LE

CALCUL INFINITÉSIMAL

FONDÉ SUR

DES PRINCIPES RATIONNELS

ET PRÉCÉDÉ DE LA

THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'INFINI

ERRATA

Page 30, ligne 32 :	*au lieu de*	$a+\infty$,	*il faut*	$a+\infty=\infty$.
Page 76, ligne 26 :	*au lieu de*	Cx^3,	*il faut*	Ax^3.
Page 126, ligne 23 :	*au lieu de*	$\sqrt{x^2+5+9}$,	*il faut*	$\sqrt{x^2+5x+9}$.
Page 139, ligne 7 :	*au lieu de*	$+\frac{1}{3}$,	*il faut*	$=\frac{1}{3}$.
Page 140, ligne 6 :	*au lieu de*	n_2,	*il faut*	u_2.
Page 142, ligne 14 :	*au lieu de*	$\frac{6}{65}$,	*il faut*	$\frac{6}{55}$.
Page 147, ligne 3 :	*au lieu de*	$32z^7$,	*il faut*	$40z^7$.
Page 209, dernière ligne :	*au lieu de*	se réduit $\frac{0}{0}$,	*il faut*	se réduit à $\frac{0}{0}$.
Page 223, av.-dern. ligne :	*au lieu de*	$x-\infty$,	*il faut*	$x=\infty$.
Page 231, ligne 9 :	*au lieu de*	$F(x)$,	*il faut*	$F(h)$.
Page 236, première ligne :	*au lieu de*	Sturn,	*il faut*	Sturm.
Page 259, première ligne :	*au lieu de*	$x^{m-1}dx$,	*il faut*	$mx^{m-1}dx$.
Page 277, ligne 19 :	*au lieu de*	$2k1$,	*il faut*	$2k+1$.
Page 300, ligne 9 :	*au lieu de*	$\int \frac{x^{n-1}dx}{\log x} =$,	*il faut*	$\int \frac{x^{m-1}dx}{\log x} =$.
Page 312, ligne 13 :	*au lieu de*	$\int_0^\alpha \frac{x}{\log x}$,	*il faut*	$\int_0^\alpha \frac{xdx}{\log x}$.

MARSEILLE — IMPRIMERIE ET LITHOGRAPHIE MARIUS OLIVE, RUE SAINTE, 39.

LE

CALCUL INFINITÉSIMAL

FONDÉ SUR

DES PRINCIPES RATIONNELS

ET PRÉCÉDÉ DE LA

THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'INFINI

PAR P.-HENRY FLEURY

Quand on travaille sur les connaissances humaines, on a plus d'erreurs à détruire que de vérités à établir. Mais il ne faut que du temps, et les erreurs passeront avec ceux qui les défendent.

CONDILLAC.

1879

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DEUXIÈME PARTIE

NOTIONS FONDAMENTALES

LIVRE DEUXIÈME

CALCUL DIFFÉRENTIEL

LIVRE TROISIÈME

PRÉFACE

Le calcul infinitésimal, fondé sur le principe leibnitzien, a débuté par des prodiges, et cependant, au dire de Fontenelle, « l'Académie des « sciences a été plus de vingt ans en suspens sur la valeur des idées de « Leibnitz. Plusieurs géomètres, » dit Carnot, « ont cru le principe « fautif et capable d'induire en erreur; mais ils ont été accablés, si l'on « peut s'exprimer ainsi, par la multitude des prodiges, et par l'éclat des « vérités qui sortaient en foule de ce principe. »

Malgré cette multitude de prodiges et l'éclat de ces vérités, « l'analyse « transcendante, » dit Auguste Comte, « présente cette grande imperfec- « tion philosophique de se trouver encore essentiellement fondée sur des « principes métaphysiques dont l'esprit humain a eu tant de peine à « dégager toutes ses théories positives. »

En effet, le principe leibnitzien, sur lequel est fondée la méthode infinitésimale, celui que Fontenelle appelle « le grand principe et le plus « fécond de tous, » est aussi le plus contraire à la raison, non-seulement en ce qu'il confère le droit, mais en ce qu'il va même jusqu'à imposer le devoir de négliger des quantités de toute espèce et de tout ordre, devant d'autres quantités d'un ordre supérieur, et cela, non dans le but de se contenter d'une approximation suffisante, mais bien dans celui d'atteindre la plus rigoureuse et la plus parfaite exactitude.

« C'est la seule manière, » dit Carnot, « d'exprimer exactement les « conditions du problème, » et, ajoute M. Charles de Freycinet « de « rétablir la réalité des choses. »

On comprend que les meilleurs esprits n'aient pu admettre, qu'avec une extrême répugnance, un principe qui oblige à commettre des inexactitudes comme seul moyen d'atteindre une parfaite exactitude, et qui, comme le dit M. Haton de la Goupillière, « oblige à employer l'erreur pour

« parvenir à la connaissance de la vérité, et à quitter la vraie route dès le « début, pour n'y rentrer qu'au dernier moment. »

D'Alembert ne croyait pas à la possibilité de démontrer ou de justifier un principe si paradoxal; car un jeune géomètre se plaignant à lui de l'obscurité que laissait dans son esprit l'étude d'une science fondée sur un tel principe : « Allez en avant, » lui dit-il, « et la foi vous viendra. »

Lagrange, plus difficile à contenter, entreprit de rejeter non-seulement le principe leibnitzien, mais l'analyse infinitésimale elle-même, à laquelle il essaya de suppléer par « *une analyse algébrique* (censée) *dégagée de toute « considération de limites et d'infiniment petits.* » Il voulut ainsi refaire le calcul différentiel sans différentielles. Tentative qui devait réussir comme celle de faire des omelettes sans œufs.

Malgré cela, l'ouvrage de Lagrange passe pour une œuvre de génie, et l'Académie des sciences de Paris, qui, selon l'expression de Fontenelle, avait conservé « une sainte horreur de l'infini, a couronné, par le premier « des fameux prix décennaux, la *Théorie des Fonctions analytiques*, « destinée, » dit Hoëné Wronski, « à extirper des Mathématiques l'im- « portante idée de l'Infini, ce principe de leur haute évidence et de leur « certitude absolue. »

Comme l'œuvre de Lagrange est restée loin du but que l'auteur s'y était proposé, Carnot, reprenant la question, a cru la résoudre en justifiant le principe leibnitzien par celui des erreurs compensées. Le principe en vertu duquel des erreurs se compensent exactement, paraît, en effet, moins paradoxal, que celui qui oblige à commettre des erreurs pour « rétablir « la réalité des choses. » Voilà pourquoi Lagrange lui-même a cru voir dans la doctrine de Carnot, « la vraie métaphysique du calcul différentiel, » et Auguste Comte, « la véritable explication logique directe de la méthode « de Leibnitz, » ou, comme il ajoute, « la manifestation précise et lumi- « neuse de ce que Leibnitz avait vaguement et confusément aperçu, en « concevant les bases rationnelles de son analyse. »

Il ne me paraît pas plus difficile de supposer aux infiniment petits une vertu occulte qui les fait évanouir en présence des quantités finies, que d'accorder aux erreurs la propriété miraculeuse de se détruire nécessairement et comme par enchantement.

Dans l'enseignement actuel, la méthode infinitésimale se justifie par celle des limites : tout maintenant s'y définit, s'explique et se démontre au moyen des limites.

Ainsi, tout en admettant avec Cournot que « la méthode infinitésimale « est mieux appropriée à la nature des choses, qu'elle est la méthode « directe, au point de vue objectif, » on lui préfère, pour les démonstrations, la méthode des limites, parce que, comme dit encore Cournot, « au « point de vue logique et subjectif, la rigueur démonstrative lui appartient « directement. »

Cette opinion, qui est aussi celle d'Auguste Comte et de la plupart des géomètres, constitue pourtant une profonde erreur. Je prouverai que le défaut qu'on voit dans la méthode infinitésimale, n'est pas inhérent à la méthode en elle-même, mais réside uniquement dans l'esprit de ceux qui en ont voulu donner l'explication, tandis qu'il y a un défaut bien réel, et qu'on ne voit pas, dans la méthode des limites appliquée au calcul différentiel.

Une fois la rectification faite, l'avantage et la supériorité restent à la méthode infinitésimale, tant au point de vue subjectif qu'au point de vue objectif, tant pour les démonstrations que pour les applications.

Charles Dupin a dit que Lagrange avait démontré Leibnitz. Ce n'est pourtant pas par Lagrange, mais par Neuton, c'est-à-dire par la méthode des limites, que les géomètres s'accordent aujourd'hui à démontrer Leibnitz. En réalité c'est à Leibnitz qu'il appartient de démontrer Lagrange et Neuton ; je veux dire que c'est dans la méthode de Leibnitz que réside la rigoureuse exactitude, et non dans celles de Lagrange et de Neuton.

L'explication rationnelle que je donne de la mèthode infinitésimale sera fondée sur la différence essentielle qui existe entre l'infini absolu et l'infini relatif. Quoique ces termes aient été employés par quelques philosophes ou géomètres, et que même Fontenelle ait cru devoir distinguer le zéro absolu du zéro relatif, rien pourtant n'a été dit de la distinction que j'établis entre les deux espèces d'infinis, et par suite d'infiniment petits, non plus que de l'application que j'en fais non-seulement à la rectification des principes fondamentaux du calcul infinitésimal, mais aussi à la résolution de plusieurs difficultés ou paradoxes célèbres, tels que le postulatum d'Euclide, le fameux problème de Saint-Pétersbourg, le paradoxe du Chevalier de Méré, le paralogisme qui a été proposé par M. Réalis dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de 1864, et qui est resté inexpliqué jusqu'aujourd'hui, etc.

Leibnitz a dit : « Les règles du fini réussissent dans l'infini, et, réci-« proquement, les règles de l'infini réussissent dans le fini. » Gauss dit au contraire : « Il n'est jamais permis, en mathématiques, de traiter une « grandeur infinie comme une quantité déterminée. » M. Bertrand dit de même qu' « une quantité infinie ne peut pas figurer dans les calculs « comme une quantité déterminée. »

Il faudrait pourtant savoir à quoi s'en tenir. Les règles du fini réussissent-elles, ou ne réussissent-elles pas dans l'infini ? Leibnitz dit *oui*, Gauss et M. Bertrand disent *non*, tandis que Duhamel dit *oui* et *non*, comme on le voit dans le passage suivant :

« La valeur de x étant arbitraire, peut être supposée aussi grande que « l'on voudra, et, par conséquent, les règles précédentes s'appliquent au « cas où l'on a $x = \infty$. Mais la démonstration directe ne pourrait plus « se faire de la même manière dans ce cas. »

Ce raisonnement revient à dire : « Les règles précédentes s'appliquent « à ce cas, » parce que les régles du fini réussissent dans l'infini. « Cepen-« dant la démonstration directe » ne pourrait plus se faire de la même manière, parce que les règles du fini ne réussissent pas dans l'infini.

Maintenant, les règles de l'infini réussissent-elles dans le fini ? Il faudrait d'abord dire quelles sont ces règles, et je défie bien d'en énoncer une. Je ne veux pas dire que rien n'ait été tenté sur ce sujet. Ainsi, Fontenelle, par sa *Géométrie de l'Infini*, paraît s'être proposé de nous donner un traité complet des propriétés et des règles de l'Infini. Dans le rapport que Réaumur en a fait à l'Académie des Sciences, il dit que « la *Géométrie* « *de l'Infini* contient des spéculations sublimes. » Dans le présent ouvrage je prouve que toutes ces spéculations sublimes sont des aberrations vraiment incompréhensibles.

On lit dans l'introduction du *Cours d'Analyse* de M. Hermite : « Le calcul « infinitésimal semble annoncer une étude et une science de l'infini,

« résultant d'un rôle plus étendu de cette notion que dans les éléments. « En réalité, le rôle de l'infini dans ces régions élevées des Mathématiques, « est en entier résumé dans un petit nombre de propositions du caractère « le plus simple, et telles qu'on pourrait les énoncer et les démontrer « dès le commencement de la Géométrie. »

Si ces propositions conviennent aux quantités finies, elles indiquent le rôle du fini, et non celui de l'infini; si, au contraire, elles ne conviennent pas aux quantités finies, je les déclare fausses et absurdes.

Je montrerai, par un bon nombre d'exemples, que la plupart des difficultés et des paradoxes célèbres qu'on rencontre en Mathématiques, ont leur origine dans quelque fausse propriété attribuée à l'infini.

L'infini proprement dit, celui que j'appelle l'infini absolu, n'a pas d'autre propriété que d'être impossible et, par conséquent, ne saurait être exprimé en nombre.

Si, contrairement à ce principe, nous voyons qu'une probabilité infinie est exprimée par l'unité, *symbole de la certitude*, comme disent les auteurs qui ont traité ce sujet ; si, par suite, « la certitude et la probabilité sont « comparables, » comme le dit Laplace, ces absurdités résultent de la fausse définition, ou de la fausse mesure que les géomètres s'accordent à donner de la probabilité.

Ce que j'avance ici sera pleinement justifié dans la *Théorie mathématique de l'Infini.* Cependant on admettra difficilement que les géomètres soient restés des siècles dans l'erreur qui leur a fait adopter une fausse mesure de la probabilité. C'est qu'en ce cas, comme en tant d'autres, on entend que la fin justifie les moyens, et que le principe est bon puisqu'il conduit à des résultats exacts ; tandis qu'on ne comprend pas, qu'en bien des cas, les résultats sont exacts malgré la fausseté du principe. C'est ainsi, par exemple, qu'on donne le *postulatum d'Euclide* comme un principe exact et même évident, parce qu'on en tire une théorie exacte des parallèles ; tandis qu'on ne comprend pas que le principe ne conduit à une théorie exacte que parce qu'il renferme une erreur qui détruit et corrige celle de la définition des parallèles.

Tant de géomètres, et des plus capables, se sont cassé la tête sur la question du *postulatum d'Euclide*, qu'on ne peut guère espérer de les faire sortir du système dans lequel ils ont, en quelque sorte, cristallisé pendant des siècles, et de les convaincre de la fausseté d'une proposition qu'ils ont toujours acceptée comme incontestable, et « dont l'évidence, » dit M. Bertrand, « permet aux esprits de bonne foi de l'accepter comme « un axiome. »

Si, selon l'expression de M. Bertrand, on peut encore compter sur des « esprits de bonne foi, » je prétends les convaincre non-seulement de la faillibilité de nos géomètres les plus compétents, mais de leur incompétence même.

En effet, tous les géomètres, et les plus compétents, les Legendre, les Duhamel, les Bertrand de Genève et de Paris, les Gauss, les Schumacher, les Lobatschewsky, les Hoüel, etc., les partisans de la géométrie non-euclidienne comme les partisans de la géométrie euclidienne ; tous, avec un accord et un entrain qu'on n'aurait pas trouvés chez les moutons de Panurge, admettent que le postulatum d'Euclide et le théorème sur la somme des angles d'un triangle sont des propositions équivalentes, même « évidemment équivalentes », comme dit M. Bertrand. Naturellement, M. Bertrand serait fort en peine de dire au juste ce qu'il faut pour que deux propositions soient « évidemment équivalentes ». Mais, sans se croire obligés de donner la définition du terme, les géomètres entendent que l'une des deux propositions étant donnée, l'autre peut s'en déduire immédiatement. C'est dans cette persuasion que Legendre a d'abord démontré le théorème sur la somme des angles d'un triangle afin d'en déduire, ensuite, le postulatum d'Euclide. Ceux qui, depuis Legendre, sont venus se heurter à la même difficulté, se sont occupés uniquement du théorème sur la somme des angles d'un triangle, persuadés que ce théorème étant l'équivalent du postulatum, celui-ci se trouverait démontré en même temps que l'autre. Ainsi, Schumacher écrit à Gauss :

« Je prends la liberté de vous soumettre une tentative que j'ai faite « pour démontrer, sans le secours des parallèles ni d'aucune théorie, la « proposition que la somme des angles d'un triangle égale 180°, d'où « suivrait alors la démonstration du postulatum d'Euclide. »

De même, M. Bertrand, dans un rapport à l'Académie des Sciences, dit :

« M. Carton s'efforce de démontrer le postulatum d'Euclide avec la

« même rigueur que les autres propositions de la géométrie élémentaire,
« et il nous semble qu'il y est parvenu. Le problème *évidemment équi-*
« *valent* auquel s'attaque M. Carton, est la détermination de la somme
« des angles d'un triangle. »

Les deux propositions sont tellement équivalentes, que l'une est rigoureusement vraie et l'autre absolument fausse. Celle qui est vraie est le théorème sur la somme des angles d'un triangle ; et, comme du vrai on ne peut tirer le faux, le postulatum ne pourra se déduire ni du théorème sur la somme des angles d'un triangle, ni de toute autre proposition exacte.

Mais le vrai pouvant se tirer du faux, comme le dit Duhamel, d'après Aristote, le théorème sur la somme des angles d'un triangle, qui est une proposition vraie, peut se tirer du faux, surtout quand au lieu d'une proposition fausse, on en donne deux, qui sont la définition et le postulatum d'Euclide.

Si l'on n'admet pas les raisons par lesquelles je démontre que le postulatum d'Euclide est une proposition fausse, « les esprits de bonne foi » — s'il en reste — seront bien obligés de reconnaître l'erreur et l'incompétence des géomètres qui prétendent que les deux propositions sont équivalentes, ou que le postulatum peut se déduire du théorème sur la somme des angles d'un triangle, puisque je leur donne le défi de déduire le postulatum, soit du théorème sur la somme des angles d'un triangle, soit d'une proposition quelconque choisie dans la théorie des parallèles ou partout ailleurs.

Puisque l'infini n'a d'autre propriété que d'être impossible, il suffira qu'une propriété attribuée à l'infini ne convienne pas aux quantités finies pour que je la déclare fausse et absurde. Par exemple, Legendre dit :

« Toute ligne droite tracée sur un plan, et indéfiniment prolongée dans
« les deux sens, divise ce plan en deux parties qui, étant superposées,
« coïncident dans toute leur étendue et sont parfaitement égales. »

Comme cette proposition ne s'applique pas à une figure finie, telle qu'un cercle ou un carré, je la déclare fausse et absurde.

Legendre dit encore :

« Il répugne à la nature de la ligne droite qu'une telle ligne, indéfini-
« ment prolongée, puisse être renfermée dans un angle. »

Un angle étant donné, je puis bien mener trente-six droites finies qui soient renfermées dans l'angle. Il n'y a donc qu'une droite infinie, c'est-à-dire sans extrémités, qui ne puisse pas être renfermée dans un angle. Or, une telle droite étant impossible, la propriété qu'on lui prête est absurde.

Il en est de même de la propriété en vertu de laquelle les quantités finies s'effacent devant les quantités infinies, propriété que Fontenelle proclame comme le grand principe et le plus fécond de tous, sur lequel le grand Arnaud et Auguste Comte se sont appuyés pour démontrer le théorème de la somme des angles d'un triangle, en supprimant la surface finie du triangle devant la surface infinie du plan.

Si M. Hermite et Auguste Comte sont d'avis de placer de telles propositions au commencement de la Géométrie, je suis d'avis qu'elles doivent être bannies absolument de la science, au même titre que le principe de l'horreur du vide.

Ce que je dis là s'applique pareillement au postulatum d'Euclide, fondé sur la possibilité d'un prolongement infini.

C'est dans la *Théorie Mathématique de l'Infini* que toutes ces propositions se présenteront pour y trouver non leur démonstration, mais leur exécution.

Je considère toute fausse propriété de l'infini comme un déraillement, et je qualifie de science après déraillement toute théorie fondée sur une pareille propriété : tels sont quelques-uns des beaux travaux de Cauchy sur les valeurs générales, principales, singulières et indéterminées des intégrales définies.

Sans doute, un déraillement peut être, pour certains artistes ou industriels, tels qu'un chirurgien ou un pick-pocket, une occasion précieuse de beaux et lucratifs travaux. Mais le conducteur de la machine ou du train doit par-dessus tout éviter le déraillement. Je présenterai comme un bel exemple de science après déraillement, la *Théorie Mathématique de l'Espérance morale*, inaugurée par Daniel Bernoulli, et présentée dans toute sa splendeur par l'auteur de la *Mécanique céleste.*

Tout récemment on s'est tant occupé de l'*Ordre moral*, d'abord pour le faire et ensuite pour le défaire, que je suis étonné qu'on n'ait pas songé à y appliquer « le principe ingénieux que Daniel Bernoulli a donné pour « soumettre à l'analyse l'Espérance et la Fortune morales. »

Inutile d'ajouter que le déraillement de la *Théorie Mathématique de l'Espérance morale*, est dû à la présence de l'infini introduit dans le fameux problème de Saint-Pétersbourg.

Outre la *Théorie Mathématique de l'Infini*, on trouvera aussi, parmi les notions fondamentales de cet ouvrage, plusieurs théories qui me sont propres, telles que ma *Théorie des Convergents*, avec ses applications à la détermination des asymptotes et des limites des fonctions qui se présentent sous une forme dite indéterminée ; ma *Nouvelle Théorie des Logarithmes*, qui, en accordant aux nombres négatifs les mêmes logarithmes qu'aux nombres positifs, restitue à cette théorie la généralité dont le défaut a quelquefois égaré les géomètres dans des aberrations qu'on pourrait qualifier de sublimes, comme les spéculations de la *Géométrie de l'Infini* de Fontenelle.

Le besoin de donner des logarithmes aux nombres négatifs se présente si fréquemment et si impérieusement ; l'impossibilité d'y suppléer autrement que par des sophismes est si manifeste, que l'on comprend difficilement que Jean Bernoulli et d'Alembert aient échoué dans leur entreprise de donner à la théorie des logarithmes la généralité qui lui manque encore aujourd'hui, malgré une vaine prétention d'y suppléer par des logarithmes imaginaires. Il est vrai que l'argumentation de ces deux grands géomètres, comme celle des géomètres qui ont voulu rectifier la théorie des parallèles, péchait par la base, en ce sens qu'elle conservait la définition dans laquelle réside essentiellement le défaut de la théorie.

Dans la théorie des logarithmes, comme dans la théorie des parallèles et la théorie des probabilités, c'est la définition elle-même qui est défectueuse et qu'il faut modifier. Je montrerai, dans une discussion approfondie, le défaut de ces définitions en même temps que la manière de les rectifier.

La rectification de la définition des logarithmes sera fondée sur la propriété de deux progressions géométriques composées de nombres deux à deux égaux et de signes contraires, d'avoir une même raison, d'où résultera nécessairement pour deux termes correspondants, qui sont deux nombres égaux et de signes contraires, le même logarithme, c'est-à-dire le même exposant de la raison ou de la base du système.

Après avoir démontré que deux nombres égaux et de signes contraires doivent avoir le même logarithme, d'Alembert ajoute qu'il ne voit pas quelle objection on pourrait faire à sa démonstration. Cependant, il suffit de savoir par quelles pitoyables raisons Leibnitz a contredit J. Bernoulli, qui soutint la même opinion que d'Alembert, pour se faire une idée de celles qu'on peut attendre des géomètres vulgaires.

Dans sa discussion contre Bernoulli, Leibnitz alla jusqu'à soutenir que les rapports des nombres négatifs sont imaginaires et, qu'ainsi, ces nombres ne sauraient figurer dans une proportion ; tandis que d'Alembert et Carnot admettent que les nombres négatifs peuvent très-bien figurer dans les proportions, et ils en concluent que les nombres négatifs ne sont pas plus petits que zéro. Duhamel a cru saisir le joint, je veux dire le juste milieu, en disant que les proportions entre des nombres négatifs sont bien des proportions, mais des proportions entre des choses qui ne sont pas des grandeurs.

Le titre de cet ouvrage indique qu'il est divisé en deux parties. Mais, comme les principes développés dans la *Théorie Mathématique de l'Infini*, se trouvent reproduits en substance et d'une manière plus élémentaire, dans les notions fondamentales de la seconde partie, il en résulte que c'est par la seconde partie que devront commencer les lecteurs encore peu versés dans les sciences mathématiques.

Ordinairement, l'auteur d'un ouvrage emploie les numéros de renvoi pour éviter les répétitions. Dans celui-ci, j'ai préféré les répétitions aux numéros de renvoi. S'il en résulte, pour quelques lecteurs, le désagrément de rencontrer plusieurs fois la même idée, ce sera, pour d'autres, un avantage de l'y retrouver sous une forme ou sous un jour nouveaux.

LE
CALCUL INFINITÉSIMAL

FONDÉ SUR

DES PRINCIPES RATIONNELS

PREMIÈRE PARTIE

THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'INFINI

« L'analyse transcendante présente cette grande imperfection philosophi-
« que de se trouver encore essentiellement fondée sur des principes
« métaphysiques dont l'esprit humain a eu tant de peine à dégager toutes ses
« théories positives. Sous ce rapport, on peut dire que la méthode infinitési-
« male porte vraiment l'empreinte caractéristique de l'époque de sa fonda-
« tion et du génie propre de son fondateur. » (Auguste Comte, *Philosophie positive*).

Dégager la méthode infinitésimale des principes métaphysiques sur lesquels elle est encore aujourd'hui fondée, pour la constituer définitivement à l'état de théorie positive, en la fondant exclusivement sur des principes vraiment rationnels, tel est l'objet principal du présent ouvrage, que je dédie surtout aux amis de l'exactitude mathématique.

Au point de vue théorique, l'analyse infinitésimale ne paraît qu'une méthode d'approximation, tandis que dans ses applications, elle donne des résultats rigoureusement exacts. De là « le conflit qui, depuis un siècle, » dit Auguste Comte, « paraissait insurmontable entre la théorie et la pratique
« du calcul transcendant. »

La raison ne pouvant guère admettre qu'un principe inexact conduise toujours à des résultats parfaitement exacts, les plus éminents géomètres ont compris la nécessité de faire cesser le conflit en expliquant le paradoxe.

D'Alembert croyait la démonstration du principe de Leibnitz impossible comme celle du postulatum d'Euclide. Selon lui, le postulatum d'Euclide fait le scandale de la géométrie, et quant à celui de Leibnitz, il ne le justifiait pas autrement qu'en disant : *Allez en avant, et la foi vous viendra.*

Cependant, il a été fait des traités spéciaux pour expliquer le paradoxe et faire cesser le conflit. C'est dans ce but qu'ont été publiés les *Eléments de la Géométrie de l'Infini*, par Fontenelle ; la *Théorie des fonctions analytiques*, par Lagrange ; les *Réflexions sur la métaphysique du calcul différentiel*, par Carnot ; l'*Etude sur la métaphysique du haut calcul*, par M. Charles de Freycinet, etc.

Carnot cherche à justifier et à concilier toutes les méthodes : celles « d'exhaustion, des indivisibles, des indéterminées, des limites, des fluxions, « des évanouissants, des dérivées. » Il accorde à ceux qui le veulent, que les infiniment petits sont de purs zéros, « qui ont entre eux des rapports très- « intéressants à connaître », et aux autres, que les infiniment petits sont des quantités réelles qu'on ne peut négliger sans erreur. Néanmoins, il soutient l'exactitude de la méthode qui les néglige systématiquement, et la justifie en imaginant le principe de la compensation des erreurs, qui donne le droit et impose même le devoir de négliger les infiniment petits, par la raison spécieuse que les erreurs ainsi commises se compensent nécessairement et comme par enchantement.

La méthode infinitésimale et la méthode des limites sont fondées, l'une comme l'autre, sur un principe indémontrable.

En effet, dans la méthode infinitésimale on néglige les infiniment petits en vertu du principe Leibnitzien, et dans la méthode des limites on néglige pareillement les infiniment petits en remplaçant les variables par leurs limites. C'est ce vice radical, commun aux méthodes connues avant Lagrange, qu'il a voulu éviter dans sa *Théorie des fonctions analytiques, comprenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions.*

Dans la méthode de Lagrange, toute fonction de $x + h$ est remplacée par son développement en série d'après la formule de Taylor. Il admet donc en principe, que toute fonction de $x + h$ peut se développer par cette formule ; or on peut retourner contre ce principe l'objection qu'il fait à celui de Carnot en disant : « C'est ce qu'on peut faire voir aisément dans des exemples, « mais ce dont il serait peut-être difficile de donner une démonstration générale. » En admettant même que toute fonction de $x + h$ fût développable d'après la formule de Taylor, il resterait contre la méthode de Lagrange une objection capitale; en effet, on ne remplace une fonction par son développement en série, qu'en négligeant la différence qui existe toujours entre la fonction et la somme des termes de la série. Ainsi, la méthode de Lagrange, censée dégagée de toute considération de limites et d'infiniment petits, remplace continuellement les variables par leurs limites, en négligeant les infiniment petits, ce qui est pire que de les considérer. Encore n'est-ce là que son moindre défaut, puisque dans le cas d'une série divergente, la différence négligée n'est plus un infiniment petit, mais une quantité finie ou même infiniment grande.

Charles Dupin a dit que Lagrange avait démontré Leibnitz; or, c'est justement parce que Lagrange croyait Leibnitz indémontrable, qu'il a voulu se frayer une autre route par sa théorie des fonctions analytiques: il aurait donc démontré Leibnitz sans le vouloir, tout comme M. Jourdain faisait de la prose sans le savoir.

En rejetant les méthodes justifiées par Carnot, Lagrange approuve cependant son principe des erreurs compensées; il y voit même « la vraie métaphysique « du calcul différentiel. » Mais, comme il lui semblait difficile, sinon impossible, d'en donner une démonstration générale, il ne pouvait fonder sur ce principe sa théorie des fonctions analytiques.

Tandis que Lagrange pense que la démonstration générale est impossible, Carnot dit: « Je crois qu'il ne manque rien ni à l'exactitude ni à la généralité « de la démonstration que j'ai donnée. » Je veux montrer ici, en peu de mots, ce que vaut la démonstration générale de Carnot.

Il calcule, par la méthode infinitésimale, la longueur d'une sous-tangente qu'on sait aussi trouver par la géométrie ordinaire; puis, pour appliquer le principe des erreurs compensées, il considère la courbe comme un polygone dont chaque côté prolongé forme une sécante de la courbe. La distance des deux points où la sécante coupe la courbe, est un infiniment petit, qu'il néglige lorsque la sécante devient tangente, ce qui lui donne exactement le résultat trouvé par la géométrie ancienne; après quoi il tient le raisonnement suivant: Lorsqu'on prend une courbe pour un polygone, on fait toujours une erreur, quelque petits que soient les côtés du polygone; ensuite, lorsqu'à la fin du calcul on néglige les infiniment petits, on fait une autre erreur; or, puisque le résultat est rigoureusement exact, il faut, de toute nécessité, que les erreurs se soient compensées.

Ce raisonnement captieux, qui n'est, au fond, qu'un sophisme, a pu cependant séduire des génies tels que Lagrange et Auguste Comte, qui l'ont reproduit presque textuellement, le premier dans sa *Théorie des fonctions analytiques*, et le second, dans sa *Philosophie positive*.

Pour le réduire à sa juste valeur, je dis :

1° L'erreur que vous faites en prenant une courbe pour un polygone, expire sur vos lèvres : elle n'atteint point votre calcul, puisque vous opérez sur l'équation de la courbe et non sur celle du polygone.

2° L'erreur que vous faites en négligeant, à la fin du calcul, les infiniment petits, est pareillement nulle, puisque la sécante ne devient tangente que quand les deux points de rencontre coïncident ou que leur distance est zéro.

C'est donc parce que, dans cet exemple, les erreurs sont absolument nulles, qu'elles se compensent si exactement et comme miraculeusement. Mais lorsque les infiniment petits négligés ne pourront pas se réduire à zéro, les erreurs ne se détruiront pas, et le miracle ne se produira plus.

Tous les géomètres ayant cru que les infiniment petits pouvaient toujours devenir nuls ou être négligés, cette fausse idée a fait tomber les plus éminents dans les plus graves erreurs. Ainsi, les frères Bernoulli ont publié, et M. Bertrand a reproduit un calcul censé *irréprochable*, qui les a cependant conduits à l'absurdité $1 = 0$. M. Gérono a publié un autre exemple qui le conduit pareillement à $1 = 0$. Le calcul est pour eux irréprochable, par suite de cette fausse idée, que l'infiniment petit peut toujours devenir nul ou se négliger. Les faux résultats auxquels les conduit cette fausse idée, leur semblent des effets bizarres du calcul. Ils leur donnent le nom de paradoxes, et ils les expliquent par d'autres paradoxes souvent plus inadmissibles que les premiers.

Aucun auteur n'a distingué l'infiniment petit qui peut devenir nul, de celui qui ne peut jamais se réduire à zéro. La distinction de ces deux infiniment petits revient à celle des deux infinis que j'appelle l'infini absolu et l'infini relatif.

Quoiqu'il y ait entre ces deux infinis un abîme, les géomètres les ont toujours confondus, comme ils ont confondu les infiniment petits. Je montrerai les erreurs auxquelles cette double confusion a conduit les Bernoulli, les Laplace, les Lagrange, les d'Alembert, les Cauchy, les Duhamel, les Bertrand et, en général, les géomètres modernes.

A vrai dire, il n'y a point d'infini en mathématiques ; car l'infini absolu est impossible, et l'infini relatif est essentiellement fini, puisque c'est une valeur très-grande attribuée à une variable. Ainsi, les mathématiques, même le calcul infinitésimal, pourraient parfaitement se passer de l'infini. De même que le mal n'est pas tant de croire aux sorciers que de les brûler, de même le mal n'est pas tant d'admettre des quantités infinies que de leur attribuer des propriétés fantastiques. Nous n'accordons à l'infini absolu que la propriété d'être impossible. Quant à l'infini relatif, comme il est essentiellement fini, il aura toutes les propriétés des quantités finies et n'en aura pas d'autres.

Leibnitz dit que « les règles du fini réussissent dans l'infini. » Cette proposition est évidente, s'il s'agit de l'infini relatif, et absurde quand il s'agit de l'infini absolu.

Puisqu'il n'y a de réel que l'infini relatif, qui est le très-grand, il n'y pas d'autre infiniment petit que le très-petit. M. Bertrand reproche à Leibnitz d'avoir employé à ce sujet « un langage qui ne signifie rien de précis et « conduirait à confondre l'infiniment petit avec le très-petit. » Si l'infiniment petit n'est pas très-petit, qu'est-il? Si l'on en croit M. C. de Freycinet, « avant Carnot on avait des idées assez confuses et même fausses sur la « nature des infiniment petits. C'est faute, dit-il, de creuser la véritable « notion des infiniment petits. »

Carnot lui-même dit: « On n'a jamais pu se former qu'une idée imparfaite « de ces éléments, espèces d'êtres singuliers, qui tantôt jouent le rôle de véri- « tables quantités, tantôt doivent être traités comme absolument nuls et sem- « blent, par leurs propriétés équivoques, tenir le milieu entre la grandeur et « le zéro, entre l'existence et le néant. »

Je crois aussi « qu'on n'a jamais pu se former qu'une idée imparfaite de « ces éléments qui tiennent le milieu entre le très-petit et le zéro, » de même qu'on ne pourrait se former qu'une idée très-imparfaite d'une figure qui tiendrait le milieu entre le cercle et le carré. Mais pourquoi vouloir se former une idée parfaite d'êtres impossibles?

Voyons si depuis Carnot on a des idées très-claires sur la nature des infiniment petits. « Nous répondrons avec Ampère, avec Poisson, nos chers et « illustres maîtres, » dit le père Gratry, « que l'élément infinitésimal n'est « pas une quantité très-petite; ce n'est en aucune sorte, une quantité. « Comme quantité l'élément infinitésimal est absolument nul. Il nous semble « encore entendre M. Ampère, dans son cours de mécanique, s'écrier avec in- « dignation: « Non! non! ce n'est pas très-petit, c'est nul, c'est absolument « nul. »

L'expression même trahit l'embarras de l'auteur; « *ce* n'est pas très-petit, « c'est nul; c'est absolument nul! » Il n'ose pas dire: L'infiniment petit n'est pas très-petit, cela jurerait trop; il dit: *ce* n'est pas très-petit. Si c'est absolument nul, c'est zéro, et si c'est zéro, pourquoi l'appeler infiniment petit?

Ainsi Ampère, dans son cours de Mécanique, s'écrie: « L'élément infini- « tésimal est nul, absolument nul, » et Poisson dit dans son *Traité de Mécanique*: « Les infiniment petits ont une existence réelle et ne sont pas « seulement un moyen d'investigation imaginé par les géomètres. »

D'après Poisson « l'élément infinitésimal, comme quantité, est absolument « nul, » et d'après le même Poisson, « un infiniment petit est une grandeur « moindre que toute grandeur donnée de la même nature. »

Il me semble bien qu'il n'y a que zéro qui soit plus petit que toute grandeur donnée. Mais si l'infiniment petit est zéro, pourquoi ne pas le dire? et pourquoi l'appeler infiniment petit, au lieu de l'appeler zéro? Si « l'élément « infinitésimal est absolument nul, » de quoi peut-il être l'élément? et comment une somme de ces éléments, c'est-à-dire de zéros, peut-elle donner autre chose que zéro?

Le même galimatias se reproduit au sujet de l'infini. Ainsi, d'après Cauchy, « on dit qu'une quantité variable devient infiniment grande, lorsque sa « valeur numérique croît indéfiniment de manière à converger vers la « limite ∞. »

J'aimerais mieux qu'on me dît ce que c'est qu'une quantité qui est infinie, qu'une quantité qui le devient, et si une quantité ne peut pas être infinie, comment peut-elle le devenir? Enfin si le signe ∞ représente une quantité devenue infinie, pourquoi une variable arbitraire ne pourrait-elle pas atteindre et dépasser cette quantité?

Lorsqu'en mathématiques vous rencontrez une pierre d'achoppement, un scandale ou un paradoxe, vous pouvez demander où est l'infini; je veux dire que l'erreur vient d'une fausse propriété attribuée à l'infini, qui, comme je le répète, n'a d'autre propriété que d'être impossible.

Par exemple, le célèbre postulatum d'Euclide et le fameux problème de Saint-Pétersbourg ont fait jusqu'ici le désespoir des géomètres. Qu'y a-t-il dessous? l'infini, qui rend chacune de ces deux questions impossible ou absurde.

Si au lieu d'aller chercher un prolongement à l'infini, Euclide avait fondé la définition des parallèles sur leur équidistance, son célèbre postulatum n'aurait jamais vu le jour. La géométrie y aurait gagné, et tant de géomètres n'auraient pas perdu leur peine, sinon la tête, à en chercher la démonstration.

L'infini absolu étant impossible, toute propriété qu'on lui supposera, toute opération qu'on fera sur lui, seront absurdes. Au contraire, l'infini relatif étant essentiellement fini, aura les mêmes propriétés et sera soumis aux mêmes opérations que les quantités finies. Il s'ensuit qu'une propriété qui ne convient pas aux quantités finies, ne saurait convenir ni à l'infini absolu ni à l'infini relatif. Je déclarerai donc absurde tout raisonnement qui supposera à l'infini une propriété qui ne convient pas aussi bien aux quantités finies.

Par exemple, Legendre voulant démontrer le postulatum d'Euclide, pose ce principe : « Toute ligne droite tracée sur un plan, et indéfiniment pro-

« longée dans les deux sens, divise ce plan en deux parties qui étant super-« posées, coïncident dans toute leur étendue et sont parfaitement égales. »

Un plan infini ou sans bornes étant impossible, une droite ne le partage ni en deux parties égales ni en deux parties inégales. Mais toute figure plane terminée par un périmètre quelconque, par exemple un cercle, pourra être partagée, par une droite, en deux parties soit égales, soit inégales, aussi bien lorsque le cercle sera dit infini, c'est-à-dire très-grand, que quand il sera fini. Mais s'il s'agit de l'infini absolu, c'est-à-dire d'un cercle illimité, sans circonférence, ou, comme dirait Pascal, d'un cercle dont le centre est partout et la circonférence nulle part, je ne lui accorderai d'autre propriété que celle d'être au moins aussi impossible qu'un cercle carré. Or, de même qu'on n'accorde aucune propriété au cercle carré, on n'accordera pas au plan illimité la propriété d'être divisé par une droite quelconque en deux parties soit égales, soit inégales.

Leibnitz, l'Hôpital, Fontenelle, Cauchy, Boucharlat et autres, prétendent qu'on a $x + a = x$ quand x est infini. Comme cette égalité est fausse quand x est fini, il faut la dire fausse quand x est infini, et déclarer absurdes les raisonnements par lesquels on prétend la justifier ou la démontrer.

En refusant ainsi toute espèce de propriété à l'infini absolu, et n'accordant à l'infini relatif que les propriétés qui conviennent aux quantités finies, l'analyse infinitésimale descendra de ces hauteurs mystérieuses où elle ne se montrait qu'enveloppée de nuages obscurs, et viendra prendre sa place naturelle à la suite de l'analyse algébrique, en se fondant sur les mêmes principes et se développant suivant les mêmes lois.

Un traité fait dans ces conditions présenterait à l'élève une route lumineuse dans laquelle il marcherait d'un pas sûr, sans qu'on fût obligé de lui crier avec d'Alembert : *Allez en avant, et la foi vous viendra.* Je dois dire qu'un tel traité serait, pour le moment, très-peu apprécié et n'aurait guère de chances de succès. J'en vais faire comprendre la raison par un exemple.

La question des fonctions qui se présentent, sous une forme indéterminée, se traite dans le calcul différentiel. On s'en occupe aussi en algèbre, et M. Bertrand y avait consacré un chapitre tout spécial. Dans l'une comme dans l'autre méthode on suppose que $\frac{1}{\infty} = 0$, c'est-à-dire que l'infini est une quantité qui, multipliée par zéro, donne 1. Cette propriété attribuée à l'infini est purement illusoire, puisqu'il n'y a point de quantité finie qui en jouisse. Une méthode fondée sur cette propriété, n'ayant rien de rigoureux, peut conduire à des résultats très-faux, comme je l'ai fait observer en particulier à M. Bertrand, qui a pris la remarque en considération, puisque dans l'avertissement de l'édition qui a paru l'année suivante (1865), on lit : « Le

« chapitre sur les expressions qui se présentent sous une forme indéterminée, « a été rayé. Nous avons pensé qu'il valait mieux ne s'occuper de ces sortes « de questions qu'après avoir étudié les propriétés des dérivées. »

Quitter la méthode algébrique pour celle qui est fondée sur les dérivées, c'est tomber de Charybde en Scylla, puisque, comme je l'ai dit, elles ont le même vice radical.

La règle fournie par les dérivées consiste à remplacer une fration dont les deux termes deviennent nuls ou infinis en même temps, par le rapport des dérivées de ses deux termes.

Le second cas se déduit du premier par une démonstration que Liouville appelle « l'élégante extension donnée par Cauchy au théorème de l'Hôpital. » Cette élégante extension consiste à diviser les deux termes supposés infinis, par leur produit, ce qui fait passer la fraction de la forme $\frac{\infty}{\infty}$ à $\frac{0}{0}$, en supposant toujours que o est la réciproque de l'infini. La démonstration, fondée sur une fausse propriété de l'infini, est tout-à-fait illusoire.

Il s'ensuit que la règle démontrée générale n'est pas du tout générale, et que les règles particulières qu'on en déduit sont illusoires, comme les applications qu'on fait des unes et des autres. Quand, ensuite, on a rencontré des exemples auxquels la règle générale ne s'applique pas, on a dû se méfier de la démonstration et y soupçonner quelque défaut. Cependant MM. Bertrand, Liouville, Duhamel, Blanchet, etc., l'ayant fouillée dans tous ses coins et recoins, l'ont déclarée d'une parfaite exactitude, et ont cru devoir y ajouter quelques détails pour garantir l'entière généralité de la règle.

Ainsi, ayant désigné par A la vraie valeur de la fraction indéterminée, ils supposent le cas où A serait infini, et disent que dans ce cas on ne peut plus diviser par A les deux termes de l'égalité. Comme on le peut toujours quand A est fini, voilà donc encore une propriété illusoire attribuée à l'infini. Il faudrait pourtant s'entendre: tout au commencement de l'élégante démonstration, où l'on suppose les deux termes de la fraction $\frac{u}{v}$ infinis, on divise ces deux termes par le produit uv, qui est infini. Voyons, a-t-on ou n'a-t-on pas le droit de diviser les deux termes par l'infini ? Si on l'a ici, pourquoi ne l'a-t-on pas un peu plus loin ? On le voit, on ne démontre l'entière généralité d'une règle qui n'est pas générale, qu'en fondant son raisonnement sur des propriétés fantastiques, qui apparaissent ou disparaissent suivant le caprice ou le besoin de l'auteur. Les règles étant, de cette manière, démontrées complètement générales, on rencontre pourtant des exemples auxquels elles ne s'appliquent pas. De là des paradoxes qu'on n'explique que par d'autres paradoxes. Ainsi M. Liouville dit : « Il faut user de ces règles avec « réserve et s'assurer dans chacun des exemples auxquels on les applique

« que l'usage en est légitime. » A quoi sert alors la démonstration, s'il faut vérifier, sur chaque exemple, la propriété démontrée? Que servirait-il de démontrer que la somme des angles de tout triangle égale deux droits, si l'on était obligé de venir, le compas ou le rapporteur à la main, s'assurer que dans chaque triangle la somme des angles égale bien deux angles droits?

M. Bertrand ayant choisi les exemples auxquels il veut appliquer les règles générales, s'aperçoit que ces règles ne s'y appliquent pas. Il se tire d'affaire en disant qu'il « les a choisis de manière à montrer comment, dans « un grand nombre de cas, il est avantageux de substituer aux méthodes « générales des artifices suggérés par l'habitude du calcul. »

Maintenant, que tous les auteurs expliquent l'élégante extension de la règle de l'Hôpital, qu'ils donnent, avec tous les détails possibles, la démonstration de la règle générale et des règles particuliéres qu'on en déduit ; qu'ils expliquent les paradoxes auxquels conduit l'application de toutes ces règles, etc., je demande quelle opinion l'étudiant se ferait d'un traité qui passerait sous silence toutes ces belles choses? Quelle opinion s'en ferait surtout celui qui, ayant déjà étudié ces questions, en serait arrivé à se persuader qu'il a parfaitement compris des démonstrations essentiellement défectueuses?

Par ce seul exemple, je fais comprendre pourquoi des questions qui devraient être passées sous silence dans un traité pratique, sont justement celles que nous discutons avec le plus d'étendue dans le présent ouvrage, dont l'objet, essentiellement théorique, est, comme je l'ai dit, de « dégager l'analyse « transcendante des principes métaphysiques sur lesquels elle est encore « essentiellement fondée. »

Le postulatum de Leibnitz, celui que l'Hôpital donne sous le titre de *première demande*, est un principe faux, comme le postulatum d'Euclide ; en conséquence, il est de rigueur de refaire toutes les démonstrations qui s'appuient directement sur le postulatum de Leibnitz, comme celles qui s'appuient directement sur le postulatum d'Euclide.

Les réformes en géométrie ou en mathématiques ne nous manquent pas. On ne peut même guère admettre qu'un auteur traite un sujet sans la prétention d'y apporter quelques réformes. Celle que je prétends réaliser dans cet ouvrage consiste essentiellement dans la suppression radicale de l'infini. Cependant, cette suppression sera plutôt effective que nominale. J'entends dire par là qu'en proscrivant absolument l'infini avec le cortége de ses prétendues propriétés, je conserverai le nom d'infini à des expressions qualifiées habituellement de quantités infinies, mais qui ne le sont pas. C'est ainsi que les astronomes parlent du mouvement et de la vitesse du soleil, de son lever et de son coucher, sans qu'il en résulte ni confusion ni erreur pour ceux qui savent que le soleil est immobile.

Cette réforme aura pour effet de restreindre plutôt que d'étendre le champ des mathématiques. Il y en a assez qui reculent les bornes de la science, pourquoi n'y aurait-il pas quelque mérite à les mieux fixer ?

Bien des démonstrations et de beaux travaux même, vus de plus près, apparaîtront fondés sur quelque fausse propriété de l'infini; privés de ce faux appui, ils n'auront plus de valeur que pour les amateurs de paradoxes ou d'antiquités.

Avec la facilité d'introduire partout l'infini escorté de propriétés que personne ne peut contredire, tout devient possible. Il n'y a plus de principes qu'on ne découvre, plus de problèmes dont on ne donne la solution.

Par exemple, Hoéné Wronski, l'auteur d'une *Réforme de mathématiques*, reproche aux « géomètres des nations civilisées, d'avoir cherché à « ravaler les sciences mathématiques, en voulant en chasser l'idée de l'infini, « ce principe de leur haute évidence et de leur certitude absolue. »

Monté sur ce grand cheval, il parcourt toutes les sciences, franchit toutes les difficultés, résout tous les problèmes..... à la manière de Don Quichotte.

Si vous voulez le suivre, il vous montrera :

« 1° La résolution générale des équations algébriques de tous les degrés ;

« 2° La solution positive et rigoureuse de tous les grands problèmes des « sciences mathématiques ou physiques;

« 3° La découverte des trois lois fondamentales par lesquelles tous les « problèmes mathématiques peuvent être résolus actuellement ;

« 4° La solution de la matière par ses forces créatrices ;

« 5° La solution du problème de la construction du monde physique;

« 6° La solution de tous les grands problèmes scientifiques et philoso- « phiques ;

« 7° Les sept réalités suprêmes de l'homme;

« 8° La solution rigoureuse de tous les problèmes de la religion absolue ou « du paraclétisme ;

« 9° La genèse des facultés hyperphysiques de l'homme ;

« 10° L'origine céleste du Bien, et l'origine infernale du Mal.

En un mot, Hoëné Wronski a tout résolu ; il a découvert tout ce qu'il y a d'absolu :

« La philosophie absolue,

« La religion absolue,

« La raison absolue,

« La vérité absolue,

« L'union absolue des hommes,

« Les cinq réalités absolues de l'homme,

« Les deux éléments de l'essence intime de l'archi-absolu, la création « entiére de l'univers et même celle de Dieu,

« Le destin final et absolu de l'homme,

« Le principe absolu du monde,

« Les destinées absolues de l'humanité,

« L'encyclopédie absolue des sciences,

« La contingence absolue,

« L'essence intime de l'absolu, etc., etc. »

Qui est-ce donc qui me soutenait qu'il n'y a rien d'absolu en ce monde? Peut-être aussi que Hoëné Wronski venait d'un monde où tout est absolu. Qu'est-ce dabord que l'absolu? « L'absolu est le syllogisme, et toutes choses « sont un syllogisme. Le syllogisme est le mouvement circulaire où s'accom- « plit la médiation de ses moments, etc. » Voilà ce qu'on lit dans le *Logique* d'Hégel, la seule bonne et la seule vraie, au dire de son traducteur, qui la déclare infiniment supérieure à celle d'Aristote.

L'infini proprement dit étant impossible, il devrait sembler aussi facile de s'en passer que difficile d'en abuser. Mais de même que l'on n'a pas lâché l'horreur du vide tant qu'on n'a pas connu la vraie cause des effets qu'on lui attribuait, on croira, comme Fontenelle, que la suppression de l'infini entraînerait la ruine du calcul infinitésimal ; mais, en réalité, elle n'entraînerait que la ruine de beaucoup d'erreurs et de paradoxes. Je le prouverai surabondamment dans la discussion qui va suivre.

Leibnitz fonda le calcul infinitésimal sur le principe qui porte son nom, et en vertu duquel on efface ou l'on néglige les infiniment petits d'un ordre quelconque, non-seulement lorsqu'ils sont ajoutés à des quantités finies, mais aussi lorsqu'ils sont ajoutés à des infiniment petits plus grands et d'un ordre différent.

Les simplifications et les abréviations qui résultent de l'application du principe Leibnitzien, impriment à la méthode infinitésimale une marche très-simple et très-rapide, tout en lui procurant une fécondité et une généralité inespérées.

Mais ce que la méthode gagne ainsi en vitesse, elle le perd, en quelque sorte, sinon en force, du moins en évidence et en clarté.

En effet, on comprend bien qu'en négligeant des infiniment petits, on puisse arriver, malgré cela, à des résultats suffisamment approchés pour l'objet que l'on a en vue ; mais n'aura-t-on pas à craindre de se voir obligé d'abandonner cette méthode, malgré les avantages qu'elle présente, lorsqu'il s'agira d'obtenir des résultats absolument justes ?

La réponse ne semble pas douteuse, et il paraît évident que si l'on n'opère que sur des quantités approchées, les résultats obtenus ne seront eux-mêmes qu'approchés.

C'est dans cette persuasion que l'Académie des Sciences, au dire de Fontenelle, a été pendant plus de vingt ans en suspens sur la valeur des idées de Leibnitz.

Cependant, il est arrivé souvent que les résultats fournis par la méthode de Leibnitz ont pu être vérifiés par des procédés reconnus rigoureux, et l'on a pu s'assurer, de cette manière, que la méthode infinitésimale conduit à des résultats non-seulement suffisamment exacts, mais absolument exacts.

« Une telle vérification générale, dit Auguste Comte, est sans doute « strictement suffisante pour dissiper toute incertitude sur l'emploi légitime « de l'analyse Leibnitzienne. Mais la méthode infinitésimale est tellement « importante, elle présente encore, dans presque toutes les applications, une « telle supériorité effective sur les autres conceptions générales successi- « vement proposées, qu'il y aurait véritablement imperfection dans le « caractère philosophique de la science, à ne pouvoir la justifier en elle- « même, et à la fonder logiquement sur des considérations d'un autre ordre, « qu'on cesserait ensuite d'employer efficacement. Il était donc d'une impor- « tance réelle d'établir directement, et d'une manière générale, la rationnalité « nécessaire de la méthode infinitésimale. »

En un mot, les résultats du calcul iufinitésimal sont tout-à-fait exacts, alors qu'il semble évident qu'ils ne devraient être qu'approchés. Tel est le paradoxe dont les géomètres, depuis Leibnitz, ont vainement cherché l'explication, ou qu'ils n'ont expliqué que par d'autres paradoxes tout aussi inadmissibles que le premier.

A l'origine du calcul infinitésimal, on s'occupait bien plus d'exploiter la méthode, que de chercher à en donner l'explication rationnelle.

Comme le principe sur lequel elle est fondée, exige qu'on néglige les infiniment petits, on a dû se demander s'ils sont réellement quelque chose, ou s'ils ne sont absolument rien ; car, s'ils sont quelque chose, dequel droit les néglige-t-on ? et s'ils ne sont absolument rien, pourquoi le principe ne permet-il pas de les négliger tous ? comment peuvent-ils être de différents ordres ? comment peuvent-ils être plus grands les uns que les autres ?

Euler et d'Alembert ont cru que si en négligeant les infiniment petits, on négligeait réellement quelque chose, la méthode infinitésimale ne serait qu'une méthode d'approximation ; ils se sont donc crus forcés d'admettre que les infininent petits ne sont que de purs zéros « entre lesquels, comme le « dit Carnot, il existe des rapports très-intéressants à connaître. »

Il faut être à bout de raisons pour se persuader qu'il existe entre de purs zéros des rapports très-intéressants à connaître.

Carnot, qui le dit, ne voit cependant pas clairement la chose, et cherche ailleurs l'explication de la difficulté. Il imagine pour cela la doctrine des erreurs compensées.

On comprend bien, en effet, qu'il puisse arriver, par hasard, que les erreurs faites dans un calcul se compensent exactement, en sorte que le résultat n'en soit nullement affecté. Mais prétendre et soutenir qu'il arrivera toujours que les erreurs se compenseront exactement, nécessairement, et comme par enchantemeut, sans qu'on sache ni pourquoi ni comment; prétendre et soutenir que, par conséquent, non-seulement on a le droit de commettre ces erreurs, en négligeant les infiniment petits, mais que « c'est un devoir, qu'il « le faut, pour rétablir la réalité des choses, » c'est bien, comme je l'ai dit, expliquer une proposition paradoxale par d'autres plus paradoxales encore.

Malgré cela, cette spécieuse doctrine des erreurs compensées a pu séduire des génies tels que Lagrange, qui y a vu « la vraie métaphysique du calcul « différentiel, » et Auguste Comte, qui l'a vantée comme « présentant enfin « *la véritable explication* logique directe de la méthode de Leibnitz, » et a donné « le principe de la compensation nécessaire des erreurs, » comme « la manifestation précise et lumineuse de ce que Leibnitz avait vaguement « et confusément aperçu en concevant les bases rationnelles de son analyse. »

Quoique Lagrange ait vu dans le principe de Carnot « la vraie métaphysique du calcul différentiel, » il n'a pu en faire la base de sa propre analyse, parce que, dit-il lui-même, « il serait peut-être difficile d'en donner une démonstration générale. »

Lagrange ne pouvant admettre un principe indémontrable, ni se résoudre à réduire les infiniment petits à de purs zéros, pensa qu'il devait y avoir un moyen de s'en passer, et, dans ce but, il composa sa *Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.*

Charles Dupin dit que Lagrange a ainsi démontré Leibnitz. Il serait plus juste de dire qu'il l'a vérifié, ou qu'il a donné le moyen de s'en passer. Mais comme ce moyen est moins simple et moins expéditif que la méthode de Leibnitz, Lagrange lui-même a continué de se servir de celle-ci.

Auguste Comte, lui aussi, a fini par comprendre le défaut de rationnalité de la doctrine de Carnot, dans laquelle il avait d'abord vu « la véritable « explication logique de la méthode de Leibnitz. »

Il l'a donc abandonnée pour aller chercher dans « le positivisme devenu « religieux la solution normale » de la difficulté.

En cela il s'est presque rencontré avec le père Gratry (de l'Académie française), qui termine ses réflexions sur le même sujet, en disant :

« Je ne vois pas d'autre solution possible à cette difficulté que d'admettre, « comme formule scientifique rigoureusement exacte, le mot de saint-« Paul: *In Deo vivimus, movemur et sumus* . C'est en Dieu que nous « sommes, que nous vivons et que nous nous mouvons. »

Il me semble qu'en voilà assez pour montrer qu'aujourd'hui encore l'analyse transcendante se trouve fondée sur des principes métaphysiques dignes du temps où l'horreur du vide faisait monter l'eau dans les pompes. Auguste Comte lui-même l'a constaté en disant : « Quand on considère en elle-même « et sous le rapport logique, la conception de Leibnitz, on ne peut s'empêcher « de reconnaître, avec Lagrange, qu'elle est radicalement vicieuse en ce que, « suivant ses propres expressions, la notion des infiniment petits est une idée « fausse, qu'il est impossible, en effet, de se représenter nettement, quoiqu'on « se fasse quelquefois illusion à cet égard. L'analyse transcendante, ainsi « conçue, présente à mes yeux cette grande imperfection philosophique, de « se trouver encore essentiellement fondée sur ces principes métaphysiques, « dont l'esprit a eu tant de peine à dégager toutes ses théories positives. Sous « ce rapport, on peut dire que la méthode infinitésimale porte vraiment « l'empreinte caractéristique de l'époque de sa fondation et du génie propre « de son fondateur. »

Comme je l'ai dit, je me suis proposé ici de dégager l'analyse transcendante, l'analyse de l'infini comme la géométrie de l'infini, des principes métaphysiques sur lesquels elle est encore aujourd'hui essentiellement fondée.

Un principe faux explique et démontre tout ce qu'on veut, le faux comme le vrai, l'erreur comme la vérité. Dès qu'on veut faire accepter une proposition quelconque, il n'y a qu'à dire, par exemple, que le contraire répugne à la nature. « Il répugne à la nature de la ligne droite, dit Legendre, qu'une « telle ligne, indéfiniment prolongée, puisse être renfermée dans un angle. »

Comme on pourrait douter de cette répugnance de la nature, il la démontre en disant : « En effet, toute ligne droite tracée sur un plan et indéfiniment « prolongée dans les deux sens, divise ce plan en deux parties qui, étant super-« posées, coïncident dans toute leur étendue et sont parfaitement égales. »

Pour que je puisse m'assurer que les deux parties coïncident dans toute leur étendue, il faut que j'en puisse suivre le contour ; or on suppose le plan infini, c'est-à-dire sans contour. Un tel plan étant impossible, les propriétés qu'on lui prête sont illusoires, et par suite aussi les démonstrations fondées sur de telles propriétés.

Il est évident que cette propriété de la ligne droite, de ne pouvoir être « renfermée dans un angle, » que celle du plan d'être toujours divisé « en « deux parties parfaitement égales par toute ligne droite tracée sur ce plan, » n'appartiennent qu'à la droite et au plan infinis ; car on voit clairement qu'une droite finie, par exemple d'un mètre de longueur, peut être renfermée dans un angle ; qu'un plan d'un mètre de surface peut être divisé en deux parties fort inégales par une droite tracée sur ce plan.

Ces propriétés de la droite et du plan infinis, comme toute les propriétés de l'infini, seront pour nous illusoires. Nous ne reconnaissons à l'infini que la propriété d'être impossible.

Mais alors, dira-t-on, sans l'infini que deviendront la géométrie de l'infini, l'analyse de l'infini, le calcul infinitésimal ? C'est comme si l'on disait : sans l'horreur du vide que deviendront les pompes et les pompiers ? Sans l'horreur du vide les pompes et les pompiers ne fonctionneront pas plus mal, et sans les propriétés de l'infini l'analyse transcendante ne s'en portera que mieux.

« Il est inconcevable, dit Fontenelle, comment la suite naturelle passe du « fini à l'infini, c'est-à-dire, comment après avoir eu des termes finis, elle « vient à en avoir un infini. Cependant cela doit être, ou bien il faut absolu- « ment abandonner toute idée de l'infini, et n'en prononcer jamais le nom, « ce qui ferait périr la plus grande et la plus noble partie des mathé- « matiques. »

Il est inconcevable comment la suite naturelle passe du fini à l'infini, parce qu'il est impossible qu'elle y passe ; et comme je l'ai dit : « La plus « grande et la plus noble partie des mathématiques » ne s'en portera que mieux à être fondée sur les propriétés du fini.

Dans l'introduction de son *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, M. Hermite dit « que le rôle de l'infini, dans ces régions élevées des mathé- « matiques, est en entier résumé dans un petit nombre de propositions du « caractère le plus simple, et telles qu'on pourrait les énoncer et les démon- « trer dès le commencement de la géométrie. »

Le rôle de l'infini est purement fictif : ses propriétés s'imaginent, mais ne se démontrent pas.

Dans sa *Théorie des Fonctions analytiques,* Lagrange n'emploie pas les « infiniment petits, » mais il y admet l'infini avec ses propriétés métaphysiques, c'est-à-dire, qu'en proscrivant les enfants, il conserve leur père. En effet, quand x est infiniment grand, il faut bien que $\frac{1}{x}$ soit infiniment petit.

Ma théorie diffère essentiellement de celle de Lagrange, en ce qu'il remplace la méthode de Leibnitz par une autre qui, sans en avoir les avantages, a, au fond, le même vice de constitution, tandis que ma théorie, constituée à l'état positif par l'élimination de l'infini et de ses propriétés métaphysiques conserve la méthode de Leibnitz avec ses notations et tous les avantages qui en résultent.

« Le conflit qui, depuis un siècle, » dit Auguste Comte, « paraissait « insurmontable entre la théorie et la pratique du calcul transcendant, » est constaté par M. Haton de la Goupillière, qui dit dans ses *Eléments du Calcul infinitésimal* : « Je ne quitterai pas ce sujet sans insister un instant sur la « singularité d'une méthode qui emploie l'erreur pour parvenir à la connais- « sance de la vérité, et qui côtoie, pour ainsi dire, la vraie route, en la quit- « tant pourtant dès le début, pour n'y rentrer qu'au dernier moment, mais « avec la certitude d'arriver au but. »

Le conflit paraissait insurmontable à d'Alembert et à Lagrange. En effet, lorsque d'Alembert dit : « Allez en avant, » il ajoute : « la foi nous vien- « dra, » et non la lumière se fera. De même, il faut bien que Lagrange ait regardé « le conflit entre la théorie et la pratique comme insurmontable, » puisqu'après avoir créé une nouvelle méthode pour la théorie, il se sert, pour la pratique, de celle de Leibnitz. Ce n'est point éclairer une route que de l'abandonner pour s'en frayer une nouvelle.

Ceux qui, comme Fontenelle et Carnot, ont prétendu démontrer qu'on peut et qu'on doit toujours négliger des quantités d'un ordre quelconque devant celles d'un ordre supérieur, ont tout simplement choisi un exemple où l'application du principe ne conduit à un résultat exact, que parce que les quantités négligées se détruisent identiquement.

Carnot commence ses « Réflexions sur la métaphysique du calcul infini- « tésimal » en disant : « Je cherche à savoir en quoi consiste le véritable « esprit du calcul infinitésimal. »

Je ne dis pas que Carnot n'ait pas beaucoup cherché, mais je suis certain qu'il n'a pas trouvé en quoi consiste le véritable esprit du calcul infinitésimal. Il ne consiste certainement pas dans son principe des erreurs compensées, ni dans la propriété qu'il attribue aux infiniment petits « de tenir le « milieu entre la grandeur et le zéro, entre l'existence et le néant. » Il ne consiste pas plus dans la propriété qu'il prête aux purs zéros d'avoir entre eux « des rapports très-intéressants à connaître. »

Depuis Duhamel, les auteurs expliquent le calcul infinitésimal sans le principe leibnitzien : ils le remplacent par d'autres principes énoncés de la manière suivante dans le cours de Duhamel :

« Premier théorème. — La limite du rapport de deux quantités infiniment « petites n'est pas changée, quand on remplace ces quantités par d'autres, « qui ne leur sont pas égales, mais dont les rapports avec elles ont respec- « tivement pour limite l'unité.

« DEUXIÈME THÉORÈME. — La limite de la somme de quantités positives « infiniment petites, dont le nombre augmente indéfiniment, n'est pas chan- « gée, quand on remplace ces quantités par d'autres dont les rapports avec « elles ont respectivement pour limites l'unité. »

Sur le premier de ces deux principes on fonde le calcul différentiel, et sur le second le calcul intégral.

Comme ces principes sont moins inexacts que le principe leibnitzien, ils ont été généralement adoptés par les auteurs qui sont venus après Duhamel. Mais leur application tombe à faux le plus souvent; elle est « frauduleuse, » selon l'expression d'Auguste Comte.

En effet, les deux principes sur lesquels on croit ainsi fonder la méthode infinitésimale se rapportent à la méthode des limites, et c'est par le mélange des principes de l'une avec les notations de l'autre, qu'on arrive à une plus grande exactitude apparente, mais qui, au fond, n'est qu'illusoire. Ce défaut n'a pas échappé à Auguste Comte, qui le signale en ces termes dans sa *Synthèse subjective.*

« Eludée irrationnellement par l'abus des notations infinitésimales, l'im- « perfection inhérente à la méthode des limites ne semble ainsi disparaître « que d'après une inconséquence habituelle. Remplaçant la limite du rapport « des accroissements par le rapport des différentielles, on s'accoutume à « séparer les deux termes de la fraction auxiliaire, contre l'esprit de la « conception newtonienne, à laquelle on veut frauduleusement procurer « les qualités leibnitziennes. »

Pour pouvoir greffer la méthode infinitésimale sur la méthode des limites, on transforme tout en limites; ainsi, la tangente, la dérivée, la longueur d'une courbe, le rayon de courbure, le centre de courbure, etc., sont des limites.

« La méthode des limites, dit Duhamel au commencement de son *Traité « de calcul infinitésimal*, servant de base à presque tout ce qui fait l'objet « de ce cours, nous allons faire connaître en quoi elle consiste » :

Mais, dira-t-on, si par un habile mélange des deux méthodes, on corrige par l'une les défauts de l'autre ; si l'on sait ainsi ajouter aux avantages pratiques de la méthode de Leibnitz, l'exactitude théorique de celle de Newton, où est la fraude ? où est le mal ? Quoique Auguste Comte l'indique d'une manière précise dans sa *Philosophie positive,* je puis dire que s'il a mis la main sur la plaie, il n'en a pas sondé toute la profondeur, et n'a pas su en trouver le remède.

« Je ne dois pas, dit-il, négliger, à ce sujet, de faire observer que plusieurs « géomètres du continent, en adoptant, comme plus rationnelle, la méthode « de Newton, pour servir de base à l'analyse transcendante, ont déguisé, en

« partie, cette infériorité par une grave inconséquence, qui consiste à appli-
« quer à cette méthode la notation imaginée par Leibnitz pour la méthode
« infinitésimale, et qui n'est réellement propre qu'à elle. En désignant
« par $\frac{dy}{dx}$ ce que, rationnellement, il faudrait, dans la théorie des limites,
« noter lim $\frac{dy}{dx}$, et en étendant à toutes les autres notions analytiques ce
« déplacement de signes, on se propose, sans doute, de combiner les avan-
« tages spéciaux des deux méthodes; mais on ne parvient, en réalité,
« qu'à établir entre elles une confusion vicieuse, dont l'habitude tend à
« empêcher de se former des idées nettes et exactes de l'une ou de l'autre. Il
« serait sans doute étrange, à considérer cet usage en lui-même, que, par
« le seul moyen des signes, on pût effectuer une véritable combinaison
« entre deux théories généralement aussi distinctes. »

Le défaut signalé dans ce passage est même plus grave que ne le pense l'auteur.

Prenons pour exemple la définition que Duhamel donne de l'infiniment petit, en disant :

« Toute quantité variable qui a pour limite zéro, se nomme une quantité
« infiniment petite ou simplement un infiniment petit. »

Or, d'après le même auteur « on appelle limite d'une quantité variable,
« une quantité fixe dont elle approche indéfiniment, de telle sorte que leur
« différence puisse devenir moindre que toute grandeur assignée, sans
« cependant se réduire jamais rigoureusement à zéro. »

Il résulte évidemment de ces deux définitions, que l'infiniment petit ne peut jamais se réduire rigoureusement à zéro, et qu'il ne faut pas appeler infiniment petit l'accroissement arbitraire donné à une variable, puisque cet accroissement peut se réduire rigoureusement à zéro.

Cependant Duhamel dit plus loin que « les infiniment petits que l'on
« considère presque uniquement, sont les accroissements de quantités va-
« riables indépendantes et des fonctions de ces variables. »

Duhamel nous conduit donc à cette conclusion que : « Les infiniment petits
« que l'on considère presque uniquement » ne sont pas des infiniment petits

Il ne faudrait pas croire que dans ces définitions, Duhamel a simplement manqué de précision. Tous les auteurs qui sont venus après lui, ont reproduit les mêmes définitions et insisté sur les mêmes conditions. Ecoutez plutôt M. Charles de Freycinet : « Ce qui caractérise la limite, c'est à la fois
« que la variable puisse en approcher autant qu'on le veut et, néanmoins,
« qu'elle ne puisse jamais l'atteindre rigoureusement.

« Le propre de la limite, ajoute-t-il, et ce qui fait que la variable ne

« l'atteint jamais exactement, c'est d'avoir une définition autre que celle de « la variable. »

Comme Duhamel, il dit que « l'infiniment petit peut approcher de plus « en plus de zéro, sans pouvoir jamais être rigoureusement nul. »

Quoi qu'il en soit de la définition des infiniment petits, ils sont de deux espèces essentiellement distinctes : 1° ceux qui peuvent devenir nuls, comme les accroissements arbitraires des variables ; 2° ceux qu'il est absolument impossible de réduire à zéro, comme $z = \frac{1}{x}$, ou $z = \frac{1}{e^x}$. Il est clair que ces derniers sont nécessairement des variables dépendantes, car des variables indépendantes peuvent devenir rigoureusement nulles évidemment.

La distinction de ces deux infiniment petits n'a été faite par personne, et il n'y a aucun géomètre qui n'admette que $\frac{1}{x} = 0$ pour x infini. Cependant, c'est dans cette distinction essentielle, bien plus que dans « le positivisme devenu « religieux, que nous trouvons la solution normale et rationnelle du conflit « qui, depuis un siècle, paraissait insurmontable entre la théorie et la « pratique du calcul transcendant. »

C'est en elle que résident « le véritable esprit du calcul infinitésimal, la « vraie métaphysique du calcul différentiel, la véritable explication logique « directe de la méthode Leibnitz. »

C'est bien en vain qu'on chercherait cette explication logique dans la *Géométrie de l'Infini* de Fontenelle, qui, comme tant d'autres, suppose $\frac{1}{\infty} = 0$, et en arrive à distinguer « le zéro absolu du zéro relatif. »

On ne la trouvera pas plus dans les *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* de Carnot, ni dans sa doctrine des erreurs compensées.

On ne la trouvera pas non plus dans la *Théorie des Fonctions analytiques* de Lagrange. L'auteur promet qu'elle sera *dégagée de toute considération d'infiniment petits et de limites;* mais il faut voir jusqu'où et de quelle manière la promesse a été tenue. Sa théorie est fondée sur la formule de Taylor, qui remplace toute fonction par son développement en série. Or la fonction étant la limite de la somme, et non la somme même des termes de la série, Lagrange aurait eu plus de raison d'annoncer sa *Théorie des Fonctions analytiques,* » comme fondée essentiellement sur la considération des limites.

C'est donc par erreur, et en remplaçant les variables par leurs limites, c'est-à-dire en négligeant des infiniment petits qui ne peuvent pas devenir nuls, que Lagrange parvient à nous donner une *Théorie dégagée de toute considération d'infiniment petits et de limites.*

Enfin, ce n'est pas non plus dans l'*Etude sur la métaphysique du haut calcul* de M. Charles de Freycinet, qu'il faut chercher la vraie métaphysique de ce calcul.

Les ouvrages qu'il a « consultés avec le plus de fruit, dit-il, sont ceux de « MM. Sturn, Duhamel, Navier, Carnot, Auguste Comte, Moigno, Bélanger, « Cournot, etc. » Aujourd'hui il faudrait ajouter à ces noms ceux de MM. Bertrand, Serret, Méray, Hermite. Une idée simple, comme un corps simple, peut-elle résulter de la combinaison de tant d'autres ?

A en croire Carnot, « négliger les infiniment petits est non-seulement « permis, mais il le faut, et c'est la seule manière d'exprimer exactement les « conditions du problème. »

D'après M. de Freycinet, « on a non-seulement le droit, mais encore le « devoir de supprimer l'infiniment petit dans les relations, afin de rétablir la « réalité des choses. »

« La réalité des choses ! » Qu'est-ce que cela peut bien signifier ? Je vois bien que l'assertion de M. de Freycinet est plus insignifiante que celle de Carnot ; mais je ne vois pas en quoi elle est moins paradoxale.

On ne peut exprimer les conditions du problème qu'au moyen des infiniment petits, « et négliger ces infiniment petits est la seule manière d'exprimer « exactement les conditions du problème » ; cela se comprend-il ?

De même, les infiniment petits sont nécessaires pour établir la réalité des choses, et il est nécessaire « de les supprimer dans les relations, afin de « rétablir la réalité des choses ; » cela se comprend-il mieux ?

L'auteur croit le comprendre, puisqu'il l'explique au moyen de quatre propositions. Il me suffira, je pense, de citer la première pour me croire dispensé de parler des trois autres.

« Première proposition. — Deux quantités fixes, entre lesquelles on « suppose qu'il n'existe qu'une différence infiniment petite, n'ont réellement « pas de différence et sont rigoureusement égales. »

La Palisse dirait : Deux quantités fixes ne peuvent avoir qu'une différence fixe. Cette différence ne peut donc être infiniment petite, puisque l'auteur nomme « quantité infiniment petite, une quantité variable, etc. »

Si les « deux quantités fixes n'ont réellement pas de différence et sont « rigoureusement égales, » quelle étrange idée avez-vous donc « de supposer « qu'il existe entre elles une différence infiniment petite ? » Pourquoi ne pas supposer aussi bien entre elles une différence infiniment grande ?

Dès qu'il est reconnu que le cercle est rond nécessairement, je ne vois pas pourquoi on le supposerait carré plutôt que triangulaire ?

Je ne vois pas non plus, pourquoi M. C. de Freycinet s'évertue à substituer ses principes à ceux de Carnot, après avoir dit que *Carnot a admirablement développé la notion de l'infiniment petit.*

Je ne dis pas que les principes de M. C. de Freycinet ne valent pas ceux de Carnot, mais ceux qui prétendront y comprendre quelque chose, feront bien d'avouer qu'ils ne savent pas pour quelle cause ils ne distinguent pas très-bien.

Par exemple, qui me donnera la traduction de ce principe de Carnot :

« Toute valeur qu'on peut rendre aussi approximative qu'on le veut de la « véritable quantité qu'elle représente, sans qu'il soit besoin pour cela de « rien changer ni à l'une ni à l'autre, est nécessairement et rigoureusement « exacte. »

Une valeur approximative de la véritable quantité qu'elle représente ! qu'est-ce que cela peut bien signifier ?

D'où peut donc venir, chez les plus grands géomètres, ce besoin d'imaginer ces paradoxes, ces principes contradictoires, ridicules même ? On sera forcé de le reconnaître, il résulte, de près ou de loin, de la confusion habituelle qu'ils font de deux choses essentiellement distinctes, à savoir : l'infiniment petit qui peut devenir zéro, et celui qui ne peut jamais s'y réduire.

Je dis, de plus, que cette distinction bien établie et constamment maintenue, viendra éclairer toute la méthode infinitésimale, et dissiper les difficultés qu'on y rencontre. Les exemples abonderont dans cet ouvrage ; j'en vais discuter ici un des plus fondamentaux.

Les géométres croient que la méthode des limites et la méthode leibnitzienne, bien qu'aussi exactes l'une que l'autre, ont chacune une propriété spéciale : la première s'adaptant mieux aux théorèmes, et la seconde aux problèmes.

Cournot le dit en ces termes :

« La méthode infinitésimale est mieux appropriée à la nature des choses : « elle est la méthode directe au point de vue objectif ; d'un autre côté, le « concept de l'infiniment petit ne peut se définir logiquement que d'une « manière indirecte, par l'intermédiaire des limites, de sorte qu'au point de « vue logique et subjectif, la rigueur démonstrative appartient directement « à la méthode des limites, et indirectement à la méthode infinitésimale. »

Auguste Comte exprime ainsi la même opinion : « La conception de Leibnitz « présente incontestablement, dans l'ensemble des applications, une supé- « riorité très-prononcée, en condnisant d'une manière beaucoup plus rapide, « et avec beaucoup moins d'efforts intellectuels, à la formation des équations « entre les grandeurs auxiliaires. C'est à son usage que nous devons la haute « perfection qu'ont enfin acquise toutes les théories générales de la géomé- « trie et de la mécanique.

« Mais, quand on considère en elle-même et sous le rapport logique, la « conception de Leibnitz, on ne peut s'empêcher de reconnaître avec Lagrange, « qu'elle est radicalement vicieuse, en ce que, suivant ses propres expressions, « la notion des infiniment petits est une idée fausse, qu'il est impossible, en « effet, de se représenter nettement, quoiqu'on se fasse quelquefois illusion « à cet égard.

« Passant à la conception de Newton, il est évident que, par sa nature, elle « se trouve à l'abri des objections logiques fondamentales que provoque la « méthode de Leibnitz. La méthode des limites est, en effet, remarquable par « sa netteté et par sa justesse....

« Mais, d'un autre côté, elle est bien loin d'offrir, pour la solution des pro- « blèmes, d'aussi puissantes ressources que la méthode infinitésimale. »

Voilà qui est beau, savant et profond ; cependant rien de tout cela n'est exact. Chacune des deux méthodes a son objet propre, pour lequel elle est la meilleure, tant au point de vue subjectif, qu'au point de vue objectif : la méthode de Leibnitz se rapportant à l'infiniment petit qui peut devenir zéro, et la méthode des limites à l'infiniment petit qui ne peut pas s'y réduire.

Soient $y = x^3 + 4x + 5$, h l'accroissement arbitraire donné à x, et k l'accroissement correspondant de y.

On aura $\frac{k}{h} = 3x^2 + 4 + 3xh + h^2$.

Or, $3x^2 + 4 + 3xh + h^2$ est une fonction qu'on peut représenter par R, en sorte que, pour toute valeur grande ou petite de h, on a identiquement $R = 3x^2 + 4 + 3xh + h^2$. Ainsi quand $h = 0$, on a exactement et rigoureusement $R = 3x^2 + 4$.

Cette valeur particulière de R est ce qu'on appelle la dérivée de y par rapport à x.

On donne donc une définition mauvaise de la dérivée, quand on dit que c'est la limite du rapport des deux accroissements. Pour qu'une fonction ait une limite, il faut qu'elle renferme un infiniment petit qui ne peut pas devenir zéro. C'est ainsi que quand on suppose x infini, la limite de $4 + \frac{1}{x}$ est 4, parce que l'infiniment petit $\frac{1}{x}$ ne peut jamais être nul. Mais dans la fonction $3x^2 + 4 + 3xh + h^2$, rien n'empêche de faire $h = 0$, ce qui la réduit à $3x^2 + 4$. Il n'est pas même nécessaire de faire passer h par une valeur très-petite. Il n'est pas plus nécessaire de savoir si l'on se forme une idée juste ou fausse des infiniment petits que de savoir si l'on a le droit et le devoir de les négliger. Pour faire $h = 0$, il n'est pas nécessaire de connaître la distinction établie par Fontenelle entre le zéro absolu et le zéro relatif, ni celle de M. de Fabry, entre le zéro déterminé et le zéro indéterminé. La considération des infiniment petits ou des limites n'est pas plus nécessaire pour faire $h = o$, que pour faire $h = 2$.

On peut, si l'on veut, supposer h infiniment petit avant de le faire nul; mais il est inexact de dire que la dérivée $3x^2 + 4$ est la limite de la fonction $3x^2 + 4 + 3xh + h^2$. Ce serait supposer que h ne peut pas devenir nul, ce qui est faux évidemment.

Ainsi, au point de vue théorique et subjectif, la considération des infiniment petits n'est pas nécessaire pour « la véritable explication logique « directe de la méthode de Leibnitz ; » mais l'intervention des limites est vicieuse, puisque, comme le dit Duhamel, « les infiniment petits que l'on « considère presque uniquement, sont les accroissements de quantités varia- « bles indépendantes et des fonctions de ces variables. »

Ces accroissements, appelés infiniment petits, peuvent aussi bien être quelconques, et dans la fonction obtenue, l'accroissement indépendant peut être supposé nul, sans qu'il soit nécessaire de parler d'infiniment petit ou de limite. Voilà comment on pourrait donner, selon l'expression de Langrage, « les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération d'infini- « ment petits et de limites. » Mais dans la théorie des séries, la considération des infiniment petits et des limites est inévitable, et voilà pourquoi Lagrange a tenté l'impossible, et devait forcément manquer son but, lorsqu'il a fondé sur la série de Taylor les principes du calcul différentiel, comme le témoigne M. Bertrand en disant : « Lagrange affirme dans un ouvrage célèbre que le « théorème de Taylor, loin de devoir être regardé comme une conséquence « du calcul différentiel, doit être établi à priori, et contient les véritables « principes de ce calcul, dégagés de toute idée d'infiniment petit ou de « limite. »

Est-ce que Lagrange en dégageant « les principes du Calcul différentiel de « toute considération d'infiniment petits, » a voulu « extirper ainsi des « mathématiques l'importante idée de l'infini, » comme le lui reproche Hoëné Wronski dans le passage suivant ?

« Les géomètres ont cherché à ravaler les sciences mathématiques, en « voulant en chasser l'idée de l'infini, ce principe de leur haute évidence et « de leur certitude absolue. Pour preuve, nous rappellerons ici toutes ces « bizarres explications matérialistiques qu'ils voulaient donner de l'auguste « idée de l'infini par la grossière idée du fini, et nous rappellerons surtout ce « premier des fameux prix décennaux, par lequel l'Académie des Siences de « Paris a couronné la Théorie des fonctions analytiques de Lagrange, des- « tinée à extirper ainsi des mathématiques cette importante idée de l'infini, « qui, à côté des glorieuses prétentions universelles à l'animalité, accusait « dans l'homme une nature ou une condition plus élevée. »

Ce qui prouve que Lagrange ne s'était pas proposé « d'extirper des Mathé-
« matiqes l'importante idée de l'infini, » c'est que non-seulement il admet l'infini absolu, mais le soumet au calcul comme une quantité réelle.

Par exemple, au chapitre V il dit : « Il peut arriver que les fonctions $f(x)$,
« $F(x)$ deviennent infinies par la même supposition de $x = a$, ce qui rendra
« les fractions $\frac{f(x)}{F(x)}, \frac{f'(x)}{F'(x)}$ indéterminées.

Lorsqu'une fonction devient infinie pour une valeur finie $x = a$, c'est l'infini absolu ou impossible, qu'il est absurde de soumettre à aucun calcul, comme il le fait quand il dit, à la fin du chapitre V :

« Les quantités $\frac{1}{2\sqrt{x-a}}$ et $\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$ deviennent infinies lorsque
« $x = a$; mais en les multipliant l'une et l'autre par $2\sqrt{x-a}$, leur rap-
« port sera :

$$\frac{\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}}+1}{\frac{2x}{\sqrt{x+a}}}, \text{ lequel en faisant } x = a, \text{ devient } \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

D'autres exemples feraient voir, comme celui-là, que Lagrange ne méritait pas le reproche que lui adresse Hoëné Wronski.

Maintenant, son ouvrage méritait-il « ce fameux prix par lequel l'Acadé-
« mie des sciences de Paris a couronné la théorie des fonctions analytiques ? » En cette occasion, comme en tant d'autres, c'est plutôt le nom que l'ouvrage de l'auteur, que l'Académie a couronné.

A la vérité, Charles Dupin, lui aussi académicien, a dit que Lagrange avait démontré Leibnitz. Je demande, moi, qui démontrera Lagrange. Par exemple, qui démontrera ce principe (qu'il donne au chapitre III) ?

« Lorsqu'on a une équation quelconque entre deux variables x, y, l'équa-
« tion subsistera encore entre les fonctions primes de tous ses termes, ainsi
« qu'entre leurs fonctions secondes, etc. »

Qu'est-ce que cela veut dire que « l'équation subsistera entre les fonc-
« tions primes de ses termes ? ». Par « l'équation », faut-il entendre la même équation ou une autre équation quelconque ? Dans le premier cas, le principe serait évidemment faux, et dans le second il serait par trop naïf.

Quoi qu'il en soit du mérite de l'ouvrage couronné par l'Académie de Paris, celui que je publie pourra être regardé, à bon droit, comme le premier qui se propose systématiquement l'extirpation de l'infini. Mais, tandis que pour Wronski l'infini est, en mathématiques, le « principe de leur haute évi-
« dence et de leur certitude absolue », je prouverai qu'il est le principe de

toute sorte d'erreurs et de paradoxes, et les auteurs les plus réputés m'en fourniront une foule d'exemples.

J'ai dit qu'il n'y a point de quantités infinies en mathématiques ; cependant il y a des quantités qu'on dit infinies. Il faut donc ou les exclure ou savoir au juste comment on doit les définir et les employer.

En analyse comme en géométrie, je distingue deux infinis : l'un, que j'appelle infini absolu, est impossible ; l'autre, que j'appelle l'infini relatif, consiste en une valeur fictive très-grande attribuée à une variable.

Quoique cette distinction n'ait pas encore été faite jusqu'ici, elle est essentielle et a une importance capitale, surtout au point de vue théorique.

Dans la relation $z = \frac{1}{x}$ on ne peut pas faire $x = 0$; autrement la valeur correspondante de z serait un nombre qui exprimerait combien il faut de zéros pour faire l'unité, ce qui est absurde.

Lorsque la variable x est indépendante de toute autre, on peut bien lui donner la valeur zéro, mais on ne le peut plus dès que cette variable est liée à une autre z par la relation $z = \frac{1}{x}$. Ainsi, supposer $x = 0$ dans cette relation, c'est supposer l'absurde et l'impossible, ou bien la chose ne devient possible qu'en rompant le lien qui unit z à x.

Malgré cela on fait $x = 0$, et l'on dit que $\frac{1}{0}$ est l'infini. C'est ce que j'appelle l'infini absolu.

Dans la relation $z = \frac{1}{x}$, la valeur de x pouvant approcher autant qu'on veut de zéro, sans cependant l'atteindre, on dit que zéro est la limite de x ; mais il est faux et absurde de dire, avec Cousin, que « puisque zéro est la limite de x, il est clair que $\frac{1}{0}$ est la limite de $\frac{1}{x}$. » Il est clair, au contraire, que $\frac{1}{0}$ n'est ni une grandeur ni la limite d'aucune grandeur.

Si $\frac{1}{0}$ représentait un nombre, rien n'empêcherait une variable indépendante d'atteindre et même de dépasser ce nombre. Voilà pourquoi, dans la relation $z = \frac{1}{x}$, la valeur de x peut tendre vers sa limite zéro, tandis que celle de z croît sans limite, sans s'approcher jamais, ni de loin ni de près, de $\frac{1}{0}$, qui n'est ni une grandeur ni une limite.

Lorsqu'on croit qu'on peut faire $x = 0$ dans la relation $z = \frac{1}{x}$, on dit que la valeur de z devient $\frac{1}{0}$ et est infinie. C'est un infini impossible.

Les deux termes d'une fraction peuvent devenir nuls en même temps ; la fraction se réduit alors à $\frac{0}{0}$, et sa valeur est tout-à-fait indéterminée.

Mais le dénominateur ne peut pas devenir seul égal à zéro ; l'hypothèse qui rend le dénominateur nul, par exemple, celle qui fait $x = 0$ dans $\frac{1}{x}$, ou $x = a$ dans $\frac{1}{x-a}$, est une hypothèse absurde.

Dans la relation $z = \frac{1}{x}$, on peut supposer à x une valeur très-petite, et alors la valeur correspondante de z est très-grande. Pour renchérir encore sur ces expressions, on dira x infiniment petit et z infiniment grand. La valeur de z sera ainsi un infini relatif.

La réciproque d'un infiniment petit est donc un infini relatif ; mais zéro n'a point de réciproque : il serait absurde de dire que $\frac{1}{0}$ est la réciproque de zéro, parce qu'il n'y a pas de nombre qui multiplié par zéro donne l'unité. Celui qui écrirait $\frac{1}{0} \times 0 = 1$, ferait une opération absurde

Propriétés de l'Infini

L'infini n'a pas d'autre propriété que d'être impossible. Tout calcul fait sur l'infini absolu, ou sur une fonction quelconque de cet infini, est lui-même absurde.

Ainsi, en doublant les deux termes de la fraction $\frac{1}{0}$, on a $\frac{2}{0}$; or, il est absurde de dire que $\frac{1}{0} = \frac{2}{0}$. En doublant seulement le numérateur de $\frac{1}{0}$, on a encore $\frac{2}{0}$; or, il est pareillement absurde de dire que $\frac{2}{0}$ est double de $\frac{1}{0}$; car ni $\frac{1}{0}$ ni $\frac{2}{0}$ ne représentent des nombres.

De même, en élevant au carré les deux termes de $\frac{1}{0}$, on a encore $\frac{1}{0}$; il serait absurde d'en conclure que tout nombre infini égale son carré ; car $\frac{1}{0}$ ne représente ni un nombre, ni le carré d'un nombre, ni la limite d'aucun nombre.

De même qu'on ne fait pas un cercle carré, pour étudier les propriétés de la nouvelle figure, on ne fera pas non plus $x = 0$ dans une fonction de $\frac{1}{x}$, ni $x = a$ dans une fonction de $\frac{1}{x - a}$, pour étudier les nouvelles propriétés de la fonction. Les propriétés de cette fonction seraient absurdes, comme celles d'un cercle carré.

Quant à l'infini relatif, c'est très-différent. Comme l'infini relatif est une valeur fictive, et non effective, attribuée à une variable, il ne sera jamais exprimé en chiffres. Tout nombre écrit en chiffres sera toujours réputé fini ; car, de même qu'un son isolé n'est ni haut ni bas, un nombre isolé n'est ni grand ni petit. C'est par rapport aux nombres réputés finis, qu'un autre, exprimé par une variable, pourra être supposé infini.

Les nombres dits infinis sont, en réalité, finis ; ils jouissent donc de toutes les propriétés des nombres finis ; et comme ils sont nécessairement exprimés par des lettres, on leur appliquera toutes les formules et toutes les règles établies sur les quantités littérales. Dans ce sens rien n'est plus vrai que cette proposition de Leibnitz : « Les règles du fini réussissent dans l'infini, « et réciproquement. »

Ainsi, lorsque la valeur de x sera infinie, celle de $2x$ n'en sera pas moins double de celle de x. La différence entre x et $x+a$, sera a, aussi bien pour x infini que pour x fini.

De même, si x représente un infini du premier ordre, x^2, x^3, x^4 représenteront des infinis du deuxième, du troisième, du quatrième ordre. Comme on a $\frac{x^4}{x^3} = x$, on dira que le quotient d'un infini du quatrième ordre par un infini du troisième est un infini du premier. Quant aux infinis absolus, ils sont impossibles, et il serait absurde d'en distinguer de différents ordres.

La distinction des deux infinis existe en géométrie comme en analyse ; en sorte que si par une droite infinie on entend une droite sans extrémités, elle est absurde et impossible ; mais si l'on entend une droite extrêmement grande par rapport à d'autres réputées finies, elle aura ses extrémités et sera finie en réalité ; ce sera un infini relatif.

De même, tout plan étant nécessairement terminé à une ligne qui en forme le contour, si par plan infini on entend un plan privé de ce contour ou périmètre, il est absurde et impossible. Mais si l'on entend un plan extrêmement grand, terminé comme tout autre, à son périmètre, il sera en réalité fini. Si on l'appelle infini, ce sera un infini relatif.

Une droite infinie pourra être doublée, triplée : cela s'entend d'une droite qui a des extrémités. Une droite sans extrémités étant impossible, on n'aura ni à l'augmenter ni à la diminuer.

En géométrie, comme en analyse, les propriétés générales des grandeurs finies s'appliquent aux grandeurs infinies, lorsqu'il s'agit de l'infini relatif. Mais s'il s'agit d'une grandeur infinie absolue, c'est-à-dire sans limites, elle est impossible et absurde, ainsi que toute propriété qu'on peut lui prêter.

Le cercle de Pascal, dont le centre est partout et la circonférence nulle part, est un infini absurde. Il en serait de même d'un carré dont le centre serait partout et le périmètre nulle part. Il n'y a pas à examiner quelle est la plus ronde ou la plus carrée de ces deux figures : toute comparaison serait absurde.

Quand Euclide définit les parallèles en disant que « ce sont des droites « situées dans le même plan et qui, prolongées à l'infini, ne se rencontrent « nulle part, » sa définition est nécessairement fausse ou absurde. En effet, s'il s'agit de l'infini absolu, c'est-à-dire, si les droites sont prolongées jusqu'à ce qu'elles n'aient plus d'extrémités, la définition est absurde. S'il s'agit, au contraire, de l'infini relatif, c'est-à-dire si l'on suppose les droites prolongées d'une longueur dite infinie, rien n'empêche de doubler, ni de tripler cette longueur, et il pourra arriver que les deux droites infinies qui ne se rencontraient pas d'abord, viennent à se rencontrer lorsque leur longueur sera doublée.

Les géomètres qui ont suivi Euclide ont accepté la définition des parallèles avec son défaut. Euclide lui-même en a détruit l'effet au moyen d'une autre proposition vicieuse, connue sous le nom de postulatum d'Euclide.

Une variable dite infiniment petite peut devenir absolument nulle, pourvu qu'elle ne soit pas fonction d'un infini absolu.

Par exemple, si l'on a supposé a infiniment petit dans l'expression $y = 4 + a$, rien n'empêche ensuite de faire $a = 0$, et l'expression $y = 4 + a$, se réduira ainsi à $y = 4$

Mais si l'on a fait a infiniment petit dans la relation $a = \frac{1}{x}$, on ne pourra plus ensuite faire $a = 0$, en sorte que la valeur de $y = 4 + \frac{1}{x}$ aura 4 pour limite, mais n'égalera jamais 4.

D'habitude on n'est pas si scrupuleux ; on dit : pour x infini on a $\frac{1}{x} = 0$, et $y = 4$.

On commet ainsi une erreur qu'on croit sans conséquence, mais dont je ferai ressortir avec soin toute la gravité. Lorsque l'on confond, en une seule, deux choses essentiellement différentes, la définition devient contradictoire et conduit aussi à des conséquences contradictoires.

Cette confusion et cette contradiction sont très-visibles dans le premier alinéa de l'ouvrage de Carnot sur la *Métaphysique du calcul infinitésimal*.

Voici ce qu'il dit : « On n'a jamais pu se former qu'une idée imparfaite de « ces éléments, espèces d'êtres singuliers, qui tantôt jouent le rôle de véritables quantités, tantôt doivent être traités comme absolument nuls, et semblent, par leurs propriétés équivoques, tenir le milieu entre la grandeur « et le zéro, entre l'existence et le néant. »

Pour montrer que ces idées sont encore celles des savants, il suffira de citer ce témoignage de M. C. de Freycinet :

« Cette notion de l'infiniment petit a été admirablement développée par « Carnot, dans ses réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal. « Avant ce géomètre, on avait, il faut le reconnaître, des idées assez confuses « et même fausses sur la nature des infiniment petits, tels qu'ils sont intro- « duits dans le calcul. »

Les infiniment petits, tels qu'ils sont introduits dans le calcul, ne sont ni grands ni petits, parce qu'ils y sont toujours représentés par des variables. Or une variable n'est ni grande ni petite : c'est la valeur qu'on lui attribue qui peut être l'une ou l'autre. En outre, les infiniment petits que « l'on con- « sidère presque uniquement, sont les accroissements de variables. » Or, comme il est évident que ces accroissements peuvent toujours devenir nuls, et qu'ainsi zéro est une valeur qu'ils peuvent prendre, et non une limite qu'ils ne peuvent atteindre, il n'en faut pas plus que cela pour que tous les géomètres répètent en chœur : « On appelle infiniment petit une grandeur « variable qui a pour limite zéro. »

Les infiniment petits $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{e^x}$ ont pour limite zéro, mais ne représentent pas les accroissements de variables.

On voit que la définition, soit de l'infini, soit de l'infiniment petit, se trouve à tout moment en défaut ou en contradiction. C'est ce qui ne manquera jamais d'arriver lorsqu'on voudra qu'une même définition s'applique à deux êtres essentiellement différents, lorsqu'on voudra, par exemple, qu'elle convienne à la carpe et au lapin.

Nous constaterons ce défaut dans le cours d'analyse de Cauchy comme dans celui de Duhamel.

Par exemple, Cauchy nous dit : « qu'une quantité variable devient *infini-* « *ment grande*, lorsque sa valeur numérique croît indéfiniment de ma- « nière à converger vers la limite ∞. »

Si le signe ∞ représente une grandeur, pourquoi une variable indépendante ne pourrait-elle pas l'atteindre et même la dépasser ? Et si le signe ∞ ne représente pas une grandeur, comment peut-il être la limite d'une grandeur, et comment cette grandeur peut-elle converger vers ce signe ?

Lorsqu'on « appelle quantité infinie une variable qui croît au-delà de « toute quantité donnée, » la définition est vicieuse comme celle de Cauchy. En effet, une variable n'est ni grande ni petite, c'est la valeur attribuée à la variable qui peut être grande ou petite. Il faudrait aussi s'expliquer sur la *quantité donnée ;* est-elle finie ou infinie ? Si elle est finie, pourquoi une autre un peu plus grande serait-elle infinie ? Si elle est infinie, on appellerait donc quantité infinie une quantité plus grande qu'une quantité infinie.

