindi, introducendo le variabili  $u, v, w$  e ricordando le formole (2), (3), (7) e (8'), si ha

$$r - r_0 = \left. \begin{aligned} & \frac{(F D - E D') d u^2 + (G D - E D'') d u d v + (G D' - F D'') d v^2}{\Delta (E d u^2 + 2 F d u d v + G d v^2)} + \\ & + 2 \frac{(F M - E N) d u + (G M - F N) d v}{\Delta (E d u^2 + 2 F d u d v + G d v^2)} d w. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Questa formola dà precisamente la distanza  $r - r_0$  del punto centrale  $Q$  da un certo punto di  $g$  di ascissa  $r_0$ , del quale diremo in seguito il significato geometrico (§ 12).

8. È facile dare una formola per il calcolo dell'angolo di due piani passanti per  $g$  e che sieno i piani centrali di  $g$  relativi rispettivamente a due raggi infinitamente vicini

$$g'(u + d u, v + d v, w + d w), \quad g''(u + \delta u, v + \delta v, w + \delta w).$$

Infatti quest'angolo è eguale a quello formato dalle direzioni delle minime distanze  $d\sigma$  e  $\delta\sigma$  di  $g$  da  $g'$  e  $g''$ ; ma  $d\sigma$  e  $\delta\sigma$  sono rispettivamente ortogonali ai corrispondenti elementi lineari sferici  $d s'$  e  $\delta s'$ , e tutte e quattro sono ortogonali a  $g$ , quindi l'angolo di  $d\sigma$  e  $\delta\sigma$  è eguale a quello di  $d s'$  e

$\delta s'$ ; dunque (\*)

$$\cos(d\sigma, \delta\sigma) = \frac{E du \delta u + F(du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{\sqrt{(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)(E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2)}}. \quad (35)$$

In particolare, l'angolo  $\omega$  dei piani centrali di  $g$  relativi alle rigate coordinate  $u$  e  $v$  passanti per  $g$  è dato dalle formole

$$\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \text{sen } \omega = \frac{\Delta}{\sqrt{EG}}. \quad (36)$$

Ancora: l'angolo  $\theta$ , compreso fra  $0^\circ$  e  $360^\circ$ , che il piano centrale  $\Pi$  di una rigata qualunque passante per  $g$  e  $g'$  fa con quello della rigata  $u$  passante per  $g$  è dato dalle formole

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{E}} \left( E \frac{du}{ds'} + F \frac{dv}{ds'} \right), \quad \text{sen } \theta = \frac{\Delta}{\sqrt{E}} \cdot \frac{dv}{ds'}. \quad (37)$$

Notiamo anche le formole inverse

$$\frac{du}{ds'} = \frac{\Delta \cos \theta - F \text{sen } \theta}{\Delta \sqrt{E}}, \quad \frac{dv}{ds'} = \frac{\sqrt{E}}{\Delta} \text{sen } \theta. \quad (37')$$

9. Or supponiamo che sia  $du = dv = 0$ . Allora i raggi  $g(u, v, w)$  e  $g'(u, v, w + dw)$  sono paralleli (§ 3), il piano centrale  $\Pi$  di  $g$  relativo a  $g'$  è il piano  $gg'$  ed è anche piano tangente in tutti i punti di  $g$  di tutte le rigate passanti per  $g$  e  $g'$ , rigate che si comportano in  $g$  come cilindri. Il parametro distributore  $p$  è infinito, il punto centrale  $Q$  è indeterminato.

10. Tutte le curve dello spazio passanti per un punto  $P$  e per un punto infinitamente vicino  $P'$  hanno a comune in  $P$  la tangente o, come suol dirsi, la *direzione*.

Tutte le rigate passanti per una retta  $g$  e per una retta infinitamente vicina  $g'$  hanno a comune in  $g$  tutti gli elementi geometrici da noi ricordati nel § 6. Per analogia si suol dire che esse hanno a comune in  $g$  la *direzione di spazio rigato*, la quale *passa* per  $g$ .

Per ogni raggio di una superficie rigata passa in generale una sola direzione di spazio rigato che *appartiene alla rigata*, per ogni raggio di una

(\*) BIANCHI, loc. cit., § 42,

congruenza passano in generale  $\infty^1$  direzioni appartenenti alla congruenza, per ogni raggio di un complesso passano in generale  $\infty^2$  direzioni appartenenti al complesso.

Fissata una direzione di spazio rigato passante per un raggio  $g$  di un complesso ed appartenente al complesso, ossia fissata una retta  $g'$  infinitamente vicina a  $g$  nel complesso, sono noti il piano centrale  $\Pi$  (e quindi l'angolo  $\theta$  che esso fa col piano centrale della rigata  $u$  passante per  $g$ ), il punto centrale  $Q$  (e quindi la sua ascissa  $r$  rispetto al punto  $M$  origine di  $g$ ), ed il parametro distributore  $p$ . Per determinarli basta applicare le formole (37), (33) e (34).

Viceversa, noti  $\theta$ ,  $r$  e  $p$ , son noti il piano centrale  $\Pi$ , il punto centrale  $Q$  ed in generale tutti gli elementi geometrici indicati nel § 6, ossia è nota una direzione di spazio rigato passante per  $g$ .

Chiameremo perciò *coordinate* della direzione considerata i tre numeri  $\theta$ ,  $r$ ,  $p$  e la direzione stessa la indicheremo con  $(\theta, r, p)$ .

Tutto ciò non vale se  $du = dv = 0$ , ossia se  $g$  e  $g'$  sono paralleli (§§ 3 e 9). In tal caso diremo che  $g$  e  $g'$  determinano una *direzione singolare cilindrica* passante per  $g$ .

Diremo poi *direzione singolare conica* (o *direzione singolare* senz'altro) una direzione individuata da due raggi vicini incidenti; per essa è  $p = 0$ .

### Congruenze del complesso.

11. Una congruenza non cilindrica (§ 2) è individuata da due forme differenziali quadratiche binarie, dette *prima* e *seconda forma fondamentale* della congruenza: la prima rappresenta il quadrato dell'angolo di due raggi infinitamente vicini della congruenza, la seconda rappresenta il momento dei medesimi raggi ( $A$ , §§ 2, 4 e 21).

Data l'equazione della congruenza (§ 2)

$$w = w(u, v), \quad (38)$$

le due forme si otterranno da quelle ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) del complesso, sostituendo in essa a  $w$  e a  $dw$  le loro espressioni (38) e

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv.$$

Ma la forma  $(\alpha)$  non dipende da  $w$  e  $dw$ , dunque: *tutte le congruenze non cilindriche di un complesso hanno a comune la prima forma fondamentale, che è anche quella  $(\alpha)$  del complesso.*

Ne segue che: *una qualunque congruenza non cilindrica di un complesso assegnato è individuata dalla sua seconda forma fondamentale.*

12. Così una congruenza coordinata  $w$  è individuata dalla sua seconda forma fondamentale

$$D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2, \quad (39)$$

che si ottiene dalla  $(\beta)$  ponendovi per  $w$  quel valore che è costante lungo la congruenza considerata e ponendo  $dw = 0$ .

I coefficienti delle due forme  $(\alpha)$  e (39) della congruenza  $w$  sono legati da un'unica relazione che è la (II) (A, § 21).

Le formole (33) e (34) diventano

$$r - r_0 = \frac{(FD - ED') du^2 + (GD - ED'') du dv + (GD' - FD'') dv^2}{\Delta (E du^2 + 2F du dv + G dv^2)}, \quad (40)$$

$$p = - \frac{D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \quad (41)$$

ed insieme con le (37) dànno le coordinate  $\theta, r, p$  delle  $\infty^1$  direzioni di spazio rigato passanti pel raggio  $g(u, v, w)$  della congruenza  $w$  ed appartenenti alla congruenza.

$r_0$  è l'ascissa del *punto medio* di  $g$  nella congruenza  $w$ . (A, § 14.)

$r$  può variare tra due valori estremi ai quali corrispondono due punti fissi di  $g$  detti *punti limiti*, quindi il punto centrale  $Q$  delle  $\infty^1$  direzioni passanti per  $g$  ed appartenenti alla congruenza  $w$  non può uscire dal segmento compreso fra questi due punti.

Anche  $p$  ammette un massimo ed un minimo assoluti  $p_1$  e  $p_2$ , la cui somma è il *parametro medio*  $H$  (16) ed il cui prodotto è il *parametro assoluto*

$$K = \frac{D D'' - D'^2}{E G - F^2} \quad (42)$$

della congruenza  $w$  in  $g$ .

Su  $g$  vi sono due punti, detti *fuochi*, nei quali si toccano tutte le rigate passanti per  $g$  ed appartenenti alla congruenza  $w$ . Essi sono simmetricamente posti rispetto al punto medio di  $g$  e distano da questo punto di  $\pm \sqrt{-K}$ ; quindi essi sono o reali e distinti, o reali e coincidenti, o complessi-coniugati,

secondo che in  $g$  è

$$K < = > 0.$$

$g$  si chiama rispettivamente un raggio *iperbolico*, *parabolico*, *ellittico* della congruenza  $w$ .

Senza insistere più oltre, possiamo asserire che tutte le formole della Memoria  $A$  sono integralmente applicabili ad una congruenza  $w$  del complesso.

13. Più generalmente: una congruenza del complesso di equazione (38) è individuata dalla sua seconda forma fondamentale

$$\left(D + 2M \frac{\partial w}{\partial u}\right) du^2 + 2\left(D' + M \frac{\partial w}{\partial v} + N \frac{\partial w}{\partial u}\right) du dv + \left(D'' + 2N \frac{\partial w}{\partial v}\right) dv^2, \quad (43)$$

e tutte le formole della Memoria  $A$  sono applicabili ad essa, purchè in quelle formole si sostituiscano  $D$ ,  $2D'$ ,  $D''$  con i coefficienti della (43).

14. Per applicare le cose precedenti, proponiamoci di cercare le superficie le cui normali sono raggi di un complesso assegnato. Questa ricerca fu posta per la prima volta da MALUS e poi ripresa da TRANSON nel 1861 (\*).

Osserviamo che essa equivale all'altra di cercare le congruenze normali di un complesso, e che una congruenza è normale solo quando è nullo il suo paramedio medio  $H$  ( $A$ , § 19). Basta dunque eguagliare a zero il numeratore dell'espressione (16) di  $H$ , in cui al posto di  $D$ ,  $2D'$ ,  $D''$  si sieno sostituiti i coefficienti della (43), per ottenere l'equazione differenziale delle congruenze normali di un complesso:

$$2(FN - GM) \frac{\partial w}{\partial u} + 2(FM - EN) \frac{\partial w}{\partial v} + (2FD' - ED'' - GD) = 0. \quad (44)$$

Questa è lineare nelle derivate parziali prime della funzione incognita  $w$  di  $u$ ,  $v$ , quindi: in un complesso vi sono sempre infinite congruenze normali (dipendenti da una funzione arbitraria).

Ogni soluzione della (44) contenente una costante arbitraria definisce una famiglia di  $\infty^1$  congruenze normali del complesso, tali che per ogni raggio del complesso (o di una sua regione) ne passa una, in generale; quindi possiamo dire col TRANSON che: ogni complesso può sempre spartirsi in  $\infty^1$  congruenze normali (ed in infiniti modi).

Nota una congruenza normale (38) del complesso, e quindi note le sue

---

(\*) *Journal de l'École Polytechnique*, 38.<sup>o</sup> cahier, pag. 195.

due forme fondamentali  $(\alpha)$  e (43), per costruire le  $\infty^1$  superficie parallele ortogonali ai suoi raggi, basta applicare il procedimento spiegato in *A*, § 27.

Ricordiamo per finire che il DARBOUX in due recenti *Note* (\*) ha dimostrato un teorema notevole, da lui enunciato fin dal 1870 (\*\*): *se si conosce una prima famiglia di superficie che ammettono come normali le rette di un complesso, si possono determinare tutte le altre senza integrazione.*

15. Altre superficie notevoli, cercate dal KLEIN (\*\*\*), son quelle le cui tangenti alle asintotiche di un sistema sono rette di un complesso assegnato.

La ricerca di queste superficie equivale a quella delle *congruenze paraboliche* del complesso (*A*, § 17) le quali sono caratterizzate dall'annullarsi del parametro assoluto  $K$ . Dunque eguagliando a zero il numeratore dell'espressione (42) di  $K$ , dopo aver sostituito a  $D$ ,  $2D'$ ,  $D''$  i coefficienti della (43), si ottiene *l'equazione differenziale delle congruenze paraboliche di un complesso*:

$$\left( M \frac{\partial w}{\partial v} - N \frac{\partial w}{\partial u} \right)^2 + 2(D'N - DM) \frac{\partial w}{\partial u} + 2(D'M - D''N) \frac{\partial w}{\partial v} = DD'' - D'^2. \quad (45)$$

Le superficie richieste sono le superficie focali (a falde coincidenti) di queste congruenze, e però si costruiscono come è spiegato in *A*, § 24 (\*\*\*\*).

### Superficie rigate del complesso.

16. Una superficie rigata del complesso è determinata dalle sue equazioni finite

$$\varphi(u, v, w) = 0, \quad \psi(u, v, w) = 0$$

oppure dalle sue equazioni differenziali

$$\frac{du}{U} = \frac{dv}{V} = \frac{dw}{W}$$

(\*) *Comptes Rendus*, 15 e 22 novembre 1909.

(\*\*) *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1870, pag. 348.

(\*\*\*) *Mathematische Annalen*, tom. V.

(\*\*\*\*) Altre congruenze notevoli di un complesso (ricercate dal COSSERAT) sono le *isotrope* del RIBAUCOUR; per ora non ce ne occuperemo, perchè si può dimostrare (cfr. ZINDLER, loc. cit., pag. 195) che non esistono in un complesso generico



(ove  $U, V, W$  sono funzioni note di  $u, v, w$ ) e dalla conoscenza di uno dei raggi per cui passa.

Essa determina in ciascuno dei suoi raggi una direzione di spazio rigato appartenente al complesso, le cui coordinate  $\theta, r, p$  si ottengono dalle (33), (34) e (37) sostituendovi a  $du, dv, dw$  le quantità proporzionali  $U, V, W$ . In particolare la (33) permette di costruire il punto centrale  $Q$  di ciascun raggio ed il cui luogo è la linea di stringimento della rigata.

La rigata è sviluppabile se risulta  $p = 0$ , quindi l'equazione differenziale delle superficie sviluppabili del complesso è

$$Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2 + 2Mdu dw + 2Ndv dw = 0. \quad (46)$$

Essa è soddisfatta dalle rigate  $w$ , ossia dagli  $\infty^2$  cilindri del complesso. Ponendovi  $w = w(u, v)$ , ossia eguagliando a zero la forma (43), si ha in particolare l'equazione differenziale dei due sistemi  $\infty^1$  di sviluppabili contenuti nella congruenza (38).

Gli spigoli di regresso delle sviluppabili si chiamano *curve del complesso*, perchè generate come involuppi di raggi del complesso.

Consideriamo una di tali curve  $C$  e la tangente  $g$  in un suo punto  $Q$ . Il cono del complesso che ha per vertice  $Q$  (§ 1) conterrà  $g$  come generatrice: il piano tangente al cono lungo  $g$  è il piano osculatore di  $C$  nel punto  $Q$ . Infatti  $Q$  si può considerare come intersezione della tangente  $g$  alla curva con la tangente successiva; il piano di queste due rette è il piano osculatore di  $C$  nel punto  $Q$  e d'altra parte, come piano di due generatrici successive del cono di vertice  $Q$ , è piano tangente al cono lungo  $g$ .

### Ancora sulle direzioni.

17. Diremo *raggi bisingolari* del complesso quei raggi nei quali risulta  $M = N = 0$ . Fino a dichiarazione contraria (§ 25) li escluderemo dalle nostre considerazioni.

Sia  $g(u, v, w)$  un raggio del complesso. Le direzioni di spazio rigato appartenenti al complesso e passanti per  $g$  sono  $\infty^2$ , perchè le coordinate  $\theta, r, p$  di una direzione (§ 10) dipendono dai rapporti di due delle quantità  $du, dv, dw$  alla terza; quindi fra queste coordinate dovrà passare una relazione.

Per cercarla, poniamo per semplicità

$$\frac{du}{ds'} = u_1, \quad \frac{dv}{ds'} = v_1, \quad \frac{dw}{ds'} = w_1 \quad (47)$$

e riprendiamo le formole (33) e (34):

$$\begin{aligned} -p &= D u_1^2 + 2 D' u_1 v_1 + D'' v_1^2 + 2 (M u_1 + N v_1) w_1, \\ r - r_0 &= \frac{(F D - E D') u_1^2 + (G D - E D'') u_1 v_1 + (G D - F D'') v_1^2}{\Delta} + \\ &+ 2 \frac{(F M - E N) u_1 + (G M - F N) v_1}{\Delta} w_1. \end{aligned}$$

Eliminando  $w_1$ , otteniamo

$$\begin{aligned} [(E N - F M) u_1 + (F N - G M) v_1] p - \Delta (M u_1 + N v_1) (r - r_0) &= \\ = (D u_1^2 + 2 D' u_1 v_1 + D'' v_1^2) [(F M - E N) u_1 + (G M - F N) v_1] - \\ - [(F D - E D') u_1^2 + (G D - E D'') u_1 v_1 + (G D - F D'') v_1^2] (M u_1 + N v_1); \end{aligned}$$

ma il secondo membro si può scrivere

$$[(D' M - D N) u_1 + (D'' M - D' N) v_1] (E u_1^2 + 2 F u_1 v_1 + G v_1^2)$$

ossia

$$(D' M - D N) u_1 + (D'' M - D' N) v_1,$$

perchè dalle ( $\alpha$ ) e (47) si ha

$$E u_1^2 + 2 F u_1 v_1 + G v_1^2 = 1;$$

dunque

$$\begin{aligned} [(E N - F M) u_1 + (F N - G M) v_1] p - \Delta (M u_1 + N v_1) (r - r_0) &= \\ = (D' M - D N) u_1 + (D'' M - D' N) v_1 \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} [(F N - F M) du + (F N - G M) dv] p - \Delta (M du + N dv) (r - r_0) &= \\ = (D' M - D N) du + (D'' M - D' N) dv \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} [(F N - F M) du + (F N - G M) dv] p - \Delta (M du + N dv) (r - r_0) = \\ = (D' M - D N) du + (D'' M - D' N) dv \end{aligned}} \right\} (48)$$

ed infine, per le (37'),

$$\begin{aligned} [(E N - F M) \cos \theta - \Delta M \sin \theta] p - \\ - [(E N - F M) \sin \theta + \Delta M \cos \theta] (r - r_0) &= \\ = (D' M - D N) \cos \theta + \frac{1}{\Delta} [(E D'' - F D') M + (F D - E D') N] \sin \theta. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} [(E N - F M) \cos \theta - \Delta M \sin \theta] p - \\ - [(E N - F M) \sin \theta + \Delta M \cos \theta] (r - r_0) = \\ = (D' M - D N) \cos \theta + \frac{1}{\Delta} [(E D'' - F D') M + (F D - E D') N] \sin \theta. \end{aligned}} \right\} (48')$$

La (48) o (48') è la relazione che lega le coordinate  $\theta, r, p$  di una direzione generica di spazio rigato passante per il raggio  $g(u, v, w)$  ed appartenente al complesso.

Fanno eccezione le direzioni singolari cilindriche. Per esse infatti è  $du = dv = 0$  (§ 10), quindi la (48) svanisce. Se si vuole, si può dire che per esse la (48') è sostituita dall'altra  $p = \infty$  (§ 9).

18. La (48') permette di calcolare una delle tre coordinate  $\theta, r, p$  quando son date le altre due, almeno in generale; dunque: *in generale una direzione di spazio rigato (non singolare cilindrica) passante per un raggio del complesso ed appartenente al complesso è individuata dai valori di due qualunque delle sue coordinate, assegnabili ad arbitrio.*

Vi sono però delle direzioni eccezionali.

a). *Fissato  $\theta$  ad arbitrio, si può assegnare anche ad  $r$  un valore arbitrario (ed allora  $p$  è individuato), a meno che sia*

$$(FM - EN) du + (FN - GM) dv - 0 \quad (49)$$

cioè

$$(EN - FM) \cos \theta - \Delta M \sin \theta = 0. \quad (49')$$

Nel caso escluso, ossia se a  $\theta$  si dà il valore  $\theta_1$  definito dalle formole

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta_1 &= \frac{\Delta M}{\sqrt{E(GM^2 - 2FMN + EN^2)}}, \\ \sin \theta_1 &= \frac{EN - FM}{\sqrt{E(GM^2 - 2FMN + EN^2)}}, \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

$r$  non può assumere che un unico valore  $r_1$  definito da

$$r_1 - r_0 = \frac{(FD'' - GD')M^2 + (GD - ED'')MN + (ED' - FD)N^2}{\Delta(GM^2 - 2FMN + EN^2)}, \quad (51)$$

come risulta dalla (48'), mentre che  $p$  rimane completamente arbitrario.

L'angolo  $\theta_1$  individua un piano  $\Pi_1$  e l'ascissa  $r_1$  un punto  $Q_1$  di  $g$  (\*).

---

(\*) Si osservi che le formole (50), (51) e le seguenti (53) e (54) hanno sempre un significato. Infatti, essendo  $EG - F^2 > 0$ , la forma quadratica in  $M$  ed  $N$

$$GM^2 - 2FMN + EN^2$$

è essenzialmente positiva, e quindi si annulla solo nei raggi nei quali è  $M = N = 0$ , da noi espressamente esclusi,

Essi sono rispettivamente piano centrale e punto centrale comuni ad  $\infty^1$  direzioni di spazio rigato passanti per  $g$ , ossia alle direzioni  $(\theta_1, r_1, p)$  con  $p$  arbitrario.

b). Fissato  $\theta$  ad arbitrio, si può assegnare anche a  $p$  un valore arbitrario (ed allora  $r$  è individuata), a meno che sia

$$M du + N dv = 0 \quad (52)$$

cioè

$$(EN - FM) \sin \theta + \Delta M \cos \theta = 0. \quad (52')$$

Nel caso escluso, ossia se a  $\theta$  si dà il valore  $\theta'_1$  definito dalle formole

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta'_1 &= \frac{FM - EN}{\sqrt{E(GM^2 - 2FMN + EN^2)}}, \\ \sin \theta'_1 &= \frac{\Delta M}{\sqrt{E(GM^2 - 2FMN + EN^2)}} \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

$p$  non può assumere che l'unico valore

$$p_1 = - \frac{D'M^2 - 2D'MN + DN^2}{GM^2 - 2FMN + EN^2}, \quad (54)$$

come risulta dalla (48'), mentre che  $r$  rimane completamente arbitraria.

L'angolo  $\theta'_1$  definisce un piano  $\Pi'_1$  di  $g$ :  $\Pi'_1$  e  $p_1$  sono piano centrale e parametro distributore comuni a  $\infty^1$  direzioni di spazio rigato passanti per  $g$ , ossia alle direzioni  $(\theta'_1, r, p_1)$  con  $r$  arbitraria.

c). Dati ad arbitrio  $p$  ed  $r$ ,  $\theta$  è individuato (a meno di  $180^\circ$ ), purchè non sia

$$\left. \begin{aligned} (EN - FM)p - \Delta M(r - r_0) &= D'M - DN, \\ (FN - GM)p - \Delta N(r - r_0) &= D''M - D'N. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Risolvendo il sistema (55), si trova che

$$p = p_1, \quad r = r_1,$$

ove  $p_1$  ed  $r_1$  hanno i valori (54) e (51); attribuendo a  $p$  e ad  $r$  questi valori, la (48') risulta identicamente soddisfatta, cioè qualunque sia  $\theta$ .

Dunque il punto  $Q_1$  di  $g$  e  $p_1$  sono punto centrale e parametro distributore comuni ad  $\infty^1$  direzioni di spazio rigato passanti per  $g$ , ossia alle direzioni  $(\theta, r_1, p_1)$ , ove  $\theta$  è arbitrario.

19. La discussione precedente ci ha condotti a distinguere, fra le  $\infty^2$  direzioni di spazio rigato passanti per un raggio del complesso ed appartenenti al complesso, tre sistemi di  $\infty^1$  direzioni speciali

$$(\theta_1, r_1, p), \quad (\theta'_1, r, p_1), \quad (\theta, r_1, p_1) \quad (56)$$

ed a considerare un certo punto  $Q_1$  e certi due piani  $\Pi_1$  e  $\Pi'_1$  di  $g$ .

Dalle (50) e (53) segue che

$$\theta_1 - \theta'_1 \equiv 90^\circ \pmod{180^\circ}$$

ossia che *i piani  $\Pi_1$  e  $\Pi'_1$  sono perpendicolari fra loro.*

Ne segue che i piani  $\Pi_1$  e  $\Pi'_1$ , mentre son piani centrali rispettivamente delle direzioni dei primi due sistemi (56), sono anche piani asintoti di questi sistemi invertiti. Segue pure che i primi due sistemi non possono avere alcuna direzione a comune, mentre che il primo e il terzo sistema hanno a comune la direzione  $(\theta_1, r_1, p_1)$ , il secondo ed il terzo la direzione  $(\theta'_1, r_1, p_1)$ .

Nel primo sistema vi è sempre una direzione singolare (§ 10), cioè la  $(\theta_1, r_1, 0)$ . Invece nessuna direzione degli altri due sistemi è singolare in un raggio generico del complesso; ma sono tutte singolari nei raggi nei quali risulta  $p_1 = 0$ .

I raggi nei quali è  $p_1 = 0$  li diremo *raggi singolari* del complesso.

Dal § 18, a) segue che ogni piano  $\Pi$  passante per  $g$  si può associare con ogni punto  $Q$  di  $g$ : essi sono piano centrale e punto centrale di *una sola* direzione di spazio rigato passante per  $g$  ed appartenente al complesso. Fa eccezione il solo piano  $\Pi_1$  il quale non può associarsi che col punto  $Q_1$ :  $\Pi_1$  e  $Q_1$  determinano, non una, ma  $\infty^1$  direzioni, cioè le  $(\theta_1, r_1, p)$ .

Circa il piano  $\Pi'_1$  si può osservare che *esso è il piano tangente lungo  $g$  al cono del complesso che ha per vertice  $Q_1$ .* Infatti  $\Pi'_1$  è piano asintoto di ogni direzione del sistema  $(\theta_1, r_1, p)$  ed in particolare della direzione singolare  $(\theta_1, r_1, 0)$ , quindi esso è piano osculatore in  $Q_1$  allo spigolo di regresso di una qualunque sviluppabile del complesso passante per  $g$  ed avente in  $g$  la direzione  $(\theta_1, r_1, 0)$ ; da ciò si deduce l'enunciato, se si tien presente l'osservazione fatta in fine del § 16.

20. La relazione (48') si può porre sotto la forma più semplice

$$p = r \operatorname{tg} \alpha - n \quad (57)$$

data per la prima volta dal KOENIGS (loc. cit.), ove  $\alpha$  è un angolo che varia con la direzione che si considera ed  $n$  è una costante.

Escludendo le direzioni  $(\theta_1, r_1, p)$ , ossia supponendo che la (49) non si verifichi, si può dare alla (48) la forma voluta, ponendo

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta (M du + N dv)}{(EN - FM) du + (FN - GM) dv}, \quad (58)$$

$$n = \frac{\Delta (M du + N dv) r_0 - (D' M - D N) du - (D'' M - D' N) dv}{(EN - FM) du + (FN - GM) dv} \quad (59)$$

e disponendo del punto  $M$  origine di  $g$  (e quindi di  $r_0$ ) in modo che  $n$  risulti costante, ossia indipendente da  $du : dv$ . Ciò si ottiene ponendo

$$\begin{vmatrix} \Delta M r_0 - (D' M - D N) & EN - FM \\ \Delta N r_0 - (D'' M - D' N) & FN - GM \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$r_0 = \frac{(GD' - FD'') M^2 + (ED'' - GD) MN + (FD - ED') N^2}{\Delta (GM^2 - 2FMN + EN^2)}. \quad (60)$$

Sostituendo nella (59) (ove ora è lecito porre anzitutto  $du = 0$  o  $dv = 0$ ), si ha

$$n = \frac{D'' M^2 - 2D' MN + D N^2}{G M^2 - 2F MN + E N^2} \quad (61)$$

ossia, per la (54),

$$n = -p_1. \quad (61')$$

Il valore trovato (60) per  $r_0$  è la distanza del punto medio del raggio nella congruenza  $w$  che vi passa dal punto  $M$  origine del raggio (§ 12); ma esso coincide, a parte il segno, col secondo membro della (51), che è la distanza del punto  $Q_1$  dal detto punto medio, dunque l'origine  $M$  da noi poc'anzi fissata non è altro che il punto  $Q_1$ . Per ripristinare l'arbitrarietà dell'origine  $M$  di  $g$ , basta cambiare nella (57)  $r$  in  $r - r_1$ .

D'altra parte la (58), in virtù delle (37'), può scriversi

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(EN - FM) \operatorname{sen} \theta + \Delta M \cos \theta}{(EN - FM) \cos \theta - \Delta M \operatorname{sen} \theta}$$

ossia, per le (50),

$$\operatorname{tg} \alpha = \cot(\theta - \theta_1).$$

Raccogliendo, otteniamo che: *le coordinate  $\theta, r, p$  di una direzione di spazio rigato passante per un raggio del complesso ed appartenente al com-*

plesso sono legate dalla relazione

$$p - p_1 = (r - r_1) \cot(\theta - \theta_1). \quad (62)$$

Per la dimostrazione, abbiamo escluse le direzioni  $(\theta_1, r_1, p)$ ; tuttavia la (62) può ritenersi valida anche per esse. Infatti per  $r = r_1$  e  $\theta = \theta_1$  il secondo membro non ha alcun valore determinato, quindi la (62), illecitamente applicata, non dà per  $p$  alcun valore determinato: e ciò deve appunto accadere, secondo il § 18, a).

Le costanti  $\theta_1, r_1, p_1$  che compaiono nella (62) sono le coordinate di una tra queste  $\infty^1$  direzioni.

21. Gli elementi geometrici  $\Pi_1, \Pi'_1, \theta_1, p_1$  da noi incontrati si collegano con un importante elemento introdotto dal KOENIGS (loc. cit.).

Una direzione di spazio rigato qualunque passante per una retta  $g$  determina, in virtù della (31), una proiettività (di CHASLES) tra i punti e i piani di  $g$ ; e viceversa.

Le  $\infty^2$  direzioni di spazio rigato passanti per un raggio  $g$  di un complesso ed appartenenti al complesso determinano quindi su  $g$  altrettante proiettività di CHASLES. Si dimostra che queste costituiscono una rete, e però sono armoniche o involutorie con una proiettività fissa su  $g$ , alla quale il KOENIGS ha dato il nome di *proiettività normale* della retta  $g$  del complesso. Questa determina a sua volta una direzione di spazio rigato passante per  $g$ : orbene si può dimostrare che questa direzione, con le nostre notazioni è la  $(\theta'_1, r_1, -p_1)$  (\*).

Essa ha per piano centrale  $\Pi'_1$ , quindi per piano asintoto  $\Pi_1$ , ha per punto centrale  $Q_1$  e per parametro distributore  $-p_1$  ossia  $n$  (61'). Noi perciò chiameremo  $\Pi_1$  *piano asintoto normale*,  $\Pi'_1$  *piano centrale normale*,  $Q_1$  *punto centrale normale*,  $-p_1 = n$  *parametro (distributore) normale di  $g$* .

Osserviamo che la direzione  $(\theta'_1, r_1, -p_1)$  individuata dalla *proiettività normale appartiene al complesso soltanto se  $g$  è raggio singolare del complesso, ed allora essa è singolare*. Infatti essa ha per piano centrale  $\Pi'_1$ , quindi per appartenere al complesso dev'essere compresa tra quelle del sistema  $(\theta'_1, r, p_1)$  (§ 18, b); ciò può accadere solo se è  $-p_1 = p_1 = 0$ , ossia se  $g$  è raggio singolare (§ 19); ed allora essa è singolare (§ 10).

---

(\*) Per ciò basta paragonare la (62) con la formola analoga del KOENIGS (loc. cit., pag. 59) e tener conto del significato geometrico delle costanti che compaiono in questa.

22. Per dare un'immagine sensibile del modo di comportarsi delle direzioni di spazio rigato appartenenti al complesso e passanti per un raggio  $g$ , faremo una rappresentazione geometrica.

Sia  $(\theta, r, p)$  una qualunque di esse:  $\theta$  è l'angolo che il suo piano centrale  $\Pi$  fa con quello della rigata  $u$  passante per  $g$ ,  $r$  è l'ascissa del suo punto centrale  $Q$  rispetto all'origine  $M$  di  $g$ , ossia del piede della minima distanza  $d\sigma$  fra  $g$  ed il raggio infinitamente vicino  $g'$  corrispondente alla direzione considerata (§§ 6 e 10).

A partire da  $Q$  portiamo nella direzione di  $d\sigma$  ed in un verso stabilito (\*) il segmento  $QP = p$ . Il luogo del punto  $P$  per tutte le  $\infty^2$  direzioni passanti per  $g$  sarà una superficie  $S$ . Viceversa ogni punto  $P$  di  $S$  determina una direzione di spazio rigato passante per  $g$  ed appartenente al complesso: quella che ha per piano centrale il piano  $Pg \equiv \Pi$ , per punto centrale il piede  $Q$  della perpendicolare condotta da  $P$  a  $g$ , per parametro distributore la lunghezza  $p$  del segmento  $QP$ . (Fanno eccezione gli eventuali punti di intersezione di  $S$  con  $g$ ).

Perciò chiameremo  $S$  la *superficie delle direzioni* di  $g$ .

Se adoperiamo coordinate cilindriche, assumendo come asse  $g$ , come punto origine su  $g$  il punto centrale normale  $Q_1$  e come piano origine nel fascio di asse  $g$  il piano asintoto normale  $\Pi_1$ , saranno

$$\varphi = \theta - \theta_1, \quad \rho = r - r_1, \quad p \quad (63)$$

le coordinate cilindriche di  $P$  e la (62) darà l'equazione

$$p - p_1 = \rho \cot \varphi \quad (64)$$

della superficie  $S$  in coordinate cilindriche.

Secando  $S$  con un piano passante per  $g$ , di equazione  $\varphi = \text{costante}$ , si ha una retta  $s$  la cui equazione in coordinate cartesiane  $p, \rho$  è la (64); dunque  $S$  è una *superficie rigata*.

Trasformando le coordinate cilindriche in cartesiane  $x, y, z$ , col porre

$$x = p \cos \varphi, \quad y = p \sin \varphi, \quad z = \rho,$$

si vede subito che  $S$  è una *metà della superficie rigata del quarto ordine*.

$$(x^2 + y^2) y^2 = (xz + p_1 y)^2.$$

(\*) Per esempio nel verso fissato dalle formole (5) del § 3.



23. Se  $p_1 \neq 0$ , ossia se  $g$  non è raggio singolare per il complesso,  $s$  incontra  $g$  in un punto che varia con  $\varphi$ , percorrendo tutta la retta  $g$ . Secondo poi  $S$  col piano perpendicolare a  $g$  in  $Q_1$ , di equazione  $\rho = 0$ , si ha un circolo che ha per centro  $Q_1$  e per raggio  $p_1$ . Dunque: *due direttrici piane della rigata  $S$  sono il raggio  $g$  ed il circolo che ha per asse  $g$ , per centro  $Q_1$  e per raggio  $p_1$ .*

Per  $\varphi = \theta - \theta_1 = 0$  risulta  $\rho = r - r_1 = 0$  e  $p$  rimane arbitrario (§ 18 a), quindi le speciali direzioni  $(\theta_1, r_1, p)$  hanno per immagine su  $S$  i punti della retta perpendicolare a  $g$  in  $Q_1$  e nel piano  $\Pi_1$ . Così pure le direzioni  $(\theta', r, p_1)$  hanno per immagine su  $S$  tutti i punti di una retta parallela a  $g$  nel piano  $\Pi'_1$  alla distanza  $p_1$ ; e le direzioni  $(\theta, r_1, p_1)$  hanno per immagine tutti i punti del suddetto circolo.

Tutti i punti di  $g$  fanno parte di  $S$  e sono i soli pei quali è  $p = 0$ , quindi (§ 10) *le direzioni singolari hanno per immagine tutti i punti di  $g$ .*

*Osservazione.* Dalle considerazioni precedenti vanno escluse le direzioni singolari cilindriche (cfr. la fine del § 17). Tuttavia siccome per esse è  $p = \infty$ , si può dire che *hanno per immagine i punti all'infinito di  $S$ .*

Questi sono anche i punti all'infinito del cono di equazione

$$p = \rho \cot \varphi. \quad (65)$$

Questo cono, di vertice  $Q_1$ , è cono direttore per la rigata  $S$ .

### Raggi singolari.

24. A questo cono si riduce la superficie  $S$  in un raggio singolare.

Alla considerazione dei raggi singolari di un complesso si può giungere per altre vie, fra le quali ve n'è una che è la più consona ai metodi della geometria differenziale. Sia  $g$  un raggio qualunque del complesso ed  $A$  un suo punto, e si considerino due rigate qualunque del complesso passanti per  $g$ : le due rigate si toccheranno in  $A$  (ed in ogni altro punto di  $g$ ) se hanno a comune in  $g$  la direzione di spazio rigato; ma in caso contrario avranno in  $A$  due piani tangenti distinti, in generale. Ma è lecito domandarsi: esiste nel complesso qualche raggio  $g$  sul quale esista un punto  $A$ , tale che in esso si tocchino *tutte* le rigate del complesso passanti per  $g$ ?

Incominciamo dall'osservare che se un tal raggio esiste, dovranno in particolare toccarsi in  $A$  tutte le sviluppabili del complesso passanti per  $g$  (escluse quelle per le quali  $A$  è punto singolare, e però non hanno in  $A$  un piano tangente determinato). Ma il piano tangente di una sviluppabile passante per  $g$  è stazionario lungo  $g$  ed è perpendicolare al piano centrale della direzione singolare di spazio rigato determinato dalla sviluppabile; dunque intanto: tutte le direzioni singolari di spazio rigato passanti per  $g$  ed appartenenti al complesso debbono avere lo stesso piano centrale.

Ora per una direzione singolare ( $p = 0$ ) la (62) diventa

$$-p_1 = (r - r_1) \cot(\theta - \theta_1)$$

e prova che, se non è  $p_1 = 0$ ,  $\theta$  (e quindi il piano centrale) varia con  $r$ ; dunque necessariamente dev'essere  $p_1 = 0$  ossia  $g$  dev'essere un raggio singolare del complesso. Allora la precedente equazione dà

$$\theta \equiv \theta_1 + 90^\circ \equiv \theta'_1 \pmod{180^\circ}$$

e prova che il piano centrale fisso dev'essere il piano  $\Pi'_1$  e quindi che il piano tangente fisso dev'essere il piano  $\Pi_1$ .

Viceversa, consideriamo un raggio singolare  $g$  col piano asintoto normale  $\Pi_1$  e col punto centrale normale  $Q_1$ , e consideriamo una direzione qualunque di spazio rigato  $(\theta, r, p)$  appartenente al complesso e passante per  $g$ , col piano centrale  $\Pi$  e col punto centrale  $Q$ . Il piano  $\Pi_1$  sarà piano tangente di tutte le superficie rigate passanti per  $g$  secondo la direzione fissata  $(\theta, r, p)$ , in un certo punto  $A$ , determinabile con la legge di HAMILTON (§ 6)

$$p \operatorname{tg} \Psi = QA.$$

$\Psi$  è l'angolo dei due piani centrali  $\Pi$  e  $\Pi_1$  ossia  $\Psi = \theta - \theta_1$ , quindi

$$QA = p \operatorname{tg}(\theta - \theta_1);$$

ma, essendo  $p_1 = 0$ , la (62) dà

$$p = (r - r_1) \cot(\theta - \theta_1),$$

quindi

$$QA = r_1 - r = QQ_1;$$

e però  $A \equiv Q_1$ . Ma  $Q_1$  è un punto fisso di  $g$  che non dipende dalla direzione

fissata  $(\theta, r, p)$ ; dunque qualunque rigata del complesso passante per  $g$  tocca il piano  $\Pi_1$  nel punto  $Q_1$ .

Concludendo: *proprietà caratteristica di un raggio singolare di un complesso è che tutte le superficie rigate del complesso passanti per esso si toccano in uno stesso punto del raggio: questo punto è il punto centrale normale  $Q_1$  ed il piano tangente comune è il piano asintoto normale  $\Pi_1$ .*

Il punto  $Q_1$  ed il piano  $\Pi_1$  di un raggio singolare si chiamano rispettivamente *punto singolare* e *piano singolare* del raggio.

Ne segue (§ 12) che: *il punto singolare  $Q_1$  è uno dei due fuochi del raggio singolare per tutte le congruenze del complesso passanti per esso; quindi le superficie focali di queste congruenze si toccano in  $Q_1$  ed hanno ivi per piano tangente comune il piano  $\Pi_1$ .*

### Raggi bisingolari.

25. Or consideriamo i raggi bisingolari del complesso, analiticamente caratterizzati dalle eguaglianze

$$M = 0, \quad N = 0 \tag{66}$$

e da noi esclusi sin dal § 17.

*Per un raggio bisingolare passano soltanto  $\infty^1$  direzioni di spazio rigato appartenenti al complesso.*

Infatti in un raggio bisingolare i secondi membri delle formole (33), (34) e (37) che danno le coordinate  $\theta, r, p$  di una direzione dipendono soltanto dal rapporto  $du : dv$  che è arbitrario.

In altre parole: le dette formole coincidono con quelle (40), (41) e (37), che danno le coordinate di una direzione appartenente alla congruenza  $w$  che passa per  $g$  (anzi ad ogni congruenza non cilindrica del complesso che passa per  $g$ , ch'è ognuna di queste può essere presa come congruenza  $w$ ). Dunque: *tutte le congruenze non cilindriche del complesso che passano per un raggio bisingolare  $g$  si comportano in  $g$  allo stesso modo*, nel senso che esse hanno a comune in  $g$  tutte le direzioni di spazio rigato.

Siccome il dintorno di un raggio bisingolare  $g$  coincide col dintorno di un raggio di congruenza, vale per esso tutto ciò che abbiamo esposto in  $A$ ,

§§ 5, 6, 7, 13, 14, 15, 16. In particolare: *tutte le congruenze passanti per  $g$  hanno in  $g$  gli stessi fuochi  $Q_1, Q_2$  e gli stessi piani focali  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  (reali o immaginari, distinti o coincidenti).*

La proprietà geometrica caratteristica pei raggi singolari, dimostrata nel § 24, si verifica (anzi doppiamente) in un raggio bisingolare. Infatti una rigata qualunque passante per un tal raggio appartiene sempre a qualche congruenza del complesso, e però è toccata dal raggio nei due fuochi  $Q_1$  e  $Q_2$  di questa congruenza, coi piani tangenti  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ .

Dunque: *proprietà caratteristica di un raggio bisingolare è che tutte le rigate del complesso passanti per esso si toccano in due punti fissi del raggio.*

Questi due punti  $Q_1$  e  $Q_2$  li diremo *punti singolari* del raggio ed i piani tangenti relativi  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  *piani singolari* del raggio.

*Le superficie focali (a due falde) di tutte le congruenze del complesso passanti per un raggio bisingolare si toccano nei due punti singolari ed hanno ivi per piani tangenti i due piani singolari del raggio.*

Come fuochi di un raggio di congruenza, *i raggi singolari (e i piani focali) di un raggio bisingolare possono essere reali e distinti o reali e coincidenti o complessi-coniugati (\*)*.

Nel primo caso chiameremo *iperbolico* il raggio bisingolare, nel secondo *parabolico*, nel terzo *ellittico*.

*Il carattere analitico che distingue i tre casi è rispettivamente*

$$K < = > 0,$$

tale essendo il carattere analitico che distingue i tre casi quando si considera il raggio nella congruenza  $w$  che vi passa (cfr. la fine del § 12).

Infine osserviamo che  $K$ , in un raggio qualunque del complesso, rappresenta il parametro assoluto della congruenza  $w$  che passa per esso (§ 12), quindi è invariante per ogni trasformazione delle sole variabili  $u, v$ ; ma non è invariante per le trasformazioni più generali a noi lecite (cfr. la fine del § 2).

Però i risultati precedenti ci permettono di asserire che *il segno di  $K$  (e quindi l'annullarsi di  $K$ ) in un raggio bisingolare è invariante per tutte le trasformazioni delle variabili  $u, v, w$  indicate nel § 2.*

---

(\*) Si noti che invece *il punto singolare ed il piano singolare di un raggio singolare sono sempre reali.*

## Luoghi di raggi singolari.

26. Un raggio è singolare solo quando in esso è  $p_1 = 0$  ossia, per la (54), quando le sue coordinate  $u, v, w$  annullano la funzione

$$\sigma(u, v, w) = D'' M^2 - 2 D' M N + D N^2, \quad (67)$$

ma non annullano simultaneamente  $M$  ed  $N$ . Se invece  $M = N = 0$ , il raggio è bisingolare; ma allora anche  $\sigma$  è nulla. Noi perciò chiameremo *raggi singolari* del complesso tutti i raggi le cui coordinate  $u, v, w$  soddisfanno l'equazione

$$D'' M^2 - 2 D' M N + D N^2 = 0, \quad (68)$$

cioè sia i raggi singolari propriamente detti che i bisingolari. Quando vorremo distinguere i primi dai secondi, chiameremo i primi raggi singolari *ordinari*.

Circa la funzione  $\sigma$  osserviamo che essa è finita e continua con le sue derivate, tali essendo le funzioni  $D, D', D'', M, N$  che la compongono (giusta la esplicita dichiarazione fatta nell'*Introduzione*).

