ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

Francesco Brioschi

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi *in Pisa* — **Giuseppe Jung** *in Milano*
Ulisse Dini *in Pisa* — **Corrado Segre** *in Torino*

SERIE III.ª - TOMO XI.°

MILANO,
TIPO-LITOGRAFIA REBESCHINI DI TURATI E C.

1905.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XI.° (SERIE III.ª)

MEDAGLIA GUCCIA.

In occasione del IV° CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI, che si terrà in Roma nell'anno 1908, il *Circolo Matematico di Palermo* conferirà un premio internazionale di Geometria. Questo premio, chiamato «MEDAGLIA GUCCIA» (dal nome del suo fondatore), consisterà in una medaglietta ed in una somma di lire 3000 in oro.

È noto che, dopo i lavori ai quali diè luogo il Premio STEINER conferito nel 1882, la teoria delle curve gobbe algebriche è stata alquanto trascurata, e che anche i grandi progressi della Geometria moderna, conseguiti con metodi sintetici, o algebrici, o funzionali, han lasciato in disparte codesta teoria: di guisa che le questioni fondamentali che erano state poste nei lavori citati, ed altre ancora che si potrebbero porre, non sono state oggetto di lavori ulteriori. Se poi si passa dallo spazio ordinario agli spazi superiori, sorgono per le curve algebriche (in particolare per la loro classificazione, per lo studio delle curve canoniche di genere dato, ecc.) numerose e importanti questioni, delle quali nessuno si è ancora occupato. D'altra parte, si conoscono ben poche proposizioni sulle curve gobbe algebriche ottenute limitandosi al campo reale, ovvero a un campo razionale dato.

Ispirandosi a queste considerazioni (ma senza voler limitare, in alcuna guisa, i problemi e i metodi di ricerca), il *Circolo Matematico di Palermo*, conformemente alle intenzioni del fondatore del premio, conferirà la «MEDAGLIA GUCCIA» a

una Memoria che farà fare un progresso essenziale alla teoria delle curve gobbe algebriche.

Nel caso in cui, fra i lavori inviati al concorso, nessuna Memoria relativa a questa teoria fosse riconosciuta degna del premio, questo potrà essere aggiudicato a

una Memoria che farà fare un progresso essenziale alla teoria delle superficie, o altre varietà, algebriche.

Le Memorie destinate al concorso dovranno essere: inedite, redatte in lingua italiana, o francese, o tedesca, o inglese, e scritte tranne che per le formole) con la macchina da scrivere. Munite di una epigrafe, esse dovranno pervenire, in tre esemplari, al Presidente del *Circolo Matematico di Palermo* **prima del 1° Luglio 1907**, accompagnate da un plico suggellato portante sulla busta l'epigrafe adottata e nell'interno il nome e l'indirizzo dell'autore. La Memoria premiata sarà inserita nei «*Rendiconti*», o altra pubblicazione, del *Circolo Matematico di Palermo*. L'autore ne riceverà 200 Estratti.

Qualora nessuna delle Memorie presentate al concorso fosse ritenuta degna del premio, questo potrà essere aggiudicato a una Memoria, sulle teorie anzidette, che venisse pubblicata dopo la pubblicazione del presente programma e prima del 1° Luglio 1907.

Il premio sarà conferito dal *Circolo Matematico di Palermo* in conformità al giudizio di una Commissione internazionale di tre membri, composta dei signori:

Prof. MAX NOETHER, dell'Università di Erlangen,
» HENRI POINCARÉ, dell'Università di Parigi,
» CORRADO SEGRE, dell'Università di Torino.

La lettura del rapporto della Commissione, nonchè la proclamazione del nome dell'autore premiato ed il conferimento del premio si faranno in Roma nel 1908, in una seduta del IV° CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI.

Palermo, il 1° novembre 1904.

Il Presidente del *Circolo Matematico di Palermo*

M. L. Albeggiani.

Singular trajectories in the restricted problem of four bodies.

(By E. O. Lovett, *at Princeton, New-Jersey.)*

The restricted problem of three bodies has occupied a prominent place in recent researches in celestial mechanics. It may be formulated as follows: Two bodies, S and J, revolve round their common centre of gravity in circular orbits under the influence of their mutual attraction (that is, constitute an exact solution of the problem of two bodies). A third body P without mass (that is, such that it is attracted by S and J, but does not disturb their motion) moves in the same plane as S and J. The restricted problem of three bodies is to determine the motion of P.

A corresponding particular problem of four bodies has received some attention (*). It has to do with the motion of an infinitesimal body in the plane of three finite bodies which are in motion according to one or the other of the Lagrangian exact solutions of the problem of three bodies, and attracted by each of them according to Newton's law, but itself incapable of affecting their motion. The problem of the motion of the infinitesimal body might be called a restricted problem of four bodies, distinction between the Lagrangian solutions being made where necessary.

Painlevé has shown that in the general problem of three bodies the motion is regular as long as there are no collisions. The theorem applies *a fortiori* to the restricted problem of three bodies. A corresponding theorem does not hold when the number of bodies is greater than three, as Painlevé

(*) Moulton, *Particular solutions of the problem of four bodies.* Transactions of the American Mathematical Society, Volume I, 1900, pp. 17-29.

Lovett, *Periodic solutions of the problem of four bodies.* Cambridge Quarterly Journal of Mathematics, Volume XXXV, 1903, pp. 116-155.

has proved, but a similar theorem does obtain for the restricted problem of four bodies as defined above.

In a recent Memoir (*) Levi-Civita has studied the singular trajectories of the restricted problem of three bodies, that is those on which collisions are possible. By slight modifications his analysis becomes directly applicable to the restricted problem of four bodies. The writing of this parallel is the object of this note, confining attention to that case of the problem in which the finite part of the system consists of three bodies of any masses at the vertices of an equilateral triangle. Among the conclusions reached is a curious exception to that theorem of Painlevé which affirms the transcendental character of the conditions for collision in the problem of n bodies when the masses of three or more of the bodies are different from zero.

Let P_1, P_2, P_3 be three bodies of masses m_1, m_2, m_3 respectively, at the vertices of an equilateral triangle, turning with uniform angular velocity about their common centre of gravity. Let P be a fourth body of zero mass situated in the plane of the triangle. Let the units be so chosen that the sum of the masses is unity, the angular velocity unity, and the side of the equilateral triangle unity.

Putting

$$P_i P = r_i, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \qquad \angle P_2 P_1 P = \theta, \tag{1}$$

we have

$$r_2 = \left|\sqrt{1 + r_1^2 - 2\, r_1 \cos\theta}\,\right|, \qquad r_3 = \left|\sqrt{1 + r_1^2 - 2\, r_1 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)}\right|, \tag{2}$$

$$\Sigma\, r_i^2 (r_i^2 - r_j^2 - 1) + 1 = 0, \qquad (ij = 12,\ 23,\ 31). \tag{3}$$

The equations of motion of P relative to a system of rectangular axes rotating uniformly about the centre of gravity of the finite bodies and with their common angular velocity are

$$\xi'' - 2\,\eta' - \xi = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \qquad \eta'' + 2\,\xi' - \eta = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \tag{4}$$

where

$$U = \sum_1^3{}_i \frac{m_i}{r_i}, \tag{5}$$

and the primes indicate derivations with respect to the time.

(*) Levi-Civita, *Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi.* Annali di Matematica, Tomo IX della Serie III, pag. 1-32.

Let us transform the latter equations to parallel axes whose origin is at P_1. The formulae of transformation are

$$\xi = x - \frac{2\,m_2 + m_3}{2}, \qquad \eta = y - \frac{m_3\sqrt{3}}{2}; \tag{6}$$

accordingly the equations of motion become

$$\left.\begin{aligned} x'' - 2\,y' - x &= \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{2\,m_2 + m_3}{2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(U - \frac{2\,m_2 + m_3}{2}\,x - \frac{m_3\sqrt{3}}{2}\,y\right), \\ y'' + 2\,x' - y &= \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{m_3\sqrt{3}}{2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(U - \frac{2\,m_2 + m_3}{2}\,x - \frac{m_3\sqrt{3}}{2}\,y\right). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Introduce now the polar coordinates (r_1, θ) by means of the relations

$$x = r_1 \cos\theta, \qquad y = r_1 \sin\theta, \tag{8}$$

and the last equations assume a form analogous to that of Levi-Civita

$$r''_1 - r_1\,\theta'^2 - 2\,r_1\,\theta' - r_1 = \frac{\partial U_1}{\partial r_1}, \qquad \frac{d}{d\,t}\,(r_1^2\,\theta') + 2\,r_1\,r'_1 = \frac{\partial U_1}{\partial \theta} \tag{9}$$

where

$$U_1 = U - \frac{2\,m_2 + m_3}{2}\,r_1 \cos\theta - \frac{m_3\sqrt{3}}{2}\,r_1 \sin\theta. \tag{10}$$

To transform the latter to canonical form we put as does Levi-Civita

$$r'_1 = R_1, \qquad \theta' = \frac{\Theta}{r_1^2} - 1; \tag{11}$$

the equations of motion then become

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,R_1}{d\,t} &= \frac{\partial U_1}{\partial r_1} + \frac{\Theta^2}{r_1^3} = \frac{\partial U_2}{\partial r_1}, \\ \frac{d\,\Theta}{d\,t} &= \frac{\partial U_1}{\partial \theta} = \frac{\partial U_2}{\partial \theta}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

where

$$U_2 = U_1 - \frac{1}{2}\,r_1^2\left(\frac{\Theta}{r_1^2} - 1\right)^2 + \frac{1}{2}\,r_1^2. \tag{13}$$

The last equations may be written

$$\left.\begin{aligned} \frac{d r_1}{d t} &= \frac{\partial F}{\partial R_1}, & \frac{d \theta}{d t} &= \frac{\partial F}{\partial \Theta}, \\ \frac{d R_1}{d t} &= -\frac{\partial F}{\partial r_1}. & \frac{d \Theta}{d t} &= -\frac{\partial F}{\partial \theta}, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

in which

$$F = \frac{1}{2}\left\{ R_1^2 + r_1^2\left(\frac{\Theta}{r_1^2} - 1\right)^2 \right\} - U_1 - \frac{1}{2} r_1^2; \tag{15}$$

the latter function may be written

$$F = \frac{1}{2}\left\{ R_1^2 + r_1^2\left(\frac{\Theta}{r_1^2} - 1\right)^2 \right\} - \frac{m_1}{r_1} - m_2 R_2 - m_3 R_3 - \frac{1}{2} r_1^2, \tag{16}$$

on putting

$$R_2 = \frac{1}{r_2} - r_1 \cos\theta, \qquad R_3 = \frac{1}{r_3} - r_1 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right). \tag{17}$$

The canonical variables R_1, Θ have simple interpretations identical with their meanings in the three body problem, the former is the derivative of the radius vector and the latter is twice the absolute areal velocity.

The motion being regular except in case of collision, singularities can occur only when for t tending to a finite limit t_1 we have r_1, r_2, or r_3 zero in the limit. Evidently no two of these limiting values can occur simultaneously, since we have either of the following three simultaneous limits:

$$\left.\begin{aligned} &1.^0 \quad \underset{t=t_1}{L}\, r_1 = 0, && \underset{t=t_1}{L}\, r_2 = 1, && \underset{t=t_1}{L}\, r_3 = 1; \\ &2.^0 \quad \underset{t=t_1}{L}\, r_1 = 1, && \underset{t=t_1}{L}\, r_2 = 0, && \underset{t=t_1}{L}\, r_3 = 1; \\ &3.^0 \quad \underset{t=t_1}{L}\, r_1 = 1, && \underset{t=t_1}{L}\, r_2 = 1, && \underset{t=t_1}{L}\, r_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Since the three bodies P_1, P_2, P_3 play symmetrical rôles in the problem it will be sufficient to consider the first case alone.

It is our object now to study the real trajectories (Σ) of the system (14) upon which for a certain arbitrary value t_1 we have

$$\underset{t=t_1}{L}\, r_1 = 0. \tag{19}$$

On suitably modifying the form of certain quantities and expressions, the analysis of Levi-Civita becomes available here.

Consider the reduced differential system which defines the trajectories and which is derived from (14) by eliminating $d\,t$ and taking account of the Jacobian integral $F = - C$, namely

$$R_1^2 = r_1^2 + \frac{2\,m_1}{r_1} + 2\,m_2\,R_2 + 2\,m_3\,R_3 - r_1^2\left(\frac{\Theta}{r_1^2} - 1\right)^2 - 2\,C. \tag{20}$$

R_1 being thus defined as a function of r_1, θ, Θ, the equations of the trajectories are

$$\frac{d\,\theta}{dr} = -\frac{\partial\,R_1}{\partial\,\Theta}, \qquad \frac{d\Theta}{d\,r} = \frac{\partial\,R}{\partial\,\theta}. \tag{21}$$

The motion being regular before the instant t_1, r_1 does not vanish for $t < t_1$; moreover from (19) r_1 is not a constant; there exist then values of t as near as we wish to t_1, for which R_1 the derivative of r_1 is different from zero.

Is distinguish the trajectories Σ from all other solutions of (21) it is sufficient to remark that on every Σ there are values of r_1 as near as we wish to zero for which θ and Θ arc holomorphic functions of r_1, as follows from (19) and the fact that the derivative of r_1 is not identically zero.

Let us put

$$\left.\begin{aligned}
\rho = |\sqrt{r_1}|, \qquad \theta' &= \frac{\Theta}{\rho^4} - 1,\\
\rho^2\,W_2 = \frac{\partial\,R_2}{\partial\,\theta} &= \rho^2 \sin\theta\left(1 - \frac{1}{r_2^3}\right),\\
\rho^2\,W_3 = \frac{\partial\,R_3}{\partial\,\theta} &= \rho^2 \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{r_3^3}\right),\\
\rho\,P &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial\,\rho}\,\{\rho^2\,[2\,(m_2\,R_2 + m_3\,R_3 - C) + \rho^4]\,\},\\
H = -\rho\,R &= \pm\sqrt{2\,m_1 - \rho^6\,\theta'^2 + \rho^2\,[2\,(m_2\,R_2 + m_3\,R_3 - C) + \rho^4]},
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

where for the reality of H it is necessary that $\rho^6\,\theta'^2$ remain finite for ρ convergent to zero.

The functions W_2, W_3, P as functions of ρ and θ are regular in the domain of $\rho = 0$, for every real value of θ; H as a function of ρ, θ, θ' is regular in the vicinity of $\rho = 0$, for all real values of θ and θ'.

The system (21) becomes

$$\frac{d\theta}{d\rho} = -2\rho^2 \frac{\theta'}{H}, \qquad \rho \frac{d\theta'}{d\rho} = -4(\theta' + 1) - 2 m_2 \rho \frac{W_2}{H} - 2 m_3 \rho \frac{W_3}{H}; \quad (23)$$

on writing

$$W = W_2 + \frac{m_3}{m_2} W_3 \quad (24)$$

these equations assume the form

$$\frac{d\theta}{d\rho} = -2\rho^2 \frac{\theta'}{H}, \qquad \rho \frac{d\theta'}{d\rho} = -4(\theta' + 1) - 2 m_2 \frac{W}{H}, \quad (25)$$

which are identical in form with those of Levi-Civita in the restricted problem of three bodies.

The system (25) is regular in the vicinity of $\rho = 0$, this point excepted, and upon every Σ, θ and θ' are holomorphic function of ρ, as long as ρ is sufficiently small and different from zero

From (25) we deduce that the function H satisfies the relation

$$\rho H \frac{dH}{d\rho} = \rho H \left(\frac{\partial H}{\partial \rho} + \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{d\theta}{d\rho} + \frac{\partial H}{\partial \theta'} \frac{d\theta'}{d\rho} \right) = (\rho^3 \theta')^2 + \rho^2 (P + 4\rho \cdot \rho^3 \theta'), \quad (26)$$

from which it appears that the inferior limit of H when ρ tend to zero is different from zero.

From the second of equations (25) it may be concluded that

$$\underset{\rho=0}{L}\, \theta' = -1 \quad (27)$$

and hence

$$\underset{\rho=0}{L}\, H = \pm \sqrt{2 m_1}. \quad (28)$$

We are now in position to conclude by the method of limits and Levi-Civita's generalization of a theorem of Briot and Bouquet (loc. cit.) that in the restricted problem of four bodies the trajectories on which P and P_1 collide after a finite time correspond to the ∞^1 integrals of the system (21) holomorphic for $\rho = 0$, and to these integrals only. Calling θ_0 the arbitrary value $\theta(0)$ and remarking that $\theta'(0)$ ought necessarily reduce to -1, we have for these integrals expressions of the form

$$\theta = \theta_0 + \rho\, \alpha(\rho, \theta_0), \qquad \theta' + 1 = \rho\, \beta(\rho, \theta_0), \quad (29)$$

α and β being power-series in ρ.

In order that a collision occur it is necessary and sufficient that the motion take place on one of these trajectories, then it is necessary and sufficient that ρ, θ, θ' verify at every instant the equation derived from (29) by eliminating θ_0. This is the invariant relation characteristic of collision. It is unique as surmised by PAINLEVÉ in the general problem of three bodies and as found by LEVI-CIVITA in the restricted problem of three bodies.

The first of equations (29) permits the determination of θ_0 as a holomorphic function of ρ and θ. Putting the value thus found in the second of the equations, we have

$$\theta' + 1 = \rho f(\rho, \theta) \tag{30}$$

where f is a holomorphic function of ρ in the vicinity of $\rho = 0$ for all real values of θ.

Since (30) is an invariant relation with respect to the motion and to (25) we should arrive at an identity by differentiating it with regard to ρ and taking itself and (25) into account. It thus appears that the function $f(\rho, \theta)$ satisfies the equation

$$5 f + \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} = -2 m_2 \frac{W}{H} - \frac{2}{H} \rho^3 (1 - \rho f) \frac{\partial f}{\partial \theta}, \tag{31}$$

where in H θ' is to be replaced by $\rho f - 1$.

This equation (31) admits of but one integral developable in powers of ρ.

Putting

$$f = \sum_0^\infty {}_n f_n \rho^n \tag{32}$$

the f_n can be calculated step by step, by identifying the coefficients of the same powers of ρ in the two members of (31).

The holomorphic integral of (31) is the function f of the invariant relation (30).

In the restricted problem of three bodies LEVI-CIVITA has shown that this function f is periodic in θ; the condition of collision is uniform in POINCARÉ's sense, and is algebraic in the velocities.

The same results are true for the restricted problem of four bodies, and constitute a curious exception to PAINLEVÉ's theorem (*Comptes Rendus*, 20 décembre 1897) that in the problem of n bodies in which at least three masses are different from zero the conditions for collision are certainly transcendental in the velocities.

Computing the series $\Sigma_n f_n \rho^n$ as directed above we find to terms of the fifth order in ρ that f has the form

$$\left.\begin{aligned} f = \rho^2 \Big\{ & \frac{3}{7\sqrt{2\,m_1}}\left[m_2 \sin 2\,\theta + m_3 \sin 2\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\right] + \\ & + \frac{1}{3\sqrt{2\,m_1}}\Big\{ m_2 \sin\theta\left(5\cos^2\theta + \frac{C - m_2 - m_3}{m_1}\cos\theta - 1\right) + \\ & + m_3 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\left[5\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) + \frac{C - m_2 - m_3}{m_1}\cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) - 1\right]\Big\}\rho^2 - \\ & - \frac{3}{35}\left[\frac{m_2}{m_1}\cos 2\,\theta - \frac{m_3}{m_1}\cos 2\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\right]\rho^3 + \cdots \Big\}, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

which reduces to the form given by Levi-Civita on making $m_3 = 0$.

Sur la théorie des cubiques circulaires et des quartiques bicirculaires.

(*Par* F. Gomes Teixeira, *à Porto (Portugal).*)

On sait que les *cubiques circulaires* et les *quartiques bicirculaires* sont anallagmatiques, en général, par rapport à quatre centres d'inversion et on sait déterminer ces points en les considérant comme les centres des quatre cercles qui sont coupés orthogonalement par les cercles bitangentes dont la cubique ou la quartique considérée est l'enveloppe. Or, dans la première partie de ce travail, nous allons les chercher par une autre méthode, en les déterminant au moyen d'une hyperbole équilatère, dont une asymptote coïncide avec l'asymptote réelle de la courbe, dans le cas des cubiques circulaires, et au moyen de deux hyperboles équilatères, dans le cas des quartiques bicirculaires.

Une autre question, dont nous allons nous occuper, est celle de la construction des quartiques bicirculaires unicursales. Rappelons d'abord que, si par un point O, placé sur le plan de deux courbes données, on mène des droites qui coupent ces courbes, et si sur chaqu'une on prend un segment, égal à la différence des segments de la même droite compris, entre le point donné et les deux courbes, le lieu des points qu'on obtient de cette manière est une courbe appelée *cissoïdale* des courbes données par rapport au point O. Or, nous démontrons, dans la deuxième partie de ce travail, que les quartiques bicirculaires unicursales sont les *cissoïdales* de deux circonférences, réelles ou imaginaires, et qu'il existe, en général, quatre systèmes de circonférences qui donnent la même quartique.

I.

Sur la détermination des centres d'inversion des Cubiques circulaires.

1. On sait que les cubiques circulaires peuvent être représentées par l'équation suivante, en prenant un point quelconque de l'asymptote réelle pour l'origine des coordonnées et cette droite pour l'axe des ordonnées:

$$(x^2 + y^2)\, x = A_1 x^2 + B_1 x y + D_1 x + E_1 y + F_1.$$

En changeant ensuite l'origine des coordonnées pour le point de cette asymptote dont l'ordonnée, rapportée à l'origine primitive, est égale à $\frac{1}{2} B_1$, on peut encore réduire cette équation à la forme

$$(x^2 + y^2)\, x = A x^2 + D x + E y + F. \tag{1}$$

On sait aussi que la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe inverse d'une cubique circulaire soit une autre cubique circulaire est que le centre d'inversion coïncide avec un point de la cubique donnée, qui ne soit pas double.

Cela posé, nous allons chercher les conditions auxquelles doivent satisfaire les coordonnées du centre d'inversion pour que la transformée de la cubique considérée coïncide avec la courbe primitive.

Soient (α, β) les coordonnées du centre d'inversion, et supposons que ce point coïncide avec un point de la cubique donnée, et qu'on ait, par conséquent,

$$(\alpha^2 + \beta^2)\, \alpha = A \alpha^2 + D \alpha + E \beta + F. \tag{1'}$$

En changeant l'origine des coordonnées pour ce point, en posant pour cela

$$x = x_1 + \alpha, \quad y = y_1 + \beta,$$

on réduit l'équation de la cubique à la forme

$$\left.\begin{aligned}(x_1^2 + y_1^2)\, x_1 = {} & (A - 3\alpha)\, x_1^2 - \alpha y_1^2 - 2\beta x_1 y_1 \\ & + (2 A \alpha + D - 3\alpha^2 - \beta^2)\, x_1 + (E - 2\alpha\beta)\, y_1 .\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

En posant maintenant dans cette équation

$$x_1 = \frac{k^2 x_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y_1 = \frac{k^2 y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

on obtient celle de la cubique inverse:

$$\left. \begin{aligned} &(x_2^2 + y_2)(P x_2 + Q y_2) \\ &= (3\alpha - A) k^2 x_2^2 + 2\beta k^2 x_2 y_2 + \alpha k^2 y_2^2 + k^4 x^2, \end{aligned} \right\} \qquad (3)$$

où

$$P = 2 A \alpha + D - 3\alpha^2 - \beta^2, \quad Q = E - 2\alpha\beta.$$

En divisant cette équation par P et en égalant ensuite les coefficients des diverses puissances de x_2 et y_2 aux coefficients des mêmes puissances de x_1 et y_1 dans l'équation (2), on trouve les conditions pour que les courbes représentées par les équations (2) et (3) coïncident. On trouve de cette manière sept conditions, mais en sont seulement distinctes les suivantes:

$$P = -k^2, \quad Q = E - 2\alpha\beta = 0.$$

La deuxième équation et l'équation (1′) déterminent les coordonnées $(\alpha_1 \beta)$ des points cherchés, et ensuite la première détermine les valeurs correspondantes de k^2.

On conclut donc que *chaque centre d'inversion, par rapport auquel la cubique est anallagmatique, coïncide avec un point d'intersection de cette cubique avec l'hyperbole dont l'équation, rapportée aux mêmes axes que l'équation* (1), *est la suivante:*

$$2 x y = E; \qquad (4)$$

et que le rayon du cercle d'inversion correspondant est donné par la formule

$$k^2 = 3\alpha^2 + \beta^2 - 2 A \alpha - D.$$

Inversement, la cubique est anallagmatique par rapport à tous les points d'intersection avec l'hyperbole, à l'exception de ceux dont les coordonnées annulent k^2.

On conclut aussi de ce qui précède que les asymptotes de l'hyperbole considérée coïncident avec l'asymptote réelle de la cubique et avec la perpendiculaire à cette droite menée par l'origine des coordonnées auxquelles l'équation (1) est rapportée.

En posant

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)\, x - A\, x^2 - D\, x - E\, y - F,$$

et en remarquant qu'on a

$$Q = -f'_y(\alpha, \beta), \quad k^2 = -P = f'_x(\alpha, \beta),$$

on voit encore que les tangentes à la même cubique aux centres d'inversion considérés sont parallèles à son asymptote. Cette proposition importante est bien connue (Basset: *An elementary treatrise on cubic and quartic curves.* Cambridge, 1901, p. 157).

On voit, au moyen des mêmes équations, que, si la cubique est *unicursale*, l'hyperbole passe par son point double, mais que ce point ne peut pas être un des centres d'inversion par rapport auquel la courbe soit anallagmatique. Le point double doit, en effet, satisfaire aux équations

$$f'_x(x, y) = 2\, x\, y - E = 0, \quad f'_y(x, y) = 0.$$

On voit enfin, au moyen des équations (1) et (4), que les centres d'inversion considérés sont placés sur une *parabole de* Wallis, représentée par l'équation

$$E\, y = 2\,(x^3 - A\, x^2 - D\, x - F).$$

2. En écrivant l'équation (1) sous la forme

$$y = \frac{E \pm \sqrt{E^2 - 4\, x\,(x^3 - A\, x^2 - D\, x - F)}}{2\, x},$$

on voit immédiatement que *l'hyperbole précédemment considérée coupe par le milieu toutes les cordes de la cubique parallèles à son asymptote réelle.*

Il résulte de cette proposition que les tangentes à la cubique aux centres d'inversion, par rapport auxquels elle est anallagmatique, sont parallèles à l'asymptote réelle et que l'hyperbole passe par le point double de la courbe, quand elle est unicursale. Ces deux propriétés de la cubique ont déjà été démontrées précédemment d'une autre manière.

Il résulte encore de la même proposition que, *si la cubique a un point de rebroussement, l'hyperbole considérée lui est tangente en ce point, et que ce cas est le seul dans lequel cette hyperbole est tangente à la cubique* (1), *à distance finie.*

3 L'équation qui détermine les abscisses des centres d'inversion considérés est la suivante:

$$4\,(x^4 - A\,x^3 - D\,x^2 - F\,x) - E^2 = 0,$$

et il résulte de ce qui précède que ses racines sont toutes *distinctes*, quand la courbe n'est pas unicursale, puisque alors la cubique et l'hyperbole ne peuvent pas être tangentes à distance finie.

Si la cubique a un *noeud*, elle est coupée par l'hyperbole à ce point, en deux points distincts du précédent et à l'infini. Alors deux des racines de l'équation précédente sont égales et correspondent au point double de la courbe, et deux sont distinctes; et la courbe est anallagmatique par rapport à *deux* centres d'inversion.

Si la cubique a un *point de rebroussement*, elle est coupée pour l'hyperbole à ce point, à un autre point placé à distance finie, et à l'infini. Alors il n'existe qu'*un* centre d'inversion par rapport auquel la courbe soit anallagmatique.

Les propositions précédentes doivent être modifiées quand $E = 0$. Alors l'hyperbole se réduit aux droites $x = 0$ et $y = 0$, et le nombre des points par rapport auxquels la cubique est anallagmatique est égal à 3, quand la courbe n'est pas unicursale, à *1* quand elle a un noeud, à *0* quand elle a un point de rebroussement.

Les coordonnées de ces points sont données par les equations

$$x^3 - A\,x^2 - D\,x - F = 0, \quad y = 0.$$

II.

Sur la détermination des centres d'inversion des quartiques bicirculaires.

4. Considérons maintenant les quartiques bicirculaires et supposons qu'on ait réduit d'abord leur équation, par les moyens connus, à la forme suivante:

$$(x^2 + y^2)^2 = A\,x^2 + B\,y^2 + D\,x + E\,y + F; \tag{5}$$

et, en représentant par (α, β) les coordonnées d'un point quelconque, cherchions les conditions pour qu'une quelconque de ces courbes soit anallagmatique par rapport à ce point.

En changeant, pour cela, l'origine des coordonnées pour ce point, donnons à l'équation de la courbe la forme

$$\begin{aligned}(x_1^2 + y_1^2)^2 + 4(\alpha x_1 + \beta y_1)(x_1^2 + y_1^2)\\ = [A - 4\alpha^2 - 2(\alpha^2 + \beta^2)]\, x^2 - 8\alpha\beta x_1 y_1\\ + [B - 4\beta^2 - 2(\alpha^2 + \beta^2)]\, y_1^2 + [2A\alpha - 4\alpha(\alpha^2 + \beta^2) + D]\, x_1\\ + [2B\beta - 4\beta(\alpha^2 + \beta^2) + E]\, y_1 - f(\alpha, \beta),\end{aligned}$$

où

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - Ax^2 - By^2 - Dx - Ey - F.$$

Pour obtenir l'équation de la courbe inverse de la précédente, posons maintenant

$$x_1 = \frac{k^2 x_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y_1 = \frac{k^2 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

On trouve l'équation

$$\begin{aligned}f(\alpha, \beta)(x_2^2 + y_2^2)^2 - k^2\, [(2A\alpha - 4(\alpha^2 + \beta^2)\alpha + D)x_2\\ + (2B\beta - 4(\alpha^2 + \beta^2)(\beta + E)\, y_2]\, (x_2^2 + y_2^2)\\ = k^4(A - 6\alpha^2 - 2\beta^2)\, x_2^2 + k^4(B - 6\beta^2 - 2\alpha^2)\, y_2^2 - 8k^4\alpha\beta x_2 y_2\\ - 4k^6\alpha x_2 - 4k^6\beta y_2 - k^8.\end{aligned}$$

Les conditions pour que la courbe représentée par cette équation coïncide avec l'antérieure sont les suivantes:

$$\begin{aligned}k^2\, [2A\alpha - 4(\alpha^2 + \beta^2)\alpha + D] = -4\alpha f(\alpha, \beta),\\ k^2\, [2B\beta - 4(\alpha^2 + \beta^2)\beta + E) = -4\beta f(\alpha, \beta),\\ k^4 = f(\alpha, \beta),\\ 4\alpha(\alpha^2 + \beta^2) - 2A\alpha - D = \frac{4k^6\alpha}{f(\alpha, \beta)},\\ 4\beta(\alpha^2 + \beta^2) - 2B\beta - E = \frac{4k^6\beta}{f(\alpha, \beta)};\end{aligned}$$

et, comme les deux dernières équations ne sont pas distinctes des antérieures, elles se réduisent aux suivantes:

$$\left.\begin{aligned} k^4 &= f(\alpha, \beta), \\ 2A\alpha - 4(\alpha^2 + \beta^2)\alpha + D &= -4k^2\alpha, \\ 2B\beta - 4(\alpha^2 + \beta^2)\beta + E &= -4k^2\beta. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Nous avons ainsi trois équations qui déterminent les coordonnées (α, β) des points par rapport auxquels la quartique considérée est anallagmatique et le rayon k^2 du cercle d'inversion.

En éliminant k^2 entre les deux dernières équations, on trouve la suivante:

$$2(A - B)\alpha\beta + D\beta - E\alpha = 0, \tag{7}$$

laquelle fait voir que les *centres d'inversion considérés sont situés sur une hyperbole dont l'équation, rapportée au même système de coordonnées que* (5), *est*

$$2(A - B)xy + Dy - Ex = 0. \tag{8}$$

Cette hyperbole passe par l'origine des coordonnées et ses asymptotes sont les parallèles aux axes des coordonnées menées par le point

$$\left(-\frac{D}{2(A-B)}, \quad +\frac{E}{2(A-B)}\right).$$

En multipliant les deux dernièrs équations (6), membre à membre, et en ayant égard à la première, on obtient l'équation

$$\left.\begin{aligned} 8(A-B)(\alpha^2 - \beta^2)\alpha\beta + [4AB + 16D\alpha + 16E\beta + 16F]\alpha\beta \\ -4(D\beta + E\alpha)(\alpha^2 + \beta^2) + 2AE\alpha + 2BD\beta + ED = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

qui donne, en ayant égard à (7),

$$\left.\begin{aligned} \frac{4DE}{A-B}(\alpha^2 - \beta^2) + 4\left[\frac{E^2 - D^2}{A-B} + 4F + AB\right]\alpha\beta \\ + 2AE\alpha + 2BD\beta + ED = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Donc *les centres d'inversion par rapport auxquels la quartique* (5) *est anallagmatique coïncident avec les points d'intersection de l'hyperbole représentée par l'équation*

$$\left.\begin{aligned} \frac{4DE}{A-B}(x^2 - y^2) + 4\left[\frac{E^2 - D^2}{A-B} + 4F + AB\right]xy \\ + 2AEx + 2BDy + ED = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

avec l'hyperbole représentée par l'équation (8).

Les asymptotes de chacune de ces hyperboles sont perpendiculaires l'une à l'autre.

5. Tous les points d'intersection des hyperboles précedentes sont des centres d'inversion par rapport auxquels la quartique est anallagmatique, à l'exception de ceux qui coïncident avec des points de la quartique considérée, puisque les coordonnées de ces derniers points annulent k^2.

Soit (α_1, β_1) un point d'intersection des hyperboles qui satisfasse à cette condition.

On a alors

$$\left.\begin{aligned} f(\alpha_1, \beta_1) &= 0, \\ 2A\alpha_1 - 4(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\alpha_1 + D &= 0, \\ 2B\beta_1 - 4(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\beta_1 + E &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Mais

$$-f'_x(\alpha_1, \beta_1) = 2A\alpha_1 - 4(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\alpha_1 + D,$$

$$-f'_y(\alpha_1, \beta_1) = 2B\beta_1 - 4(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\beta_1 + E.$$

Donc (α_1, β_1) est alors un *point double* de la quartique, et cette courbe est, dans ce cas, *unicursale.*

Inversement, si la quartique est unicursale et (α_1, β_1) sont les coordonnées du point double qu'elle possède à distance finie, α_1 et β_1 satisfont aux équations (12); et, par conséquent, à l'équation qui en résulte:

$$2(A - B)\alpha_1\beta_1 + D\beta_1 - E\alpha_1 = 0. \tag{13}$$

Donc le point considéré est situé sur l'hyperbole représentée par l'équation (8).

En multipliant les dernières équations (12) membre à membre et en ayant égard à la première et à (13), on voit que α_1 et β_1 satisfont aussi à l'équation (11).