Duhamel s'exprime ainsi : « Il n'y aurait aucun sens à attribuer à la com- « paraison de deux infinis, puisque l'infini ne signifie pas une grandeur, « mais l'absence de limites. » Si « l'infini ne signifie par une grandeur, » que faut-il entendre par une grandeur infinie ? Comment l'infini peut-il être la limite d'une grandeur ? comment une grandeur peut-elle être tendre vers l'infini ?

S'il n'y a « aucun sens à attribuer à la comparaison de deux infinis, » comment peut-on les dire égaux ou inégaux, de même ordre ou d'ordre différent ? d'abord comment peut-on en prendre ou connaître le rapport.

On n'en finirait pas, si l'on voulait relever toutes les contradictions que présentent les propriétés qu'on prête à l'infini.

Fontenelle démontre, et Cauchy admet que $\infty + a = \infty$. De même, Boucharlat démontre que quand x est infini, on a $x + a = x$, c'est-à-dire que deux infinis sont toujours égaux malgré leur différence. M. Gérono, au contraire, démontre qu'on n'a pas $x - x = o$, c'est-à-dire que deux infinis ne sont pas égaux, même quand ils n'ont aucune différence, ou qu'ils sont absolument identiques.

Faut-il penser que ces contradictions ne tirent pas à conséquence ? qu'elles ne peuvent conduire à aucune erreur, du moins chez ceux qui ont l'habitude du calcul ? Cet ouvrage fournira des preuves nombreuses du contraire. Je montrerai que les fausses notions, les fausses propriétés de l'infini ont entraîné les géomètres les plus réputés dans des erreurs graves, dans des absurdités grossières.

Ces erreurs résultent surtout de ce que l'on confond partout deux infinis très-différents, en prêtant à l'un les propriétés de l'autre, ou en leur attribuant des propriétés mixtes qui ne conviennent ni à l'un ni à l'autre.

A la page 46 de son cours d'analyse, Cauchy « considère les fonctions « simples d'une seule variable, » et dit « qu'il est facile de fixer leurs valeurs singulières. » Pour moi, je ne suis pas du tout fixé sur le sens et la valeur des égalités au moyen desquelles il croit les avoir fixées.

Ainsi, d'après lui, la valeur singulière de $a + x$, pour $x = \infty$, est $a + \infty$; celle de ax est $a \times \infty = \infty$; celle de $\frac{a}{x}$ est $\frac{a}{\infty} = o$; celle de x^a est $\infty^a = \infty$; celle de A^x est $A^{\infty} = \infty$, etc.

Avant de fixer toutes ces valenrs singulières, il aurait fallu fixer la signification du signe ∞. Ce signe ıeprésente-t-il l'infini absolu ou l'infini relatif ? Si c'est l'infini absolu, nous sommes tout fixés sur la valeur des opérations indiquées ou effectuées sur lui : elles sont absurdes, et toutes les égalités précédentes peuvent être, sans aucun examen, déclarées absurdes.

Si, au contraire, le signe ∞ représente un infini relatif, les égalités précédentes peuvent être déclarées toutes fausses; ainsi l'égalité $a + \infty = \infty$ est fausse, puisque, dans le premier membre, il y a le terme a qui n'est pas dans le second, et qu'en retranchant ∞ de chaque membre, on obtiendrait $a = 0$.

L'égalité $\frac{a}{\infty} = 0$ est de toute impossibilité, c'est-à-dire que tant que x est un nombre, la fraction $\frac{a}{x}$ ne peut pas devenir zéro.

L'égalité $\infty^a = \infty$ signifierait donc qu'il y a égalité entre toutes les puissances de l'infini. Que deviendraient alors les différents ordres d'infinis? que deviendrait le principe en vertu duquel les infinis d'un ordre quelconque s'effacent devant un infini d'un ordre supérieur?

J'en sais qui ne partageront pas mon opinion sur les valeurs singulières données par Cauchy; ceux même qui par ce moyen auront pris quelques fausses idees de plus, croiront que c'est toujours autant de pris, et seront les premiers à se persuader qu'ils ont tout compris.

L'égalité $\frac{a}{\infty} = 0$, ou $\frac{a}{x} = 0$, pour $x = \infty$, est de toutes les propriétés attribuées à l'infini, la plus généralement reçue, et la plus féconde en graves erreurs. C'est sur cette fausse propriété qu'ont été fondés plus d'une fois les beaux travaux de Cauchy.

Tel est celui que M. Liouville appelle l'élégante extension donnée par Cauchy à la règle de l'Hôpital. « Aussi, dit-il, les géomètres ont-ils apprécié « depuis longtemps l'extension élégante que M. Cauchy a su donner au théo- « rème de l'Hôpital. »

Pour démontrer la règle qui donne la vraie valeur d'une fraction $\frac{u}{v}$, dont les termes sont infinis, Cauchy fonde son raisonnement sur la propriété attribuée aux fractions $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{v}$ d'être nulles quand u et v sont infinis; or jamais les fractions $\frac{1}{u}$ et $\frac{1}{v}$ ne peuvent devenir nulles.

Ainsi la démonstration de Cauchy reste sans fondement et s'écroule tout entière. D'où il suit que « l'élégante extension donnée par Cauchy à la règle « de l'Hôpital, » est une règle fausse, démontrée par un faux raisonnement fondé sur une fausse propriété de l'infini.

On a beau supposer ou vouloir que la fraction $\frac{1}{x} = 0$ pour x infini; elle résiste et n'y arrive jamais.

Par exemple on a identiquement

$$x - \frac{x}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}. \qquad 1$$

S'il était possible que la fraction $\frac{1}{x}$ devînt zéro, l'identité se réduirait a $x - \frac{x}{1} = \frac{1}{1}$, ou à $x - x = 1$, c'est-à-dire à $0 = 1$.

En sorte que faire $\frac{1}{x} = 0$, dans cet exemple, c'est faire $0 = 1$: c'est la même absurdité.

Cependant l'hypothèse $\frac{1}{x} = 0$ est tellement reçue dans l'enseignement, que M. Gérono aime mieux dire que $x - x$ n'égale pas zéro, c'est-à-dire qu'on n'a pas $x = x$, que d'admettre que $\frac{1}{x}$ n'égale pas zéro ; ainsi, il fait $x - x = 1$, c'est-à-dire $0 = 1$, pour n'être pas conduit à l'absurdité $1 = 0$.

Faire $0 = 1$ de peur d'arriver à l'absurdité $1 = 0$, voilà pourtant ce que fait le rédacteur en chef des *Nouvelles Annales mathématiques*. Pour s'en convaincre, il faut lire la note de la page 90 des *Nouvelles Annales mathématiques* de 1865, où l'auteur dit : « L'hypothèse $x = \infty$ réduit l'expression

$$x - \frac{x}{1 + \frac{1}{x}} \text{ à } x - x;$$

« par conséquent, ajoute-t-il, la réduction des deux termes x, $-x$, conduit « à l'égalité $1 = 0$. »

Ainsi, il croit que $\frac{1}{x} = 0$, ce qui réduit

$$x - \frac{x}{1 + \frac{1}{x}} \text{ à } x - x.$$

Mais il ne permet pas que $x - x = 0$, puisqu'il a besoin que cette différence fasse 1.

L'usage d'accepter l'hypothèse $\frac{1}{x} = 0$, quand x est infini, date de loin; mais ce qui peut surprendre, c'est que les erreurs auxquelles conduit ce faux principe, ne l'aient pas fait abandonner. Chaque chose a sa raison d'être, et il suffit qu'on tire parti d'une erreur pour qu'elle se perpétue de siècle en siècle.

Or, quand un faux principe a conduit un géomètre, comme dans l'exemple de M. Gérono, à une absurdité telle que $1 = 0$, il l'abandonnerait bien vite, s'il comprenait son erreur, et ne la regardait comme un résultat singulier du calcul, dont il croit pouvoir tirer parti en faveur de l'objet qu'il a en vue. C'est ainsi que M. Gérono, se voyant conduit à l'absurdité $1 = 0$, pour avoir admis que $\frac{1}{x} = 0$, crut pouvoir annoncer que les termes x, $-x$ ne se détruisent pas, et en conclure que j'ai fait une erreur, en réduisant les deux termes $\frac{a-a'}{2}x, -\frac{a-a'}{2}x$, dans un exemple de ma *Théorie des convergents.*

Lorsque Leibnitz et les frères Bernoulli s'occupaient de sommer des séries au moyen de transformations qui avaient la série harmonique pour point de départ, Jean Bernoulli rencontra un cas bien singulier ; car son calcul, qu'aujourd'hui encore M. Bertrand déclare « irréprochable, » le conduisit, comme dans l'exemple de M. Gérono, à l'absurdité $1 = 0$. C'est qu'il avait fondé, comme M. Gérono, son calcul sur l'hypothèse $\frac{1}{n} = 0$, qui était pour les géomètres de l'époque, comme pour ceux d'aujourd'hui, un principe incontestable. Donc, puisqu'il n'y avait point de faute dans le principe ni dans les opérations de l'auteur, l'égalité $1 = 0$ était pour lui le résultat d'un caprice singulier du calcul, et il pensa non-seulement que le fait méritait d'être connu, mais qu'il en pouvait tirer parti, en le donnant comme une preuve de la divergence de la série harmonique, qui avait servi de point de départ à son calcul.

Sganarelle aurait conclu, lui, en disant : « Voilà justement ce qui fait « que votre fille est muette. » Mais M. Bertrand avait besoin d'arriver à une conclusion très-différente. En effet, frappé de la faute commise par d'illustres géomètres, y compris Lagrange, qui ont cru que l'on pouvait toujours substituer à une fonction son développement en série, même lorsque la série est divergente, il a dit, comme Abel lui-même, qu'il fallait rejeter et proscrire, de l'analyse, tout usage des séries divergentes. La proposition était plus facile à avancer qu'à démontrer ; car, quel que soit, par exemple, le nombre des empoisonnements produits par l'arsenic, on n'en peut conclure le droit d'en proscrire absolument l'usage en médecine.

Du reste, le moyen qui s'est présenté comme le plus naturel et le plus fécond pour former et sommer les plus importantes séries convergentes, consiste à les déduire de la série harmonique, qui est divergente, comme l'ont fait, avec tant de sagacité et de succès, Leibnitz et les fréres Bernoulli. Or, c'est justement dans les œuvres de ces illustres inventeurs que M. Bertrand est allé puiser la preuve du contraire. Il a donc exhumé ce malencontreux raisonnement qui a conduit Bernoulli à l'absurdité $1 = 0$, et il l'a donné comme une preuve à l'appui de sa ridicule assertion.

Dans l'exemple précédent, comme dans celui de M. Gérono, c'est l'hypothèse $\frac{1}{n} = 0$ qui conduit à l'absurdité $1 = 0$.

Si l'on y regarde de près, on reconnaîtra que c'est, au fond, à la même cause qu'il faut imputer la plupart des paradoxes qu'on rencontre en mathématiques. En voici un autre exemple :

Au chapitre V de sa *Théorie des fonctions analytiques*, Lagrange démontre que toute fonction d'une variable est identiquement nulle, lorsque cette fonction et toutes ses dérivées se réduisent à zéro, pour une valeur particulière de la variable.

Or, Cauchy a donné un démenti à cette proposition, en présentant la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$ qui, selon lui, devient nulle, ainsi que toutes ses dérivées pour la valeur $x = 0$.

Les auteurs qui sont venus après Cauchy ont été du même avis que lui. Ainsi, MM. Duhamel, Sturm, Cournot, Moigno, Bertrand, Serret, Hermite ont reproduit le même exemple et en ont tiré la même conséquence.

Je n'ai point à examiner, ici du moins, la valeur de la démonstration de Lagrange; mais je montrerai tout de suite que l'objection de Cauchy porte à faux.

En effet, la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$ peut s'écrire $\frac{1}{e^{+\frac{1}{x^2}}}$ ou $\frac{1}{z}$ en posant $z = e^{\frac{1}{x^2}}$.

Or, que deviennent les fractions $\frac{1}{x^2}$ et $\frac{1}{z}$ pour $x = 0$? Je réponds qu'il est absurde de faire $x = 0$ dans la fraction $\frac{1}{x^2}$, et qu'il est absurde de supposer que $\frac{1}{x^2}$ ou $\frac{1}{z}$ puisse devenir $\frac{1}{0}$. L'objection de Cauchy est donc fondée sur des hypothèses absurdes.

Quand on me dit qu'il faut bien faire $x = 0$ pour étudier les valeurs singulières, les paradoxes, etc., qui résulteront de cette hypothèse, je réponds: *casse-cou ;* il n'en peut résulter que des absurdités, et les exemples que j'ai présentés jusqu'ici prouvent assez que quand j'aurai besoin d'en produire d'autres, les géomètres m'épargneront la peine de les créer moi-même.

Dans ce qui précède, je me suis attaché tout spécialement à discuter, en elle-même et dans ses conséquences, la propriété analytique qu'on attribue à l'infini, lorsqu'on prétend qu'il est la réciproque de zéro, c'est-à-dire que pour x infini, on a $\frac{1}{x} = 0$. Mais, en général, il me suffira qu'une propriété quelconque de l'infini ne s'applique pas aux quantités finies, pour que je la déclare fausse et inadmissible.

Cette opinion rencontrera bien des contradicteurs, qui objecteront que les plus beaux travaux de la géométrie moderne sont fondés sur de telles propriétés. Par exemple, on y admet que les parallèles se rencontrent à l'infini, que tous les points à l'infini sont sur une même droite ou dans un même plan, etc.

Lorsqu'on dit que les points à l'infini dans un plan sont tous sur une même droite, il ne peut être question de l'infini relatif; car pour des points très-éloignés, il peut y en avoir dans tous les sens et dans toutes les directions. C'est donc de l'infini absolu ou impossible qu'il s'agit. Alors il n'y a pas plus de raison de nier que d'admettre la propriété.

Dans son dernier ouvrage intitulé : *Des méthodes dans les sciences de raisonnement*, Duhamel prouve, d'après Aristote, « que du faux on peut « quelquefois déduire le vrai. On reconnaîtra, » dit-il, « qu'en partant d'un « principe faux on peut parvenir à un résultat exact. »

S'ensuit-il qu'on ait le droit de partir d'un principe faux, et faut-il aussi sur ce point admettre en principe que la fin justifie les moyens?

Par exemple, je dis que c'est admettre l'impossible, et partir d'un principe faux, que de faire $x = 0$ dans la fonction $\frac{1}{x}$.

Les géomètres font $x = 0$ pour voir ce qu'on en pourra tirer de bon. Ainsi, M. Hermite me répond : « En passant d'une valeur aussi petite qu'on le « voudra à la valeur $x = 0$, on fait éprouver à la fraction $\frac{1}{x}$ un changement « infini, et si je vous ai bien compris, il serait nécessaire d'exclure de « l'analyse, comme conduisant à des paradoxes, toutes les considérations qui « amènent à admettre une telle discontinuité. Je ne puis être de cet avis « Mais avec tous les géomètres, je reconnais ce que présentent d'obscur, « à certains égards, les fonctions telles que $\sin \frac{1}{x}$, $\cos \frac{1}{x}$, indéterminées, « mais seulement dans le voisinage de la valeur $x = 0$.

Pour moi les fonctions $\sin \frac{1}{x}$, $\cos \frac{1}{x}$, et, en général, toutes les fonctions de $\frac{1}{x}$ sont absurdes pour $x = 0$. Mais pour M. Hermite avec tous les géomètres, elles sont seulement obscures et indéterminées dans le voisinage de $x = 0$. Dites-nous au moins où commence ce voisinage.

C'est une grande erreur de croire que dans le voisinage de $x = 0$, la valeur de $\frac{1}{x}$ est aussi dans le voisinage de $\frac{1}{0}$, car $\frac{1}{0}$ n'exprime pas une grandeur, et la valeur de $\frac{1}{x}$ n'en peut approcher ni de loin ni de près.

Je n'admets pas le déraillement même dans le cas où on revient immédiatement sur la voie. Par exemple, Poinsot ayant déterminé la résultante de deux forces parallèles et de sens contraires, traite le cas où elles sont égales, en disant :

« Supposons que les deux forces P et R soient égales, la résultante Q sera

« zéro, et la distance AB de son point d'application sera, par la proportion « ci-dessus, $\frac{R \times AC}{0}$, c'est-à-dire infinie. De sorte que, lorsque les deux forces « deviennent parfaitement égales, la résultante est nulle, et la distance du « point d'application infinie; ce qui paraît annoncer qu'il n'y a plus alors de « résultante..... » Une fois que l'auteur a admis qu'une distance peut être représentée par $\frac{R \times AC}{0}$, il ne peut revenir à la vérité que par une contradiction. En effet, dire que « la résultante est nulle et la distance de son point « d'application infinie, » c'est déterminer complètement tout ce qui constitue la résultante; l'auteur ne peut donc pas sans contradiction, ajouter : « ce qui « paraît annoncer qu'il n'y a plus alors de résultante. »

Donner la grandeur de la résultante et la distance de son point d'application, ce n'est nullement annoncer qu'il n'y a point de résultante. La résultante est impossible, parce qu'il est impossible de faire $x = 0$ dans la fraction $\frac{R \times AC}{x}$, et par conséquent impossible qu'une distance soit $\frac{R \times AC}{0}$. Lorsqu'une force est zéro, on peut l'appliquer où l'on veut, et c'est bien peine inutile que de s'en aller l'appliquer à l'infini.

Toute propriété de l'infini est un déraillement, et toute théorie déduite de cette propriété est de la science après déraillement.

Par exemple, je ne nie pas le talent déployé par Cauchy, dans « l'élégante « extension qu'il a donnée à la règle de l'Hôpital »; seulement, je soutiens que c'est de la science après déraillement. J'aurai l'occasion d'en dire autant au sujet de ses intégrales définies singulières.

Lorsqu'une théorie débute par un déraillement, je veux dire par un faux principe, les propositions dont elle se compose peuvent être vraies ou fausses. Mais, lors même qu'elles sont vraies, les démonstrations qui s'appuient directement sur le faux principe, doivent être refaites.

La théorie des parallèles, par exemple, débute par un faux principe, qui est la définition ; mais l'erreur est aussitôt corrigée par le postulatum d'Euclide, et il s'en suit que les propositions qu'on en déduit sont exactes. Malgré cela, les démonstrations qui s'appuient sur le faux principe, doivent être refaites. Ainsi, lorsque pour démontrer que deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles, on dit : En effet, si, prolongées à l'infini, elles se rencontraient en un point, il y aurait, de ce point, deux parallèles à une même droite. Cette démonstration ne vaut rien, parce qu'elle s'appuie sur une fausse définition.

Pour refaire la démonstration, on dira qu'une perpendiculaire à la troisième droite, l'est aussi aux deux autres qui, étant ainsi perpendiculaires à une troisième, sont pour cela parallèles entre elles.

Si la théorie des parallèles n'est vicieuse qu'à la base, il n'en est pas de même de la *Théorie de l'espérance morale*, inaugurée par Daniel Bernoulli, et présentée dans toute sa splendeur par Laplace, dans sa *Théorie analytique des probabilités.*

Cette théorie de l'espérance morale, fondée sur la fortune morale et autres choses non moins morales, est ridicule d'un bout à l'autre. Elle a été imaginée pour expliquer le paradoxe que présente le trop célèbre problème de Saint-Pétersbourg.

Est-il nécessaire d'ajouter qu'ici encore l'infini est la pierre d'achoppement qui produit le déraillement et conduit au paradoxe ?

Ce problème est énoncé de la manière suivante, par Daniel Bernoulli, dans les Mémoires académiques de Pétersbourg.

« Pierre se proposant de jeter en l'air une pièce de monnaie, promet de « donner à Paul un ducat si, dès le premier coup, cette pièce, étant tombée, « montre la face ; deux, si cela n'arrive qu'au deuxième coup ; quatre, si « ce n'est qu'au troisième, et ainsi de suite, en doublant à chaque coup. « On demande le sort de Paul. »

Pour rendre la discussion plus facile à comprendre, je vais reproduire l'énoncé sur un cas particulier.

Paul joue à pile ou tête, et parie, contre Pierre, qu'en huit coups, il amènera tête. Si c'est au premier coup, Pierre perd 2 francs ; si c'est au second coup, il en perd 2^2 ; si c'est au troisième, il en perd 2^3, etc., et, enfin, si c'est au huitième, il en perd 2^8 ou 256.

Paul perd donc dans la seule partie où il n'amène pas tête en huit coups ; mais, dans tout autre cas, il gagne, et la partie finit au coup où il amène tête.

On voit plus facilement combien le jeu présente de combinaisons ou de chances égales, en supposant qu'on jette 8 pièces du même coup ; car les deux faces de la première peuvent se combiner avec chacune des deux faces de la seconde pièce, ce qui donne quatre combinaisons. Chacune des deux faces de la troisième peut se rencontrer avec ces quatre combinaisons, ce qui en fait 8 ou 2^3, avec trois pièces, et, enfin, 2^8, ou 256 avec huit pièces.

Paul perd pour une seule de ces 256 combinaisons, mais pour les 255 autres, il gagne en tout $8 \times 2^8 = 2048$ francs. Il faut donc, pour égaler les avantages, que Pierre regagne en une partie les 2048 francs qu'il a payés pour les 255 parties que Paul a gagnées.

Au lieu de payer 2048 francs la partie où il perd, Paul peut payer 8 francs chaque partie qu'il joue ; de cette manière il aura payé 8×256 ou 2048, lorsque les 256 parties seront jouées.

Les conditions peuvent donc se poser de deux manières, avec le même avantage pour les deux joueurs. Dans le premier cas, l'enjeu de Pierre est 2^8 ou 256 francs, et celui de Paul 8×2^8 ou 2048 francs. Lorsque Paul gagne, il retire son enjeu avec la somme gagnée, qui est 2, 2^2, 2^3..... ou 2^8, suivant qu'il gagne au 1er, au 2e, au 3e..... ou au 8e coup. Au contraire, lorsque Pierre gagne, ce qui n'arrive que si Paul n'amène pas tête en huit coups, il retire son enjeu avec celui de Paul, qui est 8×2^8, ou 2048.

Dans le second mode, Paul paye 8 fr. son droit de jouer chaque partie et ne retire que la somme gagnée, qui est nulle seulement quand il joue 8 coups sans amener tête.

C'est cette seconde manière qui est adoptée dans le jeu de Pétersbourg. Demander quel est le sort de Paul, c'est demander combien il doit payer le droit de jouer une partie.

Nous venons de voir que ce droit se paye 8 francs pour la partie en 8 coups, et que l'enjeu de Pierre doit s'élever à 2^8 ou 256 francs. Le droit de jouer une partie en 50 coups se paierait 50 francs, et l'enjeu de Pierre s'élèverait à 2^{50}, c'est-à-dire à plus d'un million de milliards.

On voit de même que Paul paierait 100 francs le droit de jouer une partie en 100 coups ; mais l'enjeu de Pierre devrait s'élever à 2^{100}, et la somme en or qui représenterait cet enjeu, ferait un volume bien plus gros que celui de la terre.

La partie en 100 coups serait donc plus que ridicule. Cependant l'inventeur du problème de Pétersbourg a trouvé le moyen de poser une question beaucoup plus absurde encore. Il a supposé une partie non pas en cent coups, ni en mille, ni en un million, mais une partie en un nombre infini de coups, pouvant durer non pas des siècles, mais toute une éternité.

Voilà le paradoxe, voilà la question dérisoire, absurde, qui a exercé et embarrassé nos plus illustres géomètres, pour la solution de laquelle ils ont inventé la ridicule *Théorie de l'espérance morale*, fondée sur la fortune morale, etc.

On admet donc que, pour avoir le droit de jouer une partie qui peut durer éternellément, Paul doit payer une somme infinie. C'est pour cela qu'on plaint son malheureux sort, et qu'on cherche à l'adoucir par des considérations morales. Mais on ne considère pas que l'enjeu de Pierre doit êtré infiniment plus grand que celui de Paul, et que si l'on attend que Pierre produise le premier l'enjeu d'une partie en 50 coups seulement, les 50 francs de Paul resteront dans sa poche, ce qui vaudra mieux que de réduire cette somme par des considérations morales.

Ce qu'il y avait de plus raisonnable, selon moi, c'etait de les dispenser l'un et l'autre de jouer une partie qui peut durer une éternité, et pour laquelle aucun des deux n'est en mesure de produire la millionnième partie de son enjeu.

Mais si l'on rejetait comme absurde le problème de Pétersbourg, que deviendrait la belle *Théorie de l'espérance morale*, inventée tout exprès pour la solution de ce problème ?

On a donc cru nécessaire de s'occuper de Paul et des moyens d'adoucir son malheureux sort. On a inventé, tout exprès, l'espérance morale, la fortune morale et les expectatives non moins morales ; sur quoi l'on a édifié des formules savantes, qui réduisent la valeur infinie de l'enjeu de Paul à la bagatelle de 7 fr. 89 c.

On lui dit : Mon cher ami, tu n'est pas riche ; il faut jouer prudemment et ne pas exposer une somme infinie que personne ne possède ; il ne faut exposer qu'une partie de ta fortune et ne pas mettre au jeu plus de 7 fr. 89 c.

Ne pourrait-on pas trouver une « élégante extention » à cette théorie, en disant, par exemple, à quelqu'un qui doit cent francs : sois prudent, ne les paye pas, cela pourrait te réduire à la misère ; au lieu de cent francs, paie cent sous tout au plus. On te dira : « qui paye ses dettes, s'enrichit, » mais ne t'y fie pas, ce serait courir à ta ruine.

C'est cependant une telle plaisanterie que l'on prétend consacrer par une théorie et des formules scientifiques, mathématiques.

Daniel Bernoulli invente les principes, Laplace tire les formules et fait le calcul qui réduit la somme infinie à 7 fr. 89 c.

Tous ceux qui ont traité du calcul des probabilités, ont pris la question au sérieux, jusqu'à M. Laurent, qui termine son explication en disant : « Nous « sommes alors en présence d'un cas ou le théorème de Bernoulli tombe en « défaut ; c'est là, je crois, qu'il faut voir l'explication d'un fait qui répugne « au sens commun, et il faut en conclure que le jeu de Saint-Pétersbourg ne « peut jamais être équitable. »

C'est plutôt la question qui n'est pas raisonnable.

Voici comment Lacroix pose le paradoxe : « Puisqu'il n'est pas impossible « que pile n'arrive qu'après un nombre de coups plus grand que tel nom- « bre qu'il plaira d'assigner, ne s'ensuit-il pas qu'avant de commencer « le jeu, il faut supposer ce nombre infini ? La mise de Paul doit donc être « infinie ; mais quel homme sensé voudra risquer à ce jeu, non pas une « somme infinie, ce qui est absurde, mais même une somme tant soit peu « forte ? Voilà le paradoxe que les géomètres ont cherché à expliquer ou à « éviter. »

Il y a cependant un moyen bien simple : c'est de déclarer la question absurde, tout comme de supprimer les deux bouts d'un bâton.

On dit bien : « La mise de Paul doit donc être infinie ; » et celle de Pierre, qu'en faites-vous ? Complétez seulement son enjeu de la partie en 50 coups, avant d'en supposer un nombre infini.

Laplace présente le paradoxe de la même manière :

« Si la partie continue à l'infini, la mise doit être infinie. Cependant, aucun « homme raisonnable ne voudrait exposer à ce jeu une somme modique, « cinquante francs, par exemple. D'où vient cette différence entre le résultat « du calcul et l'indication du sens commun ? »

Elle vient de ce que vous faites une hypothèse contraire à l'indication du calcul et en dépit du sens commun, en supposant que « la partie continue à « l'infini. »

Tout homme vraiment raisonnable n'exposerait ses 50 francs qu'à la condition que vous mettiez sur table l'enjeu correspondant, c'est-à-dire un million de milliards.

C'est une difficulté qu'on ne prévoit pas. On suppose que l'adversaire de Paul n'a qu'à se croiser les bras devant la table où Paul perd son argent. En conséquence, on ne s'occupe que d'imaginer des moyens de diminuer la perte de Paul.

Voici donc comment Laplace s'y prend. Lorsqu'il a posé cette question : « d'où vient cette différence entre le résultat du calcul et l'indication du « sens commun ? » il y répond en disant :

« On reconnut bientôt qu'elle tenait à ce que l'avantage moral qu'un bien « nous procure, n'est pas proportionnel à ce bien. En effet, il est visible qu'un « franc a beaucoup plus de prix pour celui qui n'en a que 100 que pour un « millionnaire. On doit donc distinguer, dans le bien espéré, sa valeur « absolue de sa valeur relative ; celle-ci se règle sur les motifs qui le font « espérer, au lieu que la première en est indépendante. On ne peut donner « de principe général pour apprécier cette valeur relative. En voici cependant « un proposé par Daniel Bernoulli et qui peut servir dans beaucoup de « cas. »

Voyez-vous venir l'*avantage moral* d'un bien qui n'est pas proportionnel à ce bien ? Une petite somme pourra donc présenter le même avantage moral qu'une grande, ce qui fait que la grande pourra se remplacer par la petite et finalement, une somme infinie par la bagatelle de 7 fr. 89 c. Et en avant les formules mathématiques.

« Il est visible, dites-vous, qu'un franc a beaucoup plus de prix pour celui « qui n'en a que 100, que pour celui qui est millionnaire. » Le contraire pourrait bien se voir aussi, surtout si le millionnaire était par trop avare.

Avantage moral, espérance morale, ordre moral, fortune morale, valeurs morales, expectatives morales, vertus morales : voilà bien des mots sonores qui n'auront jamais le son des espèces sonnantes. Il en est de toutes ces choses morales comme des indulgences attachées aux médailles qu'on revend au poids : elles ne pèsent pas dans la balance.

Cependant on s'en est servi pour confectionner la formule de l'espérance morale, en partant du principe suivant, imaginé par Daniel Bernoulli :

« La valeur relative d'une somme infiniment petite est égale à sa valeur « absolue divisée par le bien total de la personne intéressée. »

Ce principe, tout en faveur des indigents, dépasse même son but, en ce sens qu'il donne une valeur relative infinie à la fortune de celui qui n'a absolument rien, puisque dans ce cas le dénominateur de la fraction est zéro.

Pour que ce cas ne se présente pas, on suppose toujours quelque fortune à celui qui n'a rien ; car il a toujours quelque chose en espérance ou en expectative. S'il est trop paresseux pour travailler, il espère qu'on lui fera l'aumône. « Il n'y a que l'individu mourant actuellement de faim, duquel on « puisse dire qu'il ne possède rien absolument. » Lorsque Daniel Bernoulli a dit cela, il ne voyait pas toute la conséquence qu'on en peut tirer ; car si l'individu qui meurt actuellement de faim, n'a rien absolument, sa fortune relative est infinie, puisqu'elle a pour dénominateur zéro, en sorte qu'il suffirait de mourir de faim pour avoir une fortune morale infinie. C'est donc gravement et moralement qu'il dit : « Il n'y a que l'individu mourant « actuellement de faim, duquel on puisse dire qu'il ne possède rien absolu- « ment. Celui qui se procure en mendiant une somme annuelle de dix pièces « d'or, n'en accepterait pas 50, sous la condition de renoncer à ce moyen de « gagner sa vie, aussi bien qu'à tout autre. Il en est ainsi de ceux qui ne « vivent qu'en empruntant. Pourraient-ils s'interdire à jamais cette « ressource moyennant une somme plus considérable, même que celle qui « les libèrerait de leurs dettes ? Si donc le mendiant et l'emprunteur ne veu- « lent pas renoncer à cette sorte de profession, le premier à moins d'un capi- « tal de 100 pièces d'or, et le second à moins d'un capital de 1000, nous « regardons l'un comme riche de 100 pièces, et l'autre de 1000, quoique dans « le langage ordinaire on dise que l'un n'a rien et l'autre moins que rien. »

Pourquoi celui qui meurt de faim est-il plus pauvre que celui qui meurt de soif ou de froid ? Ceux qui, dans le langage ordinaire, n'ont absolument rien, pouvant être gratifiés d'une certaine fortune morale, pourquoi ne pourrait-on pas escompter chez celui qui meurt de faim, sinon l'espoir de guérir, du moins celui de ressusciter ? Est-il croyable que de pareilles explications soient prises au sérieux par Laplace, qui ayant énoncé le principe de Bernoulli, ajoute :

« Cette définition suppose que tout homme a un bien quelconque, dont la « valeur ne peut jamais être supposée nulle. En effet, celui même qui ne pos- « sède rien, donne toujours au produit de son travail et à ses espérances, une « valeur au moins égale à ce qui lui est rigoureusement nécessaire pour « vivre. »

Il faut maintenant discuter le résultat que Laplace donne dans le passage suivant.

« La fortune physique de Paul étant primitivement 107 fr. 89 c., il ne « doit prudemment risquer à ce jeu que 7 fr. 89 c., au lieu de la somme in- « finie que le résultat du calcul indique, lorsqu'on fait abstraction de toutes « considérations morales. »

Vous faites jouer Paul prudemment en lui disant de ne mettre que 7 fr. 89 c. au lieu d'une somme infinie ; ne jouerait-il pas plus prudemment encore en ne mettant que 4 francs ? Mais, si Paul joue si prudemment, ce sera Pierre qui jouera très-imprudemment. En effet, si Paul met 8 fr. au jeu, il a droit à une partie en 8 coups ; supposons qu'au lieu de s'arrêter au 8[me] coup, il continue de jouer et gagne seulement au cinquantième coup, Pierre sera obligé de lui donner un million de milliards, tandis que Paul n'ayant gagné en aucun des huit premiers coups, la partie était alors perdue pour lui. Tel est l'effet des considérations morales : elles obligent Pierre à payer un million de milliards, alors qu'il a réellement gagné.

« En faut de la morale, mais pas trop n'en faut ».

Si vous voyez que Paul et Pierre s'acharnent à jouer leur fortune, en négligeant leurs devoirs et leurs affaires, persuadez-leur qu'ils se ruineront mutuellement. S'ils veulent vous croire, votre morale pourra leur être profitable. Au besoin, faites intervenir la police, cela ne gâtera pas la morale. Mais, de grâce ! n'y appelez pas les formules mathématiques.

Vous dites que c'est une intéressante application du calcul ; je réponds que c'est plutôt un abus du calcul. Pour comprendre combien de fausses idées les commençants peuvent prendre dans ces prétendues applications du calcul, il faut voir les erreurs auxquelles elles ont conduit les plus grands géomètres. C'est au point que d'Alembert en est venu à nier les principes les plus simples et les plus fondamentaux de la théorie des probabilités. Rien de plus triste que de voir l'opiniâtreté avec laquelle il défend de grossières erreurs, qu'il appelle ses principes.

« Je croirai, dit-il, être en droit de regarder mes principes comme aussi « bons que les principes reçus, tant qu'on ne donnera pas, d'après ces der- « niers principes, une solution nette et satisfaisante du problème très-clair « et très-simple proposé dans le tome V des *Mémoires de Pétersbourg.* Je « connais, jusqu'à présent, cinq à six solutions au moins de ce problème, « dont pas une ne s'accorde avec les autres, et dont aucune ne me paraît « satisfaisante ; et je demande si ce peu d'accord ne marque pas l'insuffi- « sance et l'inexactitude des principes de l'analyse des jeux ? ».

J'ai assez montré que le problème de Pétersbourg est absurde. Rien ne le prouve mieux que les aberrations de d'Alembert au sujet de cette question, qu'il dit « très-claire et très-simple. » Voilà bien un des fruits de l'infini absolu. Nous allons en produire un autre.

Dans la définition des parallèles, comme dans le postulatum d'Euclide, les droites sont supposées privées d'extrémités ; or, deux droites non parallèles peuvent être très-grandes sans se rencontrer, et il en sera toujours de même, excepté pour les droites sans extrémités, c'est-à-dire impossibles. Donc le postulatum énonce une propriété fausse et indémontrable.

Dans la démonstration de Bertrand de Genève, l'espace compris dans l'angle et l'espace compris dans la bande n'étant pas limités, la comparaison de ces espaces illimités n'est pas possible, et la démonstration est illusoire. Duhamel l'entendait ainsi lorsqu'il a dit : « Si l'on mène dans un plan des « parallèles équidistantes, il est absurde de dire que les espaces infinis ren- « fermés entre les parallèles consécutives sont égaux ».

M. Abel Transon, l'auteur de l'*Infini*, parlant des démonstrations d'Arnaud et de Bertrand de Genève, dit :

« Elles s'écroulent, en effet, si on les appuie sur l'idée de l'indéfini ; mais je « crois qu'on peut les relever sur celle de l'infini. Seulement, il faut mon- « trer d'abord que l'infini, pris dans le sens absolu du mot, ne mérite pas « l'exclusion dont les géomètres l'ont frappé ».

Avoir besoin de « relever des démonstrations sur l'idée de l'infini », qui est une idée fausse, au dire de Lagrange et de Cousin, c'est les condamner d'avance, et prouver qu'elles ne vaudront jamais rien.

Prêter une propriété quelconque à l'infini, comme le fait l'auteur quand il dit que « l'infini est l'inverse de zéro », c'est avancer une absurdité, car il n'y a point de nombre qui, multiplié par zéro, donne l'unité.

Dès qu'on se trouve réduit à admettre une pareille propriété de l'infini, pour démontrer le postulatum, il me semble qu'il est bien plus simple d'admettre le postulatum lui-même.

Ainsi, pour démontrer le postulatum d'Euclide, Legendre admet que toute « ligne droite tracée sur un plan et indéfiniment prolongée dans les deux « sens, divise ce plan en deux parties qui, étant superposées, coïncident dans « toute leur étendue et sont parfaitement égales. »

Or, Legendre sait mieux que personne qu'une droite quelconque menée dans tout plan terminé, divise ce plan en deux parties souvent fort inégales ; sa proposition est donc évidemment fausse lorsque le plan est fini ou terminé. Elle ne pourrait donc être vraie que pour un plan privé de périmètre. Un tel plan étant impossible, la proposition n'est ni exacte ni fausse ; elle est absurde, et au moment où Legendre entreprend sa démonstration, il faut lui crier : casse-cou.

Dans la géométrie de Lobatschewsky, dite non-euclidienne, « construite

« de main de maître, » au dire de l'illustre Gauss, mais que M. Bertrand qualifie de « débauche de logique, » en même temps qu'il donne l'auteur comme un « esprit puissant et sagace, profondément instruit de la science la « plus élevée, » la définition des parallèles est énoncée de la manière suivante :

« Toutes les droites tracées par un même point dans un plan peuvent se « distribuer par rapport à une droite donnée dans ce plan, en deux classes, « savoir : en droites qui coupent la droite donnée, et en droites qui ne la « coupent pas. La droite qui forme la limite commune des deux classes est « dite parallèle à la droite donnée. »

Cette définition a besoin d'être tirée au clair ; car l'auteur entend que le plan est terminé ou non ? Si l'auteur entend que le plan n'est pas terminé, il n'y a qu'un mot à répondre : casse-cou.

Mais si les droites tracées dans le plan se terminent à son périmètre, les parallèles menées par le point donné varieront avec le périmètre du plan. Ainsi la définition de Lobatschewsky ne convenant qu'aux droites infinies ou sans extrémités, c'est-à-dire, aux droites impossibles, il s'ensuit qu'elle ne s'applique à rien, et que la géométrie qu'on en déduit est de la science après déraillement.

Puisque la définition des parallèles a, à peu près, le même défaut dans la géométrie euclidienne que dans la géométrie lobatschewskyenne, comment se fait-il que les deux géométries aboutissent à des résultats si différents ?

On le comprendra aisément : dans la géométrie euclidienne, le vice de la définition est immédiatement corrigé par celui du postulatum, tandis que dans la géométrie lobatschewskyenne, le défaut persiste jusqu'au bout. Le théorème sur la somme des angles d'un triangle ne s'y démontre pas, et l'inventeur en est réduit à dire :

« Il n'existe donc pas d'autre moyen que les observations astronomiques, « pour s'assurer de l'exactitude des calculs auxquels conduit la géométrie « ordinaire. Cette exactitude s'étend très-loin. Ainsi, dans les triangles qui « sont accessibles à nos moyens de mesure, on n'a pas encore trouvé que la « somme des trois angles différât d'un centième de seconde de deux angles « droits. »

Une fois le postulatum d'Euclide admis, on démontre très-simplement que la somme des angles d'un triangle égale rigoureusement deux droits. Mais dans la géométrie lobatschewkyenne, où le défaut de la définition des parallèles n'est pas corrigé par le postulatum, on en est réduit à mesurer au lieu de démontrer.

L'auteur nous dit bien « qu'on n'a pas encore trouvé que la somme des « trois angles différât d'une centième de seconde de deux angles droits » ; mais il ne dit pas s'il espère que sa géométrie conduira à cette découverte.

Cette géométrie a été qualifiée de « *débauche de logique* » par M. Bertrand, dans son compte-rendu de la démonstration du postulatum, présentée par M. Carton à l'Académie des sciences.

Cette assertion de M. Bertrand est certainement plus exacte que celle qu'il énonce en disant : « Le problème évidemment équivalent auquel s'attaque « M. Carton, est la détermination de la somme des angles d'un triangle. »

En disant : les deux propositions sont *évidemment équivalentes*, cela dispense de le démontrer. Les deux propositions sont tellement équivalentes, que l'une est fausse et l'autre parfaitement exacte.

Lorsque M. Bertrand parlait ainsi devant l'Académie des sciences, ma *Géométrie affranchie du postulatum d'Euclide* était pourtant publiée ; l'erreur de M. Bertrand y était prévue et signalée en ces termes, à la page XIII.

« Les géomètres sont généralement persuadés qu'en accordant comme dé-« montrée une proposition qui dépend de la théorie des parallèles, par exem-« ple, le théorème sur la somme des angles d'un triangle, le postulatum se « démontrerait aisément. Je fais voir ici combien est grave leur erreur, puis-« qu'en accordant comme évidentes ou démontrées toutes les vérités de la « géométrie, je défie de démontrer le postulatum. J'en ai donné cette raison « très-simple : qu'il est impossible de démontrer la vérité de ce qui n'est pas « vrai. »

L'erreur de M. Bertrand était celle de Legendre, et en général, celle des géomètres qui l'ont suivi. Legendre s'est donc efforcé de démontrer d'abord le théorème sur la somme des angles d'un triangle, persuadé que la démonstration du postulatum s'ensuivrait aisément. Si les deux propositions étaient équivalentes, un mot suffirait pour le prouver, ou pour déduire l'une de l'autre. Cependant, lorsque Legendre a démontré le théorème sur la somme des angles d'un triangle, la démonstration du postulatum lui prend encore deux pages, et quelle démonstration ! Une démonstration au moyen d'une suite d'angles qui forment une série convergente, et d'une suite de distances qui forment une série divergente. Or M. Bertrand prouve, à sa manière, « le « peu de rigueur des raisonnements où les séries divergentes interviennent. »

Legendre a commis sur ce point une double erreur, qui a été partagée par bien des géomètres : c'est de croire qu'une fois qu'on a démontré le théorème sur la somme des angles d'un triangle, il est facile et utile d'en déduire la démonstration du postulatum d'Euclide.

1° Lorsque le théorème sur la somme des angles est admis ou démontré, le postulatum est plus qu'inutile, et la théorie des parallèles s'achève très-simplement sans son secours.

2° Ce théorème admis, le postulatum n'en reste pas moins indémontrable.

Dans la correspondance entre Schumacher et Gauss, on voit que ces géomètres, comme M. Bertrand et tant d'autres, partageaient l'erreur de Legendre en pensant que la démonstration du postulatum se réduisait à celle du théorème sur la somme des angles d'un triangle.

« Je prends, » dit-il « la liberté de vous soumettre une tentative que j'ai « faite pour démontrer sans le secours des parallèles ni d'aucune théorie, la « proposition que la somme des trois angles d'un triangle est égale à 180°, « d'où suivrait alors la démonstration de l'axiome d'Euclide. »

Les partisans de la géométrie non-euclidienne et les partisans de la géométrie euclidienne regardent les deux propositions comme « évidemment équivalentes. » C'est le point de ralliement où ils viennent se donner le baiser d'adieu avant de se tourner le dos pour suivre deux routes différentes, ceux-ci admettant et les autres rejetant le postulatum d'Euclide.

L'erreur, des uns comme des autres, consiste dans la définition des parallèles, fondée, dans un cas comme dans l'autre, sur une fausse propriété de l'infini.

Puisque le postulatum est une proposition fausse, comment se fait-il que la géométrie qui le repousse, soit plutôt une *débauche de logique* que la géométrie qui l'admet? Je l'ai déjà dit : c'est que l'erreur du postulatum corrige celle de la définition des parallèles. Mais dans une géométrie exacte, où les parallèles sont définies par leur équidistance , le postulatum devient plus qu'inutile.

C'est à M. Hoüel que nous devons la traduction de la géométrie non-euclidienne de Lobatschewsky. Il faut lire l'ouvrage pour le connaître, mais pour en apprécier la valeur, il me semble qu'il suffit de la préface du traducteur. Je vais rapporter quelques passages de cette préface, pour les faire suivre de mes observations personnelles.

« Le travail remarquable dont nous donnons ici la traduction, n'a de « commun que le titre avec les nombreuses élucubrations des auteurs qui, « avant et après Legendre, se sont efforcés, sans beaucoup de succès, de dé- « montrer à priori l'axiome XI d'Euclide, plus connu sous le nom impropre « de postulatum. »

« Le but de l'auteur est, au contraire, de prouver qu'il n'existe à priori « aucune raison d'affirmer que la somme des trois angles d'un triangle rec- « tiligne ne soit pas inférieure à deux angles droits, ou, ce qui revient au « même, qu'on ne puisse mener, par un point donné, qu'une seule droite ne « rencontrant pas une droite donnée dans le même plan.

« Cette question a été, pendant plus de cinquante ans, l'objet des médita- « tions de Gauss, qui, dès 1792, était déjà en possession des vrais principes « sur lesquels il a fondé une doctrine complète, appelée par lui *Géométrie « non-euclidienne*. Malheureusement il n'a jamais publié ses recherches...

« Il se contenta de donner son adhésion complète à la *Géométrie imaginaire* « de Lobatschewsky.

« Malgré la haute valeur de ses recherches, elles n'ont attiré jusqu'ici « l'attention d'aucun géomètre, ce qui ne fût pas arrivé, si Gauss les eût « communiquées lui-même aux savants, ou si, du moins, il les eût prises « publiquement sous son patronage. Nous ne croyons pas en exagérer la por- « tée philosophique, en disant qu'elles jettent un jour tout nouveau sur les « principes fondamentaux de la géométrie, et qu'elles ouvrent une voie « encore inexplorée pouvant conduire à des découvertes inattendues. On ne « peut nier qu'elles ne fassent faire un progrès immense aux méthodes d'en- « seignement, en reléguant parmi les chimères l'espoir que nourrissent « encore tant de géomètres de parvenir à démontrer l'axiome d'Euclide autre- « ment que par l'experience. »

D'après Euclide, une parallèle à une droite est une autre droite qui, située dans le même plan, et prolongée à l'infini, ne la rencontre nulle part. Or, lorsqu'après avoir mené par un point une parallèle à une droite, Euclide a besoin de démontrer que toute autre droite menée par le même point, rencontre la droite donnée, il avoue qu'il ne peut donner cette démonstration, et il *demande* qu'on lui accorde la proposition. Voilà pourquoi cette proposition a reçu et conservé le nom de *postulatum*, qui signifie demande. M. Hoüel prétend que « le nom de postulatum est impropre » et il veut que la proposition soit un axiome. Mais alors si vous repoussez un axiome, c'est-à-dire une vérité évidente par elle-même, de quel droit prétendez-vous nous imposer des propositions qui sont loin d'être évidentes, même après vos démonstrations ?

Par exemple, vous dites « qu'affirmer que la somme des trois angles d'un « triangle égale deux angles droits, revient au même que d'affirmer que par « un point donné on ne peut mener qu'une seule droite ne rencontrant pas « une droite donnée dans le même plan. »

Voilà, certes ! une proposition que cent mille démonstrations ne rendront pas évidente; j'en réponds. Pourquoi n'essayez-vous pas d'en donner au moins une ?

Si c'est çà « les vrais principes sur lesquels Gauss a fondé une doctrine « complète », il a bien fait de n'en rien publier, même « après cinquante « ans de recherches ».

M. Hoüel, qui voit, dans la nouvelle géométrie, une riche mine « encore « inexplorée, pouvant conduire à des découvertes inattendues », me rappelle l'auteur de la *Clef de la fortune*, qui indique mille moyens de faire fortune, pendant qu'il en est réduit lui-même à tirer le diable par la queue.

Il faudrait cependant comprendre ce qu'on dit : on nous présente la mine comme inexplorée, tout en nous assurant que Lobatschewsky l'a fouillée durant vingt-cinq ans, et Gauss, durant cinquante ans. M. Hoüel, qui en vante toute la richesse, prend le soin, à la vérité, de nous en présenter quelques échantillons, mais quels tristes échantillons ! Il dit, par exemple :

« Si trois points quelconques, non en ligne droite, pouvaient être placés « sur une sphère, le postulatum d'Euclide serait démontré ». J'ai dit qu'en accordant, comme évidentes ou démontrées, toutes les vérités de la géométrie, le postulatum n'en reste pas moins indémontrable, par la raison bien simple qu'il constitue une proposition fausse. Comme il est vrai et exact que « trois points quelconques non en ligne droite, peuvent être placés sur une « sphère », nous pouvons accorder cette proposition sans que le postulatum soit, pour cela, démontré ni démontrable.

M. Hoüel, énumérant les découvertes de Lobatschewsky, dit « qu'il con- « sidère le cercle et la sphère dans le cas où le centre s'éloigne à l'infini et « où les rayons deviennent parallèles ».

Comment comprendre que deux rayons qui font un angle constant, deviennent parallèles quand le centre s'éloigne à l'infini ?

M. Hoüel dit aussi que « de la trigonométrie de la sphère infinie on passe « à la trigonométrie de la sphère finie ».

Que faut-il entendre par la sphère infinie, puisque « les points de l'espace « situés à distance infinie doivent être considérés comme situés tous dans un « même plan? Cette conception, » dit Lugi Cremone, « fut mise en pleine « lumière par Poncelet, qui, comme conséquence des postulata de la géomé- « trie euclidienne, parvint à cette conclusion. »

Si l'on voulait enfin commencer par le commencement, on commencerait par « mettre en pleine lumière les postulata de la Géométrie euclidienne. »

Il n'y a de sphère infinie que quand on désigne ainsi une sphère très-grande et alors la « trigonométrie de la sphère infinie » ne peut pas différer de la trigonométrie de la sphère finie, puisque la sphère infinie est, en ce sens, finie.

Si « l'axiome d'Euclide » est un vrai axiome, la géométrie qui le rejette ne peut être qu'une « débauche de logique. » Si, au contraire, c'est une vérité non évidente, elle est essentiellement démontrable, et par conséquent ce n'est que par une débauche de logique que l'on peut démontrer qu'il faut « relé- « guer parmi les chimères l'espoir que nourrissent encore tant de géomètres « de parvenir à démontrer cette vérité. » Mais si l'axiome d'Euclide est une proposition fausse, comme je le prouve, il est évident qu'il est impossible de le démontrer, et absurde de vouloir l'utiliser..

Le postulatum d'Euclide n'a d'autre utilité que de corriger l'erreur de sa définition des parallèles. Si l'on définit les parallèles par leur équidistance, la définition ne renfermera plus d'erreur ; et partant elle n'aura plus besoin du postulatum correctif. L'inutilité du postulatum devenant manifeste, Duhamel ne répètera plus qu'on n'a pas encore trouvé le moyen de s'en passer, et les géomètres n'auront pas plus envie d'en chercher la démonstration que de toute autre proposition fausse.

Lorsque les géomètres ne nourriront plus « l'espoir de parvenir à démon- « trer l'axiome d'Euclide, » en résultera-t-il « un progrès immense dans les « méthodes d'enseignement ? » Il me semble que M. Hoüel, qui l'affirme, exagère beaucoup ; car c'est souvent en cherchant l'impossible qu'on trouve le possible ; n'est-ce pas en cherchant la pierre philosophale qu'on a découvert le phosphore ? Et sans sortir du sujet, n'est-ce pas en cherchant la démonstration du postulatum d'Euclide qu'on a trouvé la géométrie non-euclidienne, qui constitue « une découverte capitale, » d'après M. Hoüel ? La définition d'Euclide, comme celle de Lobatschewsky, est fondée sur une propriété illusoire de l'infini. C'est en purgeant la géométrie et les mathématiques en général, de toutes les propriétés qu'on prête à l'infini, qu'on fera faire « un progrès immense aux méthodes d'enseignement, » bien plus sûrement qu'en cherchant si « la somme des trois angles diffère d'un centième « de seconde de deux angles droits. »

Au lieu de rechercher ce que devient la géométrie sans « l'axiome d'Eu- « clide, » on pourrait aussi bien rechercher ce qu'elle deviendrait sans le carré de l'hypothénuse, comme on pourrait rechercher ce que deviendrait l'Astronomie sans les lois de Képler ou sans le principe de la gravitation ; la Physique, sans le principe d'Archimède ; l'Anatomie, si, avec Sganarelle, on plaçait le cœur à droite. On créerait ainsi la Géométrie non-pythagorienne, l'Astronomie non-keplérienne ou non-neutonienne, la Physique non-archimédienne, l'Anatomie Sganarellienne. Ce serait bien rendre à M. Hoüel la monnaie de sa pièce, que de lui indiquer toutes ces sciences nouvelles comme autant de « voies encore inexplorées, pouvant conduire à des découvertes « inattendues, » en ajoutant « qu'on ne peut nier qu'elles ne fassent faire « un progrès immense aux méthodes d'enseignement. »

Duhamel, comme tant d'autres géomètres, a cru le postulatum d'Euclide absolument indispensable. « Jusqu'ici, dit-il, on n'a encore trouvé aucun « moyen rigoureux de s'en passer. » J'ai dit, au contraire, que puisqu'il constitue une proposition fausse, il est nécessaire de s'en passer pour être rigoureux. Duhamel regardait aussi le postulatum comme l'équivalent d'une autre proposition de la théorie des parallèles. « On voit, dit-il, que c'est « comme si l'on admettait que par un point, on ne peut mener qu'une seule

4

« droite parallèle à une droite donnée. C'est en cela que consiste réellement « le célèbre postulatum. »

La preuve que les deux propositions ne sont pas équivalentes, c'est qu'en partant d'une autre proposition exacte, on en conclura facilement que par un point on ne peut mener qu'une parallèle à une droite, tandis qu'on n'en déduira jamais le postulatum d'Euclide.

De l'avis de Pascal, et des géomètres en général, il faut admettre sans démonstration ou à titre d'axiomes, les premières vérités de la Géométrie. « Il doit « s'en trouver nécessairement quelques unes, » dit Auguste Comte, « qui ne « peuvent être déduites, et qui servent, au contraire de point de départ; « qu'il convienne en thèse générale, ajoute-t-il, pour la plus grande perfec- « tion rationnelle de la science de les réduire au plus petit nombre possible, « cela est sans doute incontestable; mais il serait absurde de prétendre les « faire disparaître complètement. » Avec lui, « j'avoue d'ailleurs que je « trouve moins d'inconvénients réels à étendre un peu au-delà de ce qui « serait strictement nécessaire le nombre de ces notions géométriques ainsi « établies par l'observation immédiate, pourvu qu'elles soient d'une simpli- « cité suffisante, qu'à en faire le sujet de démonstrations compliquées et indi- « rectes, même quand ces démonstrations peuvent être logiquement irré- « prochables. »

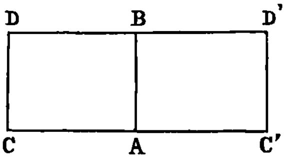
Nous allons montrer combien dans cet ordre d'idées il est simple et commode de se passer du postulatum d'Euclide. Comme Poinsot l'a dit de la force et de son intensité, nous acquérons presque en naissant l'idée du parallélisme de deux droites. Les côtés opposés d'une règle, d'un cadre, d'un tableau, d'une feuille de papier, d'un livre, d'une boîte, et une foule d'autres objets que nous avons toujours devant les yeux, nous donnent l'idée du parallélisme de deux droites; et cette idée se traduit pour l'esprit, comme pour les yeux, par l'équidistance de ces deux droites.

L'équidistance de deux droites étant la traduction la plus naturelle et la plus simple de leur parallélisme, elle en constituera la définition, d'après laquelle on dira qu'*une droite est parallèle à une autre lorsque tous les points de la première sont à égales distances de la seconde.*

La définition précédente une fois acceptée, la théorie des parallèles s'en déduit de la manière la plus simple et la plus rigoureuse, sans passer par le postulatum d'Euclide, ainsi que nous allons le montrer ici.

Théorème

Fig. 1.



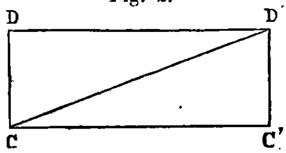
Toute perpendiculaire AB (*fig.* 1) à une droite CC′, est perpendiculaire à sa parallèle DD′.

Prenant AC = AC′, et menant à CC′ les deux perpendiculaires CD, C′D′, on fera tourner autour de AB le quadrilatère AC′D′B, qui viendra ainsi s'appliquer exactement sur ACDB ; ce qui montre que les deux angles en B sont droits.

Corollaire 1. — Puisque toute perpendiculaire à une droite CC′, l'est à sa parallèle DD′, les angles D et D′ sont droits, et le quadrilatère CC′DD′ est rectangle.

Corollaire. 2. — Puisque le côté C′D′ s'est appliqué sur CD, les deux triangles rectangles CDD′, CC′D′ (*fig.* 2) sont égaux ; ce qui prouve que les angles alternes internes sont égaux, et aussi que la somme des angles de chaque triangle égale deux droits.

Fig. 2.



On sait qu'arrivé là, tout le reste de la théorie des parallèles s'ensuit aisément. Par exemple, d'un point on ne peut mener qu'une parallèle à une droite ; car si du point D′, on en pouvait mener deux, elles seraient toutes deux perpendiculaires à CD.

Mais, ni cette dernière proposition, ni le théorème sur la somme des angles d'un triangle ne sont la même chose que le postulatum d'Euclide. La différence est si grande qu'une fois la théorie des parallèles achevée, la démonstration du postulatum d'Euclide est aussi impossible qu'auparavant. Après comme avant la théorie des parallèles, la démonstration du postulatum ne peut se donner qu'en la fondant sur quelque propriété illusoire de l'infini ; car une proposition fausse ne saurait être susceptible d'une démonstration exacte.

La difficulté inhérente au postulatum d'Euclide consistait donc à en démontrer le vice, et non l'exactitude ou l'évidence, comme les géomètres l'ont toujours cru, suivant une opinion dont M. Bertrand s'est fait l'interprète en disant :

« L'évidence de ce postulatum permet aux esprits de bonne foi de l'accep-
« ter comme un axiome, et les dialecticiens, curieux de disputer, non de
« s'instruire, peuvent seuls en contester l'évidence. »

La plupart des meilleurs esprits croient la proposition exacte, mais non évidente ; ils croient donc qu'il est nécessaire, sinon possible, de la démontrer.

Quant aux esprits de bonne foi, qui comme M. Bertrand, voient la proposition évidente au point « de l'accepter comme un axiome, » je ne comprends plus pourquoi ils se morfondent à vouloir la démontrer, puisque la démontrer serait la rendre évidente.

Un journaliste, témoin de la discussion académique sur le compte-rendu de M. Bertrand, fait, de la manière suivante, dans l'*Opinion Nationale*, le compte-rendu de cette discussion.

« Séance du 13 décembre (1869). La séance, d'ailleurs fort longue, a été « en très-grande partie, occupée par une discussion aussi philosophique que « mathématique sur les axiomes fondamentaux de la géométrie. Un profes- « seur de l'Université, M. Carton, ayant imaginé une démonstration de ce « fameux postulatum d'Euclide, que tant de gens du plus haut mérite ont « essayé de prouver, M. Bertrand a demandé, dans un rapport des plus favo- « rables, que l'Académie encourageât l'auteur à poursuivre ses recherches, « et le signalât à l'intérêt du ministre.

« M. Liouville a répondu que l'Académie ne pouvait prendre une telle « décision. Le postulatum est, selon lui, indémontrable. Cette opinion, dont « le développement a captivé durant deux heures entières, l'attention du « public, d'ordinaire si peu recueilli, de l'Institut, a rallié la plupart des « gourmets de l'Académie, et spécialement le baron Charles Dupin et M. « Biénaymé.......

« Séance du 3 janvier 1870. — Nous avons raconté, dans notre dernier « article, comment les questions de géométrie pure, telles que la démonstra- « tion du postulatum d'Euclide, peuvent faire sortir l'Académie de son « domaine habituel, et amener devant elle les discussions philosophiques de « l'ordre le plus élevé. »

« Comme on s'y attendait, la question revient aujourd'hui, et le rappor- « teur, supprimant momentanément son rapport, le remplace par une note « dans laquelle il expose simplement la méthode de M. Carton, que tous les « géometres pourront contrôler..... »

« L'Académie des Sciences est devenue une mer si naturellement houleuse « que la chute d'une feuille y soulève des tempêtes. A la séance de lundi, « M. Bertrand a pu y jouer le rôle d'Eole, en apportant simplement sous son « bras une nouvelle démonstration du postulatum d'Euclide. »

Les géomètres s'accordent à rejeter la démonstration de Legendre sur la somme des angles d'un triangle ; mais quel est celui qui en a montré le défaut ? On ne le cherche même pas, parce qu'étant persuadé que la proposition est équivalente au postulatum, cela suffit pour qu'on les croie indémontrables au même titre.

Ensuite, les géométres croient tous, comme Legendre, que ce théorème une fois établi, il faut vite en extraire la démonstration du postulatum, tandis qu'il devrait servir à en démontrer la fausseté. En effet, ce théorème une fois admis, on en déduit, immédiatement et très-complètement, toute la théorie des parallèles, sauf le postulatum, qui reste, après comme avant, réfractaire à toute démonstration rigoureuse.

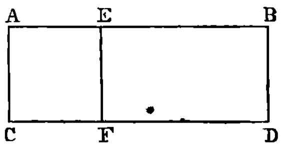
Comme Duhamel dit que « jusqu'ici on n'a encore trouvé aucun moyen « rigoureux de se passer du célèbre postulatum, » je vais prouver qu'il est plus rigoureux et plus facile de s'en passer que de s'en servir.

Admettons donc qu'il soit démontré que la somme des angles de tout triangle égale deux droits, et par suite que celle des angles de tout quadrilatère égale quatre droits

Théorème et Définition

Lorsqu'une droite A B (*fig.* 3) a deux de ses points à égale distance d'une autre droite CD, tous les points de chacune sont à égale distance de l'autre et les deux droites sont parallèles.

Fig. 3.



En effet, de ce que les perpendiculaires AC et BD sont égales, les angles A et B le sont aussi, et comme ensemble ils valent deux droits, chacun d'eux est droit.

Les côtés opposés AB, CD sont égaux aussi ; car une diagonale diviserait le rectangle en deux triangles égaux.

Maintenant, soit EF une perpendiculaire quelconque à l'une des deux droites, il en résulte qu'elle est perpendiculaire à l'autre ; car le quadrilatère BDEF ayant trois angles droits, il faut que le quatrième le soit aussi, et que EF = BD ; ce qui démontre le théorème énoncé.

Toute la théorie des parallèles s'ensuivra très-simplement. Ainsi l'on démontrera, comme a l'ordinaire, l'égalité des angles alternes internes, en menant. par le milieu de la sécante, une perpendiculaire aux deux parallèles. La théorie des parallèles s'achèvera sans qu'on ait besoin du postulatum, et même sans qu'il soit possible d'en tirer la démonstration.

Cela prouve-t-il suffisamment que le postulatum et le théorême sur la somme des angles du triangle ne sont pas des propositions équivalentes ? Je dis que cela prouve même que le postulatum est une proposition fausse.

En effet, supposons qu'on ait formé le catalogue de toutes les propositions qui se rapportent à la théorie des parallèles. Si l'on désigne une quelconque d'entr'elles, sa démonstration pourra facilement se déduire des autres, à moins que par hasard la proposition énoncée ne soit fausse.

C'est ainsi qu'étant données toutes les vérités geométriques qu'on voudra, j'ai porté le défi d'en déduire la démonstration du postulatum d'Euclide.

Il vous paraît fort évident qu'une perpendiculaire et une oblique menées aux extrémités de la même droite se rencontreront, et même si l'on vous donne la longueur de la droite et l'angle que l'oblique fait avec elle, vous déterminerez exactement le point de rencontre.

Comme, au moyen de ces deux données, le point de rencontre peut toujours se déterminer, il est bien certain que dans tous les cas la rencontre aura lieu.

Malheureusement ces deux données ne sont plus données lorsqu'on passe d'un problème particulier à la démonstration générale. Il faut voir alors et bien comprendre ce que la demonstration démontrerait sans s'appuyer sur ces deux données. Elle démontrerait que toutes les droites tracées dans un plan sont parallèles ou se rencontrent. Or, comme dans tout plan fini, grand ou petit, on peut tracer des droites non parallèles qui ne se rencontrent pas, il s'ensuit que la démonstration, si elle était possible, démontrerait une proposition fausse.

On me dit : « Nous n'entendons pas le postulatum comme vous ; nous supposons que le plan est infini. Puisqu'un plan infini est impossible, nous laissons à qui de droit le talent d'en démontrer les propriétés.

J'insiste pour que l'on comprenne bien que le résultat d'une question dépend des conditions qu'on a pu introduire dans la solution, et nullement de celles qui sont restées dans l'esprit. Par exemple, si pour trouver deux nombres dont la somme égale 8 et le produit 12, vous avez désigné le plus grand par x et le plus petit par y, vous serez tout étonné que l'une des deux solutions vous donne $x = 2$ et $y = 6$. C'est que la propriété qu'on énonce en désignant par x le plus grand des deux nombres, n'a pu être introduite dans le calcul.

C'est ainsi que le postulatum, réduit aux seules conditions qui peuvent être introduites dans la démonstration, constitue une proposition fausse.

Carnot, Lagrange et Auguste Comte disent qu'en prenant la courbe pour un polygone infinitésimal, on commet une erreur, qui est ensuite compensée lorsque dans la suite du calcul on néglige des infiniment petits. J'ai montré que l'erreur que l'on commet en prenant la courbe pour un polygone reste dans l'esprit ou expire sur les lèvres, mais n'atteint pas le calcul où l'on opère sur l'équation de la courbe, et non sur celle du polygone.

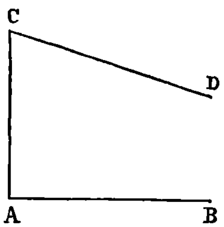
Lorsqu'une condition n'est pas de nature à pouvoir être introduite dans la solution d'une question, le résultat n'en peut dépendre et ne s'accorde pas avec l'idée qu'on s'est faite de la question.

A l'occasion de la publication de ma *Théorie des Convergents*, M. Bour m'écrivit : « Votre manière de comprendre les limites est la seule exacte ; » mais aucun géomètre ne m'a encore dit : Votre manière de comprendre le postulatum d'Euclide est la seule exacte. Au contraire, un professeur de l'Ecole polytechnique m'a écrit : ni moi ni ceux qui m'entourent, nous ne comprenons le postulatum comme vous. J'ai répondu : C'est ce qui fait que vous le comprenez mal. En effet, il faut comprendre, comme le remarque Poinsot, le plus infaillible de nos grands géomètres, que « notre esprit mêle « certaines conditions inutiles et souvent contradictoires aux relations qui « lient l'inconnue aux données et la déterminent. »

Le vrai énoncé d'une proposition démontrée se compose donc uniquement des conditions qui ont pu être traduites mathématiquement, et nullement de ces sortes de restrictions qui ne sont pas de nature à s'écrire algébriquement ou géométriquement.

Ainsi, lorsqu'on donne la distance AC et l'angle C (*fig.* 4) on peut déterminer exactement le point où la perpendiculaire AB et l'oblique CD se rencontrent. Mais lorsqu'il s'agit de démontrer que la perpendiculaire et l'oblique prolongées se rencontrent, on sous-entend que la distance AC et l'angle C restent donnés pour le théorème comme pour le problème, tandis que pour le théorème, ces restrictions ne sont pas de nature à être exprimées géométriquement. Or, supposez que les trois longueurs AB, AC, CD augmentent dans le même rapport, la figure restera semblable à elle-même, en sorte que la perpendiculaire et l'oblique ne se rencontreront pas, même lorsque les trois longueurs seront supposées infinies. La démonstration qui démontrerait qu'elles se rencontrent toujours et dans toutes les hypothèses possibles, démontrerait donc une proposition fausse, et voilà pourquoi cette démonstration, qui est celle du postulatum d'Euclide, est absolument impossible.

Fig. 4.



Les partisans de la géométrie non-euclidienne, qui aiment mieux tout admettre plutôt que le postulatum d'Euclide, l'ont pourtant admis lorsqu'ils ont supposé qu'une perpendiculaire abaissée sur une droite rencontre cette droite ; car pour être sûr que ces deux droites se rencontrent, il faut savoir qu'il n'y a que les parallèles qui ne se rencontrent pas.

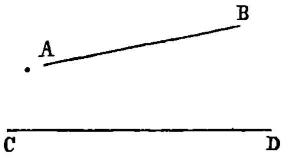
Lionnet est aussi un des géomètres qui ont torturé le postulatum d'Euclide. Il donne la définition des parallèles en ces termes :

« Deux lignes droites sont parallèles, lorsque, étant situées dans un même « plan, elles ne se rencontrent pas. »

Dans cette définition l'auteur ne parle pas de prolongement, et auparavant

il a eu soin de nous démontrer que « toute droite AB (*fig.* 5) qui a ses extré-
« mités d'un même côté d'une ligne droite indé-
« finie CD, est située tout entière de ce côté. »

Fig. 5.



Voilà bien un cas de « deux droites qui étant « situées dans un même plan ne se rencontrent « pas » sans être pourtant parallèles; tandis qu'elles seraient parallèles si la définition donnée par l'auteur n'était pas fausse.

On me reproche de prendre tout au pied de la lettre. « Il faut traduire, » dit M. Bourget. Mais alors, pourquoi donc ne pas dire les choses de manière qu'on puisse les prendre au pied de la lettre et sans être obligé de les traduire?

Lorsque dans ma *Géométrie affranchie du postulatum d'Euclide*, je dis: « Une perpendiculaire et une oblique à une même droite ne se rencontrent « pas nécessairement, » j'entends qu'on prenne mon énoncé au pied de la lettre. Mais M. Bourget le traduit mentalement par celui-ci: « Une perpendi- « culaire et une oblique à une même droite, » prolongées jusqu'à leur rencontre, « ne se rencontrent pas nécessairement. » Alors il en est scandalisé et m'écrit: « Il faut que vous ayez une fière audace pour imprimer à l'usage « des mathématiciens: une perpendiculaire et une oblique à une même « droite ne se rencontrent pas nécessairement. »

Ma réponse était pourtant facile; car si la perpendciulaire et l'oblique se rencontraient nécessairement, vous n'auriez pas pu faire la figure 4, où l'on voit clairement que la perpendiculaire et l'oblique ne se rencontrent pas, puisque chacune a ses extrémités du même côté de l'autre. Pour « imprimer « à l'usage des mathématiciens qu'une perpendiculaire et une oblique à une « même droite ne se rencontrent pas nécessairement, » il faut la même audace que pour imprimer à l'usage des naturalistes que les écrevisses ne sont pas nécessairement rouges. Vous dites : les droites se rencontrent nécessairement, puisqu'il suffit de les prolonger pour qu'elles se rencontrent. Je dis de même : les écrevisses sont nécessairement rouges, puisqu'il suffit de les faire cuire pour qu'elles le deviennent.

On trouve dans « l'*Exposé des vrais principes de Mathématiques*, par M. Coyteux, une discussion fort étendue sur la théorie des parallèles et le postulatum d'Euclide. L'auteur ne manque pas de critiquer les démonstrations données par Legendre sur la somme des angles d'un triangle. Dans la démonstration, où la somme des trois angles est représentée par $S = 2 + a + b - c'$, Legendre dit que le second membre se réduit à 2 lorsque le trois sommets du triangle sont en ligne droite. « Il y a ici, » dit M. Coiteux, « une irrationnalité « palpable. L'équation $S = 2 + a + b - c'$ devient, par l'annulation du « triangle, $o = o$. »

« Si dans l'hypothèse de l'évanouissement du triangle, on supposait que le « second membre de l'équation se réduit à 2, il s'ensuivrait qu'elle devrait « être $o = 2$, expression absurde.

Pardon ! si chacun des angles a, b, c' devient zéro, l'équation $S = 2 + a + b - c'$ se réduit à $S = 2$. Lorsque l'auteur la réduit à $o = o$, où fait-il donc passer le 2 ? On le voit, l'auteur fait $2 = o$, de peur d'arriver à l'absurdité $o = 2$. C'est plus fort qu'Ugolin qui mangeait ses enfants afin de leur conserver leur père.

« Le triangle n'existe plus, dit l'auteur, tout disparaît, il y a évanouissement d'une formule entière. »

Si deux rayons d'un cercle font un angle qui grandit jusqu'à ce que le second rayon soit dans le prolongement du premier, il faudra dire que tout devient zéro, que tout s'évanouit : l'angle, l'arc, le cosinus, la sécante, etc. L'auteur me répond : « Vous dites que l'angle devient égal à deux droits « lorsque le second côté de l'angle vient se mettre dans le prolongement du « premier. Je nie cela, car un angle ne peut être égal à deux droits. Après que « le côté d'un angle s'est mis dans le prolongement d'un autre côté, je ne vois « plus qu'une droite, etc. »

L'auteur ajoute : « Il n'y a plus de triangle, et votre équation « $S = 2 + a + b - c'$ devient $o = o$, et non pas $S = 2$.

« Vous vous étonnez avec insistance que j'aie pu raisonner ainsi. D'où « tirez-vous ces deux zéros, me dites-vous ? d'où tombent-ils ? Comment l'ex- « pression $2 + a + b - c'$ devient-elle zéro et non pas 2, quand a, b, c' sont « nuls ?

« Les trois angles s'évanouissent à la fois ; je dois conséquemment, égaler à « zéro, en ce cas, la somme des trois angles, ou l'expression de cette somme, qui est $2 + a + b - c'$. »

Ainsi M. Coyteux soutient que l'expression $2 + a + b - c'$ devient zéro en même temps que a, b et c'. C'est soutenir que $2 = o$.

M. Albert Transon, prétend que « l'infini, pris dans le sens absolu du mot, « ne mérite pas l'exclusion dont les géomètres l'ont frappé. » Pour moi il me « semble que ce sont les géomètres qui ne méritent guère ce reproche.

Ainsi, Euclide définit les parallèles en disant que prolongées à l'infini de part et d'autre, elles ne se rencontrent jamais. Tous les géomètres qui l'ont suivi, ont admis sa définition.

C'est bien vainement qu'on objecterait qu'on évite le mot infini en disant que les droites ne se rencontrent pas, *quelque loin* ou *si loin* qu'on les prolonge, ou encore à *quelque distance* qu'on les prolonge.

En modifiant ainsi l'expression, personne n'a l'intention de changer l'idée ni la définition d'Euclide.

« Vainement, dit M. Coyteux, on dissimule l'idée d'infini sous l'expression « d'indéfini. »

« Comprennent-ils bien, dit Vincent, ce qu'ils demandent, ceux qui pré- « tendent dégager la théorie des parallèles, tant implicitement qu'explicite- « ment, de toute notion d'infini ?

Lorsque par la définition on introduit l'idée de l'infini dans la théorie des parallèles, il ne faut pas s'étonner de l'y retrouver. Mais quand on définit les parallèles par leur équidistance, on n'a point à s'occuper de leur prolongement à l'infini.

L'exclusion de l'infini consiste non à éviter l'usage du mot, mais celui de ses propriétés. Ainsi, lorsque Legendre dit que « toute ligne droite tracée sur « un plan, et indéfiniment prolongée dans les deux sens, divise ce plan en « deux parties qui étant superposées, coïncident dans toute leur étendue et « sont parfaitement égales, » il n'emploie pas le mot infini, mais il invoque une propriété de l'infini ; car une droite quelconque tracée dans un plan fini, par exemple dans un triangle, dans un carré ou un cercle, ne le divise pas en deux parties égales.

Il serait, je crois, difficile de citer un géomètre qui ait « frappé l'infini « d'exclusion, » comme le dit M. Abel Transon. Ce n'est pas Pascal, qui disait : « Je ne vois que des infinis qui m'enveloppent de toutes parts. »

Cependant, j'ai cru un moment que M. Coyteux m'avait devancé dans la prétention d'exclure l'infini des mathématiques. En effet, c'est résolument et avec vigueur qu'il le repousse en disant :

« Il est évident sans démonstration que l'infini est impossible. La raison « proclame par intuition directe, qu'il n'est point d'infiniment grand, d'éten- « due ou quantité infinie. Il n'est pas besoin d'une démonstration de cette vé- « rité. Je m'adresse à la raison du lecteur, et je lui demande si elle peut ad- « mettre une quantité infinie, un nombre infini, un être ayant une étendue « réelle et sans fin. Non, répondra-t-elle aussitôt.

La plupart des mathématiciens ont admis l'infini, ont raisonné dans l'hy- « pothèse de quantités infinies.... Je montrerai que la science peut se déve- « lopper suffisamment sans recourir à cette hypothèse irrationnelle. Il ne peut « y avoir un rayon infini. Une circonférence est ou n'est pas.... Il y a contra- « diction à supposer que la circonférence au moyen de l'infinité du rayon, « est une ligne droite, que la surface de la sphère devient ainsi un plan. »

Plus loin, il dit : « $\frac{A}{o}$ ne peut exprimer une quantité mathématique, car « la division de A par zero ne saurait donner un quotient quelconque, qui « multipliant le diviseur o, peut reproduire A. L'expression $\frac{A}{o}$ est donc en « soi un signe d'impossibilité, d'absurdité.

« On regarde ordinairement $\frac{A}{0}$ comme l'expression de l'infini. Cette con-
« ception est entiérement fausse, contraire à la raison.

« Tout se réunit donc pour engager les algébristes à répudier théorique-
« ment l'infini et à rendre à la forme $\frac{A}{0}$ sa véritable signification.

« Au lieu de dire que les quantités de la forme $\frac{A}{0}$ sont infinies, qualifica-
« tion inadmissible, on peut se borner à dire qu'elles sont impossibles, ab-
« surdes ; on peut dire qu'elles expriment l'impossibilité, l'absurdité. »

Tout cela est juste et bon. Mais, où l'auteur me paraît en défaut, c'est quand après avoir admis que l'infini est absurde et impossible, il lui prête certaines propriétés pour en réfuter d'autres.

Par exemple, un nombre fini, tel que 8, en peut bien valoir deux autres tels que 5 et 3. Donc, lorsque l'auteur dit qu'« admettre que deux infinis « n'en valent qu'un, c'est violer ce principe : le tout est plus grand que sa « partie », il prétend que les choses se passent tout autrement pour les quantités infinies, qu'il a déclarées absurdes et impossibles.

De même, après avoir dit : « L'expression $\frac{A}{0}$ est donc en soi un signe « d'impossibilité », il ajoute : « on conçoit cependant que $\frac{A}{0}$ figure sans « absurdité dans un calcul ». Ce que l'on conçoit mieux, c'est que les deux propositions sont contradictoires.

Dès que l'infini n'existe pas, il est évident qu'il ne porte ni casque ni chapeau, et il est bien inutile de le coiffer d'un casque pour démontrer qu'il n'a pas de chapeau, ou de lui mettre un chapeau pour démontrer qu'il ne porte pas de casque.

Quoi qu'il en soit, les principes admis par M. Coyteux, sur l'infini, devaient le conduire aux mêmes conséquences que moi, sur la théorie des parallèles.

En effet, il rejette les démonstrations fondées sur l'infini. Par exemple, Legendre ayant dit : « Il répugne à la nature de la ligne droite qu'une telle « ligne, indéfiniment prolongée, puisse être renfermée dans un angle », M. Coyteux réfute en ces termes cette proposition : « Ici, l'auteur, pour « prouver cette assertion, suppose un plan infini coupé par une droite : « hypothèse que réprouve la raison. »

Parlant de la démonstration de Bertrand de Genève, il dit : « Elle a le tort « de se fonder sur l'hypothèse d'espaces infinis ».

La définition ordinaire des parallèles étant fondée sur leur prolongement à l'infini, M. Coyteux devait la rejeter, c'est ce qu'il fait en disant :

« Je propose donc cette définition : Sont dites parallèles deux droites si-
« tuées dans le même plan et à égale distance dans toute leur étendue. »

Une fois que l'auteur a adopté cette définition et rejeté l'infini, il peut et doit achever la théorie des parallèles sans passer par le postulatum d'Euclide. Or, c'est là que M. Coyteux vient échouer; et, telle est la force d'une erreur invétérée, qu'après avoir tout fait pour s'en affranchir, il finit par lui payer le même tribut que les autres géomètres.

Ainsi, il n'a pas compris ni voulu admettre que le postulatum d'Euclide constitue une proposition fausse, que cela résulte rigoureusement de ses principes.

En effet, après avoir reproché à Legendre de « supposer un plan infini », après avoir repoussé l'infini et toute démonstration fondée sur l'infini, il accepte et démontre le postulatum fondé sur l'infini. « Je ne saurais, me « dit-il, vous accorder que le postulatum est faux..... Si deux droites for- « ment avec une autre deux angles moindres, en somme, que deux angles « droits, il est certain que les deux droites, prolongées à l'*infini*, devront se « rencontrer. La proposition d'Euclide est vraie, mais elle n'est pas évidente « par elle-même ».

Ce qui est plus certain, c'est qu'il a déclaré qu'il n'y a pas de « droites pro- « longées à l'infini ». Il admet aussi, comme les autres, que le théorème sur la somme des angles d'un triangle « servirait à démontrer le fameux pos- « tulatum d'Euclide ».

Ainsi, M. Coyteux rejette la définition d'Euclide, mais prétend démontrer son postulatum, qui n'a pourtant d'autre objet que de corriger cette définition.

« Le postulatum d'Euclide est vrai, dit-il, mais il a besoin d'une démons- « tration ». Puisque l'auteur part de cette définition : « J'appelle parallè- « les deux droites qui, placées dans le même plan, sont à égale distance « l'une de l'autre dans toute leur étendue, il n'a plus besoin du postulatum; car une fois cette définition admise, on peut, sans le postulatum, en déduire la théorie des parallèles, par une suite de propositions très-simples et d'une exactitude qui n'est contestée par personne. Non-seulement le postulatum devient inutile dans cette théorie; mais j'ai donné le défi d'en donner la démonstration même après la théorie complète des parallèles.

« Il faut bien, » dit M. Coyteux, « que j'accepte ce défi, et voici la démons- « tration que je propose: »

M. Coyteux démontre, en effet, que si la somme des angles internes d'un même côté diffère de deux droites, les deux droites ne sont pas équidistantes, et il conclut en disant: « Donc les deux droites ne sont pas parallèles, et « suffisamment prolongées, elles doivent se rencontrer. »

Cette conclusion suppose que deux droites non-parallèles, c'est-à-dire non-équidistantes, se rencontrent, et c'est justement en cela que consiste le postulatum, en sorte que l'auteur suppose tout juste ce qui est à démontrer.

La démonstration du postulatum d'Euclide par une pétition de principe était peut-être la seule qui restât à trouver. L'auteur la dit « moins compli-« quée que celle de Legendre ; » et, en effet, il n'est pas possible de donner une démonstration plus simple que celle qui consiste à admettre ce qui est à démontrer.

Dans la discussion sur le postulatum d'Euclide, je n'ai rien dit de la démonstration que Legendre donne au moyen du principe sur l'homogénéité ; d'abord parce qu'elle s'écarte de mon sujet, en ce qu'elle n'est pas fondée sur une propriété de l'infini, et ensuite parce qu'elle a pour objet la somme des angles d'un triangle, et non le postulatum, ce qui, pour moi est très-différent. Il ne faut cependant pas qu'on croie que je juge cette démonstration meilleure que les autres. Je vais au contraire en montrer le défaut.

Un triangle étant déterminé par un côté c et les deux angles adjacents A et B, Legendre écrit $C = \varphi(A, B, c)$, et ajoute : « Mais la ligne c est hétéro-« gène avec les nombres A, B, C ; et si l'on avait une équation quelconque « entre A, B, C, c, on en pourrait tirer la valeur de c en A, B, C ; d'où il « résulterait que c est égal à un nombre, ce qui est absurde ; donc c ne peut « entrer dans la fonction φ, et on a simplement $C = \varphi(A, B)$. »

Or, un triangle étant aussi bien déterminé par deux côtés a et b, et l'angle compris C, on peut poser $c = \varphi(a, b, C)$, et en reproduisant, mot pour mot, le raisonnement précédent, on en conclurait que C ne peut entrer dans la fonction φ et qu'on a simplement $c = \varphi(a, b)$. Il en résulterait qu'il suffirait de connaître deux côtés d'un triangle, pour calculer le troisième.

Naturellement Legendre n'a pas vu et n'a pas cherché à voir cette objection. Aussi, c'est d'un ton triomphant qu'il ajoute : « Mais poursuivons et « faisons voir qu'on peut tirer de la même source les autres théorèmes fon-« damentaux de la géométrie.

Auguste Comte, qui a donné la vraie notion générale du principe de l'homogénéité, va nous dire ce que valent ces démonstrations analytiques de Legendre.

« Quand on examine en elles-mêmes ces prétendues démonstrations analy-« tiques des propositions fondamentales de la géométrie élémentaire, on « vérifie aisément leur insignifiance nécessaire. Elles sont toutes fondées sur « une manière vicieuse de concevoir le principe de l'homogénéité. Ces « démonstrations supposent que ce principe ne permet point d'admettre la « coexistence dans une même équation de nombres obtenus par des compa-« raisons concrètes différentes ; ce qui est évidemment faux, et visiblement « contraire à la marche constante des géomètres. Aussi, il est facile de « reconnaître qu'en employant la loi de l'homogénéité dans cette acception « arbitraire et illégitime, on pourrait parvenir à démontrer avec tout autant

« de rigueur apparente des propositions dont l'absurdité est manifeste au « premier coup d'œil. »

Par exemple, une formule qui donne l'espace parcouru en fonction de la vitesse et du temps, peut se représenter par $e = \varphi(v, t)$, et en copiant le raisonnement de Legendre on dirait : l'espace et le temps étant hétérogènes, e ne peut dépendre de t, et l'on a simplement $e = \varphi(v)$.

Cournot a aussi donné son opinion sur l'application que Legendre a faite du « principe de l'homogénéité. » Il s'exprime en ces termes :

« Cette règle, connue sous le nom de principe de l'homogénéité des fonc- « tions, mène souvent de prime abord à des conséquences importantes con- « cernant la forme des fonctions. On y a eu recours pour démontrer très- « simplement, et à notre avis, de la manière la plus directe, certaines propo- « sitions fondamentales de géométrie et de mécanique (voir la note 2 de la « *Géométrie de Legendre*, et le n° 26 de la mécanique de Poisson).

Cette appréciation, comparée à celle d'Auguste Comte sur la même question, nous donne une idée de la différence des génies des deux géomètres philosophes.

Après avoir traité de l'infini en général, il me reste à discuter en particulier un infini très-singulier, qu'on peut dire unique en son genre, puisqu'il a pour expression l'unité et même zéro. Je veux parler de l'infini en probabilité. En effet, dans la théorie ordinaire, la probabilité est représentée par une fraction qui devient égale à l'unité lorsque la probabilité devient infinie ou se change en incertitude ; ce qui fait dire que l'unité est le symbole de la certitude ou l'expression d'une probabilité infinie. Voilà ce qu'on peut lire dans tous les traités spéciaux.

Les disciples prennent la chose telle qu'on la leur donne, et les maîtres la donnent telle qu'ils l'ont reçue.

Une quantité infinie représentée par l'unité ou par zéro, voila un phénomène qui ne s'est jamais vu ailleurs que dans la théorie des probabilités. Au fond c'est une absurdité à laquelle on n'a été conduit que parce qu'on a adopté une fausse définition, ou plutôt une fausse mesure de la probabilité, en disant :

« La probabilité d'un évènement est le rapport du nombre des cas qui lui « sont favorables, au nombre de tous les cas possibles. »

C'est la définition que donne Laplace dans sa *Théorie Analytique des probabilités*. Mais ici, comme en d'autres cas, on prend pour définition d'une grandeur, ce qui n'en est que la mesure ; et après avoir donné cette définition, Laplace dit lui-même, dans l'introduction : « Le rapport des cas favorables à « celui de tous les cas possibles, est la mesure de cette probabilité. »

L'idée d'une grandeur, sa définition et sa mesure sont trois choses différentes ; car, comme dit Cournot, « un concept existe dans l'entendement indé-« pendamment de la définition qu'on en donne. »

Comment, en effet, pourrait-on donner la juste définition, ou la juste mesure d'une grandeur, si l'on n'en avait pas une idée exacte ? C'est parce qu'on a confondu la dénomination d'une grandeur avec sa définition, que l'on a distingué les définitions de mots des définitions de choses. Cette distinction est illusoire : la dénomination d'une chose est arbitraire, mais sa définition ne l'est pas. Ainsi, cheval se dit *equus* en latin, *horse* en anglais ; mais la définition du cheval doit être exacte et la même dans toutes les langues.

La mesure d'une grandeur se donne souvent avec plus de précision que sa définition, et voilà pourquoi l'on prend dans ce cas la mesure pour la définition.

Delaunay définit la vitesse « le degré plus ou moins grand de rapidité ou « de lenteur du mobile. » Il me semble que l'esprit ne voit guère plus clair quand on dit qu'une vitesse est une rapidité, et encore moins quand on dit que c'est une lenteur. Prenant ensuite pour mesure de la vitesse le rapport de l'espace au temps, l'auteur ajoute : « C'est ce qu'on nomme la vitesse du « mobile. » Comme on le voit, il donne la mesure pour la définition, ce rapport constitue la mesure et non la définition de la vitesse.

Lorsque deux grandeurs varient proportionnellement, elles ont même mesure, et naturellement on opère sur le plus facile à mesurer. Le principe paraît si évident qu'on l'admet partout sans le démontrer, sans même l'énoncer.

Ainsi, pour démontrer que l'angle et l'arc décrit de son sommet entre ses côtés, ont même mesure, on prouve qu'ils varient proportionnellement. C'est de la même manière qu'on démontre que le parallélogramme et le parallélipipède ont même mesure que le produit de leurs dimensions.

Mais à quoi se réduit la proportionnalité de deux grandeurs? Voici sur ce point la réponse très-précise d'Auguste Comte :

« Il faut utiliser cette occasion pour instituer la théorie générale de la pro-« portionnalité, qui peut éclaircir et simplifier tous les cas spéciaux. Nous « devons toujours regarder la proportionnalité de deux grandeurs quelcon-« ques comme due au concours de deux conditions, entièrement indépendantes « et souvent séparées. Elles consistent dans la correspondance constante, d'une « part, des égalités, d'une autre part, des sommes. Réunies, ces deux condi-« tions assurent la proportionnalité des grandeurs comparées ; tandis que, « séparées, chacune devient toujours insuffisante. »

Auguste Comte prouve que la première condition ne suffit pas pour assurer la proportionnalité, en citant l'exemple de l'arc et de la corde, qui ne varient pas proportionnellement, quoique des arcs égaux correspondent toujours à des cordes égales.

En résumé, pour que deux grandeurs aient même mesure, il faut qu'elles varient proportionnellement, et cette condition se décompose en deux autres, qui sont la correspondance dans les égalités, et la correspondance dans les sommes.

M. Bouché, dans son *Traité de Géométrie élémentaire*, a reproduit presque textuellement l'explication d'Auguste Comte. Mais l'insuffisance de la première des deux conditions a été méconnue de bien des géomètres

Ainsi Vincent ayant établi, dans sa géométrie, « qu'à des angles égaux « correspondent des arcs égaux, » ajoute : « il résulte de là, qu'à un angle « double, triple, quadruple.... d'un autre, correspond aussi un arc double, « triple, quadruple.... de l'arc correspondant à l'angle simple. »

Cette conclusion n'est pas légitime. En effet, à des arcs égaux correspondent aussi des cordes égales, et il n'en résulte pas qu'à un arc double, triple, quadruple... d'un autre corresponde aussi une corde double, triple, quadruple... De même à des nombres égaux correspondent aussi des logarithmes égaux, et il ne s'ensuit pas qu'à un nombre double, triple, quadruple... d'un autre, corresponde aussi un logarithme double, triple, quadruple...

Laplace comprenait la nécessité de la proportionnalité entre la probabilité et la fraction donnée pour sa mesure, et il a cru l'établir en démontrant la première des deux conditions, c'est-à-dire la correspondance entre les égalités. Ainsi, après avoir dit : « Le rapport des cas favorables à « celui de tous les cas possibles, est la mesure de la probabilité, » il ajoute. « La notion précédente de la probabilité suppose qu'en faisant croître dans « le même rapport le nombre des cas favorables et celui de tous les cas « possibles, la probabilité reste la même. »

Cette proposition que Laplace prend la peine de démontrer, nous la lui accordons bien volontiers. Par exemple, les fractions $\frac{3}{7}, \frac{6}{14}, \frac{9}{21}$ étant égales, elles correspondent à des probabilites égales : ainsi on a la même probabilité d'amener une boule blanche, quand on la tire d'une urne qui contient 3 boules blanches sur 7, ou 6 blanches sur 14, ou 9 blanches sur 21.

Cette proposition admise, qu'est-ce qu'elle prouve ? qu'à des fractions égales correspondent des probabilités égales, comme à des arcs égaux correspondent des cordes égales ; elle prouve la correspondance des égalités, mais non celle des sommes. Elle prouve la première des deux conditions nécessaires, mais ne prouve nullement la seconde. De même que la somme de deux cordes ne correspond pas à la somme des deux arcs, la somme de deux fractions ne correspond pas à la somme des deux probabilités qu'elles représentent.

La démonstration de Laplace ne prouve donc pas la proportionnalité entre les fractions et les probabilités correspondantes, et il est si évident que cette proportionnalité n'existe pas, qu'on ne comprend pas comment Laplace a pu se persuader qu'il l'avait démontrée.

Si cette proportionnalité existait, la fraction $\frac{9}{7}$, qui est triple de $\frac{3}{7}$ correspondrait à une probabilité triple. Or, si « l'unité est le symbole de la certi- « tude, » comme le répètent tous les auteurs, que pourrait être une probabilité plus grande que la certitude ?

Non-seulement Laplace croit avoir démontré la proportionnalité entre la probabilité et la fraction par laquelle il la représente; mais il se croit en droit d'en tirer cette conséquence philosophique :

« Lorsque, dit-il, tous les cas sont favorables à un évènement, sa proba- « bilité se change en certitude, et son expression devient égale à l'unité. Sous « ce rapport, la certitude et la probabilité sont comparables, quoiqu'il y ait « une différence essentielle entre les deux états de l'esprit, lorsqu'une vérité « lui est rigoureusement démontrée, ou lorsqu'il aperçoit encore une petite « source d'erreur. »

C'est, comme je l'ai dit, de la science ou de la philosophie après déraillement.

« La certitude et la probabilité sont comparables? » et comment donc? La certitude, représentée par 1, sera donc double de la probabilité représentée par $\frac{1}{2}$?

Mais la certitude est aussi représentée par zéro; du moins c'est M. Laurent qui nous l'enseigne dans son « *Calcul des Probabilités*. « Ainsi : » dit-il, « zéro et 1 sont des symboles de certitude. » Il faut donc admettre que la moindre probabilité est plus grande que la certitude représentée par zéro. De plus zéro et 1 étant les symboles de certitude, on pourra, sans doute, les comparer l'un à l'autre, et l'on trouvera que la certitude représentée par zéro est infiniment plus petite que celle qui est représentée par 1.

Ensuite, que peut signifier cette « petite source d'erreur? » Est-ce qu'une chose probable est une erreur plus qu'une chose certaine ?

La grosse source d'erreur consiste à prendre pour la mesure de la probabilité une fraction qui ne lui est pas proportionnelle.

La vraie mesure de la probabilité d'un évènement est le rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas défavorables. Ce rapport, variant proportionnellement à la probabilité, en donne la mesure, et aussi celle de l'enjeu, qui doit être proportionnel à la probabilité.

Ainsi, la probabilité de tirer une boule blanche d'une urne qui contient

3 blanches et 4 noires, est $\frac{3}{4}$; de même que la probabilité de tirer une blanche d'une urne qui contient 5 blanches et 9 noires, est $\frac{5}{9}$.

Par conséquent, l'enjeu de celui qui a parié de tirer une blanche, doit être les $\frac{3}{4}$ de l'enjeu de celui qui tient le pari contre lui, s'il la tire de la première urne, et les $\frac{5}{9}$, s'il la tire de la seconde.

Si l'on met 100 fois plus de blanches dans l'urne qui contient 3 blanches et 4 noires, il y aura 300 blanches et 4 noires; la probabilité de tirer une blanche sera $\frac{300}{4}$, ou 75, et celui qui pariera de tirer une blanche devra mettre un enjeu 75 fois plus grand que celui de l'adversaire.

Dans la théorie ordinaire les deux probabilités sont représentées par $\frac{3}{7}$ et $\frac{300}{304}$; c'est-à-dire que la probabilité qui est 75 fois plus grande que l'autre, est représentée par une fraction qui n'est pas même 3 fois plus grande que l'autre.

Quand on s'est engagé dans une fausse route, il faut bien saisir toutes les occasions de se persuader que c'est la bonne.

Par exemple, Lacroix tient le raisonnement suivant :

« Chaque évènement donne lieu à deux probabilités contraires, savoir :
« celle que cet évènement arrivera et celle qu'il n'arrivera pas ; et la somme
« de ces deux probabilités est toujours égale à l'unité, symbole de la cer-
« titude. »

Conformément à cette explication, quand l'urne contient 3 blanches et 4 noires, la probabilité de tirer une blanche est $\frac{3}{7}$; celle de tirer une noire est $\frac{4}{7}$, et leur somme égale I, symbole de la certitude, parce que, dit-on, on a la certitude de tirer une blanche ou une noire.

Ce raisonnement, qui paraît si concluant, n'est cependant qu'un sophisme.

En effet, si la somme des deux probabilités $\frac{3}{7}$ et $\frac{4}{7}$ égale I, symbole de la certitude, la somme des trois probabilités $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{12}$ égale 2, double de la certitude, et ainsi de suite.

On dit que la probabilité de tirer une blanche étant $\frac{3}{7}$, et celle de tirer une noire $\frac{4}{7}$, la probabilité de tirer une blanche ou une noire est $\frac{3}{7}+\frac{4}{7}$, ou l'unité, symbole de la certitude. Pourquoi dit-on que la somme $\frac{3}{7}+\frac{4}{7}$

représente la probabilité de tirer une blanche ou une noire, et non une blanche et une noire?