27. Esistono i raggi singolari?

Nella teoria dei *complessi algebrici*, nella quale non si fa distinzione fra raggi reali ed immaginari, si hanno i risultati seguenti (\*):

O tutti i raggi del complesso sono singolari o nessun raggio del complesso è singolare; esclusi questi casi limite, in ogni complesso esistono sempre  $\infty^2$  raggi singolari e formano una congruenza, la *congruenza delle singolarità* del complesso. In conseguenza, i punti singolari dei raggi singolari formano una superficie (o linea) che è una delle due falde focali della congruenza delle singolarità e si chiama *superficie delle singolarità* del complesso; l'altra falda si chiama *superficie accessoria*.

Si noti che, definito analiticamente un complesso, si può constatare con procedimenti algebrici quale dei tre casi ora enumerati si verifica.

I pochi autori che si occupano dei complessi trascendenti enunciano gli stessi risultati (\*\*). Ora a me pare che ciò non sia lecito.

(\*) Cfr. p. es. ZINDLER, loc. cit.

(\*\*) Cfr. p. es. KOENIGS (loc. cit.); PICARD, *Traité d'Analyse*, vol. I, cap. XI, n.º 16.

Se la funzione  $\sigma$  si riduce ad una costante  $c$ , allora secondo che  $c$  è nulla o pur no si può asserire che o tutti i raggi del complesso sono singolari o che nessun raggio è singolare; ma se  $\sigma$  è una effettiva funzione di  $u, v, w$  (come accade in generale) nulla si può asserire.

Infatti non si è per nulla autorizzati ad affermare che esistono terne di valori di  $u, v, w$  che annullano la funzione  $\sigma$ , nè si ha alcun mezzo per decidere se ve ne sia oppur no *almeno una*. E se pur ve ne sono, possono essere  $\infty^2$ , e dar luogo ad una congruenza, ma possono anche essere solo  $\infty^1$  o in numero finito; possono variare con continuità oppur no, e possono essere in tutto o in parte isolate.

Del resto quei risultati cessano di essere validi per gli stessi complessi algebrici, se si considerano i soli raggi reali (come qui noi facciamo).

È dunque vano il tentare una classificazione dei complessi trascendenti, ponendo a base di esso l'esistenza o non dei raggi singolari e la loro distribuzione nel complesso. Si possono soltanto enumerare e studiare alcuni dei più notevoli fra i casi possibili, limitatamente a regioni convenientemente piccole del complesso, ed è ciò che noi faremo. Ma uno studio completo delle singolarità potrà farsi solo caso per caso su ogni singolo complesso o classe di complessi. Quel che ora diremo in generale potrà servire come utile guida.

28. Può accadere che  $\sigma$  si riduca ad una costante non nulla o che, pur essendo una funzione di  $u, v, w$ , non possa annullarsi; allora il complesso non ha raggi singolari.

Può darsi invece che  $\sigma$  sia identicamente nulla, quindi che *tutti i raggi del complesso sieno singolari*. Un tal complesso si chiama *speciale*. Dimostriamo più innanzi con considerazioni intuitive (\*) che *un complesso speciale è costituito dalle tangenti di una superficie o dalle rette che si appoggiano ad una linea, superficie o linea che è il luogo dei punti singolari dei raggi del complesso*.

Notiamo però che *i raggi di un complesso non possono essere tutti bisingolari*, ossia che *le funzioni  $M, N$  non possono essere entrambe identicamente nulle*. Infatti per  $M = N = 0$  le (III) del § 5 e le analoghe in  $y$  e  $z$  dànno

$$\frac{\partial x}{\partial w} = -\frac{X}{\Delta} \frac{\partial r_0}{\partial w}, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = -\frac{Y}{\Delta} \frac{\partial r_0}{\partial w}, \quad \frac{\partial z}{\partial w} = -\frac{Z}{\Delta} \frac{\partial r_0}{\partial w};$$

(\*) Ciò faremo per brevità. Una dimostrazione rigorosa si trova per la prima volta in KLEIN (loc. cit.) pei complessi algebrici ed in KOENIGS (loc. cit.) pei complessi trascendenti.

ma  $r_0$  è funzione arbitraria di  $u, v, w$ , quindi è lecito assumere  $r_0 = 0$ ; allora risulta

$$\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{\partial y}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial w} = 0$$

identicamente. Or ciò è impossibile, se si vuole che il complesso non degeneri in una congruenza (§ 1).

29. Ora, escludendo i due precedenti casi limite, non resta che a fare una terza ipotesi, cioè che esista almeno una terna di valori reali  $u', v', w'$  di  $u, v, w$  che annulli la funzione  $\sigma$ , ossia che *esista nel complesso almeno un raggio singolare  $g'$  ( $u', v', w'$ )*.

Su  $g'$  si possono fare varie ipotesi.

$g'$  sia un raggio singolare ordinario ossia le sue coordinate non annullino simultaneamente  $M$  ed  $N$ . Allora esse non annulleranno in generale le tre derivate parziali prime di  $\sigma$ , quindi l'equazione (68) definirà una delle variabili  $u, v, w$  come funzione delle altre due (per es.  $w$  come funzione di  $u, v$  in un intorno dei valori  $u', v'$  e tale che per  $u = u', v = v'$  risulti  $w = w'$ ).

Dunque: *se nel complesso esiste un raggio singolare ordinario  $g'$ , vi esisterà in generale (\*) una congruenza costituita di raggi tutti singolari, passante per  $g'$ .*

La chiameremo *una congruenza di singolarità* del complesso.

Se poi in  $g'$  si annullano le tre derivate prime di  $\sigma$ , nulla possiamo asserire.

30.  $g'$  sia bisingolare. Le sue coordinate soddisfaranno al sistema

$$M = 0, \quad N = 0; \tag{69}$$

ma, in generale, non annulleranno tutti i minori di secondo ordine della matrice funzionale

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial M}{\partial u} & \frac{\partial M}{\partial v} & \frac{\partial M}{\partial w} \\ \frac{\partial N}{\partial u} & \frac{\partial N}{\partial v} & \frac{\partial N}{\partial w} \end{vmatrix};$$

quindi il sistema (69) definirà due delle variabili  $u, v, w$  come funzioni della terza (per es.  $u, v$  come funzioni di  $w$  in un certo intervallo contenente  $w'$ , e tali che per  $w = w'$  risulti  $u = u', v = v'$ ).

(\*) Cfr. la nota ultima del § 1.

Dunque: *in generale per un raggio bisingolare del complesso passa una superficie rigata del complesso costituita da raggi tutti bisingolari.*

31. Or vediamo se esistono anche raggi singolari ordinari nel dintorno di un raggio bisingolare  $g'$ . In esso si annullano le tre derivate parziali prime di  $\sigma$  (come è facile verificare), quindi non valgono le considerazioni svolte nel § 29 e ne occorrono delle nuove. Perciò distinguiamo tre casi.

a).  $g'$  sia ellittico (§ 25). Allora in  $g'$  è  $K > 0$ ; ma  $K$  è funzione continua, e però sarà  $K > 0$ , e quindi  $DD'' - D'^2 > 0$  (\*), in tutto un intorno di  $g'$ ; ne segue che in questo intorno la funzione  $\sigma$ , che è un trinomio del secondo grado in  $M$  ed  $N$ , conserva un segno costante (quello necessariamente comune di  $D$  e  $D''$ ); quindi non può annullarsi che solo quando si annullano simultaneamente  $M$  ed  $N$ .

Dunque: *nel dintorno di un raggio bisingolare ellittico non esistono raggi singolari ordinari.*

b).  $g'$  sia iperbolico. Sarà  $K < 0$  ossia  $DD'' - D'^2 < 0$  in  $g'$ , e quindi anche in tutto un intorno di  $g'$ ; ne segue che in questo intorno sarà possibile scomporre il trinomio  $\sigma$  nel prodotto di due binomii lineari in  $M$  ed  $N$

$$\sigma = (\alpha_1 M + \beta_1 N) (\alpha_2 M + \beta_2 N),$$

con coefficienti  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  che sieno funzioni reali di  $u, v, w$ , e tali che

$$\alpha_1 \alpha_2 = D'', \quad \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 = -2D', \quad \beta_1 \beta_2 = D. \quad (70)$$

Nell'intorno di  $g'$  saranno raggi singolari quelli le cui coordinate annullano l'uno o l'altro fattore di  $\sigma$ . Il primo fattore si annulla in  $g'$ , perchè vi si annullano  $M$  ed  $N$ , ma non si annullano in generale le sue tre derivate parziali prime, quindi l'equazione

$$\alpha_1 M + \beta_1 N = 0$$

definisce una delle variabili  $u, v, w$  come funzione finita e continua delle altre due, dando origine ad una congruenza  $C_1$  di raggi singolari passante per  $g'$ . Lo stesso dicasi dell'altro fattore.

Dunque: *per un raggio bisingolare iperbolico passano in generale due regioni  $C_1, C_2$  di una congruenza  $C$  costituita di raggi tutti singolari.*

$C$  si chiamerà *una congruenza di singolarità del complesso.*

---

(\*) Si ricordi che il denominatore  $EG - F^2$  dell'espressione (42) di  $K$  è essenzialmente positivo (§ 3).



Le due regioni  $C_1$  e  $C_2$  nel dintorno di  $g'$  non possono avere a comune che raggi bisingolari. Infatti, essendo

$$(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2 = 4(D'^2 - D D'') > 0 \quad (71)$$

i due fattori lineari di  $\sigma$  sono distinti nel dintorno di  $g'$ , e però si annullano simultaneamente solo quando è  $M = N = 0$ .

c)  $g'$  sia *parabolico*, cioè sia  $K = 0$  in  $g'$ . Allora può darsi che esista un intorno di  $g'$  in cui sia costantemente  $K > 0$  o  $K < 0$ ; in tal caso valgono rispettivamente i risultati enunciati in a) o b). Se invece un tale intorno non esiste, nulla possiamo dire, oltre a ciò che abbiamo detto nel § 30.

32. Dalla supposta esistenza di un raggio singolare  $g'$ , abbiamo potuto dedurne in molti casi l'esistenza di infiniti altri raggi singolari formanti una congruenza, o di infiniti raggi bisingolari formanti una rigata, o l'una cosa e l'altra insieme, in un intorno convenientemente piccolo del primo; applicando ciò ai nuovi raggi ottenuti, e così via, potremo *proseguire* la congruenza o rigata già costruita.

Può darsi che in tal modo si esauriscano tutti i raggi singolari del complesso; allora si ottiene un'unica congruenza di singolarità o una rigata di raggi bisingolari o l'una e l'altra insieme. Ma può anche darsi che vi sia qualche nuovo raggio singolare irraggiungibile (partendo da  $g'$ ); allora esso potrà essere raggio di partenza di una nuova congruenza o rigata di raggi singolari. E così via.

Infine vi possono essere raggi singolari *isolati*, cioè nel cui intorno non esistano altri raggi singolari.

### Luoghi di punti singolari.

33. Sull'esistenza dei punti singolari nulla abbiamo da dire, perchè essa è subordinata a quella dei raggi singolari a cui appartengono.

Circa la loro distribuzione nello spazio, esamineremo i casi più notevoli.

Consideriamo una congruenza di singolarità  $C$  del complesso. I punti singolari dei suoi raggi (generalmente singolari ordinari) saranno fuochi dei raggi stessi per ogni congruenza del complesso passante per essi (cfr. la fine del § 24), e quindi in particolare per  $C$ . Dunque: *il luogo dei punti singolari dei raggi singolari ordinari di una congruenza di singolarità è una delle due falde della superficie focale della congruenza.*

Perciò questa falda  $S_1$  si chiamerà *una superficie di singolarità* del complesso, e l'altra  $S_2$  *una superficie accessoria*; entrambe le diremo *relative* alla congruenza di singolarità considerata. Si noti che sia l'una che l'altra può degenerare in una *linea (di singolarità o accessoria* rispettivamente).

Inoltre, pel teorema in fine del § 24, si ha che *l'involuppo dei piani singolari dei raggi singolari ordinari della congruenza  $C$  coincide con la superficie di singolarità  $S_1$ .*

Per lo stesso teorema, si ha inoltre che *la superficie di singolarità  $S_1$  è involuppata dalle superficie focali di tutte le congruenze del complesso passanti per i raggi di  $C$ .*

34. Or consideriamo un complesso *speciale*. Ogni congruenza  $C$  in esso contenuta è una congruenza di singolarità ed una delle due falde della superficie focale di  $C$  è una superficie di singolarità; se dunque consideriamo tutte le congruenze contenute nel complesso e di ciascuna di esse consideriamo una falda opportuna della superficie focale, possiamo asserire che ciascuna di queste falde è involuppata da tutte le altre. Evidentemente ciò può accadere soltanto se tutte queste falde coincidono, cioè se il complesso è costituito dalle tangenti di una superficie. Ciò dimostra un teorema enunciato nel § 28.

35. *Se in una congruenza di singolarità  $C$  vi è un raggio bisingolare  $g'$ , questo non può essere ellittico*, perchè in un intorno convenientemente piccolo di un raggio ellittico non vi sono raggi singolari ordinari (§ 31, a).

Dunque *i due punti singolari  $Q'_1$  e  $Q'_2$  di  $g'$  sono certamente reali* (distinti o coincidenti).  $Q'_1$  e  $Q'_2$  sono i fuochi di  $g'$  in  $C$  e però si troveranno l'uno su  $S_1$  e l'altro su  $S_2$ ; ma d'altra parte nulla distingue l'uno dall'altro i due punti, quindi  $Q'_1$  e  $Q'_2$  *apparterranno entrambi tanto ad  $S_1$  che ad  $S_2$ .*

36. Per chi trovasse poco soddisfacente tale induzione, dimostreremo che *un punto mobile su  $S_1$ , percorrendo due curve convenienti passa per i punti  $Q'_1$  e  $Q'_2$ .*

Se  $g'$  è parabolico, allora  $Q'_1$  e  $Q'_2$  coincidono e la nostra primitiva asserzione è evidente.

Supponiamo dunque che  $g'$  sia iperbolico e ricordiamo (§ 31, b) che allora nel dintorno di  $g'$  la congruenza  $C$  cui esso appartiene si può immaginare divisa in due regioni  $C_1$  e  $C_2$  che si tagliano in  $g'$  e che hanno per equazione rispettivamente

$$\alpha_1 M + \beta_1 N = 0, \quad \alpha_2 M + \beta_2 N = 0.$$

Or supponiamo che un raggio singolare ordinario  $g$  si muova nella re-

gione  $C_1$  e tenda a  $g'$  attraverso ad una rigata formata da raggi singolari ordinari; il punto singolare  $Q_1$  di  $g$  si muoverà in conseguenza sulla superficie di singolarità  $S_1$ , descrivendo una curva, e tenderà ad una posizione limite  $L_1$  su  $g'$ .

L'ascissa  $r_1$  di  $Q_1$  su  $g$  è data dalla formola (51); ma essendo  $g$  costantemente nella regione  $C_1$ ,  $M$  ed  $N$  sono proporzionali a  $\beta_1$  e  $-\alpha_1$ , quindi la formola (51) diventa

$$r_1 - r_0 = \frac{(FD'' - GD')\beta_1^2 - (GD - ED'')\beta_1\alpha_1 + (ED' - FD)\alpha_1^2}{\Delta(G\beta_1^2 + 2F\beta_1\alpha_1 + E\alpha_1^2)}. \quad (72)$$

Si noti che in questa formola  $r_0$  è l'ascissa del punto medio di  $g$  nella congruenza  $w$  che passa per  $g$ .

A limite, quando  $g$  tende a  $g'$ , questa formola darà l'ascissa  $r_1$  del punto  $L_1$  di  $g'$ , limite di  $Q_1$ ; dunque, se si suppone che nella (72) le funzioni  $E, F, G, D, D', D'', \alpha_1, \beta_1$  abbiano i valori che assumono in  $g'$ , il secondo membro della (72) è la distanza  $Q'_0 L_1$  del punto  $L_1$  di  $g'$  dal punto medio  $Q'_0$  di  $g'$  nella congruenza  $w$  che vi passa.

Per semplificare, specializziamo le coordinate interne  $u, v$  del complesso, supponendo che esse sieno tali da fare assumere alla prima forma fondamentale del complesso la forma *isoterma* (\*)

$$ds^2 = \lambda (du^2 + dv^2).$$

Ponendo adunque

$$E = G = \lambda, \quad F = 0,$$

la (72) diventa

$$Q'_0 L_1 = r_1 - r_0 = \frac{D'(\alpha_1^2 - \beta_1^2) + (D'' - D)\alpha_1\beta_1}{\Delta(\alpha_1^2 + \beta_1^2)}$$

e, per le (70), assume la forma semplicissima

$$Q'_0 L_1 = \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{2\Delta}.$$

Col solo scambio degli indici 1 e 2, si ha la formola

$$Q'_0 L_2 = \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{2\Delta}$$

---

(\*) Ciò è sempre possibile in infiniti modi.

che dà la distanza dal punto medio  $Q'_0$  di  $g'$  di quel punto  $L_2$  al quale tende il punto singolare  $Q_1$  di un raggio singolare  $g$  che si muova nella congruenza  $C_2$  e tenda a  $g'$ .

Ne segue che  $Q'_0 L_1 = -Q'_0 L_2$  ossia che i punti  $L_1$  e  $L_2$  sono simmetrici rispetto a  $Q'_0$ .

Inoltre, per la (71) e poi per la (42), si ha

$$Q'_0 L_1 \cdot Q'_0 L_2 = - \frac{(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2}{4 \Delta^2} = \frac{D D'' - D'^2}{\Delta^2} = K,$$

quindi

$$Q'_0 L_1^2 = Q'_0 L_2^2 = -K.$$

Ciò prova (§ 12) che i punti  $L_1$  e  $L_2$  sono i fuochi di  $g'$  nella congruenza  $w$  passante per esso, e però (§ 25) coincidono coi punti singolari  $Q'_1$  e  $Q'_2$  di  $g'$ .

37. Dopo ciò non vi è più alcun dubbio sui risultati del § 35. Raccogliendoli, si ha che: *se un raggio bisingolare (necessariamente non ellittico) appartiene ad una congruenza di singolarità, esso è bitangente tanto alla superficie di singolarità quanto alla superficie accessoria relative alla congruenza; anzi queste due superficie si toccano nei due punti singolari del raggio.*

Inoltre: *l'intersezione dei piani tangenti comuni alle due superficie nei due punti singolari del raggio è il raggio stesso.* Perchè i detti piani tangenti sono i piani singolari del raggio (§ 25).

38. Spesso accade che in una congruenza di singolarità sia contenuta tutta una rigata di raggi bisingolari (non ellittici). Allora a ciascuno di questi sono applicabili i risultati precedenti; dunque: *se una congruenza di singolarità contiene una rigata di raggi bisingolari, la superficie di singolarità e la superficie accessoria relative alla congruenza si toccano lungo tutti i punti di una curva.*

La considerazione dei raggi bisingolari ci dà così la ragione intima del notevole teorema di Voss (\*): *la superficie delle singolarità e la superficie accessoria di un complesso algebrico (§ 27) si toccano lungo tutti i punti di una curva.*

39. In generale, nel dintorno di un raggio bisingolare ellittico  $g'$  esiste una rigata di raggi bisingolari passante per  $g'$  (§ 30) e non esistono altri raggi singolari (§ 31, a). *I raggi di questa rigata sono certamente ellittici,*

(\*) *Ueber Complexe und Congruenzen* (Math. Annalen, Band IX, 1876).

perchè  $K$  è positivo in  $g'$  e, essendo continua, conserva il suo segno nell'intorno di  $g'$ .

*Il luogo dei punti singolari di una rigata di raggi tutti bisingolari ellittici è una coppia di linee immaginarie coniugate.*

## CORREZIONI ALLA MEMORIA A.

- Pag. 3 linea 8 invece di  $G$  leggi  $Q$ .  
 » 10 » 19 sopprimere *focali*.  
 » 10 » 20 aggiungere e *piani focali quelli ad essi perpendicolari*.  
 » 16 » 12 sopprimere o *asintotici*.  
 » 24 » 12 invece di  $+\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix}$  leggi  $-\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix}$ .  
 » 34 » 12 invece di  $\frac{\partial \rho}{\partial u}$  leggi  $\frac{\partial}{\partial u}(\rho - r_0)$ .  
 » 34 » 1 invece di  $\frac{\partial \rho}{\partial v}$  leggi  $\frac{\partial}{\partial v}(\rho + r_0)$ .

Torino, 14 marzo 1910.



# Intorno alle possibili distribuzioni della massa nell'interno della Terra.

(Di P. PIZZETTI, a Pisa.)

---

La forma di una superficie di livello *esteriore* alla massa terrestre può, al dì d'oggi, ritenersi abbastanza ben conosciuta nel suo complesso. Le ben note proprietà delle funzioni armoniche provano che la conoscenza di una tale superficie, e, insieme, della massa totale della Terra e della velocità angolare del movimento diurno, sono sufficienti a determinare in modo non ambiguo la grandezza e la direzione della accelerazione di gravità in ogni punto esterno al contorno (\*), solido o liquido, della massa terrestre.

Una tale determinazione è pertanto indipendente da speciali ipotesi sul modo di variare della densità nell'interno del globo; epperò da tali arbitrarie ipotesi risulta pure indipendente il contributo che le misurazioni della gravità apportano allo studio del Geoide. Questa verità è stata per la prima volta enunciata da STOKES nel 1849 e l'averla posta in evidenza costituisce senza dubbio il più grande progresso che, dal punto di vista del problema *fisico*, la teoria della figura della Terra abbia fatto dai tempi di CLAIRAUT fino ai dì nostri.

Ma si comprende come, reciprocamente, la conoscenza della figura del Geoide (e quindi la determinazione teorica della espressione analitica della funzione potenziale dell'attrazione terrestre al di fuori della Terra) ben poche notizie ci possa porgere (\*\*) sul modo di distribuzione della densità nell'interno. Infiniti modi differenti di variazione della densità entro uno spazio

---

(\*) Si dovrebbe comprendere, teoricamente, nella massa terrestre, anche l'atmosfera, ma si dimostra facilmente che, nello studio delle superficie di livello terrestre, l'influenza di questa è del tutto trascurabile.

(\*\*) Quando, ben inteso, si escludano le considerazioni idrostatiche che derivano dalla ipotesi dello stato primitivamente fluido.

chiuso corrispondono ad una stessa espressione della funzione potenziale attrattiva all'esterno. Pur tuttavia questi differenti modi hanno talune qualità in comune, sicchè le ipotesi sulla interna distribuzione della massa terrestre restano legate, in causa della conoscenza della superficie esterna, a certe condizioni. Porre in evidenza quelle qualità comuni e queste condizioni è lo scopo del presente lavoro (\*).

Due sono i problemi che qui si presentano: Trovare qualcuna (*una* almeno) distribuzione di massa che sia compatibile colla forma osservata del Geoide; e vedere poi in quali modi si possa, nell'interno, immaginare alterata la distribuzione senza che resti alterata la attrazione Newtoniana all'esterno, nè, quindi, la forma delle superficie di livello esteriori. Cominceremo dallo studio di questo secondo problema.

---

(\*) Per quanto io mi sappia, i problemi che formano oggetto di questo lavoro sono stati pochissimo trattati. Tipi classici di sistemi equivalenti rispetto alla attrazione esterna sono i notissimi *strati di livello* di CHASLES; ma questi tipi hanno poca importanza dal punto di vista del problema da me trattato, in quanto involgono la esistenza di *densità superficiali finite* che io naturalmente debbo escludere. Un cenno appena della quistione sulla « internal distribution of Matter which shall produce a given potential at the surface of a gravitating Mass » si ha in una breve Nota di G. G. STOKES portante appunto il titolo: *On the internal distribution*, etc. (1867) (Mathem. and Phys. Papers. Vol. 4, pag. 277).

Un modo molto ingegnoso di costruire sistemi equivalenti rispetto alla attrazione esterna è stato indicato da G. V. SCHIAPARELLI nelle lezioni di Meccanica Celeste da lui date nella Università di Pavia nell'anno scolastico 1875-76. Egli osserva come si possa sostituire ad una massa concentrata in un punto  $P$  una massa, di eguale grandezza totale, distribuita per strati sferici omogenei di centro  $P$ , senza alterare la attrazione esterna. Con questo procedimento (che si può ripetere a piacere e che Egli chiama; *espansione sferica*) si possono sostituire ad un corpo infiniti altri di eguale attrazione esterna e in particolare costruire corpi i quali attraggono all'esterno come se tutta la loro massa fosse concentrata in un punto. Lo SCHIAPARELLI dimostra che questo punto è il centro di massa e che gli assi principali d'inerzia di un tal corpo sono fra loro eguali. Questi due teoremi sono caso particolare di quelli contenuti nel § 5 del presente lavoro. La costruzione da me studiata nei §§ 12, 13 corrisponde in certo modo all'idea della espansione sferica. Alla memoria del grande Astronomo, che ebbe la bontà di mandarmi, per lettera, notizie e citazioni bibliografiche mando un riverente saluto.

Delle idee contenute nelle *lezioni* di SCHIAPARELLI ebbi notizia quando le idee svolte in questo mio lavoro erano da un pezzo stabilite. Purtroppo quelle lezioni sono pochissimo conosciute, essendo state soltanto raccolte sotto forma di appunti da pochi eletti scolari; ad uno dei quali, il mio carissimo collega prof. G. A. MAGGI, debbo la conoscenza delle dette lezioni e il gentile prestito di quegli appunti.



## CORPI DI ATTRAZIONE NULLA E CORPI DI EGUALE ATTRAZIONE.

§ 1. *Enunciato del problema.* I punti principali che riguardano questo secondo problema furono da me sommariamente esposti in una Nota pubblicata l'anno scorso nei *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei* (\*). Qui intendo svolgerli più ampiamente.

Se in uno spazio finito  $\tau$  a tre dimensioni, limitato da una superficie chiusa  $S$ , si immagina distribuita una massa con densità spaziale finita, e se, intorno al valore della densità nel punto generico  $M(x, y, z)$ , si fanno due differenti ipotesi esprimendola successivamente con

$$k = k(x, y, z), \quad k' = k'(x, y, z)$$

(ove i secondi membri sono funzioni finite delle coordinate), la condizione necessaria e sufficiente perchè, per ogni punto esterno alla superficie  $S$  (\*\*) risultino uguali, in grandezza e direzione, le attrazioni esercitate da quelle due differenti distribuzioni di massa, è che si abbia

$$\int_{\tau} \frac{k}{r} d\tau = \int_{\tau} \frac{k'}{r} d\tau \quad (1)$$

dove  $r$  è la distanza dell'elemento generico  $d\tau$  dello spazio  $\tau$  da un punto arbitrario  $P(x_1, y_1, z_1)$  esterno alla  $S$  (\*\*\*). Si dirà allora che quelle due distribuzioni, o, come più semplicemente diremo, i due corpi  $C$  e  $C'$  sono *equivalenti rispetto alla attrazione esterna*. Indicando con  $h$  la funzione

$$h = k'(x, y, z) - k(x, y, z)$$

e immaginando che la densità possa assumere valori sia positivi, sia negativi, un corpo fittizio  $C''$  la cui densità nel punto  $M(x, y, z)$  sia  $h$  avrà, per

(\*) *Corpi equivalenti rispetto alla attrazione newtoniana esterna.* Rendic. Lincei, XVIII, 1.º sem., fasc. 5.º

(\*\*) E quindi anche pei punti della superficie stessa, per la proprietà di continuità della funzione potenziale.

(\*\*\*) È superfluo osservare che le due funzioni potenziali non possono differire di una costante, perchè debbono entrambe annullarsi nei punti  $P$  a distanza infinita.

la (1), funzione potenziale nulla sopra ogni punto esterno alla  $S$  (o della  $S$ ). Lo chiameremo *corpo di attrazione esterna nulla, relativo allo spazio  $\tau$* . È chiaro che la ricerca del come possa alterarsi la distribuzione di massa entro uno spazio  $\tau$  in guisa che non cangi, in grandezza e direzione, la attrazione sopra ogni punto esterno, equivale alla ricerca di tutti i corpi di attrazione nulla relativi allo spazio stesso.

§ 2. *Condizioni alle quali soddisfanno i corpi di attrazione nulla.* Il punto  $P(x_1, y_1, z_1)$  può essere supposto abbastanza lontano dall'origine delle coordinate perchè l'inversa della distanza di  $P$  da ogni punto  $M$  dello spazio  $\tau$  possa essere espressa dallo sviluppo

$$\frac{1}{r} = \sum_0^{\infty} \frac{\rho^n}{\rho_1^{n+1}} P_n$$

dove  $\rho, \rho_1$  sono le distanze dei punti  $M, P$  dall'origine  $O$ , e  $P_n$  indica il *polinomio* d'ordine  $n$  di LEGENDRE, avente per argomento il coseno dell'angolo  $MOP$ . La condizione (1) equivale alla

$$\int_{\tau} \frac{h}{r} d\tau = \sum_0^{\infty} \frac{1}{\rho_1^{n+1}} \int_{\tau} h \rho^n P_n \cdot d\tau = 0,$$

e, poichè questa dev'essere verificata qualunque sia  $\rho_1$ , dovranno essere verificate le relazioni

$$\int_{\tau} h \rho^n P_n \cdot d\tau = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \infty). \quad (2)$$

(Sopprimiamo d'or innanzi l'indice  $\tau$  presso al segno integrale; intendendo che gl'integrali, salvo contrario avviso, si riferiscano a tutto lo spazio  $\tau$  chiuso dalla superficie  $S$ ).

Indichiamo con  $\theta, v$  la colatitudine e la longitudine del punto  $M$ , con  $\theta_1, v_1$  quella di  $P$  in un arbitrario sistema di coordinate polari avente origine in  $O$ , in guisa che

$$\cos(MOP) = \cos \theta \cdot \cos \theta_1 + \sin \theta \cdot \sin \theta_1 \cdot \cos(v - v_1).$$

Introdotta questa espressione di  $\cos(MOP)$  nella  $P_n$ , questa può porsi, come è noto, sotto la forma

$$\left. \begin{aligned} P_n &= P_n(\mu) \cdot P_n(\nu) + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^n \frac{\sin^i \theta \cdot \sin^i \theta_1}{(n-i+1) \dots (n+i)} \frac{d^i P_n(\mu)}{d\mu^i} \frac{d^i P_n(\nu)}{d\nu^i} \cos(i\nu - i\nu_1). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

In questa formola  $P_n(\mu)$ ,  $P_n(\nu)$  sono ottenuti sostituendo le lettere  $\mu$ ,  $\nu$  risp.<sup>o</sup> alla lettera  $x$  nel polinomio  $X_n = P_n(x)$  di LEGENDRE; dopo eseguite le operazioni indicate, s'intende alla lettera  $\mu$  sostituito  $\cos \theta$ , alla  $\nu$   $\cos \theta_1$ . Introducendo l'espressione (3) nella (2) ed osservando che la (2) dev'essere verificata per ogni valore di  $\theta_1$ , fra 0 e  $\pi$  e di  $\nu_1$ , fra 0 e  $2\pi$ , si vede che la (2) si spezza nelle  $2n + 1$  condizioni

$$\int h \rho^n P_n(\cos \theta) \cdot d\tau = 0 \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \int h \rho^n \frac{d^i P_n(\mu)}{d\mu^i} \operatorname{sen}^i \theta \cdot \cos i \nu \cdot d\tau &= 0 \\ \int h \rho^n \frac{d^i P_n(\mu)}{d\mu^i} \operatorname{sen}^i \theta \cdot \operatorname{sen} i \nu \cdot d\tau &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

§ 3. *Caso della distribuzione simmetrica intorno ad un asse.* Se la massa è simmetricamente distribuita intorno all'asse  $\theta = 0$ , la  $h$  non dipende da  $\nu$ , e le (5) sono senz'altro verificate. Le sole condizioni a verificarsi sono allora le (4). Ma è facile vedere che le (4) esprimono le condizioni necessarie e sufficienti perchè sia nulla la f.<sup>o</sup> potenziale del corpo sopra ogni punto, esterno al corpo, dell'asse  $\theta = 0$ . Resta così provato un noto teorema di LEGENDRE, che: *se la f.<sup>o</sup> potenziale di un solido omogeneo di rotazione (o più generalmente di una massa distribuita simmetricamente intorno ad un asse) è conosciuta per ogni punto esterno dell'asse, essa resta, per questo, del tutto determinata per ogni altro punto esterno.*

§ 4. *Relazioni fra i momenti d'inerzia di grado qualunque in un corpo di attrazione nulla.*

Le (4) (5) conducono facilmente a stabilire delle relazioni fra i momenti d'inerzia del grado  $n$ . Poniamo, per esempio,  $n = 4$ . Si ha

$$P_4(\mu) = P_4(\cos \theta) = \frac{1}{8} (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)$$

$$\frac{2}{5} \frac{d P_4(\mu)}{d \mu} = 7 \cdot \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\frac{2}{15} \frac{d^2 P_4(\mu)}{d \mu^2} = 7 \cos^2 \theta - 1$$

$$\frac{2}{105} \frac{d^3 P_4(\mu)}{d \mu^3} = \cos \theta, \quad \frac{2}{105} \frac{d^4 P_4(\mu)}{d \mu^4} = 1.$$

La (4) dà pertanto per  $n = 4$

$$\int h \rho^4 (35 \cdot \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3) d\tau, \quad (6)$$

e le (5) forniscono altre otto condizioni che per brevità raggruppiamo due a due scrivendole così:

$$\left. \begin{aligned} \int h \rho^4 (7 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) (\cos v + \sqrt{-1} \operatorname{sen} v) \operatorname{sen} \theta \cdot d\tau &= 0 \\ \int h \rho^4 (7 \cos^2 \theta - 1) (\cos 2v + \sqrt{-1} \operatorname{sen} 2v) \operatorname{sen}^2 \theta \cdot d\tau &= 0 \\ \int h \rho^4 \cos \theta (\cos 3v + \sqrt{-1} \operatorname{sen} 3v) \operatorname{sen}^3 \theta \cdot d\tau &= 0 \\ \int h \rho^4 (\cos 4v + \sqrt{-1} \operatorname{sen} 4v) \operatorname{sen}^4 \theta \cdot d\tau &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Indichiamo, per semplicità, con  $[a^r b^s c^t]$  il momento d'inerzia di grado  $n = r + s + t$  espresso dall'integrale

$$\int h \cdot x^r y^s z^t \cdot d\tau = [a^r b^s c^t]. \quad (8)$$

Passando dalle coordinate cartesiane alle polari, scriveremo

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ x &= \rho \operatorname{sen} \theta \cos v, & y &= \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} v, & z &= \rho \cos \theta \\ \rho^i \cdot \operatorname{sen}^i \theta (\cos i v + \sqrt{-1} \operatorname{sen} i v) &= (x + \sqrt{-1} y)^i \end{aligned}$$

sicchè le (6) (7) diverranno

$$\left. \begin{aligned} \int h (35 \cdot z^4 - 30 \cdot \rho^2 z^2 + 3 \rho^4) \cdot d\tau &= 0 \\ \int h (7 z^3 - 3 z \rho^2) (x + \sqrt{-1} y) \cdot d\tau &= 0 \\ \int h (7 z^2 - \rho^2) (x + \sqrt{-1} y)^2 \cdot d\tau &= 0 \\ \int h z (x + \sqrt{-1} y)^3 \cdot d\tau &= 0 \\ \int h (x + \sqrt{-1} y)^4 d\tau &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Adottando la notazione (8), queste dànno luogo a *nove* relazioni fra i momenti d'inerzia del quarto grado, che nel modo più spiccio troviamo come segue. Dalle ultime due si ha

$$\begin{aligned} [a^3 c] &= 3 [a b^2 c], & [b^3 c] &= 3 [a^2 b c] \\ [a^4] + [b^4] &= 6 [a^2 b^2], & [a^3 b] &= [a b^3]. \end{aligned}$$

Permutando fra loro le lettere  $a, b, c$

$$\begin{aligned} [a^3 b] &= 3 [a b c^2] \\ [b^4] + [c^4] &= 6 [b^2 c^2], & [c^4] + [a^4] &= 6 [a^2 c^2] \\ [a^3 c] &= [a c^3], & [b^3 c] &= [b c^3]. \end{aligned}$$

Abbiamo così le nove relazioni cercate, delle quali, com'è facile verificare, quelle che si dedurrebbero dalle prime tre delle (9) sono conseguenza identica.

In generale il numero dei differenti momenti d'inerzia di grado  $n$  di un corpo è  $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ . La assegnazione della funzione potenziale esterna del corpo lascia adunque arbitrari, per ogni valore di  $n$ ,

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - (2n+1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

momenti d'inerzia di grado  $n$ .

§ 5. *Casi*  $n = 0, 1, 2$ . Particolarmente interessanti sono le conseguenze che dalle condizioni (4) (5) si deducono per i casi  $n = 0, 1, 2$ . Si ottiene:  
per  $n = 0$  la sola condizione

$$\int h \cdot d\tau = 0; \tag{10}$$

per  $n = 1$  le tre condizioni

$$\int h x \cdot d\tau = \int h y \cdot d\tau = \int h z \cdot d\tau = 0; \tag{11}$$

per  $n = 2$ , ricordando che  $P_2(v) = \frac{1}{2}(3v^2 - 1)$  si hanno le cinque

condizioni

$$\int h (3 \cos^2 \theta - 1) \rho^2 . d \tau = 0$$

$$\int h \rho^2 \cos \theta \sin \theta \cos v . d \tau = 0, \quad \int h \rho^2 \cos \theta \sin \theta \sin v . d \tau = 0$$

$$\int h \rho^2 \sin^2 \theta (\cos^2 v - \sin^2 v) . d \tau = 0, \quad \int h \rho^2 \sin^2 \theta \sin v \cos v . d \tau = 0$$

donde senza difficoltà

$$\int h x^2 . d \tau = \int h y^2 . d \tau = \int h z^2 . d \tau \quad (12)$$

$$\int h x y . d \tau = 0, \quad \int h y z . d \tau = 0, \quad \int h z x . d \tau = 0. \quad (13)$$

Se dalla considerazione del corpo di attrazione nulla, passiamo a quella dei due corpi  $C, C'$  le cui densità generiche sono  $k, k'$  rispett.°, posto nelle (10) (11) (12) (13)  $k - k'$  in luogo di  $h$ , abbiamo le seguenti condizioni necessarie affinchè i due corpi siano *equivalenti* rispetto alla attrazione esterna

$$\int k . d \tau = \int k' . d \tau, \quad (10')$$

$$\int k x . d \tau = \int k' x . d \tau, \quad \text{ed altre due analoghe,} \quad (11')$$

$$\int k x y . d \tau = \int k' x y . d \tau, \quad \text{»} \quad \text{»} \quad (12')$$

$$\left. \begin{aligned} \int k (x^2 - y^2) . d \tau &= \int k' (x^2 - y^2) . d \tau, \\ \int k (x^2 - z^2) . d \tau &= \int k' (x^2 - z^2) . d \tau. \end{aligned} \right\} \quad (13')$$

La (10') esprime che i due corpi *debbono avere ugual massa*, ciò che era senz'altro evidente per le proprietà limite della  $f$ .° potenziale nei punti a distanza infinita.

Le (11') esprimono che se l'origine delle coordinate è assunta nel centro di massa del corpo  $C$ , in essa deve pur cadere il centro di massa del corpo  $C'$ . Vale a dire:

a) *i due corpi hanno lo stesso centro di massa.* Analogamente le (12') esprimono che

b) *i due corpi hanno gli stessi assi principali d'inerzia.* Assunti questi assi principali come assi coordinati, e chiamando  $P, Q, R$  gli ordinarii momenti principali d'inerzia del corpo  $C$  e  $P', Q', R'$  quelli del corpo  $C'$  le (13') dànno ovviamente

$$Q - P = Q' - P', \quad R - Q = R' - Q',$$

ossia

c) *i tre momenti principali d'inerzia del corpo  $C'$  sono equidifferenti dai corrispondenti momenti principali del corpo  $C$ .* Od anche: *quando sia nota la funzione potenziale esterna di un corpo, restano per questo, determinate le differenze fra i momenti principali d'inerzia del corpo stesso.*

Questi teoremi hanno interesse in quanto stabiliscono *esattamente* alcune proprietà che, nella teoria fisico-matematica della figura della Terra, vengono dimostrate *in via approssimata* basandosi sopra espressioni approssimate della f.<sup>o</sup> potenziale terrestre.

Poniamo che una superficie di livello esteriore, per un pianeta rotante uniformemente, sia quella di un ellissoide di rotazione del quale l'asse geometrico coincida con quello della rotazione. È intuitivo, e lo dimostreremo del resto nella 2.<sup>a</sup> parte di questo lavoro, che si può sempre immaginare una distribuzione di massa simmetrica sia rispetto all'asse di rotazione sia rispetto al piano dell'equatore, la quale sia compatibile colla supposta forma della superficie di livello. Per questa particolare distribuzione, il centro di massa coincide col centro dell'ellissoide, un asse principale d'inerzia coll'asse di rotazione, e l'ellissoide principale d'inerzia è, alla sua volta, di rotazione. I teoremi a) b) c) provano che la *effettiva* distribuzione della massa nell'interno del pianeta dovrà essere tale che *il centro di massa coincida col centro dell'ellissoide, l'asse di rotazione sia asse principale d'inerzia, e i momenti d'inerzia rispetto a diametri nel piano equatoriale siano fra loro eguali.*

In questa ipotesi che una superficie di livello esteriore terrestre sia ellissoide di rotazione, e chiamando  $P$  il momento d'inerzia della massa rispetto all'asse polare,  $Q$  quella rispetto ad un diametro equatoriale qualunque, ricordiamo come talune delle perturbazioni cui va soggetto il movimento della luna conducono ad una valutazione approssimata della differenza  $P - Q$ . E poichè è nota una relazione approssimata fra questa differenza e lo schiacciamento dell'ellissoide terrestre, il menzionato fenomeno porge un contributo alla co-

noscenza dello schiacciamento medesimo. Che un tal contributo non involge alcuna particolare ipotesi sul modo di distribuzione della massa nell'interno della Terra, è chiara conseguenza del teorema c).

§ 6. *Espressione della differenza fra i momenti principali d'inerzia della massa terrestre.* Le differenze fra i momenti principali d'inerzia sono, per quanto abbiamo dimostrato, assegnate, quando è data la f.<sup>o</sup> potenziale esterna di un corpo. Cerchiamo le espressioni generali di tali differenze e applichiamo poi il risultato al caso della Terra.

La espressione della f.<sup>o</sup> potenziale di un corpo sopra un punto dell'asse  $z$ , a distanza  $z_1$  dall'origine si ottiene dalla espressione generale

$$V = \sum_0^{\infty} \frac{1}{\rho_1^{n+1}} \int k \rho^n P_n \cdot d\tau \quad (\rho_1 > \rho)$$

col porvi  $P_n(\cos \theta)$  in luogo di  $P_n$  e  $z_1$  al posto di  $\rho_1$ .

Sarà

$$V_z = \sum_0^{\infty} \frac{1}{z_1^{n+1}} \int k \rho^n P_n(\cos \theta) \cdot d\tau \quad (z_1 > \rho)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} & \int k \rho^2 P_2(\cos \theta) d\tau = \\ & = \lim_{z_1 \rightarrow \infty} \cdot z_1^2 \left( z_1 V_z - \int k d\tau - \frac{1}{z_1} \int k \rho \cdot \cos \theta \cdot d\tau \right). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Chiamando  $M$  la massa totale, supponendo l'origine delle coordinate nel centro di massa e gli assi coordinati coincidenti cogli assi principali d'inerzia ed osservando che

$$\begin{aligned} \int k \rho^2 \cdot P_2(\cos \theta) \cdot d\tau &= \frac{1}{2} \int k \rho^2 (3 \cos^2 \theta - 1) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int k (2z^2 - x^2 - y^2) d\tau = \frac{1}{2} (P + Q - 2R), \end{aligned}$$

avremo dalla (14)

$$\frac{1}{2} (P + Q - 2R) = \lim_{z_1 \rightarrow \infty} \cdot z_1^2 (z_1 V_z - M).$$



Similmente

$$\frac{1}{2} (Q + R - 2P) = \lim_{x_1=\infty} x_1^2 (x_1 V_x - M)$$

$$\frac{1}{2} (R + P - 2Q) = \lim_{y_1=\infty} y_1^2 (y_1 V_y - M)$$

donde sottraendo si hanno le cercate differenze  $P - Q$ , ecc.

Supponiamo  $Q = R$ . La penultima formola dà allora

$$Q - P = \lim_{x_1=\infty} x_1^2 (x_1 V_x - M). \quad (14')$$

Applichiamo questa formola al caso della Terra, supponendo che una superficie di livello esteriore coincida con un ellissoide di rotazione schiacciato ( $a, b, b; a < b$ ), l'asse di rotazione essendo assunto come asse  $x$ . L'espressione della  $V$  pel punto esteriore ( $x_1, y_1, z_1$ ) è allora, come ho dimostrato in una Nota pubblicata nel 1894 (\*):

$$V = \left( M + \frac{2}{3} \pi k_0 a b^2 \right) \frac{\text{arc tang } E}{\sqrt{b^2 - a^2}} - \frac{2 \pi k_0 a b^2}{(b^2 - a^2)^{3/2}} (E - \text{arc tg } E) x_1^2 - \left. \begin{aligned} & - \frac{\pi k_0 a b^2}{(b^2 - a^2)^{3/2}} \left( \text{arc tg } E - \frac{E}{1 + E^2} \right) (y_1^2 + z_1^2) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

dove sono adottate le seguenti notazioni. Indicando con  $\lambda$  la maggior radice della equazione

$$\frac{x_1^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y_1^2 + z_1^2}{b^2 + \lambda} = 1,$$

si è posto  $E = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a^2 + \lambda}}$ . Denotando poi con  $\omega$  la velocità angolare di rotazione e con  $f$  la costante di attrazione, la costante  $k_0$  che figura nella (15) è data dalla formola

$$\frac{\omega^2}{2 \pi f k_0} = \frac{(3 + i^2) \text{arc tg } i - 3 i}{i^3} \quad (16)$$

essendo  $i = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}$ .