Nous avons donc le théorème suivant:

Si la quartique considérée est unicursale, les hyperboles (8) *et* (11) *passent par le point double qu'elle a à distance finie. En tous les autres cas les points d'intersection des deux hyperboles sont différents de ceux de la quartique.*

6. L'analyse qui précède doit être modifiée quand $D = 0$ ou $E = 0$,

c'est-à-dire, quand la quartique est symétrique par rapport à l'un des axes des coordonnées.

En supposant $D = 0$, la deuxième des équations (6) se décompose dans les deux suivantes:

$$\alpha = 0, \quad A - 2(\alpha^2 + \beta^2) = -2k^2.$$

À la première équation correspondent trois valeurs de β données par l'équation

$$8E\beta^3 + 4(B^2 + 4F)\beta^2 + 4BE\beta + E^2 = 0,$$

et, par conséquent, *trois* centres d'inversion par rapport auxquels la quartique est anallagmatique, si elle n'est pas unicursale. Un de ces points est réel et les autres peuvent être réels ou imaginaires, et ils sont tous placés sur l'axe de la courbe. Si la courbe est unicursale le nombre des centres d'inversion considérés se réduit à *deux*.

La deuxième équation n'est pas compatible avec les autres équations du système (6) que dans le cas où l'on a

$$(A^2 + 4F)(A - B) + E^2 = 0.$$

Mais, dans ce cas, en éliminant F entre cette équation et celle de la quartique considérée, on la réduit à la forme

$$[2(x^2 + y^2) - A]\sqrt{B - A} \pm [2(A - B)y - E] = 0.$$

La quartique considérée se réduit donc alors à deux circonférences qui se coupent en deux points de la droite représentée par l'équation

$$2(A - B)y = E,$$

et ce système de circonférences est, par conséquent, anallagmatique par rapport à tous les points de cette droite. Ce résultat s'accorde avec celui que donne immédiatement la Géométrie élémentaire.

On considère de la même manière le cas où $E = 0$.

Si on a $A = B$, l'équation (7) se réduit à la suivante:

$$D\beta - E\alpha = 0,$$

et l'équation (9) à la suivante:

$$4[A^2 + 4(D\alpha + E\beta) + 4F]\alpha\beta$$
$$-4(D\beta + E\alpha)(\alpha^2 + \beta^2) + 2A(E\alpha + D\beta) + ED = 0.$$

En éliminant β entre ces équations on trouve

$$8(D^2 + E^2)\alpha^3 + 4(A^2 + 4F)D\alpha^2 + 4AD^2\alpha + D^3 = 0.$$

La quartique est donc anallagmatique par rapport à trois centres d'inversion, si elle n'est pas unicursale, et ces points sont situés sur la droite représentée par l'équation

$$Dy - Ex = 0.$$

Si la quartique est unicursale les centres d'inversion considérés et le point double qu'elle a à distance finie sont situés sur cette droite et le nombre de ces centres est égal à deux.

III.

Sur une manière de construire les quartiques bicirculaires unicursales.

7. Nous allons considérer maintenant, en particulier, les *quartiques bicirculaires unicursales* pour donner une méthode très simple pour les construire, qui, suivant nous le croyons, n'a pas encore été remarquée.

Prenons deux circonférences C et C' et sur la première un point O. Menons ensuite par ce point une droite arbitraire OK et soient B le point où elle coupe la circonférence C et E et E' les points où elle coupe C'. Prenons ensuite sur la même droite, à partir de O, deux segments OA et OA_1 respectivement égaux à $OE - OB$ et $OE' - OB$. Cela posé, le lieu géométrique des positions que prennent A et A_1, quand OK varie, en tournant autour de O, est une quartique bicirculaire unicursale.

Soient, en effet, O l'origine des coordonnées, (α, β) les coordonnées du centre de C, (a, b) celles du centre de C', R le rayon de cette dernière circonférence, ρ_1 le segment OB, ρ_2 les segments OE et OE', ρ les segments OA et OA_1 et θ l'angle formé par OK avec l'axe des abscisses. L'équation, rapportée aux coordonnées polaires, de la circonférence C est

$$\rho_1 = 2(\alpha \cos\theta + \beta \sin\theta),$$

et celle de la circonférence C'

$$\rho_2^2 - 2(a\cos\theta + b\sin\theta)\rho_2 = R^2 - a^2 - b^2.$$

Nous avons donc

$$\rho = a \cos\theta + b \sin\theta \pm \sqrt{(a\cos\theta + b\sin\theta)^2 + R_1^2 \\ - 2(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta)},$$

où

$$R_1^2 = R^2 - a^2 - b^2;$$

et par conséquent

$$[\rho + (2\alpha - a)\cos\theta + (2\beta - b)\sin\theta]^2$$
$$= (a\cos\theta + b\sin\theta)^2 + R_1^2,$$

ou, en posant $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$,

$$[(x^2 + y^2)^2 + (2\alpha - a)x + (2\beta - b)y]^2 = (ax + by)^2 + R_1^2(x^2 + y^2),$$

ou enfin

$$\left.\begin{array}{l} (x^2 + y^2)^2 + 2[(2\alpha - a)x + (2\beta - b)y](x^2 + y^2) \\ = (4a\alpha - 4\alpha^2 + R_1^2)x^2 + (4b\beta - 4\beta^2 + R_1^2)y^2 \\ \quad + 4(a\beta + b\alpha - 2\alpha\beta)xy. \end{array}\right\} \qquad (14)$$

Cette équation représente une *quartique bicirculaire unicursale.* Son point double coïncide avec le point O, et il résulte de ce qui précède que ce point est un *noeud réel*, quand les circonférences C et C' se coupent, un *point de rebroussement* quand elles sont tangentes, et un *point isolé* quand elles n'ont pas des points communs. Il résulte aussi de la construction précédente que les tangentes à la quartique au point double passent, dans les deux premiers cas, par les points communs aux deux circonférences.

8. Le système de deux circonférences qu'on vient d'employer pour construire la quartique représentée par l'équation précédente, n'est pas unique. En remplaçant, en effet, dans l'équation antérieure d'abord a par $-a$, b par $-b$, et ensuite α par $\alpha - a$ et β par $\beta - b$, cette équation ne change pas; et, par conséquent, il existe un deuxième système de deux circonférences, l'une ayant pour centre $(-a, -b)$ et passant par l'origine des coordonnées O, et l'autre ayant pour centre $(\alpha - a, \beta - b)$ et pour rayon R, qui, quand on lui applique la construction précédemment considérée, mènent à la même quartique.

Nous réprésenterons le premier système de circonférences qu'on a considéré par C_1 et C'_1, le deuxième par C_2 et C'_2, et nous ferons voir bientôt que la même quartique peut être encore considérée comme la *cissoïdale* de deux autres systèmes de circonférences imaginaires (C_3, C'_3) et (C_4, C'_4).

9. Nous allons étudier maintenant la question inverse de la précédente, c'est-à-dire, nous allons voir si toute quartique bicirculaire unicursale donnée peut être construite par la méthode qu'on vient d'indiquer.

Pour résoudre cette question, je remarque d'abord que l'équation de toute quartique bicirculaire unicursale peut être réduite à la forme suivante, en prenant le point double qu'elle possède à distance finie pour l'origine des coordonnées :

$$\left.\begin{aligned}(x^2+y^2)^2 + 2(mx+ny)(x^2+y^2)\\ = Ax^2 + Bxy + Cy^2,\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

et que les conditions pour que la courbe représentée par cette équation coïncide avec la quartique représentée par (14) sont

$$2\alpha - a = m, \quad 2\beta - b = n,$$

$$4a\alpha - 4\alpha^2 + R_1^2 = A,$$

$$4b\beta - 4\beta^2 + R_1^2 = C,$$

$$4(a\beta + b\alpha - 2\alpha\beta) = B.$$

Or ces équations donnent, en éliminant α et β dans les trois dernières au moyen des deux premières,

$$a^2 - m^2 + R_1^2 = A, \quad b^2 - n^2 + R_1^2 = C, \quad 2(ab - mn) = B, \tag{K}$$

et par conséquent

$$a^4 - (A - C + m^2 - n^2)a^2 - \left(\frac{1}{2}B + mn\right)^2 = 0, \tag{16}$$

$$b = \frac{B + 2mn}{2a}, \tag{17}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(a+m), \quad \beta = \frac{1}{2}(b+n), \tag{18}$$

$$R_1^2 = \frac{1}{2}\,[m^2 + n^2 + A + C - (a^2 + b^2)], \tag{19}$$

$$R^2 = \frac{1}{2}\,[m^2 + n^2 + A + C + a^2 + b^2]. \tag{20}$$

Nous avons ainsi cinq équations qui déterminent les quantités a, b, α, β, R_1 et R, quand m, n, A, B, C sont données, et lesquelles font voir que la quartique (15) peut être considérée, de quatre manières différentes, comme la *cïssoidale* de deux circonférences, réelles ou imaginaires, par rapport à un point situé sur une de ces circonférences.

10. Il nous faut maintenant examiner si les circonférences précédentes sont réelles ou imaginaires.

L'équation (16) donne pour a^2 deux valeurs positives et deux valeurs négatives; et par conséquent pour a deux valeurs réelles, égales et de signe contraire, et deux valeurs imaginaires; l'équation (17) détermine ensuite les valeurs correspondantes de b. Nous avons ainsi les coordonnées des centres des quatre circonférences C'_1, C'_2, C'_3 et C'_4, qui sont deux réelles et deux imaginaires.

Les équations (18) déterminent ensuite les coordonnées des centres des circonférences correspondantes C_1, C_2, C_3 et C_4, qui sont aussi deux réelles et deux imaginaires.

L'équation (20) détermine enfin les rayons des circonférences C'_1, C'_2, C'_3, C'_4 et fait voir que ces rayons sont réels quand

$$m^2 + n^2 + A + C + a^2 + b^2 > 0,$$

et imaginaires dans le cas contraire.

On conclut de ce qui précède que, quand cette dernière condition est satisfaite, existent deux systèmes de circonférences réelles (C_1, C'_1), (C_2, C'_2) au moyen desquelles on peut construire la pratique (15) en employant la méthode considérée au n.° 7. Les centres de ces circonférences sont situés sur une droite qui passe par l'origine des coordonnées, à égale distance de ce point. Les deux autres systèmes de circonférences (C_3, C'_3), (C_4, C'_4) sont toujours imaginaires.

11. Les coordonnées des centres des circonférences imaginaires dont la quartique (15) est la *cïssoidale* peuvent être déterminées de la manière suivante.

Soit a_1 une des racines réelles de l'équation (16) et b_1, α_1, β_1, R' les valeurs correspondantes de b, α, β, R.

En posant dans cette équation

$$m = 2\,\alpha_1 - a_1, \quad n = 2\,\beta_1 - b_1,$$

$$A = 4\,a_1\,\alpha_1 - 4\,\alpha_1^2 + R'^2 - (a_1^2 + b_1^2),$$

$$C = 4\,b_1\,\beta_1 - 4\,\beta_1^2 + R'^2 - (a_1^2 + b_1^2),$$

$$B = 4\,(a_1\,\beta_1 + b_1\,\alpha_1 - 2\,\alpha_1\,\beta_1),$$

on obtient la suivante:

$$a^4 - (a_1^2 - b_1^2)\,a^2 - a_1^2\,b_1^2 = 0,$$

qui donne pour a les quatre valeurs

$$a = \pm\,a_1, \quad a = \pm\,b_1\,i.$$

Les quatre valeurs correspondantes de b sont

$$b = \frac{a_1\,b_1}{a} = \pm\,b_1, \quad b = \mp\,a_1\,i,$$

et celles de α et β

$$\alpha = \frac{1}{2}(2\,\alpha_1 - a_1) - \frac{1}{2}\,b_1\,i, \quad \beta = \frac{1}{2}(2\,\beta_1 - b_1) + \frac{1}{2}\,a_1\,i,$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(2\,\alpha_1 - a_1) + \frac{1}{2}\,b_1\,i, \quad \beta = \frac{1}{2}(2\,\beta_1 - b_1) - \frac{1}{2}\,a_1\,i,$$

$$\alpha = \alpha_1, \quad \beta = \beta_1,$$

$$\alpha = \alpha_1 - a_1, \quad \beta = \beta_1 - b_1.$$

Les valeurs correspondantes de R^2 sont données par l'égalité

$$R^2 = R'^2 - (a_1^2 + b_1^2),$$

quand $a = \pm\,b_1\,i$, et par le formule

$$R^2 = R'^2,$$

quand $a = \pm\,a_1$.

Les coordonnées des centres des circonférences imaginaires C_3 et C_4 sont donc

$$\left[\frac{1}{2}(2\alpha_1 - a_1) - \frac{1}{2}b_1 i, \quad \frac{1}{2}(2\beta_1 - b_1) + \frac{1}{2}a_1 i\right],$$

$$\left[\frac{1}{2}(2\alpha_1 - a_1) + \frac{1}{2}b_1 i, \quad \frac{1}{2}(2\beta_1 - b_1) - \frac{1}{2}a_1 i\right],$$

ceux des circonférences C'_3 et C'_4 sont

$$(b_1 i, \; -a_1 i), \quad (-b_1 i, \; a_1 i),$$

et les rayons de ces deux dernières circonférences sont égaux à

$$R'^2 - (a_1^2 + b_1^2).$$

12. Entre les positions des centres des circonférences C'_1, C'_2, C'_3 et C'_4 et des *foyers* de la quartique considerée, qui résultent de l'intersection de ses asymptotes, il existe une relation que nous allons indiquer.

Cherchions les asymptotes de la courbe au moyen de la méthode connue. On trouve

$$y = \pm i x + u,$$

où u représente une quantité donnée par l'équation

$$u^2 - (m i - n) u + \frac{1}{4}(A + B i - C) = 0.$$

Or, cette équation donne, en y remplaçant m, n, A, B, C par leurs valeurs en fonction de a_1, b_1, α_1, β_1 et en la résolvant ensuite :

$$u = \frac{1}{2}\left[(2\alpha_1 - a_1) i - (2\beta_1 - b_1)\right] \pm \frac{1}{2}(b_1 - a_1 i).$$

Les équations de asymptotes cherchées sont donc les suivantes :

$$y = i x + \frac{1}{2}\left[(2\alpha_1 - a_1) i - (2\beta_1 - b_1) + b_1 - a_1 i\right],$$

$$y = -i x + \frac{1}{2}\left[-(2\alpha_1 - a_1) i - (2\beta_1 - b_1) + b_1 + a_1 i\right],$$

$$y = i x + \frac{1}{2}\left[(2\alpha_1 - a_1) i - (2\beta_1 - b_1) - b_1 + a_1 i\right].$$

$$y = -i x + \frac{1}{2}\left[-(2\alpha_1 - a_1) i - (2\beta_1 - b_1) - b_1 - a_1 i\right].$$

Or ces droites se coupent en quatre points, deux réels et deux imaginaires, qui sont les *foyers singuliers* de la quartique, et dont les coordonnées sont les suivantes:

$$(-\alpha_1, -\beta_1), \quad (a_1 - \alpha_1, b_1 - \beta_1),$$

$$\left[\frac{1}{2}(a_1 - 2\alpha_1) + \frac{1}{2} b_1 i, \quad \frac{1}{2}(b_1 - 2\beta_1) - \frac{1}{2} a_1 i\right],$$

$$\left[\frac{1}{2}(a_1 - 2\alpha_1) - \frac{1}{2} b_1 i, \quad \frac{1}{2}(b_1 - 2\beta_1) + \frac{1}{2} a_1 i\right].$$

On en conclut que *ces foyers sont situés sur les droites qui passent par le point double de la quartique considérée et par les centres des circonférences* C_1, C_2, C_3, C_4, *et que les distances de ces foyers au point double sont respectivement égales aux distances des centres au même point.*

13. En cherchant le vecteur du milieu de la corde $A A_1$ (n.° 7) de la quartique considérée, qui passe par le point double O, on trouve, en le représentant par ρ_3,

$$\rho_3 = \frac{1}{2}(O A + O A_1),$$

et par conséquent (n.° 7)

$$\rho_3 = a \cos\theta + b \sin\theta - 2(\alpha \cos\theta + \beta \sin\theta).$$

Cette équation représente donc, en coordonnées polaires, le lieu géométrique du milieu des cordes de la quartique, qui passent par son point double.

L'équation cartesienne du même lieu est la suivante:

$$x^2 + y^2 - (a - 2\alpha)x - (b - 2\beta)y = 0.$$

Donc: *le lieu géométrique du milieu des cordes qui passent par le point double d'une quartique bicirculaire unicursale est une circonférence, qui passe par le point double.*

Les coordonnées du centre de cette circonférence sont

$$x_1 = \frac{1}{2} a - \alpha, \quad y_1 = \frac{1}{2} b - \beta,$$

et son rayon est égal à $\frac{1}{2}\sqrt{(a - 2\alpha)^2 + (b - 2\beta)^2}$.

14. Il résulte immédiatement de la définition de la circonférence, précédemment considérée, comme lieu du milieu des cordes de la quartique qui passent par le point double O, que les points où elle coupe la quartique coïncident avec les points de contact des tangentes à la même quartique, menées par le point O.

Nous ajouterons à ce qui précède que les tangentes considérées peuvent être tracées d'une manière très facile, puisque il résulte immédiatement de la méthode donnée au n.° 7 pour construire la quartique qu'elles coïncident avec les tangentes à la circonférence C' menées par le point double O. Elles sont donc imaginaires quand le point O est situé à l'intérieur de la circonférence considérée et réelles dans le cas contraire.

On peut encore obtenir ces résultats analytiquement, en les déduisant de l'équation de la quartique, mise sous la forme

$$[x^2 + y^2 + (2\alpha - a)x + (2\beta - b)y]^2$$
$$= (R^2 - b^2)x^2 + (R^2 - a^2)y^2 + 2abxy.$$

Cette équation indique, en effet, que la circonférence dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + (2\alpha - a)x + (2\beta - b)y = 0$$

coupe la quartique aux mêmes points que les droites représentées par l'équation

$$(R^2 - b^2)x^2 + (R^2 - a^2)y^2 + 2abxy = 0.$$

Or ces droites sont tangentes à la circonférence C', dont l'équation a été écrite au n.° 7, passent par l'origine des coordonnées O et sont réelles, quand $a^2 + b^2 > R^2$, et imaginaires dans le cas contraire.

15. Considérons, pour faire une première application de la doctrine précédente, la courbe définie par l'équation

$$(x^2 + y^2)^2 = f^2x^2 + g^2y^2,$$

laquelle fut étudiée par Booth en son *Treatrise on some new geometrical methods* (London, 1877, t. II, p. 163), où il lui a donné le nom de *lemniscate elliptique* (*).

On a alors (n.° 9)

$$A = f^2, \quad B = 0, \quad C = g^2, \quad m = 0, \quad n = 0,$$

(*) Voyez aussi notre : *Geometria de las Curvas notables, tanto planas como alabiadas,* publié par l'Académie des Sciences de Madrid (p. 118).

et par conséquent a est déterminé par l'équation

$$a^4 - (f^2 - g^2)\, a^2 = 0, \tag{21}$$

qui donne

$$a = 0, \quad a = \pm \sqrt{f^2 - g^2}.$$

À la première solution correspondent les valeurs suivantes de b, R^2, α et β, données par les formules (K) et (18):

$$b = \pm \sqrt{g^2 - f^2}, \quad R^2 = g^2, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \pm \frac{1}{2} \sqrt{g^2 - f^2}.$$

Donc: *si on a $g^2 > f^2$, il existe deux systèmes de circonférences réelles (C_1, C'_1) et (C_2, C'_2) telles que la courbe considérée est une cissoïdale de chaque système par rapport à l'origine des coordonnées.*

Les coordonnées des centres de ces circonférences sont

$$\left(\alpha = 0,\ \beta = \pm \frac{1}{2} \sqrt{g^2 - f^2}\right), \quad \left(a = 0,\ b = \pm \sqrt{g^2 - f^2}\right),$$

et les circonférences C_1 et C_2 passent par l'origine des coordonnées et les rayons des autres sont égaux à g.

Les centres des circonférences C'_1 et C'_2 sont donc situés sur l'axe des ordonnées et *coïncident avec les foyers de l'ellipse*

$$\frac{x^2}{f^2} + \frac{y^2}{g^2} = 1,$$

dont la lemniscate elliptique est la podaire.

Les centres des circonférences C_1 et C_2 sont aussi situés sur l'axe des ordonnées et les distances de ces points à l'origine sont égales à la moitié des distances des centres de C'_1 et C'_2 au même point.

Aux autres solutions $a = \pm \sqrt{f^2 - g^2}$ de l'equation (21) correspondent les valeurs de b, R^2, α, β suivantes:

$$b = 0, \quad R^2 = f^2, \quad \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{f^2 - g^2}, \quad \beta = 0,$$

qui sont réelles quand $f^2 > g^2$.

Dans ce cas les centres des circonférences réelles des deux systèmes dont la quartique considérée est une *cïssoidale* sont situés sur l'axe des abscisses; ceux de C'_1 et C'_2 coïncident encore avec les foyers de l'ellipse dont la quartique considérée est la *podaire* centrale, et ceux de C_1 et C_2 divisent en deux parties égales les segments de cet axe compris entre les précédents et l'origine des coordonnées.

16. La courbe représentée par l'équation

$$(x^2 + y^2)^2 = f^2 x^2 - g^2 y^2,$$

à laquelle Booth a donné (l. c.) le nom de *lemniscate hyperbolique* peut être étudiée de la même manière.

On trouve ainsi pour a, b, R^2, α et β les valeurs

$$a = 0, \quad b = \pm i \sqrt{f^2 + g^2}, \quad R^2 = -g^2,$$

auxquelles correspondent deux systèmes de circonférences imaginaires, et les valeurs

$$a = \pm \sqrt{f^2 + g^2}, \quad b = 0, \quad R^2 = f^2, \quad \alpha = \pm \frac{1}{2} \sqrt{f^2 + g^2}, \quad \beta = 0,$$

auxquelles correspondent deux systèmes de circonférences réelles de chaqu'un desquels la quartique est une *cïssoidale.* Les centres des deux circonférences (C'_1, C'_2) coïncident, comme dans le cas antérieur, avec les foyers de l'hyperbole dont la lemniscate hyperbolique est la *podaire*, les autres deux divisent les distances de ceux qui précédent au centre de la courbe en deux parties égales.

Quand $f^2 = g^2$ la courbe considérée coïncide avec la *lemniscate de Bernoulli*, et on voit donc que cette courbe est la *cïssoidale* des circonférences dont les centres sont $(f\sqrt{2}, 0)$ et $\left(\frac{1}{2} f\sqrt{2}, 0\right)$, ou $(-f\sqrt{2}, 0)$ et $(-f\sqrt{2}, 0)$, par rapport à l'origine des coordonnées, le rayon de la première circonférence étant égale à f et celui de l'autre à $\frac{1}{2} f\sqrt{2}$.

17. Nous allons faire la dernière application en considérant le *limaçon de Pascal*, dont l'équation est

$$(x^2 + y^2 - k x)^2 = h^2 (x^2 + y^2),$$

ou

$$(x^2 + y^2)^2 - 2 k (x^2 + y^2) x = (h^2 - k^2) x^2 + h^2 y^2.$$

On trouve alors, au moyen des formules (K) et (18) du n.° 9, en y posant

$$A = h^2 - k^2, \quad B = 0, \quad C = h^2, \quad m = -k, \quad n = 0,$$

les résultats suivants:

$$a = 0, \quad = 0, \quad R^2 = h^2, \quad \alpha = -\frac{1}{2}k, \quad \beta = 0.$$

Donc: *le limaçon de Pascal est la cissoidale de deux circonférences par rapport à l'origine des coordonnées. Le centre d'une circonférence coïncide avec cette origine et son rayon est égal à h; les coordonnées du centre de l'autre circonférence sont* $\left(\alpha = -\frac{1}{2}k, \quad \beta = 0\right)$ *et son rayon est égal à* $\frac{1}{2}k$.

Quand $h = k$, on a la *cardioïde*. Alors les deux circonférences, qu'on vient de considérer, sont tangentes.

L'équation de la circonférence qui est le lieu du milieu des cordes du limaçon, qui passent par son point double, est

$$x^2 + y^2 - kx = 0.$$

Cette circonférence est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées de celle de centre $\left(-\frac{1}{2}k, \; 0\right)$, qui fut précédemment considérée.

Contributo alla teoria degli infiniti.

(*Di* Ettore Bortolotti, *a Modena.*)

I risultamenti contenuti nella Memoria col titolo: *Sul limite del quoziente di due funzioni*, stampata nel tomo VIII, serie III di questi *Annali*, ci danno dei criteri per la determinazione della rapidità relativa di crescenza di due funzioni reali della variabile reale x, infinite entrambe nel punto $x = +\infty$, finite, continue, derivabili in tutti i punti a distanza finita di un intorno $(x_0 \cdots + \infty)$.

Se invece di funzioni delle variabili continua x si debbano mettere in riscontro funzioni reali della variabile discontinua n, non sarà possibile applicare quei risultamenti senza prima costruire, mediante interpolazione, funzioni continue e derivabili che, nei punti $x = n$, coincidano con le proposte. Determinata poi la rapidità relativa delle funzioni così formate, si dovrà assumere questa, come misura di quella delle date funzioni.

È palese la difficoltà che presenta l'applicazione di un tal metodo, al quale si potrebbero, anche dal punto di vista puramente logico, muovere obbiezioni non trascurabili.

Il metodo diretto consiste nello stabilire per le funzioni di variabili discrete $f(n)$, definizioni e leggi di calcolo che, quando n rappresenti l'ordine di un insieme lineare numerabile $[x_n]$, sieno indipendenti dal concetto di lunghezza del segmento $(x_n \ldots x_{n+1})$, e che si riducano alle definizioni ed alle leggi di calcolo usate nelle analisi delle quantità continue, col supporre i segmenti $(x_n, \ldots x_{n+1})$ infinitesimi.

Così si fa appunto quando, con tacito accordo, si ammette di desumere la conoscenza delle rapidità relative di crescenza di due funzioni $f(n)$, $\varphi(n)$ dall'esame del comportamento assintotico, per $n = \infty$, del quoziente $\frac{f(n)}{\varphi(n)}$, e si applicano per le funzioni della variabile discreta n le definizioni di eguaglianza e di diseguaglianza nell'ordine di infinità, date per funzioni della variabile continua.

I criteri che nel calcolo infinitesimale, si adoperano per la determinazione del comportamento assintotico del quoziente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, sono quasi esclusivamente quelli desunti dall'esame del quoziente $\frac{f'}{\varphi'}$ delle derivate. Anche nel calcolo delle funzioni di variabili discrete, si hanno criteri analoghi, dove, alle derivate ordinarie, sono sostituite le differenze finite. La prima origine di tali criteri risale al Cauchy (*), ma la loro forma definitiva è dovuta allo Stolz.

Questi, con la precisione che è una delle caratteristiche delle sue opere scientifiche, non si è stancato di ritornare per ben cinque volte sullo stesso soggetto (*), togliendo ora qualche condizione non necessaria, ora cercando nuove strade più facili o più palesi, ora allargando il campo delle sue feconde ricerche.

Le sue dimostrazioni però, sono tutte laboriose, tanto che egli stesso, a un certo punto (**), le dà per esempio delle difficoltà che, in taluni casi, presenta la dimostrazione rigorosa della esistenza del limite.

Mi lusingo di avere, con facili considerazioni, tolto gran parte di coteste difficoltà, e nel § I, presenterò, con metodo uniforme a quello seguito nei paragrafi seguenti ed in forma semplice e piana, un esatto compendio dell'opera dello Stolz.

Un elemento di molta importanza, nello studio del comportamento assintotico di una funzione f_n, è il rapporto $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ (***). Alla conoscenza del com-

(*) Cfr. *Ueber die Grenzwerthe der Quotienten...*, Mat. Ann. XIV, pag. 232-239. Mat. Ann. XV, pag. 556-559 *(Nachtrag)*. *Verallgemeinerung eines Satzes von Cauchy*, Mat. Ann. XXXIII, pag. 238-245. — Vedi ancora: *Vorlesungen über Allg. Arithm.* I, pagina 173-179. — *Abschnitte* zum IX, pag. 339-340 dello stesso volume.

(**) *Allg. Arithm.*, pag. 178.

(***) È noto fino dagli elementi, che, se un tale rapporto si mantiene maggiore di un numero maggiore di 1, la f_n è infinita, se minore di un numero minore di 1, infinitesima. Posto $\frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + a_n$, la determinazione del comportamento assintotico della f_n si coordina a quella del prodotto infinito $\prod_1^\infty (1 + a_n)$. Su questo proposito ho recentemente studiato portamento assintotico di cotesto rapporto non può direttamente servire il teorema di CAUCHY (*) il quale afferma che: quando il $\lim\limits_{n=\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$ esiste esso è eguale al limite di $\sqrt[n]{f_n}$; gioverebbe invece poter desumere l'esistenza del limite $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ da quello del limite di $\sqrt[n]{f_n}$, che in moltissimi casi si può facilmente determinare.

Lo studio di tale questione rimane d'assai semplificato quando si siano prima determinate le condizioni che rendono valida la relazione

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_n}{\varphi_n} = \lim_{n=\infty} \frac{\Delta f_n}{\Delta \varphi_n},$$

nella ipotesi che sia ammessa solo la esistenza del primo membro.

Studierò questo quesito nel § II.

Partendo da una evidente identità numerica, con considerazioni di ordine affatto elementare, giungo a conclusioni che brevemente si riassumono dicendo che: *quando si tratti di funzioni monotone, e si supponga monotono anche il quoziente* $\frac{f_n}{\varphi_n}$, *dalla esistenza del limite di questo si può desumere la esistenza del limite del quoziente delle differenze finite* $\frac{\Delta f_n}{\Delta \varphi_n}$, *e che: la rapidità di tendenza al limite di quest'ultimo quoziente non è inferiore a quella del quoziente* $\frac{f_n}{\varphi_n}$.

La considerazione che non sempre i due quozienti $\frac{f_n}{\varphi_n}$, $\frac{\Delta f_n}{\Delta \varphi_n}$ hanno eguale rapidità di tendenza al limite, ed il desiderio di porre questo fatto in relazione con la rapidità assoluta di crescenza delle f_n, φ_n, mi ha condotto

---

i seguenti quesiti. *Determinare il comportamento assintotico del prodotto* $\overset{\infty}{\underset{1}{\pi}}(1 + a_n)$, *supposto noto quello della serie* $\sum\limits_1^\infty a_n$.

Determinare il comportamento assintotico del prodotto infinito $\overset{\infty}{\underset{1}{\pi}}(1 + a_n b_n)$ *supposto noto quello del prodotto* $\pi(1 + a_n)$ *e quello delle variabili* a_n, b_n. Si veda la Memoria: *Contributo alla teoria dei prodotti infiniti e delle serie a termini positivi* nei *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*. Adunanza del 13 marzo 1904.

(*) Cfr. *Analyse*, pag. 53-57.

allo studio del doppio rapporto $\frac{\Delta f_n}{\Delta \varphi_n} : \frac{f_n}{\varphi_n}$. Sono giunto a risultamenti molto semplici ed importanti. Vedremo infatti che, *se quel doppio rapporto ha limite determinato (finito, nullo od infinito)* λ; *questo è appunto l'ordine di infinito della* f_n, *quando l'infinito della* φ_n *si assuma come principale e quando sia soddisfatta la relazione* $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = 1$.

In generale, *posto* $\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = 1 + a_n$, $\frac{\Delta f_n}{\Delta \varphi_n} : \frac{f_n}{\varphi_n} = 1 + b_n$,

$$\beta_n = \frac{\lg\left(1 + \frac{a_n\, b_n}{1 + a_n}\right)}{\lg(1 + a_n)},$$

se la variabile β_n *ha limite determinato* β, *e si assume come infinito principale quello della* φ_n, *l'ordine di infinito della* f_n *(al senso di* Cauchy*)* (*) *è dato dal numero* $1 + \beta$.

I risultamenti che si ottengono studiando direttamente le funzioui di variabile discreta sono di una generalità grandissima, perchè si possono direttamente applicare (come vedremo al § III), a funzioni della variabile continua x, senza bisogno di supporre che esse sieno continue.

Se poi ammetteremo che sieno soddisfatte le condizioni di continuità e derivabilità, richieste per la applicazione del criterio dell'Hôpital, potremo più intimamente di quel che si faccia coi metodi ordinari, studiare le relazioni assintotiche fra il quoziente delle funzioni e quello delle derivate e ricavarne criteri, teoricamente più perfetti e praticamente più efficaci, per la determinazione dell'ordine di infinito.

In particolare troveremo il teorema:

Se si assume come infinito principale quello della funzione sempre crescente $\varphi(x)$, *l'ordine di infinito* (*al senso di* Cauchy) *della funzione monotona* $f(x)$ *è dato dal limite del doppio rapporto:*

$$\frac{f'}{\varphi'} : \frac{f}{\varphi}.$$

(*) Cfr. Oeuvres, 2.e série t. IV, pag. 281. Cfr. anche Borel, *Leçons sur les séries à termes positifs* pag. 36: e la mia Nota: *Sulla determinazione dell'Ordine di infinito.* Atti Acc. Sc. di Modena, seduta del 23 marzo 1904.

L'applicazione di questo teorema ad alcuni esempi ne mostrerà l'utilità pratica per la determinazione dell'ordine di infinito di funzioni trascendenti.

Il teorema enunziato e l'estensione al caso in cui il limite di quel doppio rapporto non esista, e convenga considerarne i limiti superiore ed inferiore di indeterminazione, sarà esposto nel § IV insieme con altri teoremi che dànno modo di ricavare la conoscenza del comportamento assintotico del quoziente delle derivate da quella delle funzioni; mentre nel § V tratterò specialmente della relazione $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{f(x+1)}{f(x)} = \lim\limits_{x=\infty} |f(x)|^{\frac{1}{x}}$.

L'argomento della presente Memoria potrebbe trovar posto nelle prime lezioni del corso di calcolo, e per questa considerazione ho posto cura speciale nel metodo e nella esposizione, che volli rendere il più che fosse possibile, facili ed elementari.

A questo riguardo posso dire che, tolto ciò che didatticamente può sembrare superfluo, sarà possibile introdurre nell'insegnamento la maggior parte dei risultamenti contenuti in questo scritto (*), e ne verrà così spianata la strada per la rigorosa trattazione di argomenti importanti e difficili di analisi infinitesimale.

§ I.

Teoremi dello Stolz.

1. Teorema. *Sieno $f(x)$, $\varphi(x)$, funzioni reali della variabile reale x, finite e ad un valore in tutti i punti a distanza finita di un determinato intorno $(x_0 \ldots + \infty)$ dell'infinito. La $\varphi(x)$ sia ivi sempre crescente ed infinita per $x = +\infty$. Sia k il limite superiore di indeterminazione per $x = +\infty$ della espressione:*

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)} \right|, \tag{1}$$

h positivo, indipendente dalla x,

(*) Ne feci quest'anno l'esperimento.

si vuole provare che il limite superiore di indeterminazione della espressione

$$\left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| \tag{2}$$

non è maggiore di k.