Dans notre théorie on dira : la probabilité de tirer une blanche est $\frac{3}{4}$, et celle de tirer une noire est $\frac{4}{3}$; ces deux probabilités étant réciproques, leur produit égale 1, qui n'est pas le symbole de la certitude, mais la probabilité de chacune des deux personnes qui jouent, à chance égale, l'une contre l'autre, à n'importe quel jeu.

A plus forte raison, zéro n'est pas le symbole de la certitude; il représente une probabilité nulle, par exemple, celle de tirer une boule blanche d'une urne qui ne contient que des noires.

En désignant par n et n' les nombres de chances favorables et contraires à un évènement, et par N le nombre total de chances, on a $N = n + n'$, et cette relation montre que deux des nombres étant connus, l'autre s'ensuit immédiatement. Voilà pourquoi malgré la fausse mesure adoptée pour la probabilité, on arrive si facilement à des résultats exacts.

Quoi qu'il en soit, la discussion précédente, sur la fraction choisie pour représenter la probabilité, nous conduit à conclure que la théorie du calcul des probabilités doit être reconstruite sur une autre base, ou, si l'on veut, fondée sur une autre définition; car, d'après la définition adoptée, les probabilités ne sont pas proportionnelles aux fractions qui les représentent; or le défaut de proportionnalité est au moins « une petite source d'erreurs, » et, si l'on en croit Laplace, « il y a une différence essentielle entre les deux états de l'esprit, « lorsqu'une vérité lui est rigoureusement démontrée, ou lorsqu'il aperçoit « encore une petite source d'erreur. »

Cette petite source est-elle la source de grandes erreurs? Elle est au moins l'erreur d'un grand nombre.

L'erreur du jeu de Pétersbourg est à peu près l'erreur de tous. Mais l'erreur de d'Alembert lui est personnelle : « elle prouve seulement, » dit Lacroix, « qu'il peut arriver aux hommes le plus justement célèbres de s'égarer, même « dans un sujet fort simple. »

Quoique l'erreur de d'Alembert soit des plus grossières, elle est qualifiée de paradoxe dans le traité de Lacroix, où on lit ce titre : *Erreur du chevalier de Méré et paradoxe avancé par d'Alembert*. Il y aurait plus de raison de dire : Paradoxe de Méré, et erreur de d'Alembert.

C'est Pascal qui nous a fait connaître le paradoxe du chevalier de Méré, en écrivant à Fermat : « M. de Méré est très-bon esprit, mais il n'est pas géomè- « tre, c'est comme vous savez un grand défaut. »

C'est aussi un défaut d'être plus géomètre que bon esprit, et je vais prouver que l'erreur de Méré doit être imputée aux géomètres qui ont adopté une fausse mesure de la probabilité. Voici en quoi consiste le raisonnement de Méré :

La probabilité d'amener 6 avec un dé est $\frac{1}{6}$, d'après les géomètres, et ils trouvent qu'en 4 coups, il y a plus de probabilité d'amener 6 que de ne pas l'amener. D'après les mêmes géomètres la probabilité d'amener sonnez, c'est-à-dire, deux 6, avec deux dés, est $\frac{1}{36}$; or, puisque $\frac{1}{36}$ est juste 6 fois plus petit que $\frac{1}{6}$, on devra conclure qu'en 24 coups, au lieu de 4, on aura plus de probabilité d'amener sonnez que de ne pas l'amener. Cependant les géomètres soutenaient à Méré que c'est le contraire qui a lieu, et « voilà, » selon Pascal, « quel était son grand scandale, qui lui faisait « dire hautement « que les propositions n'étaient pas constantes, et que l'arithmétique se « démentait. »

Si Méré avait raisonné dans notre théorie, il aurait dit : La probabilité d'amener 6 avec un dé, est $\frac{1}{5}$; celle d'amener sonnez avec deux dés est $\frac{1}{35}$; or, puisque $\frac{1}{35}$ est 7 fois plus petit que $\frac{1}{5}$, il s'ensuit qu'en 28 coups, au lieu de 4, il y aura plus de probabilité d'amener sonnez, que de ne pas l'amener ; ce qui est vrai. Ainsi, dans notre théorie les bons esprits sont parfaitement d'accord avec les géomètres. Si donc, dans la théorie ordinaire, il y a désaccord et scandale, ce n'est pas la faute des bons esprits, mais celle des géomètres.

Les bons esprits comprennent bien que la probabilité de tirer une blanche d'une urne qui contient cent blanches et une noire, est cent fois plus grande que de la tirer d'une urne qui ne contient qu'une blanche et une noire ; ce qui s'accorde bien avec ma manière de représenter la première par 100, et la seconde par 1. Tandis que les géomètres représentant la première par $\frac{100}{101}$, et la seconde par $\frac{1}{2}$, les bons esprits ne comprennent pas pourquoi une probabilité 100 fois plus grande qu'une autre est représentée par un nombre qui n'est pas même double de celui qui représente l'autre.

Si les géomètres s'accommodent facilement de cette disproportion, les bons esprits n'ont-ils pas raison de crier au scandale, comme le chevalier de Méré ?

C'est la singularité d'un infini mesuré par l'unité, qui nous a conduit à discuter le principe fondamental du calcul des probabilités, et la conclusion qui résulte forcément de cette discussion, c'est que ce calcul doit être refait d'un bout à l'autre. Pour savoir au juste ce que la théorie gagnera à être fondée sur une mesure exacte de la probabilité, il faudrait pouvoir comparer en entier la nouvelle théorie avec l'ancienne. Cependant on peut déjà prévoir les simplifications qui doivent résulter de la proportionnalité des grandeurs comparées. On sait, par exemple, ce qu'il en coûte pour établir les formules qui donnent les valeurs de $\sin(a+b)$, $\sin 2a$, $\sin 3a$, $\sin\frac{a}{2}$, etc. Or, si les arcs étaient proportionnels à leurs sinus, on poserait immédiatement : $\sin(a+b) = \sin a + \sin b$, $\sin 2a = 2\sin a$, $\sin 3a = 3\sin a$, $\sin\frac{a}{2} = \frac{\sin a}{2}$, etc. Lorsque deux probabilités sont représentées par les fractions $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{6}$, à quoi correspondra, dans la théorie ordinaire, la somme $\frac{19}{12}$ des deux fractions? Il faudra qu'elle représente une probabilité plus grande que la certitude, dont le symbole est l'unité. Dans notre théorie la somme $\frac{19}{12}$ correspondra à une probabilité égale à la somme des deux probabilités représentées par les fractions $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{6}$, et la plus grande probabilité est toujours très-éloignée de la certitude, qu'aucun nombre ne saurait représenter.

Les simplifications qui résulteront de la nouvelle définition, si définition il y a, ne sont pas les seules qu'on soit en droit d'attendre d'une théorie plus exacte. Elle devra aussi s'affranchir des questions vaines ou illusoires, telles que celles qui sont fondées sur l'espérance morale. Cette réduction faite avec rigueur, s'étendra plus loin qu'on ne pense, si l'on en croit Auguste Comte, qui s'explique en ces termes :

« Avant d'examiner la conception fondamentale de Laplace, au sujet de « l'interprétation cosmogonique des divers caractères généraux que je viens « de rappeler, je ne puis m'empêcher de témoigner ici combien tous les bons « esprits étrangers aux préjugés mathématiques, ont dû trouver puérile et « déplacée la singulière application des chances, indiquée d'abord par Daniel « Bernoulli, et péniblement complétée ensuite par Laplace lui-même, pour « évaluer la probabilité que ces phénomènes ont réellement une cause, « comme si notre intelligence avait besoin d'attendre une telle autorisation « arithmétique, avant d'entreprendre légitimement d'expliquer un phéno- « mène quelconque bien constaté.

« Le calcul des probabilités ne me semble avoir été réellement, pour ses « illustres inventeurs, qu'un texte commode d'ingénieux et difficiles problè- « mes numériques, qui n'en conservent pas moins toute leur valeur abs-

« traite, comme les théories analytiques dont il a été ensuite l'occasion, ou, si « l'on veut, l'origine. Quant à la conception philosophique sur laquelle repose « une telle doctrine, je la crois radicalement fausse et susceptible de conduire « aux plus absurdes conséquences. Je ne parle pas seulement de l'application « évidemment illusoire qu'on a souvent tenté d'en faire au prétendu perfec- « tionnement des sciences sociales. Ces essais, nécessairement chimériques, « seront caractérisés dans la dernière partie de cet ouvrage. C'est la notion « fondamentale de la probabilité évaluée qui me semble directement irration- « nelle et même sophistique : je la regarde comme essentiellement impropre « à régler notre conduite en aucun cas, si ce n'est tout au plus dans les jeux « de hasard. »

Jusqu'ici je n'ai fait aucune mention des opinions de Fontenelle sur l'Infini ; il les a publiées sous le titre d'*Éléments de la Géométrie de l'infini.*

Comme il s'agit d'un traité en règle, de 548 pages in-4°, il mérite un examen tout spécial.

Contrairement à ce qui se fait de nos jours, les définitions et les principes y sont posés d'une manière franche et précise. D'après le rapport de Réaumur, alors directeur de l'Académie royale des sciences, c'est « un ouvrage capable « d'intéresser les plus grands géomètres par les spéculations sublimes qu'il « contient. »

Dans le système de Fontenelle : « Un nombre infini existe aussi réellement « que les nombres finis.

« Dans la suite naturelle, » dit-il, « chaque terme est égal au nombre des « termes qui sont depuis 1 jusqu'à lui inclusivement. Donc puisque le nombre « de tous les termes est infini, elle a un dernier terme qui est ce même infini.

« On l'exprime par ce caractère ∞. »

D'après ce que j'ai dit, un nombre infini est impossible, et ainsi il n'existe pas « aussi réellement que les nombres finis. »

Si l'on forme une table de la suite naturelle des nombres, elle aura nécessairement un dernier terme, et ce terme sera fini. Si par le dernier terme on entend le terme après lequel on ne peut plus en écrire un autre, il n'y en a point, parce qu'après le dernier terme écrit on en peut toujours écrire d'autres.

Puisque ce dernier terme est impossible, il est bien inutile de le représenter par le caractère ∞, et absurde de le soumettre à aucun calcul.

Ce n'est que par un sophisme qu'on peut établir l'existence de ce terme infini, comme le fait Fontenelle en disant : « C'est un dernier terme fini que « la suite naturelle n'a point ; mais n'en avoir point de dernier fini ou en « avoir un dernier infini, c'est la même chose. »

C'est comme si l'on disait que puisque toutes les boules d'une urne sont blanches cela prouve qu'il y en a une noire.

On dit aujourd'hui qu'une quantité infinie est essentiellement variable, tandis que Fontenelle disait au contraire :

« Ainsi ∞ sera toujours pris ici pour un infini fixe et constant, dernier terme de la suite naturelle.

La vérité est qu'il n'y a point de nombre réellement infini, ni fixe ni variable.

Admettre qu'il y a dans la suite naturelle un dernier nombre après lequel on ne peut plus en ajouter d'autres, c'est se créer, en pure perte, une source de paradoxes et de difficultés, que l'auteur ne pourra lui-même ni éviter ni résoudre.

Tout d'abord il avoue qu' « il est inconcevable comment la suite naturelle « passe du Fini à l'Infini, c'est-à-dire comment après avoir eu des termes « finis, elle vient à en avoir un infini. Cependant cela doit être, ou bien il « faut absolument abandonner toute idée de l'Infini, et n'en prononcer ja- « mais le nom, ce qui ferait périr la plus grande et la plus noble partie des « Mathématiques. Je suppose donc que c'est là un fait certain quoiqu'incom- « préhensible... »

Le passage du fini à l'infini est incompréhensible, parce qu'il est impossible. Sans l'infini « la plus grande et la plus noble partie des mathémati- « ques » ne périrait pas; je suis même d'avis qu'elle ne s'en porterait que mieux. C'est ainsi que les pompes ont pu se passer de l'horreur du vide, et n'en fonctionnent pas plus mal. C'est ainsi encore que la théorie des parallèles n'en ira que mieux lorsque, pour la fonder, on remplacera leur prolongement à l'infini par leur équidistance.

Fontenelle continue en disant :

« Puisque ∞ est le dernier terme de la suite naturelle, on ne peut plus « l'augmenter; donc $\infty + 1 = \infty$. Mais, d'autre part, ∞ étant une grandeur, « on peut l'augmenter et même sans fin ; on aura 2∞, 3∞, etc.

J'ai honte de reproduire les raisons au moyen desquelles l'auteur prétend justifier et concilier ces assertions contradictoires ; écoutez-les cependant :

« L'idée naturelle de la grandeur infinie est qu'elle ne puisse être plus « grande ou augmentée, et, en effet, ∞, dernier terme de la suite naturelle « étant 1 qui a reçu des augmentations sans fin, il n'en peut recevoir davan- « tage. D'un autre côté la grandeur infinie étant toujours grandeur, en doit « conserver l'essence, et être susceptible d'augmentation, et même sans fin. « Ces deux idées, si contraires, se concilient parfaitement, et on va le voir, « en les examinant toutes deux l'une après l'autre.

« ∞ ne peut plus être augmenté par les grandeurs qui l'avaient augmenté « jusque là, car il a reçu d'elles tout ce qu'il pouvait recevoir d'augmenta- « tion. Donc $\infty + 1$ n'est que ∞, ou $\infty + 1 = \infty$.

« Et si 1 n'augmente pas ∞, il ne le diminue pas non plus. Donc $\infty - 1 = \infty$.
« Donc, en général, a étant un nombre fini, $\infty + a = \infty$.

« Et si a n'augmente pas ∞, il ne le diminue pas non plus quand il en est « retranché. Donc $\infty \pm a = \infty$.

« Mais par la raison des contraires, et encore plus par la nature de la chose, « je puis dire $\infty + \infty$ ou 2∞, ou 3∞, etc.

« Car il faut que l'infini, puisqu'il est grandeur, soit capable d'augmen- « tation, et je vois qu'il le sera sans fin, puisqu'il pourra être multiplié par « tous les nombres de la suite naturelle, dont le nombre est infini. Voilà donc « les deux idées conciliées. » Qu'on se le dise.

« On voit par là que ∞, qui est devenu infini par une augmentation sans « fin, ou une grandeur finie, qui est sortie de l'ordre du fini, et qui a passé « dans l'ordre de l'infini, ne peut plus être augmentée par tout ce qui est de « l'ordre du fini, dont elle n'est plus, mais seulement par ce qui est de l'ordre « de l'infini, dont elle a commencé d'être, et il est clair qu'il en ira de la « diminution comme de l'augmentation. »

Pour « concilier deux idées si contraires, » Fontenelle invoque « la raison « des contraires; » tandis qu'en suivant la raison ordinaire, j'arrive à une conclusion toute contraire.

En effet, puisque l'auteur a pris le soin de nous avertir que « ∞ sera tou- « jours pris ici pour un infini fixe et constant, dernier terme de la suite na- « turelle, » l'avant-dernier terme de la même suite, est bien $\infty - 1$, et si $\infty - 1 = \infty$, il s'ensuit que l'avant-dernier terme est infini aussi, et même qu'il est le dernier, puisqu'il est ∞, qui « sera toujours pris pour le dernier « terme de la suite naturelle. »

En continuant de cette manière, on démontrerait que la suite naturelle n'a que des termes infinis, dont chacun est le dernier de la suite.

Voilà comment un heureux mélange de la raison ordinaire et de « la raison « des contraires » conduirait à d'autres « spéculations sublimes. »

Les spéculations de Fontenelle sont-elles aussi utiles que sublimes? L'auteur ne vous donne pas le temps d'en douter.

« Pour prévenir la pensée où l'on pourrait tomber que toute cette théorie « abstraite de l'infini est peu utile, je vais apporter quelques exemples des « usages que peut avoir le peu que nous en avons vu jusqu'ici. »

Exemple I

« Si l'on cherche la somme de la suite naturelle poussée jusqu'à ∞, on voit « par la formule générale $\frac{n^2+n}{2}$, que cette somme est $\frac{\infty^2+\infty}{2} = \frac{\infty^2}{2}$, c'est- « à-dire, que la suite naturelle infinie est la moitié du carré du nombre infini

« qui la termine, et quoique ce nombre infini nous soit inconnu, il est certain « qu'on prend par là une idée de cette somme qu'on n'aurait pas eue autre- « ment. »

La suite naturelle, quel que soit le nombre n auquel on l'arrête, a pour somme $\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$. Quand on néglige le terme $\frac{n}{2}$, l'erreur est d'autant plus grande que n est plus grand ; elle est donc infinie quand on suppose n infini. La « Théorie abstraite, » qui nous apprend que quand on suppose n infini, la somme de la suite est exactement $\frac{n^2}{2}$, nous donne donc une mesure et une idée très-fausses de cette somme ; c'est de cette manière « qu'il est certain « qu'on prend par là une idée de cette somme qu'on n'aurait pas eue autre- « ment, » et tout cela en vertu du « grand principe » sur lequel il fonde « l'exactitude du calcul de l'infini, » et qu'il explique en ces termes :

« Le grand principe et le plus fécond du calcul de l'infini, est de faire dis- « paraître toutes les grandeurs d'ordres inférieurs devant celles qui sont « d'un ordre supérieur. Cette méthode laisse toujours quelque ombre de « difficulté dans l'esprit ; on croit bien que les grandeurs que l'on ne compte « point, on les néglige sans erreur sensible ; mais enfin n'y eût-il qu'une « erreur infiniment petite, on soupçonne qu'il y en a, et on croit passer à la « nouvelle géométrie une sorte de licence. C'est ce que je vais examiner.

« L'exactitude demande que les grandeurs qu'on néglige dans le calcul de « l'infini soient négligées comme elles le sont. »

C'est à soutenir cette thèse que Fontenelle consacre la première section de la seconde partie de la « *Géométrie de l'Infini.* » Plusieurs géomètres, après lui, ont soutenu la même thèse, en cherchant à démontrer que c'est non-seulement un droit, mais encore un devoir de négliger dans le calcul de l'infini, les quantités qu'on néglige conformément au « grand principe. Négli- « ger des quantités de cette nature, » dit Carnot, « est non-seulement permis, « mais il le faut, et c'est la seule manière d'exprimer exactement les condi- « tions du problème. »

Après lui, M. Charles de Freycinet dit : « On a non-seulement le droit, mais « encore le devoir de les supprimer dans les relations, afin de rétablir la « réalité des choses. »

J'ai fourni des exemples et j'en présenterai un plus grand nombre encore, où l'application du « grand principe » a conduit les grands géomètres à de grandes erreurs, et non à « la réalité des choses. »

L'exemple choisi par Fontenelle doit nous prouver que, « conformément au « grand principe, il faut, pour l'exactitude, faire disparaître toutes les gran- « deurs d'ordres inférieurs devant celles qui sont d'un ordre supérieur. »

Comme la longueur de la démonstration pourrait fatiguer le lecteur, je veux lui faire comprendre ici le singulier artifice de cette demonstration.

Supposons que l'on pose en principe que dans une somme telle que $24 + 3 + 32 + 5 + 14 - 8$ on ait le droit et le devoir de négliger tous les termes d'un seul chiffre, ce qui réduit la somme à $24 + 32 + 14 = 70$. On pourra s'assurer, de toutes les manières possibles, que la somme proposée est bien égale à 70, ce qui prouvera l'exactitude du principe.

On me dira : le principe se vérifie sur votre exemple, parce que la somme $3 + 5 - 8$, des termes négligés, se reduit à zéro ; mais prenez un exemple où cette somme soit différente de zéro, et le principe ne se vérifiera pas, ce qui prouve qu'il est faux.

Comme c'est le même artifice que Fontenelle emploie pour démontrer l'exactitude de son « grand principe, » faites la même objection, et vous comprendrez ainsi que le principe est faux.

L'auteur suppose un triangle rectangle isocèle, dont il désigne par n chacun des côtés de l'angle droit ; il s'ensuit que l'aire du triangle est exprimée par $\frac{n^2}{2}$. Il exprime aussi d'une autre manière l'aire du triangle proposé, en le décomposant en rectangles et en triangles, dont la somme totale est exprimée par $\frac{(n-1)^2 + n - 1}{2} + \frac{n}{2}$.

Il ajoute : « Les deux méthodes pour trouver l'aire sont toutes deux exactes et le sont également. »

La conclusion que j'en tirerais, c'est qu'on a identiquement

$$\frac{n^2}{2} = \frac{(n-1)^2 + n - 1}{2} + \frac{n}{2},$$

et que, par conséquent, le second membre peut se réduire au premier. L'auteur a bien soin de ne pas tirer cette conclusion : elle ferait rater sa démonstration. Au contraire, pour ôter au lecteur l'idée de faire lui-même la réduction, il dit : « On aura, pour l'aire totale, $\frac{(n-1)^2 + n - 1}{2} + \frac{n}{2}$, que *je*
« *laisse exprès* sous cette forme, parce que la première partie de cette gran-
« deur complexe, appartient aux parallélogrammes seuls, et la deuxième
« aux petits triangles seuls. »

Passant à l'infini, l'auteur écrit $\frac{(\infty - 1)^2 + \infty - 1}{2} + \frac{\infty}{2}$, puis il néglige -1, qui est après ∞ ; ensuite il supprime ∞ comme étant d'un ordre inférieur par rapport à ∞^2.

Mais, puisqu'on a identiquement $\frac{n^2}{2} = \frac{(n-1)^2 + n - 1}{2} + \frac{n}{2}$, la même opération réussira pour toute valeur de n, par exemple, pour $n = 8$, où l'on aura $\frac{8^2}{2} = \frac{(8-1)^2 + 8 - 1}{2} + \frac{8}{2}$; on pourra négliger -1 après 8, et ensuite 8 devant 8^2, ce qui donnera $\frac{8^2}{2} = \frac{8^2}{2}$. Ainsi, le même sophisme qui démontre qu'on peut négliger ∞ devant ∞^2, démontre de même qu'on peut négliger 8 devant 8^2. Voilà pourtant comment Fontenelle démontre que « le « calcul de l'infini est aussi exact que celui du fini. »

Lorsque des quantités représentées par des lettres sont dites infinies, elles restent en réalité finies, puisque l'infini est impossible ; il s'ensuit que le calcul effectué sur ces quantités, conformément aux règles générales, sera « aussi exact que celui du Fini, » puisqu'en réalité il sera fait sur des quantités finies ; tandis qu'il sera illusoire, s'il est fondé sur de prétendues propriétés de l'infini dont ne jouissent pas les quantités finies. Ces trois ou quatre lignes contiennent toute la métaphysique et toutes les règles du calcul de l'infini. Les « *grands géomètres*, » comme les plus petits, sont sûrs d'y trouver un guide plus sûr que dans « les spéculations sublimes que contient la géo- « métrie de l'infini » de Fontenelle.

Nous allons soumettre à ce criterium plusieurs propositions énoncées ou démontrées dans la *Géométrie de l'Infini.*

« 1° Si 1 n'augmente pas ∞, il ne le diminue pas non plus. »

La proposition est fausse, car comme 1 augmente et diminue un nombre fini, il augmente et diminue pareillement tout nombre réputé infini.

« 2° Puisque ∞ n'a aucune aliquote dans toute la suite naturelle des nom- « bres finis, il est nombre premier. »

De même Pascal dit : « Il est faux que le nombre infini soit pair, il est faux « qu'il soit impair, » Moi, je dis : il est faux qu'il soit pair quand il est impair, et il est faux qu'il soit impair quand il est pair. De même, il est faux qu'il soit premier quand il a 36 diviseurs. Ainsi, $2n$ sera pair et $2n + 1$ impair, aussi bien quand n sera dit infini que quand il sera fini.

3° Tous les auteurs s'accordent à dire que pour x infini, $\sin x$ est indéterminé ; il ne l'est pas plus que pour x fini.

« 4° Deux grandeurs infinies peuvent avoir les mêmes rapports que les « grandeurs finies. »

Il n'y a pas à en douter, dès qu'on sait que les grandeurs dites infinies, sont réellement finies.

« 5° Si deux infinis sont égaux, leur différence est nulle ou finie. »

Si leur différence n'est pas nulle, les deux infinis ne sont pas égaux.

« 6° Si deux infinis sont inégaux, leur différence n'est ni nulle ni finie »

Si l'on suppose x infini, les deux infinis $x + 9$ et $x + 5$ sont inégaux, puisque leur différence est 4, aussi bien quand x est infini que quand il est fini.

7° Quant à « l'étrange paradoxe de termes finis devenus infinis par l'élévation au carré ; » quant aux « finis qui ne deviennent infinis que dans le « passage obscur et incompréhensible, et cependant constant, du fini à l'infini ; » quant à « la différence qu'il y a entre le fini fixe et le fini en mouvement pour devenir infini ; » quant aux « finis d'une nature moyenne, qui « les rend propres à se changer en infinis ; » quant à « l'entre-deux qui nous « échappe ; quant aux « finis indéterminables, qui deviennent infinis par « l'élévation au carré, qui sont dans le passage du fini à l'infini, etc., » il sera bon de reléguer tout cela au chapitre des « spéculations sublimes. » L'ouvrage qui les contient, pourrait à bon droit, s'intituler : « Théorie des sublimes « aberrations sur l'infini. »

Je mentionnerai encore une aberration de ce système, exposée dans le passage suivant : « On voit, par tout ce qui a été dit, qu'il y a un nombre infini de « termes finis qui sont mobiles, ou qui s'élèvent d'ordre quand on change A « en A^2. Cela répond à une difficulté qu'on aurait lieu de faire dans le système « commun de l'infini. Pourquoi le fini élevé à quelque puissance finie que ce « soit, demeure-t-il toujours dans son ordre, au lieu que l'infini pareillement « élevé, s'élève toujours d'ordre...? La réponse est que le fait supposé n'est « pas vrai, et que c'est parfaitement la même chose pour le fini et pour « l'infini. »

Pour résoudre la difficulté et montrer dans quel système se trouve l'erreur, supposons x infini dans le polynôme

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + Kx^0 + Mx^{-1} + Nx^{-2} + Px^{-3}.$$

Les termes Cx, Bx^2, Cx^3 sont des infinis du 1er, du 2me, du 3me ordre ; les termes Mx^{-1}, Nx^{-2}, Px^{-3}, sont pareillement des infiniment petits du 1er, du 2me, du 3me ordre ; tandis que le terme Kx^0, qui égale K, représente une quantité finie quelconque.

Si l'on élève au carré tous les termes du polynôme, il devient

$$A^2x^6 + B^2x^4 + C^2x^2 + K^2x^0 + M^2x^{-2} + N^2x^{-4} + P^2x^{-6}.$$

On voit que le terme Kx^0 en devenant K^2x^0, ne change pas d'ordre, parce que $0 \times 2 = 0$; tout le mystère est là.

S'étonner que le carré d'un nombre fini reste du même ordre, c'est s'étonner que $0 \times 2 = 0$; prétendre qu'il peut devenir du premier ordre, c'est prétendre qu'on peut avoir $0 \times 2 = 1$. Voilà cependant où mène ce système de « spéculations sublimes. »

En qualité de secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences, Fontenelle a dû signer le certificat donné par Maupertuis et Clairaut à la traduction que Buffon présente de *la Méthode des Fluxions* de Newton. Dans la préface qui précède cette traduction, Buffon ne paraît pas trop vanter les idées de Fontenelle sur l'infini, et encore moins les qualifier, avec Réaumur, de « spécu- « lations sublimes. » Ainsi, Fontenelle ayant dit que « puisque le nombre « de tous les termes de la suite naturelle est infini, elle a un dernier terme « qui est ce même infini, » il ajoute : « c'est un dernier terme fini que la « suite naturelle n'a point ; mais n'avoir point de dernier fini, ou en avoir « un dernier infini, c'est la même chose. » Buffon réplique : « Le nombre « ne peut être infini, quelque augmentation qu'on lui donne. Mais, dira-t-on, « le dernier terme de la suite naturelle 1, 2, 3, 4, etc., n'est-il pas infini ? « N'y a-t-il pas d'autres termes encore plus infinis que le dernier terme de la « suite naturelle ? Il paraît que les Nombres doivent à la fin devenir infinis, « puisqu'ils sont toujours susceptibles d'augmentation; à cela je réponds que « cette augmentation dont ils sont susceptibles, prouve évidemment qu'ils « ne peuvent être infinis ; je dis de plus que dans ces suites il n'y a point de « derniers termes, que même leur supposer un dernier terme, c'est détruire « l'essence de la suite, qui consiste dans la succession des termes qui peuvent « être suivis d'autres termes, et ces autres termes encore d'autres, mais qui « sont tous de même nature que les précédents, c'est-à-dire, tous finis, tous « composés d'unités; ainsi lorsqu'on suppose qu'une suite a un dernier terme, « et que ce dernier terme est un nombre infini, on va contre la définition du « nombre, et contre la loi générale des suites.

« L'idée de l'infini n'est qu'une idée de privation, et n'a point d'objet réel. « Ce n'est pas ici le lieu de faire voir que l'espace, le temps, la durée ne sont « pas des infinis réels, il nous suffira de prouver qu'il n'y a point de nombre « actuellement infini ou infiniment petit, ou plus grand ou plus petit qu'un « infini, etc. »

Maintenant que Buffon nous a prouvé que l'infini est une plante qui n'a jamais existé nulle part, il va nous dire les noms de ceux qui l'ont découverte, cultivée et exploitée.

« Dès les premiers pas qu'on fait en géométrie on trouve l'infini, et dès les « temps les plus reculés, les géomètres l'ont entrevu ; la Quadrature de la « Parabole, et le Traité de *Numero Arenæ* d'Archimède prouvent que ce « grand homme avait des idées de l'infini, et même des idées telles qu'on les « doit avoir... L'infini était connu, et la Métaphysique de l'infini était « familière aux Anciens, mais l'application qu'on a faite de nos jours du « Calcul à cet infini, nous a mis au-dessus d'eux, et nous a valu toutes les « nouvelles découvertes. Archimède, Appollonius, Vivani, Grégoire de Saint- « Vincent ont connu l'infini, et ils s'en sont servis pour carrer et rectifier

« quelques courbes...... Fermat trouva le moyen de calculer l'infini.... « Wallis prit un autre chemin, il appliqua réellement l'arithmétique aux « idées de l'infini.

« Quiconque apprendra le Calcul de l'infini dans ce Traité de Newton, qui « en est la vraie source, aura les idées claires de la chose, et fera fort peu de « cas de toutes les objections qu'on a faites ou qu'on pourrait faire contre « cette sublime méthode. »

Puisque, d'après Buffon, l'infini n'existe pas, toute la science de l'infini se réduit à savoir qu'il est impossible et qu'il n'a pas d'autre propriété. Donc, la « sublime Méthode » pourrait se passer des propriétés de l'infini, comme la théorie des pompes a pu se passer de l'horreur du vide.

En donnant à la « sublime méthode » le nom de Calcul de l'Infini ou de Calcul infinitésimal, on laisse croire que la supériorité de cette méthode résulte d'une connaissance plus profonde de l'Infini et de ses propriétés chez les savants modernes, qui ont opéré des prodiges au moyen de cette méthode. Cette opinion se trouve encore confirmée par des définitions forcées, inintelligibles, qu'ils substituent trop souvent à des notions très-simples. Buffon avait déjà pu constater ce défaut, et il le signale dans le passage suivant :

« Le fond de la Métaphysique de l'Infini n'a point changé, et ce n'est que « dans ces derniers temps que quelques géomètres nous ont donné sur l'Infini « des vues différentes de celles des Anciens, et si éloignées de la nature des « choses, qu'on les a méconnues jusque dans les ouvrages de ces grands hom- « mes ; et de là sont venues toutes les oppositions, toutes les contradictions « qu'on a fait et qu'on fait encore souffrir au calcul infinitésimal ; de là sont « venues les disputes entre les géomètres sur la façon de prendre ce calcul « et sur les principes dont il dérive ; on a été étonné des prodiges que ce cal- « cul opérait, cet étonnement a été suivi de confusion ; on a cru que l'infini « produisait toutes ces merveilles ; on s'est imaginé que la connaissance de « cet infini avait été refusée à tous les siècles et réservée pour le nôtre ; enfin, « on a bâti sur cela des systèmes qui n'ont servi qu'à embrouiller les faits « et obscurcir les idées. Avant que d'aller plus loin, disons donc deux mots « de la nature de cet infini qui, en éclairant les hommes, semble les avoir « éblouis. »

Nous citerons à l'appui de l'opinion qui vient d'être émise par Buffon, l'exemple où Newton dit (dans sa *Méthode des Fluxions*) : « L'aire $z = ax + \frac{a^3}{x}$ « devient infinie, soit en supposant $x = 0$, ou en le supposant infini » ; tandis que je soutiens qu'il est impossible de faire $x = 0$ sans rompre le lien qui lie x à z. S'il vous plaît de rompre ce lien en faisant $x = 0$, ne dites pas que la valeur de z est $\frac{a^3}{0}$. En effet, si $\frac{a^3}{0}$ représente un nombre, il faut bien qu'il soit fini ou infini. Buffon soutiendra-t-il que $\frac{a^3}{0}$ est un nombre fini? Il ne pourra pas non plus soutenir que c'est un nombre infini, puisqu'il vient de dire que « les nombres ne peuvent être infinis, qu'ils sont tous finis, « tous composés d'unités. »

Tant que z et x sont liés par la relation $z = ax + \frac{a^3}{x}$, on ne peut y faire $x = 0$; mais on peut y faire x très-petit ou infiniment petit, et alors la valeur de z est très-grande ou infiniment grande. Dans ce cas, zéro est la limite de x, mais $\frac{a^3}{0}$ n'est pas la limite de $\frac{a^3}{x}$, et même lorsque x a une valeur très-près de 0, il y a toujours entre $\frac{a^3}{x}$ et $\frac{a^3}{0}$ un abîme sans fond. La valeur très-grande de $\frac{a^3}{x}$ est nécessairement finie; je veux bien cependant la dire infiniment grande, au lieu de très-grande; et, quoique $\frac{a^3}{0}$ ne représente aucun nombre possible, je veux bien lui donner avec vous le nom d'infini; mais, comme il y a entre ces deux infinis, un abîme, je les distingue l'un de l'autre en appelant le premier infini relatif, et le second infini absolu.

Soient maintenant $z = ax + \frac{a^3}{x}$, et $u = a'x + \frac{a'^3}{x}$, je dis:

1° Que z et u deviennent infinis pour x infiniment petit, et non pour $x = 0$;

2° Que pour x infini, le rapport $\frac{z}{u}$ ne devient pas $\frac{a}{a'}$, mais a pour limite $\frac{a}{a'}$;

3° Que pour x infiniment petit le rapport $\frac{z}{u}$ ne devient pas $\frac{a^3}{a'^3}$, mais a pour limite $\frac{a^3}{a'^3}$;

Et pour $x = 0$? Je réponds qu'on ne peut pas faire $x = 0$, à cause des relations qui lient x à z et u. Vous dites qu'en faisant $x = 0$, on a $z = \frac{a^3}{0}$, $u = \frac{a'^3}{0}$, et par suite $\frac{z}{u} = \frac{a^3}{a'^3}$; mais les expressions $\frac{a^3}{0}$, $\frac{a'^3}{0}$ ne représentant aucun nombre possible, je déclare donc absurdes les opérations ou les calculs auxquels on prétend les soumettre.

Autrement, je multiplierais les deux termes de la fraction $\frac{a^3}{0}$ par $\frac{P}{a^3}$, ce qui donnerait $\frac{P}{0}$. En multipliant de même les deux termes de la fraction $\frac{a'^3}{0}$ par $\frac{Q}{a'^3}$, je la transformerais pareillement en $\frac{Q}{0}$, et je trouverais ainsi $\frac{P}{Q}$, et non $\frac{a^3}{a'^3}$, pour la valeur de la fraction $\frac{z}{u}$.

L'infini relatif ayant une valeur en réalité finie, n'a pas d'autres propriétés que celles des quantités finies, et l'infini absolu n'a d'autre propriété que celle d'être impossible. Voilà à quoi se réduit essentiellement toute la science de l'Infini.

Dès qu'on fait une opération quelconque sur un infini, ce ne peut être que sur l'infini relatif, et il faut le traiter absolument comme les quantités finies. L'illustre Gauss ne l'a pas plus compris que les autres géomètres, et il a écrit à Schumacher : « Je commencerai par protester contre l'usage « que vous faites d'une grandeur infinie, en la traitant comme une quantité « déterminée, ce qui n'est jamais permis en mathématiques. » J'ai assez prouvé qu'il n'est jamais permis de la traiter autrement. Gauss, comme Fontenelle, n'est pas de cet avis ; ce qui lui fournit l'occasion de se livrer, comme lui, à des spéculations sublimes. Jugez-en :

« Dans le langage figuré de la théorie de l'infini, on devrait donc dire que « les circonférences de deux cercles infinis, dont la différence des rayons a « une grandeur finie, diffèrent elles-mêmes d'une grandeur qui est à cha- « cune d'elles dans un rapport fini. Il n'y a rien ici de contradictoire, si « l'homme, être fini, ne s'aventure pas à vouloir traiter quelque chose d'in- « fini comme un objet donné et susceptible d'être embrassé par ses forces « de compréhensions habituelles. Vous voyez qu'ici le débat vient toucher « immédiatement au terrain de la métaphysique. »

Et même de la métaphysique allemande.

Dans son *Cours d'Analyse de l'Ecole polytechnique*, M. Hermite dit : « En réalité, le rôle de l'Infini, dans ces régions élevées des mathématiques, « est en entier résumé dans un petit nombre de propositions du caractère le « plus simple.

« Nous devons dire qu'en se montrant de plus en plus féconde, la notion de « l'infini reste toujours simplement la notion d'une grandeur supérieure à « toute grandeur donnée. »

Cette notion si simple de l'infini, comme celle de Fontenelle, comme toute autre, ne peut être qu'illusoire ; car pour comprendre ce que peut être « une « grandeur supérieure à toute grandeur donnée, » il faudrait dire si la grandeur donnée est finie ou infinie. En la désignant par A, il s'ensuivrait que A + 1 serait une grandeur infinie. Or, ceux qui donnent cette définition, admettent tous que tant que A est fini, A + 1 l'est aussi, et que si la quantité A est infinie, A — 1 l'est pareillement, en sorte qu'on aurait une grandeur infinie plus petite qu'une grandeur donnée.

Supposons que, par un moyen quelconque, on ait mis la main sur un nombre infini, ce nombre étant donné, il ne sera plus infini, puisque pour être infini, il faut qu'il soit plus grand que tout nombre donné.

M. Hermite renvoyant aux *Eléments de Calcul infinitésimal* de Duhamel, qu'il appelle « l'éminent géomètre, » je désirerais savoir comment concilier « la notion de l'infini qui, » d'après lui, « reste toujours la notion d'une « grandeur supérieure à toute grandeur donnée, » avec la notion de « l'infini « qui ne signifie pas une grandeur, » d'après Duhamel.

On a fort exagéré « le rôle de l'infini dans les régions élevées des Mathé-« matiques » et les prodiges qu'il opère. Par exemple, Saverien, dans sa *Métaphysique du calcul des Infiniment-Petits*, ayant établi, à sa manière, le principe en vertu duquel il faut les négliger, ajoute : « une fois adopté il « n'y a point de questions, point de problèmes assez élevés auxquels on ne « puisse atteindre. Les géomètres l'ont bien compris, et depuis qu'il est reçu, « rien ne leur coûte. On vient à bout de résoudre les difficultés dont l'idée « n'est pas concevable. L'énoncé du problème inséré dans les *Éléments de* « *Mathématiques* du P. Lami étonne l'imagination la plus hardie. »

Ce fameux problème consiste tout simplement à trouver la limite de la somme des termes d'une progression géométrique décroissante.

Si « l'énoncé du problème étonne l'imagination la plus hardie, » c'est que l'auteur a pris le soin de frapper l'imagination en introduisant dans l'énoncé ce qu'il y a de plus effrayant dans la parabole du mauvais riche, que l'Evangile raconte en ces termes :

« Il y avait un homme riche, qui était vêtu de pourpre et de lin, et qui se « traitait magnifiquement tous les jours. Il y avait aussi un pauvre appelé « Lazare, étendu à sa porte, tout couvert d'ulcères, qui eût bien voulu se « rassasier des miettes qui tombaient de la table du riche ; mais personne « ne lui en donnait : et les chiens venaient lui lécher ses plaies. Or il arriva « que ce pauvre mourut, et fut emporté par les anges dans le sein d'Abra-« ham. Le riche mourut aussi et eut l'enfer pour sépulcre. Et lorsqu'il était « dans les tourments, il leva les yeux en haut, et vit de loin Abraham et « Lazare dans son sein ; et s'écriant, il dit ces paroles : Père Abraham, ayez « pitié de moi ! et envoyez-moi Lazare, afin qu'il trempe le bout de son « doigt dans l'eau pour me rafraîchir la langue, parce que je souffre d'extrê-« mes tourments dans cette flamme. Mais Abraham lui répondit : il y a pour « jamais un grand abîme entre vous et nous. »

Voyant donc qu'à cause de cet abîme, Abraham ne peut envoyer Lazare tremper le bout de son doigt dans l'eau pour rafraîchir la langue du riche défunt, le P. Lami lui suggère l'idée de lui laisser tomber une goutte d'eau, dont la chute est réglée conformément à l'énoncé suivant :

« Le mauvais riche, brûlé de soif, prie Abraham de lui *laisser distiller* une « goutte d'eau, et obtient ce qu'il demande. Abraham laisse tomber une « goutte d'eau qui fait 100 lieues à la première minute, 99 à la seconde, « ainsi de suite, toujours en même proportion à chaque minute de 100 à 99. « Or, la distance des lieux où sont Abraham et le mauvais riche étant sup- « posée infinie, on demande en combien de temps cette goutte arrivera au « mauvais riche? On répond à cela : jamais. En effet, l'espace étant infini, « la goutte d'eau ne peut pas parvenir à un terme. On conçoit bien que la « chose ne peut être autrement. Mais ce qui a droit de surprendre, c'est « qu'on détermine le nombre des lieues que ferait la goutte en tombant « pendant une éternité. »

La somme des n premiers termes de la progression géométrique décroissante $\div\!\div 100 : 99 : \cdots$, étant $S = 10000 - 99\left(\frac{99}{100}\right)^n$, son dernier terme approche aussi près de zéro qu'on veut, mais il ne peut jamais devenir absolument nul; par suite, la somme S, toujours plus petite que 10000, en approche aussi près qu'on veut, mais n'y atteint jamais.

On voit qu'il était facile « d'extirper l'infini » de cette question. Mais quand on vise à l'effet, qu'on veut « étonner l'imagination la plus hardie, » et l'accabler sous le poids des prodiges opérés par l'infini, on prend le cas d'Abraham et du mauvais riche placés « à une distance infinie, » séparés par un « abîme infini ; » on représente le mauvais riche condamné aux supplices « infinis et éternels » de l'enfer, « brûlé de soif, » et les yeux fixés sur la goutte d'eau qui tombe pendant *une éternité* sans jamais arriver jusqu'à lui.

Saverien, qui reproduit le problème du P. Lami, pour prouver qu'« on vient « à bout des difficultés dont l'idée n'est pas concevable, » y ajoute naturellement ses considérations métaphysiques sur l'infini. Par exemple, il dit :

« Cela est admirable : nous voulons concevoir l'infini et connaître cet infini « par le fini même. Cette contrariété vient de ce que nous ne savons au juste « ce que c'est que l'infini. Il est également démontré que la matière est divi- « sible à l'infini et qu'elle ne l'est pas. »

Les contrariétés et les contradictions viennent de ce que l'on confond toujours l'infini relatif et l'infini absolu. La matière est divisible à l'infini, si par l'infini on entend un nombre très-grand, nécessairement fini, mais si l'on entend l'infini représenté par $\frac{1}{0}$, il est impossible pour la matière comme pour l'esprit.

J'ai montré ce que valent les spéculations sublimes de la *Géométrie de* *l'Infini*, de Fontenelle. Chez la plupart de nos grands métaphysiciens on trouve aussi sur l'infini des spéculations non moins sublimes. A la rigueur, je n'aurais point à m'en occuper dans cet ouvrage, puisque je m'y propose, non d'appuyer l'analyse infinitésimale sur de nouvelles idées métaphysiques, mais, au contraire, de la dégager de celles sur lesquelles elle est encore aujourd'hui fondée; cependant les spéculations plus ou moins sublimes que les métaphysiciens ont accumulées sur l'infini, s'appuyant sur des considérations mathématiques, qui leur donnent un certain cachet d'apparente exactitude, il ne sera pas hors de propos d'en dire quelque chose ici.

L'infinité de l'espace et du temps, celle de la divisibilité de l'étendue et de la matière, sont autant de questions qui ont fait le désespoir de la philosophie, et, peut-être, aussi les délices des philosophes de tous les temps.

J'ai une manière très-simple d'apprécier les propositions qui font l'objet de leurs recherches ou de leurs disputes. S'agit-il de l'infini absolu, c'est-à-dire, impossible, la proposition ou la question est declarée absurde. S'agit-il, au contraire, de l'infini relatif, c'est-à-dire, d'une valeur très-grande attribuée à une variable, la proposition sera vraie ou fausse suivant qu'elle conviendra ou non aux valeurs finies.

Par l'application de cette règle les difficultés seront immédiatement résolues; car, comme je le ferai remarquer, le désaccord entre les philosophes résulte le plus souvent, de la confusion des deux infinis et de leurs propriétés.

J'en donnerai quelques exemples tirés de la philosophie fondamentale de Jacques Balmès, que son traducteur donne comme un « homme supérieur » et un « philosophe complet. »

Voici donc ce que dit Jacques Balmès :

« Infini exprime absence de limites.

« Tout ce qui existe est fini ou infini, c'est-à-dire, a des limites ou n'en « a point : fini dans le premier cas, infini dans le second.

« Donc l'infini n'existe pas. »

Voilà qui est bien compris : « L'infini n'existe pas. » Mais, dit-on, puisque nous avons l'idée de l'infini, il faut bien qu'il existe. Balmès répond :

« Les conditions qu'il faudrait remplir nous sont connues; mais aussi, et en même temps, l'impossibilité de les remplir.

« Autre chose est n'être point compris, autre chose ne pas être. La limite « peut se perdre dans les plus lointaines profondeurs et se dérober à nos « regards, peu m'importe; que si elle existe, la condition nécessaire au con- « cept de l'infini n'est pas accomplie.

« Le fini affirme une limite, l'infini la nie. »

La réponse est précise : nous comprenons à quelles conditions une grandeur serait infinie; « mais aussi, et en même temps l'impossibilité de les remplir. » C'est ainsi que nous comprenons à quelles conditions une figure serait un triangle de quatre côtés; « mais aussi et en même temps, l'impossibilité « de les remplir. »

Donc, jusqu'ici Balmès a parfaitement répondu; mais s'il s'en tenait là, il ne serait pas un philosophe complet; la philosophie ne se contente pas de si peu. Il faut qu'elle imagine des propositions contradictoires pour les faire battre les unes contre les autres. Par exemple, elle dira : un triangle de quatre côtés ne peut être qu'un quadrilatère, dont les diagonales sont indéterminées comme sa surface et ses angles, etc. A quoi elle répondra ensuite: puisque c'est un triangle il faut qu'il ait trois côtés; donc ce n'est pas un quadrilatère.

Nous n'aurons pas besoin de quitter Balmès pour produire des exemples de cette espèce. En voici d'abord un :

« Du point où je me trouve placé, je tire une ligne vers le nord; il est « évident que si je la prolonge à l'infini, et je puis le faire, la ligne dont il « s'agit est infinie dans toute la force du terme; donc elle ne saurait être « qu'infinie. »

Il est bien évident que si vous prolongez votre ligne à l'infini, elle sera infinie dans toute la force du terme; mais comment la prolongez-vous à l'infini, puisque vous venez de dire que « l'infini n'existe pas, qu'il est impos- « sible ? » Il ne suffit pas que « la limite se perde dans les plus lointaines « profondeurs et se dérobe à vos regards, » il faut que la limite soit supprimée. Or, s'il vous est impossible de supprimer, d'enlever, ici sous mes yeux, l'extrémité d'une droite, comment cette opération vous sera-t-elle plus facile « dans les plus lointaines profondeurs ? »

Maintenant que l'auteur a démontré que sa ligne « est infinie dans toute la « force du mot, » il va démontrer que cette même ligne infinie n'est pas infinie. « En effet, l'infini n'a point de limites. Or, la ligne dont il sagit, par- « tant du point où vous vous trouvez, et s'étendant vers le nord, ne s'étend « point vers le sud; donc elle a une limite, le point de départ. »

Voilà donc une ligne infinie dans toute la force du mot, qui n'est pourtant pas infinie, puisqu'elle est limitée d'un côté. Cette ligne étant finie par un bout, l'auteur va nous montrer une ligne vraiment infinie par les deux bouts.

« Prolongez à l'infini dans la direction du sud, celle qui va vers le nord, « vous aurez une ligne double de la première.

Ainsi la première ligne est finie, puisqu' « elle a une limite: le point de- « part. » Mais la seconde ligne étant prolongée à l'infini vers le sud comme vers le nord, n'a de limite ni d'un côté ni de l'autre; elle est donc vraiment infinie.

Cependant cette ligne vraiment infinie est réellement finie. D'abord, parce que c'est « une ligne double de la première, » qui est finie. En second lieu, elle n'est pas infinie, en vertu d'un principe général, qui revient à tout bout de champ chez le père Balmès, et par lequel il démolit tous les infinis qu'il a élevés à grands frais. Le père Balmès admet donc qu'une quantité n'est pas infinie, dès qu'il en existe une plus grande qu'elle.

Au moyen de ce principe, il démontre que nulle grandeur infinie n'est infinie, puisque le double de cette grandeur est plus grand qu'elle. Ainsi, admettons avec le père Balmès, que la ligne prolongée à l'infini dans les deux sens, soit « infinie dans toute la force du mot, » il prouvera facilement qu'elle n'est pas du tout infinie. « En effet, » dit-il, « si l'on met à côté de cette ligne « une autre ligne égale, leur somme vous donne une valeur linéaire supé- « rieure, donc la première n'était pas infinie. »

« Les mêmes difficultés se présentent dans l'infini de surface. Soit un plan « infini. Il est évident que l'on peut tirer une infinité de plans distincts du « premier ; la somme de ces surfaces sera certainement plus grande qu'au- « cune des surfaces particulières : donc un plan prolongé à l'infini dans « toutes les directions ne constitue pas une véritable surface infinie. »

Même objection pour les volumes. « Soit E un espace vide que nous sup- « posons infini ; soit M un monde d'une égale étendue, que nous plaçons dans « cet espace ; il est évident que $E + M$ sera plus grand que E. Ainsi, bien que « nous supposions l'infini égal à ∞, M étant pareillement égal à ∞, il résul- « tera $E + M = \infty + \infty = 2\infty$. Donc le premier infini ne sera point infini. »

J'ajoute : ni le deuxième non plus, puisqu'il est égal au premier ; donc il n'y a point d'infini qui soit infini.

Le père Balmès avait naturellement pour Dieu le plus grand respect ; autrement il aurait continué son jeu de bascule en disant : Soit I l'immensité de Dieu, il est clair que 2I est plus grand que I; donc l'immensité de Dieu n'est pas infinie : or « l'immensité de Dieu est Dieu lui- « même, puisque tout attribut de Dieu est Dieu ; » donc Dieu n'est pas infini.

Si l'auteur avait su que Cauchy écrit $2\infty = \infty$, il aurait pu mener la partie plus loin, car après avoir dit que chacune des valeurs de E et M étant infinie, on a $E + M = 2\infty$, il aurait pu ajouter que 2∞ étant double de ∞, il s'ensuit qu'aucune des valeurs de E et M n'est infinie, et avec Cauchy que puisque $2\infty = \infty$, il s'ensuit que chacune des valeurs de E et M est réellement infinie, puisqu'elle vaut leur somme reconnue égale au double de chacune d'elles.

Les géomètres, comme les philosophes, admettent qu'un nombre infini ne peut plus augmenter : Jacques Balmès admet le principe ; mais comme il l'applique en sens contraire, il est tout étonné de faire des découvertes que les autres n'ont pas faites. Ainsi, tandis que les autres disent : Si x est un nombre infini, il ne peut plus augmenter ; donc $x+a=x$, Balmès dit : puisque x est infini, $x+a$ est encore plus grand que x ; donc puisque x peut augmenter, il n'est pas infini.

Les deux propositions sont également absurdes, mais elles conduisent à des conséquences directement opposées.

Pour parler juste, il faut dire que l'infini absolu étant impossible, la valeur infinie supposée à x ne peut être qu'un infini relatif, c'est-à-dire une valeur extrêmement grande, mais finie.

Rien n'empêche donc cette valeur infinie d'augmenter de a, et de devenir $x+a$; mais jamais on n'a $x+a=x$, puisque la différence est a pour toute valeur finie ou infinie de x.

Il est bien clair que deux quantités ne sont pas égales tant que leur différence n'est pas nulle ; mais on escamote cette différence en imaginant tout exprès une nouvelle définition de l'égalité pour les quantités infinies, et l'on dit que deux quantités infinies sont égales lorsque leur rapport a pour limite l'unité. La limite du rapport $\frac{x}{x+a}$ est, en effet, l'unité ; mais la différence des deux quantités n'en est pas pour cela moins grande, ni la nouvelle définition moins fausse.

Quant aux expressions $\frac{1}{0}$, $\frac{a}{0}$, etc., elles répondent à des questions impossibles, qui reviennent à demander combien il faut de zéros pour faire 1 ou a ; ces expressions ne sont pas des quantités ni des limites de quantités. Comme on dit que leur valeur est infinie, c'est ce que j'appelle l'infini absolu, qui n'a d'autre propriété que d'être impossible. Voilà pourquoi je déclare absurdes toutes les opérations ou les calculs auxquels on prétend soumettre ces expressions.

Ainsi, en doublant les deux termes de la fraction $\frac{1}{0}$ on a $\frac{2}{0}$, comme en doublant seulement le numérateur. Dira-t-on, dans le premier cas, que la fraction $\frac{2}{0}$ égale $\frac{1}{0}$? et dans le second, qu'elle en est le double ? Les deux propositions sont également absurdes.

C'est par un pareil calcul que le Père Balmès prouve « que la fraction $\frac{a}{0}$ « n'exprime point, dans la rigueur du mot, un véritable infini. En effet, dit-« il, quelle que soit la valeur de $\frac{a}{0}$, cette valeur sera toujours moindre que « $\frac{2a}{0}$. »

Voici un autre calcul pareillement absurde sur l'infini absolu.

Après que Balmès a dit : « Il est certain qu'une addition de zéros donne « zéro pour résultat et ne peut donner autre chose, » vous croyez qu'il va conclure qu'on a toujours $0 \times n = 0$, quelle que soit la valeur même infinie de n. Au contraire, il dit : « Toutefois, en mathématiques, on admet que « certaines expressions égales à zéro, donnent comme produit une quantité « finie, quand on les multiplie par une quantité infinie. »

Il le prouve en disant : « de $\frac{0}{m} = 0$ multiplié par $\frac{m}{0} = \infty$, il résultera « $\frac{0}{m} \times \frac{m}{0} = \frac{0 \times m}{m \times 0} = \frac{0}{0}$, nombre égal à une quantité finie quelconque. « Cette démonstration ne sort pas des principes de l'algèbre élémentaire. » Il est malheureusement vrai que dans l'algèbre élémentaire, comme dans l'analyse transcendante, on fausse l'esprit des commençants par de pareils calculs sur l'infini absolu.

On dit $\frac{0}{n} \times \frac{m}{0} = \frac{0}{0}$; ou bien, sous prétexte que l'indétermination n'est qu'apparente, on escamote le facteur $\frac{0}{0}$ de $\frac{m}{n} \cdot \frac{0}{0}$, et l'on donne $\frac{m}{n}$ comme la vraie valeur du produit.

Toute la doctrine du père Balmès sur l'infini pourrait se condenser dans cette seule proposition. Il n'y a point d'infini qui soit infini.

Démonstration : Soit A un infini quelconque, 2A est plus grand, donc A n'est pas infini. C'est de cette manière qu'il emploie une série de chapitres à construire des infinis de toute sorte, pour les démolir ensuite, en démontrant qu'ils ne sont pas infinis.

Lorsqu'on voit les plus grands génies et les philosophes les plus complets, invoquer si facilement les principes les plus absurdes et tomber dans les plus grossières erreurs, même sur des questions susceptibles d'une solution claire et facile, peut-on attacher la moindre valeur aux raisonnements par lesquels ils prétendent nous donner la solution des questions les plus insolubles ou les plus inintelligibles ?

Par exemple, lorsque Balmès dit : « qu'un corps unique à angles rentrants « est une impossibilité, » puis-je prendre au sérieux sa démonstration ? Lorsqu'il prétend démontrer que « dans la surface de l'univers, nul point « ne dépasse l'autre, » comprend-il même la question ? et deux points étant donnés, peut-il dire quel est celui qui dépasse l'autre, ou n'est pas dans l'alignement de l'autre ?

Lorsqu'il a démontré que si Dieu avait créé un corps unique, ce corps n'aurait pu être creux ou à angles rentrants, il en résulte que si Dieu avait commencé par l'homme, il n'aurait pu, avec la meilleure volonté de le faire à son image, lui donner plus d'une jambe. Il est vrai que c'eût été encore une jambe de trop, puisqu'on démontre aussi que s'il n'existait qu'un seul corps, « Dieu ne pourrait pas lui donner le mouvement. »

Il n'est pas jusqu'à Duhamel qui ne croie avoir dit le dernier mot sur l'espace infini en démontrant que « c'est le néant. » Il paraît tout fier de cette découverte. Il faut bien pourtant avouer que Kant n'en était pas loin, lorsqu'il disait : « En réalité l'espace n'est rien ; » ni Leibnitz, qui a dit : « l'es- « pace n'est rien du tout sans les corps. »

Quoi qu'il en soit, voici comment Duhamel démontre que l'espace infini n'est pas autre chose que le néant :

« La plupart des hommes se figurent que par cela seul qu'on admet la « possibilité des corps, on doit admettre qu'il y avait de la place pour les rece- « voir ; et, de la pure abstraction qui nous fait concevoir la matière et la « figure comme susceptibles d'une étendue sans borne, ils font la réalité d'un « être qu'ils nomment espace. Il est difficile de pousser l'aberration plus loin.

« Après s'être créé ce fantôme, si l'on vient à y appliquer son attention, et « à chercher à se rendre compte de son existence, on se trouve saisi d'une « sorte d'effroi, comme il arrive toutes les fois qu'on veut sonder quelque « mystère impénétrable à l'esprit humain. Un être infini dans tous les sens « et indépendant de toute création, confond l'imagination ; il est aussi diffi- « cile à concevoir que Dieu lui-même : néanmoins personne presque ne doute « de son existence ; ceux-là même y croient, qui ne croient pas à l'existence « de Dieu. Cet espace fantastique n'est pas une chose ; c'est l'absence de toute « chose : c'est le néant.

Ce que l'auteur dit ici de l'espace, il le dit plus loin du temps ; ainsi le temps, comme l'espace, c'est le néant. Désormais donc il n'y aura plus ni espace, ni temps ; mais tout simplement le néant, ou deux néants, s'ils sont différents.

Qu'est-ce que la science pourrait bien gagner à cette découverte de Duhamel ? Lorsque Hoëné Wronski dit (dans sa *Technie de l'Algorithmie)* que « ce sont « les lois du temps et de l'espace qui font le véritable objet des mathéma- « tiques, » cette proposition, pas déjà trop claire, le deviendra-t-elle davantage quand on dira : « ce sont les lois des deux néants qui font le véritable « objet des mathématiques ? »

Verra-t-on, par exemple, plus clairement le mouvement des astres quand on les fera circuler dans le néant, au lieu de les faire mouvoir dans l'espace ?

La philosophie qui dit : « L'espace infini, c'est l'immensité de Dieu, et « l'immensité de Dieu est Dieu lui-même, » gagnera-t-elle beaucoup à dire : le néant infini c'est l'immensité de Dieu, et l'immensité de Dieu, est Dieu lui-même ?

En discutant tout particulièrement les idées de J. Balmès sur l'infini, je n'ai point eu la prétention de m'attaquer au plus fort des philosophes, d'autant plus que j'ai entendu dire que les plus forts philosophes sont les allemands. Du reste jugez-en vous-même, et écoutez-moi Hégel qui va vous dire au juste ce que c'est que le vrai infini.

« Le vrai infini » dit-il, « ou ce qui revient au même, la qualité de la « quantité, est le *rapport quantitatif.*

Si vous ne comprenez pas parfaitement, voici l'explication :

« Dans ce rapport le quantum n'est plus une déterminabilité à l'état d'indif- « férence, mais il est quantitativement déterminé en ce qu'il est absolument « lié à un autre quantum qu'il ne pouvait atteindre. Il se continue dans un « autre terme qui est lui aussi un quantum. Ces deux quantités ne sont pas ici « deux quantités liées par un rapport extérieur, mais chacune d'elles a sa « détermination dans son rapport avec l'autre, et c'est l'autre qui fait la « déterminabilité de toutes les deux. Le premier rapport est un rapport « immédiat ou direct. Ici l'on a trois termes dont l'un, l'exposant fait la « limite des deux autres. Ceux-ci ne sont ce qu'ils sont que dans cette limite ; « mais comme ils ne constituent que le premier moment du rapport quanti- « tatif, et qu'ils ne sont pas encore médiatisés, ils gardent l'indétermination et « l'indifférence de leur nature. Soient, par exemple, $\frac{a}{b}$ et son exposant c ; « a et b ne sont ce qu'ils sont, c'est-à-dire, des quantités déterminées, que, « dans et par ce rapport, et par conséquent ils n'ont pas de valeur hors de ce « rapport. Mais par cela même que c'est l'exposant ou le rapport qui constitue « ici l'élément fixe et déterminé, les deux côtés du rapport sont indéterminés « et indifférents à tout rapport. »

Fichte, autre philosophe allemand a publié *les Principes Fondamentaux de la Science.* Inutile de dire que ce ne sont point les principes fondamentaux adoptés dans mon ouvrage. J'ajouterai même que je serais fort embarrassé de fonder une science quelconque sur les principes de Fitchte. Par exemple, que pourrait bien gagner la science à savoir que « le moi se pose soi-même, » que « moi je suis moi, » que « le moi est c'est être qui est simplement, parce « qu'il se pose soi-même comme étant, qu'en tant qu'il se pose il est, et « qu'en tant qu'il est il se pose, » que « le moi existe nécessairement pour le « moi, » que « je suis absolument parce que je suis, » que « A = A, parce « que le moi qui a posé A est identique à celui dans lequel il est posé, » que « Dieu n'a jamais conscience de soi-même. »

Maintenant que j'ai donné un échantillon des principes scientifiques des philosophes allemands, je donnerai aussi un exemple des principes philosophiques de nos savants. Je l'emprunterai à M. Bertrand, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences.

Ceux qui ont lu, dans le *Dictionnaire Universel des Contemporains*, que « M. Bertrand fut admis, à 11 ans, à l'école polytechnique à titre d'essai, » ne seront pas étonnés de le voir mêler un peu de philosophie aux premiers principes d'arithmétique. Donc après avoir, comme tous les auteurs, distingué le nombre concret du nombre abstrait, il avance et démontre que « le « nombre concret n'est pas un nombre. »

La proposition et la démonstration sont absolument de son invention ; car avant lui tout le monde avait cru que tout nombre est un nombre, et surtout le nombre concret, dont le nombre abstrait se déduit par abstraction.

La démonstration lui vient sans la chercher, comme l'appétit en mangeant; mais elle lui vient d'un pays où l'on marche sur la tête.

Dans tout autre pays on comprend bien qu'on peut modifier une chose sans la compléter, mais qu'on ne peut pas la compléter sans la modifier, et voilà pourquoi M. Bertrand comprend tout le contraire : il comprend qu'il suffit qu'une douzaine de crayons, ou une main de papier soit complète, pour que ce ne soit plus une douzaine de crayons, ni une main de papier. C'est le principe sur lequel il fonde sa démonstration que voici :

« Un nombre concret n'est pas un nombre, c'est une grandeur. Quand on dit « 7 litres, le nombre est 7, le mot litre complète l'idée, mais ne la « modifie pas. »

Quand on dit 7 litres, le nombre concret est 7 litres, et le nombre abstrait est 7; ce qui n'empêche pas le nombre concret d'être un nombre tout aussi bien que le nombre abstrait.

M. Bertrand dit : « Le nombre concret n'est pas un nombre, c'est une « grandeur. » Je dirais tout aussi bien : L'âne du meunier n'est pas un âne, c'est un animal.

Comme on le pense bien, cette perle échappée au savant académicien, va être bien vite ramassée par les savants en sous-ordre.

Voici d'abord le Père Faton qui nous la représente en ces termes : « Le nom- « bre concret, strictement parlant, n'est pas un nombre, c'est une grandeur. »

Pour moi je suis toujours d'avis que, strictement et rigoureusement parlant, le nombre concret est un nombre : « C'est une grandeur, » il est vrai, comme l'âne du meunier est un animal; mais cela n'empêche pas l'âne du meunier d'être un âne.

M. de Comberousse, professeur à l'école centrale, ne se contente pas de reproduire l'énoncé du paradoxe, il y joint sa démonstration : « A proprement « parler, » dit-il, « les nombres concrets ne sont pas des nombres : 200 est « un nombre, 200 litres est une capacité renfermant 200 fois l'unité appelée « litre. »

Evidemment 200 litres est une capacité renfermant 200 fois l'unité appelée litre, comme l'âne du meunier est une force capable de porter le blé au moulin, mais cela n'empêche pas le nombre concret d'être un nombre, ni l'âne du meunier d'être un âne.

Nos savants officiels forment naturellement la classe dirigeante en l'espèce; or, il semble que cette prérogative leur donne trop facilement le droit de faire bon marché de la logique. Je ne pouvais pas en fournir d'exemple plus saillant que celui où M. Bertrand démontre que « le nombre concret n'est pas « un nombre. » Je vais maintenant en donner un autre exemple d'une plus grande importance.

Soient les quatre propositions suivantes :

1° Tout point qui est sur la bissectrice d'un angle, est à égales distances des côtés de l'angle;

2° Tout point qui est à égales distances des côtés d'un angle, est sur la bissectrice de cet angle;

3° Tout point qui n'est pas sur la bissectrice d'un angle, n'est pas à égales distances de ses côtés;

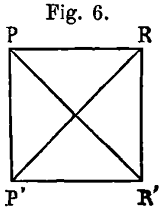
4° Tout point qui n'est pas à égales distances des côtés d'un angle, n'est pas sur sa bissectrice.

Les deux premières propositions sont réciproques l'une de l'autre, et les deux dernières, sont dites les contraires des deux premières.

Cela posé, quelle est la relation ou dépendance qui existe entre les quatre propositions?

Les quatre propositions étant désignées par P, R, P′, R′, et placées, comme l'indique la *fig.* 6, aux sommets d'un carré, la relation demandée se trouve tout entière dans l'énoncé suivant :

Fig. 6.



Les deux propositions placées sur une même diagonale sont identiques, mais elles n'entraînent aucune des propositions situées sur l'autre diagonale.

Ainsi les deux propositions P et R′ sont identiques; elles ne sont pas seulement conséquence l'une de l'autre : c'est la même qui est énoncée de deux manières, et démontrer l'une, c'est démontrer l'autre : elles sont donc toujours vraies ou fausses en même temps.

Il faut dire la même chose des deux propositions R et P′; mais les deux propositions d'un couple ne dépendent nullement de celles de l'autre couple, et les deux de l'un peuvent être vraies pendant que les deux de l'autre sont fausses. En voici un exemple :

P. Si deux triangles sont égaux, leurs cercles circonscrits sont égaux.

R. Si deux triangles ont leurs cercles circonscrits égaux, ces triangles sont égaux.

P′. Si deux triangles sont inégaux, leurs cercles circonscrits sont inégaux.

R′. Si deux triangles ont leurs cercles circonscrits inégaux, ils sont inégaux.

Comme les deux propositions P et R′ sont identiques, il suffit que l'une soit démontrée, pour que l'autre le soit du même coup.

Les deux propositions R et P′ étant aussi identiques, il suffit que l'une soit reconnue ou démontrée fausse pour que l'autre le soit au même titre.

Le parti qu'on peut tirer de cette propriété est facile à comprendre ; car la démonstration d'une des quatre propositions vous étant demandée, vous démontrez son identique si c'est plus facile, et les deux propositions se trouveront démontrées du même coup.

Par exemple, si d'un point pris sur un côté d'un triangle on mène une parallèle et une oblique à la base, on sait que la parallèle divisera les deux côtés en parties proportionnelles ; or il est visible que l'oblique divisera les mêmes côtés en parties non proportionnelles, puisque le premier rapport de la proportion restant le même, le second change évidemment. La contraire et la réciproque de la première proposition se trouvent ainsi démontrées du même coup, puisqu'elles sont identiques.

La réciproque ne dépendant nullement de la proposition directe, cela suffit pour que l'instruction générale du Ministre Fortoul affirme tout le contraire. « L'élève, » dit-elle, « saisira nettement qu'il existe entre la proposition et sa « réciproque, une dépendance intime qui fait que l'une entraîne nécessaire- « ment l'autre. C'est le résultat qu'on doit chercher à atteindre dans toutes « les parties de l'enseignement. »

L'élève est capable de tout saisir, même que la circulaire ministérielle lui enseigne officiellement une grosse erreur.

Prenez la page 27 du savant *Traité de géométrie* publié par MM. Rouché, répétiteur à l'école polytechnique, et de Comberousse, professeur à l'école centrale ; vous y lisez :

« La proposition directe, sa réciproque et la proposition contraire sont tel- « lement liées que l'une quelconque des deux dernières est une conséquence « des deux autres. »

Or les deux dernières sont identiques et nullement une conséquence de la proposition directe, qui peut être fausse quand les deux autres sont exactes. Si l'on prétend que la proposition R est une conséquence de P et P′, ou un produit de leur accouplement, il faut montrer comment on tire cette conséquence, dans le cas où la proposition P est fausse et la proposition P′ exacte ; il faut dire si le produit de cet accouplement sera, comme P, une proposition fausse, ou, comme P′, une proposition exacte, ou bien si elle sera mixte et bâtarde ?

Tout récemment, en février 1877, M. Bourget a publié dans son *Journal de Mathématiques*, un article où il dédouble le principe donné dans la géométrie de MM. Rouché et de Comberousse.

Voici le passage :

« On peut souvent reconnaître l'exactitude des réciproques au moyen des
« principes suivants :

« 1er Principe. Si une proposition et sa contraire sont vraies en même
« temps, la réciproque est nécessairement vraie.

« 2e Principe. Si une proposition et sa réciproque sont vraies, la contraire
« est vraie aussi. »

La réciproque et la contraire sont identiques ; elles peuvent être vraies quand la proposition directe est fausse. Il est évident que l'auteur ne l'a pas compris.

Supposons que, dans un journal de chimie, vous lisiez cet étrange principe :

Si le flacon et l'acide azotique sont blancs en même temps, l'acide nitrique est nécessairement blanc.

Ce principe vous prouvera clairement et uniquement que l'auteur ignore absolument que l'acide azotique et l'acide nitrique sont un seul et même acide.

De même, lorsque dans un journal de mathématiques vous lisez cet étrange principe :

Si une proposition et sa contraire sont vraies en même temps, la réciproque est nécessairement vraie.

Ce principe vous prouve clairement et uniquement que l'auteur ignore absolument que la contraire et la réciproque sont une seule et même proposition.

L'interprétation rationnelle de tous les faits et de tous les exemples analysés dans la longue discussion qui précède, améne et confirme la conclusion générale suivante :

Il ne peut exister aucune quantité ou grandeur réellement infinie, c'est-à-dire illimitée.

Il s'ensuit que les quantités dites infinies sont nécessairement finies, ou absolument impossibles.

En ne donnant pas aux premières un nom qui ne leur convient pas, et en ne parlant des autres que pour les déclarer impossibles, les mathématiques se passeraient donc aisément, et même avantageusement, de l'infini, « du sublime et auguste infini, » comme dirait Hoëné Wronski. Mais, puisqu'il y a des expressions auxquelles les géomètres donnent le nom de quantités infinies, il faut en préciser le sens et en faire connaître les propriétés.

Les quantités dites infinies sont de deux sortes :

1° On appelle quantité infinie, une valeur très-grande attribuée à une variable, ou à une fonction de cette variable. Ainsi, quand on suppose x

infini, x^2, x^3, e^x sont aussi des quantités infinies. Cette première espèce d'infini est ce que j'appelle l'infini relatif.

2° On donne aussi le nom d'infini à des fractions telles que $\frac{1}{0}$, $\frac{a}{0}$, dont le dénominateur est zéro. C'est cet infini que j'appelle absolu ou impossible.

D'après cela, tout nombre connu ou exprimé en chiffres, quelque grand qu'il soit, sera réputé fini, tandis qu'une quantité dite infinie sera une valeur supposée incomparablement plus grande. Cet infini, qui est l'infini relatif, ne pourra donc être représenté que par une variable ou par une fonction de cette variable. Un infini écrit en chiffres, tel que $\frac{1}{0}$, $\frac{2}{0}$, $3^{\frac{1}{0}}$ ne peut être que l'infini absolu, c'est-à-dire impossible.

Lorsque les quantités x, x^2, x^3, e^x, sont supposés infiniment grandes, leurs réciproques $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{e^x}$ seront dites infiniment petites. Toutes ces quantités infiniment grandes et infiniment petites, étant nécessairement finies, jouissent des mêmes propriétés, et doivent être soumises aux mêmes régles que les quantités finies représentées par des lettres.

L'infini absolu n'a pas d'autre propriété que d'être impossible : sa valeur n'est donc pas la réciproque de zéro ; il ne représente aucune quantité, et n'est jamais la limite d'une variable ; par conséquent tout calcul effectué sur lui, est absurde.

Il est donc absurde de dire que le produit de $\frac{0}{m}$ par $\frac{m}{0}$ est l'unité, ou toute autre chose.

On désigne souvent l'infini par le signe ∞, et l'on dit que c'est le symbole de l'infini ; c'est plutôt le symbole de la tour de Babel. Il sert, en effet, à confondre non-seulement l'infini absolu avec l'infini relatif, mais encore les infinis de tous les ordres et de tous les degrés.

Les tableaux donnés par Cauchy, aux pages 46 et 69 de son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, semblent inventés tout exprès pour consacrer cette confusion. En effet, si le symbole ∞ désigne l'infini absolu, toutes les opé rations indiquées ou effectuées sur ce symbole sont absurdes, et s'il désigne l'infini relatif, elles sont fausses pour la plupart.

On comprend bien, en effet, qu'une valeur infinie attribuée à x pût se représenter par le signe ∞ tout comme par une lettre a, et que les fonctions de ∞ fussent soumises comme les fonctions de a, aux mêmes règles que si ∞ et a, représentaient des quantités finies.

On aurait ainsi : $2\infty = \infty + \infty$, $\infty^2 = \infty \times \infty$, $\frac{\infty^3}{\infty^2} = \infty$,

comme on a : $2\alpha = \alpha + \alpha$, $\alpha^2 = \alpha \times \alpha$, $\frac{\alpha^3}{\alpha^2} = \alpha$.

Mais dans ce cas, les égalités

« $a + \infty = \infty$, $a - \infty = -\infty$, $a \times \infty = \infty$, $\frac{a}{\infty} = 0$, $A^\infty = \infty$, $L(\infty) = \infty$,

« $(-\infty)^{m} = \infty$, $\infty^{\infty} = \infty$, » etc., données par Cauchy, comme exactes, seraient évidemment fausses. Quant à la relation $\frac{\infty}{0} = \frac{-\infty}{0}$, qu'il donne à la page 69, elle est absurde même quand ∞ désigne un infini relatif.

Lorsqu'on donne des règles pour déterminer la vraie valeur des fractions telles que $\frac{f(x)}{F(x)}$, qui se réduisent à $\frac{\infty}{\infty}$, on ne distingue pas le cas où le signe ∞ désigne un infini absolu, de celui où il désigne un infini relatif. Ces deux cas sont pourtant faciles à distinguer.

1° Si c'est pour une valeur finie de x, telle que $x = a$, que les fonctions $f(x)$, $F(x)$ deviennent infinies, le rapport $\frac{f(x)}{F(x)}$ est celui des deux infinis absolus ; et, demander la vraie valeur de ce rapport, c'est faire une qustion absurde. Ainsi, à la fin du chapitre V de la *Théorie des Fonctions analytiques*, Lagrange dit :

« Les fonctions $\frac{1}{2\sqrt{x-a}}$, et $\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$ deviennent infinies lorsque $x = a$;

« mais en les multipliant l'une et l'autre par $2\sqrt{x-a}$, leur rapport devient $\frac{1}{\sqrt{2a}}$. »

Lorsque $x = a$, les deux fonctions $\frac{1}{2\sqrt{x-a}}$ et $\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$ deviennent $\frac{1}{0}$ et $\frac{a}{0}$; or, si l'on demande le rapport de telles fractions, la question est absurde, de même que les calculs que l'on fait pour le trouver. Ainsi Lagrange veut qu'on multiplie les deux termes du rapport par $2\sqrt{x-a}$; c'est donc les multiplier par zéro, puisque $2\sqrt{x-a}$ égale zéro quand $x = a$, et chaque terme du rapport devient $\frac{0}{0}$.

2° Si c'est pour une valeur infinie de x que les fonctions $f(x)$, $F(x)$ devienviennent infinies, le rapport $\frac{f(x)}{F(x)}$ est, en réalité, celui des deux quantités finies ; et, sauf les simplifications possibles, la vraie valeur, ou la valeur exacte de ce rapport ne peut être exprimée autrement que par $\frac{f(x)}{F(x)}$.

Mais, si ce rapport peut se décomposer en deux parties A et α, dont la première reste fixe pendant que la seconde tend vers zéro quand x devient très-grand, on dira que la valeur de la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ est infiniment près de A quand x est infini, et quoique la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ n'atteigne jamais rigoureusement la valeur A, on dit cependant que A est la vraie valeur de cette fraction pour x infini.

On commence la démonstration de la règle qui doit donner la vraie valeur de la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$, quand ses deux termes sont infinis, en disant que, dans cette hypothèse, on a $\frac{1}{f(x)} = 0$, et $\frac{1}{F(x)} = 0$.

Or ces égalités sont impossibles dans le cas de l'infini relatif, et la question est absurde dans le cas de l'infini absolu.

D'où l'on voit que dans un cas comme dans l'autre, la démonstration est vicieuse dès le début, et voilà aussi pourquoi la règle que la démonstration donne comme exacte et générale, n'est ni l'une ni l'autre, ainsi que nous le constaterons en traitant cette importante question.

Tous les géomètres, sans en excepter les plus philosophes, comme Lagrange et Auguste Comte, ont commis l'erreur très-grave de regarder zéro comme la réciproque de l'infini, et d'admettre qu'on a $\frac{0}{m} \times \frac{m}{0} = 1$, ou $\frac{0}{2} \times \frac{8}{0} = 4$, et qu'ainsi le produit de zéro multiplié par l'infini pouvant avoir une valeur quelconque, l'expression $0 \times \infty$ est un symbole d'indétermination.

D'une part, les géomètres ont besoin que l'infiniment petit égale zéro, pour être la réciproque de l'infini $\frac{m}{0}$; d'autre part ils ont besoin qu'il soit différent de zéro pour devenir l'élément d'une grandeur quelconque, telle qu'une longueur, une surface, un volume, etc. C'est la difficulté, ou l'impossibilité, d'accorder ces deux propriétés contradictoires qui les a conduits à donner de l'infiniment petit des définitions aussi absurdes qu'inintelligibles. Quand on a défini l'infiniment petit une variable qui a pour limite zéro et l'infiniment grand une variable qui a pour limite ∞, il s'ensuit qu'une variable pourrait être en même temps un infiniment petit et un infiniment grand. Une variable n'est ni grande ni petite ; c'est la valeur qu'on lui attribue qui peut être l'une ou l'autre. Il est bien évident qu'on peut supposer à la variable une valeur nulle comme une valeur infiniment petite ; mais il est bien absurde d'admettre ou de vouloir démontrer que les infiniment petits sont, comme dit Carnot, « de purs zéros, entre lesquels il existe des rapports très-intéres-« sants à connaître. »

Pour que les infiniment petits soient en même temps zéro et quelque chose, Carnot en fait des « espèces d'être singuliers, qui semblent, par leurs pro-« priétés équivoques, tenir le milieu entre la grandeur et le zéro, entre « l'existence et le néant. »

Par l'infiniment petit, il faut entendre une valeur très-petite attribuée à une variable. Si cette variable est indépendante, rien n'empêche qu'elle ne devienne zéro. Au contraire, si cette variable est l'inverse d'un infini relatif, par exemple, si l'on a $z = \frac{1}{x}$, ou $z = \frac{1}{e^x}$, la valeur de z est infiniment petite quand on suppose x infini, mais elle ne peut jamais devenir rigoureusement nulle.

La valeur d'une variable indépendante peut être supposée nulle, comme elle peut être supposée infiniment petite; mais quand elle est zéro, il serait absurde de la dire infiniment petite.

Les accroissements des variables s'appellent leurs différences, et lorsque les différences sont supposées infiniment petites, on les appelle différentielles.

Dans sa leçon dix-neuvième sur le calcul des fonctions, Lagrange dit : « Ceux qui, d'après Euler, regardent les différentielles comme de véritables « zéros, sont dans toute la rigueur de l'analyse. »

Je dis, moi, qu'ils sont dans toute la rigueur de l'absurdité.

En terminant sa théorie des fonctions, Lagrange nous apprend que « la « nouvelle édition de ses leçons sur le calcul des fonctions, contient des « remarques importantes sur le passage du fini à l'infiniment petit. »

L'infiniment petit étant nécessairement fini, le passage du fini à l'infiniment petit ne doit pas être difficile. Nous avons déjà apprécié les « spécula-« tions sublimes » de Fontenelle sur le « passage obscur du fini à l'infini. »

« Les remarques importantes » de Lagrange « sur le passage du fini à l'infi-« niment petit » peuvent être aussi sublimes, et même plus subtiles que les spéculations de Fontenelle, mais il est certain pour moi, qu'elles ne peuvent être qu'illusoires.

Par exemple, dans ces remarques importantes, Lagrange prouve « qu'on ne « peut pas appliquer à l'infiniment petit proprement dit, les résultats trouvés « dans la supposition du fini, et que dans le passage du fini à l'infiniment « petit, il faut supprimer entièrement tous les termes qui peuvent contenir « l'infiniment petit, quoique ces termes puissent n'être pas eux-mêmes « infiniment petits. »

Certes, voilà un principe qui laisse bien loin derrière lui celui de Leibnitz;

car vous n'avez plus seulement le droit de négliger les infiniment petits devant les quantités finies; mais « il faut supprimer entièrement tous les « termes qui peuvent contenir l'infiniment petit, quoique ces termes puissent « n'être pas eux-mêmes infiniment petits. »

Comme je viens de le dire, voilà qui dépasse bien Leibnitz; mais il y aurait peut-être moyen de dépasser Lagrange lui-même, car en réduisant un terme qui ne contient pas l'infiniment petit avec un terme qui le contient, les deux termes se trouveraient ainsi réduits à un seul terme, qu'il faudrait supprimer comme contenant l'infiniment petit. Et dire que Lagrange a cru avoir bien démontré ce principe, comme M. Bertrand a cru démontrer que le nombre concret n'est pas un nombre! Quand donc respectera-t-on la logique, même en mathématiques ?

Neuton avait fondé le haut calcul sur les fluxions, et Leibnitz sur les infiniment petits. Aujourd'hui, tout est défini par les limites : les infiniment petits, les dérivées, les différentielles, les tangentes, les rayons et les centres de courbure, l'angle de contingence, l'arc et l'aire d'une courbe, etc.

Est-ce que Lagrange, en dégageant « les principes du calcul différentiel de « toute considération d'infiniment petits, de limites et de fluxions » aurait voulu « extirper ainsi des mathématiques, l'idée de l'infini ? » Hoëné Wronski le lui reproche en ces termes :

« Les géomètres ont cherché à ravaler les sciences mathématiques, en « voulant en chasser l'idée de l'infini, ce principe de leur haute évidence et « de leur certitude absolue. Pour preuve, nous rappellerons ici toutes ces « bizarres explications matérialistes, qu'ils voulaient donner de l'auguste idée « de l'infini par la grossière idée du fini, et nous rappellerons surtout ce pre- « mier des fameux prix décennaux, par lequel l'Académie des Sciences de « Paris a couronné la *Théorie des Fonctions Analytiques* de Lagrange, des- « tinée à extirper ainsi des mathématiques cette importante idée de l'infini, « qui, à côté des glorieuses prétentions universelles à l'animalité, accusait « dans l'homme une nature ou une condition plus élevée. »

Ce qui prouve que Lagrange ne s'était pas proposé cette extirpation, c'est que non-seulement il admet l'infini, et même l'infini absolu, mais qu'il le soumet au calcul comme une quantité réelle.

Par exemple, au chapitre V, il dit : « Il peut arriver que les fonctions « $f(x)$, $F(x)$ deviennent infinies par la même supposition de $x = a$, ce qui « rendra les fractions $\frac{f(x)}{F(x)}$, $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ indéterminées. »

Lorsqu'une fonction devient infinie pour une valeur finie $x = a$, c'est l'infini absolu ou impossible, et il est absurde de le soumettre à aucun calcul, comme Lagrange le fait quand il dit (à la fin du chapitre V) :

« Les quantités $\frac{1}{2\sqrt{x-a}}$ et $\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$ deviennent infinies lorsque $x=a$;
« mais en les multipliant l'une et l'autre par $2\sqrt{x-a}$, leur rapport sera

$$\frac{\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}}+1}{\frac{2x}{\sqrt{x+a}}},$$

« lequel, en faisant $x=a$, devient $\frac{1}{\sqrt{2a}}$. »

D'autres exemples feraient voir, comme celui-là, que Lagrange ne méritait pas le reproche que lui adresse Hoëné Wronski.

Maintenant son ouvrage méritait-il « ce fameux prix par lequel l'Académie « des sciences de Paris a couronné la *Théorie des Fonctions analytiques?* En cette occasion, comme en tant d'autres, c'est plutôt le nom que l'ouvrage de l'auteur, que l'Académie a couronné. Si l'ouvrage eût été présenté par un nom obscur et inconnu, l'Académie ne l'eût peut-être pas même lu.

A la vérité, Charles Dupin, lui aussi académicien, a dit que Lagrange avait démontré Leibnitz. Je demande, moi, qui démontrera Lagrange ? Par exemple, qui démontrera ce principe (qu'il donne au chapitre III) :

« Lorsqu'on a une équation quelconque entre deux variables x, y, l'équa-« tion subsistera encore entre les fonctions primes de tous ses termes, ainsi « qu'entre leurs fonctions secondes, etc. »

Qu'est-ce que cela veut dire que « l'équation subsistera entre les fonctions « primes de ses termes ? » Par « l'équation, » faut-il entendre la même équation ou une autre équation quelconque ? Dans le premier cas, le principe serait évidemment faux, et dans le second, il serait par trop naïf. Qui est-ce qui me soutiendra qu'une équation ne subsiste pas aussi bien entre les carrés, les cubes, etc., de ses termes ?

Quoi qu'il en soit du mérite de l'ouvrage couronné par l'Académie de Paris, celui-ci pourra être regardé, à bon droit, comme le premier qui se soit proposé l'extirpation systématique de l'infini et de ses propriétés. Mais, tandis que, selon Wronski, l'infini est pour les mathématiques « le principe de leur « haute évidence et de leur certitude absolue, » l'infini est, selon moi, pour les mathématiciens la source de toute sorte d'erreurs et de paradoxes, dont les auteurs les plus réputés me fourniront une foule d'exemples.

Je ne dois pas terminer ma *Théorie mathématique de l'infini,* sans dire qu'elle n'a rien de commun avec *la Théorie de l'infini* publiée par Bordas-

Demoulin. D'abord l'ouvrage de Bordas-Demoulin a été couronné par l'Institut, et je ne vois pas trop qui pourrait couronner le mien. Après cela, ce ne sont pas toujours les meilleurs chevaux qui se font couronner. Quoi qu'il en soit de l'ouvrage de Bordas-Demoulin, il suffit qu'il ait été couronné par l'Institut, pour qu'on soit sûr que, comme celui de Fontenelle, il contient des « spéculations sublimes. » J'ai pu réfuter ce que Fontenelle dit dans sa *Géométrie de l'Infini*, tandis que je ne puis qu'admirer ce que dit Bordas-Demoulin *dans sa Théorie de l'Infini.* J'en citerai quelques passages pour donner au lecteur l'occasion de partager mon admiration.

« Si la force d'une substance n'est point divisible, elle a une infinité de « degrés jouissant de propriétés différentes et correspondant à l'infinité de « parties de la quantité, chaque degré a une infinité d'autres degrés jouissant « de propriétés et correspondant à l'infinité de parties que contient chaque « partie de la quantité, ainsi de suite.

« Ces infinités d'infinités de degrés et de parties de la force et de la quan- « tité, indissolublement unies, forment des infinités d'infinités d'ordres dans « les substances ; et ces infinités d'infinités d'ordres dans les substances sont « ce que j'appelle leur manière d'être particulière, leur détermination, leur « nombre.

« Dans chacune d'elles, il y a un infini principal que l'on peut considérer « comme leur unité, et il comprend une infinité d'infinis inférieurs, par les- « quels il est nombre, rapport, raison, il est intelligible dans tout ce « qu'il est.

A propos de cet «infini principal, qui est intelligible dans tout ce qu'il est,» je tiendrais beaucoup à savoir si l'auteur est intelligible pour lui. Il le paraît bien, puisqu'il s'explique en disant :

« Puisque tout ce qui est intelligible l'est par l'infini, que ce qui ne serait « point intelligible ne serait rien, il en résulte que l'infini est partout et le « fini nulle part, que contrairement à l'opinion des anciens c'est le fini qui est « négatif et l'infini qui est positif.

« Pourquoi l'infini est-il la source des idées claires ? Parce qu'il fait leur « unité et leur nombre, leur général et leur particulier, enfin leur manière « d'exister. »

Pour être sublime, c'est sublime ! Goûtez-moi encore ce petit morceau, et je vous tiens quitte.

« Comme dans un même objet, de l'unité de l'infini à l'infini unité et « nombre est l'infini, on dit des choses qui ont une nature différente, qu'elles « sont séparées par l'infini, ce qui est philosophiquement et mathématique- « ment rigoureux.

LE

CALCUL INFINITÉSIMAL

FONDÉ SUR

DES PRINCIPES RATIONNELS

DEUXIÈME PARTIE

LIVRE PREMIER

NOTIONS FONDAMENTALES

DES GRANDEURS OU QUANTITÉS ET DE LEUR REPRÉSENTATION EN NOMBRES.

On appelle grandeur ou quantité tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution.

Pour représenter une grandeur en nombre, on la rapporte à une autre grandeur de même espèce, prise pour unité, c'est-à-dire, pour terme de comparaison.

Le nombre qui exprime le rapport de deux grandeurs de même espèce, c'est-à-dire, qui exprime combien de fois la première contient la seconde, s'appelle nombre abstrait. Ainsi, quand une grandeur contient 4 fois l'unité, on dit que leur rapport est 4 ; et si à ce rapport, ou à ce nombre abstrait, on ajoute le nom de l'unité, on a l'expression de la grandeur. Par exemple, l'expression d'une longueur qui contient 4 fois le mètre, est 4 mètres, et cette expression s'appelle nombre concret.

Ainsi, le nombre concret est l'expression d'une grandeur concrète, tandis que le rapport de cette grandeur à l'unité, ou à toute autre grandeur de même espèce, est un nombre abstrait :

M. Bertrand dit, dans son *Traité d'Arithmétique :* « Le nombre concret « n'est pas un nombre, c'est une grandeur. » C'est comme si l'on disait : Un cheval blanc n'est pas un cheval, c'est un quadrupède.

M. Bertrand dit aussi : « Il faut bien savoir que les nombres abstraits « ne représentent rien par eux-mêmes. » Puisque le nombre abstrait représente le rapport de deux grandeurs de même espèce, il représente donc quelque chose.

Le rapport de deux grandeurs de même espèce étant un nombre abstrait, il n'est pas exact de définir l'aire d'une figure, comme le fait Blanchet, dans la géométrie de Legendre, en disant : « L'aire d'une figure est le rapport de « son étendue à celle de l'unité de surface. » Le rapport de deux grandeurs n'est ni une aire, ni un volume, ni un poids, etc. Ainsi, le rapport de 24 mètres à 8 mètres est 3, tout comme celui de 24 kilogrammes à 8 kilogrammes. Ce rapport n'est pas plus une aire, ou un poids, dans un cas que dans l'autre.

Des Quantités négatives.

Deux quantités de sens opposés sont distinguées dans le langage ordinaire par des mots de sens contraires. C'est ainsi qu'on dit gagner ou perdre 3 francs, avancer ou reculer de 4 pas, monter ou descendre de 8 mètres.

Pour que les nombres puissent représenter non-seulement les grandeurs en elles-mêmes, mais encore les deux sens opposés suivant lesquels on peut les considérer, on fait précéder du signe + les nombres qui expriment les grandeurs considérées dans un sens, et du signe — ceux qui représentent les grandeurs prises dans le sens opposé. Les nombres précédés du signe + sont dits positifs, et les nombres précédés du signe — sont appelés négatifs.

Dans les questions où les grandeurs de chaque espèce sont toutes de même sens, on suppose positifs les nombres qui les représentent, mais il devient superflu de les faire précéder du signe +, puisqu'il n'y a pas de confusion possible.

Il est évident que deux grandeurs égales et de sens contraires, ou deux nombres égaux et de signes contraires, se détruisent, ou que leur somme est zéro. Par exemple, si quelqu'un avance de dix mètres et recule ensuite de dix mètres ; s'il gagne d'abord huit francs et perd ensuite huit francs ; il est évident qu'il se trouve dans le même état que s'il n'avait ni avancé ni reculé, que s'il n'avait ni gagné ni perdu. On a ainsi $+10 - 10 = 0$, $+8 - 8 = 0$.

Cette propriété évidente est fondamentale en Algèbre.

Il est bien évident aussi que 2 fois -3 donnent -6.

Est-il évident, ou faut-il démontrer que le produit de $+3$ par -2 donne -6 ? Avant de répondre, il faudrait demander ce qu'on entend par le produit de $+3$ par -2 ?

C'est donc une définition, et non une démonstration, qu'il faut donner ici. On dira que multiplier un nombre par -2, c'est multiplier ce nombre par 2 et changer le signe du produit. D'après cette définition, l'on a

$$3 \times -2 = -6, \text{ et } -3 \times -2 = +6.$$

Est-il exact de dire qu'un nombre négatif est plus petit que zéro ? Bien évidemment, il ne peut entrer dans l'esprit de personne de croire quelque chose plus petit que rien. Mais, pour tout le monde aussi, mieux vaut zéro qu'une perte de 4 francs, ou qu'un gain de -4 francs.

Ainsi, cette proposition qu'un gain de -4 francs vaut moins que zéro se traduit algébriquement par $-4 < 0$.

La signification de l'expression plus petit, appliquée à un nombre négatif étant relative, il convient de préciser, par une définition, le sens de l'expression plus petit, ou du signe $<$. En conséquence, nous dirons que le plus petit de deux nombres est celui qui donne la plus petite somme quand on y ajoute le même nombre. Ainsi, en ajoutant 8 aux deux nombres -6 et -3, le premier donne 2, et le second donne 5 ; donc -6 est plus petit que -3.

En résumé, la théorie des quantités négatives repose sur les trois principes suivants :

1° Représentation des sens opposés de deux grandeurs, par les signes $+$ et $-$.

2° Définition de la multiplication par un nombre négatif.

3° Extension et fixation du sens des signes $>$ et $<$, appliqués aux nombres négatifs.

C'est parce que les géomètres n'ont pas su poser les principes fondamentaux de la théorie des quantités négatives, qu'ils y ont rencontré tant de difficultés ou de paradoxes, et, pour dire le mot, qu'ils ont avancé et soutenu de si grossières erreurs.

« Avancer qu'une quantité isolée est moindre que zéro, » dit Carnot, « c'est
« couvrir la science des mathématiques, qui doit être celle de l'évidence,
« d'un nuage impénétrable, et s'engager dans un labyrinthe de paradoxes
« tous plus bizarres les uns que les autres.

Dès que, par définition, le plus petit de deux nombres est celui qui donne la plus petite somme quand on les ajoute séparément à un troisième, il devient bien évident que — 6 est plus petit que zéro, puisqu'en ajoutant ces deux nombres à 8, le premier donne 2 et le second 8.

La définition précédente ne fait qu'étendre aux nombres négatifs, une propriété évidente sur les nombres positifs, et qui constitue le caractère auquel on reconnaît le plus petit de deux quelconques d'entre eux. Or, cette propriété appliquée aux nombres négatifs, les donne tous comme plus petits que zéro. C'est donc en transgressant un principe trés-rationnel, et non en s'y conformant, « qu'on s'engagera dans un labyrinthe de paradoxes tous plus bizarres « les uns que les autres. »

Car enfin, si l'on n'a pas $-4 < 0$, il faut bien qu'on ait $-4 = 0$ ou $-4 > 0$: il n'y a pas de milieu. Or, en ajoutant à chacune de ces trois relations l'égalité $8 = 8$, elles deviennent $4 < 8$, $4 = 8$, et $4 > 8$.

C'est donc la première qui conduit à des conséquences exactes, et les deux autres à des « paradoxes tous plus bizarres les uns que les autres. »

D'Alembert avait rencontré la même difficulté, et commis la même erreur que Carnot.

« Qu'il me soit donc permis, » dit-il, « de remarquer combien est fausse « l'idée qu'on donne quelquefois des quantités négatives, en disant que ces « quantités sont au-dessous de zéro. Indépendamment de l'absurdité de cette « idée envisagée métaphysiquement, ceux qui voudront la réfuter par le « calcul, pourront se contenter de considérer cette proportion :

$$« \; 1 : -1 :: -1 : 1,$$

« proportion réelle, puisque le produit des extrêmes est égal à celui des « moyens, et d'ailleurs $\frac{1}{-1} = -1$, et $\frac{-1}{1} = -1$.

« Cependant, si on regardait les quantités négatives comme au-dessous de « zéro, 1 serait > -1, et $-1 < 1$; ainsi il ne pourrait y avoir de proportion.

Pour qu'il y ait proportion géométrique entre quatre termes, il faut et il suffit que les deux rapports soient égaux, ou que le produit des extrêmes soit égal à celui des moyens ; tandis que ce n'est que pour la proportion arithmétique qu'il faut que les deux différences soient égales, et par conséquent de même signe. Ainsi, quoique le premier antécédent soit plus grand et le second plus petit que son conséquent, la proportion géométrique

$$1 : -1 :: -1 : 1$$

est exacte, puisque les deux rapports sont égaux, ou que le produit des extrêmes égale celui des moyens.

Leibnitz s'engage encore plus avant dans le labyrinthe ; car il dit : « Les

« deux rapports $\frac{1}{-1}$ et $\frac{-1}{1}$ ne sont pas égaux, puisque le premier va d'un « plus grand nombre à un plus petit, et le second, d'un plus petit à un plus « grand. » Et, afin que les deux rapports ne puissent pas être reconnus égaux, il les déclare imaginaires.