(\*) Sulla espressione della gravità alla superficie del geotide supposto ellissoidico. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, III, 1.º sem., 1895, pag. 166 e segg.

Per un punto dell'asse  $x$  si ha

$$x_1^2 = a^2 + \lambda \quad E x_1 = \sqrt{b^2 - a^2} \quad (17)$$

$$x_1 \cdot V_x = \left( M + \frac{2}{3} \pi k_0 a b^2 \right) \frac{\text{arc tg } E}{E} - 2 \pi k_0 a b^2 \frac{E - \text{arc tg } E}{E^3}.$$

Osservando che  $E$  tende a zero col crescere infinito di  $x_1$ , e sviluppando in serie  $\text{arc tg } E$  si ha

$$x_1 V_x - M = -\frac{M E^2}{3} + \frac{8}{45} \pi k_0 a b^2 \cdot E^2 + H \cdot E^4,$$

dove  $H$  rimane finita quando  $E$  tende a zero. Quindi tenuto conto della (17):

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow \infty} [x_1^2 (x_1 V_x - M)] &= -\frac{M}{3} (b^2 - a^2) + \frac{8}{45} (b^2 - a^2) \pi k_0 a b^2 = \\ &= -\frac{M a^2 i^2}{3} \left( 1 - \frac{8}{15} \frac{\pi k_0 a b^2}{M} \right). \end{aligned}$$

Introducendo per  $k_0$  l'espressione data dalla (16) e ricordando le (14') avremo dunque

$$Q - P = \frac{M a^2 i^2}{3} \left[ 1 - \frac{4 \omega^2 i^3 a b^2}{15 \cdot f M (3 + i^2) \text{arc tg } i - 3 i} \right]. \quad (18)$$

È questa la espressione cercata.

(Per piccoli valori di  $i$ , collo sviluppo in serie si ottiene, a meno di termini in  $i^4$ ,  $i^2 \omega^2$ :

$$Q - P = \frac{M a^2}{3} \left( i^2 - \frac{\omega^2 b^2 a}{f M} \right). \quad (18')$$

Il 2.° termine entro parentesi esprime prossimamente il rapporto fra la  $f^a$  centrifuga all'equatore e la gravità media. La relazione approssimata (18') è ben conosciuta).

§ 7. *Una estesa classe di corpi di attrazione nulla.* La superficie  $S$  sia una sfera di raggio  $R$ , il che non esige propriamente, che il corpo sia limitato da un contorno sferico; giacchè la costruzione che segue, vale anche, dal punto di vista teorico, nel caso in cui una parte dello spazio  $\tau$  sia a densità nulla.

Indichiamo ancora con  $\rho_1, \theta_1, v_1$  le coordinate polari del punto generico dello spazio  $\tau$ , essendo il polo delle coordinate nel centro della sfera. Sulla sfera concentrica alla  $S$  e di raggio  $\rho_1 (< R)$  la densità  $h$  potrà essere considerata come funzione di  $\theta_1, v_1$  e, salve le note restrizioni, sviluppata in serie di funzioni sferiche  $Y_n(\theta_1, v_1)$ . I coefficienti di questi sviluppi varieranno con  $\rho_1$ ; or bene noi supporremo che ciascun d'essi sia integrabile rispetto a  $\rho_1$  nell'intervallo  $(0, R)$ .

Porremo pertanto

$$h = \sum_{s=0}^{\infty} Y_s(\theta_1, v_1).$$

La  $Y_s$  può alla sua volta esprimersi come somma delle  $2s+1$  funzioni sferiche fondamentali  $Y_{si}$  di ordine  $s$  moltiplicate per dei coefficienti indipendenti da  $\theta_1, v_1$  in guisa che

$$Y_s = \sum_{i=1}^{2s+1} Y_{si}(\theta_1, v_1) A_{si}.$$

Ammetteremo dunque che i coefficienti  $A_{si}$  siano integrabili rispetto a  $\rho_1$  nell'intervallo  $(0, R)$ . Avremo così

$$h = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2s+1} A_{si} Y_{si}(\theta_1, v_1). \quad (19)$$

E per le note proprietà delle f.<sup>1</sup> sferiche, indicando con  $d\Omega$  l'elemento angolare di spazio e integrando su tutta la sfera di raggio  $1$ :

$$\int_{4\pi} h P_n \cdot d\Omega = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} A_{ni} Y_{ni}(\theta, v).$$

Sostituendo nella (2) ove poniamo  $d\tau = \rho^2 \cdot d\rho \cdot d\Omega$

$$\int_0^R \int_{4\pi} h \rho^{n+2} P_n \cdot d\Omega \cdot d\rho = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} Y_{ni}(\theta, v) \int_0^R A_{ni} \rho^{n+2} \cdot d\rho = 0.$$

E poichè per l'annullarsi di una funzione sferica di ordine  $n$  è necessario che si annullino i coefficienti di ciascuna delle f.<sup>1</sup> sferiche fondamentali che la costituiscono, avremo come condizione necessaria e sufficiente pel verificarsi della (2)

$$\int_0^R \rho^{n+2} A_{ni} \cdot d\rho = 0. \quad (20)$$

Ciascuno dei coefficienti dello sviluppo di  $h$  è pertanto legato alla sola condizione (20). Uno dei più semplici modi particolari di assegnare questi coefficienti sarà, p. es., porre:

$$A_{ni} = \alpha + \beta \frac{\rho}{R} + \gamma \frac{\rho^2}{R^2} + \dots$$

dove le costanti  $\alpha \beta \gamma \dots$  sono legate alla sola condizione

$$\frac{\alpha}{n+3} + \frac{\beta}{n+4} + \frac{\gamma}{n+5} + \dots = 0$$

che, in questo caso, equivale alla (20) (\*).

Se dunque in una porzione sferica  $S$  dello spazio occupato da un corpo  $C$ , si muta la distribuzione della massa, col dare alla densità un incremento espresso dalla (19), ove i coefficienti  $A_{ni}$  soddisfacciano alla (20), l'attrazione del corpo  $C$  all'esterno non sarà alterata.

§ 8. Si può ancora porre la condizione che lo *spostamento di massa* avvenga *secondo il raggio vettore*, in guisa che non si alteri la quantità totale di materia contenuta in ogni cono avente il vertice nel centro della sfera. È facile vedere che, in questo caso, i coefficienti  $A$ , oltrechè alla (20) debbono anche soddisfare alla

$$\int_0^R A_{ni} \rho^2 \cdot d\rho = 0.$$

Ovvero si può chiedere che *i mutamenti di distribuzione avvengano nelle immediate vicinanze della superficie  $S$* .

Basterà allora, indicando con  $R_1$  un valore compreso fra 0 ed  $R$  e abbastanza prossimo ad  $R$ , dare agli  $A_{ni}$  valore nullo per  $\rho$  compreso fra 0 ed  $R_1$ , e, nell'intervallo  $(R_1, R)$  esprimere gli stessi  $A_{ni}$  mediante funzioni integrabili di  $\rho$  soggette alla sola condizione

$$\int_{R_1}^R A_{ni} \rho^{n+2} \cdot d\rho = 0.$$

---

(\*) È facile vedere che occorre che la  $\alpha$  sia nulla per tutti i valori di  $n$  salvo per  $n=0$ , affinchè la densità  $h$  abbia un valore unico e determinato nel centro della sfera.

§ 9. Le deduzioni dei due precedenti paragrafi non esigono, come già si è osservato che il corpo  $\tau$  riempia tutto lo spazio limitato dalla sfera  $S$ , sicchè la superficie limitante il corpo può avere una forma molto generale diversa dalla sferica, senza che le formole trovate perdano, teoricamente, il loro valore. Ma è da osservare che, in questo caso, per ogni valore di  $\rho$  compreso in un tratto finito fra zero ed  $R$ , i valori della densità  $h$  sulla sfera di raggio  $\rho$  presentano necessariamente delle discontinuità. La rappresentazione della  $h$  mediante lo sviluppo (19) può ancora ottenersi; ma gli sviluppi di funzioni *discontinue* in serie di funzioni sferiche, se costituiscono un bel campo di indagine per l'analisi pura, non hanno alcuna pratica utilità nello studio *numerico* dei fatti naturali.

§ 10. *Altro metodo per rappresentare corpi di attrazione nulla.* Consideriamo una funzione qualsiasi  $f(x, y, z)$  dei punti dello spazio  $\tau$ , limitato dalla superficie  $S$ , la quale sia finita e continua insieme colle sue derivate 1.°, ed abbia le derivate 2.° finite ed integrabili in ogni punto di  $\tau$  e poniamo che nei punti della superficie  $S$  si abbia

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial n} = 0. \quad (22)$$

Posto

$$h = \Delta_2 f, \quad (22')$$

un corpo situato entro lo spazio  $\tau$  e la cui densità nel punto generico sia  $\Delta_2 f$ , sarà di attrazione esterna nulla. Infatti per la nota formola di GREEN si ha, per un punto qualunque esterno alla superficie  $S$

$$0 = \int_{\tau} \Delta_2 f \frac{d\tau}{r} + \int_S \left( f \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS.$$

E poichè, per le ipotesi fatte, il 2.° integrale è nullo, risulta pure nulla la f.° potenziale del corpo sopra ogni punto *esterno*. Reciprocamente, se con  $f$  si indica la funzione potenziale, in un punto *interno*, di un corpo che non esercita alcuna attrazione all'esterno, dovrà, nei punti della superficie, la  $f$  soddisfare alle condizioni (22), e la densità in un punto generico sarà, a meno del divisore costante  $-4\pi$ , espressa dalla (22').

La ricerca dei corpi di attrazione nulla, relativi allo spazio  $\tau$ , può dunque

ridursi alla ricerca di tutte quelle funzioni  $f$  che entro  $\tau$  godono delle menzionate condizioni di regolarità, e sulla  $S$  godono delle proprietà (22).

Poniamo in particolare che la  $S$  sia un ellissoide  $(a, b, c)$ . Posto

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2k$$

e indicando con  $\varphi(x, y, z)$  una funzione che, sulla superficie e nell'interno dell'ellissoide, goda delle dette condizioni di regolarità, potremo porre

$$f(x, y, z) = k^2 \cdot \varphi(x, y, z)$$

con che le condizioni (22) saranno soddisfatte. La densità del corpo nel punto  $(x, y, z)$  sarà allora

$$h = \Delta_2 f = (D^2 - kA) 2\varphi - 4k \sum \frac{x}{a^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k^2 \Delta_2 \varphi, \quad (24)$$

dove

$$D^2 = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}, \quad A = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2},$$

e nella ipotesi più semplice,  $\varphi = \text{cost.}$ :

$$h = \alpha \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right) - \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \frac{x^2}{a^4} - \frac{y^2}{b^4} - \frac{z^2}{c^4} \right) \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$$

dove  $\alpha$  è una costante.

Ritornando al caso in cui la  $S$  sia una sfera di raggio  $R$ , possiamo ritrovare nuovamente il risultato del § 8. Poniamo

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} B_s Y_s,$$

dove  $Y_s$  è funzione sferica dell'ordine  $s$ , e  $B_s$  è funzione del raggio vettore  $\rho$  che ammette derivate 1.° finite e continue e derivate 2.° finite ed integrabili, per  $\rho$  compreso fra 0 ed  $R$ , e si suppone che, per  $\rho = R$ , si abbia:

$$B_s = 0, \quad \frac{d B_s}{d \rho} = 0. \quad (25)$$

Avremo, ricordando la espressione del  $\Delta_2$  in coordinate polari:

$$\Delta_2 (B_s Y_s) = \frac{Y_s}{\rho^2} \frac{d}{d \rho} \left( \rho^2 \frac{d B_s}{d \rho} \right) + \frac{B_s}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y_s}{\partial \theta} \right) + \frac{B_s}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_s}{\partial v^2}.$$

Ovvero, tenuto conto della equazione differenziale cui la  $Y_s$  soddisfa

$$\Delta_2(B_s, Y_s) = \frac{Y_s}{\rho^2} \left\{ \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \frac{dB_s}{d\rho} \right) - s(s+1) B_s \right\}.$$

Poniamo

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \frac{dB_s}{d\rho} \right) - \frac{s(s+1)}{\rho^2} B_s = A_s, \quad (26)$$

sarà

$$h = \sum_0^{\infty} A_s Y_s$$

la densità, nel punto generico, di un corpo d'attrazione esterna nulla contenuto entro la sfera di raggio  $R$ .

Con due successive integrazioni per parti si ha, tenuto conto delle (22):

$$\int_0^R \rho^s \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \frac{dB_s}{d\rho} \right) d\rho = -s \int_0^R \rho^{s+1} \frac{dB_s}{d\rho} d\rho = s(s+1) \int_0^R \rho^s \cdot B_s \cdot d\rho.$$

Sicchè la (26) moltiplicata per  $\rho^{s+2}$  è integrata rispetto a  $\rho$  fra zero ed  $R$  dà:

$$\int_0^R \rho^{s+2} A_s \cdot d\rho = 0$$

ossia, di nuovo, la condizione già trovata nel § 7.

§ 11. *Altri corpi ellissoidici di attrazione nulla.* Una classe molto generale di corpi di attrazione nulla a contorno ellissoidico si è ottenuta colla formola (24) del precedente paragrafo. Possiamo ottenerne altre valendoci del teorema di LAPLACE relativo alla attrazione di due ellissoidi omofocali, dal quale si deduce che una distribuzione per strati ellissoidici omogenei omofocali (di spessore finito o infinitesimo) esercita attrazione nulla all'esterno, semprechè la massa totale sia nulla.

Si considerino infatti tre ellissoidi omofocali  $E, E_1, E_2$  dei quali il primo esteriore, il terzo interno agli altri due. Supponendoli successivamente riempiti di materia omogenea e dette  $M, M_1, M_2$  le masse,  $V, V_1, V_2$  le f.<sup>1</sup> potenziali rispettive sopra uno stesso punto esterno  $P$ , si deduce dal teorema di LAPLACE

$$\frac{V_1}{V} = \frac{M_1}{M}, \quad \frac{V_2}{V} = \frac{M_2}{M}$$

e quindi, posto:

$$V_2 - V_1 = \Delta V, \quad M_2 - M_1 = \Delta M$$

risulta

$$\Delta V = \frac{V}{M} \cdot \Delta M \quad (27)$$

come espressione della f.<sup>o</sup> potenziale esterna dello strato omogeneo, di massa  $\Delta M$  compreso fra gli ellissoidi  $E_1, E_2$ . Il rapporto  $V : M$  dipende unicamente dai semiassi dell'ellissoide esterno  $E$ , oltrechè, s'intende, dalle coordinate del punto potenziato  $P$ . Se, pertanto, supponiamo lo spazio interno all'ellissoide  $E$  occupato da una massa costituita da strati omogenei limitata da ellissoidi omofocali, la funzione potenziale di questa massa sopra un punto esterno sarà

$$v = m \frac{V}{M}$$

dove  $m$  è la grandezza della massa totale. Sarà necessario e sufficiente che questa sia nulla perchè sia pur nulla  $v$ . Indichiamo con  $\lambda$  la maggior radice dell'equazione

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1$$

( $a < b < c$ ;  $\lambda > -a^2$ ) dovrà la densità  $h$  variare solo con  $\lambda$ .

Posto  $h = \varphi(\lambda)$  (dove  $\varphi$  potrà anche presentare discontinuità ordinarie, e mantenersi costante per tratti finiti dell'intervallo  $(0, -a^2)$ ), la condizione:  $m = 0$  si esprime, com'è facile verificare, con

$$\int_{-a^2}^0 \varphi(\lambda) \cdot d\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} = 0$$

ovvero con

$$\int_{-a^2}^0 \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} \left\{ \frac{1}{a^2 + \lambda} + \frac{1}{b^2 + \lambda} + \frac{1}{c^2 + \lambda} \right\} \varphi(\lambda) \cdot d\lambda = 0.$$

§ 12. *Un terzo modo di costruzione di corpi di attrazione nulla.* Si consideri un corpo sferico di raggio  $c$ , composto di croste sferiche omogenee; sia  $\varphi(r)$  la densità a distanza  $r$  dal centro. Se è soddisfatta la condizione

$$\int_0^c r^2 \varphi(r) \cdot dr = 0,$$



sarà nulla la massa totale d'un tal corpo sferico, e quindi nulla la funzione potenziale di esso sopra ogni punto esterno. Chiameremo *sferula* un corpo fittizio di tale costituzione. Distribuendo quante si vogliono sferule entro uno spazio finito e considerando un corpo la cui densità in un punto sia la somma algebrica delle densità delle sferule cui quel punto appartiene, la funzione potenziale di questo corpo sarà nulla per ogni punto esterno ad esso.

Dato ora lo spazio finito  $\tau$ , limitato dalla superficie  $S$ , consideriamo entro questo spazio distribuite infinite sferule in guisa che nessun punto di alcuna di esse sia esterno ad  $S$ .

Per una qualunque di tali sferule, la funzione  $\varphi(r)$  si porrà uguale a

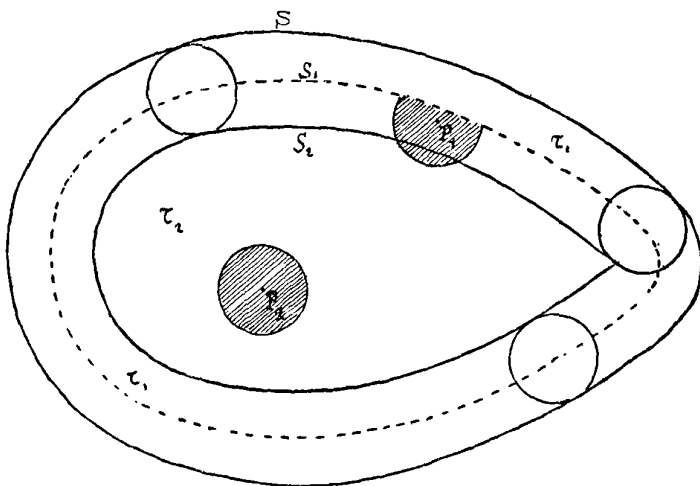
$$b \cdot f(r, c) \cdot d\tau,$$

ove  $b$  e  $c$  siano funzioni delle coordinate del centro della sferula e si suppone, ben inteso, verificata la condizione

$$\int_0^c r^2 f(r, c) \cdot dr = 0. \quad (28)$$

Si potranno supporre i valori del raggio  $c$  abbastanza piccoli perchè esista una porzione finita  $\tau_2$  (limitata nella figura dalla superficie  $S_2$ ) dello spazio  $\tau$ , i punti della quale non appartengono ad alcuna delle sferule che toccano la superficie esterna  $S$  (\*).

Supponiamo  $c =$  costante. Allora per un punto qualunque  $P_2$  dello spazio  $\tau_2$ , considerato il solido sferico  $T$  di raggio  $c$  e centro  $P_2$ , in ogni punto di questo solido vi sarà il centro di una sferula che darà



(\*) Accadrà, ove le curvature delle sezioni normali della  $S$  siano superiori a quelle delle sferule che la toccano, che restino porzioni dello spazio  $\tau$ , i punti delle quali non appartengono ad alcuna sferula. Ma ciò potrà evitarsi assumendo abbastanza piccoli i raggi  $c$ , se le dette curvature non superano un limite finito.

un contributo alla densità del punto  $P_2$ . La densità nel punto  $P_2$  sarà quindi

$$h = \int_T b \cdot f(r, c) \cdot d\tau \quad (29)$$

ove  $r$  è la distanza dell'elemento  $d\tau$  dal punto  $P_2$ .

Invece per un punto  $P_1$  del rimanente spazio  $\tau_1$  (compreso fra le superficie  $S_2$  ed  $S$ , consideriamo la superficie  $S_1$  luogo dei centri delle sferule che toccano la  $S$ ; alla (29) andrà sostituita la

$$h = \int_{T'} b f(r, c) \cdot d\tau \quad (29')$$

dove con  $T'$  si intende lo spazio compreso fra la superficie  $S_1$  e quella porzione (tratteggiata in figura) di sfera di centro  $P_1$  e raggio  $c$  che è interna ad  $S_1$ .

Poniamo nella (29)  $d\tau = r^2 \cdot dr \cdot d\Omega$  essendo  $r$  la distanza del punto generico dal punto  $P_2$  e  $d\Omega$  l'elemento angolare di spazio intorno a  $P_2$ . Avremo

$$h = \int_0^c r^2 \cdot dr \cdot f(r, c) \int_{4\pi} b \cdot d\Omega = 4\pi \int_0^c r^2 \cdot M \cdot f(r, c) \cdot dr \quad (30)$$

ove con  $M$  indichiamo il valore medio fra quelli che la funzione  $b$  assume nei punti di una sfera di centro  $P_2$  e raggio  $r$ . Supponiamo che la funzione  $b$  sia regolare e tale che il valore del suo parametro differenziale d'ordine  $2n+2$  sia o nullo o trascurabile. Allora, come ho dimostrato in altro mio lavoro (\*), si avrà

$$M = b_0 + \sum_{i=1}^n \frac{r^{2i}}{(2i+1)!} (\Delta_{2i} b)_0$$

dove  $b_0$  è il valore di  $b$  nel punto  $P_2$  e  $(\Delta_{2i} b)_0$  è il valore del parametro differenziale d'ordine  $2i$  nel punto stesso. Sostituendo nella (30) e tenuto conto della (28) avremo:

$$h = 4\pi \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{(2i+1)!}$$

dove le  $K_i$  sono costanti date da

$$K_i = \int_0^c r^{2i+2} f(r, c) \cdot dr.$$

(\*) *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, XVIII, 1.º sem., serie 5.ª, pag. 182 (febbraio 1909).

§ 13. In particolare se la  $b$  è funzione armonica in  $\tau$ , risulta  $h = 0$ . Se, più generalmente,  $\Delta_2 b$  è costante ( $= a$ ), e quindi son nulli i parametri differenziali d'ordine superiore, risulterà pure  $h = \text{costante}$ , ossia

$$h = \frac{2\pi a}{3} \int_0^c r^4 f(r, c) dr. \quad (30')$$

(Una delle più semplici forme che può assumere la  $f(r, c)$  compatibilmente colla condizione (28), è

$$f(r, c) = c - \frac{4}{3} r.$$

La (30') dà allora  $h = -\frac{2\pi a c^6}{135}$ ).

Segue da ciò che *si può sempre in un corpo d'attrazione nulla supporre costante la densità per una porzione finita dello spazio occupato dal corpo.*

E di qui si deduce che, *dato un corpo C omogeneo, di densità  $k_0$ , si può generalmente (salve le restrizioni che stabiliremo riguardo alla superficie esterna) considerare uno strato materiale esterno di spessore finito costante, aderente al corpo, e di densità variabile  $k'$  la cui funzione potenziale esterna sia eguale a quella del corpo C medesimo.* Per dimostrarlo indichiamo con  $\tau_2$  lo spazio occupato da C, con  $S_2$  la superficie che lo limita, e consideriamo lo spazio  $\tau_1$ , i cui punti appartengono alle infinite sfere di raggio costante  $c$  che toccano esternamente la  $S_2$  senza penetrare nello spazio  $\tau_2$ . Se la  $S_2$  è convessa, o se, presentando delle regioni di concavità, la curvatura delle sezioni normali che volgono la concavità all'esterno non eccede, in valore assoluto un certo limite finito, si potrà sempre assumere il raggio  $c$  abbastanza piccolo perchè *ogni* punto della  $S_2$  sia punto di contatto di una sfera di raggio  $c$  tutta esterna al corpo  $\tau_2$ . In tal caso non vi sarà alcuna soluzione di continuità fra lo spazio  $\tau_1$  e il  $\tau_2$ , e potremo dire che il 1.º *aderisce* al 2.º; di più la superficie  $S$  limitante esternamente  $\tau_1$  risulterà parallela alla  $S_2$  e a distanza costante  $2c$  da questa.

Entro lo spazio  $\tau_1 + \tau_2$  distribuiamo, come nel paragrafo precedente, un sistema continuo di sferule di raggio  $c$ , assumendo  $b$  uguale ad una funzione di 2.º grado delle coordinate, p. es.

$$b = \frac{a}{6} (x^2 + y^2 + z^2) \quad (a = \text{costante}).$$

Sarà  $\Delta_2 b = a$ . Nell'interno di  $\tau_2$  risulterà la densità  $h$  data dalla formola (30') e quindi costante. Assumeremo la costante  $a$  in guisa che risulti  $h = k_0$ . Nello spazio  $\tau_1$  la densità  $h'$  risulterà espressa dalla (29') e sarà variabile da punto a punto. Posto  $k' = -h'$  è chiaro che una massa distribuita nello spazio  $\tau_1$  con densità generica  $k'$ , eserciterà all'esterno una attrazione uguale a quella esercitata dalla massa omogenea  $k_0$  contenuta nello spazio  $\tau_2$ .

RICERCA DI ALCUNI MODI DI DISTRIBUZIONE DELLA MASSA TERRESTRE,  
CHE SONO COMPATIBILI COLLA SUPERFICIE DI LIVELLO ELLISSOIDICA.

§ 14. *Funzione potenziale esterna della attrazione terrestre nel caso in cui una superficie di livello esteriore sia ellissoide di rotazione schiacciato:  $E(a, b, b; a < b)$ .* Già abbiamo ricordato al § 6 quale sia l'espressione, in termini finiti, di questa funzione potenziale  $V$ . Qui giova piuttosto valersi di un'altra più succinta espressione. Nella citata Nota del 1894 ho dimostrato come quella funzione possa ottenersi come somma della f.<sup>o</sup> potenziale  $V_1$  di uno *strato* ellissoidico omotetico e di quella  $V_2$  di un ellissoide omogeneo di densità  $k_0$ , opportunamente fissata; in guisa che

$$V = \frac{\mu}{2} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{R}} + \pi k_0 a b^2 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{h}{\sqrt{R}} ds = V_1 + V_2 \quad (31)$$

dove

$$h = 1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2 + z^2}{b^2 + s}, \quad R = (a^2 + s)(b^2 + s)^2$$

(l'asse  $x$  è assunto come asse geometrico di rotazione dell'ellissoide, e insieme come asse di rotazione della terra).

La ausiliaria  $k_0$  è data dalla relazione già ricordata a § 6

$$\frac{\omega^2}{2\pi f k_0} = \frac{(3 + i^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} i - 3i}{i^3}; \quad \left( i = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a}} \right) \quad (16)$$

$\lambda$  è la maggior radice dell'equazione

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2 + z^2}{b^2 + \lambda} = 1. \quad (32)$$

Quanto alla  $\mu$ , essa è determinata dalla condizione che sia

$$\lim_{\lambda=\infty} \sqrt{\lambda} V = M$$

ove  $M$  è la massa totale della Terra. E poichè

$$\lim_{\lambda=\infty} \sqrt{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{R}} = 2, \quad \lim_{\lambda=\infty} \sqrt{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{h}{\sqrt{R}} ds = \frac{4}{3}$$

risulta

$$\mu = M - \frac{4}{3} \pi k_0 a b^2. \quad (33)$$

Il valore numerico della  $k_0$  può, nel caso della Terra, calcolarsi all'ingrosso osservando che se si indica con  $k_m$  la densità media della Terra, e con  $G_m$  la gravità media superficiale, si ha prossimamente

$$2 \pi f = \frac{3}{2} \frac{G_m}{a k_m}, \quad \frac{\omega^2 a}{G_m} = \frac{1}{288}$$

donde  $\frac{\omega^2}{2 \pi f} = \frac{k_m}{432}$ . D'altra parte, se si adotta il valore Besseliano dello schiacciamento terrestre, il secondo membro della (16) assume prossimamente il valore 1:537. Ne segue

$$k_0 = 1,3 k_m \quad \text{circa.}$$

La  $\mu$  definita dalla (33) è dunque negativa, ed è uguale in valore assoluto a circa *tre decimi* della massa totale terrestre.

§ 15. *Distribuzione corrispondente al termine  $V_2$ .* Avendo già, nella prima parte di questo lavoro, trattato con una certa generalità il problema delle possibili alterazioni che può subire una distribuzione spaziale di massa nell'interno di una superficie chiusa  $S$  senza che resti alterata la f.° potenziale esterna, basterà ora che cerchiamo una, o qualcuna, delle distribuzioni compatibili colla espressione (31) della f.° potenziale dell'attrazione terrestre.

Quanto al termine  $V_2$ , ad esso si può far corrispondere o una distribuzione omogenea con densità  $k_0$ , o, più generalmente, una distribuzione per strati ellissoidici omofocali di spessore finito o infinitesimo (§ 11) con den-

sità variabile da strato a strato e soggetta alla sola condizione che la massa totale sia  $\frac{4}{3} \pi k_0 a b^2$ .

§ 16. *Il termine  $V_i$ .* Poichè dalle effettive distribuzioni di massa vogliamo naturalmente escludere quelle per le quali la densità spaziale è in qualche punto infinita, dobbiamo sostituire allo *strato superficiale*, del quale il termine  $V_i$  esprime la funzione potenziale esterna, una massa distribuita, con densità spaziale finita, in tutto o in parte dello spazio racchiuso dall'ellissoide  $E$ .

Si tratta di trovare una funzione  $V_i$  finita e continua, insieme colle sue derivate 1.° e colle derivate 2.° finite ed integrabili, all'interno di  $E$ , tale che nei punti di  $E$  si abbia

$$V_i = V_1, \quad \frac{\partial V_i}{\partial r} = \frac{\partial V_1}{\partial r} \quad (34)$$

indicando con  $r$  una delle coordinate.

Una classe estesa di soluzioni si ottiene ponendo

$$V_i = A - \frac{\mu}{2 a b^2} \Phi(\lambda) \quad (35)$$

dove  $A$  è una costante  $= \frac{\mu}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{R}}$  e  $\Phi(\lambda)$  soddisfa alle condizioni

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi'(0) = 1, \quad (36)$$

e a condizioni di regolarità che fra poco diremo. La 1.ª delle (34) è evidentemente verificata. Quanto alle altre, osserviamo che dalla (35) si deduce:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = - \frac{\mu}{2 a b^2} \Phi'(\lambda) \frac{\partial \lambda}{\partial x},$$

e dalla espressione di  $V_1$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \frac{-\mu}{2 \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)}} \frac{\partial \lambda}{\partial x}$$

Quindi nei punti di  $E$  ( $\lambda = 0$ )

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = \frac{\partial V_1}{\partial x}.$$

La densità corrispondente all'espressione (35) della  $V_i$  è

$$k_1 = -\frac{1}{4\pi} \Delta_2 V_i = \frac{\mu}{8\pi a b^2} \cdot \Delta_2 \Phi(\lambda). \quad (37)$$

Se al termine  $V_2$  della (31) si fa corrispondere una distribuzione omogenea con densità  $k_0$  e si osserva che la (33) può scriversi

$$\mu = -\frac{4}{3} \pi (k_0 - k_m) a b^2,$$

risulterà la densità totale, nel punto generico, data da :

$$\left. \begin{aligned} k &= k_0 + k_1 = k_0 - \frac{k_0 - k_m}{6} \Delta_2 \Phi(\lambda) \\ &= k_m \left\{ 1, 3 - 0, 05 \cdot \Delta_2 \Phi(\lambda) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

poichè, come si è visto,  $k_0 = 1, 3 k_m$ .

Si ha poi

$$\Delta_2 \Phi(\lambda) = \Phi'(\lambda) \cdot \Delta_1 \lambda + \Phi''(\lambda) \cdot \Delta_1 \lambda \quad (39)$$

dove le espressioni di  $\Delta_1 \lambda$ ,  $\Delta_2 \lambda$  si deducono senza difficoltà dalla (32) considerandovi  $\lambda$  come funzione di  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Posto

$$\frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2 + z^2}{(b^2 + \lambda)^2} = P,$$

si ha

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{2x}{(a^2 + \lambda) P}, \quad \Delta_1 \lambda = \frac{4}{P}$$

$$\Delta_2 \lambda = \frac{2}{P} \left( \frac{1}{a^2 + \lambda} + \frac{1}{b^2 + \lambda} + \frac{1}{c^2 + \lambda} \right) = \frac{\Delta_1 \lambda}{2} \left( \frac{1}{a^2 + \lambda} + \frac{1}{b^2 + \lambda} + \frac{1}{c^2 + \lambda} \right)$$

e sostituendo nella espressione di  $\partial V_i : \partial x$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = -\frac{\mu x}{4 a b^2 (a^2 + \lambda)} \Phi'(\lambda) \cdot \Delta_1 \lambda. \quad (40)$$

Affinchè la soluzione (35) sia ammissibile, occorre che le espressioni (39) (40) rimangano finite in tutto lo spazio interno ad  $E$ . Questa condizione limita di molto la scelta della funzione  $\Phi$ . Per vederlo ricordiamo come si comportino le funzioni  $\Delta_1 \lambda$ ,  $\Delta_2 \lambda$  nell'interno dell'ellissoide.

§ 17. Consideriamo più generalmente un ellissoide a tre assi ( $a < b < c$ ), e sostituiamo, per un momento, alla lettera  $\lambda$  la  $\rho_1$ , chiamando  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  le ordinarie coordinate ellittiche, radici della equazione

$$\frac{x^2}{a^2 + \rho} + \frac{y^2}{b^2 + \rho} + \frac{z^2}{c^2 + \rho} = 1, \quad (41)$$

$$+\infty > \rho_1 \geq -a^2 \geq \rho_2 \geq -b^2 \geq \rho_3 \geq -c^2. \quad (42)$$

Indicando con

$$ds^2 = H_1^2 \cdot d\rho_1^2 + H_2^2 \cdot d\rho_2^2 + H_3^2 \cdot d\rho_3^2$$

il quadrato dell'elemento lineare dello spazio in coordinate ellittiche, abbiamo

$$H_1^2 = \frac{1}{4} \frac{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3)}{(a^2 + \rho_1)(b^2 + \rho_1)(c^2 + \rho_1)}$$

ed analoghe espressioni per  $H_2, H_3$ . Quindi

$$\Delta_1 \rho_1 = \frac{1}{H_1^2} = \frac{4(a^2 + \rho_1)(b^2 + \rho_1)(c^2 + \rho_1)}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3)} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 \rho_1 &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left( \frac{H_2 H_3}{H_1} \right) - \\ &= \frac{2}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3)} \left[ (a^2 + \rho_1)(b^2 + \rho_1) + (b^2 + \rho_1)(c^2 + \rho_1) + (c^2 + \rho_1)(a^2 + \rho_1) \right]. \end{aligned}$$

Poichè  $a$  si suppone differente da  $b$  (mentre  $b$  in particolare potrà essere uguale a  $c$ , in guisa che il nostro ragionamento comprende anche il caso dell'ellissoide di rotazione considerato nei precedenti paragrafi), sarà  $\rho_1 > \rho_3$ . Si ha poi generalmente  $\rho_1 > \rho_2$ , salvo nei punti della ellisse focale dove  $\rho_1 = \rho_2 = -a^2$ . Sicche la  $\Delta_2 \rho_1$  diviene infinita nei punti dell'ellisse stessa, e soltanto in quei punti.

Quanto a  $\Delta_1 \rho_1$ , questa quantità rimane sempre finita. Nei punti esterni al piano  $yz$  e nella regione al piano stesso che è *esterna* all'ellisse focale si ha  $\rho_1 > \rho_2, \rho_1 > -a^2$  e quindi ivi  $\Delta_1 \rho_1$  è finita e differente da zero. Nei punti *interni* alla ellisse stessa  $\rho_1 = -a^2 > \rho_2$  e quindi  $\Delta_1 \rho_1 = 0$ . Nei punti della ellisse finalmente per essere  $\rho_1 - \rho_2 = -a^2$  si ha dalla (43)

$$\Delta_1 \rho_1 = \frac{4(b^2 + \rho_1)(c^2 + \rho_1)}{\rho_1 - \rho_3} = \frac{4(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}{-(a^2 + \rho_3)}.$$



E poichè

$$c^2 \geq -\rho_3 \geq b^2,$$

sarà

$$4(b^2 - a^2) < \Delta_1 \rho_1 < 4(c^2 - a^2).$$

Nel caso dell'ellissoide di rotazione  $\Delta_1 \rho_1 = 4(b^2 - a^2)$  nei punti dell'ellisse focale.

Osserviamo poi che, chiamando  $\alpha$  il 1.<sup>o</sup> coseno di direzione della normale all'ellissoide (32) nei punti  $x, y, z$ , si ha

$$\alpha = \frac{x}{(a^2 + \lambda)\sqrt{P}} = \frac{x}{2(a^2 + \lambda)}\sqrt{\Delta_1 \lambda},$$

donde

$$\frac{x}{(a^2 + \lambda)}\Delta_1 \lambda = 2\alpha\sqrt{\Delta_1 \lambda}.$$

Ne segue, per quel che ora si è detto intorno al  $\Delta_1 \rho_1$ , che, se  $\Phi'(\lambda)$  si mantiene finita per  $\lambda$  compreso fra 0 e  $-a^2$ , tali si manterranno pure le derivate prime della  $V_i$  [formola (40)].

§ 18. *Differenza fra la sfera e gli ellipsoidi, riguardo alle soluzioni del tipo (35).* Nel caso della sfera il  $\Delta_2 \lambda$  è costante = 6, come facilmente si verifica; mentre nel caso dell'ellissoide, sia pure di piccolissimo schiacciamento, vi ha una linea (ellisse focale) in ogni punto della quale la detta funzione diviene infinita. Da ciò deriva che talune espressioni di  $V_i$ , che possono avere un significato fisico nel caso della sfera, non sono, neppure per approssimazione, usufruibili nel caso dell'ellissoide, anche poco differente dalla sfera; altre soluzioni adottabili sia per la sfera che per l'ellissoide, conducono, nei due casi, a distribuzioni molto differenti della densità in prossimità del centro. Vediamone un esempio.

Poniamo

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{2a^2} \left[ (a^2 + \lambda)^2 - a^4 \right];$$

questa espressione soddisfa alla (36). Avremo

$$\Delta_2 \Phi(\lambda) = \frac{\Delta_1 \lambda}{2} \left( \frac{1}{a^2 + \lambda} + \frac{2}{b^2 + \lambda} \right) \frac{a^2 + \lambda}{a^2} + \frac{\Delta_1 \lambda}{a^2}.$$

Nel caso della sfera, chiamando  $r$  il raggio vettore del punto  $(x, y, z)$

si ha  $\alpha^2 + \lambda = r^2$ , quindi  $\Delta_1 \lambda = 4r^2$ . La  $\Delta_2 \Phi(\lambda)$ , e con essa la densità  $k_1$ , tende dunque continuamente a zero coll'avvicinarsi del punto al centro. Nel caso dell'ellissoide di rotazione, invece, mentre  $\alpha^2 + \lambda$  e  $\Delta_1 \lambda$  si annullano in tutti i punti *interni* all'ellisse focale, lungo questa linea si ha  $\alpha^2 + \lambda = 0$ ,  $\Delta_1 \lambda = 4(b^2 - \alpha^2)$  e perciò  $\Delta_2 \Phi(\lambda) = \frac{6}{\alpha^2}(b^2 - \alpha^2)$ . La densità presenta quindi, nel piano equatoriale, una discontinuità, quando si attraversa la ellisse focale.

§ 19. *Altre espressioni della  $V_i$ .* Ma possiamo alla  $V_i$  attribuire altre espressioni, le quali, a differenza di quelle considerate nel § 17, non danno luogo a discontinuità nei valori della densità.

Poniamo

$$h = 1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2},$$

e diamo a  $V_i$  la espressione

$$V_i = A + \frac{1}{D} f(h),$$

dove

$$D = \frac{x^2}{\alpha^4} + \frac{y^2 + z^2}{b^4} + Bh, \quad B = \frac{\frac{1}{\alpha^4} + \frac{2}{b^4}}{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{2}{b^2}}.$$

La  $A$  è una costante che ha lo stesso significato che nella (35). Assoggettiamo la  $f(h)$  alle condizioni

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = \frac{\mu}{2\alpha b^2},$$

e di più alle condizioni di essere finite e continue, insieme colla sua derivata prima, e di avere la derivata 2.<sup>a</sup> finita nell'intervallo (0, 1). Avremo

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = -\frac{f'(h)}{D} \frac{2x}{\alpha^2} - \frac{2xf'(h)}{\alpha^2 D^2} \left( \frac{1}{\alpha^2} - B \right).$$

Alla superficie dell'ellissoide  $E$

$$\left( \frac{\partial V_i}{\partial x} \right)_0 = \frac{-\mu x}{\alpha^3 b^2 D}.$$

D'altra parte, pei punti della superficie stessa, la  $D$  ha lo stesso valore che la  $P$  che figura nelle formole del § 16; sicchè ivi  $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{2x}{a^2 D}$ ; donde

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)_0 = \frac{-\mu x}{a^3 b^2 D} = \left(\frac{\partial V_i}{\partial x}\right)_0.$$

Tenuto conto della espressione di  $B$ , si ha senza difficoltà

$$\Delta_2 V_i = \frac{4f''(h)}{D} S \frac{x^2}{a^4} - \frac{2f'(h)}{D} S \frac{1}{a^2} + \frac{4f'(h)}{D^2} \left( S \frac{x^2}{a^6} - B S \frac{x^2}{a^4} \right) + \left. \begin{aligned} &+ \frac{8f(h)}{D^3} \left( S \frac{x^2}{a^8} - 2B S \frac{x^2}{a^6} + B^2 S \frac{x^2}{a^4} \right), \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

dove il simbolo  $S$  ha il significato indicato dalla

$$S \frac{x^2}{a^4} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2 + z^2}{b^4}$$

ed analoghe.

Per le condizioni di regolarità cui la  $f(h)$  si suppone soggetta, il 2.<sup>o</sup> membro della (47), e con esso la densità  $k_1$ , rimangono finiti in ogni punto interno all'ellissoide  $E$ . Coll'avvicinarsi del punto  $(x, y, z)$  al centro dell'ellissoide, lungo un qualsiasi raggio vettore, la  $D$  tende con continuità al valore  $B$  e la  $\Delta_2 V_i$  tenderà con continuità al valore  $-\frac{2f'(1)}{B} S \frac{1}{a^2}$ . Nè vi sarà differenza essenziale di comportamento della  $\Delta_2 V_i$  dal caso della sfera a quello dell'ellissoide; e si può notare che, col valore che abbiamo scelto per  $B$ , i termini dopo i due primi nel 2.<sup>o</sup> membro della (47) si manterranno sempre *piccolissimi* pel caso di un ellissoide poco differente dalla sfera.

Per avere un'idea del modo di variare di  $\Delta_2 V_i$  (e quindi della densità) nell'interno di  $E$ , vediamo che cosa diventa la (47) nel caso della sfera ( $a = b$ ). Allora, posto  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ,

$$B = \frac{1}{a^2}, \quad D = \frac{1}{a^2}, \quad h = 1 - \frac{r^2}{a^2}$$

$$\Delta_2 V_i = 4f''(h) \frac{r^2}{a^2} - 6f'(h). \quad (47')$$

Poniamo ad esempio:

$$f(h) = A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3; \quad \left( A_1 = \frac{\mu}{2 a b^2} \right)$$

risulterà

$$\Delta_2 V_i = B_1 + B_2 \frac{r^2}{a^2} + B_3 \frac{r^4}{a^4},$$

dove

$$B_1 = -6 A_1 - 12 A_2 - 18 A_3,$$

$$B_2 = 20 A_2 + 60 A_3, \quad B_3 = -42 A_3.$$

Le quantità  $B_1, B_2, B_3$  sono legate alla sola condizione

$$B_1 + \frac{3}{5} B_2 + \frac{3}{7} B_3 = -6 A_1 = -\frac{3\mu}{a b^2}.$$

§ 20. Le formole del paragrafo precedente stabiliscono in modo esatto quello che dalla teoria di CLAIRAUT era dimostrato soltanto in via approssimata, che cioè: *distribuzioni di massa per strati omogenei, limitati da superficie di rotazione poco differenti da sfere, sono compatibili colla ipotesi che una superficie esterna di livello sia un ellissoide di rotazione schiacciato di piccola eccentricità.* È facilissimo sviluppare in serie procedenti secondo le potenze della quantità  $\frac{b^2 - a^2}{a^2} = i^2$  il 2.<sup>o</sup> membro della (47). I termini indipendenti da  $i^2$  coincidono naturalmente col 2.<sup>o</sup> membro della (47). A meno di termini in  $i^4$  si ha poi

$$h = 1 - \frac{r^2}{a^2} + \frac{i^2 (y^2 + z^2)}{a^2}, \quad B = \frac{1}{a^2} \left( 1 - \frac{2}{3} i^2 \right),$$

$$D = \frac{1}{a^2} \left( 1 - \frac{2}{3} i^2 \right) - \frac{i^2 (y^2 + z^2)}{a^4} + \frac{2}{3} \frac{i^2 r^2}{a^4},$$

$$S \frac{x^2}{a^6} - B S \frac{x^2}{a^4} = \frac{2}{3} \frac{i^2 r^2}{a^6} - \frac{i^2 (y^2 + z^2)}{a^6}.$$

L'ultimo termine, ossia la parentesi che moltiplica  $\frac{8 f(h)}{D^3}$  nel 2.<sup>o</sup> membro della (47), è dell'ordine di  $i^4$ .