Ed infatti, ad ogni numero positivo ε potremo coordinare un numero positivo x_ε tale che

$$x \geqq x_\varepsilon, \quad \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)} \right| < k + \varepsilon,$$

cioè

$$x \geqq x_\varepsilon, \quad \left| f(x+h)-f(x) \right| < (k+\varepsilon)\Big(\varphi(x+h)-\varphi(x)\Big)$$

ed anche:

$$x \geqq x_\varepsilon, \quad \Big| [f(x+h)| - |f(x)| \Big| < (k+\varepsilon)\,\{\varphi(x+h)-\varphi(x)\}.$$

Di qui, qualunque sia il numero intero positivo p,

$$x \geqq x_\varepsilon, \quad \Big| |f(x+ph)| - |f(x)| \Big| < (k+\varepsilon)\,\{\varphi(x+ph)-\varphi(x)\}. \tag{3}$$

Sieno ora x, x_1, due numeri qualunque soddisfacenti le condizioni

$$x \geqq x_\varepsilon, \quad x_1 \geqq x + h.$$

Determiniamo il numero intero p con la condizione

$$(p+1)\,h > x_1 - x \geqq p\,h, \tag{4}$$

ed avremo

$$\Big| |f(x_1)| - |f(x)| \Big| \leqq \Big| |f(x_1)| - |f x_1 - p\,h)| \Big| +$$

$$+ \Big| |f(x_1 - p\,h)| - |f(x)| \Big|,$$

da cui, tenendo conto delle (3),

$$x \geqq x_\varepsilon, \quad x_1 \geqq x + h, \quad \Big| |f(x_1)| - |f(x)| \Big| < (k+\varepsilon)\,\{\varphi(x_1) -$$

$$- \varphi(x_1 - p\,h)\} + \Big| |f(x_1 - p\,h)| - |f(x)| \Big|.$$

Osservando che, per la (4),

$$x \leqq x_1 - p\,h < x + h$$

vedremo che

$$\varphi(x_1 - p\,h) \geqq \varphi(x);$$

ed, indicando con D *l'oscillazione della funzione* $|f(x)|$ *nel tratto* $(x,\ldots x+h)$, avremo:

$$x \geqq x_1,\quad x_1 \geqq x + h,\quad \Big|\, |f(x_1)| - |f(x)| \,\Big| < (k+\varepsilon)\,|\varphi(x_1) - \varphi(x)| + D. \quad (5)$$

Di qui:

$$\left.\begin{aligned} & x \geqq x_1,\quad x_1 \geqq x + h,\quad \left|\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)}\right| < \left|\frac{f(x)}{\varphi(x_1)}\right| + \\ & \quad + (k+\varepsilon)\left\{1 - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_1)}\right\} + \frac{D}{\varphi(x_1)}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Ricordando ora che $\lim\limits_{x=+\infty} \varphi(x) = +\infty$, vediamo che, comunque il punto x ed il numero positivo ε sieno scelti, sempre è possibile determinare un numero x' tale che sieno contemporaneamente soddisfatte le condizioni

$$x_1 \geqq x' \quad \left|\frac{f(x)}{\varphi(x_1)}\right| < \varepsilon,\quad \frac{D}{\varphi(x_1)} < \varepsilon;$$

si ha poi sempre

$$x_1 > x,\quad 0 < \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_1)} \leqq 1,$$

avremo dunque, dalla (5),

$$x_1 \geqq x' \quad \left|\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)}\right| < k + 3\,\varepsilon,$$

e ciò prova l'enunciato.

2. Corollario. *Se esiste ed è eguale allo zero il limite per* $x = +\infty$ *della frazione* $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)}$, *esiste ancora ed è eguale allo zero il limite del quoziente* $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$.

La nostra ipotesi infatti equivale a supporre $k = 0$ nell'enunciato precedente.

3. Osservazione I. La dimostrazione fatta non può darci nessuna indicazione sulla rapidità relativa di evanescenza delle espressioni (1), (2).

4. Osservazione II. La condizione, per gli accrescimenti finiti h, di essere costanti, non è essenziale.

Facilmente si vede che il teorema ed il corollario sussistono anche se la costante positiva h si sostituisce con una funzione $h(x)$ finita in ogni punto a distanza finita e tale che ogni successione della forma

$$x_1 = x + h(x), \ldots, \quad x_n = x_{n-1} + h(x_{n-1}), \ldots,$$

vada all'infinito sempre crescendo, per $n = +\infty$.

5. Teorema 2. *Siano $f(x)$, $\varphi(x)$, funzioni reali della variabile reale x, finite e ad un valore in tutti i punti a distanza finita di un determinato intorno dell'infinito. La $\varphi(x)$ sia ivi sempre crescente ed infinita per $x = +\infty$.*

Sia l il limite inferiore di indeterminazione, per $x = +\infty$, della espressione $\frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)}$, h positivo indipendente dalla x.

Si vuol provare che il limite inferiore di indeterminazione del quoziente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, non è inferiore ad l.

Ed infatti, coordiniamo al numero positivo ε, un numero x_ε tale che

$$x \geqq x_\varepsilon, \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)} > l - \varepsilon,$$

cioè

$$x \geqq x_\varepsilon, \quad f(x+h) - f(x) > (l - \varepsilon)\{\varphi(x+h) - \varphi(x)\},$$

per ogni p intero, positivo avremo:

$$x \geqq x_\varepsilon, \quad f(x+ph) - f(x) > (l - \varepsilon)\{\varphi(x+ph) - \varphi(x)\}.$$

Sieno ora x, x_1 due numeri soddisfacenti le condizioni $x \geqq x_\varepsilon + h, . x_1 > x$, ed indichi D la oscillazione della $f(x)$ nel tratto $(x - h, \ldots x)$, avremo, in modo analogo a quello tenuto al teorema precedente:

$$f(x_1) - f(x) > (l - \varepsilon)\{\varphi(x_1) - \varphi(x)\} + D.$$

Di qui:

$$\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)} > \frac{f(x)}{\varphi(x_1)} + (l - \varepsilon)\left\{1 - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_1)}\right\} - \frac{D}{\varphi(x_1)}.$$

Scegliamo ora un numero x' abbastanza grande perchè:

$$x_1 \geqq x' \quad \left|\frac{f(x)}{\varphi(x_1)}\right| < \varepsilon, \quad l . \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_1)} < \varepsilon, \quad \frac{D}{\varphi(x_1)} < \varepsilon,$$

ed avremo:

$$x_1 \geqq x' \quad \frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)} > l - 4\varepsilon,$$

e ciò prova il teorema.

6. Osservazione I. Per la quantità positiva h può ripetersi quanto s'è detto al n.° 4.

7. Osservazione II. Se $l > 0$, le differenze $f(x+h) - f(x)$ sono, da un determinato valore di x in poi, tutte positive, e cioè *anche la $f(x)$ è sempre crescente* in un determinato intorno di $+\infty$.

8. Corollario. Se $l = +\infty$, si ha $\lim\limits_{x=+\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)} = +\infty$, ed il teorema or ora dimostrato dimostra che anche il quoziente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ammette limite e che questo è $= +\infty$.

Sia poi

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)} = -\infty.$$

Fatto

$$F(x) = -f(x),$$

ne verrà:

$$\lim_{x=+\infty} \frac{F(x+h)-F(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)} = -\lim_{x=+\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)} = +\infty$$

e sarà anche $\lim\limits_{x=\infty} \frac{F(x)}{\varphi(x)} = +\infty$, cioè infine $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = -\infty$.

Possiamo dunque enunciare la proposizione seguente:

Le $f(x)$, $\varphi(x)$ sieno funzioni reali della variabile reale x, finite in ogni punto a distanza finita di un determinato intorno $(x_0 \ldots + \infty)$ e la φ inoltre sia sempre crescente ed infinita per $x = +\infty$, se il quoziente $\frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)}$ è infinito e determinato di segno per $x = +\infty$; anche il quoziente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ammette limite per $x = +\infty$, ed è questo eguale al limite di

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)}.$$

9. Osservazione analoga a quella fatta al n.° 3.

10. Teorema 3. *Sieno $f(x)$, $\varphi(x)$ funzioni reali della variabile reale x, finite e ad un valore in tutti punti a distanza finita di un determinato intorno $(x_0, \ldots + \infty)$, la $\varphi(x)$ sia ivi sempre crescente ed infinita per $x = +\infty$, se la frazione*

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)} \tag{7}$$

dove h è una costante positiva, ha per $x = +\infty$ limite determinato λ, anche il quoziente

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \tag{8}$$

avrà per $x = +\infty$ limite determinato, e sarà questo eguale a λ.

La dimostrazione è già stata fatta nei casi di $\lambda = 0$, $\lambda = +\infty$, $\lambda = -\infty$.

Se λ non è eguale allo zero, da un determinato valore di x in poi, le differenze $f(x+h) - f(x)$ avranno tutte lo stesso segno e niuna di esse sarà nulla.

La funzione $f(x)$ sarà dunque sempre crescente, o sempre decrescente.

Poniamo: $F = f$ se la f è sempre crescente, $F = -f$ se la f è sempre decrescente.

Sarà la $F(x)$ in ogni caso una funzione sempre crescente, in un determinato intorno dell'infinito, e le differenze $F(x+h) - F(x)$ saranno tutte positive, e cioè sarà

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)} \right| = \frac{F(x+h) - F(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)}.$$

Se scriviamo

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x+h) - F(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)} = \lambda_1 \tag{9}$$

avremo

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda, \quad \text{se } f(x) \text{ crescente} \\ \lambda_1 &= -\lambda \quad \text{» \quad » decrescente.} \end{aligned} \tag{10}$$

Ma si ha:

$$\limsup_{x=+\infty} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)} \right| = \liminf_{x=+\infty} \frac{F(x+h) - F(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)} = \lambda_1, \tag{11}$$

dunque

$$\limsup_{x=+\infty} \left| \frac{F(x)}{\varphi(x)} \right| \leqq \lambda_1, \quad \liminf \frac{F(x)}{\varphi(x)} \geqq \lambda_1. \tag{12}$$

Si osservi ora che, essendo per ipotesi $\lambda_1 > 0$, la condizione $\liminf \frac{F(x)}{\varphi(x)} \geqq \lambda_1$ esclude che $F(x)$ assuma valori negativi in ogni intorno di $+\infty$: e cioè: *Se la $f(x)$ è crescente, dovrà essa per x abbastanza grande, diventare e conservarsi poi sempre positiva, se decrescente negativa.*

Escluso che la F possa diventare negativa, in un determinato intorno di $+\infty$, rimane provato che

$$\limsup_{x=+\infty} \left| \frac{F(x)}{\varphi(x)} \right| = \limsup_{x=+\infty} \frac{F(x)}{\varphi(x)}, \tag{13}$$

onde dedurremo dalle (12)

$$\lim_{x=+\infty} \frac{F(x)}{\varphi(x)} = \lambda_1. \tag{14}$$

Sia ora $f(x)$ *crescente*, avremo $F = f$, $\lambda_1 = \lambda$, epperò

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{F(x)}{\varphi(x)} = \lambda.$$

Sia invece la $f(x)$ *decrescente*, avremo $F = -f$, $\lambda_1 = -\lambda$,

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = -\lim_{x=\infty} \frac{F(x)}{\varphi(x)} = -\lambda_1 = \lambda.$$

In ogni caso è dunque provato il teorema.

§ II.

Lemmi riguardanti la teoria delle funzioni di variabili discrete.

11. Indichi $[x_n]$ un insieme numerabile di punti dati in modo qualunque sul piano della variabile complessa, e sieno $f(x_n)$, $\varphi(x_n)$, funzioni reali finite e ad un valore in tutti i punti x_n. La successione $[\varphi(x_n)]$ inoltre, tenda per $n = \infty$ all'infinito, sempre crescendo.

Poniamo

$$\psi(x_n)=\frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}, \quad \rho(x_n)=\frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{\varphi(x_{n+1})-\varphi(x_n)}=\frac{\Delta f}{\Delta\varphi}. \tag{15}$$

Poichè le differenze $\varphi(x_{n+1})-\psi(x_n)$ sono tutte maggiori di zero, scriveremo l'identità

$$f(x_{n+1})-f(x_n)=\rho(x_n)\,\{\varphi(x_{n+1})-\varphi(x_n)\}.$$

Osservando che, per le ipotesi poste, le $\varphi(x_n)$ sono, da un certo indice in poi, tutte maggiori di zero, possiamo anche scrivere:

$$\varphi(x_{n+1})\,\psi(x_{n+1})-\varphi(x_n)\,\psi(x_n)=\rho(x_n)\,\{\varphi(x_{n+1})-\varphi(x_n)\} \tag{16}$$

e da questa ricaviamo le relazioni identiche:

$$\psi(x_{n+1})-\psi(x_n)=\frac{\varphi(x_{n+1})-\varphi(x_n)}{\varphi(x_{n+1})}\,\{\rho(x_n)-\psi(x_n)\} \tag{17}$$

$$\psi(x_{n+1})-\psi(x_n)=\frac{\varphi(x_{n+1})-\varphi(x_n)}{\varphi(x_n)}\cdot\{\rho(x_n)-\psi(x_{n+1})\}. \tag{18}$$

nelle quali le quantità $\frac{\varphi(x_{n+1})-\varphi(x_n)}{\varphi(x_{n+1})}$, $\frac{\varphi(x_{n+1})-\varphi(x_n)}{\varphi(x_n)}$, sono positive.

12. Dall'esame di queste relazioni si ricava subito la proposizione seguente:

Teorema I. *Le funzioni reali $f(x_n)$, $\varphi(x_n)$, sieno finite e ad un valore in tutti i punti x_n $(n=1, 2, 3\ldots)$ di un determinato insieme numerabile; la $\varphi(x_n)$ al tendere di n all'infinito, vada all'infinito sempre crescendo, ed il quoziente $\psi(x_n)=\frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}$, per i valori di n maggiori di un determinato numero N, sia monotono;*

se $\psi(x_n)$ è **non decrescente**, *si avrà:*

$$n\geqq N, \quad \rho(x_n)\geqq\psi(x_{n+1})\geqq\psi(x_n); \tag{19}$$

se $\psi(x_n)$ è **non crescente**, si avrà:

$$n\geqq N, \quad \rho(x_n)\leqq\psi(x_{n+1})\leqq\psi(x_n). \tag{20}$$

13. Corollario. *Se la $\psi(x_n)$, nelle ipotesi dell'enunciato precedente, è* **non decrescente** *ed ha limite inferiore di indeterminazione l, sarà eguale ad l anche il limite inferiore di indeterminazione della frazione $\rho(x_n)$. Se*

invece la $\psi(x)$ *è* **non crescente** *ed è* k *il suo limite superiore di indeterminazione, il limite superiore di indeterminazione delle* $\rho(x_n)$ *non può superare* k.

Sia infatti la ψ non decrescente, avremo per la formula (19):

$$\lim_{n=+\infty} \inf. \rho(x_n) \geqq \lim_{n=\infty} \inf. \psi(x_n); \tag{21}$$

ma, pel 2.° Teorema dello Stolz, il lim inf. di indeterminazione della $\psi(x_n)$ non è mai inferiore a quello delle $\rho(x_n)$, d'onde la eguaglianza richiesta dall'enunciato.

La seconda parte, riguardante il caso della $\psi(x)$ non crescente, risulta immediatamente dalle formule (20).

14. Teorema 2.° *Le funzioni reali* $f(x_n)$, $\varphi(x_n)$, *sieno finite e ad un valore nei punti* x_n *di un insieme numerabile; la* $\varphi(x_n)$ *sia sempre crescente e tenda all'infinito con* n. *Se il quoziente* $\psi(x_n) = \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}$ *è monotono per tutti i valori di* n *maggiori di un determinato numero* N *ed infinito per* $n = \infty$, *anche il quoziente* $\rho(x_n) = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)}$, *è, per* $n = \infty$, *infinito di ordine non minore di quello della* ψ.

La variabile $\psi(x_n)$ può essere *non decrescente*, epperò, da un determinato valore di n in poi, sempre positiva e tendente a $+\infty$; o non *crescente*, e quindi negativa e tendente a $-\infty$.

Nel primo caso il suo limite inferiore di indeterminazione essendo $l = +\infty$, tale sarà (17) anche il limite inferiore di indeterminazione della $\rho(x_n)$; questa variabile dunque è infinita per $n = \infty$. La relazione $\rho(x_n) \geqq \psi(x_n)$, che, per le formule (19) ha luogo in questo caso, ci mostra che l'ordine di infinito delle ρ non può essere inferiore a quello delle ψ.

Analogamente si ragiona nel caso che la ψ sia non crescente.

15. Teorema 3.° *Le funzioni reali* $f(x_n)$, $\varphi(x_n)$, *sieno finite e ad un valore nei punti di un insieme numerabile* $[x_n]$, *la* $f(x_n)$ *per i valori di* n *superiori ad un determinato numero* N *sia sempre crescente ed infinita per* $n = \infty$.

Se il quoziente $\psi(x_n) = \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}$ *è monotono ed infinitesimo per* $n = \infty$, *anche il quoziente* $\rho(x_n)$ *è infinitesimo di ordine non minore.*

16. Teorema 4.° *Le funzioni reali $f(x_n)$, $\varphi(x_n)$, finite e ad un valore nei punti di un insieme numerabile $[x_n]$, sieno entrambe monotone per i valori di n superiori ad un determinato numero N, la $\varphi(x_n)$ inoltre sia sempre crescente ed infinita per $n=\infty$. Se il quoziente $\psi(x_n)=\frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}$ è monotono ed infinitesimo per $n=\infty$, anche il quoziente $\rho(x_n)=\frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{\varphi(x_{n+1})-\varphi(x_n)}$ sarà infinitesimo di ordine non minore.*

La funzione $f(x_n)$, monotona nei punti x_n, al crescere indefinito di n finirà col conservare sempre il medesimo segno.

Sia questo negativo.

Poniamo

$$F(x_n)=-f(x_n). \tag{22}$$

La variabile $F(x_n)$ sarà monotona e positiva, il quoziente $\frac{F(x_n)}{\varphi(x_n)}$ avrà il medesimo valore assoluto di $\psi(x_n)=\frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}$ e sarà quindi infinitesimo. La frazione $\frac{F(x_{n+1})-F(x_n)}{\varphi(x_{n+1})-\varphi(x_n)}$ non differisce, se non per il segno dalla frazione $\rho(x_n)=\frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{\varphi(x_{n+1})-\varphi(x_n)}$, concludiamo dunque che: *se il teorema risulterà valido per funzioni $f(x_n)$ monotone e positive, dovrà essere vero in generale.*

In secondo luogo si osservi che la $f(x_n)$ può essere *non crescente* o *non decrescente.*

Nel primo caso la $f(x)$, che per la considerazione fatta precedentemente può supporsi positiva, tenderà ad un limite finito o nullo λ.

In questa ipotesi, fissato un numero qualunque m intero e maggiore di N, e posto:

$$\Delta_s=f(x_{m+s})-f(x_{m+s+1}), \quad s=1,\ 2,\ 3\ldots \tag{23}$$

saranno i numeri Δ_s tutti positivi o nulli, e perciò *la variabile $F(x_n)$ definita dalle relazioni:*

$$\left.\begin{aligned} &F(x_m)=f(x_m) \\ &F(x_{m+s})=f(x_{m+s-1})+\Delta_{s-1}, \quad s=1,\ 2,\ 3\ldots \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

sarà positiva, non decrescente in tutti i punti x_{m+s}.

Avremo poi

$$\lim_{s=\infty} F(x_{m+s}) = f(x_m) + \lim_{s=\infty} \sum_{r=1}^{s} \Delta_r$$

cioè, per le (23)

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{s=\infty} F(x_{m+s}) = f(x_m) + f(x_m) - \lim_{s=\infty} f(x_{m+s}) \\ &\lim_{s=\infty} F(x_{m+s}) = 2f(x_m) - \lambda. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

In fine, osservando che $f(x_m)$ è finito e determinato e che $\varphi(x_n)$ è infinito per $n=\infty$, si vede che:

$$\lim_{n=\infty} \frac{F(x_n)}{\varphi(x_n)} = 0. \tag{26}$$

Se dimostreremo che è $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{F(x_{n+1}) - F(x_n)}{\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)} = 0$, osservando che

$$F(x_{n+1}) - F(x_n) = \Delta_{n-m+s} = -\{f(x_{n+1}) - f(x_n)\},$$

avremo dimostrato il teorema.

Possiamo dunque limitarci al caso di variabili $f(x_n)$ positive non decrescenti.

Il quoziente $\psi(x_n)$, monotono, infinitesimo per $n=\infty$, sarà in questa ipotesi positivo non decrescente, almeno per tutti i valori di n superiori ad un determinato N.

Dalla formula (17) allora ricaveremo:

$$n \geqq N \qquad \rho(x_n) \leqq \psi(x_n).$$

Osservando che $\rho(x_n)$ è positivo (o nullo) e che $\psi(x_n)$ per ogni valore finito di n non è eguale allo zero, deduciamo in fine

$$n \geqq N, \qquad 0 \leqq \frac{\rho(x_n)}{\psi(x_n)} \leqq 1, \tag{27}$$

e ciò prova l'enunciato.

17. Teorema 5.° *Indichiamo con $f(x_n)$, $\varphi(x_n)$, funzioni reali finite e ad un valore in tutti i punti di un insieme numerabile $[x_n]$. Il quoziente $\dfrac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}$ sia, almeno per i valori $n \geqq N$, monotono, e, per $n=+\infty$, ammetta limite determinato λ finito e diverso dallo zero.*

Potremo affermare che si ha:

$$\lim_{n=\infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)} = \lim_{n=\infty} \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}, \tag{28}$$

quando sia soddisfatta una almeno delle condizioni seguenti:

α) la variabile $F(x_n) = f(x_n) - \lambda\,\varphi(x_n)$ sia sempre crescente ed infinita per $n = \infty$.

β) la variabile $F(x_n)$ superiormente definita sia monotona, e la $\varphi(x_n)$ sia sempre crescente ed infinita per $n = \infty$.

La dimostrazione si deduce dai teoremi 3.°, 4.°, col considerare i quozienti $\frac{F(x_n)}{\varphi(x_n)}$, $\frac{F(x_{n+1}) - F(x_n)}{\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)}$.

18. Per verificare se l'ordine di infinito di una data funzione f_n è maggiore o minore di quello di un'altra funzione data φ_n, giova spesso la proposizione seguente: *Sieno f, φ, funzioni reali, finite e ad un valore nei punti x_n di un insieme numerabile $[x_n]$.*

La $\varphi(x_n)$ sia sempre crescente ed infinita per $n = \infty$.

Poniamo:

$$\psi(x_n) = \frac{f}{\varphi} = \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}, \quad \rho(x_n) = \frac{\Delta f}{\Delta \varphi} = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)}. \tag{29}$$

Se il doppio rapporto

$$\frac{\Delta f}{\Delta \varphi} : \frac{f}{\varphi} = \frac{\rho(x_n)}{\psi(x_n)}, \tag{30}$$

si mantiene maggiore di un numero maggiore di 1, per tutti i valori di $n \geq N$, il quoziente $\frac{f}{\varphi}$ è, per $n = \infty$, determinato di segno ed infinito.

Se il doppio rapporto (30) si mantiene, per ogni $n \geq N$, positivo; ma minore di un numero minore di 1, il quoziente $\frac{f}{\varphi}$ è infinitesimo per $n = \infty$.

La dimostrazione, ed insieme una determinazione più esatta della rapidità di crescenza della f, relativamente a quella della φ, ci è offerta dal seguente criterio:

Teorema 6.° *Si ponga*

$$\frac{\varphi(x_{n+1})}{\varphi(x_n)} = 1 + a_n \tag{31}$$

$$\frac{\rho(x_n)}{\psi(x_n)} = \frac{\Delta f}{\Delta \varphi} : \frac{f}{\varphi} = 1 + b_n; \tag{32}$$

se esiste il limite

$$\beta = \lim_{n=\infty} \frac{\lg\left(1 + \frac{a_n b_n}{1 + a_n}\right)}{\lg(1 + a_n)}, \tag{33}$$

ed è ε un numero positivo dato a piacere, l'ordine di infinito della funzione $f(x_n)$ è minore di quello della variabile $\{\varphi(x_n)\}^{1+\beta+\varepsilon}$, ed è maggiore di quello della variabile $\{\varphi(x_n)\}^{1+\beta+\varepsilon}$.

Seguendo le idee di Cauchy ed usando una notazione proposta dal Borel (*), potremo anche dire che: *Se si assume come infinito principale o del primo ordine quello della variabile $\varphi(x_n)$, l'ordine di infinito della $f(x_n)$ è esprimibile mediante il simbolo $(1 + \beta)$.*

Nel caso in cui si abbia $\lim_{n=\infty} a_n = 0$, dimostreremo che $\beta = \lim_{n=\infty} b_n$, cioè $1 + \beta = \lim_{n=\infty} \frac{\Delta f}{\Delta \varphi} : \frac{f}{\varphi}$: ed avremo così il teorema:

Se la funzione $\varphi(x_n)$ soddisfa la condizione

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(x_{n+1})}{\varphi(x_n)} = 1, \tag{34}$$

e si assume l'infinito di $\varphi(x_n)$, per $n = \infty$, come infinito principale; l'ordine di infinito della funzione $f(x_n)$ si ottiene calcolando il limite:

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{\Delta f}{\Delta \varphi} : \frac{f}{\varphi}\right). \tag{35}$$

Se il limite di cotesto doppio rapporto non esiste, sia o no $\lim_{n=\infty} a_n = 0$, indicando con l, L, rispettivamente i limiti inferiori e superiori di indeterminazione della b_n, avremo due numeri $1 + \beta_1$, $1 + \beta_2$, fra i quali è situato l'ordine di infinito della f, (rispetto alla φ), calcolando i limiti.

$$\beta_1 = \lim_{n=\infty} \frac{\lg\left(1 + \frac{a_n l}{1 + a_n}\right)}{\lg(1 + a_n)}, \quad \beta_2 = \lim_{n=\infty} \frac{\lg\left(1 + \frac{a_n L}{1 + a_n}\right)}{\lg(1 + a_n)}. \tag{36}$$

Nel caso in cui la (34) *sia soddisfatta*, saranno $\beta_1 = l$, $\beta_2 = L$, e cioè *l'ordine della f, relativamente alla φ, sarà compreso fra i limiti inf. e sup. di indeterminazione del doppio rapporto $\frac{\Delta f}{\Delta \varphi} : \frac{f}{\varphi}$.*

(*) Cfr. E. Borel, *Leçons sur les séries à termes positifs*, pag. 36. — Cauchy, *Oeuvres*, 2e série, t. IV, pag. 281.

Infine osserveremo che *se* $\lim \frac{\Delta f}{\Delta \varphi} : \frac{f}{\varphi} = +\infty$, *la variabile* $f(x_n)$ *è infinita di ordine superiore a quello di qualunque potenza con esponente reale e positivo della* $\varphi(x_n)$: se $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\Delta f}{\Delta \varphi} : \frac{f}{\varphi} = 0$, *la* $f(x_n)$ *è infinita di ordine inferiore a quello di qualunque potenza con esponente reale positivo delle* $\varphi(x_n)$.

Per le dimostrazioni si osservi che, in conseguenza delle ipotesi poste, le variabili

$$\psi(x_n) = \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}, \quad \rho(x_n) = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)}$$

hanno segni eguali per ogni $n \geqq N$.

I denominatori $\varphi(x_n)$, $\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)$, sono però entrambi positivi, onde viene che i numeratori $f(x_n)$, $f(x_{n+1}) - f(x_n)$ dovranno avere egual segno per i medesimi valori di n.

Escludendo che la f, e con essa la ψ sieno nulle per ogni valore di x_n, rimangono due sole ipotesi possibili: *O che la* $f(x_n)$ *sia positiva e crescente, o che essa sia negativa e decrescente.*

Poichè quelle due ipotesi si riducono l'una all'altra col porre

$$F(x_n) = -f(x_n),$$

supporremo, per maggiore chiarezza, che $f(x_n)$ *sia positiva e quindi crescente* per ogni $n \geqq N$.

Abbiamo poi per la formola (32):

$$\rho(x_n) - \psi(x_n) = b_n \, \psi(x_n).$$

Scriveremo dunque la formula (17), data al n.° 11, sotto la forma

$$\psi(x_{n+1}) - \psi(x_n) = \frac{\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)}{\varphi(x_{n+1})} b_n \, \psi(x_n). \tag{37}$$

Da cui

$$\psi(x_{n+1}) = \psi(x_n) \left\{ 1 + \frac{\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)}{\varphi(x_{n+1})} b_n \right\} \tag{38}$$

e mettendo m, $m+1$, $m+2, \ldots$ $m+r-1$ successivamente al posto di n,

$$\psi(x_{m+r}) = \psi(x_m) \cdot \prod_{s=0}^{r-1} \left\{ 1 + \frac{\varphi(x_{m+s+1}) - \varphi(x_{m+s})}{\varphi(x_{m+s+1})} b_{m+s} \right\}. \tag{39}$$

Osserviamo ora che

$$\frac{\varphi(x_{m+s+1})-\varphi(x_{m+s})}{\varphi(x_{m+s+1})}=\frac{\varphi(x_{m+s})}{\varphi(x_{m+s+1})}\cdot\frac{\varphi(x_{m+s+1})-\varphi(x_{m+s})}{\varphi(x_{m+s})}$$

$$=\frac{1}{1+a_{m+s}}\cdot a_{m+s}.$$

D'onde per la formula (39)

$$\psi(x_{m+r})=\psi(x_m)\mathop{\pi}_{s=0}^{r-1}\left\{1+a_{m+s}\frac{b_{m+s}}{1+a_{m+s}}\right\}. \tag{40}$$

Il prodotto infinito

$$\mathop{\pi}_{s=0}^{r-1}(1+a_{m+s})=\mathop{\pi}_{s=0}^{r-1}\left\{1+\frac{\varphi(x_{m+s+1})-\varphi(x_{m+s})}{\varphi(x_{m+s})}\right\}=\frac{\varphi(x_{m+r})}{\varphi(x_m)}$$

è, per $r=\infty$, infinito dello stesso ordine della variabile $\varphi(x_{m+r})$, onde tenuto conto dei teoremi dati ai n.i 23-27 della mia Memoria *Contributo alla teoria dei prodotti infiniti e delle serie a termini positivi* si ricavano punto per punto le proposizioni enunciate.

19. Esempio.

1.° $f=e^{2n}$, $\varphi=e^n$, $\dfrac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}=e$, $a_n=e-1$, $\dfrac{\Delta f}{\Delta\varphi}:\dfrac{f}{\varphi}=\dfrac{e^2-1}{e-1}=$ $=1+e$, $b_n=e$

$$\beta=\lim_{n=\infty}\frac{\lg\left(1+\dfrac{a_n b_n}{1+a_n}\right)}{\lg(1+a_n)},\quad \beta=\frac{\lg e}{\lg e}=1,\quad 1+\beta=2,$$

La funzione f è dello stesso ordine delle φ^2; ciò che d'altronde è evidente.

2.° $\quad f=n,\quad \varphi=\lg n,\quad \dfrac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}=\dfrac{\lg(n+1)}{\lg n}=1+\dfrac{\lg\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\lg n},$

$$a_n=\frac{\lg\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\lg n},\ \lim_{n=\infty}a=0,\ \text{dunque avremo}$$

$$1+\beta=\lim_{n=\infty}\frac{\Delta f}{\Delta\varphi}:\frac{f}{\varphi}=\lim_{n=\infty}\frac{\lg n}{\lg\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\infty.$$

La variabile n è perciò infinita di ordine superiore a quello di qualunque potenza reale di $\lg n$. Risultato noto.

3.° $f = e^n$, $\varphi = n!$ $\dfrac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = n+1$, $a_n = n$

$$\frac{\Delta f}{\Delta \varphi} : \frac{f}{\varphi} = \frac{e-1}{n}, \quad b_n = \frac{e-1}{n} - 1, \quad \beta = \lim_{n=\infty} \frac{\lg\left(\dfrac{e}{n+1}\right)}{\lg(n+1)}$$

$$\beta = \lim_{n=\infty} \frac{\lg e - \lg n + 1}{\lg(n+1)} = -1 + \lim_{n=\infty} \frac{1}{\lg n + 1} = -1$$

$$1 + \beta = 0.$$

La funzione e^n è dunque infinita di ordine inferiore a quello di qualunque potenza reale positiva della funzione $n!$

4.° $f = n^n$, $\varphi = n!$

$$\frac{\Delta f}{\Delta \varphi} : \frac{f}{\varphi} = \frac{(n+1)^{n+1} - n^n}{n^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta \varphi} : \frac{f}{\varphi} = e + \varepsilon_n, \quad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0,$$

$$b_n = e - 1 + \varepsilon_n, \quad \beta = \lim_{n=\infty} \frac{\lg\left(1 + (e - 1 + \varepsilon_n)\dfrac{n}{n+1}\right)}{\lg(n+1)} = 0$$

$$\beta + 1 = 1.$$

L'ordine di infinito di n^n è dunque superiore a quello della variabile $n!$, ma inferiore a quello della variabile $(n!)^{1+\varepsilon}$, qualunque sia il numero positivo ε.

Assumendo come infinito principale quello di $n!$, potremo dire che, al senso di Cauchy, *la variabile n^n è infinita del primo ordine.*

Sotto questo punto di vista sono accettabili le deduzioni del Borel (*) che considera come paragonabili o sostituibili fra loro, gli infiniti delle due variabili $n!$, n^n.

(*) Cfr. *Leçons sur les séries à termes positifs*, pag. 64 ed 82. Cfr. ancora la mia nota *Sulla determinazione dell'ordine di infinito* (Atti Acc. di Modena, serie III, vol. IV, seduta del 23 marzo 1903).

§ III.

Teoremi relativi a funzioni non necessariamente continue della variabile continua x.

20. Indichiamo con $f(x)$, $\varphi(x)$, *funzioni reali delle x finite e ad un valore in tutti i punti a distanza finita di un determinato intorno* $(x_0, \ldots + \infty)$ e poniamo

$$\psi(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}, \quad \rho(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)} = \frac{\Delta f}{\Delta \varphi}, \tag{41}$$

dove h è una quantità positiva che, quando non si avverta il contrario, si suppone arbitrariamente data, ma costante rispetto ad x.

I teoremi dimostrati al paragrafo precedente permettono di enunciare le proposizioni seguenti:

Teorema 1.° *Se la funzione $\varphi(x)$ è sempre crescente ed infinita per $x = +\infty$, se il quoziente $\psi(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ è non decrescente ed ha limite inferiore di indeterminazione l, anche il quoziente delle differenze finite $\frac{\Delta f}{\Delta \varphi} = \rho(x, h)$, ha, per $x = \infty$ limite inferiore di indeterminazione eguale ad l;*
se il quoziente $\psi(x)$ è non crescente ed ha limite superiore di indeterminazione k, il quoziente $\frac{\Delta f}{\Delta \varphi}$ ha limite superiore di indeterminazione non maggiore di k.