Une fois qu'on a adopté un principe faux, on en peut tirer tout ce qu'on veut. Or, les géomètres, et les plus éminents : les Leibnitz, les Bernoulli, les d'Alembert, les Euler, les Carnot, les Duhamel, etc, adoptent comme évident, ou comme axiome, le principe d'après lequel les antécédents d'une proportion doivent être en même temps plus grands ou plus petits que leurs conséquents. Ce principe est incontestable pour toutes les proportions arithmétiques ; il l'est aussi pour toutes les proportions géométriques qui ont leurs quatre termes positifs ou même négatifs, et plus généralement, pour toutes les proportions géométriques qui ont leurs antécédents de même signe ; mais, c'est tout le contraire qui a lieu, et qui doit avoir lieu, dans les proportions dont les antécédents sont de signes différents. Ainsi, tous les cas peuvent se résumer dans la règle suivante :

Les antécédents marchent dans le même sens ou en sens contraires vers leurs conséquents, suivant qu'ils sont de même signe ou de signes différents.

La proposition pourra encore s'énoncer en disant : *Lorsque les antécédents sont de signes différents, il en est de même de leurs conséquents.*

Malgré la simplicité de cette règle, malgré la facilité de la vérifier et de la démontrer, tous les géomètres s'accordent à admettre comme un principe évident que toujours les antécédents doivent être en même temps plus grands ou plus petits que leurs conséquents.

Un principe faux est une mine féconde, que chacun exploite à son profit. Leibnitz l'emploie pour prouver que la proportion

$$1 : -1 :: -1 : 1$$

est fausse ; d'Alembert et Carnot pour démontrer que les nombres négatifs ne sont pas plus petits que zéro.

S'appuyant sur ce faux principe, accepté par tous sans contestation, les géomètres se courent les uns après les autres « dans le labyrinthe de para- « doxes tous plus bizarres les uns que les autres. » Carnot s'élance à la suite de d'Alembert, et approuve sa réfutation en disant :

« Les notions qu'on a données jusqu'ici des quantités négatives isolées, se « réduisent à deux ; celle dont nous venons de parler, savoir que ce sont « des quantités moindres que zéro ; et celle qui consiste à dire que les quan- » tités négatives sont de même nature que les positives, mais prises dans un « sens contraire. D'Alembert détruit l'une et l'autre de ces notions. Il re-

« pousse d'abord la première par un argument qui me paraît sans réplique. »

« Soit, dit-il, cette proportion $1 : -1 :: -1 : 1$. Si la notion combattue « était exacte, c'est-à-dire, si -1 était plus petit que zéro, à plus forte « raison serait-il moindre que 1; donc le second terme serait moindre que le « premier, donc le quatrième devrait être moindre que le troisième, c'est-à- « dire que 1 devrait être moindre que -1; donc -1 serait tout ensemble « moindre et plus grand que 1, ce qui est contradictoire. »

Il ne sera pas difficile de réfuter « l'argument qui paraît sans réplique. »

Soit la proportion $8 : -6 :: -4 : 3$. Elle est exacte, puisque le produit des moyens est 24, comme celui des extrêmes. Les deux antécédents étant de signes contraires, il faut qu'ils marchent en sens contraires vers leurs conséquents, c'est-à-dire, que le premier étant plus grand que son conséquent, il faut que le second soit plus petit que son conséquent. En d'autres termes, puisqu'on a $8 > -6$, il faut qu'on ait $-4 < 3$; ce qui est de toute évidence, car en ajoutant 8 aux termes -4 et 3, il vient $4 < 7$.

L'erreur de ceux qui croient que dans une proportion telle que $8 : -6 :: -4 : 3$, ou $1 : -1 :: -1 : 1$, qui a ses antécédents de signes contraires, les antécédents doivent être en même temps plus grands ou plus petits que leurs conséquents, est visiblement aussi grossière que générale.

Nous voyons que c'est l'erreur des plus éminents géomètres, et nous montrerons aussi la cause de cette erreur. Cette fausse idée résulte non de la définition de la proportion, mais de son énoncé tout-à-fait conforme à celui de l'équidifférence. Ainsi, $8 : -6 :: -8 : 6$ et $8 \cdot -6 : -8 \cdot 6$ s'énoncent tout-à-fait de la même manière en disant : 8 est à -6 comme -8 est à 6. Alors, dit-on, comment un plus grand nombre pourrait-il être à un plus petit comme un plus petit est à un plus grand? Il est évident, en effet, que les deux différences ne sauraient être égales, ou que l'équidifférence ne saurait exister; mais rien n'empêche que les deux rapports $8 : -6$ et $-8 : 6$ ne soient égaux, ou que la proportion $8 : -6 :: -8 : 6$ ne soit exacte.

Le « labyrinthe de paradoxes tous plus bizarres les uns que les autres » résulte donc d'un faux principe, et non de la propriété bien exacte et bien générale qu'ont les nombres négatifs d'être plus petits que zéro. Mais, suivons Carnot dans son « labyrinthe de paradoxes tous plus bizarres les uns que les « autres. » Il continue de la manière suivante : « Je dis d'abord que cette « notion est absurde, et pour la détruire, il suffit de remarquer qu'étant « en droit de négliger dans un calcul les quantités nulles, par comparaison « à celles qui ne le sont pas, à plus forte raison devrait-on être en droit de « négliger celles qui se trouveraient moindres que zéro, c'est-à-dire, les « quantités négatives ; ce qui est certainement faux : donc les quantités né- « gatives ne sont pas moindres que zéro. »

Si les quantités négatives ne sont pas moindres que zéro, elles lui sont égales ou supérieures. Que Carnot choisisse entre ces deux conclusions, et il arrivera non-seulement à des paradoxes, mais à des absurdités manifestes. Il ajoute :

« Une multitude de paradoxes, ou plutôt d'absurdités palpables, résulte-
« raient de la même notion. Par exemple, — 3 serait moindre que 2 ; ce-
« pendant $(-3)^2$ est plus grand que 2^2, puisque $(-3)^2$ est 9, et que 2^2 n'est
« que 4 ; c'est-à-dire, qu'entre ces deux quantités inégales, 2 et — 3, le carré de
« la plus grande serait moindre que le carré de la plus petite et réciproque-
« ment : ce qui choque toutes les idées claires qu'on peut se former de la
« quantité. »

Cela ne choque que les idées fausses que l'ignorant peut se former de la quantité. L'ignorant sera choqué de voir qu'un plus grand arc a un plus petit complément, un plus petit cosinus, une plus petite cotangente ; il sera choqué de voir que le carré et le cube d'une fraction sont plus petits que la fraction elle-même.

Puisque le carré de — 3 est le même que le carré de 3, il est bien clair que le carré de — 3, comme le carré de 3, doit être plus grand que le carré de 2.

Dans la proportion $15 : -5 :: -12 : 4$, les antécédents étant de signes différents, on voit que le premier est plus grand que son conséquent, tandis qu'au contraire, le second est plus petit que son conséquent. Pour Leibnitz, comme pour Carnot et d'Alembert, comme pour Bernoulli et Euler, et en général pour les géomètres, il faut que les antécédents soient toujours en même temps plus grands ou plus petits que leurs conséquents. Mais Leibnitz admet que les nombres négatifs sont plus petits que zéro, et alors il ne peut sortir du labyrinthe que par un paradoxe ; il affirme donc que « les proportions ne
« peuvent avoir lieu entre les quantités négatives. »

Si les proportions ne peuvent avoir lieu entre les quantités négatives, la proportion $8 : -4 :: 8 : -4$ ne vaut donc rien ; c'est cependant une vérité de La Palisse, et c'est le contraire de cette vérité que Leibnitz s'efforce de démontrer en disant :

« Les proportions ne peuvent avoir lieu entre les quantités négatives, et
« l'on ne peut pas dire que $1 : -1 :: -1 : 1$, quoique le produit des extrê-
« mes soit égal à celui des moyens, car comment $+1$ pourrait-il être à -1,
« comme -1 est à $+1$, puisque le premier rapport est celui d'un plus grand
« nombre à un plus petit, et le dernier celui d'un plus petit nombre à un plus
« grand ?

Pourquoi toujours vouloir que deux antécédents de signes différents soient en même temps plus grands que leurs conséquents, puisque c'est le contraire qui a toujours lieu. En prêtant aux choses des propriétés contraires à leur nature, on trouvera des paradoxes tant qu'on voudra. Ainsi, en imitant le raisonnement de Leibnitz, je dirais : Comment pourrait-on avoir $8 \times 2 = 2 \times 8$, puisque le premier produit est celui d'un plus grand nombre par un plus petit, et le second celui d'un plus petit nombre par un plus grand?

On pourrait, par exemple, prêter aux inégalités les propriétés des égalités, comme Leibnitz, d'Alembert, Carnot, etc., prêtent aux nombres négatifs les propriétés des nombres positifs, et aux proportions géométriques les propriétés des proportions arithmétiques, etc.

On pourrait pareillement dire que ces deux inégalités $8 > 6$ et $5 > 2$ ne peuvent avoir lieu, puisqu'en retranchant la seconde de la première, on a $3 > 4$, ce qui est absurde.

Voilà comment en admettant que 8 est plus grand que 6, et 5 plus grand que 2, on arrive à des paradoxes aussi bizarres qu'en admettant que zéro est plus grand que -1.

Un faux principe conduit à des paradoxes bizarres, aussi bien sur les nombres positifs que sur les nombres négatifs. Tel est le principe en vertu duquel on prétend que les antécédents d'une proportion doivent être en même temps plus grands ou plus petits que leurs conséquents. Ce principe est-il une conséquence de la propriété fondamentale des proportions? Nullement, puisque ces deux propriétés se trouvent en contradiction dans toute proportion où les antécédents sont de signes différents.

Dans son traité *Des Méthodes dans les Sciences de Raisonnement*, Duhamel s'étonne que d'Alembert et Carnot n'aient pas aperçu le défaut de leur démonstration. Voici ce qu'il dit :

« Quant à la prétendue démonstration de d'Alembert, approuvée par Carnot,
« il est bien étrange que ces deux illustres géomètres n'en aient pas aperçu le
« défaut. »

Ce défaut consiste à vouloir que dans une proportion exacte, deux antécédents de signes différents soient ensemble plus grands ou plus petits que leurs conséquents. Or, ce défaut, Duhamel ne le voit pas plus que d'Alembert et Carnot. D'Alembert déclare que la proportion $1 : -1 :: -1 : 1$ est exacte; Leibnitz la dit fausse; Duhamel flotte entre les deux et penche du côté de Leibnitz. Sans dire formellement que la proportion est fausse, il dit que ce n'est pas une véritable proportion, ou que c'est une proportion entre des choses qui ne sont pas des grandeurs. Au lieu de se prononcer nettement, il répond par des questions.

« Que signifie, » dit-il, « cette proportion $1 : -1 :: -1 : 1$? d'où vient-
« elle? comment l'entend-on? Est-elle résultat, ou donnée?...... Les remar-
« ques faites dans le cas de véritables proportions n'auront aucune raison de

« s'appliquer ici....... Quelle définition donnera-t-on de *plus grand* ou « *plus petit* relativement à des choses qui ne sont pas des grandeurs ? à des « choses non définies, sans existence réelle ? »

Que signifie la proportion 1 : — 1 :: — 1 : 1 ? d'où vient-elle ? comment l'entend-on ? est-elle résultat, ou donnée ? C'est bien de cela qu'il s'agit ! Qu'importe d'où elle vient et où elle va ? Il faut dire si elle est exacte ou fausse, et Duhamel ne dit franchement ni l'un ni l'autre. Il faut définir nettement le caractère auquel on reconnaîtra qu'un nombre, tant positif que négatif, est plus grand qu'un autre ; Duhamel ne le dit pas, il le demande : « Quelle définition donnera-t-on du plus grand et du plus petit relativement « à des choses qui ne sont pas des grandeurs ? » Comment sait-il que « les « quantités négatives sont des choses qui ne sont pas des grandeurs ? » Si une force négative n'est pas une grandeur, comment peut-elle détruire une force positive, qui est une grandeur ?

Duhamel ne dit pas, comme Leibnitz, que « les rapports entre les nom- « bres négatifs sont imaginaires, » mais il dit que « les nombres négatifs « sont des choses qui n'ont aucune existence réelle. » Il dit que « les remar- « ques faites sur les véritables proportions n'auront aucune raison de s'appli- « quer à la proportion 1 : — 1 :: — 1 : 1. » Or, cette proportion est une véritable proportion, car elle satisfait à la condition essentielle, puisque les deux rapports sont égaux, ou que le produit des extrêmes égale celui des moyens. Il en résulte qu'elle jouit de toutes les propriétés démontrées sur les proportions. Si donc son second antécédent n'est pas, comme le premier, plus grand que son conséquent, c'est qu'il s'agit d'une propriété qui n'est pas démontrée. Est-ce la propriété ou la proportion qui est fausse ? La proportion est exacte, puisque le produit des extrêmes égale celui des moyens ; c'est donc la propriété qui est fausse.

La discussion précédente montre clairement qu'on ne tire de la théorie des quantités négatives, que les paradoxes qu'on y a soi-même introduits, ou qu'on n'y récolte que ceux qu'on y a semés.

De ce que les baleines sont des mammifères comme les lapins et les écureuils, faut-il se croire en droit d'exiger qu'elles courent les champs comme les lapins, ou grimpent sur les arbres comme les écureuils ?

C'est cependant le cas des géomètres qui, comme Leibnitz, d'Alembert et Carnot, veulent que les proportions géométriques procèdent comme les proportions arithmétiques, et que leurs antécédents, même quand ils sont de signes différents, marchent dans le même sens vers leurs conséquents.

On doit voir maintenant que la véritable théorie des quantités négatives est fondée sur des principes simples et les plus conformes aux idées les plus vulgaires. Je les ai réduits aux trois suivants :

1° Représentation de l'opposition de sens des grandeurs par celle des signes $+$ et $-$.

2° Définition de la multiplication par un nombre négatif.

3° Caractère qui définit le plus grand de deux nombres.

Quelques géomètres, pour éviter les paradoxes auxquels les nombres négatifs sont censés donner lieu, en ont présenté toute une théorie, qu'ils ont fondée sur d'autres paradoxes. Par exemple, Mourey, dans sa *Vraie Théorie des quantités négatives*, débute en disant : « La formule $4 - 6$ est absurde. Il « suit de là que le signe —, comme exprimant la soustraction, ne peut pas « être admis en Algèbre. Il faut donc trouver le moyen d'exprimer la diffé- « rence de deux quantités sans recourir à la soustraction. »

On peut, par ce début, juger de la valeur de la *Vraie Théorie des quantités négatives*.

Une vraie théorie se compose des principes qui lui servent de base, et des propriétés qui en résultent ; elle ne consiste pas à faire échec aux propriétés fondamentales, au moyen de propriétés arbitraires, imaginées tout exprès. Ainsi la propriété d'une proportion, d'avoir ses antécédents en même temps plus grands ou plus petits que ses conséquents, est une propriété de fantaisie, dont se servent Leibnitz, d'Alembert, Carnot, Duhamel, etc., pour renverser les propriétés les plus fondamentales.

Il nous reste encore à apprécier la propriété qualifiée par Auguste Comte, de « grande loi cartésienne. Elle consiste, » dit-il, « en ce que la correspondance « élémentaire entre le signe et le sens persiste dans les combinaisons quel- « conques, qui peuvent résulter des spéculations abstraites et concrètes sur la « grandeur indéterminée.

« Telle est, » ajoute-t-il, « l'admirable loi que découvrit, d'après quelques « rapprochements, le génie autant inductif que déductif, du fondateur de la « philosophie mathématique, pour subordonner l'abstrait au concret. »

Auguste Comte présente sur cette loi, dans sa synthèse subjective et dans sa géométrie analytique, des considérations qui sont marquées au coin du génie de l'auteur de la *Philosophie positive*. Je crois devoir reproduire ici les suivantes :

« Une exacte coïncidence existe toujours entre l'équation directement « instituée pour le nouveau sens d'une grandeur quelconque et celle qui se « déduit de la loi propre à l'ancien sens, en y changeant le signe de la quan- « tité correspondante. Il devient dès lors facile d'apprécier combien la loi « cartésienne épargne de complications envers les dispositions précises, et de « restrictions pour une hypothèse indécise. Toujours on peut ainsi se borner « à former l'équation géométrique ou mécanique, envers un seul des cas « propres à chaque phénomène. On est d'avance assuré que tous les autres

« s'y trouveront compris, en ayant convenablement égard au changement de « signes des quantités correspondantes.

« Fondée sur une induction que suggère le lien élémentaire entre le signe « et le sens, cette loi fut ensuite confirmée d'après une foule de comparaisons « géométriques et mécaniques, qui depuis longtemps, ont dissipé toute incer- « titude envers sa généralité complète. Il faut systématiquement renoncer à « la voir jamais acquérir un caractère déductif, dont la vaine recherche l'a « souvent obscurcie, et même dénaturée, non-seulement dans les études « scolastiques, mais aussi chez de grands géomètres.

« Il faut d'abord reconnaître que cette proposition capitale de philosophie « mathématique, n'est réellement démontrée encore que d'après de simples « vérifications spéciales, sans aucune appréciation directe et générale ; seule- « ment ces vérifications sont maintenant beaucoup plus multipliées, et « surtout plus variées qu'elles ne pouvaient l'être pour Descartes, dont le « génie analytique fit surgir cette admirable induction de l'heureux rappro- « chement d'un très-petit nombre de cas... Peut-être faut-il penser d'ailleurs « qu'une telle proposition ne comporte pas d'explication à priori, et doit tou- « jours rester fondée sur de pures inductions, sans que sa certitude en soit « toutefois affectée : du moins l'impuissance radicale des efforts tentés, à « cette fin, depuis deux siècles, et quelquefois par des esprits supérieurs, « autorise beaucoup une semblable opinion. »

Une science se compose des principes fondamentaux et des propositions qu'on en déduit. Les premiers principes sont les définitions et les axiomes. Ceux qui n'admettent que les définitions peuvent avoir raison, en ce sens que les axiomes sont, comme les verités de la Palisse, des définitions connues de tout le monde.

Ainsi, la Géométrie donne comme axiome que « le *tout* est égal à la « somme des parties dans lesquelles il a été divisé. » Le dictionnaire donne comme définition du « *tout*, une chose qui a des parties, considérée en son « entier. » D'après La Palisse, on ne se découvre jamais sans ôter son chapeau, et d'après le dictionnaire, se découvrir c'est ôter son chapeau.

Les axiomes 2 et 3 de la Géométrie de Legendre sont :

« Le tout est plus grand que sa partie ;

« Le tout est égal à la somme des parties dans lesquelles il a été divisé. »

Duhamel dit à ce sujet : « Une grandeur, relativement aux parties dont « elle est formée, se nomme un tout. Ainsi, d'après le sens que nous attachons « aux mots *tout*, *partie*, *plus grand*, on voit qu'un tout est plus grand qu'une « de ses parties. C'est donc à tort qu'on fait de cette proposition un axiome « fondamental, que quelques auteurs des Traités de Géométrie, demandent « qu'on admette comme évident, et placent au milieu de leurs postulata ou

« vérités indémontrables. Cette méprise, un peu forte, il est vrai, consiste à « prendre pour une vérité de sentiment, ce qui n'est qu'une vérité de défi- « nition. »

La méprise « des auteurs des traités de Géométrie » consiste à prendre un blanc bonnet pour un bonnet blanc ; la méprise bien plus forte de Duhamel consiste à croire qu'il y a là grande méprise.

Par définition, les nombres positifs représentent des grandeurs prises dans un sens, et les nombres négatifs des grandeurs prises dans le sens opposé. Il n'y a donc rien que de très-naturel que « cette correspondance entre le signe « et le sens persiste dans les combinaisons quelconques, » comme il est naturel que le quadrilatère persiste à conserver quatre côtés dans les combinaisons quelconques. Si cette correspondance ne persistait pas, de même que si le quadrilatère venait à avoir cinq ou six côtés, ce ne pourrait être que par l'effet d'une combinaison vicieuse, ou par l'application d'une fausse propriété. La loi cartésienne n'est que la convention par laquelle on distingue au moyen des signes $+$ et $-$, les grandeurs de sens opposés. Elle n'est, au fond, qu'une définition, et il n'y a pas lieu de démontrer que le carré persiste à avoir ses côtés égaux « dans les combinaisons quelconques. » J'ai rapporté le passage où Auguste Comte dit : « Peut-être faut-il penser d'ail- « leurs qu'une telle proposition ne comporte pas d'explication à priori : du « moins l'impuissance radicale des efforts tentés, à cette fin, depuis deux « siècles, et quelquefois par des esprits supérieurs autorise beaucoup une « semblable opinion. »

Il faut avouer que les esprits supérieurs se sont montrés bien inférieurs sur ce point. En effet, dès que c'est par convention que l'opposition de sens des grandeurs se représente par celle des signes $+$ et $-$; en d'autres termes, puisque c'est par définition que la correspondance entre le sens de la grandeur et le signe du nombre qui la représente, existe, il est évident que cette « cor- « respondance doit persister dans les combinaisons quelconques, » sans qu'il soit besoin de démontrer ou de vérifier la persistance de cette correspondance. Dès qu'un cercle est rond par définition, il n'est pas nécessaire de démontrer ou de vérifier que sa rondeur « persistera dans les combinai- « sons quelconques. » Supposons qu'une question où l'on opère sur des boules de couleurs quelconques et en nombres quelconques, conduise à un résultat représenté par 24 boules noires ; si dans la même question, toutes les boules blanches sont changées en noires et les noires en blanches, il est évident qu'on trouvera 24 blanches au lieu de 24 noires.

De même, si dans uns autre question qui donne d'abord 24 noires et 8 vertes, on change les vertes en rouges comme les noires en blanches, et réciproquement, il est évident qu'on trouvera 24 blanches et 8 rouges, au lieu de 24 noires et 8 vertes.

Des esprits « vraiment supérieurs, » ne chercheront pas à démontrer un tel principe ; car celui qui n'en saisirait pas l'évidence, serait incapable d'en comprendre une démonstration quelconque.

Ainsi, la conséquence qui résulte immédiatement de la correspondance établie entre les sens contraires des quantités de même espèce, et les signes contraires des nombres qui les représentent, consiste en ce que toute question qui conduit à un nombre négatif, conduira au même nombre changé de signe, lorsque, dans la question, on aura changé le signe de toutes les quantités qui sont de même espèce que le résultat trouvé.

Comme l'équation exprime la relation qui existe entre l'inconnue et les données de la question, l'on obtiendra le même résultat, soit en changeant le signe de l'inconnue, soit en changeant les signes des quantités qui, d'après l'énoncé, sont de même espèce que l'inconnue.

Les nombres négatifs, soit isolés, soit associés, représentent des grandeurs tout aussi bien que les nombres positifs ; et les grandeurs représentées par des nombres positifs, pourraient tout aussi bien être représentées par des nombres négatifs, puisque le signe — peut s'adapter, comme le signe $+$, à celui des deux sens que l'on veut choisir. Lorsque la solution d'un problème est donnée par un nombre négatif, elle convient toujours à la question, et il ne faut pas dire, pour cela, que la question est impossible, ou qu'il est nécessaire de la modifier. Autrement, la solution la plus fausse peut toujours convenir à tout énoncé convenablement et suffisamment modifié.

Pour être bien appliquée, la loi cartésienne aurait besoin d'être bien comprise. Les explications données en Algèbre prouvent que la plupart des auteurs n'ont pas bien saisi l'esprit de cette loi, ni la nature des quantités négatives. Par exemple, Lefébure de Fourcy étant arrivé à l'équation « $17(x-2)+28=13x-22$, » qui lui donne $x=-4$ pour le prix d'une journée d'été, dit : « Pour répondre à la question, il faudrait dire que le gain « de l'ouvrier, pendant un jour d'été, est -4 fr. ; ce qui n'offre absolument « aucun sens. Il faut donc conclure que l'énoncé renferme des conditions im- « possibles. » Dire « qu'un gain de -4 fr. n'offre absolument aucun sens, » c'est nier toute correspondance entre le sens d'une grandeur et le signe du nombre qui la représente. Un gain de -4 fr. offre un sens bien déterminé, puisqu'il signifie une perte ou une dépense de 4 fr., et l'énoncé ne renferme point de conditions impossibles, puisque la valeur $x=-4$ satisfait à toutes.

Pour que ce soit la valeur $x=4$ qui satisfasse à la question, il faut, dans l'énoncé, changer l'actif en passif, ou les gains en pertes, et réciproquement. L'équation devient ainsi $17(x+2)-28=13x+22$; et il est évident qu'on obtiendrait le même résultat en changeant x en $-x$ dans la premiére équation.

M. Bertrand dit aussi « que les solutions négatives n'exprimant aucune « grandeur, doivent être rejetées et considérées comme un symptôme d'im- « possibilité. » Il est vrai qu'il contredit aussitôt cette assertion absurde, en ajoutant : « Mais bien souvent, il n'en est pas ainsi, et les solutions néga- « tives peuvent trouver alors une interprétation qu'il est important d'étu- « dier. »

L'interprétation qu'il faut étudier n'est autre chose que la loi cartésienne› qu'il faut comprendre, et d'après laquelle, suivant Auguste Comte, « une « exacte coïncidence existe toujours entre l'équation directement instituée « pour le nouveau sens d'une grandeur quelconque, et celle qui se déduit de « la loi propre à l'ancien sens, en y changeant le signe de la quantité cor- « respondante. »

Mais M. Bertrand n'est pas d'avis, comme Auguste Comte, que cette « exacte coïncidence existe toujours. » Nous allons voir par quel piteux exemple il a cru pouvoir faire échec à la généralité de la loi cartésienne.

« Un chemin de fer prend 0 fr. 10 c. par tonne et par kilomètre pour le « transport des marchandises ; on paie, en outre, un droit fixe de 3 fr. 75 « par vagon de 2000 kilogrammes ; à quelle distance peut-on transporter « 50 tonnes pour 3 fr.

« 50 Tonnes correspondent à 25 vagons ; le droit fixe à payer est donc « de $3{,}75 \times 25$, et, en outre, pour le transport à la distance x,

$$0{,}10 \times 50 \times x\,;$$

« l'équation du problème est donc

$$3{,}75 \times 25 + 0{,}10 \times 50 \times x = 3\,;$$

« et, en la résolvant, on trouve pour x une valeur négative $x = -18{,}15$, qui « ne signifie ici absolument rien. »

Remarquez d'abord l'idiotisme d'un individu qui s'en va offrir 3 fr. pour payer la location de 25 vagons, plus le transport de 50 tonnes de charbon, lorsqu'il sait que la location d'un seul vagon se paye 3 fr. 75.

Comme je l'ai dit, une question, quelque absurde qu'elle soit, peut toujours être convenablement modifiée. C'est ainsi que le lit de Procuste s'ajustait à toutes les tailles convenablement modifiées. C'est de cette manière que la solution de M. Bertrand s'ajustera à sa question convenablement et raisonnablement modifiée.

Voilà pourtant comment un « esprit supérieur » démontre « qu'une exacte « correspondance entre le signe et le sens *ne persiste pas toujours* dans les

« combinaisons quelconques, » et que « les solutions négatives n'expriment « aucune grandeur. »

Je ne veux pas quitter la question des quantités négatives sans me permettre encore une réflexion au sujet de « l'impuissance radicale des efforts tentés, « depuis deux siècles, par des esprits supérieurs pour arriver à une explica- « tion à priori de la loi cartésienne. »

Je veux dire qu'on ne paraît pas assez comprendre qu'on peut être supérieur en une chose, sans l'être nécessairement en toute autre ; autrement, il faudrait prendre pour un excellent dégustateur, un avaleur de sabres, de cailloux et d'étoupes enflammées.

Les Leibnitz, les Bernoulli, les Euler, les d'Alembert, les Carnot, les Duhamel, les Bertrand, les Cauchy sont incontestablement des esprits supérieurs ; cependant aucun d'eux n'a compris que c'est une erreur de croire que les antécédents d'une proportion doivent toujours être en même temps plus grands ou plus petits que leurs conséquents. Ils voient bien tous que la propriété se trouve en défaut sur la proportion $1 : -1 :: -1 : 1$; mais, au lieu d'en conclure que la propriété n'est ni nécessaire ni générale, ils aiment mieux avancer et soutenir toute espèce d'absurdités. C'est ainsi que Leibnitz avance et soutient qu'une proportion ne peut avoir lieu entre des quantités négatives, et que leurs rapports sont imaginaires ; c'est ainsi que d'Alembert et Carnot soutiennent que les quantités négatives ne sont pas plus petites que zéro, sans voir qu'ils se mettent ainsi dans l'obligation d'admettre qu'elles ont une valeur nulle ou plus grande que zéro. Duhamel n'adopte ni l'opinion de Leibnitz, ni celle de d'Alembert. D'après lui, la proportion $1 : -1 :: -1 : 1$ est bien une véritable proportion, mais c'est une « proportion entre des choses « qui ne sont pas des grandeurs. »

C'est ainsi qu'au lieu de s'en tenir à la règle vulgaire et si simple des signes, en disant que le produit de deux termes est positif quand les facteurs sont de même signe, et négatif quand ils sont de signes contraires, le grand et illustre Cauchy imagine le moyen de multiplier, non les deux termes, mais les « deux « signes l'un par l'autre. » Multiplier deux signes l'un par l'autre, qu'est-ce que cela pourrait bien signifier ? L'auteur l'explique en disant : « Multiplier « deux signes l'un par l'autre, c'est former leur produit. » C'est sans doute par oubli qu'il n'a pas ajouté : et former leur produit, c'est les multiplier l'un par l'autre.

Des Quantités imaginaires.

Le carré d'un nombre négatif, comme celui d'un nombre positif, est toujours un nombre positif ; donc un nombre négatif n'est jamais le carré d'un autre nombre : en d'autres termes, il n'est pas possible de trouver la racine carrée d'un nombre négatif, soit exactement, soit approximativement. Mais, quand une question ne peut pas se résoudre, on peut toujours la poser, en exprimant la condition demandée, quoiqu'on ne puisse pas y satisfaire. Ainsi la condition d'être la racine carrée de -4 s'exprime par $\sqrt{-4}$, et $(\sqrt{-4})^2 = -4$ exprime une identité, de même qu'on énonce une identité en disant que 3 est le double de la moitié de 3.

Comme $\sqrt{-4} = 2\sqrt{-1}$, l'expression $\sqrt{-A}$ peut toujours se mettre sous la forme $a\sqrt{-1}$, et $\sqrt{-1}$ se représente souvent par la lettre i.

On a donc $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $i^3 = -\sqrt{-1}$, et $i^4 = 1$. Plus généralement on a $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = \sqrt{-1}$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -\sqrt{-1}$.

Si, à partir d'un point pris sur une droite on porte une longueur a, une égale longueur portée en sens contraire sera exprimée par $-a$.

Le calcul donne $+a\sqrt{-1}$ comme $-a\sqrt{-1}$ pour l'expression de la moyenne géométrique entre $+a$ et $-a$.

Cette expression n'ayant aucune valeur réelle, n'est pas réellement susceptible d'une représentation géométrique.

Cependant la droite menée par l'origine, perpendiculairement à la première droite, occupant une position moyenne entre les directions opposées de a et $-a$, une longueur égale à a, portée à partir de l'origine, sur cette perpendiculaire, représentera, faute de mieux, la quantité imaginaire $a\sqrt{-1}$, et la même longueur, prise en sens contraire, représentera $-a\sqrt{-1}$.

Il est bien clair que cette représentation d'une quantité imaginaire est purement artificielle, et que la quantité imaginaire n'en devient pas pour cela plus réelle.

La moyenne géométrique entre a et $-a$, ayant les deux valeurs $a\sqrt{-1}$ et $-a\sqrt{-1}$, il semble que les deux directions de la perpendiculaire à la première droite, les représentent tout naturellement; mais on peut remarquer que s'il n'existe, dans l'espace, qu'une direction opposée à une direction donnée, il en existe, au contraire, une infinité qui lui sont perpendiculaires; d'où l'on voit que la correspondance entre les quantités imaginaires et leur représentation géométrique, n'est pas naturelle. Quoique purement artificielle, elle peut aider l'induction et fournir des indications utiles; mais elle peut aussi conduire à de fausses conclusions. Cauchy nous en fournira des exemples, que nous examinerons dans la suite de cet ouvrage. La plus grossière erreur consiste à dire que toute quantité imaginaire est réelle, parce qu'on lui a donné, tant bien que mal, une représentation géométrique réelle. C'est, en particulier, l'erreur de Mourey, et elle apparaît tout d'abord dans le titre de sa *Vraie Théorie des quantités prétendues imaginaires, dédiée aux amis de l'évidence.*

Il eût été plus exact de la dire « dédiée aux amis de l'évidente absurdité. »

La même erreur apparaît aussi évidemment dans le titre d'un article du même ouvrage :

« Des racines des équations ; qu'elles sont toutes réelles. »

L'auteur, qui prétend avoir démontré que les racines imaginaires sont réelles, parce qu'il y a adapté une forme géométrique quelconque, n'est-il pas dans le même cas que celui qui prétendrait avoir démontré l'existence du phénix, parce qu'il l'aurait figuré sur une plaque d'assurance contre l'incendie ?

Si a et b sont réels, l'expression $a+b\sqrt{-1}$ n'en est pas moins une quantité imaginaire.

Les denx quantités imaginaires $a+b\sqrt{-1}$ et $a-b\sqrt{-1}$, qui ne diffèrent que par le signe de b, sont dites conjuguées.

La somme $2a$ de ces quantités conjuguées, et leur produit a^2+b^2 sont reéls.

Si l'on fait

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2} \text{ et } \operatorname{tang}\varphi=\frac{b}{a}, \text{ on aura } a+b\sqrt{-1}=\rho\,(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi).$$

On dit alors que ρ est le module de la quantité imaginaire, et que φ en est l'argument.

Logarithmes des Nombres soit positifs soit négatifs.

En arithmétique on définit les logarithmes en disant que les nombres en progression géométrique ont pour logarithmes les termes correspondants d'une progression arithmétique.

Soient les deux progressions :

$$\div\!\!\div\; 1 : 7 : 49 : 343 : 2401 : \cdots\cdots\cdots,$$
$$\div\; 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \;\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Les termes de la progression arithmétique sont les logarithmes des termes correspondants de la progression géométrique. La raison de la progression géométrique s'appelle la base du système de logarithmes.

Ces deux progressions peuvent se prolonger vers la gauche, comme vers la droite ; elles deviennent ainsi

$$\div\!\!\div \cdots\cdots \frac{1}{2401} : \frac{1}{343} : \frac{1}{49} : \frac{1}{7} : 1 : 7 : 49 : 243 : 2401 : \cdots,$$
$$\div \cdots\cdots -4 \,.\, -3 \,.\, -2 \,.\, -1 \,.\, 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \cdots\cdots$$

D'où l'on voit que les logarithmes positifs sont pour les nombres plus grands que l'unité, et les logarithmes négatifs pour les nombres positifs plus petits que l'unité ; en sorte qu'il n'y a point de logarithmes pour les nombres négatifs, puisque la progression géométrique, prolongée indéfiniment dans les deux sens, ne renferme aucun nombre négatif.

D'après la définition algébrique, le logarithme d'un nombre est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever la base pour reproduire le nombre proposé.

Ainsi, comme on a $2401 = 7^4$, et $\frac{1}{2401} = 7^{-4}$, on dit que, dans le système dont la base est 7, les logarithmes de 2401 et $\frac{1}{2401}$ sont 4 et -4.

Mais aucune puissance de 7 ne peut donner -2401 ni $-\frac{1}{2401}$.

De la définition algébrique, comme de la définition arithmétique, il résulte que les logarithmes positifs sont pour les nombres plus grands que l'unité, et les logarithmes négatifs pour les nombres positifs plus petits que l'unité. Aucune valeur réelle de x ne pouvant donner $7^x = -2401$, on dit que le nombre -2401, et, en général, que tous les nombres négatifs sont dépourvus de logarithmes.

Cependant l'extension et la généralisation données aux équations et aux formules, par suite de l'institution cartésienne, font éprouver, dans bien des cas, le besoin d'attribuer des logarithmes aux nombres négatifs comme aux nombres positifs ; car, en refusant des logarithmes aux nombres négatifs, on se trouverait souvent arrêté dans les transformations qui s'effectuent par le passage des nombres à leurs logarithmes.

Par exemple, les deux membres de l'égalité $8 = -2 \times -4$ étant identiques, il faudrait dire que leurs logarithmes ne le sont plus, puisque -2 et -4 sont réputés n'avoir point de logarithmes. Par exemple encore, l'aire de l'hyperbole équilatère $y = \frac{1}{x}$, étant représentée par lx, il faudrait dire que la branche située du côté des x négatifs n'a plus d'aire, ou que cette aire n'est plus représentée par lx, puisqu'il n'y a plus de logarithme pour x négatif. De même, par le passage des nombres à leurs logarithmes, les formules

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ et } \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ sont transformées en}$$

$\log \operatorname{tang} x = \log \sin x - \log \cos x$, et $\log \cot x = \log \cos x - \log \sin x$.

Or, que faut-il penser de ces formules lorsque $\sin x$ et $\cos x$, devenant négatifs, sont réputés n'avoir plus de logarithmes, tandis que $\operatorname{tang} x$ et $\cot x$ conservent des valeurs positives ?

Jean Bernoulli reconnut et proclama la nécessité d'attribuer aux nombres négatifs les mêmes logarithmes qu'aux nombres positifs. Cette opinion, si justement fondée, ne put prévaloir contre la force de la routine. Elle fut d'abord vivement combattue par Leibnitz, dont les objections ne sont, au fond, que des sophismes.

Il faut avouer que celles de Bernoulli manquaient de base et de solidité. La vive et longue polémique soutenue sur cette question par ces deux illustres géomètres, n'ayant pas abouti, fut reprise plus tard par Euler, qui soutint l'opinion de Leibnitz, et d'Alembert, qui défendit celle de Bernoulli.

La définition ordinaire donne raison à ceux qui soutiennent que les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes, et l'opinion de ceux qui prétendent qu'ils doivent en avoir, est justifiée par les besoins de l'analyse mathématique. En cet état de choses on comprend la stérilité d'une discussion dans laquelle chacun peut se retrancher sur un terrain favorable à son opinion.

Avant de discuter, il fallait d'abord arrêter les principes sur lesquels on est d'accord ; autrement on risque de ne l'être sur aucun.

Par exemple, d'Alembert fait le raisonnement suivant, pour démontrer que $\log(-1)$ égale zéro, aussi bien que $\log(+1)$.

« Soit, » dit-il, « $\log z = x$,

« d'où $\log z^3 = 3x$;

« en faisant $z = -1$, on a $\log(-1) = x$, et par suite $\log(-1)^3 = 3x$,
« qui se réduit à $\log(-1) = 3x$, puisque $(-1)^3 = -1$, ou encore à $x = 3x$;
« ce qui donne $x = 0$, c'est-à-dire, $\log(-1) = 0$. »

Après avoir ainsi prouvé que $\log(-1) = 0$, d'Alembert ajoute qu'il ne voit pas ce qu'on peut répondre à une objection si claire.

On peut répondre, comme Leibnitz le fit à Bernoulli, qu'il applique aux logarithmes des nombres négatifs, c'est-à-dire à des logarithmes qui n'existent pas, les propriétés démontrées seulement pour les logarithmes des nombres positifs.

D'Alembert devait bien voir, par l'exemple de Leibnitz, qu'on répond toujours et quand même. Ainsi Leibnitz répond à Jean Bernoulli « que les nombres négatifs ne peuvent avoir de logarithmes, parce que le rapport de « 1 à -1 est imaginaire ; qu'il ne peut exister de rapports réels, ni de proportions entre des nombres négatifs ; que la proportion $1 : -1 :: -1 : 1$ ne « peut être juste ; car les deux rapports ne sauraient être égaux, puisque le « premier va d'un plus grand nombre à un plus petit, tandis que le second « va d'un plus petit nombre à un plus grand. »

Lorsqu'on voit un géomètre tel que Leibnitz, donner de pareilles raisons, que ne peut-on pas attendre des géomètres vulgaires ?

Nous venons de voir que Leibnitz reproche à Bernoulli d'étendre aux logarithmes des nombres négatifs, les propriétés démontrées seulement sur les logarithmes des nombres positifs ; or, il va sans dire que Leibnitz tombe lui-même dans le défaut qu'il reproche à Bernoulli, et applique ces propriétés même aux nombres imaginaires. C'est ce qu'il fait en disant que « si -2 « avait un logarithme, la moitié de ce logarithme représenterait celui de $\sqrt{-2}$.

L'exemple de d'Alembert, comme tant d'autres, prouve, sinon que les nombres négatifs ont des logarithmes, du moins qu'il est nécessaire qu'ils en aient, et même qu'ils aient les mêmes que les nombres positifs. La théorie ordinaire ne leur en donne pas; mais pour être rationnelle, elle devrait leur en donner. Il suffit que le besoin de ces logarithmes se fasse sentir impérieusement, pour que ce moyen d'y satisfaire se présente naturellement.

En effet, la base 7 du système considéré plus haut, est la raison de la progression

$$\div \frac{1}{2401} : \frac{1}{343} : \frac{1}{49} : \frac{1}{7} : 1 : 7 : 49 : 343 : 2401;$$

mais cette même base 7 est aussi la raison de la progression

$$\div -\frac{1}{2401} : -\frac{1}{343} : -\frac{1}{49} : -\frac{1}{7} : -1 : -7 : -49 : -343 : -2401,$$

qui est composée des mêmes termes changés de signe.

Par là on voit clairement que le logarithme d'un terme de la première progression, est identiquement le logarithme du terme correspondant de la seconde progression. Ainsi, 343 et -343 ont identiquement le même logarithme, qui est 3. La définition algébrique des logarithmes consistera donc dans la relation $x = \log \pm a^x$.

Ainsi, d'après la nouvelle définition, soit arithmétique, soit algébrique, deux nombres égaux et de signes contraires, ont identiquement le même logarithme, de la même manière et pour les mêmes raisons, que deux nombres égaux et de signes contraires ont le même carré, que deux arcs égaux et de signes contraires ont le même cosinus, la même sécante, etc.

De ce que les nombres négatifs ont les mêmes logarithmes que les nombres positifs, il ne s'ensuit pas que les relations établies entre les nombres positifs et leurs logarithmes, existent toutes nécessairement entre les nombres négatifs et leurs logarithmes.

On ne peut les vérifier ou les démontrer qu'autant qu'on aura préalablement et complètement fixé les conditions du système adopté. Autrement, il n'y a pas de nombre A qui ne puisse être le logarithme d'un autre nombre B, puisqu'il suffit pour cela de prendre A pour la raison de la progression arithmétique, et B pour la raison de la progression géométrique.

Nous allons maintenant présenter les propriétés fondamentales des logarithmes, avec les modifications qu'elles comportent au sujet des nombres négatifs.

1° La somme des logarithmes de deux nombres u et v, représente, à la fois, le logarithme de $+ uv$ et celui de $- uv$.

2° La différence des logarithmes de deux nombres u et v, représente, à la fois, le logarithme de $\frac{u}{v}$ et celui de $-\frac{u}{v}$.

3° Le double du logarithme d'un nombre représente toujours le logarithme du carré de ce nombre.

4° La moitié du logarithme d'un nombre positif représente le logarithme de chacune des racines carrées de ce nombre; mais lorsque le nombre est négatif, la moitié de son logarithme ne représente pas le logarithme de ses racines carrées, qui sont toutes deux imaginaires. Ainsi, la moitié du logarithme de -2 représente le logarithme de $\pm\sqrt{2}$, et non celui de $\pm\sqrt{-2}$.

Par exemple, si l'on veut insérer un moyen géométrique entre les deux termes -1 et -7, de la progression géométrique

$$\div -1 : -7 : -49 : -343 : \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\text{on a } x^2 = -1 \times -7 = 7, \text{ d'où } x = \pm\sqrt{7}, \text{ et non } x = \pm\sqrt{-7}.$$

Cela nous montre le peu de valeur de l'objection que Leibnitz présentait à Bernoulli en lui écrivant :

« Le logarithme de $\sqrt{-2}$ est la moitié du logarithme de -2; mais $\sqrt{-2}$ « est un nombre impossible, donc son logarithme est impossible. Or, une « chose est impossible dont la moitié est impossible; donc le logarithme de -2 est impossible, puisque sa moitié est impossible. »

Ce raisonnement de Leibnitz, poussé un peu plus loin, démontrerait tout aussi bien que le logarithme de 4 est impossible : En effet, dès que le logarithme de -2 est déclaré impossible, on dira qu'une chose est impossible dont la moitié est impossible; donc le logarithme de 4 est impossible, puisque sa moitié qui est le logarithme de -2, racine de 4, vient d'être démontrée impossible.

Au fond, ce raisonnement, qui aboutit à une conclusion évidemment fausse, prouve que Leibnitz est parti d'un principe faux, en disant que la moitié du logarithme de -2, représente le logarithme de $\sqrt{-2}$.

C'est surtout dans le calcul intégral que nous rencontrerons et que nous établirons la nécessité de donner aux nombres négatifs les mêmes logarithmes qu'aux nombres positifs.

Je ne parlerai point ici des logarithmes imaginaires, auxquels on n'a besoin de recourir que dans la théorie défectueuse qui refuse toute espèce de logarithmes réels aux nombres négatifs.

Je sais bien qu'on pourra alléguer les beaux travaux qu'on a fondés sur les logarithmes imaginaires. Je dis que c'est de la science aprés déraillement. A la vérité, il y a des industriels qui sauraient tirer parti même d'un déraillement ; mais le conducteur de la machine doit avant tout éviter le déraillement.

Des Variables et de leurs Fonctions.

Les quantités représentées par des lettres peuvent être supposées constantes ou variables. Ordinairement les premières lettres de l'alphabet représentent les constantes, et les dernières les variables.

Une variable qui ne dépend d'aucune autre, s'appelle variable indépendante. Elle est susceptible de recevoir toutes les valeurs possibles.

Toute variable qui en renferme une autre dans son expression, s'appelle fonction de cette autre variable.

Ainsi $y = 3x^2, u = \dfrac{5}{a-x}, v = a^x, z = \log x^3, t = \dfrac{\sin x}{1-x},$

sont autant de fonctions de la variable x.

Losqu'une équation existe entre plusieurs variables, chacune d'elles est une fonction des autres. Par exemple, dans l'équation

$y^2 - 3xy + 5y - x + 1 = 0$, chacune des deux variables est une fonction de l'autre.

Si l'équation est résolue par rapport à l'une des variables, cette variable est dite une fonction explicite des autres. Une variable s'appelle fonction implicite lorsque l'équation n'est pas résolue par rapport à cette variable.

Dès que deux variables sont fonctions l'une de l'autre, aucune des deux n'est absolument indépendante ; pourtant on appelle indépendante celle que l'on fait varier arbitrairement. Par exemple, dans l'équation $y^2 = x$, la variable x peut être dite indépendante, mais elle ne l'est pas absolument, puisqu'on ne peut pas lui donner de valeur négative sans que la valeur correspondante de y devienne impossible ou imaginaire.

Les fonctions $3x^2$, $\dfrac{7x}{a-x}$, etc., sont dites algébriques, taudis que les fonctions a^x, $\log x$, $\operatorname{tang} x$, etc., sont dites transcendantes.

Si l'on a $u = \sin x$, $v = 3x^2$, $z = e^x$, et $y = u + v + z$, y s'appelle une fonction composée.

Lorsqu'on dit qu'une variable décroît indéfiniment, on entend qu'elle décroît jusqu'à zéro ; lorsqu'on dit qu'elle croît indéfiniment, on entend que la valeur peut croître sans limite.

Des Limites des Fonctions.

Le mot limite s'emploie dans deux acceptions différentes. C'est ainsi que dans la première acception l'on dit que la surface d'un corps est la limite de ce corps, que le périmètre d'un polygone est la limite de sa surface. Dans la seconde acception, on entend par limite d'une grandeur variable, une grandeur fixe dont la variable peut approcher indéfiniment sans pouvoir l'atteindre. C'est ainsi que la surface du cercle est la limite de celle du polygone régulier inscrit dont on double indéfiniment le nombre des côtés, et que la circonférence du cercle est la limite du périmètre de ce polygone. De même, lorsque la valeur de x croît indéfiniment, celle de $y = \frac{1}{x}$ a pour limite zéro, parce qu'elle approche indéfiniment de zéro, sans pouvoir être absolument zéro. De même encore, la limite de $y = 4 + \frac{1}{x}$ est 4, lorsque x croît indéfiniment.

Il est évident qu'une variable ne peut avoir de limite qu'autant qu'elle est fonction d'une autre variable ; car une variable absolument indépendante est susceptible de recevoir toutes les valeurs possibles.

Tous les géomètres s'accordent à dire que « la limite d'une variable est une « quantité fixe dont la variable s'approche indéfiniment sans jamais pouvoir « l'atteindre. » Ce qu'il y a de très-étonnant, c'est qu'après avoir insisté tout particulièrement sur les conditions de cette définition, ils les transgressent ensuite avec la plus grande facilité. C'est ce que fait, par exemple, M. Charles de Freycinet, car après avoir dit :

« Ce qui caractérise la limite telle que nous l'avons définie, c'est à la fois « que la variable puisse en approcher autant qu'on le veut, et néanmoins « qu'elle ne puisse jamais l'atteindre rigoureusement, » il adopte la définition qu'on donne généralement de la tangente en appelant « tangente à une courbe « la limite vers laquelle tend la direction d'une sécante qui passe par un « point constant de cette courbe, et dont un second point d'intersection se « rapproche indéfiniment du premier. »

D'abord une direction n'est pas une quantité ; ensuite la sécante devient tangente lorsque les deux points coïncident ; ainsi la prétendue limite peut être atteinte rigoureusement. Nous aurons lieu de signaler dans la suite un grand nombre de limites entachées du même défaut.

Une variable et sa limite sont nécessairement de même nature; autrement, comment leur différence pourrait-elle devenir très-petite? Et d'abord de quelle nature serait cette différence? Elle ne peut jamais devenir rigoureusement nulle, parce que la variable n'est pas indépendante, mais dépend d'une autre selon une loi qui ne permet pas à la variable de coïncider avec sa limite.

MM. de Freycinet et de Fabry ont cru donner la raison de cette circonstance « en disant; « qu'il y a entre la variable et sa limite, une différence vrai-« ment essentielle. » Cette raison est absurde. Pour l'appuyer, M. de Fabry ajoute qu'il « est absolument impossible qu'une droite soit la limite d'une « autre droite. »

Une droite peut très-bien être la limite d'une autre. Par exemple, soit $\frac{1}{x^2}$ l'angle que fait la sécante avec la tangente, cet angle aura pour limite zéro, lorsque x croîtra indéfiniment, et l'on pourra dire que la tangente est la limite de la sécante.

Mais si l'angle varie d'une manière tout-à-fait indépendante, rien n'empêche la sécante d'atteindre et de dépasser la tangente, qui alors représente une position particulière et non la limite de la sécante.

Lorsque le nombre des côtés d'un polygone inscrit croît indéfiniment, son périmètre a pour limite la circonférence, parce que le polygone étant inscrit, son périmètre n'est pas une variable indépendante. Mais, si le polygone n'était pas assujetti à la condition d'être inscrit dans le cercle, son périmètre pourrait atteindre et dépasser la circonférence.

Théorie des Convergents.

Lorsqu'une fonction croît indéfiniment, elle ne peut tendre vers aucune limite fixe ; cependant elle peut tendre vers une seconde fonction plus simple, qu'on obtient en supprimant dans la première les termes qui tendent vers zéro, et cette seconde fonction est ce que j'appelle le convergent de la première.

De cette manière, $3x^2+5$ est le convergent de $3x^2+5+\frac{2}{x}+\frac{\sin x}{x^2}$.

Lorsque le convergent d'une fonction est une constante, il en représente la limite ; ainsi 5 est le convergent ou la limite de la fonction $5+\frac{2}{x}+\frac{\sin x}{x^2}$.

Il est évident que la somme des convergents de plusieurs fonctions, représente le convergent de la somme de ces fonctions.

Il en résulte que pour trouver la limite de la somme de plusieurs fonctions, on pourra remplacer chacune d'elles par son convergent, et, de cette manière, le calcul pourra devenir beaucoup plus simple. Supposons, par exemple, qu'on demande la limite de la fonction

$$\sqrt[6]{64x^8+7x^2-9}+\sqrt[3]{7x^2-8x^4-9}+\sqrt{x^2+8x-3}-\sqrt{x^2+2x-7},$$

dans laquelle on suppose x infini.

Lorsqu'on sait que les convergents des quatre termes sont $2x^{\frac{8}{6}}, -2x^{\frac{4}{3}}$, $x+4$, et $-x-1$, leur somme $2x^{\frac{8}{6}}-2x^{\frac{4}{3}}+x+4-x-1$, qui se réduit à 3, donne la limite cherchée.

Nous allons établir les règles à suivre pour calculer les convergents des fonctions les plus ordinaires.

Première règle. — Le convergent de la fraction

$$\frac{Ax^m+bx^n+cx^p+\ldots\ldots\ldots}{A'x^m+b'x^{n'}+c'x^{p'}+\ldots\ldots\ldots},$$

dans laquelle on suppose que m est le plus fort des exposants, se réduit au rapport $\frac{A}{A'}$.

En effet, si l'on divise tous les termes par x^m, il n'y aura que le premier du numérateur, et le premier du dénominateur qui ne tendront pas vers zéro quand on fera croître x indéfiniment. Le convergent, ou la limite de la fraction, sera donc $\frac{A}{A'}$.

Remarque. — Si $A=0$, ou si le numérateur est d'un degré moins élevé que le dénominateur, le convergent ou la limite se réduit à zéro.

Deuxième règle. — Le convergent de la fraction

$$\frac{Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots\ldots\ldots+Kx+H}{A'x^{m'}+B'x^{m'-1}+\ldots\ldots+K'x+H'},$$

est de la forme $ax^n+bx^{n-1}+\ldots\ldots+kx+h$, où $n=m-m'$, et où les coefficients $a, b, \ldots\ldots k, h$, se déterminent en identifiant les termes du dividende à ceux du produit du diviseur par le quotient.

Par cette règle, on trouve que le convergent de la fraction

$$\frac{x^m+Bx^{m-1}+\ldots\ldots\ldots+K'x+H}{x^{m-1}+B'x^{m-2}+\ldots\ldots+K'x+H'}, \text{ est } x+B-B'.$$

Troisième règle. — Le convergent de la fonction

$$\sqrt[m]{x^m + ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots + Kx + H},\ \text{est}\ x + \frac{a}{m}.$$

Pour le démontrer, posons :

$$x + \frac{a}{m} + \alpha = \sqrt[m]{x^m + ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots + Kx + H}.$$

En élevant les deux membres à la puissance m, et supprimant les termes qui leur sont communs, il vient :

$$m\alpha x^{m-1} + \ldots\ldots\ldots = Bx^{m-2} + \ldots\ldots\ldots + Kx + H.$$

Le premier terme est du degré $m-1$, et tous les autres termes sont d'un degré moindre. En mettant dans le premier membre tous les termes qui contiennent le facteur α, et dans le second tous ceux qui ne le contiennent pas, l'égalité peut s'écrire $M\alpha = N$, et donne $\alpha = \frac{N}{M}$. Or le premier terme de M étant du degré $m-1$, et tous les autres, d'un degré moindre, il en résulte que le numérateur de la fraction $\frac{N}{M}$ est d'un degré plus faible que le dénominateur ; donc, d'après la remarque de la première règle, la fraction $\frac{N}{M}$ a pour limite zéro. Mais si α a pour limite zéro, le convergent de

$$\sqrt[m]{x^m + ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots + Kx + H},$$

se réduit à $x + \frac{a}{m}$, comme il fallait le démontrer.

L'application de cette règle donne $x + \frac{p}{2}$ pour le convergent de $\sqrt{x^2 + px + q}$, et $x + \frac{p'}{2}$ pour le convergent de $\sqrt{x^2 + p'x + q'}$; par conséquent, la limite de la différence

$$\sqrt{x^2 + px + q} - \sqrt{x^2 + p'x + q'},\ \text{est}\ \frac{p-p'}{2}.$$

Par exemple, la limite de

$$\sqrt{x^2 + 13x - 43} - \sqrt{x^2 + 5 + 9},\ \text{est}\ \frac{13-5}{2}\ \text{ou}\ 4.$$

Quatrième règle. — Le convergent de la fonction

$$\sqrt[m]{x^{2m} + ax^{2m-1} + bx^{2m-2} + Cx^{2m-3} + \ldots\ldots\ldots Kx + H},$$

est

$$x^2 + \frac{ax}{m} + \frac{2mb - a^2(m-1)}{2m^2}.$$

Pour le démontrer, on pose

$$(x^2+a'x+b'+\alpha)^m = x^{2m}+ax^{2m-1}+bx^{2m-2}+Cx^{2m-3}+\ldots\ldots+Kx+H,$$

et, en identifiant les termes du même degré, on obtient $a'=\frac{a}{m}$, $b'=\frac{2mb-a^2(m-1)}{2m^2}$, après quoi l'on fait voir, comme précédemment, que α tend vers zéro lorsque x croît indéfiniment.

Cette règle donne $\qquad x^2+\frac{ax}{2}+\frac{b}{2}-\frac{a^2}{8}$,

pour le convergent de $\sqrt{x^4+ax^3+bx^2+Cx+D}$.

Par l'application de cette règle, on trouvera $\frac{b-b'}{2}-\frac{a^2-a'^2}{8}$ pour la limite de la fonction

$$\sqrt{x^4+ax^3+bx^2+cx+d}-\sqrt{x^4+a'x^3+b'x^2+c'x+d'}-\frac{a-a'}{2}x;$$

car, le convergent du premier radical étant $x^2+\frac{ax}{2}+\frac{b}{2}-\frac{a^2}{8}$, et celui du second étant $x^2+\frac{a'x}{2}+\frac{b'}{2}-\frac{a'^2}{8}$, il s'ensuit que la limite de la fonction proposée est $\frac{b-b'}{2}-\frac{a^2-a'^2}{8}$.

Je n'essaierai point de compléter ici la théorie des convergents, en ajoutant de nouvelles règles à celles qui ont été formulées plus haut ; mais je m'attacherai à en faire bien comprendre l'esprit et les avantages, par les nouveaux exemples que je vais traiter conformément aux règles précédentes.

Premier exemple.—Trouver la limite de l'expression $x-\frac{x}{1+\frac{1}{x}}$.

Le convergent de la fraction $\frac{x}{1+\frac{1}{x}}$, est $x-1$, d'après la deuxième règle; donc la limite de l'expression proposée est $x-x+1$, ou 1.

L'expression proposée peut aussi s'écrire $\frac{x}{x+1}$, et, d'après la première règle, sa limite est 1.

Cet exemple, qui a été traité par M. Gérono, à la page 90 de ses *Nouvelles Annales de Mathématiques de 1865*, mérite d'être très-soigneusement remarqué, car l'auteur le choisit tout exprès pour montrer l'erreur des principes de ma *Théorie des Convergents*. Ce but déterminé est nettement indiqué dans ce passage du même article des *Nouvelles Annales :*

« Des précédents de cette nature ne permettent guère d'espérer que l'on « puisse parvenir à convaincre M. Fleury de l'erreur qui existe dans ses « principes fondamentaux. Aussi, ce n'est pas précisément l'objet que je « me propose en répondant à l'*Avertissement*. Mais l'auteur est licencié « ès-sciences mathématiques, et l'assurance avec laquelle il proclame l'exac- « titude de ses raisonnements, pourrait égarer le jugement de quelques-uns « de ceux qui n'ont pas encore fait des études aussi prolongées que les « siennes. »

D'après mes *Principes fondamentaux*, la fraction $\frac{1}{x}$ ne peut pas devenir rigoureusement nulle, même en y supposant x infini ; car si la fraction $\frac{1}{x}$ se réduisait à zéro, l'expression $x - \frac{x}{1+\frac{1}{x}}$, se réduirait à $x - \frac{x}{1}$ ou à zéro.

On a identiquement $x - \frac{x}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$; or, si $\frac{1}{x}$ devenait nul, l'identité deviendrait $0 = 1$, ce qui est absurde.

Pour M. Gérono, il est absolument exact que $\frac{1}{x} = 0$; et la preuve que j'ai donnée du contraire est ce que M. Gérono appelle l'*erreur* de mes principes fondamentaux.

« L'hypothèse $x = \infty$, » dit-il, « réduit l'expression $x - \frac{x}{1+\frac{1}{x}}$ à $x - x$. »

On aurait donc $x - x = 1$? M. Gérono en convient ; mais il ne voit là aucune absurdité : car il entend que la valeur de $x - x$ n'est pas zéro, et la preuve, dit-il, c'est qu'elle doit être 1. La valeur de $x - x$ n'est pas zéro, puisque, ajoute-t-il, « la réduction des deux termes x, $-x$ conduit à « l'égalité $1 = 0$. »

Son article de six pages, publié afin de montrer l'*erreur de mes principes fondamentaux*, est tout de la même force. Ainsi, dit-il, « les deux termes « $\frac{a-a'}{2}x$, $-\frac{a-a'}{2}x$ ne se détruisent pas, généralement du moins, parce « qu'ils ne proviennent pas de l'hypothèse $x = \infty$. »

Or, si $x - x$ n'égale pas zéro, c'est que x n'égale pas x. Il était impossible d'affirmer une absurdité plus évidente.

Deuxième exemple. — Trouver la limite de l'expression

$$\sqrt{x^2+19x-7}-\sqrt{x^2+3x+5}.$$

D'après la troisième règle, le convergent de la première racine est $x+\frac{19}{2}$, celui du second est $x+\frac{3}{2}$; donc la limite de l'expression proposée est $\frac{19-3}{2}$, ou 8.

Dans plusieurs algèbres, et en particulier dans les premières éditions de celle de M. Bertrand, on multiplie et l'on divise la différence des radicaux par leur somme, ce qui, réduction faite, donne :

$$\frac{16x-12}{\sqrt{x^2+19x-7}+\sqrt{x^2+3x+5}}.$$

Ensuite, en divisant tous les termes par x, on obtient

$$\frac{16-\frac{12}{x}}{\sqrt{1+\frac{19}{x}-\frac{7}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}$$

En supposant nuls les termes qui ont x au dénominateur, l'expression précédente se réduit à

$$\frac{16}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{16}{2}=8.$$

De ce que le résultat trouvé par cette méthode est exact, il ne s'ensuit pas que les termes supposés nuls le soient rigoureusement, car la valeur d'une variable n'atteint jamais sa limite.

Il faut donc conclure que la méthode qui donne ici un résultat exact, est cependant fondée sur un principe qui ne l'est pas, puisque dans d'autres cas elle conduit à des résultats complètement faux.

Elle a un autre défaut bien grand, puisqu'elle ne s'applique qu'à la différence de deux radicaux du second degré, et n'a, par conséquent, aucune prise sur les exemples suivants :

Troisième exemple. — Soit à trouver la limite de

$$\sqrt[m]{x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+Kx+H}-\sqrt[m']{x^{m'}+A'x^{m'-1}+B'x^{m'-2}+\ldots+K'x+H'}.$$

D'après la troisième règle, le convergent du premier radical est $x + \frac{A}{m}$, et celui du second, $x + \frac{A'}{m'}$; leur différence $\frac{A}{m} - \frac{A'}{m'}$ représente donc la limite cherchée.

QUATRIÈME EXEMPLE. — Soit à trouver la limite de

$$\sqrt[m]{x^m + Bx^{m-2} + \ldots + Kx + H} - \sqrt[m']{x^{m'} + B'x^{m'-2} + \ldots + K'x + H'}.$$

Cet exemple est le précédent dans lequel A et A' sont nuls; la limite est donc zéro.

CINQUIÈME EXEMPLE. — Trouver la limite de

$$\sqrt[3]{x^3 + 1} - x.$$

Elle se voit immédiatement, car le convergent du radical étant x, la limite est $x - x$, ou zéro.

Pour les exemples auxquels ne s'applique pas la méthode donnée par M. Bertrand, il renvoie à ce qu'il appelle *des artifices de calcul;* ce qui revient à dire : Tire-toi de là comme tu pourras.

Voici l'artifice de calcul qu'il emploie pour l'exemple $\sqrt[3]{x^3 + 1} - x$, dont la limite se voit du coup, d'après notre *Théorie des Convergents.*

« Trouver la limite de $\sqrt[3]{x^3 + 1} - x$, lorsque x augmente indéfiniment.

$$« \sqrt[3]{x^3+1} - x = \frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1} - x\right)\left[\sqrt[3]{(x^3+1)^2} + x\sqrt[3]{x^3+1} + x^2\right]}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2} + x\sqrt[3]{x^2+1} + x^2}$$

$$« = \frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^3 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2} + x\sqrt[3]{x^3+1} + x^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2} + x\sqrt[3]{x^3+1} + x^2};$$

« donc $$\lim\left(\sqrt[3]{x^3+1} - x\right) = 0. »$$

C'est par de tels artifices, et bien plus compliqués encore, que M. J. Bertrand traite l'exemple suivant :

$$\frac{\sqrt[3]{2x+6} - \sqrt{x+1} + \sqrt[4]{5x-1} - \sqrt[5]{20x+12}}{x^2 + 1 + \sqrt[2]{3x+1} - \sqrt[3]{63x+1}},$$

dont il demande « *la vraie valeur,* pour $x=1$, » qui réduit la fraction à $\frac{0}{0}$.

Le procédé employé dans son algèbre est d'une complication effrayante ; et j'ai montré dans ma *Théorie des Convergents* (page 44) que « *le résultat*

« $\dfrac{3\sqrt{2}-4}{23}$, donné dans la 3^{me} édition, n'est pas plus exact que le résultat

« $\dfrac{\sqrt{2}-1\frac{1}{3}}{15}$, qui se trouvait dans la première édition, puisque sa valeur

« exacte est $\dfrac{3\sqrt{2}-4}{69}$. »

En publiant une méthode rigoureuse plus simple et plus générale, j'ai critiqué celle de M. Bertrand, fondée sur des procédés compliqués, sans rigueur ni généralité.

M. Bertrand, ainsi prévenu avant la 4^{me} édition de son algèbre, a compris que sa méthode était plutôt à *rayer* qu'à corriger. C'est le parti qu'il a pris, comme nous l'apprend l'*avertissement* de la 4^{me} édition, où on lit :

« Enfin le chapitre sur les expressions qui se présentent sous une forme « indéterminée a été rayé. »

Cependant, comme l'auteur ajoute : « Nous avons pensé qu'il valait mieux « ne s'occuper de ces sortes de questions qu'après avoir étudié les propriétés « des dérivées, » je prouverai que la méthode fondée sur les dérivées, ne vaut pas mieux que celle qui a été rayée.

THÉORIE DES SÉRIES

On appelle série une suite illimitée de termes qui procèdent suivant une loi déterminée.

Ainsi les progressions et les fractions périodiques sont des séries.

Si l'on désigne par u_1, u_2, u_3 u_4, etc., les termes d'une série, et par S_n la somme des n premiers termes, on aura identiquement :

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots\dots\dots + u_{n-1} + u_n .$$

Lorsque n croît indéfiniment, la somme S_n peut croître aussi indéfiniment, ou tendre vers une limite, ou enfin varier d'une manière quelconque, sans croître indéfiniment, ni tendre vers une limite déterminée. Quand cette somme tend vers une limite, la série est dite convergente; dans tout autre cas elle est considérée comme divergente, quoique ce mot convienne plus particulièrement aux séries dont la somme croît indéfiniment.

Par exemple, si l'on a

$$S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \ldots\ldots \pm 1,$$

la valeur de S_n est zéro ou 1, suivant que n est pair ou impair. La série n'est ni convergente ni divergente, et il n'y a pas lieu de chercher la limite de la somme de ses termes, puisque cette somme est connue exactement.

Toute progression géométrique décroissante est une série convergente, et toute progression géométrique croissante est une série divergente. Une fraction périodique est, au fond, une progression géométrique décroissante ; elle constitue donc une série convergente.

Pour qu'une série composée de termes positifs, soit convergente, il est nécessaire que son terme général u_n tende vers zéro, lorsque n croît indéfiniment.

En effet, si les termes restaient plus grands qu'un nombre α, la somme de n termes serait plus grande que $n\alpha$, qui croît indéfiniment avec n.

Cette condition n'est pas suffisante, c'est-à-dire que le terme u_n peut tendre vers zéro, sans que la série soit convergente.

Par exemple, la série

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots\ldots\ldots,$$

qu'on nomme série harmonique, est divergente, quoique le terme $\frac{1}{n}$ tende vers zéro.

Pour démontrer que cette série est divergente, désignons par a la somme $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, par a' la somme $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$, composée des 4 termes qui viennent ensuite, par a'' la somme des 8 termes suivants, et ainsi de suite; on aura $a > \frac{1}{2}$, $a' > \frac{1}{2}$, $a'' > \frac{1}{2}$, et ainsi de suite.

La somme représentée par $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + a + a' + a'' +$ etc., est donc plus grande que la somme correspondante $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} +$ etc.; par conséquent elle peut croître indéfiniment.

La limite d'une série est ce que les auteurs appellent sa valeur, ou sa somme, et ils disent qu'une série divergente n'a pas de somme.

Cette confusion de langage passe bientôt dans l'esprit de ceux qui l'emploient. Ils l'introduisent ensuite dans le calcul, en posant une égalité entre la somme des termes de la série et la limite de cette somme. Ils traitent cette égalité comme si elle était rigoureusement exacte, et ne se font pas scrupule de l'appeler une identité. Je montrerai qu'il y a tout à perdre à sacrifier ainsi l'exactitude sous prétexte de simplification de langage.

Pour moi, une limite sera une limite; j'appellerai limite d'une série, et non somme d'une série, la limite de la somme de ses termes. Je considérerai toujours comme inexactes les égalités

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots\ldots\ldots,$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots\ldots\ldots,$$

$$1 = 0{,}9999\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

quoique 1 soit bien la limite de la série, comme de la progression ou de la fraction périodique.

On devrait pourtant bien comprendre qu'il ne peut jamais être nécessaire ni permis de commettre une inexactitude, quand même elle conduirait tout droit au mouvement perpétuel, ou à la quadrature du cercle.

En partant d'égalités inexactes, ou, pour employer l'expression de Carnot, d'équations imparfaites, on peut démontrer tout ce qu'on veut, le faux aussi bien que le vrai, et tomber ainsi dans de graves erreurs, comme cela est arrivé aux plus grands géomètres, tels que Leibnitz, Bernoulli, Lagrange, Cauchy, Abel, Bertrand, etc.

L'identité

$$\frac{x^8 - a^8}{x - a} = x^7 + ax^6 + a^2x^5 + a^3x^4 + a^4x^3 + a^5x^2 + a^6x + a^7,$$

pourra, par abréviation, s'écrire :

$$\frac{x^8 - a^8}{x - a} = x^7 + ax^6 + a^2x^5 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

parce que la division se fait exactement, et que les termes sous-entendus suivent tous la même loi.

Mais l'identité

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}$$

ne pourra pas s'écrire

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

parce que le terme $\frac{x^n}{1-x}$ ne suit pas la même loi que les autres, et que l'abréviation suppose que les termes sous-entendus suivent tous la même loi.

D'après cette loi, le terme x^{n-1} serait suivi du terme x^n, très-différent du terme $\frac{x^n}{1-x}$, qui est dans l'identité.

Tandis que l'identité est vérifiée pour toute valeur de x, l'égalité

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\dots\dots\dots\dots,$$

ne se vérifie que pour $x=0$. Pour toute valeur de x comprise entre 0 et 1, ou 0 et -1, la série est convergente, et le premier membre représente la limite, mais non la valeur du second membre.

La série devient divergente pour toute valeur de x non comprise entre $+1$ et -1; alors l'égalité

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\dots\dots\dots\dots,$$

qui était approchée dans le cas de la convergence, devient tout à fait illusoire dans celui de la divergence.

Par exemple, pour $x=2$, elle devient

$$-1=1+2+4+8+16+32+64+\dots\dots;$$

ce qui est évidemment absurde.

Peut-on remplacer une fonction quelconque par son développement en série, et réciproquement? D'Alembert ayant reproché à Lagrange de l'avoir fait dans un cas où la série n'est pas convergente, Lagrange répondit par cette question :

« Je demande, si, toutes les fois que dans une formule algébrique il se
« trouve, par exemple, une série géométrique infinie telle que

« $1+x+x^2+x^3+x^4+\dots\dots\dots,$

« on ne sera pas en droit d'y substituer $\frac{1}{1-x}$, quoique cette quantité ne soit
« réellement égale à la somme de la série proposée qu'en supposant le dernier
« terme x^{∞} nul. Il me semble qu'on ne saurait contester l'exactitude d'une
« telle substitution sans renverser les principes les plus communs de
« l'analyse. »

Cette réponse ou, si l'on veut, cette question n'est vraiment pas digne du grand géomètre qui l'a faite. Quels sont donc les principes renversés?

Remplacer

$1+x+x^2+x^3+\dots\dots$ par $\frac{1}{1-x}$, dans le cas de $x=2$, c'est substituer -1 à $1+2+4+8+16+32+\dots\dots$, c'est prétendre que la somme de toutes les puissances entières et positives de 2, est représentée par -1.

Contester l'exactitude d'une telle substitution, c'est renverser non un principe d'analyse, mais la plus grossière des absurdités.

M. Laurent, répétiteur à l'école polytechnique, partage l'erreur de Lagrange, en disant dans sa *Théorie des Séries :*

« Les séries divergentes ne pourraient-elles pas être soumises aux mêmes « calculs que les séries convergentes? Ne pourrait-on pas convenir de « représenter, par exemple, $\frac{1}{1-x}$, quel que soit x, par le symbole « $1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots$? C'est ce qu'il resterait à éclaircir. Espérons que « nous connaîtrons bientôt le dernier mot de la science sur ce point. »

Je viens de dire que représenter $\frac{1}{1-x}$ par le symbole $1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots\ldots$, c'est, par exemple, représenter -1 par le symbole $1+2+4+8+32+\ldots\ldots$ Espérer que la science viendra bientôt justifier de pareilles monstruosités, c'est vraiment lui faire beaucoup trop d'honneur. C'est comme si l'on espérait que la science, à force de progrès, arrivera à démontrer que 2 et 2 font cinq milliards.

Il faut maintenant montrer comment l'inexactitude, regardée comme très-petite, ou plutôt comme nulle, que l'on commet en égalant la somme des termes d'une série, à la limite de cette somme, peut conduire à des erreurs très-graves.

Soient les deux sommes :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots\ldots+\frac{1}{n-1},$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}.$$

Si on retranche chacun des termes de la seconde, du terme correspondant de la première, la différence des deux sommes se trouvera représentée par

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n(n-1)}.$$

Mais, si l'on supprime tous les termes communs aux deux sommes, leur différence se trouvera exprimée par $1-\frac{1}{n}$.

On a donc identiquement :

$$1-\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n(n-1)}.$$

Partant de cette identité, je forme le tableau suivant, dans lequel chacune des égalités qui suivent la première, se déduit successivement de la précédente, en retranchant de ses deux membres le premier terme du second membre :

$$1-\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\ldots\ldots+\frac{1}{n(n-1)},$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n}=\ldots\ldots\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\ldots\ldots+\frac{1}{n(n-1)},$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{n}=\ldots\ldots\ldots\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\ldots\ldots+\frac{1}{n(n-1)},$$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{n}=\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\ldots\ldots+\frac{1}{n(n-1)},$$

$$\frac{1}{5}-\frac{1}{n}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{1}{30}+\ldots\ldots+\frac{1}{n(n-1)},$$

....

....

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n}=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il est évident que la somme de toutes ces identités sera encore une identité. Or, la seconde ligne verticale contient n fois le terme $-\frac{1}{n}$; donc la somme de ces termes donne $\frac{n}{n}$, ou le terme -1, qui détruit le terme $+1$, en sorte qu'après cette réduction, l'addition des termes du premier membre donne

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n}.$$

Mais, en additionnant les termes de chaque colonne du second membre, on obtient aussi

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n}.$$

L'addition des identités du tableau donne donc l'identité

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n},$$

qui se réduit à $0=0$, comme on devait s'y attendre.

Maintenant, si, sous prétexte que chaque série est prolongée à l'infini, on croit que le terme $\frac{1}{n}$ est absolument nul, le tableau précédent deviendra :

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{2} = \ldots\ldots \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{3} = \ldots\ldots\ldots \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{4} = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{4} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{30} + \ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et, en additionnant membre à membre, on obtiendrait

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots\ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots\ldots,$$

qui se réduit à $1 = 0$.

C'est Jean Bernoulli qui fut conduit, de cette manière, à l'absurdité $1 = 0$. Ni lui, ni son frère Jacques, ni les géomètres qui les ont suivis, n'ont pu comprendre la cause de cette erreur, parce que, pour les géomètres, en général, la fraction $\frac{1}{n}$ est nulle quand on y suppose n infini, et M. Bertrand, qui reproduit le calcul des Bernoulli, déclare *irréprochable* ce calcul dans lequel $\frac{1}{n}$ est partout traité comme zéro.

Les séries du tableau précédent sont convergentes, tandis que la série harmonique, d'où on les a tirées, est divergente. C'est donc à la série harmonique qu'on impute l'erreur du résultat final, et Bernoulli crut que cette erreur prouvait que la série est divergente.

Cet exemple et d'autres ont conduit les géomètres à croire les séries divergentes douées d'une sorte de vertu délétère, capable d'infecter les calculs ou les raisonnements les plus *irréprochables*. C'est tout particulièrement l'opinion d'Abel, et il s'en indigne en ces termes :

« Les séries divergentes sont quelque chose de bien fatal, et c'est une « honte qu'on se soit avisé d'y fonder aucune démonstration. On peut démon-

« trer tout ce qu'on veut en les employant; ce sont elles qui ont fait tant de « malheurs et qui ont enfanté tant de paradoxes. »

M. Bertrand a tiré des œuvres de Jacques Bernoulli l'exemple qui a conduit son frère Jean à l'égalité $1 = 0$, dans le but de le faire servir à démontrer qu'on n'a pas le droit d'employer les séries divergentes en analyse.

C'est une bien étrange manière de raisonner, que de commettre une erreur sur des séries convergentes, pour l'imputer à une série divergente, et en conclure que toutes les séries divergentes doivent être proscrites de l'analyse. Voici ce singulier raisonnement de M. Bertrand, tel qu'on peut le lire dans son *Traité de calcul différentiel.*

« Tous les géomètres s'accordent aujourd'hui à regarder la convergence « d'une série comme une condition nécessaire de son légitime emploi. Les « premiers inventeurs de cette grande théorie partageaient cette opinion, qui « semble d'ailleurs si naturelle.

« C'est vers le commencement du siècle que Poisson rappela les géomètres « à la vérité et à la rigueur, en montrant à quels résultats peut conduire « l'emploi des séries divergentes. Quelques lignes énergiques de Gauss et « d'Abel ont également contribué à faire cesser ce scandale géométrique, et à « établir solidement la nécessité absolue de la convergence, en faisant dispa- « raître de la science une erreur qui, tenant aux principes, aurait pu en « causer un grand nombre d'autres.

« Les géomètres du XVIII[e] siècle attachaient peu d'importance à la conver- « gence des séries. Les plus illustres d'entre eux ont employé des séries « divergentes, et paraissent s'être fait illusion sur le peu de rigueur des rai- « sonnements où elles interviennent. On trouve cependant dans les œuvres de « Jacques Bernoulli un exemple très-remarquable du danger qu'elles pré- « sentent, et c'est même à cause de l'absurdité d'un résultat, qu'il affirme la « divergence d'une série dont il s'est servi pour l'obtenir. Nous rapporterons « cette démonstration, qui fournit un des arguments les plus simples et les « plus concluants que l'on puisse présenter sur cette question, qui d'ailleurs « n'est plus douteuse pour personne.

« Considérons la série $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}$, et désignons-la par S, nous « aurons :

« $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots$, ou, ce qui revient au même,

« $S=\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{n}{n(n+1)}$.

« Posons

$$« \ A = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)},$$

$$« \ B = \ldots\ldots \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)},$$

$$« \ C = \ldots\ldots\ldots \frac{1}{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)},$$

$$« \ D = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{20} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

« On aura évidemment $S = A + B + C + D + \ldots\ldots\ldots$; d'un autre côté « $A = 1$, $B = A - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $C = B - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$, $D = C - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$, et ainsi « de suite indéfiniment.

« On a donc $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;

« et en comparant cette valeur à la précédente, on serait conduit à conclure « $1 = 0$, résultat absurde. Le raisonnement serait cependant irréprochable, « si la série désignée par S était convergente. On peut donc affirmer qu'elle « ne l'est pas, et l'on voit en même temps quelles erreurs peut entraîner « l'emploi des séries divergentes. »

La plupart des assertions contenues dans ce passage portent à faux. D'abord Leibnitz et les Bernoulli opéraient sur les séries divergentes, et très-souvent sur la série harmonique. Or, c'est juste au moment où M. Bertrand les prend sur le fait, qu'il affirme que « les premiers inventeurs partageaient l'opinion de « tous les géomètres, qui s'accordent aujourd'hui à regarder la convergence « d'une série comme une condition nécessaire de son légitime emploi. »

Les premiers inventeurs croyaient si naturel et si légitime l'emploi qu'ils faisaient des séries divergentes, qu'ils n'ont pas même cherché à le justifier par des démonstrations.

J'ai montré que l'erreur imputée à une série divergente, dans l'exemple rapporté par M. Bertrand, a été réellement commise sur des séries convergentes, et il y a ceci de très-remarquable, c'est que, par sa nature, cette erreur ne pouvait pas se commettre sur une série divergente. En effet, puisqu'elle consiste à remplacer la somme des termes de la série par la limite de cette somme, on ne la commettra jamais sur une série divergente, puisque, dans ce cas, la limite n'existe pas.

En supposant même que des erreurs nombreuses eussent été commises sur les séries divergentes, faudrait-il pour cela les proscrire de l'analyse? Que deviendrait la musique, si l'on en bannissait tous les instruments sur lesquels on a fait de fausses notes?

Les fondateurs de la théorie des séries sont partis d'une série divergente pour former et sommer les séries convergentes les plus remarquables. Je vais montrer que le principe si fécond sur lequel ils ont fondé leurs calculs, peut se démontrer très-rigoureusement, et comporte même une plus grande généralité que celle qu'ils lui attribuaient.

Soit $$S = u_1 + n_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots + u_{n-1} + u_n$$

une somme composée de termes positifs quelconques, et en nombre quelconque.

Soit ensuite

$$S' = u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + u_{k+4} + \ldots\ldots + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+k},$$

une somme composée des mêmes termes que la précédente à l'exception des k premiers et des k derniers ; en sorte qu'en supprimant les termes communs, on a identiquement

$$S - S' = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_k - (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots + u_{n+k}).$$

Mais, si, au lieu de supprimer les termes communs, on retranche le premier de S′ du premier de S, le deuxième du deuxième, et ainsi de suite, et qu'on désigne les restes successifs par

$$r_1, \quad r_2, \quad r_3, \quad r_4 \ldots\ldots r_{n-1}, \quad r_n$$

on aura identiquement :

$$u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_k - (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots + u_{n+k})$$
$$= r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \ldots\ldots + r_{n-1} + r_n.$$

Maintenant, supposons que le terme u_n converge vers une limite A, la somme $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ sera une série divergente, dont les termes peuvent être croissants ou décroissants, tandis que la série $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + \ldots\ldots$, qui en a été déduite, est une série convergente, dont la limite est $u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_k - k\text{A}$.

Lorsque A est zéro, comme dans la série harmonique, la limite se réduit à $u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_k$.

La règle que nous venons de démontrer peut donc s'énoncer de la manière suivante :

Etant donnée une série quelconque $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots$ convergente ou divergente, dont le terme u_n tend vers une limite A quelconque, si on retranche terme à terme de cette série la même série privée de ses k premiers termes, on obtiendra une série convergente, dont la limite sera $u_1 + u_2 + \ldots. + u_k - kA$.

Puisque le principe est général et rigoureusement démontré, ce n'est pas son application à la série harmonique qui a pu conduire les frères Bernoulli, et ensuite M. Bertrand, à l'absurdité $1 = 0$.

Ceux qui prétendent, avec M. Bertrand, que cette absurdité prouve qu'on n'a pas le droit d'employer les séries divergentes en analyse, ou, avec Abel, que « les séries divergentes sont quelque chose de bien fatal, » que « ce sont elles qui ont fait tant de malheurs et enfanté tant de paradoxes, » ressemblent à celui qui voudrait briser tous les instruments de musique sur lesquels on a fait de fausses notes.

Leibnitz est parti d'une série divergente pour en déduire les séries convergentes qui portent son nom, et les Bernoulli ont suivi son exemple. Leur manière d'opérer donne à la fois la loi et la limite des séries convergentes déduites de la série divergente. Je vais en reproduire quelques exemples tirés des œuvres de Jean Bernoulli.

« De la série $A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots\ldots.,$

« retranchant la série $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots.,$

« qui n'est autre que la série A, privée de ses deux premiers termes, il « reste :

$$« \; C = \frac{2}{3} + \frac{2}{8} + \frac{2}{15} + \frac{2}{24} + \frac{2}{35} + \ldots. = A - B = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

« et par suite

$$« \; D = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{2} C = \frac{3}{4}. \; »$$

Bernoulli ayant, de cette manière, obtenu la limite de la somme des fractions dont les dénominateurs forment la suite des carrés, 4, 9, 16, 25, 36, etc., tous diminués de 1, continue ainsi :

« De la série $E = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots\ldots\ldots\ldots,$

« soustrayant $F = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \ldots. = E - 1,$

« il reste $G = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} + \frac{2}{99} + \ldots. = E - F = 1,$

« et par suite $H = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \dots\dots\dots\dots = \frac{1}{2} G = \frac{1}{2}$,

« et enfin $I = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{43} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} + \dots\dots = D - H = \frac{1}{4}$. »

Il trouve ainsi $\frac{1}{2}$ pour la limite de la série H, dont les dénominateurs forment la suite des carrés pairs, 4, 16, 36, 64, etc., tous diminués d'une unité; et pareillement $\frac{1}{4}$, pour la limite de la série I, dont les dénominateurs forment la suite des carrés impairs, 9, 25, 49, 81, etc., tous diminués d'une unité.

Pour trouver la limite de la série $\frac{1}{7} + \frac{1}{16} + \frac{1}{27} + \frac{1}{40} + \frac{1}{55} + \dots\dots$, dont les dénominateurs forment la suite des carrés 16, 25, 36, 49, etc., tous diminués du carré 9, Bernoulli part encore de la série harmonique, et dit :

« Posons $A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots\dots$,

« et $B = \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots\dots$;

« la soustraction donne

« $C = \frac{6}{7} + \frac{6}{16} + \frac{6}{27} + \frac{6}{40} + \frac{6}{65} + \frac{6}{72} + \dots\dots = A - B = 2\frac{9}{20}$,

« et par suite

« $D = \frac{1}{7} + \frac{1}{16} + \frac{1}{27} + \frac{1}{40} + \frac{1}{55} + \frac{1}{72} + \dots\dots\dots = \frac{1}{6} C = \frac{49}{120}$. »

C'est encore de la même manière, et en partant toujours de la série harmonique, que Bernoulli trouve la limite de la série

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{22} + \frac{1}{30} + \frac{1}{39} + \frac{1}{49} + \dots\dots,$$

dont les dénominateurs forment la suite des nombres triangulaires 10, 15, 21, 28, 36, etc., tous diminués du même nombre triangulaire 6. A cet effet, il dit :

« Posant $A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots\dots$,

« et $B = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \dots\dots$;

« la soustraction donne

$$« \ C=\frac{7}{8}+\frac{7}{18}+\frac{7}{30}+\frac{7}{44}+\frac{7}{60}+\frac{7}{78}+\frac{7}{98}+\dots\dots=A-B=\frac{363}{140},$$

« et, par suite,

$$« \ D=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{22}+\frac{1}{30}+\frac{1}{39}+\frac{1}{49}+\dots\dots=\frac{2}{7}(A-B)=\frac{363}{490}. \ »$$

Voilà, je crois, assez d'exemples pour montrer la simplicité et la fécondité de la méthode imaginée par les premiers inventeurs de la théorie des séries. C'est en cela, dit Jen Bernoulli, que consiste l'artifice ingénieux employé par Leibnitz pour sommer les belles séries qui portent son nom.

J'ai donné une démonstration rigoureuse du principe sur lequel est fondée cette méthode : son application ne peut donc conduire qu'à des résultats exacts ; ce qui ne veut pas dire qu'en l'appliquant mal, on ne puisse trouver des résultats faux. Par exemple, celui qui, pour imiter Bernoulli, poserait

$$A=\frac{3}{2}+\frac{5}{3}+\frac{7}{4}+\frac{9}{5}+\frac{11}{6}+\frac{13}{7}+\dots\dots,$$

$$B=\frac{1}{1}+\frac{3}{2}+\frac{5}{3}+\frac{7}{4}+\frac{9}{5}+\frac{11}{6}+\dots\dots,$$

et, en soustrayant la seconde de la première, déduirait

$$C=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\dots\dots=A-B=-1,$$

trouverait, de cette manière, — 1 au lieu de 1, pour la limite de la série C.

Mais, puisque dans les séries A et B, le terme u_n converge vers 2, il faut, conformément au principe démontré, prendre $2-\frac{1}{1}$ ou 1 pour la limite de la série C, ce qui est bien la limite déjà connue.

Tous les exemples qui viennent d'être rapportés, débutent par une série divergente, et prouvent avec quelle facilité la loi et la limite des séries convergentes peuvent se déduire des séries divergentes.

Si le paradoxe n'était pas tant à la mode, ce ne serait pas sans un grand étonnement, qu'on lirait dans l'Algèbre de M. Bertrand :

« Une série divergente ne représente rien et ne peut être d'aucun usage « en analyse. »

C'est ici le lieu de placer une observation piquante. En effet, toutes ces séries remarquables que Leibnitz et les Bernoulli ont déduites d'une série divergente, n'ayant rien perdu de leur importance, il faut bien que M. Bertrand nous dise quelle méthode il substitue à la leur, pour sommer ces mêmes séries, puisqu'il assure qu' « une série divergente ne représente rien et ne peut

« être d'aucun usage en analyse, que la convergence est une condition « nécessaire de son légitime emploi. »

Cette méthode ingénieuse se trouve exposée dans le passage suivant du *Traité de Calcul différentiel* de M. Bertrand :

« Nous commencerons par donner quelques exemples fort simples de séries « dont la somme est connue.

« La remarque suivante peut en fournir un grand nombre. Appelons « α_1, α_2, α_3...... α_n des nombres quelconques, assujettis à la seule condi- « tion que α_n soit infiniment petit, lorsque n est infiniment grand; on a « évidemment :

$$(1) \quad \alpha_1 = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_4) + \ldots\ldots (\alpha_{n-1} - \alpha_n),$$

« et cette identité contient un grand nombre de séries.

« Soient $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \alpha_n = \frac{1}{n}$; la formule (1)

« devient $1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)},$

« ou $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)},$

« formule connue, et l'une des premières que Leibnitz ait trouvées en abor- « dant l'étude des séries. »

Les nombres α_1, α_2,..... α_n étant assujettis à la seule condition que α_n devienne infiniment petit, ils peuvent donc former une série divergente, et afin qu'on n'en ignore, M. Bertrand les remplace lui-même par les termes de la série harmonique $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}$, et c'est cette série *divergente* qu'il emploie pour démontrer que « la convergence est une « condition nécessaire de son légitime emploi. »

Il faut avouer que dans cette identité de M. Bertrand :

$$1 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots\ldots,$$

la série harmonique est dissimulée sous un voile bien transparent; car on voit clairement que la méthode de Leibnitz, qui débute par une série divergente, et celle de M. Bertrand qui, selon lui, débute par une identité, sont comme blanc bonnet et bonnet blanc.

Cependant, si M. Bertrand voulait soutenir que les deux méthodes sont essentiellement différentes, en ce sens que la première part d'une série divergente, « qui ne représente rien et cause tant de malheurs, » je lui accorderais bien volontiers que c'est d'une identité qu'on tire les égalités suivantes :

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\dots\dots\dots,\\
\frac{1}{2} &= \dots\ \frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\dots\dots\dots,\\
\frac{1}{3} &= \dots\dots\ \frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\dots\dots\dots,\\
\frac{1}{4} &= \dots\dots\dots\ \frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\dots\dots\dots,\\
\frac{1}{5} &= \dots\dots\dots\dots\ \frac{1}{30}+\dots\dots\dots,\\
\frac{1}{6} &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Mais je demanderais alors comment il se fait qu'en additionnant des égalités provenant toutes d'une identité, elles donnent encore l'absurdité $1 = 0$, tout aussi bien que quand on les avait tirées d'une série divergente? et la chose étant ainsi, pourquoi ne pas proscrire de l'analyse les identités aussi bien que les séries divergentes ?

Cette question ne peut manquer d'embarrasser les ennemis des séries divergentes, et ma réponse leur sera dure à entendre; car, je soutiens qu'il ne peut y avoir aucun vice dans la série divergente, tandis qu'il y en a un dans l'identité de M. Bertrand.

En effet, cette identité de M. Bertrand :

$$1=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots\dots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

n'est pas exacte. Elle devient une égalité exacte, une identité, quand on la corrige, en remplaçant le premier membre par $1-\frac{1}{n}$; ce qui donne :

$$1-\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right),$$

ou $$1-\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\dots\dots\dots+\frac{1}{n(n-1)}.$$

Si donc, en ajoutant des égalités, on trouve $1 = 0$, c'est qu'elles ne sont pas exactes. On croit pouvoir mettre 1 au lieu de $1-\frac{1}{n}$, parce qu'on dit que pour

n infini, le terme $\frac{1}{n}$ devient nul. Mais, puisqu'on trouve $1 = 0$, cela prouve que $\frac{1}{n}$ ne peut jamais être nul, et cela ne prouve pas autre chose.

S'il était vrai, comme dit M. Bertrand, qu' « on ne peut compter sur la « rigueur d'un raisonnement où intervient une série divergente, » on ne pourrait donc démontrer la divergence d'aucune série, puisqu'elle interviendrait inévitablement dans la démonstration.

Du reste, n'est-il pas trop clair que l'erreur commise dans un raisonnement ne peut être imputée qu'à celui qui raisonne, et jamais à l'objet sur lequel on raisonne; car, quel que soit l'objet sur lequel il vous plaise de raisonner, hippopotame ou chauve-souris, si votre raisonnement est irréprochable, il ne pourra vous conduire qu'à un résultat infailliblement exact. Mais si votre raisonnement porte à faux, par exemple, si vous prenez l'hippopotame pour un poisson, ou la chauve-souris pour un oiseau, je ne serai pas étonné de vous voir arriver à une monstrueuse absurdité.

M. Bertrand ne s'est pas contenté de son article contre les séries divergentes, donné a la page 230 de son *Traité de Calcul différentiel;* il y revient à la page 254, pour faire une nouvelle sortie contre « les partisans des séries divergen- « tes. » Il arrive encore ici qu'un calcul qui serait « irréprochable si la série « n'était pas divergente, » conduit, comme dans l'exemple de Bernoulli, à une grande absurdité.

Pour prouver que ce nouveau « malheur, » ou ce nouveau « scandale « géométrique, » ne vient point d'une série divergente, je montrerai qu'il résulte d'un calcul fort peu *irréprochable,* fait sur des séries qui sont toutes convergentes.

Par la division l'on obtient :

$$\frac{z}{1+z} = z - z^2 + z^3 - z^4 + z^5 - z^6 \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on en déduit :

$$\frac{z^2}{(1+z)^2} = z^2 - 2z^3 + 3z^4 - 4z^5 + 5z^6 - 6z^7 + \ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{z^3}{(1+z)^3} = z^3 - 3z^4 + 6z^5 - 10z^6 + 15z^7 - \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et par suite :

$$2\left(\frac{z}{1+z}\right)=2z-2z^2+2z^3-2z^4+2z^5-2z^6+\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{2^2}{2}\left(\frac{z}{1+z}\right)^2=2z^2-4z^3+6z^4-8z^5+10z^6-12z^7+\ldots\ldots,$$

$$\frac{2^3}{3}\left(\frac{z}{1+z}\right)^3=\frac{8}{3}z^3-8z^4+16z^5-\frac{80}{3}z^6+32z^7+\ldots\ldots\ldots,$$

L'addition de ces dernières égalités donne :

$$2\left(\frac{z}{1+z}\right)+\frac{2^2}{2}\left(\frac{z}{1+z}\right)^2+\frac{2^3}{3}\left(\frac{z}{1+z}\right)^3\ldots\ldots=2z+\frac{2}{3}z^3+\frac{2}{5}z^5+\frac{2}{7}z^7+\ldots\ldots$$

En faisant $z=-\frac{1}{2}$, et changeant tous les signes, on obtient :

$$2-\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}-\frac{2^4}{4}+\ldots\ldots\ldots=1+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)+\ldots\ldots$$

Or, il est impossible que cette égalité soit exacte, puisque le premier membre forme une série divergente, et le second une série convergente.

Cependant toutes les séries additionnées sont convergentes pour $z=-\frac{1}{2}$; donc l'erreur ne peut pas venir d'une série divergente.

Pour montrer clairement en quoi consiste cette erreur, supposons que les égalités additionnées, après qu'on y a fait $z=-\frac{1}{2}$, soient au nombre de $2n$, la somme des premiers membres sera :

$$S=-2+\frac{2^2}{2}-\frac{2^3}{3}+\frac{2^4}{4}-\frac{2^5}{5}+\ldots\ldots\ldots-\frac{2^{2n-1}}{2n-1}+\frac{2^{2n}}{2n}.$$

En désignant par s_1 la somme des deux premiers termes, par s_2 la somme des deux suivants, et ainsi de suite, on aura :

$$S=s_1+s_2+s_3+s_4+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+s_{n-1}+s_n.$$

Les termes de cette dernière sont tous positifs et augmentent rapidement.

En additionnant aussi les seconds membres, la première partie du résultat est :

$$-1-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7\ldots\ldots\ldots\frac{2}{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1},$$

dont tous les termes sont négatifs, et dont je représente la somme par $-$ A.

La seconde partie se compose de termes qui ne suivent plus la même loi, et dont je représente la somme par L, en sorte qu'on a identiquement $S=L-A$.

Maintenant, si l'on augmente n indéfiniment, S et L augmentent aussi indéfiniment, tandis que A tend vers une limite finie.

Or, en additionnant les séries convergentes, M. Bertrand néglige L, et trouve ainsi $S = - A$.

C'est comme si dans l'égalité $7 = 9 - 2$ on négligeait 9 pour écrire $7 = - 2$. Voilà l'erreur que M. Bertrand commet sur des séries convergentes, afin de l'imputer à la série divergente qui résulte de son erreur. Il en conclut qu'il faut proscrire de l'analyse les séries divergentes. Voici, du reste, le texte même de M. Bertrand :

« La série

« (4) $$2 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4} + \ldots\ldots, \text{ »}$$

dit-il, page 256, « est transformée en

« (5) $$1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 \ldots\ldots\ldots \text{ »}$$

Elle est ainsi transformée quand on prend $S = - A$, au lieu de $S = L - A$, ou $7 = 2$, au lieu $7 = 9 - 2$.