§ 21. *Caso dell'ellissoide a tre assi.* La ricerca di distribuzioni interne compatibili colla espressione della f.<sup>o</sup> potenziale esterna è ugualmente agevole nel caso dell'ellissoide a tre assi. Diamone un cenno.

Ho dimostrato, nella citata Memoria del 1894 (\*), che quando una delle superficie d'equilibrio esterne è un ellissoide a tre assi ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ) del quale l'asse  $a$  coincide coll'asse di rotazione del pianeta, la f.<sup>o</sup> potenziale dell'attrazione sopra e fuori dell'ellissoide può scriversi

$$V = \frac{1}{2} M V_1 + k_1 V_2 + k_2 V_3, \quad (48)$$

dove

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{R}}, & V_2 &= \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{b^2 + s} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{3y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s} \right) \frac{ds}{\sqrt{R}}, \\ V_3 &= \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{c^2 + s} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{3z^2}{c^2 + s} \right) \frac{ds}{\sqrt{R}}; \end{aligned} \right\} (49)$$

$\lambda$  è la maggior radice dell'equazione

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1,$$

$$R = (a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s),$$

$k_1$  e  $k_2$  sono due costanti proporzionali al quadrato della velocità angolare e dipendenti da  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Posto

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{D_0^2},$$

$$A_2 = \int_0^{\infty} \frac{ds}{(b^2 + s)(c^2 + s)\sqrt{R}}, \quad B_1 = \int_0^{\infty} \frac{ds}{(b^2 + s)^2\sqrt{R}},$$

$$B_2 = \int_0^{\infty} \frac{ds}{(c^2 + s)(a^2 + s)\sqrt{R}}, \quad C_1 = \int_0^{\infty} \frac{ds}{(c^2 + s)^2\sqrt{R}},$$

$$C_2 = \int_0^{\infty} \frac{ds}{(a^2 + s)(b^2 + s)\sqrt{R}},$$

(\*) *Rendiconti Lincei*, III, 1.<sup>o</sup> sem., 1894, pag. 233.

si deduce facilmente dalle (49) che nei punti della superficie dell'ellissoide

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \frac{2x}{a^3 b c} D_0^2$$

ed analoghe:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_2}{\partial x} &= -2 C_2 x + \frac{4 y^2 x}{a^3 b^5 c} D_0^2, \\ \frac{\partial V_2}{\partial y} &= -6 B_1 y + \frac{4 y^3}{a b^7 c} D_0^2, \\ \frac{\partial V_2}{\partial z} &= -2 A_2 z + \frac{4 y^2 z}{a b^5 c^3} D_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Si hanno analogamente le derivate della  $V_3$  cangiando nelle ultime tre formole  $V_2$  in  $V_3$  e permutando circolarmente le lettere  $(x, y, z)$ ,  $(a, b, c)$ .

Possiamo interpretare l'espressione (48) come la somma della f.<sup>o</sup> potenziale di un ellissoide omogeneo e di quella di tre strati superficiali. Quanto al termine  $\frac{M}{2} V_1$  esso è notoriamente la f.<sup>o</sup> p.<sup>o</sup> di uno strato distribuito sull'ellissoide  $E$ , la cui densità superficiale sia proporzionale alla distanza fra  $E$  ed un ellissoide omotetico, concentrico, infinitamente prossimo. Quanto al termine  $k_1 V_2$ , si osservi che posto

$$\begin{aligned} h_s &= 1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s}, \\ U &= \pi a b c \int_{\lambda}^{\infty} \frac{h_s \cdot ds}{\sqrt{R}}, \end{aligned} \quad (51)$$

si può scrivere

$$V_2 = -\frac{1}{\pi a b^2 c} \frac{\partial U}{\partial b} + \frac{1}{b^2} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{h_s \cdot ds}{\sqrt{R}}.$$

Sicchè, salvo un fattore costante di proporzionalità,  $V_2$  risulta la somma della f.<sup>o</sup> potenziale esterna di un ellissoide omogeneo, e di quella di uno strato superficiale disteso sull'ellissoide  $E$  e di densità proporzionale alla distanza fra  $E$  ed un ellissoide coassiale infinitamente prossimo, i cui assi siano  $a$ ,  $b - \epsilon$ ,  $c$ . È facile verificare come una tale densità nel punto generico  $(x, y, z)$  sia proporzionale a  $y^2 \cdot D_0$ .

Similmente  $V_3$  può interpretarsi come somma della f.<sup>o</sup> potenziale esterna di un ellissoide omogeneo e di quello di uno strato superficiale compreso tra  $E$  e l'ellissoide inf.<sup>o</sup> prossimo di semiassi  $a, b, c - \varepsilon$ .

§ 21. Si tratta ora di costruire delle funzioni  $V_{1i}, V_{2i}, V_{3i}$  le quali, all'interno dell'ellissoide  $E$ , siano finite insieme colle loro derivate 1.<sup>o</sup>, abbiano le derivate 2.<sup>o</sup> finite, e siano tali che nei punti di  $E$  si abbia:

$$\begin{aligned} V_{1i} &= V_1, & V_{2i} &= V_2, & V_{3i} &= V_3, \\ \frac{\partial V_{1i}}{\partial r} &= \frac{\partial V_1}{\partial r}, & \frac{\partial V_{2i}}{\partial r} &= \frac{\partial V_2}{\partial r}, & \frac{\partial V_{3i}}{\partial r} &= \frac{\partial V_3}{\partial r}, \end{aligned}$$

dove  $r$  indica una qualunque delle coordinate.

Riguardo alla  $V_{1i}$ , varranno gli stessi artifici che abbiám indicato per la costruzione della  $V_i$  nel caso dell'ellissoide di rotazione. Per la  $V_{2i}$  possiamo assumere

$$V_{2i} = \int_0^\infty \frac{ds}{(b^2 + s)\sqrt{R}} - x^2 C_2 - 3y^2 B_1 - z^2 A_2 + \frac{2y^2}{ab^5c} \Phi(\lambda), \quad (52)$$

ove la  $\Phi(\lambda)$  soddisfaccia alle condizioni

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi'(0) = 1, \quad (53)$$

e di più  $\Delta_2 \Phi(\lambda)$  sia finita in ogni punto per valori di  $\lambda$  fra 0 e  $-\alpha^2$ . La  $V_{2i}$  si riduce evidentemente a  $V_2$  per  $\lambda = 0$ . Avremo poi

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{2i}}{\partial x} &= -2x C_2 + \frac{2y^2}{ab^5c} \Phi'(\lambda) \frac{\partial \lambda}{\partial x} \\ \frac{\partial V_{2i}}{\partial y} &= -6y B_1 + \frac{2y^2}{ab^5c} \Phi'(\lambda) \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{4y}{ab^5c} \Phi(\lambda) \\ \frac{\partial V_{2i}}{\partial z} &= -2z A_2 + \frac{2y^2}{ab^5c} \Phi'(\lambda) \frac{\partial \lambda}{\partial z}. \end{aligned}$$

Ricordando le espressioni delle derivate di  $\lambda$ , per  $\lambda = 0$ , e tenendo conto delle (53) si verifica come queste derivate della  $V_{2i}$ , sull'ellissoide  $E$ , risultino uguali a quelle della  $V_2$  date dalle (50).

Con calcoli facili (\*) si ottiene poi

$$\Delta_2 V_2 = -\frac{4}{a b^3 c} + \frac{2 y^2}{a b^5 c} [\Phi''(\lambda) \cdot \Delta_1 \lambda + \Phi'(\lambda) \cdot \Delta_2 \lambda] + \\ + \frac{8 y}{a b^5 c} \Phi'(\lambda) \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{4}{a b^5 c} \Phi(\lambda).$$

Questa espressione, divisa per  $-4\pi$ , dà la densità spaziale di una massa la quale all'esterno di  $E$  dà luogo alla funzione potenziale  $V_2$ . In simile modo si può costruire quella corrispondente al termine  $V_3$  della funzione potenziale esterna.

---

(\*) Occorre osservare che i tre integrali  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $C_2$  sono legati dalla relazione

$$A_2 + 3 B_1 + C_2 = \frac{2}{a b^3 c}.$$


---



# Studi sulle equazioni differenziali lineari, per riguardo ai loro integrali normali.

(Di ULISSE DINI, a Pisa.)

---

1. Nella Memoria pubblicata a pag. 179 e segg. del T. XII, Serie III di questi *Annali* al § 40, che fa seguito ad altre collo stesso titolo, ho dato un teorema generale relativo agli integrali normali delle equazioni lineari generali

$$E(y, z) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = X, \quad (1)$$

quando in esse i primi  $n$  coefficienti  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  sono funzioni della sola  $x$  regolari (nel senso inteso nelle Memorie precedenti) in tutto un intervallo dato  $(a, b)$  (gli estr. incl.) almeno fino alle derivate  $n^{\circ}, (n-1)^{\circ}, (n-2)^{\circ}, \dots, 1.^{\circ}$  rispettivamente, e  $a_n = g\varphi(z) + l$ , essendo  $\varphi(z)$  una funzione intera del parametro  $z$ , e  $g, l$  e  $X$  funzioni della  $x$  continue o no nello stesso intervallo  $(a, b)$  ma finite e atte alla integrazione in questo intervallo, e delle quali la prima non cambia mai di segno e non è d'integrale nullo in nessuna porzione dell'intervallo medesimo.

E si suppone inoltre nello stesso teorema che la equazione data (1) sia di quelle per le quali la equazione omogenea corrispondente  $E(y, z) = 0$ , almeno per un valore particolare  $\gamma$  del parametro  $z$ , se non per qualunque valore di questo parametro, si riproduce nella sua aggiunta; come si suppone anche che si riscontrino soddisfatte certe condizioni speciali nelle quali figurano insieme i valori dei primi  $n$  coefficienti della equazione data ai limiti  $a$  e  $b$  dell'intervallo e i coefficienti delle condizioni date per gl'integrali a questi limiti quando queste condizioni vi siano.

Questo teorema, in forza del quale si può affermare che sotto l'una o sotto l'altra delle due ipotesi generali contenute nell'enunciato del teorema stesso dovrà essere  $X = 0$  in tutto l'intervallo  $(a, b)$ , dà luogo in sostanza a due casi veramente distinti nei quali si applica.

L'una di tali ipotesi infatti è quella di essersi assicurati in un modo qualsiasi della esistenza di un integrale normale della nostra equazione (1) che come funzione di  $z$  è funzione intera, e come funzione di  $x$  è regolare fino alle derivate  $n^e$ , per ogni valore di  $z$ , in tutto l'intervallo da  $a$  a  $b$  (gli estr. incl.); e non si esclude che nello stesso intervallo il coefficiente  $a_0$  possa anche divenire infinitesimo in qualche punto interno o agli estremi.

L'altra di tali ipotesi invece è quella che siano soddisfatte certe condizioni speciali indicate nell'enunciato del teorema stesso dalle quali consegue appunto la esistenza dell'integrale normale che ha le indicate particolarità rispetto ad  $x$  e a  $X$ ; ma allora fra le condizioni speciali che si richiedono vi ha quella che nell'intervallo da  $a$  a  $b$  e anche negli estremi, il coefficiente  $a_0$  sia sempre diverso da zero; per quanto, in una nota al principio del § 34, io facessi rilevare che tale condizione veniva posta specialmente allo scopo di semplificare le considerazioni che allora si fecero, mentre salvo leggere modificazioni avrebbero potuto considerarsi anche alcuni casi nei quali  $a_0$  fosse zero in alcuni punti fra  $a$  e  $b$  o a uno o a tutti e due i punti estremi.

Per le applicazioni dunque il primo di questi casi avrà più specialmente interesse quando, pei dati della questione da trattarsi, ci si debba necessariamente mantenere con  $x$  in un intervallo  $(a, b)$  nel quale  $a_0$  non è sempre diverso da zero; e ora in vista di questo ci fermeremo appunto sul caso in cui questa circostanza si presenta, supponendo però che lo stesso coefficiente  $a_0$  divenga infinitesimo soltanto in uno o in ambedue gli estremi  $a$  e  $b$ . E negli studi che ora faremo ammetteremo dapprima in modo più generale che nella equazione (1) che considereremo tutti i coefficienti dopo il primo possano anche contenere il parametro  $z$  essendo però funzioni intere di questo parametro, e rispetto ad  $x$  i primi  $n$  coefficienti  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ , nell'intervallo dato  $(a, b)$ , non esclusi gli estremi, siano ancora funzioni regolari fino alle derivate  $n^e, (n-1)^e, (n-2)^e, \dots, 1^e$  rispettivamente, mentre per  $a_n$  e per  $X$  e per le varie derivate d'ordine più alto delle quali si ammette la esistenza per gli altri coefficienti basterà richiedere che siano finite e atte alla integrazione fra  $a$  e  $b$ ; e all'infuori di queste non faremo altre ipotesi sulla nostra equazione.

Sotto queste condizioni rispetto alla equazione data, troveremo alcuni casi nei quali, pure essendo  $a_0$  infinitesimo a uno o a tutti e due gli estremi dell'intervallo dato  $(a, b)$  esiste un integrale che rispetto ad  $x$  è regolare fino alle derivate  $n^e$  fra  $a$  e  $b$  (gli estr. incl.) e rispetto a  $z$  è sempre una funzione intera; dopo di chè, limitandosi allora alle equazioni alle quali si

riferisce il teorema del § 40 della Memoria precedente (\*), quando ai limiti  $a$  e  $b$  si abbiano le particolarità di cui nel teorema stesso, si potrà affermare che per la equazione corrispondente si ha  $X=0$  in tutto l'intervallo  $(a, b)$ .

2. Ciò posto, ammettiamo dunque che per es.:  $a$  sia un punto d'infinitesimo di  $\alpha_0$ , e  $b$  lo sia pure o no; e osserviamo allora che bisognerà per prima cosa assicurarsi della esistenza di integrali della nostra equazione (1) che siano regolari rispetto ad  $x$  anche nel punto  $a$ , e lo siano pure in  $b$  se anche  $b$  sarà come  $a$  un infinitesimo di  $\alpha_0$ , e al tempo siano funzioni intere di  $z$  per ogni valore di  $x$  fra  $a, b$  ( $a$  e  $b$  incl.); dopo di che volendo che siano anche integrali normali bisognerà cercare se sia possibile di soddisfare anche alle condizioni che si richiedono per questi integrali.

Indichiamo perciò ancora con  $w_1, w_2, \dots, w_n$   $n$  integrali fondamentali della equazione omogenea  $E(y, z) = 0$  per ogni valore di  $x$  fra  $a$  e  $b$ , ad es.: un sistema di quelli che si ottengono coi soliti processi dalle formole generali delle mie Memorie precedenti di questi *Annali* sulle equazioni differenziali lineari, partendo cioè da un punto qualsiasi  $\alpha$  fra  $a$  e  $b$  che ora dovrà supporre diverso da  $a$ , e diverso anche da  $b$  quando anche  $b$  sia un punto d'infinitesimo di  $\alpha_0$ , per modo che in quelle formole i limiti inferiori degli integrali siano tutti uguali ad  $\alpha$ , e prendendovi le solite  $c_1, c_2, \dots, c_n$  successivamente tutte eguali a zero fuorchè una che sarà presa uguale ad uno.

Questi integrali si manterranno regolari rispetto ad  $x$  fino alle derivate  $n'$ , nell'intervallo  $(a, b)$ , anche pei valori di  $x$  vicini quanto si vuole ad  $a$  e a  $b$ ; e per gli stessi valori di  $x$  saranno anche funzioni intere di  $z$ . Alcuni poi degli integrali medesimi potranno restare regolari anche fino in  $a$  sebbene ora in  $a$  l' $\alpha_0$  diventi infinitesimo, come lo rimarranno tutti fino a  $b$  se  $b$  non sarà un infinitesimo di  $\alpha_0$ ; e quelli fra essi che saranno regolari fino ad uno o a tutti e due questi estremi inclusivamente per quanto si disse in generale al § 6 della Memoria precedente rimarranno funzioni intere di  $z$  per tutti i valori di  $x$  nell'intervallo  $(a, b)$  non esclusi gli estremi.

3. Ciò premesso, supponiamo per maggior chiarezza che fra gl'integrali  $w_1, w_2, \dots, w_n$  ve ne siano  $i$ , per es.:  $w_1, w_2, \dots, w_i$ , che godono della parti-

---

(\*) Ci limiteremo cioè allora a considerare le equazioni (1) nelle quali  $z$  figura soltanto in  $a_n$  e si ha  $a_n = g \varphi(z) + l$ , essendo  $g$  e  $l$  le solite funzioni di  $x$  finite e atte alla integrazione fra  $a$  e  $b$  delle quali la prima non cangia mai di segno in questo intervallo, e il primo membro  $E(y, z)$  delle stesse equazioni, almeno per un valore particolare  $\gamma$  di  $z$ , si riproduce nella solita equazione aggiunta.

colarità di non avere singolarità in  $a$ , e non averle neppure in  $b$  quando anche  $b$  sia un infinitesimo di  $a_0$ ; ve ne siano  $i_a$ , ad es.:  $w_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_{i+i_a}$ , che le hanno in  $a$  e non in  $b$ ;  $i_b$ , ad es.:  $w_{i+i_a+1}, w_{i+i_a+2}, \dots, w_{i+i_a+i_b}$ , che le hanno in  $b$  e non in  $a$ ; e i rimanenti  $i_{a,b} = n - (i + i_a + i_b)$  le abbiano tanto in  $a$  che in  $b$ , senza escludere che *per valori speciali di  $z$*  quegli integrali che ordinariamente hanno singolarità in  $a$  o in  $b$  possano perderle e divenire anch'essi regolari in questi punti, e senza escludere inoltre che alcuni di questi numeri  $i, i_a, i_b, i_{a,b}$  possano anche essere zero; ma non potendo però essere zero contemporaneamente  $i_a$  e  $i_{a,b}$ , perchè  $a$  è un infinitesimo di  $a_0$ , se sarà  $\int_a^a \frac{a_1}{a_0} dx = -\infty$ ; e non potendo essere zero insieme  $i_b$  e  $i_{a,b}$  se anche

$b$  è un infinitesimo di  $a_0$  e se sarà  $\int_a^b \frac{a_1}{a_0} dx = -\infty$  (V. nota al § 18 della Mem. preced.).

Allora per ogni integrale  $y$  della nostra equazione completa  $E(y, z) = X$ , finchè  $x$  è fra  $a$  e  $b$  (gli estremi al più esclusi) potremo sempre scrivere

$$y = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_n w_n + Y,$$

essendo  $Y$  il solito integrale particolare della equazione stessa che diviene zero insieme alle sue prime  $n - 1$  derivate nel punto  $\alpha$ , e pel quale si ha

$$Y = \sum_1^n w_s \int_a^x \Theta_c X D_{s,n} dx$$

dove  $D_{s,n}$  è il complemento algebrico di  $w_s^{(n-1)}$  nel solito determinante fondamentale  $D$  relativo agli integrali  $w_1, w_2, \dots, w_n$ , e per semplicità di scrittura si intende posto come nella Memoria precedente al § 17

$$\Theta_c = \frac{1}{a_0} e^{\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx};$$

essendo  $c$  un numero qualsiasi fra  $a$  e  $b$  pel quale  $a_0$  non è zero; e noi tenendo conto dei dati che abbiamo dovremo ora cercare come debbano essere prese le  $c_1, c_2, \dots, c_n$  o a quali condizioni debbano soddisfare, sia pure facendo qualche limitazione nella equazione (1) da considerarsi, per far sì che  $y$  sia un integrale normale che ha tutte le particolarità volute rispetto a  $z$  e rispetto ad  $x$  in tutto l'intervallo  $(a, b)$ , non esclusi ora gli estremi  $a$  e  $b$ .

4. Ammetteremo perciò senz'altro, anche allo scopo di semplificare le nostre considerazioni, che se anche tutte o alcune delle  $D_{s,n}$  o le

$\frac{1}{\alpha_0} e^{\int_c^x \alpha_0 dx}$  o  $\Theta_c D_{s,n}$  hanno qualche singolarità per  $x = a$  o per  $x = b$ , esse però moltiplicate per  $X$  restino tutte atte alla integrazione anche negli in-

torni di  $a$  o di  $b$ , per modo quindi che gli integrali  $\int_a^x \Theta_c X D_{s,n} dx$  anche al tendere di  $x$  ad  $a$  o a  $b$  e a questi estremi si mantengano determinati e finiti, ciò che il più spesso avverrà quando negli intorni di  $a$ , e in quelli di  $b$  se anche  $b$  è un infinitesimo di  $\alpha_0$ ,  $X$  sia delle forme  $(x - a)^\lambda \varphi(x)$  o  $(b - x)^\mu \psi(x)$  essendo  $\lambda$  e  $\mu$  numeri positivi sufficientemente grandi, e essendo  $\varphi(x)$  e  $\psi(x)$  funzioni di  $x$  continue o no ma atte alla integrazione negli intorni di  $a$  e  $b$  rispettivamente, e che se anche divengono infinite restano atte alla integrazione anche ridotte ai valori assoluti.

Per  $x$  fra  $a$  e  $b$  ( $a$  escl. e  $b$  pure escl. se anche  $b$  sarà un infinitesimo di  $\alpha_0$ ) potremo scrivere per  $y$

$$y = s + s_a + s_b + s_{a,b},$$

e per le derivate  $y^{(r)}$  degli ordini  $r = 1, 2, \dots, n - 1$  avremo

$$y^{(r)} = s^{(r)} + s_a^{(r)} + s_b^{(r)} + s_{a,b}^{(r)},$$

le  $s, s_a, s_b, s_{a,b}$  essendo somme tutte della forma  $\sum w_m \left( c_m + \int_a^x \Theta_c X D_{m,n} dx \right)$

e le  $s^{(r)}, s_a^{(r)}, s_b^{(r)}, s_{a,b}^{(r)}$  indicando non le derivate  $r^e$  di  $s, s_a, s_b, s_{a,b}$  ma soltanto

le somme della forma  $\sum w_m^{(r)} \left( c_m + \int_a^x \Theta_c X D_{m,n} dx \right)$ , queste somme per  $s$  e  $s^{(r)}$ ,

per  $s_a$  e  $s_a^{(r)}$ , per  $s_b$  e  $s_b^{(r)}$  e per  $s_{a,b}$  e  $s_{a,b}^{(r)}$  essendo estese rispettivamente agli integrali  $w_m$  che non hanno singolarità nè in  $a$  nè in  $b$ , a quelli che le hanno in  $a$  e non in  $b$ , a quelli che le hanno in  $b$  e non in  $a$ , e a quelli che le hanno sì in  $a$  che in  $b$ ; per modo che se  $b$  non sarà un infinitesimo di  $\alpha_0$  i due termini  $s_b$  e  $s_{a,b}$  in  $y$  e i due corrispondenti  $s_b^{(r)}$  e  $s_{a,b}^{(r)}$  in  $y^{(r)}$  mancheranno senz'altro.

Segue da ciò che saremo certamente sicuri che  $y$  sia un integrale che si mantiene finito almeno fino alle derivate  $(n - 1)^e$  nel punto  $a$ , e così pure nel punto  $b$  se anche  $b$  sarà un infinitesimo di  $\alpha_0$ , quando le  $s_a, s_b$  e  $s_{a,b}$  e così le  $s_a^{(r)}, s_b^{(r)}$  e  $s_{a,b}^{(r)}$  per  $r = 1, 2, \dots, n - 1$  si mantengano finite per  $x = a$

e  $x = b$ ; e « il caso più semplice nel quale questo avverrà sarà quello nel quale le  $c_m + \int_a^x \Theta_c X D_{m,n} dx$  tendano a zero di per sè e anche moltiplicate « per  $w_m$  e per  $w_m^{(r)}$  con  $r = 1, 2, \dots, n - 1$  al tendere di  $x$  ad  $a$  se si tratta « dei termini corrispondenti a  $s_a$ , al tendere di  $x$  a  $b$  se si tratta di quelli « corrispondenti a  $s_b$ , e al tendere di  $x$  sì ad  $a$  che a  $b$  se si tratta di quelli « corrispondenti a  $s_{a,b}$  (\*) »; per modo che limitandoci per semplicità a considerare soltanto questo caso, pei termini di  $s_a$  dovremo intanto avere  $c_m = \int_a^a \Theta_c X D_{m,n} dx$ ; per quelli di  $s_b$  dovremo avere  $c_m = \int_b^a \Theta_c X D_{m,n} dx$ ; e per quelli di  $s_{a,b}$  dovremo avere

$$\int_a^a \Theta_c X D_{m,n} dx = \int_b^a \Theta_c X D_{m,n} dx,$$

ciò che porta in particolare che se  $a_0$  sarà infinitesimo tanto in  $a$  che in  $b$ , e se vi saranno integrali  $w_m$  che abbiano singolarità in ambedue questi punti, per ciascuno di questi integrali  $w_m$  dovremo avere  $\int_a^b \Theta_c X D_{m,n} dx = 0$  se si vorrà che tutte le condizioni che ora poniamo siano soddisfatte.

5. Ammesso ora che tutto questo avvenga, e nella espressione precedente di  $y$  cambiando per comodo le prime  $i$  delle  $c_m$  (cioè quelle che figurano

in  $s$ ) in  $c_m + \int_a^x \Theta_c X D_{m,n} dx$ , si vede che sarà

$$y = \left. \begin{aligned} & \sum_1^i w_m \left( c_m + \int_a^x \Theta_c X D_{m,n} dx \right) + \sum_a w_m \int_a^x \Theta_c X D_{m,n} dx + \\ & + \sum_b w_m \int_b^x \Theta_c X D_{m,n} dx + \sum_{a,b} w_m \int_a^x \Theta_c X D_{m,n} dx, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(\*) Evidentemente queste condizioni sono soltanto sufficienti. Noi le poniamo perchè sono le più semplici, ma basterebbe ad es.: anche supporre che, sempre tendendo a zero le  $c_m + \int_a^x \Theta_c X D_{m,n} dx$  al tendere di  $x$  ad  $a$  o a  $b$  nei rispettivi casi, tendessero poi a quantità finite quando sono moltiplicate per  $w_m$  e per  $w_m^{(r)}$ .

dove s'intende che  $\Sigma_a, \Sigma_b, \Sigma_{a,b}$  si estendano rispettivamente alla  $w_m$  che hanno le singolarità soltanto in  $a$ , o soltanto in  $b$ , o che le hanno ad un tempo in  $a$  e  $b$ , e nell'ultima somma all'integrale  $\int_a^x$  potrà anche sostituirsi l'altro  $\int_b^x$ ; e una formola simile l'avremo per  $y^{(r)}$  per  $r = 1, 2, \dots, n-1$  mutando soltanto, sotto le varie somme che figurano in  $y$ , le  $w_m$  in  $w_m^{(r)}$ .

E in questo integrale  $y$  della equazione completa  $E(y, z) = X$  e nelle sue prime  $n-1$  derivate  $y^{(r)}$ , delle  $c_i$  rimarranno dunque indeterminate soltanto le prime  $i$   $c_1, c_2, \dots, c_i$ , cioè tante quante sono gli integrali  $w_i$  della equazione omogenea corrispondente  $E(y, z) = 0$  che sono regolari contemporaneamente in  $a$  e  $b$ , e non ve ne rimarrà nessuna quando di questi integrali non ve ne sieno, cioè quando sia  $i = 0$ ; e per ciò che riguarda le derivate lo stesso integrale  $y$  le avrà finite e continue almeno fino a quelle dell'ordine  $(n-1)$  in tutto l'intervallo  $(a, b)$ , non esclusi gli estremi  $a$  e  $b$ , mentre le derivate  $n^\circ$  che si determineranno per mezzo della equazione data e che saranno sempre finite (continue però o no perchè non si richiede la continuità per le funzioni  $\alpha_n$  e  $X$ ) nei punti interni fra  $a$  e  $b$ , potranno essere infinite o anche mancare affatto a questi estremi  $a$  e  $b$ .

E inoltre, sempre sotto le varie condizioni che abbiamo poste, quando nel caso di  $i > 0$ , per le  $c_1, c_2, \dots, c_i$  rimaste finora indeterminate vengano poi scelte funzioni intere di  $z$ , lo stesso integrale  $y$  e le sue prime  $n$  derivate rispetto ad  $x$ , per quanto dicemmo in modo generale nella Memoria precedente, saranno funzioni intere di  $z$  per ogni valore di  $x$  fra  $a$  e  $b$  (gli estr.  $a$  e  $b$  al più esclusi per le sole derivate  $n^\circ$ ); mentre se sarà  $i = 0$  l'integrale stesso (2), nel quale allora verrà a mancare il primo termine del secondo membro, avrà già la indicata particolarità rispetto ad  $x$  e a  $z$  finchè  $x$  è fra  $a$  e  $b$  ( $a$  e  $b$  al più escl.), e sarà quindi senz'altro l'integrale cercato se non vi saranno altre condizioni speciali ai limiti alle quali esso debba soddisfare.

6. Volendo ora che questi integrali siano anche integrali normali della nostra equazione completa  $E(y, z) = X$ , osserviamo che nel caso di  $i > 0$  la determinazione delle  $c_1, c_2, \dots, c_i$  dovrà farsi per mezzo delle condizioni ai limiti che saranno state date, e che potranno anche non esserci (V. § 21 della Mem. precedente) se  $\alpha_0$  sarà zero ai due estremi  $a$  e  $b$  e se al tempo stesso

a questi estremi sarà  $\int_a^x \frac{\alpha_1}{\alpha_0} dx = -\infty$ ; e se

$$k_0 y_a + k_1 y'_a + k_2 y''_a + \dots + k_{n-1} y_a^{(n-1)} = 0 \quad (3)$$

sarà una qualsiasi delle condizioni ai limiti che potranno esserci per  $x = a$ , e

$$h_0 y_b + h_1 y'_b + h_2 y''_b + \dots + h_{n-1} y_b^{(n-1)} = 0 \quad (4)$$

sarà una di quelle che potranno esserci per  $x = b$ , per ciascuna di queste condizioni dovremo avere rispettivamente le formole

$$\left. \begin{aligned} c_1 \left( \sum_0^{n-1} k_s w_1^{(s)} \right)_a + c_2 \left( \sum_0^{n-1} k_s w_2^{(s)} \right)_a + \dots + c_i \left( \sum_0^{n-1} k_s w_i^{(s)} \right)_a &= K_a, \\ c_1 \left( \sum_0^{n-1} h_s w_1^{(s)} \right)_b + c_2 \left( \sum_0^{n-1} h_s w_2^{(s)} \right)_b + \dots + c_i \left( \sum_0^{n-1} h_s w_i^{(s)} \right)_b &= -H_b, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

essendo

$$\left. \begin{aligned} K_a &= \sum_b \left\{ \left[ \sum_0^{n-1} (k_s w_m^{(s)})_a \right] \int_a^b \Theta_c X D_{m,n} dx \right\}, \\ H_b &= \sum_b' \left\{ \left[ \sum_0^{n-1} h_s w_m^{(s)} \right]_b \int_a^b \Theta_c X D_{m,n} dx \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

dove la somma  $\sum_b$  in  $K_a$  s'intende estesa ai termini nei quali figurano le  $w_m$  che hanno le singolarità soltanto nel punto  $b$ , e l'altra  $\sum_b'$  in  $H_b$  s'intende estesa ai termini nei quali figurano le  $i + i_a w_m$  che non hanno singolarità nello stesso punto  $b$ ; e di qui risulta intanto che onde, colle condizioni poste, l'integrale cercato possa esistere, bisognerà che le condizioni date ai limiti  $a$  e  $b$  fra tutte non siano più di  $i$ , cioè non siano più del numero degli integrali distinti  $w_1, w_2, \dots, w_i$  che non hanno singolarità nè in  $a$  nè in  $b$ , a meno che, quando le condizioni stesse ai limiti siano più di  $i$ , alcune di quelle simili alle (5) che ne verranno risultino identicamente soddisfatte qualunque sia  $z$  o rientrino l'una nell'altra in forza della natura stessa degli integrali  $w_1, w_2, \dots, w_n$  della equazione omogenea dai quali si parte.

Ricordando dunque il processo che tenemmo nei §§ 34 e segg. della Memoria precedente per la trattazione del problema analogo quando ponevamo la condizione che  $a_0$  fosse sempre diversa da zero fra  $a$  e  $b$  e a questi estremi, si vede ora che salva l'indicata limitazione nel numero delle indeterminate  $c_s$  e in quelle delle condizioni ai limiti  $a$  e  $b$  che possono ancora aversi, e salvo la sostituzione di  $K_a$  e  $H_b$  alle quantità 0 e  $\mathbf{Y}_b$  che figuravano allora nei secondi membri delle formole (36) della Memoria stessa, che sono quelle alle quali ora corrispondono le precedenti (5), il nostro problema attuale



pel caso di  $i > 0$  resta ora ridotto a quello già studiato nella detta Memoria, e quindi per trattarlo completamente basterà seguire la via che tracciammo allora.

Nel caso poi di  $i = 0$ , non avendosi affatto indeterminate  $c_s$ , e l'integrale cercato  $y$ , come abbiamo detto, risultando già pienamente determinato colle (2), se saranno date anche condizioni ai limiti come le (3) o (4), bisognerà assicurarsi che queste vengano rese identiche dall'integrale stesso  $y$ , per essere certi che questo integrale è l'integrale normale cercato, e il problema con ciò in questo caso di  $i = 0$  rimarrà completamente esaurito.

7. Portata dunque la questione a questo punto non è il caso di fermarsi più oltre sul problema attuale che, quando si voglia, potrà ora essere svolto completamente con tutta facilità, seguendo la via che indicammo; e solo, siccome il caso che più comunemente si presenta è quello delle equazioni del second'ordine, esporremo con dettaglio le varie particolarità che meritano di essere segnalate pel caso di queste equazioni, il che faciliterà anche la trattazione, quando voglia farsi, dei casi di equazioni di ordini superiori.

Consideriamo dunque la equazione del second'ordine

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = X, \quad (7)$$

nella quale supporremo che i coefficienti  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  e  $X$  abbiano le solite particolarità, e indichiamo con  $w_1$  e  $w_2$  i due integrali fondamentali che si ottengono coi soliti nostri processi generali partendo da un punto  $\alpha$  fra  $a$  e  $b$  diverso da questi estremi.

Le condizioni poste sopra in generale al principio del § 4 rispetto agli integrali  $\int \Theta_c X D_{m,m} dx$ , estesi a intornoi  $(\alpha, x)$ ,  $(x, b)$  dei punti  $a$  e  $b$ , e agli stessi integrali moltiplicati per  $w_m$ ,  $w'_m$ ,  $w''_m, \dots, w_m^{(m-1)}$  si ridurranno ora a quella che anche quando gli estremi  $a$  e  $b$  sono punti d'infinitesimo di  $a_0$ , per qualunque valore di  $z$  le funzioni  $\Theta_c X w_1$  e  $\Theta_c X w_2$  siano sempre integrabili negli intornoi di  $a$  e di  $b$ , e i loro integrali da  $a$  ad  $x$  o da  $x$  a  $b$  ( $x$  compreso fra  $a$  e  $b$ ) col tendere di  $x$  ad  $a$  e a  $b$  tendano a zero anche moltiplicati rispettivamente per  $w_2$  e  $w'_2$ , e per  $w_1$  e  $w'_1$ ; e oltre a ciò quando tanto  $a$  che  $b$  siano infinitesimi di  $a_0$  e uno almeno degli integrali  $w_1$  e  $w_2$  per es.  $w_2$  abbia singolarità sì in  $a$  che in  $b$ , per quanto dicemmo in fine dello stesso § 4 bisognerà che per l'altro  $w_1$  si abbia  $\int_a^b \Theta_c X w_1 dx = 0$ ; e noi,

quand'anche non si dica esplicitamente, ammetteremo sempre di avere verificato che queste condizioni siano soddisfatte nei varii casi che considereremo.

Indicheremo poi con

$$k_0 y_a + k_1 y'_a = 0, \quad \text{e} \quad h_0 y_b + h_1 y'_b = 0 \quad (8)$$

le condizioni ai limiti  $a$  e  $b$  che potranno essere date pei nostri integrali da determinarsi  $y$ , senza escludere che possano anche ridursi a una sola o non esserci affatto, nei quali casi però potremo scriverle ancora ambedue intendendo allora che se una o tutte e due dovranno mancare siano zero i coefficienti  $k$  o  $h$  corrispondenti; e rispetto ad  $i$  considereremo i varii casi che ora possono presentarsi, che saranno quelli di  $i=0$ ,  $i=1$ , e  $i=2$ , e li tratteremo separatamente, osservando che in ogni caso l'integrale corrispondente (2) avrà ora nel secondo membro uno o due termini soltanto.

8. Incominciando dal primo caso quello cioè di  $i=0$  osserviamo che esso si suddivide in più altri, ma basterà naturalmente considerare i due seguenti, che indicheremo successivamente, cioè:

1.º il caso in cui i due integrali  $w_1$  e  $w_2$  sono regolari l'uno soltanto in  $a$  e l'altro soltanto in  $b$ , per es.  $w_1$  è regolare soltanto in  $a$ , e  $w_2$  lo è soltanto in  $b$ , nel qual caso la formola (2) ci darà per l'integrale

$$y = -w_1 \int_b^x \Theta_c X w_2 dx + w_2 \int_a^x \Theta_c X w_1 dx, \quad (9)$$

e le condizioni ai limiti (8) se vi saranno porteranno che debbano essere soddisfatte qualunque sia  $z$  le due condizioni corrispondenti

$$(k_0 w_1 + k_1 w'_1)_a \int_a^b \Theta_c X w_2 dx = 0, \quad (h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \int_a^b \Theta_c X w_1 dx = 0; \quad (10)$$

talchè in questo caso, se le condizioni ai limiti (8) vi saranno una o tutte e due, l'integrale normale cercato vi sarà e sarà dato dalla (9) quando siano soddisfatte identicamente qualunque sia  $z$  una o tutte e due le condizioni corrispondenti (10), e in particolare quindi quando siano soddisfatte le due

$$\int_a^b \Theta_c X w_1 dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_a^b \Theta_c X w_2 dx = 0, \quad (11)$$

o quando le  $w_1$  e  $w_2$  soddisfino esse pure alle condizioni ai limiti per quello dei limiti  $a$  o  $b$  nel quale sono regolari; mentre se le condizioni ai limiti (8) non ci saranno l'integrale cercato esisterà e sarà dato dalla (9) senz'altro.

2.º il caso in cui ambedue gli integrali  $w_1$  e  $w_2$  hanno singolarità in uno stesso dei limiti per es. in  $a$ , le abbiano essi o no anche in  $b$ , nel qual caso la formola (2) ci darà sempre per l'integrale  $y$

$$y = -w_1 \int_a^x \Theta_c X w_2 dx + w_2 \int_a^x \Theta_c X w_1 dx, \quad (12)$$

e ora la condizione al limite  $a$  se anche ci sarà risulterà soddisfatta da sè. Invece quella al limite  $b$  se ci sarà darà luogo all'altra

$$(h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \int_a^b \Theta_c X w_1 dx - (h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b \int_a^b \Theta_c X w_2 dx = 0 \quad (13)$$

che dovrà essere soddisfatta identicamente qualunque sia  $z$ , e rimarrà sotto questa forma se  $w_1$  e  $w_2$  non avranno singolarità nel punto  $b$ .

Se poi saremo nel caso che uno o tutti e due gli integrali  $w_1$  e  $w_2$  abbiano singolarità anche in  $b$ , allora per le condizioni poste in generale nel paragrafo precedente oltre a queste, avremo una o tutte e due le altre

$$\int_a^b \Theta_c X w_1 dx = 0, \quad \int_a^b \Theta_c X w_2 dx = 0,$$

che sono ancora le (11), per modo che quando queste singolarità in  $b$  le abbiano ambedue gli integrali  $w_1$  e  $w_2$  avremo queste due condizioni cioè le (11), e allora la (13) verrà soddisfatta da sè qualunque siano le condizioni ai limiti date, mentre se per es. soltanto la  $w_1$  avrà singolarità anche in  $b$  avremo la seconda delle (11) e invece della (13) avremo l'altra

$$(h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \int_a^b \Theta_c X w_1 dx = 0, \quad (14)$$

e quindi o dovrà essere soddisfatta anche la prima delle (11), o dovremo avere  $(h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b = 0$ , cioè per l'integrale  $w_2$  che allora non ha singolarità in  $b$  dovrà essere soddisfatta la condizione al limite corrispondente.

9. Passiamo ora a considerare il caso di  $i = 1$ , e supponendo che per es.  $w_1$  sia quello dei due integrali  $w_1$  e  $w_2$  che sarà regolare in  $a$  e  $b$  qualunque sia  $z$ , osserviamo che allora  $w_2$  dovrà necessariamente avere singolarità in uno o in ambedue gli stessi punti  $a$  e  $b$ ; e noi per essere più chiari, considereremo separatamente questi due casi ammettendo dapprima che  $w_2$  abbia singolarità soltanto in un punto per es. in  $a$ , e poi che le abbia in ambedue gli stessi punti  $a$  e  $b$ .

1.° caso. Essendo ora  $w_1$  regolare in  $a$  e in  $b$ , e  $w_2$  essendo regolare soltanto in  $b$ , la formola (2) ci darà

$$y = w_1 \left( c_1 - \int_a^x \Theta_c X w_2 dx \right) + w_2 \int_a^x \Theta_c X w_1 dx, \quad (15)$$

e la  $c_1$  dovrà essere determinata dalle condizioni ai limiti (8), una almeno delle quali ora supporremo sempre che vi sia perchè, se non vi fosse, questa formola per qualunque funzione intera di  $z$  che si prendesse come valore di  $c_1$ , darebbe subito un integrale colle particolarità volute.

Ora le dette condizioni ai limiti daranno luogo rispettivamente alle due

$$\left. \begin{aligned} (k_0 w_1 + k_1 w'_1)_a c_1 &= 0, \\ (h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b \left( c_1 - \int_a^b \Theta_c X w_2 dx \right) + (h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \int_a^b \Theta_c X w_1 dx &= 0 \end{aligned} \right\} (16)$$

che dovranno essere soddisfatte qualunque sia  $z$ , e quindi poichè per la prima di queste condizioni, se ci sarà, si potrà sempre prendere  $c_1 = 0$  qualunque sia la espressione  $(k_0 w_1 + k_1 w'_1)_a$ , così quando ci saranno ambedue queste condizioni vi soddisfaremo sempre col prendere  $c_1 = 0$  se per qualunque valore di  $z$  risulterà soddisfatta identicamente la condizione

$$(h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \int_a^b \Theta_c X w_1 dx - (h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b \int_a^b \Theta_c X w_2 dx = 0 \quad (17)$$

alla quale si ridurrà allora la seconda delle precedenti (16), e che combina colla (13); e quando questo avvenga, come quando la condizione al limite  $b$  manchi (il che del resto corrisponde a un caso d'identità di questa equazione), l'integrale normale cercato  $y$  esisterà effettivamente e sarà dato dalla

formola

$$y = -w_1 \int_a^x \Theta_c X w_2 dx + w_2 \int_a^x \Theta_c X w_1 dx \quad (18)$$

che combina colla (12).

E poichè la condizione (17) sarà sempre soddisfatta identicamente quando lo siano le (11), così anche in questo caso l'essere soddisfatte le dette condizioni (11) porta subito all'esistenza dell'integrale  $y$ , vi siano o no le condizioni ai limiti o qualunque esse siano.

Se poi la condizione (17) non sarà identicamente soddisfatta qualunque sia  $z$ , ma l'integrale  $w_1$  che noi supponiamo regolare in  $a$  e  $b$  soddisfarà esso qualunque sia  $z$  alla condizione data al limite nel punto  $a$ , allora non essendo più necessario di prendere  $c_1 = 0$  per soddisfare alla prima delle (16), potremo talvolta soddisfare alla seconda di queste col prendere per  $c_1$  una conveniente funzione intera di  $z$  diversa da zero.

In questo caso infatti se sarà nullo il secondo termine

$$(h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \int_a^b \Theta_c X w_1 dx \quad (19)$$

della condizione (16) qualunque sia  $z$ , allora si potrà prendere  $c_1 = \int_a^b \Theta_c X w_2 dx$ ,

venendo quindi l'integrale sotto la forma

$$y = -w_1 \int_b^x \Theta_c X w_2 dx + w_2 \int_a^x \Theta_c X w_1 dx; \quad (20)$$

mentre se la stessa espressione (19) non sarà identicamente nulla e al tempo stesso non lo sarà l'altra  $(h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b$  che figura nel primo termine della seconda della (16) stessa, allora sarà ancora possibile di trovare per  $c_1$  una funzione intera di  $z$  che renda identicamente soddisfatta la seconda della (16) tutte le volte che gli infinitesimi a distanza finita che abbia la espressione suddetta  $(h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b$  si trovino, e almeno allo stesso ordine, anche nella espressione (19); e quando questo avvenga l'integrale normale cercato  $y$  sarà quello dato dalla (15) nella quale  $c_1$  abbia per valore la funzione intera di  $z$  che risulterà dalla seconda della (16). E in particolare se gli infinitesimi a di-

stanza finita della espressione  $(h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b$ , saranno tutti del prim'ordine, basterà che essi si trovino anche nell'una o nell'altra delle due espressioni

$$(h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \text{ e } \int_a^b \Theta_c X_1 dx \text{ a un ordine qualsiasi.}$$

Quando poi non essendo identicamente nulla la espressione (19), lo fosse la espressione  $(h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b$ , o se per questa espressione non fosse soddisfatta la condizione ora indicata rispetto ai suoi infinitesimi, allora l'integrale normale cercato  $y$  colle condizioni date al limite  $b$  non potrebbe esistere per qualunque valore di  $z$ . Esso esisterebbe però ancora, e per qualunque valore che si prendesse per  $c_1$ , per quei valori particolari di  $z$  che soddisfacessero la seconda delle (16), ma per gli studii che ora facciamo questa particolarità a nulla gioverebbe.