Corollario. *Se la $\varphi(x)$ è sempre crescente ed infinita per $x = +\infty$, ed il quoziente $\psi(x)$ è monotono nell' intorno $(x_0 \ldots + \infty)$, ed infinito per $x = +\infty$, anche la funzione $\rho(x, h)$ è per $x = +\infty$, determinata di segno ed infinita di ordine maggiore ed eguale a quello della $\psi(x)$.*

Teorema 2.° *La funzione $f(x)$ sia monotona e la $\varphi(x)$ sempre crescente ed infinita per $x = +\infty$.*

Se anche il quoziente $\psi(x)$ *è monotono ed infinitesimo per* $x = +\infty$; *sarà la funzione* $\rho(x, h)$ *essa pure infinitesima di ordine maggiore od eguale a quello delle* $\psi(x)$.

Teorema 3.° *Se il quoziente* $\psi(x)$ *è nell'intorno* $(x_0, \ldots + \infty)$ *monotono e tende ad un limite finito e diverso dallo zero* λ *per* $x = +\infty$; *tenderà anche* $\rho(x, h)$ *a quel medesimo limite quando sia soddisfatta una almeno delle due condizioni seguenti:*

α) *La funzione* $F = f(x) - \lambda\,\varphi(x)$ *tende all'infinito sempre crescendo;*

β) *La funzione* F *è monotona e la* $\varphi(x)$ *è sempre crescente ed infinita per* $x = +\infty$.

Teorema 4.° *Se la funzione* $f(x)$ *è monotona, se la* $\varphi(x)$ *tende all'infinito sempre crescendo ed il doppio rapporto* $\frac{\Delta f}{\Delta \varphi} : \frac{f}{\varphi}$, *per un determinato valore dell'accrescimento* h, *si mantiene maggiore di un numero maggiore di* 1, *sarà* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *monotona ed infinita per* $x = +\infty$. *Se invece quel doppio rapporto si mantiene minore di un numero minore di 1 ed è positivo, la funzione* $\frac{f}{\varphi}$ *è monotona ed infinitesima.*

Una determinazione più esatta dell'ordine di infinito della f, si può fare al modo seguente:

Posto

$$\frac{\varphi(x+h)}{\varphi(x)} = 1 + a_h(x), \quad \frac{\Delta f}{\Delta \varphi} : \frac{f}{\varphi} = 1 + b_h(x),$$

se esiste il limite

$$\beta = \lim_{x=+\infty} \frac{\lg\left(1 + \frac{a_h(x)\, b_h(x)}{1 + a_h(x)}\right)}{\lg\left(1 + a_h(x)\right)}$$

ed è ε un numero positivo dato ad arbitrio, l'ordine di infinito della funzione f è minore di quello della funzione $\{\varphi(x)\}^{1+\beta+\varepsilon}$, maggiore di quello della funzione $\{\varphi(x)\}^{1+\beta-\varepsilon}$, cioè, *se l'infinito della* φ *si assume come principale, quello della* f *è dato dal simbolo* $(\beta + 1)$.

Nelle ipotesi poi che si abbia

$$\lim_{x=\infty} a_h(x) = 0, \quad \text{cioè} \quad \lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x+h)}{\varphi(x)} = 1,$$

l'ordine di infinito delle f, relativamente alla φ, si ottiene semplicemente calcolando il limite del doppio rapporto $\frac{\Delta f}{\Delta \varphi} : \frac{f}{\varphi}$; e, se questo limite non esiste, l'ordine di infinito della f è situato fra i limiti superiore ed inferiore di indeterminazione di quel rapporto medesimo.

La dimostrazione si desume senza alcuna fatica dal teorema del paragrafo precedente.

Osserviamo che, se il doppio rapporto $\frac{\Delta f}{\Delta \varphi} : \frac{f}{\varphi}$ è maggiore di un numero maggiore di 1, si desume dalla riflessione fatta a proposito del citato teorema 6.° che, per un determinato h e per ogni x si ha $\psi(x+h) > \psi(x)$. Ciò basta (*) per concludere che la $\psi(x)$ è monotona, e che, anche per ogni altro valore positivo di h il doppio rapporto è maggiore di un numero maggiore di 1.

Osserveremo ancora che il numero $1 + \beta$ rappresenta la rapidità di crescenza della $f(x)$, quando sia supposta riferita alla crescenza della φ. ***Il numero β è dunque indipendente dalla scelta della quantità positiva h.***

21. La condizione, imposta dagli enunciati dei teoremi 1.°, 2.°, 3.° alla $\psi(x)$, di essere monotona in un intorno determinato dell'infinito, può essere tralasciata, modificando lievemente gli enunciati medesimi.

Nei numeri che qui seguono immediatamente mi propongo di esaminare il caso di $\varphi(x) = x$, cioè di

$$\left.\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{f(x)}{x} \\ \rho(x, h) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

22. *Se la $f(x)$ è finita e determinata per $x = +\infty$*; non ha bisogno di dimostrazioni la verità del fatto che *le ψ e ρ sono entrambe infinitesime per $x = +\infty$.*

23. Sia la $f(x)$ *infinita e determinata di segno* per $x = +\infty$, e

(*) Cfr. Stolz, *Grundzüge*, vol. I, pag. 58.

sia infinitesimo il quoziente $\psi = \frac{f(x)}{x}$. Fissiamo per maggior chiarezza che sia $\lim\limits_{x=+\infty} f(x) = +\infty$.

Ad ogni numero positivo x_n potremo coordinare un accrescimento positivo Δx_n tale che:

$$h_n \geqq \Delta x_n, \quad f(x_n + h_n) > f(x_n), \quad \frac{f(x_n + h_n)}{x_n + h_n} \leqq \frac{f(x_n)}{x_n}. \tag{43}$$

In corrispondenza ad ogni punto x_1 arbitrariamente scelto nell'intorno dove le condizioni poste per le f, φ, si ritengono verificate, costruiremo così una successione infinita di punti

$$x_n = x_{n-1} + h_{n-1},$$

tendenti all'infinito per $n = +\infty$, e lungo la quale le funzioni f, ψ sono entrambe monotone, e la ψ è infinitesima per $n = +\infty$.

In forza del teorema 3.° dato al § II avremo

$$\lim_{n=\infty} \frac{f(x_n + h_n) - f(x_n)}{h_n} = 0,$$

e cioè, ad ogni numero positivo ε, coordineremo un indice N tale che

$$n \geqq N, \quad | f(x_n + h_n) - f(x_n) | < \varepsilon h_n. \tag{44}$$

Sia ora la $f(x)$ monotona, avremo ancora

$$h \leqq h_n, \quad x \geqq x_n, \quad n \geqq N, \quad | f(x + h) - f(x) | < \varepsilon h_n.$$

Se esiste limite superiore di indeterminazione finito M, per le h_n, tosto si scorge che ad ogni coppia di numeri positivi σ, h può coordinarsi un numero x_n abbastanza grande perchè si abbia

$$x \geqq x_n, \quad | f(x + h) - f(x) | < \sigma,$$

onde concluderemo:

24. *Se la funzione $f(x)$ è monotona, se il quoziente $\psi = \frac{f(x)}{x}$ è infinitesimo per $x = +\infty$, se si può stabilire una successione x_n di punti tendenti all'infinito, le cui differenze: $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, abbiano limite superiore di indeterminazione finito, e lungo la quale la $\psi(x_n)$ sia monotona, ciò basterà per concludere che, qualunque sia il numero positivo costante h,*

$$\lim_{x=\infty} | f(x + h) - f(x) | = 0.$$

§ IV.

Criteri relativi a funzioni derivabili.

25. I risultamenti ottenuti nei paragrafi precedenti non presuppongono la continuità delle funzioni f, φ, che ivi si considerano.

Vogliamo ora ammettere che tali funzioni sieno *continue e derivabili* in tutti i punti di un determinato intorno dell'infinito.

Anzitutto, partendo dalla ipotesi che esista il limite del quoziente $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ delle derivate, si trae dai teoremi dello Stolz recati al § I, una nuova riprova del criterio detto dell'Hôpital per la determinazione del limite del quoziente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Lo Stolz stesso ha fatto questa dimostrazione che si trova svolta in modo esauriente nei passi citati della sua opera.

La questione inversa, di determinare cioè il limite del quoziente delle derivate, supposto noto quello delle funzioni, è stata da me studiata nella Memoria: *Sul limite del quoziente di due funzioni*, stampate nel Tomo VIII, serie III di questi *Annali.*

Verifico ivi che dalla esistenza del limite: $\lim\limits_{x=+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ può dedursi solo la esistenza del limite del quoziente $\frac{f'}{\varphi'}$ per la x tendente all'infinito lungo successioni costituenti un insieme di punti, del quale ho determinata la dimensione.

Possiamo ora domandare delle *condizioni sufficienti per la esistenza del limite, per x che tende liberamente all'infinito, del quoziente* $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

26. I teoremi contenuti nel paragrafo precedente permettono di concludere che, *quando si abbia a che fare con funzioni monotone, e si tratti*

di quozienti infiniti od infinitesimi, una condizione sufficiente è data dalla ipotesi che il quoziente $\psi(x) = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ *sia funzione monotona della* x *in un determinato intorno dell'infinito.*

27. Si hanno infatti le proposizioni seguenti:

Teorema 1.° *Sieno* $f(x)$, $\varphi(x)$ *funzioni della variabile reale* x *finite e ad un valore in tutti i punti di un intorno* $(x_0 \ldots + \infty)$, *la* $\varphi(x)$ *sia sempre crescente ed infinita per* $x = + \infty$, *il quoziente* $\psi(x) = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ *sia una funzione monotona dei punti dell'intorno* $(x_0 \ldots + \infty)$, *infinita per* $x = + \infty$.

Esistano le derivate $f'(x)$, $\varphi'(x)$ *in tutti i punti dell'intervallo* $(x_0 \ldots + \infty)$. *Il quoziente* $\dfrac{f'}{\varphi'}$ *sarà, nel punto* $x = + \infty$, *determinato ed infinito di ordine non inferiore a quello della* ψ.

Ed infatti la relazione

$$x \geqq x_0 \qquad \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)} \geqq \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

conseguenza immediata della identità (17) trovata al n.° 11, vale indipendentemente dal valore di h, d'onde:

$$x \geqq x_0 \qquad \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \geqq \frac{f(x)}{\varphi(x)}.$$

E di qui, come al n.° 14, si ricava la verità dell'enunciato.

Teorema 2.° *Le funzioni* $f(x)$, $\varphi(x)$, *sieno finite, continue, derivabili, monotone in un determinato intorno* $(x_0 \ldots + \infty)$; *il quoziente* $\psi(x) = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ *sia esso pure monotono ed infinitesimo per* $x = + \infty$; *il quoziente* $\dfrac{f'}{\varphi'}$ *delle derivate sarà infinitesimo di ordine non minore.*

Teorema 3.° *Se, oltre alle condizioni di continuità e derivabilità ammesse negli enunciati precedenti per le* $f(x)$, $\varphi(x)$, *si ammette che il quoziente* $\psi(x) = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ *abbia, per* $x = + \infty$, *limite finito e diverso dallo zero* λ, *se cotesto quoziente è monotono, e se è monotona anche la funzione $F = f - \lambda\,\varphi$, il quoziente delle derivate $\frac{f'}{\varphi'}$ ha limite determinato, ed è questo eguale a λ.*

TEOREMA 4.° *La funzione reale, della variabile reale x, $f(x)$ sia monotona e derivabile in tutti i punti di un intorno $(x_0 \ldots +\infty)$. Il quoziente $\frac{f(x)}{x}$ sia infinitesimo per $x = +\infty$, e, lungo una successione x_n che tende all'infinito con n, mentre che le differenze $x_{n+1} - x_n$ hanno limite superiore finito, il quoziente $\frac{f(x_n)}{x_n}$ sia monotono.*

Ciò basterà per concludere che la derivata $f'(x)$ è, per $x = +\infty$, infinitesima di ordine non minore di quello della funzione $\frac{f(x)}{x}$.

28. La proposizione seguente che completa una proposizione che ebbi già ad enunciare nella citata Memoria (*), è di grande utilità nel calcolo infinitario.

TEOREMA 5.° *Sieno f, φ, funzioni reali della variabile reale x, finite, ad un valore e derivabili in tutti i punti di un determinato intorno $(x_0 \ldots +\infty)$.*

La $\varphi(x)$ sia ivi sempre crescente, ed infinita per $x = +\infty$, e la $f(x)$ conservi sempre il medesimo segno.

Se il doppio rapporto

$$\frac{f'}{\varphi'} : \frac{f}{\varphi} \tag{45}$$

è positivo nei punti $(x_0 \ldots +\infty)$, e, per $x = +\infty$, ammette limite determinato, questo ci indicherà l'ordine di infinito (al senso di CAUCHY*) della f, quando per infinito principale si assuma quello della φ.*

Se quel doppio rapporto ha limiti inferiore e superiore di indeterminazione l, L, l'ordine di infinito delle f, al senso detto superiormente, sarà compreso fra l ed L.

(*) Cfr. questi *Annali*, t. VIII, serie III, pag. 262.

Dimostrazione.

Le funzioni $\frac{f'}{\varphi'}$, $\frac{f}{\varphi}$, per le ipotesi ammesse dall'enunciato, hanno lo stesso segno; le φ, φ' sono entrambe maggiori di zero, dunque le f, f' sono di egual segno in tutti i punti dell'intorno $(x_0 \dots + \infty)$.

Per la funzione $f(x)$ sono possibili quindi due soli casi: che essa sia positiva sempre crescente, che essa sia negativa sempre decrescente.

Essendo perciò soddisfatte le condizioni imposte dal Teorema 4.° dato al § III determineremo l'ordine di infinito della f, scegliendo un numero positivo h a nostro piacere, e, posto

$$a_h(x) = \frac{\varphi(x+h)}{\varphi(x)} - 1, \quad b_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)} : \frac{f(x)}{\varphi(x)} - 1,$$

calcolando il limite

$$\beta = \lim_{x=\infty} \frac{\lg\left(1 + \frac{a_h(x)\, b_h(x)}{1 + a_h(x)}\right)}{\lg(1 + a_h(x))}, \tag{46}$$

il numero $1 + \beta$ *sarà, al senso di* Cauchy, *l'ordine di infinito delle* $f(x)$ *quando l'infinito delle* $\varphi(x)$ *sia ritenuto come principale.*

Abbiamo già osservato che il numero β è **costante** *per ogni valore positivo di* h, tale sarà dunque al limite per $h = 0$.

Ma si ha

$$\lim_{h=0} a_h(x) = \lim_{h=0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{\varphi(x)},$$

e siccome la $\varphi(x)$ è finita, continua e diversa dallo zero in tutti i punti x, così, avremo, per ogni valore di x

$$\lim_{h=0} a_h(x) = 0.$$

Sarà dunque ancora, per ogni valore di x,

$$\lim_{h=0} \frac{\lg\left(1 + \frac{a_h(x)\, b_h(x)}{1 + a_h(x)}\right)}{\lg\left(1 + a_h(x)\right)} = \lim_{h=0} b_h(x) = \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} : \frac{f(x)}{\varphi(x)} - 1.$$

In fine

$$1 + \beta = \lim_{x=\infty} b_h(x) + 1 = \lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} : \frac{f(x)}{\varphi(x)}. \tag{47}$$

L'ordine delle $f(x)$, quando si ritenga come infinito principale quello della $\varphi(x)$, è dunque dato dal limite del doppio rapporto

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} : \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

c. d. d.

29. Quando sia $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f'}{\varphi'} : \frac{f}{\varphi} = 1$, si può determinare se l'ordine di infinito (nel senso più ristretto che ordinariamente si dà a questo vocabolo) della f è maggiore o minore di quello delle φ con la considerazione che: *se il doppio rapporto*

$$\frac{f'}{\varphi'} : \frac{f}{\varphi}$$

in tutti i punti di un determinato intorno dell'infinito è maggior di 1, il rapporto $\frac{f}{\varphi}$ *è sempre crescente, ed ha limite determinato maggiore di zero* (finito od infinito).

Se il doppio rapporto $\frac{f'}{\varphi'} : \frac{f}{\varphi}$ *è minore di 1, il quoziente* $\frac{f}{\varphi}$ *è decrescente ed ammette limite determinato, finito o nullo.*

Ciò è evidente osservando che, se

$$x \geqq x_0 \quad \frac{f'}{\varphi'} : \frac{f}{\varphi} > 1,$$

ne viene:

$$\frac{f'}{\varphi'} > \frac{f}{\varphi}$$

cioè

$$\frac{f'\varphi - f\varphi'}{\varphi\varphi'} > 0$$

ed anche, essendo la φ positiva e sempre crescente:

$$\frac{f'\varphi - f\varphi'}{\varphi^2} > 0$$

infine

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) > 0.$$

La funzione $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, è dunque *sempre crescente.*

Analogamente si ragiona nel caso di $\frac{f'}{\varphi'} : \frac{f}{\varphi} < 1$.

30. Si vede facilmente che *se il doppio rapporto* $\frac{f'}{\varphi'} : \frac{f}{\varphi}$ *si mantiene maggiore di* $1 + \alpha$, α *positivo, costante in tutti i punti di un determinato intorno dell'infinito, il quoziente* $\frac{f}{\varphi}$ *è infinito per* $x = +\infty$.

Sia infatti $\frac{f'}{\varphi'} : \frac{f}{\varphi} > 1 + \alpha$. Dalla osservazione precedente deduciamo che $\frac{f}{\varphi}$ è sempre crescente ed ha limite determinato λ. Non può λ essere finito, chè altrimenti lungo infinite successioni x_n, tendenti all'infinito con n, si avrebbe anche $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lambda$, cioè $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f'}{\varphi'} : \frac{f}{\varphi} = 1$ (*). Dunque è $\lambda = +\infty$.

Dal teorema dianzi dimostrato risulta inoltre che se si assume per infinito principale quello della $\varphi(x)$, l'ordine di infinito (al senso di Cauchy) della $f(x)$, non è minore di α.

31. Facendo $\varphi(x) = x$, nelle proposizioni precedenti si ha la seguente regola:

Se per infinito di primo ordine si assume quello della variabile x, si calcola l'ordine di infinito (al senso di Cauchy*) di una data funzione $f(x)$, cercando il limite del prodotto* $x \cdot \frac{d}{dx} \{ \lg f(x) \}$.

Ed infatti, se $\varphi = x$, si ha $\frac{f'}{\varphi'} : \frac{f}{\varphi} = \frac{f'}{f} \cdot x = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\lg f(x)\right)$.

(*) Cfr. questi *Annali*, t. VIII, serie III, pag. 272.

Si verifica così che l'ordine di e^x è superiore a qualunque numero reale perchè $\lim_{x=\infty} \left\{ x \cdot \frac{d}{dx} (\lg e^x) \right\} = \lim_{x=\infty} x = \infty.$

L'ordine di $\lg x$ è inferiore a qualunque numero reale perchè

$$\lim_{x=\infty} \left\{ x \cdot \frac{d}{dx} (\lg_2 x) \right\} = \lim_{x=\infty} x \cdot \frac{1}{x \lg x} = \lim_{x=\infty} \frac{1}{\lg x} = 0.$$

Quello di $f = \lg x^{\lg x}$ è pure superiore a qualunque numero reale perchè

$$\lim_{x=\infty} x \frac{d}{dx} (\lg x \,.\, \lg_2 x) = \lim_{x=\infty} x \,.\left\{ \frac{\lg_2 x}{x} + \frac{1}{2} \right\} = \lim_{x=\infty} \lg_2 x + 1 = \infty.$$

Facendo $\varphi = e^x$, cioè assumendo come infinito del primo ordine quello di e^x, si calcola l'ordine *di una funzione $f(x)$ cercando il limite della derivata logaritmica* $\frac{d}{dx} \{ \lg f(x) \}$.

Si verifica così che l'ordine di e^{x^2} è, in quelle ipotesi, superiore a qualunque numero reale.

Poniamo $f = \frac{x^x}{\Gamma(x)}$, avremo $\lg f = x \lg x - \lg \Gamma(x)$ e, per una nota formula di Stirling:

$$\lg f = x \lg x - x \lg x + \frac{1}{2} \lg x + x - \lg \sqrt{2\pi} - \frac{\theta}{12\,x}\,.$$

$$\frac{d}{dx} \lg f(x) = 1 + \frac{1}{2\,x} + \frac{\theta_1}{12\,x^2}\,.$$

La derivata logaritmica dunque tende al limite 1, pur essendo maggiore di 1.

Concludiamo che il rapporto

$$\frac{x^x}{e^x\, \Gamma(x)}$$

è sempre crescente ed ha limite determinato, (finito od infinito), maggior di zero.

Possiamo inoltre affermare che, se ε è un numero positivo arbitrario, il rapporto

$$\frac{x^x}{(e^x)^{1+\varepsilon}\,\Gamma(x)}$$

è infinitesimo.

Più brevemente, *se si assume* e^x *come infinito principale, la funzione* $\Gamma(x)$ *ha lo stesso ordine di infinito del quoziente* $\frac{x^x}{e^x}$.

§ V.

Applicazione al teorema $\lim\limits_{x=+\infty} \{F(x)\}^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x=+\infty} \frac{F(x+1)}{F(x)}$.

32. La relazione: $\lim\limits_{n=\infty} \{F(n)\}^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n=\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)}$ dimostrata dal Cauchy (*) pel caso in cui sia ammessa la esistenza del secondo membro, vale sotto determinate condizioni, anche quando si parta dalla ipotesi che esista il primo membro, e si può estendere a funzioni della variabile reale, conti-

(*) Il Cauchy (*Cours d'Analyse*, pag. 53-57) enuncia il teorema:

$$\lim_{x=\infty}\left\{F(x)\right\}^{\frac{1}{x}} = \lim_{x=\infty}\left\{\frac{F(x+1)}{F(x)}\right\};$$

ma egli dimostra soltanto che se $\lim\limits_{x=\infty} \frac{F(x+1)}{F(x)} = k$, ed è k un numero determinato, si ha $\lim\limits_{n=\infty}\left\{F(h+n)\right\}^{\frac{1}{h+n}} = k$. Ciò non è sufficiente per affermare che si ha ancora $\lim\limits_{x=\infty}\left\{F(x)\right\}^{\frac{1}{x}} = k$, e la dimostrazione di Cauchy andrebbe completata in modo analogo a quello che lo Stolz ha seguito pel teorema $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)} = \lim\limits_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ (si veda nel vol. I, pag. 176 della *Allg. arithm.*).

nua x, scrivendola sotto la forma:

$$\lim_{x=\infty} \{ F(x) \}^{\frac{1}{x}} = \lim_{x=\infty} \frac{F(x+1)}{F(x)} .$$

Nella Memoria preventiva: *Sulle determinazioni dell'ordine di infinito*, stampata l'anno 1901 negli « Atti della Società dei Naturalisti e dei Matematici Modenesi » ebbi già ad occuparmi di cotesto argomento: posso ora riprenderlo con maggior precisione, giovandomi dei risultamenti conseguiti nei paragrafi precedenti.

33. Teorema I. *Sia $F(x)$ una funzione reale della variabile reale x, ad un valore, finita, positiva in tutti i punti di un determinato intorno $(x_0 \ldots + \infty)$.*

Indichiamo col simbolo

$$\lim_{x=+\infty} \text{sup.} \left\{ \Big(F(x)\Big)^{\frac{1}{x}},\ \Big(F(x)\Big)^{-\frac{1}{x}} \right\}$$

quello dei limiti superiori di indeterminazione delle variabili

$$\{ F(x) \}^{\frac{1}{x}},\quad \{ F(x) \}^{-\frac{1}{x}},$$

che non è minore.

Indichiamo parimenti con:

$$\lim_{x=+\infty} \text{sup.} \left\{ \frac{F(x+1)}{F(x)},\quad \frac{F(x)}{F(x+1)} \right\},$$

quello dei limiti superiori di indeterminazione delle variabili

$$\frac{F(x+1)}{F(x)},\quad \frac{F(x)}{F(x+1)},$$

che non è minore.

Dico che si ha

$$\lim_{x=+\infty} \text{sup.} \left\{ \Big(F(x)\Big)^{\frac{1}{x}},\ \Big(F(x)\Big)^{-\frac{1}{x}} \right\} \leqq \lim_{x=+\infty} \text{sup.} \left\{ \frac{F(x+1)}{F(x)},\ \frac{F(x)}{F(x+1)} \right\} \tag{48}$$

e che si ha ancora:

$$\lim_{x=+\infty} \text{inf.} \{ F(x) \}^{\frac{1}{x}} \geqq \lim_{x=+\infty} \text{inf.} \frac{F(x+1)}{F(x)} . \tag{49}$$

Poniamo infatti

$$F(x) = e^{f(x)}. \tag{50}$$

Intendendo che $f(x)$ rappresenti il logaritmo aritmetico di $F(x)$.
Ne verrà

$$\frac{F(x+1)}{F(x)} = e^{f(x+1)-f(x)}, \quad \left(F(x)\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{f(x)}{x}}.$$

Dai teoremi I, II dati al § 1.°, abbiamo:

$$\limsup_{x=+\infty} \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leqq \limsup_{x=\infty} \left| f(x+1) - f(x) \right|$$

$$\liminf_{x=+\infty} \frac{f(x)}{x} \geqq \liminf_{x=+\infty} \left(f(x+1) - f(x) \right),$$

e di qui, senza alcuna difficoltà, si deduce il teorema enunciato.

34. Teorema II. *Se $F(x)$ è una funzione reale della variabile reale x, ad un valore, finita, positiva in tutti i punti di un determinato intorno $(x_0 \ldots + \infty)$, si ha*

$$\lim_{x=+\infty} \left(F(x)\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x=+\infty} \frac{F(x+1)}{F(x)}, \tag{51}$$

purchè esista il secondo membro.

La dimostrazione può ricavarsi dal teorema precedente, e si può anche direttamente desumere dal teorema 3.° del § 1.

35. Osservazione. Se

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x+1)}{F(x)} = 1, \tag{52}$$

ne viene

$$\lim_{x=\infty} \left(F(x)\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x=\infty} e^{\frac{f(x)}{x}} = 1$$

cioè

$$\lim_{x=\infty} \frac{\lg F(x)}{x} = 0. \tag{53}$$

Donde la forma

$$F(x) = e^{x \cdot \varepsilon(x)}, \lim_{x=\infty} \varepsilon(x) = 0 \tag{54}$$

per le funzioni soddisfacenti la condizione (52).

Dalla (53) si deduce che *la derivata logaritmica di una funzione soddisfacente la condizione* $\lim_{x=\infty} \frac{F(x+1)}{F(x)} = 1$, *non può essere determinata nel punto* $x = +\infty$, *senza essere infinitesima.* Proprietà ritrovata, per altra strada, in mie ricerche precedenti (*).

36. Teorema III. *Indichiamo con* $F(x)$ *la solita funzione reale della variabile reale* x, *ad un valore, finita, positiva nei punti di un determinato intorno* $(x_0 \ldots +\infty)$ *e supponiamo che in quell'intorno la espressione*

$$\{F(x)\}^{\frac{1}{x}}$$

sia monotona ed infinita (infinitesima) per $x = +\infty$.

Dico che sarà ivi infinita (infinitesima) di ordine non minore, la espressione:

$$\frac{F(x+1)}{F(x)}.$$

Sia prima

$$\lim_{x=+\infty} \{F(x)\}^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Posto $F(x) = e^{f(x)}$, come fu indicato alla formula (50) ne verrà ancora

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

La espressione $\frac{f(x)}{x}$ per le ipotesi poste è monotona, ed è infinita per $x = +\infty$, epperò (Teor. 2.° del § 3.°) sarà infinita e di ordine non minore anche la differenza $f(x+1) - f(x)$, e di qui subito si ricava che è infinito il quoziente $\frac{F(x+1)}{F(x)}$ di ordine non inferiore a quello della funzione $\{F(x)\}^{\frac{1}{x}}$.

(*) *Annali di Matematica,* loc. cit., n. 11, teor. 9, n. 15, teor. I.

Sia un secondo luogo $\lim_{x=\infty} \left| F(x) \right|^{\frac{1}{x}} = 0$. Fatte le stesse posizioni, ne dedurremo che $\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$: e da ciò, per le ipotesi poste, e pel teorema citato, avremo $\lim_{x=+\infty} \{f(x+1) - f(x)\} = -\infty$, ed infine $\lim_{x=+\infty} \frac{F(x+1)}{F(x)} = 0$.

37. Teorema IV. *La funzione $F(x)$, reale, ad un valore, positiva, monotona, della variabile reale x, nei punti dell'intorno $(x_0 \dots +\infty)$, soddisfi la condizione*

$$\lim_{x=+\infty} \left| F(x) \right|^{\frac{1}{x}} = 1,$$

la funzione $\left| F(x) \right|^{\frac{1}{x}}$ sia monotona, od almeno abbia quella tendenza al crescere od al decrescere che è richiesta dall'enunciato del teorema dato al n.° 26.

Ciò basterà per concludere che si ha:

$$\lim_{x=+\infty} \frac{F(x+1)}{F(x)} = 1.$$

La dimostrazione di questo teorema è una ovvia conseguenza delle proposizioni date al § III. Si può enunciare anche nella forma seguente:

Se nella funzione

$$F = e^{x \cdot \varepsilon(x)}$$

la quantità $x \cdot \varepsilon(x)$ è monotona, se anche la funzione $\varepsilon(x)$ è monotona (od almeno possiede i requisiti richiesti al n.° 24) ed è infinitesima per $x = +\infty$, ciò basterà per concludere:

$$\lim_{x=+\infty} \frac{F(x+1)}{F(x)} = 1.$$

38. Osservazione. *Se la $\varepsilon(x)$ è infinitesima di ordine maggiore od eguale al primo, la funzione $F(x)$ è finita per $x = +\infty$.*

In ogni caso, per le condizioni richieste dell'enunciato, *la $\varepsilon(x)$ deve conservare lo stesso segno in un determinato intorno dell'infinito: se questo è positivo ed è la $\varepsilon(x)$ infinitesima di ordine inferiore al primo, $F(x)$ è infinita per $x = +\infty$; se negativo infinitesima.*

Tenendo conto del Teorema 3.° dato al § III, concluderemo che *l'eguaglianza*

$$\lim_{x=+\infty} \{ F(x) \}^{\frac{1}{x}} = \lim_{n=+\infty} \frac{F(x+1)}{F(x)}$$

può ritenersi valida anche quando si sappia solo che esiste il primo membro, a patto che la funzione $\{ F(x) \}^{\frac{1}{x}}$ *sia monotona, e che la funzione* $F(x)$ *sia essa pure monotona, se quel limite è zero, od infinito, od eguale ad 1; che sia monotono il quoziente*

$$\frac{F(x)}{\lambda^x},$$

nel caso che sia $\lim \{ F(x) \}^{\frac{1}{x}} = \lambda$, con $\lambda \neq 0,\ 1,\ \infty$.

Modena, 16 aprile 1904.

Sopra un criterio di instabilità.

(Di Angelo Raffaello Cigala, *a Padova.)*

INTRODUZIONE.

Il sig. Poincaré, nella sua Memoria: *Sur les courbes définies par les équations différentielles* (*), studiando le curve, definite da equazioni differenziali del tipo

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} \qquad (X,\ Y \text{ polinomî interi in } x,\ y),$$

e occupandosi in particolare della loro *stabilità*, ha, per il primo, messo in evidenza con considerazioni matematicamente rigorose che *la instabilità è carattere puramente qualitativo* (che condizioni di diseguaglianza bastano ad assicurare), mentre *la stabilità è insieme carattere quantitativo* (richiede condizioni vincolanti la natura delle funzioni X, Y).

Recentemente il prof. T. Levi-Civita nel suo lavoro: *Sopra alcuni criterî di instabilità* (**), dopo aver ricordato i risultati di Lagrange (*Mécanique analytique*), Dirichlet, Poincaré (nota cit.), Liapounoff, riconduce *la dimostrazione della stabilità o instabilità* della soluzione periodica di un sistema differenziale

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ m),$$

dove le X_i sono funzioni periodiche di t, alla questione analoga relativa ad

(*) *Journal de Mathématiques,* Anni 1881, 82, 85.
(**) *Annali di Matematica,* Anno 1901, pag. 221-308.

una certa trasformazione puntuale Γ:

$$x_i^{(1)} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

biunivoca e regolare nell'intorno dell'origine 0, e per cui 0 è punto unito.

Riconosciuta l'*instabilità* di Γ nel caso generale in cui *non tutti* i suoi *moltiplicatori* sono in valore assoluto eguali ad *uno*, passa al caso in cui il modulo di *essi tutti* è eguale ad *uno* (*stabilità* nella prima approssimazione), e limitandosi ad $m = 2$, mostra che le trasformazioni da discutere si riducono all'uno o all'altro dei tipi seguenti:

$$\text{(B)} \begin{cases} x_1 = x + \cdots \\ y_1 = y + x + \cdots, \end{cases} \qquad \text{(C)} \begin{cases} x_1 = x \cos\vartheta - y \operatorname{sen}\vartheta + \cdots \\ y_1 = x \operatorname{sen}\vartheta + y \cos\vartheta + \cdots \end{cases}$$

Pel tipo (B) l'autore assegna un criterio generale di *instabilità*, per il (C) invece (che è il più importante) dà tale criterio solo introducendo la restrizione che $\widehat{\vartheta}$ sia commensurabile con 2π.

Era però interessante (come giustamente osserva il prof. Levi-Civita nell'introduzione al suo lavoro) di porre in evidenza il carattere *generalmente instabile* della Γ, anche quando tutti i moltiplicatori sono in modulo eguali all'unità; e tale studio comincia naturalmente dal caso più semplice, cioè dalla discussione della trasformazione (C) *per* $\widehat{\vartheta}$ *qualunque.*

È questo il caso che io considero nella presente Nota, nella quale arrivo a concludere *l'instabilità* del tipo (C), purchè non sia verificata una certa condizione (molto restrittiva).

Rendo sentite grazie al prof. Levi-Civita, che mi fu durante la compilazione largo di consiglio e di aiuto.

§ 1.

Premettiamo la definizione della *stabilità* e *instabilità* di una trasformazione. Una trasformazione si dice

stabile quando, assegnato un intorno comunque piccolo E dell'origine, ne esiste un secondo H, tale che, per tutti i punti P di H, ogni P_n (a cui si arriva per iterazioni positive o negative di Γ) rimane in E;

instabile, quando, per quanto piccolo si prenda H, c'è sempre qualche punto P di H, per cui un P_n almeno non è contenuto in E.