« Or, « ajoute l'auteur, » la première série étant divergente et la seconde « convergente, il n'y a pas entre elles d'égalité possible. Cependant la série « (4) est celle qui représente $l\,(1 - 2x)$, dans laquelle on suppose $x = - 1$. « Les partisans des séries divergentes doivent donc dire : elle est égale à $l3$. »

« La transformation d'une série divergente, lors même qu'elle donne nais- « sance à une série convergente, doit être considérée comme insignifiante, à « moins qu'une nouvelle démonstration ne vienne lui donner un sens ; cette « démonstration peut quelquefois être faite, parce que la série transformée « et la série primitive étant démontrées égales lorsque toutes deux sont con- « vergentes, fournissent deux développements de la même fonction. S'il « arrive ensuite que l'une d'elles devienne divergente, pour une certaine « hypothèse, l'autre demeurant convergente, représentera encore la fonction, « justifiant, en apparence, ceux qui prétendraient que l'autre série la repré- « sente encore après être devenue divergente, et qui se trouveraient dans le « vrai, pour avoir commis la double erreur d'accepter une transformation « qui n'est plus légitime et une série qui, étant divergente, ne représente « plus rien. »

Je défie bien de débrouiller ce galimatias, car, supposons que vous ayez d'abord compris qu'« une série divergente ne représente rien, » comment comprendrez-vous ensuite que

la série $$2 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

« qui est divergente, représente $l\,(1-2x)$, dans laquelle on suppose $x=-1$? » Comment comprendrez-vous le sens d'une transformation insignifiante? M. Bertrand vous répond que c'est en lui « donnant un sens par une nouvelle « démonstration. » Mais le moyen de démontrer ce qui n'a pas de sens? S'il faut rejeter les séries divergentes sous prétexte qu'elles ne signifient rien, ne faut-il pas, à plus forte raison, rejeter les démonstrations de ce qui ne signifie rien? Peut-on dire d'un objet quelconque qu'il ne signifie rien? Parce qu'un hippopotame n'est ni une carpe ni un lapin, s'ensuit-il qu'il ne représente rien?

Si, d'une manière quelconque, je tombe sur une égalité entre un cercle de 3 mètres de rayon et un carré de 3 mètres de côté, j'en conclurai que le calcul ou le raisonnement qui m'y a conduit, est mauvais comme celui qui a conduit M. Bertrand à son égalité entre une série divergente et une série convergente. Mais si l'on veut expliquer l'affaire à la manière de M. Bertrand, on dira aux partisans des cercles qui ne sont pas carrés, comme il dit aux partisans des séries qui ne sont pas convergentes: vous voyez bien que tous les cercles qui ne sont pas carrés sont des cercles vicieux; ce sont eux qui on enfanté tant d'erreurs et de paradoxes, etc.

Quelle relation existe-t-il entre une fonction et son développement en série?

Il n'y a jamais identité entre les deux; mais si la série est divergente, la différence peut être très-grande: on n'a donc aucun droit d'égaler l'une à l'autre. Lorsque Lagrange prétend « qu'on ne saurait contester l'exactitude « d'une telle substitution sans renverser les principes les plus communs de « l'analyse, » on peut répondre qu'on ne renverserait qu'une grossière erreur. Lagrange prend pour un principe d'analyse l'opinion communément adoptée par les géomètres, d'après laquelle on considère comme identiques une fonction et son développement en série.

Lorsque la série est convergente, la fonction et son développement ne sont pas identiques, puisque la fonction représente la limite de la somme des termes, et non la somme elle-même.

Ainsi, dans l'exemple traité plus haut, la première égalité

$$\frac{z}{1+z}=z-z^2+z^3-z^4+z^5-z^6+\ldots\ldots\ldots+z^n,$$

n'est pas exacte, même lorsqu'en y faisant $z=-\frac{1}{2}$, on obtient, après un changement de signes :

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2^n},$$

dont le second membre forme évidemment une série convergente.

Pour que l'égalité devienne parfaite et rigoureuse il faut ajouter un terme qui ne suit plus la loi de la série.

L'égalité qu'on obtient en égalant une fonction à son développement en série, ne devenant exacte qu'au moyen d'un terme correctif, il s'ensuit qu'en additionnant un nombre illimité de ces égalités, le nombre des termes correctifs sera aussi illimité, et que la somme de ces termes pourra avoir une grande valeur ; en sorte qu'en négligeant ces termes censés nuls, la somme négligée sera considérable, et il en résultera une grave erreur, comme dans l'exemple de M. Bertrand.

Leibnitz et Euler ont cru qu'on devait toujours avoir

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots\ldots\ldots ;$$

par exemple, qu'en y faisant $x = 1$, l'égalité

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots\ldots$$

devait finir par devenir exacte à l'infini. Voici ce que Laplace rapporte à ce sujet :

« En ajoutant les deux premiers termes, les deux suivants, et ainsi de « suite, on transforme la suite dans une autre dont chaque terme est zéro. « Grandi, jésuite italien, en avait conclu la possibilité de la Création, parce « que la suite étant toujours égale à $\frac{1}{2}$, il voyait cette fonction naître d'une « infinité de zéros ou du néant. Ce fut ainsi que Leibnitz crut voir l'image « de la création dans son arithmétique binaire, où il n'employait que les « deux caractères zéro et l'unité. Il imagina que l'unité pourrait représenter « Dieu, et zéro le néant, et que l'être suprême avait tiré du néant tous les « êtres, comme l'unité avec le zéro exprime tous les nombres, dans ce « système d'arithmétique.

« Cette idée plut tellement à Leibnitz qu'il en fit part au jésuite Grimaldi, « président du Tribunal de Mathématiques à la Chine, dans l'espérance que « cet emblème de la création convertirait au christianisme l'empereur « d'alors, qui aimait particulièrement les sciences. Je ne rapporte ce trait « que pour montrer jusqu'à quel point les préjugés de l'enfance peuvent « égarer les plus grands hommes.

« Leibnitz, conduit par une métaphysique singulière et très-déliée, consi- « déra que la suite $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$, etc., devient l'unité ou zéro, sui- « vant que l'on s'arrête à un nombre de termes impair ou pair, et comme « dans l'infini, il n'y a aucune raison de préférer le nombre pair à l'impair, « on doit, suivant les régles des probabilités, prendre la moitié des résultats

« relatifs à ces deux espèces de nombre, et qui sont zéro et l'unité ; ce qui « donne $\frac{1}{2}$ pour la valeur de la série. »

Laplace voit dans cette explication de Leibnitz une métaphysique singulière et très-déliée. Les géomètres donnent trop d'exemples d'une pareille métaphysique, qui consiste à profiter d'une erreur dont ils n'ont pu découvrir la cause, pour la présenter comme une preuve à l'appui d'une proposition qu'ils ne peuvent démontrer autrement.

Ainsi les Bernoulli, M. Bertrand, M. Gérono, par un calcul évidemment faux, arrivent à l'absurdité $1 = 0$. Bernoulli en conclut que la série harmonique est divergente ; M. Bertrand en conclut qu'on n'a pas le droit d'employer les séries divergentes en analyse ; M. Gérono en conclut « l'erreur de mes « principes fondamentaux. »

Le jésuite Grandi trouve $\frac{1}{2} = 0 + 0 + 0 + 0$, etc. ; il en conclut que puisqu'on fait $\frac{1}{2}$ avec des zéros, l'univers a bien pu se tirer du néant.

Enfin Leibnitz croit que l'égalité $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots$ doit finir par devenir exacte à l'infini, c'est-à-dire que le second membre doit finir par faire $\frac{1}{2}$. Il attribue donc, comme Pascal, au nombre infini la propriété de n'être ni pair ni impair. Puis il dit : si l'on s'arrête à un nombre pair de termes, la somme $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots$ égale zéro, tandis qu'elle égale 1, si l'on s'arrête à un nombre impair ; or, comme le nombre infini n'est pas plutôt pair qu'impair, la somme devra tenir le milieu entre zéro et 1 ; sa valeur est donc $\frac{1}{2}$.

Il me semble que je ferais un raisonnement tout pareil à celui de Leibnitz, en disant : Voici une urne qui contient vingt boules blanches et vingt noires. Comme il n'y a pas plus de raison d'en tirer une blanche qu'une noire, il s'ensuit que la boule qui sortira, tiendra le milieu entre une blanche et une noire ; donc elle sera rouge.

Des Conditions de Convergence.

Lorsque tous les termes d'une série sont positifs, nous avons vu qu'il est nécessaire, pour qu'elle soit convergente, que le terme u_n tende vers zéro. Cette condition est-elle pareillement indispensable lorsque la série a des termes positifs et des termes négatifs ? Tous les auteurs l'affirment.

« Nous remarquerons d'abord, » dit Duhamel, « que la somme des termes « d'une série ne peut tendre vers une limite déterminée, si la grandeur des « termes ne tend pas vers zéro.... Il est donc indispensable, pour qu'une « série soit convergente, que les termes, lors même qu'ils sont de signes « différents, aient pour limite zéro. »

Je vais montrer qu'on peut soutenir le contraire.

Soit l'identité $\frac{1}{2}-\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right).$

Rien ne sera changé si l'on ajoute le même nombre, par exemple l'unité, à chaque fraction du second membre, et l'identité deviendra

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n}=\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{4}\right)+\left(\frac{5}{4}-\frac{6}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{n}{n-1}-\frac{n+1}{n}\right).$$

On voit par là que les deux sommes

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},$$

et

$$\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{5}{4}-\frac{6}{5}+\ldots\ldots+\frac{n}{n-1}-\frac{n+1}{n},$$

ont identiquement la même limite $\frac{1}{2}$; et, quand on réduit chaque terme positif avec le terme négatif suivant, elles donnent la même série

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\ldots\ldots$$

Comment donc admettre que deux séries qui ont identiquement la même limite, soient l'une convergente et l'autre divergente ?

Il faut dire maintenant ce que M. Bertrand appelle « caractère général des « séries convergentes. »

Selon lui, « le caractère d'une série convergente consiste dans la condition « suivante :

« Pour qu'une série soit convergente, il faut et il suffit qu'on puisse pren- « dre, dans la série un nombre n de termes assez grand, à partir du premier, « pour que la somme des p suivants, $u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p+1}$ « soit, quelque grand que soit p (fût-il même infini), inférieur en valeur « absolue, à une quantité donnée, si petite qu'elle soit, et tende vers zéro « quand n croît indéfiniment. »

Le caractère général étant ainsi énoncé, la démonstration se fait en deux points : « 1° La condition est nécessaire ; 2° La condition est suffisante. »

Je ne rapporterai pas cette démonstration. Mais il me semble que La Palisse l'aurait donnée plus courte; car si A est la limite de S_n, lorsque dans l'égalité $A = S_n + R$, on prendra S_n très-près de A, il est évident que R sera très-près de zéro.

Cette démonstration à La Palisse était d'autant plus nécessaire, qu'il paraît que celle des géomètres n'est pas concluante, qu'elle laisse la question douteuse. Du moins, c'est M. Laurent qui l'affirme dans sa théorie des séries : « leur démonstration, » dit-il, « n'est pas très-claire ; elle pèche en un point « délicat...... Ce point délicat n'a pas échappé à M. Catalan, qui est allé « jusqu'à nier la justesse du théorème qui nous occupe. »

M. Laurent ayant rapporté l'exemple par lequel M. Catalan fait échec au *caractère général* donné par M. Bertrand, le quitte sans se prononcer ni pour ni contre. Il termine en disant : « Marchons droit à notre but et tournons « l'obstacle, qu'il serait trop difficile de renverser. » Le fameux *caractère général* constituerait donc un *obstacle trop difficile à renverser*, et qu'il faut *tourner pour marcher droit au but.*

La méthode si simple et si féconde de Leibnitz et des Bernoulli, fondée sur les séries divergentes, donne du coup la loi et la limite des séries qu'on en déduit.

Il en résulte qu'une série étant donnée, si l'on peut la déduire par cette méthode d'une autre série, on aura immédiatement sa limite.

Soit, par exemple, la série

$$\frac{1}{21}+\frac{1}{45}+\frac{1}{77}+\frac{1}{117}+\frac{1}{165}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En posant

$$A=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\cdots\cdots\cdots$$

et

$$B=\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\cdots\cdots\cdots,$$

on obtient, par la soustraction des termes correspondants :

$$C=\frac{4}{21}+\frac{4}{45}+\frac{4}{77}+\frac{4}{117}+\cdots\cdots\cdots=A-B=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15},$$

et par suite,

$$\frac{1}{21}+\frac{1}{45}+\frac{1}{77}+\frac{1}{117}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{1}{4}C=\frac{2}{15}.$$

De cette manière on trouve $\frac{2}{15}$ pour la limite de la série proposée.

Quand on ne peut pas calculer la limite d'une série, on cherche du moins à en démontrer la convergence. Le moyen le plus efficace consiste à comparer ses termes à ceux d'une série dont la convergence est connue. Par exemple, toute progression géométrique décroissante est une série convergente. Or, le rapport d'un terme au précédent est un nombre plus petit que l'unité. Si donc ce rapport, dans une série, devient et reste au-dessous d'un nombre plus petit que l'unité, ses termes resteront plus petits que ceux de la progression décroissante, et ainsi cette série sera convergente.

Soit la série :

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots\dots\dots$$

La limite de cette série ne peut pas se déterminer exactement, parce qu'elle est incommensurable ; mais on peut démontrer facilement que la série est convergente : en effet, à partir du terme $\frac{1}{1.2}$, le rapport d'un terme au précédent reste toujours plus petit que $\frac{1}{2}$, ce qui suffit pour que la série soit convergente.

La limite de cette série se désigne par e : on ne peut pas la calculer exactement ; mais en additionnant un grand nombre de termes, on en trouve une valeur approchée. Le nombre 2, 7182818284 la représente avec dix chiffres décimaux exacts.

Lorsque les termes d'une série sont alternativement positifs et négatifs, il suffit que chacun d'eux soit plus petit que le précédent, en valeur absolue, pour que la série soit convergente.

Posons

$$A_n = u_1 - v_1 + u_2 - v_2 + u_3 - v_3 + u_4 - v_4 + \dots\dots + u_n - v_n .$$

En réduisant chaque terme positif avec le suivant, et désignant par a_1, a_2, a_3, $a_4 \dots\dots a_n$, les résultats obtenus, on aura

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots\dots\dots + a_n$$

Mais, si on réduit chaque terme négatif avec le suivant, les résultats seront tous négatifs, et en les désignant par $-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, -\alpha_4 \dots\dots -\alpha_n$, on aura encore identiquement

$$A_n = u_1 - v_n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \dots\dots\dots + \alpha_{n-1})$$

En désignant par A la limite de A_n, par v la limite de v_n, et par α la limite de $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots\dots\dots$ on aura $A = u_1 - v - \alpha$.

On voit par là que A est toujours plus petit que $u_1 - v$, et si $v = 0$, A est plus petit que u_1.

Lorsque les termes positifs et les termes négatifs se succèdent dans la série selon une autre loi quelconque, il y a plusieurs cas à considérer.

Soient u_1, u_2, u_3, u_4 ...... les termes précédés du signe $+$, et v_1, v_2, v_3, v_4 ...... les termes précédés du signe $-$.

Posons $$U_m = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots + u_m,$$

et $$V_n = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \ldots\ldots + v_n.$$

Premier cas. — Si les sommes U_m et V_n ont toutes deux des limites U et V, la limite de la série sera U — V, quel que soit l'ordre dans lequel les termes se succèdent.

Deuxième cas. — Si une seule des deux sommes U_m et V_n a une limite, la série proposée est nécessairement divergente.

Troisième cas. — Les sommes U_m et V_n croissent toutes deux sans limite. Dans ce cas la somme des termes de la série dépend de la loi suivant laquelle ils sont groupés. La série résultante peut être divergente ou convergente, et sa limite, quand elle en a une, dépend de la manière de grouper ses termes.

Soit la série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}.$$

Puisque les termes sont alternativement positifs et négatifs, et toujours décroissants en valeur absolue, la série est convergente, et sa limite plus petite que le premier terme 1.

La série

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \ldots\ldots$$

contient en apparence, les mêmes termes que la précédente, mais comme ils ne sont pas placés dans le même ordre, la série peut avoir une autre limite que la précédente.

Si les deux sommes U_m et V_n deviennent infinies, leur différence peut le devenir en même temps ou rester finie. Cette différence dépend de la relation qu'on établit entre m et n par le groupement des termes de la série.

L'INFINI ET SES PROPRIÉTÉS

Toute grandeur est nécessairement finie, c'est-à-dire comprise entre des bornes ou limites qui la terminent de toutes parts.

Ainsi une droite, quelque grande qu'on la suppose, est nécessairement terminée à ses extrémités. Quand on prolonge la droite, on éloigne ses deux extrémités; mais il serait absurde de les vouloir supprimer, ou de supposer que la droite n'en a plus.

De même, tout plan est terminé à la ligne qui le circonscrit, comme tout solide à la surface qui le renferme.

De même encore en ajoutant l'unité à un nombre fini, celui qu'on obtient est pareillement fini. De ce qu'on peut toujours ajouter l'unité à un nombre, Pascal en conclut « qu'il y a un infini en nombre. » Cependant c'est la conclusion contraire qu'on est en droit de tirer ; car, si en ajoutant continuellement l'unité à un nombre, on n'obtient jamais que des nombres finis, c'est qu'il n'y a que des nombres finis, et point d'infini en nombre.

S'il n'y a point de grandeur réellement infinie, de nombre infini, toute propriété particulière qu'on prête aux quantités infinies, ne peut être qu'illusoire, si elle ne convient pas également aux quantités finies.

Par exemple, Pascal parlant de l'infini en nombre dit : « Il est faux qu'il « soit pair, il est faux qu'il soit impair ; car en ajoutant l'unité, il ne change « point de nature : cependant c'est un nombre, et tout nombre est pair ou « impair. »

Le nombre infini n'est ni pair ni impair, parce qu'il n'y a réellement point de nombre infini. Cependant rien n'empêche d'appeler infini un nombre extrêmement grand ; alors un nombre infini sera pair ou impair, entier ou fractionnaire, tout comme un nombre fini, puisqu'en réalité ce sera un nombre fini.

Lorsqu'on a $x=\frac{1}{z}$, toute valeur très-petite de z rend x très-grand, et réciproquement. Quand x est extrêmement grand, z est extrêmement petit ; on peut dire alors que x est infiniment grand, et z infiniment petit. Mais x ne peut jamais être assez grand pour que z soit rigoureusement zéro. Supposer qu'on puisse avoir $x=\frac{1}{0}$, c'est supposer l'absurde et l'impossible, c'est supposer qu'on pourra faire 1 à force d'ajouter des zéros, ou qu'on pourra prendre assez de zéros pour faire l'unité.

Lorsque x est très-grand, ou, si l'on veut, infiniment grand, z est très-petit ou très-près de sa limite zéro ; mais il est absurde de dire que $\frac{1}{0}$ est la limite de x ; car $\frac{1}{0}$ n'est pas un nombre possible, et ainsi, il ne peut être la limite d'aucune variable.

Lorsque x est très-près de zéro, on se figure que x, qui égale $\frac{1}{z}$ est très-près de $\frac{1}{0}$; en cela on se fait grandement illusion, car si $\frac{1}{0}$ était la limite de $\frac{1}{z}$, ce serait aussi la limite de $x^2 = \frac{1}{z^2}$; or, si la différence entre x et $\frac{1}{0}$ pouvait être très-petite, la différence entre x^2 et $\frac{1}{0}$ serait, à plus forte raison, très-petite. Comment donc les valeurs de x et de x^2, qui s'éloignent toujours en grandissant, pourraient-elles se rapprocher en même temps d'une même limite $\frac{1}{0}$?

Si l'on veut que $\frac{1}{0}$ soit nommé infini, il faudra distinguer deux infinis essentiellement différents : le premier, qu'on peut appeler infini absolu, et qui est représenté par $\frac{1}{0}$, est absurde et impossible ; et toutes les propriétés qu'on peut lui supposer, comme tous les calculs auxquels on voudra le soumettre, sont pareillement absurdes et illusoires.

Le second infini, qu'on pourrait appeler infini relatif, sera représenté par une variable à laquelle on attribuera une valeur dite infinie, c'est-à-dire extrêmement grande, mais réellement et nécessairement finie. Par conséquent, l'infini relatif étant essentiellement fini, jouira de toutes les propriétés des quantités finies, et sera soumis aux mêmes règles de calcul que les quantités finies représentées par des lettres.

Les géomètres confondent ces deux infinis essentiellement différents, et cette confusion est une source de difficultés et d'erreurs, pour les vétérans comme pour les commençants.

La vraie métaphysique du calcul infinitésimal consiste donc dans la distinction de ces deux infinis et des propriétés qui leur conviennent. Comme nous l'avons dit, l'infini absolu n'a d'autre propriété que d'être impossible, tandis que l'infini relatif jouit de toutes les propriétés des quantités finies, et n'en a pas d'autres.

Dans une fonction de $\frac{1}{z}$, on ne fera pas $z = 0$ pour savoir ensuite ce que devient cette fonction, de même qu'on ne suppose pas un cercle carré pour étudier les propriétés de la nouvelle figure.

Je repousserai, comme absurdes, tout principe, toute propriété, toute définition, toute démonstration qui supposent la réalité ou la possibilité d'une grandeur représentée par $\frac{1}{0}$, ou d'une fonction quelconque de cette grandeur.

J'admettrai, au contraire, l'infini relatif, avec toutes les propriétés des quantités finies. La réciproque d'un infini relatif sera un infiniment petit. Ainsi lorsque dans la relation $x = \frac{1}{z}$ on suppose x infiniment grand ou infiniment petit, z sera en même temps infiniment petit ou infiniment grand. Mais la réciproque de zéro n'existe pas. En élevant au carré et au cube les deux membres de l'équation $x = \frac{1}{z}$, on a $x^2 = \frac{1}{z^2}$, et $x^3 = \frac{1}{z^3}$; or, si l'on pouvait y faire $z = 0$, on aurait $x = \frac{1}{0}$, $x^2 = \frac{1}{0}$, $x^3 = \frac{1}{0}$, ou $x = x^2 = x^3$, ce qui est absurde.

Du Symbole de l'Infini.

On donne le signe ∞ comme le symbole de l'infini. Ce signe est-il le symbole de l'infini absolu ou de l'infini relatif? C'est ce qu'on n'a jamais dit ni même demandé, puisque ces deux infinis, si différents, ont toujours été confondus en un seul; et le principal effet du symbole ∞ a été de consacrer cette confusion. Je n'en finirais pas, si je voulais relever toutes les erreurs, toutes les contradictions, tous les paradoxes auxquels cette confusion a conduit les plus illustres géomètres. J'en citerai cependant quelques exemples.

Dans cette définition de Cauchy : « On dit qu'une quantité variable devient « infiniment grande, lorsque sa valeur numérique croît indéfiniment de manière à converger vers la limite ∞, » l'auteur devrait m'apprendre ce qu'est une quantité infiniment grande, et non quand elle le devient. Avant de dire qu'elle converge vers la limite ∞, il faudrait expliquer au juste ce que représente le signe ∞, et dire ce qui empêche une variable indépendante d'atteindre et de dépasser la limite ∞.

Selon Duhamel, « l'infini n'est pas une grandeur, mais l'absence de « limite. »

Si une grandeur infinie n'est pas une grandeur, on ne comprend plus comment une grandeur peut être ou devenir infinie, ou converger vers l'infini.

D'après la définition de M. Serret, « lorsqu'une variable croît indéfiniment,

« de manière à pouvoir devenir et à rester constamment supérieure à une « quantité quelconque donnée, on dit qu'elle devient infiniment grande ou « simplement infinie. »

A ce compte-là, toute variable indépendante serait infiniment grande, même lorsqu'elle est infiniment petite, puisqu'elle peut « croître indéfini- « ment de manière à pouvoir devenir et à rester supérieure à une quantité « quelconque donnée. »

Il faudrait dire aussi si l'on entend que « la quantité quelconque donnée » est une quantité constante ou une variable; car si c'est une constante A, pourquoi une variable qui lui deviendra supérieure et restera, par exemple, comprise entre A et $A + 1$, serait-elle une quantité infiniment grande? De même, si A est une variable finie, pourquoi une autre qui deviendrait et resterait égale à $A + 1$ serait-elle infinie? Il faut donc, de toute nécessité, que « la quantité quelconque donnée, » soit infinie, et alors la définition revient à dire qu'*une variable devient infiniment grande, lorsqu'elle croît indéfiniment de manière à devenir et à rester constamment supérieure à une quantité quelconque infinie.* Alors il ne resterait plus qu'à dire ce que c'est « qu'une quantité infinie; » ce qui est toute la question.

Il faudrait cependant être de bon compte; car enfin, une quantité peut être infinie ou non. Si oui, pourquoi ne pas dire quand elle l'est, au lieu d'aller chercher tant de détours? et si elle ne peut jamais être infinie, comment le pourra-t-elle devenir?

Condillac dit que « nous n'avons point d'idée de l'infini; » d'autres philosophes, par exemple, M. Bénard, soutiennent que nous en avons une idée « très-claire. »

« Nous n'avons de l'infini, » dit Cousin, « d'autre notion exacte que « celle-ci : qu'il est la limite des rapports, qui en augmentant, en approchent « de plus en plus, quoiqu'ils n'y atteignent jamais. Si je fais $x = \frac{1}{m}$, je trou- « verai que plus m diminue plus x augmente; et, comme zéro est la limite de « laquelle m en diminuant approche toujours, il est clair que $\frac{1}{0}$ est la limite « de tous les accroissements de x. »

Non, il n'est pas clair, ni même vrai, que $\frac{1}{0}$ soit la limite de $x = \frac{1}{m}$; autrement $\frac{1}{0}$ serait aussi la limite de $x^2 = \frac{1}{m^2}$, d'où il résulterait que les deux variables x et x^2 se rapprocheraient d'une même limite, en même temps qu'elles s'éloignent l'une de l'autre, ce qui est contradictoire.

Tout ce qu'on peut dire de $\frac{1}{0}$, regardé comme quantité, est absurde : par exemple, en doublant les deux termes de la fraction $\frac{1}{0}$, on a $\frac{2}{0}$, comme en doublant seulement le numérateur ; il est donc aussi absurde de dire que $\frac{2}{0} = \frac{1}{0}$, que de dire que $\frac{2}{0}$ est le double de $\frac{1}{0}$.

Tous les géomètres admettent que $\frac{1}{x} = 0$ pour x infini. Si cela était vrai, l'identité $x - \dfrac{x}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$ deviendrait $x - x = 1$, ou $0 = 1$; ce qui est une absurdité.

M. Gérono soutient que « l'hypothèse $x = \infty$ réduit l'identité

$$« \; x - \frac{x}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \text{ à } x - x = 1. \; »$$

Mais, pour que $x - x = 1$ ne se réduise pas à l'absurdité $0 = 1$, il soutient que $x - x$ n'égale pas zéro (voir la page 90 des *Nouvelles Annales Mathématiques de* 1865).

Malgré cela, tous les auteurs admettent que $\frac{1}{x} = 0$ pour x infini ; ainsi, lorsque les deux termes de la fraction $\frac{u}{v}$ deviennent infinis, ils la mettent sous la forme $\dfrac{\left(\frac{1}{v}\right)}{\left(\frac{1}{u}\right)}$, et disent que sous cette forme ses deux termes sont nuls.

C'est au moyen de ce faux principe qu'ils démontrent l'exactitude et la généralité d'une règle qui n'est ni exacte, ni générale.

Si, comme le dit Leibnitz, « les règles du fini réussissent dans l'infini, et « réciproquement, » c'est à la condition que la proposition s'applique à l'infini relatif, représenté par une variable, et non à l'infini absolu représenté par une fraction telle que $\frac{4}{0}$.

Les formules $A \times \infty = \infty$, $\infty^m = \infty$, $A^\infty = \infty$, données par Cauchy, dans son cours d'analyse, ne peuvent être que fausses ou absurdes ; car, si par le signe ∞ on entend un infini relatif, représenté par une variable x, les équations $ax = x$, $x^m = x$, $A^x = x$, sont d'autant plus fausses que x est plus grand. Si, au contraire, le signe ∞ désigne l'infini absolu, les formules ne sont ni exactes ni fausses, elles sont absurdes.

On a fait la Géométrie de l'infini comme l'Analyse de l'infini ; mais il faut être bien persuadé que, dans un cas comme dans l'autre, l'infini absolu n'est ni possible ni nécessaire, et que les propriétés qu'on lui prête, comme les conséquences qu'on en tire, sont illusoires, aussi bien dans un cas que dans l'autre.

La difficulté insurmontable qu'a toujours présentée le postulatum d'Euclide, et qui, au dire de d'Alembert, fait le scandale de la géométrie, vient de ce qu'on attribue au plan infini une propriété qui n'existe pas pour un plan fini.

Pour le comprendre, tirez dans un plan fini une première droite ; toutes les autres droites menées dans le même plan, considérées quant à leur position par rapport à la première, se diviseront en trois classes, savoir : 1° celles qui lui sont parallèles, c'est-à-dire équidistantes ; 2° celles qui la rencontrent ; 3° celles qui, sans lui être parallèles, ne la rencontrent pourtant pas dans l'étendue du plan. Cependant, si le postulatum d'Euclide était démontré, les droites qui ne sont pas parallèles à la première, la rencontreraient toutes. Or cette proposition est évidemment fausse pour tout plan fini ; et, comme il ne peut y avoir que des plans finis, il s'ensuit que la proposition est toujours fausse.

Si l'on examine les démonstrations qui ont eu le plus de vogue, on y reconnaîtra un vice commun, qui consiste à attribuer à l'infini quelque propriété dont ne jouissent pas les grandeurs finies.

Par exemple, lorsque Legendre dit :

« Toute ligne droite tracée sur un plan et indéfiniment prolongée dans les « deux sens, divise ce plan en deux parties qui étant superposées, coïncident « dans toute leur étendue et sont parfaitement égales, » il est évident que ce géomètre invoque une propriété qui n'appartient à aucun plan fini ; sa proposition est donc absurde.

Il en est de même quand il dit : « Il répugne à la nature de la ligne droite « qu'une telle ligne puisse être renfermée dans un angle. » Une droite finie peut très-bien être comprise dans un angle, à moins qu'aujourd'hui encore *la nature n'ait horreur du vide.*

Il faudrait que l'esprit eût un peu plus horreur de l'absurdité ; alors disparaîtraient l'horreur de la nature pour le vide, et la répugnance de la droite à se laisser renfermer dans un angle.

Quand on trace un angle sur un tableau rectangulaire, cet angle se trouve compris entre les bords parallèles du tableau. Or il paraît qu'ici encore « la « nature a horreur du vide » laissé entre les côtés de l'angle et les bords parallèles ; du moins, la démonstration de Bertrand de Genève veut que l'espace compris dans l'angle soit plus grand que l'espace compris entre les parallèles ; ce qui oblige les côtés de l'angle à rencontrer les parallèles.

Des Infinis de différents ordres.

Les infinis de différents ordres ne peuvent être que des infinis relatifs représentés par des variables ; car, nous avons vu que l'infini absolu, représenté par une fraction telle que $\frac{1}{0}$ est impossible, et que toute opération effectuée sur lui, est absurde. Ainsi, en élevant $\frac{1}{0}$ au carré, d'après la règle ordinaire, on aurait $\left(\frac{1}{0}\right)^2 = \frac{1}{0}$, ce qui est absurde, aussi bien que la formule $\infty^2 = \infty$, donnée par Cauchy.

Pareillement, comme il est incontestable que $+0 = -0$, on aurait $+\frac{1}{0} = -\frac{1}{0}$, ou $+\infty = -\infty$. C'est de cette manière que certains géomètres ont cru prouver que $+\infty = -\infty$, comme $+0 = -0$.

Si une fonction d'une variable est du degré n, cette fonction sera dite un infini de l'ordre n, lorsque la variable sera supposée un infini du premier ordre.

Par exemple, quand on supposera que x est un infini du premier ordre, la fonction $y = 2x^3 - 7x^2 + 5x - 9$ sera un infini de troisième ordre.

Le terme $2x^3$ étant du troisième ordre, son rapport à $5x$ sera du second ordre, tandis que son rapport à $7x^2$, sera du premier.

De même que pour abréger le langage et se conformer à un usage consacré, les astronomes modernes parlent encore du lever et du coucher du soleil, de son passage au méridien, etc., mais n'attachent plus à ces expressions le même sens que les anciens astronomes; de même pour nous conformer à l'usage, nous emploierons le mot infini et le symbole ∞, mais en y attachant un sens bien défini, et conforme à la distinction que nous avons faite entre l'infini relatif et l'infini absolu.

Par exemple, quoique certain qu'on ne peut pas réduire la fonction $y = \frac{3x}{x-2}$ à $\frac{6}{0}$, en y faisant $x = 2$, nous pourrons dire que pour $x=2$, y devient infini ou passe par l'infini. On comprend qu'on obtient ainsi l'infini absolu, et qu'il n'y a aucune opération à faire sur lui. Aussi, il serait absurde de dire que, pour $x=2$, le rapport de $\frac{3x}{x-2}$ à $\frac{2}{x-2}$ est 3.

Des Infiniment petits.

L'infiniment petit est l'inverse de l'infiniment grand. De même que des quantités extrêmement grandes sont dites infiniment grandes, des quantités extrêmement petites seront dites infiniment petites.

Nous avons prouvé que dans la relation $x = \frac{1}{z}$, il est impossible que x et z deviennent rigoureusement nuls, et, par conséquent, il est absurde de les supposer tels. Au lieu de s'en tenir à cette notion exacte, on suppose que x et z peuvent très-bien devenir nuls, et l'on dit alors que pour $z = 0$, x est infini, et que pour $x = \infty$, $z = 0$.

En regardant les quantités infiniment grande et infiniment petite comme réciproques l'une de l'autre, il faudrait dire que 0 est la réciproque de $\frac{1}{0}$, ou de l'infini, et ainsi admettre que zéro est une quantité infiniment petite. On serait donc conduit à distinguer deux espèces de quantités infiniment petites : celles qui sont absolument nulles, et celles qui, sans être nulles, sont extrêmement petites.

Le zéro ayant son nom propre et une valeur absolument nulle, il serait réellement abusif de l'appeler une quantité infiniment petite. C'est cependant la conséquence à laquelle sont conduits les géomètres qui se figurent qu'on peut faire $x=0$ dans la fraction $\frac{1}{x}$, et qui croient que zéro est la réciproque de l'infini.

C'est ainsi que Carnot dit : « on n'a jamais pu se former qu'une idée « imparfaite de ces éléments, espèce d'êtres singuliers, qui tantôt jouent le « rôle de véritables quantités, tantôt doivent être traités comme absolument « nuls, et semblent, par leurs propriétés équivoques, tenir le milieu entre la « grandeur et le zéro, entre l'existence et le néant. »

Afin de pouvoir prêter à ces êtres singuliers, des propriétés contradictoires, on les appelle quantités évanouissantes, ce qui permet, suivant le cas, de les dire évanouies ou encore vivantes.

« Comme égales à zéro, » dit Carnot, « ces quantités évanouissantes doi- « vent se négliger dans le calcul ; mais elles n'en ont pas moins des rapports « très-intéressants à connaître. »

Tant que les quantités infiniment petites ne sont pas nulles, on comprend qu'elles puissent avoir des rapports très-intéressants à connaître, mais alors de quel droit les négliger dans le calcul ? Si, au contraire, elles sont absolument nulles, on comprend qu'on a tout droit de les négliger ; mais il faudrait bien être sorcier pour découvrir entre des zéros des rapports très-intéressants à connaître.

D'après la définition qu'on donne aujourd'hui des quantités infiniment petites, ce ne sont plus des quantités évanouissantes, mais des *variables qui ont pour limite zéro;* et, sous prétexte qu'elles ont pour limite zéro, on les néglige, au besoin, comme absolument nulles.

On s'accorde aujourd'hui à dire avec Duhamel :

« Toute quantité variable qui a pour limite zéro, se nomme une quantité « infiniment petite, ou simplement un infiniment petit. »

Duhamel ajoute :

« Il arrive quelquefois que ce soit un infiniment petit même que la ques- « tion exige que l'on détermine, non en grandeur, puisqu'il est variable, « mais en signe. »

Une variable n'est ni grande ni petite : c'est la valeur qu'on lui attribue qui peut être l'une ou l'autre. Quand on demande quelle est la hauteur d'un arbre, ce n'est pas répondre que de dire qu'elle est variable, de même que ce n'est pas dire la profondeur d'une rivière que de répondre : les cailloux y touchent le fond.

Pour qu'une variable ait pour limite zéro, il faut qu'elle soit fonction d'une autre variable : ainsi $x = \frac{1}{z}$ a pour limite zéro, parce que sa valeur peut approcher de zéro, et ne peut jamais l'atteindre ; mais si x est une variable indépendante, rien ne l'empêche d'atteindre zéro. Il résulterait donc de la définition de Duhamel, qui est aussi celle de M. Bertrand, de M. Serret, etc., qu'un infiniment petit ne peut pas devenir zéro, et qu'une variable indépendante ne peut jamais être infiniment petite, puisqu'elle peut devenir zéro.

Il n'est pas difficile de prévoir que les auteurs d'une définition si irrationnelle, ne pourront y rester eux-mêmes longtemps fidèles. Ainsi, après avoir donné sa définition, Duhamel dit :

« Les infiniment petits que l'on considère presque uniquement sont les « accroissements de quantités variables indépendantes, et des fonctions de « ces variables. »

Ces accroissements pouvant toujours devenir nuls, il en résulterait que « les infiniment petits que l'on considère presque uniquement, » ne seraient jamais des infiniment petits.

La contradiction se voit dans les termes mêmes de la définition de M. Serret.

« Lorsque, » dit-il, « une quantité variable tend vers la limite zéro, on dit « qu'elle devient infiniment petite ; on la nomme un infiniment petit. »

Si l'on nomme *infiniment petite* une quantité qui devient infiniment petite, comment nommera-t-on celle qui est devenue infiniment petite ? et si une quantité ne peut pas être réellement infiniment petite, comment peut-elle le devenir ?

Dans l'équation $y^2 = 2px$, les variables peuvent être supposées infiniment grandes ou infiniment petites, et rien n'empêche de les faire absolument nulles. Mais dans l'équation $y = \frac{1}{x}$, aucune des variables ne peut devenir absolument nulle.

Des Propriétés du zéro, et des Symboles d'indétermination.

La somme de plusieurs zéros est toujours zéro.

La différence de deux zéros est toujours zéro.

Le produit de plusieurs zéros est toujours zéro.

Le produit de zéro par un nombre quelconque est toujours zéro.

Le quotient de deux zéros est toujours indéterminé. Ainsi poser $\frac{0}{0} = x$, revient à poser $0 = 0 \times x$, et le nombre x peut avoir toutes les valeurs possibles.

Par exemple, la fraction $\frac{x(x-3)}{4(x-3)}$ devient $\frac{0}{0}$ pour $x=3$, et tout nombre en représente une valeur réelle. Cependant, on dit que l'indétermination n'est qu'apparente, que cette apparence d'indétermination tient à la présence du facteur $x-3$, commun aux deux termes de la fraction ; que l'indétermination disparaît quand on supprime ce facteur commun ; que, de cette manière, on obtient $\frac{3}{4}$ pour la vraie valeur de la fraction.

Ce raisonnement, qui satisfait tout le monde, n'est pourtant qu'un sophisme.

En effet, pour $x = 3$, la fraction $\frac{x(x-3)}{4(x-3)}$ devient $\frac{3}{4} \times \frac{0}{0}$, et pour avoir le droit de supprimer le facteur $\frac{0}{0}$, il faut supposer qu'il égale toujours 1.

C'est donc en supposant que la fraction $\frac{0}{0}$, égale toujours 1, que l'on prouve qu'elle a toute autre valeur, telle que $\frac{3}{4}$.

C'est cependant ce sophisme qui est reproduit par les auteurs les plus réputés.

Voici, par exemple, en quels termes M. Briot le présente dans son *Cours d'Algèbre*.

« Le symbole $\frac{0}{0}$ n'indique pas toujours l'indétermination. Il peut arriver « qu'une fraction se présente sous cette forme, parce qu'il y a au numéra- « teur et au dénominateur un facteur algébrique qui devient nul pour cer- « taines valeurs attribuées aux lettres. On supprimera ce facteur commun, « afin d'obtenir la valeur de la fraction.

« EXEMPLE. — La fraction $\frac{2x-2}{3x-3}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ quand on fait $x=1$. Mais cette fraction peut s'écrire $\frac{2(x-1)}{3(x-1)}$, et, si l'on supprime le facteur commun $x-1$, on voit qu'elle est constamment égale à $\frac{2}{3}$.

La fraction $\frac{2(x-1)}{3(x-1)}$ est constamment égale à $\frac{2}{3}$, excepté pour $x=1$; mais quand on fait $x=1$, elle devient $\frac{2}{3}\times\frac{0}{0}$, et l'on ne peut supprimer le facteur $\frac{0}{0}$, qu'en supposant qu'il ne peut avoir d'autre valeur que l'unité.

Dans cet exemple, comme dans les autres, c'est toujours en admettant que la fraction $\frac{0}{0}$ ne peut avoir d'autre valeur que l'unité, que l'on démontre qu'elle a toute autre valeur.

Pour être dans le vrai, il faut dire que la valeur que prend une fraction qui se réduit à $\frac{0}{0}$ est toujours indéterminée, que son indétermination est toujours réelle, ou que $\frac{0}{0}$ est toujours un symbole d'indétermination.

Quand on dit que, pour $x=3$, la fraction $\frac{x(x-3)}{4(x-3)}$ se réduit à $\frac{0}{0}$, mais que son indétermination n'est qu'apparente, et que sa vraie valeur est $\frac{3}{4}$, on donne une fausse idée, en faisant croire que la fraction $\frac{0}{0}$ égale toujours 1, pour prouver qu'elle égale $\frac{3}{4}$.

En disant que $\frac{3}{4}$ est la limite de la fraction $\frac{x(x-3)}{4(x-3)}$ pour $x=3$, on donne aussi une fausse idée, car si $\frac{3}{4}$ était la limite de la fraction, cette limite ne pourrait jamais être atteinte, ou, en d'autres termes, la fraction ne pourrait jamais prendre rigoureusement cette valeur.

On voit par là que les expressions de *vraie valeur*, et de *limite* de la fraction qui se réduit à $\frac{0}{0}$, sont défectueuses et devraient être remplacées par celle de *valeur principale*. Comme on le verra dans la suite, cette rectification a plus d'importance qu'on ne pourrait se le figurer.

Existe-t-il d'autres symboles d'indétermination? Ceux qu'on donne ordinairement comme tels, sont $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \times 0$, 1^{∞}, ∞^0, 0^0, $\infty - \infty$.

Si par le symbole ∞, on entend un infini absolu tel que $\frac{1}{0}$, les opérations indiquées sur de tels symboles sont absurdes. Ainsi il serait absurde de dire que le rapport de $\frac{3}{0}$ à $\frac{2}{0}$ égale $\frac{3}{2}$, que $\frac{3}{0} \times 0 = 3$, ou que $1^{\frac{3}{0}}$ et $\left(\frac{1}{0}\right)^0$ valent quoi que ce soit.

Mais, si par le symbole ∞, on désigne une variable infinie, c'est-à-dire à laquelle on suppose une valeur extrêmement grande, on pourra entendre qu'on désigne par $\frac{\infty}{\infty}$ la limite ou le convergent d'une fraction telle que $\frac{u}{v}$, dont les deux termes deviennent infinis.

Dans la même hypothèse, on aura toujours $\infty \times 0 = 0$, $1^{\infty} = 1$, $\infty^0 = 1$.

Quant à l'expression 0^0, elle se présentera lorsqu'on fera $x=0$ dans l'identité $\frac{x}{x} = x^0$, qui deviendra alors $\frac{0}{0} = 0^0$.

Ceux qui arrivent à une valeur déterminée de 0^0, supposent qu'une fraction telle que $\frac{1}{x}$ devient zéro pour x infini, en sorte que pour eux l'expression $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ devient 0^0; et comme pour une très-grande valeur de x la valeur de $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ est très-rapprochée de l'unité, sa limite est l'unité. Mais on fait une erreur en disant que l'expression $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ se réduit à 0^0 pour x infini; on en commet une autre en disant que sa vraie valeur est l'unité: car l'unité est la limite qui ne peut jamais être atteinte.

Une pareille remarque s'appliquera à l'expression 1^{∞}. Il est bien évident que $1 \times 1 = 1$, et que le produit d'un nombre quelconque de facteurs tous égaux à 1, ne peut jamais être autre que 1, et qu'ainsi il sera encore 1 lorsque le nombre des facteurs sera infiniment grand, c'est-à-dire extrêmement grand, ce qu'on exprimera en écrivant $1^{\infty} = 1$.

Ceux qui disent que $\left(1 \times \frac{1}{m}\right)^m$ se réduit à 1^{∞} pour m infini, supposent que $\frac{1}{m}$ devient zéro, ce qui est tout à fait impossible, comme nous ne cessons de le redire

Sait-on bien, au juste, ce qu'on dit quand on donne $\infty - \infty$ comme un symbole d'indétermination ? S'agit-il de l'infini absolu ? Veut-on demander, par exemple, la valeur de $\frac{8}{0} - \frac{3}{0}$? Ce ne serait pas alors la solution qui serait indéterminée, mais la question qui serait absurde. Mais s'il s'agit de l'infini relatif, par exemple, si l'on demande la valeur de $(2x + 9) - (2x + 3)$, elle sera égale à 6, aussi bien quand on supposera x infini que quand on le supposera fini. Ainsi, donner $\infty - \infty$ comme un symbole d'indétermination, c'est donner une fausse idée.

Par exemple, M. Gérono prétend que, pour x infini, on n'a plus $\left(\frac{a-a'}{2}\right)x - \left(\frac{a-a'}{2}\right)x$, égal à zéro, et il dit : « Les deux termes dont il « s'agit ici ne se détruisent pas, généralement du moins, parce qu'ils ne « proviennent que de l'hypothèse $x=\infty$, qui les rend infinis l'un et l'autre, « et leur suppression revient à remplacer $\infty - \infty$ par 0 : c'est ce qu'il faut « bien se garder de croire..
« supprimer les termes $\left(\frac{a-a'}{2}\right)x, -\left(\frac{a-a'}{2}\right)x$, c'est, comme le fait obser- « ver M. Prouhet, étendre à des expressions qui ne représentent aucune « quantité finie, les règles du calcul des quantités finies. »

M. Gérono va même jusqu'à démontrer que $x - x$ n'égale pas zéro, ou que les deux termes ne se détruisent pas quand x est infini.

Il prend, pour cela, l'exemple $x - \frac{x}{1+\frac{1}{x}}$, dont la limite bien connue est l'unité, et il dit : « L'hypothèse $x=\infty$ réduit cette expression à $x - x$; par conséquent la réduction des deux termes $x, -x$ conduit à l'égalité $1 = 0$.

Ces propositions et d'autres de la même force, se lisent dans un compte rendu où M. Gérono s'est proposé de prouver « l'erreur des principes fonda- « mentaux » de ma *Théorie des Convergents*.

L'absurdité de telles propositions a passé inaperçue pour les lecteurs des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tant sont vagues et arbitraires les notions que l'enseignement classique donne de l'infini et de ses propriétés.

L'exemple que je viens de donner en est une preuve bien frappante, M. Gérono, pour les besoins de sa cause, déclare que $x-x$ n'égale pas zéro quand x est infini. On aurait également approuvé, s'il avait eu besoin de dire : la valeur de $x-x$ étant zéro pour toute valeur de x, grande ou petite, il est évident qu'on aura encore $x - x = 0$ pour $x = \infty$.

Pour trouver la limite de l'expression

$$\sqrt{x^2+8x-5} - \sqrt{x^2+2x+7}$$

Je dis : le convergent du premier radical étant $x+4$, et celui du second, $x+1$, en retranchant le second du premier, on obtient 3 pour la limite cherchée. Mais retrancher x de x, dire que $x - x = 0$, ou que les deux termes $x, -x$ se détruisent, voilà ce qui a été un grand scandale pour la rédaction des *Nouvelles Annales*. « Vous faites, s'écrie M. Prouhet, des calculs sur « l'infini, et cela n'a de sens pour personne. » Or, dans la méthode que j'ai critiquée et que M. Prouhet a cru devoir défendre, on calcule la limite de l'expression

$$\sqrt{x^2+8x-5} - \sqrt{x^2+2x+7},$$

en multipliant et divisant d'abord la différence des radicaux par leur somme, ce qui donne

$$\frac{x^2+8x-5 - x^2 - 2x - 7}{\sqrt{x+8x-5} + \sqrt{x^2+2x+7}},$$

Ensuite, on réduit le numérateur à $6x-12$, en retranchant x^2 de x^2, et $2x$ de $8x$. Voilà comment tous les géomètres font des calculs sur l'infini, en retranchant x^2 de x^2 et $2x$ de $8x$.

Le fait est que l'enseignement n'apprend rien concernant les calculs défendus ou permis sur l'infini. On ne rencontre sur ce sujet que quelques assertions éparses et souvent contradictoires. Ainsi Leibnitz a dit : « Les règles du fini « réussissent dans l'infini et réciproquement ; » tandis que Gauss dit : « Je « commencerai par protester contre l'usage qu'on fait d'une grandeur infinie « en la traitant comme une quantité déterminée, ce qui n'est jamais permis « en mathématiques. »

De même M. Bertrand dit :

« Lorsque la quantité désignée par A est nulle ou infinie, il n'est pas « permis de supprimer le facteur commun aux deux termes de l'équation

$$« \ A = A^2 \lim \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}. \ »$$

C'est ainsi qu'il s'exprime dans la question où il s'agit d'établir la règle qui donne ce qu'on appelle la vraie valeur d'une fraction $\frac{u}{v}$, dont les deux termes deviennent infinis; or, avec tous les auteurs, il divise les deux termes de la fraction par le produit uv, et il obtient ainsi la fraction

$$\frac{\left(\frac{1}{v}\right)}{\left(\frac{1}{u}\right)}.$$

Pourquoi les deux termes d'une fraction, plutôt que ceux d'une équation, peuvent-ils se diviser par une quantité infinie ?

Pour résumer ce qu'il importe de savoir sur cette question, je distinguerai trois cas.

1° Si par une valeur infinie de A, on entend une quantité exprimée par une fraction telle que $\frac{1}{0}$, je dis que cette valeur est impossible, et qu'il n'y a point à examiner ce qui arriverait si ce cas se présentait, de même qu'il n'y a point à examiner le cas où le cercle deviendrait carré.

2° Si la valeur supposée infinie est un infini relatif, c'est-à-dire une valeur très-grande, c'est le cas où « les règles du fini réussissent dans l'infini, » et où il faut opérer sur A, comme s'il était fini, puisque, en réalité, il est fini.

3° Si la valeur est zéro, il est absurde de diviser les deux termes de la fraction par zéro et d'écrire

$$\frac{u}{v} = \frac{\frac{u}{0}}{\frac{v}{0}}; \quad \text{car il n'y a pas de nombre qui représente } \frac{u}{0} \text{ ou } \frac{v}{0}.$$

Quand on multiplie les deux termes d'une fraction $\frac{A}{B}$ par zéro, la fraction se trouve multipliée par le facteur $\frac{0}{0}$, c'est-à-dire par un nombre indéterminé, et ainsi l'on donne à cette fraction une valeur indéterminée. Lorsqu'on supprime le facteur $\frac{0}{0}$, on supprime l'indétermination.

Quand on multiplie par zéro les termes d'une identité telle que $4 = 4$, on a $0 = 0$, qui est encore une identité.

Mais en les divisant par zéro, on aurait $\frac{4}{0} = \frac{4}{0}$; ce qui est une absurdité. Si une égalité telle que $8 = 3$ était fausse, elle deviendrait exacte quand on multiplierait ses deux membres par zéro, puisqu'on aurait $0 = 0$; réciproquement, en supprimant le facteur zéro dans $8 \times 0 = 3 \times 0$, on aurait $8 = 3$, et l'égalité qui était exacte deviendrait fausse.

Si l'on divise par zéro les deux membres de l'égalité $8 \times 0 = 3 \times 0$, elle devient $\frac{8 \times 0}{0} = \frac{3 \times 0}{0}$, ou $\frac{0}{0}$.

On voit par là que diviser les termes d'une fraction, ou d'une équation, par un même facteur, ou supprimer ce facteur sont des opérations qui ne sont plus équivalentes lorsque ce facteur est zéro. Dans ce cas, biffer n'est pas diviser, de même qu'au jeu souffler n'est pas jouer.

C'est justement dans le cas où biffer n'est pas diviser, que l'on biffe pour diviser, afin d'obtenir, dit-on, la vraie valeur de la fraction.

Par exemple, pour trouver la vraie valeur de la fraction $\frac{3(x-2)}{4(x-2)}$, on dit : biffez le facteur $x-2$; tandis que le numérateur divisé par $x-2$, devient $\frac{3(x-2)}{x-2}$; le dénominateur devient de même $\frac{4(x-2)}{x-2}$, et ils se réduisent l'un et l'autre à $\frac{0}{0}$ quand $x = 2$.

A propos d'égalités fausses ou exactes, il sera utile d'observer que les équations proprement dites, telles que $ax^2 + bx + c = 0$, sont des égalités fausses pour toutes les valeurs de x différentes des racines. Or, quand on part de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, pour en calculer les racines, on commence par multiplter tous les termes par $4a$, opération qui n'est pas permise lorsque $a = 0$, puisque par cette opération, l'équation se change en une identité, qui est vérifiée pour toute valeur de x.

Si l'on fait $a = 0$, l'équation se réduit à $bx + c = 0$, et donne $x = -\frac{c}{b}$. L'équation étant du premier degré, les formules qui donnent les racines de l'équation du second degré, n'ont rien à y voir.

A la vérité, on peut dire : Puisque l'équation $bx + c = 0$ est un cas particulier de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, la solution générale de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, devra comprendre la solution de l'équation $bx + c = 0$, à laquelle se réduit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, dans l'hypothèse $a = 0$.

Effectivement la conclusion serait forcée et les racines

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ et } x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

se réduiraient nécessairement, l'une et l'autre, à $-\frac{c}{b}$, si les calculs qui conduisent aux racines x' et x'', étaient exacts et rigoureux dans l'hypothèse de $a = 0$; or, puisque nous venons de prouver que dans ce cas, ils ne le sont pas, il n'est pas surprenant que les valeurs de x' et x'' ne se réduisent pas à $= -\frac{c}{b}$, l'une devenant $\frac{0}{0}$, et l'autre $\frac{-2b}{0}$.

« Remarquons, dit l'algèbre de M. Bertrand, que si les formules générales « étaient en défaut, il n'en faudrait rien conclure contre les raisonnements « qui y ont conduit, car ces raisonnements supposent expressément que a ne « soit pas nul. Cependant les valeurs de x' et x'' satisfaisant à l'équation pro- « posée, quel que soit a, lorsque a tend vers zéro, l'une d'elles doit approcher « de la solution de $bx + c = 0$. »

Pourquoi « l'une d'elles » doit-elle approcher de la solution, et non pas les deux ? pourquoi l'une plutôt que l'autre, puisque les deux « satisfont « à l'équation ? »

D'après l'Algèbre de M. Briot, « l'autre racine, devenant infinie, dispa- « raît. » Ce serait déjà beaucoup de négliger la plus petite des deux racines, mais quelle raison peut-on avoir de négliger la plus grande, celle qui est infiniment grande ? pourquoi est-ce la plus grande qui disparaît ?

Lefébure, lui, ne néglige pas la racine infinie représentée par $\frac{-2b}{0}$, et, comme $+0 = -0$, il s'en suit pour lui que $\frac{2b}{0}$ est aussi une racine, en sorte qu'indépendamment de la racine $-\frac{c}{b}$, il admet que l'équation $bx + c = 0$, a encore les deux racines $+\infty$ et $-\infty$. C'est ce qui lui fait dire :

« Il est tout à fait digne de remarque qu'on ait pour ce cas particulier trois « valeurs de x, tandis que dans le cas général, il n'en existe que deux. »

C'est surtout la remarque qui est « digne de remarque ; » il est, en effet, bien remarquable que l'équation du second degré ait trois racines, tout juste quand elle est du premier degré.

Si, dans l'équation du troisième degré $\alpha x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, on fait $\alpha = 0$ et $a = 0$, il pourra arriver qu'on trouve pour une équation du troisième degré quelque chose comme une demi-douzaine de racines, et ce sera encore lorsque l'équation du troisième degré sera du premier degré.

Supposons que par un calcul faux, on déduise de l'équation $ax^m + bx^{m-1} + \ldots\ldots + k = 0$, la valeur $x = f(a, b \ldots k)$, on comprend qu'en refaisant le même calcul en sens contraire, on reviendra de la relation $x = f(a, b \ldots k)$ à l'équation proposée, en sorte que si une erreur a été commise dans la première série d'opérations, elle se trouvera corrigée dans la seconde, par la même erreur commise en sens contraire.

Par exemple, si dans la transformation d'une équation $F(x)=0$, en une autre $\varphi(x)=0$, on a commis une erreur en prenant $a+b$ pour la racine carrée de a^2+b^2, cette erreur se trouvera corrigée, lorsqu'en repassant de l'équation $\varphi(x)=0$ à $F(x)=0$, par les mêmes opérations faites en sens contraire, on prendra a^2+b^2 pour le carré de $a+b$.

De ce qu'on retombe exactement, de cette manière, sur l'équation $F(x)=0$, il n'en faut pas conclure que l'équation $\varphi(x)=0$ a été déduite exactement de $F(x)=0$.

Cela prouve seulement que la première erreur a été détruite par la seconde. De même, le calcul d'où l'on déduit les racines de l'équation $ax^2+bx+c=0$ est exact, excepté quand $a=0$; car pour $a=0$, les formules donnent $\frac{0}{0}$ et $\frac{-2b}{0}$, au lieu de $-\frac{c}{b}$. Ces valeurs données par les formules sont donc fausses, puisque l'une $\frac{0}{0}$ est indéterminée, et l'autre $\frac{-2b}{0}$, infinie. Il en faut conclure que les opérations qui conduisent aux formules cessent d'être exactes, ou deviennent illusoires, dans l'hypothèse $a=0$.

Il n'y a rien de plus à dire, à moins qu'on ne veuille se donner la satisfaction de trouver, au juste, en quoi consiste le défaut du calcul.

Ce n'est pas ainsi que les auteurs raisonnent. Comme la solution de l'équation $bx+c=0$ est $-\frac{c}{b}$, il faut qu'ils la tirent de $\frac{0}{0}$, ou de $\frac{-2b}{0}$. A force de torturer $\frac{0}{0}$, ils en font sortir $-\frac{c}{b}$; après quoi n'ayant plus besoin de $-\frac{-2b}{0}$, ils s'en débarrassent : sa valeur étant infinie, dit Briot, « elle disparaît. »

Les auteurs ne l'auraient pas fait si facilement disparaître, s'ils avaient compris qu'ils pouvaient, comme à l'autre, lui faire suer la valeur $-\frac{c}{b}$. Il est bien clair cependant qu'en refaisant, en sens contraire, les calculs qui ont conduit de l'équation $ax^2+bx+c=0$ à la racine

$$x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

on retournera de cette racine à l'équation, qui, pour $a=0$, se réduit à $bx+c=0$, et donne $x=-\frac{c}{b}$.

Pour tirer la valeur $-\frac{c}{b}$ de la racine $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, qui se réduit à $\frac{0}{0}$ quand $a=0$, on multiplie les deux termes de la fraction par $-b-\sqrt{b^2-4ac}$, ce qui donne $\frac{4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}$; après quoi l'on supprime le facteur $\frac{2a}{2a}$, c'est-à-dire $\frac{0}{0}$, en admettant ainsi que la fraction $\frac{0}{0}$ égale nécessairement l'unité, et cela pour démontrer qu'elle égale $-\frac{c}{b}$.

Il y a des auteurs qui vont jusqu'à examiner ce que deviennent les racines de l'équation $ax^2+bx+c=0$, dans le cas où a et b sont nuls, et constatent, avec admiration, que dans l'équation $c=0$, qui ne contient pas x, les deux valeurs de x se présentent sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. C'est « tout à « fait digne de remarque, » comme dirait Lefébure de Fourcy.

DU PRINCIPE LEIBNITZIEN

Dans la théorie des convergents nous avons démontré que quand on suppose x infini, la limite de la fonction

$$\frac{ax^4+bx^3+cx^2+dx+k+px^{-1}+qx^{-2}+\ldots..}{a'x^4+b'x^3+c'x^2+d'x+k'+p'x^{-2}+q'x^{-2}+\ldots..},$$

est le rapport $\frac{a}{a'}$ des deux termes de l'ordre le plus élevé, et ne dépend nullement des termes suivants.

Le rapport $\frac{a}{a'}$ représente exactement la valeur de la limite, mais ne représente pas exactement la valeur de la fonction.

Les géomètres prennent souvent l'une pour l'autre, et cette confusion les a conduits à bien des erreurs ou paradoxes.

Cette confusion a donné lieu au principe Leibnitzien, qui est lui-même un paradoxe célèbre, pour l'explication ou la justification duquel on a accumulé paradoxes sur paradoxes.

Il est bien évident, à priori, que pour l'exactitude absolue du résultat d'un calcul, il faut que le calculateur ne néglige rien, ou que ce qu'il néglige soit absolument nul.

Le principe Leibnitzien donnerait le droit et imposerait même le devoir de commettre des inexactitudes afin d'arriver à une parfaite exactitude : il donnerait le droit et imposerait le devoir de négliger non-seulement les infiniment petits devant les quantités finies, mais aussi les quantités finies devant les quantités infinies, et même les quantités infinies devant d'autres quantités infinies d'un ordre plus élevé.

On le voit, c'est un principe qui révolte la raison. Mais comme on se figure qu'on lui doit toute l'exactitude des résultats fournis par la méthode infinitésimale, on se persuade que c'est la raison qui a tort, et qu'il faut passer par dessus. « Allez en avant, » disait d'Alembert, « et la foi vous « viendra. » C'est donc comme article de foi qu'on impose le principe, ou par des sophismes qu'on se morfond à vouloir le justifier ou le démontrer.

D'après Poisson, « le principe fondamental de l'analyse infinitésimale « consiste en ce que deux quantités finies, qui ne diffèrent l'une de l'autre « que d'un infiniment petit, doivent être regardées comme égales, puisqu'on « ne saurait assigner entre elles aucune inégalité aussi petite qu'on voudra. »

Le principe est essentiellement irrationnel : il est impossible de le justifier autrement que par des propositions contradictoires ou paradoxales ; et, en effet, n'y a-t-il pas contradiction à dire que les quantités qui diffèrent d'un infiniment petit, n'ont aucune différence ?

Par exemple, puisque les deux quantités $24 + \frac{1}{x}$ et 24, diffèrent de l'infiniment petit $\frac{1}{x}$, il est faux de dire qu'elles n'ont aucune différence ; comment l'une serait-elle la limite de l'autre ? Leur différence multipliée par $3x$, donne 3, aussi bien quand x est infini que quand il est fini. Si cette différence était absolument nulle, le produit le serait aussi évidemment.

Poisson ajoute : « On énonce encore ce principe d'une autre manière en « disant qu'il est permis de négliger dans un calcul, sans crainte d'altérer au- « cunement les résultats, des infiniment petits ajoutés à des quantités finies. »

Si, en supposant x infini, on néglige $\frac{1}{x}$, qui est « un infiniment petit « ajouté à une quantité finie, » la fonction $x - \dfrac{x}{1 + \frac{1}{x}}$ se réduit à zéro, qui n'est ni une valeur ni la limite de la fonction, en sorte que l'identité $x - \dfrac{x}{1 + \frac{1}{x}} = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x}}$ deviendrait $0 = 1$, et devrait être exacte, si le principe Leibnitzien était lui-même exact.

On voit par là combien sont vains et illusoires tous les efforts tentés en vue de justifier ou de démontrer le fameux principe considéré comme le fondement inévitable de l'Analyse infinitésimale.

Fontenelle a donné, dans sa *Géométrie de l'Infini*, une démonstration en règle et en grand, de ce trop célèbre principe.

« Le grand principe, » dit-il, « et le plus fécond du calcul de l'Infini, est « de faire disparaître toutes les grandeurs d'ordres inférieurs devant celles « qui sont d'un ordre supérieur. »

Il avertit qu'en opérant ainsi, il ne faut pas « croire qu'on passe à la « nouvelle Géométrie une sorte de licence. Au contraire, » dit-il, « l'exacti- « tude demande que les grandeurs qu'on néglige dans le calcul de l'Infini, « soient négligées comme elles le sont. »

L'exactitude demande qu'on ne néglige rien du tout : voilà du moins ce que dit la raison. Mais, se persuader et vouloir démontrer que l'exactitude demande que l'on commette des inexactitudes, voilà qui choque le sens commun.

Une telle démonstration doit être examinée avec soin.

Pour y arriver, Fontenelle considère un triangle rectangle, dont chacun des côtés de l'angle droit égale n, et dont, par conséquent, la surface est $\frac{n^2}{2}$. Ensuite, au moyen d'une décomposition du triangle en éléments rectangulaires et triangulaires, il trouve que la même surface est représentée exactement par

$$\frac{(n-1)^2+n-1}{2}+\frac{n}{2}.$$

La seule conclusion à en tirer, c'est que la seconde expression doit se réduire identiquement à la première, ou que les termes qu'elle contient de plus, se détruisent identiquement.

L'auteur raisonne tout autrement et dit : lorsque n est infini, 1 doit s'effacer devant n, en vertu du grand principe, ce qui réduit la seconde expression à $\frac{n^2}{2}+n$; mais n doit aussi s'effacer devant $\frac{n^2}{2}$, en vertu du même principe, ce qui donne simplement $\frac{n^2}{2}$.

Le sophisme de ce raisonnement est évident, puisqu'il conviendrait à toute valeur finie de n.

Par un tel sophisme on démontrerait tout ce qu'on voudrait, par exemple, que tous les nombres d'un seul chiffre doivent se négliger devant les nombres de deux chiffres ; car une grandeur exprimée par 84, pourra l'être par

$84 + 7 - 2 + 4 - 9$, expression identique à la première, et qui se réduit à 84 lorsqu'on néglige les nombres d'un seul chiffre.

Comment Fontenelle n'a-t-il pas aperçu le vice de sa démonstration ? Il semble craindre de l'apercevoir quand il dit :

« On aura pour l'aire totale $\frac{(n-1)^2 + n - 1}{2} + \frac{n}{2}$, que je laisse exprès sous cette forme; » car comme elle se réduit identiquement à $\frac{n^2}{2}$, le grand « principe et le plus fécond du calcul de l'infini » devient parfaitement inutile.

Quant à sa fécondité, on peut en juger par la *Géométrie de l'Infini*, qui n'est qu'un tissu de propositions impossibles et paradoxales.

La démonstration que je viens de critiquer est donnée comme le couronnement de l'édifice, sous le titre : *De l'exactitude du calcul de l'Infini.* Après quoi l'auteur triomphe en disant : « Il est donc vrai, que loin que ce soit une « espèce de licence, et une inexactitude de négliger les grandeurs d'un ordre « inférieur devant une grandeur d'un ordre supérieur, cela est absolument « nécessaire pour la parfaite exactitude.

« Il sera bon d'examiner plus particulièrement pourquoi l'exactitude de- « mande que les grandeurs négligées le soient. »

Comme je l'ai dit, l'exactitude demande qu'on ne néglige rien, et quand on arrive à un résultat exact, c'est que ce qu'on a négligé se réduit à zéro.

Le ridicule des raisons imaginées par Fontenelle, prouve assez le défaut du principe qu'elles doivent défendre.

« Ce serait donc, dit-il, une contradiction que n fût quelque chose dans $n^2 + n$ poussée à l'infini, et rien n'est plus contraire à l'exactitude d'un « calcul, que d'y renfermer une contradiction avec la supposition qu'on a « faite. »

Si n n'est rien « dans $n^2 + n$ poussée à l'infini, » $\sqrt{n^2 + n}$ égalerait n, et la valeur de $\sqrt{n^2 + n} - n$ serait zéro, tandis qu'on sait que sa limite est $\frac{1}{2}$.

« La raison de l'article précédent, « ajoute Fontenelle, » se joint encore à « celle-ci Quand on fait une supposition d'Infini, il faut que tout ce qui en « porte le caractère le porte. »

C'est pour ceux qui comprennent les raisons de cette force-là qu'il a démontré que ce n'est pas « par une espèce de licence, mais pour la parfaite « exactitude qu'il faut que les grandeurs négligées le soient. »

Les grandeurs négligées le sont, d'après Fontenelle, parce qu'elles sont nulles, non en elles-mêmes, mais par rapport à celles qu'on ne néglige pas; comme si des quantités qui ne sont pas nulles, pouvaient l'être par rapport à d'autres?

Quoi qu'il en soit, je comprends tout au plus que des quantités non nulles en elles-mêmes, mais nulles par rapport à d'autres, puissent être négligées; mais comprendre que « cela est absolument nécessaire pour la parfaite exactitude, » voilà qui me dépasse.

Carnot soutient la même théorie en disant: « Négliger les quantités de « cette nature est non-seulement permis, mais il le faut, et c'est la seule ma- « nière d'exprimer exactement les conditions du problème. »

D'après lui, il serait nécessaire de négliger les infiniment petits, afin de corriger une erreur introduite dans le calcul par quelque comparaison imparfaite.

Par exemple, en considérant une courbe comme un polygone dont les côtés sont infiniment petits, la tangente en un point de la courbe sera le prolongement du côté correspondant. Alors, en négligeant les infiniment petits introduits dans le calcul, on corrigerait l'erreur qu'on a faite en prenant la courbe pour un polygone infinitésimal. De cette manière, on comprendrait la nécessité de négliger les infiniment petits pour corriger la première erreur. C'est sur cette idée que Carnot a fondé sa théorie des erreurs compensées. Pour l'établir il prend les exemples du cercle et d'une autre courbe qu'il « con- « sidère comme des polygones d'un très-grand nombre de côtés, » et il fait un calcul à la fin duquel il néglige les infiniment petits α et β, afin de corriger ainsi l'erreur qui a été faite en considérant la courbe comme un polygone. C'est ce qu'il explique en ces termes:

« On peut rendre fort simplement raison de ce qui est arrivé dans la « solution du problème traité ci-dessus, en remarquant que l'hypothèse d'où « l'on est parti étant fausse, puisqu'il est absolument impossible qu'un « cercle puisse être jamais considéré comme un vrai polygone, quel que « puisse être le nombre de ses côtés, il a dû résulter de cette hypothèse une « erreur quelconque dans l'équation, et que le résultat étant néanmoins cer- « tainement exact, comme on le prouve par la comparaison de deux trian- « gles, on a pu négliger α et β dans la première équation, et même on a dû « le faire pour rectifier le calcul et détruire l'erreur à laquelle avait donné « lieu la fausse hypothèse d'où l'on était parti. »

« Négliger des quantités de cette nature est donc non-seulement permis en « pareil cas, mais il le faut, et c'est la seule manière d'exprimer exactement « les conditions du problème. Le résultat exact n'a donc été obtenu que par « une compensation d'erreurs...... Ce résultat étant parfaitement juste, il « faut de toute nécessité que les erreurs se soient compensées mutuellement.

« Voilà donc le fait des erreurs compensées bien acquis et bien prouvé. »

Je vais aussi expliquer le même fait avec non moins de clarté et de précision. Premièrement, l'erreur que vous commettez en considérant le cercle, ou une courbe quelconque, comme un polygone, expire sur vos lèvres : elle n'atteint pas votre calcul, puisque vous opérez sur l'équation de la courbe, et non sur celle du polygone. Secondement, les infiniment petits que vous négligez, deviennent rigoureusement nuls lorsque le second point de la sécante vient coïncider avec le premier. C'est donc parce que les erreurs que vous avez commises sont absolument nulles, qu'elles se trouvent compensées si exactement et comme par enchantement.

Il est bien évident qu'une fausse idée qui reste dans l'esprit, qu'on n'introduit pas dans le calcul, ne peut fausser le résultat de ce calcul. Si, par exemple, vous avez à calculer l'intersection d'un hyperboloïde avec un paraboloïde, rien ne vous empêche de comparer ces deux surfaces à tout ce que vous voudrez, à une botte et un chapeau de gendarme, si cela peut vous venir à l'esprit... Quelque grossière que soit la comparaison, elle ne peut amener aucune erreur dans le résultat de votre calcul, si vous opérez sur les équations exactes des deux surfaces, et non sur les équations de la botte et du chapeau.

On comprend sans peine que deux erreurs absolument nulles se compensent nécessairement. Mais lorsque les infiniment petits négligés ne deviennent pas rigoureusement nuls, les erreurs qu'on fait en les négligeant, loin de se compenser nécessairement, vont quelquefois en grossissant ; c'est ce que prouve l'identité $x - \dfrac{x}{1 + \dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}}$, qui devient $0 = 1$ quand on néglige l'infiniment petit $\dfrac{1}{x}$.

Le principe des erreurs compensées est donc illusoire, comme le grand principe démontré par Fontenelle. Cependant il a pu séduire Lagrange lui-même, qui a cru y voir « la vraie métaphysique du calcul différentiel, » et qui a reproduit l'explication de Carnot en disant : « Par exemple, en regar-
« dant une courbe comme un polygone d'un nombre infini de côtés, chacun,
« infiniment petits, et dont le prolongement est la tangente de la courbe, il
« est clair qu'on fait une supposition erronée ; mais l'erreur se trouve cor-
« rigée dans le calcul par l'omission qu'on y fait des quantités infiniment
« petites. C'est ce qu'on peut faire voir aisément dans les exemples, mais ce
« dont il serait peut-être difficile de donner une démonstration générale. »

Ce qui est clair, c'est que la supposition erronée n'introduit point d'erreur dans le calcul, puisqu'on opère sur l'équation de la courbe, et non sur celle du polygone. Ce qui est clair encore, c'est que l'omission qu'on fait des quantités infiniment petites, ne donne point d'erreur dans le résultat, lorsque ces quantités y deviennent absolument nulles.

Quant à la « démonstration générale » que Lagrange juge difficile, Carnot croit l'avoir donnée. « Qu'il soit difficile ou non, » dit-il, « d'en donner une « démonstration générale, la vraie métaphysique de l'analyse infinitésimale, « n'en est pas moins, suivant l'illustre auteur même que je viens de citer, le « principe des compensations d'erreurs; et je crois, au surplus, qu'il ne « manque rien ni à la généralité ni à l'exactitude, de la démonstration que « j'ai donnée. »

Où en est maintenant la question, je veux dire l'explication ou la démonstration du principe fondamental de l'analyse infinitésimale? Pour le montrer, il nous suffira de dire qu'après les plus grands efforts, Auguste Comte est allé la chercher d'abord dans « le principe de la compensation nécessaire « des erreurs, » et finalement dans « le positivisme devenu religieux ».

Voici ce qu'il dit de la théorie de Carnot :

« Il était d'une importance réelle d'établir directement et d'une manière « générale la rationnalité nécessaire de la méthode infinitésimale. Après « diverses tentatives plus ou moins imparfaites pour y parvenir, les travaux « philosophiques de Lagrange ayant fortement reporté, vers la fin du siècle « dernier, l'attention des géomètres sur la théorie générale de l'analyse « infinitésimale, un géomètre très-recommandable, Carnot, présenta enfin « la véritable explication logique directe de la méthode de Leibnitz, en la « montrant comme fondée sur le principe de la compensation nécessaire des « erreurs, ce qui est vraisemblablement, en effet, la manifestation précise « et lumineuse de ce que Leibnitz avait vaguement et confusément aperçu, « en concevant les bases rationnelles de son analyse. Carnot a rendu ainsi « à la science un service essentiel, et dont l'importance ne semble pas encore « suffisamment appréciée, quoique tout cet échafaudage logique de la méthode infinitésimale proprement dite, ne soit susceptible très-vraisemblablement que d'une existence provisoire, en tant que radicalement vicieux « par sa nature ».

Après cet éloge du principe de Carnot, Auguste Comte en présente lui-même en ces termes, un exposé séduisant.

« Lorsqu'on établit l'équation différentielle d'un phénomène, on substitue, aux éléments immédiats des diverses quantités considérées, d'autres « infinitésimales plus simples, qui en diffèrent infiniment peu par rapport « à eux, et cette substitution constitue le principal artifice de la méthode « de Leibnitz, qui, sans cela, n'offrirait aucune facilité réelle pour la for-

« mation des équations. Carnot regarde une telle hypothèse comme produi-
« sant véritablement une erreur dans l'équation obtenue, et que, pour cette
« raison, il appelle imparfaite, seulement, il est clair que cette erreur ne
« peut être qu'infiniment petite. Or, d'un autre côté, tous les procédés ana-
« lytiques, soit de différentiation, soit d'intégration, qu'on applique à ces
« équations différentielles, pour s'élever aux équations finies, en éliminant
« toutes les infinitésimales introduites comme auxiliaires, produisent aussi
« constamment par leur nature, d'autres erreurs analogues, en sorte qu'il a
« pu s'opérer une exacte compensation, et que les équations définitives peu-
« vent, suivant l'expression de Carnot, être devenues parfaites ».

Auguste Comte termine en disant : « Cette ingénieuse théorie est sans doute « plus subtile que solide, quand on cherche à l'approfondir ».

Elle est même plus illusoire que subtile ; car enfin, s'il peut arriver que des erreurs se compensent, rien ne prouve qu'elles se compenseront nécessairement ; et, si, dans les exemples choisis par les auteurs qui ont reproduit cette théorie, les erreurs se compensent exactement, et comme par enchantement, c'est que ces erreurs sont absolument nulles. Or, quelle merveille que toutes les erreurs se compensent lorsqu'on n'en fait aucune ?

C'est ce que je puis montrer sur l'exemple d'Auguste Comte, comme je l'ai fait sur celui de Carnot.

Auguste Comte prend, sur la courbe $y = ax^2$, deux points voisins, dont les coordonnées diffèrent de k et h. On sait que le rapport $\frac{k}{h}$ représente le coefficient angulaire de la sécante menée par les deux points ; et ainsi, quelle que soit la différence h des abscisses des deux points, le coefficient angulaire de la sécante est toujours $2ax + h$. Mais quand les deux points viennent à se confondre, la sécante devient tangente, et h étant rigoureusement nulle, le coefficient angulaire $2ax + h$ se réduit évidemment à $2ax$.

D'une part, on ne fait point d'erreur en disant que la sécante devient tangente ; d'autre part on n'en fait point en prenant $2ax$ pour $2ax + h$ quand $h = 0$. Pourquoi imaginer des erreurs pour le seul plaisir de les voir s'entre-détruire ?

Quand on néglige l'infiniment petit $\frac{1}{x}$ du dénominateur $1 + \frac{1}{x}$ dans l'identité $x - \frac{x}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$, on fait des erreurs réelles ; allez voir si ces erreurs, qui conduisent à $0 = 1$, se compensent exactement et nécessairement.

Auguste Comte ne se contente pas de déclarer la théorie de Carnot plus subtile que solide : il retire peu à peu le pompeux éloge qu'il en a fait, comme on le voit dans ce passage :

« Quand on considère en elle-même et sous le rapport logique, la conception de Leibnitz, on ne peut s'empêcher de reconnaître avec Lagrange, « qu'elle est radicalement vicieuse. L'analyse transcendante ainsi conçue, « presente à mes yeux, cette grande imperfection philosophique, de se trouver encore essentiellement fondée sur ces principes métaphysiques, dont « l'esprit humain a eu tant de peine à dégager ses théories positives. Sous ce « rapport, on peut dire que la méthode infinitésimale porte vraiment l'empreinte caractéristique de l'époque de sa fondation et du génie propre de « son fondateur. On peut bien, il est vrai, par l'ingénieuse idée de la compensation des erreurs, s'expliquer d'une manière générale, comme nous « l'avons fait ci-dessus, l'exactitude nécessaire des procédés généraux qui « composent la méthode infinitésimale. Mais cela seul n'est-il pas un inconvénient radical, que d'être obligé de distinguer, en mathématiques, deux « classes de raisonnements, ceux qui sont parfaitement rigoureux, et ceux « dans lesquels on commet à dessein des erreurs qui devront se compenser « plus tard ? Une conception qui conduit à des conséquences aussi étranges, « est, sans doute, bien peu satisfaisante. »

Lorsque des infiniment petits deviennent rigoureusement nuls, il est bien superflu de chercher un principe qui donne le droit et impose le devoir de les négliger. Mais si ces infiniment petits ne peuvent jamais se réduire à zéro, le principe qui donne le droit et impose le devoir de les supprimer, ne peut être qu'illusoire, et il est bien inutile de chercher à le démontrer.

Ainsi se trouve jugé, et écarté pour toujours, un principe qui a été une pierre d'achoppement pour tant de géomètres. Il ne suffit pas de dire, comme Poisson : « Il est permis de négliger dans un calcul, sans crainte d'altérer les « résultats, soit des infiniment petits, » etc. Il faut dire d'où vient cette permission.

Il ne suffit pas de dire avec M. Haton de La Goupillière : « On se donne la « faculté de négliger les infiniment petits partout où ils se trouvent devant « des quantités finies. » Il faudrait dire de quel droit on se donne cette faculté.

Il ne suffit pas de dire comme Carnot : « Négliger des quantités de cette « nature, est non-seulement permis, mais il le faut, et c'est la seule manière « d'exprimer exactement les conditions du problème, » ni avec M. Charles de Freycinet : « on a non-seulement le droit, mais encore le devoir de supprimer l'infiniment petit dans les relations, afin de rétablir la réalité des « choses. » Il faudrait dire d'où viennent ce droit et ce devoir. Il faudrait dire ce qu'on entend par la réalité des choses; pourquoi altérer d'abord la réalité des choses pour le seul plaisir de la rétablir ensuite ?

Nous l'avons dit, c'est dans la distinction des deux infinis que nous trouverons la solution et l'explication des difficultés, comme des paradoxes qui naîtront du principe Leibnitzien.

Si les infiniment petits négligés se réduisent à zéro dans le résultat, il est incontestable qu'on a le droit de les négliger sans le secours d'aucun principe. Mais lorsque les infiniment petits qu'on néglige dans une égalité sont de ceux qui ne peuvent pas se réduire à zéro, il est certain que l'on commet une erreur en les négligeant, bien loin de rétablir « l'exactitude ou la réalité des « choses ».

Le postulatum d'Euclide et celui de Leibnitz sont également faux, mais celui d'Euclide, semble évident, tandis que la contradiction apparaît tout d'abord dans l'énoncé même du principe Leibnitzien, où l'on dit qu'il faut négliger des quantités pour « rétablir la réalité des choses ». Or, c'est pour- « tant le principe contradictoire que l'on emploie pour démontrer celui qui semble évident. Le célèbre Arnaud d'abord et ensuite Auguste Comte, ont démontré de cette manière le postulatum d'Euclide.

Pour Arnaud « l'angle de deux droites est l'aire plane infinie qu'elles « comprennent entre elles ».

« Cette définition, » dit l'auteur de l'*Infini*, « lui donne intuitivement « tous les théorèmes relatifs à des angles de même sommet, par exemple que « deux angles adjacents valent autant que deux angles droits, puisqu'ils « couvrent la même région du plan, etc... Elle lui donne aussi que la somme « des trois angles d'un triangle est égale à la somme de deux angles droits ; « car les deux aires infinies que représentent ces deux sommes ne diffèrent « que de deux fois l'aire du triangle, ce qui est une quantité finie. Or c'est « un principe évident que deux infinis sont égaux lorsqu'ils ne diffèrent « entre eux que d'une quantité finie ».

C'est un principe aussi évident que 2 et 2 font 5, et avec celui-ci, je puis me passer de l'autre.

« D'ailleurs, » ajoute l'auteur, « ceci constitue effectivement une démons- « tration du postulatum, parce que le postulatum et le théorème relatif à la « somme des angles d'un triangle peuvent être pris indifféremment pour « conséquence l'un de l'autre ».

Catalan dit aussi : « Après avoir hésité longtemps je me suis décidé à définir « l'angle la portion de plan comprise entre deux droites indéfinies, issues « d'un même point ».

Une portion de plan qui n'est pas terminée de toutes parts, c'est l'infini absolu, et toute propriété qu'on peut lui supposer est absurde.

Par exemple, lorsque deux angles ont leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens, le sommet de l'un peut être pris entre les côtés de l'autre, et le contenant aura de plus que le contenu « l'aire plane infinie comprise entre « les côtés parallèles ». On ne pourra donc admettre l'égalité des angles qu'en invoquant « le principe évident qui veut qu'on néglige cette aire « infinie pour rétablir la réalité des choses. » Tout cela est parfaitement absurde, ainsi que la démonstration qu'on tire d'un tel principe ; ce qui n'empêche pas Auguste Comte de prendre au sérieux une pareille démonstration, qu'il présente en ces termes :

« La méthode des aires suffit pour conduire sans effort au principal Théo-« rème de Thalès ».

» Il consiste au fond en ce que tout angle équivaut à la somme de ceux « que forment l'un de ses côtés et le prolongement de l'autre avec une trans-« versale quelconque ».

« Or cette dernière considération devient évidente en mesurant chaque « angle d'après l'aire indéfinie qu'il embrasse, si l'on remplace le premier « par son opposé, tandis qu'on apprécie le second en négligeant l'aire trian-« gulaire ».

« Cette dernière considération offre logiquement l'avantage d'introduire, « dès le début de la géométrie abstraite, le principe essentiel de la méthode « infinitésimale, la faculté de substitution mutuelle entre des grandeurs « quelconques dont la différence est infiniment petite envers elles ».

Comme je l'ai dit tout à l'heure, « le principe essentiel de la méthode « infinitésimale, » celui que Fontenelle appelle « le grand principe et le « plus fécond du calcul de l'infini, » et le principe en vertu duquel 2 et 2 font 5, se valent ; donc, si au lieu « d'introduire, dès le début de la géomé-« trie abstraite, » l'un de ces principes, on les introduisait tous les deux, « l'avantage logique » serait double.

Principes que la nouvelle école substitue au principe Leibnitzien.

L'irrationnalité du principe Leibnitzien étant généralement sentie, les géomètres modernes ont cru que les démonstrations se donneraient plus rigoureuses par la méthode des limites. Ainsi, tout en conservant les notations de la méthode infinitésimale, ils l'ont fondée sur des principes de la méthode des limites. Les deux principes destinés à servir respectivement de fondement au calcul différentiel et au calcul intégral, sont donnés par Duhamel sous le titre de *Théorèmes*, dont voici les énoncés :

« Premier Théorème. — La limite du rapport de deux quantités infiniment

« petites n'est pas changée quand on remplace ces quantités par d'autres, qui « ne leur sont pas égales, mais dont les rapports avec elles ont respectivement « pour limites l'unité.

« DEUXIÈME THÉORÈME. — La limite de la somme de quantités positives « infiniment petites, dont le nombre augmente indéfiniment, n'est pas chan- « gée, quand on remplace ces quantités par d'autres dont les rapports avec « elles ont respectivement pour limites l'unité. »

Le traité de Sturn reproduit les mêmes théorèmes presque dans les mêmes termes, comme il suit :

« THÉORÈME I. — La limite du rapport de deux quantités infiniment petites « n'est pas changée quand on remplace ces quantités par d'autres qui ne leur « sont pas égales, mais qui ont avec elles des rapports tendant vers l'unité.

« THÉORÈME II. — La limite d'une somme d'infiniment petits ne change « pas quand on les remplace par d'autres dont les rapports aux premiers ont « respectivement pour limite l'unité. »

M. Serret présente les mêmes théorèmes sous le titre de principes, et M. Hermite sous le titre de propositions.

« PREMIER PRINCIPE. — La limite du rapport de deux infiniment petits « n'est pas changée quand on les remplace par d'autres dont les rapports « avec eux ont respectivement pour limite l'unité. » (Serret).

« DEUXIÈME PROPOSITION. — La limite de la somme d'un nombre infiniment « grand de quantités infiniment petites, n'est pas changée quand on remplace « ces quantités par d'autres, dont les rapports avec elles ont respectivement « pour limite l'unité. » (Hermite).

A moins de se mieux copier, il n'est pas possible de se mieux accorder.

Ces deux principes ne choquent pas la raison comme le principe Leibnitzien, parce que si l'on y néglige une partie de la quantité, c'est pour trouver la limite, et non la valeur exacte de cette quantité.

Comme on le voit, par leurs simples énoncés, ces principes sont bien loin d'avoir la généralité du principe Leibnitzien, puisqu'ils ne se rapportent qu'aux deux seuls cas d'un rapport et d'une somme d'infiniment petits. Mais ce n'est pas là leur unique défaut. Par exemple, la quantité $3x^2 + 3xh + h^2$, dans laquelle h désigne l'accroissement infiniment petit de x, se remplacera par $3x^2$, et, en vertu du premier principe, la limite du rapport de cette quantité à l'autre ne sera pas changée. Or, puisque h peut devenir rigoureusement nul, c'est la vraie valeur et non la limite du rapport qu'on obtient. D'autre part, les termes négligés devenant absolument nuls, il est évident qu'on n'a besoin d'aucun principe pour s'autoriser à les supprimer. Ainsi, voilà que le premier principe porte à faux, et devient inutile justement dans les questions pour lesquelles on l'a tout exprès inventé.

Le second principe se trouve tout à fait dans le même cas, comme nous le montrerons au début du calcul intégral.

En admettant comme exacts les deux principes adoptés, depuis Duhamel, pour remplacer le principe de Leibnitz, leur application porterait à faux dans la méthode infinitésimale, essentiellement fondée sur des infiniment petits qui, pouvant devenir nuls, ne donnent lieu à aucune question de limite.

Dans la méthode infinitésimale on supprime, à temps et d'avance, les infiniment petits qui d'après la question doivent devenir nuls dans le résultat; en sorte que, par suite de cette suppression anticipée, les calculs sont rendus plus simples et plus faciles. Tout le mystère est là.

Voilà toute la métaphysique du calcul infinitésimal, voilà le flambeau qui doit éclairer la route de quiconque entreprend l'étude de ce calcul, et à qui il ne faudra plus dire avec d'Alembert : Allez en avant et la foi vous viendra. On n'aura pas besoin, pour continuer sa route, de savoir si l'on peut ou non se faire une idée exacte des infiniment petits, s'ils ont ou non une existence réelle, s'ils sont quelque chose ou s'ils ne sont rien ; ou bien encore s'ils tiennent le milieu entre l'existence et le néant.

On ne verra dans ce qu'on appelle des infiniment petits que des variables auxquelles on peut donner toutes les valeurs qu'on veut, grandes ou petites, et qui, soumises aux mêmes règles de calcul que les quantités dites finies, conduisent à des résultats exacts pour toutes les valeurs qu'on voudra attribuer à ces variables.

Mais, si à un moment quelconque, on néglige des infiniment petits, le résultat sera faux généralement ; cependant il sera évidemment exact pour le cas particulier qui correspond à l'hypothèse où les variables infinitésimales sont supposées nulles ; or, comme c'est justement ce cas particulier que l'on traite par la méthode infinitésimale, il arrive ainsi que les soit-disant infiniment petits qu'on a négligés, ne sont que de purs zéros.

Distinction essentielle entre la Méthode des Limites et la Méthode infinitésimale.

Les deux méthodes sont réputées équivalentes, et comme ne différant que par la forme et les notations : la premiére étant plus apte aux démonstrations, et la seconde s'adaptant mieux aux applications. Cette appréciation est erronée, car c'est pour les démonstrations comme pour les applications, que chacune des deux méthodes convient le mieux aux questions qui sont de son domaine.

Il faut regarder comme du domaine de la méthode infinitésimale les fonctions des accroissements qui peuvent se réduire à zéro, et comme du domaine de la méthode des limites les fonctions d'infiniment petits qui ne peuvent pas se réduire à zéro, parce qu'ils sont eux-mêmes fonctions de variables supposées infinies.

Aujourd'hui les géomètres donnent les définitions et les démonstrations par la méthode des limites ; tandis que les applications sont présentées au moyen de la méthode infinitésimale. Cette manière de faire est qualifiée de « frauduleuse » par Auguste Comte, qui a cependant cru, comme les autres, que les deux méthodes s'adaptent indistinctement aux mêmes questions. Aussi cette erreur est-elle la source des difficultés qu'il a discutées avec tant de soin, sans pouvoir les résoudre.

Ce qui fait qu'on n'a pas distingué les questions propres à chacune des deux méthodes, c'est qu'on n'a pas distingué les infiniment petits qui peuvent se réduire à zéro, de ceux qui ne peuvent jamais devenir rigoureusement nuls.

C'est dans cette confusion que résident les difficultés et les erreurs auxquelles peut conduire l'emploi des infiniment petits. Il faut qu'on le comprenne bien : l'erreur d'un calcul ne peut pas venir d'une fausse idée qu'on a dans l'esprit, tant qu'elle n'entraîne pas la substitution effective de l'une à l'autre de deux quantités qu'on croit ou qu'on suppose égales, lorsqu'en réalité, il est impossible qu'elles le deviennent.

Lorsqu'on n'introduit pas dans le champ, déjà si vaste, de la méthode infinitésimale, les questions qui forment le domaine exclusif et beaucoup plus restreint de la méthode des limites, la méthode de Leibnitz est susceptible d'une explication rationnelle très-simple.

C'est encore pour avoir confondu ces deux genres de questions qu'Auguste Comte a dit : « Quand on considère en elle-même, et sous le rapport logique, « la conception de Leibnitz, on ne peut s'empêcher de reconnaître avec « Lagrange, qu'elle est radicalement vicieuse, en ce que suivant ses propres « expressions: la notion des infiniment petits est une idée fausse, qu'il est « impossible, en effet, de se représenter nettement, quoiqu'on se fasse quel- « quefois illusion à cet égard ».

Distinguez bien l'infiniment petit qui peut devenir zéro, de celui qui ne peut s'y réduire ; ne prêtez pas à l'un les propriétés qui n'appartiennent qu'à l'autre ; après cela, vous pouvez avoir, des infiniment petits, l'idée que vous voudrez, et les appeler comme vous l'entendrez, des très-petits, par exemple, ou simplement des variables.

Là se trouve l'explication logique qui a été si vainement cherchée par tant de géomètres, et des plus illustres tels que Lagrange, Carnot, Auguste Comte, etc.

Qu'on s'y prenne comme on voudra, si l'on confond en une seule espèce les hirondelles et les chauves-souris, il en résultera des êtres singuliers qui tiendront le milieu entre les quadrupèdes et les oiseaux ; c'est ainsi que Carnot a fait des infiniment petits, une « espèce d'êtres singuliers qui semblent, par « leurs propriétés équivoques, tenir le milieu entre la grandeur et le zéro, « entre l'existence et le néant ».

Il convient de compléter, par des notations spéciales, la distinction essentielle que j'ai établie entre des valeurs principales et les limites des fonctions.

Quand la valeur de x est nulle, il est évident que celle de $y = \frac{a + bx + cx^2}{a' + b'x + c'x^2}$ se réduit à $\frac{a}{a'}$; tandis que $y = \frac{ax + bx^2 + cx^3}{a'x + b'x^2 + c'x^3}$ se réduit à $\frac{0}{0}$, et a pour valeurs tous les nombres possibles. Pour exprimer que $\frac{a}{a'}$ représente la valeur principale correspondant à $x = 0$,

j'écris
$$\frac{a}{a'} = \int_0 \frac{ax + bx^2 + cx^3}{a'x + b'x^2 + c'x^3}.$$

Si, dans la même expression $\frac{ax + bx^2 + cx^3}{a'x + b'x^2 + c'x^4}$, $x = \frac{1}{z}$, la valeur de x aura pour limite zéro, mais ne sera jamais absolument nulle; la fraction ne prendra pas la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, et sa valeur n'atteindra jamais $\frac{a}{a'}$, qui en représentera la limite, et non la vraie valeur.

Si x tend vers sa limite zéro, la fonction $\frac{ax + bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \dots}{a'x^2 + bx^3 + C'x^4 + D'x^5 + \dots}$ n'a plus ni limite ni valeur principale; mais elle a un convergent, qui, d'après une règle donnée précédemment, est $\frac{a}{a'x} + \frac{ba' - ab'}{a'^2}$; c'est ce que j'exprime en écrivant :

$$\mathcal{C}_0 \frac{ax + bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \dots}{a'x^2 + b'x^3 + C'x^4 + D'x^5 + \dots} = \frac{a}{a'x} + \frac{ba' - ab'}{a'^2}.$$

La limite étant un cas particulier du convergent, il convient d'employer le même signe pour les deux.

D'après cela, on écrira $\mathcal{C}_0 \frac{ax + bx^2 + Cx^3}{a'x + b'x^2 + C'x^3} = \frac{a}{a'}$, pour exprimer que

$\frac{a}{a'}$ est le convergent, ou la limite de la fonction quand x tend vers sa limite zéro; tandis que si x est indépendant, on écrira :

$$\int_0^{p} \frac{ax + bx^2 + cx^3 + \ldots}{a'x + b'x^2 + c'x^3 + \ldots} = \frac{a}{a'},$$

pour exprimer que quand x devient zéro, la fraction atteint sa valeur principale $\frac{a}{a'}$.

Définition du verbe leibnitzer.

J'emploierai le verbe leibnitzer pour désigner la double opération qui consiste, d'une part, à représenter les accroissements des variables par les notations de Leibnitz, et, d'autre part, à supprimer conformément à son principe, les infiniment petits d'ordres supérieurs, non pas, comme il l'entendait, parce qu'ils sont négligeables en tant qu'incomparables, mais bien, en réalité, parce qu'ils deviennent absolument nuls dans le résultat cherché.

Ainsi, au lieu de dire, comme M. Bertrand (à la page 648 de son *Traité de Calcul différentiel*:) « d'où l'on conclut en négligeant toujours, il doit être « superflu de le rappeler, les infiniment petits d'ordre supérieur à ceux que « l'on conserve, » on dira simplement: *leibnitzant*, on a, etc.

L'emploi du verbe leibnitzer, n'aura pas pour seul effet d'abréger le discours et d en mieux préciser le sens, mais sa définition offre de plus la justification naturelle d'une opération qui a donné lieu à tant d'explications irrationnelles ou paradoxales, et que Carnot a cru justifier par sa théorie des erreurs compensées.

Puisqu'on ne néglige les infiniment petits qu'à la condition qu'ils deviennent nuls dans le résultat de la question posée, il ne faut pas « toujours « négliger les infiniment petits d'ordre supérieur à ceux que l'on con- « serve ». On ne les négligera pas dans une question où l'on ne pourra pas les faire nuls. Par exemple, puisqu'on ne peut pas rendre nul l'infiniment petit $\frac{1}{x}$; on ne le négligera pas dans l'identité $x - \frac{x}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$, car on aurait l'absurdité $0 = 1$.