2.<sup>o</sup> caso. Essendo ora  $w_1$  regolare nei due punti  $a$  e  $b$ , e  $w_2$  invece avendo singolarità in ambedue questi punti,  $a_0$  dovrà essere infinitesimo nell'uno e nell'altro degli stessi punti, e si avrà ancora la formola (15) come nel caso precedente; e poichè in forza delle condizioni generali che abbiamo

poste nel § 7 dovrà essere  $\int_a^b \Theta_c X w_1 dx = 0$  qualunque sia  $z$ , nell'ultimo ter-

mine della formola stessa (15) all'integrale  $\int_a^x$  potrà anche sostituirsi l'altro  $\int_b^x$ .

Ne segue che per le condizioni ai limiti  $a$  e  $b$  quando vi siano, si avranno ancora le (16), riducendosi però ora la seconda di queste all'altra più semplice

$$(h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b \left( c_1 - \int_a^b \Theta_c X w_2 dx \right) = 0,$$

e quindi si avranno ancora, ma con maggiore semplicità, e senza verun caso di eccezione, i risultati stessi del caso precedente, poichè si potrà prendere ancora  $c_1 = 0$  qualunque sia la condizione al limite  $a$ , se sarà identicamente nulla qualunque sia  $z$  la espressione

$$(h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b \int_a^b \Theta_c X w_2 dx$$

che è più semplice di quella che figura nel primo membro della condizione (17), e allora l'integrale  $y$  sarà dato dalla (18), e se sarà identicamente nulla qua-

lunque sia  $z$  la espressione  $(k_0 w_1 + k_1 w'_1)_a$  si potrà prendere  $c_1 = \int_a^b \Theta_c X w_2 dx$

venendo allora l'integrale sotto la forma (20).

E così in particolare anche in questo caso se saranno soddisfatte ambedue le condizioni (11) esisterà sempre l'integrale normale cercato  $y$  e avrà la forma (18) che concorderà anche colla (20), qualunque siano le condizioni date ai limiti che potranno anche non esservi.

10. Passiamo infine a considerare il caso di  $i = 2$ , e allora osserviamo che venendo ad essere  $w_1$  e  $w_2$  ambedue regolari ai due estremi  $a$  e  $b$ , la formola (2) si ridurrà alla seguente

$$y = w_1 \left( c_1 - \int_a^x \Theta_c X w_2 dx \right) + w_2 \left( c_2 - \int_a^x \Theta_c X w_1 dx \right), \quad (21)$$

e le condizioni ai limiti  $a$  e  $b$  quando ci siano porteranno alle formole

$$\left. \begin{aligned} (k_0 w_1 + k_1 w'_1)_a c_1 + (k_0 w_2 + k_1 w'_2)_a c_2 &= 0, \\ (h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b c_1 + (h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b c_2 &= - (h_0 Y + h_1 Y')_b, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

dove  $Y$  è il solito integrale particolare

$$Y = - w_1 \int_a^x \Theta_c X w_2 dx + w_2 \int_a^x \Theta_c X w_1 dx, \quad (23)$$

che si annulla insieme alle derivate prime per  $x = a$ ; e poichè queste formole sono quelle stesse precise che si avevano nella Memoria precedente pel caso allora considerato pel quale si supponeva che  $\alpha_0$  fosse sempre diverso da zero fra  $a$  e  $b$  e anche agli estremi, e che vi fossero due condizioni ai limiti, così, anche ora che si suppone che  $\alpha_0$  si annulli a uno o a tutti e due gli estremi  $a$  e  $b$ , se malgrado questo gli integrali  $w_1$  e  $w_2$  saranno regolari a questi estremi qualunque sia  $z$ , e si avranno ancora effettivamente due condizioni ai limiti, otterremo gli stessi risultati della Memoria stessa, quando la espressione

$$(k_0 w_1 + k_1 w'_1)_a (h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b - (k_0 w_2 + k_1 w'_2)_a (h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b \quad (24)$$

non sarà identicamente nulla qualunque sia  $z$ , o essendolo non lo saranno contemporaneamente anche le due espressioni

$$(k_0 w_1 + k_1 w'_1)_a \quad \text{e} \quad (k_0 w_2 + k_1 w'_2)_a, \quad (25)$$

o le due

$$(h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b \quad \text{e} \quad (h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b. \quad (26)$$

Se poi mancherà ad es. la condizione al limite  $a$  (ciò che allora non fu supposto), o se essendovi anche questa condizione le due espressioni (25) saranno ambedue identicamente zero (il che ora può ammettersi che possa avvenire perchè  $a_0$  è zero per  $x = a$ ), allora non avremo che la seconda delle condizioni (22), e quindi se una almeno delle espressioni (26) non sarà identicamente nulla qualunque sia  $z$ , avuto riguardo al valore (23) di  $Y$  si vede subito che per soddisfare alla stessa condizione con valori di  $c_1$  e  $c_2$  che siano funzioni intere di  $z$ , basterà prendere

$$c_1 = \int_a^b \Theta_r X w_2 dx - (h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \psi(z),$$

$$c_2 = - \int_a^b \Theta_r X w_1 dx + (h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b \psi(z)$$

essendo  $\psi(z)$  una funzione intera qualsiasi di  $z$ ; e, come ora apparisce ben naturale, risultati simili si avranno se mancherà la condizione al limite  $b$ , o se non mancando saranno identicamente nulle qualunque sia  $z$  le due espressioni (26) senza che lo siano ambedue le (25), bastando allora di prendere

$$c_1 = - (k_0 w_2 + k_1 w'_2)_a \psi(z),$$

$$c_2 = (k_0 w_1 + k_1 w'_1)_a \psi(z),$$

essendo ancora  $\psi(z)$  una funzione intera qualsiasi di  $z$ ; come se mancheranno ambedue le condizioni ai limiti  $a$  e  $b$ , o se saranno identicamente nulle qualunque sia  $z$  le quattro espressioni (25) e (26) i valori di  $c_1$  e  $c_2$  rimarranno completamente indeterminati, e potremo prendere per essi funzioni intere qualsiasi di  $z$ .

E infine se saranno ancora soddisfatte le condizioni (11), allora avendosi  $Y_b = 0$  e  $Y'_b = 0$ , le due condizioni (22) saranno sempre soddisfatte da  $c_1 = 0$  e  $c_2 = 0$  e talvolta anche da infiniti altri sistemi di valori di queste quan-



tà  $c_1$  e  $c_2$  che avranno maggiore o minore arbitrarietà a seconda dei valori delle quantità (25) e (26).

11. Riassumiamo ora i risultati qui ottenuti e quelli della Memoria precedente nelle loro parti più notevoli, mettendoli in relazione col teorema già ricordato del § 40 della Memoria stessa, e enunciandoli ora come proprietà della funzione  $X$  e degli integrali della equazione omogenea

$$\Sigma(y, z) = \alpha_0 y'' + \alpha_1 y' + \alpha_2 y = 0, \quad (27)$$

quando in questa equazione  $\alpha_0$  si annulla o può annullarsi fra  $a$  e  $b$  ma soltanto in uno o in tutti e due gli estremi  $a$  e  $b$ , e il parametro  $z$  s'intende ora che figuri soltanto in  $\alpha_2$ , e sia  $\alpha_2 = gz + l$ , essendo  $g$  e  $l$  come la  $X$  le solite funzioni della sola  $x$  continue o no ma finite e atte alla integrazione fra  $a$  e  $b$ , e delle quali la prima non cambia mai di segno in questo intervallo, e non è d'integrale nullo in nessuna porzione di esso (\*).

Inoltre per la equazione data (27) ammettiamo:

A) che  $w_1$  e  $w_2$  siano due suoi integrali fondamentali ottenuti con processi qualsiasi, ma sempre tali che pei valori di  $x$  fra  $a$  e  $b$  (gli estr. al più esclusi) siano funzioni regolari di  $x$  fino alle derivate seconde e siano funzioni intere di  $z$ , come sono quelli che si ottengono nel solito modo colle solite nostre formole generali;

B) che quando, essendo  $\alpha_0$  infinitesimo in uno o in tutti e due i punti  $a$  e  $b$ , gli stessi integrali  $w_1$  o  $w_2$  presentino singolarità in questi punti d'infinitesimo di  $\alpha_0$ , gli integrali  $\int \ominus_c X w_1 dx$  e  $\int \ominus_c X w_2 dx$ , estesi agli intorni  $(a, x)$  e  $(x, b)$  dei punti stessi, abbiano un significato, e sì essi che i loro prodotti per  $w_2$  e  $w'_2$ , e per  $w_1$  e  $w'_1$  rispettivamente tendano a zero all'impiccolire indefinitamente degli intorni medesimi come si disse in modo generale al § 7;

C) che quando degli stessi integrali  $w_1$  e  $w_2$  uno almeno, per es.  $w_2$ , abbia singolarità in ambedue gli estremi  $a$  e  $b$ , allora per l'altro integrale  $w_1$  si abbia  $\int_a^b \ominus_c X w_1 dx = 0$  qualunque sia  $z$ ;

(\*) Non si accenna qui alla condizione che la equazione data (27) si riproduca nella sua aggiunta, perchè essendo del second'ordine si può sempre ridurre a soddisfare a questa con-

dizione moltiplicandola pel fattore  $\frac{1}{\alpha_0} e^{\int \frac{\alpha_1}{\alpha_0} dx}$  senza cambiare i suoi integrali.

D) e infine che siano

$$k_0 y_a + k_1 y'_a = 0, \quad \text{e} \quad h_0 y_b + h_1 y'_b = 0$$

le solite equazioni ai limiti  $a$  e  $b$ , l'una delle quali o anche tutte e due potranno mancare, il che però non sarà ora da noi esplicitamente indicato nei nostri enunciati, intendendo che questi casi, quando si presentino, corrispondano a quelli pei quali  $k_0$  e  $k_1$  insieme, e  $h_0$  e  $h_1$  insieme sono zero.

Con questi dati si potrà ora affermare che:

1.° Se qualunque sia  $z$ , gli integrali  $w_1$  e  $w_2$  sono regolari ai due estremi  $a$  e  $b$ , essendo o no  $\alpha_0$  infinitesimo in uno o in tutti e due questi estremi, e al tempo stesso:

a) se la espressione

$$(k_0 w_1 + k_1 w'_1)_a (h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b - (k_0 w_2 + k_1 w'_2)_a (h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b \quad (28)$$

non è identicamente nulla qualunque sia  $z$ , e i suoi infinitesimi a distanza finita (quando vi sono) sono tutti del prim'ordine, e per ciascuno  $\alpha_\tau$  di questi

infinitesimi è sempre zero l'espressione  $\int_a^b \ominus_c X y dx$ , dove  $y$  è un integrale della equazione  $E(y, \alpha_\tau) = 0$  che al limite  $b$  soddisfa alla condizione  $h_0 y_b + h_1 y'_b = 0$ ; o:

b) se essendo la espressione (28) identicamente nulla qualunque sia  $z$ , senza che lo siano insieme le due

$$(k_0 w_1 + k_1 w'_1)_a \quad \text{e} \quad (k_0 w_2 + k_1 w'_2)_a, \quad (29)$$

o le due

$$(h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b \quad \text{e} \quad (h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b, \quad (30)$$

risulti pure identicamente nulla qualunque sia  $z$  la espressione  $\int_a^b \ominus_c X y dx$ , dove  $y$  ora è un integrale della equazione  $E(y, z) = 0$  che al limite  $b$  soddisfa alla condizione  $h_0 y_b + h_1 y'_b = 0$ , sempre qualunque sia  $z$ , o:

c) se sono identicamente nulle qualunque sia  $z$  le due espressioni (29) o le due (30) o anche tutte e quattro insieme, o anche infine:

d) se siano zero qualunque sia  $z$  gli integrali  $\int_a^b \ominus_c X w_1 dx$  e

$\int_a^b \Theta_c X w_2 dx$ , o (il che è lo stesso) sia zero l'altro  $\int_a^b \Theta_c X w dx$  per qualsiasi integrale  $w$  della equazione  $E(y, z) = 0$ ; allora sarà sempre  $X = 0$  per ogni valore di  $x$  da  $a$  a  $b$  (§ 10 e Mem. preced., §§ 35 a 43) (\*).

2.º Se qualunque sia  $z$  l'integrale  $w_1$  è regolare in  $a$  e  $b$ , e  $w_2$  lo è soltanto in uno di questi estremi per es. in  $b$ , e inoltre:

a) se saranno identicamente nulli qualunque sia  $z$  i due soliti integrali (11) cioè  $\int_a^b \Theta_c X w_1 dx$  e  $\int_a^b \Theta_c X w_2 dx$ , o l'altro  $\int_a^b \Theta_c X w dx$  per qualsiasi integrale  $w$  della  $E(y, z) = 0$ ; o più generalmente:

b) se sarà identicamente nulla qualunque sia  $z$  la espressione (17) o

$$(h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \int_a^b \Theta_c X w_1 dx - (h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b \int_a^b \Theta_c X w_2 dx, \quad (31)$$

o se lo saranno insieme le due espressioni

$$(k_0 w_1 + k_1 w'_1)_a \quad \text{e} \quad (h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \int_a^b \Theta_c X w_1 dx; \quad (32)$$

o anche:

c) se di queste ultime espressioni la prima  $(k_0 w_1 + k_1 w'_1)_a$  sarà identicamente zero qualunque sia  $z$ , e le due

$$(h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b \quad \text{e} \quad (h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \int_a^b \Theta_c X w_1 dx \quad (33)$$

non lo saranno, ma gli infinitesimi a distanza finita della prima di queste espressioni apparterranno tutti e almeno allo stesso ordine anche alla seconda: allora sarà  $X = 0$  per ogni valore di  $x$  da  $a$  a  $b$  (§ 9, 1.º caso).

3.º Se qualunque sia  $z$  l'integrale  $w_1$  è regolare in  $a$  e in  $b$  e  $w_2$  non lo è nè in  $a$  nè in  $b$ , allora se oltre ad essere nullo qualunque sia  $z$  (come già

---

(\*) Poichè non si esclude che  $X$  possa essere discontinua fra  $a$  e  $b$  purchè sempre finita e atta alla integrazione, diciamo una volta per tutte che col dire in questi enunciati che «sarà sempre  $X = 0$  per ogni valore di  $x$  da  $a$  a  $b$ » si fa sempre astrazione da una funzione d'integrale nullo alla quale potrebbe anche essere uguale  $X$ .

abbiamo ammesso che in questo caso debba essere) l'integrale  $\int_a^b \Theta_c X w_1 dx$ ,  
 lo sarà anche l'altro  $\int_a^b \Theta_c X w_2 dx$ , o invece di questo sarà nulla identica-  
 mente qualunque sia  $z$  l'una o l'altra delle due espressioni

$$(h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b, \quad (k_0 w_1 + k_1 w'_1)_a, \quad (34)$$

la funzione  $X$  sarà zero per ogni valore di  $x$  fra  $a$  e  $b$  (§ 9, 2.º caso).

4.º Se  $w_1$  e  $w_2$  sono regolari soltanto in uno dei due estremi  $a$  e  $b$  allora

a) nel caso che questo estremo non sia lo stesso pei due integrali e per es.  $w_1$  sia regolare in  $a$  e non in  $b$  e  $w_2$  sia regolare in  $b$  e non in  $a$ , se saranno identicamente nulle le due espressioni

$$(k_0 w_1 + k_1 w'_1)_a \int_a^b \Theta_c X w_2 dx, \quad (h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \int_a^b \Theta_c X w_1 dx, \quad (35)$$

b) e nel caso che l'estremo nel quale i due integrali  $w_1$  e  $w_2$  sono regolari sia lo stesso per tutti e due e sia per es.  $b$  se sarà identicamente nulla qualunque sia  $z$  la espressione (13) cioè

$$(h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \int_a^b \Theta_c X w_1 dx - (h_0 w_1 + h_1 w'_1)_a \int_a^b \Theta_c X w_2 dx, \quad (36)$$

e così in particolare in ambedue questi casi se saranno nulli identicamente qualunque sia  $z$  i due soliti integrali (11) la funzione  $X$  sarà ancora zero per qualunque valore di  $x$  fra  $a$  e  $b$  (§ 8, 1.º e 2.º caso).

5.º E nel caso che uno degli stessi integrali  $w_1$  e  $w_2$  per es.  $w_1$  abbia singolarità in ambedue gli estremi  $a$  e  $b$  e l'altro  $w_1$  le abbia solo in uno di questi estremi per es. in  $a$ , allora se avverrà che oltre ad essere identi-

camente nullo (come già sappiamo che dovrà essere) l'integrale  $\int_a^b \Theta_c X w_2 dx$ , sarà pure identicamente nulla la espressione

$$(h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \int_a^b \Theta_c X w_1 dx,$$

e così anche ora in particolare quando siano identicamente nulli insieme i due integrali (11), la funzione  $X$  sarà zero per qualunque valore di  $x$  fra  $a$  e  $b$  (§ 8, 2.º caso).

6.º Infine se  $w_1$  e  $w_2$  avranno entrambi singolarità sì in  $a$  che in  $b$ , allora quando risultino ancora soddisfatte tutte le condizioni generali poste in principio di questo paragrafo, avendosi di necessità le (11) qualunque sia  $z$ , la funzione  $X$  sarà pure sempre nulla per tutti i valori di  $x$  fra  $a$  e  $b$  (§ 8, 2.º).

E così, col riprendere in esame tutte le condizioni trovate in questi vari casi, si vede in particolare che si avrà sempre  $X=0$  per tutti i valori di  $x$  fra  $a$  e  $b$  quando insieme alle condizioni generali A), B) e C) poste in principio di questo paragrafo, sia soddisfatta l'altra che per qualsiasi integrale  $w$  della

nostra equazione (27) si abbia  $\int_a^b \Theta_c X w dx = 0$  qualunque sia  $z$ ; e ciò indi-

pendentemente dall'esservi o no le condizioni (8) ai limiti  $a$  e  $b$ , e qualunque siano queste condizioni quando vi sono.

12. Seguendo i processi che abbiamo indicato, studii simili potrebbero farsi per le equazioni di 3.º e 4.º ordine e in generale per quelle di ordine superiore, come si fecero in fine della Memoria precedente per l'applicazione del teorema del § 40 della Memoria stessa; e dopo per ogni equazione che venisse data basterebbe cercare come si comportano nei punti estremi  $a$  e  $b$  gli integrali fondamentali dai quali si parte, e tenere conto delle condizioni ai limiti che fossero date per vedere quale dei teoremi che abbiamo dato precedentemente per le equazioni del second'ordine, e di quelli analoghi che potrebbero aversi per le altre equazioni, siano da applicarsi per potere giungere, quando ne sarà il caso, a concludere che deve essere sempre  $X=0$  fra  $a$  e  $b$ .

E per le condizioni ai limiti, nel caso testè ricordato delle equazioni del second'ordine, si può osservare in modo generale che se ad un estremo  $a$  o  $b$ , o a tutti e due,  $\alpha_0$  sarà zero, allora per l'applicazione del teorema del § 40 della Memoria precedente e quindi anche di quelli del § 11 di questa non occorreranno condizioni al limite o ai limiti corrispondenti, mentre dovranno sempre esservi (sebbene con coefficienti costanti qualunque  $h$  o  $k$ ) al limite o ai limiti stessi quando in essi  $\alpha_0$  non sia zero.

E quando  $\alpha_0$  sia zero ad ambedue gli estremi  $a$  e  $b$ , per potere concludere che  $X=0$  per ogni valore di  $x$  in questo intervallo basterà verificare

se siano soddisfatte le condizioni generali poste in principio del § 11, senza curarsi delle condizioni ai limiti che particolari circostanze permettessero di porre, e delle condizioni particolari che nei varii teoremi sarebbero conseguenza di queste condizioni ai limiti, perchè l'integrale corrispondente al caso che non vi siano queste condizioni sarebbe già una funzione intera di  $z$ ; mentre se  $a_0$  sarà diverso da zero a uno o a tutti e due gli estremi  $a$  e  $b$ , allora oltre chè delle condizioni generali poste in principio del § 11 che si avranno sempre, basterà occuparsi di quelle particolari dei teoremi corrispondenti che si riferiscono all'estremo o agli estremi  $a$  e  $b$  dove  $a_0$  è diverso da zero.

E nel caso delle equazioni di ordine superiore, anche quando  $a_0$  è zero ai due estremi  $a$  e  $b$  e a fortiori quando non lo è, per quanto si vide in fine della Memoria precedente potrà essere necessario di porre condizioni ai limiti per gli integrali da considerarsi onde potere fare l'applicazione del teorema del § 40 della Memoria stessa, e giungere così a concludere che deve essere sempre  $X = 0$  fra  $a$  e  $b$ .

Tutto questo pel caso delle equazioni del second'ordine apparirà chiaramente dalle applicazioni che faremo al caso di alcune delle stesse equazioni in altra Memoria che pubblicheremo fra breve.

Pisa, Luglio 1910.

---

# Le superficie a curve sezioni di genere 3.

(Di GAETANO SCORZA, a Palermo.)

---

Questo lavoro è da considerarsi come il seguito dell'altro, comparso già in questi *Annali* sotto il medesimo titolo (tom. XVI, 1909), e che noi indicheremo con (A) tutte le volte che ci occorrerà di citarlo; e i due, considerati insieme, risolvono pienamente il problema della determinazione di tutte le superficie a curve sezioni (piane o iperpiane) di genere 3.

In (A), dopo aver distinte le superficie in discorso in due *specie*, si osservò che, data una ricerca precedente del prof. CASTELNUOVO, bastava limitarsi alla determinazione di quelle di 2.<sup>a</sup> specie e si procedette alla parte meno agevole della enumerazione dei tipi, cioè a quella riguardante le superficie normali dello spazio ordinario: qui si caratterizzano le superficie normali, sempre di 2.<sup>a</sup> specie, degli iperspazi e così la ricerca vien portata a compimento.

Ma, come era prevedibile, e come era stato già rapidamente accennato nella prefazione di (A), i risultati ottenuti in questo secondo lavoro non si limitano a una pura enumerazione di tipi, bensì conducono a fissare i tratti essenziali della teoria delle superficie a curve sezioni di genere 3.

Essi infatti permettono di asserire, in primo luogo, che:

*Ogni superficie normale di 2.<sup>a</sup> specie dello spazio ordinario si può convertire in un cono cubico ellittico per mezzo di una trasformazione cremoniana dello spazio ambiente,*

e poi, traendo partito appunto da questo teorema, che:

*Ogni superficie di 2.<sup>a</sup> specie a curve sezioni (piane o iperpiane) di genere 3 o coincide con una di certe superficie, di due tipi distinti, dello spazio a cinque dimensioni o può ottenersi da una di queste mediante una proiezione (da punti esterni o non).*

Le superficie dell' $S_5$ , cui qui si allude, son tutte dell'8.<sup>o</sup> ordine, ma si distinguono in due tipi a seconda dell'assenza o meno di punti singolari.

Quelle del 1.<sup>o</sup> tipo son prive di punti doppi e, nel classico senso della geometria della retta, rappresentano le congruenze delle corde delle quartiche sghembe ordinarie di 1.<sup>a</sup> specie; quelle del 2.<sup>o</sup> tipo sono dotate di due rette doppie sghembe (distinte o infinitamente vicine) e rappresentano certe particolari congruenze di 4.<sup>o</sup> grado, complete intersezioni di due complessi quadratici.

Le une e le altre si lascian poi definire come intersezioni parziali di una quadrica e di una varietà normale a tre dimensioni del 6.<sup>o</sup> ordine, luogo di una  $\infty^1$  ellittica di piani.

Naturalmente non si tralascia di assegnare, anche per le superficie di 2.<sup>a</sup> specie iperspaziali, una rappresentazione sul cono cubico; e così, tenendo presenti teoremi già stabiliti dai proff. CASTELNUOVO e DE-FRANCHIS, si arriva facilmente alla classificazione di tutti i sistemi lineari semplici di genere 3 e dimensione non inferiore a 3 tracciati sopra il cono cubico ellittico.

## CAPITOLO I.

### **Riduzione al cono cubico delle superficie normali di 2.<sup>a</sup> specie dello spazio ordinario per mezzo di trasformazioni cremoniane.**

1. In (A) fu dimostrato che tutte le superficie normali dello spazio ordinario a curve sezioni di genere 3 e di 2.<sup>a</sup> specie, cioè con un solo fascio di superficie cubiche (sub-)aggiunte, sono del 6.<sup>o</sup> ordine e contengono un fascio ellittico di coniche, distribuite

$\alpha$ ) o a coppie nei piani di un fascio,

o una per una nei piani di una sviluppabile, che può essere

$\beta$ ) una sviluppabile non conica di 4.<sup>a</sup> classe, oppure

$\gamma$ ) un cono di 3.<sup>a</sup> classe e del 6.<sup>o</sup> ordine.

In questo capitolo assegneremo le formole delle trasformazioni *cremoniane* che servono a mutare in coni cubici (ellittici) le superficie enumerate in (A) (\*); e in tal modo resterà dimostrato che esse sono equivalenti a coni

---

(\*) Naturalmente (occorre appena l'avvertirlo) se esiste una trasformazione cremoniana che muta una superficie in un cono cubico ellittico ne esistono addirittura infinite.



cubici non solo dal punto di vista delle trasformazioni birazionali (ciò che è ben chiaro), ma anche dal punto di vista delle trasformazioni cremoniane.

2. *Ipotesi  $\alpha$* .

Cominciamo dal considerare le superficie con le coniche situate a coppie nei piani di un fascio.

Esse sono di due tipi generali, in quanto che [(A), n.º 25] la linea doppia può esser formata :

$\alpha'$ ) dai sei spigoli di un tetraedro e da una retta che si appoggia a due suoi spigoli opposti, oppure

$\alpha''$ ) dai sei spigoli di un angoloide tetraedro completo e da una retta ulteriore appoggiata a due suoi spigoli opposti.

Ciascuno dei casi  $\alpha'$ ) ed  $\alpha''$ ) ammette poi un caso particolare caratterizzato dall'avvicinarsi indefinito di due certe rette doppie ad altre due delle rette medesime.

3. *Caso  $\alpha'$* .

All'equazione della superficie  $F$  più generale corrispondente all'ipotesi  $\alpha'$ ), assegnata già in (A) al n.º 19, scegliendo opportunamente il tetraedro fondamentale, può darsi l'aspetto :

$$\left. \begin{aligned} & B x_1^2 x_3^2 (a x_1 + b x_4)^2 + \\ & + x_1 x_2 (a x_1 + b x_4) (c x_2 + d x_3) (D x_3^2 + E x_3 x_4 + G x_4^2) + \\ & + K x_2^2 x_4^2 (c x_2 + d x_3)^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Ora si applichi ad  $F$  la trasformazione cremoniana definita dalle formule:

$$\left. \begin{aligned} \rho x_1 &= d y_1 y_2 y_4 & \sigma y_1 &= x_1 x_4 (a x_1 + b x_4) \\ \rho x_2 &= d y_1 y_3 y_4 & \sigma y_2 &= x_1 x_4 (c x_2 + d x_3) \\ \rho x_3 &= (b y_2 + y_4) (a y_2^2 - c y_1 y_3) & \sigma y_3 &= x_2 x_4 (c x_2 + d x_3) \\ \rho x_4 &= d y_1 (a y_2^2 - c y_1 y_3) & \sigma y_4 &= x_1 (a d x_1 x_3 - b c x_2 x_4); \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

essa si cangerà nel cono cubico  $F'$ :

$$\left. \begin{aligned} & B y_1 (b y_2 + y_4)^2 + y_3 [D (b y_2 + y_4)^2 + E d y_1 (b y_2 + y_4) + G d^2 y_1^2] + \\ & + K d^2 y_1 y_3^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Le immagini delle sezioni piane  $C$  di  $F$  sono dunque date su  $F'$  dalle curve  $C'$  secondo cui  $F'$  è tagliato dalle superficie cubiche del sistema lineare

$$d y_1 y_4 (\lambda_0 y_2 + \lambda_1 y_3) + (a y_2^2 - c y_1 y_3) [\lambda_2 (b y_2 + y_4) + \lambda_3 d y_1] = 0$$

le quali passano per la retta  $y_2 = y_3 = 0$ , per la retta  $y_1 = b y_2 + y_4 = 0$  (che sta sul cono  $F'$ ), per la retta  $y_1 = y_2 = 0$  (lungo la quale toccano tutte il piano  $y_1 = 0$ ), e per la conica  $k^2$  rappresentata dalle equazioni:

$$y_4 = a y_2^2 - c y_1 y_3 = 0.$$

Notisi poi che le superficie medesime toccano il cono  $F'$  nel punto  $y_2 = y_3 = y_4 = 0$ , che in  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$  hanno un punto doppio conico e che in  $y_1 = y_2 = y_4 = 0$  hanno un punto doppio biplanare, uno dei piani osculatori essendo fisso e coincidendo con  $y_1 = 0$ , cioè col piano ivi tangente al cono  $F'$ .

Segue che le  $C'$  sono curve dell'8.º ordine, passanti due volte per il vertice di  $F'$ , con tre punti doppi nei vertici 1, 3, 4 del tetraedro fondamentale dello spazio ( $y_1 y_2 y_3 y_4$ ) e due punti semplici nei punti ove la conica  $k^2$  incontra  $F'$  fuori di 1 e 3 (\*).

#### 4. Caso particolare.

La superficie del n.º precedente può presentare un caso particolare, e questo si ha quando delle due quadriche, che in (A) furono indicate con  $\Phi'_1$  e con  $\Phi'_2$  e che in generale si spezzano in coppie di piani distinti, una (ed una sola) si spezza in un piano contato due volte.

Allora all'equazione della superficie che continueremo a chiamare  $F$  si può dare la forma:

$$\left. \begin{aligned} B x_1^2 x_3^2 (a x_1 + b x_4)^2 + x_1 x_2^2 (a x_1 + b x_4) (D x_3^2 + E x_3 x_4 + G x_4^2) + \\ + K x_2^4 x_4^2 = 0; \end{aligned} \right\} (4)$$

e questa mediante la trasformazione cremoniana definita dalle formole:

$$\left. \begin{aligned} \rho x_1 &= b y_1^2 y_2 & \sigma y_1 &= x_1 x_2 x_3 \\ \rho x_2 &= b y_1 y_2 y_4 & \sigma y_2 &= x_2^2 x_4 \\ \rho x_3 &= (y_3 y_4 - a y_1^2) y_4 & \sigma y_3 &= x_1 x_3 (a x_1 + b x_4) \\ \rho x_4 &= (y_3 y_4 - a y_1^2) y_2 & \sigma y_4 &= x_2^2 x_3 \end{aligned} \right\} \text{ossia} \quad (5)$$

si cangia nel cono cubico  $F'$ :

$$B y_3^2 y_4 + y_3 (D y_4^2 + E y_2 y_4 + G y_2^2) + K y_2^2 y_4 = 0. \quad (6)$$

(\*) Il fatto, che ognuna delle curve  $C'$  ha, fuori del vertice di  $F'$ , tre punti doppi, collima, per una notissima formula del prof. SEGRE (*Math. Ann.*, Bd. 34), con l'altro che le  $C'$  bisecano in punti variabili le generatrici di  $F'$  e sono del genere 3. Notisi poi che la conica  $k^2$  tocca  $F'$  in 1 e 3.

Il sistema  $C$  delle sezioni piane di  $F$  si muta nel sistema  $C'$  tagliato su  $F'$  dal sistema lineare di superficie cubiche :

$$b y_1 y_2 (\lambda_0 y_1 + \lambda_1 y_4) + (y_3 y_4 - a y_1^2) (\lambda_2 y_4 + \lambda_3 y_2) = 0.$$

Queste superficie passano per la conica  $k^2$  rappresentata dalle equazioni

$$y_2 = y_3 y_4 - a y_1^2 = 0$$

e per le rette:  $y_2 = y_4 = 0$  (che sta sul cono  $F'$ ),  $y_1 = y_3 = 0$  e  $y_1 = y_4 = 0$ ; di più lungo quest'ultima toccano tutte il piano  $y_4 = 0$ .

Notisi inoltre che esse hanno due punti doppi in  $y_1 = y_3 = y_4 = 0$  e  $y_1 = y_2 = y_4 = 0$ , quest'ultimo essendo biplanare con un piano osculatore fisso in  $y_4 = 0$ ; e che nel punto  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$  esse toccan tutte il cono  $F'$ .

Si conclude allora che  $C'$  è un sistema di curve dell'8.<sup>o</sup> ordine, con un punto-base doppio nel vertice di  $F'$ , con altri tre punti-base doppi nei punti  $y_1 = y_3 = y_4 = 0$ ,  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$  e  $y_1 = y_2 = y_4 = 0$ , e due punti-base semplici in quelli ove la conica  $k^2$  è tagliata dalla retta  $y_2 = B y_3 + D y_4 = 0$ .

5. Caso  $\alpha''$ .

Per quanto è stato stabilito in (A) al n.<sup>o</sup> 22, disponendo convenientemente del tetraedro fondamentale, si può fare in modo che l'equazione della superficie di 2.<sup>a</sup> specie  $F$  assuma qui (nelle ipotesi più generali) l'aspetto :

$$\left. \begin{aligned} &Ax_2^2 x_3^2 (ax_2 + bx_3)^2 + x_1 x_2 (ax_2 + bx_3) (cx_1 + dx_3) (Dx_3^2 + Ex_3 x_4 + Gx_4^2) + \\ &+ Hx_1^2 x_3^2 (cx_1 + dx_3)^2 = 0. \end{aligned} \right\} (7)$$

Per convertire questa superficie in un cono cubico basta applicarle la trasformazione :

$$\left. \begin{aligned} \rho x_1 &= (a d y_2 + b y_4) y_3^2 & \sigma y_1 &= (c x_1 + d x_3) x_1 x_4 \\ \rho x_2 &= (b c y_3 + d y_4) y_2 y_3 & \sigma y_2 &= (a x_2 + b x_3) x_2 x_3 \\ \rho x_3 &= (y_4^2 - a c y_2 y_3) y_3 & \sigma y_3 &= (c x_1 + d x_3) x_1 x_3 \\ \rho x_4 &= (y_4^2 - a c y_2 y_3) y_1 & \sigma y_4 &= (a x_2 + b x_3) (c x_1 + d x_3) x_3. \end{aligned} \right\} (8)$$

Si trova con ciò il cono  $F'$  :

$$A y_2^2 y_3 + y_2 (D y_3^2 + E y_1 y_3 + G y_1^2) + H y_3^3 = 0, \tag{9}$$

su cui il sistema  $C'$ , immagine del sistema  $|C$  delle sezioni piane di  $F$ , è tagliato dalle superficie cubiche :

$$\lambda_0 y_3^2 (a d y_2 + b y_4) + \lambda_1 y_2 y_3 (b c y_3 + d y_4) + (\lambda_2 y_3 + \lambda_3 y_1) (y_4^2 - a c y_2 y_3) = 0.$$

Queste superficie passano tutte per le rette:  $y_2 = y_4 = 0$ ,  $y_1 = y_3 = 0$  (che sta sul cono  $F'$ ),  $a d y_2 + b y_4 = b c y_3 + d y_4 = 0$ ,  $y_3 = y_4 = 0$  e lungo quest'ultima toccano tutte il piano  $y_3 = 0$ . Di più si vede che esse hanno due punti doppi in  $y_2 = y_3 = y_4 = 0$  e  $y_1 = y_3 = y_4 = 0$  (quest'ultimo essendo biplanare con un piano osculatore fisso nel piano  $y_3 = 0$ , ivi tangente al cono  $F'$ ) e che la retta  $y_3 = y_4 = 0$  si stacca tre volte dalla linea d'intersezione di due qualunque di esse.

Si trae allora che  $C'$  è un sistema di curve dell'8.º ordine con un punto-base doppio nel vertice di  $F'$ , con altri tre punti-base doppi (di cui uno cade in  $y_1 = y_3 = y_4 = 0$  e altri due si avvicinano indefinitamente a  $y_2 = y_3 = y_4 = 0$  lungo la direzione  $y_2 = y_4 = 0$ ) e due punti-base semplici (nei punti ove la retta  $a d y_2 + b y_4 = b c y_3 + d y_4 = 0$  incontra, fuori di  $y_2 = y_3 = y_4 = 0$ , il cono  $F'$ ).

#### 6. Caso particolare.

Il caso cui qui si vuol alludere si presenta quando, per la superficie considerata nel n.º precedente, delle due quadriche indicate in (A) con  $\Phi'_1$  e  $\Phi'_2$  e spezzate in due coppie di piani, una si riduce a un piano contato due volte. Allora l'equazione della superficie  $F$ , preso convenientemente il tetraedro fondamentale, è:

$$A x_2^4 x_3^2 + x_1 x_2^2 (c x_1 + d x_3) (D x_3^2 + E x_3 x_4 + G x_4^2) + H x_1^2 x_3^2 (c x_1 + d x_3)^2 = 0 \quad (10)$$

cioè si deduce dalla (7) facendovi  $b = 0$  e  $a = 1$ .

Ma allora si vede subito che tutte le conclusioni precedenti non subiscono che cangiamenti lievi.

Così la  $F$  si muterà nel cono cubico  $F'$  rappresentato dalla (9) mediante la trasformazione:

$$\left. \begin{array}{l} \rho x_1 = d y_2 y_3^2 \\ \rho x_2 = d y_2 y_3 y_4 \\ \rho x_3 = (y_4^2 - c y_2 y_3) y_3 \\ \rho x_4 = (y_4^2 - c y_2 y_3) y_1 \end{array} \right\} \text{ossia} \left\{ \begin{array}{l} \sigma y_1 = (c x_1 + d x_3) x_1 x_4 \\ \sigma y_2 = x_2^2 x_3 \\ \sigma y_3 = (c x_1 + d x_3) x_1 x_3 \\ \sigma y_4 = (c x_1 + d x_3) x_2 x_3, \end{array} \right. \quad (11)$$

e sopra  $F'$  il sistema  $C$  delle sezioni piane di  $F$  sarà sempre rappresentato da un sistema  $|C'|$  di curve dell'8.º ordine; solo che questa volta  $|C'|$  ha nel punto  $y_2 = y_3 = y_4 = 0$ , non solo due punti-base doppi infinitamente vicini, ma anche altri due punti-base semplici.

7. *Ipotesi  $\beta$ ); prima alternativa.*

Ed ora passiamo a considerare le superficie di 2.<sup>a</sup> specie con le coniche situate nei piani di una sviluppabile non conica di 4.<sup>a</sup> classe.

Come risulta da (A), le superficie di questo tipo si dividono in due categorie secondo che sono irriducibili o no le loro  $\infty^1$  superficie cubiche (sub-)aggiunte: limitiamoci per adesso alla considerazione della prima alternativa.

Allora le coppie di piani che contengono le coppie di coniche costituenti le aggiunte alle sezioni piane della superficie  $F$ , che si considera, si tagliano secondo le generatrici di una schiera rigata  $\Sigma$  di una quadrica  $Q$  non specializzata, e le superficie cubiche  $\Phi$  aggiunte ad  $F$  tagliano  $Q$  secondo una retta variabile in  $\Sigma$  e una quintica fissa formata da due direttrici di  $\Sigma$ ,  $d_1$  e  $d_2$ , e da una cubica gobba  $C^3$  doppia per  $F$  e bisecata da  $d_1$  e  $d_2$ . Le rette  $d_1$  e  $d_2$  sono poi quelle che, insieme con la linea doppia (del 7.<sup>o</sup> ordine) di  $F$ , completano la linea base del fascio delle  $\Phi$ .

Qui è opportuno osservare che se pure  $C^3$  si spezza, non può mai accadere che una sua parte sia formata da  $d_1$  o  $d_2$ .

E infatti o  $d_1$  e  $d_2$  sono distinte e allora tanto lungo  $d_1$  quanto lungo  $d_2$  una superficie  $\Phi$  è toccata da un medesimo piano (\*) (variabile da superficie a superficie) e quindi è impossibile che  $d_1$  o  $d_2$  si stacchi due volte dalla intersezione di  $Q$  con una superficie  $\Phi$ ; o  $d_1$  e  $d_2$  coincidono in una stessa retta  $d$  e allora le superficie  $\Phi$  sono rigate cubiche con la direttrice doppia in  $d$  e  $d$  è per la superficie  $F$  una retta tacnodale (almeno), in ogni punto di  $d$  il piano tacnodale essendo il secondo piano osculatore in quel punto alla superficie  $\Phi$  che ha come primo piano osculatore il piano ivi tangente alla quadrica  $Q$  (\*\*). Segue che se  $d$  facesse parte della  $C^3$ , l'intersezione di  $d$  con un piano qualunque dello spazio sarebbe, per la sezione di  $F$  giacente in esso, un punto doppio a cui sarebbero venuti infinitamente vicini altri due punti doppi *in direzioni distinte*: cioè  $d$  sarebbe almeno tripla per  $F$ , mentre ragionamenti analoghi ad altri già fatti in (A) assicurano che una superficie di 2.<sup>a</sup> specie del 6.<sup>o</sup> ordine non può avere rette triple.

Ora, supposto che  $d_1$  e  $d_2$  siano distinte, può darsi che

$\beta')$   $C^3$  si appoggi a  $d_1$  in due punti distinti  $A_1$  e  $B_1$ , e a  $d_2$  in due punti distinti  $A_2$  e  $B_2$ ; oppure che

(\*) Cfr. (A), n.° 29.

(\*\*) Questa osservazione non è esplicitamente fatta in (A), ma si giustifica subito ed è implicitamente contenuta in quanto ivi vien detto nei n.° 34, 35 e segg.

$\beta''$ )  $C^3$  tocchi  $d_1$  in un punto  $A_1 \equiv B_1$  e si appoggi a  $d_2$  in due punti distinti  $A_2$  e  $B_2$  (\*); e analogamente se  $d_1$  e  $d_2$  coincidono in un'unica retta  $d$ , può darsi che

$\beta'''$ )  $C^3$  si appoggi a  $d$  in due punti distinti  $A$  e  $B$ , oppure che

$\beta^{IV}$ )  $C^3$  tocchi  $d$  in un punto  $A$ .

Queste ipotesi, nel caso che  $C^3$  sia irriducibile, furono già considerate in (A) (di cui abbiamo pure mantenute tutte le notazioni): quindi, in virtù dell'osservazione ora fatta, la prima alternativa dell'ipotesi  $\beta$ ) sarà compiutamente discussa quando accanto ai casi  $\beta')$ ,  $\beta''$ ),  $\beta'''$ ) e  $\beta^{IV}$ ) con la  $C^3$  irriducibile si siano contemplati anche quelli con la  $C^3$  variamente spezzata.

8. Caso  $\beta')$ .

Qui [cfr. (A), n.º 31] l'equazione della superficie  $F$ , scelto convenientemente il tetraedro fondamentale, può scriversi:

$$\begin{aligned}
 & A_{12}[(ca)x_2x_4+(cb)x_1x_4+(cd)x_1x_2][(da)x_2x_3+(db)x_1x_3+(dc)x_1x_2]x_3x_4+ \\
 & A_{13}[(ca)x_2x_4+(cb)x_1x_4+(cd)x_1x_2][(ab)x_3x_4+(ac)x_2x_4+(ad)x_2x_3]x_2x_4+ \\
 & A_{14}[(ca)x_2x_4+(cb)x_1x_4+(cd)x_1x_2][(ba)x_3x_4+(bc)x_1x_4+(bd)x_1x_3]x_2x_3+ \\
 & A_{23}[(da)x_2x_3+(db)x_1x_3+(dc)x_1x_2][(ab)x_3x_4+(ac)x_2x_4+(ad)x_2x_3]x_1x_4+ \\
 & A_{24}[(da)x_2x_3+(db)x_1x_3+(dc)x_1x_2][(ba)x_3x_4+(bc)x_1x_4+(bd)x_1x_3]x_1x_3+ \\
 & A_{34}[(ab)x_3x_4+(ac)x_2x_4+(ad)x_2x_3][(ba)x_3x_4+(bc)x_1x_4+(bd)x_1x_3]x_1x_2=0.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Ora si applichi a questa superficie la trasformazione rappresentata dalle formule:

$$\begin{aligned}
 \rho x_1 &= [(c a) y_3 + (c d) y_4 + (a d) y_2] y_1 y_4 \\
 \rho x_2 &= [(d b) y_1 y_2 + (d c) y_2 y_4 + (b c) y_1 y_3] y_1 \\
 \rho x_3 &= [(d b) y_1 y_2 + (d c) y_2 y_4 + (b c) y_1 y_3] y_1 \\
 \rho x_4 &= [(c a) y_3 + (c d) y_4 + (a d) y_2] y_1 y_3
 \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned}
 \sigma y_1 &= [(d a) x_2 x_3 + (d b) x_3 x_1 + (d c) x_1 x_2] x_1 x_3 \\
 \sigma y_2 &= [(c a) x_2 x_4 + (c b) x_1 x_1 + (c d) x_1 x_2] x_2 x_3 \\
 \sigma y_3 &= [(d a) x_2 x_3 + (d b) x_3 x_1 + (d c) x_1 x_2] x_3 x_4 \\
 \sigma y_4 &= [(d a) x_2 x_3 + (d b) x_3 x_1 + (d c) x_1 x_2] x_1 x_2 ;
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

(\*) Per quel che è detto in (A) al n.º 33 non può accadere che  $C^3$  tocchi tanto la retta  $d_1$  quanto la retta  $d_2$ .

essa si convertirà nel cono cubico  $F'$ :

$$\left. \begin{aligned} & A_{12} (c d)^2 y_1 y_2 y_3 + A_{13} (c d) [(a d) y_2 + (c a) y_3] y_2 y_3 + \\ & + A_{14} (c d) [(b d) y_2 + (c b) y_3] y_1 y_2 + A_{23} (c d) [(a d) y_2 + (c a) y_3] y_1 y_3 + \\ & \quad + A_{24} (c d) [(b d) y_2 + (c b) y_3] y_1^2 + \\ & + A_{34} [(a d) y_2 + (c a) y_3] [(b d) y_2 + (c b) y_3] y_1 = 0. \end{aligned} \right\} (14)$$

Su questo il sistema  $|C'|$ , immagine del sistema  $|C|$  delle sezioni piane di  $F$ , vien tagliato da superficie cubiche, le quali passano per la retta  $y_1 = y_2 = 0$ , per la conica  $k^2$  secondo cui il piano:

$$(c a) y_3 + (c d) y_4 + (a d) y_2 = 0$$

taglia la quadrica

$$(d b) y_1 y_2 + (d c) y_2 y_4 + (b c) y_1 y_3 = 0,$$

e per la retta  $y_1 = y_4 = 0$ , toccando *lungo* quest'ultima il piano  $y_1 = 0$ .