Sia ora la trasformazione essenzialmente *reale* del tipo (C):

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= r\cos\vartheta - s\,\mathrm{sen}\,\vartheta + \sum_2^\infty{}_m\, \Pi_m(r,\ s), \\ s_1 &= r\,\mathrm{sen}\,\vartheta + s\cos\vartheta + \sum_2^\infty{}_m\, X_m(r,\ s), \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I})$$

dove si è posto (*):

$$\left.\begin{aligned} 2\,\Pi_m(r,\ s) &= \sum_0^m{}_h\,(-1)^{\frac{1}{2}h(h-1)}\, r^{m-h}\, s^h \sum_0^m{}_p\, \frac{c_{mp} \pm \bar{c}_{mp}}{i^\omega}\, A_{m,p,h}\,, \\ &\qquad\qquad (m = 2,\ 3,\ 4, \ldots) \\ 2\,X_m(r,\ s) &= \sum_0^m{}_h\,(-1)^{\frac{1}{2}h(h+1)}\, r^{m-h}\, s^h \sum_0^m{}_p\, \frac{c_{mp} \mp \bar{c}_{mp}}{i^{1-\omega}}\, A_{m,p,h}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

In queste espressioni (1), dove c_{rs}, $\bar{c}_{rs}$ sono quantità complesse coniugate, si prendono i segni *superiori* ed $\omega = 0$, oppure i segni *inferiori* ed $\omega = 1$, secondochè *h è pari od impari;* i coefficienti A sono poi dati dalla

$$A_{m,p,h} = \binom{m}{p} \sum_0^{\frac{1}{2}(h-\omega)}{}_k \binom{m-p}{2k}\binom{p+1}{h-2k}\left[1 - \frac{(h-2k)(m-p+1)}{(2k+1)(p+1)}\right],$$

e sono legati dalla relazione

$$A_{m,m-p,h} \equiv (-1)^h A_{m,p,h}\,.$$

Suppongo che $\widehat{\vartheta}$ sia *incommensurabile* con 2π, giacchè il caso contrario venne esaurientemente discusso dal prof. Levi-Civita nel lavoro citato.

La sostituzione

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= r_1 + i\,s_1 \\ y_1 &= r_1 - i\,s_1, \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} x &= r + i\,s \\ y &= r - i\,s, \end{aligned}\right. \quad \text{che risoluta dà} \quad \left\{\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}(x+y) \\ s &= \frac{1}{2i}(x-y), \end{aligned}\right.$$

(*) La forma delle (I), apparentemente artificiosa, è qui adottata per arrivare ad una espressione molto semplice nelle (II), come si vede dalle (2); del resto questo non è che un modo legittimo di scrivere sviluppatamente i secondi membri delle formule (*C*) del prof. Levi-Civita.

e che in luogo delle r, s pone le variabili *coniugate* x, y, riduce la (I) alla forma

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= e^{i\vartheta} x + \sum_2^\infty {}_m P_m(x, y) \\ y_1 &= e^{-i\vartheta} y + \sum_2^\infty {}_m Q_m(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

dove si è posto

$$\left.\begin{aligned} P_m(x, y) &= \sum_0^m {}_p \binom{m}{p} c_{mp}\, x^{m-p} y^p, \\ & \qquad\qquad (m = 2, 3, 4, \ldots). \\ Q_m(x, y) &= \sum_0^m {}_p \binom{m}{p} \bar{c}_{mp}\, y^{m-p} x^p, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

In vista della natura delle due forme di grado m P_m e Q_m, potremo chiamarle *forme coniugate.*

§ 2.

Vogliamo ora far vedere come, mediante opportune sostituzioni, si possa procedere alla eliminazione di certi termini della nostra trasformazione, e come a seconda dei risultati (dipendenti dalla natura della trasformazione stessa) si possa trarre o meno un *criterio di instabilità.*

È evidente che dovremo eseguire sulla trasformazione delle sostituzioni successive di grado, a partire dal secondo, sempre crescente. Si potrebbe così fare dapprima una sostituzione di secondo grado e dai risultati trarre, se mai fosse il caso, delle conseguenze; poi eseguirne una di terzo, e così via di seguito. Noi però, per maggiore generalità, eseguiremo addirittura una sostituzione di grado n (n intero, positivo > 1), e per far ciò dovremo supporre che la trasformazione si presenti sotto la forma

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= e^{i\vartheta} x + \sum_n^\infty {}_m P_m(x, y) \\ y_1 &= e^{-i\vartheta} y + \sum_n^\infty {}_m Q_m(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{II'}$$

Facciamo dunque nella (II') la sostituzione definita dalle formule

$$\begin{cases} \xi_1 = x_1 + \varphi_n(x_1, y_1) \\ \eta_1 = y_1 + \psi_n(x_1, y_1), \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi = x + \varphi_n(x, y) \\ \eta = y + \psi_n(x, y), \end{cases}$$

la cui risoluzione, avendosi

$\begin{pmatrix} \xi & \eta \\ x & y \end{pmatrix}_0$ nell'origine e quindi in un intorno abbastanza piccolo di essa, ci dà

$$\begin{cases} x = \xi - \varphi_n(\xi, \eta) + \cdots \\ y = \eta - \psi_n(\xi, \eta) + \cdots, \end{cases}$$

essendo i termini ommessi di grado superiore ad n. Le due forme di grado n (*coniugate*) φ_n e ψ_n saranno rispettivamente della forma

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n(\xi, \eta) &= \sum_0^n {}_p \binom{n}{p} \alpha_p \, \xi^{n-p} \eta^p \\ \psi_n(\xi, \eta) &= \sum_0^n {}_p \binom{n}{p} \bar{\alpha}_p \, \eta^{n-p} \xi^p, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

e ci riserviamo di determinarle nel modo più opportuno.

Intanto, per effetto di questa sostituzione, la (II') si cambia nella

$$\begin{cases} \xi_1 = e^{i\vartheta}\xi - e^{i\vartheta}\varphi_n(\xi, \eta) + P_n(\xi, \eta) + \varphi_n(e^{i\vartheta}\xi, e^{-i\vartheta}\eta) + \cdots = e^{i\vartheta}\xi + U_n + \cdots \\ \eta_1 = e^{-i\vartheta}\eta - e^{-i\vartheta}\psi_n(\xi, \eta) + Q_n(\xi, \eta) + \psi_n(e^{i\vartheta}\xi, e^{-i\vartheta}\eta) + \cdots = e^{-i\vartheta}\eta + V_n + \cdots, \end{cases}$$

dove è ovvio il significato di U_n, V_n, ed i termini ommessi sono di grado superiore ad n.

§ 3.

Determiniamo ora la φ_n e la ψ_n in guisa che si annullino *il maggior numero* di termini possibili in U_n, V_n. Porremo le relazioni

$$\left.\begin{aligned} e^{-i\vartheta} U_n &= e^{-i\vartheta} \varphi_n(e^{i\vartheta}\xi, e^{-i\vartheta}\eta) - \varphi_n(\xi, \eta) + e^{-i\vartheta} P_n(\xi, \eta) = 0 \\ e^{i\vartheta} V_n &= e^{i\vartheta} \psi_n(e^{i\vartheta}\xi, e^{-i\vartheta}\eta) - \psi_n(\xi, \eta) + e^{i\vartheta} Q_n(\xi, \eta) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

le quali per le (2) e le (3) si possono scrivere più distesamente come segue

$$\left.\begin{aligned} \{ e^{i\vartheta(n-2p-1)} - 1 \} \alpha_p &= - e^{-i\vartheta} c_{np} \\ \{ e^{-i\vartheta(n-2p-1)} - 1 \} \bar{\alpha}_p &= - e^{i\vartheta} \bar{c}_{np} . \end{aligned} \quad (p = 0, 1, 2, \ldots, n) \right\} \tag{5}$$

Ora osserviamo che la *parità* di n influisce sulla determinazione della nostra sostituzione.

A) « Se n è *pari*, si possono mandar via *tutti* i termini di grado n ».

Di fatto in questo caso le (5) ci danno tutte le α, $\bar{\alpha}$ perchè quelle relazioni sono tutte *determinate* avendosi

$$n - 2p - 1 \gtrless 0,$$

ed essendo $\widehat{\vartheta}$ incommensurabile con 2π. Applicando dunque in questo caso alla (II') la sostituzione così determinata otteniamo la

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= e^{i\vartheta} x + \sum_{n+1}^{\infty} {}_m P_m'(x, y) \\ y_1 &= e^{-i\vartheta} y + \sum_{n+1}^{\infty} {}_m Q_m'(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{III}$$

che rientra nel caso che andiamo a considerare.

B) « Se n è *impari* ($n = 2\nu + 1$, $\nu > 0$), non si possono mandar via *tutti* i termini di grado n (a meno che la $P_n(x, y)$ e per conseguenza la $Q_n(x, y)$, non soddisfi ad una condizione speciale) ».

Invero per questo caso le (5) sono tutte determinate ad eccezione delle due corrispondenti al valore $p = \nu$, potremo perciò avere da esse le α, $\bar{\alpha}$ ad eccezione di α_ν, $\bar{\alpha}_\nu$, che prenderemo ad arbitrio.

Per effetto dunque della sostituzione così determinata la (II') si riduce alla forma tipica

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= e^{i\vartheta} x + \binom{2\nu+1}{\nu} c_{2\nu+1,\nu}\, x^{\nu+1} y^{\nu} + \boxed{2\nu+2} \\ y_1 &= e^{-i\vartheta} y + \binom{2\nu+1}{\nu} \bar{c}_{2\nu+1,\nu}\, y^{\nu+1} x^{\nu} + \boxed{2\nu+2}, \end{aligned}\right\} \tag{IV}$$

indicandosi con $\boxed{2\nu+2}$ termini di grado superiore a $2\nu+1$, donde si vede che i termini di grado $n = 2\nu + 1$ spariscono *tutti solo nel caso che si abbia* $c_{2\nu+1,\nu} = 0$.

§ 4.

Da quanto abbiamo detto finora si scorge che, mentre la eliminazione dei termini di grado *pari* è sempre possibile completamente, quella dei termini di grado *impari* va soggetta a delle restrizioni inerenti alla natura della trasformazione. Supponiamo di aver potuto, mediante trasformazioni successive, ridurre la (II) alla forma (IV); dimostriamo che

« se $c_{2\nu+1,\nu}$ è *diverso da zero*, la (I) è *instabile* ».

Dalla (IV) si ottiene

$$x_1 y_1 = x y + \binom{2\nu+1}{\nu} \left\{ e^{i\vartheta} \bar{c}_{2\nu+1,\nu} + e^{-i\vartheta} c_{2\nu+1,\nu} \right\} x^{\nu+1} y^{\nu+1} + \left|\overline{2\nu+3}\right| . \quad (6)$$

Osserviamo che la quantità

$$-I_\nu = \binom{2\nu+1}{\nu} \left\{ e^{i\vartheta} \bar{c}_{2\nu+1,\nu} + e^{-i\vartheta} c_{2\nu+1,\nu} \right\} \quad (7)$$

è *essenzialmente reale*, e se $c_{2\nu+1,\nu}$ è, come supponiamo, diverso da zero, potremo ritenere sempre

$$I_\nu > 0.$$

Se ora $\overline{OP} = \rho$, $\overline{OP_1} = \rho_1$ sono i raggi vettori che nel sistema coordinato (r, s) uniscono rispettivamente il punto P ed il punto P_1 (trasformato) all'origine, avremo

$$\rho_1^2 = r_1^2 + s_1^2 = x_1 y_1, \quad \rho^2 = r^2 + s^2 = x y,$$

e la (6) si scrive

$$\rho_1^2 = \rho^2 \left\{ 1 - I_\nu \rho^{2\nu} + \left|\overline{2\nu+1}\right| \right\},$$

cioè, estraendo la radice, e sviluppande in serie (essendo $I_\nu \rho^{2\nu} < 1$)

$$\rho_1 = \rho \left\{ 1 - \frac{1}{2} I_\nu \rho^{2\nu} + \cdots \right\}, \quad (8)$$

arrestandoci ai termini di grado 2ν.

Ora noi possiamo sempre prendere il punto P così vicino all'origine, che il modulo della somma dei termini di grado superiore a 2ν nella (8) sia

$\leq \frac{1}{4} I_\nu \rho^{2\nu}$, sicchè avremo

$$\rho_1 \leq \rho \left\{ 1 - \frac{1}{4} I_\nu \rho^{2\nu} \right\},$$

ed in generale

$$\rho_m \leq \rho_{m-1} \left\{ 1 - \frac{1}{4} I_\nu \rho_{m-1}^{2\nu} \right\}.$$

Partendo da un ρ corrispondente ad un punto P, che soddisfaccia alla condizione poc'anzi enunciata, la successione ρ_m è dunque *indefinitamente decrescente* e converge verso un limite $l \geq 0$.

E poichè questo limite soddisfa alla relazione

$$l \leq l \left\{ 1 - \frac{1}{4} I_\nu l^{2\nu} \right\},$$

esso è identicamente nullo.

Dunque, applicando ripetutamente al punto $P(\rho)$ la nostra trasformazione, ci avviciniamo indefinitamente all'origine delle coordinate. Se ora scegliamo un campo circolare di centro 0 e raggio $\rho' < \rho$ (soddisfacendo ρ alla condizione di cui sopra), esisterà certamente qualche ρ_m tale che, partendo da esso e facendo il cammino inverso, si arriverà, per quanto piccolo sia $\rho_m > 0$, ad un ρ'' maggiore di ρ'.

Così è dimostrata la *instabilità* della nostra trasformazione.

D'ora in avanti per evitare ogni confusione dei $c_{2\nu+1,\nu}$, ai quali si arriva colle successive sostituzioni, coi $c_{n,p}$ delle $P_n(x, y)$, porremo per i primi $c_{2\nu+1,\nu} = \gamma_\nu$.

§ 5.

Se $c_{2\nu+1,\nu}$ *cioè* γ_ν *è eguale a zero, allora risultano eliminati tutti i termini di grado* $2\nu + 1$; *in questo caso è sempre possibile mandar via anche quelli di grado* $2(\nu + 1)$, *ed inoltre* $2(\nu + 1)$ *di quelli di grado* $2\nu + 3$. *Così si arriva ad un certo nuovo* $\gamma_{\nu+1}$: *se esso è diverso da zero si ha* **instabilità**; *in caso contrario si procede analogamente.*

Vediamo così che la disamina della instabilità o stabilità della nostra trasformazione implica la considerazioue di un numero infinito di termini (a meno che non si arrivi ad un γ diverso da zero), e che, qualora siamo arrivati a termini di grado molto elevato, possiamo scegliere questi in guisa da assicurare la *instabilità* della trasformazione.

Il *calcolo delle* γ è piuttosto laborioso; tuttavia per renderci conto della loro formazione calcoleremo il primo γ_1.

A questo scopo riprendiamo la

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= e^{i\vartheta} x + \sum_2^{\infty} {}_m P_m(x, y) \\ y_1 &= e^{-i\vartheta} y + \sum_2^{\infty} {}_m Q_m(x, y), \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

ed applichiamovi la sostituzione

$$\left\{\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 + \varphi_2(x_1, y_1) \\ \eta_1 &= y_1 + \psi_2(x_1, y_1), \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= x + \varphi_2(x, y) \\ \eta &= y + \psi_2(x, y), \end{aligned}\right.$$

la cui risoluzione, arrestandoci ai termini di terzo grado, ci dà:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \xi - \varphi_2(\xi, \eta) + \varphi_2(\xi, \eta)\frac{\partial \varphi_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \psi_2(\xi, \eta)\frac{\partial \varphi_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} - \cdots \\ y &= \eta - \psi_2(\xi, \eta) + \psi_2(\xi, \eta)\frac{\partial \psi_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \varphi_2(\xi, \eta)\frac{\partial \psi_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} - \cdots \end{aligned}\right.$$

Avremo

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= e^{i\vartheta}\xi - (e^{i\vartheta}\varphi_2 - P_2) + \varphi_2\frac{\partial(e^{i\vartheta}\varphi_2 - P_2)}{\partial \xi} + \psi_2\frac{\partial(e^{i\vartheta}\varphi_2 - P_2)}{\partial \eta} + P_3 + \cdots \\ y_1 &= e^{-i\vartheta}\eta - (e^{-i\vartheta}\psi_2 - Q_2) + \psi_2\frac{\partial(e^{-i\vartheta}\varphi_2 - Q_2)}{\partial \eta} + \varphi_2\frac{\partial(e^{-i\vartheta}\psi_2 - Q_2)}{\partial \xi} + Q_3 + \cdots, \end{aligned}\right.$$

dove le φ_2, P_2, P_3, ψ_2 ecc., s'intendono funzioni delle variabili ξ, η, e infine, ricordando le posizioni fatte nel caso generale (§ 2), arriveremo alla trasformazione

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 = e^{i\vartheta}\xi &- U_2 + \varphi_2\frac{\partial U_2}{\partial \xi} + \psi_2\frac{\partial U_2}{\partial \eta} + \\ &+ P_2\frac{\partial \varphi_2(e^{i\vartheta}\xi, e^{-i\vartheta}\eta)}{\partial(e^{i\vartheta}\xi)} + Q_2\frac{\partial \varphi_2(e^{i\vartheta}\xi, e^{-i\vartheta}\eta)}{\partial(e^{-i\vartheta}\eta)} + P_3 + \cdots \\ \eta_1 = e^{-i\vartheta}\eta &- V_2 + \psi_2\frac{\partial V_2}{\partial \eta} + \varphi_2\frac{\partial V_2}{\partial \xi} + \\ &+ Q_2\frac{\partial \psi_2(e^{i\vartheta}\xi, e^{-i\vartheta}\eta)}{\partial(e^{-i\vartheta}\eta)} + P_2\frac{\partial \psi_2(e^{i\vartheta}\xi, e^{-i\vartheta}\eta)}{\partial(e^{i\vartheta}\xi)} + Q_3 + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad \text{(V)}$$

Se ora determiniamo φ_2 e ψ_2 (la cui forma è data dalle (3) del § 2 per $n=2$) in guisa che sia

$$U_2=0, \quad V_2=0,$$

determinazione già fatta nel caso generale mediante le formule (5) del § 3, la (V) assume la forma

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= e^{i\vartheta} x - 2P_2\left[\frac{c_{20}}{e^{i\vartheta}-1}x + \frac{e^{-2i\vartheta}c_{21}}{e^{-i\vartheta}-1}y\right] - \\ &\quad - 2Q_2\left[\frac{c_{21}}{e^{-i\vartheta}-1}x + \frac{e^{-2i\vartheta}c_{22}}{e^{-3i\vartheta}-1}y\right] + P_3 + \cdots \\ y_1 &= e^{-i\vartheta} y - 2Q_2\left[\frac{\bar{c}_{20}}{e^{-i\vartheta}-1}y + \frac{e^{2i\vartheta}\bar{c}_{21}}{e^{i\vartheta}-1}x\right] - \\ &\quad - 2P_2\left[\frac{\bar{c}_{21}}{e^{i\vartheta}-1}y + \frac{e^{2i\vartheta}\bar{c}_{22}}{e^{3i\vartheta}-1}x\right] + Q_3 + \cdots, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI)}$$

trascurando i termini di grado superiore al terzo, e scrivendo in luogo delle variabili ξ, η le variabili primitive x, y.

Se ora dalla (IV) ricordiamo che γ_ν non è altro (a meno di un coefficiente binomiale) se non che il coefficiente di $x^{\nu+1}y^\nu$ nella (II') ($n=2\nu+1$, cfr. § 2), il valore di γ_1 sarà dato dalla

$$\left.\begin{aligned} -\frac{3}{2}(\gamma_1 - c_{31}) &= \left[\frac{e^{-2i\vartheta}}{e^{-i\vartheta}-1} + \frac{2}{e^{i\vartheta}-1}\right]c_{20}\,c_{21} + \\ &\quad + \frac{2}{e^{-i\vartheta}-1}c_{21}\,\bar{c}_{21} + \frac{e^{-2i\vartheta}}{e^{-3i\vartheta}-1}c_{22}\,\bar{c}_{22}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Da questa espressione vediamo che γ_1 dipende dalla natura dei termini di secondo e terzo grado della trasformazione; in generale γ_ν dipenderà da termini di grado $2\nu+1$ e di grado inferiore, per modo che (come del resto abbiamo osservato precedentemente), giunti ad un γ_ν (con ν abbastanza grande) eguale a zero, possiamo renderlo *diverso da zero*, e quindi assicurare la *instabilità* della trasformazione, cambiando in essa termini di grado elevato a piacere.

§ 6.

Vi è un caso — disgraziatamente quello che sarebbe il più importante per le applicazioni dinamiche — in cui si può asserire *a priori* che *tutti i coefficienti* γ *sono certamente nulli*, ed in cui quindi regna assoluta incertezza quanto alla stabilità, la quale non può essere decisa dal comportamento di un numero finito di termini.

È il caso in cui il determinante *funzionale* delle r_1, s_1, rispetto alle r, s è *eguale ad uno*, quando cioè si ha

$$\Delta = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r & s \end{pmatrix} = 1.$$

Per chiarire il nostro asserto *calcoliamo il determinante* Δ.

Ricordando che

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{1}{2}(x_1 + y_1) \\ s_1 = \dfrac{1}{2i}(x_1 - y_1), \end{cases} \quad \begin{cases} x = r + is \\ y = r - is \end{cases} \text{ e quindi } \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ r & s \end{pmatrix} = 1,$$

avremo, per un noto teorema sui determinanti funzionali,

$$\Delta = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x & y \end{pmatrix},$$

cioè per le (IV) del § 3

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{i\vartheta} + \binom{2\nu+1}{\nu}\gamma_\nu x^\nu y^\nu + \cdots & \binom{2\nu+1}{\nu}\gamma_\nu x^{\nu+1} y^{\nu-1} + \cdots \\ \binom{2\nu+1}{\nu}\bar{\gamma}_\nu y^{\nu+1} x^{\nu-1} + \cdots & e^{-i\vartheta} + \binom{2\nu+1}{\nu}\bar{\gamma}_\nu y^\nu x^\nu + \cdots \end{vmatrix}$$

$$= 1 + \binom{2\nu+1}{\nu}\left[e^{i\vartheta}\bar{\gamma}_\nu + e^{-i\vartheta}\gamma_\nu\right] x^\nu y^\nu + \cdots,$$

e infine, ricordando la posizione (7) (§ 4),

$$\Delta = 1 - I_\nu x^\nu y^\nu + \cdots, \tag{10}$$

i termini ommessi essendo di grado superiore a 2ν.

Dalla forma di Δ si vede che *ogni* y (*e quindi ogni* I) *deve essere nullo;* perchè se un qualche y per es. y_ν fosse *diverso da zero* si riconoscerebbe (come nel caso generale) che la espressione del determinante funzionale sarebbe riducibile alla forma (10), essenzialmente *diversa dall'unità,* in quanto I_ν non è zero; e questo sarebbe contro l'ipotesi $\Delta = 1$.

Padova, Giugno 1904.

Sur quelques applications des sommes de Gauss.

(*Par* M. Lerch, *à Fribourg - Suisse.)*

Soit n un nombre entier impair et positif, m un entier quelconque premier avec n, on a, d'après Gauss, la relation

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} e^{\frac{2\alpha^2 m\pi i}{n}} = \left(\frac{m}{n}\right) i^{\frac{1}{4}(n-1)^2} \sqrt{n},$$

où la racine $\sqrt{n}$ est positive et le symbole $\left(\frac{m}{n}\right)$ représente le signe de Legendre, dans la façon que lui a donnée Iacobi.

Au moyen de la formule précédente nous allons évaluer l'expression

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} e^{\frac{2\alpha^2 m\mu\pi i}{n}},$$

dont nous aurons besoins pour l'application qui va suivre.

Désignons à cet effet par d_μ le plus grand commun diviseur de μ avec n, en retenant l'hypothèse que m soit premier avec n; posons ensuite

$$\mu' = \frac{\mu}{d_\mu}, \quad d'_\mu = \frac{n}{d_\mu}.$$

Alors, comme il est facile de le voir, les termes de notre somme se composent de d_μ groupes égaux entre eux, et il vient

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} e^{\frac{2\alpha^2 m\mu\pi i}{n}} = \left(\frac{m\mu'}{d'_\mu}\right) i^{\frac{1}{4}(d'_\mu-1)^2} d_\mu \sqrt{d'_\mu}. \tag{1}$$

Cela étant, désignons par $E(x)$ ou par $[x]$ le plus grand entier contenu dans x, puis notons par $E^*(x)$ la fonction qui pour x fractionnaire est égale à $E(x)$, et se réduit à $E(x) - \frac{1}{2}$ pour x entier. Cette fonction-là est donnée sans restriction par le développement bien connu

$$E^*(x) = x - \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu x \pi}{\nu \pi}. \tag{2}$$

En nous appayant sur les formules (1) et (2), nous allons évaluer l'expression

$$S = \sum_{\alpha=0}^{n-1} E^*\left(x + \frac{\alpha^2 m}{n}\right),$$

où les entiers m et n sont soumis aux conditions indiquées ci-dessus.

La formule (2) fournit immédiatement la représentation

$$S = \sum_{\alpha=0}^{n-1}\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2 m}{n}\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\pi} \sum_{\alpha=0}^{n-1} \sin 2\nu\pi\left(x + \frac{\alpha^2 m}{n}\right). \tag{a}$$

Pour évaluer la somme

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} \sin 2\nu\pi\left(x + \frac{\alpha^2 m}{n}\right) \tag{b}$$

je l'envisage comme partie immaginaire de la somme

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} e^{2\nu\pi i\left(x + \frac{\alpha^2 m}{n}\right)}$$

qui, d'après (1), est égale à

$$\left(\frac{m\nu'}{d'_\nu}\right) i^{\frac{1}{4}(d'_\nu - 1)^2} d_\nu \sqrt{d'_\nu} \cdot e^{2 d_\nu \nu' x \pi i}, \tag{b'}$$

où d_ν représente le plus grand commun diviseur de n et ν, puis

$$d'_\nu = \frac{n}{d_\nu}, \quad \nu' = \frac{\nu}{d_\nu}.$$

En employant l'écriture

$$S_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\pi} \sum_{\alpha=0}^{n-1} \sin 2\nu\pi\left(x + \frac{\alpha^2 m}{n}\right)$$

la somme S sera d'après (a)

$$S=\sum_{\alpha=0}^{n-1}\left(x+\frac{\alpha^2 m}{n}\right)-\frac{n}{2}+S_1,$$

et tout revient à évaluer S_1. D'après (b') la série S_1 est la partie immaginaire de l'expression

$$S'_1=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\pi}\left(\frac{m\nu'}{d'_\nu}\right)d_\nu\sqrt{d'_\nu}\,.\,i^{\frac{1}{4}(d'\nu-1)^2}\,e^{2d_\nu\nu' x\pi i}.$$

Les termes de cette série peuvent être décomposés en groupes tels que dans chacun d'eux la valeur d_ν est constante. Il y aura donc autant de groupes que le nombre n présente des diviseurs, et la série appartenant à un de ces diviseurs d s'obtient en faisant

$$d'_\nu=d,\quad \frac{n}{d}=d'=d_\nu;$$

l'indice ν sera alors $\mu\, d'$, et la série en question sera

$$S'(d)=\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu\pi}\left(\frac{m\mu}{d}\right)\sqrt{d}\,.\,i^{\frac{1}{4}(d-1)^2}\,e^{2d'\mu x\pi i},$$

où l'on devrait prendre soin de supprimer les termes dont l'indice μ ne soit pas premier avec d; mais ce soin est inutile, puisque les termes en question sont nuls, grâce à la présence du facteur

$$\left(\frac{m\mu}{d}\right).$$

Cela posé, observons que la partie imaginaire de la quantité

$$i^{\frac{1}{4}(d-1)^2}\,e^{2d\mu x\pi i}$$

est

$$\cos 2\,d\,\mu\,x\,\pi,\quad \text{si}\quad d\equiv -1\pmod{4}$$

et

$$\sin 2\,d\,\mu\,x\,\pi,\quad \text{si}\quad d\equiv +1\pmod{4}.$$

Nous sommes ainsi amenés à introduire les fonctions

$$\Phi(z,\,d)=\sqrt{d}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\nu}{d}\right)\frac{\cos 2\,\nu\,z\,\pi}{\nu\,\pi}\quad \text{pour}\quad d\equiv -1\pmod{4},\qquad (3^a)$$

et

$$\Phi(z,\ d) = \sqrt{d} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\nu}{d}\right) \frac{\sin 2\nu z\pi}{\nu\pi} \quad \text{pour} \quad d \equiv 1 \pmod{4}. \tag{3^b}$$

Avec cette écriture, la partie imaginaire de la quantité $S'(d)$ sera

$$\left(\frac{m}{d}\right) \Phi(d' x,\ d),$$

de sorte qu'il vient

$$S_1 = \sum_d \left(\frac{m}{d}\right) \Phi(d' x,\ d), \tag{4}$$

où la sommation s'étend à tous les diviseurs d du nombre n. Nous avons ainsi le résultat principal

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} \left\{ E^*\left(x + \frac{\alpha^2 m}{n}\right) - \left(x + \frac{\alpha^2 m}{n}\right) \right\} = -\frac{n}{2} + \sum_d \left(\frac{m}{d}\right) \Phi(d' x,\ d). \tag{4*}$$

Observons que le diviseur $d = 1$ ne fait aucune exception, en convenant de prendre suivant l'habitude

$$\left(\frac{m}{1}\right) = 1,$$

car la formule (1) subsiste pour $d' = 1$.

Les séries Φ qui figurent au second membre s'expriment aisément sous forme finie, mais je me borne à considérer des cas particuliers. Soit d'abord $x = 0$; alors les fonctions $\Phi(d' x,\ d)$ qui correspondent aux diviseurs $d \equiv 1 \pmod{4}$, s'évanouissent d'après (3^b) et il ne reste que des séries $\Phi(0,\ d)$ provenant des diviseurs $d \equiv -1 \pmod{4}$; or une telle quantité

$$\Phi(0,\ d) = \sqrt{d} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\nu}{d}\right) \frac{1}{\nu\pi}$$

s'exprime comme on sait à l'aide du nombre des classes de formes quadratiques.

Si $-\Delta$ est un discriminant négatif, posons $\tau_\Delta = 2$ pour $\Delta > 4$, puis $\tau_4 = 4$, $\tau_3 = 6$, et représentons par $Cl(-\Delta)$ le nombre des classes positives et primitives de formes quadratiques $a x^2 + b x y + c y^2$, dont le discriminant $b^2 - 4ac$ est égal à $-\Delta$; on aura, d'après Dirichlet et Kronecker,

$$\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) = \sqrt{\Delta} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{1}{\nu\pi} = \Phi(0,\ \Delta)$$

et la formule (4*) donne

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left\{E^*\left(\frac{\alpha^2 m}{n}\right)-\frac{\alpha^2 m}{n}\right\}=-\frac{n-1}{2}+\sum_d\left(\frac{m}{d}\right)\frac{2}{\tau_d}\,Cl\,(-d).$$

Ici nous avons transporté au second membre le terme $\alpha=0$ dont la valeur est

$$E^*(0)=-\frac{1}{2}\,.$$

Nous allons encore introduire la fonction habituelle $E(x)$ au lieu de $E^*(x)$; pour ce but il faudra connaître les termes où

$$\frac{\alpha^2 m}{n}$$

est un entier et nous allons supposer m positif; m étant premier avec n, il faudra que α^2 soit divisible par n; posant $n=n_0\,q^2$, où n_0 n'admet aucun diviseur carré, le quotient $\alpha^2 : n_0\,q^2$ ne sera entier que pour

$$\alpha=n_0\,q\,,\quad 2\,n_0\,q\,,\quad 3\,n_0\,q\,,\ldots\quad (q-1)\,n_0\,q\,;$$

ces termes étant au nombre de $q-1$, il s'ensuit

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} E^*\left(\frac{\alpha^2 m}{n}\right)=\sum_{\alpha=1}^{n-1} E\left(\frac{\alpha^2 m}{n}\right)-\frac{q-1}{2}\,,$$

et nous aurons en changeant les signes

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left\{\frac{\alpha^2 m}{n}-E\left(\frac{\alpha^2 m}{n}\right)\right\}=\frac{n-q}{2}-\sum_d\left(\frac{m}{d}\right)\frac{2}{\tau_d}\,Cl\,(-d), \tag{5}$$

où d parcourt les diviseur de n qui ont la forme $4\,x+3$, q^2 signifie le plus grand diviseur carré du nombre impair n, puis m et n étant des nombres positifs premiers entre eux.

On peut employer la formule élémentaire

$$\sum_{1}^{n-1}\alpha^2=\frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

pour écrire au lieu de (5)

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} E\left(\frac{\alpha^2 m}{n}\right)=m\left(\frac{n^2}{3}-\frac{n}{2}+\frac{1}{6}\right)-\frac{n-q}{2}+\sum_d\left(\frac{m}{d}\right)\frac{2}{\tau_d}\,Cl\,(-d). \tag{5*}$$

Si en particulier les facteurs premiers de n sont tous de la forme $4x+1$, on aura comme second membre l'expression élémentaire

$$m\left(\frac{n^2}{3}-\frac{n}{2}+\frac{1}{6}\right)-\frac{n-g}{2}.$$

Faisons ensuite $x=\frac{1}{2}$; les séries (3^b) seront identiquement nulles et il ne reste que des séries

$$\Phi\left(\frac{d'}{2},\, d\right)=\sqrt{d}\sum_1^\infty \frac{\cos d'\nu\pi}{\nu\pi}\cdot\left(\frac{\nu}{d}\right)=\sqrt{d}\sum_1^\infty\left(\frac{\nu}{d}\right)\frac{(-1)^\nu}{\nu\pi}$$

provenant des diviseurs d de la forme $4x+3$.

L'identité

$$\sum_1^\infty(-1)^{\nu-1}c_\nu=\sum_1^\infty c_\nu-2\sum_1^\infty c_{2\nu}$$

fait voir que l'on a

$$\sqrt{d}\sum\left(\frac{\nu}{d}\right)\frac{(-1)^\nu}{\nu\pi}=\sqrt{d}\sum_1^\infty\left(\frac{2\nu}{d}\right)\frac{1}{\nu\pi}-\sqrt{d}\sum_1^\infty\left(\frac{\nu}{d}\right)\frac{1}{\nu\pi}$$

ou bien

$$\Phi\left(\frac{d'}{2},\, d\right)=\left[\left(\frac{2}{d}\right)-1\right]\frac{2}{\tau_d}\,Cl(-d).$$

Comme la quantité

$$\frac{1}{2}+\frac{\alpha^2 m}{n}$$

ne devient jamais un entier, on peut remplacer $E^*\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha^2 m}{n}\right)$ par sa valeur $E\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha^2 m}{n}\right)$ et il vient

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left\{\frac{\alpha^2 m}{n}-E\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha^2 m}{n}\right)\right\}=\sum_d\left(\frac{m}{d}\right)\left(1-\left(\frac{2}{d}\right)\right)\frac{2}{\tau_d}\,Cl(-d), \tag{6}$$

d parcourant les diviseurs de la forme $4x+3$ du nombre n.