LIVRE DEUXIÈME

CALCUL DIFFÉRENTIEL

DIFFÉRENTIELLES DES VARIABLES, ET DÉRIVÉES DE LEURS FONCTIONS.

On appelle différence d'une variable la différence de deux valeurs qu'on lui donne successivement; c'est donc l'accroissement que prend la variable quand elle passe de la première valeur à la seconde.

Les différences des variables $x, y, z,$ se désignent ordinairement par Δx, Δy, Δz.

Lorsque la différence d'une variable est supposée infiniment petite, on l'appelle différentielle.

Les différentielles des variables x, y, z, etc. se désignent par dx, dy, dz, etc.; leurs carrés, leurs cubes, etc., se représentent respectivement par dx^2, dy^2, dz^2, dx^3, dy^3, dz^3, etc.

En supposant $y = x^3$, désignons par h l'accroissement de x, et par k celui qui en résulte pour y; lorsque x devient $x + h$, y devient $(x + h)^3$, ou $x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$, en sorte que $k = 3x^2h + 3xh^2 + h^3$, et $\frac{k}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$.

Si l'on suppose h infiniment petit dans l'égalité $\frac{k}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$, les termes $3xh$ et h^2 sont eux-mêmes infiniment petits, et le rapport $\frac{k}{h}$ est infiniment près de $3x^2$. Si h ne pouvait pas devenir nul, $3x^2$ serait la limite du rapport $\frac{k}{h}$; mais on peut faire $h = 0$, et l'on dit qu'on a alors $\frac{0}{0} = 3\,x^2$. C'est mal raisonner, car le second membre d'une identité ne peut pas rester déterminé en même temps que le premier devient indéterminé.

Si on reprend l'identité $k = 3x^2h + 3xh^2 + h^3$, et qu'on divise tous les termes par h, on a $\frac{k}{h} = \frac{h}{h}\left(3x^2 + 3xh + h^2\right)$, qui pour $h = 0$, donne

$\frac{0}{0} = \frac{0}{0}$, et non $\frac{0}{0} = 3x^2$. Il en résulte que $3x^2$ est la valeur principale du rapport indéterminé ; ce que j'indique en écrivant $\int_0 \frac{k}{h} = 3x^2$. La même relation s'écrit simplement $\frac{dy}{dx} = 3x^2$, d'après la notation de Leibnitz. Comme on le voit, cette relation est exacte; mais c'est l'explication qu'on en donne qui ne l'est pas, car au lieu de reconnaître que les derniers termes de l'égalité $= \frac{k}{h}$ $3x^2 + 3xh + h^2$ y deviennent nuls, on a imaginé d'en faire des infiniment petits, « espèces d'êtres singuliers qui tiennent le milieu entre l'existence et le néant, » et qui sans être nuls en eux-mêmes, auraient la propriété d'être nuls par rapport aux quantités finies. De là le principe leibnitzien qui donnerait le droit et imposerait même le devoir de négliger les infiniment petits devant des quantités finies. Comme le dit Auguste Comte, ce principe porte l'empreinte de la métaphysique de l'époque et du génie propre de l'inventeur.

Dans la méthode de Newton les dérivées sont des limites, en sorte que dans l'exemple $\frac{k}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$, il faudrait écrire $\lim \frac{k}{h} = 3x^2$, ce qui serait exact si h ne pouvait égaler zéro ; mais, comme les accroissements des variables peuvent toujours devenir nuls, il s'ensuit que dans le système de Newton, l'équation et l'explication sont également inexactes ; tandis que dans celui de Leibnitz, l'explication seule est inexacte.

Les géomètres philosophes ont cru le contraire, et ils ont émis cette opinion paradoxale, que la méthode de Newton, quoique logiquement plus exacte, est pourtant moins bien appropriée aux applications.

« La conception de Leibnitz, » dit Auguste Comte, « présente incontesta-
« blement, dans l'ensemble des applications, une supériorité très-prononcée,
« en conduisant, d'une manière beaucoup plus rapide, et avec bien moins
« d'efforts intellectuels, à la formation des équations entre les grandeurs
« auxiliaires. C'est à son usage que nous devons la haute perfection qu'ont
« enfin acquise toutes les théories générales de la géométrie et de la mécani-
« que. Lagrange lui-même, après avoir reconstruit sur de nouvelles bases
« l'analyse transcendante, a rendu, avec cette haute franchise qui convenait
« si bien à son génie, un hommage éclatant et décisif aux propriétés caracté-
« ristiques de la conception de Leibnitz, en la suivant exclusivement dans le
« système entier de la *Mécanique analytique*.

« Mais, quand on considère en elle-même, et sous le rapport logique, la
« conception de Leibnitz, on ne peut s'empêcher de reconnaître avec Lagrange
« qu'elle est radicalemement vicieuse.

« Passant à la conception de Newton, il est évident que, par sa nature, elle « se trouve à l'abri des objections logiques fondamentales que provoque la « méthode de Leibnitz. La notion des limites est, en effet, remarquable par « sa netteté et par sa justesse. »

Sans doute la notion des limites est nette et juste; mais on en fait une fausse application lorsque, comme Newton et les géomètres en général, on prend pour limite d'une fonction, ce qui en réalité est la valeur principale d'un rapport indéterminé.

C'est par suite de cette erreur que la méthode des limites appliquée à l'analyse transcendante est regardée comme logiquement plus rigoureuse. C'est aussi par suite de cette erreur que Cournot a dit : « Au point de vue « logique et subjectif, la rigueur démonstrative appartient directement à la « méthode des limites, et indirectement à la méthode infinitésimale. »

M. Bertrand appuie la même opinion en disant : « Newton est toujours « aussi irréprochable dans la forme que rigoureux dans le fond. »

Pour M. Bertrand les différentielles sont des infiniment petits qui ont pour limite zéro. Il n'est donc pas étonnant que ceux qui tombent dans le même défaut lui paraissent irréprochables.

Les géomètres modernes font un usage simultané des deux méthodes, en préférant celle des limites pour les définitions et les démonstrations, et s'abandonnant à celle de Leibnitz pour les applications. Ce procédé est qualifié de frauduleux par Auguste Comte, qui s'en explique en ces termes :

« Plusieurs géomètres du continent, en adoptant, comme plus rationnelle, « la méthode de Newton, pour servir de base à l'analyse transcendante, ont « déguisé en partie son infériorité par une grave inconséquence, qui consiste « à appliquer à cette méthode la notation imaginée par Leibnitz pour la « méthode infinitésimale, et qui n'est réellement propre qu'à elle. En dési- « gnant par $\frac{dy}{dx}$ ce que, rationnellement, il faudrait, dans la théorie des « limites, noter $\lim \frac{dy}{dx}$, et en étendant à toutes les autres notions analy- « tiques ce déplacement de signe, on se propose sans doute de combiner les « avantages spéciaux des deux méthodes : mais on ne parvient, en réalité, « qu'à établir entre elles une confusion vicieuse, dont l'habitude tend à « empêcher de se former des idées nettes et exactes de l'une et de l'autre.

« D'après sa nature trop compliquée et trop détournée, la conception « Newtonienne ne comporte point, sous la forme des limites, de notations et « dénominations qui lui soient propres. Eludée irrationnellement par l'abus « des notations infinitésimales, l'imperfection inhérente à la méthode des « limites ne semble ainsi disparaître que d'après une inconséquence habi-

« tuelle. Remplaçant la limite du rapport des accroissements par le rapport « des différentielles, on s'accoutume à séparer les deux termes de la fraction « auxiliaire contre l'esprit de la conception Newtonienne, à laquelle on veut « frauduleusement procurer les qualités Leibnitziennes. »

Tous les géomètres, en général, définissent la dérivée d'une fonction en disant que c'est la limite du rapport de l'accroissement de cette fonction à celui de la variable ; donc pour être exacts et conséquents ils devraient, comme le dit Auguste Comte, écrire $\lim \dfrac{dy}{dx} = F'(x)$, et non $\dfrac{dy}{dx} = F'(x)$. Or, comme $F'(x)$ représente la valeur principale, et non la limite de rapport, il s'ensuit que la notation censée la plus exacte, n'est exacte ni dans la forme ni pour le fond, tandis que celle de Leibnitz ne pèche que par l'explication qu'on en donne.

Mais l'explication pouvant être rectifiée sans altérer la méthode, j'en conclus qu'au point de vue logique et subjectif, comme au point de vue objectif ; au point de vue théorique ou démonstratif, comme au point de vue pratique, toute la supériorité revient à la méthode de Leibnitz. C'est dans ce sens que j'ajouterai qu'il appartient à Leibnitz de démontrer Newton et Lagrange, et non à Newton et Lagrange de démontrer Leibnitz.

L'égalité $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$ se trouve justifiée en apparence, quand on dit que par la notation $\dfrac{dy}{dx}$ il faut entendre la limite de ce rapport. Mais si $\dfrac{dy}{dx}$ exprime la limite du rapport, et non le rapport lui-même, on agit « frauduleusement » selon l'expression d'Auguste Comte, quand on sépare les deux termes du rapport pour écrire $dy = 3x^2\,dx$. Les géomètres, depuis Cauchy et Duhamel, ont cru lever la difficulté en donnant comme définition, l'égalité $dy = 3x^2\,dx$, c'est-à-dire, en appelant différentielle de y le produit de dx par la dérivée $3x^2$. De cette manière la difficulté est écartée pour le moment ; mais elle reparaît bientôt lorsque, dans les applications, on emploie dy pour désigner l'accroissement infiniment petit de y.

On sait que c'est la détermination analytique des tangentes qui a donné lieu au calcul différentiel. Par exemple, s'il s'agit de la courbe représentée par l'équation $y = x^3$, la sécante menée par les points dont les abscisses sont x et $x + h$, et les ordonnées y et $y + k$, fait avec l'axe de x un angle dont la tangente trigonométrique est exprimée par le rapport $\dfrac{k}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$.

Or, rien n'empêche que le second point ne vienne coïncider avec le premier ; les accroissements h et k deviennent nuls alors, et le rapport $\dfrac{k}{h}$ se réduisant à $\frac{0}{0}$, est tout à fait indéterminé. Cela doit être en effet, puisque les deux points coïncident en un seul, par lequel on peut mener une infinité de droites.

Dans ce cas, on ne peut plus dire que le second membre de $\frac{k}{h} = (3x^2 + 3xh + h^2)\frac{h}{h}$, se réduit à $3x^2$, car $\frac{h}{h}$ se réduit à $\frac{0}{0}$; mais sa valeur principale est 1, et $3x^2$ qui est la valeur correspondante de $\frac{k}{h}$ représente le coefficient angulaire de la tangente à la courbe, menée au point dont l'abscisse est x ; tandis que chacune des autres valeurs de la fraction $\frac{k}{h}$, réduite à $\frac{0}{0}$, représente le coefficient angulaire d'une autre droite menée par le même point.

Le défaut analytique de la définition de la dérivée consiste à dire que c'est la limite d'un rapport, au lieu de dire que c'est la valeur principale d'un rapport indéterminé.

Le défaut correspondant de la définition géométrique de la tangente consiste à dire que c'est la limite de la sécante, au lieu de dire que c'est la direction que prend la sécante lorsque le second point atteint le premier.

Dire que la tangente est la limite de la sécante, c'est dire que le second point ne peut jamais atteindre le premier, ou que la sécante ne peut coïncider avec la tangente, ce qui est évidemment faux.

L'exemple $y = x^3$, que nous avons considéré plus haut, nous a donné $3x^2$ pour la dérivée de y, et nous avons dit à quelle condition l'égalité $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ peut être considérée comme exacte.

1° Lorsque les accroissements dx, dy sont nuls, la fraction $\frac{dy}{dx}$ est indéterminée, mais sa valeur principale est $3x^2$.

2° Lorsque ces accroissements ne sont pas nuls, l'égalité $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ ne devient exacte qu'au moyen des termes négligés ou sous-entendus ; mais le résultat final est exact, parce qu'on est sûr que les termes négligés, y deviennent nuls en même temps que dx.

Dans le système de Lagrange, la formule $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ ne s'emploie pas, les principes y sont censés « dégagés de toute considération d'infiniment petits ». D'après ces principes, la dérivée d'une fonction F (x) est le multiplicateur de h dans le développement de $F(x+h)$, et cette dérivée se désigne par $F'(x)$; ainsi quand $F(x) = x^3$, on a $F'(x) = 3x^2$.

Jusque là tout est correct, et la dérivée se trouve ainsi définie sans la considération de limites ni d'infiniment petits ; mais on s'interdit, de la sorte, l'usage des formules $\frac{dy}{dx} = 3x^2$, et de $dy = 3x^2 dx$; ce qui est un grand inconvénient. Cependant tout le mal n'est pas là. En effet, cette définition de la dérivée d'une fonction $F(x)$, exige que la fonction $F(x+h)$ se développe suivant les puissances croissantes de h. Si le développement est une série infinie, ce qui est le cas le plus ordinaire, il n'y a plus identité entre la fonction $F(x+h)$ et son développement, et il y a deux cas à considérer.

1° Lorsque la série est convergente, $F(x+h)$ en représente la limite, et il y a erreur à la prendre pour la somme de ses termes ; on ne peut le faire qu'en négligeant des infiniment petits. Ainsi Lagrange ne considère pas les infiniment petits, mais il les néglige.

2° Si la série est divergente, on ne peut la prendre pour $F(x+h)$ qu'en négligeant des quantités finies ou infinies, ce qui est bien pis que de considérer des quantités infiniment petites.

C'est dans sa *Théorie des Fonctions analytiques* que Lagrange a prétendu donner les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions.

L'ouvrage est une œuvre de génie, et c'est sans doute ce qui a valu à l'auteur « ce premier des fameux prix décennaux, par lequel l'Académie des « sciences de Paris a couronné la *Théorie des Fonctions analytiques* de « Lagrange, destinée, » dit Hoëné Wronski, « à extirper des mathématiques « l'importante idée de l'infini ». Mais l'auteur a-t-il réellement atteint le but qu'il s'y est proposé ? Les connaisseurs, et Cauchy en tête, ne le pensent pas. Il ne paraît pas qu'aucun géomètre ait essayé de reprendre la tâche à laquelle Lagrange a succombé, et qui consistait à établir *les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération de limites et d'infiniment petits.* La difficulté était cependant susceptible d'une solution bien simple, comme je vais le montrer.

Lagrange a donné le calcul différentiel sans différentielles ; sa méthode a pu conduire aux mêmes résultats que le calcul différentiel ; mais, à proprement parler, ce n'est plus du calcul différentiel.

Supposons que le résultat d'une opération plus ou moins compliquée soit une fonction des variables x, y, z, et de leurs accroissements également variables, et désignés par x', y', z'. N'est-il pas évident que ce résultat deviendrait le même si l'on y donnait à x', y', z', des valeurs nulles, que si l'on négligeait dans le courant du calcul les termes qui deviennent nuls en même temps que x', y', z' ? N'est-il pas évident encore qu'en négligeant d'abord ces termes, le calcul pourra se trouver considérablement simplifié ?

Ainsi se trouve expliqué tout le mystère du calcul différentiel. Pour y adapter la notation la plus convenable, les accroissements des variables x, y, z, sont désignés par dx, dy, dz, et on les appelle les différentielles de ces variables.

Puisque les différentielles peuvent passer par zéro, elles n'ont pas pour limite zéro. C'est ainsi qu'on établira « les principes du calcul différentiel « dégagés de toute considération de limites. » Comme de cette manière ils s'établissent sans qu'on ait besoin de parler d'infiniment petits, ils se trouveront aussi « dégagés de toute considération d'infiniment petits. »

Qu'on ne dise pas qu'une variable est bien obligée de devenir infiniment petite avant d'arriver à zéro ; autrement on ne pourrait pas non plus faire $x = 4$, sans passer par des valeurs infiniment peu différentes de 4.

Quant au principe leibnitzien, en vertu duquel les infiniment petits peuvent et doivent se négliger, on peut l'invoquer si l'on veut ; mais rien n'est exact de ce qu'on a dit pour le justifier. Si le résultat trouvé en négligeant ainsi les infiniment petits, est exact, ce n'est qu'autant qu'il correspond à l'hypothèse où les variables appelées infiniment petits sont devenues rigoureusement nulles ; mais ce même résultat serait faux dans toute autre hypothèse.

Ce sont les difficultés que je viens de résoudre, j'ose le dire, qui ont tenu si longtemps l'Académie des sciences en suspens sur la valeur des idées de Leibnitz. Ces difficultés paraissaient encore insurmontables à d'Alembert, puisqu'il répondit à un jeune géomètre qui s'en plaignait à lui : « Allez en « avant et la foi vous viendra. »

M. Bertrand, comme Sganarelle, dirait : « Nous avons changé tout cela. »

« Ces matières, » dit-il, « ont été éclairées et approfondies par tant de « discussions qu'il n'y subsiste plus aucun nuage, et que tout aujourd'hui « semble simple et rigoureux dans le début d'une science facilement acces- « sible, et que l'on ne songe plus à nommer transcendante. »

M. Bertrand trouve « simple et rigoureux » de faire $\frac{1}{x} = 0$, après avoir dit : « On nomme *infiniment petit* ou *quantité infiniment petite* un nombre ou « une grandeur variable, qui diminue indéfiniment et s'approche autant « qu'on veut d'une limite nulle sans jamais l'atteindre. » Je le trouve « sim- « ple » aussi, mais pas du tout « rigoureux. » Notre illustre Cauchy ne voyait pas encore l'affaire arrivée à ce degré de perfection, comme on peut s'en convaincre en lisant l'article qu'il a publié au commencement du tome troisième de ses *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique.* Cauchy dit donc que « les équations différentielles ne deviennent exactes que « dans le cas où les différentielles s'évanouissent, c'est-à-dire dans le cas où « ces équations mêmes disparaissent. »

« A la vérité, » ajoute Cauchy, « l'inconvénient que nous venons de rap- « peler n'a point arrêté Euler, et ce grand géomètre tirant la conséquence « rigoureuse des principes généralement admis, a considéré les différentiel- « les comme de véritables zéros, qui ont entre eux des rapports finis. Mais « d'autres géomètres illustres, et Lagrange à leur tête, n'ont pu se résoudre « à introduire dans un même calcul plusieurs sortes de zéros distincts les « uns des autres, et c'est pour ce motif qu'à la notion des différentielles, « Lagrange a songé à substituer la notion des fonctions dérivées. »

Est-ce en « approfondissant » des zéros, « qui ont, » au dire de Carnot, « des rapports très-intéressants à connaître, » que « la matière a été éclairée? » Est-ce en extirpant, avec Lagrange, les différentielles du calcul différentiel, qu'on a dissipé les nuages et les difficultés ? Cauchy répond : « Les difficultés « que l'on rencontre quand on veut déduire la notion des fonctions dérivées « de la considération d'une série composée d'un nombre infini de termes, se « trouve à peine dissimulées par toutes les ressources qu'a développées le « génie de Lagrange, dans les premiers chapitres de sa *Théorie des Fonctions* « *analytiques.* »

Ainsi, le génie de Lagrange n'ayant pu dissiper les nuages, celui de Cauchy a-t-il mieux réussi ? Il le croit :

« On échappe, » dit-il, « aux difficultés que nous venons de signaler quand « on considère une fonction dérivée comme la limite du rapport entre les « accroissements infiniment petits et simultanés de la fonction donnée, et de « la variable dont elle dépend. »

Mais en échappant ainsi à ces difficultés on en rencontre d'autres. La première c'est qu'on prend des limites là où il n'y en a pas. Cauchy ne voit pas celle-là, mais il en signale d'autres, et il dit : « On évitera ces inconvénients « si l'on considère les différentielles de deux ou de plusieurs variables liées « entre elles par une ou plusieurs équations, comme des quantités finies dont « les rapports sont rigoureusement égaux aux limites des rapports entre les « accroissements infiniment petits et simultanés de ces variables. Cette défi- « nition nouvelle que j'ai adoptée dans mon calcul différentiel et dans le « mémoire sur les méthodes analytiques, me paraît joindre à l'exactitude « désirable tous les avantages qu'offrait, sous les rapports de la simplicité et « de la généralité, la définition primitivement admise par Leibnitz et par les « géomètres qui l'ont suivi. »

Pour Leibnitz et pour les géomètres qui l'ont suivi, les différentielles sont les différences infiniment petites des variables ; pour Euler les différentielles sont de purs zéros; pour Cauchy et pour les géomètres qui, comme Duhamel, l'ont suivi, les différentielles sont des quantités finies; pour moi les différentielles sont des variables qui représentent les accroissements d'autres variables.

La pire de toutes ces conceptions est celle que Cauchy donna comme la meilleure, et ce que j'ai dit jusqu'ici prouve assez que les avantages attribués par lui à sa nouvelle définition sont réellement illusoires.

Du moment que les différentielles sont des variables, elles sont, comme toutes les variables, susceptibles de recevoir des valeurs arbitraires. Puisqu'elles représentent les accroissements d'autres variables, le résultat d'un calcul quelconque pourra contenir des termes soit dépendants soit indépendants de ces accroissements. Or, dans les questions traitées par la methode infinitésimale, on demande la valeur du résultat pour le cas où les accroissements des variables deviennent nuls.

L'artifice et l'avantage de la méthode consistent à négliger d'avance, et le plus tôt possible, les termes qui sans cela compliqueraient inutilement les calculs, et même le résultat final, d'où ils disparaîtraient ensuite quand on remplacerait par zéro les accroissements des variables.

Toute la métaphysique du calcul différentiel se résume donc dans les trois propositions suivantes :

1° Les différentielles sont des variables qui représentent des accroissements d'autres variables.

2° Les questions du calcul différentiel se rapportent au cas où les différentielles deviennent nulles dans le résultat cherché.

3° On néglige dans le calcul les termes qui disparaîtraient du résultat, quand les accroissements des variables y seraient supposés nuls.

On voit que dans ces énoncés il n'est pas même question d'infiniment petits. C'est donc bien perdre sa peine et son temps que de se creuser la tête pour savoir s'ils ont ou non une existence réelle, s'ils sont de purs zéros, ou « des espèces d'êtres singuliers qui tiennent le milieu entre l'existence et le néant. »

Tout le tort de Leibnitz était de voir dans ses différentielles des quantités constantes infiniment petites, négligeables en raison de leur extrême petitesse, au lieu d'y voir des variables qu'on ne néglige que par suite d'une hypothèse qui les rend absolument nulles.

Le tort plus grand d'Euler était de ne voir dans les différentielles que des constantes toujours nulles, et d'admettre ainsi des zéros de plusieurs espèces et de différents ordres.

Le tort de Lagrange est plus grand que celui de Leibnitz, parce que pour éviter les différentielles qui, comme dx, dy, dz, peuvent devenir zéro, il néglige les différences qui existent entre les séries et leurs limites, et qui ne peuvent jamais se réduire à zéro.

Le tort de Cauchy est le plus grand de tous, car pour que les différentielles représentent toujours dans son système des quantités finies, qu'on ne peut plus jamais négliger comme ayant une valeur nulle, ou extrêmement petite, il est obligé de leur enlever leur propriété essentielle, qui consiste à représenter les accroissements des variables.

Cauchy ne cache pas ce défaut, mais il le présente comme une qualité. « Il me paraît important, dit-il, de considérer les différentielles comme des « quantités finies, en les distinguant soigneusement des accroissements infi- « niment petits des variables. »

Est-ce que par ces « quantités finies, » Cauchy a trouvé le moyen de se passer « des accroissements infiniment petits des variables? » Il l'a trouvé comme quelqu'un qui inventerait le moyen de se passer de cuillers et de fourchettes, excepté pour manger. C'est ce que fait Cauchy en ajoutant :

« La considération de ces derniers accroissements peut et doit être em- « ployée comme moyen de découverte ou de démonstration dans la recher- « che des formules ou dans l'établissement des théorèmes. Mais alors le « calculateur se sert des infiniment petits comme d'intermédiaires qui doi- « vent le conduire à la connaissance des relations qui subsistent entre des « quantités finies; et jamais, à mon avis, des quantités infiniment petites ne « doivent être admises dans les équations finales, où leur présence devien- « drait sans objet et sans utilité. »

Voyons, il faudrait pourtant s'entendre. Les quantités infiniment petites que peut renfermer une équation finale, sont exprimées au moyen de différentielles. Si ces « quantités infiniment petites ne doivent pas être admises « dans les équations finales, » il faut bien donner le moyen de s'en défaire. Selon moi, elles disparaissent parce que les différentielles sont des variables qui dans la question résolue doivent devenir nulles, comme lorsque la sécante devenant tangente, la distance des points de rencontre devient absolument nulle. Pour Leibnitz les quantités infiniment petites disparaissent à cause de leur extrême petitesse. Mais pour Cauchy les différentielles n'étant ni des quantités nulles ni des quantités infiniment petites, mais bien des « quantités finies, » quelle raison donnera-t-il pour les négliger, ou quel moyen de s'en débarrasser?

On voit donc que depuis Leibnitz jusqu'à Cauchy, la difficulté n'a fait que s'accroître et s'embellir. Il n'en faut pas plus que cela à M. Bertrand pour affirmer que « ces matières ont été éclairées et approfondies par tant de discus- « sions, qu'il n'y subsiste plus aucun nuage, et que tout aujourd'hui semble

« simple et rigoureux dans le début d'une science facilement accessible, et « que l'on ne songe plus à nommer transcendante. »

Dérivés et différentielles des fonctions simples.

La différentiation des fonctions les plus compliquées se ramène à celle d'un petit nombre d'autres, qu'on appelle fonctions simples et qui sont : x^n, $\log x$, a^x, $\sin x$, $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{séc} x$, $\cos x$, $\cot x$, $\operatorname{coséc} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arc\,tang} x$, $\operatorname{arc\,séc} x$, $\arccos x$, $\operatorname{arc\,cot} x$, $\operatorname{arc\,coséc} x$.

Nous allons déterminer la dérivée de chacune de ces fonctions, et pour plus de simplicité dans les calculs, je représenterai d'abord par h et k les accroissements qui dans la suite se remplaceront par dx et dy.

1° Soit $y = x^n$.

On a $$y + k = x^n + nhx^{n-1} + \frac{x(n-1)}{1.2} h^2 x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et, par suite, $$\frac{k}{h} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} h + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Leibnitzant, on a $\dfrac{dy}{dx} = nx^{n-1}$, ou $dy = nx^{n-1}dx$.

2° Soit $y = \log x$.

On aura $k = \log(x+h) - \log x = \log\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)$; et, en faisant $\dfrac{h}{x} = \alpha$,

on aura $\dfrac{k}{h} = \dfrac{\log(x+\alpha)}{\alpha x} = \dfrac{1}{x}\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Remplaçant $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ par sa limite représentée par e, et leibnitzant, on a $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}\log e$, et $dy = \dfrac{dx}{x}\log e$.

Lorsque le logarithme de x est pris dans le système népérien, on l'exprime par $1x$; on a, dans ce cas, $1x = 1$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$, et $dy = \dfrac{dx}{x}$.

Si les logarithmes des nombres sont calculés dans le système népérien, il suffit, pour les avoir dans le système vulgaire, de les multiplier par le module 0.4342945, qui est le logarithme de e dans le système décimal.

3° Soit $y = a^x$.

En prenant les logarithmes népériens des deux membres, on a $1y = x1a$, d'où $\dfrac{dy}{dx} = a^x 1a$, et $dy = a^x 1 a dx$.

Comme $\mathrm{l}e = 1$, il s'ensuit que si $y = \mathrm{l}x$, on a $\frac{dy}{dx} = \mathrm{l}x$, et $dy = \mathrm{l}x\,dx$.

On voit par là que la fonction $\mathrm{l}x$ et sa dérivée sont identiques.

4° Soit $y = \sin x$.

On a

$$k = \sin(x + h) - \sin x = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right);\ \text{d'où}\ \frac{k}{h} = \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Lorsque $h = 0$, le facteur $\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$ se réduit à $\cos x$, et $\mathcal{P}_0 \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$;

donc, en leibnitzant, on a $\frac{dy}{dx} = \cos x$, et $dy = \cos x dx$.

5° Soit $y = \cos x$.

On a $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, ou $y = \sin z$, en posant $z = \frac{\pi}{2} - x$, et $\frac{dy}{dz} = \cos z$, ou $\frac{dy}{dx} = -\sin x$, et $dy = -\sin x dx$.

6° Soit $y = \operatorname{tang} x$.

On a $\quad k = \operatorname{tang}(x + h) - \operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} h}{1 - \operatorname{tang} x \operatorname{tang} h} - \operatorname{tang} x$,

et par suite
$$\frac{k}{h} = \frac{\operatorname{tang} h}{h} \times \frac{1 + \operatorname{tang}^2 x}{1 - \operatorname{tang} x \operatorname{tang} h}.$$

Or, $\mathcal{P}_0 \frac{\operatorname{tang} h}{h} = 1$, et l'autre facteur se réduit à $1 + \operatorname{tang}^2 x = \operatorname{séc}^2 x$; donc, en leibnitzant, on a $\frac{dy}{dx} = \operatorname{séc}^2 x$, et $dy = \operatorname{séc}^2 x\, dx$.

7° Soit $y = \cot x$.

On a $y = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, ou $y = \operatorname{tang} z$, en posant $z = \frac{\pi}{2} - x$, d'où $dz = -dx$; il en résulte $\frac{dy}{dz} = \operatorname{séc}^2 z$, ou $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{coséc}^2 x$, et $dy = -\operatorname{coséc}^2 x\, dx$.

8° Soit $y = \operatorname{séc} x$.

On a $y = \frac{1}{\cos x}$, ou $y = z^{-1}$, en posant $z = \cos x$; d'où $dz = -\sin x\, dx$. Or $y = z^{-1}$ donne $dy = -z^{-2}\, dz = \operatorname{tang} x \operatorname{séc} x dx$, et $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} x \operatorname{séc} x$

9° Soit $y = \text{coséc}\, x$.

En posant $y = \text{séc}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, on en tire $\frac{dy}{dx} = -\cot x \,\text{coséc}\, x$; et $dy = -\cot x \,\text{coséc}\, x\, dx$.

10° Soit $y = \text{arc}\sin x$.

Cette relation signifie que :

$x = \sin y$, d'où $dx = \cos y\, dy$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, et $dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

En suivant la même marche on trouvera:

11° Pour $y = \text{arc}\cos x$, $dy = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$;

12° Pour $y = \text{arc}\,\text{tang}\, x$, $dy = \frac{dx}{1 + x^2}$;

13° Pour $y = \text{arc}\cot x$, $dy = -\frac{dx}{1 + x^2}$;

14° Pour $y = \text{arc}\,\text{séc}\, x$, $dy = \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$;

15° Pour $y = \text{arc}\,\text{coséc}\, x$, $dy = \frac{-dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

Dérivées et différentielles de différents ordres des fonctions d'une seule variable.

La dérivée et la différentielle d'une fonction d'une variable sont, en général, des fonctions de cette même variable. La dérivée et la différentielle de la dérivée et de la différentielle premières, s'appellent la dérivée et la différentielle secondes de la première fonction. De même la dérivée et la différentielle de la dérivée et de la différentielle secondes, s'appellent la dérivée et la différentielle troisièmes de la fonction primitive, et ainsi de suite.

NOTATIONS DE LEIBNITZ.

Soit $y = \sin x$.

On a $dy = \cos x dx$, et $\frac{dy}{dx} = \cos x$.

Si l'on donne encore à x l'accroissement dx, l'accroissement de dy est la différentielle seconde de y, et se désigne par d^2y. L'accroissement du facteur $-\cos x$ est $\sin x\, dx$, et, par conséquent celui de $\cos x\, dx$ est $-\sin x\, dx^2$.

On a donc $d^2y = -\sin x\, dx^2$, et $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x$. De même, la différentielle et la dérivée troisièmes de $y = \sin x$, s'écriront $d^3y = -\cos x\, dx^3$, et $\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x$.

NOTATIONS DE LAGRANGE.

Lagrange donne sa *Théorie des Fonctions analytiques* comme *contenant les Principes du Calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits et de limites, et réduits à l'Analyse algébrique des quantités finies.* Pour rectifier ce titre, il faudrait, comme dans la fameuse définition de l'écrevisse, y changer à peu près tout.

Par les infiniment petits, Lagrange entend les différentielles, et il les exclut de son ouvrage.

Dès qu'il n'y a plus de différentielles, il n'y a plus de calcul différentiel, ni de principes du calcul différentiel. Par sa méthode censée « réduite à l'analyse algébrique des quantités finies, Lagrange n'est parvenu, dit Auguste « Comte, que très-péniblement, à retrouver les résultats principaux déjà « obtenus par la méthode infinitésimale. »

Lagrange fonde ainsi sa méthode, non sur les différentielles, mais sur les dérivées, qu'il introduit d'une autre manière dans son analyse soi-disant purement algébrique. Les dérivées première, seconde, troisième, etc., de y ou de $F(x)$, sont désignées respectivement par y', y'', y''', $F'(x)$, $F''(x)$, $F'''(x)$, etc.

Ces notations, souvent commodes pour les développements en séries et d'autres spéculations générales, tombent en défaut dans les applications particulières ; ainsi la relation $\frac{dx^3}{dx} = 3x^2$ ne saurait s'écrire directement dans le système de Lagrange.

Dans la méthode de Lagrange, la fonction $F(x)$, dont la dérivée se désigne par $F'(x)$, s'appelle fonction primitive ; mais cette notation a le défaut de ne pouvoir exprimer par une équation la relation qui existe entre les deux fonctions.

Dans la méthode de Leibnitz, la fonction $F(x)$ s'appelle l'intégrale de la différentielle $F'(x)dx$, et la relation qui existe entre les deux s'indique par l'équation $\int F'(x)\,dx = F(x)$. Prise en sens contraire la même relation s'indique par l'équation $dF(x) = F'(x)dx$.

NOTATION NOUVELLE.

Le signe $\int$, tourné en sens inverse, exprimerait avec plus de symétrie la même relation prise en sens inverse. On écrirait ainsi $\rotatebox[origin=c]{180}{$\int$} F(x) = F'(x)dx$, comme on écrit $\int F'(x)dx = F(x)$. Au moyen de ce nouveau signe l'équation $\rotatebox[origin=c]{180}{$\int$}^2 \sin x = -\sin x\,dx^2$ exprimerait que la différentielle seconde de $\sin x$ est $-\sin x\,dx^2$.

D'après la notation ordinaire, dx^2 représente la différentielle de x^2 et aussi le carré de dx. D'après notre nouvelle notation, la différentielle de x^2 s'indiquerait par $\rotatebox[origin=c]{180}{$\int$} x^2$, et la confusion n'aurait plus lieu.

Principe fondamental du calcul différentiel.

Lagrange a cru devoir dégager sa méthode « de toute considération d'infi- « niment petits, » c'est-à-dire de différentielles, à cause de la difficulté que présente une équation telle que $dx^3 = 3x^2dx$, qui pour être exacte et complète, devrait être remplacée par $\rotatebox[origin=c]{180}{$\int$} x^3 = 3x^2dx + 3x\,dx^2 + dx^3$.

Il en résulte qu'en employant l'équation incomplète, la méthode infinitésimale n'apparaît plus que comme une méthode d'approximation. Ou bien il faut admettre que les différentielles sont de purs zéros, en sorte que l'équa- « tion ne deviendrait exacte qu'en disparaissant, » comme le dit Cauchy. Ou bien encore, il faut justifier l'équation inexacte par des sophismes, en prêtant aux infiniment petits des propriétés contradictoires, qui d'après Carnot et M. C. de Freycinet, donnent le droit, et imposent même le devoir de les négliger « pour rétablir la réalité des choses. » On peut voir un échantillon de ces sophismes dans le passage suivant de Carnot :

« Il est clair qu'on peut faire subir aux équations imparfaites diverses « transformations sans leur ôter le caractère d'équations imparfaites....... « Bien plus, on peut négliger les quantités infiniment petites relativement aux « quantités finies, et plus généralement les quantités accessoires vis-à-vis des « quantités principales, sans que ces équations perdent jamais pour cela leur « caractère primitif d'équations au moins imparfaites, et qui peuvent enfin « se trouver exactes par compensation d'erreurs.

« Mais ce qu'il est important de remarquer, c'est que ces erreurs accumu-

« lées, au lieu d'éloigner de plus en plus du but, qui est de ramener ces « équations imparfaites à l'exactitude absolue, comme il semble d'abord que « cela doit arriver, servent au contraire à y conduire par le chemin le plus « court et le plus simple, parce qu'en écartant ainsi successivement ces « accessoires incommodes, avec la seule attention de ne jamais dépouiller les « équations dont il s'agit de leur caractère principal, on parvient enfin à les « dégager absolument de toute considération de l'infini, par l'élimination « complète de tout ce qui s'y trouvait d'arbitraire. »

La vérité est que l'équation complète et l'équation incomplète conduiraient à des résultats différents, et que naturellement, ce serait l'équation complète qui donnerait le résultat exact. Mais les deux résultats différents coïncideront évidemment lorsque les accroissements représentés par les différentielles, seront supposés nuls. Or, comme c'est à cette hypothèse que se rapportent les résultats des questions résolues par la méthode infinitésimale, on comprend que l'équation incomplète conduira au résultat exact par des calculs généralement beaucoup plus simples.

Par exemple, l'équation complète conduira exactement à la sécante menée par deux points donnés sur la courbe $y=x^3$, tandis que l'équation incomplète n'y conduira qu'approximativement : Mais lorsque les deux points coïncideront, les deux résultats coïncideront aussi, et l'équation incomplète y aura conduit plus simplement et plus directement. Or, la détermination de la sécante appartient à la géométrie analytique, et l'analyse infinitésimale n'intervient que pour la tangente, c'est-à-dire pour le cas où il est exact et plus court d'employer l'équation incomplète.

Voilà la vraie explication logique de la grande difficulté ; la voilà dégagée de toute espèce de paradoxes et de sophismes, de toute espèce d'erreurs et de compensation d'erreurs, la voilà « dégagée de toute considération d'infini-« ment petits et de limites, » puisque les différentielles y sont traitées comme des variables pures et simples, auxquelles on peut donner la valeur zéro comme toute autre ; la voilà purgée de toutes les propriétés équivoques et contradictoires qu'on prête aux infiniment petits, dont on fait « des espèces « d'êtres singuliers, qui tiennent le milieu entre la grandeur et le zéro, entre « l'existence et le néant. »

Dérivée et différentielle d'un Produit.

Soit $y=uv$ le produit de deux fonctions de x. En désignant par α l'accroissement de x, par β celui de y, par h et k ceux des facteurs u et v, lorsqu'on donnera à x l'accroissement α, le produit uv deviendra $uv+vh+uk+hk$, et son accroissement sera $\beta=uk+vh+hk$.

En divisant par α, on a $\frac{\beta}{\alpha} = u\frac{k}{\alpha} + (v+k)\frac{h}{\alpha}$, et cette équation leibnitzée devient $\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$, qu'on écrit aussi $y' = uv' + vu'$, d'après la notation de Lagrange.

Il en résulte la règle suivante :

La dérivée du produit de deux facteurs, s'obtient en multipliant chacun d'eux par la dérivée de l'autre, et ajoutant les produits.

Cette règle s'étend facilement au produit d'un nombre quelconque de facteurs.

Par exemple, si $y = uvz$, on aura :

$$\frac{dy}{dx} = uv\frac{dz}{dx} + uz\frac{dv}{dx} + vz\frac{du}{dx}, \text{ ou } y' = uvz' + uzv' + vzu'.$$

On peut aussi chasser le dénominateur, et l'on obtient l'équation $duvz = uvdz + uzdv + vzdu$, qui serait mieux réprésentée par $\partial uvz = uvdz + uzdv + vzdu$.

Dérivée et différentielle d'un Quotient.

Soit $y = \frac{u}{v}$, u et v étant des fonctions de x.

On en déduit $u = vy$, et $du = vdy + ydv$, ou $vdu = v^2dy + udv$, ou enfin $dy = \frac{vdu - udv}{v^2}$. En divisant les deux membres par dx, il vient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}, \text{ qui peut aussi s'écrire } y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

En multipliant les deux membres par dx, on a $d\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}$, qui se représenterait mieux par $\partial\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

Différentiation des Fonctions de Fonctions.

Soient u, y, z, x des variables dont chacune des trois premières soit fonction de la suivante.

Duhamel dit : « On a identiquement

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

C'est évident, ou du moins, cela paraît évident ; cependant, d'après la définition que Duhamel donne des différentielles, les deux du, comme les deux dy, ou les deux dz, qui se trouvent dans cette égalité, n'ont pas la même signification, et ainsi pour Duhamel ce n'est plus une identité.

« On a trouvé commode, » dit-il, « de représenter les limites des rapports « par des rapports exacts, et on a donné le nom de différentielles des variables « à des quantités ayant entre elles des rapports égaux aux limites des rapports « des accroissements ou différences de ces variables. Les différentielles ne « sont donc pas entièrement déterminées ; on peut prendre l'une d'elles « arbitrairement : leurs rapports seuls sont déterminés. »

Représenter les limites des rapports par des rapports exacts, qu'est-ce que cela veut bien dire ? Par exemple, si la limite du rapport est $\frac{3}{4}$, quel sera le rapport exact qui la représentera ?

Différentielles des Fonctions implicites.

Les règles données jusqu'ici pour obtenir la différentielle d'une fonction, supposaient que cette fonction était connue explicitement, c'est-à-dire que l'équation était résolue par rapport à cette fonction. Supposons maintenant que y soit une fonction implicite de x, c'est-à-dire que l'équation ne soit plus résolue par rapport à y.

Soit, par exemple, l'équation

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0.$$

En différentiant tous les termes d'après les règles données plus haut, on obtient

$$2aydy+bxdy+bydx+2cxdx+ddy+edx=0,$$

d'où l'on tire :

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{by+2cx+e}{2ay+bx+d}.$$

Si l'on désigne par $F(x, y)$ le premier membre de l'équation proposée, le numérateur de la fraction précédente peut s'écrire $\frac{dF}{dx}$, et le dénominateur $\frac{dF}{dy}$;

ce qui donne

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}, \text{ ou } \frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = 0.$$

La dérivée de la fonction implicite se trouve ainsi exprimée au moyen de y et x ; on l'aura au moyen de x seulement quand on pourra résoudre, par rapport à y, l'équation proposée.

Si l'on avait m variables, $x, y, z\ldots\ldots$, liées par $m-1$ équations, $F(x, y, z, \ldots\ldots) = 0$, $f(x, y, z\ldots\ldots) = 0$, etc. ; en différentiant ces équations, on obtiendrait les suivantes :

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

....

De ces $m-1$ équations du premier degré par rapport à dx, dy, dz, etc., on pourra tirer les valeurs de dy, dz, etc., en fonction de dx et des variables x, y, z, etc.

Différentielles partielles et différentielles totales des fonctions de plusieurs variables indépendantes.

Soit u une fonction des trois variables indépendantes x, y, z.

On pourra prendre la différentielle de u par rapport à chacune des trois variables indépendantes, et la différentielle totale de u sera la somme des trois différentielles partielles; ce qu'on indique en écrivant :

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz.$$

On ne pourrait pas supprimer les facteurs communs, et écrire $du = du + du + du$, parce que tous les du de cette équation ont, chacun, une signification particulière, ce qui constitue un défaut réel de la notation ordinaire.

Au moyen de notre nouvelle notation, la même équation s'écrirait

$$\partial_{x,y,z} u = \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u,$$

et ne donnerait plus lieu à aucune équivoque.

Applications Analytiques du Calcul différentiel.

Vraie valeur ou valeur principale des fonctions indéterminées.

La recherche de ce qu'on appelle la vraie valeur des fonctions qui se présentent sous une forme indéterminée, est ordinairement donnée comme une application importante du calcul différentiel, et Duhamel l'a placée en tête de toutes les autres.

Plusieurs auteurs traitent déjà cette question en Algèbre, et M. Bertrand y avait consacré un chapitre tout entier. Dans ma *Théorie des Convergents* j'ai montré le défaut et l'insuffisance de cette méthode algébrique, et M. Bertrand, tout le premier, a compris qu'elle devait être abandonnée, puisque dans l'*Avertissement* de l'édition suivante de son *Traité d'Algèbre*, on lit:

« Le chapitre sur les expressions qui se présentent sous une forme indé-
« terminée a été rayé. Nous avons pensé qu'il valait mieux ne s'occuper de
« ces sortes de questions qu'après avoir étudié les propriétés des dérivées. »

Malheureusement la méthode fondée sur les propriétés des dérivées, a les mêmes défauts d'exactitude et de généralité que la méthode algébrique, et M. Bertrand aurait autant de raison de la rayer de son *Traité de Calcul différentiel*, que l'autre de son *Traité d'Algèbre*.

La méthode fondée sur les dérivées consiste à remplacer la fraction qui se réduit à $\frac{0}{0}$ ou a $\frac{\infty}{\infty}$, par le rapport des dérivées de ses deux termes, en se fondant sur une propriété représentée par la formule $\frac{F(x)}{\varphi(x)} = \frac{F'(x)}{\varphi'(x)}$, dont on croit démontrer l'exactitude pour tous les cas où la fraction $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ se réduit à $\frac{0}{0}$ ou à $\frac{\infty}{\infty}$. On entend ainsi que pour la valeur de x qui réduit la fraction $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ à une forme indéterminée, cette fraction prend la même valeur que $\frac{F'(x)}{\varphi'(x)}$; mais que cette valeur, qui reste voilée dans $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$, se montre à découvert dans la fraction $\frac{F'(x)}{\varphi'(x)}$.

La découverte de la propriété représentée par la formule $\frac{F(a)}{\varphi(a)} = \frac{F'(a)}{\varphi'(a)}$ est attribuée au Marquis de l'Hôpital pour le cas où la fraction se réduit $\frac{0}{0}$.

Le cas où la fraction devient $\frac{\infty}{\infty}$ se ramène au premier, au moyen d'une démonstration que M. Liouville appelle « l'élégante extension que Cauchy a su donner au théorème de l'Hôpital. » Or, la règle générale de l'Hôpital et surtout l'élégante extension que Cauchy a su y donner, comme les règles particulières qu'on en a déduites, sont fondées sur un principe défectueux, et, par conséquent, l'exactitude ou la rigueur qu'on a cru apporter dans la démonstration de ces règles est purement illusoire.

J'ai publié la *Théorie des Convergents*, et une nouvelle *Théorie des Fonctions qui se présentent sous une forme indéterminée*, dans le double but de montrer les défauts des règles ordinaires, et de suppléer à leur insuffisance par des règles plus exactes et plus générales.

Les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de 1865 contiennent un article dans lequel les rédacteurs se sont proposé de réfuter mes objections, et de montrer, selon l'expression de M. Gérono, l'erreur de mes principes fondamentaux. MM. Prouhet, Gérono et Bourget ont pris part à la polémique : tous les trois ont donné tour à tour. M. Prouhet me dit : « Vous faites des calculs « sur l'infini, et cela n'a de sens pour personne. » En effet, dans une question où l'on calcule la limite d'une fonction pour $x = \infty$, je dis que l'expression $\frac{a-a'}{2}x + \frac{b-b'}{2} - \frac{a-a'}{2}x$ se réduit à $\frac{b-b'}{2}$, parce que le premier et le dernier terme, égaux et de signes contraires, se détruisent nécessairement.

M. Gérono répond que « les deux termes ne se détruisent pas, générale- « ment du moins, parce qu'ils ne proviennent que de l'hypothèse $x = \infty$. » Pour le mieux prouver, il prend un exemple dans lequel, même les deux termes x, $-x$ ne se détruisent pas, en sorte que $x - x$ n'égale pas zéro.

« Prenons, » dit-il, « pour exemple, l'expression $x - \frac{x}{1+\frac{1}{x}}$. L'hypo- « thèse $x = \infty$ réduit cette expression à $x - x$. »

La limite de $x - \frac{x}{1+\frac{1}{x}}$ est égale à 1 ; tandis que l'hypothèse $\frac{1}{x} = 0$ la réduit à $x - x$; et comme $x - x = 0$ évidemment, il s'ensuit que cette hypothèse est fausse.

D'une part, M. Gérono dit que « l'hypothèse $x = \infty$ réduit l'expression « $x - \frac{x}{1+\frac{1}{x}}$ à $x - x$; » d'autre part il dit que puisqu' « on a évidemment

« $x - \dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$, » on voit que « pour $x=\infty$, $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}} = 1$. »

Comme l'hypothèse $\dfrac{1}{x}=0$ réduit la même expression $x - \dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x}}$ à $x-x$, et aussi à 1, il faut bien que l'égalité $\dfrac{1}{x}=0$, soit fausse, ou que $x-x=1$. Or M. Gérono entend que pour $x=\infty$, l'égalité $\dfrac{1}{x}=0$ est exacte. Donc, dit-il « les deux termes ne se détruisent pas ; » or, si l'on a $x-x=1$, on n'a pas $x-x=0$, « et, par conséquent, » ajoute-il, « la réduction « des deux termes $x,-x$ conduit à l'égalité $1=0$. » C'est ce qu'on peut lire à la page 90 des *Nouvelles Annales* de 1865.

De son côté, M. Bourget m'a écrit : « M. Gérono a raison ; je partage son « avis et vous crois dans un système d'idées tout à fait faux. La démonstra- « tion que vous attaquez est à l'abri de toute objection. »

Le fait est qu'il n'a été tenu aucun compte de mes objections dans les Traités qui ont été publiés depuis cette époque, par MM. Bertrand, Serret et Hermite, les trois plus fortes têtes de l'Académie des sciences.

Pourtant M. Bour, non moins fort qu'eux, sans avoir pu être académicien, m'avait écrit à ce sujet : « Vos observations sont parfaitement justes, et votre « manière de comprendre les limites est la seule exacte. Il y a donc lieu de « rectifier certaines démonstrations, et la publication d'une note de votre « part serait intéressante. »

Enfin, l'an dernier, M. Rouquet, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Marseille, a publié à la page 113 des Nouvelles Annales de 1877, une note dans laquelle il dit : « Il n'est pas difficile, avec un peu d'attention, « de reconnaître que la démonstration ordinaire est loin d'être irrépro- chable. »

D'après cette assertion de M. Rouquet, « la démonstration ordinaire est loin « d'être irréprochable. » C'est aussi l'opinion que j'ai formulée et justifiée, d'abord en 1865 dans ma *Théorie des Convergents*; ensuite dans ma *Théorie des Fonctions qui se présentent sous une forme indéterminée*, et enfin dans ma *Nouvelle Théorie des Logarithmes*. Mais en quoi consiste le défaut ? est-il facile à voir ? Je ne suis pas du tout de l'avis de l'auteur qui dit que cela « n'est pas difficile avec un peu d'attention. » Je pense, au contraire, et j'ai pu constater qu'il est très-difficile, même aux plus forts géomètres, non-seulement de découvrir eux-mêmes le défaut de la démonstration, mais de l'apercevoir quand on leur met le doigt dessus.

D'abord, comme le dit Condillac, « les hommes sont trop peu capables de « raisonner contre ce qu'ils croient; » or, les géomètres croient tous que pour $x = \infty$, on a $\frac{1}{x} = 0$. Ils disent tous que si la fraction $\frac{u}{v}$ se réduit à $\frac{\infty}{\infty}$, la fraction $\frac{\left(\frac{1}{v}\right)}{\left(\frac{1}{u}\right)}$ se réduit à $\frac{0}{0}$, en supposant ainsi que, pour $u = \infty$ et $v = \infty$, on a $\frac{1}{u} = 0$ et $\frac{1}{v} = 0$.

En second lieu, « on aime mieux avancer et soutenir les plus grossières « absurdités que d'avouer son erreur. » C'est Euler qui l'écrit à une princesse d'Allemagne, et il a soin d'ajouter : « Votre Altesse remarquera que c'est là « le caractère de la plupart des savants. » N'avons-nous pas vu MM. les rédacteurs des *Nouvelles Annales*, avancer et soutenir que $x - x = 1$, plutôt que de reconnaître qu'en supposant que $\frac{1}{x}$ peut devenir zéro, on fait une erreur, qui, quoique très-petite en elle-même, conduit pourtant, dans leur exemple, à l'absurdité $1 = 0$.

La preuve qu'il n'était pas facile « avec un peu d'attention » d'apercevoir le défaut de la démonstration ordinaire, qui est celle que M. Liouville appelle « l'extension élégante que Cauchy a su donner au théorème de l'Hôpital, » c'est qu'un exemple s'étant montré réfractaire à la règle générale, les plus forts géomètres, tels que Bertrand, Liouville, Duhamel, Blanchet, amenés à vérifier la démonstration avec la *plus grande attention*, après l'avoir fouillée dans tous ses coins et recoins, et avoir examiné un à un tous les cas particuliers qui peuvent se présenter, ont déclaré cette démonstration irréprochable, et la propriété absolument générale.

Cela prouve bien que la question est encore à l'ordre du jour, et mérite d'être traitée à fond. Nous commencerons par le théorème de l'Hôpital. En voici l'énoncé :

Si une valeur $x = a$ réduit la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ à $\frac{0}{0}$, on a $\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f'(a)}{F'(a)}$.

Pour le démontrer, Lagrange ayant posé $y = \frac{f(x)}{F(x)}$, d'où $y F(x) = f(x)$, dit : « prenant l'équation prime, on a $y' F(x) + y F'(x) = f'(x)$.

« La supposition de $x = a$ fait disparaître le terme $y' F(x)$, et le reste de « l'équation donne $y = \frac{f'(x)}{F'(x)}$. »

Cette démonstration est si simple et si précise que je ne comprends pas pourquoi les géomètres ont cherché et ont cru trouver mieux. C'est ainsi que Sturm dit :

« Soit $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ une fraction qui se réduit à $\frac{0}{0}$ pour $x=a$.

« Puisque $\varphi(a)=0$ et $f(a)=0$, on a identiquement $\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{f(x)-f(a)}$,

« ou bien $\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$; or, x tendant vers la valeur a, $\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-x}$,

« $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, tendent respectivement, et par définition même, vers

« $\varphi'(a)$ et $f'(a)$. Donc $\lim\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{\varphi'(a)}{f'(a)}$, ou $\lim\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\lim\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}$. »

Duhamel, s'appuyant sur une formule de Cauchy, dit :

« Cherchons la limite de $\frac{F(x)}{f(x)}$ lorsque x tend vers une valeur x_0, telle que

« l'on ait $F(x_0)=0$, $f(x_0)=0$. Soit h une quantité tendant vers zéro,
« on aura

« $\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)}=\frac{F'(x_0+\theta h)}{f'(x_0+\theta h)}$, d'où $\lim\frac{F(x)}{f(x)}=\lim\frac{F'(x)}{f'(x)}$. »

Depuis Duhamel, la démonstration ne se fait plus sans θ, comme on peut le voir dans le *Traité de Calcul différentiel* de M. Bertrand, et le *Cours d'Analyse* de M. Hermite.

Aucun géomètre jusqu'ici n'a contesté l'exactitude ni de la proposition, ni de sa démonstration, donnée avec ou sans θ; car le reproche de M. Rouquet ne s'adresse qu'aux « expressions de la forme $\frac{\infty}{\infty}$. »

Ma critique s'étendra beaucoup plus loin ; car j'ai la prétention de prouver qu'aucune des démonstrations données n'est irréprochable.

Pour prouver d'abord que la formule $\lim\frac{F(x)}{f(x)}=\lim\frac{F'(x)}{f'(x)}$ n'est pas démontrée pour le cas où la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ se réduit à $\frac{0}{0}$, il me suffira de remarquer que cette formule appliquée à l'exemple $\frac{x}{x^2}$, qui se réduit à $\frac{0}{0}$ pour $x=0$, donne $\lim\frac{x}{x^2}=\lim\frac{1}{2x}$, c'est-à-dire $\lim\frac{1}{x}=\lim\frac{1}{2x}$. Or, la première fraction est toujours double de la seconde, et leur différence, représentée par $\frac{1}{2x}$, est infinie quand x est infiniment petit. Il arrive donc ici qu'on démontre que deux fractions qui ont une différence infinie, sont égales; tandis qu'il est nécessaire que leur différence tende vers zéro pour qu'elles aient la même limite; et, au dire de M. Bour, *cette manière de comprendre les limites est la seule exacte.* Comment se fait-il donc qu'on démontre l'égalité de deux fractions dont la différence et le rapport sont infinis ? La conclusion est facile à tirer : C'est que la démonstration est mauvaise, comme je vais le prouver directement sur l'exemple $\frac{x^2}{x^3}$, qui se réduit à $\frac{0}{0}$ pour $x = 0$.

On a identiquement $\frac{(x+h)^2 - x^2}{(x+h)^3 - x^3} = \frac{2x+h}{3x^2+3xh+h^2}$, qui se réduit à $\frac{h^2}{h^3} = \frac{h}{h^2}$, pour $x = 0$, ou à l'identité $\frac{1}{h} = \frac{1}{h}$, comme cela doit être. Or, dans la démonstration, l'on néglige justement les termes les plus importants du second membre, pour ne conserver que $\frac{2x}{3x^2}$, qui est le rapport des dérivées, et l'on arrive ainsi à l'égalité absurde $\frac{x^2}{x^3} = \frac{2x}{3x^2}$, ou $\frac{1}{x} = \frac{2}{3x}$, dont les deux membres vont toujours en divergeant quand on prétend qu'ils convergent vers la même limite.

Comment se fait-il que, la démonstration étant fausse, la règle qui en découle s'applique pourtant exactement à tant d'exemples? C'est comme si l'on demandait comment il se fait que les pompes marchaient si bien au temps où leur explication était fondée sur l'horreur du vide.

Lorsque la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ prend une valeur finie, les deux termes dont dépend cette valeur sont du même degré, et il arrive ainsi que le rapport des dérivées donne la valeur exacte de la fraction, malgré le défaut de la démonstration. Par exemple, on a identiquement

$\frac{4(x+h)^2 - 4x^2}{3(x+h)^2 - 3x^2} = \frac{8x+4h}{6x+3h}$, et pour $x = 0$, le second membre se réduit à $\frac{4h}{3h} = \frac{4}{3}$, qui égale aussi le rapport $\frac{8x}{6x}$ des dérivées.

J'ai dit que nos plus forts géomètres ayant examiné avec la plus grande attention la démonstration dans tous ses détails, ont reconnu que la propriété ou la règle subsiste dans tous les cas particuliers qui peuvent se présenter. J'ajoute ici qu'ils ont même démontré qu'elle s'applique aux cas qui ne peuvent pas se présenter.

C'est comme si l'on prenait la précaution de démontrer qu'un trapèze est toujours inscriptible, même quand il a cinq côtés.

Ainsi, M. Bertrand démontre que « la règle ne subit aucun changement, » lorsque c'est une valeur infinie de x qui réduit la fraction à $\frac{0}{0}$; mais il donne pour ce cas une démonstration particulière, « parce que, » dit-il, x « étant infini, ne peut figurer dans les calculs comme une quantité déter- « minée, » et, pour que la variable x ne figure pas dans les calculs comme une quantité déterminée, il en fait figurer une autre. C'est le moyen très-simple qu'il donne en disant : « Pour éviter cette difficulté il suffit de chan- « ger la variable. »

Donc M. Bertrand change la variable, et après lui, MM Serret et Hermite changent la variable, comme M. Bertrand l'a changée après Sturm et Duhamel.

En remplaçant ainsi, et reprenant ensuite la variable x, ils démontrent tous que la formule $\lim \frac{F(x)}{f(x)} = \lim \frac{F'(x)}{f'(x)}$ est toujours exacte pour le cas examiné, qui ne peut jamais se présenter.

Ils se copient tous pour la démonstration ; mais pour les exemples chacun attend qu'un autre les fournisse le premier.

Gauss avait dit : « Si l'homme, être fini, ne s'aventure pas à vouloir traiter « quelque chose d'infini comme un objet donné et susceptible d'être em- « brassé par les forces de compréhension, etc. »

En disant : « x étant infini ne peut pas figurer dans les calculs comme « une quantité déterminée, » M. Bertrand a-t-il voulu traduire le passage de Gauss ? Le fait est que ce texte avait besoin de traduction.

Nous avons vu que de peur que « x étant infini ne figure dans les calculs « comme une quantité déterminée, » M. Gérono affirme que $x - x$ n'égale pas zéro, que les deux termes ne se détruisent pas.

Je soutiens, au contraire, que si une quantité dite infinie, est représentée par une variable, il faut opérer sur elle de la même manière que sur une quantité finie et déterminée, et jamais autrement.

Par exemple, si vous avez l'équation $A = A^2 \lim \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}$, vous pouvez supposer A infini, et, après comme avant, vous supprimez le facteur A, ce qui vous donnera $A = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$.

Cette opinion n'est pas celle que M. Bertrand exprime en ces termes, à la page 475 de son *Traité de Calcul différentiel :* « Lorsque la quantité dési- « gnée par A est nulle ou infinie, il n'est pas permis dans ce cas de suppri- « mer le facteur commun aux deux membres de l'équation. »

Naturellement les traités les plus complets, tels que ceux de MM. Sturm, Serret, Hermite, répètent la même chose.

Dans le cas où c'est une valeur finie de x qui rend les deux fonctions infinies, c'est le quotient de deux infinis absolus que l'on prétend trouver, et la question est absurde.

C'est une pareille question que Lagrange résout à la fin du chapitre V de sa *Théorie des Fonctions analytiques*, en se proposant de trouver le rapport des « quantités $\frac{1}{2\sqrt{x-a}}$ et $\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$, qui deviennent infinies lorsque « $x=a$. »

Lorsque $x=a$, les deux quantités deviennent $\frac{1}{0}$ et $\frac{a}{0}$, ou plutôt, c'est parce qu'une quantité ne peut pas devenir $\frac{1}{0}$ ou $\frac{a}{0}$, qu'on ne peut pas faire $x=a$ dans une fraction telle que $\frac{1}{x-a}$.

Si vous faites ce premier faux pas, vous vous jetez dans « un labyrinthe de « paradoxes tous plus bizarres les uns que les autres, » comme dirait Carnot.

Si vous avez besoin de résoudre la question, vous devez savoir au juste ce que vous demandez. Est-ce la limite ou la vraie valeur du rapport ? Vous dites : n'importe, parce que vous n'avez pas encore pensé à distinguer. Dès que vous faites $x=a$, il n'y a point de limite, et, les deux quantités devenant $\frac{1}{0}$ et $\frac{a}{0}$, il est absurde d'en vouloir calculer le rapport.

Lagrange multiplie les deux quantités $\frac{1}{2\sqrt{x-a}}$ et $\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$ par $2\sqrt{x-a}$, après quoi l'on voit que leur rapport est représenté par $\frac{2x}{\sqrt{x+a}}$.

Il est bien exact de dire que $\frac{2x}{\sqrt{x+a}}$ se réduit à $\frac{2a}{\sqrt{2a}}$ pour $x=a$; mais le calcul qui conduit à $\frac{2x}{\sqrt{x+a}}$ est absurde, dans l'hypothèse $x=a$; car, les quantités devenant $\frac{1}{0}$ et $\frac{a}{0}$, il est absurde de les multiplier par quoi que ce soit. Pour dire que $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ est la limite dont le rapport des deux quantités $\frac{1}{2\sqrt{x-a}}$ et $\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$ approche indéfiniment sans pouvoir l'atteindre, il faut admettre qu'on ne peut pas y faire $x=a$; alors nous commencerons à être d'accord.

En second lieu, quand c'est une valeur infinie de x qui rend les deux fonctions infinies, ce n'est pas la vraie valeur, mais la limite ou le convergent de leur rapport qui est à trouver, et les dérivées n'ont rien à voir ni à faire dans cette question.

Et les beaux théorèmes de Cauchy, qu'en faites-vous? Nous allons en parler.

Si la fraction $\frac{u}{v}$ se réduit à $\frac{\infty}{\infty}$, Cauchy divise les termes par uv ; et obtient ainsi la fraction $\frac{\left(\frac{1}{v}\right)}{\left(\frac{1}{u}\right)}$, qui se réduit à $\frac{0}{0}$, en même temps que $\frac{u}{v}$ à $\frac{\infty}{\infty}$.

En appliquant à la fraction ainsi transformée, la formule

$$\lim\frac{F(x)}{f(x)}=\lim\frac{F'(x)}{f'(x)},$$

il démontre que la formule s'applique aussi bien à la fraction primitive.

Il va sans dire que tous les auteurs qui sont venus après Cauchy, ont adopté et reproduit la même démonstration. Je voudrais d'abord demander pourquoi u et v étant infinis, on les fait « figurer dans les calculs comme « des quantités déterminées » après qu'on a déclaré qu' « on n'en a pas le « droit, » que « cela n'a de sens pour personne. »

Si u et v sont des infinis absolus, ils ne doivent figurer d'aucune manière dans les calculs ; il est absurde de les multiplier l'un par l'autre, et de diviser par leur produit uv, les deux termes de la fraction $\frac{u}{v}$, qu'on réduit ainsi à

$$\frac{\left(\frac{1}{v}\right)}{\left(\frac{1}{u}\right)}.$$

Au contraire, si u et v sont des infinis relatifs, ils doivent figurer dans les calculs absolument comme des quantités déterminées, et jamais autrement. On divisera donc par uv les deux termes de la fraction $\frac{u}{v}$, qui deviendra identiquement $\frac{\left(\frac{1}{v}\right)}{\left(\frac{1}{u}\right)}$. Mais il sera absurde de dire que $\frac{1}{u} = 0$, et $\frac{1}{v} = 0$, parce que, pour des valeurs déterminées de u et v, on n'a jamais

$$\frac{1}{u} = 0, \ \frac{1}{v} = 0.$$

Je sais bien que vous ne faites pas la distinction des deux espèces d'infinis, et qu'au moyen de leur confusion les démonstrations vous sont plus faciles. C'est ainsi que vous démontrez l'entière généralité de la formule

$$\lim \frac{F(x)}{f(x)} = \lim \frac{F'(x)}{f'(x)},$$ qui appliquée à l'exemple $\frac{e^x}{x}$,

vous donne $\lim \frac{e^x}{x} = \lim \frac{e^x}{1}$, par laquelle vous m'apprenez que deux quantités qui divergent infiniment, convergent vers une même limite, en sorte qu'à force de s'éloigner, elles finissent par se rencontrer.

Suivons donc votre démonstration sur cet exemple, que vous mettez d'abord sous la forme $\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{e^x}}$, après quoi vous dites que pour $x = \infty$, $\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{e^{x+h}} - \frac{1}{e^x}}$ se réduit à $\frac{\left(\frac{1}{x+h}\right)}{\left(\frac{1}{e^{x+h}}\right)}$, puisque $\frac{1}{x} = 0$ et $\frac{1}{e^x} = 0$. De cette manière vous négligez les infiniment petits $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{e^x}$ devant $\frac{1}{x+h}$, $\frac{1}{e^{x+h}}$, qui sont plus petits même que ceux que vous négligez.

Voilà comment vous trouvez $\frac{e^x}{x} = \frac{e^x}{1}$, quoique le rapport de la seconde fraction à la première, et leur différence deviennent évidemment infinis avec x.

M. Liouville avait bien rencontré un exemple qui met en défaut la règle de Cauchy. « Ainsi, » dit-il, « pour $x = \infty$, la vraie valeur de $\frac{x - \cos x}{x + \sin x}$

« est l'unité, tandis que la fraction $\frac{1+\sin x}{1+\cos x}$, qui résulte du rapport des « dérivées des deux termes est tout à fait indéterminée. »

A la place de M. Liouville j'aurais conclu, de ce seul exemple, que la règle de Cauchy est inexacte, et sa démonstration mauvaise. Mais ces Messieurs sont animés des meilleurs sentiments les uns envers les autres, et M. Liouville s'exprime ainsi : « Ces règles n'en ont pas moins une utilité « incontestable : aussi les géomètres ont-ils apprécié depuis longtemps « l'extension élégante que M. Cauchy a su donner au théorème de l'Hôpital. »

L'exemple récalcitrant prouve plutôt l'inutilité que l'utilité de la règle. En effet, puisqu'on voit immédiatement que la limite de la fraction $\frac{x-\cos x}{x+\sin x}$ est l'unité, il est bien inutile de prendre la peine de calculer les dérivées des deux termes de la fraction, pour aller ensuite chercher, dans leur rapport, une limite qui ne s'y trouve pas. Aussi, rien de plus curieux que le conseil que M. Liouville a donné à ce sujet, et qu'on n'a pas manqué de reproduire. « Il faut, » dit-il, « user de ces règles avec réserve, et s'assurer dans chacun « des exemples auxquels on les applique que l'usage en est légitime. »

C'est comme celui qui ayant démontré que tout quadrilatère est inscriptible, ajouterait : « Il faut user de cette propriété avec réserve et s'assurer « dans chacun des exemples auxquels on l'applique, que le cercle mené par trois sommets du quadrilatère, passe bien par le quatrième.

Le conseil est vraiment comique, puisqu'il revient à dire : « lorsque le « calcul de la valeur d'une fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$, qui se réduit à $\frac{\infty}{\infty}$ vous embar- « rasse, calculez la valeur de la fraction $\frac{F'(x)}{f'(x)}$, car nous avons démontré que « ces deux valeurs sont toujours égales. Cependant, comme il y a des exemples « qui résistent à cette règle, malgré tout le soin que nous avons pris d'en dé- « montrer l'entière généralité, je vous conseille de calculer d'abord, dans cha- « que exemple, les valeurs des deux fractions, afin de vous assurer que vous « pouvez vous dispenser de calculer la première. »

En 1841, M. Bertrand, alors élève de l'Ecole polytechnique, s'étant aperçu que « l'infini ne peut figurer dans le calcul comme une quantité déter- « minée, » pensa que la démonstration de Cauchy, qui n'avait pas prévu ce cas, avait besoin d'un complément, qu'il publia à la page 14 du tome VI du *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, M. Blanchet crut y voir un défaut, et ce fut pour lui une occasion d'encenser un peu l'auteur en écrivant au rédacteur du journal : « Dans le dernier cahier du *Journal de* « *Mathématiques*, vous avez inséré une note de M. Bertrand. Ce jeune « géomètre, qui donne à la science de si brillantes espérances, y a complété « une démonstration ingénieuse de M. Cauchy ; mais il a, je crois, employé « une espèce de continuité vers l'infini, que peut-être il vaudrait mieux « éviter. »

J'ai montré au juste ce que valent le théorème de l'Hôpital, l'extension élégante que Cauchy a su donner à ce théoréme, et le complément que M. Bertrand a su ajouter à la dite extension.

On croit les démonstrations si bonnes et si générales, que tous les auteurs concluent, comme Duhamel, que « dans tous les cas, la recherche de la « vraie valeur de $\frac{F(x)}{f(x)}$ se ramène à celle de $\frac{F'(x)}{f'(x)}$. »

Elle s'y ramène si bien que M. Bertrand voulant traiter des exemples de son choix, par les règles dont il croit avoir donné une démonstration très-générale, s'aperçoit que les règles ne s'y appliquent pas. Naturellement il aime mieux lâcher les règles que ses exemples, dont il connaît à peu près d'avance les solutions. C'est ce qu'il annonce en ces termes :

« Il nous reste à donner quelques exemples du calcul de la véritable « valeur d'une fonction, en les choisissant de manière à montrer comment « dans un grand nombre de cas il est avantageux de substituer aux métho- « des générales, des artifices suggérés par l'habitude du calcul. »

Si, pour apprendre les régles d'un art quelconque, vous vous adressez à un professeur qui vous répond : Les règles sont inutiles pour quiconque a l'habitude de l'art, vous lui demanderez s'il faut commencer par l'habitude ou par les règles.

Je reproduirai ici le premier des exemples traités dans le *Calcul différentiel* de M. Bertrand, afin de dévoiler, mieux qu'il ne le fait, l'artifice employé.

A la page 305 de son *Traité de Calcul différentiel*, M. Bertrand a établi la formule

$$x \cot x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On en tire $$\frac{1}{x} - \cot x = \frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le second membre devient zéro pour $x = 0$. Cependant il serait absurde de dire que le premier le devient aussi, parce que $\frac{1}{0}$ est l'infini absolu, et $\cot 0$ aussi ; par conséquent, toute comparaison entre les deux est absurde ;

mais on peut dire que la différence $\frac{1}{x} - \cot x$ tend vers zéro en même temps que x.

On voit qu'il était très-facile à M. Bertrand de tirer ce résultat du développement de $x\cot x$, et de donner cette question à résoudre par les règles générales; et, si les règles s'y refusent, d'y suppléer par des artifices de calcul, qui ne peuvent guère manquer d'aboutir, quand le résultat est connu d'avance.

Un petit artifice à ajouter au premier, consiste à masquer un peu l'origine de la question, en remplaçant $\frac{1}{x} - \cot x$ par $\frac{2}{x} - \cot\frac{1}{2}x$.

Voici donc comment M. Bertrand pose et résout cette question à la page 476 de son *Traité de Calcul différentiel :*

« Déterminer la valeur de $\frac{2}{x} - \cot\frac{1}{2}x$ pour $x = 0$.

« On a
$$\frac{2}{x} - \cot\frac{1}{2}x = \frac{2 - x\cot\frac{1}{2}x}{x}.$$

« Or, $x\cot\frac{1}{2}x = \dfrac{x}{\tan\frac{1}{2}x}$, qui, pour $x = 0$, a évidemment pour limite 2.

« La fonction prend donc la forme $\frac{0}{0}$; le rapport des dérivées est

$$«\ \frac{-\cot\frac{1}{2}x + \dfrac{\frac{1}{2}x}{\sin^2\frac{1}{2}x}}{1}.$$

« Le dénominateur ayant une valeur finie, il suffit de chercher, pour « $x = 0$, la véritable valeur du numérateur, qui se présente encore sous « la forme indéterminée $\infty - \infty$.

« Or, on a $-\cot\frac{1}{2}x + \dfrac{\frac{1}{2}x}{\sin^2\frac{1}{2}x} = \dfrac{x - \sin x}{2\sin^2\frac{1}{2}x}$, et sans recourir à l'emploi « des dérivées, on voit que $x - \sin x$ ayant pour valeur approchée $\frac{x^3}{6}$, « le numérateur est infiniment petit par rapport au dénominateur; la véri-

« table valeur est donc zéro, et, pour $x = 0$, la différence $\frac{2}{x} - \cot \frac{1}{2} x$ se « réduit à zéro. »

Dans son *Cours d'Analyse*, Duhamel présente une dizaine d'exemples, « conduisant à des résultats particuliers qui méritent d'être remarqués. » Ce que je remarque surtout, c'est qu'il n'y a pas un seul de ces exemples dont l'application ne repose sur quelque principe vicieux. »

Au premier exemple Duhamel dit :

$$\text{«}\ \frac{a^x}{x} = \infty \ \text{ pour } x = \infty, \text{ si l'on a } a > 1 \ \text{»}$$

C'est aussi le premier exemple donné par M. l'abbé Moigno dans ses *Leçons de Calcul différentiel*, où on lit : « On a pour $x = \infty$, $\frac{a^x}{x} = \frac{a^x la}{1} = \infty$. »

Or, d'après la seule définition des convergents, on comprend que la fraction $\frac{e^x}{x}$ est elle-même le convergent, ou la plus simple de toutes les fonctions qui n'en diffèrent que d'une quantité qui converge vers zéro ; de même que l'ordonnée d'une droite est la plus simple de toutes les fonctions qui représentent les ordonnées des courbes qui peuvent avoir cette droite pour asymptote. Il est donc absurde de chercher une fonction plus simple qui en représente la limite ou la valeur, et la règle qui substitue $\frac{e^x}{1}$ à $\frac{e^x}{x}$ ne peut être qu'illusoire.

Du reste, il ne faut pas être bien sorcier pour voir immédiatement que quand x est très-grand, e^x est incomparablement plus grand, et qu'ainsi le rapport $\frac{e^x}{x}$ devient infini avec x.

De même, puisqu'on a identiquement $\frac{x}{x} = x^0 = 1$, pour toute valeur grande ou petite de x, qu'est-il besoin de fabriquer des règles générales ou particulières pour découvrir que « $x^x = 1$ pour $x = 0$. »

On a identiquement $$\frac{x^4}{x^3} = \frac{x^3}{x^2} = \frac{x^2}{x}.$$

Or, d'après la règle que l'on croit avoir démontrée, toutes ces fractions deviennent égales aux rapports des dérivées de leurs deux termes quand x devient infini, en sorte que pour $x = \infty$, on aurait $\frac{4x^3}{3x^2} = \frac{3x^2}{2x} = \frac{2x}{1}$; c'est-à-dire

$$\frac{4}{3} = \frac{3}{2} = 2.$$

Il est bien étrange que toutes ces absurdités auxquelles conduit « l'élégante « extension que Cauchy a su donner au théorème de l'Hôpital, » n'en aient pas même fait soupçonner la fausseté.

Les nouveaux exemples que je pourrais discuter ne feraient que confirmer ce que j'ai dit au sujet des précédents.

Je considèrerai pourtant encore celui que M. Hermite donne comme le plus intéressant à envisager.

« Voici, » dit-il, « l'application la plus intéressante à envisager ; elle con- « concerne l'expression $x^n \log x$, qui, en supposant n positif, donne pour « $x = 0$, la forme $0 \times \infty$.

« Or, en l'écrivant de cette manière $\frac{\log x}{x^{-n}}$, on sera amené au quotient $\frac{\infty}{\infty}$,

« et en prenant le rapport des dérivées, nous trouverons

$$« \frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}} = -\frac{x^n}{n},$$

« ce qui est nul pour $x = 0$. »

Nous verrons plus loin pourquoi l'auteur donne cet exemple comme « l'application la plus intéressante à envisager. » Ce que cet exemple présente de plus « intéressant », à mon point de vue, c'est l'occasion qu'il nous fournit de constater la confiance illimitée qu'a M. Hermite, comme Duhamel et les autres géomètres, dans cette règle si fausse que M. Liouville appelle « l'élégante extension que Cauchy a su donner au théorème de l'Hôpital. »

En appliquant cette règle à l'exemple $x^n \log x$, mis sous la forme $\frac{\log x}{x^{-n}}$,

M. Hermite trouve ainsi $x^n \log x = -\frac{x^n}{n}$ pour $x = 0$, d'où $\log 0 = -\frac{1}{n}$;

comme cette dernière égalité est absurde, on voit ce que vaut la règle qui y conduit.

La fausseté de la règle et les absurdités auxquelles conduisent ses applications, même « les plus intéressantes à connaître, » viennent pourtant d'un

faux principe que tous les géomètres admettent, en disant que $\frac{1}{x} = 0$, pour

$x - \infty$, ou en faisant $x = 0$ dans une fraction telle que $\frac{1}{x}$.

Ainsi, quand M. Hermite dit : « Considérons encore, pour $x = 0$, l'ex-

« pression $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}$, qui devient alors $\frac{0}{0}$, » il suppose qu'on peut faire $x = 0$ dans la fraction $\frac{1}{x^2}$.

J'ai assez montré les défauts de la théorie des fonctions qui se présentent sous une forme indéterminée ; il faut dire maintenant comment cette théorie doit être rectifiée.

D'abord il n'existe qu'une forme indéterminée, qui est $\frac{0}{0}$, et c'est par erreur que les géomètres en trouvent tant d'autres.

La fraction $\frac{0}{0}$ a toutes les valeurs possibles, quelle que soit la manière dont on y arrive, en sorte que si l'on pose $\frac{0}{0} = n$, ce qui revient à $0 = 0 \times n$, le nombre n a toutes les valeurs possibles, puisqu'il exprime combien il faut de zéros pour faire zéro.

Soit la fraction $$\frac{x^4 - 7x^3 + 10x^2}{3x^2 - 21x + 30}.$$

Elle se réduit à $\frac{0}{0}$ pour $x = 2$ et pour $x = 5$; ce qui prouve que le numérateur et le dénominateur sont divisibles par $x - 2$ et par $x - 5$.

En écrivant la fraction sous la forme $\frac{x^2(x-5)(x-2)}{3(x-5)(x-2)}$, on voit qu'elle se réduit identiquement à $\frac{x^2}{3}$, dont la valeur est $\frac{4}{3}$ pour $x = 2$, et $\frac{25}{3}$ pour $x = 5$. On prouve de cette manière que la fraction qui se réduit à $\frac{0}{0}$ pour $x = 2$ et $x = 5$, a pourtant une valeur unique, qui est $\frac{4}{3}$ pour $x = 2$, et $\frac{25}{3}$ pour $x = 5$; d'où il suit que l'indétermination n'est qu'apparente, et nullement réelle.

J'ai déjà montré ailleurs la fausseté de ce raisonnement. On dit : puisque l'identité $\frac{x^2(x-5)(x-2)}{3(x-5)(x-2)} = \frac{x^2}{3}$ est bien réelle, c'est donc l'indétermination du premier membre qui ne l'est pas pour $x = 2$, puisque la valeur du second membre est alors $\frac{4}{3}$.

Je dis, au contraire : puisque, pour $x=2$, le premier membre se réduit à $\frac{0}{0}$, son indétermination est bien réelle ; c'est donc l'identité qui, pour $x=2$, n'est pas réelle, puisqu'on aurait $\frac{0}{0}=\frac{4}{3}$.

Le lieu géométrique représenté par $y=\frac{x^2}{3}$ se compose uniquement d'une parabole, tandis que le lieu représenté par l'équation $y=\frac{x^2(x-5)(x-2)}{3(x-5)(x-2)}$ se compose de la même parabole, et des deux droites $x=5$ et $x=2$.

Il y a identité des deux lieux quant à la parabole, mais non quant aux deux droites, qui appartiennent au second lieu, et sont étrangères au premier.

En supprimant les facteurs communs de la fonction $y=\frac{x^2(x-5)(x-2)}{3(x-5)(x-2)}$, pour la réduire à $y=\frac{x^2}{3}$, on supprime du lieu géométrique les deux droites $x=5$ et $x=2$; analatytiquement on supprime l'indétermination, qui, auparavant était plus ou moins apparente, mais parfaitement réelle.

Lorsque x varie jusqu'à 2, la fonction $y=\frac{x^2(x-5(x-2)}{3(x-5)(x-2)}$ varie jusqu'à $\frac{4}{3}$, qu'on appelle la limite ou la vraie valeur de la fonction, pour $x=2$. D'abord, puisque cette valeur peut être atteinte, ce n'est pas une limite ; ensuite, tous les nombres possibles sont des valeurs réelles, ou de vraies valeurs de y, dont chacune correspond à un point réel de la droite $x=2$. Comme la valeur qu'on appelle improprement limite ou vraie valeur de la fraction, a une importance spéciale, en ce que dans le cas actuel, elle correspond au point qui est commun à la parabole $y=\frac{x^2}{3}$, et à la droite $x=2$, je lui donne le nom de valeur principale, et je l'indique par le signe $\int^p$; en sorte que $\int_2^p \frac{x^4-7x^3+10x^2}{3x^2-21x+30}=\frac{4}{3}$ exprime que la valeur principale, pour $x=2$, de la fonction $\frac{x^4-7x^3+10x^2}{3x^2-21x+30}$ est égale à $\frac{4}{3}$. De même $\int_5^p \frac{x^4-7x^3+10x^2}{3x^2-21x+30}=\frac{25}{3}$, exprime que la valeur principale pour $x=5$, de la même fonction est $\frac{25}{3}$; et cette valeur principale représente l'ordonnée du point commun à la parabole $y=\frac{x^2}{3}$, et à la droite $x=5$.

Lorsque les deux termes de la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$, qui se réduit à $\frac{0}{0}$ pour $x=a$, ne sont pas des polynômes algébriques, ils ne sont plus divisibles par $x-a$. Mais, quels qu'ils soient, on pourra y remplacer x par $a+h$, et alors la question reviendra à calculer $\mathcal{P}_0 \frac{F(a+h)}{f(a+h)}$.

En développant les termes de $F(a+h)$ et de $f(a+h)$, on pourra écrire

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{f(a+h)-f(a)}=\frac{Ah+Bh^2+Ch^3+\ldots}{A'h+B'h^2+C'h^3+\ldots},$$

ou

$$\frac{F(a+a)}{f(a+h)}=\frac{h}{h}\cdot\frac{A+Bh+Ch^2+\ldots}{A'+B'h+C'h^2+\ldots},$$

puisqu'on a $F(a)=0$ et $f(a)=0$.

Pour $h=0$, le second membre, comme le premier, se réduit à $\frac{0}{0}$; mais, en supprimant le facteur $\frac{h}{h}$, le second membre se réduit à $\frac{A}{A'}$, et représente ainsi la valeur principale de la fonction indéterminée; c'est ce qu'on peut indiquer en écrivant $\mathcal{P}_a \frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{A'}$.

Le rapport $\frac{A}{A'}$ représente, dans la méthode de Leibnitz, comme dans celle de Lagrange, le rapport des dérivées des deux termes de la fraction proposée. Voilà pourquoi les uns écrivent $\frac{F(a)}{f(a)}=\frac{F'(a)}{f'(a)}$, tandis que d'autres écrivent $\frac{F'(a)}{f'(a)}=\lim\frac{F(x)}{f(x)}$, ou $\lim\frac{F(x)}{f(x)}=\lim\frac{F'(x)}{f'(x)}$.

Toutes ces formes sont vicieuses.

D'abord, le rapport $\frac{F'(a)}{f'(a)}$ se réduit à $\frac{0}{0}$, ou à un nombre particulier tel que 4. Dans le premier cas, démontrer la formule $\frac{F(a)}{f(a)}=\frac{F'(a)}{f'(a)}$, c'est démontrer l'égalité $\frac{0}{0}=\frac{0}{0}$. Or, qui voudra se charger de démontrer ou de contester une telle égalité? Dans le second cas, c'est démontrer l'égalité $\frac{0}{0}=4$; or, il est évident que tout autre nombre que 4 représente aussi bien la valeur du premier membre.

Quant à la formule $\frac{F'(a)}{f'(a)} = \lim \frac{F(x)}{f(x)}$, elle est vicieuse, puisque la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ peut atteindre la valeur qu'on donne comme limite.

Soit la fraction $\frac{x - \sin x}{x^3}$. Puisque, pour $x = 0$, elle se réduit à $\frac{0}{0}$, de même que le rapport des dérivées de ses deux termes, on passe aux dérivées suivantes, et l'on dit que, pour $x = 0$,

on a $$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{\sin x}{6x} = \frac{\cos x}{6};$$

c'est dire que $$\frac{0}{0} = \frac{0}{0} = \frac{0}{0} = \frac{1}{6}.$$

Or, on ne voit réellement pas pourquoi la relation $\frac{0}{0} = \frac{0}{0}$ serait exacte dans un cas et fausse dans un autre, de même qu'il est difficile d'admettre la relation $\frac{0}{0} = \frac{1}{6}$ comme une identité, puisque le premier membre a une infinité de valeurs, tandis que le second n'en a qu'une seule.

La notation que nous avons adoptée en écrivant

$$\int_0^{\!\!\!\!\!\!P} \frac{x - \sin x}{x^3} = \int_0^{\!\!\!\!\!\!P} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \int_0^{\!\!\!\!\!\!P} \frac{\sin x}{6x} = \int_0^{\!\!\!\!\!\!P} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6},$$

ne donne pas lieu aux mêmes inconvénients.

La propriété indiquée par la formule $\lim \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F^n(a)}{f^n(a)}$, et qu'on qualifie de règle générale, n'est qu'un moyen particulier, nullement général ni infaillible, d'arriver à la valeur principale de $\frac{F(x)}{f(x)}$; et même quand il réussit, il est loin d'être toujours le plus expéditif, comme on peut le voir sur l'exemple considéré ; car, si on remplace $\sin x$ par son développement $x - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$, la fraction $\frac{x - \sin x}{x^3}$ devient $\frac{\frac{x^3}{1.2.3} - \ldots}{x^3}$, qui donne $\frac{1}{6}$ pour la valeur principale correspondant à $x = 0$. En prenant successivement les dérivées des deux termes de la fraction, on obtient $\frac{x^3}{6x^3} = \frac{3x^2}{18x^2} = \frac{6x}{36x} = \frac{6}{36}$. Qu'est-il besoin d'aller jusqu'au rapport des dérivées troisièmes pour en tirer la valeur $\frac{1}{6}$, qui se voit immédiatement dans la première fraction $\frac{x^3}{6x^3}$?

L'exposant diminuant d'une unité quand on passe d'une fraction au rapport des dérivées de ses deux termes, on voit que c'est l'exposant zéro qui donne une fraction qui ne se réduit plus à $\frac{0}{0}$.

Si donc l'exposant est fractionnaire, il ne passera plus par zéro, quand on le diminuera successivement d'une unité, et dans ce cas la règle n'atteindra pas le but.

Il n'en faut pas davantage pour montrer l'inefficacité de la règle dite générale, même dans la plupart des cas où elle est fondée sur une propriété exacte, je veux dire dans les cas où l'on a réellement $\int_a^p \frac{F(x)}{f(x)} = \int_a^p \frac{F'(x)}{f'(x)}$.

Les cas où la propriété elle-même est en défaut, sont ceux où les premiers termes des développements de $F(x)$ et $f(x)$ ne sont pas du même degré.

Par exemple, la propriété serait en défaut sur l'exemple $\frac{x - \sin x}{x^4}$, qui devient $\frac{x^3}{6x^4}$, quand on y remplace le numérateur $x - \sin x$ par le premier terme de son développement. En y appliquant la règle, on aurait les égalités $\frac{x^3}{6x^4} = \frac{3x^2}{24x^3} = \frac{6x}{72x^2} = \frac{6}{144x}$, ou $\frac{1}{6x} = \frac{1}{8x} = \frac{1}{12x} = \frac{1}{24x}$, dont tous les termes devraient différer infiniment peu quand x diffère infiniment peu de zéro; tandis que chacun des trois derniers devient infiniment plus grand que le précédent.

Il faut maintenant examiner la forme $\frac{\infty}{\infty}$.

Soit la fraction $$\frac{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}{A'x^4 + B'x^3 + C'x^2 + D'x + E'}.$$

On dit que ses deux termes deviennent infinis avec x, et que la fraction prend la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

Or, il est faux que la fraction prenne une valeur indéterminée. Elle a toujours une valeur déterminée qui dépend de tous ses termes. Ainsi, ce n'est ni la vraie valeur, ni la valeur principale de la fraction qui est à trouver, mais sa limite, qui est représentée par $\frac{A}{A'}$.

Si le numérateur était d'un degré plus élevé que le dénominateur, comme dans la fraction $\frac{x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^3+A'x^2+B'x+C}$, sa valeur croîtrait sans limite ; il n'y aurait donc à chercher ni la vraie valeur ni la limite, mais le convergent de la fraction, qui, d'après nos principes, se trouve représenté par $x+A-A'$.

Les dérivées n'ont rien à voir ni à faire dans cette question. L'élégante extension de Cauchy donnerait

$$\frac{x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^3+A'x^2+B'x+C}=\frac{4x^3+3Ax^2+2Bx+C}{3x^2+2A'x+B'}=\frac{12x^2+6Ax+2B}{6x+2A'}=\frac{24x+6A}{6},$$

ce qui est parfaitement faux d'un bout à l'autre.

Pour indiquer le convergent d'une fraction il convient de le représenter par le signe $\mathcal{C}$, qui comprend, comme cas particulier, celui de la limite.

De cette manière, on écrira

$$\mathcal{C}\left(\frac{x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^3+A'x^2+B'x+C'}-\sqrt[3]{x^3+Px^2+Qx+R}\right)$$
$$=\mathcal{C}\frac{x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^3+A'x^2+B'x+C'}-\mathcal{C}\sqrt[3]{x^3+Px^2+Qx+R}$$
$$=x+A-A'-x-\frac{P}{3}=A-A'-\frac{P}{3}.$$

Que nous apprend l'enseignement ordinaire sur une pareille question ? Il nous dit que la fonction proposée se présente sous la forme $\infty-\infty$, qui est indéterminée. C'est comme celui qui pour déterminer la différence de deux liqueurs, les mettrait dans une bouteille à encre, et prouverait ainsi que cette différence est indéterminée. M. Liouville, qui, comme M. Bertrand, s'est évertué à établir l'entière généralité de la règle de l'Hôpital, cite lui-même un exemple réfractaire, en disant :

« La fraction $\dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}$ se réduit à zéro pour $x=0$, et cependant

« le rapport des dérivées donne $\dfrac{\sin\frac{1}{x}+2x\cos\frac{1}{x}}{\cos x+\sin\frac{1}{x}+2x\cos\frac{1}{x}}$, fraction qui ne

« tend pas vers une limite déterminée lorsque x tend vers zéro. »

Cet exemple et tant d'autres qu'on pourrait produire, resteront des mystères inexplicables pour tous ceux qui admettent, comme ici M. Liouville, que x de $\frac{1}{x}$ peut devenir zéro.

La fraction $\dfrac{x^2 \cos\frac{1}{x}}{\sin x + x^2 \cos\frac{1}{x}}$ devient nulle chaque fois que la valeur de $\frac{1}{x}$ passe par un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$; mais elle ne peut jamais se reduire à la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Voilà ce qui explique pourquoi les dérivées n'ont rien à faire dans cette question.

Séries de Taylor et de Maclaurin.

D'après le Binôme de Neuton, on a l'identité suivante :

$$(x + h)^m = x^m + mhx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} h^2 x^{m-2} + \ldots\ldots\ldots + h^m.$$

Or, le facteur mx^{m-1} est la dérivée de x^m, de même le facteur $m(m-1)x^{m-2}$ est la dérivée seconde de x^m. Il en résulte que si l'on désigne x^m par $\mathrm{F}(x)$, l'identité précédente pourra s'écrire

$$\mathrm{F}(x+h) = \mathrm{F}(x) + h\,\mathrm{F}'(x) + \frac{h^2}{1.2}\mathrm{F}''(x) + \ldots\ldots + h^m.$$

Mais cette identité n'existerait plus si par $\mathrm{F}(x)$ on entendait une fonction quelconque de x. Alors, en désignant par R la différence entre les deux membres, on a encore, pour toute fonction de x, l'identité

$$\mathrm{F}(x+h) = \mathrm{F}(x) + h\,\mathrm{F}'(x) + \frac{h^2}{1.2}\mathrm{F}''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}\mathrm{F}'''(x) + \ldots\ \mathrm{R}.$$

Lorsque le développement a un nombre ilimité de termes, ils forment une série, et en désignant par S_n la somme des n premiers termes, l'identité devient : $\mathrm{F}(x+h) = \mathrm{S}_n + \mathrm{R}$.

Si R tend vers zéro quand n devient infini, la série est convergente. Dans ce cas $\mathrm{F}(x+h)$ est la limite de la série, et l'on écrit :

$$\mathrm{F}(x+h) = \mathrm{F}(x) + h\mathrm{F}'(x) + \frac{h^2}{1.2}\mathrm{F}''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}\mathrm{F}'''(x)\ldots\ldots,$$

qui est la formule de Taylor.

Mais lors même que la série est convergente, l'identité n'existe qu'au moyen du terme complémentaire R, qu'on appelle le reste de la série, et qui ne se déduit pas des précédents d'après la loi de la série.

Les géomètres se sont mis l'esprit à la torture pour donner au reste les formes les plus propres à manifester la convergence ou la divergence de la série. Mais, suivant l'expression de Poinsot, la traduction est souvent moins claire que le texte, et les formules données à cet effet sont fondées sur le même principe que celles que nous avons critiquées précédemment, en sorte qu'il faudrait, suivant l'expression de M. Liouville, « s'assurer dans chacun « des exemples auxquels on les applique, que l'usage en est légitime. »

Si dans la formule de Taylor on fait $x = 0$, elle devient

$$F(x) = F(0) + hF'(0) + \frac{h^2}{1.2}F''(0) + \frac{h^3}{1.2.3}F'''(0) + \ldots.$$

On peut y remplacea h par x, et l'on obtient

$$F(x) = F(0) + xF'(0) + \frac{x^2}{1.2}F''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}F'''(0) + \ldots,$$

qui est la formule de Maclaurin.

Si, dans la formule de Maclaurin, on remplace successivement $F(x)$ par $\sin x$, $\cos x$, e^x, a^x, on obtient :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots\ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\ldots,$$

$$a^x = 1 + x\,\mathrm{l}\,a + \frac{x^2\,\mathrm{l}^2 a}{1.2} + \frac{x^3\,\mathrm{l}^3 a}{1.2.3} + \frac{x^4\,\mathrm{l}^4 a}{1.2.3.4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dans chacune de ces séries, le rapport d'un terme au précédent tend vers zéro ; c'est plus qu'il n'en faut pour que le série soit convergente.

De même, en remplaçant $F(x)$ successivement par $\mathrm{l}(1+x)$, et $\mathrm{l}(1-x)$, on trouve : $\mathrm{l}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$,

et $\mathrm{l}(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{4} - \ldots\ldots\ldots$

En retranchant la seconde de la première, on obtient :

$$\mathrm{l}(1+x) - \mathrm{l}(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots\ldots\right),$$

qui se transforme en

$$l(z+1)-lz=2\left(\frac{1}{2z+1}+\frac{1}{3(2z+1)^3}+\frac{1}{5(2z+1)^5}+\ldots\ldots\right),$$

quand on y remplace x par $\frac{1}{2z+1}$.

Comme on le voit bien, la série n'est pas convergente pour $z=0$; mais plus z augmente, plus la convergence devient rapide.

C'est ici le lieu de résoudre une difficulté qui a été soulevée par Cauchy et reproduite, depuis lui, par les principaux auteurs.

Au chapitre V de sa *Théorie des Fonctions analytiques*, Lagrange démontre qu'une fonction d'une variable et toutes ses dérivées ne peuvent devenir nulles, pour une même valeur de la variable, qu'à la condition que la fonction soit elle-même identiquement nulle.

Un savant affirme « que les géomètres savent depuis longtemps que le « raisonnement de Lagrange n'est qu'un cercle vicieux. » Je n'ai point à m'occuper ici de ce raisonnement, mais seulement de la proposition en elle-même et des conséquences qui en ont été déduites.

Par un raisonnement que M. Hermite a adopté et reproduit dans son *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, Cauchy démontre « que pour $x=0$, la « fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$ s'annule, ainsi que ses dérivées des divers ordres. » Et il conclut en disant : « En n'ayant pas égard au reste, les deux expres- « sions $F(x)$ et $F(x)+e^{-\frac{1}{x^2}}$ sont données exactement par la même série; « d'où l'on voit combien la condition de convergence est loin d'être suffi- « sante, comme le croyait Lagrange pour que la série

$$« \ F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\frac{x^2}{1.2}F''(0)+\ldots\ldots$$

« représente $F(x)$. »

Lagrange reçoit donc ici, de la part de Cauchy, un double démenti :

1° Lagrange ayant avancé qu'une fonction est identiquement nulle dès que cette fonction et toutes ses dérivées deviennent nulles pour une valeur particulière de la variable, Cauchy lui présente la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$, qui n'est pourtant pas identiquement nulle, quoiqu'elle le devienne avec toutes ses dérivées, pour $x=0$.

2° Lagrange croit qu'il suffit que la série $F(0)+\frac{x}{1}F'(x)+\frac{x^2}{1.2}F''(0)+\ldots$, soit convergente pour qu'elle représente $F(x)$. Or, lorsqu'on prend $e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $F(x)$, tous les termes de la série deviennent nuls, d'après Cauchy, et une série dont tous les termes sont nuls, est convergente, s'il en fut jamais ; et, puisque la somme de ses termes est zéro, elle ne représente pas $F(x)$, qui est $e^{-\frac{1}{x^2}}$ dans l'exemple actuel.