Aggiungasi che esse hanno tutte dei punti doppi in  $y_1 = y_3 = y_4 = 0$  e  $y_1 = y_4 = (a d) y_2 + (c a) y_3 = 0$  e che nel punto  $y_2 = y_3 = y_4 = 0$  toccano il piano  $(d b) y_2 + (b c) y_3 = 0$  ivi tangente al cono  $F'$ ; di più la conica  $k^2$  passa per il punto  $y_1 = y_4 = (a d) y_2 + (c a) y_3 = 0$ , tocca in  $y_2 = y_3 = y_4 = 0$  il cono  $F'$  e si appoggia alla retta  $y_1 = y_2 = 0$ .

Segue allora che  $|C'|$  è un sistema di curve dell'8.<sup>o</sup> ordine, con un punto-base doppio nel vertice di  $F'$ , con altri tre punti-base doppi nei punti  $y_2 = y_3 = y_4 = 0$ ,  $y_1 = y_3 = y_4 = 0$  e  $y_1 = y_4 = (a d) y_2 + (c a) y_3 = 0$ , e due punti-base semplici nelle intersezioni di  $k^2$  con  $F'$  che non cadono nei punti nominati più sopra.

### 9. *Casi particolari.*

In (A) per scrivere l'equazione della superficie considerata nel n.<sup>o</sup> precedente si suppose che fossero distinti i quattro vertici del quadrangolo gobbo  $A_1 A_2 B_1 B_2$  e che inoltre fosse irriducibile la  $C^3$  doppia della superficie. Ora manteniamo la prima ipotesi, ma togliamo la seconda, cioè supponiamo che  $C^3$  si spezzi. Lo spezzamento potrà avvenire

$\beta'_1$ ) in una conica (irriducibile) e in una retta, oppure

$\beta'_2$ ) in tre rette.

Entrambe queste alternative si esaminano facilmente; poichè badando al fatto che la  $C^3$  (omai spezzata) deve contenere i quattro vertici del quadrangolo gobbo e che nessuna delle parti di  $C^3$  può coincidere con  $d_1$  o

con  $d_2$ , si conclude subito che nell'alternativa  $\beta'_1$ ) la retta che fa parte di  $C^3$  coincide con uno dei lati del quadrangolo gobbo, e sia  $A_2 B_1$ ; e che nell'alternativa  $\beta'_2$ ) delle tre rette che fan parte di  $C^3$  due coincidono con due lati opposti del quadrangolo in discorso, per es. con  $A_2 B_1$  e  $A_1 B_2$ , mentre la terza si appoggia a ciascuno di questi lati in un punto.

Analiticamente, tenendo le notazioni di (A) e del n.º precedente, si vede subito che l'alternativa  $\beta'_1$ ) corrisponde al supporre  $(a d) = 0$ , e che la  $\beta'_2$ ) corrisponde al supporre  $(a d) = (b c) = 0$ . Ora nessuna delle considerazioni fatte qui al n.º 8 diventa illusoria, quando vi si faccia  $(a d) = 0$  oppure  $(a d) = (b c) = 0$ , quindi la discussione dei casi particolari  $\beta'_1$ ) e  $\beta'_2$ ) non presenta nessuna difficoltà.

Si trova così che tanto nell'ipotesi  $\beta'_1$ ) quanto nell'ipotesi  $\beta'_2$ ) la superficie  $F$  è riducibile a un cono cubico (ellittico), le immagini delle sezioni piane essendo curve dell'8.º ordine con un punto doppio nel vertice del cono, con altri tre punti-base doppi, di cui due sono infinitamente vicini, e due punti-base semplici.

Quanto alla linea doppia di  $F$ , oltre che dai lati del quadrangolo gobbo  $A_1 A_2 B_1 B_2$ , essa è costituita:

nell'ipotesi  $\beta'_1$ ) da una conica, passante pei due vertici  $A_1, B_2$  del quadrangolo e appoggiata al lato  $A_2 B_1$ , e da una retta infinitamente vicina ad  $A_2 B_1$  nel piano che passa per  $A_2 B_1$  e tocca la conica;

nell'ipotesi  $\beta'_2$ ) da due rette, di cui una è infinitamente vicina ad  $A_2 B_1$ , l'altra ad  $A_1 B_2$  e infine da una retta ulteriore secondo la quale si intersecano i due piani che contengono le due coppie di rette infinitamente vicine della superficie.

#### 10. Caso $\beta''$ ).

Questa volta l'equazione della superficie  $F$  è, rispetto a un opportuno tetraedro fondamentale [cfr. (A), n.º 32]:

$$\left. \begin{aligned}
 & A_{11} [(a_1 - a_0) x_2 x_4 + (b_1 - b_0) x_3 x_4 + (c_1 - c_0) x_2 x_3]^2 x_2 x_3 + \\
 & 2 A_{12} [(a_1 - a_0) x_2 x_4 + (b_1 - b_0) x_3 x_4 + (c_1 - c_0) x_2 x_3] \times \\
 & \quad [(a_0 - a_1) x_1 x_2 + (a b) x_4^2 + (a c) x_2 x_4] x_3 x_4 + \\
 & 2 A_{13} [(a_1 - a_0) x_2 x_4 + (b_1 - b_0) x_3 x_4 + (c_1 - c_0) x_2 x_3] \times \\
 & \quad [(b_0 - b_1) x_1 x_3 + (b a) x_4^2 + (b c) x_3 x_4] x_2 x_4 + \\
 & 2 A_{23} [(a_0 - a_1) x_1 x_2 + (a b) x_4^2 + (a c) x_2 x_4] \times \\
 & \quad [(b_0 - b_1) x_1 x_3 + (b a) x_4^2 + (b c) x_3 x_4] x_4^2 +
 \end{aligned} \right\} (15)$$



$$\left. \begin{aligned} 2 A_{24} [(a_0 - a_1) x_1 x_2 + (a b) x_4^2 + (a c) x_2 x_4] \times \\ [(c_0 - c_1) x_1 x_2 x_3 + (c a) x_2 x_4^2 + (c b) x_3 x_4^2] x_3 + \\ 2 A_{34} [(b_0 - b_1) x_1 x_3 + (b a) x_4^2 + (b c) x_3 x_4] \times \\ [(c_0 - c_1) x_1 x_2 x_3 + (c a) x_2 x_4^2 + (c b) x_3 x_4^2] x_2 = 0. \end{aligned} \right\} (15)$$

Applichiamole la trasformazione definita dalle uguaglianze:

$$\left. \begin{aligned} \rho x_1 &= (a_0 - a_1) y_2 y_3 y_4 + (b_0 - b_1) y_1^2 y_4 + (c_0 - c_1) y_1 y_2 y_4 - \\ &\quad - (a b) y_1^2 y_3 - (a c) y_1 y_2 y_3 \\ \rho x_2 &= (a_0 - a_1) y_2^2 y_3 \\ \rho x_3 &= (a_0 - a_1) y_1^2 y_2 \\ \rho x_4 &= (a_0 - a_1) y_1 y_2 y_3 \end{aligned} \right\} (16)$$

ossia da

$$\left. \begin{aligned} \sigma y_1 &= [(a_0 - a_1) x_2 x_4 + (b_0 - b_1) x_3 x_4 + (c_0 - c_1) x_2 x_3] x_3 x_4 \\ \sigma y_2 &= [(a_0 - a_1) x_2 x_4 + (b_0 - b_1) x_3 x_4 + (c_0 - c_1) x_2 x_3] x_2 x_3 \\ \sigma y_3 &= [(a_0 - a_1) x_2 x_4 + (b_0 - b_1) x_3 x_4 + (c_0 - c_1) x_2 x_3] x_4^2 \\ \sigma y_4 &= [(a_0 - a_1) x_1 x_2 + (a b) x_4^2 + (a c) x_2] x_3 x_4; \end{aligned} \right\} (16)$$

e così troviamo che essa si converte nel cono cubico  $F'$ :

$$\left. \begin{aligned} A_{11} (a_0 - a_1)^2 y_2^2 y_3 - 2 A_{12} (a_0 - a_1)^2 y_2 y_3 y_4 + \\ + 2 A_{13} (a_0 - a_1) [(a b) y_3 + (b_1 - b_0) y_4] y_2 y_3 - \\ - 2 A_{23} (a_0 - a_1) [(a b) y_3 + (b_1 - b_0) y_4] y_3 y_4 - \\ - 2 A_{24} (a_0 - a_1) [(a c) y_3 + (c_1 - c_0) y_4] y_2 y_4 + \\ + 2 A_{34} [(a b) y_3 + (b_1 - b_0) y_4] [(a c) y_3 + (c_1 - c_0) y_4] y_2 = 0; \end{aligned} \right\} (17)$$

sul quale il sistema lineare  $|C'|$  corrispondente al sistema  $C$  delle sezioni piane di  $F$  vien secato da superficie cubiche che passano per la retta  $y_1 = y_3 = 0$ , toccano il piano  $y_2 = 0$  lungo la retta  $y_1 = y_2 = 0$  (che si stacca tre volte dalla linea d'intersezione di due qualunque di esse) e passano per la retta  $y_2 = (a b) y_3 + (b_1 - b_0) y_4 = 0$ , situata sul cono  $F'$ . Di più, hanno un punto doppio in  $y_1 = y_2 = y_4 = 0$  e un altro punto doppio in  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$  col cono osculatore fisso:

$$(a_0 - a_1) y_2 y_3 + (b_0 - b_1) y_1^2 + (c_0 - c_1) y_1 y_2 = 0;$$

mentre nel punto  $y_1 = y_3 = y_4 = 0$  esse toccan tutte il piano  $y_3 = 0$  che è ivi tangente pure al cono cubico  $F'$ .

Se ne trae che  $|C'$  è un sistema di curve dell'8.<sup>o</sup> ordine con un punto-base doppio nel vertice di  $F'$ , con altri tre punti-base doppi nei punti  $y_1 = y_2 = y_4 = 0$ ;  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ ;  $y_1 = y_3 = y_4 = 0$  e con due punti-base semplici avvicinatasi indefinitamente in direzioni generalmente distinte al punto  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ .

### 11. *Caso particolare.*

Manteniamo ora tutte le ipotesi del n.<sup>o</sup> precedente e del n.<sup>o</sup> 32 di (A) prescindendo soltanto da quella che riguarda l'irriducibilità di  $C^3$ .

Si vede allora che l'unico caso possibile è quello in cui  $C^3$  si spezza in una retta coincidente con  $A_1 A_2$  (o  $A_1 B_2$ ) e in una conica passante per  $A_1$  e  $B_2$  (o  $A_1$  e  $A_2$ ). Esso corrisponde al supporre nei calcoli del n.<sup>o</sup> 32 di A  $a_0 - a_1 = 0$  oppure  $b_0 - b_1 = 0$ .

Se supponiamo  $b_0 - b_1 = 0$  anche i calcoli del n.<sup>o</sup> precedente continuano a sussistere tutti salvo leggeri mutamenti; e si trova sempre che  $F$  si può rappresentare sopra un cono cubico (ellittico) mediante un sistema di curve dell'8.<sup>o</sup> ordine dello stesso tipo di quello incontrato più sopra.

Quanto alla linea doppia di  $F$  essa è formata da una conica per  $A_1$  e  $A_2$ , da due rette doppie infinitamente vicine ad  $A_1 A_2$  e da tre rette doppie infinitamente vicine ad  $A_1 B_2$ .

### 12. *Caso $\beta'''$ .*

Qui, perchè risulti più rapida la discussione dei casi particolari che seguono nel n.<sup>o</sup> successivo giova scrivere l'equazione di  $F$  in modo leggermente diverso da quello che si trova in (A) al n.<sup>o</sup> 35.

Ivi comparivano due coni quadrici, dei quali l'uno era rappresentato da

$$x_3^2 + a x_3 x_4 = 0,$$

l'altro da

$$x_4^2 + c x_1 x_3 = 0.$$

Ebbene scriviamo le equazioni di questi due coni nella forma:

$$l x_3^2 + a x_2 x_4 = 0, \quad m x_4^2 + c x_1 x_3 = 0;$$

allora l'equazione di  $F$  assume l'aspetto voluto:

$$\left. \begin{aligned} & A_{11} c^2 x_3^2 (m x_4^2 + c x_1 x_3)^2 - \\ & 2 A_{12} a c x_3 x_4 (m x_4^2 + c x_1 x_3) (l x_3^2 + a x_2 x_4) + A_{22} a^2 x_4^2 (l x_3^2 + a x_2 x_4)^2 + \\ & 2 A_{13} c x_4 (m x_4^2 + c x_1 x_3) (l m x_3^2 x_4 + a l x_2 x_3^2 + a^2 x_2^2 x_4 - a c x_1 x_2 x_3) + \end{aligned} \right\} (18)$$

$$\left. \begin{aligned} & 2 A_{24} a x_3 (l x_3^2 + a x_2 x_4) (l m x_3 x_4^2 + m c x_1 x_4^2 + c^2 x_1^2 x_3 - a c x_1 x_2 x_4) - \\ & 2 A_{34} (l m x_3^2 x_4 + a l x_2 x_3^2 + a^2 x_2^2 x_4 - a c x_1 x_2 x_3) \times \\ & \qquad (l m x_3 x_4^2 + m c x_1 x_4^2 + c^2 x_1^2 x_3 - a c x_1 x_2 x_4) = 0. \end{aligned} \right\} (18)$$

Adesso applichiamo alla  $F$  la trasformazione cremoniana:

$$\left. \begin{aligned} \rho x_1 &= (l y_3 - c y_1) y_1 y_4 & \sigma y_1 &= (l x_3^2 + a x_2 x_4) x_1 x_3 \\ \rho x_2 &= (m y_4^2 - a y_2 y_3) y_2 & \sigma y_2 &= (l x_3^2 + a x_2 x_4) x_2 x_4 \\ \rho x_3 &= (m y_4^2 - a y_2 y_3) y_4 & \sigma y_3 &= (m x_4^2 + c x_1 x_3) x_3^2 \\ \rho x_4 &= (l y_3 - c y_1) y_4^2 & \sigma y_4 &= (l x_3^2 + a x_2 x_4) x_3 x_4 : \end{aligned} \right\} \text{ossia } (19)$$

essa andrà nel cono cubico  $F'$ :

$$\left. \begin{aligned} & A_{11} c^2 y_3^2 y_4 - 2 A_{12} a c y_3 y_4^2 + A_{22} a^2 y_4^3 + 2 A_{13} c (l y_3 + a y_2 - c y_1) y_3 y_4 + \\ & \qquad + 2 A_{24} a (m y_4^2 - a y_2 y_3 + c y_1 y_3) y_4 - \\ & - 2 A_{34} (l y_3 + a y_2 - c y_1) (m y_4^2 - a y_2 y_3 + c y_1 y_3) = 0. \end{aligned} \right\} (20)$$

Il sistema  $C|$  delle sezioni piane di  $F$  si muta nel sistema  $C'$  tagliato sul cono  $F'$  da superficie cubiche che passano per la retta  $y_3 = y_4 = 0$  (situata sul cono  $F'$ ) e per la conica  $k^2$ :

$$l y_3 - c y_1 = m y_4^2 - a y_2 y_3 = 0;$$

e inoltre toccano il piano  $y_4 = 0$  lungo la retta  $y_2 = y_4 = 0$ .

Aggiungasi che esse hanno un punto doppio in  $y_1 = y_2 = y_4 = 0$  e un altro in  $y_2 = y_4 = l y_3 - c y_1 = 0$ ; e che nel punto  $y_1 = y_3 = y_4 = 0$  toccano tutte il piano  $y_3 = 0$ , il quale è ivi tangente anche al cono  $F'$ . Inoltre la conica  $k^2$  incontra  $F'$  nel punto  $y_2 = y_4 = l y_3 - c y_1 = 0$  e lo tocca secondo un contatto tripunto in  $y_1 = y_3 = y_4 = 0$ ; quindi la conica ed  $F'$  non hanno che altri due soli punti ulteriori comuni.

Da tutto ciò segue che le curve di  $|C'|$  sono sempre dell'ordine 8, passano doppiamente per il vertice di  $F'$  e hanno altri tre punti-base doppi e due punti-base semplici; questi ultimi essendo forniti dalle ulteriori intersezioni nominate più sopra della conica  $k^2$  e del cono  $F'$  e quelli coincidendo ordinatamente coi punti

$$y_1 = y_2 = y_4 = 0, \quad y_2 = y_4 = l y_3 - c y_1 = 0, \quad y_1 = y_3 = y_4 = 0 (*).$$

---

(\*) Per persuadersi che quest'ultimo è un punto-base doppio per  $|C'|$  si pensi che i punti della conica secondo cui  $F$  è tagliata, fuori delle rette doppie, dal piano  $x_3 = 0$ , hanno tutti per omologo sul cono  $F'$  il punto  $y_1 = y_3 = y_4 = 0$ .

13. *Casi particolari.*

Per trovare l'equazione della superficie considerata nel n.º precedente, si suppose in (A) che la  $C^3$  doppia fosse irriducibile e che essa incontrasse in due punti distinti la retta  $d$ . Ebbene manteniamo questa seconda ipotesi, ma prescindiamo dalla prima.

Le due rette indicate in (A) con  $a$  e  $b$  continueranno ad esser distinte e sghembe fra di loro e se la  $C^3$  si spezza in una retta e in una conica, quella dovrà coincidere con  $a$  (o  $b$ ) e questa dovrà toccare  $b$  (o  $a$ ) nel suo punto d'appoggio con  $d$ ; mentre se la  $C^3$  si spezza in tre rette, di queste, due coincideranno con  $a$  e  $b$ , e la terza si appoggerà ad  $a$  e  $b$  in punti diversi da quelli ove esse si appoggiano a  $d$ . Notisi poi che appena la nostra superficie viene ad avere due rette doppie infinitamente vicine in  $a$  (o in  $b$ ), necessariamente queste due rette non sono da considerarsi come situate nel piano  $da$  (o  $db$ ), giacchè altrimenti le rigate  $\Phi$  non sarebbero irriducibili.

Si hanno dunque due casi particolari distinti: si ha il primo,  $\beta''_1$ ), quando la  $C^3$  si spezza in una retta e in una conica (irriducibile), si ha il secondo,  $\beta''_2$ ), quando la  $C^3$  si spezza in tre rette.

Analiticamente, si ha il caso  $\beta''_1$ ) quando nelle equazioni e nei calcoli del n.º precedente si fa  $m=0$  (ed  $l \neq 0$ ), oppure  $l=0$  (ed  $m \neq 0$ ); si ha invece il caso  $\beta''_2$ ) quando vi si fa  $l=m=0$ . Si vede con ciò che tutte le conclusioni cui si è pervenuti nel n.º precedente continuano a sussistere salvo leggerissime modificazioni.

In particolare si noti come l'ipotesi  $\beta''_2$ ) conduca a *una superficie  $F$  con due rette doppie infinitamente vicine, fra loro sghembe, in  $d$ , due rette doppie infinitamente vicine in  $a$  e due rette doppie infinitamente vicine in  $b$ , quest'ultime due coppie di rette doppie infinitamente vicine essendo contenute in due piani che si intersecano in una ulteriore (ed ultima) retta doppia  $s$* . Le aggiunte  $\Phi$  sono poi in questo caso delle rigate cubiche con la direttrice doppia in  $d$ , la direttrice semplice in  $s$  e le generatrici singolari in  $a$  e  $b$ .

14. *Caso  $\beta^{IV}$ .*

Qui l'equazione della superficie  $F$  [cfr. (A), n.º 37] è data da :

$$\left. \begin{aligned} & A_{11}a^2h^2R^2x_3^2 - 2A_{12}ah^2(cQ-P)Rx_3 + A_{22}h^2(cQ-P)^2 + \\ & + 2A_{14}ahR \{ a(g-c)x_3^2x_1 + 2h^2x_3^2x_2^2 + h[fx_3^2 + 3(g-c)x_3x_4 + 3hx_4^2]x_2x_3 + \\ & + fx_3^2x_4[hx_4 + (g-c)x_3] + x_4^2[hx_4 + (g-c)x_3]^2 \} + \\ & + 2A_{24}h(cQ-P)[(g-c)(cQ-P) - fhQ] + 2A_{23} \{ [(g-c)(cQ-P) - fhQ]^2 + \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
 &+2h^2fR^2T-hT[a^2x_3^2x_1^2-\{a(g-c)x_3^2x_2-4ahx_2x_3x_4- \\
 &-2afx_3^2x_4-a(g-c)x_3x_4^2-2ahx_4^3\}x_1-2h^2x_3x_2^2- \\
 &-h\{3(g-c)x_3+h x_4\}x_4x_2^2+\{4hf-(g-c)^2\}x_2x_3x_4^2-f(g-c)x_2x_3^2x_4- \\
 &-h(g-c)x_2x_4^2-fx_3^2x_4^2+f(g-c)x_3x_4^3+2hf x_4^4]=0
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

dove

$$\begin{aligned}
 P &= a x_3^2 x_1 + x_3 (c x_3 + 2 h x_4) x_2 + f x_3^2 x_4 + g x_3 x_4^2 + h x_4^3, \\
 Q &= x_3, R = x_3 (x_2 x_3 + x_4^2), \\
 T &= h x_4^2 + 2 h x_2 x_3 + (g - c) x_3 x_4.
 \end{aligned}$$

Ora si applichi a codesta superficie la trasformazione cremoniana rappresentata dalle uguaglianze

$$\begin{aligned}
 \rho x_1 &= h y_2 y_1^2 - [2 h f y_3 + (g - c) y_2 + 2 h y_4] y_1 y_3 + y_2 y_3 y_4 \\
 \rho x_2 &= a y_3 \{ y_3 [y_4 - (g - c) y_1] - h y_1^2 \} \\
 \rho x_3 &= 2 a h y_3^2 \\
 \rho x_4 &= 2 a h y_3^2 y_1,
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

ossia

$$\begin{aligned}
 \sigma y_1 &= x_3 x_4 (x_2 x_3 + x_4^2) \\
 \sigma y_2 &= a x_1 x_3^2 + f x_3^2 x_4 + (g - c) x_3 x_4^2 - h x_4^3 + 2 h x_4 (x_2 x_3 + x_4^2) \\
 \sigma y_3 &= x_3^2 (x_2 x_3 + x_4^2) \\
 \sigma y_4 &= (x_2 x_3 + x_4^2) [h x_4^2 + 2 h x_2 x_3 + (g - c) x_3 x_4];
 \end{aligned}$$

essa si convertirà nel cono cubico  $F'$

$$\begin{aligned}
 &A_{11}a^2h^2y_3^3+2A_{12}ah^2y_2y_3^2+A_{22}h^2y_2^2y_3+ \\
 &+2A_{14}ahy_1^2[h y_4+(g-c)y_2+h f y_3]+2A_{24}h y_2 y_3[(g-c)y_2+f h y_3]+ \\
 &+2A_{23}\{y_3[(g-c)y_2+f h y_3]^2+2h^2f y_3^2 y_4-h y_4[y_2^2-(g-c)y_2 y_3-h y_3 y_4]\}=0.
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Il sistema  $|C'$  di  $F'$ , corrispondente al sistema  $C$  delle sezioni piane di  $F$ , è staccato su  $F'$  da superficie cubiche le quali passano tutte per la retta  $y_2 = y_3 = 0$  (situata sul cono  $F'$ ) e toccano lungo la retta  $y_1 = y_3 = 0$  il piano  $y_3 = 0$  (tangente ad  $F'$  lungo la generatrice  $y_2 = y_3 = 0$ ). Di più esse hanno un punto doppio in  $y_1 = y_3 = y_4 = 0$  col cono osculatore fisso:

$$h y_1^2 + (g - c) y_1 y_3 + y_3 y_4 = 0,$$

e un punto doppio biplanare in  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$  con uno dei piani osculatori nel piano fisso  $y_3 = 0$ .

Segue che le  $C'$  sono curve dell'8.<sup>o</sup> ordine, passanti due volte per il vertice di  $F'$ , con un punto doppio in  $y_1 = y_3 = y_4 = 0$  e quivi le tangenti fisse, e infine con un punto doppio in  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ . Ma è facile accorgersi che in questo punto le  $C'$  hanno tutte un tacnodo con la tangente tacnodale nella retta  $m$  rappresentata dalle equazioni:

$$y_3 = 0, \quad y_2 - h y_1 = 0.$$

La maniera più semplice per persuadersene, dopo aver notato che le  $C'$  hanno un'unica tangente in  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ , consiste nell'osservare che le sezioni del cono  $F'$  coi piani del fascio  $m$  hanno per immagini su  $F$  le curve segnatevi dal fascio di quadriche:

$$a x_1 x_3 + h x_2 x_4 + f x_3 x_4 + (g - c) x_4^2 + u (x_2 x_3 + x_4^2) = 0,$$

quadriche che passano tutte per la cubica doppia di  $F$  e per *una* delle sue quattro rette doppie infinitamente vicine. Ma allora codeste curve sono quarte sghembe (ellittiche); il che significa che ogni curva  $C'$  è tagliata da un piano per  $m$  soltanto in quattro punti, fuori di  $m$ . Segue che  $m$ , poichè non può incontrare una  $C'$  fuori di  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ , ha quivi un contatto quadripunto con ogni curva  $C'$ .

Ciò basta per giustificare la nostra asserzione.

Si conclude che  $|C'|$  ha, al solito (fuori del vertice di  $F'$ ) tre punti-base doppi, di cui due sono infinitamente vicini fra loro, e due punti-base semplici, avvicinatasi indefinitamente, in direzioni generalmente distinte, al punto doppio che è a distanza finita dagli altri due.

Con questo, è esaurito l'esame della prima alternativa a cui dà luogo l'ipotesi  $\beta$ ), poichè, come si vede facilmente, il caso  $\beta^{IV}$ ) non può verificarsi altro che con una  $C^3$  irriducibile.

#### 15. *Ipotesi $\beta$ ); seconda alternativa.*

Passiamo dunque alla seconda alternativa, cioè supponiamo che tutte le superficie  $\Phi$  aggiunte ad  $F$  siano riducibili.

Allora la curva doppia di  $F$ , come risulta da (A), è generalmente composta di una cubica piana nodale e di quattro rette secondo cui si intersecano ulteriormente due coppie di piani uscenti dalle sue tangenti nodali, e l'equazione di una tale superficie può scriversi nel modo che è indicato in (A) al

n.º 40 (\*). Ma qui, per poter considerare insieme il caso generale e uno dei casi particolari che sarà notato nel n.º successivo, conviene scriverla in forma leggermente diversa. Per questo, al posto della prima delle (61) di (A) si sostituisca l'equazione

$$x_3(c x_1 - x_3) = 0$$

e, in conformità di ciò, si sostituisca l'equazione

$$A_{11} \zeta_1 (\zeta_1 + c \zeta_3 + \zeta_4) + 2 A_{12} \zeta_1 \zeta_2 + A_{22} \zeta_2^2 + 2 A_{23} \zeta_2 \zeta_3 + \\ + 2 A_{24} \zeta_2 \zeta_4 + 2 A_{34} \zeta_3 \zeta_4 = 0$$

all'altra che ivi si aggregava alla (62) per rappresentare analiticamente la  $\infty^1$  dei piani contenenti le coniche di  $F$ . Allora l'equazione di  $F$  assume l'aspetto:

$$A_{11} k^2 (-a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4)^2 (c x_1 - x_3) (x_1 - x_4) x_3 x_4 - \\ - 2 A_{11} k [k^2 a_4 x_4 (x_1 - x_4)^2 + a_3 x_3 (c x_1 - x_3)^2] (-a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4) x_3 x_4 + \\ + k^2 [2 A_{12} a_2 - A_{11} (c a_3 + a_4)] (-a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4) (c x_1 - x_3) (x_1 - x_4) x_1 x_3 x_4 - \\ - k [2 A_{12} a_2 - A_{11} (c a_3 + a_4)] [k^2 a_4 x_4 (x_1 - x_4)^2 + a_3 x_3 (c x_1 - x_3)^2] x_1 x_3 x_4 + \\ + A_{11} k [k^2 a_4 c x_4^2 (x_1 - x_4)^2 + a_3 x_3^2 (c x_1 - x_3)^2] (-a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4) x_1 + \\ + A_{22} k^2 a_2^2 (c x_1 - x_3) (x_1 - x_4) x_1^2 x_3 x_4 - \\ - A_{11} [k^2 a_4 x_4 (x_1 - x_4)^2 + a_3 x_3 (c x_1 - x_3)^2] [k^2 a_4 x_4^2 (x_1 - x_4) + a_3 x_3^2 (c x_1 - x_3)] + \\ + 2k [A_{23} k a_2 (x_1 - x_4) x_4 - A_{24} a_2 (c x_1 - x_3) x_3 - \\ - A_{34} [k a_4 x_4 (x_1 - x_4) - a_3 x_3 (c x_1 - x_3)]] [k a_4 x_4 (x_1 - x_4) - a_3 x_3 (c x_1 - x_3)] x_1^2 = 0. \quad (24)$$

Ebbene si applichi a questa superficie la trasformazione cremoniana rappresentata dalle uguaglianze:

$$\varphi x_1 = k y_2 (y_1 y_2 - y_3^2) \\ \varphi x_2 = \frac{1}{a_2} \left[ a_3 y_2 (y_1 - c y_3) (y_1 + k y_3) + k a_4 y_2 (c y_2 - y_3) (k y_2 + y_3) - y_4 (y_1 y_2 - y_3^2) \right] \\ \varphi x_3 = k y_2 y_3 (y_1 - c y_3) \\ \varphi x_4 = k y_2 y_3 (c y_2 - y_3) \quad (25)$$

(\*) A questo proposito si osservi che nell'equazione di  $F$  scritta in (A) al n.º 40 al termine che ha per coefficiente  $2 A_{24}$  è stato soppresso, per errore, il fattore  $(x_1 - x_3)$ .

ossia

$$\left. \begin{aligned} \sigma y_1 &= x_1 x_3^2 (c x_1 - x_3) \\ \sigma y_2 &= x_1 x_3 x_4 (x_1 - x_4) \\ \sigma y_3 &= x_1 x_3^2 x_4 \\ \sigma y_4 &= (x_1 - x_4) [a_3 c x_3^2 x_1 + k^2 a_4 x_4^2 x_1 + k x_3 x_4 (-a_3 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_1) - \\ &\quad - (k^2 a_4 x_4^3 + a_3 x_3^3)]; \end{aligned} \right\} (25)$$

essa si convertirà nel cono cubico  $F'$ :

$$\left. \begin{aligned} [2A_{12}a_2 - A_{11}(ca_3 + a_4)]ky_2 + A_{11}y_4 \} (-a_3y_1^2 - k^2a_4cy_2^2 + y_1y_4) + \\ + A_{22}k^2a_2y_1y_2^2 + 2ky_2(ka_4y_3 - a_3y_1)[k(A_{23}a_2 - A_{34}a_4)y_2 + (A_{34}a_3 - A_{24}a_2)y_1] = 0. \end{aligned} \right\} (26)$$

Il sistema lineare  $C'$  di  $F'$  corrispondente al sistema  $|C|$  delle sezioni piane di  $F$  è staccato su  $F'$  da superficie cubiche le quali passano per le rette:  $y_2 = y_4 = 0$ ,  $y_1 - c y_3 = c y_2 - y_3 = 0$  e  $y_2 = y_3 = 0$ , e lungo quest'ultima toccano tutte il piano  $y_2 = 0$  (\*). Notisi inoltre che esse hanno un punto doppio in  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$  col cono osculatore fisso

$$y_1 y_2 - y_3^2 = 0$$

che tocca il piano ivi tangente ad  $F'$ , e un altro punto doppio in

$$y_2 = y_3 = y_4 - a_3 y_1 = 0.$$

Segue che  $|C'|$  è un sistema di curve dell'8.<sup>o</sup> ordine, passanti due volte per il vertice di  $F'$ , con altri tre punti-base doppi e due punti-base semplici. Dei punti-base doppi, distinti dal vertice di  $F'$ , uno cade in  $y_2 = y_3 = y_4 - a_3 y_1 = 0$ , un altro coincide con  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$  e il terzo è infinitamente vicino a questo nella direzione  $y_1 = y_3 = 0$  (\*\*); i punti-base semplici si trovano poi nelle intersezioni del cono  $F'$  con la retta  $y_1 - c y_3 = c y_2 - y_3 = 0$  diverse dal punto  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ .

(\*) Notisi che quest'ultima si stacca tre volte dalla linea di intersezione di due qualunque delle superficie cubiche in discorso.

(\*\*) Si osservi infatti che le  $C'$  hanno in  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$  la sola tangente  $y_1 = y_3 = 0$  e che i piani per questa retta secano le  $C'$  in quattro soli punti variabili, fuori di  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ , poichè essi secano il cono  $F'$  nelle immagini delle quartiche staccate da  $F'$  per mezzo dei piani del fascio

$$\lambda (c y_1 - y_3) + \mu y_4 = 0.$$



16. *Casi particolari.*

Per veder chiaro quali particolarità possono presentarsi per la superficie  $F$  studiata nel n.º precedente, si ricordi da (A) che, se si dice  $\Psi$  la sviluppabile costituita dai piani delle  $\infty^1$  coniche di  $F$ , le superficie cubiche  $\Phi$  aggiunte ad  $F$  si spezzano in un piano  $\omega$ , che contiene una,  $K$ , delle quattro coniche inscritte in  $\Psi$ , e in un fascio di conici quadrici aventi il vertice in un punto  $O$  di  $\omega$  e passanti per le quattro rette secondo cui si intersecano le coppie di piani di  $\Psi$  uscenti dai raggi del fascio ( $O, \omega$ ) che toccano  $K$ .

Ora, o

$\bar{\beta}'$ ) il punto  $O$  non è situato su  $K$ , oppure

$\bar{\beta}''$ ) il punto  $O$  giace su  $K$ .

Se  $O$  è fuori di  $K$ , i piani di  $\Psi$  uscenti dalle due rette del fascio ( $O, \omega$ ) che toccano  $K$  possono essere tutti distinti, e allora si ha il caso più generale possibile che appunto è stato contemplato nel n.º precedente; oppure di quelle due coppie di piani *una sola* [cfr. (A), n.º 41] si compone di due piani coincidenti e allora si ha un primo caso particolare che indicheremo con  $\bar{\beta}'_1$ ).

Se  $O$  giace su  $K$ , il fascio di conici quadrici che insieme con  $\omega$  dà il fascio delle superficie  $\Phi$  aggiunte ad  $F$  non contiene più che un cono spezzato in due piani di  $\Psi$ , questo cono dovendo contare per due fra i conici degeneri del fascio; i due piani di  $\Psi$  ora nominati possono poi esser distinti o coincidenti e quindi si avranno altri due casi particolari, che designeremo rispettivamente con  $\bar{\beta}''_1$ ) e  $\beta''_2$ ).

17. *Caso  $\bar{\beta}'_1$ ).*

Per questo non c'è bisogno di spender molte parole. Esso si presenta quando nei calcoli e nelle considerazioni del n.º 15 si supponga  $c=0$ : e con ciò tutte le cose dette non subiscono che cangiamenti lievi. Notisi che questa volta  $F$  ha sempre una cubica piana doppia dotata di un nodo, ma delle sue quattro rette doppie soltanto due sono distinte.

18. *Caso  $\bar{\beta}''_1$ ).*

Qui il punto  $O$  giace su  $K$  e i due piani distinti di  $\Psi$  passanti per la retta  $l$  tangente a  $K$  in  $O$  assorbono due dei tre conici degeneri del solito fascio; per conseguenza questo fascio è costituito da conici col vertice in  $O$  che toccano lungo  $l$  un piano fisso  $\delta$ , e il terzo cono degeneri del fascio è dato da  $\delta$  e da un piano  $\varepsilon$  che passa per  $O$  ma non per  $l$ .

Per trovare l'equazione della superficie  $F$  che corrisponde a queste ipotesi particolari scegliamo come tetraedro fondamentale 1 2 3 4 quello che ha il vertice 2 nel punto  $O$ , il vertice 3 nel punto d'incontro di  $K$  con  $\varepsilon$ , diverso

da  $O$ , il vertice 4 nel polo di  $\mathfrak{B}$  rispetto a  $K$  e il vertice 1 in un punto generico dell'intersezione di  $\varepsilon$  con uno dei piani di  $\Psi$  uscenti da  $l$ . Allora disponendo ancora del punto unità può farsi in modo che l'equazione di  $K$  (considerata come quadrica-inviluppo) sia

$$\xi_4^2 - \xi_2 \xi_3 = 0 \quad (27)$$

o, in forma parametrica,

$$\xi_2 = \lambda^2, \quad \xi_3 = \mu^2, \quad \xi_4 = \lambda \mu \quad (28)$$

e quella del fascio di coni quadrici sia:

$$\nu x_3 (x_1 - x_3) + \rho x_4 (x_1 - k x_3) = 0, \quad (29)$$

dove

$$x_3 = 0 \quad \text{e} \quad x_1 - x_3 = 0$$

sono le equazioni dei due piani di  $\Psi$  uscenti da  $l$ ; e

$$x_4 = 0 \quad \text{e} \quad x_1 + k x_3 = 0$$

sono rispettivamente le equazioni di  $\varepsilon$  e  $\delta$ .

Con una discussione analitica che non presenta difficoltà di sorta e che procede in modo perfettamente analogo ad altre già eseguite in (A), si vede che l'equazione di una delle  $\infty^1$  quadriche-inviluppo inscritte in  $\Psi$  (diversa da  $K$ ) deve essere del tipo:

$$2A_{13}(\xi_1 + \xi_3)\xi_1 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + A_{22}\xi_2^2 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 + 2A_{24}\xi_2\xi_4 + A_{44}\xi_4^2 = 0; \quad (30)$$

che la proiettività indotta fra i coni del fascio (29) e le tangenti della conica  $K$  dalle coniche di  $F$  [cfr. (A) n.º 40] deve tradursi fra i parametri  $\frac{\rho}{\nu}$  e  $\frac{\lambda}{\mu}$  in una equazione della forma

$$a\rho\lambda - b(\rho\mu + \lambda\nu) = 0$$

e che nella (29) si deve supporre  $k = -2$  (\*).

Con tutto ciò si arriva per la superficie  $F$  all'equazione:

$$\left. \begin{aligned} & -2A_{13}a[a(x_1-x_3)x_3 - b(x_1-2x_3)x_4]^2 + b^2[a(x_1-x_3)x_3 - b(x_1-2x_3)x_4]^2 \times \\ & \left\{ \begin{aligned} & 2A_{13}(x_4^2 + 2x_2x_3 - x_1x_2) - 2A_{12}x_1x_3 + (2A_{23} + A_{44})x_1^2 \\ & + 2b^3x_3(x_1-x_3)[a(x_1-x_3)x_3 - b(x_1-2x_3)x_4] \{ 2A_{13}x_2x_4 - A_{12}x_1x_4 + A_{24}x_1^2 \} + \\ & + b^4x_3^2(x_1-x_3)^2(2A_{13}x_2^2 - 2A_{12}x_1x_2 + A_{22}x_1^2) = 0; \end{aligned} \right\} \quad (31) \end{aligned}$$

(\*) Vale a dire: il piano  $\delta$  deve essere il coniugato armonico di  $\omega$  rispetto ai due piani di  $\Psi$  uscenti da  $l$ .

quindi la linea doppia di  $F$  si spezza nella conica  $C^2$  che ha nel piano  $x_1 = 0$  l'equazione :

$$a^2 x_3^2 + 2 b^2 x_4^2 + b^2 x_2 x_3 - 3 a b x_3 x_4 = 0,$$

nella retta  $x_1 = x_3 = 0$  (cioè  $l$ ) contata tre volte (\*) e nelle due rette  $x_3 = x_4 = 0$  e  $x_1 - x_3 = x_4 = 0$ .

La cubica nodale doppia del caso generale si spezza dunque qui nella retta  $l$  e nella conica  $C^2$  tangente ad  $l$  nel punto  $O$ .

Ora si assoggetti la superficie  $F$  in discorso alla trasformazione cremoniana definita dalle formole :

$$\left. \begin{aligned} \rho x_1 &= b^2 y_1^2 (y_2 + 2 y_4) \\ \rho x_2 &= y_4 (a y_1 + b y_2) (b y_4 - a y_1) - y_1 y_3 (y_2 + 2 y_4) \\ \rho x_3 &= b^2 y_1^2 y_4 \\ \rho x_4 &= -b^2 y_1 y_4 (y_2 + y_4), \\ \text{ossia :} \\ \sigma y_1 &= x_1 x_3 (x_3 - x_1)^2 \\ \sigma y_2 &= x_1 x_4 (x_3 - x_1) (x_1 - 2 x_3) \\ \sigma y_3 &= b x_1 x_4 [b x_1 x_4 - 2 b x_3 x_4 - a x_3 (x_3 - x_1)] - \\ &\quad - (x_3 - x_1) [x_3 (x_3 - x_1) (b^2 x_2 + a^2 x_3) - \\ &\quad - b x_4 (3 a x_3^2 - 2 b x_3 x_4 + b x_1 x_4)] \\ \sigma y_4 &= x_1 x_3 x_4 (x_3 - x_1); \end{aligned} \right\} (32)$$

essa si muterà nel cono cubico  $F'$  :

$$\begin{aligned} A_{22} b^4 y_1^3 + 2 A_{24} b^3 y_1^2 (a y_1 + b y_2) + (2 A_{13} + A_{44}) b^2 y_1 (a y_1 + b y_2)^2 + \\ + 2 A_{12} b^2 y_1^2 y_3 + 2 A_{13} [b^2 y_2^2 + (2 a b y_2 + y_3) y_1 + a^2 y_1^2] y_3 = 0. \end{aligned}$$

Le superficie cubiche, che tagliano su  $F'$  il sistema lineare  $\hat{C}'$  corrispondente al sistema delle sezioni piane,  $|C|$ , di  $F$ , hanno un punto doppio in  $y_1 = y_3 = y_4 = 0$  e un altro, biplanare, in  $y_1 = y_2 = y_4 = 0$ , coi piani oscu-

(\*) Come controllo dei calcoli occorrenti per questa discussione e delle formole assegnate in (A) nella 2.<sup>a</sup> Nota a piè di pagina del n.º 13 non abbiamo mancato di verificare direttamente che ogni sezione piana di  $F$  ha, nel punto d'intersezione con la retta  $x_1 = x_3 = 0$ , tre punti doppi infinitamente vicini.

latori fissi  $y_1 = 0$  e  $y_2 + 2y_4 = 0$ . Di più esse hanno in comune una linea del 5.<sup>o</sup> ordine, che si spezza nella retta  $y_1 = y_2 = 0$  (appartenente anche al cono  $F'$ ), nella retta  $y_1 = y_4 = 0$  contata tre volte e nella retta  $y_2 = y_4 = 0$ .

Da tutto ciò segue che  $C'$  è un sistema di curve dell'8.<sup>o</sup> ordine, passanti due volte per il vertice di  $F'$ , con altri tre punti-base doppi, di cui uno cade in  $y_1 = y_3 = y_4 = 0$ , un secondo in  $y_1 = y_2 = y_4 = 0$  e il terzo si trova infinitamente vicino a questo nella direzione  $y_1 = y_2 = 0$ , e con due punti-base semplici nei punti ove  $F'$  è tagliato, fuori di  $y_1 = y_2 = y_4 = 0$ , dalla retta  $y_2 = y_4 = 0$ .

19. *Caso  $\bar{\beta}''_2$* ).

Qui il punto  $O$  giace su  $K$ , e i due piani di  $\Psi$  che escono dalla retta  $l$  tangente a  $K$  in  $O$  coincidono in uno stesso piano  $\eta$  che, contato due volte, assorbe tutti e tre i coni degeneri del solito fascio. Questo è dunque costituito da un fascio di coni che toccano  $\eta$  lungo  $l$  e le cui quattro rette basi coincidono tutte con  $l$ .