On trouverait de même

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left\{\frac{\alpha^2 m}{n}-E\left(\frac{\alpha^2 m}{n}-\frac{1}{2}\right)\right\}=n-1+\sum_d\left(\frac{m}{d}\right)\left(1-\left(\frac{2}{d}\right)\right)\frac{2}{\tau_d}\,Cl(-d).$$

La relation (6) s'écrit plus simplement en faisant usage de la notation usuelle

$$R(z) = z - E\left(z + \frac{1}{2}\right),$$

où $R(z)$ signifie le plus petit reste absolu de la quantité z. On a ainsi

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} R\left(\frac{\alpha^2 m}{n}\right) = \sum_d \left(\frac{m}{d}\right)\left(1 - \left(\frac{2}{d}\right)\right)\frac{2}{\tau_d}\, Cl(-d). \tag{6*}$$

Posons enfin, dans la formule (4), $x = \frac{1}{4}\cdot$ On a pour $d \equiv -1 \pmod{4}$

$$\Phi\left(\frac{d'}{4},\, d\right) = \sqrt{d}\, \sum \left(\frac{\nu}{d}\right) \frac{\cos\frac{\nu\, d'\, x}{2}}{\nu\, \pi};$$

les termes provenant de ν impair sont nuls et il reste

$$\Phi\left(\frac{d'}{4},\, d\right) = \sqrt{d}\, \sum \left(\frac{2\,\nu}{d}\right) \frac{(-1)^\nu}{2\,\nu\,\pi},$$

quantité qui comme on vient de voir n'est autre chose que

$$\left(1 - \left(\frac{2}{d}\right)\right)\frac{1}{\tau_d}\, Cl(-d).$$

Pour $d \equiv +1 \pmod{4}$ la fonction $\Phi(d'\, x)$ sera

$$\Phi\left(\frac{d'}{4},\, d\right) = \sqrt{d}\, \sum_1^\infty \left(\frac{\nu}{d}\right) \frac{\sin\frac{\nu\, d'\, \pi}{2}}{\nu\, \pi},$$

où l'on peut se borner aux ν impairs. Or on a

$$\sin\frac{\lambda\,\pi}{2} = \left(\frac{-4}{\lambda}\right),$$

et puisque ici

$$\left(\frac{\nu}{d}\right) = \left(\frac{d}{\nu}\right),$$

il vient

$$\Phi\left(\frac{d'}{4},\, d\right) = \sqrt{d}\, \sum_1^\infty \left(\frac{-4\,d}{\nu}\right)\left(\frac{-4}{d'}\right)\frac{1}{\nu\,\pi}$$

d'où

$$\Phi\left(\frac{d'}{4}, d\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-4}{d'}\right) \cdot \frac{2}{\tau_{4d}} Cl(-4d).$$

On a ensuite

$$\left(\frac{-4}{d'}\right) = \left(\frac{-4}{dd'}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}},$$

et en somme, nous aurons

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{4} + \frac{\alpha^2 m}{n} - E\left(\frac{1}{4} + \frac{\alpha^2 m}{n}\right)\right\} \\ &= \frac{2n-1}{4} - (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{d_1}\left(\frac{m}{d_1}\right)\frac{1}{\tau_{4d_1}} Cl(-4d_1) \\ &\quad - \sum_{d_3}\left(\frac{m}{d_3}\right)\frac{1-\left(\frac{2}{d_3}\right)}{d_3} Cl(-d_3),\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

où d_1 parcourt les diviseurs de la forme $4x+1$ de n et d_3 les diviseurs de la forme $4x+3$ du même nombre.

On trouverait des résultats également simples en prenant $x = -\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$. Mais je me borne aux cas établis que j'avais présentés dans un mémoire publié par l'Académie de Prague, en 1898 (*), résultats qui étaient auparavant connus sous certaines restrictions.

Revenons sur la formule (5) dans le cas de $m = 1$; nous aurons

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left\{\alpha^2 - nE\left(\frac{\alpha^2}{n}\right)\right\} = \frac{n(n-q)}{2} - n\sum_d \frac{2}{\tau d} Cl(-d). \tag{5°}$$

Le premier membre est la somme des residus quadratiques du module n, comptés chacun autant de fois qu'il se présente comme reste dans la suite

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2, \ldots (n-1)^2.$$

On voit que cette somme est divisible par n sauf lorsque n est divisible par trois; dans ce cas exceptionnel, le second membre contient le terme pro-

(*) *Rozpravy české Akademie*, VIIe année, n.° 7.

venant de $d=3$:

$$-\frac{n}{3};$$

et la somme en question sera congrue à $-\frac{n}{3}$ suivant le module n.

Il peut avoir quelque intérêt de connaître la somme des résidus quadratiques du module n, premiers avec le module et différents entre eux. Je dis que cette somme que je désigne par A est donnée par la formule

$$2^{\varpi} A=\sum_{\nu=1}^{n}\left(1+\left(\frac{\nu}{p_1}\right)\right)\left(1+\left(\frac{\nu}{p_2}\right)\right)\cdots\left(1+\left(\frac{\nu}{p_\varpi}\right)\right)\left(\frac{n^2}{\nu}\right)\nu,$$

où $p_1, p_2, \ldots p_\varpi$ sont des différents facteurs premiers du nombre impair n. En effet, le produit

$$\left(1+\left(\frac{\nu}{p_1}\right)\right)\cdots\left(1+\left(\frac{\nu}{p_\varpi}\right)\right)\left(\frac{n^2}{\nu}\right)$$

est nul, si ν n'est pas premier avec n, ou si n n'est pas un résidu de n; car dans ce cas un au moins des signes $\left(\frac{\nu}{p}\right)$ est égal à -1. Si au contraire ν est un résidu quadratique premier avec le module n, le produit en question est égal à

$$2^{\varpi}.$$

Cela étant, représentons par d tous les diviseurs du nombre n qui ne contiennent que des facteurs premiers différents, et le diviseur $d=1$; l'expression précédente s'écrira

$$2^{\varpi} A=\sum_{d}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\nu}{d}\right)\left(\frac{n^2}{\nu}\right)\nu,$$

de sorte qu'en posant

$$B_d=\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\nu}{d}\right)\left(\frac{n^2}{\nu}\right)\nu,$$

on aura

$$2^{\varpi} A=\sum_{d} B_d.$$

Pour calculer B_d, posons $n=d\,d'$, on aura

$$\left(\frac{\nu}{d}\right)\left(\frac{n^2}{\nu}\right)=\left(\frac{\nu}{d}\right)\left(\frac{d'^2}{\nu}\right)$$

et par conséquent

$$B_d = \sum_{n}^{\nu=1} \left(\frac{\nu}{d}\right)\left(\frac{d'^2}{\nu}\right)\nu.$$

Cela posé, représentons par $\mu(s)$ les nombres dits de MOEBIUS, c'est-à-dire posons $\mu(1) = 1$, $\mu(s) = 0$ si s admet un diviseur carré supérieur à un, mais $\mu(s) = (-1)^r$, si s est le produit de r nombres premiers différents. Alors, la dernière forme de la quantité B_d se transforme en lui appliquant l'identité importante bien connue

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{Q^2}{\nu}\right) f(\nu) = \sum_{\delta} \mu(\delta) \sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu\delta),$$

où δ parcourt les diviseurs de Q.

Dans notre cas

$$Q = d', \quad f(\nu) = \left(\frac{\nu}{d}\right)\nu \text{ pour } \nu \leqq n, \quad f(\nu) = 0 \text{ pour } \nu > n,$$

et nous aurons

$$B_d = \sum_{\delta_1} \mu(\delta_1)\left(\frac{\delta_1}{d}\right)\delta_1 \sum_{\nu=1}^{d\delta_2} \left(\frac{\nu}{d}\right)\nu,$$

où δ_1 parcourt les diviseurs de d', puis $\delta_1\delta_2 = d'$.

Il s'agit encore de la somme

$$C(\delta_2) = \sum_{\nu=1}^{d\delta_2} \left(\frac{\nu}{d}\right)\nu.$$

Pour l'obtenir, faisons

$$\nu = \rho + \sigma d, \quad (\rho = 1, 2, .. d; \ \sigma = 0, 1, \ldots \delta_2 - 1),$$

il s'ensuit

$$C(\delta_2) = \sum_{\rho=1}^{d} \left(\frac{\rho}{d}\right) \sum_{\sigma=0}^{\delta_2 - 1} (\rho + \sigma d),$$

ce qui en vertu de la relation

$$\sum_{\rho=1}^{d} \left(\frac{\rho}{d}\right) = 0$$

prend la forme

$$C(\delta_2) = \delta_2 \sum_{\rho=1}^{d-1} \left(\frac{\rho}{d}\right)\rho.$$

Si d a la forme $4k+1$, d sera un discriminant positif fondamental et la somme

$$\sum_{\rho=1}^{d-1}\left(\frac{\rho}{d}\right)\rho=\sum_{\rho=1}^{d-1}\left(\frac{d}{\rho}\right)\rho$$

est nulle; mais pour $d=4k+3$ c'est $-d$ qui est un discriminant et nous aurons

$$\sum_{\rho=1}^{d-1}\left(\frac{\rho}{d}\right)\rho=\sum_{\rho=1}^{d-1}\left(\frac{-d}{\rho}\right)\rho$$

ce qui en vertu d'une formule connue, due à Dirichlet et à Kronecker, a pour valeur

$$-\frac{2}{\tau_d}\, d\, Cl(-d).$$

En résumé,

$$C(\delta_2)=\begin{cases} -\dfrac{2}{\tau_d}\, d\, \delta_2\, Cl(-d), & d\equiv -1 \pmod{4} \\ 0 & d\equiv +1 \pmod{4}. \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans l'expression récemment obtenue de B_d, il vient

$$B_d=-\frac{2}{\tau_d}\, Cl(-d)\,.\, n\sum_{\delta_1}\mu(\delta_1)\left(\frac{\delta_1}{d}\right),$$

si $d\equiv -1 \pmod{4}$ et $B_d=0$ dans le cas contraire.

Toutefois l'hypothèse de $d=1$ échappe aux conclusions précédentes et la recherche directe donne

$$B_1=\sum_{\delta_1}\mu(\delta_1)\,\delta_1\sum_1^{\delta_2}\nu,\quad (\delta_1\,\delta_2=n),$$

ou bien

$$B_1=\sum\mu(\delta_1)\,\delta_1\,\frac{\delta_2+\delta_2^2}{2}=\frac{1}{2}\sum\mu(\delta_1)\, n$$
$$+\frac{1}{2}\sum\mu(\delta_1)\, n\,\delta_2$$

d'où en faisant usage du théorème

$$\sum\mu(\delta_1)=0,$$

puis observant que

$$\sum\mu(\delta_1)\,\delta_2=\varphi(n),$$

il vient

$$B_1 = \frac{1}{2} n \varphi(n).$$

Nous avons ainsi

$$2^{\varpi} A = \frac{1}{2} n \varphi(n) - n \sum_d \frac{2}{\tau_d} Cl(-d) M_d(n), \tag{8}$$

où l'on fait pour abréger

$$M_d(n) = \sum_{\delta_1} \mu(\delta_1) \left(\frac{\delta_1}{d}\right),$$

et d parcourt des diviseurs de n composés de facteurs premiers différents et satisfaisant à la condition

$$d \equiv -1 \pmod{4}.$$

Autrement dit, le symbole d signifie tout diviseur de n tel que $-d$ soit un discriminant fondamental

La somme $M_d(n)$ est évidemment égale au produit

$$\Pi\left(1 - \left(\frac{p'}{d}\right)\right),$$

où p' parcourt les differents facteurs premiers du nombre $d' = \frac{n}{d}$. On peut y ajouter les parenthèses

$$1 - \left(\frac{p''}{d}\right) = 1$$

où p'' sont des facteurs premiers du nombre d, car alors

$$\left(\frac{p''}{d}\right) = 0,$$

et l'on aura

$$M_d(n) = \left(1 - \left(\frac{p_1}{d}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{p_2}{d}\right)\right) \cdots \left(1 - \left(\frac{p_\omega}{d}\right)\right). \tag{9}$$

La formule (8) avec la valeur (9) du facteur $M_d(n)$ résout le problème.

Si n ne contient pas 3 comme facteur, on aura partout $\tau_d = 2$ et la formule (8) fait voir que A est divisible par n. Mais si n est divisible par 3, le second membre contient un terme provenant de $d=3$ et qui est

$$-n \cdot \frac{1}{3} M_3(n) = -\frac{n}{3} \prod_{\nu=1}^{\varpi} \left(1 - \left(\frac{p_\nu}{3}\right)\right).$$

Si un au moins des facteurs p_ν est de la forme $3k+1$, le terme en question sera nul et le nombre A sera encore divisible par n. Mais si tous les autres facteurs de n sont de la forme $3k+2$, le terme étudié sera

$$-\frac{n}{3} \cdot 2^{\varpi-1},$$

et nous aurons

$$2A \equiv -\frac{n}{3} \pmod{n}.$$

Le second membre pouvant s'écrire

$$n - \frac{n}{3} = \frac{2}{3} n,$$

on aura

$$A \equiv \frac{n}{3} \pmod{n}.$$

On a ainsi le théorème :

La somme A des résidus quadratiques d'un nombre impair n, supposés différents entre eux et compris entre zéro et n, et premiers avec le module n, satisfait à la congruence

$$A \equiv \frac{n}{3} \pmod{n},$$

si n est divisible par trois, tous les autres facteurs premiers de n ayant la forme $3k+2$. Dans tous les autres cas on a

$$A \equiv 0 \pmod{n}.$$

Ce résultat répond à la question 2238 (année 1901) de l'*Intermédiaire des mathématiciens*, posée par M. Duràn Loriga.

Ricerche sulle superficie isoterme e sulla deformazione delle quadriche.

(Di Luigi Bianchi, *a Pisa.)*

PREFAZIONE.

La presente Memoria, come le altre da me pubblicate dal 1899 in poi in questi *Annali* (Serie 3.ª, Tomi 3, 4, 5, 6 e 9), si aggira intorno al soggetto principale della *deformazione delle quadriche.* Da alcuni anni, per opera di varii geometri, questa teoria si è andata rapidamente svolgendo e può ormai intravedersi non lontano il giorno in cui essa raggiungerà il grado di perfezione già conseguito nella teoria delle superficie di curvatura costante, in particolare in quella delle superficie applicabili sulla sfera.

Le ricerche che andrò esponendo nel presente lavoro, e di cui un breve sunto è comparso nei *Rendiconti dei Lincei* (24 aprile 1904), portano un nuovo contributo al fine indicato. Esse muovono dagli importanti risultati per la deformazione delle quadriche generali ottenuti dal Darboux (*), il quale collegò il problema della deformazione delle superficie di 2.° grado alla ricerca di particolari classi di superficie isoterme (a linee di curvatura isoterme). In pari tempo egli fu condotto a considerare le più generali superficie isoterme ed a stabilire per queste superficie un metodo notevole di trasformazione. Il problema fondamentale da cui parte il Darboux, problema la cui importanza fu già presentita dal Ribaucour è il seguente:

Trovare gli inviluppi di un sistema ∞^2 di sfere tali che, riguardando sulle due falde dell'inviluppo come punti corrispondenti i due punti di con-

(*) *Sur la déformation des surfaces du second degré et sur les surfaces isothermiques.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Tomo 128, sedute dal 17 marzo al 24 aprile 1899. Cf. anche: *Annales de l'École Normale supérieure*, IIIème Série, Tomo XVI (1899).

tatto con una medesima sfera, la rappresentazione dell'una falda sull'altra sia conforme.

Lasciando da parte il caso ovvio di sfere ortogonali ad una sfera fissa, Darboux trova che sulle due falde dell'inviluppo debbono corrispondersi le linee di curvatura e queste debbono costituire, sull'una e sull'altra falda, un sistema isotermo (*). Ne segue che i circoli normali nelle coppie di punti corrispondenti alle due falde costituiscono un sistema *normale* di circoli (un sistema ciclico). Prendasi ora una superficie isoterma qualunque S. Esistono, come ha trovato Darboux, ∞^4 congruenze di sfere (sistemi ∞^2 di sfere) tangenti ad S e tali che la seconda falda S_1 dell'inviluppo corrisponda ad S in rappresentazione conforme. La nuova superficie S_1 è quindi alla sua volta una superficie isoterma; la diremo derivata dalla S per mezzo di una trasformazione D di Darboux. Le trasformazioni di Darboux delle superficie isoterme vengono così a collocarsi accanto alla ben nota trasformazione (involutoria) di Christoffel che conduce, come si sa, da una superficie isoterma S ad una nuova $\overline{S}$ determinata, a meno di una traslazione ed omotetia dello spazio, dalla condizione di corrispondere alla S in una rappresentazione conforme, per parallelismo delle normali nei punti corrispondenti. Ma mentre, nota la S, la sua trasformata $\overline{S}$ di Christoffel si ottiene con tre quadrature (Vol. II, pag. 27) (**), per poter applicare la trasformazione di Darboux occorre invece sapere integrare un sistema lineare omogeneo di equazioni ai differenziali totali con cinque funzioni incognite, il sistema (I) § 1 della presente Memoria. Riguardo alla integrazione del detto sistema questo soltanto si sapeva fin qui (***): che una volta integrato per la S risultava altresì integrato per tutte quelle infinite superficie isoterme che provengono da S combinando le inversioni per raggi vettori reciproci colla trasformazione di Christoffel. Per le inversioni la cosa è geometricamente evidente, poichè un inviluppo *conforme* (****) di sfere è cangiato da ogni inversione in un altro

(*) Esclusa quest'ultima proprietà, le altre della conservazione degli angoli e delle linee di curvatura sulle due falde valgono anche nel caso di sfere ortogonali ad una sfera fissa per le note proprietà dell'inversione.

(**) Le citazioni come questa si riferiscono alla seconda edizione (in due volumi) delle mie: *Lezioni di geometria differenziale.* (Pisa-Spörri, 1902-1903.)

(***) Darboux, l. c. *Sur les surfaces isothermiques*, § II.

(****) Diciamo per brevità *conformi* quegli inviluppi di sfere le cui due falde si corrispondono in rappresentazione conforme.

inviluppo conforme; e quanto alle trasformazioni di Christoffel la proprietà risulta dall'essere questa permutabile colle trasformazioni di Darboux, come dimostreremo al § 3.

Ad un nuovo passo nella teoria di queste trasformazioni sono stato condotto dal confronto delle loro proprietà con quelle ben note delle trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche, la cui teoria venne essenzialmente perfezionata coll'uso di quella proposizione che ho denominato il *teorema di permutabilità* (Vol. II, pag. 411 e segg.). Ho trovato infatti che anche per le generali trasformazioni di Darboux delle superficie isoterme sussiste un teorema di permutabilità e cioè: *se due superficie isoterme S_1, S_2 sono contigue, per trasformazioni di* Darboux, *ad una medesima superficie S, esse sono anche contigue ad una quarta superficie isoterma S' perfettamente determinata e costruibile in termini finiti dalle tre S, S_1, S_2 supposte note* (*). Le conseguenze che possono trarsi dal teorema di permutabilità, per l'applicazione successiva delle trasformazioni di Darboux, sono le stesse come nella teoria delle trasformazioni delle superficie pseudosferiche. Ne segue infatti che basta integrare completamente, una prima volta, il sistema differenziale (I) di Darboux per la superficie iniziale S, e risulteranno senz'altro integrati insieme i sistemi analoghi per le nuove superficie trasformate di S, e così via. Per tal modo l'applicazione successiva ed illimitata delle trasformazioni si compie, dopo il primo passo, senza calcoli d'integrazione. Il risultato è tanto più notevole nel caso attuale ove l'integrazione del sistema (I) delle equazioni di trasformazione non appare riducibile, come nel caso delle trasformazioni di Bäcklund, ad equazioni di Riccati o a quadrature.

Dopo avere così portato, col sussidio del teorema di permutabilità, la teoria delle trasformazioni di Darboux delle superficie isoterme al grado di sviluppo della teoria delle trasformazioni delle superficie di curvatura costante, era ben naturale di ricercare quali vantaggi se ne potevano trarre per quelle particolari superficie isoterme che si collegano, secondo Darboux, alla deformazione delle quadriche, e quindi pel problema stesso della deformazione delle superficie di 2.° grado Le superficie isoterme in questione, che per brevità chiamiamo superficie isoterme *speciali*, sono caratterizzate da una certa relazione, la (A) del § 12, che lega i raggi principali di curvatura della superficie e le loro derivate. In questa relazione figurano quattro costanti A, B, C, D dai cui valori unicamente dipende la quadrica *associata* alla superficie;

(*) Per l'enunciato preciso del teorema di permutabilità veggasi il § 5 della Memoria, diremo allora che la superficie isoterma speciale è della classe (A, B, C, D). Si trattava ora di vedere se le trasformazioni di Darboux potevano applicarsi per dedurre da una superficie isoterma speciale della classe (A, B, C, D) altre superficie isoterme speciali e della medesima classe. Un caso in cui la risposta è affermativa era ben noto da recenti ricerche, quello delle ordinarie superficie minime o a curvatura media costante, che sono appunto superficie isoterme speciali. Le trasformazioni che nascono per queste superficie dall'inversione dei teoremi di Guichard offrono precisamente l'esempio domandato. Noi arriviamo ora a risultati affatto simili per tutte le superficie isoterme speciali stabilendo in primo luogo la proposizione seguente: *Fra le* ∞^4 *trasformate di* Darboux *di una superficie isoterma speciale della classe* (A, B, C, D) *ne esistono* ∞^3 *che sono ancora isoterme speciali e della medesima classe.* Per separare dalla quadrupla infinità delle trasformate di Darboux la tripla infinità di superficie isoterme speciali basta legare, con una conveniente relazione lineare ed omogenea, i valori iniziali delle cinque funzioni trasformatrici, soluzioni del sistema differenziale (I).

In secondo luogo restava da utilizzare il teorema di permutabilità per le attuali trasformazioni; ciò si ottiene mediante il teorema: *Se ad una superficie isoterma speciale S sono contigue per trasformazioni di* Darboux *due altre superficie isoterme speciali S_1, S_2 della classe stessa di S, anche la quarta superficie S' del teorema di permutabilità è isoterma speciale della medesima classe.*

Passando dalle superficie isoterme speciali alle superficie applicabili sulla quadrica associata, otteniamo così una teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche generali. Precisamente da una superficie applicabile sopra una quadrica le dette trasformazioni fanno nascere ∞^3 nuove superficie applicabili sulla medesima quadrica e basta, per il teorema di permutabilità, la conoscenza di queste trasformate *contigue* per applicare a queste nuovamente le trasformazioni e costruire così sempre nuove deformate della quadrica fondamentale, dipendenti da quante si vogliano costanti arbitrarie, senza che sia più necessario alcun calcolo d'integrazione.

Se lo scopo di cui abbiamo parlato da principio appare così in massima parte raggiunto, conviene bene avvertire che, per quanto riguarda la deformazione delle quadriche, questo ha luogo soltanto dal punto generale di vista analitico ove si prescinda dalla distinzione fra il reale e l'immaginario. Ulteriori e più accurate ricerche si dimostrano ancora necessarie per separare il reale dall'immaginario (come mi sembra essenziale in questo genere di problemi) ed edificare così una teoria completa delle deformazioni reali delle quadriche reali. Per il caso dei paraboloidi, e limitatamente alla ricerca delle *equazioni intrinseche* delle loro deformate, ho già risoluto il problema nel Tomo IX di questi *Annali* (1904). Le ricerche ulteriori che mi propongo di compiere in questo indirizzo troveranno ormai un sicuro fondamento nel dimostrato teorema di permutabilità.

§ 1.

Il sistema differenziale di Darboux per le trasformazioni delle superficie isoterme.

Abbiasi una superficie isoterma S, che riferiamo alle sue linee di curvatura (u, v) introducendo parametri isometrici u, v, sicchè l'elemento lineare delle superficie assume la forma

$$d s^2 = e^{2\theta} (d u^2 + d v^2). \tag{1}$$

Adoperando le consuete notazioni, indichiamo con x, y, z le coordinate di un punto mobile sopra S, e rispettivamente con

X_1, Y_1, Z_1 i coseni di direzione della tangente alla linea (v)

X_2, Y_2, Z_2 » » » alla linea (u)

X_3, Y_3, Z_3 » » della normale alla superficie.

Se $r_1\, r_2$ denotano inoltre i raggi principali di curvatura, abbiamo le formole fondamentali:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = e^\theta X_1, \quad \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{\partial \theta}{\partial v} X_2 - \frac{e^\theta}{r_2} X_3, \\
&\qquad \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} X_1, \quad \frac{\partial X_3}{\partial u} = \frac{e^\theta}{r_2} X_1, \\
&\frac{\partial x}{\partial v} = e^\theta X_2, \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} X_2, \\
&\qquad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial u} X_1 - \frac{e^\theta}{r_1} X_3, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = \frac{e^\theta}{r_1} X_2,
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

colle analoghe per y, z; Y, Z, a cui dobbiamo ricorrere nei calcoli seguenti.

Dalla teoria dei sistemi ciclici (Vol. II, Cap. 18) sappiamo che la determinazione dei sistemi ∞^2 normali di circoli ortogonali alla superficie S dipende dalle formole seguenti (Vol. II, § 273). Prendasi una coppia di funzioni φ, w delle variabili u, v che soddisfino alle equazioni

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{1}{r_2}\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \frac{\partial w}{\partial v}=\frac{1}{r_2}\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \tag{3}$$

onde, data φ come soluzione dell'equazione di Cayley

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \tag{3*}$$

ne risulta dalle (3) determinata w con una quadratura che introduce in w una costante additiva. Questa coppia (φ, w) individua un sistema ciclico ortogonale alla S; e le altre superficie S_1 normale ai detti circoli sono date dalle formole:

$$x_1=x-\frac{2\varphi e^{-\theta}}{\Delta_1\varphi+w^2}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial u}X_1+\frac{\partial \varphi}{\partial v}X_2+w\,X_3\right] \tag{4}$$

e dalle analoghe per y_1, z_1, indicando x_1, y_1, z_1 le coordinate del punto ove S_1 incontra (normalmente) il circolo (u, v) del sistema.

Nel caso dei sistemi ciclici corrispondenti ad una trasformazione di Darboux la condizione che S risulti rappresentata conformemente sopra S_1 impone particolari vincoli alle funzioni φ, w. Senza ripetere qui i calcoli eseguiti dal Darboux per trovare queste particolari condizioni, partiremo senz'altro dai suoi risultati, che ci limiteremo a verificare. Conviene pel nostro scopo, particolarmente per rendere lineari le equazioni di trasformazione, introdurre oltre φ, w ancora due funzioni λ, μ definite da $\lambda=e^{-\theta}\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\mu=e^{-\theta}\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ ed infine una quinta funzione incognita, che indicheremo con σ. Queste cinque funzioni λ, μ, w, φ, σ, che si diranno le *funzioni trasformatrici*, dovranno soddisfare al seguente sistema simultaneo di equazioni lineari omogenee alle derivate parziali del 1.° ordine, contenente una costante arbitraria *m diversa* *da zero:*

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\lambda}{\partial u}=m\,e^{\theta}\sigma+m\,e^{-\theta}\varphi-\frac{e^{\theta}}{r_2}w-\frac{\partial\theta}{\partial v}\mu,\quad \frac{\partial\lambda}{\partial v}=\frac{\partial\theta}{\partial u}\mu,\\
&\frac{\partial\mu}{\partial u}=\frac{\partial\theta}{\partial v}\lambda,\quad \frac{\partial\mu}{\partial v}=m\,e^{\theta}\sigma-m\,e^{-\theta}\varphi-\frac{e^{\theta}}{r_1}w-\frac{\partial\theta}{\partial u}\lambda,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial u}=e^{\theta}\lambda,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial v}=e^{\theta}\mu,\quad \frac{\partial w}{\partial u}=\frac{e^{\theta}}{r_2}\lambda,\quad \frac{\partial w}{\partial v}=\frac{e^{\theta}}{r_1}\mu,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial\sigma}{\partial u}=e^{-\theta}\lambda,\quad \frac{\partial\sigma}{\partial v}=-e^{-\theta}\mu.
\end{aligned}\right\}\quad\text{(I)}$$

Questo si dirà il *sistema differenziale fondamentale* (di DARBOUX). Tenendo conto delle equazioni di CODAZZI, che qui assumono la forma

$$\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r_1}\right)=0,\quad \left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial\theta}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_2}\right)=0,\qquad(5)$$

e della equazione di GAUSS per la curvatura, si verifica subito che le condizioni d'integrabilità per il sistema (I) sono identicamente soddisfatte, onde il sistema (I) è illimitatamente integrabile. Possono dunque darsi ad arbitrio, per un sistema iniziale (u_0, v_0) di valori delle variabili, i valori iniziali delle cinque funzioni trasformatrici e ne sarà individuato un sistema integrale. Si vede ora che, a causa delle (I) stesse, l'espressione

$$\lambda^2+\mu^2+w^2-2\,m\,\varphi\,\sigma$$

ha nulle le derivate ed è per ciò una costante; il sistema (I) possiede quindi l'integrale quadratico

$$\lambda^2+\mu^2+w^2-2\,m\,\varphi\,\sigma=\text{cost.}\qquad(6)$$

Per ottenere una trasformazione di DARBOUX occorre e basta scegliere i valori iniziali di λ, μ, w, φ, σ in guisa che la costante del secondo membro nella (6) sia nulla; con ciò le funzioni trasformatrici, oltre al sistema differenziale (I), vengono a soddisfare all'equazione in termini finiti

$$\lambda^2+\mu^2+w^2=2\,m\,\varphi\,\sigma.\qquad(\text{II})$$

Questa equazione (II) prova che limitandoci, come intenderemo di fare nel seguito, ad enti reali, le funzioni φ, σ hanno lo stesso segno o segno contrario secondo che la costante m è positiva o negativa (*). Ora si osservi che se si scrive il sistema (I) scambiando u con v indi (λ, μ) (r_1, r_2) e contemporaneamente cangiando m in $-m$ si ritrova il sistema stesso cangiata soltanto σ in $-\sigma$. Il segno della costante m non è dunque essenziale e potremo, senza alterare la generalità, supporre m positiva.

§ 2.

Verifiche delle proprietà delle trasformazioni di Darboux.

Supponiamo d'avere scelta una soluzione $(\lambda, \mu, w, \varphi, \sigma)$ del sistema (I) che verifichi insieme la (II). Poichè abbiamo

$$\Delta_1 \varphi + w^2 = e^{-2\theta}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2\right] + w^2 = 2\, m\, \varphi\, \sigma,$$

le formole (4) ci danno per la superficie S_1:

$$x_1 = x - \frac{1}{m\,\sigma}(\lambda\, X_1 + \mu\, X_2 + w\, X_3). \tag{7}$$

Derivando questo rapporto ad u, v, coll'osservare le (2) e le (I) ne deduciamo

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= \frac{e^{-\theta}}{m\,\sigma^2}\left[(\lambda^2 - m\,\varphi\,\sigma)\, X_1 + \lambda\,\mu\, X_2 + \lambda\, w\, X_3\right], \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= -\frac{e^{-\theta}}{m\,\sigma^2}\left[\lambda\,\mu\, X_1 + (\mu^2 - m\,\varphi\,\sigma)\, X_2 + \mu\, w\, X_3\right], \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

da cui per l'elemento lineare di S_1 risulta

$$d\,s_1^2 = e^{2\theta}\frac{\varphi^2}{\sigma^2}(d\,u^2 + d\,v^2).$$

(*) Come si è detto sopra, viene escluso il valore $m = 0$. Si può osservare che in questo caso il sistema (1) per le funzioni λ, μ, w, φ coincide con quello delle formole (2) per le funzioni X_1, X_2, X_3, x e le formole per σ con quelle che definiscono la $\overline{x}$ della trasformata di Christoffel (Cf. il seguente § 3.)

Intanto è così verificato che la corrispondenza fra S, S_1 è conforme e le linee di curvatura (u, v) sono isoterme sopra S_1, come sopra S. Indichiamo ora con

$$\theta_1; \quad X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, X_3^{(1)}; \quad r_1^{(1)}\, r_2^{(1)}$$

le quantità che per la S_1 sono le analoghe delle θ; X_1, X_2, X_3; r_1, r_2 della S e dalle formole già sviluppate deduciamo ora le seguenti

$$d s_1^2 = e^{2\theta_1}(d u^2 + d v^2), \quad e^{\theta_1} = e^{-\theta} \frac{\varphi}{\sigma} \ (*) \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1^{(1)} &= \left(\frac{\lambda^2}{m \varphi \sigma} - 1\right) X_1 + \frac{\lambda \mu}{m \varphi \sigma} X_2 + \frac{\lambda w}{m \varphi \sigma} X_3 \\ X_2^{(1)} &= -\frac{\lambda \mu}{m \varphi \sigma} X_1 + \left(1 - \frac{\mu^2}{m \varphi \sigma}\right) X_2 - \frac{\mu w}{m \varphi \sigma} X_3 \\ X_3^{(1)} &= -\frac{\lambda w}{m \varphi \sigma} X_1 - \frac{\mu w}{m \varphi \sigma} X_2 + \left(1 - \frac{w^2}{m \varphi \sigma}\right) X_3, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

le quali ultime formole scriveremo anche brevemente:

$$\left.\begin{aligned} X_1^{(1)} &= a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 \\ X_2^{(1)} &= a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 \\ X_3^{(1)} &= a_{31} X_1 + a_{33} X_2 + a_{33} X_3. \end{aligned}\right\} \tag{10*}$$

Le a_{ik}, i cui valori si leggono nel quadro delle formole (10), sono i coefficienti di una sostituzione ortogonale destrorsa. Derivando le terze delle (10) rapporto ad u, v e paragonando coi valori delle derivate delle x_1 forniti dalle (8), si ottengono, secondo le (2), le curvature principali $\frac{1}{r_1^{(1)}}$, $\frac{1}{r_2^{(1)}}$ di S_1, definite dalle formole:

$$\left.\begin{aligned} \frac{e^{\theta_1}}{r_1^{(1)}} &= \frac{e^{\theta}}{r_1} - \frac{w}{\varphi \sigma}(e^{\theta} \sigma - e^{-\theta} \varphi) \\ \frac{e^{\theta}}{r_2^{(1)}} &= -\frac{e^{\theta}}{r_2} + \frac{w}{\varphi \sigma}(e^{\theta} \sigma + e^{-\theta} \varphi). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

È bene ancora osservare che per le derivate della θ_1, definita dalla (9),

---

(*) Dobbiamo scrivere la formola così perchè il rapporto $\frac{\varphi}{\sigma}$ è positivo avendo supposta la costante m positiva (paragrafo precedente).

sussistono le formole

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \theta_1}{\partial u} &= -\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\lambda}{\varphi \sigma}(e^{\theta}\sigma - e^{-\theta}\varphi)\\ \frac{\partial \theta_1}{\partial v} &= -\frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\mu}{\varphi \sigma}(e^{\theta}\sigma + e^{-\theta}\varphi).\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Diremo che la nuova superficie isoterma S_1 è ottenuta dalla S mediante una trasformazione D_m di Darboux, ponendo in evidenza il valore della costante m, che figura nelle formole (I) di trasformazione ed ha un significato geometrico che riconosceremo più tardi (§ 4). Osserviamo ora che nell'integrale generale (λ, μ, w, φ, σ) del sistema (I) entrano cinque costanti arbitrarie, i valori iniziali di queste funzioni; ma per le trasformazioni di Darboux l'ulteriore equazione (II) riduce a quattro il numero di queste costanti. Poichè inoltre tutte le nostre formole sono omogenee di grado zero nelle funzioni trasformatrici, così vediamo che, se si tiene fissa la costante m:

La trasformazione D_m di Darboux *fa nascere da una superficie isoterma data S una tripla infinità di nuove superficie isoterme S_1.*

Le formole (7) assegnano anche il significato geometrico delle tre costanti arbitrarie portate dalla trasformazione D_m; si vede infatti dalle (7) che, per individuare la trasformata S_1, basta assegnare (ad arbitrio) il punto P_1 della S_1 che deve corrispondere ad un determinato punto P di S.