Il me semble qu'il eût été difficile à Lagrange de parer ce double coup ; car ses écrits prouvent assez que, comme Cauchy et les autres géomètres, il croyait qu'on peut avoir $\frac{1}{x}=0$ pour x infini, ou qu'on peut faire $x=0$ dans $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, etc.

Je dirai plus : c'est que Lagrange prétendait qu'il n'était pas même nécessaire que la série fût convergente pour être représentée par $F(x)$; il l'a formellement soutenu à d'Alembert dans les termes suivants :

« Je demande si, toutes les fois que dans une formule algébrique, « il se trouvera, par exemple, une série géométrique infinie, telle que « $1+x+x^2+x^3\ldots$, on ne sera pas en droit d'y substituer $\frac{1}{1-x}$, quoi- « que cette quantité ne soit réellement égale à la somme de la série proposée « qu'en supposant le dernier terme x^∞ nul. Il me semble qu'on ne saurait « contester l'exactitude d'une telle substitution sans renverser les principes « les plus communs de l'analyse. »

C'est donc moins en vue de défendre Lagrange que de rétablir la vérité, que je veux détruire l'objection de Cauchy, et montrer l'absurdité des conséquences que lui et les géomètres de son école en ont tirées.

Que devient la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$, pour $x=0$? C'est comme si l'on demandait que devient la courbure d'un cercle carré. De même qu'on ne peut pas faire un cercle carré, on ne peut pas non plus faire $x=0$ dans la fraction $\frac{1}{x^2}$. L'hypothèse $x=0$ dans la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$, comme dans la fonction $\frac{1}{x}$, est absurde, ainsi que toutes les conséquences qu'on en peut tirer

Dans la relation $y=\frac{1}{x}$, ou $xy=1$, on ne peut pas faire $x=0$, parce qu'aucun nombre de zéros ne peut faire 1.

Si l'on s'obstine à supposer $x=0$ dans la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$, tout ce qu'on peut ensuite déduire de cette hypothèse est de la science après déraillement.

Ceci s'applique à la démonstration de M. Hermite, pour confirmer l'assertion par laquelle Cauchy prétend que toutes les dérivées de $e^{-\frac{1}{x^2}}$ deviennent nulles lorsqu'on y fait $x=0$.

Je vais mettre sous les yeux du lecteur le passage qui contient cette démonstration.

« Considérons encore » dit M. Hermite, « pour $x=0$, l'expression $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}$,
« qui devient alors $\frac{0}{0}$. En posant $e^{-\frac{1}{x^2}} = t$, d'où $x = (-\log t)^{-\frac{1}{2}}$, elle se
« ramène à celle-ci :

$$« \quad \frac{t}{(-\log t)^{-\frac{n}{2}}} = t\,(-\log t)^{\frac{n}{2}} = \left(-t^{\frac{2}{n}} \log t\right)^{\frac{n}{2}}. \quad »$$

« Or, on a $t=0$ pour $x=0$, ce qui ramène au cas précédent, de sorte que
« la limite est encore zéro. Je cite cet exemple à cause de la remarque
« suivante de Cauchy :

« Formons les dérivées nécessaires de la fonction $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, nous
« trouverons : $f'(x) = \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$, $f''(x) = -\frac{6e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4} + \frac{4e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^6}$, d'où il est aisé
« de conclure qu'en général $f^{\mu}(x)$ se compose d'une somme de termes de
« la forme $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}$, n étant positif; de sorte que, pour $x=0$, la fonction
« proposée s'annule ainsi que ses dérivées des divers ordres. Il en résulte
« qu'en appliquant à cette fonction la formule de développement en série de
« Maclaurin, le reste seul paraîtra dans les résultats. En n'ayant donc pas
« égard au reste, les deux expressions $F(x)$ et $F(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$ sont données
« exactement par la même série; d'où l'on voit combien la condition de
« convergence est loin d'être suffisante, comme le croyait Lagrange, pour
« que la série $F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \ldots$ représente $F(x)$. »

Les explications données par les géomètres sur cet exemple de Cauchy ne sont que des sophismes. Nous venons d'entendre M. Hermite, écoutons maintenant Duhamel :

« Il faut bien se garder de croire que les séries de Taylor ou de Maclaurin
« puissent être employées toutes les fois qu'elles sont convergentes; car elles
« pourraient converger vers d'autres limites que les fonctions qu'elles
« devraient représenter.

« Ainsi, par exemple, la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$ devient nulle, ainsi que toutes ses

« dérivées, pour $x=0$, et cependant elle n'est pas identiquement nulle.
« Il suit de là que si $F(x)$ est une fonction développable par la série de
« Maclaurin, $F(x)+e^{-\frac{1}{x^2}}$, développée par la même formule, donnera lieu
« à une série convergente, mais qui représentera $F(x)$, et sera, par consé-
« quent, inexacte.

« L'exactitude du développement ne peut jamais être établie que par la
« considération de l'expression qui en complète la valeur après un nombre
« quelconque de termes. »

Cette explication se compose d'assertions contradictoires. Il faudrait admettre qu'une série qui doit converger vers une limite A, s'obstine à converger vers une autre limite B; il faudrait admettre qu'il y a des séries convergentes exactes et des séries convergentes inexactes, que les séries convergentes exactes convergent vers les fonctions qu'elles doivent représenter, tandis que les séries convergentes inexactes convergent vers des fonctions qu'elles ne doivent pas représenter. Tout ce qui a été fait sur la sommation des séries, serait à refaire, ou du moins à compléter; car il ne faudrait plus se contenter, comme on le fait habituellement, de démontrer qu'une série converge vers une limite A; il faudrait prouver qu'elle doit en certains cas converger vers une autre limite B, et qu'ainsi elle a tort de converger vers la limite A.

La considération du reste sert à reconnaître si une série est convergente ou divergente; mais à quoi peut servir la considération du reste quand on sait d'avance que la série est convergente?

La fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$ ne peut pas se développer directement par la formule de Maclaurin, parce qu'on ne peut pas y faire $x=0$; mais en remplaçant z par $-\frac{1}{x^2}$, dans la formule

$$e^z = 1+z+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^4}{1.2.3.4}+\ldots\ldots,$$

on obtient

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = 1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1.2.x^4}-\frac{1}{1.2.3.x^6}+\frac{1}{1.2.3.4.x^8}+\ldots.$$

Pour toute valeur de x autre que zéro, la valeur du n^{me} terme tend vers zéro, et comme les termes sont alternativement positifs et négatifs, il s'ensuit que la série est convergente. Que veut-on de plus? Veut-on savoir si, pour $x=0$, la série convergente est exacte ou inexacte? si elle converge vers la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$ ou vers une autre? si, convergeant vers l'une, elle ne devrait pas plutôt converger vers l'autre? Toutes ces questions sont absurdes.

Les plus forts géomètres, comme MM. Sturm, Serret, Hermite, n'ont pu que répéter les objections de Cauchy et de Duhamel, et, comme je viens de montrer le peu de valeur de ces objections, il en faut conclure que les propositions de Lagrange sortent inctactes de cette épreuve. Ainsi :

1° Lorsqu'une fonction et toutes ses dérivées deviennent nulles pour une veleur particulière de la variable, cette fonction est identiquement nulle.

2° Puisque la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$ n'est pas identiquement nulle, on peut affirmer que toutes ses dérivées ne deviennent pas nulles pour $x=0$, et cela pour une bonne raison, c'est qu'on ne peut pas y faire $x=0$.

3° « La condition de convergence » n'est pas « loin d'être suffisante ; » comme le dit Cauchy ; elle est tout à fait suffisante, « comme le croyait « Lagrange, pour que la série $F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\frac{x^2}{1.2}F''(0)+\ldots$ représente « $F(x)$, » ou, plus exactement, ait pour limite $F(x)$.

4° Les séries de Taylor et Maclaurin peuvent être employées toutes les fois qu'elles sont convergentes, car elles ne peuvent pas converger vers d'autres fonctions que celles qu'elles doivent représenter.

5° La considération du reste est parfaitement inutile dès qu'on sait que la série est convergente. C'est donc bien à tort que M. Serret dit : « Pour pouvoir « faire usage de la formule, il faut avoir établi que le reste R_n de la série « convergente tend vers la limite zéro. » En effet, si la série est convergente, le reste R_n tend vers zéro, et si ce reste ne tend pas vers zéro, la série n'est pas convergente.

Quoique le principe en vertu duquel on admet qu'on peut faire $x=0$, dans une fonction de $\frac{1}{x}$, soit reçu généralement, il n'en est pas pour cela moins faux. C'est en se fondant sur ce principe que Cauchy a pu faire échec aux deux propositions de Lagrange, et a prétendu démontrer la nécessité de la considération de l'expression qui complète la valeur d'une série reconnue convergente. Il a ainsi entraîné les géomètres qui ont traité le sujet après lui, à donner une importance exagérée à la considération du reste, qu'ils ont pris tant de peine à présenter sous une forme censée générale, et dont l'avantage ne compense guère les efforts qu'elle a coûtés.

Des maxima et minima des fonctions d'une seule variable.

Une fonction $F(x)$ devient maximum pour une valeur particulière $x=a$, lorsque la valeur de $F(a)$ est plus grande que les plus voisines valeurs de

$F(x)$, en sorte que pour h infiniment petit, positif ou négatif, la valeur de $F(x+h)-F(x)$ est toujours négative. Dans le cas du minimum, c'est le contraire qui a lieu. Or, on a

$$F(x+h)-F(x)=h\,F'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}F'''(x)+\ldots..$$

Si le facteur $F'(x)$ n'était pas nul, le terme $hF'(x)$ donnerait son signe au second, membre dans l'hypothèse de h infiniment petit, et alors le second membre changerait de signe avec h; ce qui ne peut avoir lieu dans le cas d'un maximum ou d'un minimum; donc pour le maximum, comme pour le minimum, il faut qu'on ait $F'(x)=o$, et ce sont les racines de cette équation qui donnent les valeurs de x qui correspondent soit à des maxima, soit à des minima. Puisque pour ces valeurs de x, $F'(x)=o$, c'est le terme $\frac{1.2}{h^2}F''(x)$, ou plutôt le facteur $F''(x)$ qui donne son signe au second membre, et, par conséquent, si pour une racine $x=a$, de l'équation $F'(x)=o$, la valeur de $F''(a)$ est négative, cette racine correspond à un maximum; dans le cas contraire, elle correspond à un minimum.

Si, par extraordinaire, on avait $F''(a)=o$, en même temps que $F'(a)=o$, il faudrait aussi avoir $F'''(a)=o$, en sorte que la première dérivée qui ne s'annule pas pour $x=a$, doit être d'ordre pair, si a correspond à un maximum ou à un minimum.

Supposons, par exemple, qu'on demande le point le moins éclairé sur la droite qui joint deux lumières.

Soient m et n les intensités des deux lumières, a la longueur de la droite, x et $a-x$ les distances du point aux deux lumiéres.

Les intensités des deux lumières étant m et n, à l'unité de distance, elles seront $\frac{m}{x^2}$ et $\frac{n}{(a-x)^2}$ au point cherché. La fonction qui doit devenir minimum est donc $\frac{m}{x^2}+\frac{n}{(a-x)^2}$. Les dérivées première et seconde de cette fonction sont $\frac{2n}{(a-x)^3}-\frac{2m}{x^3}$, et $\frac{6m}{x^4}+\frac{6n}{(a-x)^4}$. La valeur de x qui correspond au minimum doit annuler la dérivée première, c'est-à-dire vérifier l'équation $\frac{2n}{(a-x)^3}-\frac{2m}{x^3}=o$, ou $\frac{m}{x^3}=\frac{n}{(a-x)^3}$ On en déduit $\frac{x}{a-x}=\frac{\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{n}}$, ce qui prouve que les distances du point aux deux lumières sont proportionnelles aux racines cubiques des intensites.

Dailleurs pour toute valeur de x, la dérivée seconde sera évidemment positive, ce qui prouve que la valeur trouvée pour x correspond à un minimum, et non à un maximum.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

DU

CALCUL DIFFÉRENTIEL

Equation de la tangente à une courbe quelconque.

C'est en cherchant une méthode générale pour la détermination de la tangente à une courbe quelconque, que Leibnitz a été conduit à fonder le calcul différentiel.

Une droite menée par deux points x', y', x'', y'', a pour équation $y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x')$.

Pour que les deux points soient sur la courbe, il faut que son équation soit vérifiée par les coordonnées des deux points. Le coefficient angulaire $\frac{y'-y''}{x'-x''}$, ou $\frac{\Delta y'}{\Delta x'}$, exprime alors la tangente trigonométrique de l'angle que la sécante fait avec l'axe de x. Lorsque le second point atteint le premier, la sécante devient tangente ; mais les deux points étant confondus en un seul, la droite peut ensuite tourner et prendre toutes les positions possibles autour de ce point. De même la fraction $\frac{y'-y''}{x'-x''}$, ou $\frac{\Delta y'}{\Delta x'}$, en se réduisant à $\frac{0}{0}$, atteint d'abord sa valeur principale correspondant à la tangente, et prend ensuite toutes les valeurs possibles correspondant à toutes les droites qui peuvent passer par le point de contact.

Le coefficient angulaire de la tangente menée au point x', y', de la courbe se représentera donc par $\int\!\!\!\!\!\!P\,\frac{\Delta y'}{\Delta x'}$, ou plus simplement par $\frac{dy'}{dx'}$, d'après la notation de Leibnitz ; et par $\frac{dy'}{dx'}$, il faut entendre qu'ayant pris la dérivée de y par rapport à x dans l'équation de la courbe, on a substitué aux variables les coordonnés x' et y' du point de contact.

C'est ainsi que la tangente menée au point x', y' de la courbe, a pour équation $y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x')$.

De cette manière, la théorie des tangentes, comme d'ailleurs le calcul différentiel lui-même, se trouve fondée sur les valeurs principales des rapports indéterminés, et non sur les propriétés métaphysiques des infiniment petits. C'est parce que la notation de Leibnitz s'adapte directement de la manière la plus simple et la plus directe à cette notion exacte et fondamentale, que sa méthode s'est toujours montrée supérieure à celle de Newton et de Lagrange.

La perfection d'une méthode ne dépend pas de l'explication qu'on en donne, de même que la rapidité d'un train dépend de la perfection de la machine, et non de l'intelligence des voyageurs. La méthode de Newton, en prenant $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ pour $\mathcal{P}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, donne une idée inexacte de la dérivée, mais laisse entrevoir l'idée exacte; tandis que dans la méthode de Lagrange, la fonction primitive est elle-même d'abord métamorphosée en série, et rien de la fonction dérivée n'indique plus sa propriété essentielle de représenter la valeur principale d'un rapport indéterminé.

Soit la courbe $y = x^3 - 7$. Par la différentiation on en tire $\frac{dy}{dx} = 3x^2$, et, par suite, l'équation de la tangente menée au point (x', y') de la courbe, est $y - y' = 3x^2(x - x')$.

La droite menée par le point de contact perpendiculairement à la tangente, s'apppelle normale. Le coefficient angulaire de la tangente étant $\frac{dy'}{dx'}$, celui de la normale sera $-\frac{dx'}{dy'}$, puisque leur produit doit égaler -1; de cette manière l'équation de la normale sera $y - y' = -\frac{dx'}{dy'}(x - x')$.

On donne aussi les noms de tangente et normale aux longueurs comprises sur ces droites entre le point de contact et leur point de rencontre avec l'axe des x. Les projections de ces longueurs sur le même axe s'appellent sous-tangente et sous-normale.

En désignant par T et N la tangente et la normale, par t et n la sous-tangente et la sous-normale, ces quatre longueurs sont exprimées respectivement, en grandeur et en signe, par

$$t = -y'\frac{dx'}{dy'},\ n = y'\frac{dy'}{dx'},\ \mathrm{T} = y'\sqrt{1 + \frac{dx'^2}{dy'^2}},\ \mathrm{N} = y'\sqrt{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}}.$$

Ces formules, appliquées à l'ellipse représentée par l'équation $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, donnent :

1° $a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2$, pour l'équation de la tangente;

2° $b^2x'(y - y') = a^2y'(x - x')$, pour l'équation de la normale;

3° $t=\dfrac{a^2-x'^2}{x'}$, $n=-\dfrac{b^2x'}{a^2}$, $T=\dfrac{y'}{b^2x'}\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}$, $N=\dfrac{1}{a^2}\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}$.

Si l'on change b^2 en $-b^2$ dans tous ces résultats, ils se rapporteront à l'hyperbole représentée par l'équation $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$.

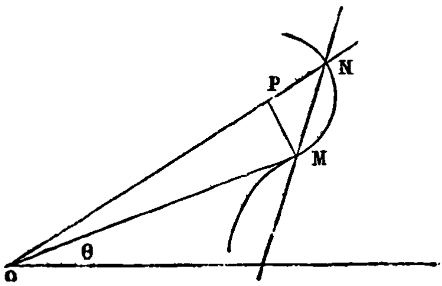
En appliquant les mêmes formules à l'équation $y^2=2px$, qui est celle de la parabole, on trouve $yy'=p(x+x')$, pour l'équation de la tangente, $y-y'=-\dfrac{y'}{p}(x-x')$, pour l'équation de la normale,

$$n=p,\quad t=2x', T=\sqrt{2x'(p+2x')}, N=\sqrt{p(p+2x')}.$$

Tangente à une courbe exprimée en coordonnées polaires.

L'équation $F(\theta, r)=0$ d'une courbe en coordonnées polaires, exprime la relation qui existe, pour chaque point de cette courbe, entre sa distance r, à un point fixe appelé pôle, et l'angle θ, que fait le rayon r avec un axe fixe mené par le pôle.

Fig. 7.



Soit M (fig. 7) le point de contact, N un point très-voisin, ou, comme on dit, infiniment voisin, pris sur la courbe, O le pôle, θ l'angle que le rayon OM fait avec l'axe, α l'angle que ce rayon fait avec la sécante MN, et $OP=OM=r$.

Le triangle PMN donne

$$\frac{PM}{PN}=\frac{\sin PNM}{\sin PMN}.$$

En leibnitzant, cette équation devient

$$\frac{rd\theta}{dr}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \text{ou}\ \operatorname{tang}\alpha=\frac{rd\theta}{dr}.$$

Théorie des Asymptotes.

Soit $Y=F(x)+\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\ldots\ldots+\dfrac{H}{x^m}$, l'équation d'une courbe.

En donnant aux constantes A, B, ... H, des valeurs différentes, on aura autant de courbes qu'on voudra, dont les ordonnées correpondantes à une même abscisse iront en convergeant, c'est-à-dire que leurs différences tendront vers zéro quand on fera croître x infiniment. Pour cette raison toutes ces courbes sont dites asymptotiques les unes aux autres.

Les termes $\frac{A}{x}, \frac{B}{x^2}, \ldots\ldots \frac{H}{x^m}$ sont des infiniment petits qui ont pour limite zéro. Si la fonction $F(x)$ n'en renferme point d'autres, $F(x)$ est ce que j'ai appelé le convergent de Y, et l'équation $y = F(x)$ est la plus simple de celles qui sont renfermées dans l'équation générale

$$Y = F(x) + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \ldots\ldots + \frac{H}{x^m}.$$

La courbe représentée par l'équation $y = \int Y$ pourrait s'appeler l'asymptote de toutes les courbes dont l'ardonnée Y varie de l'une à l'autre avec les constantes A, B, ... H. Lorsque le convergent de Y est du premier degré, c'est-à-dire de la forme $y = kx + l$, l'asymptote est rectiligne.

Comme la rencontre d'une courbe avec son asymptote est impossible du côté où l'asymptotisme a lieu, il s'ensuit que si l'on prend les ordonnées parallèles à une asymptote, son équation sera de la forme $x = a$, et, pour $x = a$, la valeur de y sera l'infini absolu ou impossible.

Soit $Y = \frac{1}{x}$ l'équation d'une hyperbole équilatère. On a ici $\int Y = 0$, ou $y = 0$, et, par conséquent, l'axe des x est asymptote. Mais pour $x = 0$, la valeur de Y est l'infini absolu ; donc l'axe des y est asymptote.

Puisque, pour une valeur infiniment grande de x, l'ordonnée de l'asymptote et celle de la courbe ont une différence infiniment petite, à plus forte raison, la perpendiculaire abaissée d'un point de la courbe sur l'asymptote, sera infiniment petite. Cette propriété sert à définir l'asymptote. Ainsi une droite est asymptote à une courbe lorsque la distance d'un point de la courbe à la droite a pour limite zéro.

Premier exemple. — Le convergent de la fonction

$$y = \sqrt[m]{x^m + ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots\ldots + Kx + H} \quad \text{est } x + \frac{a}{m},$$

quels que soient les coefficients B, C, ... K, H. Il en résulte que $y = x + \frac{a}{m}$ représente une asymptote commune à toutes les courbes renfermées dans l'équation proposée.

Deuxième exemple. — Le convergent de $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ est $\pm \frac{b}{a} x$. Il en résulte que $y=\frac{b}{a}x$, et $y=-\frac{b}{a}x$ sont les asymptotes de l'hyperbole représentée par l'équation proposée.

TROISIÈME EXEMPLE. — Soit $y=\pm\sqrt{x^2+10x+11}\pm\sqrt{x^2-4x+21}$. Cette fonction ayant pour convergent $\pm(x+5)\pm(x-2)$, il s'ensuit que la courbe représentée par l'équation proposée, a pour asymptotes

$$y=2x+3,\ y=-2x-3,\ y=7,\ y=-7.$$

QUATRIÈME EXEMPLE. — Soit $y=\sqrt[3]{-8x^3+15x^2+x-7}$.

Le convergent de cette fonction étant $-2x+\frac{5}{4}$, il s'ensuit que $y=-2x+\frac{5}{4}$ est l'asymptote de la courbe représentée par l'équation.

CINQUIÈME EXEMPLE. — Le convergent de la fonction

$$y=\pm\sqrt{(n^2-1)x^2+2dx-d^2},$$

où l'on suppose $n>1$, est $y=\pm x\sqrt{n^2-1}\pm\frac{d}{\sqrt{n^2-1}}$, et cette relation donne les asymptotes de l'hyperbole représentée par l'équation proposée.

SIXIÈME EXEMPLE. — Soit $ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0$ l'équation générale du second degré à deux variables. On en tire

$$y=-\frac{b}{2a}x-\frac{d}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{(b^2-4ac)x^2+2(bd-2ae)x+d^2-4af}.$$

Cette équation représente une hyperbole lorsque b^2-4ac est positif, et le convergent du radical est $x\sqrt{b^2-4ac}+\frac{bd-2ae}{\sqrt{b^2-4ac}}$; ce qui donne

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}x-\frac{d}{2a}\pm\frac{bd-2ae}{\sqrt{b^2-4ac}}$$

pour les asymptotes de l'hyperbole.

SEPTIÈME EXEMPLE. — Soit $y=\sqrt[3]{-x^3+1}$.

Le convergent est $-x$, d'où $y=-x$ représente l'asymptote de la courbe.

HUITIÈME EXEMPLE.

$$y=\sqrt{x^4+ax^3+bx^2+cx+d}-\sqrt{x^4+a'x^3+b'x^2+c'x+d'}-\frac{a-a'}{2}x$$

a pour convergent $\frac{b-b'}{2}-\frac{a^2-a'^2}{8}$, quelsque soient les coefficients c, d, c', d'; il s'ensuit que $y=\frac{b-b'}{2}-\frac{a^2-a'^2}{8}$ représente une asymptote commune à toutes les courbes qu'on peut obtenir en donnant des valeurs arbitraires aux coefficients, c, d, c', d'.

NEUVIÈME EXEMPLE. — Le convergent de la fonction

$$y=\frac{x^5+7x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+H}{x^4-3x^3+B'x^2+C'x+H'}$$

est $x+10$; il s'ensuit que $y=x+10$ représente une asimptote commune à toutes les courbes comprises dans l'équation proposée, où les coefficients A, B, C, H, B', C', H', auront des valeurs quelconques.

Diverses méthodes pour le Calcul des Asymptotes.

Auguste Comte réduit à deux méthodes générales toutes celles qui ont été successivement proposées avant celle des convergents.

Après un examen approfondi de ces méthodes, il déplore « cette déplorable « fécondité, qui, portant essêntiellement sur le style analytique sans attein- « dre réellement la pensée géométrique, encombre trop souvent les ouvrages « mathématiques d'une vaine répétition de la même notion sous des formes « diverses, dont la plupart doivent être écartées. »

Dans la méthode la plus classique, on représente par $y=kx+l$ l'asymptote d'une courbe, et l'on dit que l'ordonnée de la courbe est $y=kx+l+V$, où on représente par V une fonction de x qui tend vers zéro lorsque x devient infini. On en déduit $k=\lim\frac{y}{x}$, et $l=\lim(y-kx)$.

On détermine aussi les asymptotes en les considérant comme « limites des « tangentes. Il est aisé de sentir, » dit Auguste Comte, « que toute asymptote « constitue la limite nécessaire d'une suite correspondante de tangentes.

« Tel est, » ajoute-t-il, « le principe éminemment simple et général de la « première méthode des asymptotes, la seule pleinement universelle.......

« Explorée ainsi, la recherche des asymptotes consiste à déterminer quelles « valeurs acquièrent les coefficients, angulaire et linéaire, de la tangente « quand les coordonnées du point de contact y deviennent infinies. »

On voit qu'en théorie chaque méthode est très-simple.

La nôtre consiste dans la propriété du convergent de l'ordonnée de la courbe, de représenter l'ordonnée de la plus simple de toutes les lignes asymptotiques à cette courbe.

Si le convergent n'est pas d'un degré supérieur au premier, l'asymptote est rectiligne; dans le cas contraire la courbe donnée n'a pas d'asymptote rectiligne, non parallèle à l'axe des y.

Lorsque l'asymptote est parallèle à l'axe des y, c'est y qui devient infini pour une valeur finie de x. Dans ce cas le convergent de x par rapport à y se réduit à une constante a, et $x=a$ est l'équation de cette asymptote.

La deuxième méthode consiste à calculer la limite de $\frac{y}{x}$, qui exprime le coefficient angulaire k de la droite, et la limite de $y-kx$, qui en représente le coefficient linéaire. Or, nous avons montré que les règles données à cet effet sont quelquefois inexactes et souvent impraticables.

La troisième méthode consiste à supposer infinie l'abscisse du point de contact dans l'équation $y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x')$ de la tangente. Pour prouver que cette méthode est, au fond, la même que la précédente, on démontre que la limite de $\frac{y}{x}$ égale celle de $\frac{dy}{dx}$, et que les coefficients linéaires sont pareillement égaux; mais cette démonstration se fait au moyen de règles reconnues inexactes. Il résulte de cette inexactitude qu'après avoir ainsi démontré qu'il y a identité entre l'asymptote et la limite des tangentes, on en vient à constater, sur certains exemples, que « l'asymptote n'est plus la limite des tan« gentes, » comme le dit M. Serret.

Il ne sera pas sans intérêt de montrer, une fois de plus, comment les plus forts géomètres deviennent le jouet d'une analyse défectueuse, qu'ils croient rigoureuse.

M. Serret, ayant représenté par $y=gx+h$ l'équation de l'asymptote, et par $y=\frac{dy'}{dx'}x+\left(y'-x'\frac{dy'}{dx'}\right)$ l'équation de la tangente, démontre qu'à la limite, on a $\frac{y}{x}=\frac{dy}{dx}$, et $y'-x'\frac{dy'}{dx'}=h$, et qu'ainsi les équations de l'asymptote et de la tangente devenant identiques, représentent la même droite.

Mais voilà que cette propriété, si généralement démontrée, n'a pas toujours lieu. M. Serret en fait lui-même la remarque, et explique ainsi le paradoxe :

« Ceci suppose toutefois que $\frac{dy}{dx}$ et $y-x\frac{dy}{dx}$ conservent des valeurs dé-

« terminées, quel que soit x; si le contraire avait lieu, l'asymptote ne serait « plus la limite des tangentes. »

Si la démonstration suppose cela, comment a-t-elle pu se faire sans cette supposition? Mais continuons :

« La courbe représentée par l'équation $y = \frac{\sin x}{x}$ offre un exemple de ce « cas; l'axe des x est ici une asymptote de la courbe, $\frac{dy}{dx}$ tend vers zéro « quand x tend vers l'infini, mais $y - x\frac{dy}{dx}$ est indéterminée pour $x=\infty$. »

L'auteur termine ainsi l'explication sans tirer la conclusion au clair. La limite de $y-x\frac{dy}{dx}$ est indéterminée, parce qu'elle devient $-\cos x$; pourquoi ne pas le dire?

Mais, si le coefficient angulaire devient zéro, et le coefficient linéaire $-\cos x$, on trouve ainsi $y = -\cos x$, pour l'équation de l'asymptote, comme pour celle de la limite des tangentes, puisque d'après la démonstration de M. Serret, ces deux droites ont la même équation. Dès que $-\cos x$ peut prendre une infinité de valeurs comprises entre $+1$ et -1, ne faut-il pas conclure que l'analyse précédente donne une infinité d'asymptotes, comme une infinité de limites pour les tangentes? Ce n'est pas du tout la manière de conclure de M. Serret. Il prétend, au contraire, que cette analyse ne donne ni asymptote ni limite de tangentes. Il reconnaît bien que l'axe des x est une asymptote ; mais elle est censée donnée par une autre méthode; tandis qu'aucune méthode ne lui indique le même axe comme limite de tangentes, en sorte que finalement la courbe $y=\frac{\sin x}{x}$ aurait une asymptote et point de limite de tangentes.

Par des considérations géométriques, Duhamel arrive pareillement aux conclusions suivantes, qu'il confirme sur l'exemple $y=\frac{a+\sin x}{x^m}$:

« 1° Toute limite des tangentes est asymptote.

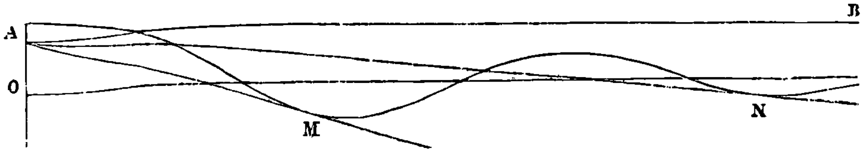
« 2° Une branche de courbe peut avoir une asymptote sans qu'il existe une « limite pour ses tangentes. »

C'est pourtant le contraire qui est vrai, et je dis :

Toute limite des tangentes n'est pas nécessairement asymptote ; mais toute asymptote est une limite de tangentes.

Pour le faire voir clairement, je reprends l'équation $y = \frac{\sin x}{x}$, représentant une courbe sinueuse (*fig.* 8), que l'axe des x partage en une infinité

Fig. 8.



d'arcs sous-tendus par des cordes égales à π. Si à tous ces arcs on mène des tangentes parallèles à l'axe des x, on aura ainsi une suite de tangentes qui auront évidemment pour limite l'axe lui-même. Ainsi l'axe des x est une limite de tangentes. C'est aussi une asymptote puisque la distance des points de contact à cet axe tend vers zéro.

L'axe des x est la seule asymptote, mais non la seule limite de tangentes.

En effet, puisque l'équation trouvée pour la limite des tangentes est $y = -\cos x$ et que $\cos x$ peut varier de $+1$ à -1, il s'ensuit que toute parallèle à l'axe des x, comprise entre $y = +1$ et $y = -1$, est une limite de tangentes : car soit AB une telle parallèle ; en menant les tangentes AM, AN, etc., on aura encore une autre série de tangentes qui auront évidemment pour limite AB, puisque l'angle MAB tend vers zéro sans pouvoir devenir nul.

Ainsi la droite AB est une limite de tangentes ; mais ce n'est pas une asymptote, puisque la distance des points de contact à cette droite a pour limite OA, et non zéro.

J'ai montré, de cette manière, que, conformément au résultat du calcul, toutes les parallèles à l'axe des x, comprises entre $y = +1$ et $y = -1$, sont des limites de tangentes ; ce qui contredit formellement l'assertion des géomètres qui affirment qu'il n'y a pour cette courbe aucune limite de tangentes.

Notre méthode ne donne pas lieu à l'erreur que je viens de mettre en évidence ; car le convergent, ou la limite, de $\frac{\sin x}{x}$ étant zéro, on a $y = 0$ pour l'équation de l'asyptote ; tandis que l'équation générale de la tangente, $y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x')$, appliquée à l'exemple $y = \frac{\sin x}{x}$, donne $y = -\cos x$ pour l'équation de la limite des tangentes.

Puisque l'identité n'existe pas entre cette équation et celle de l'asymptote, il est clair que M. Serret n'a pu la démontrer qu'au moyen d'un faux principe, ou d'une règle déduite de ce faux principe.

Le faux principe consiste à dire que $\frac{1}{x} = 0$ pour $x = \infty$; la règle déduite de ce faux principe consiste dans « l'élégante extension qui a été donnée par

« Cauchy à la règle de l'Hôpital, » et qui consiste à remplacer une fraction qui prend la forme $\frac{\infty}{\infty}$, par le rapport des dérivées de ses deux termes. En appliquant cette règle, la fraction $\frac{x \sin x}{x^2}$, dont la limite est évidemment zéro, se trouve remplacée par la fraction $\frac{x \cos x + \sin x}{2x}$, dont le convergent, qui est $\frac{\cos x}{2}$, varie avec x, et n'a pas de limite.

Il arrive ainsi que les deux fractions démontrées égales, sont reconnues inégales. Comme l'auteur ne voit pas la raison du paradoxe, l'explication qu'il en donne ne peut être qu'illusoire. « Cela suppose, » dit-il, « qu'elles « conservent des valeurs déterminées ; si le contraire avait lieu, l'asymptote « ne serait plus la limite des tangentes. »

Il serait bien plus simple et plus exact de dire : cela suppose que les deux fractions démontrées égales sont égales ; si le contraire a lieu, cela prouve que la démonstration ne vaut rien, ce qui n'empêche pas l'asymptote d'être toujours une limite de tangentes.

La méthode qualifiée par Auguste Comte, de « pleinement universelle » se trouve donc en défaut sur l'exemple de Duhamel, comme sur celui de M. Serret. Quand Auguste Comte dit que « toute asymptote constitue la limite « nécessaire d'une suite correspondante de tangentes, » il a raison contre Duhamel et Serret, qui assurent « qu'une branche de courbe peut avoir une « asymptote sans qu'il existe une limite pour ses tangentes. » Mais si la proposition d'Auguste Comte est exacte, sa réciproque ne l'est pas, et pour la complète universalité de la méthode il faudrait que toute limite de tangentes fût toujours une asymptote ; car alors les exemples qui donnent une infinité de limites de tangentes, donneraient pareillement une infinité d'asyptotes. Le défaut d'identité vient du défaut de la règle en vertu de laquelle on remplace le rapport $\frac{y}{x}$ par celui des dérivées de ses deux termes. C'est une nouvelle preuve de l'imperfection de « l'élégante extension donnée par Cauchy à « la règle de l'Hôpital. Le vice du principe sur lequel on fonde cette règle consiste à admettre que pour x et y infinis, on a $\frac{1}{x} = 0$ et $\frac{1}{y} = 0$.

Comme les autres, Auguste Comte adopte ce vicieux principe avec ses conséquences. « Si, » dit-il, « dans l'usage de cette méthode, les commençants « éprouvaient quelque difficulté à calculer directement les hypothèses « $x = \infty$, $y = \infty$, ils pourraient en éluder aisément l'embarras, d'après la « précaution algébrique de transformer préalablement x et y en $\frac{1}{t}$ et $\frac{1}{u}$, afin

« de supposer ensuite $t=0$, $u=0$, quand la formule aurait été ainsi conve-
« venablement préparée. L'habitude d'un tel expédient finira d'ailleurs par « indiquer spontanément le moyen de s'en dispenser, en faisant bientôt res- « sortir les principes relatifs à la substitution directe de l'infini, laquelle, « quoique moins simple que celle de zéro, consiste essentiellement, à ne « conserver, dans chaque formule algébrique, que le terme du plus haut « degré. »

Quand on suppose $t=0$ et $u=0$ dans les fractions $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{u}$, on suppose l'impossible.

C'est de cette manière qu'on établit la règle qui donne $\frac{x^2}{x}=\frac{2x}{1}$, pour x infini, puisque les termes de la seconde fraction sont les dérivées des termes de la première. Il en résulte $x=2x$ ou $x=0$, et, par suite, $0=\infty$.

On montrerait de même où peut conduire « l'expédient qui consiste essen- « tiellement à ne conserver que le terme du plus haut degré dans chaque « formule algébrique ; » car, si, en traitant le neuvième exemple, où il fallait trouver l'asymptote commune à toutes les courbes renfermées dans l'équation

$$y=\frac{x^5+7x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+H}{x^4-3x^3+B'x^3+C'x+H'},$$

on se fiait à l'expédient « qui consiste à ne conserver que le terme du plus haut degré » au numérateur et au dénominateur, on trouverait $\frac{x^5}{x^4}$ ou x, pour le convergent de la fraction, et $y=x$, au lieu de $y=x+10$ pour l'équation de l'asymptote.

Nous voyons qu'Auguste Comte a, comme les autres, présenté « l'analyse « transcendante avec cette grande imperfection philosophique, » qu'il a lui- « même constatée, en la fondant, lui aussi, « sur des principes métaphysi- « ques dont l'esprit humain a eu tant de peine à dégager toutes ses théories « positives. »

Différentielle de l'arc d'une courbe plane, ou à double courbure.

En désignant par c la corde qui sous-tend l'arc s, dont les extrémités ont pour coordonnées rectangulaires x, y, x', y', on aura $c^2=(x-x')^2+(y-y')^2$, ou, en leibnitzant, $ds^2=dx^2+dy^2$, qu'on peut écrire $\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$.

Si la courbe était à double courbure, et rapportée à trois axes rectangulaires, on aurait :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \text{ ou } \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}.$$

Pour établir ces formules, les auteurs imaginent je ne sais trop quoi ni pourquoi. Par exemple, Duhamel dit, sans le démontrer, « qu'on ne peut attacher un sens précis à la longueur d'une courbe, qu'en donnant ce nom à la « limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone inscrit dans cette « courbe, à mesure que ses côtés tendent vers zéro. Mais, » ajoute-t-il, « il « faut démontrer que cette limite existe et est unique, quelle que soit la loi « suivant laquelle les côtés de ce polygone tendent vers zéro »

Naturellement les auteurs répètent la même chose. On lit ainsi dans le cours d'analyse de Sturm : « On ne peut se faire une idée nette et « précise de la longueur d'une courbe qu'en nommant ainsi la limite vers « laquelle tend le périmètre d'une ligne brisée inscrite dans cette courbe « lorsque ses côtés sont de plus en plus petits, et que leur nombre croît « jusqu'à l'infini. Il devient nécessaire de démontrer que ce périmètre a « réellement une limite déterminée dans tous les cas. »

On ne peut pas dire que le second auteur ait copié le premier, puisqu'au lieu de dire : « le périmètre d'un polygone inscrit dans cette courbe, » il dit : « le périmètre d'une ligne brisée inscrite dans cette courbe, etc. »

Puisque, pour définir une ligne, Legendre dit : « La ligne est une longueur « sans largeur, » et que les géomètres répètent « une ligne est une longueur « sans largeur ni épaisseur, » c'est qu'on admet qu'avant même d'étudier la géométrie, tout le monde « attache un sens précis à la longueur d'une ligne, autrement « qu'en donnant ce nom à la limite vers laquelle tend le périmètre « d'un polygone inscrit dans cette ligne, à mesure que ses côtés tendent « vers zéro. »

Lorsqu'une ficelle retient le cerf-volant qui plane au-dessus de nos têtes, qui est-ce qui, pour se faire une idée de sa longueur, imagine d'y aller inscrire un polygone, et de faire tendre la longueur de son périmètre vers celle de la ficelle? Prendre ensuite la peine de démontrer que « cette longueur existe et « est unique, c'est vraiment pousser le scrupule trop loin.

Si encore on voyait, en fin de compte, l'utilité de ces subtilités. A mon avis, elles conduisent certains esprits à tout confondre, à admettre ce qui est douteux ou même faux pour démontrer ou rejeter ce qui est évident. M. Coyteux, par exemple, en arrive à dire, dans ses *Vrais Principes des Mathématiques* : « Le principe d'homogénéité consiste en ce que des grandeurs de

« même nature peuvent seules avoir entre elles des rapports de degrés ou de « quantités : il ne saurait y avoir aucun rapport réel de quantité entre deux « grandeurs hétérogènes, entre des étendues essentiellement différentes.

« Il y a, par exemple, une différence essentielle entre une ligne courbe et « une ligne droite, et entre des courbes de diverses courbures. Eh bien, ces « différences essentielles ne permettent pas d'admettre rationnellement un « rapport de quantité entre une ligne courbe et une ligne droite, ni entre des « lignes courbes de courbures diverses. La raison ne peut supposer que ces « lignes s'égalent en longueur, ou que leurs longueurs sont, entre elles, en « une certaine proportion géométrique ou arithmétique. »

Je veux bien admettre, avec l'auteur « qu'il ne saurait y avoir aucun rap- « port entre deux grandeurs hétérogènes, essentiellement différentes ; » qu'il serait absurde de chercher, par exemple, combien il faut de centimètres carrés pour faire un mètre cube. Mais deux longueurs sont essentiellement de même nature. Une carpe et un lapin sont d'espèce bien différente ; mais leurs poids peuvent être égaux ou dans un rapport quelconque. Si deux corps peuvent être de nature différente, leurs poids, comme leurs volumes, sont essentiellement de même nature. De même si une droite et une courbe sont de forme différente, leurs longueurs sont de même nature, et peuvent être dans un rapport quelconque, et il est évident pour tout le monde, qu'une circonférence est plus grande que son rayon.

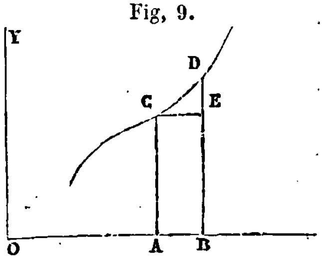
Voilà comment des philosophes et des savants en viennent à expliquer les choses en dépit du sens commun, comment M. Coyteux en vient à démontrer que « l'existence des corps est impossible, » et M. Bertrand, que « le nombre « concret n'est pas un nombre. »

Lorsque la courbe plane est exprimée en coordonnées polaires, au moyen du rayon r, et de l'angle θ que fait ce rayon avec l'axe fixe, on a

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2 \quad \text{ou} \quad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}.$$

Différentielle de l'aire d'une courbe plane.

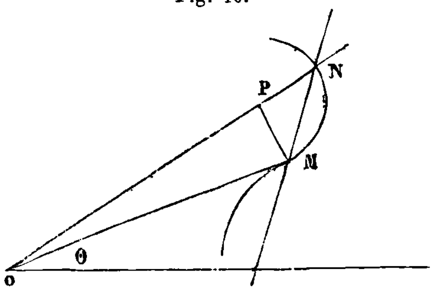
Fig, 9.



Soient AC (*fig.* 9) une ordonnée de la courbe, et α son aire limitée à cette ordonnée.

L'accroissement de cette aire est ABCD; mais, en leibnitzant, on le remplace par le rectangle ABCE, exprimé par ydx, et l'on écrit $d\alpha = ydx$, ou $\frac{d\alpha}{dx} = y$.

Fig. 10.



Si la courbe est exprimée en coordonnées polaires, OMN (*fig.* 10) représente l'accroissement de l'aire.

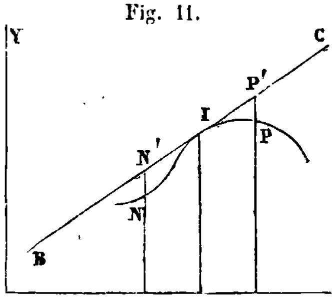
Quand on désigne par r le rayon OM, et par θ l'angle qu'il fait avec l'axe fixe, en leibnitzant, l'accroissement OMN se remplace par OMP, et MP par $rd\theta$; ce qui donne

$$d\alpha = \frac{1}{2} r^2 d\theta, \text{ ou } \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{1}{2} r^2.$$

Concavité et convexité.

Soient une courbe NIP (*fig.* 11) et une droite BC tangente en I à cette courbe. Si les points N et P, pris sur la courbe, de chaque côté du point I et très-près de ce point, sont du même côté de la tangente que l'ordonnée AI, on dit alors que la courbe est concave au point I. Si, au contraire, les points N et P se trouvaient de l'autre côté de la tangente, la courbe serait dite convexe au même point I.

Fig. 11.



Il résulte de cette définition, que, dans le cas de la concavité, les ordonnées DN et EP, qui se rapportent à la courbe, sont plus petites que les ordonnées DN', EP', qui se rapportent à la tangente, et plus grandes dans le cas de la convexité.

Désignant par x et y les coordonnées du point de contact, par h l'accroissement de x quand on passe au point voisin sur la courbe, par u l'ordonnée de ce dernier point, et par v celle du point correspondant sur la tangente; l'équation générale de la tangente donnera $v = y + \frac{dy}{dx} h$. D'ailleurs la formule de Taylor donne

$$u = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4} \frac{h^4}{1.2.3.4} + \cdots\cdots$$

Il en résulte

$$u - v = \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4} \frac{h^4}{1.2.3.4} + \cdots\cdots$$

Dans le cas de la concavité, u est plus petit que v, pour le point N comme pour le point P. Il en résulte que pour h négatif comme pour h positif, la valeur de u-v doit être négative. Mais, en supposant h infiniment petit, c'est le premier terme $\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}$ qui donne son signe à la valeur du polynôme;

et, comme le facteur $\frac{h^2}{1.2}$ est toujours positif, c'est le facteur $\frac{d^2y}{dx^2}$ qui doit être négatif pour la concavité, et positif pour la convexité.

POINTS SINGULIERS.

Point d'inflexion. — Si les deux points N et P situés de part et d'autre du point de contact ne sont plus du même côté de la tangente, la concavité se change en convexité, et le point où s'opère ce changement se nomme point d'*inflexion.*

Pour que le point M devienne un point d'inflexion, il faut donc que la la différence u—v, exprimée par le polynôme

$$\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{1.2.3.4}+\ldots\ldots,$$

change de signe avec h, ce qui ne peut arriver qu'à la condition que $\frac{d^2y}{dx^2}=0$; car alors, c'est le terme suivant qui donne son signe au polynôme, et peut changer de signe avec h, qui y entre à la 3^{me} puissance.

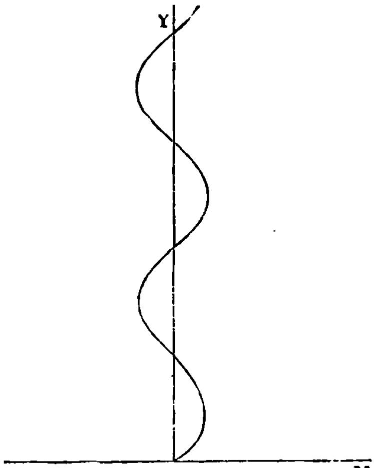
Je viens de prouver que pour le point d'inflexion le terme $\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}$, ou plutôt le facteur $\frac{d^2y}{dx^2}$ doit devenir nul, afin que la différence u–v puisse changer de signe avec h.

Je démontre ainsi qu'il est nécessaire que $\frac{d^2y}{dx^2}$ passe par zéro au point d'inflexion. Il paraît qu'ici encore l'infini produit le même effet que zéro. Du moins il y a des auteurs, comme Duhamel et Sturm, qui le disent:

« Lorsque la concavité se change en convexité, » dit Duhamel, « $\frac{d^2y}{ax^2}$ doit « changer de signe, et par conséquent passer par zéro ou l'infini : les points « où s'opère ce changement se nomment *points d'inflexion.* »

Lorsque la concavité se change en convexité les points où s'opère ce changement, ne sont pas nécessairement des points d'inflexion, autrement tous les points du cercle seraient des points d'inflexion, puisque, suivant la position que l'on prend, chaque point du cercle peut devenir celui « où s'opère « ce changement. »

Fig. 12



Si, dans l'équation $y=\sin x$, de la sinussoïde (*fig.* 12), on prend l'axe des x pour celui des y, et réciproquement, l'équation devient $y = \arcsin x$, et elle donne

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

Cette dérivée passe par zéro avec x, c'est-à-dire chaque fois que y passe par un multiple de π. D'après notre démonstration, les points correspondants, c'est-à-dire ceux où la courbe traverse l'axe de x, sont des points d'inflexion.

On dit aussi que la dérivée

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

passe par l'infini pour $x = 1$. Je veux bien admettre l'expression. Duhamel ajoute : « Si $\frac{d^2y}{dx^2}$ est infini, il faudra s'assurer s'il change de « signe. » J'admets encore qu'on s'en soit assuré ; mais ce que je n'accorde pas, c'est que les points où s'opèrent ce passage et ce changement soient des points d'inflexion. La figure géométrique, d'accord avec la démonstration analytique, fait voir clairement qu'en ces points il n'y a pas d'inflexion, quoiqu'effectivement la convexité s'y change en concavité, et qu'ainsi l'infini ne produit ni le même compte ni le même effet que zéro.

On appelle point multiple un point par lequel passent plusieurs branches d'une courbe ; point conjugué celui qui se trouve isolé des autres points de la courbe ; point d'arrêt un point où s'arrête une branche unique ; point saillant ou anguleux, un point où s'arrêtent deux branches de courbe qui n'ont pas la même tangente ; point de rebroussement un point où s'arrêtent deux branches qui ont la même tangente en ce point.

Soit $y = x^3 + (x-1)\sqrt{x-2}$ l'équation d'une courbe.

Puisque $\sqrt{x-2}$ a deux valeurs égales et de signes contraires pour toute valeur de x, la courbe aura deux branches qui viendront se réunir au point correspondant à $x = 2$, et pour lequel $y = 2^3$. Les deux branches s'arrêtent à ce point, parce que, pour $x < 2$, $\sqrt{x-2}$ devient imaginaire. Ce point serait anguleux si les tangentes menées, en ce point, aux deux branches, faisaient un angle différent de zéro ; mais ici ces deux tangentes se confondent, puisque, pour $x=2$, le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ a une valeur unique ; d'où il suit que le point est de rebroussement.

J'ai dit que pour toute valeur de x plus petite que 2, les valeurs de y sont imaginaires ; il faut cependant en excepter la valeur de y qui correspond à $x = 1$; car alors le terme $(x-1)\sqrt{x-2}$ égale zéro et y égale 1. Ainsi le point dont les coordonnées sont $x = 1$ et $y = 1$, est un point isolé ou conjugué.

Centre et rayon de courbure des courbes planes.

Soient s la longueur d'un arc de cercle, a l'angle au centre, et r le rayon ; on a $s = ar$ et $r = \frac{a}{s}$.

La courbure est constante en tous les points d'un même cercle, mais varie d'un cercle à l'autre : elle est en raison inverse du rayon et se mesure par $\frac{1}{r} = \frac{s}{a}$.

Dans toute autre courbe, la courbure varie d'un point à l'autre, et, en leibnitzant, sa mesure, en chaque point, est donnée par la formule $\frac{1}{r} = \frac{ds}{da}$, dans laquelle ds représente la longueur d'un arc infiniment petit, da l'angle infiniment petit que font les normales menées aux extrémités de l'arc ds, et r la longueur de chacune de ces normales, terminées en leur point de rencontre.

Si, de ce point comme centre, on décrit un cercle de rayon r, ce cercle aura même tangente et même courbure que la courbe au point de contact ; son rayon et son centre sont dits le rayon et le centre de courbure de la courbe.

Courbes osculatrices.

Soient $F(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe fixe, et $\varphi(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe qui renferme n coefficients arbitraires. On pourra déterminer ces n coefficients de manière que la seconde ait n points communs avec la première. Lorsque ces n points distincts seront infiniment près les uns des autres, la courbe ainsi déterminée sera dite osculatrice à la courbe $F(x, y)=0$.

L'équation du cercle pouvant avoir trois coefficients arbitraires, on pourra les déterminer de manière qu'il passe par trois points de l'élément ds pris sur la courbe $F(x, y)=0$; on aura ainsi le cercle osculateur, qui sera le même que le cercle de courbure.

Contact des courbes planes.

Soient $Y=F(x)$ et $y=f(x)$, les équations de deux courbes. Lorsqu'on augmente x de h, les accroissements K et k de Y et y, sont

$$K=F'(x)h+F''(x)\frac{h^2}{1.2}+F'''(x)\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots,$$

et

$$k=f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{1.2}+f'''(x)\frac{1.2.3}{h^3}+\ldots.$$

Si, pour un point commun aux deux courbes, on a $F'(x)=f'(x)$, le terme du premier ordre de la différence $K-k$ étant nul, cette différence est du second ordre, et l'on dit que les deux courbes ont un contact du premier ordre. Elles ont un contact de l'ordre n, lorsque la différence $K-k$ est de l'ordre $n+1$.

Courbes enveloppes et développées.

A chaque point d'une courbe correspond son centre de courbure ; le lieu des centres de courbure d'une courbe s'appelle sa développée, et la première courbe s'appelle l'enveloppe de la seconde.

Des courbes à double courbure.

Une courbe qui n'est pas plane est dite à double courbure.

Soient s un arc de la courbe, c sa corde et x, y, z, les projections de c sur les trois axes. On a $c^2=x^2+y^2+z^2$, et, en leibnitzant, $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$.

Le plan mené par le point de contact, perpendiculairement à la tangente, s'appelle plan normal. Toute droite située dans le plan normal, est une normale à la courbe, et tout plan conduit par la tangente, est un plan tangent à la courbe.

LIVRE TROISIÈME

CALCUL INTÉGRAL

Le calcul intégral est l'inverse du calcul différentiel, et l'intégration désigne l'opération inverse de la différentiation, celle qui a pour objet de remonter de la différentielle d'une fonction à cette fonction même, qui s'appelle alors somme ou intégrale, parce qu'elle est considérée comme la somme intégrale de tous ses éléments, représentés par la différentielle de la fonction.

Ces éléments sont les accroissements supposés infiniment petits que reçoit successivement la fonction quand la variable passe d'une valeur a à une autre valeur b.

La somme de ces éléments se désigne par la lettre S, initiale du mot somme, et on lui donne la forme allongée $\int$, qui la rend plus propre à recevoir des indices. De cette manière, la somme des accroissements successifs que prend la fonction $F(x)$ quand x passe de a à b, se désigne par $\int_a^b F'(x)\,dx$, et les valeurs a et b sont dites les limites de l'intégrale.

Dans le système de Lagrange, $F'(x)$ désigne la dérivée de $F(x)$. Malgré la simplicité de cette notation, elle présente une double imperfection analytique très-grave. Le premier défaut consiste en ce que la relation qui lie les deux fonctions l'une à l'autre ne se formule pas par une équation. Le second défaut consiste en ce que la notation ne s'étend pas des spéculations théoriques aux applications particulières ; ainsi, elle ne saurait exprimer que $3x^2$ est la dérivée de x^3, ou que $\frac{1}{x}$ est la dérivée de lx.

On comprend bien que des inconvénients si graves aient laissé à la notation de Leibnitz une supériorité pratique incontestable sur celle de Lagrange.

Le remède à ce double défaut était cependant facile ; car en adoptant les deux signes $\reflectbox{\ensuremath{\int}}$, $\int$, tournés en sens contraires, pour exprimer les passages en sens contraires, d'une fonction à sa dérivée, et d'une dérivée à sa fonction primitive, on écrirait :

$$\reflectbox{\ensuremath{\int}} \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}'(x), \text{ et } \int \mathrm{F}'(x) = \mathrm{F}(x).$$

On aurait, par exemple :

$$\reflectbox{\ensuremath{\int}} x^3 = 3x^2, \text{ et } \int 3x^2 = x^3,$$

ou encore

$$\reflectbox{\ensuremath{\int}} \sin x = \cos x, \text{ et } \int \cos x = \sin x.$$

Cette notation offrirait l'avantage si recherché par Lagrange de présenter « les principes du calcul différentiel et du calcul intégral, dégagés de « toute considération d'infiniment petits et de limites. »

Dans la méthode infinitésimale le signe $\int$ est employé pour indiquer le passage non de la dérivée, mais de la différentielle, à la fonction primitive ; et il conviendrait d'employer le même signe tourné en sens contraire pour indiquer l'opération contraire.

De cette manière, les relations précédentes se remplaceraient par les suivantes :

$$\reflectbox{\ensuremath{\int}} \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}'(x)dx \quad \text{et} \int \mathrm{F}'(x)dx = \mathrm{F}(x)$$

$$\reflectbox{\ensuremath{\int}} x^3 = 3x^2dx \quad \text{et} \int 3x^2dx = x^3$$

$$\reflectbox{\ensuremath{\int}} \sin x = \cos x dx \quad \text{et} \int \cos x dx = \sin x.$$

Au moyen de ces notations, le passage des fonctions simples à leurs différentielles, et le passage, en sens contraire, de ces différentielles à leurs intégrales ou fonctions primitives, se trouveraient représentés et réunis dans le tableau suivant :

$d\, x^m = x^{m-1}\, dx$	$\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$
$d \log x = \frac{\log e}{x}\, dx$	$\int \frac{dx}{x} = \frac{\log x}{\log e}$
$d\, \mathrm{l}x = \frac{dx}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \mathrm{l}x$
$d\, a^x = a^x\, \mathrm{l}a\, dx$	$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\mathrm{l}a}$
$d\, e^x = e^x\, dx$	$\int e^x\, dx = e^x$
$d \sin x = \cos x dx$	$\int \cos x dx = \sin x$
$d \cos x = -\sin x dx$	$\int \sin x\, dx = -\cos x$
$d\, \mathrm{tang}\, x = \frac{dx}{\cos^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tang}\, x$
$d \cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$
$d\, \mathrm{séc}\, x = \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$	$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \mathrm{séc}\, x$
$d\, \mathrm{coséc}\, x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx$	$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx = -\mathrm{coséc}\, x$
$d\, \mathrm{arc} \sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{arc} \sin x$
$d\, \mathrm{arc} \cos x = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{arc} \cos x$
$d\, \mathrm{arc\ tang}\, x = \frac{dx}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arc\ tang}\, x$
$d\, \mathrm{arc} \cot x = -\frac{dx}{1+x^2}$	$\int \frac{-dx}{1+x^2} = \mathrm{arc} \cot x$
$d\, \mathrm{arc\ séc}\, x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{arc\ séc}\, x$
$d\, \mathrm{arc\ coséc}\, x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{arc\ coséc}\, x$

Comme la notation de Leibnitz restera longtemps encore généralement usitée, c'est celle dont il faut surtout expliquer et justifier l'emploi.

Il est évident que toute grandeur est égale à la somme de ses parties. C'est l'axiome si connu : « Le tout est égal à la somme des parties dans lesquelles « il a été divisé. » On reproduit en d'autres termes cet axiome en disant que toute valeur d'une variable est égale à la somme de ses accroissements quelconques ou infiniment petits, lorsqu'elle va de zéro à cette valeur particulière. Or, l'accroissement infiniment petit d'une variable u se désigne par du, et en indiquant par $\mathrm{S}du$ la somme des accroissements dont se compose la valeur u, on aurait $\mathrm{S}du = u$.

On donne à la lettre S la forme $\int$, plus propre à recevoir des indices, et l'on écrit $\int du = u$. Si l'on fait $u = \mathrm{F}(x)$, on aura pareillement $\int \mathrm{F}'(x)\, dx = \mathrm{F}(x)$. Par exemple, lorsque $\mathrm{F}(x) = x^3$, on a $\int 3x^2 dx = x^3$. Si $\mathrm{F}'(x) = x^m$, on a $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$.

Cette dernière formule donne lieu à une remarque que les auteurs présentent d'une manière bien étrange.

En effet, cette formule devient illusoire pour $m = -1$, puisqu'elle donne $\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{0}$; ce qui est l'infini absolu. D'ailleurs on sait que $\int \frac{dx}{x} = \mathrm{l}x$. Ainsi cette dernière formule donne très-simplement le résultat cherché, et prouve de plus que l'autre donne un résultat absurde : mais, si les auteurs s'en tenaient à cette simple remarque, ils croiraient n'avoir rempli que le quart de leur devoir. Ils reconnaissent bien que le résultat $\frac{1}{0}$, donné pour $\int \frac{dx}{x}$, est absurde ; mais ils ne le tiennent pas quitte pour cela, et quoique $\frac{1}{0}$ ne contienne $\mathrm{l}x$ ni en figure ni en peinture, ils vont l'en faire sortir avec la plus grande dextérité, et par une sorte de prestigitation qu'ils qualifient d'artifice de calcul.

Quand le tour est annoncé sous ce titre :

« Démonstration de $\frac{1}{0} = \mathrm{l}x$, »

il faut désespérer de rien trouver de plus fort dans les répertoires des Bosco et des Robert-Houdin. Cependant les traités de Duhamel, de Sturm, de Serret, de Cournot, de Bertrand, de l'abbé Moigno, etc., ne manquent pas ce tour. M. Bertrand le donne comme facile, et l'opère en disant :

« On a, quel que soit m :

$$« \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

« Le cas où $m = -1$ fait exception ; on a alors

$$« \int \frac{dx}{x} = 1x,$$

« et la formule donnerait

$$« \int \frac{dx}{x} = \infty.$$

« Il est aisé cependant de déduire de la formule $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, » la valeur de $\int \frac{dx}{x}$. On sait qu'il est permis d'ajouter au second membre « une constante arbitraire ; choisissons-la de telle sorte que celui-ci s'an- « nule pour une valeur déterminée de x, $x = a$: on est assuré alors qu'il « ne peut plus devenir infini. On a

$$« \int x^m dx = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1},$$

« et si l'on fait tendre m vers -1, l'intégrale prend la forme $\frac{0}{0}$, mais la « véritable valeur est $1x$. »

On voit percer dans ce langage toutes les précautions oratoires que prend d'habitude celui qui veut que son tour réussisse. Tout d'abord, après avoir dit : « la formule $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ donne $\int \frac{dx}{x} = \infty$, » il ajoute aussitôt : « Il est aisé cependant d'en déduire la valeur de $\int \frac{dx}{x}$. »

Vous comprenez la distinction : ce que donne la formule ne vaut rien, mais ce qu'on en tire est très-bon. C'est ainsi qu'un escamoteur vient vous tirer des pièces de cent sous du nez, qui de lui-même ne donne rien de bon.

« Il est permis d'ajouter une constante arbitraire; » mais on la choisit variable. Cette constante variable est $-\frac{a^{m+1}}{m+1}$, où « l'on fait tendre m vers -1; » et qui devient $-\frac{1}{0}$. En sorte qu'au moyen de cette constante qui varie et devient $-\frac{1}{0}$, la formule donne $\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{0} - \frac{1}{0}$. Si l'on avait besoin de trouver zéro pour $\int \frac{dx}{x}$, on y serait tout de suite en disant : il est évident que $\frac{1}{0} - \frac{1}{0} = 0$. Mais ce n'est pas zéro, c'est $1x$ qu'il faut faire sortir de $\frac{1}{0} - \frac{1}{0}$. Pour cela, on réunit en un seul les deux termes du second membre de la formule $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}$, et ce second membre devient ainsi $\frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$. On y fait $m = -1$, aussi bien dans la constante variable que partout ailleurs; ce qui réduit la formule à $\int \frac{dx}{x} = \frac{0}{0}$. Voilà donc que la formule qui attribuait tout-à-l'heure une valeur infinie à $\int \frac{dx}{x}$, lui donne maintenant une valeur complètement indéterminée; cependant, comme ce n'est ni une valeur infinie ni une valeur indéterminée, mais uniquement $1x$ qu'on en veut faire sortir, on profite de ce que la valeur $m = -1$ réduit la fraction $\frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$ à $\frac{0}{0}$, pour y appliquer la règle de l'Hôpital, en substituant aux deux termes de la fraction, leurs dérivées prises par rapport à m, et en y faisant ensuite $m = -1$; ce qui donne $1x - 1a$, comme il est dit dans les traités de Duhamel et de l'abbé Moigno. M. Bertrand fait donc une erreur en disant : « la véritable valeur est $1x$; » cependant il y « a moyen de l'excuser, car puisqu' « il est permis d'ajouter une constante » variable $-\frac{a^{m+1}}{m+1}$, ou même une constante infinie $-\frac{1}{0}$, il doit être permis, à plus forte raison, d'ajouter $1a$ qui est une constante finie et invariable, ce qui réduit finalement $1x - 1a$ à $1x$, comme le dit M. Bertrand.

Le tour pourrait encore se simplifier, car en prenant simplement $-\frac{1}{m+1}$, au lieu de $-\frac{a^{m+1}}{m+1}$, pour la constante, on serait ainsi dispensé du calcul qui donne $-1a$, et l'on n'aurait pas bésoin de retrancher cette constante pour obtenir juste $1x$. C'est justement cette manière d'opérer qui est indiquée dans le traité de Sturm :

« La formule $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ devient illusoire quand on y fait « $n = -1$: elle donne alors $\frac{dx}{x} = \frac{1}{0} + C$.

« Cependant un artifice de calcul permet d'en déduire la valeur de $\int \frac{dx}{x}$.

« En effet, si, dans cette formule, on retranche du second membre la « quantite constante $\frac{1}{n+1}$, ce qui ne change pas sa différentielle, on aura

$$« \int x^n dx = \frac{x^{n+1}-1}{n+1} + C.$$

« Or, si l'on fait $n=-1$, la fraction $\frac{x^{n+1}-1}{n+1}$ devient $\frac{0}{0}$; pour avoir sa « vraie valeur par la méthode connue, il faut prendre la dérivée des deux « termes par rapport à n, et faire $n=-1$ dans le quotient de ces dérivées, « c'est-à-dire, dans $\frac{x^{n+1}\,lx}{1}$, ce qui donne lx. On a donc $\int\frac{dx}{x}=lx+C$.

Cournot avoue bien que « la constante arbitraire doit être supposée infinie « en même temps que le terme variable. » C'est évident, puisqu'on a besoin que leur différence fasse zéro; mais l'abbé Moigno paraît choqué d'une constante infinie : aussi, selon lui, elle n'est infinie qu'en apparence. « Le second « membre, » dit-il « de la formule $\int x^n\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ semble devenir infini « ponr $m=-1$; mais il devient réellement indéterminé. »

Ainsi « le second membre devient réellement indéterminé, » mais son indétermination n'est pas sérieuse; elle est seulement apparente, puisqu' « on « obtient sa véritable valeur en prenant le rapport des dérivées de ses deux « termes. »

J'ai montré qu'on simplifie le tour en préférant, comme Sturm, la constante $\frac{1}{m+1}$ à $\frac{a^{m+1}}{m+1}$. Mais le tour se simplifierait encore davantage en faisant la constante nulle; car, en prenant les dérivées par rapport à m dans les deux termes de la fraction $\frac{x^{m+1}}{m+1}$, elle se trouve remplacée par $\frac{x^{m+1}\,lx}{1}$, qui se réduit à lx pour $m=-1$. Ce serait une nouvelle et « élégante extension don- « née à la règle de l'Hôpital, » puisqu'elle offrirait le moyen d'éviter l'emploi des constantes *variables et infinies.*

Si cet exemple ne devait pas se représenter, je ne le quitterais pas sans faire une objection importante, en demandant comment lx peut donner la somme des éléments $\int\frac{dx}{x}$ dans le cas de x négatif, puisqu'on n'accorde point de logarithmes réels aux nombres négatifs. Mais la question reviendra justement à propos de cette difficulté, et nous trouverons là une curieuse manière d'y répondre.

La difficulté qui s'est présentée au début du calcul différentiel, se représente au début du calcul intégral. Comme je l'ai prouvé, elle n'est résolue ni par le principe leibnitzien, ni par celui des erreurs compensées, ni même par le principe qui a été confectionné tout exprès par Duhamel, et reproduit par tous les auteurs qui sont venus après lui.

Les deux équations $\partial x^3 = 3x^2$ et $\int 3x^2 = x^3$, dont la première exprime que la dérivée de x^3 est $3x^2$, et la seconde, que réciproquement, la dérivée $3x^2$ a x^3 pour fonction primitive, sont très–claires, très-exactes, et ne donnent lieu à aucune objection. Au moyen des notations leibnitziennes, la première équation s'écrit $\frac{dx^3}{dx} = 3x^2$. Quant à la seconde relation, on y remplace la dérivée par la différentielle, en écrivant

$$\int 3x^2 dx = x^3.$$

La première a été longuement discutée dans le calcul différentiel : nous ne nous occuperons ici que de la seconde.

L'équation $\int 3x^2 dx = x^3$ exprime que la somme de tous les éléments ou accroissements représentés par $3x^2 dx$, est égale à x^3. Or, quand x augmente de h, la fonction x^3 augmente de $3x^2 h + 3xh^2 + h^3$; ainsi quand on écrit $\int 3x^2 dx = x^3$, on ne prend que le premier terme de l'accroissement de x^3, et l'on néglige les autres. L'équation $\int 3x^2 dx = x^3$ n'est donc pas exacte, à moins que l'on ne dise que les infiniment petits qu'on néglige, sont absolument nuls, ou qu'ils se détruisent mutuellement dans les calculs.

Euler et d'Alembert étaient du premier avis, et croyaient que le résultat obtenu n'était parfaitement exact que parce que les infiniment petits négligés étaient absolument nuls. Lagrange a dit « que ceux qui, d'après Euler, « regardent les différentielles comme de véritables zéros, sont dans toute la « rigueur de l'analyse. » J'ai dit qu'ils sont dans toute la rigueur de l'absurdité, car c'est prétendre qu'une somme de zéros, représentée par $\int 3x^2 dx$, peut donner x^3.

L'accroissement h étant arbitraire, il est évident qu'on peut le faire absolument nul; mais alors le terme $3x^2 h$ est nul lui-même, et $\int 3x^2 dx$ serait l'expression d'une somme de zéros ; or, il est absurde d'admettre qu'une somme de zèros puisse faire x^3. Mais, si le terme $3x^2h$ n'est pas nul, les deux autres $3xh^2$ et h^3 ne le sont pas non plus, et il n'est pas possible que la somme $\int 3x^2h$ soit égale à la somme $\int (3x^2h + 3xh^2 + h^3)$.

C'est bien vainement qu'on prétendrait, avec Fontenelle, Carnot, Ch. de Freycinet, etc., que « les termes négligés doivent l'être, pour rétablir la « réalité des choses, » puisqu'on voit clairement que c'est, au contraire, en rétablissant les termes négligés, qu'on « rétablit la réalité des choses. »

L'accroissement de x^3 est représenté géométriquement par l'aire comprise entre les deux ordonnées correspondant aux abscisses x et $x+h$. Cet élément est un trapèze, comprenant le rectangle $3x^2\,dx$, et un triangle rectangle dont l'hypothénuse est un élément de la courbe. Négliger $3xh^2 + h^3$, c'est négliger le petit triangle. C'est fausser et non rétablir la réalité des choses. L'explication donnée au moyen du second principe de Duhamel, est, en apparence, bien plus rationnelle. Il l'énonce en ces termes :

« La limite de la somme de quantités positives infiniment petites n'est pas « changée quand on remplace ces quantités par d'autres dont les rapports « avec elles ont respectivement pour limite l'unité. »

« En vertu de ce principe fondamental, » dit-il ailleurs, « on peut négliger « toute quantité infiniment petite par rapport à la différentielle, et il n'en « résulte aucune erreur dans l'intégrale, qui peut être considérée comme la « limite d'une somme d'infiniment petits. »

Ainsi, pour faire l'application de ce principe à notre exemple, on dirait que, la somme des trapèzes représentant exactement l'aire de la courbe, la somme des rectangles a pour limite la somme des trapèzes, ou l'aire de la courbe. On aurait donc exactement $\int (3x^3dx + 3xdx^2 + dx^3) = x^3$, et $\lim \int 3x^2dx = x^3$, en sorte que si, pour abréger, on entendait par $\int 3x^2dx$, $\lim \int 3x^2dx$, l'équation $\int 3x^2dx = x^3$ deviendrait, dans ce sens, parfaitement exacte.

Voilà un raisonnement bien seduisant ; cependant son application tombe à faux.

En effet, il s'appliquerait à la question si, n'ayant pas le moyen de calculer directement la somme des trapèzes, on trouvait directement la fonction qui représente la somme des rectangles ; car il suffirait de déterminer la limite de cette fonction pour avoir la somme des trapèzes, c'est-à-dire l'aire de la courbe. Mais on n'a aucun moyen d'obtenir cette fonction. Aussi, les auteurs qui ont suivi Duhamel, se sont fait, sur ce point, la même illusion que Carnot, Lagrange et Auguste Comte, au sujet de l'erreur que l'on commet en comparant la courbe à un polygone, et qui se trouverait, selon eux, détruite dans le calcul, lorsqu'on néglige les infiniment petits. Cette erreur n'atteint pas le calcul, parce qu'on opère directement sur l'équation de la courbe, et non sur celle du polygone. De même, dans notre question, c'est l'expression de l'aire de la courbe que l'on obtient directement, et non l'expression de la somme des rectangles représentés chacun par $3x^2\,dx$ dans notre exemple, ou, d'une manière générale, par $F'(x)\,dx$.

Il arrive ainsi que le principe sur lequel on a prétendu asseoir le calcul intégral, comme celui sur lequel on a cru fonder le calcul différentiel, n'y trouve réellement cucune application, ou, du moins, qu'une application illusoire.

Ainsi, ni le principe de Leibnttz, ni celui de Carnot, ni celui de Duhamel ne présentent ce qu'Auguste Comte appelle « la véritable explication logique « directe de la méthode infinitésimale. »

Contrairement à l'opinion qui résulte de la dénomination du calcul infinitésimal, cette véritable explication logique n'a pas plus besoin de l'intervention de l'infini, que celle des pompes n'a besoin de l'horreur du vide.

Pour le prouver, soient $y=x^8$, et h un accroissement quelconque donné à x. On a identiquement :

$$(x+h)^8 - x^8 = 8x^7h + 28x^6h^2 + 56x^5h^3 + \ldots\ldots + \ldots + 8xh^7 + h^8.$$

Les deux fonctions x^8 et $8\,x^7$ sont déterminées l'une par l'autre d'après la loi même du développement, en sorte que chacune des deux pouvant se déduire de l'autre, sans le secours des termes suivants, je ne vois pas la nécessité d'anéantir ceux dont on ne se sert pas, ou de prouver qu'ils s'entredétruisent.

Il suffit donc qu'une fonction puisse se déduire de sa différentielle première, pour que l'on comprenne que l'on peut se passer des suivantes, sans qu'on ait besoin d'anéantir celles dont on ne se sert pas, ou de démontrer qu'on a le droit et le devoir de les négliger.

Si l'on désignait par $\int 8x^7dx$ la fonction dont la différentielle première est $8x^7dx$, l'équation $\int 8x^7dx = x^8$ signifierait que la fonction dont la différentielle est $8x^7dx$ égale x^8, et l'on voit que cette relation n'exprimerait rien que de très-clair.

Mais si, pour faire image, on entend que $\int 8x^7dx$ indique une somme d'éléments, l'équation $\int 8x^7dx = x^8$, n'est plus exacte, en ce sens que x^8 ne donne pas la somme des éléments rectangulaires représentés par $8x^7dx$, mais bien la somme des éléments complets compris entre les ordonnées consécutives.

Afin de pouvoir dire que $\int 8x^7dx$ désigne la limite de la somme des éléments, et non la somme elle-même, il faudrait que le calcul donnât pour la somme $\int 8x^7dx$ une fonction dont la limite fût x^8, tandis qu'il donne x^8 directement.

La notation $\int y\,dx$ a donc l'avantage d'être la plus claire et la plus simple. L'erreur qu'elle renferme, comme celle que l'on fait en prenant la courbe pour un polygone, restant dans l'idée, et ne passant pas dans le calcul, ne saurait en atteindre ni fausser le résultat.

C'est dans cette explication que se trouve réellement la vraie métaphysique de la méthode infinitésimale, dégagée de toute considération de limites et d'infiniment petits.

Si l'on construit, en coordonnées rectangulaires, la courbe $y = \mathrm{F}'(x)$, et qu'on fasse varier x par degrés égaux et infiniment petits, représentés par dx, les rectangles ydx varieront de hauteur avec y, et, en leibnitzant, on prendra leur somme, désignée par $\int y\,dx$, pour l'aire de la courbe.

Lorsque x varie d'une manière continue depuis a jusqu'à b, il est évident que la somme des accroissements de $\mathrm{F}(x)$ égale $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$, et l'on écrit

$$\int_a^b \mathrm{F}'(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Que devient cette formule lorsque la fonction $y = \mathrm{F}'(x)$ ne varie pas d'une manière continue entre a et b, ou, en d'autres termes, lorsque la courbe présente une rupture ou solution de continuité, pour quelque valeur comprise entre a et b? Cette question n'est pas trop bien résolue par les auteurs, et faute de la bien comprendre, ils se sont (pour employer l'expression de Carnot), « engagés dans un labyrinthe de paradoxes tous plus bizarres les uns que les autres. »

Si l'on prend un point O sur la droite menée par les deux bouts A et B d'un bâton, la longueur l de ce bâton sera donnée évidemment par la formule $l = \mathrm{OA} - \mathrm{OB}$.

Si le bâton éprouve une rupture, s'il est cassé en deux morceaux, il y a deux cas à considérer : 1° celui où les deux morceaux restent joints, et où l'on a encore $l = 0A - 0B$; 2° celui où les deux morceaux sont séparés, et où l'on n'a plus $l = 0A - 0B$, puisque pendant que vous tenez un bout, l'autre peut être porté aux antipodes.

Pour la courbe, la rupture a lieu quand la fonction $F'(x)$ passe par l'infini, et le cas où les deux morceaux restent joints est celui où la fonction $F(x)$ reste finie ; dans ce cas on a encore $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - (Fa)$. Le cas où les deux morceaux sont séparés est celui où la fonction $F(x)$ devient infinie en même temps que $F'(x)$, et dans ce cas la formule étant absolument fausse, il n'y a rien a en tirer.

Supposons que, pour une valeur α comprise entre a et b, la valeur de $F(\alpha)$ soit infinie ; c'est l'infini absolu. La somme $\int_a^b F'(x)\, dx$ indique alors une aire infinie qu'aucun nombre ne peut représenter. Cette aire se compose de deux parties séparées par l'ordonnée $x = \alpha$, et qui sont infinies l'une et l'autre. Leur somme est évidemment infinie quand elles sont de même signe ; mais si leurs éléments sont de signes contraires, leur somme algébrique représente la différence de leurs valeurs absolues. Or comme la différence de deux infinis peut être finie, Cauchy et d'autres sont arrivés à nous fournir le moyen de distinguer si l'intégrale est infinie ou finie, déterminée ou indéterminée, et même le moyen d'en calculer la valeur principale.

Ainsi, M. Bertrand prend l'exemple $\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}$, où la fonction $F'(x) = \frac{1}{x^3}$, et la fonction $F(x) = -\frac{1}{2x^2}$ deviennent infinies pour $x = 0$, et il trouve que « l'expression $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^3}$, qui en elle-même est indéterminée, « a pour valeur principale zéro. »

Les traités de Duhamel, Sturm, Serret, Moigno, etc, considérant l'intégrale $\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x}$, trouvent qu'elle est égale à $1\frac{b}{a} + 1\frac{\mu}{\nu}$, c'est-à-dire indéterminée, puisque μ et ν sont quelconques, mais que sa valeur principale est $1\frac{b}{a}$.

Toutes ces trouvailles sont parfaitement absurdes, parce qu'elles résultent d'opérations faites sur l'infini absolu, au moyen desquelles on peut trouver tout ce qu'on veut.

Je ne reproduirai pas leurs démonstrations ; seulement je voudrais bien demander pourquoi ils trouvent $1\frac{b}{a}$, et non $1\frac{+b}{-a}$, pour la valeus principale de $\int_{-a}^{+b}\frac{dx}{x}$, puisque ses limites sont $-a$ et $+b$, et non a et b?

La réponse me sera facile. D'abord ils trouvent $1\frac{b}{a}$, parce qu'on trouve tout ce qu'on veut. Ensuite ils ne trouvent pas $1\frac{+b}{-a}$, parce qu'une valeur principale representée par $1\frac{+b}{-a}$ les embarrasserait beaucoup dans une théorie qui n'accorde point de logarithmes aux nombres négatifs.

Ainsi, Duhamel trouve $1\frac{b}{a}$ pour $\int_{-a}^{-b}\frac{dx}{x}$, comme pour $\int_{a}^{b}\frac{dx}{x}$, après avoir dit que les éléments sont de signes contraires. Il trouve de même $1\frac{b}{a}$ pour valeur principale de $\int_{-a}^{+b}\frac{dx}{x}$, après avoir dit que « si les limites sont « de signes différents, la formule n'est plus démontrée. »

Si l'on trouvait $1\frac{+b}{-a}$ pour valeur principale, il faudrait dire que les nombres négatifs n'ayant point de logarithmes, l'intégrale indéterminée n'a point de valeur principale, ce qui ferait périr quelques uns des beaux travaux de Cauchy. Il est vrai qu'il aurait dans ce cas la ressource des logarithmes imaginaires; car, comme il est dit dans la *Théorie des Fonctions doublement Périodiques*, « la différence $\log 1 - \log(-1)$, c'est-à-dire $(2k+1)\pi\sqrt{-1}$, « donne les diverses valeurs de l'intégrale définie $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}$ quand la varia- « ble va de -1 à $+1$, en décrivant diverses courbes dans le plan. Cette « remarque a été le point de départ des beaux travaux de Cauchy sur les « intégrales définies. »

L'intégrale définie $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}$ indique une aire infinie, ou si l'on veut, la différence de deux aires infinies séparées par l'axe des y. Or, j'ai dit que les travaux faits sur l'infini absolu sont autant de déraillements. A la vérité, un déraillement peut fournir à un chirurgien qui se trouve dans le train, l'occasion d'exécuter de beaux travaux sur les jambes et les bras cassés des voyageurs. Mais le meilleur travail du conducteur de la machine consiste à éviter tout déraillement.

Lorsque la fonction $F(x)$ n'éprouve aucune solution de continuité entre les limites a et b, on a $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$. On a pareillement $\int_\alpha^b F'(dx) = F(b) - F(\alpha)$, et si a et α sont racines de l'équation $F(x) = 0$, on a

$$\int_a^b F'(x)dx = \int_\alpha^b F'(x)dx = F(b).$$

On voit par là que pour une valeur quelconque de x, $F(x)$ représente l'aire de la courbe $y = F'(x)$, à partir d'une racine quelconque de l'équation $F(x) = 0$.

Toutes ces aires qui partent de differents points pour aboutir à une même ordonnée, ne sont pas égales en grandeur absolue, mais la somme algébrique de leurs éléments est la même pour toutes; car chaque élément, représenté par ydx, sera positif ou négatif suivant que ses deux facteurs seront de même signe ou de signes différents, et le facteur dx sera positif ou négatif dans les éléments de $\int_a^b ydx$, suivant que a sera plus petit ou plus grand que b.

Si $F(x)$ éprouve une solution de continuité entre a et b, sans en éprouver une entre α et b, on aura toujours $F(b)$ pour la somme des éléments représentés par $\int_\alpha^b F'(x)dx = F(b)$; mais il n'y a aucun rapport entre les deux membres de $\int_a^b F'(x)dx = F'(b)$.

Par suite, la formule $\int_c^b F'(x)dx = F(b) - F(c)$ devient illusoire lorsque la solution de continuité a lieu entre c et b. Le premier membre indiquant la somme des éléments, ou l'aire infinie comprise entre les ordonnées $x = c$ et $x = b$, tandis que le second membre exprime la différence des deux aires $\int_\alpha^b F'(x)dx = F(b)$, et $\int_a^c F'(x)dx = F(c)$, en supposant toujours $F(x)$ continue entre α et b, comme entre a et c.

Soit, par exemple,

$$\int \frac{x^2 - 8x + 34}{x^2 - 8x + 16}\, dx = \frac{x^2 - 11x + 10}{x - 4}.$$

L'intégrale $\frac{x^2 - 11x + 10}{x - 4}$, ou l'aire qu'elle représente, s'annule pour $x = 1$ et pour $x = 10$; tandis que son dénominateur devenant zéro pour $x = 4$, on dit que la fonction passe par l'infini; mais c'est plutôt parce que sa valeur ne peut pas passer par l'infini, c'est-à-dire devenir $\frac{18}{0}$, qu'il y a solution de continuité.

Il s'ensuit que l'intégrale $\frac{x^2 - 11x + 10}{x - 4}$ représente l'aire de la courbe $y = \frac{x^2 - 8x + 34}{x^2 - 8x + 16}$, à partir de $x = 1$, ou de $x = 10$, suivant que la valeur donnée à x est plus petite ou plus grande que 4.

Par exemple, en faisant $x = 3$, la valeur de l'intégrale $\frac{x^2 - 11x + 10}{x - 4}$ devient 14, et exprime l'aire qui va de $x = 1$ à $x = 3$; on a donc

$$\int_1^3 \frac{x^2 - 8x + 34}{x^2 - 8x + 16} dx = 14.$$

Au contraire, en faisant $x = 5$, la valeur de l'intégrale devient -20 ; on a donc

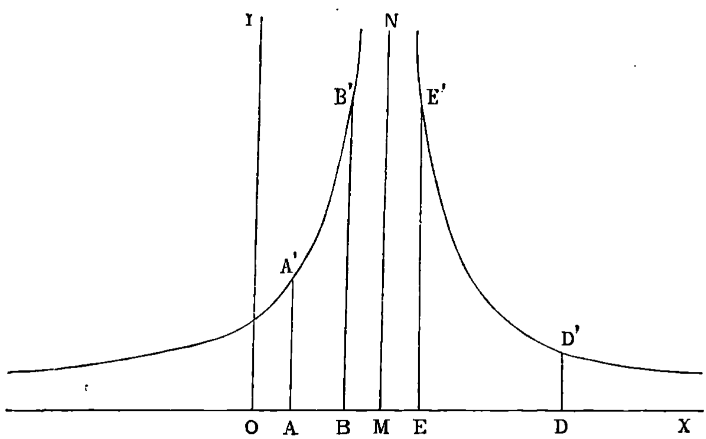
$$\int_{10}^5 \frac{x^2 - 8x + 34}{x^2 - 8x + 16} dx = -20.$$

Cette dernière aire est donnée par un nombre négatif, parce que l'accroissement dx est négatif quand x va de 10 à 5. La formule $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$ donnerait

$$\int_3^5 \frac{x^2 - 8x + 34}{x^2 - 8x + 16} dx = -20 - 14 = -34.$$

Le premier membre indique l'aire qui va de l'ordonnée BB' à l'ordonnée EE' (*fig.* 13). Cette aire est infinie ou illimitée ; tous les éléments en sont po-

Fig. 13.



sitifs, car l'ordonnée est toujours positive et l'abscisse va en croissant depuis 3 jusqu'à 5. Rien qui ait rapport à cette aire, n'est représenté par le second membre, dont la valeur — 34 exprime la différence algébrique des deux aires DD'EE', AA'BB', dont la première va de $x=10$ à $x=5$, et la seconde de $x=1$ à $x-3$.

On voit par là qu'il n'y a rien de commun entre les deux membres de la formule $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$, lorsque l'intégrale $F(x)$ éprouve une solution de continuité entre les limites a et b. Dans notre exemple, cette formule donnerait

$$\int_1^{10} \frac{x^2 - 8x + 34}{x^2 - 8x + 16}\,dx = 0 - 0.$$

Le premier membre indique l'aire infinie comprise entre les deux ordonnées AA' et DD'; tandis que le second membre donne la différence de deux zéros.

En disant que l'intégrale $\frac{x^2 - 11x + 10}{x - 4}$ devient infinie pour $x = 4$, j'aurais pu ajouter qu'elle le devient aussi pour $x = \infty$; mais il importait de bien distinguer ces deux cas; car, dans le premier on a un infini absolu ou impossible, et dans le second, un infini relatif, sur lequel on peut opérer comme sur des quantités finies, parce qu'en réalité c'est une quantité finie. Ainsi quand x est dit infini, l'intégrale $\frac{x^2 - 11x + 10}{x - 4}$ ne représente pas moins exactement l'aire infinie qui s'étend entre la courbe et l'axe des x depuis $x = 10$ jusqu'à la valeur infinie de x. Mais l'aire qui s'étend de la même manière à partir de l'ordonnée $x = 10$ entre la courbe et l'asymptote $y = 1$, reste finie, c'est-à-dire à une limite exprimée par la limite de la différence $\frac{x^2 - 11x + 10}{x - 4} - (x - 10)$. Or, cette différence se réduit à $3\,\frac{x - 10}{x - 4}$, dont la limite est 3, quand x croît infiniment; en sorte que 3 est la limite de l'aire qui, partant de $x = 10$, s'étend à l'infini entre la courbe et son asymptote $y = 1$.

Enfin, pour $x = -\infty$, l'intégrale $\frac{x^2 - 11x + 10}{x - 4}$ représente l'aire qui s'étend à l'infini entre la courbe et l'axe des x, depuis $x = 1$, jusqu'à $x = -\infty$; mais l'aire qui s'étend à l'infini du côté des x négatifs, entre la courbe et l'asymptote $y = 1$, est exprimée par $\frac{x^2 - 11x + 10}{x - 4} - (x - 1)$, dont la limite est -6 pour $x = -\infty$.

Avant de discuter d'autres exemples où l'intégrale et les limites de l'intégration deviennent infinies, soit séparément, soit simultanément, il importe extrêmement, comme dans l'exemple précédent, de distinguer l'infini absolu de l'infini relatif.

1° Lorsque la variable indépendante est supposée infinie, ce ne peut être que l'infini relatif, c'est-à-dire une valeur très-grande, mais finie, attribuée à cette variable. Ainsi, lorsqu'une limite de l'intégration est supposée infinie, et représentée par le signe ∞, ce ne peut être que l'infini relatif.

2° Lorsqu'une fonction devient infinie pour une valeur infinie de la variable, ce ne peut être que l'infini relatif : c'est ainsi que les fonctions $\frac{x^2 - 11x + 10}{x - 4}$, $1x$, e^x deviennent infinies avec x.

3° Lorsqu'une fonction devient infinie pour une valeur finie de la variable, ce ne peut être que l'infini absolu; c'est ainsi que l'intégrale $\frac{x^2 - 11x + 10}{x - 4}$, et sa dérivée $\frac{x^2 - 8x + 34}{x^2 - 8x + 16}$, deviennent infinies pour $x = 4$; que $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sin x}$, $1x$, $e^{\frac{1}{x}}$ deviennent infinies pour $x = 0$; que $\tang x$, $\text{séc}\, x$, $\frac{1}{1 - \sin x}$, deviennent infinies pour $x = \frac{\pi}{2}$.

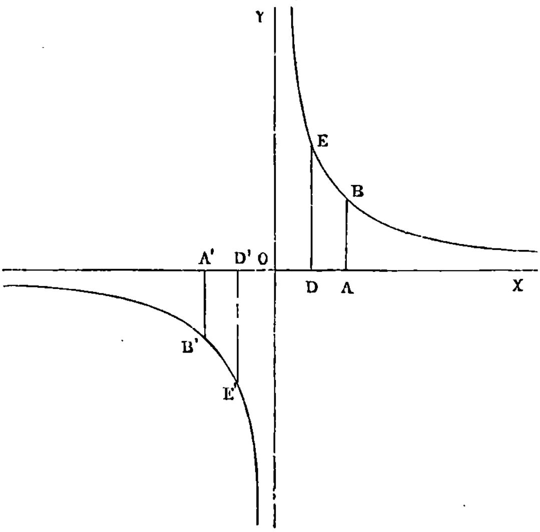
Nous répèterons encore ici que toute question et toute opération faites sur l'infini absolu sont absurdes. Par exemple, demander le rapport des deux fractions $\frac{2x}{x - 4}$ et $\frac{3}{x - 4}$, pour $x = 4$, est une question absurde, et tout raisonnement, tout calcul employés pour prouver que ce rapport égale $\frac{8}{3}$, sont pareillement absurdes. Il est absurde de dire que $\frac{8}{0}$ et $\frac{3}{0}$ sont les limites de $\frac{2x}{x - 4}$ et $\frac{3}{x - 4}$, ou que $\frac{8}{3}$ est le rapport de ces limites. Si l'on fait $x - 4 = \varepsilon$, et qu'on dise que le rapport $\frac{2x}{3}$ des fractions $\frac{2x}{\varepsilon}$ et $\frac{3}{\varepsilon}$ est $\frac{8}{3}$ quand $x = 4$, l'absurdité est un peu mieux cachée que dans le raisonnement précédent, mais c'est au fond le même raisonnement. La fraction $\frac{2x}{3}$ égale bien $\frac{8}{3}$, pour $x = 4$; mais pour $x = 4$, les deux fractions $\frac{2x}{x - 4}$ et $\frac{3}{x - 4}$ deviennent $\frac{8}{0}$ et $\frac{3}{0}$, et il est absurde d'en demander le rapport, comme de dire qu'il égale $\frac{8}{3}$.

De même la différence $\log m\varepsilon - \log n\varepsilon$ égale $\log \frac{m}{n}$, tant que ε n'est pas zéro ; mais quand ε est zéro, la différence devient $\log 0 - \log 0$, et il est absurde d'en demander la valeur ou de dire, avec Cauchy, que cette différence a une valeur indéterminée, et même une valeur principale.

Nous allons reprendre l'exemple $\int \frac{dx}{x} = 1x$ pour le discuter d'après ces principes, et conformément à notre théorie qui donne aux nombres négatifs absolument les mêmes logarithmes qu'aux nombres positifs.

La courbe $y = \frac{1}{x}$ représente, en coordonnées rectangulaires, une hyperbole équilatère (*fig.* 14), composée de deux branches symétriques par rapport à l'origine.

Fig. 14.



L'intégrale $1x$ égale zéro pour $x = -1$ comme pour $x = 1$; mais elle est infinie, ou il y a solution de continuité, pour $x = 0$. Il s'ensuit qu'en prenant $OA = 1$, et $OA' = -1$, l'aire exprimée par $1x$ partira de AB quand x sera positif, et de A'B' quand x sera négatif. Par exemple, en prenant

$OD = \frac{1}{2}$ et $OD' = -\frac{1}{2}$, $l\left(+\frac{1}{2}\right)$ exprimera l'aire ABDE, et $l\left(-\frac{1}{2}\right)$ exprimera l'aire A'B'D'E'. Comme $l\left(+\frac{1}{2}\right)$ et $l\left(-\frac{1}{2}\right)$ sont égaux et négatifs, ces deux aires sont composées d'éléments égaux et négatifs. En effet, $l\frac{1}{2}$ représentant $\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x}$, l'ordonnée $y = \frac{1}{x}$ est positive; mais x allant de 1 à $\frac{1}{2}$, dx est négatif. De même $l\left(-\frac{1}{2}\right)$ représentant $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{x}$, on voit que x allant de -1 à $-\frac{1}{2}$, dx est positif, tandis que $\frac{1}{x}$ est négatif.

Lorsque les limites de l'intégrale comprennent une solution de continuité, il n'y a plus rien de commun entre les deux membres de la formule $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$, qui devient absolument fausse ou illusoire. Par exemple, quand on écrit $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} = l\frac{1}{2} - l\left(-\frac{1}{2}\right)$, le premier membre indique l'aire infinie comprise entre les deux ordonnées DE et D'E'; tandis que le second membre exprime la différence des deux aires égales ABDE et A'B'D'E'.

De même si l'on écrivait $\int_{-1}^{+1} = l(+1) - l(-1)$, le premier membre indiquerait l'aire infinie comprise entre les ordonnées A'B' et AB, tandis que le second membre est la différence de deux zéros.

Puisque le second membre de la formule

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

représente toute autre chose que le premier, quand la fonction $F(x)$ devient infinie entre a et b, comment aura-t-on l'expression de l'aire indiquée par le premier membre? Ainsi, en traitant (page 270) l'exemple :

$$\int \frac{x^2 - 8x + 34}{x^2 - 8x + 16}\, dx = \frac{x^2 - 11x + 10}{x - 4},$$

nous avons vu que l'intégrale $\frac{x^2 - 11x + 10}{x - 4}$ devient infinie ou se réduit à $-\frac{18}{0}$ pour $x = 4$, et à zéro pour $x = 1$ et $x = 10$; il en résulte que la formule $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$ donne $\int_1^{10} \frac{x^2 - 8x + 34}{x^2 - 8x + 10}\, dx = 0$.

Elle donnerait donc zéro pour l'aire infinie qui va de $+1$ à $+10$.

La formule donnant ainsi une valeur évidemment illusoire, comment obtiendra-t-on l'expression exacte de cette aire infinie?

Il me semble que la réponse est toute faite, et comprise dans la demande même; car, puisque l'aire est infinie, il n'y a pas autre chose à demander ni à chercher.

Pourtant lorsque l'intégrale est infinie, les géomètres ne la tiennent pas quitte à si bon marché. Dans l'exemple actuel, les géomètres profitent du vice de la théorie qui n'accorde que des logarithmes imaginaires aux nombres négatifs, et fondent sur cette erreur « les beaux travaux » qu'on trouve annoncés en ces termes dans la *Théorie des Fonctions doublement périodiques* de MM. Briot et Bouquet.

« Lorsque $F(x)$ devient infinie entre a et b, le symbole $\int_a^b F'(x)dx$ n'a « plus de sens au point de vue de la variable réelle, et cependant l'intégrale « générale donne toujours une différence finie $F(b) - F(a)$. Que représente « cette différence? Si l'on rend la variable imaginaire et que l'on fasse aller « cette variable du point a au point b suivant une courbe quelconque dans « le plan, de manière toutefois à éviter le point α qui rend la fonction $F'(x)$ « infinie, l'intégrale curviligne aura un sens bien précis, et elle sera encore « donnée par la différence des valeurs de l'intégrale générale.

« Nous citerons, comme exemple, l'intégrale définie $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$; l'expres- « sion différentielle $\frac{dx}{x}$ admet l'intégrale générale $1x + C$; la différence « $1(+1) - 1(-1)$, c'est-à-dire $(2k+1)\pi\sqrt{-1}$ donne les diverses valeurs de « l'intégrale définie quand la variable va de -1 à $+1$ en décrivant diverses « courbes dans le plan. Cette remarque a été le point de départ des beaux « travaux de Cauchy sur les intégrales définies. »

L'auteur dit : « Le symbole $\int_a^b F'(x)dx$ n'a plus de sens au point de « vue de la variable réelle, » parce qu'il entend que c'est $F(b) - F(a)$ qui en doit représenter la valeur, ce qui est une erreur.

Lorsque « $F(x)$ devient infinie entre a et b, le symbole $\int_a^b F'(x)dx$ » a un sens, puisqu'il indique une aire infinie, et comme c'est l'infini absolu, il serait absurde d'en vouloir trouver l'expression numérique.

L'aire indiquée par le symbole $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$, comprend l'aire infinie qui va de l'ordonnée $x = -1$ à l'axe des y, et l'aire infinie qui va de l'axe des y à l'ordonnée $x = +1$. Ces deux aires sont de signes contraires, et l'on pourrait ajouter qu'elles sont évidemment égales, s'il n'était absurbe de comparer deux infinis absolus, et de les dire égaux ou inégaux.