Per trovare l'equazione della superficie  $F$  corrispondente a queste ipotesi si scelga sempre il vertice 2 del tetraedro fondamentale nel punto  $O$ , il piano 124 nel piano  $\eta$  e il piano 234 in  $\omega$ ; poi si disponga dei rimanenti elementi del tetraedro fondamentale in modo che l'equazione della conica  $K$  (considerata come quadrica-inviluppo) abbia ancora l'aspetto:

$$\xi_4^2 - \xi_2 \xi_3 = 0 \quad (33)$$

o, sotto forma parametrica:

$$\xi_2 = \lambda^2, \quad \xi_3 = \mu^2, \quad \xi_4 = \lambda \mu, \quad (34)$$

e che il fascio dei coni quadrici sia rappresentato dall'equazione:

$$\nu x_3^2 + \rho (x_1^2 - x_3 x_4) = 0. \quad (35)$$

Si trova allora che l'equazione di una delle  $\infty^1$  quadriche-inviluppo inscritte in  $\Psi$  (diversa da  $K$ ) deve esser del tipo:

$$A_{11} (\xi_1^2 - 2 \xi_3 \xi_4) + 2 A_{12} \xi_1 \xi_2 + A_{22} \xi_2^2 + 2 A_{23} \xi_2 \xi_3 + 2 A_{24} \xi_2 \xi_4 + A_{44} \xi_4^2 = 0,$$

che la proiettività indotta fra i coni del fascio (35) e le tangenti di  $K$  dalle coniche di  $F$  deve tradursi fra i parametri  $\frac{\rho}{\nu}$  e  $\frac{\lambda}{\mu}$  in una relazione delle forma:

$$\alpha \rho \lambda - (\rho \mu + 2 \lambda \nu) = 0$$

e che infine la richiesta equazione di  $F$  è data da:

$$\left. \begin{aligned}
 A_{11} a [a x_3^2 + 2(x_1^2 - x_3 x_4)]^3 + [A_{11}(x_4^2 + 2x_2 x_3) - 2A_{12} x_1 x_3 + \\
 + (2A_{23} + A_{44}) x_2^2] [a x_3^2 + 2(x_1^2 - x_3 x_4)]^2 + \\
 + 2(A_{11} x_2 x_4 - A_{12} x_1 x_4 + A_{24} x_1^2) [a x_3^2 + 2(x_1^2 - x_3 x_4)] x_3^2 + \\
 + (A_{11} x_2^2 - 2A_{12} x_1 x_2 + A_{22} x_1^2) x_3^4 = 0.
 \end{aligned} \right\} (36)$$

La linea doppia di questa superficie è costituita dalla conica  $C^2$  del piano  $x_1 = 0$  che è ivi rappresentata dall'equazione:

$$x_2 x_3 + a^2 x_3^2 - 3 a x_3 x_4 + 2 x_4^2 = 0$$

(e che quindi tocca  $l$  nel punto  $O$ ) e poi da cinque rette doppie coincidenti tutte con  $l$ .

Per trasformare  $F$  in un cono cubico le si applichi la trasformazione cremoniana rappresentata dalle formule:

$$\left. \begin{aligned}
 \rho x_1 &= y_1 y_3^2 \\
 \rho x_2 &= y_1 y_3 y_4 - (y_1^2 + y_2 y_3 + a y_3^2) (a y_3 + 2 y_2) \\
 \rho x_3 &= y_3^3 \\
 \rho x_4 &= y_3 (y_1^2 - y_2 y_3) \\
 \text{ossia} \\
 \sigma y_1 &= x_1^2 x_3^2 \\
 \sigma y_2 &= x_1 x_3 (x_1^2 - x_3 x_4) \\
 \sigma y_3 &= x_1 x_3^2 \\
 \sigma y_4 &= 2 x_1^2 (2 x_1^2 - 3 x_3 x_4 + 2 a x_3^2) + x_3^2 (x_2 x_3 + a^2 x_3^2 - 3 a x_3 x_4 + 2 x_4^2);
 \end{aligned} \right\} (37)$$

si troverà che essa si cangia nel cono cubico  $F'$ :

$$\left. \begin{aligned}
 A_{11} [y_3 y_4^2 - 2(a y_3 + 2 y_2)^3] - 2 A_{12} y_3^2 y_4 + (2 A_{23} + A_{44}) y_3 (a y_3 + 2 y_2)^2 + \\
 + 2 A_{24} y_3^2 (a y_3 + 2 y_2) + A_{22} y_3^3 = 0.
 \end{aligned} \right\} (38)$$

Su questo, il sistema  $|C'$ , corrispondente a quello  $C$  delle sezioni piane di  $F$ , è tagliato da un sistema di superficie cubiche che passano per la retta  $y_2 = y_3 = 0$  (situata pure su  $F'$ ) e toccano il piano  $y_3 = 0$  lungo la retta  $y_1 = y_3 = 0$  (\*); di più esse hanno un punto doppio biplanare in  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$

(\*) Questa retta si stacca anzi quattro volte dalla linea di intersezione di due qualunque delle superficie cubiche considerate.

coi piani osculatori fissi  $y_1 = 0$  e  $y_3 = 0$ , quest'ultimo piano essendo il piano tangente ad  $F'$  lungo la sua generatrice di flesso  $y_2 = y_3 = 0$ .

Si conclude che  $|C'|$  è un sistema di curve dell'8.<sup>o</sup> ordine, passanti doppiamente per il vertice di  $F'$ , con altri tre punti-base doppi e due punti-base semplici tutti condensati nel punto  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$  (\*).

### 20. Ipotesi $\gamma$ .

Ci restano ora da esaminare le superficie di 2.<sup>a</sup> specie con le coniche situate nei piani tangenti di un cono (generale) di 3.<sup>a</sup> classe.

Anche qui vi sono da prendere in considerazione due diverse alternative, secondo che sono irriducibili o no le superficie cubiche aggiunte.

### 21. Prima alternativa.

L'equazione della più generale superficie di 2.<sup>a</sup> specie,  $F$ , che corrisponde alla prima alternativa dell'ipotesi  $\gamma$  si trova in (A) al n.<sup>o</sup> 46: qui, per facilitare la discussione dei casi particolari la scriveremo sotto la forma (\*\*):

$$\left. \begin{aligned} Afx_1(ax_4 - bx_3)(ax_4^2 + gx_2x_3 - bx_3x_4)[gx_3(ex_1 + fx_2) + fx_4(ax_4 - bx_3)] + \\ + Bgx_2^2[gx_3(ex_1 + fx_2) + fx_4(ax_4 - bx_3)]^2 + \\ + Cf^2gx_1^2x_2^2(ax_4 - bx_3)^2 + Dfg^2x_1^2x_2x_4(ex_1 + fx_2)(ax_4 - bx_3) - \\ - Efgx_1x_2x_4(ax_4 - bx_3)[gx_3(ex_1 + fx_2) + fx_4(ax_4 - bx_3)] = 0. \end{aligned} \right\} (39)$$

Ora si applichi a questa superficie la trasformazione cremoniana rappresentata dalle formole:

$$\left. \begin{aligned} \rho x_1 &= -y_3(fgy_1y_2 - bfy_1y_4 + agy_2^2) \\ \rho x_2 &= y_1y_2(egy_3 - bfy_4) \\ \rho x_3 &= fy_1(-fy_1y_2 + ey_1y_3 - ay_2^2) \\ \rho x_4 &= y_1y_4(egy_3 - bfy_4) \end{aligned} \right\} (40)$$

(\*) La tangente comune delle  $C'$  (a contatto quadripunto) in  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$  è la retta  $y_1 = y_3 = 0$ .

(\*\*) Mantenendo le notazioni di (A) ciò equivale a supporre che le coordinate del punto  $B$  siano  $(0, 0, a, b)$ ; che l'equazione del piano  $mn$  sia  $ex_1 + fx_2 = 0$ ; che quella della conica  $h^2$  sia, nel piano  $x_1 = 0$ ,

$$ax_2^2 + gx_2x_3 - bx_3x_4 = 0$$

e che, infine, l'equazione del cono  $V$  sia data da:

$$\xi_1\xi_2(A\xi_1 + H\xi_2) + B\xi_1\xi_3 + C\xi_2\xi_3 + D\xi_2\xi_3^2 + E\xi_1\xi_2\xi_3 = 0$$

dove, però,  $Ae + Hf = 0$ .

ossia

$$\left. \begin{aligned} \sigma y_1 &= (b x_3 - a x_4) x_4 [g x_3 (e x_1 + f x_2) + f x_4 (a x_4 - b x_3)] \\ \sigma y_2 &= (e x_1 + f x_2) x_2 [g x_3 (e x_1 + f x_2) + f x_4 (a x_4 - b x_3)] \\ \sigma y_3 &= f x_1 x_4 (e x_1 + f x_2) (b x_3 - a x_4) \\ \sigma y_4 &= x_4 (e x_1 + f x_2) [g x_3 (e x_1 + f x_2) + f x_4 (a x_4 - b x_3)]; \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

essa si convertirà nel cono cubico  $F'$ :

$$A f y_1^2 (e y_3 - f y_2) + B f g y_1 y_2^2 + C f g y_1 y_3^2 - D g^2 y_2 y_3^2 + E f g y_1 y_2 y_3 = 0. \quad (41)$$

Le superficie cubiche, che staccano da  $F'$  il sistema  $C' |$ , corrispondente a quello  $|C|$  delle sezioni piane di  $F$ , passano per la retta  $y_1 = y_3 = 0$  (situata su  $F'$ ) e per la conica  $C^2$ :

$$e g y_3 - b f y_4 = -f y_1 y_2 + e y_1 y_3 - a y_4^2 = 0;$$

e toccano tutte il piano  $y_1 = 0$  lungo la retta  $y_1 = y_4 = 0$ . Di più esse hanno un punto doppio biplanare in  $y_1 = y_3 = y_4 = 0$  con un piano osculatore fisso in  $y_1 = 0$  (cioè nel piano ivi tangente ad  $F'$ ) e un punto doppio in  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ ; e, infine, esse toccano il cono  $F'$  nel punto  $y_2 = y_3 = y_4 = 0$ .

Segue, allora, che  $|C'$  è, al solito, un sistema di curve dell'8.<sup>o</sup> ordine, passanti doppiamente per il vertice di  $F'$ , con altri tre punti-base doppi in  $y_2 = y_3 = y_4 = 0$ ,  $y_3 = y_4 = y_1 = 0$ ,  $y_4 = y_1 = y_2 = 0$  e due punti-base semplici nelle intersezioni di  $F'$  con  $C^2$  che non cadono nei punti  $y_2 = y_3 = y_4 = 0$  e  $y_1 = y_3 = y_4 = 0$  (dove  $F'$  tocca  $C^2$ ).

## 22. *Casi particolari.*

In (A), dove fu discussa al n.º 44 la forma della linea doppia della superficie  $F$  studiata nel numero precedente, si suppose che fossero distinti tutti e tre i piani che ivi furono indicati con  $\alpha$ ,  $\beta$ , e  $\gamma$  e che inoltre fossero distinti sulla conica, ivi chiamata  $h^2$ , i punti  $A$  e  $B$ . Ora, mantenendo sempre le notazioni di (A), si ricordi che la retta  $AB \equiv s$  non può coincidere con  $r$ , in quanto che  $s$  passa per il vertice  $V$  del cono involupato dai piani delle coniche di  $F$  e  $V$  è necessariamente esterno ad  $r$  [(A), n.º 44, 2.<sup>a</sup> nota a piè di pagina]; e si osservi che  $s$  non può risultare tangente ad  $h^2$  nel punto ove  $h^2$  si appoggia ad  $r$ , poichè se ciò accadesse le superficie cubiche  $\Phi$  non taglierebbero più il piano  $\omega$  nella retta  $r$  contata due volte e poi in una retta variabile.

Quindi per trovare le forme particolari che può assumere la nostra superficie  $F$ , per ciò che riguarda la sua linea doppia, non si deve far altro se non che immaginare che o vengano a coincidere i piani  $\beta$  e  $\gamma$  o vengano a coincidere su  $h^2$  (in un punto diverso da quello situato su  $r$ ) i punti  $A$  e  $B$ . Notisi a questo proposito che  $\alpha$  è necessariamente distinto da  $\beta$  o  $\gamma$ , poichè  $\alpha$  contiene la conica doppia di  $F$  irriducibile, mentre  $\beta$  e  $\gamma$  ne contengono le coniche doppie spezzate in coppie di rette, e che non è permesso immaginare che la coincidenza di  $\beta$  con  $\gamma$  si verifichi insieme con quella di  $A$  e  $B$ . Infatti se ciò si facesse le superficie  $\Phi$  diventerebbero rigate cubiche e la superficie  $F$  sarebbe anch'essa una rigata [cfr., per un'osservazione analoga, (A), n.º 33].

Si conclude pertanto che i casi particolari possibili sono soltanto due.

Analiticamente, si ha il primo quando nel numero precedente si supponga che sia  $e=0$  ma  $b \neq 0$ ; si ha il secondo, quando si faccia invece  $b=0$  ed  $e \neq 0$ ; e con ciò, come è ben chiaro, tutte le cose dette non subiscono mutamenti notevoli.

Quanto alla linea doppia di  $F$  si osservi che quando  $e=0$  (ma  $b \neq 0$ ), essa si compone della conica  $h^2$ , della retta  $x_3 = x_4 = 0$  e di due rette tacnodali in  $x_2 - x_4 = 0$  e  $x_2 = bx_3 - ax_4 = 0$  coi piani tacnodali rispettivi  $x_4 = 0$  e  $bx_3 - ax_4 = 0$ ; mentre allorchè  $b=0$  (ma  $e \neq 0$ ) essa si compone della conica  $h^2$ , della retta  $x_3 = x_4 = 0$  e di due rette tacnodali in  $x_2 = x_4 = 0$  e  $x_4 = ex_1 + fx_2 = 0$  coi piani tacnodali rispettivi  $x_2 = 0$  ed  $ex_1 + fx_2 = 0$ . Aggiungasi che in entrambi i casi  $F$  è dotata di un punto quadruplo, questo punto coincidendo con  $x_2 = x_3 = x_4 = 0$  quando  $e=0$  (ma  $b \neq 0$ ) e con  $x_1 = x_2 = x_4 = 0$  quando  $b=0$  (ma  $e \neq 0$ ).

23. *Seconda alternativa: caso  $\gamma'$ .*

Per quel che è detto in (A) al n.º 47, questa seconda alternativa dà luogo a due casi differenti, che qui chiameremo  $\gamma'$  e  $\gamma''$ .

Nel caso  $\gamma'$  all'equazione della superficie  $F$  può darsi la forma (74) di (A), o, con un'ovvia trasformazione delle coordinate, la forma più semplice (ma egualmente generale):

$$\left. \begin{aligned} Ak^3x_3^2x_4^2(fx_3+x_4)^2 + Ck^3x_1x_2^2x_4(x_1-ax_3)(fx_3+x_4) + Dkx_1^2x_3^2(x_1-ax_3)^2 - \\ - Ekkx_1x_3x_4(x_1-ax_3)[x_1(x_1-ax_3)+kx_2(fx_3+x_4)] + \\ + Gx_1(x_1-ax_3)[x_1(x_1-ax_3)+kx_2(fx_3+x_4)][x_1(x_1-ax_3)+kx_2x_4] = 0; \end{aligned} \right\} (42)$$

quindi per trasformare  $F$  in un cono cubico  $F'$  basta adoperare la trasfor-



mazione:

$$\begin{array}{l}
 \rho x_1 = k y_2 y_3 (a y_3 - f y_1) \\
 \rho x_2 = y_4 (y_2 y_3 - y_1) - y_1 y_2 (a y_3 - f x_1) \\
 \rho x_3 = k y_3 (y_2 y_3 - y_1^2) \\
 \rho x_4 = k y_3^2 (a y_1 - f y_2) \\
 \text{ossia} \\
 \sigma y_1 = x_3 (x_1 - a x_3) (f x_3 + x_4) \\
 \sigma y_2 = x_1 x_3 (x_1 - a x_3) \\
 \sigma y_3 = x_3 x_4 (f x_3 + x_4) \\
 \sigma y_4 = (f x_3 + x_4) [x_1 (x_1 - a x_3) + k x_2 x_4].
 \end{array} \quad (43)$$

L'equazione del cono  $F'$  è:

$$A k^3 y_3^3 + C k^2 y_2 y_3^2 + D k y_2^2 y_3 - E k y_2 y_3 (y_4 - f y_2) + G y_2 y_4 (y_4 - f y_2) = 0, \quad (44)$$

e il sistema  $C'$  di  $F'$  corrispondente al sistema  $C$  delle sezioni piane di  $F'$  vien secato su  $F'$  da superficie cubiche che toccano il piano  $y_3 = 0$  lungo la retta  $y_1 = y_3 = 0$  e passano per le rette:  $y_1 = y_2 = 0$ ,  $a y_1 - f y_2 = a y_3 - f y_1 = 0$ , e  $y_3 = y_4 - f y_2 = 0$  (quest'ultima essendo situata sul cono  $F'$ ). Di più esse hanno un punto doppio in  $y_1 = y_3 = y_4 = 0$  e un altro in  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$  col cono osculatore fisso:

$$y_2 y_3 - y_1^2 = 0.$$

Si conclude che  $C'$  è un sistema di curve dell'8.º ordine, passanti due volte per il vertice di  $F'$ , con altri tre punti-base doppi (di cui uno cade in  $y_1 = y_3 = y_4 = 0$ , un secondo in  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$  e il terzo è infinitamente vicino a questo nella direzione  $y_1 = y_2 = 0$ ) e due punti-base semplici nelle intersezioni del cono  $F'$  con la retta  $a y_1 - f y_2 = a y_3 - f y_1 = 0$  che cadono fuori di  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ .

I casi particolari che qui possono presentarsi sono due: analiticamente, sono caratterizzati, l'uno  $\gamma'_1$ , dall'ipotesi  $f = 0$  (ma  $a \neq 0$ ); l'altro  $\gamma'_2$ , dall'ipotesi  $a = 0$  (ma  $f \neq 0$ ) (\*).

In entrambi i casi  $\gamma'_1$  e  $\gamma'_2$  la linea doppia di  $F$  è costituita dalla retta  $x_1 = x_3 = 0$ , dalla conica

$$x_3 = x_1^2 + k x_2 x_4 = 0$$

(\*) Se si facesse  $a = 0$  e insieme  $f = 0$   $F$  risulterebbe una rigata.

e da due rette tacnodali: ma nei due casi cambiano le relazioni di queste rette con l'altra  $x_1 = x_3 = 0$ .

24. Caso  $\gamma''$ .

Posto

$$\varphi = -x_1^2 + b x_1 x_3 - k x_2 x_3 + c x_3^2 + d x_3 x_4 + x_4^2$$

l'equazione di  $F$  [cfr. (A), n.º 49] (\*) può scriversi qui:

$$\left. \begin{aligned} A k^2 x_3^4 x_4^2 + B k x_3^2 x_4^2 (\varphi - k x_2 x_3 - l x_3 x_4) - C k x_3^2 x_4 (\varphi - l x_3 x_4) + \\ + D x_4^2 (\varphi - k x_2 x_3 - l x_3 x_4)^2 + E x_3^2 (\varphi - l x_3 x_4)^2 - \\ - D (\varphi - l x_3 x_4)^2 (\varphi - k x_2 x_3 - l x_3 x_4) - \\ - D (l - d) x_3 x_4 (\varphi - l x_3 x_4) (\varphi - k x_2 x_3 - l x_3 x_4) = 0. \end{aligned} \right\} (45)$$

Applichiamo a questa superficie la trasformazione cremoniana definita dalle formule:

$$\left. \begin{aligned} \rho x_1 &= k y_4 (y_1^2 - y_2 y_4 + c y_4^2) \\ \rho x_2 &= [y_3 + (d-l)y_4] (y_1^2 - y_2 y_4 + c y_4^2) - [2y_1 + (d-l-b)y_4] (y_1 y_3 - y_2 y_4) \\ \rho x_3 &= k y_4^2 [2y_1 + (d-l-b)y_4] \\ \rho x_4 &= k y_4 (y_3 - y_1) [2y_1 + (d-l-b)y_4] + y_1^2 - y_2 y_4 + c y_4^2 \end{aligned} \right\} (46)$$

ossia

$$\left. \begin{aligned} \sigma y_1 &= x_3 x_4 (\varphi + x_1 x_4 - d x_3 x_4 - x_4^2) \\ \sigma y_2 &= (\varphi - d x_3 x_4) (\varphi + x_1 x_4 - d x_3 x_4 - x_4^2) - x_4 [x_1 \varphi - x_3 x_4 (l x_1 + k x_2)] \\ \sigma y_3 &= x_3 x_4 (\varphi - d x_3 x_4) \\ \sigma y_4 &= x_3^2 x_4^2; \end{aligned} \right\}$$

essa si cangerà nel cono cubico  $F'$ :

$$\left. \begin{aligned} A k^2 y_4^2 + B k y_4 \{ y_3 [y_3 + (d-l)y_4] - y_4 [y_2 + (d-l)y_4] \} - \\ - C k y_4^2 [y_3 + (d-l)y_4] - \\ - D \{ y_3 [y_3 + (d-l)y_4] - y_4 [y_2 + (d-l)y_4] \} [y_2 + (d-l)y_4] + \\ + E y_4 [y_3 + (d-l)y_4]^2 = 0. \end{aligned} \right\} (47)$$

(\*) Veramente in (A) il coefficiente di  $x_1^2$  entro  $\varphi$  era indicato con  $a$ ; ma poichè  $a$  non può esser nullo (altrimenti  $F$  si spezzerebbe nel piano  $x_4 = 0$  e in una residua superficie del 5.º ordine) si può bene supporre  $a = -1$ , prendendo opportunamente il punto unità.

Le superficie cubiche che staccano da  $F'$  il sistema  $|C'|$  corrispondente a quello  $|C|$  delle sezioni piane di  $F$  passano per le rette:  $y_3 = y_4 = 0$  e  $2y_1 + (d-l-b)y_4 = [4c + (d-l-b)^2]y_4 - 4y_2 = 0$ , (delle quali la prima sta pure sul cono  $F'$ ), e toccano il piano  $y_4 = 0$  lungo la retta  $y_1 = y_4 = 0$ . Di più, esse hanno un punto doppio biplanare in  $y_1 = y_3 = y_4 = 0$ , uno dei piani osculatori coincidendo costantemente col piano  $y_4 = 0$ , ivi tangente al cono  $F'$ , e un punto doppio in  $y_1 = y_2 = y_4 = 0$ .

Segue che  $|C'|$  è un sistema di curve dell'8.<sup>o</sup> ordine, passanti due volte per il vertice di  $F'$ , con altri tre punti-base doppi (dei quali uno cade in  $y_1 = y_2 = y_4 = 0$ , un secondo in  $y_1 = y_3 = y_4 = 0$  e il terzo, infinitamente vicino a questo nella direzione  $y_4 = y_1 - y_3 = 0$ ) e due punti-base semplici nelle intersezioni di  $F'$  con la retta  $2y_1 + (d-l-b)y_4 = [4c + (d-l-b)^2]y_4 - 4y_2 = 0$  che cadono fuori di  $y_1 = y_2 = y_4 = 0$ .

Notisi che il caso  $\gamma''$ ) ora considerato non dà luogo, per quanto riguarda la linea doppia, a casi particolari.

#### 25. Conclusioni generali.

I risultati conseguiti fin qui possono essere riuniti in un enunciato molto semplice. Essi ci assicurano che:

*Ogni superficie normale di 2.<sup>a</sup> specie dello spazio ordinario (a curve sezioni di genere 3) è riducibile, mediante una **trasformazione cremo-niana**, a un cono cubico ellittico e su questo il sistema delle sezioni piane è rappresentato da un sistema di curve dell'8.<sup>o</sup> ordine, passanti doppiamente per il vertice del cono, con altri tre punti-base doppi e due punti-base semplici (distinti o, in vario modo, infinitamente vicini).*

E di qua si trae facilmente che:

*Ogni superficie normale di 2.<sup>a</sup> specie dello spazio ordinario (a curve sezioni di genere 3) si può dedurre, mediante proiezione da due suoi punti, da una superficie (normale) di 2.<sup>a</sup> specie (dell'ordine 8.<sup>o</sup>) dello spazio a cinque dimensioni.*

È opportuno osservare, prima di procedere innanzi, che la rappresentazione ottenuta di una superficie (normale, di 2.<sup>a</sup> specie) dello spazio ordinario sopra un cono cubico (ellittico) è una *rappresentazione d'ordine minimo*.

E infatti supponiamo che  $|C'|$  sia il sistema lineare che rappresenta sopra un cono cubico  $V$  una superficie (normale, di 2.<sup>a</sup> specie)  $F$  dello spazio ordinario:  $|C'|$  sarà di genere 3, grado 6 e dimensione 3. Dico che l'ordine  $n$  di ogni curva  $C'$  non può essere inferiore ad 8.

Poichè la  $C'$  generica è del genere 3, è chiaro intanto che  $n \geq 6$ ; poi,

tenendo presente la formula di SEGRE, già citata più volte, si vede subito che se fosse  $n = 6$  le  $C'$  dovrebbero avere tutte un punto doppio (fisso) e non passare per il vertice del cono, e se fosse  $n = 7$ , le  $C'$  dovrebbero avere tutte due punti doppi (fissi) e passare *semplicemente* per il vertice del cono. Ora, se  $P$  è un punto del cono  $V$  (distinto dal vertice), tutte le possibili sestiche del genere 3 situate su  $V$  e aventi un punto doppio in  $P$ , son fornite dalle intersezioni del cono con le  $\infty^6$  quadriche che lo toccano in  $P$ , quindi se le  $C'$  fossero dell'ordine 6  $F$  non sarebbe una superficie di 2.<sup>a</sup> specie(\*).

Allo stesso modo, siano  $P$  e  $Q$  due punti di  $V$  (distinti dal vertice). Tutte le possibili curve del 7.<sup>o</sup> ordine situate su  $V$  e aventi due punti doppi in  $P$  e  $Q$  si possono staccare da  $V$  mediante superficie del 3.<sup>o</sup> ordine che lo tocchino in  $P$  e  $Q$  (e ne contengano due generatrici): quindi costituiscono un sistema continuo algebrico (non lineare) di dimensione 6 e grado 8. Questo sistema si compone di  $\infty^1$  sistemi lineari di dimensione 5 e ciascuno di questi è fornito dalle superficie del 3.<sup>o</sup> ordine che toccano  $V$  in  $P$  e  $Q$  e ne contengono due generatrici fisse  $g$  ed  $h$ . Ma allora, poichè queste superficie del 3.<sup>o</sup> ordine passano semplicemente per il vertice di  $V$ , le curve residue del 7.<sup>o</sup> ordine secondo cui esse tagliano  $V$  toccano tutte nel vertice di  $V$  la terza generatrice comune al cono e al piano  $gh$ , quindi i sistemi lineari in discorso *non sono del grado 8, ma bensì del grado 7*. Segue che essi non possono essere sistemi rappresentativi di superficie di 2.<sup>a</sup> specie(\*\*): e quindi è dimostrato, comè volevasi, che  $n \geq 8$ .

26. Un'altra osservazione importante che scaturisce dalle cose dette (ma che potrebbe anche esser dedotta da quel che si vedrà nel capitolo successivo) è la seguente.

Sia  $F$  una superficie normale di 2.<sup>a</sup> specie dello spazio ordinario e  $|C'$  il sistema di curve dell'8.<sup>o</sup> ordine che la rappresenta sopra un cono cubico  $V$ : siano poi  $P, Q, R$  i punti-base doppi di  $|C'$ , distinti dal vertice del cono, e  $A, B$  i punti-base semplici, e, per non entrare in discussioni minute che sarebbero inutili in vista dei risultati successivi, supponiamo senz'altro che i punti  $P, Q, R, A$  e  $B$  siano punti generici di  $V$ .

Per un teorema di SEGRE è noto che esistono su  $V$  due sistemi (ellittici)  $\infty^1$  di quartiche sghembe di 1.<sup>a</sup> specie situate su  $V$  e passanti, quelle di un sistema, (per il vertice di  $V$  e) per  $P, Q, R, A$ , quelle dell'altro sistema (per

(\*) CASTELNUOVO, *Sulle superficie etc.* (Atti di Torino, vol. XXV) n.º 10, a piè di pagina.

(\*\*) Cfr. (A), n.º 3, seconda nota a piè di pagina.

il vertice di  $V$  e) per  $P, Q, R, B$ . I due sistemi sono poi del grado 1 e dell'indice 2.

Ora ognuna di queste quartiche è l'immagine su  $V$  di una cubica piana (ellittica) situata su  $F$ , e ogni quartica di un sistema presa insieme con una quartica dell'altro dà luogo a una curva di  $C'$ , dunque, atteso che il ragionamento fatto è invertibile:

*Sopra una superficie normale di 2.<sup>a</sup> specie dello spazio ordinario (a curve sezioni di genere 3) esistono in generale soltanto due sistemi distinti  $\infty^1$  di cubiche piane di grado 1 e indice 2, e la intersezione residua della superficie col piano di una cubica di un sistema è sempre una cubica dell'altro sistema.*

Osservando che per ogni punto di  $F$  passano quattro di queste sue cubiche e che  $F$  non è certo l'involuppo dei loro piani, si conclude che:

*I piani secanti  $F$  secondo coppie di cubiche costituiscono in generale una sviluppabile (ellittica) della 4.<sup>a</sup> classe (\*).*

## CAPITOLO II.

### Le superficie normali di 2.<sup>a</sup> specie degli spazi a quattro o cinque dimensioni.

#### 27. *Le superficie normali di 2.<sup>a</sup> specie dello spazio a quattro dimensioni.*

Abbiamo già dimostrato in (A) che una superficie normale di 2.<sup>a</sup> specie (a curve sezioni di genere 3) è di ordine 7 o 8 secondo che è immersa in un  $S_4$  o in  $S_5$ , e quanto è stato detto nel capitolo precedente mette fuori di dubbio l'esistenza di superficie siffatte.

Qui vogliamo precisare e caratterizzare i vari tipi esistenti.

28. Sia, in primo luogo,  $F_2^1$  una superficie normale di 2.<sup>a</sup> specie dell' $S_4$ . Essa viene proiettata da ogni suo punto sopra un  $S_3$  in una  $\phi_2^2$  normale di

---

(\*) I piani uscenti dalle rette doppie o semplici di  $F$  (e di quest'ultime  $F$  ne contiene in generale quattro), quelli che ne contengono le coniche e quelli che la tagliano secondo coppie di cubiche esauriscono la sua sviluppabile bitangente, poichè è chiaro *a priori* che ogni piano bitangente di  $F$  deve tagliare  $F$  in una curva spezzata. Infatti, se ciò non accadesse, questa curva sarebbe del genere 1 e il piano non toccherebbe nessuna conica di  $F$ , mentre un piano generico ne tocca in generale quattro.

2.<sup>a</sup> specie con un fascio ellittico di coniche, e per quanto sappiamo i piani di queste coniche possono formare,

- α) un fascio di piani contato due volte, o
- β) un cono di 3.<sup>a</sup> classe, o infine
- γ) una Sviluppabile ellittica (non conica) della 4.<sup>a</sup> classe.

Ma nel caso presente è facile dimostrare che le alternative α) e β) debbono essere escluse.

Infatti nell'ipotesi α) i piani delle coniche di  $F_2^1$ , o passano tutti per una medesima retta o si appoggiano secondo rette distinte ad altri  $\infty^1$  piani e quindi, per un noto teorema (\*), costituiscono una schiera di un cono quadrico (di  $S_1$ ) semplicemente specializzato.

Se passano tutti per una retta, o formano i piani generatori di un  $S_1$ -cono quadrico e ciascuno di essi contiene *due* coniche della  $F_2^1$ , o formano i piani generatori di un  $S_1$ -cono cubico (ellittico) e ciascuno di essi contiene *una* conica della  $F_2^1$ . Ora un iperpiano che passi per la retta vertice di un tale  $S_1$ -cono non può tagliare la  $F_2^1$  che in una linea del 7.<sup>o</sup> ordine; quindi l'ipotesi dell' $S_1$ -cono quadrico deve esser senz'altro respinta, e nell'ipotesi dell' $S_1$ -cono cubico bisogna che la retta vertice appartenga *semplicemente* ad  $F_2^1$ . Ma ciò, visto che una tal retta sarebbe una corda di ogni conica della  $F_2^1$ , contrasta col fatto che la  $\infty^1$  delle coniche di  $F_2^1$  deve essere ellittica; dunque non resta se non supporre che i piani delle coniche di  $F_2^1$  formino una schiera di un cono quadrico semplicemente specializzato e che ognuno di essi contenga due coniche della  $F_2^1$ .

Ma allora, delle due schiere di piani del cono quadrico, l'una conterrebbe piani secanti la  $F_2^1$  secondo coppie di coniche, l'altra piani secanti la  $F_2^1$  secondo cubiche (ellittiche) irriducibili; quindi, atteso che due piani di diverso sistema si tagliano sempre secondo una retta, la quale non potrebbe risultare che una trisecante per  $F_2^1$ , bisognerebbe che tutte le coniche di  $F_2^1$  passassero per il vertice del cono quadrico (e che questo punto, abbassando di due unità il genere delle sezioni iperpiane passanti per esso, risultasse un tacnodo per  $F_2^1$ ). Ora questo è assurdo perchè le coniche della proiezione generica di  $F_2^1$ ,  $\Phi_2^1$ , non passano per uno stesso punto; bensì tagliano sopra l'asse del fascio dei piani, che le contengono, le  $\infty^1$  coppie di una involuzione quadratica (contata due volte); involuzione che, per quanto risulta dalle equazioni delle varie  $\Phi_2^1$ , non può mai essere degenerare.

---

(\*) SEGRE, *Sur un théorème de la géométrie à n dimensions* (Math. Ann., Bd. 30, 1887).

29. Passiamo ora alla discussione dell'ipotesi  $\varrho$ ).

Qui i piani delle coniche di  $F_2^1$  passan tutti per un punto, oppure da ogni punto della  $F_2^1$  parte una retta a cui essi si appoggiano.

Poichè  $F_2^1$  non è rigata, ove si verificasse la seconda alternativa, le rette appoggiate ai piani in discorso sarebbero  $\infty^2$ : e poichè il supporre che da ogni punto di uno dei piani partisse più di una retta appoggiata a tutti gli altri porterebbe alla conclusione che i piani riempiono un cono quadrico, si concluderebbe che di tali rette da ogni punto di uno dei piani non potrebbe partirne che una (\*). Ma allora la  $\infty^2$  delle rette sarebbe razionale e tale sarebbe inoltre la  $V_3$  riempita dai piani delle coniche di  $F_2^1$ ; mentre ciò è manifestamente assurdo.

Bisogna dunque supporre che i piani delle coniche di  $F_2^1$  passino tutti per un punto  $O$  e riempiano una  $V_3^4$ , proiezione da  $O$  di una ordinaria rigata biquadratica (\*\*). Ma allora conducendo un piano per  $O$  e considerando le quattro rette secondo cui esso seca la  $V_3^4$ , si vede subito che  $F_2^1$  non può essere situata sul cono se non a patto che passi per  $O$ ; ciò che è assurdo, perchè una  $\Phi_2^2$  di 2.<sup>a</sup> specie dello spazio ordinario, le cui coniche sono situate nei piani di un cono di 3.<sup>a</sup> classe, non passa per il vertice di questo cono [cfr. (A), n.º 44, seconda nota a piè di pagina].

È così dimostrato che soltanto l'ipotesi  $\gamma$ ) deve esser presa in considerazione; il che val quanto dire che:

*I piani delle  $\infty^1$  coniche di ogni  $F_2^1$  di 2.<sup>a</sup> specie dell' $S_4$  riempiono una  $V_3$  ellittica normale del 5.º ordine.*

30. Ora si prenda nell' $S_4$  in cui è immersa la  $F_2^1$  un fascio di iperpiani con l'asse  $\gamma$  e si dicano omologhi due iperpiani del fascio quando toccano una stessa conica di  $F_2^1$ . Per la formula di ZEUTHEN, applicata all'involuzione ellittica segnata dalle coniche di  $F_2^1$  sopra ogni sezione iperpiana, otterremo nel fascio una corrispondenza (4, 4) con 8 coincidenze. Di queste, 7 corrispondono ai 7 punti ove  $\gamma$  taglia  $F_2^1$ ; un'altra, dovendo provenire da una conica non appoggiata a  $\gamma$ , proverrà da una conica spezzata in due rette (distinte)  $l$  ed  $m$ . Segue che:

*Delle  $\infty^1$  coniche di  $F_2^1$  una è sempre spezzata in una coppia di rette.*

---

(\*) Veramente si potrebbe dubitare che le  $\infty^2$  rette di cui si parla si appoggiassero a ciascuno dei piani delle coniche di  $F_2^1$  in  $\infty^1$  punti distinti soltanto, ma il dubbio si respinge subito molto agevolmente.

(\*\*) Notisi che la  $F_2^1$  è certo *semplice* per la  $V_3$  riempita dai piani delle sue coniche.

31. La  $\Phi_2^3$  proiezione di  $F_2^1$  da un suo punto generico possiede in ogni caso almeno una retta doppia, da ogni punto della quale escono due coniche della  $\Phi_2^3$ , dunque o la  $F_2^1$  possiede anch'essa una tal retta dotata della stessa proprietà, oppure sulla  $F_2^1$  esiste un sistema  $\infty^1$  di curve piane, e precisamente di cubiche (ellittiche) unisecanti le coniche.

Ora si osservi che, se la  $F_2^1$  è dotata di una retta doppia appoggiata alle sue  $\infty^1$  coniche, ogni iperpiano che passi per la retta doppia e per il piano di una di queste coniche seca ulteriormente la superficie in una cubica (ellittica, e quindi) piana; dunque in ogni caso la  $F_2^1$  contiene un sistema  $\infty^1$  di cubiche piane (ellittiche), unisecanti le coniche.

Supposto che questo sia, eventualmente, spezzato, si dica  $\Sigma$  una sua parte irriducibile; il resto di una curva di  $\Sigma$  rispetto al sistema (normale) delle sezioni iperpiene di  $F_2^1$  è un fascio di curve ellittiche del 4.<sup>o</sup> ordine necessariamente sghembe (si pensi, ad esempio, a quella fra queste curve che si spezza in una cubica e in quella delle due rette  $l$  ed  $m$ , diciamo  $m$ , che si appoggia alle curve di  $\Sigma$ ); quindi  $\Sigma$  non può essere un fascio lineare e non può nemmeno essere un sistema  $\infty^1$  razionale, perchè in tal caso, per un noto teorema di ENRIQUES, sarebbe contenuto in un sistema lineare più ampio.

Segue che  $\Sigma$  è necessariamente un sistema di grado 1 (altrimenti i piani delle cubiche di  $\Sigma$  secandosi a due a due in rette e non appartenendo a un  $S_3$ , passerebbero per una stessa retta, formerebbero un cono, non razionale, di ordine uguale almeno a 3 e ciò è manifestamente assurdo) e di indice 2 (\*).

Di qui si deduce che la  $\Phi_2^3$ , proiezione di  $F_2^1$  da un suo punto generico sopra un  $S_3$ , possiede almeno due rette doppie sghembe. D'altra parte risulta da (A) o, meglio, dal primo capitolo di questo lavoro, che da ogni tal retta doppia partono due piani  $\alpha$  e  $\beta$  (eventualmente coincidenti) della sviluppabile di 4.<sup>a</sup> classe costituita dai piani delle coniche di  $\Phi_2^3$ , dunque da ogni piano contenente una cubica di  $\Sigma$  partono due  $S_3$  (distinti o coincidenti) che contengono ciascuno una delle coniche di  $F_2^1$  (\*\*). La residua intersezione di

(\*) Cfr. CASTELNUOVO, *Sulla linearità*, ecc. (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXVIII, 1893), n.º 4.

(\*\*) La cosa stessa può del resto dimostrarsi osservando che un piano contenente una cubica di  $F_2^1$  seca la  $V_3^3$  riempita dai piani delle coniche di  $F_2^1$  in quella cubica e in una coppia di rette: quindi esso si appoggia secondo una retta ai piani di due delle coniche della  $F_2^1$ , ecc.



uno di questi  $S_3$  con  $F_2^1$  non può essere una conica ulteriore, perchè nessuno dei piani  $\alpha$  e  $\beta$  può contenere mai due coniche di  $\Phi_2^3$ , dunque sarà una retta doppia, e la  $F_2^1$  verrà a contenere due rette doppie  $g$  ed  $h$  distinte o infinitamente vicine. Tanto  $g$ , poi, quanto  $h$  si appoggiano ai piani delle cubiche di  $\Sigma$ ; ma  $\Sigma$  non è un fascio lineare, dunque  $g$  ed  $h$  (anche se infinitamente vicine) sono certamente sghembe.

Notisi che le cubiche di  $\Sigma$ , o, addirittura, le cubiche di  $F_2^1$  possono ottenersi congiungendo  $g$  (od  $h$ ) coi piani delle coniche mediante iperpiani e considerando le intersezioni ulteriori di  $F_2^1$  con codesti iperpiani; quindi la  $\infty^1$  delle cubiche di  $F_2^1$  è irriducibile e coincide con  $\Sigma$ . In altri termini:

*Ogni  $F_2^1$  di 2.<sup>a</sup> specie dell' $S_4$  contiene un sistema  $\infty^1$  ellittico di grado 1 e indice 2 di cubiche piane (ellittiche), ed è dotata di due rette doppie sghembe, distinte o infinitamente vicine.*

Queste due rette doppie sono poi due generatrici della rigata ellittica del 5.<sup>o</sup> ordine, che, come è ben noto, costituisce la superficie doppia della  $V_3^5$  riempita dai piani delle coniche delle  $F_2^1$ .

32. Mantenate sempre le notazioni dei n.<sup>1</sup> precedenti, e limitandosi a considerare il caso della  $F_2^1$  con due rette doppie distinte (il che, come è facile persuadersi, non ha valore sostanziale), si ricordi che, delle due rette  $l$  ed  $m$  costituenti una delle coniche di  $F_2^1$ ,  $m$  è quella che si appoggia alle cubiche di  $F_2^1$ . Si conclude allora facilmente che la retta  $m$  è sghemba con ciascuna delle due rette doppie  $g$  ed  $h$  di  $F_2^1$ : d'altra parte ogni conica di  $F_2^1$  deve appoggiarsi in un punto a  $g$  e in un altro punto ad  $h$ , dunque  $l$  si appoggia a  $g$  e ad  $h$ , e l'intersezione di  $F_2^1$  con l' $S_3$   $gh$  si compone oltre che di  $g$  ed  $h$  contate due volte, di  $l$  e di una conica residua,  $h^2$ .

E qui possiamo aggiungere un'osservazione notevole sul sistema  $\infty^1 \Sigma$  delle cubiche di  $F_2^1$ .

Si noti in primo luogo che per ogni punto di  $g$  (o di  $h$ ) passano due cubiche irriducibili (\*) di  $\Sigma$ : esse sono le ulteriori intersezioni di  $F_2^1$  coi due  $S_3$  che proiettano da  $h$  (o da  $g$ ) i piani delle due coniche passanti per quel punto. Ebbene, sia  $A$  un punto di  $g$  e  $C_1^3$  e  $C_2^3$  le due cubiche che vi passano. Se  $B$  è il punto ove  $C_1^3$  si appoggia ad  $h$  e  $D$  l'ulteriore intersezione di  $C_1^3$  con  $AB$  è chiaro che  $D$  è pure il punto ove  $AB$  si appoggia alla

(\*) Intendiamo dunque escluse per il momento le cubiche di  $\Sigma$  spezzate l'una in  $l$  e nella retta  $g$  contata due volte, l'altra in  $l$  e nella retta  $h$  contata due volte. Cfr. la nota a piè di pagina del n.<sup>o</sup> 35.

conica di  $F_2^1$  che giace per intero nell'iperpiano  $gh$ , cioè a  $k^2$ . Ma da  $A$  esce una sola retta che si appoggia ad  $h$  e a  $k^2$  in punti distinti, dunque si deve arrivare allo stesso punto  $D$  anche se nel ragionamento fatto si sostituisce a  $C_1^3$  la cubica  $C_2^3$ . Ciò porta che anche  $C_2^3$  passa per  $B$ ; e quindi, per una facile considerazione ulteriore, si può enunciare il teorema:

*Le  $\infty^1$  cubiche di  $F_2^1$  si distribuiscono in  $\infty^1$  coppie per modo che le cubiche di una stessa coppia si appoggiano a  $g$  ed  $h$  negli stessi due punti; e gli  $\infty^1 S_3$  che contengono queste coppie di cubiche passano tutti per la retta  $m$  di  $F_2^1$ .*

Ora la superficie  $F_2^1$  non è certo situata sopra la  $V_3$  involupata dagli  $\infty^1 S_3$ , che ne contengono a coppie le cubiche, perchè altrimenti ognuno di questi  $S_3$  la toccherebbe in  $\infty^1$  punti, mentre ciò è manifestamente impossibile, dunque per ogni punto dello spazio ambiente, come per ogni punto di  $F_2^1$ , passano soltanto due  $S_3$  che tagliano  $F_2^1$  in coppie di cubiche. Si conclude che:

*Gli  $\infty^1 S_3$  per  $m$ , secanti ulteriormente  $F_2^1$  in coppie di cubiche, involupano un cono quadrico doppiamente specializzato.*

Infine è bene osservare che le due cubiche irriducibili e le due coniche di  $F_2^1$  uscenti da uno stesso punto di  $g$  (o di  $h$ ) si comportano fra di loro in maniera differente. Infatti ciascuna delle cubiche incontra una delle due coniche soltanto su  $g$  (o su  $h$ ) mentre incontra l'altra su  $g$  (o su  $h$ ) — e un tal punto sull'ente algebrico  $\infty^2$  di cui la  $F_2^1$  è un modello proiettivo non è da considerarsi come un punto comune alle due curve — e in un punto ulteriore; e se una delle cubiche si comporta in un certo modo rispetto a una delle due coniche, l'altra cubica, rispetto alla medesima conica, si comporta nel modo opposto.

33. Sulla  $F_2^1$  esistono, come è chiaro, infinite quartiche sghembe ellittiche. Esse formano un sistema  $\infty^2$  di grado 2 e indice 2 e quelle fra di esse che passano per un qualunque punto di  $m$  si spezzano in  $m$  e in una cubica ulteriore variabile nel sistema  $\Sigma$ .