Se in fine facciamo variare m, avremo le ∞^4 trasformate di Darboux della superficie isoterma iniziale.

§ 3.

Permutabilità della trasformazione di Christoffel colle trasformazioni di Darboux.

Indichiamo con $\overline{S}$ la trasformata di Christoffel della S. Le coordinate $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ del punto $\overline{P}$ di $\overline{S}$, corrispondente al punto $P \equiv (x, y, z)$ di S, si ottengono per quadrature dalle formole (Vol. II, pag. 8):

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial u} = e^{-2\theta}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial \overline{x}}{\partial v} = -e^{-2\theta}\frac{\partial x}{\partial v}$$

e dalle analoghe per $\bar{y}$, $\bar{z}$. Adoperando per la $\bar{S}$ le notazioni omologhe a quelle usate per la S, abbiamo così:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = e^{-\theta} X_1, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = -e^{-\theta} X_2 \\ &\bar{d} s^2 = e^{2\bar{\theta}} (d u^2 + d v^2), \quad \text{con} \quad \bar{\theta} = -\theta \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} &\bar{X}_1 = X_1, \quad \bar{X}_2 = -X_2, \quad \bar{X}_3 = -X_3 \\ &\frac{1}{\bar{r}_1} = \frac{e^{2\theta}}{r_1}, \quad \frac{1}{\bar{r}_2} = -\frac{e^{2\theta}}{r_2}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Ciò posto se costruiamo per la $\bar{S}$ il sistema (I) avendo riguardo alle formole superiori, esso si scriverà

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial u} = m e^{-\theta} \bar{\sigma} + m e^{\theta} \bar{\varphi} + \frac{e^{\theta}}{r_2} \bar{w} + \frac{\partial \theta}{\partial v} \bar{\mu}, \quad \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial u} \bar{\mu} \\ &\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial u} = -\frac{\partial \theta}{\partial v} \bar{\lambda}, \quad \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial v} = m e^{-\theta} \bar{\sigma} - m e^{\theta} \bar{\varphi} - \frac{e^{\theta}}{r_1} \bar{w} + \frac{\partial \theta}{\partial u} \bar{\lambda} \\ &\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u} = e^{-\theta} \bar{\lambda}, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial v} = e^{-\theta} \bar{\mu}, \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial u} = -\frac{e^{\theta}}{r_2} \bar{\lambda}, \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial v} = \frac{e^{\theta}}{r_1} \bar{\mu}, \\ &\qquad\qquad \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial u} = e^{\theta} \bar{\lambda}, \quad \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial v} = -e^{\theta} \bar{\mu}, \end{aligned}\right\} \tag{$\bar{\text{I}}$}$$

mentre l'equazione in termini finiti (II) resta ancora

$$\bar{\lambda}^2 + \bar{\mu}^2 + \bar{w}^2 = 2 m \bar{\varphi} \bar{\sigma}.$$

Il confronto col sistema (I), (II) dimostra che, noto un sistema di funzioni trasformatrici per la S, si ottiene un corrispondente sistema per la $\bar{S}$ semplicemente ponendo

$$\bar{\lambda} = \lambda, \quad \bar{\mu} = -\mu, \quad \bar{\varphi} = \sigma, \quad \bar{\sigma} = \varphi, \quad \bar{w} = -w.$$

Le formole corrispondenti alle (7) e cioè

$$\bar{x}_1 = \bar{x} - \frac{1}{m \bar{\sigma}} (\bar{\lambda} \bar{X}_1 + \bar{\mu} \bar{X}_2 + \bar{w} \bar{X}_3),$$

che per le precedenti si scrivono

$$\overline{x}_1 = \overline{x} - \frac{1}{m\,\varphi}(\lambda\, X_1 + \mu\, X_2 + w\, X_3),$$

ci danno la corrispondente trasformata $\overline{S}_1$ di Darboux della superficie S. Ora le (10) dimostrano che si ha

$$\overline{X}_1^{(1)} = X_1^{(1)}, \quad \overline{X}_2^{(1)} = -X_2^{(1)}, \quad \overline{X}_3^{(1)} = -X_3^{(1)},$$

onde risulta che la $\overline{S}_1$ corrisponde per parallelismo di normali alla S_1 in una rappresentazione conforme ed è quindi la trasformata di Christoffel della S_1. Enunciamo questo risultato sotto la forma: *La trasformazione di* Christoffel *cangia ogni coppia di superficie isoterme, derivate l'una dall'altra con una trasformazione D_m di* Darboux, *in un'altra tale coppia.*

Se consideriamo ora le quattro superficie S, S_1, $\overline{S}$, $\overline{S}_1$, vediamo che si passa dalla S alla $\overline{S}_1$ sia applicando prima la D_m che la cangia in S_1, poi la trasformazione C di Christoffel che porta S_1 in $\overline{S}_1$; ovvero passando colla C da S a $\overline{S}$, poi colla D_m da $\overline{S}$ a $\overline{S}_1$. Possiamo scrivere simbolicamente

$$(S)\,.\,D_m\, C = (S)\,.\,C\, D_m$$

ed esprimere questa proprietà dicendo che: *La trasformazione C di* Christoffel *è permutabile colle trasformazioni D_m di* Darboux.

Infine osserveremo come dalle formole sviluppate risulta una semplice costruzione geometrica mediante la quale, note le due falde (S, S_1) di un inviluppo conforme di sfere e la trasformata $\overline{S}$ di Christoffel di una di esse, si ottiene la trasformata $\overline{S}_1$ di Christoffel della seconda falda. Dalle (7), (7*) abbiamo infatti le proporzioni

$$\overline{x}_1 - \overline{x} : \overline{y}_1 - \overline{y} : \overline{z}_1 - \overline{z} = x_1 - x : y_1 - y : z_1 - z,$$

e inoltre

$$\Sigma\,(x_1 - x)^2 = \frac{2}{m}\,\frac{\varphi}{\sigma}, \quad \Sigma\,(\overline{x}_1 - \overline{x})^2 = \frac{2}{m}\,\frac{\sigma}{\varphi},$$

da cui

$$\Sigma\,(x_1 - x)^2 \times \Sigma\,(\overline{x}_1 - \overline{x})^2 = \frac{4}{m^2}.$$

Se indichiamo adunque con P, P_1, $\overline{P}$, $\overline{P}_1$ quattro punti corrispondenti delle quattro superficie S, S_1, $\overline{S}$, $\overline{S}_1$ vediamo che sussiste la proprietà seguente:

I segmenti $P P_1$, $\overline{P}\,\overline{P}_1$ *sono paralleli ed il prodotto delle loro lunghezze è costante* $= \frac{2}{m}$ (*). Si osservi di più che avendosi

$$\frac{\overline{x}_1 - \overline{x}}{x_1 - x} = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}}{y_1 - y} = \frac{\overline{z}_1 - \overline{z}}{z_1 - z} = \frac{\sigma}{\varphi},$$

il segno di questo rapporto è positivo nelle nostre ipotesi ed i due segmenti $P P_1$, $\overline{P}\,\overline{P}_1$ oltre che paralleli sono anche egualmente diretti. Ne risulta così evidente la costruzione domandata, ed assegnato alla costante m della trasformazione D_m di Darboux un significato geometrico che è evidentemente simmetrico rispetto alle due superficie S, S_1.

§ 4.

Le formole d'inversione per le trasformazioni di Darboux.

Prima di venire all'oggetto proprio della nostra ricerca sarà opportuno risolvere una questione preliminare. Abbiasi una superficie isoterma S, alla quale applichiamo una trasformazione D_m di Darboux, e siano λ, μ, w, φ, σ le cinque corrispondenti funzioni trasformatrici, ed S_1 la superficie trasformata. La primitiva S si ottiene alla sua volta dalla nuova S_1 mediante una trasformazione di Darboux la cui costante è ancora m, come risulta dalle ultime osservazioni del § 3 e come verrà confermato dai calcoli seguenti. Le fun-

(*) Un esempio notevole di queste relazioni geometriche si ha nelle quattro superficie di curvatura media costante che il secondo teorema di Guichard (Vol. II, pag. 195) associa ad una qualunque deformata dell'ellissoide allungato di rotazione di semiassi a, b. Queste quattro superficie si scindono in due coppie di superficie parallele (trasformate di Christoffel) e il prodotto $PP_1 \times \overline{P}\overline{P}_1$ è il quadruplo prodotto delle distanze dei due fuochi dell'ellisse meridiana da una sua tangente variabile e quindi costante ed $= 4\,b^2$, onde qui $m = \frac{1}{2b^2}$.

zioni trasformatrici nel passaggio dalla S_1 alla S, che indicheremo con λ_1, μ_1, w_1, φ_1, σ_1 saranno perfettamente determinate, a meno di un fattor comune costante, e noi domandiamo: *come si calcolano le funzioni trasformatrici* λ_1, μ_1, w_1, φ_1, σ_1 *pel passaggio inverso da* S_1 *a* S, *note quelle* λ, μ, w, φ, σ *pel passaggio da* S *a* S_1?

Per risolvere la questione, consideriamo la S come dedotta dalla S_1 mediante la trasformazione D_m corrispondente alle λ_1, μ_1, w_1, φ_1, σ_1 ed applicando le (7) § 2, avremo:

$$x = x_1 - \frac{1}{m\,\sigma_1}(\lambda_1 X_1^{(1)} + \mu_1 X_2^{(1)} + w_1 X_3^{(1)}),$$

ossia per le (7) stesse

$$\frac{\lambda_1}{\sigma_1} X_1^{(1)} + \frac{\mu_1}{\sigma_1} X_2^{(1)} + \frac{w_1}{\sigma_1} X_3^{(1)} + \frac{\lambda}{\sigma} X_1 + \frac{\mu}{\sigma} X_2 + \frac{w}{\sigma} X_3 = 0.$$

Sostituendo in questa per $X_1^{(1)}$, $X_2^{(1)}$, $X_3^{(1)}$ i loro valori (10*) dobbiamo eguagliare a zero nel risultato i singoli coefficienti di X_1, X_2, X_3, onde seguono le tre relazioni:

$$a_{11}\frac{\lambda_1}{\sigma_1} + a_{21}\frac{\mu_1}{\sigma_1} + a_{31}\frac{w_1}{\sigma_1} = -\frac{\lambda}{\sigma}$$

$$a_{12}\frac{\lambda_1}{\sigma_1} + a_{22}\frac{\mu_1}{\sigma_1} + a_{32}\frac{w_1}{\sigma_1} = -\frac{\mu}{\sigma}$$

$$a_{13}\frac{\lambda_1}{\sigma_1} + a_{13}\frac{\mu_1}{\sigma_1} + a_{33}\frac{w_1}{\sigma_1} = -\frac{w}{\sigma}.$$

Di qui risolvendo rapporto a $\frac{\lambda_1}{\sigma_1}$, $\frac{\mu_1}{\sigma_1}$, $\frac{w_1}{\sigma_1}$, col ricordare che le a_{ik} sono i coefficienti di una sostituzione ortogonale, deduciamo

$$\frac{\lambda_1}{\sigma_1} = -\frac{1}{\sigma}(a_{11}\lambda + a_{12}\mu + a_{13}w)$$

$$\frac{\mu_1}{\sigma_1} = -\frac{1}{\sigma}(a_{21}\lambda + a_{22}\mu + a_{23}w)$$

$$\frac{w_1}{\sigma_1} = -\frac{1}{\sigma}(a_{31}\lambda + a_{32}\mu + a_{33}w),$$

e sostituendo per le a_{ik} i loro valori effettivi nel quadro delle formole (10) troviamo subito:

$$\frac{\lambda_1}{\sigma_1} = -\frac{\lambda}{\sigma}, \quad \frac{\mu_1}{\sigma_1} = +\frac{\mu}{\sigma}, \quad \frac{w_1}{\sigma_1} = +\frac{w}{\sigma}.$$

Indicando dunque con ρ un fattore di proporzionalità, abbiamo

$$\lambda_1 = -\rho\lambda, \quad \mu_1 = \rho\mu, \quad w_1 = \rho w, \quad \sigma_1 = \rho\sigma;$$

e poichè inoltre

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + w_1^2 = 2m\varphi_1\sigma_1, \quad \lambda^2 + \mu^2 + w^2 = 2m\varphi\sigma$$

sarà anche $\varphi_1 = \rho\varphi$. Resta solo a determinare il fattore ρ, ciò che si fa prendendo ad es. dal sistema (I) le due formole

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} = e^{\theta_1}\lambda_1 = e^{\theta}\frac{\varphi}{\sigma}\lambda_1, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial v} = e^{\theta_1}\mu_1 = e^{\theta}\frac{\varphi}{\sigma}\mu_1,$$

che diventano

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial u} = -e^{\theta}\frac{\lambda}{\sigma}\cdot\rho\varphi, \quad \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial v} = e^{-\theta}\frac{\mu}{\sigma}\cdot\rho\varphi,$$

e per le (I) stesse

$$\frac{\partial}{\partial u}\log(\rho\varphi) = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial v}\log(\rho\varphi) = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial v}.$$

Dunque si ha $\rho = \frac{c}{\varphi\sigma}$ essendo c un fattore costante al quale, per l'omogeneità delle formole, possiamo dare il valore che più ci piace, p. es. $c = 1$. D'altronde si verifica subito che le cinque funzioni

$$\lambda_1 = -\frac{\lambda}{\varphi\sigma}, \quad \mu_1 = \frac{\mu}{\varphi\sigma}, \quad w_1 = \frac{w}{\varphi\sigma}, \quad \varphi_1 = \frac{1}{\sigma}, \quad \sigma_1 = \frac{1}{\varphi} \tag{15}$$

soddisfano al sistema (I) costruito per la superficie S_1. Siamo così giunti al risultato: *Se nel passaggio da una superficie isoterma S ad una sua trasformata S_1 di* Darboux *le cinque funzioni trasformatrici sono λ, μ, w φ, σ, le cinque funzioni λ_1, μ_1, w_1, φ_1, σ_1 che servono pel passaggio inverso sono date dalle formule* (15).

§ 5.

Il teorema di permutabilità.

Venendo ora all'oggetto principale delle nostre ricerche, cominciamo dall'enunciare nel modo preciso seguente il teorema di permutabilità:

A) *Se dalla superficie isoterma S si ottengono due nuove superficie isoterme S_1, S_2, mediante le trasformazioni D_{m_1}, D_{m_2}, esiste una quarta superficie isoterma S', pienamente determinata e costruibile in termini finiti, che è legata alla sua volta alle medesime superficie S_1, S_2, da due trasformazioni di* Darboux *D'_{m_2}, D'_{m_1} colle costanti m_2, m_1, invertite. Questa quarta superficie S' è distinta dalla primitiva S se le costanti m_1, m_2 sono diverse e coincide con S quando sono eguali.*

È opportuno osservare che si può dare a questo teorema un'altra forma equivalente. Secondo questa proposizione infatti, la coppia (S, S_1) di trasformate di Darboux con una D_{m_1} viene cangiata da una D_{m_2} in un'altra coppia (S_2, S') di superficie ancora legate da una D_{m_1}. Sotto questa forma il teorema vale anche per $m_2 = m_1$; la coppia trasformata è allora (S_2, S) ed ha a comune colla primitiva la S. Così abbiamo l'altro enunciato del teorema di permutabilità.

B) *Ogni coppia (S, S_1) di superficie legate da una trasformazione D_{m_1} di* Darboux *è cangiata da una trasformazione arbitraria di* Darboux *in una coppia della medesima specie.* È questa la stessa proprietà che abbiamo visto al § 3 competere alla trasformazione di Christoffel; e come questa riguarda la permutabilità della trasformazione di Christoffel colla trasformazione di Darboux, così l'attuale si riferisce alla permutabilità delle trasformazioni di Darboux fra loro, onde il nome dato al teorema.

Per dimostrare la proposizione seguirò la via stessa della ricerca. Supponendo la verità della proposizione, cercherò le formole effettive che danno la quarta superficie S' e su queste verificherò poi che tutte le condizioni imposte risultano soddisfatte.

Secondo l'enunciato del teorema, se si considerano quattro punti corrispondenti P, P_1, P_2, P' delle quattro superficie S, S_1, S_2, S' abbiamo quattro sfere, che indicheremo con Σ_1, Σ_2, Σ'_1, Σ'_{22} le quali toccano rispettivamente

$(S,\ S_1)$ in $P,\ P_1$; $(S,\ S_2)$ in $P,\ P_2$; $(S',\ S_1)$ in $P',\ P_1$; $(S',\ S_2)$ in $P',\ P'_2$ ed i quattro inviluppi di sfere (Σ_1), (Σ_2), (Σ'_1), (Σ'_2) sono tutti conformi. Denotiamo ora i valori delle rispettive funzioni trasformatrici $\lambda,\ \mu,\ w,\ \varphi,\ \sigma$ nel modo seguente:

$\lambda_1,\ \mu_1,\ w_1,\ \varphi_1,\ \sigma_1,$	pel passaggio	da S a S_1,	mediante	D_{m_1}
$\lambda_2,\ \mu_2,\ w_2,\ \varphi_2,\ \sigma_2,$	»	da S a S_2	»	D_{m_2}
$\lambda'_1,\ \mu'_1,\ w'_1,\ \varphi'_1,\ \sigma'_1,$	»	da S_1 à S'	»	D'_{m_2}
$\lambda'_2,\ \mu'_2,\ w'_2,\ \varphi'_2,\ \sigma'_2,$	»	da S_2 a S'	»	D'_{m_1}.

Le prime dieci funzioni si suppongono date e le rimanenti dieci, rappresentate dalle lettere cogli accenti, sono incognite. Ora $\lambda_1,\ \mu_1,\ w_1,\ \varphi_1,\ \sigma_1$ soddisfano per ipotesi il sistema (I), (II) fattovi $m = m_1$ e similmente $\lambda_2,\ \mu_2,\ w_2,\ \varphi_2,\ \sigma_2$ il sistema stesso con $m = m_2$. Alla loro volta $\lambda'_1,\ \mu'_1,\ w'_1,\ \varphi'_1,\ \sigma'_1$ debbono soddisfare il sistema (I) costruito per la superficie S_1 e col valore $m = m_2$. Occorre scrivere questo sistema, il quale a causa delle (11), (12) § 2 prende la forma seguente:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \lambda'_1}{\partial u} &= m_2 e^{-\theta}\frac{\varphi_1}{\sigma_1}\cdot\sigma'_1 + m_2 e^{\theta}\frac{\sigma_1}{\varphi_1}\cdot\varphi'_1 + \left[\frac{e^{\theta}}{r_2} - \frac{w_1}{\varphi_1\sigma_1}(e^{\theta}\sigma_1 + e^{-\theta}\varphi_1)\right].w'_1 + \\
&\qquad + \left[\frac{\partial\theta}{\partial v} - \frac{\mu_1}{\varphi_1\sigma_1}(e^{\theta}\sigma_1 + e^{-\theta}\varphi_1)\right].\mu'_1 \\
\frac{\partial \lambda'_1}{\partial v} &= \left[-\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{\lambda_1}{\varphi_1\sigma_1}(e^{\theta}\sigma_1 - e^{-\theta}\varphi_1)\right].\mu'_1 \\
\frac{\partial \mu'_1}{\partial u} &= \left[-\frac{\partial\theta}{\partial v} + \frac{\mu_1}{\varphi_1\sigma_1}(e^{\theta}\sigma_1 + e^{-\theta}\varphi_1)\right].\lambda'_1 \\
\frac{\partial \mu'_1}{\partial v} &= m_2 e^{-\theta}\frac{\varphi_1}{\sigma_1}\cdot\sigma'_1 - m_2 e^{\theta}\frac{\sigma_1}{\varphi_1}\cdot\varphi'_1 - \left[\frac{e^{\theta}}{r_1} - \frac{w_1}{\varphi_1\sigma_1}(e^{\theta}\sigma_1 - e^{-\theta}\varphi_1)\right].w'_1 + \\
&\qquad + \left[\frac{\partial\theta}{\partial u} - \frac{\lambda_1}{\varphi_1\sigma_1}(e^{\theta}\sigma_1 - e^{-\theta}\varphi_1)\right].\lambda'_1 \\
\frac{\partial w'_1}{\partial u} &= \left[-\frac{e^{\theta}}{r_2} + \frac{w_1}{\varphi_1\sigma_1}(e^{\theta}\sigma_1 + e^{-\theta}\varphi_1)\right].\lambda'_1, \\
&\qquad \frac{\partial w'_1}{\partial v} = \left[\frac{e^{\theta}}{r_2} - \frac{w_1}{\varphi_1\sigma_1}(e^{\theta}\sigma_1 - e^{-\theta}\varphi_1)\right].\mu'_1 \\
\frac{\partial \varphi'_1}{\partial u} &= e^{\theta}\frac{\varphi_1}{\sigma_1}\cdot\lambda'_1,\quad \frac{\partial \varphi'_1}{\partial v} = e^{-\theta}\frac{\varphi_1}{\sigma_1}\cdot\mu'_1, \\
&\qquad \frac{\partial \sigma'_1}{\partial u} = e^{-\theta}\frac{\sigma_1}{\varphi_1}\cdot\lambda'_1,\quad \frac{\partial \sigma'_1}{\partial v} = -e^{\theta}\frac{\sigma_1}{\varphi_1}\cdot\mu'_1;
\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{I}^*)$$

inoltre deve essere soddisfatta la corrispondente equazione (II) in termini finiti

$$\lambda'^2_1 + \mu'^2_1 + w'^2_1 = 2\, m_2\, \varphi'_1\, \sigma'_1 \,. \tag{II*}$$

È inutile scrivere le equazioni analoghe per λ'_2, μ'_2, w'_2, φ'_2, σ'_2, che si deducono dalle precedenti cangiandovi λ_1, μ_1, w_1, φ_1, σ_1 in λ_2, μ_2, w_2, φ_2, σ_2 e m_2 in m_1. Ora se, mediante le formole (7), (10) § 2, esprimiamo che la trasformata della S_1 per mezzo della D'_{m_2} e colle funzioni trasformatrici λ'_1, μ'_1, w'_1, φ'_1, σ'_1 coincide colla trasformata della S_2 ottenuta mediante la D'_{m_1} colle funzioni trasformatrici λ'_2, μ'_2, w'_2, φ'_2, σ'_2, veniamo a trovare un certo numero di equazioni in termini finiti fra le nostre dieci funzioni incognite e, combinandole colle equazioni differenziali (I*), risulteranno pienamente determinate, come si vedrà, le incognite stesse.

§ 6.

Deduzione di un sistema di equazioni lineari per le funzioni incognite.

Andiamo ora a tradurre in formole il metodo descritto. Gli elementi della superficie S sono dati dalle (7), (10*) § 2, ove soltanto dobbiamo mettere λ_1, μ_1, w_1, φ_1, σ_1; m_1 per λ, μ, w, φ, σ; m rispettivamente, e analogamente quelle di S_2 dalle altre:

$$\left.\begin{aligned}
x_2 &= x - \frac{1}{m_2\,\sigma_2}(\lambda_2 X_1 + \mu_2 X_2 + w_2 X_3)\\
X^{(2)}_1 &= b_{11} X_1 + b_{12} X_2 + b_{13} X_3\\
X^{(2)}_2 &= b_{21} X_1 + b_{22} X_2 + b_{23} X_3\\
X^{(2)}_3 &= b_{31} X_1 + b_{32} X_2 + b_{33} X_3 ,
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

dove i coefficienti b_{ik} del determinante ortogonale destrorso $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{vmatrix}$

hanno i valori che risultano dall'eguagliarli ai corrispondenti elementi del determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda_2^2}{m_2\varphi_2\sigma_2}-1, & \frac{\lambda_2\mu_2}{m_2\varphi_2\sigma_2}, & \frac{\lambda_2 w_2}{m_2\varphi_2\sigma_2} \\ -\frac{\lambda_2\mu_2}{m_2\varphi_2\sigma_2}, & 1-\frac{\mu_2^2}{m_2\varphi_2\sigma_2}, & -\frac{\mu_2 w_2}{m_2\varphi_2\sigma_2} \\ -\frac{\lambda_2 w_2}{m_2\varphi_2\sigma_2}, & -\frac{\mu_2 w_2}{m_2\varphi_2\sigma_2}, & 1-\frac{w_2^2}{m_2\varphi_2\sigma_2} \end{vmatrix};$$

le espressioni b_{ik} sono cioè costruite con λ_2, μ_2, w_2, φ_2, σ_2 e m_2 come le a_{ik} con λ_1, μ_1, w_1, φ_1, σ_1 e m_1.

Per la quarta superficie S' del teorema di permutabilità, considerata come trasformata della S_1, abbiamo dalla (7)

$$x'=x_1-\frac{1}{m_2\sigma'_1}(\lambda'_1 X_1^{(1)}+\mu'_1 X_2^{(1)}+w'_1 X_3^{(1)}); \tag{16*}$$

e se la consideriamo invece come derivata dalla S_2 dobbiamo avere analogamente

$$x'=x_2-\frac{1}{m_1\sigma'_2}(\lambda'_2 X_1^{(2)}+\mu'_2 X_2^{(2)}+w'_2 X_3^{(2)}).$$

Eguagliando le due espressioni di x', ne deduciamo:

$$\frac{1}{m_1\sigma_1}(\lambda_1 X_1+\mu_1 X_2+w_1 X_3)+\frac{1}{m_2\sigma'_1}(\lambda'_1 X_1^{(1)}+\mu'_1 X_2^{(1)}+w'_1 X_3^{(1)})=$$

$$=\frac{1}{m_2\sigma_2}(\lambda_2 X_1+\mu_2 X_2+w_2 X_3)+\frac{1}{m_1\sigma'_2}(\lambda'_2 X_1^{(2)}+\mu'_2 X_2^{(2)}+w'_2 X_3^{(2)}).$$

Poniamo per le $X^{(1)}$ i valori dati dalle (10*) e per le $X^{(2)}$ i valori (16); i coefficienti di X_1, X_2, X_3 dalle due parti debbono essere eguali. Otteniamo così tre equazioni che, ponendo per abbreviare

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i &= a_{1i}\frac{\lambda'_1}{m_2\sigma'_1}+a_{2i}\frac{\mu'_1}{m_2\sigma'_1}+a_{3i}\frac{w'_1}{m_2\sigma'_1} \\ \beta_i &= b_{1i}\frac{\lambda'_2}{m_1\sigma'_2}+b_{2i}\frac{\mu'_2}{m_1\sigma'_2}+b_{3i}\frac{w'_2}{m_1\sigma'_2}, \end{aligned}\quad (\text{per } i=1,\,2,\,3)\right\} \tag{17}$$

assumono la forma:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1-\beta_1=\frac{\lambda_2}{m_2\,\sigma_2}-\frac{\lambda_1}{\mu_1\,\sigma_1}\,,\quad \alpha_2-\beta_2=\frac{\mu_2}{m_2\,\sigma_2}-\frac{\mu_1}{m_1\,\sigma_1}\,,\\ \alpha_3-\beta_3=\frac{w_2}{m_2\,\sigma_2}-\frac{w_1}{m_1\,\sigma_1}\,. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

D'altra parte se applichiamo le formole (10) § 2 alla determinazione dei coseni di direzione della terna principale relativa alla S', considerata come proveniente dalla S_1, abbiamo:

$$X'_1=\frac{\lambda'_1}{m_2\,\varphi'_1\,\sigma'_1}\left[\lambda'_1\,X_1^{(1)}+\mu'_1\,X_2^{(1)}+w'_1\,X_3^{(1)}\right]-X_1^{(1)}$$

$$-X'_2=\frac{\mu'_1}{m_2\,\varphi'_1\,\sigma'_1}\left[\lambda'_1\,X_1^{(1)}+\mu'_1\,X_2^{(1)}+w'_1\,X_3^{(1)}\right]-X_2^{(1)}$$

$$-X'_3=\frac{w'_1}{m_2\,\varphi'_1\,\sigma'_1}\left[\lambda'_1\,X_1^{(1)}+\mu'_1\,X_2^{(1)}+w'_1\,X_3^{(1)}\right]-X_3^{(1)};$$

queste per le (10*) e le posizioni (17), si scrivono

$$X'_1=\left(\frac{\lambda'_1}{\varphi'_1}\alpha_1-a_{11}\right)X_1+\left(\frac{\lambda'_1}{\varphi'_1}\alpha_2-a_{12}\right)X_2+\left(\frac{\lambda'_1}{\varphi'_1}\alpha_3-a_{13}\right)X_3$$

$$-X'_2=\left(\frac{\mu'_1}{\varphi'_1}\alpha_1-a_{21}\right)X_1+\left(\frac{\mu'_1}{\varphi'_1}\alpha_2-a_{22}\right)X_2+\left(\frac{\mu'_1}{\varphi'_1}\alpha_3-a_{33}\right)X_3$$

$$-X'_3=\left(\frac{w'_1}{\varphi'_1}\alpha_1-a_{31}\right)X_1+\left(\frac{w'_1}{\varphi'_1}\alpha_2-a_{32}\right)X_2+\left(\frac{w'_1}{\varphi'_1}\alpha_3-a_{33}\right)X_3\,.$$

Pensando invece la S' come derivata dalla S_2, avremo le formole

$$X'_1=\left(\frac{\lambda'_2}{\varphi'_2}\beta_1-b_{11}\right)X_1+\left(\frac{\lambda'_2}{\varphi'_2}\beta_2-b_{12}\right)X_2+\left(\frac{\lambda'_2}{\varphi'_2}\beta_3-b_{13}\right)X_3$$

$$-X'_2=\left(\frac{\mu'_2}{\varphi'_2}\beta_1-b_{21}\right)X_1+\left(\frac{\mu'_2}{\varphi'_2}\beta_2-b_{22}\right)X_2+\left(\frac{\mu'_2}{\varphi'_2}\beta_3-b_{23}\right)X_3$$

$$-X'_3=\left(\frac{w'_2}{\varphi'_2}\beta_1-b_{31}\right)X_1+\left(\frac{w'_2}{\varphi'_2}\beta_2-b_{32}\right)X_2+\left(\frac{w'_2}{\varphi'_2}\beta_3-b_{33}\right)X_3\,;$$

e paragonando i due sistemi di formole ne dedurremo le 9 equazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\lambda'_1}{\varphi'_1}\alpha_1-\frac{\lambda'_2}{\varphi'_2}\beta_1=a_{11}-b_{11}, \quad \frac{\mu'_1}{\varphi'_1}\alpha_1-\frac{\mu'_2}{\varphi'_2}\beta_1=a_{21}-b_{21},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{w'_1}{\varphi'_1}\alpha_1-\frac{w'_2}{\varphi'_2}\beta_1=a_{31}-b_{31}\\
&\frac{\lambda'_1}{\varphi'_1}\alpha_2-\frac{\lambda'_2}{\varphi'_2}\beta_2=a_{12}-b_{12}, \quad \frac{\mu'_1}{\varphi'_1}\alpha_2-\frac{\mu'_2}{\varphi'_2}\beta_2=a_{22}-b_{22},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{w'_1}{\varphi'_1}\alpha_2-\frac{w'_2}{\varphi'_2}\beta_2=a_{32}-b_{32}\\
&\frac{\lambda'_1}{\varphi'_1}\alpha_3-\frac{\lambda'_2}{\varphi'_2}\beta_3=a_{13}-b_{13}, \quad \frac{\mu'_1}{\varphi'_1}\alpha_3-\frac{\mu'_2}{\varphi'_2}\beta_3=a_{23}-b_{23},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{w'_1}{\varphi'_1}\alpha_3-\frac{w'_2}{\varphi'_2}\beta_3=a_{33}-b_{33}.
\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Ora se associamo p. e. la prima delle (18) alle tre equazioni della prima linea fra le (19) e le consideriamo come *quattro* equazioni lineari nelle *due* incognite $\frac{\alpha_1}{\varphi'_1}$, $\frac{\beta_1}{\varphi'_2}$, vediamo che nella matrice dei coefficienti

$$\left\|\begin{matrix}
\lambda'_1 & \lambda'_2 & a_{11}-b_{11}\\
\mu'_1 & \mu'_2 & a_{21}-b_{21}\\
w'_1 & w'_2 & a_{31}-b_{31}\\
\varphi'_1 & \varphi'_3 & \frac{\lambda_2}{m_2\sigma_2}-\frac{\lambda_1}{m_1\sigma_1}
\end{matrix}\right\|$$

dovranno annullarsi tutti i minori del 3.° ordine. Similmente procedendo per le altre equazioni (18), (19), ne deduciamo che nella matrice

$$\left\|\begin{matrix}
\lambda'_1 & \lambda'_2 & a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13}\\
\mu'_1 & \mu'_2 & a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23}\\
w'_1 & w'_2 & a_{31}-b_{31} & a_{32}-b_{32} & a_{33}-b_{33}\\
\varphi'_1 & \varphi'_2 & \frac{\lambda_2}{m_2\sigma_2}-\frac{\lambda_1}{m_1\sigma_1} & \frac{\mu_2}{m_2\sigma_2}-\frac{\mu_1}{m_1\sigma_1} & \frac{w_2}{m_2\sigma_2}-\frac{w_1}{m_1\sigma_1}
\end{matrix}\right\|$$

debbono annullarsi tutti quei minori del 3.° ordine a cui partecipano le prime due verticali. Queste condizioni danno evidentemente altrettante equazioni lineari omogenee a cui debbono soddisfare i minori di 2.° ordine della matrice

$$\begin{Vmatrix} \lambda'_1 & \mu'_1 & w'_1 & \varphi'_1 \\ \lambda'_2 & \mu'_2 & w'_2 & \varphi'_2 \end{Vmatrix},$$

dalle quali, risolvendo rispetto ai detti minori (ai loro rapporti) e sostituendo per le a_{ik}, b_{ik} i loro valori effettivi, col tener presenti le relazioni

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + w_1^2 = 2\, m_1\, \varphi_1\, \sigma_1\,, \quad \lambda_2^2 + \mu_2^2 + w_2^2 = 2\, m_2\, \varphi_2\, \sigma_2\,,$$

si deduce, dopo alcuni calcoli, questa conseguenza per noi importante che: *I minori del 2.° ordine della matrice* $\begin{Vmatrix} \lambda'_1 & \mu'_1 & w'_1 & \varphi'_1 \\ \lambda'_2 & \mu'_2 & w'_2 & \varphi'_2 \end{Vmatrix}$ *debbono essere rispettivamente proporzionali agli omologhi dell'altra* $\begin{Vmatrix} -\lambda_1 & \mu_1 & w_1 & \varphi_1 \\ -\lambda_2 & \mu_2 & w_2 & \varphi_2 \end{Vmatrix}$.