Comme on a $1(+1) = 0$, et $1(-1) = 0$, il s'ensuit que la différence $1(+1) - 1(-1) = 0$. S'il n'y a aucun rapport entre les deux membres de l'égalité $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = 1(+1) - 1(-1)$, c'est qu'il ne doit point y en avoir, et que l'égalité qu'on écrit ainsi n'est nullement démontrée. Mais ceux qui acceptent, comme du pain bénit, les *beaux travaux* de Cauchy, entendent que les deux membres de l'égalité $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = 1(+1) - 1(-1)$ ont tort de n'être pas égaux, ils entendent que, de gré ou de force, ils doivent le devenir. Et, en effet, ils le deviennent au moyen d'un fort coup de pouce donné à chacun d'eux. Le coup de pouce donné au premier membre consiste à lui faire représenter une « intégrale curviligne, que l'on obtient en rendant la variable « imaginaire, et la faisant aller du point -1 au point $+1$ en suivant une « courbe quelconque. » Le coup de pouce donné au second membre consiste à prendre, au lieu de zéro pour $l(-1)$, des logarithmes imaginaires compris dans l'expression $(2k1)\pi\sqrt{-1}$.

Si l'on arrive à l'égalité $4 = 6$, elle est absurde ; et il est absurde de dire que les deux membres n'ont plus de sens, parce qu'ils n'ont pas le même sens. Si l'on donne un coup de pouce aux deux membres pour les rendre égaux, par exemple, si l'on écrit $4 \times 2 = 6 + 2$, le procédé pourra paraître ingénieux, tandis qu'il est tout simplement absurde.

Dans notre système de logarithmes, on a $1(-8) = 1(+8)$, et, de même que $1(+8) = \int_{1}^{8} \frac{dx}{x}$, $1(-8) = \int_{-1}^{-8} \frac{dx}{x}$; c'est-à-dire que $1(-8)$ représente, avec son signe, l'aire qui va de -1 à -8; elle est positive, parce que de -1 à -8, dx est négatif comme y. Par quel nombre représentera-t-on cette aire, si $1(-8)$ n'égale pas $1(+8)$? Je donnerais volontiers le défi de répondre; mais, le moyen d'embarrasser des géomètres qui démontrent que

$$\frac{1}{0} = 1x\ ?$$

On me répond : L'aire n'est pas représentée par $1(-8)$, puisque toutes les valeurs de $1(-8)$ sont imaginaires ; cependant, par un artifice de calcul, nous prouvons qu'elle a pour expression $1(+8)$ et non $1(-8)$. Mais, puisque la formule donne $1(-8)$, et que vous démontrez qu'il faut trouver $1(+8)$, qu'est-ce que cela prouve, si non que $1(-8) = 1(+8)$?

Si les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes, que donne la formule

$$\int_{-3}^{-8} \frac{dx}{x} = 1(-8) - 1(-3)\,?$$

Duhamel répond : « Si les deux limites sont négatives, on a une somme « d'éléments négatifs, qui seraient les mêmes, au signe près, que si l'on « prenait ces limites positives. Ainsi l'on aura :

$$«\ \int_{-a}^{-b} \frac{dx}{x} = 1b - 1a = 1\frac{b}{a}\cdot\ »$$

Il me semble qu'il y a là un sophisme; car si les deux sommes $\int_{3}^{8} \frac{dx}{x}$ et $\int_{-3}^{-8} \frac{dx}{x}$ « sont les mêmes au signe près, » la seconde doit être $-1\frac{8}{3}$, puisque la première est $1\frac{8}{3}$.

Outre ce sophisme, le passage contient une autre erreur, car les éléments de ces deux sommes ne sont pas « les mêmes au signe près ; » ils ont absolument le même signe. En effet, quand x va de 3 à 8, les deux facteurs du produit $\frac{1}{x} \times dx$ sont positifs; tandis qu'ils sont l'un et l'autre négatifs quand x va de -3 à -8; et les deux facteurs étant négatifs, tous les éléments sont positifs.

La nécessité de donner aux nombres négatifs les mêmes logarithmes qu'aux nombres positifs, est si impérieuse que leur emploi donne immédiatement les résultats exacts que l'on ne peut obtenir autrement que par bien des tours et des détours, par des sophismes ou par des logarithmes imaginaires.

Je ne veux pas soutenir que les logarithmes imaginaires, n'aient pas leur raison d'être ; mais je m'élève contre le droit qu'on croit avoir d'attribuer les mêmes propriétés à deux choses de nature différente, lorsqu'on leur a donné un même nom.

De toute manière, on est obligé de reconnaître que $1(-1)$ égale zéro comme $1(+1)$, et que la différence $1(+1) - 1(-1)$ égale zéro, et pas autre chose que zéro.

Lorsque vous avez eu le talent de trouver une infinité de valeurs pour le logarithme d'un nombre, qu'est-ce qui vous empêche d'en trouver autant pour le nombre lui-même ?

Si l'intégrale $F(x)$ devient infinie entre a et b, les deux termes $F(b)$

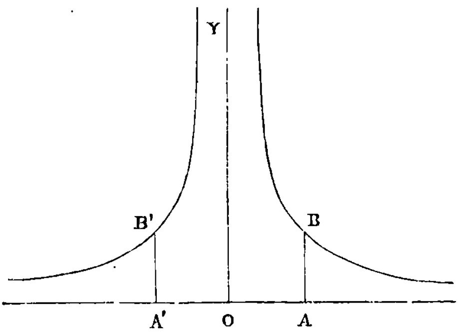
et $F(a)$, comme leur différence, n'en continuent pas moins à représenter une aire bien déterminée, mais qui n'est pas du tout celle qui est indiquée par $\int_a^b F'(x)dx$. C'est ce qui ne paraît pas avoir été bien compris, à en juger par les explications données au sujet des exemples que nous allons discuter.

Premier exemple. — Nous prendrons d'abord pour exemple le premier que M. Bertrand explique dans son *Traité de Calcul intégral*.

On a $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$. Comme l'intégrale $-\frac{1}{x}$ s'annule, ou plutôt a pour limite zéro, pour $x = \pm \infty$, et qu'elle devient infinie pour $x = 0$, il s'ensuit que $-\frac{1}{x}$ représente l'aire qui va de $\pm \infty$ à x, suivant que x est positif ou négatif. Par exemple, $\int_\infty^1 \frac{dx}{x^2} = -1$, et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = 1$; en sorte que -2 est la différence algébrique de ces deux aires.

Ayant tracé la courbe $y = \frac{1}{x^2}$ (*fig.* 15), prenons $OA = 1$ et $OA' = -1$.

Fig. 15.



L'intégrale $\int_\infty^1 \frac{dx}{x^2} = -1$ représente l'aire qui s'étend à l'infini à droite de AB ; tous ses éléments sont négatifs, quand x va de $+\infty$ à $+1$; en sorte que la limite de leur somme est -1. De même l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = 1$ représente l'aire qui s'étend à l'infini à gauche de A'B'; elle est positive, parce dx est positif de $-\infty$ à -1.

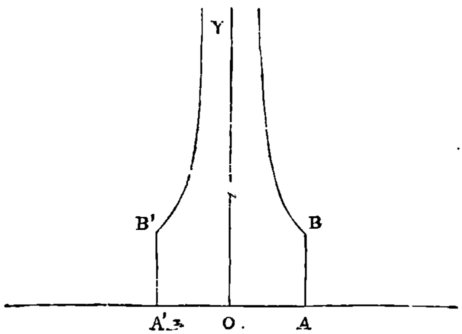
Le second membre de l'équation $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = -2$ représente la différence algébrique de ces deux aires ; tandis que par le premier membre on indique l'aire infinie qui est comprise entre les deux ordonnées A'B' et AB, ou qui va de l'une à l'autre ; ce qui prouve qu'il n'y a rien de commun entre les deux membres de l'équation, qui est toujours illusoire lorsque l'intégrale devient infinie pour une valeur comprise entre les deux limites de l'intégration.

Voyons maintenant comment M. Bertrand explique l'affaire.

D'abord, afin qu'on ne voie pas du tout l'aire représentée par le second membre de l'équation $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = -2$, il la supprime entièrement, comme on le voit dans la figure 15, ce qui permet à son explication d'être un peu plus paradoxale ; la voici :

« Il faut, dès à présent (*fig.* 16), signaler un cas important dans lequel « les définitions précédentes sont en « défaut, c'est celui où, entre les li- « mites de l'intégration, la fonction « primitive F(x) devient disconti- « nue, ce qui a lieu en général lors- « qu'elle passe par l'infini. Il n'est « plus permis, dans ce cas, de regar- « der l'accroissement total comme la « somme des accroissements infini- « ment petits correspondants aux « accroissements successifs de la va- « riable.

Fig. 16.



« La formule générale que nous avons donnée pour exprimer l'intégrale « ne représente dans ce cas ni l'aire de la courbe, ni la somme des accroisse- « ments de la fonction.

« Pour bien faire comprendre cette remarque importante, supposons que « la fonction F(x) soit égale à $-\frac{1}{x}$; elle a pour différentielle $\frac{dx}{x^2}$, et la for- « mule générale donne, en adoptant pour limites -1 et $+1$, entre lesquel- « les est comprise la valeur zéro,

$$« \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = -2.$$

« L'élément $\frac{dx}{x^2}$ est cependant toujours positif, et la courbe dont l'équation « est $y = \frac{1}{x^2}$ a la forme suivante (*fig.* 16), dont l'aire totale comprise entre les

« ordonnées qui correspondent aux abscisses -1 et $+1$, ne peut évidemment « pas être égale à -2. La formule employée n'est donc pas applicable et nous « en avons dit la raison.

Comme il s'agit « d'un cas important » et que l'auteur se propose de « bien « faire comprendre cette remarque importante, » il importe d'être attentif à l'explication. Or M. Bertrand dit : « Il n'est plus permis de regarder l'accrois« sement total comme la somme des accroissements infiniment petits. » Comment donc? Il n'est plus permis de regarder le tout comme égal à la somme de ses parties? La remarque est importante, en effet.

« La formule générale ne représente plus ni l'aire de la courbe, ni la somme « des accroissements de la fonction. »

Une égalité, juste ou fausse, ne représente pas une grandeur ; ce qui n'empêche pas chaque membre de la formule $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^2}=-2$, quoique fausse, de représenter soit « l'aire de la courbe, » soit « la somme des accroissements de « la fonction. » Le premier membre indique l'aire comprise entre les deux ordonnées $x=-1$ et $x=1$; tandis que le second membre mesure « l'aire de « la courbe, ou la somme des accroissements ou éléments » en dehors de ces deux ordonnées.

« La formule n'est donc pas applicable et nous en avons dit la raison. »

La raison qu'on a dite, c'est que dans « ce cas important le tout n'est plus « égal à la somme de ses parties. »

C'est comme si l'on disait que dans l'exemple $8=3+2$, le tout n'est plus égal à la somme de ses parties. Si la somme $3+2$ n'égale pas 8, c'est que 3 et 2 ne sont pas les parties de 8, mais de 5.

Sur quoi allez-vous fonder vos raisonnements, si vous commencez par détruire les fondements de la raison, en disant que « l'accroissement total « n'est plus égal à la somme de ses parties?

Deuxième exemple. — Pour second exemple, M. Bertrand dit :

« On a $\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{1+x}{1-x}$, comme on le vérifie aisément par la dif« férentiation. »

Il prend cet exemple pour montrer que « la formule

« $\int_a^b\varphi(x)dx=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$ devient fausse lorsque α désignant un nombre « compris entre les limites a et b, $\mathrm{F}(\alpha)$ est infini, » et il ajoute que les « ex« pressions considérées ne présentent plus alors aucun sens déterminé. »

C'est comme si l'on disait que l'égalité $8=3+2$ étant fausse, les nombres considérés ne présentent plus alors aucun sens déterminé.

En appliquant la formule générale, il trouve

« $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\, l(-1) = \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$, résultat, » dit-il, « évidemment absurde,
« et qui s'explique parce que la formule d'intégration n'est pas ici applicable. »

Est-ce parce que le résultat est absurde que la formule n'est pas ici applicable, ou bien parce qu'elle n'est pas applicable qu'elle donne un résultat absurde ?

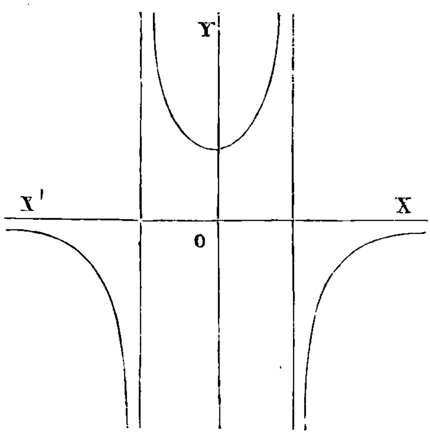
De même, la quantité imaginaire $\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$ sort-elle de la formule, ou bien si elle n'arrive là que parce qu'on veut l'y faire entrer? Pour moi $\frac{1}{2}\, l(-1)$ égale zéro, comme $\frac{1}{2}\, l(+1)$, et non $\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$.

« L'absurdité évidente » vient donc du défaut de la théorie qui refuse aux nombres négatifs toute espèce de logarithmes réels, auxquels on s'imagine pouvoir suppléer par des logarithmes imaginaires, qui conduisent à des « résultats évidemment absurdes, » et que l'on croit suffisamment justifiés quand on a dit : « les expressions considérées ne présentent plus alors aucun « sens déterminé. »

Nous allons montrer qu'en cet exemple, comme en tout autre, les expressions considérées ont un sens bien déterminé quand on sait le comprendre.

Si l'on construit la courbe $y = \frac{1}{1-x^2}$ (*fig.* 17), on la trouve formée de

Fig. 17.



trois branches séparées par les asymptotes $y = 0$, $x = 1$ et $x = -1$.

Comme $y = \frac{1}{1-x^2}$ tend vers zéro pour $x = \pm\infty$, il s'ensuit que l'axe des x est asymptote dans les deux sens. La fonction $l\frac{1+x}{1-x}$ devient infinie, en même temps que $\frac{1}{1-x^2}$, pour $x=1$ et pour $x=-1$; ce qui prouve que toutes les aires qui s'étendent le long des asymptotes parallèles à l'axe des y sont infinies.

Pour que $l\frac{1+x}{1-x}$ égale zéro, il faut que $\frac{1+x}{1-x}$ égale ± 1; or $\frac{1+x}{1-x}$ égale 1 pour $x=0$, et tend vers -1 pour $x=\pm\infty$. Il s'ensuit : 1° que l'aire représentée par l'intégrale $l\frac{1+x}{1-x}$, part de $x=0$ pour la branche du milieu, de $x=+\infty$ pour la branche de droite, et de $x=-\infty$ pour la branche de gauche; 2° que l'aire qui s'étend à l'infini le long de l'axe des x reste finie pour chacune des deux branches. Ainsi, quelle que soit l'ordonnée qui se rapporte à l'une de ces deux branches, l'intégrale $\frac{1}{2}\,l\frac{1+x}{1-x}$ représente l'aire qui vient se terminer à cette ordonnée, en partant de $\pm\infty$, suivant que cette ordonnée est du côté des x positifs ou des x négatifs.

Par exemple, en faisant $x=3$, on a $\frac{1}{2}\,l(-2)$ pour l'aire qui s'étend de $x=\infty$ jusqu'à $x=3$. Cette aire a une valeur positive, parce que dx étant négatif comme y, chaque élément ydx est positif.

En faisant $x=-3$, on aurait $\frac{1}{2}\,l\left(-\frac{1}{2}\right)$ pour l'aire qui part de $x=-\infty$ et s'arrête à $x=-3$. Elle est négative, parce que de $-\infty$ à -3, dx étant positif et y négatif, chaque élément ydx est négatif.

Une remarque importante que M. Bertrand n'a pas faite, c'est que puisqu'il écrit

$$« \frac{1}{2}\,l\left(-1\right) = \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}, »$$

il devrait écrire $\frac{1}{2}\,l(-2) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$, en désignant par α le logarithme népérien de 2. Or, puisque $\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$ est un « résultat évidemment « absurde, qui s'explique, parce que la formule d'intégration n'est pas ici ap« plicable, » il faudrait dire aussi que $\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$ est un « résultat évidem-

« ment absurde, parce que la formule d'intégration n'est pas ici applica- « ble. » Cependant il n'y a pas de solution de continuité entre $+3$ et $+\infty$. L'absurdité ne vient donc pas de la formule d'intégration, mais évidemment de la fausse théorie qui refuse des logarithmes réels aux nombres négatifs, alors que tout prouve le besoin impérieux de leur attribuer les mêmes logarithmes qu'aux nombres positifs.

Puisqu'on ne peut passer d'une branche de notre courbe à une autre, sans que l'intégrale $F(x) = \frac{1}{2}\,l\,\frac{1+x}{1-x}$ passe par l'infini, il s'ensuit que la formule $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$ devient fausse toutes les fois que les deux limites a et b ne se rapportent pas à une même branche. Mais il ne s'ensuit pas pour cela que « les expressions considérées ne représentent plus alors aucun sens déter- « miné. » Par exemple, la formule $\int_{-3}^{+3} \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\,l\left(-2\right) - \frac{1}{2}\,l\,\frac{1}{2} = l(+2)$ est fausse; mais nous avons vu que $\frac{1}{2}\,l(-2)$ représente l'aire qui vient de $+\infty$ jusqu'à l'ordonnée $x=3$, et que $\frac{1}{2}\,l\left(\frac{1}{2}\right)$ représente de même l'aire qui va de $-\infty$ à -3. Comme ces aires sont égales et de signes contraires, il s'ensuit que leur différence algébrique, qui donne $l\,2$, représente en réalité la somme de leurs valeurs absolues, ou le double de chacune d'elles.

De même on aurait $\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\,l(-1) - \frac{1}{2}\,l(+1)$. Cette égalité est fausse, parce que les limites se rapportent à deux branches différentes. Les deux termes du second membre expriment des aires nulles, puisque chacune s'arrête à son point de départ : leur différence est donc zéro, et non $\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$.

Troisième exemple. $$\int 2k\,\frac{dx}{k^2-x^2} = l\,\frac{k+x}{k-x}.$$

Cette relation se vérifie aisément en mettant l'intégrale $l\,\frac{k+x}{k-x}$ sous la forme $l(k+x) - l(k-x)$, et prenant ensuite la différentielle de cette expression.

Ce troisième exemple ne diffère pas essentiellement du précédent, sur lequel on retomberait en prenant k pour unité. Dans l'un comme dans l'autre, la dérivée est l'ordonnée d'une courbe composée de trois branches, et l'intégrale définie représente l'aire prise entre des limites quelconques, pourvu que ces limites se rapportent à une même branche.

On rencontre cet exemple sous la forme $\int \frac{k^2}{g} \cdot \frac{dv}{k^2 - v^2} = \frac{k}{2g} \, 1 \frac{k+v}{k-v}$, dans la question de mécanique rationnelle, qui traite du mouvement d'une sphère pesante dans un milieu dont la résistance est supposée proportionnelle au carré de la vitesse.

En désignant par x la vitesse variable du mobile, par k la vitesse particulière qu'il devrait avoir pour que la résistance fût égale à son poids, et par t le temps écoulé, on trouve $t = \int \frac{k^2}{g} \cdot \frac{dx}{k^2 - x^2} = \frac{k}{2g} \, 1 \frac{k+x}{k-x}$; en sorte que le temps écoulé est mesuré par l'aire de la courbe $y = \frac{k^2}{g(k^2 - x^2)}$, dont l'abscisse représente la vitesse du mobile.

Pour que la valeur de t soit nulle, il faut que $1 \frac{k+x}{k-x}$ égale zéro, c'est-à-dire que $\frac{k+x}{k-x} = \pm 1$; ce qui a lieu pour les trois valeurs $x = 0$, $x = +\infty$, et $x = -\infty$. Ainsi, le temps représenté par t, ou l'aire de la courbe, part de celle de ces trois valeurs qui correspond à la même branche de courbe que la valeur donnée à x.

Comme la valeur de $1 \frac{k+x}{k-x}$ passe par l'infini pour $x = k$ et $x = -k$, la formule $\int_a^b \frac{k^2}{g} \cdot \frac{dv}{k^2 - v^2} = \frac{k}{2g} \, 1 \frac{k+b}{k-b} - \frac{k}{2g} \cdot 1 \frac{k+a}{k-a}$ devient illusoire lorsque les deux limites comprennent les valeurs $x = k$ et $x = -k$, ou seulement l'une d'elles.

D'après la théorie ordinaire des logarithmes, x ne peut dépasser k sans que la valeur de t devienne imaginaire, puisqu'alors $1 \frac{k+x}{k-x}$ indiquerait le logarithme d'un nombre négatif. Cette propriété des nombres négatifs de n'avoir point de logarithmes réels semble se confirmer ici par le phénomène naturel dont la loi est représentée par l'équation de l'exemple actuel, puisque le corps étant abandonné à l'action de la pesanteur, sa vitesse croît en s'approchant constamment de la valeur k, qu'elle ne peut atteindre ; en sorte qu'il est impossible que v surpasse k; ce qu'indique $1 \frac{k+v}{k-v}$, qui deviendrait alors imaginaire.

Pourtant il est bien facile de comprendre que le corps peut être lancé verticalement avec une vitesse initiale plus grande que k, et je dis que dans ce cas le temps écoulé se déduira encore de la formule $t=\frac{k}{2g}\,\mathrm{l}\,\frac{k+v}{k-v}$, en donnant aux nombres négatifs les mêmes logarithmes qu'aux nombres positifs.

Lorsque, par exemple, on suppose $k=2$ et $v=6$, la formule donnera $t=\frac{1}{g}\,\mathrm{l}(-2)$. Que signifie cette formule pour ceux qui n'accordent aux nombres négatifs que des logarithmes imaginaires? Il faudra dire, avec M. Bertrand, qu'elle ne signifie rien, et pour en trouver une qui signifie quelque chose, il faudra refaire d'un bout à l'autre la solution de la question; et, si finalement on arrive à $t=\frac{1}{g}\,\mathrm{l}\,2$, qu'aura-t-on prouvé, sinon que $\mathrm{l}(-2)=\mathrm{l}(+2)$?

De l'équation $t=\frac{k}{2g}\cdot\mathrm{l}\,\frac{k+v}{k-v}$, on tire $v=k\,\frac{e^{\frac{gt}{k}}-e^{-\frac{gt}{k}}}{e^{\frac{gt}{k}}+e^{-\frac{gt}{k}}}$, et cette dernière équation, qui pourtant ne renferme plus de logarithme, « montre, » comme dit Duhamel, « que la valeur de v en fonction de t est toujours « plus petite que k, mais qu'elle tend vers cette limite à mesure que t augmente. » Le traité de Delaunay dit de même : « On voit que la vitesse « du mobile augmente constamment, sans cependant jamais dépasser la « vitesse k; elle s'approche indéfiniment de cette limite k, et ne lui devient « égale que lorsque t est infini. »

Nous répondons à cela que si l'on tire cette preuve de la formule, c'est que, suivant l'expression de Poinsot, « on l'y a pour ainsi dire, soi-même « introduite, et il semble alors que l'analyse nous donne ce qu'elle ne fait que « nous rendre dans un autre langage. »

En effet, si la formule $t=\mathrm{l}\,\frac{k+v}{k-v}$, mise sous la forme $v=k\,\frac{e^t-1}{e^t+1}$, prouve que v est toujours plus petit que k, c'est qu'on a soi-même introduit cette preuve sous forme d'hypothèse, en supposant que t n'est le logarithme que de $+\frac{k+v}{k-v}$, tandis qu'il est aussi bien le logarithme de $-\frac{k+v}{k-v}$; or, en prenant $e^t=-\frac{k+v}{k-v}$, on en tire $v=k\,\frac{e^t+1}{e^t-1}$, formule qui prouve que la vitesse est toujours supérieure à k, comme l'autre prouvait qu'elle lui était toujours inférieure.

En résumé, le temps donné par la formule $t=\frac{k}{2g}\,\mathrm{l}\,\frac{k+v}{k-v}$ représente l'aire de la courbe $y=\frac{k^2}{g}\cdot\frac{1}{k^2-v^2}$, composée de trois branches séparées par les ordonnées $v = k$ et $v = -k$, qui leur sont asymptotes; et, quelles que soient les limites a et b, pourvu qu'elles se rapportent à une même branche de la courbe, l'intégrale définie $\int_a^b \frac{k^2}{g} \frac{dv}{k^2 - v^2} = \frac{k}{2g} \,\mathrm{l}\, \frac{k+b}{k-b} - \frac{k}{2g} \,\mathrm{l}\, \frac{k+a}{k-a}$ donnera toujours la durée du mouvement pendant lequel la vitesse ira de a à b.

Par exemple, en supposant $k = 2g$, on aura

$$\int_\infty^{20} 4g \frac{dv}{4g^2 - v^2} = \mathrm{l}\frac{2g+20}{2g-20} - \mathrm{l}(-1)$$

et, comme $\mathrm{l}(-1) = 0$, on a $t = \mathrm{l}\,\frac{g+10}{g-10}$ pour le temps pendant lequel la vitesse, supposée d'abord infinie, se réduit à 20.

La valeur de ce logarithme étant de 4, 64.., il s'ensuit que si le mobile part avec une vitesse très-grande, dite infinie, ce sera en moins de 5 secondes que cette vitesse sera réduite à 20 mètres.

Comprendra-t-on enfin qu'en refusant des logarithmes réels aux nombres négatifs, aussi bien qu'en rejetant les nombres négatifs eux-mêmes, on fait perdre aux formules leur caractère essentiel de généralité, en sorte que, n'y découvrant plus le résultat cherché, on se voit réduit à dire, comme M. Bertrand, « qu'elles n'ont plus aucun sens, aucune signification déterminée, » ou qu'elles donnent, « $\pi\sqrt{-1}$, résultat évidemment absurde, bon tout au « plus à servir de point de départ aux beaux travaux de Cauchy. »

De même qu'on a $\int_{+1}^{8} \frac{dx}{x} = \mathrm{l}\,8$, on a pareillement $\int_{-1}^{-8} \frac{dx}{x} = \mathrm{l}\,(-8)$. Mais quand on prétend que $\mathrm{l}(-8)$ est imaginaire, on ne peut plus dire que sa valeur représente l'aire $\int_{-1}^{-8} \frac{dx}{x}$, qui est évidemment réelle. Il faut donc chercher une autre valeur, et après des tours et des détours on arrive à l'expression $\mathrm{l}\,(+8)$, que l'on croit préférable à $\mathrm{l}\,(-8)$, et qui pourtant n'est exacte, que parce qu'elle lui est égale.

QUATRIÈME EXEMPLE. $\int \cos x\, dx = \sin x.$

C'est le premier exemple donné dans le traité de Sturm, à l'article « des « intégrales indéterminées. » L'auteur dit : « Une intégrale définie peut « quelquefois devenir indéterminée, c'est ce qui a lieu pour l'intégrale « $\int_0^\infty \cos x\, dx = \sin \infty - \sin 0$, car $\sin x$, lorsque x tend vers l'infini ne tend « vers aucune limite déterminée. »

Tant que x tend vers l'infini, il reste fini, et $\sin x$ n'est pas plus indéterminé que quand x est fini. Depuis quand donc une quantité indéterminée est-elle celle qui « ne tend vers aucune limite déterminée? » Est-ce qu'on a jamais dit qu'une constante 4, ou une variable x est indéterminée, parce qu'elle « ne tend vers aucune limite déterminée? »

M. Serret donne le même exemple d'intégrale indéterminée, mais n'appuie pas sur la même raison la preuve de l'indétermination.

« Soit, » dit-il, « la différentielle $\cos x dx$, on a $\int_0^X \cos x dx = \sin X$, et il est « évident que cette intégrale cesse d'être déterminée quand on suppose $X = \infty$. »

Ce n'est plus quand x tend vers l'infini, mais quand il est supposé infini que $\sin x$ est indéterminé. Or, une valeur infinie attribuée à une variable indépendante ne peut être qu'un infini relatif, c'est-à-dire une valeur très-grande, mais finie, et ainsi « il est évident que l'intégrale $\sin x$ » n'est pas plus indéterminée dans un cas que dans l'autre.

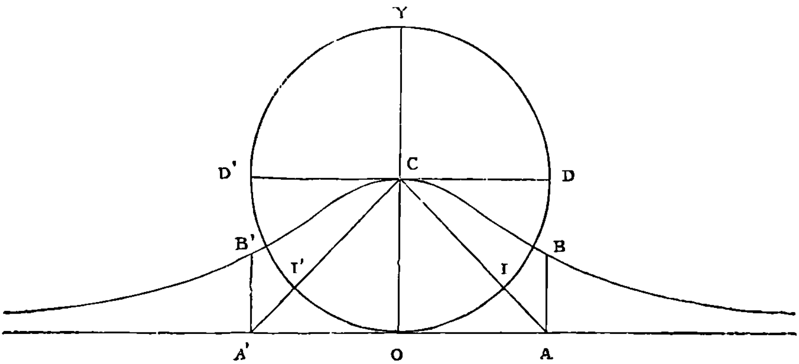
Cinquième exemple. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang } x.$

L'exemple précédent était pour expliquer les intégrales indéterminées. M. Bertrand donne celui-ci pour expliquer les intégrales « mal déterminées. »

Nous voyons que l'intégrale $\text{arc tang } x$ devient nulle pour la valeur $x = 0$, et uniquement pour cette valeur. C'est donc à partir de l'axe des y que l'aire de la courbe $y = \frac{1}{1+x^2}$, sera représentée par $\text{arc tang } x$ pour toute valeur de x.

Comme le montre la (*fig.* 18), cette courbe se compose d'une seule branche,

Fig. 18.



qui s'étend à l'infini dans les deux sens, le long de l'axe des x, qui lui sert d'asymptote. Ainsi, pour toute valeur telle que OA, donnée à x, l'aire correspondante OABC aura pour mesure l'arc OI dont la tangente $\mathrm{OA} = x$.

Si le point A s'éloigne à l'infini, l'arc OI tend vers sa limite $\mathrm{OD} = \frac{\pi}{2}$, en sorte qu'on a $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$; de même $\int_0^{-\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{OD}' = -\frac{\pi}{2}$, et par suite $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{D'OD} = \pi$.

L'arc dont la tangente égale 1 étant $\frac{\pi}{4}$, on a $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = \mathrm{OI}$; de même $\int_0^{-1} \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{\pi}{4} = \mathrm{OI}'$, et par suite $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{I'OI} = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi l'aire A'ABCB', indiquée par l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2}$, et mesurée par l'arc $\mathrm{I'I} = \frac{\pi}{2}$, vaut juste la moitié de l'aire totale comprise entre la courbe et son asymptote, aire qui, comme nous l'avons dit, est mesurée par l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$.

L'aire $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{I'I} = \frac{\pi}{2}$ résulte, immédiatement et très-simplement, de la figure et d'une notion très-élémentaire de trigonométrie. Pour y trouver des difficultés, il faut vraiment avoir besoin d'inventer des paradoxes, dont M. Bertrand semble avoir la spécialité. Voici ceux qu'il adapte à l'exemple actuel.

« La formule $\int_a^b \varphi(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ suppose, bien entendu, que la « fonction $\varphi(x)$ soit déterminée pour chaque valeur de x; et si, par sa défi- « nition, elle comporte plusieurs valeurs, il faut adopter celle dont la « dérivée est $\mathrm{F}(x)$. »

Je n'ai rien à dire de ce début, si l'auteur s'est proposé de le donner incompréhensible.

« Quant à la fonction $\mathrm{F}(x)$, elle doit être supposée continue, car sans cela « son accroissement total ne serait pas égal à la somme des accroissements « infiniment petits qu'elle reçoit successivement. »

Du temps de Legendre tout le monde croyait que toujours « le tout est « égal à la somme des parties dans lesquelles il a été divisé. » Aujourd'hui M. Bertrand nous montre « un accroissement total qui n'est pas égal à la

« somme des accroissements infiniment petits que la variable reçoit succes-
« sivement. »

Que faut-il donc entendre par cet accroissement total qui n'est pas le total des accroissements partiels ?

« Cette dernière remarque est fort importante. Elle indique, dans certains « cas, le choix à faire entre plusieurs valeurs qui se présentant ensemble, « donneraient pour une intégrale bien définie un résultat en apparence indé- « terminé.

« On a, par exemple, $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang } 1 - \text{arc tang } (-1)$. La fonc- « tion arc tang x est mal déterminée : à une même tangente correspondent « un nombre infini d'arcs différents. »

Il y a une infinité d'arcs qui ont la tangente égale à 1 ; mais il n'y a que $\frac{\pi}{4}$ qui représente la somme $\int \frac{dx}{1+x^2}$ jusqu'à $x = 1$, et par conséquent il n'y a pas à choisir entre les autres.

« Les deux termes du second membre de

$$« \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang } 1 - \text{arc tang } -1$$

« sont donc séparément indéterminés, mais leur différence ne l'est pas. »

Les deux termes sont $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, et leur différence est $\frac{\pi}{2}$; ils ne sont donc pas indéterminés, et s'ils étaient indéterminés, leur différence le serait nécessairement.

L'auteur continue en disant : « Le premier de ces arcs a pour expression « $k\pi - \frac{\pi}{4}$, k étant un nombre entier arbitraire ; mais ce nombre étant une « fois choisi, on ne doit plus le changer lorsque l'arc augmente jusqu'à la « valeur $k\pi + \frac{\pi}{4}$, dont la tangente est $+1$. On a par conséquent, sans « aucune ambiguïté

$$« \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}. »$$

Puisque $\frac{\pi}{2}$ est la limite que l'aire positive ne peut ni atteindre ni dépasser, et que $-\frac{\pi}{2}$ est pareillement la limite que l'aire négative ne peut ni atteindre ni dépasser, il est clair que $k\pi$ est étranger à la solution. Si donc on a fait la maladresse de l'y introduire, « le choix à faire » consiste à s'en défaire, ce qui arrivera nécessairement quand on l'ajoutera aux deux nombres qu'il faut soustraire l'un de l'autre.

Par exemple, si un père a 40 ans et son fils 10, lorsqu'il s'agira de calculer la différence des deux âges, on pourra aussi bien les supposer mal déterminés, sous prétexte qu'on ne dit ni dans quel siècle ni en quel lieu le père et le fils sont nés ; ensuite, si l'âge du père n'égale pas la somme des âges de ses enfants, on pourra profiter de cette circonstance pour inventer un âge total qui n'est pas égal à la somme des âges partiels. Ce qui permettra d'ajouter $k\pi$ ou même $k\pi\sqrt{-1}$, à l'âge du père comme à celui du fils, « k étant un nombre entier arbitraire ; mais ce nombre étant une fois « choisi on ne doit plus le changer. On a par conséquent, sans aucune « ambiguïté : »

$$k\pi\sqrt{-1} + 40 - (k\pi\sqrt{-1} + 10) = 30\,.$$

C'est pourtant à une pareille farce que se réduit, au fond, « la remarque « fort importante, qui indique le choix à faire entre plusieurs valeurs qui se « présentent ensemble. »

Sixième exemple. $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x} = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{\cos x}\,.$

C'est le second exemple d'une « fonction mal déterminée, » donné par M. Bertrand, pour « indiquer le choix à faire entre plusieurs valeurs qui se « présentent ensemble. »

En posant $z = \cos x$, d'où $\sin x dx = -dz$, l'intégrale $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}$ se trouve remplacée par $\displaystyle\int \frac{-dz}{1+z^2}$; et, d'après le tableau de la page 259, on a :

$$\int \frac{-dz}{1+z^2} = \operatorname{arc\,cot} z = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{z}\,;$$

et, par suite, $\displaystyle\int \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^3 x} = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{\cos x} = \operatorname{arc\,tang} \operatorname{séc} x.$

La courbe $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ se compose d'une infinité d'arcs égaux, situés alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe des x, et qui ont la même aire en valeur absolue.

Soit $\alpha = \operatorname{arc\,tang} \operatorname{séc} x$: cela veut dire que x désignant un arc de même longueur que l'abscisse, on a $\operatorname{tang} \alpha = \operatorname{séc} x$; or, $\operatorname{séc} x$ ne pouvant avoir aucune valeur comprise entre $+1$ et -1, il en sera de même de tangα. Ainsi, pour $x=0$, on aura séc$x=1$, tang$\alpha=1$, et $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Ensuite α deviendra $\frac{\pi}{2}$ en même temps que x, et quand x ira de $\frac{\pi}{2}$ à π, α ira de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{4}$, et enfin, quand x ira de π à 2π, α retournera de $\frac{3\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{4}$. On voit que, pendant que x croîtra indéfiniment, α oscillera indéfiniment entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$, allant de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{3\pi}{4}$, pendant que x va de zéro à π, et de $\frac{3\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{4}$, pendant que x va de π à 2π, et ainsi de suite.

Puisque α va de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{3\pi}{4}$ pendant que x va de zéro à π, il s'ensuit qu'on a

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

Plus généralement on a

$$\int_0^{(2k+1)\pi}\frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},$$

et

$$\int_0^{2k\pi}\frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=0.$$

L'aire de l'arc de courbe qui va de zéro à π, égale $\frac{\pi}{2}$, celle du second arc est $-\frac{\pi}{2}$, celle du troisième $\frac{\pi}{2}$, et ainsi de suite. On comprend de cette manière, que l'intégrale $\int_a^{k\pi+a}\frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}$ sera égale à zéro ou à $\frac{\pi}{2}$, selon que k sera pair ou impair.

Je ne reproduirai pas l'explication que M. Bertrand donne à propos de cet exemple « pour indiquer le choix à faire entre plusieurs valeurs qui se pré-
« sentent ensemble, et le sens qu'il faut attribuer aux expressions mal déter-
« minées. » Je discuterai seulement le résultat auquel il arrive en disant :

« Pour $x=\frac{3\pi}{4}$, on devra prendre

$$\text{« arc tang}\,\frac{1}{\cos\frac{3\pi}{4}}=\text{arc tang}\,(-\sqrt{2})=\frac{3\pi}{4},$$

« et l'on a enfin

$$« \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}. »$$

Ce résultat est évidemment faux; car, puisque $\frac{\pi}{2}$ mesure l'aire qui va de zéro à π, l'aire qui va de zéro à $\frac{3\pi}{4}$ est plus petite que $\frac{\pi}{2}$.

Quand $x = \frac{3\pi}{4}$, la sécante de cet arc est bien $-\sqrt{2}$; mais l'arc dont la tangente est $-\sqrt{2}$ n'est pas $\frac{3\pi}{4}$: il en diffère de 9°44'8".

Il y a lieu de s'étonner de cette erreur que M. Bertrand commet juste sur l'exemple où il explique si bien « quel sens il faut attribuer aux expressions « mal déterminées, » et qui persiste après que « M. Darboux, dont il n'a pas « à rappeler la pénétration et le savoir, a bien voulu revoir toutes les épreu- « ves, » et surtout après « le concours *affectueux* que lui a offert M. Fédor « Thoman, qui joint à l'habileté d'un calculateur sans égal, le profond savoir « d'un géomètre judicieux et *inventif*. »

HUITIÈME EXEMPLE. $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}.$

L'intégrale s'obtient d'après la formule $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, en mettant la dérivée $\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ sous la forme $x^{-\frac{1}{3}}$, et faisant $m = -\frac{1}{3}$.

Comme la valeur $x = 0$ rend infinie la dérivée $\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$, et non l'intégrale $\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}$, M. Bertrand choisit cet exemple pour donner une nouvelle explication à effet.

« Lorsque, dit-il, la fonction intégrale est discontinue et devient infinie « entre les limites de l'intégration, l'intégrale définie n'a plus de sens. »

Si, « lorsque la fonction intégrale devient infinie, l'intégrale définie n'a « plus de sens, » qu'est-ce que l'intégrale définie ? Si elle n'a pas de sens, ce doit être difficile de le dire ; cependant M. Bertrand le dit dans le passage suivant :

« Lorsque la fonction intégrale $F(x)$ devient infinie entre les limites de

« l'intégration, l'intégrale définie, somme des accroissements infiniment « petits de F(x), n'a pas de signification déterminée, et doit être, à moins de « définition nouvelle, absolument bannie des calculs et des raisonnements. »

Si l'intégrale définie signifie « la somme des accroissements infiniment « petits de F(x), » elle a donc un sens ou une signification déterminée.

« A moins de définition nouvelle, elle doit être absolument bannie des « calculs et des raisonnements. »

Comment donc? le cercle deviendra carré au moyen d'une définition nouvelle? et s'il ne devient pas carré, on le bannira absolument des calculs et des raisonnements?

Si « l'intégrale définie n'a plus ni sens ni signification déterminée lors- « qu'elle devient infinie, et doit être absolument bannie des calculs et des « raisonnements, » comment se fait-il donc que vous la partagez en deux? que vous en trouvez la valeur principale?

Je parie que M. Bertrand, tout le premier, va faire des calculs et des raisonnements sur « l'intégrale définie qui doit être absolument bannie des calculs « et des raisonnements. » C'est, en effet, ce qu'il fait quelques pages plus loin sur « l'intégrale définie $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^3}$, dont « la fonction intégrale $-\frac{1}{2x^2}$ « devient infinie entre les limites de l'intégration. »

« Soit par exemple, » dit-il, « l'intégrale

$$« \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^3}.$$

« On a

$$« \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2},$$

$$« \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon^2}.$$

« La somme des deux intégrales est nulle, et par conséquent l'expression $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^3}$, qui en elle-même est indéterminée, a pour valeur principale zéro. »

Ainsi, par des calculs et des raisonnements qui « doivent être absolument « bannis, » l'auteur prouve qu'une intégrale qui n'a pas de « signification « déterminée, » a une valeur indéterminée « en elle-même » et dont la valeur principale est zéro. Ce que c'est pourtant que de se comprendre!

L'équation $y = \frac{1}{x^3}$ représente une courbe composée de deux branches symétriques par rapport à l'origine, et séparées par l'axe des y.

L'aire qui va de $\pm \infty$ à $\pm x$, a pour expression $-\frac{1}{2x^3}$ et devient $\frac{1}{0}$ pour $x = 0$: il n'y a rien de plus à chercher ni à dire. L'aire $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^3}$ comprend l'aire infinie qui va de -1 à zéro, plus l'aire infinie qui va de zéro à $+1$. Or, par des calculs et des raisonnements faits sur une intégrale définie qui « doit être bannie absolument des calculs et des raisonnements, » on trouve pour la somme algébrique de ces deux infinis absolus, une valeur indéterminée « en elle-même, » mais qui a une valeur principale.

M. Bertrand énonce, mais ne démontre pas la proposition suivante : « Lorsqu'une fonction devient infinie pour une valeur finie de la variable, « sa dérivée le devient également. Mais la réciproque n'est pas exacte : « la dérivée peut devenir infinie lors même que la fonction demeure finie. »

La raison de cette double propriété peut se tirer de la relation qui existe entre les deux fonctions $F(x)$ et $F'(x)$, en tant que la première représente l'aire de la courbe dont la seconde exprime l'ordonnée ; car l'aire $F(x)$ ne saurait devenir infinie en restant limitée de toute part. Pour que l'aire $F(x)$ devienne infinie, il faut donc que l'ordonnée $F'(x)$ le devienne d'abord ; mais l'aire $F(x)$ peut tendre vers une limite finie pendant que l'ordonnée $y = F'(x)$ devient infinie.

L'aire qui s'étend à l'infini entre une courbe et son asymptote, peut être comparée à une série composée d'un nombre infini de termes : elle peut tendre vers une limite finie, comme la somme des termes d'une série convergente, ou devenir infinie, comme la somme des termes d'une série divergente.

Intégrales singulières.

« M. Cauchy, » dit Duhamel, « a désigné sous ce nom des intégrales prises « entre des limites qui se rapprochent indéfiniment d'une valeur particulière « de la variable, qui rend la fonction infinie. »

Par la fonction qui devient infinie, l'auteur entend celle qui est sous le signe $\int$. Or, lorsque la fonction $F'(x)$ devient infinie, l'intégrale $F(x)$ peut rester finie ou devenir infinie. Par exemple, on a :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-a}} = \frac{1}{2}\sqrt{x-a}, \quad \text{et} \int \frac{dx}{(x-a)^2} = -\frac{1}{x-a}.$$

Par la première égalité, on voit que la valeur $x = a$, qui rend infinie la fonction $\frac{1}{\sqrt{x-a}}$, rend nulle son intégrale $\frac{1}{2}\sqrt{x-a}$; tandis que dans la seconde égalité, la dérivée et l'intégrale deviennent infinies en même temps pour $x = a$.

Le plus souvent il est très-facile de reconnaître si l'intégrale devient infinie en même temps que la dérivée, et il n'y a rien à demander de plus. Mais lorsque l'intégrale n'est pas connue, ne pourrait-on pas tirer de la différentielle seule la preuve que son intégrale devient elle-même infinie ou reste finie ? C'est l'objet que Cauchy paraît s'être proposé en imaginant les intégrales singulières ; mais la règle qu'il a fondée sur elles, a le même vice d'origine que « l'extension élégante qu'il a su donner à la « règle de l'Hôpital, » puisqu'elle est déduite de propriétés illusoires de l'infini absolu.

« Si l'on suppose $F'(a)$ infinie » continue Duhamel,

« $\int_{a-\varepsilon}^{a-\mu\varepsilon} F'(x)\,dx$ sera une intégrale définie singulière, si ε tend vers zéro,

« μ étant un nombre fini quelconque. »

Une intégrale est définie quand on y a remplacé la variable par une valeur fixe, or tant que « ε tend vers zéro, » il varie, et l'intégrale n'est pas définie. L'intégrale définie singulière est donc, en effet, bien singulière, puisque c'est une intégrale définie qui n'est nullement définie.

Pourquoi ε tend-il vers zéro lorsqu'il lui est si facile d'y arriver du coup ? D'ailleurs si ε tend vers zéro, ε et $\mu\varepsilon$ sont des infiniment petits, et si j'en crois les auteurs, ces infiniment petits doivent se négliger devant a qui est fini, et même, au dire de Carnot et C. de Freycinet, « on a le droit et le devoir « de les négliger pour rétablir la réalité des choses »

Sans pousser plus loin la critique des intégrales singulières, et de leur valeur principale, je me bornerai à dire que la règle à laquelle on aboutit consiste à trouver la limite de la fraction $\frac{F(x)}{\left(\frac{1}{x-a}\right)}$ pour la valeur $x = a$ qui rend les deux termes infinis ; question qu'on résout par « l'élégante extension « donnée par Cauchy à la règle de l'Hôpital. » Or, j'ai assez montré ce que vaut cette « élégante extension. »

DIVERSES MÉTHODES D'INTÉGRATION.

Intégration Immédiate.

Une fonction quelconque étant donnée, on arrive toujours sûrement à sa différentielle au moyen des règles connues de différentiation. La question inverse, qui consiste à retourner d'une différentielle à sa fonction primitive, présente des difficultés souvent beaucoup plus grandes et même insurmontables. Lorsque la différentielle donnée est celle d'une fonction simple, le tableau de la page 259 présente immédiatement l'intégrale demandée; et dans ce cas, on dit que l'intégration est immédiate.

Intégration par Substitution.

Après l'intégration immédiate vient l'intégration par substitution, qui ramène à l'intégration immédiate au moyen d'une substitution de variables.

Par exemple, $\int \frac{\cos x dx}{\sin x}$ se ramène à $\int \frac{dz}{z}$, en substituant z à $\sin x$, et dz à $\cos x dx$. Or, l'intégration immédiate donne

$$\int \frac{dz}{z} = 1\, z; \text{ donc } \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = 1 \sin x.$$

Soit encore

$$\int \sin x \cos x dx.$$

En posant $z = \sin x$, d'où $dz = \cos x dx$, l'intégrale précédente se trouve remplacée par $\int z dz = \frac{z^2}{2}$, et donne ainsi

$$\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x.$$

Substitution dans les Limites.

Relativement aux intégrales définies, il y a une remarque importante à faire. Il faut bien comprendre que la substitution doit se faire dans les limi–

tes de l'intégrale comme sous le signe $\int$, et les limites substituées sont déterminées au moyen de la relation établie entre les variables.

Par exemple, en faisant $z = \sin x$, on substitue $\int z\,dz$ à $\int \sin x \cos x dx$.

Si l'on a l'intégrale définie $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx$, il faudra faire la substitution dans les limites d'après la relation $z = \sin x$, et remplacer ainsi les limites $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$ par $\sin\frac{\pi}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{2}$, en sorte que l'on aura identiquement

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx = \int_{\sin\frac{\pi}{4}}^{\sin\frac{\pi}{2}} z dz.$$

Ce serait donc une grave erreur de conserver les mêmes limites après la substitution des variables, et d'écrire, par exemple,

$$\int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = \int_0^{\pi} z dz.$$

L'erreur est manifeste, car z étant un sinus, comment pourrait-il devenir égal à π dans l'intégrale $\int_0^{\pi} z\,dz$?

Il est donc important de ne pas oublier que la substitution doit se faire dans les limites de l'intégrale, qui sont des valeurs particulières de la variable.

L'erreur qui consiste à conserver, après la substitution, les mêmes limites de l'intégrale, peut facilement passer inaperçue, parce que, comme les limites données sont des constantes, on peut croire que la substitution ne doit porter que sur les variables. Je trouve le plus bel exemple qu'on puisse offrir d'une pareille erreur, dans l'explication d'un paradoxe que l'auteur a qualifié de paralogisme, en le proposant en ces termes dans les nouvelles annales mathématiques de 1874, page 576.

« En désignant par m une quantité positive, la substitution $z = x^m$ dans « l'intégrale $\int \frac{dz}{\log z}$ donne le résultat

$$« \int_0^1 \frac{dz}{\log z} = \int_0^1 \frac{x^{m-1}dx}{\log x}.$$

« On a de même, par le changement de m en n,

$$« \int_0^1 \frac{dz}{\log z} = \int_0^1 \frac{x^{n-1}dx}{\log x},$$

« en sorte que l'on serait conduit à conclure que la valeur de l'intégrale

$$« \int_0^1 \frac{(x^{m-1} - x^{n-1} dx}{\log x}$$

« est nulle. Or cette conclusion est inadmissible, car on sait, à n'en pas « douter, que l'on a

$$« \int_0^1 \frac{(x^{m-1} - x^{n-1})\, dx}{\log x} = \log \frac{m}{n}.$$

« En quoi consiste le paralogisme? »

Voilà donc deux résultats différents pour une même intégrale définie. L'auteur donnant le deuxième comme indubitable, on ne peut suspecter que le premier; cependant le calcul est exact et la substitution complète, car si les limites sont les mêmes dans les intégrales

$$\int_0^1 \frac{dz}{z}, \int_0^1 \frac{x^{m-1}\, dx}{\log x}, \text{ et } \int_0^1 \frac{x^{n-1}\, dx}{\log x},$$

c'est que les relations $z = x^m$, et $z = z^n$ donnent $z = 0$ pour $x = 0$, et $z = 1$ pour $x = 1$.

Le calcul étant ainsi reconnu exact, le paradoxe ne peut, dans le cas présent, comme dans la plupart des autres cas, venir que de quelque opération faite sur l'infini absolu.

Or, comme nous l'avons montré tant de fois, on obtient tout ce qu'on veut par des calculs sur l'infini absolu. De la première manière on obtient zéro pour la différence des deux intégrales, et de la seconde manière on obtient $\log \frac{m}{n}$; d'une troisième manière on obtiendrait toute autre chose.

La fonction que représente l'intégrale indéfinie $\int \frac{x^m\, dx}{\log x}$ n'est pas connue; mais sans la connaître, on peut affirmer que cette fonction, comme sa dérivée $\frac{x^m}{\log x}$, devient infinie pour $x = 1$, car il n'y a que l'infini absolu qui ait la propriété de conduire à des résultats absurdes ou contradictoires par des opérations exactes; j'entends par des opérations qui seraient exactes si elles étaient faites sur des quantités finies, ou même sur des infinis relatifs.

En faisant $z = x$; d'où l'on a $dz = mx^{m-1}dx$, et $\log z = m \log x$, on obtient identiquement :

$$\int_a^b \frac{dz}{\log z} = \int_{\sqrt[m]{a}}^{\sqrt[m]{b}} \frac{x^{m-1}}{\log x}\, dx.$$

De même en faisant $z = x^n$, on aura identiquement

$$\int_a^b \frac{dz}{\log z} = \int_{\sqrt[n]{a}}^{\sqrt[n]{b}} \frac{x^{n-1}\, dx}{\log x},$$

et, par suite,

$$\int_{\sqrt[m]{a}}^{\sqrt[m]{b}} \frac{x^{m-1}\, dx}{\log x} = \int_{\sqrt[n]{a}}^{\sqrt[n]{b}} \frac{x^{n-1} dx}{\log x};$$

or, en faisant $a = 0$ et $b = 1$, cette identité devient

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}\, dx}{\log x} = \int_0^1 \frac{x^{n-1}\, dx}{\log x},$$

ou

$$\int_0^1 \frac{(x^{m-1} - x^{n-1})\, dx}{\log x} = 0.$$

Voilà un raisonnement et un calcul, qui, à moins de s'appliquer à l'infini absolu, sont incontestablement très-rigoureux.

Cependant les auteurs trouvent $\int_0^1 \frac{(x^{m-1} - x^{n-1})\, dx}{\log x} = \log \frac{m}{n}$, par un raisonnement et un calcul qu'ils croient aussi parfaitement rigoureux.

Quand on demande en quoi consiste le paralogisme, on veut dire en quoi consiste l'erreur ou le faux principe qui donne, pour une même intégrale définie, deux valeurs différentes, et, par conséquent, contradictoires? Comme, en proposant la difficulté à résoudre, M. Réalis dit : « on serait conduit à « conclure que la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{(x^{m-1} - x^{n-1})\, dx}{\log x}$ est nulle ; or, « cette conclusion est inadmissible, car on sait, à n'en pas douter, que l'on a « $\int_0^1 \frac{(x^{m-1} - x^{n-1})\, dx}{\log x} = \log \frac{m}{n}$, » il entend que cette dernière valeur est exacte et, par conséquent, que c'est la première qui est fausse. La question consiste donc à montrer le défaut de la solution qui donne zéro, et non à reproduire celle qui donne $\log \frac{m}{n}$.

A vrai dire, les deux solutions sont exactes ou fausses au même titre, en ce qu'elles représentent, l'une et l'autre, la différence de deux infinis absolus, qu'il est également absurde de déclarer égaux ou inégaux.

Quand on écrit $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \mathrm{l}(+1) - \mathrm{l}(-1)$, le second membre égale zéro, et n'égale pas autre chose, parce que $\mathrm{l}(-1)$ égale zéro comme $\mathrm{l}(+1)$. Le premier membre indique l'aire infinie qui va de l'ordonnée $x = -1$ à l'ordonnée $x = +1$. Cette aire se compose de deux parties illimitées, qui s'étendent le long de l'axe des y, asymptotique aux deux branches de la courbe. Ces deux parties sont superposables, et l'on pourrait les dire parfaitement égales, s'il était possible d'aller jusqu'au bout et d'en faire le tour. Comme elles sont composées d'éléments de signes contraires, on pourrait dire que la somme de tous ces éléments est nulle, et se flatter d'avoir ainsi justifié la formule $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}\ \mathrm{l}(+1) - \mathrm{l}(-1)$.

Mais cette justification de la formule ne pouvait venir à l'esprit d'aucun géomètre, parce que, dans l'état actuel de la science, on n'accorde point de logarithmes réels aux nombres négatifs. Aussi, nous avons déjà montré comment MM. Briot et Bouquet, dans leur *Théorie des Fonctions doublement périodiques*, ont tiré une autre conclusion en disant : « La différence « $\mathrm{l}(+1) - \mathrm{l}(-1)$, c'est-à-dire $(2k+1)\pi\sqrt{-1}$, donne les diverses valeurs de « l'intégrale définie, quand la variable va de -1 à $+1$ en décrivant diverses « courbes dans le plan. Cette remarque a été le point de départ de beaux tra- « vaux de Cauchy sur les intégrales définies. »

Or, chemin faisant, Cauchy a trouvé que l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$ a pour valeur générale $\mathrm{l}\frac{\mu}{\nu}$, et zéro pour valeur principale. Sans parler de l'intégrale singulière, il peut sembler déjà assez singulier que ni la valeur générale ni la valeur principale ne soient comprises dans « $(2k+1)\pi\sqrt{-1}$, qui donne « les diverses valeurs de l'intégrale définie quand la variable va de -1 à $+1$. »

L'expression $\int_0^1 \frac{x^{m-1}\,dx}{\log x} - \int_0^1 \frac{x^{n-1}\,dx}{\log x}$, indiquant, comme $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$, la différence de deux infinis absolus, on aurait pu tout aussi bien la trouver indéterminée et l'exprimer par $\log \frac{\mu}{\nu} + \log \frac{m}{n}$, en ajoutant que $\log \frac{m}{n}$ en représente la valeur principale.

Qnoi qu'il en soit, la vraie explication rationnelle du paralogisme consistait à montrer qu'il résulte de la propriété de l'infini absolu de conduire à tout ce qu'on veut, par des calculs effectués sur lui conformément aux règles ordinaires.

Par exemple, on a identiquement $\frac{2n}{n(x-3)} = \frac{2}{x-3}$, qui se réduit à $\frac{2n}{0} = \frac{2}{0}$ pour $x = 3$, et rien n'empêche de dire que le rapport de $\frac{2n}{0}$ à $\frac{2}{0}$ est n, ou un nombre quelconque.

Comme je l'avais d'abord prévu, une juste explication du paralogisme ne pouvait être publiée dans les *Nouvelles Annales* : d'abord, parce que la distinction entre l'infini absolu et l'infini relatif n'avait pas encore été faite ; ensuite, parce qu'une explication fondée sur cette distinction n'aurait pu être du goût des rédacteurs, qui en sont encore à « dire que quand x est infini, on n'a plus $x = x$, ou $x - x = 0$, et à soutenir que « les deux termes ne se détrui-« sent pas, généralement du moins. »

Du reste, mon opinion se trouve plus que justifiée par la préférence que le rédacteur des *Nouvelles Annales* a accordée à la solution de M. Allaretti, et qu'il a publiée à la page 227 de l'année 1875. Je vais reproduire ici cette solution, à laquelle je joindrai tous les compliments que méritent l'auteur qui l'a si bien inventée, et le rédacteur qui l'a si bien appréciée. En voici le texte fidèle.

« Il est facile, ce me semble, » dit M. Allaretti, « de répondre à cette « question.

« Dans les équations

$$« \int_0^1 \frac{dz}{\log z} = \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{\log x}\,dx,$$

$$« \int_0^1 \frac{dz}{\log z} = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{\log x}\,dx,$$

« les deux premiers membres ne peuvent être supposés égaux, z n'étant pas « une variable indépendante, mais une fonction de x, qui est x^m dans la « première équation, et une fonction différente de x ($z = x^n$) dans la seconde, « en admettant l'inégalité des exposants m et n.

« Sans cette considération relative à la variable indépendante, on pourrait « arriver à une foule de conclusions du genre de celle qui est rapportée par « M. Réalis. »

« Si, par exemple, dans l'intégrale $\int_0^1 dz$, on pose $z = ax$, il vient

$$« \int_0^1 dz = a\int_0^1 dx = ax.$$

On a de même, pour $z = bx$,

$$« \int_0^1 dz = b\int_0^1 dx = bx.$$

« On en conclurait

$$« \ (b-a)\int_0^1 dx = 0, \text{ d'où } b-a=0,$$

« c'est-à-dire que deux nombres quelconques b et a seraient toujours égaux
« entre eux. »

Tout est à admirer dans cette explication.

Remarquons d'abord que l'intégrale définie $\int_0^1 F'(z)\,dz$ a une valeur numérique fixe, qui est absolument la même que celle de $\int_0^1 F'(x)\,dx$. On l'obtient en remplaçant dans $F(x)$ d'abord x par 1, puis par 0, et retranchant le second résultat du premier; de cette manière on voit immédiatement que la valeur de $\int_0^1 dz$, comme celle de $\int_0^1 dx$, égale l'unité.

Les jolies égalités

$$« \int_0^1 dz = a\int_0^1 dx = ax,$$

$$« \int_0^1 dz = b\int_0^1 dx = bx, »$$

données par l'auteur, peuvent donc s'écrire :

$$1 = a = ax,$$
$$1 = b = bx;$$

or, sous cette forme très-simple, leur extrême inexactitude saute aux yeux, et en y appliquant l'explication de l'auteur, on verra clairement ce que vaut cette explication, qu'il donne pour prouver que « les deux premiers membres « ne peuvent être supposés égaux, » c'est-à-dire que 1 ne peut être supposé égal à 1.

Ainsi, les rédacteurs qui nous ont appris, à la page 90 des *Nouvelles Annales* de 1865, que les égalités $x=x$, $x-x=0$ ne sont pas exactes quand x est infini, que « les deux termes ne se détruisent pas, généralement du moins, » publient à la page 228 des mêmes *Nouvelles Annales* de 1875, les égalités

$$\text{I} = a = ax,$$
$$\text{I} = b = bx,$$

données comme nécessairement exactes, pour des valeurs quelconques de a, b, x.

L'auteur dit : « Les deux premiers membres » (qui sont I et I) « ne peuvent « être supposés égaux. »

Pour dire que I n'égale pas I, même que I ne peut être supposé égal à I, il faut venir d'un autre monde.

« Ces deux termes, » dit l'auteur, « ne peuvent être supposés égaux, z « n'étant pas une variable indépendante, mais une fonction de x, qui est « x^m dans la première équation, et une fonction différente de x ($z=x^n$) dans « la seconde, en admettant l'inégalité des exposants m et n.

On peut bien supposer z fonction de tout ce qu'on voudra, on aura invariablement $\int_0^1 dz = \text{I}$. Ainsi, écrire $\int_0^1 dz$ ou $\int_0^1 dx$, c'est écrire I en caractères plus ou moins intelligibles pour le lecteur, en sorte que les deux relations

$$\int_0^1 dz = a\int_0^1 dx = ax,$$

$$\int_0^1 dx = b\int_0^1 dx = bx,$$

ne peuvent pas signifier autre chose que

$$\text{I} = a = ax,$$
$$\text{I} = b = bx.$$

On peut bien, si l'on veut, substituer ax ou bx à z, dans l'intégrale $\int_0^1 dz$; mais la substitution, pour être complète et exacte, doit se faire aussi dans les limites. Or, en faisant $z=\text{I}$ dans les relations $z=ax$ et $z=bx$, on a $x=\frac{\text{I}}{a}$ et $x=\frac{\text{I}}{b}$; en sorte que les équations absurdes

$$\int_0^1 dz = a\int_0^1 dx = ax,$$

$$\int_0^1 dz = b\int_0^1 dx = bx,$$

doivent être remplacées par les suivantes :

$$\int_0^1 dz = a\int_0^{\frac{1}{a}} dx = 1,$$

$$\int_0^1 dz = b\int_0^{\frac{1}{b}} dx = 1,$$

qui sont exactes, puisqu'elles se réduisent à

$$1 = 1 = 1,$$

et $$1 = 1 = 1.$$

Lorsque j'ai eu montré, à la rédaction des *Nouvelles Annales*, les erreurs grossières de la solution de M Allaretti, M. Brisse convint que cette solution, (à laquelle il avait donné la préférence), « renferme des erreurs manifestes « qui interdisent toute conclusion. » Alors se croyant obligé d'opérer lui-même, il publia sous son nom la solution suivante, à la page 370 de l'année 1875 :

« Dans l'intégrale $\int_0^1 \frac{dz}{\log z}$, la fonction $\frac{1}{\log z}$ reste finie pour les valeurs « de z comprises entre zéro et 1, mais devient infinie pour $z = 1$. Dans ce « cas, si l'on désigne par ε une quantité positive, l'intégrale $\int_0^1 \frac{dz}{\log z}$ est, « *par définition*, la limite vers laquelle tend $\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dz}{\log z}$, quand ε tend vers « zéro.

« Faisons dans cette intégrale les deux substitutions $z = x^m$, $z = x^n$, la « limite inférieure restera la même; mais la limite supérieure changera, « et l'on aura, en toute rigueur,

$$« \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dz}{\log z} = \int_0^{\sqrt[m]{1-\varepsilon}} \frac{x^{m-1}}{\log x}\, dx = \int_0^{\sqrt[n]{1-\varepsilon}} \frac{x^{n-1}}{\log x}\, dx.$$

« Soit $m > n$, il en résultera $\sqrt[m]{1-\varepsilon} > \sqrt[n]{1-\varepsilon}$, et l'équation

$$« \int_0^{\sqrt[m]{1-\varepsilon}} \frac{x^{m-1}}{\log x}\, dx - \int_0^{\sqrt[n]{1-\varepsilon}} \frac{x^{n-1}}{\log x}\, dx = 0$$

« pourra s'écrire

$$« \int_0^{\sqrt[n]{1-\varepsilon}} \frac{x^{m-1}}{\log x}\, dx + \int_{\sqrt[n]{1-\varepsilon}}^{\sqrt[m]{1-\varepsilon}} \frac{x^{m-1}}{\log x}\, dx - \int_0^{\sqrt[n]{1-\varepsilon}} \frac{x^{n-1}}{\log x}\, dx = 0,$$

« ou

$$« \int_0^{\sqrt[n]{1-\varepsilon}} \frac{x^{m-1} - x^{n-1}}{\log x}\, dx = \int_{\sqrt[m]{1-\varepsilon}}^{\sqrt[n]{1-\varepsilon}} \frac{x^{m-1}}{\log x}\, dx.$$

« L'intégrale du second membre rentre dans la catégorie de celles que « Cauchy a appelées intégrales définies singulières, et sa valeur est, d'après la « règle qu'il a donnée,

$$« \ (\xi - 1) \frac{\xi^{m-1}}{\log \xi} \log \frac{m}{n},$$

« ξ étant compris entre $\sqrt[n]{1-\varepsilon}$ et $\sqrt[m]{1-\varepsilon}$. Les deux membres, étant égaux « quel que soit ε, auront des limites égales; ε tendant vers zéro, ξ tend « alors vers 1, et la règle de l'Hôpital donne

$$« \log \frac{m}{n}$$

« pour la valeur du second membre, qui ne se réduit à zéro que si $m = n$. »

Tout d'abord l'auteur dit : « l'intégrale $\int_0^1 \frac{dz}{\log z}$ est, *par définition*, la « limite vers laquelle tend $\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dz}{\log z}$, quand ε vers zéro. » Or, commo $\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dz}{\log z}$ ne tend vers aucune limite, voilà que je commence par ne pas comprendre la définition.

Dans l'énoncé même de sa question, M. Réalis démontre que « la valeur « de l'intégrale

$$« \int_0^1 \frac{(x^{m-1} - x^{n-1})\,dx}{\log x}$$

« est nulle, » et il admet qu' « on sait, à n'en pas douter, que l'on a

$$« \int_0^1 \frac{(x^{m-1} - x^{n-1})\,dx}{\log x} = \log \frac{m}{n}. »$$

Ce qui fait dire à l'auteur qu' « on le sait, *à n'en pas douter*, » c'est que les meilleurs traités de calcul intégral le démontrent très-explicitement. Voici, par exemple, la démonstration du *Cours d'Analyse* de Duhamel :

« Si l'on part de l'intégrale $\int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1}$, et qu'on intègre ses deux « membres par rapport à m entre deux valeurs m et n, on obtient

$$« \int_0^1 \frac{x^m - x^n}{1x}\,dx = 1\,\frac{m+1}{n+1}. »$$

Le calcul intégral de Cauchy, rédigé par l'abbé Moigno, donne la démonstration à peu près dans les mêmes termes, que voici :

« Comme on a généralement pour des valeurs positives de m, « $\int_0^1 x^{m-1}\,dx = \frac{1}{m}$, on en conclut, en multipliant les deux membres par « dm, et en intégrant par rapport à m à partir de n,

$$« \int_0^1 \frac{x^{m-1} - x^{n-1}}{1x}\,dx = 1\,\frac{m+1}{n+1}. »$$

M. Bertrand donne aussi la même démonstration en disant :

« On a évidemment

$$« \int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1}.$$

« On en déduit, en multipliant par dm, et intégrant par rapport à m entre les limites m et n

$$« \int_0^1 \frac{x^m - x^n}{1x}\,dx = 1\,\frac{m+1}{n+1}. »$$

Tout individu capable de copier une de ces trois démonstrations, aurait ainsi présenté une solution préférable à celle qui a été publiée sous la signature de M. Brisse, non-seulement parce que celle-ci est plus longue et plus compliquée; mais surtout parce qu'elle est plus incomplète en ce sens que le point le plus obscur y est présenté sans démonstration, puisqu'on dit, *sans le démontrer*, que « la valeur de

$$« \int_{\sqrt[m]{1-\varepsilon}}^{\sqrt[n]{1-\varepsilon}} \frac{x^{m-1}}{\log x}\,dx \text{ est } (\xi - 1)\,\frac{\xi^{m-1}}{\log \xi}\,\log\frac{m}{n}. »$$

La théorie qui donne aux nombres négatifs les mêmes logarithmes qu'aux nombres positifs, serait confirmée par l'exemple que nous venons de discuter, comme par l'exemple de la page 282, où nous avons vu que la courbe

$y = \frac{1}{1-x^2}$, représentée par la figure 17, se compose de trois branches séparées par leurs asymptotes. Or l'intégrale $1\frac{1+x}{1-x}$, qui représente l'aire de la courbe, ne s'applique qu'à la branche du milieu quand on n'accorde point de logarithmes aux nombres négatifs, tandis qu'elle s'applique également et aussi parfaitement aux deux autres branches, quand on accorde aux nombres négatifs les mêmes logarithmes qu'aux nombres positifs.

La courbe qui représente la fonction $y = \frac{x^m}{\log x}$ de la question proposée par les *Nouvelles Annales*, se compose pareillement, dans notre théorie, de trois branches séparées par les droites $x=1$ et $x=-1$, qui en sont les asymptotes; tandis que la théorie qui refuse des logarithmes aux nombres négatifs, supprime par le fait, dans la courbe $y = \frac{x^m}{\log x}$, toute la branche de gauche et la moitié de la branche du milieu.

Ainsi, dans l'exemple cité plus haut, la théorie défectueuse supprimait l'aire de la moitié de la courbe; tandis que dans l'exemple actuel, elle supprime la moitié de la courbe elle-même.

Dans la théorie qui rejetterait non-seulement les logarithmes des nombres négatifs, mais les nombres négatifs eux-mêmes, en disant, comme M. Bertrand, qu'ils ne représentent rien, ou, avec Duhamel, qu'ils représentent des choses qui ne sont pas des grandeurs, la parabole $y=x^2$ serait réduite de moitié : elle se terminerait à l'origine, où elle présenterait un point d'arrêt.

C'est ainsi que dans la théorie incomplète des logarithmes, la courbe

$$y = \frac{x^m}{\log x}$$

se trouve réduite de moitié et présente un point d'arrêt à l'origine.

L'intégrale définie $\int_0^1 \frac{x^m dx}{\log x}$ indique l'aire de la branche qui part de l'origine et s'étend à l'infini le long de son asymptote $x=1$. Cette aire étant infinie, il est absurde de dire que c'est « la limite vers laquelle tend « $\int_0^{1-\varepsilon} \frac{x^m\,dx}{\log x}$, quand ε tend vers zéro. »

De même l'intégrale définie $\int_0^1 \frac{x^n dx}{\log x}$ indique, comme $\int_0^1 \frac{x^m dx}{\log x}$, un infini absolu, et demander la valeur de l'expression

$$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\log\,x} - \int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\log x},$$

c'est demander la différence de deux infinis absolus : la question est donc absurde.

Mettre cette différence sous la forme

$$\int_0^1 \frac{(x^m - x^n)\,dx}{\log x},$$

c'est faire une opération absurde sur des infinis absolus. Mais l'expression

$$\int_0^1 \frac{(x^m - x^n)\,dx}{\log x}$$

une fois donnée, ce n'est plus une question absurde d'en demander la valeur numérique.

Les fractions $\frac{x^m}{\log x}$ et $\frac{x^n}{\log x}$ se réduisent, l'une et l'autre, à $\frac{1}{0}$ pour $x = 1$, et il est absurde de les dire égales ou inégales; tandis que, pour $x = 1$, la fonction $\frac{x^m - x^n}{\log x}$ se réduit à $\frac{0}{0}$; elle est donc indéterminée, et ce n'est point la limite, mais la valeur principale de cette fraction qui est à considérer.

Si deux infinis pouvaient être dits égaux, ce seraient bien les espaces infinis compris entre des parallèles équidistantes.

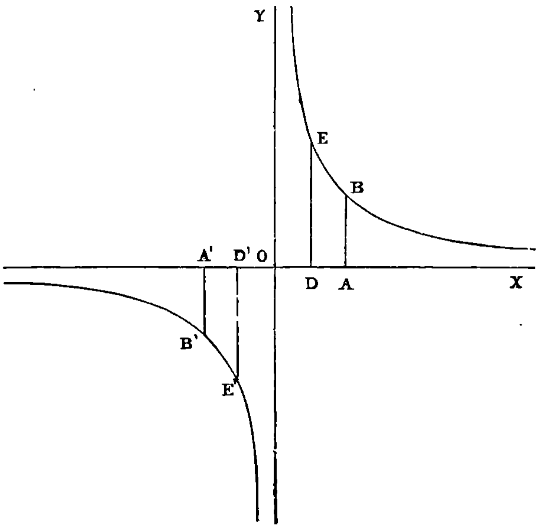
Dans la célèbre démonstration de Bertrand de Genève sur le *postulatum* d'Euclide, ces espaces sont admis comme égaux, et ce point n'a jamais été contesté par personne, si ce n'est par Duhamel, qui, dans son *Cours d'Analyse*, s'exprime de la manière suivante :

« Si l'on mène dans un plan des parallèles équidistantes, il est absurde de « dire que les espaces infinis renfermés entre les parallèles consécutives « sont égaux. Mais si l'on cherche les rapports de ces espaces croissant indé- « finiment, on trouve un résultat complétement indéterminé; car on peut « faire croître indéfiniment les longueurs de deux de ces bandes, en établis- « sant entre elles un rapport arbitraire; et l'on ne trouverait le rapport de « ces bandes infinies égal à l'unité que dans des cas très-particuliers. »

Si Duhamel s'en était tenu à ce principe, au lieu de se laisser éblouir par l'éclat des « beaux travaux de Cauchy, » il n'aurait pas fait tant de cas de sa découverte des valeurs générales, principales ou singulières des intégrales définies indéterminées.

Cauchy dans ses « beaux travaux sur les intégrales définies, » et les géomètres qui ont accepté ces beaux travaux comme du pain bénit, donnent $l\,\frac{\mu}{\nu}$ pour la valeur générale de l'intégrale définie $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}$, c'est-à-dire pour l'expression générale de l'aire de la courbe $y = \frac{1}{x}$ (*fig.* 19) comprise entre les ordonnées A'B' et AB, correspondant à $x = -1$ et $x = +1$.

Fig. 19.



Or cette aire se compose de celle qui va de A'B' à l'axe des y, et de celle qui va pareillement de AB au même axe des y. Chacune de ces deux aires aurait pour expression l (o), s'il n'était absurde de vouloir exprimer l'infini absolu, en sorte que 2 l(o) représenterait leur somme, et zéro leur différence, s'il n'était absurde d'ajouter ou de retrancher deux infinis absolus. A plus forte raison est-il absurde de donner $l\,\frac{\mu}{\nu}$ pour valeur générale de $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}$.

Les éléments qui vont de A'B' à l'axe des y sont négatifs, tandis que ceux qui vont de l'axe des y à l'ordonnée AB sont positifs, en sorte que leur somme algébrique, indiquée par $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}$, exprimerait, en réalité, la différence des deux aires séparées par l'axe des y, s'il n'était absurde de vouloir exprimer la différence de deux infinis absolus. Ces deux aires sont superposables, et l'on pourrait affirmer qu'elles coïncident dans toute leur étendue ou que leur différence est zéro, si, pour s'assurer de leur complète coïncidence, il était possible d'aller jusqu'au bout et d'en faire le tour. Mais s'il est absurde de dire que leur différence est nulle, à plus forte raison est-il absurde de dire qu'elle a toute autre valeur, générale ou principale.

Chaque fois que pour une valeur α de x, $F(\alpha)$ devient infinie, l'aire indiquée par $\int_a^\alpha F'(x)\,dx$ est infinie, de même que l'aire indiquée par $\int_\alpha^b F'(x)\,dx$, et si α est compris entre a et b, l'aire indiquée par $\int_a^b F'(x)\,dx$ est la somme ou la différence des deux aires, suivant que des deux côtés de $x = \alpha$, les valeurs de $F'(x)$ sont de signes semblables ou différents. Dans le premier cas on dit que l'intégrale définie est infinie, et dans le second cas on la dit indéterminée, parce qu'en effet, suivant la manière dont on conduit le calcul, on peut trouver tout ce qu'on veut en retranchant deux infinis absolus l'un de l'autre, et, pour la valeur générale de l'intégrale définie indéterminée, on pourrait trouver aussi bien $\operatorname{tang}\frac{P}{Q}$ que $1\frac{\mu}{\nu}$.

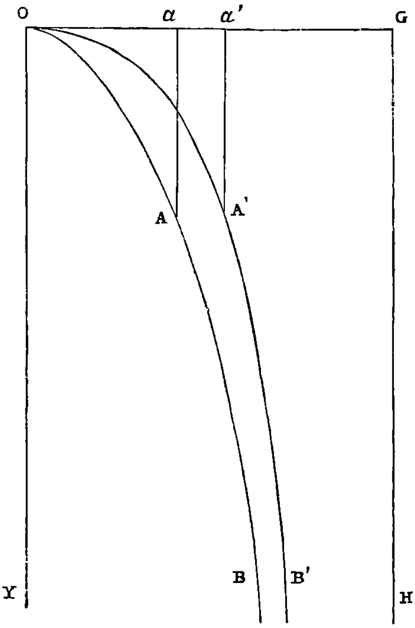
Pour prétendre que $\operatorname{tang}\frac{P}{Q}$ n'est pas aussi bien l'intégrale générale que $1\frac{\mu}{\nu}$, il faudrait dire ce que représente l'intégrale générale. De même, lorsqu'on prétend que zéro est la valeur principale de l'intégrale définie

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x},$$

il faudrait avoir dit ce que représente la valeur principale. Quand on ajoute que $1\frac{b}{a}$ est la valeur principale de l'intégrale définie $\int_{-a}^{+b}\frac{dx}{x}$, il faudrait dire pourquoi c'est plutôt $1\frac{b}{a}$ que $1\frac{b}{-a}$; car les limites étant b et $-a$, la formule donne directement $1b - 1(-a)$. Si donc on substitue $1a$ à $1(-a)$, c'est qu'on entend que $1(-a)$ égale $1a$; ou, si l'on n'admet pas que $1(-a) = 1a$, il faut bien qu'on dise par quel artifice on transforme $1(-a)$ en $1a$.

Si nous construisons la courbe représentée par l'équation $y = \frac{x}{\log x}$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{xdx}{\log x}$ indiquera l'aire infinie comprise entre la branche OAB (*fig.* 20), l'axe des x, et l'asymotote GH. Il en est de même de l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\log x}$, se rapportant à la branche OA'B' de la courbe représentée par l'équation $y = \frac{x^3}{\log x}$.

Fig. 20.



Ces deux aires étant infinies, on peut toujours prendre dans la seconde une aire égale à une autre aire finie quelconque prise dans la première.

Par exemple, si l'on prend $Oa = \alpha$, l'aire OAa sera indiquée par

$$\int_0^\alpha \frac{x}{\log x}.$$

De même si l'on prend $Oa' = \sqrt{\alpha}$, l'aire OAa' sera indiquée par

$$\int_0^{\sqrt{\alpha}} \frac{x^3 dx}{\log x},$$

et ces deux aires sont égales, puisqu'en substituant x^2 à x dans l'intégrale

$$\int_0^\alpha \frac{xdx}{\log x},$$

on obtient identiquement

$$\int_0^\alpha \frac{xdx}{\log x} = \int_0^{\sqrt{\alpha}} \frac{x^3 dx}{\log x}.$$

Ainsi, les deux membres de cette identité représentent deux aires constamment égales, qui se terminent à deux ordonnées dont la distance à l'asymptote tend vers zéro lorsque α tend vers 1. Donc à la limite elles sont égales, en sorte qu'on a

$$\int_0^1 \frac{xdx}{\log x} = \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\log x}.$$

En quoi consiste le paralogisme, c'est-à-dire le défaut du raisonnement ? Il consiste à passer à la limite quand il n'y a point de limite, comme le fait l'auteur en disant :

« L'intégrale $\int_0^1 \frac{dz}{\log z}$ est, *par définition*, la limite vers laquelle tend « $\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dz}{\log z}$ quand ε tend vers zéro. »

L'intégrale $\int_0^\alpha \frac{(x^3-x)\,dx}{\log x}$ indique l'aire comprise entre les deux courbes et l'ordonnée Aa, aire dont la limite est donnée par la formule

$$\int_0^1 \frac{(x^{m-1}-x^{n-1})\,dx}{\log x} = \log\frac{m}{n},$$

qui devient ici

$$\int_0^1 \frac{(x^3-x)\,dx}{\log x} = \log 2.$$

Nous ajouterons, comme auraient dû le faire les auteurs de la question et de la solution, que la formule n'est plus exacte lorsque $\log x$ et $\log\frac{m}{n}$ ne désignent pas exclusivement des logarithmes népériens. Dans tout autre système on a

$$\int_0^1 \frac{(x^{m-1}-x^{n-1})}{\log x}\,dx = \frac{\log\frac{m}{n}}{\log^2 e}.$$

Dans le dernier exemple que nous venons de traiter, comme dans tant d'autres que nous avons discutés dans le présent ouvrage, le paralogisme ou le faux raisonnement consiste dans l'opération exécutée sur l'infini absolu. Or tout raisonnement fait sur l'infini absolu porte nécessairement sur quelque fausse propriété qu'on lui prête.

Ainsi, $\int_0^1 \frac{x^3dx}{\log x}$ et $\int_0^1 \frac{xdx}{\log x}$ étant des infinis absolus, vous demandez la valeur de leur différence, que vous commencez par mettre sous la forme $\int_0^1 \frac{(x^3-x)dx}{\log x}$. Or cette première transformation constitue une opération sur l'infini absolu ; et, par conséquent, ce premier pas est un faux pas. Une fois que ce premier pas est fait, on peut supposer $x=1$ dans la fraction $\frac{x^3-x}{\log x}$, qui, se réduisant à $\frac{0}{0}$, devient indéterminée, mais dont la valeur principale correspond à la limite de la surface comprise entre les deux branches de courbe.

La transformation de

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}}{\log x}\,dx - \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{\log x}\,dx$$

en

$$\int_0^1 \frac{(x^{m-1} - x^{n-1})\,dx}{\log x},$$

étant un faux pas, le paralogisme consiste à regarder ces deux expressions comme identiques.

Soit encore l'intégrale $\int \operatorname{tang} x dx$, qu'on peut écrire $\int \frac{\sin x dx}{\cos x}$.

En substituant z à $\cos x$, d'où $dz = - \sin x dx$, l'intégrale proposée se change en

$$-\int \frac{dz}{z} = -\,\mathrm{l}\,z\,;$$

ce qui donne enfin

$$\int \operatorname{tang} x dx = -\,\mathrm{l}\cos x.$$

L'équation $y = \operatorname{tang} x$ représente une courbe composée d'une infinité de branches identiques, qui coupent l'axe des x aux points donnés par la formule $x = n\pi$, dans laquelle n désigne un nombre entier quelconque positif ou négatif, et qui sont séparées par leurs asymptotes, déterminées par la formule

$$x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, la première branche, qui passe par l'origine, est comprise entre les parallèles $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$, qui lui sont asymptotiques, la première du côté des x positifs, et la seconde du côté des x négatifs.

Toutes ces branches sont superposables, et il est évident que leurs aires comprises entre des ordonnées égales sont égales.

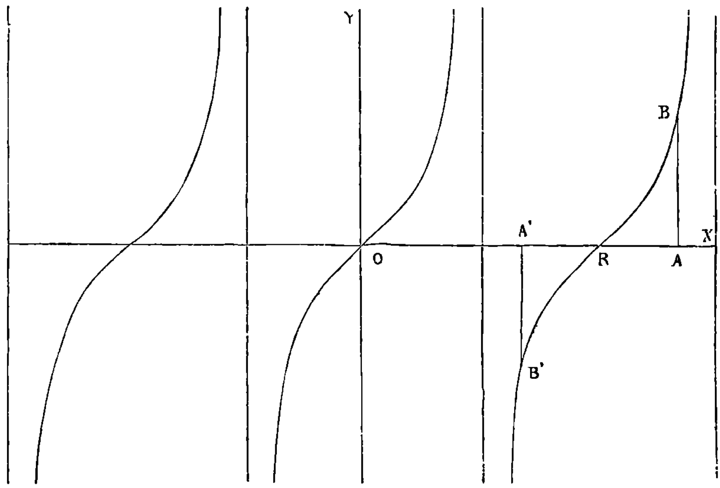
L'équation $\mathrm{l}\cos x = 0$ est satisfaite par toutes les valeurs de x qui donnent $\cos x = \pm 1$, et qui sont comprises dans l'expression $n\pi$, c'est-à-dire pour tous les points où l'axe des x est coupé par la courbe.

Ainsi, pour toute valeur de x se rapportant à une branche quelconque de la courbe, la fonction $-\mathrm{l}\cos x$ représente l'aire de cette branche, à partir du point où elle coupe l'axe, jusqu'à l'ordonnée correspondant à cette valeur de x.

La valeur de $-\mathrm{l}\cos x$ ne peut être que positive, parce qu'en effet, en partant du point où une branche coupe l'axe des x, les deux facteurs de $\operatorname{tang} x dx$, sont positifs d'un côté de ce point, et négatifs de l'autre côté.

Prenons $RA = RA'$, et soient $OA = a$, $OA' = a'$ (*fig.* 21); il en résulte

Fig. 21.



$\cos a = \cos a'$, et par conséquent $\int_{a'}^{a} \operatorname{tang} x dx = 0$. Mais voici le cas embarrassant : pour tout point de la branche B'RB, et en général, pour tout point d'une branche de rang pair, en partant de celle qui passe par l'origine, la valeur de $\cos x$ est négative, et, par conséquent, l'aire bien réelle de cette branche, est représentée par $- \mathrm{l} \cos x$, qui, d'après les géomètres, n'a que des valeurs imaginaires, puisque $\cos x$ est négatif de $\frac{\pi}{2}$ à $3\frac{\pi}{2}$.

Ainsi en cet exemple, comme en tant d'autres, l'analyse se plaît et s'obstine à contredire la théorie des géomètres qui refusent toute espèce de logarithmes réels aux nombres négatifs. Mais, est-ce la science qui a tort de ne pas conformer ses résultats aux théories des savants, ou les savants qui ont tort de ne pas conformer leurs théories aux résultats de la science ?

Quoi qu'il en soit, pour se tirer d'embarras, les géomètres ont ici à leur disposition les logarithmes imaginaires, les constantes arbitraires et les sophismes non moins arbitraires. Donc, par l'emploi de tous ces moyens, ils arriveront à quelque chose qui, pour représenter l'aire RAB, ne sera pas $- \mathrm{l} \cos a$, puisque justement ils cherchent autre chose. Ils trouveront donc $- \mathrm{l}(-\cos a)$, bien plus forts en cela que l'analyse qui s'obstine à donner $- \mathrm{l} \cos a$ pour tous les cas.

Mais, si, en trouvant $- \mathrm{l}(-\cos a)$, tandis que l'analyse donne $- \mathrm{l} \cos a$, leur résultat est exact, qu'est-ce que cela prouve? si non que $1\cos x = 1(-\cos x)$, et qu'ils finissent ainsi par où ils auraient dû commencer en reconnaissant que deux nombres égaux et de signes contraires ont identiquement le même logarithme?

Soit enfin

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\ \text{arc}\sin x}.$$

En faisant

$$z = \text{arc}\sin x,$$

d'où

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

l'intégrale proposée devient

$$\int \frac{dz}{z} = 1z.$$

Dans cet exemple, nous désignerons les logarithmes népériens par log., et ainsi nous aurons :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\ \text{arc}\sin x} = \log \text{arc}\sin x.$$

Si l'on construit la courbe

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}.\ \text{arc}\sin x},$$

on la trouve composée d'une infinité de branches échelonnées au-dessus comme au-dessous de l'axe des x, et comprises entre les deux parallèles

$$x = 1,\ x = -1,$$

qui sont l'une et l'autre asymptotiques à chaque branche. Il n'y a d'exception que pour la première branche en haut, et la première en bas, pour lesquelles l'axe des y est une des deux asymptotes.

Les branches situées au-dessus de l'axe des x se rapportent aux arcs positifs, et les branches situées au-dessous se rapportent aux arcs négatifs.

L'intégrale

$$\log \text{arc}\sin x$$

devient nulle pour l'arc égal à $+1$, qui répond à

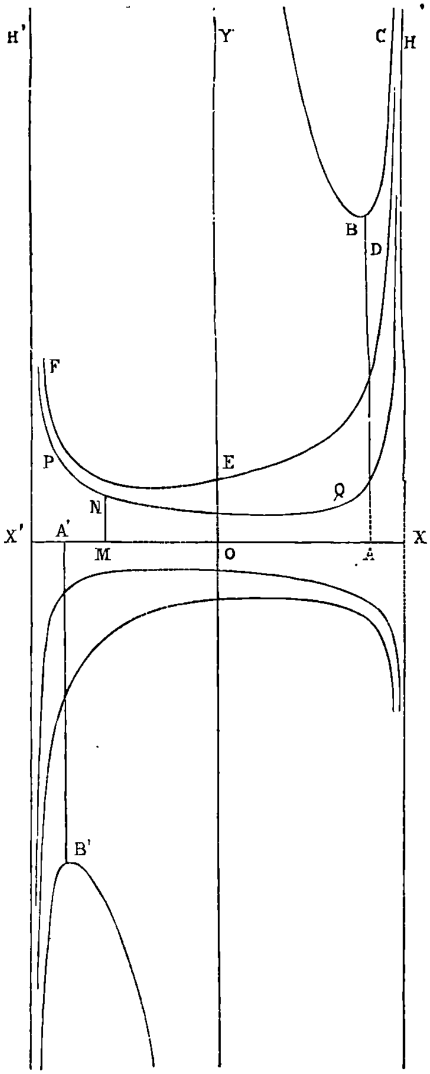
$$x = 0{,}84,$$

et pour l'arc égal à -1, qui répond à

$$x = -0{,}84.$$

En prenant $OA = 0,84$, et $OA' = -0,84$ (*fig.* 22), l'aire exprimée par $\log \operatorname{arc} \sin x$ partira de AB quand elle s'arrêtera à l'ordonnée d'une branche située au-dessus de l'axe des x, et elle partira de A'B', quand elle s'arrêtera à l'ordonnée d'une branche située au-dessous du même axe.

Fig. 22,



Pour $x = 0$, on a

$$\log \operatorname{arc} \sin x = -\infty,$$

ce qui prouve que l'aire qui s'étend à l'infini le long de l'axe des y, est elle-même infinie; mais l'aire qui s'étend à l'infini le long des deux autres asymptotes a une limite finie.

Maintenant cherchez ce que représente l'intégrale $\log a$ lorsque a désigne un arc quelconque, positif ou négatif. Si vous ne le trouvez pas, vous aurez toujours la ressource de dire, avec M. Bertrand, que « la for-« mule n'a plus aucun sens, aucune « signification déterminée, qu'elle « ne représente plus dans ce cas ni « l'aire de la courbe, ni la somme « des accroissements de la fonction; « qu'il n'est plus permis de regarder « l'accroissement total comme la « somme des accroissements par-« tiels, etc. »

Pour que la formule ait un sens, il faut découvrir celui qu'elle a, et ne pas vouloir l'ajuster à celui qu'on se figure qu'elle devrait avoir.

Supposons d'abord que l'arc a soit positif et corresponde à l'ordonnée MN; l'aire représentée par $\log a$ est celle qui serait balayée par l'ordonnée AB, dont le sommet B monterait d'abord à l'infini sur la première branche BC, jusqu'à l'asymptote XH, passerait de là sur la seconde branche DEF pour la parcourir en entier jusqu'à l'asymptote X'H', et reviendrait ensuite sur la troisième branche PNQ, jusqu'au point N.

En second lieu, que représentera $\log a$ quand a est négatif ? Dans la théorie ordinaire des logarithmes, $\log a$ sera imaginaire, et pourtant il est évident que l'aire de la courbe est bien réelle. Il ne suffira donc pas de dire, avec M. Bertrand, que « dans ce cas la formule n'a plus de sens; qu'elle n'est « plus applicable, et ne représente plus l'aire de la courbe ; » il faudra bien alors trouver une formule qui ait un sens, qui soit applicable, et représente l'aire de la courbe.

Or, si après des tours et des détours, si par le moyen de logarithmes imaginaires, ou si à force d'artifices de calcul, on trouve $\log(-a)$, au lieu de $\log a$, pour l'expression de l'aire, qu'est-ce qu'on aura prouvé, si non que $\log(-a) = \log a$?

Intégration par Parties.

La formule

$$\partial uv = udv + vdu,$$

établie à la page 206, se transforme, par l'intégration, en

$$uv = \int udv + \int vdu,$$

d'où l'on tire

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Cette dernière formule montre que, si l'intégrale $\int vdu$ est plus facile à trouver que l'intégrale $\int udv$, la recherche de celle-ci se ramènera à la recherche de l'autre, en remplaçant $\int udv$ par $uv - \int vdu$.

Supposons, par exemple, qu'on ait à calculer $\int x \cos x dx$. On prendra x pour u, et $\cos x dx$ pour dv ; par suite, du sera dx et v sera $\sin x$. On aura ainsi :

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx,$$

et, puisqu'on a

$$\int \sin x dx = - \cos x,$$

on obtient enfin

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x.$$

Prenons encore pour exemple l'intégrale $\int 1xdx$.

En remplaçant $1x$ par u, et x par v, on aura

$$\int 1xdx = x\,1x - \int x\,\frac{dx}{x}.$$

ou

$$\int 1\,xdx = x\,1x - \int dx = x\,1x - x = x\,(1x - \text{1}).$$

Puisque $1(+x) = 1(-x)$, la courbe $y = 1x$ est symétrique par rapport à l'axe des y.

Comme $1\,x = 0$ pour $x = +1$ et pour $x = -1$, la courbe coupe l'axe des x aux deux distances $+1$ et -1 de l'origine.

L'aire représentée par l'intégrale $x\,(1x - 1)$ part de l'une quelconque des racines de l'équation $x\,(1x - 1) = 0$, qui est satisfaite pour $x = +e$ et pour $x = -e$.

Maintenant que devient la valeur de $x\,(1x - 1) = x\,1x - x$, pour $x = 0$?

D'abord le second terme s'annule, et le premier terme $x\,1\,x$ prend, comme disent les auteurs, la forme indéterminée $0 \times \infty$, et pour en trouver la vraie valeur, on transforme $x\,1x$ en $\dfrac{x}{\frac{1}{1x}}$, afin d'y d'appliquer la règle de l'Hôpital; ce qui, d'après Duhamel, conduit à la formule

$$\text{« } \lim F(x)\,f(x) = -\lim \frac{F(x)^2 f'(x)}{F'(x)}. \text{ »}$$

Pour appliquer cette formule à notre exemple, nous remplacerons $f(x)$ par x, et $F(x)$ par $1x$; nous trouverons ainsi $\lim x\,1x = -\lim x\,1^2x$. Ce qui veut dire que les deux membres de l'égalité $x\,1x = x\,1^2x$, qui se réduit à $1 = 1x$, deviennent égaux pour $x = 0$, et qu'ainsi le logarithme de zéro est égal à 1. Il me semble que l'absurdité de ce résultat prouve bien la fausseté de la règle.

Pour résoudre la question à ma manière, et sans la règle de l'Hôpital, je dis qu'on ne peut pas faire $x = 0$ dans $\log x$, et que par suite $x \log x$ ne peut pas devenir $0 \times \infty$; ce qui n'empêche pas $x \log x$ de tendre vers une limite quand x tend vers zéro. Or, j'ai assez prouvé que la règle de l'Hôpital et « l'extension élégante que Cauchy a su donner à cette règle, » n'ont rien à faire dans les questions de limites.

Du reste, il est très-facile de se passer de l'une et de l'autre dans la question actuelle, car quand x égale $\frac{1}{10^n}$, $\log x = -n$, et $x \log x = \frac{-n}{10^n}$.

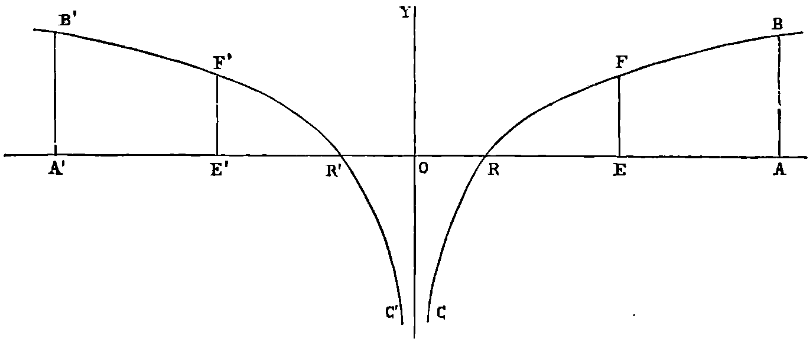
Or, en faisant seulement $n = 100$, on aura

$$x \log x = -\frac{1}{10^{98}},$$

dont la valeur est extrêmement près de zéro ; ce qui prouve bien que la limite de $x \log x$ est zéro. La limite zéro pouvant figurer au nombre des racines de l'équation $x(lx - 1) = 0$, il s'ensuit que $x(lx - 1)$ représente l'aire de la courbe, à partir d'une quelconque des trois valeurs $x = 0$, $x = +e$, $x = -e$, jusqu'à la valeur arbitraire donnée à x.

Soient (*fig.* 23) $OR = 1$, $OE = e$, $OA = a$, $OR' = -1$, $OE' = -e$, $OA' = -a$.

Fig. 23.



L'expression $a(l\,a - 1)$ représentera la valeur de chacune des trois intégrales définies $\int_0^a lx dx$, $\int_e^a lx dx$, $\int_{-e}^a lx dx$.

De même, l'expression $-a\left[l(-a) - 1\right]$ représentera la valeur de chacune des trois intégrales $\int_0^{-a} lx dx$, $\int_e^{-a} lx dx$, $\int_{-e}^{-a} lx dx$; et, comme $l(-a) = la$, il s'ensuit que la valeur des trois premières intégrales et celle des trois dernières sont égales, mais de signes contraires.

Puisqu'on a $\int_0^e lx dx = 0$, cela prouve que l'aire REF égale la limite de l'aire ORC, qui se prolonge à l'infini le long de l'axe des y; mais que les éléments de ces deux aires sont de signes contraires, puisque leur somme totale égale zéro.

FIN.