Se si proietta  $F_2^1$  da un suo punto generico sopra un  $S_3$  in una  $\Phi_2^3$ , dei due sistemi di cubiche di cui  $\Phi_2^3$  è dotata (n.º 26), uno è fornito dalla proiezione del sistema  $\Sigma$ , l'altro da quella del sistema delle  $\infty^1$  quartiche passanti per il centro di proiezione.

Ora si immagini di scegliere il centro di proiezione in un punto  $O$  di  $m$ . Risulterà una  $\Phi_2^3$  con un solo sistema  $\infty^1$  (di grado 1 e indice 2) di cubiche piane (ellittiche) situate a coppie nei piani tangenti di un cono quadrico, avente per vertice un punto doppio di  $\Phi_2^3$  comune a tutte le cubiche in discorso.

34. Riassumendo quel che si è detto fin qui possiamo enunciare il teorema :

*Esiste un solo tipo generale di superficie normali di 2.<sup>a</sup> specie (a curve sezioni di genere 3) nello spazio a quattro dimensioni. Esse sono tutte delle superficie del 7.<sup>o</sup> ordine con due rette doppie sghembe (distinte o infinitamente vicine) e con un fascio ellittico di coniche situate nei piani di una  $V_3^5$  (ellittica) normale; e posseggono tutte un sistema algebrico  $\infty^2$  di grado 2 e indice 2 di quartiche sghembe ellittiche, nel quale è contenuto (parzialmente) un sistema  $\infty^1$  di cubiche piane (ellittiche) di grado 1 e indice 2.*

35. *Rappresentazione sul cono cubico (ellittico) delle superficie (normali) di 2.<sup>a</sup> specie dell' $S_4$ .*

Sia  $F_2^7$  una superficie normale di 2.<sup>a</sup> specie dell' $S_4$  con le rette doppie (sghembe)  $g$  ed  $h$  e si voglia rappresentarla sopra un cono cubico ellittico.

Per questo supponiamo in primo luogo che  $g$  ed  $h$  siano distinte e proiettiamo la  $F_2^7$  da un punto  $P$  di una delle sue rette doppie, per es. di  $g$ , sopra un  $S_3$ ,  $\alpha$ , che non passi per  $P$ .

Il risultato della proiezione sarà una superficie del 5.<sup>o</sup> ordine  $\Phi_2^5$  (di 1.<sup>a</sup> specie) con un tacnodo  $G$  nella traccia di  $g$  su  $\alpha$ , con un punto triplo  $O$  nella traccia, su  $\alpha$ , della retta secondo cui si intersecano i piani delle due cubiche di  $F_2^7$  uscenti da  $P$ , e con tre rette doppie  $h'$ ,  $p'$  e  $q'$  uscenti da  $O$ , e immagini, rispettivamente, della retta  $h$  e delle due cubiche in discorso. Quanto alle coniche di  $\Phi_2^5$ , esse passano tutte per  $G$  e a coppie costituiscono le ulteriori intersezioni di  $\Phi_2^5$  coi coni quadrici che passano per  $G$  e per le tre rette  $h'$ ,  $p'$  e  $q'$  (\*).

Il sistema  $|C|$  delle sezioni iperpiane di  $F_2^7$  sarà rappresentato su  $\Phi_2^5$  da un sistema  $(\infty^4) |C'|$  di curve del 7.<sup>o</sup> ordine, trisecate da  $p'$  e  $q'$ , con un punto doppio (fisso) in  $G$  e un punto doppio (variabile) su  $h'$ .

Ora si sottoponga  $\Phi_2^5$  a una trasformazione quadratica prendendo come punto fondamentale il punto  $G$  e come conica fondamentale quella spezzata nelle due rette  $p'$  e  $q'$ . La superficie  $\Phi_2^5$  si muterà in una rigata biquadratica,  $\Phi_3^5$ , e il sistema  $|C'|$  si cangerà in un sistema  $|C''|$ , segnato su  $\Phi_3^5$ , di curve

(\*) Questa  $\Phi_2^5$  è appunto quella che si trova descritta nel già citato lavoro del prof. CASTELNUOVO (*Atti di Torino*, 1890) in una nota a piè di pagina del n.º 10. Notisi come dal fatto che le coniche di  $\Phi_2^5$  toccano tutte in  $G$  il piano tacnodale segua l'altro che nei punti di  $g$  (o di  $h$ ) le coniche di  $F_2^7$  toccano tutte un medesimo  $S_3$ , contenente  $g$  (o  $h$ ) ed  $l$ . Il che potrebbe vedersi anche per via diretta.

del 6.<sup>o</sup> ordine con un punto-base semplice nel punto fondamentale dello spazio di  $\Phi_2^3$  e con un punto doppio (variabile) sulla direttrice,  $h''$ , di  $\Phi_2^3$  corrispondente alla retta doppia  $h'$  di  $\Phi_2^3$ . Naturalmente ogni curva  $C''$  biseccherà, poi, non solo ogni generatrice di  $\Phi_2^3$ , ma anche la sua ulteriore direttrice  $r''$ .

Ebbene, si applichi ancora alla  $\Phi_2^3$  una ulteriore trasformazione quadratica prendendo come punto fondamentale un punto di  $h''$  (od  $r''$ ) e come conica fondamentale quella spezzata in  $r''$  (od  $h''$ ) e una generatrice generica di  $\Phi_2^3$ . La  $\Phi_2^3$  si convertirà in un cono cubico e su questo il sistema  $|C''|$  corrispondente a  $|C''|$  sarà un sistema di curve dell'8.<sup>o</sup> ordine, passanti doppiamente per il vertice, con altri tre punti-base doppi e un punto-base semplice.

36. Nel n.<sup>o</sup> precedente si è supposto che le rette  $g$  ed  $h$  fossero distinte, ma il ragionamento fatto resta sostanzialmente immutato nell'ipotesi che le rette  $g$  ed  $h$  siano infinitamente vicine (\*): quindi possiamo enunciare il teorema:

*Ogni superficie normale di 2.<sup>a</sup> specie dello spazio a quattro dimensioni è rappresentabile sopra un cono cubico (ellittico) mediante un sistema di curve dell'8.<sup>o</sup> ordine, passanti due volte per il vertice, con altri tre punti-base doppi e un punto-base semplice.*

37. *Le superficie (normali) di 2.<sup>a</sup> specie dello spazio a cinque dimensioni.*

Sia ora  $F_2^3$  una superficie di 2.<sup>a</sup> specie, a curve sezioni di genere 3, dell' $S_4$ , e quindi dell'ordine 8.

Se la  $F_2^3$  si proietta da un suo punto generico sopra un  $S_4$  si ottiene in questo spazio una  $F_2^3$  con due rette doppie, dunque la  $F_2^3$  o ha qualche retta doppia, o, se non ne ha, possiede un sistema  $\infty^1$  di indice 2 di cubiche piane (ellittiche). Badisi però che se di rette doppie ne ha una, ne ha pure una seconda.

Ciò può esser dimostrato in varia maniera, dopo aver notato da una parte che:

*I piani delle coniche di  $F_2^3$  riempiono una  $V_3^6$  ellittica normale;*

dall'altra, per un ragionamento analogo a quello del n.<sup>o</sup> 30, che:

*Nessuna delle coniche di  $F_2^3$  può spezzarsi in una coppia di rette.*

Per esempio, può osservarsi che la  $V_3^6$  riempita dai piani delle coniche

---

(\*) In questa ipotesi si osserverà che la retta doppia  $h'$  di  $\Phi_2^3$  viene a coincidere con la retta  $OG$ .

di  $F_2^8$  ha in generale tre rette doppie: una di queste, diciamo  $g$ , sarà la retta doppia di cui  $F_2^8$  si suppone già dotata. Sia  $h$  un'altra delle rette doppie della  $V_3^8$ : da ogni punto  $A$  di  $h$  partono i piani di due coniche di  $F_2^8$  che si appoggiano a  $g$  in due punti generalmente distinti: quindi l' $S_4$  di codesti due piani seca  $F_2^8$  in  $g$ , in due coniche e in una residua curva del 2.<sup>o</sup> ordine. Questa curva non può essere una delle altre coniche di  $F_2^8$ , dunque o è una ulteriore retta doppia di  $F_2^8$  o si raccoglie tutta in  $g$  contata altre due volte.

Nella prima ipotesi l'assunto è già dimostrato e l'ulteriore retta doppia di  $F_2^8$  è l'ulteriore retta doppia  $l$  di  $V_3^8$ ; nella seconda si conclude che tutti gli  $S_4$  del fascio, avente per asse l' $S_3$  che congiunge  $g$  con  $l$ , toccano su  $g$  le coniche di  $F_2^8$ , il che val quanto dire che tutte codeste coniche toccano su  $g$  l' $S_3, gl$ . Ma allora, in questa seconda ipotesi, basta ripetere per i punti di  $l$  il ragionamento fatto per quelli di  $h$  per concludere che  $h$  è l'ulteriore retta doppia di  $F_2^8$ .

Questo ragionamento porta a un'osservazione che collima con quella fatta in nota a proposito della  $F_2^7$  di  $S_4$ , ma richiederebbe considerazioni minute per i casi particolari. Perciò è preferibile servirsi della seguente considerazione.

Se la  $F_2^8$  avesse una sola retta doppia  $g$ , poichè per ogni sua proiezione ottenuta da un suo punto sopra un  $S_4$  vi sarebbe una sezione iperpiana composta di due rette doppie, una conica e una retta semplice, appoggiata alle due rette doppie, e poichè tal retta semplice non potrebbe provenire che dalla proiezione della conica di  $F_2^8$  passante per il centro di proiezione, la superficie  $F_2^8$  avrebbe delle sezioni iperpiane composte della retta doppia  $g$ , di due coniche e di una ulteriore linea piana d'ordine superiore a 2. Ciò che è manifestamente assurdo.

Riassumendo, possiamo dire che :

*Le  $F_2^8$  normali di 2.<sup>a</sup> specie dell' $S_3$  si distinguono in due tipi differenti. Quelle del 1.<sup>o</sup> tipo non hanno rette doppie, ma contengono un sistema  $\infty^1$  di cubiche piane (ellittiche), unisecanti le coniche, di grado 1 e indice 2; quelle del 2.<sup>o</sup> tipo hanno due rette doppie sghembe (che possono essere distinte o infinitamente vicine) (\*).*

38. Una proprietà comune delle superficie dei due tipi ora enumerati è quella che risulta dalle seguenti osservazioni :

a) Sia  $F_2^8$  una superficie del 1.<sup>o</sup> tipo, cioè supponiamo che  $F_2^8$  contenga un sistema  $\infty^1 \Sigma$  di cubiche piane (ellittiche) di grado 1 e indice 2.

---

(\*) L'esistenza effettiva dei due tipi risulterà presto dalle cose che seguiranno nel testo.

Due cubiche di  $F_2^3$  si incontrano in un punto, quindi per i loro piani passano  $\infty^9$  quadriche dell' $S_5$ . Imporre ad una di queste quadriche la condizione di contenere il piano di una terza cubica di  $F_2^3$  equivale ad imporle al più quattro condizioni lineari: cosicchè vi sono almeno  $\infty^5$  quadriche di  $S_5$  che passano per tre cubiche di  $F_2^3$ . Così proseguendo si trova che vi sono almeno  $\infty^1$  quadriche che passano per tre cubiche e due coniche di  $F_2^3$ . Ora se di queste quadriche nessuna passasse per  $F_2^3$  avremmo sopra  $F_2^3$  un fascio lineare di cubiche piane ellittiche, ciò che è assurdo, perchè queste cubiche taglierebbero sopra ogni cubica di  $\Sigma$  una  $g_n^1$  con  $n > 1$ , quindi i loro piani si appoggerebbero in rette ai piani delle cubiche di  $\Sigma$  e l' $S_4$  di due di questi piani conterrebbe tutta la superficie  $F_2^3$ . Se ne trae che  $F_2^3$  appartiene a una quadrica e che quindi può definirsi come la parziale intersezione di una quadrica con una  $V_3^6$  normale, luogo di una  $\infty^1$  ellittica di piani; l'intersezione completa essendo formata da  $F_2^3$  e da una quaterna di piani.

b) Supponiamo invece che  $F_2^3$  appartenga al 2.<sup>o</sup> tipo e quindi abbia due rette doppie  $g$  e  $h$ . Le quadriche per  $g$  e  $h$  sono  $\infty^{14}$ ; imporre a una tal quadrica la condizione di contenere una conica di  $F_2^3$  equivale ad imporle tre condizioni; dunque le quadriche per  $g$ ,  $h$  e quattro coniche di  $F_2^3$  sono almeno  $\infty^2$ . Ora se di queste nessuna passasse per  $F_2^3$  avremmo sopra  $F_2^3$  una rete di quartiche, e quindi  $F_2^3$  non sarebbe più una superficie di 2.<sup>a</sup> specie. Di qua si trae una conseguenza identica a quella dedotta per le superficie del 1.<sup>o</sup> tipo, dunque:

*Ogni  $F_2^3$  (normale) di 2.<sup>a</sup> specie dell' $S_5$  è parziale intersezione di una quadrica e di una  $V_3^6$  normale luogo di una  $\infty^1$  ellittica di piani.*

Per le superficie del 2.<sup>o</sup> tipo troveremo poi più innanzi un risultato ancora più espressivo.

### 39. *Le $F_2^3$ di $S_5$ del 1.<sup>o</sup> tipo.*

Volendo esaminare un po' da vicino le proprietà delle varie  $F_2^3$  di  $S_5$  gioverà distinguere i due tipi e considerarli separatamente.

Sia  $F_2^3$  una superficie del 1.<sup>o</sup> tipo e  $V_4^2$  la quadrica che la contiene.

È chiaro che  $V_4^2$  contiene per intero i piani delle cubiche del sistema  $\Sigma$  di  $F_2^3$ : d'altra parte,  $\Sigma$  essendo del grado 1, tali piani debbono tagliarsi a due a due in un punto variabile su  $F_2^3$  e quindi non possono nè passare per un punto fisso nè tagliarsi a due a due sopra una retta, quindi  $V_4^2$  è certo una quadrica non specializzata e i piani delle cubiche di  $F_2^3$  appartengono tutti a uno stesso dei due sistemi  $\infty^2$  di piani della  $V_4^2$ .

Si concepisca allora la  $V_4^2$  in discorso come l'immagine della varietà delle rette dello spazio ordinario: la  $F_2^3$  risulterà l'immagine di una congruenza di rette con  $\infty^1$  punti singolari, vertici di  $\infty^1$  coni cubici appartenenti alla congruenza: di più ogni raggio della congruenza ne contiene due punti singolari e due punti singolari sono sempre congiunti da un raggio della congruenza. Segue che:

*Una  $F_2^3$  del 1.° tipo non è altra cosa che l'immagine nell' $S_3$  — nell'ordinario senso della geometria della retta — della congruenza delle corde di una quartica sghemba di 1.ª specie.*

40. Giova che ci fermiamo un momento a esaminare le proiezioni della  $F_2^3$  del 1.° tipo da due suoi punti sopra un  $S_3$ ; così potremo dedurre alcune conseguenze notevoli relativamente alla congruenza delle corde della quartica di 1.ª specie  $\Gamma^4$ , di cui essa è immagine.

La proiezione della  $F_2^3$  da due suoi punti generici sopra un  $S_3$  è una  $\Phi_2^6$  con una cubica gobba doppia e con quattro rette doppie formanti un quadrangolo gobbo semplice inscritto in essa. Invece se essa si proietta da due suoi punti che corrispondano a due corde complanari della quartica  $\Gamma^4$ , è chiaro che i centri di proiezione sono vertici opposti di un quadrilatero piano completo inscritto in  $F_2^3$ , e quindi la proiezione risulta una  $\Phi_2^6$  con quattro rette doppie uscenti da un punto quadruplo e con una cubica piana doppia avente un nodo nel punto quadruplo. Esiste dunque in questo secondo caso una sezione iperpiana di  $F_2^3$  passante per i centri di proiezione che da essi viene proiettata doppiamente in una cubica piana nodale.

Vogliamo vedere quale sia nella congruenza delle corde di  $\Gamma^4$  l'immagine di codesta sezione iperpiana: così troveremo una conferma diretta dell'affermazione fatta in seguito ai risultati di (A).

Siano, per questo,  $A, B, C, D$  quattro punti complanari di  $\Gamma^4$  e  $AB, CD$  le corde immagini dei centri di proiezione. Posto  $M \equiv AB \cdot CD$ ;  $N \equiv AD \cdot BC$  e  $P \equiv AC \cdot BD$  si consideri il complesso lineare speciale (dello spazio di  $\Gamma^4$ ) avente per asse la retta  $PN$ : dico che questo complesso stacca dalla congruenza delle corde di  $\Gamma^4$  la rigata immagine della sezione iperpiana in discorso.

Infatti sia  $RS$  una corda di  $\Gamma^4$  appoggiata a  $PN$  in  $T$ , e sia  $X$  il punto di  $F_2^3$  immagine di  $RS$ . Proiettare  $X$  dai centri di proiezione, significa considerare il piano asse della rete di  $S_4$  che corrispondono agli  $\infty^2$  complessi lineari passanti per  $AB, CD$ , ed  $RS$ . Una tal rete di complessi ha come rigata base una rigata quadrica spezzata in due fasci; uno dei fasci è quello di centro  $M$  e piano  $ABCD$ , l'altro è il fascio di centro  $T$  e piano  $RSTM$ .

Quindi sarà giustificata la nostra asserzione appena avremo fatto vedere che nel piano  $RSTM$  vi è un'altra corda di  $\Gamma^4$  passante per  $T$ .

Siano  $U$  e  $V$  le ulteriori intersezioni di  $\Gamma^4$  col piano  $RSTM$ . Il piano polare di  $M$ , rispetto a una qualunque quadrica del fascio passante per  $\Gamma^4$ , contiene la retta  $PN$ , dunque il piano polare di  $T$  rispetto a una qualunque delle quadriche stesse passa per  $M$ . In particolare, il piano polare di  $T$  rispetto alla quadrica del fascio che passa per  $T$  (e contiene  $RST$ ) sarà dunque il piano  $RSTM$ , cioè  $RSTM$  è il piano tangente in  $T$  alla quadrica in discorso (che passa per  $U$  e  $V$ ); ma allora la retta  $UV$  passa per  $T$ ; c. d. d.

41. Nell'intento sempre di esaminare le varie proiezioni di  $F_2^8$ , siano  $AB$  e  $CD$  due corde di  $\Gamma^4$  tali che le  $BD$  e  $AC$  siano generatrici di uno stesso sistema di una quadrica  $Q^2$  passante per  $\Gamma^4$ ; siano poi  $P_{AB}$  e  $P_{CD}$  i punti di  $F_2^8$  che rappresentano le corde  $AB$  e  $CD$  di  $\Gamma^4$ , e si immagini di proiettare  $F_2^8$  sopra un  $S_3$  precisamente dai punti  $P_{AB}$  e  $P_{CD}$ .

Le rette  $AB$  e  $CD$  e tutte quelle della quadrica  $Q^2$  appoggiate ad  $AC$  e  $BD$  stanno in una congruenza lineare, in quella, cioè, che ha per direttrici  $AC$  e  $BD$ ; dunque il piano della conica  $C_1^2$  di  $F_2^8$  rappresentata dalla detta schiera rigata di  $Q^2$  e la retta  $P_{AB}P_{CD}$  stanno in un  $S_3$ . Ciò vuol dire che  $P_{AB}P_{CD}$  è una trisecante della  $V_3^6$  dei piani delle coniche di  $F_2^8$ , mentre è soltanto una bisecante della  $F_2^8$ ; la proiezione di  $F_2^8$  da  $P_{AB}$  e  $P_{CD}$  riuscirà dunque una  $\Phi_2^6$  con le coniche situate nei piani tangenti di un cono di 3.<sup>a</sup> classe [cfr. (A), n. 44, 45 e seg.], e la conica  $C_1^2$  si proietterà doppiamente in quella retta doppia di  $\Phi_2^6$  che in (A) fu chiamata  $r$ . Stavolta la linea doppia di  $\Phi_2^6$  è formata da cinque rette (cioè  $r$  e le immagini delle quattro cubiche piane di  $F_2^8$  passanti per  $P_{AB}$  e  $P_{CD}$ ) e da una conica.

Si può domandare quale sia la linea di  $F_2^8$  che ha per immagine codesta conica.

Ebbene si consideri la schiera rigata di  $Q^2$  cui appartengono  $BD$  e  $AC$  e la conica  $C_2^2$  di  $F_2^8$  di cui essa è immagine. Dei quattro punti dove si tagliano, fuori di  $P_{AB}$  e  $P_{CD}$ , le cubiche di  $F_2^8$  uscenti da  $P_{AB}$  e  $P_{CD}$ , due,  $M$  ed  $N$ , stanno su  $C_2^2$ , poichè essi non sono altra cosa che le immagini di  $BD$  e  $AC$ . Considero l' $S_4$  che passa per  $C_2^2$ ,  $P_{AB}$  e  $P_{CD}$ . Esso seca ulteriormente  $F_2^8$  in una sestica  $C^6$  di genere 2, bisecante le coniche di  $F_2^8$  e passante per  $P_{AB}$  e  $P_{CD}$ ; la proiezione di  $C^6$  da  $P_{AB}$  e  $P_{CD}$  è dunque una quartica con un punto doppio, oppure, se non riesce biunivoca, una conica doppia. Ora è facile vedere che deve verificarsi questa seconda alternativa, poichè è facile persuadersi che la proiezione di  $C^6$  ha più di un punto doppio.



Infatti il piano  $P_{AB} P_{CD} M$  incontra in un punto ulteriore la cubica che passa per  $P_{AB}$  ed  $M$  e in un punto ulteriore la cubica che passa per  $P_{CD}$  ed  $M$ , e questi due punti situati entrambi su  $C^6$  si riflettono in un punto doppio della sua proiezione. E lo stesso può ripetersi per il piano  $P_{AB} P_{CD} N$ ; dunque è chiaro che  $C^6$  ha per immagine appunto la conica doppia di  $\Phi_2^3$ .

E qui si può aggiungere un'osservazione importante.

Sopra la  $\Phi_2^3$  del caso attuale una delle  $\infty^1$  aggiunte alle sezioni piane (che si spezzano tutte in coppie di coniche) è formata dalla conica semplice di  $\Phi_2^3$  situata nel piano che ne contiene la conica doppia e dalla conica di  $\Phi_2^3$  che si spezza nella retta  $r$  contata due volte; dunque  $C^2$  e  $C_2^2$  prese insieme forniscono una delle  $\infty^1$  aggiunte alle sezioni iperpiane della  $F_2^3$ . Ciò val quanto dire:

*Le coppie di schiere rigate appartenenti alle varie quadriche passanti per una quartica sghemba di 1.<sup>a</sup> specie staccano gruppi canonici da tutte le rigate di 8.<sup>o</sup> grado e del genere 3 secondo cui la congruenza delle corde della quartica è secata dai vari complessi lineari del suo spazio.*

#### 4<sup>o</sup>. Rappresentazione sul cono cubico delle $F_2^3$ di $S_6$ del 1.<sup>o</sup> tipo.

Dalle cose dette possiamo ricavare agevolmente la rappresentazione di una  $F_2^3$  del primo tipo sopra un cono cubico (ellittico): per il che, basterà evidentemente rappresentare sopra un tal cono la congruenza delle corde di una quartica sghemba di 1.<sup>a</sup> specie.

Ebbene sia  $\Gamma^4$  la quartica in questione e  $V$  un suo punto qualunque.

*Per ottenere una rappresentazione della varietà delle corde di  $\Gamma^4$  sui punti del cono cubico che la proietta da  $V$  basterà evidentemente coordinare ad ogni corda di  $\Gamma^4$  quel punto del cono  $V$  in cui essa seca il cono fuori di  $\Gamma^4$ .*

In questo modo, infatti, ad ogni corda di  $\Gamma^4$  vien coordinato un punto di  $V$  e ad ogni punto di  $V$  vien coordinata una corda di  $\Gamma^4$ , poichè per ogni punto di  $V$  passano due corde di  $\Gamma^4$  ma una di queste è appunto la generatrice di  $V$  che passa per quel punto.

Sia ora  $\varphi$  una delle rigate secondo cui la congruenza delle corde di  $\Gamma^4$  è tagliata da un complesso lineare generico;  $\varphi$  è dell'8.<sup>o</sup> grado e del genere 3, ha in  $\Gamma^4$  una quartica tripla e contiene tre generatrici del cono  $V$ .

Ma allora  $\varphi$  taglia il cono  $V$ , fuori di  $\Gamma^4$  e di codeste tre generatrici, in una curva dell'ordine  $8 \cdot 3 - 4 \cdot 3 - 3 = 9$  con un punto triplo nel vertice  $V$  del cono.

Si deduce da ciò che le immagini delle rigate staccate dalla congruenza delle corde di  $\Gamma^4$  dai complessi lineari dello spazio ambiente, cioè le imma-

gini delle sezioni iperpiane di  $F_2^8$ , sono intanto curve del 9.º ordine con un punto triplo in  $V$ .

Per trovare le altre singolarità di codeste curve, si noti che il cono  $V$  passa per i vertici  $A_1, A_2, A_3, A_4$  dei quattro coni quadrici passanti per  $\Gamma^4$ , e che  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) è l'immagine sul cono  $V$  di tutte le corde di  $\Gamma^4$  che costituiscono le generatrici del cono quadrico  $A_i$ . Ma allora quelle curve del 9.º ordine hanno tutte quattro punti doppi in  $A_1, A_2, A_3$  e  $A_4$ , poichè ogni complesso lineare contiene due generatrici di un cono quadrico.

Per la formula di SEGRE, si vede allora che esse non possono avere altre singolarità (atteso che debbono formare un sistema di genere 3 - e grado 8 -), quindi:

*Una  $F_2^8$  di  $S_3$  del 1.º tipo può sempre rappresentarsi sopra un cono cubico per modo che le immagini delle sezioni iperpiane siano curve del 9.º ordine passanti tre volte per il vertice e con altri quattro punti-base doppi.*

43. Vogliamo ora esaminare se nella costruzione precedente possano disporsi le cose in modo che le linee del 9.º ordine, immagini delle sezioni iperpiane di  $F_2^8$ , possano staccarsi dal cono  $V$  mediante superficie cubiche.

Per questo si incominci dall'osservare che se  $M$  è un punto di  $\Gamma^4$  le corde di  $\Gamma^4$  uscenti da  $M$  riempiono un cono cubico il quale taglia il cono  $V$  secondo la corda  $MV$ , la quartica  $\Gamma^4$  e una ulteriore quartica  $\Gamma_m$ . Questa quartica  $\Gamma_m$  è l'immagine sul cono  $V$  del cono riempito dalle corde di  $\Gamma^4$  uscenti da  $M$ , cioè l'immagine di una delle cubiche di  $F_2^8$ . La tangente di  $\Gamma_m$  nel punto  $V$  deve essere una delle generatrici del cono  $V$ , cioè una delle corde di  $\Gamma^4$ ; deve poi esser situata nel piano tangente lungo  $MV$  al cono  $M$ , cioè nel piano che proietta da  $M$  la retta  $g$  tangente a  $\Gamma^4$  in  $V$ , dunque o è la retta  $g$  o è la retta proiettante da  $V$  l'ulteriore punto  $H$  ove il piano  $gM$  taglia  $\Gamma^4$ . Naturalmente la prima alternativa va esclusa perchè altrimenti tutte le  $\infty^1$  quartiche di  $V$  per  $A_1, A_2, A_3, A_4$  (e  $V$ ) si toccherebbero in  $V$  (\*) dunque la tangente a  $\Gamma_m$  in  $V$  è la retta  $VH$ .

Sia ora  $N$  un altro punto di  $\Gamma^4$ ,  $K$  l'ulteriore punto comune al piano  $gN$  e a  $\Gamma^4$ , e  $\Gamma_n$  la quartica che rappresenta su  $V$  il cono delle corde di  $\Gamma^4$  uscenti da  $N$ ; la retta tangente a  $\Gamma_n$  nel punto  $V$  sarà la retta  $VK$ .

---

(\*) Come abbiamo già detto, è dovuta al SEGRE l'osservazione che per cinque punti generici di un cono cubico (ellittico) passano due quartiche (di 1.ª specie) situate sul cono; ma se di una quartica (irriducibile) situata sul cono si assegnano quattro punti e la tangente nel vertice essa è univocamente determinata.

Il complesso lineare speciale di asse  $MN$  stacca dalla congruenza delle corde di  $\Gamma^4$  una rigata dell'8.<sup>o</sup> grado spezzata nei cono cubici proiettanti  $\Gamma^4$  da  $M$  e da  $N$  e nella schiera rigata riempita dalle corde di  $\Gamma^4$  che si appoggiano ad  $MN$ . Se diciamo  $P$  il quarto punto di  $\Gamma^4$  situato nel piano  $VMN$ , la direttrice di questa schiera uscente da  $V$  è la retta  $VL$  che proietta da  $V$  l'ulteriore punto  $L$  comune a  $\Gamma^4$  e al piano  $Pg$ , dunque  $VL$  è l'immagine sul cono  $V$  della schiera rigata e l'immagine della rigata dell'8.<sup>o</sup> grado in discorso sarà costituita da  $\Gamma_m$ ,  $\Gamma_n$  e  $VL$ .

Ora se la linea del 9.<sup>o</sup> ordine spezzata in  $\Gamma_m$ ,  $\Gamma_n$  e  $VL$  potesse staccarsi dal cono  $V$  mediante una superficie del 3.<sup>o</sup> ordine  $\Phi$ ,  $\Phi$  non potrebbe avere nel punto  $V$  che un punto *semplice* e quindi le tangenti in  $V$  a  $\Gamma_m$  e  $\Gamma_n$ , cioè le rette  $VH$  e  $VK$ , e la retta  $VL$  dovrebbero stare in uno stesso piano.

Ebbene, vediamo sotto quali condizioni può accadere che le rette  $VH$ ,  $VK$  e  $VL$  stiano in uno stesso piano.

Diciamo  $u$  l'integrale di 1.<sup>a</sup> specie normale legato alla curva  $\Gamma^4$  e  $u_x$  il valore che esso ha nel punto  $X$  di  $\Gamma^4$ ; poi supponiamo scelte le cose in modo che per quattro punti complanari  $X_1, X_2, X_3, X_4$  di  $\Gamma^4$  si abbia:

$$u_{x_1} + u_{x_2} + u_{x_3} + u_{x_4} \equiv 0.$$

Allora si ha, per le ipotesi fatte:

$$2u_v + u_m + u_n \equiv 0; \quad 2u_v + u_h + u_k \equiv 0; \quad 2u_v + u_p + u_l \equiv 0$$

$$u_v + u_m + u_n + u_p \equiv 0.$$

Sommando membro a membro le prime tre congruenze e tenendo conto della quarta si ricava:

$$5u_v + u_h + u_k + u_l \equiv 0;$$

se dunque si vuole che i quattro punti  $V, H, K$  ed  $L$  stiano in un piano occorre e basta che si abbia:

$$4u_v \equiv 0$$

cioè occorre e basta che  $V$  sia il punto di contatto di uno dei 16 piani stazionari di  $\Gamma^4$ .

Ebbene, nel costruire la rappresentazione studiata nel n.<sup>o</sup> precedente, si prenda realmente il vertice  $V$  del cono cubico in uno dei 16 punti di contatto dei piani stazionari di  $\Gamma^4$ , cioè in uno dei punti in cui  $\Gamma^4$  è tagliata

dalle facce del tetraedro  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , e poi siano  $\Gamma_m, \Gamma_n$  due quartiche di  $V$  per  $A_1, A_2, A_3, A_4$  e  $VL$  la terza generatrice del cono  $V$  contenuta nel piano che congiunge le tangenti in  $V$  a  $\Gamma_m$  e  $\Gamma_n$ . Delle  $\infty^1$  superficie del 3.<sup>o</sup> ordine che passano per  $\Gamma_m$ , ve n'è  $\infty^1$  che contengono  $VL$  e toccano il cono  $V$  in  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . La linea base di codesto fascio di superficie cubiche, cui appartiene il cono  $V$ , si spezza in  $VL, \Gamma_m$  e in una residua quartica, che, dovendo passare per  $A_1, A_2, A_3, A_4$  e toccare in  $V$  la terza generatrice del cono  $V$  situata in un piano con  $VL$  e la tangente in  $V$  a  $\Gamma_m$ , coinciderà con  $\Gamma_n$  (\*); quindi esiste una superficie del 3.<sup>o</sup> ordine che seca il cono  $V$  in  $\Gamma_m, \Gamma_n$  e  $VL$ . Ma la curva composta da  $\Gamma_m, \Gamma_n$  e  $VL$  è nel caso attuale l'immagine di una sezione iperpiana di  $F_2^3$ , dunque le immagini di tutte le sezioni iperpiane di  $F_2^3$  si possono staccare dal cono  $V$  mediante superficie del 3.<sup>o</sup> ordine.

Si conclude che:

*Ogni  $F_2^3$  di  $S_3$  del 1.<sup>o</sup> tipo può rappresentarsi sopra un cono cubico mediante il sistema di linee del 9.<sup>o</sup> ordine (con un punto triplo nel vertice del cono e con quattro altri punti-base doppi) staccato dal cono mediante un sistema di superficie cubiche che passano pel suo vertice e lo toccano in quattro punti.*

Anzi, per quanto risulta da quel che precede, si può supporre che dei quattro punti-base doppi tre siano congiunti da un piano che passi pel vertice del cono.

#### 44. *Le $F_2^3$ di $S_3$ del 2.<sup>o</sup> tipo.*

Una prima osservazione, relativamente alle  $F_2^3$  del 2.<sup>o</sup> tipo, è che esse contengono un sistema algebrico  $\infty^2$  di quartiche sghembe costituito da due  $\infty^1$  ellittiche di fasci.

Infatti sia  $F_2^3$  una superficie del 2.<sup>o</sup> tipo e siano  $g$  ed  $h$  le sue due rette doppie. Supponiamo, per fissar le idee, che  $g$  ed  $h$  siano distinte e consideriamo l' $S_3$  cui appartengono la retta  $g$  e il piano di una delle coniche della

---

(\*) Per togliere ogni obbiezione è bene osservare che una superficie del fascio considerato, diversa dal cono  $V$  ha necessariamente in  $V$  un punto semplice. Infatti se essa fosse un monoide (l'impossibilità che essa possa essere un cono è manifesta) la linea base del fascio si comporrebbe di  $\Gamma_m, VL$  e delle quattro rette  $VA_1, VA_2, VA_3$  e  $VA_4$  e quindi starebbero sopra un cono quadrico le cinque rette  $V(LA_1A_2A_3A_4)$  e la tangente a  $\Gamma_m$  in  $V$ : il che non è possibile data la genericità della scelta di  $\Gamma_m$  e  $\Gamma_n$  (cioè di  $\Gamma_m$  e  $VL$ ).

superficie. Esso è asse di un fascio di iperpiani secanti ulteriormente la  $F_2^3$  in quartiche ellittiche, unisecanti le coniche di  $F_2^3$ , e codeste quartiche sono necessariamente sghembe perchè prive di punti doppi. Facendo variare il piano considerato fra quelli della  $V_3^6$ , riempita dai piani delle coniche della superficie, si ottiene il sistema algebrico  $\infty^2$  sopra nominato.

Che scambiando la retta  $g$  con  $h$  si torna a trovare lo stesso sistema  $\infty^2$  risulterà, con altre conseguenze notevoli, dalle seguenti osservazioni (\*).

Prima di tutto è chiaro che ognuna delle quadriche costruite partendo dalla retta  $g$  si appoggia ad  $h$  in un punto: poichè se  $\Gamma^4$  è l'ulteriore intersezione di  $F_2^3$  con un  $S_4$  che ne contenga  $g$  e una conica, il punto ove questa conica si appoggia ad  $h$  dovendo risultare doppio per la sezione iperpiana complessiva dovrà essere un punto semplice di  $\Gamma^4$ . Di più un iperpiano generico per  $g$  ed  $h$  secando ulteriormente  $F_2^3$  in una coppia di coniche incontra  $\Gamma^4$ , fuori di  $g$  ed  $h$ , soltanto in due punti. Ciò significa che  $\Gamma^4$  si appoggia in un punto non solo ad  $h$ , ma anche a  $g$ .

Diciamo  $A$  il punto ove  $\Gamma^4$  si appoggia ad  $h$ ,  $B$  quello ove si appoggia a  $g$ . Delle due coniche di  $F_2^3$  uscenti da  $B$ , una secherà  $\Gamma^4$  soltanto in  $B$ , l'altra la incontrerà in un punto ulteriore  $D$  (e allora sull'ente algebrico  $\infty^2$  di cui  $F_2^3$  è un modello proiettivo per questa seconda conica e per  $\Gamma^4$  il punto  $B$  non è da considerarsi come un punto comune). L' $S_3$  che passa per  $h$ ,  $B$  e  $D$  contiene già tre punti della  $\Gamma^4$  (necessariamente non allineati) dunque ne contiene anche un quarto; ed esiste un  $S_4$  per  $h$ ,  $B$  e  $D$  che contiene  $\Gamma^4$  per intero.

Ciò dimostra intanto che il sistema algebrico  $\infty^2$  trovato prima partendo dalla considerazione della retta  $g$ , coincide con quello che si troverebbe partendo dalla considerazione della retta  $h$ .

Ma vi è di più. Diciamo  $C^2$  la conica che completa una sezione iperpiana con  $\Gamma^4$  e con la retta  $g$  contata due volte;  $C_1^2$  quella che completa una sezione iperpiana con  $\Gamma^4$  e con la retta  $h$  contata due volte; naturalmente  $C^2$  passerà per  $A$  e  $C_1^2$  per  $B$ . Il fascio di quartiche staccato su  $F_2^3$  dagli iperpiani per  $g$  e  $C^2$  ha una quartica ( $\Gamma^4$ ) comune col fascio analogo generato dagli iperpiani per  $h$  e  $C_1^2$ ; d'altra parte su  $F_2^3$  non può esistere una rete di quartiche sghembe, dunque i due fasci coincidono e tutte le loro  $\infty^1$  quartiche passano per  $A$  e per  $B$ .

---

(\*) Del resto la cosa stessa risulta subito da ciò che proiettando la  $F_2^3$  da un suo punto generico sopra un  $S_4$  si ottiene in questo una  $F_2^3$  con un sistema algebrico  $\infty^1$  di cubiche piane.

Il resto del considerato fascio di quartiche  $|\Gamma^4|$  rispetto al sistema delle sezioni iperplane di  $F_2^8$  è, evidentemente, un altro fascio di quartiche  $|\Gamma_*^4|$  e le quartiche di questo 2.º fascio passano pure tutte tanto per  $A$ , quanto per  $B$ ; dunque:

*Per ogni punto di una delle rette doppie di  $F_2^8$  passano  $\infty^1$  quartiche sghembe (ellittiche) della superficie. Esse si distribuiscono in due fasci lineari e vanno tutte a tagliare l'altra retta doppia in un medesimo punto. In questo modo, fra i punti delle due rette doppie viene stabilita una corrispondenza proiettiva.*

Notisi ancora che la proiezione di  $F_2^8$  fatta dai due punti  $A$  e  $B$  sopra un  $S_3$  generico risulta una quadrica doppia, i cui due sistemi di generatrici provengono dai due fasci di quartiche  $|\Gamma^4|$  e  $|\Gamma_*^4|$ ; dunque  $F_2^8$  sta sopra un  $S_1$ -cono quadrico avente per vertice la retta  $AB$ .

Ma allora  $F_2^8$  può definirsi come la completa intersezione di tre quadriche dell' $S_3$  e nella rete delle quadriche per  $F_2^8$  esistono  $\infty^1$  quadriche doppiamente specializzate. Le rette doppie di queste quadriche costituiscono una schiera rigata ordinaria.

Per arrivare a questi risultati noi abbiamo fatto per semplicità l'ipotesi che  $g$  ed  $h$  fossero distinte: ma è chiaro che essi restano sostanzialmente immutati anche se  $g$  ed  $h$  (rimanendo sempre sghembe) diventano infinitamente vicine fra loro.

45. Il teorema dimostrato nel n.º precedente può essere invertito e così si arriva alla seguente costruzione della  $F_2^8$  del 2.º tipo.

Si prendano nell' $S_3$  due quadriche doppiamente specializzate con le rette-vertici,  $a$  e  $b$ , sghembe fra di loro, e siano  $g$  ed  $h$ , due, fra loro sghembe, delle quattro rette appoggiate ad  $a$  e  $b$  della  $V_3^4$  secondo cui si intersecano le due quadriche. Questa  $V_3^4$  è toccata in ogni punto di  $g$  da un  $S_3$  che diremo  $\alpha$ , e in ogni punto di  $h$  da un  $S_3$  che diremo  $\beta$ .

Ebbene si consideri una terza quadrica tale che rispetto ad essa gli  $S_3$  polari di  $g$  ed  $h$  siano precisamente  $\alpha$  e  $\beta$  (e quindi che passi per  $g$  ed  $h$ ): la completa intersezione delle tre quadriche in discorso sarà precisamente una  $F_2^8$  del 2.º tipo (\*).

---

(\*) Anche una  $F_2^8$  del 2.º tipo può considerarsi come l'immagine di una congruenza di rette dello spazio ordinario: anzi di una congruenza (del 4.º grado) che sia intersezione completa di due complessi quadratici.

46. *Rappresentazione sul cono cubico delle  $F_2^3$  di  $S_5$  del 2.º tipo.*

Sia  $F_2^3$  una superficie di 2.<sup>a</sup> specie dell' $S_5$  del 2.º tipo e sia  $g$  una delle sue due rette doppie. Si proietti  $F_2^3$  da  $g$  sopra un  $S_3$ : il risultato della proiezione sarà una rigata biquadratica e su questa il sistema  $|C|$  delle sezioni iperpiane di  $F_2^3$  sarà rappresentato da un sistema  $|C'|$  di curve del 6.º ordine (con un punto doppio variabile sopra una delle direttrici della rigata) bisecate dalle generatrici e dall'altra direttrice (che in generale sarà distinta dalla prima). Ora tanto se la biquadratica è a direttrici distinte, quanto se è a direttrice unica tacnodale, essa si può convertire mediante una trasformazione quadratica in un cono cubico e attraverso questa trasformazione le  $C'$  si cangiano in curve dell'8.º ordine con tre punti doppi, dunque:

*Ogni  $F_2^3$  di 2.<sup>a</sup> specie di  $S_5$  del 2.º tipo si può rappresentare sopra un cono cubico (ellittico) mediante un sistema di curve dell'8.º ordine con un punto doppio nel vertice del cono e con altri tre punti-base doppi.*

Notisi che il piano contenente i tre punti-base doppi delle curve di 8.º ordine ora considerate non passa o passa per il vertice del cono secondo che sono distinte o infinitamente vicine le due rette doppie della  $F_2^3$  corrispondente. Nel caso che il piano non passi per il vertice, una delle rette doppie della  $F_2^3$  è rappresentata sul cono dalla sezione praticata con quel piano, l'altra ha per immagine il vertice.

47. *Sistemi lineari di genere 3 tracciati sul cono cubico (ellittico).*

I risultati di (A) e di questo lavoro mentre danno la classificazione completa della superficie di 2.<sup>a</sup> specie a curve sezioni di genere 3, permettono di risolvere immediatamente il problema della riduzione dei sistemi lineari semplici di genere 3 e dimensione non inferiore a 3 tracciati nel cono cubico ellittico, quando siano posti a riscontro con quelli già conseguiti dai professori CASTELNUOVO e DE-FRANCHIS (\*).

E infatti un tal sistema può considerarsi come il sistema rappresentativo di una superficie irregolare a curve sezioni di genere 3 di uno spazio a tre o più dimensioni: e allora tale superficie o è dell'ordine 4, e quindi, se non è proiezione da qualche suo punto di una superficie iperspaziale, è una delle superficie con  $\infty^1$  cubiche gobbe trovate dal DE-FRANCHIS, o è di un

---

(\*) CASTELNUOVO, loc. cit. (Atti di Torino, vol. XXV, 1890); DE-FRANCHIS (Rendic. Circolo Mat. di Palermo, tom. XIV, 1890).

ordine maggiore di 4 e allora o rientra fra le superficie trovate dal CASTELNUOVO o è una di quelle trovate in questo lavoro.

Segue che :

Se  $|C|$  è un sistema lineare semplice, almeno tre volte infinito, di curve di genere tre segnato sopra un cono cubico ellittico, esso è sempre (birazionalmente o cremonianamente (\*)) riducibile :

$\alpha$ ) a un sistema di curve del 9.° ordine, non passanti per il vertice, con due punti-base tripli, un punto-base doppio e un punto-base semplice (DE-FRANCHIS); oppure

$\beta$ ) a un sistema di curve del 6.° ordine, non passanti per il vertice, con un punto-base doppio e, se occorre, con altri punti-base semplici (CASTELNUOVO); oppure

$\gamma$ ) a un sistema di curve dell'ordine  $9-\mu$ , passanti  $3-\mu$  volte per il vertice del cono, con altri  $4-\mu$  punti-base doppi ( $\mu = 0, 1$ ) e, se occorre, con qualche punto-base semplice.

Eccettuato poi il caso  $\beta$ ) in cui il sistema di curve del 6.° ordine si può staccare dal cono mediante quadriche, in tutti gli altri casi i sistemi di curve che si presentano come sistemi tipici possono essere staccati dal cono mediante superficie cubiche.

Roma, 19 marzo 1910.

---

(\*) Vedi l'ultima nota a piè di pagina della Memoria del DE-FRANCHIS ora citata.