Deduciamo di qui che: *Tutti i minori di 3.° ordine delle due matrici*

$$\begin{Vmatrix} \lambda'_1 & \mu'_1 & w'_1 & \varphi'_1 \\ -\lambda_1 & \mu_1 & w_1 & \varphi_1 \\ -\lambda_2 & \mu_2 & w_2 & \varphi_2 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} \lambda'_2 & \mu'_2 & w'_2 & \varphi'_2 \\ -\lambda_1 & \mu_1 & w_1 & \varphi_1 \\ -\lambda_2 & \mu_2 & w_2 & \varphi_2 \end{Vmatrix}$$

debbono annullarsi. Quest'ultimo risultato ci fornisce in sostanza due equazioni lineari omogenee per le funzioni incognite λ'_1, μ'_1, w'_1, φ'_1, σ'_1; e alle medesime equazioni debbono soddisfare altresì λ'_2, μ'_2, w'_2, φ'_2, σ'_2.

Colla deduzione di queste due equazioni *lineari* la principale difficoltà della ricerca è vinta poichè ora basterà derivare queste relazioni e tener conto delle equazioni differenziali (I*) per dedurne nuove equazioni lineari in numero sufficiente per determinare i rapporti $\lambda'_1 : \mu'_1 : w'_1 : \varphi'_1 : \sigma'_1$ delle incognite. Le equazioni differenziali stesse (I*) determinano poi il fattore di proporzionalità ancora incognito, a meno di un fattore costante che resta necessariamente arbitrario.

§ 7.

Determinazione dei rapporti delle incognite.

Per raggiungere lo scopo indicato prendiamo le due equazioni lineari

$$\Omega_1 = \begin{vmatrix} \lambda'_1 & \mu'_1 & w'_1 \\ -\lambda_1 & \mu_1 & w_1 \\ -\lambda_2 & \mu_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Omega_2 = \begin{vmatrix} \lambda'_1 & \mu'_1 & \varphi'_1 \\ -\lambda_1 & \mu_1 & \varphi_1 \\ -\lambda_2 & \mu_2 & \varphi_2 \end{vmatrix} = 0,$$

che scriviamo effettivamente svolte:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= (\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1) \,.\, \lambda'_1 + (\lambda_1 w_2 - \lambda_2 w_1)\, \mu'_1 + (\mu_1 \lambda_2 - \mu_2 \lambda_1)\, w'_1 = 0 \\ \Omega_2 &= (\mu_1 \varphi_2 - \mu_2 \varphi_1) \,.\, \lambda'_1 + (\lambda_1 \varphi_2 - \lambda_2 \varphi_1)\, \mu'_1 + (\mu_1 \lambda_2 - \mu_2 \lambda_1)\, \varphi'_1 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Deriviamo la $\Omega_1 = 0$ rapporto ad u, v e per le derivate di $\lambda_1, \ldots \lambda_2, \ldots \lambda'_1, \ldots$ sostituiamo i valori dati dal relativo sistema differenziale (I). Otteniamo così due nuove equazioni lineari che, ponendo per brevità

$$\left.\begin{aligned} \Psi_1 &= \left(\frac{e^{\theta}}{\varphi_1} + \frac{e^{-\theta}}{\sigma_1}\right) \cdot [\lambda_1 \lambda'_1 - \mu_1 \mu'_1 - w_1 w'_1] + m_2 e^{\theta} \frac{\sigma_1}{\varphi_1} \varphi'_1 + m_2 e^{-\theta} \frac{\varphi_1}{\sigma_1} \sigma'_1 \\ \Psi_2 &= \left(\frac{e^{\theta}}{\varphi_1} - \frac{e^{-\theta}}{\sigma_1}\right) \cdot [\lambda_1 \lambda'_1 - \mu_1 \mu'_1 - w_1 w'_1] + m_2 e^{\theta} \frac{\sigma_1}{\varphi_1} \varphi'_1 - m_2 e^{-\theta} \frac{\varphi_1}{\sigma_1} \sigma'_1, \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

assumono, a calcoli eseguiti, la forma seguente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u} &= (\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1) \,.\, \psi_1 + \\ &+ [e^{\theta} (m_1 \sigma_1 w_2 - m_2 \sigma_2 w_1) + e^{-\theta} (m_1 \varphi_1 w_2 - m_2 \varphi_2 w_1)] \,.\, \mu'_1 + \\ &+ [e^{\theta} (m_2 \mu_1 \sigma_2 - u_1 \mu_2 \sigma_1) + e^{\ \theta} (m_2 \mu_1 \varphi_2 - m_1 \mu_2 \varphi_1)] \,.\, w'_1 = 0 \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial v} &= (\lambda_2 w_1 - \lambda_1 w_2) \,.\, \psi_2 + \\ &+ [e^{\theta} (m_1 \sigma_1 w_2 - m_2 \sigma_2 w_1) - e^{-\theta} (m_1 \varphi_1 w_2 - m_2 \varphi_2 w_1)] \,.\, \lambda'_1 + \\ &+ [e^{\theta} (m_1 \sigma_1 \lambda_2 - m_2 \sigma_2 \lambda_1) + e^{-\theta} (m_2 \lambda_1 \varphi_2 - m_1 \lambda_1 \varphi_1)] \,.\, w'_1 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Le quattro equazioni lineari omogenee (20), (22), indipendenti rispetto alle cinque funzioni incognite λ'_1, μ'_1, w'_1, φ'_1, σ'_1, ci forniscono i rapporti di queste col calcolo seguente. Nella $\frac{\partial \Omega_1}{\partial u} = 0$ sostituiamo per $(\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1)\lambda'_1$ il suo valore tratto dalla $\Omega_1 = 0$ e per $(\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1)\varphi'_1$ l'altro che si trae dalla

$$\begin{vmatrix} \mu'_1 & w'_1 & \varphi' \\ \mu_1 & 1 & \varphi_1 \\ \mu_2 & w_2 & \varphi_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Così la $\frac{\partial \Omega_1}{\partial u} = 0$ si cangia nell'altra:

$$\begin{aligned}
&\Big\{ e^\theta (m_1 \sigma_1 w_2 - m_2 \sigma_2 w_1) + e^{-\theta} (m_1 \varphi_1 w_2 - m_2 \varphi_2 w_1) + \\
&\qquad + m_2 e^\theta \frac{\sigma_1}{\varphi_1} (\varphi_1 w_2 - \varphi_2 w_1) + \\
&\qquad + \left(\frac{e^\theta}{\varphi_1} + \frac{e^{-\theta}}{\sigma_1}\right) [w_1 (\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2) - w_2 (\lambda_1^2 + \mu_1^2)] \Big\} \cdot \mu'_1 + \\
&+ \Big\{ e^\theta (m_2 \sigma_2 \mu_1 - m_1 \sigma_1 \mu_2) + e^{-\theta} (m_2 \mu_1 \varphi_2 - m_1 \mu_2 \varphi_1) + \\
&\qquad + m_2 e^\theta \frac{\sigma_1}{\varphi_1} (\mu_1 \varphi_2 - \mu_2 \varphi_1) + \\
&\qquad + \left(\frac{e^\theta}{\varphi_1} + \frac{e^{-\theta}}{\sigma_1}\right) [\mu_2 (\lambda_1^2 + \mu_1^2) - \mu_1 (\lambda_1 \lambda_2 + w_1 w_2)] \Big\} \cdot w'_1 + \\
&\qquad + m_2 e^{-\theta} \frac{\varphi_1}{\sigma_1} (\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1) \,.\, \sigma'_1 = 0;
\end{aligned}$$

e questa, osservando l'identità $\lambda_1^2 + \mu_1^2 + w_1^2 = 2 m_1 \varphi_1 \sigma_1$, può scriversi sotto l'altra forma:

$$\left.\begin{aligned}
&\Big\{ m_2 e^\theta (\sigma_1 w_2 - \sigma_2 w_1) + \left(\frac{e^\theta}{\varphi_1} + \frac{e^{-\theta}}{\sigma_1}\right) [w_1 (\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + w_1 w_2) - \\
&\qquad - \sigma_1 (m_1 \varphi_1 w_2 + m_2 \varphi_2 w_1)] \Big\} \cdot \mu'_1 + \\
&+ \Big\{ m_2 e^\theta (\sigma_2 \mu_1 - \sigma_1 \mu_2) + \left(\frac{e^\theta}{\varphi_1} + \frac{e^{-\theta}}{\sigma_1}\right) [\sigma_1 (m_1 \varphi_1 \mu_2 - m_2 \varphi_2 \mu_1) - \\
&\qquad - \mu_1 (\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + w_1 w_2)] \Big\} \cdot w' + \\
&\qquad + m_2 e^{-\theta} \frac{\varphi_1}{\sigma_1} (\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1) \,.\, \sigma'_1 = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Similmente, eliminando μ'_1, φ'_1 dalla $\frac{\partial \Omega_1}{\partial v} = 0$, servendosi della $\Omega_1 = 0$ e dell'altra $\begin{vmatrix} \lambda'_1 & w'_1 & \varphi'_1 \\ -\lambda_1 & w_1 & \varphi_1 \\ -\lambda_2 & w_2 & \varphi_2 \end{vmatrix} = 0$, troviamo:

$$\left.\begin{array}{r} \left\{ m_2 e^\theta (\sigma_1 w_2 - \sigma_2 w_1) + \left(\frac{e^\theta}{\varphi_1} - \frac{e^{-\theta}}{\sigma_1}\right) [w_1 (\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + w_1 w_2) - \right. \\ \left. - \sigma_1 (m_1 \varphi_1 w_2 + m_2 \varphi_2 w_1)] \right\} \cdot \lambda'_1 + \\ + \left\{ m_2 e^\theta (\sigma_1 \lambda_2 - \sigma_2 \lambda_1) + \left(\frac{e^\theta}{\varphi_1} - \frac{e^{-\theta}}{\sigma_1}\right) [\lambda_1 (\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + w_1 w_2) - \right. \\ \left. - \sigma_1 (m_1 \varphi_1 \lambda_2 + m_2 \varphi_2 \lambda_1)] \right\} \cdot w'_1 + \\ + m_2 e^{-\theta} \frac{\varphi_1}{\sigma_1} (\lambda_1 w_2 - \lambda_2 w_1) \cdot \sigma'_1 = 0. \end{array}\right\} \quad (23^*)$$

Infine moltiplichiamo la (23) per $\lambda_1 w_2 - \lambda_2 w_1$, la (23*) per $\mu_2 w_1 - \mu_1 w_2$ e sommiamo; così eliminiamo σ'_1 e ponendo poi per $(\lambda_1 w_2 - \lambda_2 w_1) \mu'_1$ il valore tratto da $\Omega_1 = 0$, otteniamo un'equazione che ci determina il rapporto delle due incognite λ'_1, w'_1. Precisamente, se poniamo

$$\Phi_1 = \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + w_1 w_2 - m_2 (\sigma_1 \varphi_2 + \sigma_2 \varphi_1), \tag{24}$$

otteniamo

$$-\lambda'_1 : w'_1 = [\Phi_1 \lambda_1 + (m_2 - m_1) \varphi_1 \sigma_1 . \lambda_2] : [\Phi_1 w_1 + (m_2 - m_1) \varphi_1 \sigma_1 . w_2].$$

Indicando con ρ un fattore di proporzionalità sarà dunque

$$\left.\begin{array}{l} -\lambda'_1 = \rho [\Phi_1 \lambda_1 + (m_2 - m_1) \varphi_1 \sigma_1 . \lambda_2], \\ w'_1 = \rho [\Phi_1 w_1 + (m_2 - m_1) \varphi_1 \sigma_1 . w_2]. \end{array}\right\} \tag{25}$$

Ed ora basta introdurre questi valori di λ'_1, μ'_1 nelle $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ per dedurne le altre due

$$\left.\begin{array}{l} \mu'_1 = \rho [\Phi_1 \mu_1 + (m_2 - m_1) \varphi_1 \sigma_1 \mu_2], \\ \varphi'_1 = \rho [\Phi_1 \varphi_1 + (m_2 - m_1) \varphi_1 \sigma_1 . \varphi_2]. \end{array}\right\} \tag{25'}$$

Infine si determina σ'_1 traendo il valore della ψ_1 da $\frac{\partial \Omega_1}{\partial u} = 0$ e confrontando colla prima delle (21) (*); così otteniamo:

$$\sigma'_1 = \rho\,[\Phi_1 \sigma_1 + (m_2 - m_1)\,\varphi_1 \sigma_1 . \sigma_2]. \qquad (25'')$$

Le formole così ottenute (25), (25′), (25″) determinano, come si voleva, le nostre incognite a meno di un fattore ρ di proporzionalità e dimostrano già che la quarta superficie S' del teorema di permutabilità (se pure esiste) è determinata in modo unico.

§ 8.

Formole definitive di composizione e verifiche.

Ed ora non ci resta che da fare un ultimo passo e determinare il fattore di proporzionalità ρ. Per ciò sostituiamo i valori di λ'_1, μ'_1, σ'_1 per es. nelle ultime formole (I*) § 5:

$$\frac{\partial \sigma'_1}{\partial u} = e^{\theta} \frac{\sigma_1}{\varphi_1} \cdot \lambda'_1, \quad \frac{\partial \sigma'_1}{\partial v} = - e^{\theta} \frac{\sigma_1}{\varphi_1} \cdot \mu'_1;$$

tenendo conto delle (I) cui soddisfano λ_1, μ_1, w_1, φ_1, σ_1 (per $m = m_1$) e delle analoghe per λ_2, μ_2, w_2, φ_2, σ_2, troviamo:

$$\frac{\partial \log \rho}{\partial u} = - e^{-\theta} \frac{\lambda_1}{\sigma_1} - e^{\theta} \frac{\lambda_1}{\varphi_1}, \quad \frac{\partial \log \rho}{\partial v} = e^{-\theta} \frac{\mu_1}{\sigma_1} - e^{\theta} \frac{\mu_1}{\varphi_1},$$

formole che, per le (I) stesse, possiamo scrivere

$$\frac{\partial \log \rho}{\partial u} = - \frac{\partial}{\partial u} \log (\varphi_1 \sigma_1), \quad \frac{\partial \log \rho}{\partial v} = - \frac{\partial}{\partial v} \log (\varphi_1 \sigma_1).$$

Integrando abbiamo: $\rho = \frac{c}{\varphi_1 \sigma_1}$, essendo c un fattore costante (arbitrario) che, stante l'omogeneità delle formole, possiamo prendere $= 1$. Così abbiamo

(*) La medesima formola per σ'_1 otteniamo sostituendo i valori (25), (25′) nell'identità $\lambda'^2_1 + \mu'^2_1 + w'^2_1 = 2\, m_2\, \varphi'_1\, \sigma'_1$.

le formole definitive richieste

$$\left.\begin{aligned}
-\lambda'_1 &= \frac{\Phi_1}{\varphi_1\sigma_1}\cdot\lambda_1 + (m_2-m_1)\lambda_2, \quad \mu'_1 = \frac{\Phi_1}{\varphi_1\sigma_1}\cdot\mu_1 + (m_2-m_1)\mu_2, \\
w'_1 &= \frac{\Phi_1}{\varphi_1\sigma_1}\cdot w_1 + (m_2-m_1)w_2, \quad \varphi'_1 = \frac{\Phi_1}{\varphi_1\sigma_1}\cdot\varphi_1 + (m_2-m_1)\varphi_2, \\
\sigma'_1 &= \frac{\Phi_1}{\varphi_1\sigma_1}\cdot\sigma_1 + (m_2-m_1)\sigma_2,
\end{aligned}\right\} \tag{III}$$

dove il valore di Φ_1 è dato dalla formola

$$\Phi_1 = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + w_1w_2 - m_2(\sigma_1\varphi_2 + \sigma_2\varphi_1). \tag{IV}$$

Procedendo ora alle verifiche, è facile in primo luogo constatare che i valori di λ'_1, μ'_1, w'_1, φ'_1, σ'_1 dati dalle (III) soddisfano effettivamente alle equazioni differenziali (I*) § 5. Ciò si fa nel modo più semplice osservando che per le derivate della funzione Φ_1 definita dalla (IV), a causa delle equazioni differenziali (I) cui soddisfano λ_1, μ_1, w_1, φ_1, σ_1 e λ_2, μ_2, w_2, φ_2, σ_2, sussistono le formole seguenti

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi_1}{\partial u} &= (m_2-m_1)\lambda_2(e^{\theta}\sigma_1 + e^{-\theta}\varphi_1) \\
\frac{\partial\Phi_1}{\partial v} &= (m_2-m_1)\mu_2(e^{\theta}\sigma_1 - e^{-\theta}\varphi_1).
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Egualmente si vede che λ'_1, μ'_1, w'_1, φ'_1, σ'_1 verificano l'equazione in termini finiti: $\lambda'^2_1 + \mu'^2_1 + w'^2_1 = 2m_2\varphi'_1\sigma'_1$.

Dopo ciò, per arrivare alla dimostrazione completa del teorema di permutabilità, basterà aggiungere le osservazioni seguenti. I valori di λ'_2, μ'_2, w'_2, φ'_2, σ'_2 si otterranno da quelli (III) scambiando nei secondi membri tutte le lettere affette dall'indice 1 colle stesse affette dall'indice 2; avremo cioè:

$$\left.\begin{aligned}
-\lambda'_2 &= \frac{\Phi_2}{\varphi_2\sigma_2}\cdot\lambda_2 + (m_1-m_2)\lambda_1, \quad \mu'_2 = \frac{\Phi_2}{\varphi_2\sigma_2}\cdot\mu_2 + (m_1-m_2)\mu_1, \\
w'_2 &= \frac{\Phi_2}{\varphi_2\sigma_2}\cdot w_2 + (m_1-m_2)w_1, \quad \varphi'_2 = \frac{\Phi_2}{\varphi_2\sigma_2}\cdot\varphi_2 + (m_1-m_2)\varphi_1, \\
\sigma'_2 &= \frac{\Phi_2}{\varphi_2\sigma_2}\cdot\sigma_2 + (m_1-m_2)\sigma_1,
\end{aligned}\right\} \tag{III*}$$

dove si è posto

$$\Phi_2 = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + w_1w_2 - m_1(\sigma_1\varphi_2 + \sigma_2\varphi_1). \tag{IV*}$$

Bisogna ora provare che la trasformata della S_1 mediante la D'_{m_2} colle funzioni trasformatrici (III) coincide colla trasformata della S_2 mediante la D'_{m_1} colle funzioni trasformatrici (III*). Secondo le formole del § 6, basta per ciò provare che sono soddisfatte le (18) ibid, che si ha cioè:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \frac{\lambda_1}{m_1\sigma_1} = \beta_1 + \frac{\lambda_2}{m_2\sigma_2}, \quad \alpha_2 + \frac{\mu_1}{m_1\sigma_1} = \beta_2 + \frac{\mu_2}{m_2\sigma_2}, \\ \alpha_3 + \frac{w_1}{m_1\sigma_1} = \beta_3 + \frac{w_2}{m_2\sigma_2}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Ma calcolando gli effettivi valori di α_1, α_2, α_3 dalle loro formole di definizione (17) § 6 col sostituirvi i valori (III) di λ'_1, μ'_1, w'_1, φ'_1, σ'_1, troviamo

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \frac{\lambda_1}{m_1\sigma_1} &= \frac{(m_2 - m_1)(m_1\lambda_2\varphi_1 - m_2\lambda_1\varphi_2)}{m_1 m_2 \,.\, \Omega}, \\ \alpha_2 + \frac{\mu_1}{m_1\sigma_1} &= \frac{(m_2 - m_1)(m_1\mu_2\varphi_1 - m_2\mu_1\varphi_2)}{m_1 m_2 \,.\, \Omega}, \\ \alpha_3 + \frac{w_1}{m_1\sigma_1} &= \frac{(m_2 - m_1)(m_1 w_2\varphi_1 - m_2 w_1\varphi_2)}{m_1 m_2 \,.\, \Omega}, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

dove si è posto

$$\Omega = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + w_1 w_2 - m_1\varphi_1\sigma_2 - m_2\varphi_2\sigma_1. \tag{28*}$$

Le espressioni dei secondi membri delle (28) sono evidentemente simmetriche nei due sistemi di quantità $(\lambda_1, \mu_1, w_1, \varphi_1, \sigma_1; m_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, w_2, \varphi_2, \sigma_2; m_2)$, onde risultano soddisfatte le (27), c. d. d.

Così il teorema di permutabilità è completamente dimostrato. E se la via percorsa per stabilirlo appare alquanto lunga, i risultati finali espressi dalle formole di composizione (III), (III*) offrono, come si vede, una notevole semplicità, tanto più quando si consideri la generalità della proposizione stabilita. Dal punto di vista analitico queste formole di passaggio dalle soluzioni di sistemi differenziali (I) di Darboux a soluzioni di nuovi sistemi della medesima specie esprimono una singolare proprietà di questi sistemi, o in fine della equazione a derivate parziali del 4.° ordine da cui dipende la ricerca delle superficie isoterme. L'analisi difficilmente avrebbe fatto scoprire per via diretta siffatte proprietà, mentre le considerazioni geometriche vi hanno condotto senza sforzo.

§ 9.

Determinazione della quarta superficie S' e osservazioni complementari.

Trovate le formole (III), (III*) per le funzioni trasformatrici, che conducono dalle S_1, S_2 rispettivamente alla quarta superficie S' del teorema di permutabilità, scriviamo ora le formole effettive che determinano questa superficie.

Per ciò dalle (16*) § 6 deduciamo

$$x' = x - \frac{1}{m_1 \sigma_1}(\lambda_1 X_1 + \mu_1 X_2 + w_1 X_3) -$$
$$- \frac{1}{m_2 \sigma'_1}(\lambda'_1 X_1^{(1)} + \mu'_1 X_2^{(1)} + w'_1 X_3^{(1)});$$

queste, ricordando il significato delle α_1, α_2, α_3 dato dalle (17), si scrivono

$$x' = x - \left(\alpha_1 + \frac{\lambda_1}{m_1 \sigma_1}\right) X_1 - \left(\alpha_2 + \frac{\mu_1}{m_1 \sigma_1}\right) X_2 - \left(\alpha_3 + \frac{w_1}{m_1 \sigma_1}\right) X_3,$$

e infine, per le (28), sotto la forma definitiva:

$$\left.\begin{aligned} x' = x + \frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2 \Omega} [(m_1 \lambda_2 \varphi_1 - m_2 \lambda_1 \varphi_2) X_1 + \\ + (m_1 \mu_2 \varphi_1 - m_2 \mu_1 \varphi_2) X_2 + (m_1 w_2 \varphi_1 - m_2 w_1 \varphi_2) X_3], \end{aligned}\right\} \quad (V)$$

essendo

$$\Omega = \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + w_1 w_2 - m_1 \varphi_1 \sigma_2 - m_2 \varphi_2 \sigma_1 . \quad (V^*)$$

Così abbiamo raggiunto il nostro scopo finale, determinando colle (V) *in termini finiti* la quarta superficie S' del teorema di permutabilità, supposte note S, S_1, S_2. Ed ora aggiungiamo le osservazioni seguenti. Se si suppone $m_1 = m_2$ la Ω, che si riduce allora a Φ_1, diventa una costante a causa delle (26), che dimostrano esser nulle le sue derivate. Però, supposti i sistemi (λ_1, μ_1, w_1, φ_1, σ_1) (λ_2, μ_2, w_2, φ_2, σ_2) reali e distinti, non può essere $\Omega = 0$; altrimenti avremmo

$$\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + w_1 w_2 = m_1 (\sigma_1 \varphi_2 + \sigma_2 \varphi_1)$$

insieme con

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + w_1^2 = 2\, m_1\, \varphi_1\, \sigma_1\,, \qquad \lambda_2^2 + \mu_2^2 + w_2^2 = 2\, m_1\, \varphi_2\, \sigma_2$$

e ne seguirebbe

$$(\lambda_1\, \varphi_2 - \lambda_2\, \varphi_1)^2 + (\mu_1\, \varphi_2 - \mu_2\, \varphi_1)^2 + (w_1\, \varphi_2 - w_2\, \varphi_1)^2 = 0,$$

indi

$$\lambda_1 : \mu_1 : w_1 : \varphi_1 = \lambda_2 : \mu_2 : w_2 : \varphi_2\,.$$

Da queste e dalle equazioni differenziali (I) seguirebbe allora che i due sistemi di funzioni trasformatrici differirebbero solo per un fattore costante comune contro l'ipotesi. Ciò posto, essendo $\Omega \neq 0$, è chiaro che per $m_1 = m_2$ le (V) danno

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

e dimostrano che S' coincide con S. Inversamente se supponiamo S' coincidente con S indi $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$ le (V) *supposto* $m_1 \neq m_2$ danno

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{m_2\, \varphi_2}{m_1\, \varphi_1}$$

e le equazioni

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + w_1^2 = 2\, m_1\, \varphi_1\, \sigma_1\,, \quad \lambda_2^2 + \mu_2^2 + w_2^2 = 2\, m_2\, \varphi_2\, \sigma_2$$

dimostrano che anche il rapporto $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ eguaglia i quattro precedenti. Avremmo dunque

$$\lambda_2 = \rho\, \lambda_1\,, \quad \mu_2 = \rho\, \mu_1\,, \quad w_2 = \rho\, w_1, \quad \varphi_2 = \rho\, \frac{m_2}{m_1}\, \varphi_1\,, \quad \sigma_2 = \rho\, \varphi_1\,;$$

ma allora dalle equazioni differenziali (I) risulterebbe

$$\rho = \text{cost.}\,, \quad m_1 = m_2$$

contro l'ipotesi. Dunque: *S' coincide con S solo quando $m_1 = m_2$.*

Un'altra osservazione importante vogliamo aggiungere. Sebbene abbiamo inteso fin qui di riferirci sempre ad enti e funzioni reali, è chiaro che la parte analitica della trattazione sussiste invariata nel campo complesso. Ora supponiamo sempre la superficie di partenza S reale e diamo alla costante m di Darboux un valore complesso m_1, onde le funzioni integrali λ_1, μ_1, w_1, φ_1, σ_1 dovranno essere pure complesse. Prendendo per m_2 la costante coniugata di m_1, potremo assumere le funzioni trasformatrici λ_2, μ_2, w_2, φ_2, σ_2 rispettivamente coniugate delle precedenti. Il valore di Ω dato dalla (V*) sarà allora reale e reali risulteranno pure, come subito si vede, i secondi membri delle (V). Dunque mentre le superficie S_1, S_2 sono immaginarie (coniugate), la quarta superficie S' del teorema di permutabilità sarà nuovameute reale come la S. Così vediamo che: *il teorema di permutabilità permette di utilizzare anche le trasformazioni immaginarie di* Darboux *per dedurre da una superficie isoterma reale nuove superficie isoterme reali.*

Da ultimo consideriamo nuovamente una quaderna (S, S_1, S_2, S') di superficie isoterme nella relazione del teorema di permutabilità. È chiaro geometricamente che qualunque inversione per raggi vettori reciproci cangia questa quaderna in un'altra della medesima specie. Ma coi risultati del § 3 è facile provare che della medesima proprietà gode la trasformazione di Christoffel. Se indichiamo con $\overline{S}$, $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$, $\overline{S'}$ le quattro trasformate di Christoffel segue dal § 3 che la detta trasformazione cangia le coppie (S_1, S'), (S_2, S') in altre due ($\overline{S_1}$, $\overline{S'}$), ($\overline{S_2}$, $\overline{S'_1}$) nelle quali le due ultime superficie $\overline{S'}$, $\overline{S'}_1$, come trasformate di Christoffel della medesima S', potrebbero al più differire per una traslazione nello spazio. Per provare che coincidono assolutamente osserviamo che dalle nostre formole generali seguono le altre:

$$\overline{x}' = \overline{x} - \frac{1}{m_1 \varphi_1}(\lambda_1 X_1 + \mu_1 X_2 + w_1 X_3) - \\ - \frac{1}{m_2 \varphi'_1}(\lambda'_1 X_1^{(1)} + \mu'_1 X_2^{(1)} + w'_1 X_3^{(1)})$$

$$\overline{x}'_1 = \overline{x} - \frac{1}{m_2 \varphi_2}(\lambda_2 X_1 + \mu_2 X_2 + w_2 X_3) - \\ - \frac{1}{m_1 \varphi'_2}(\lambda'_2 X_1^{(2)} + \mu'_2 X_2^{(2)} + w'_2 X_3^{(2)})$$

e l'identità di queste espressioni risulterà provata ove si dimostri che le tre quantità

$$a_{11}\frac{\lambda'_1}{m_2 \varphi'_1} + a_{21}\frac{\mu'_1}{m_2 \varphi'_1} + a_{31}\frac{w'_1}{m_2 \varphi'_1} + \frac{\lambda_1}{m_1 \varphi_1}$$

$$a_{12}\frac{\lambda'_1}{m_2 \varphi'_1} + a_{22}\frac{\mu'_1}{m_2 \varphi'_1} + a_{32}\frac{w'_1}{m_2 \varphi'_1} + \frac{\mu_1}{m_1 \varphi_1}$$

$$a_{13}\frac{\lambda'_1}{m_2 \varphi'_1} + a_{23}\frac{\mu'_1}{m_2 \varphi'_1} + a_{33}\frac{w'_1}{m_2 \varphi'_1} + \frac{w_1}{m_1 \varphi_1}$$

sono simmetriche rispetto ai due sistemi $(\lambda_1, \mu_1, w_1, \varphi_1, \sigma_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, w_2, \varphi_2, \sigma_2)$. Calcolando effettivamente, troviamo che esse hanno i rispettivi valori:

$$\frac{(m_2 - m_1)(m_1 \sigma_1 \lambda_2 - m_2 \sigma_2 \lambda_1)}{m_1 m_2 \Omega'}, \quad \frac{(m_2 - m_1)(m_1 \sigma_1 \mu_2 - m_2 \sigma_2 \mu_1)}{m_1 m_2 \Omega'},$$

$$\frac{(m_2 - m_1)(m_1 \sigma_1 w_2 - m_2 \sigma_2 w_1)}{m_1 m_2 \Omega'},$$

ove si è posto

$$\Omega' = \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + w_1 w_2 - m_1 \sigma_1 \varphi_2 - m_2 \sigma_2 \varphi_1,$$

e questi offrono appunto l'indicata simmetria. Concludiamo adunque:

La trasformazione di Christoffel, *come le inversioni per raggi vettori reciproci, cangia ogni quaderna di superficie isoterme nella relazione del teorema di permutabilità in un'altra tale quaderna.*

§ 10.

Applicazione successiva delle trasformazioni di Darboux.

Andiamo ora a sviluppare le conseguenze del teorema di permutabilità per quanto riguarda l'applicazione successiva delle trasformazioni di Darboux. Il risultato principale è dato dal teorema seguente:

Se di una superficie isoterma iniziale S si conoscono tutte le trasformate di Darboux, *l'applicazione successiva ed illimitata del processo di trasformazione alle nuove superficie via via ottenute si compie con soli calcoli di derivazione.*

Suppongasi che per la superficie iniziale S si sappia integrare, *per qualunque valore della costante m*, il sistema differenziale (I). Indichino $\lambda, \mu, w, \varphi, \sigma$ i valori generici delle funzioni trasformatrici, e siano $\lambda_1, \mu_1, w_1, \varphi_1, \sigma_1$ un sistema di valori particolari, corrispondenti ad una certa trasformata S_1 della S ed al valore m_1 di m. Se nella (V) poniamo per m_2 il valore generico m, le formole:

$$\left.\begin{aligned} x' = x + \frac{m_1 - m}{m_1 m \Omega} [(m_1 \lambda \varphi_1 - m \varphi \lambda_1) X_1 + \\ + (m_1 \mu \varphi_1 - m \varphi \mu_1) X_2 + (m_1 w \varphi_1 - m \varphi w_1) X_3], \end{aligned}\right\} \quad \text{(VI)}$$

dove

$$\Omega = \lambda_1 \lambda + \mu_1 \mu + w_1 w - m_1 \sigma \varphi_1 - m \varphi \sigma_1 \qquad (\text{VI}^*)$$

daranno *tutte* le trasformate di Darboux della S_1 per trasformazioni D_m, *purchè sia* $m \neq m_1$: è questa una conseguenza immediata del teorema di permutabilità. Ma possiamo completare questo risultato sì da estenderlo anche al caso escluso $m = m_1$, per la qual cosa procederemo ad un passaggio al limite colle considerazioni seguenti. Le funzioni trasformatrici λ, μ, w, φ, σ dipendono, oltre che da u, v, dalla costante m e dai loro valori iniziali, i quali possiamo assumere ed assumiamo quali funzioni arbitrarie di m (soddisfacenti però alla $\lambda^2 + \mu^2 + w^2 = 2\, m\, \varphi\, \sigma$); prenderemo queste funzioni di m in guisa che per $m = m_1$ si riducano ai valori iniziali di λ_1, μ_1, w_1, φ_1, σ_1. Così avremo: $(\lambda)_{m=m_1} = \lambda_1$, $(\mu)_{m=m_1} = \mu_1$, $(w)_{m=m_1} = w_1$, $(\varphi)_{m=m_1} = \varphi_1$, $(\sigma)_{m=m_1} = \sigma_1$ e di più $(\Omega)_{m=m_1} = 0$. Ora nelle formole (VI) i coefficienti di X_1, X_2, X_3 si presenteranno ciascuno, per $m = m_1$, sotto forma indeterminata $\frac{0}{0}$ e si tratterà di trovarne, colle note regole, i veri valori per $m = m_1$. Si osservi che in ciascuno dei detti quozienti (coefficienti di X_1, X_2, X_3) si annullano, per $m = m_1$, non solo il numeratore e denominatore, ma anche le loro derivate prime *prese rapporto ad* m. Pei numeratori, come

$$(m_1 - m) \,.\, (m_1 \lambda \varphi_1 - m \varphi \lambda_1),$$

la cosa è evidente poichè ambedue i fattori scritti si annullano per $m = m_1$ e vediamo che lo stesso accade di $\frac{\partial \Omega}{\partial m}$ osservando che, se si pone per brevità

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial m}\right)_{m=m_1} = \lambda', \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial m}\right)_{m=m_1} = \mu', \quad \left(\frac{\partial w}{\partial m}\right)_{m=m_1} = w',$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial m}\right)_{m=m_1} = \varphi', \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial m}\right)_{m=m_1} = \sigma',$$

si ha dalla (VI*)

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial m}\right)_{m=m_1} = \lambda_1 \lambda' + \mu_1 \mu' + w_1 w' - m_1 (\varphi_1 \sigma' + \sigma_1 \varphi') - \varphi_1 \sigma_1,$$

e d'altra parte l'espressione del secondo membro è nulla, come risulta dal derivare rapporto ad m l'identità $\lambda^2 + \mu^2 + w^2 - 2\, m\, \varphi\, \sigma = 0$, facendovi poi $m = m_1$. Concludiamo che i veri valori di quei rapporti sono dati dai quozienti delle derivate seconde rapporto ad m. Dopo ciò, se poniamo

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial m^2}\right)_{m=m_1} = \Theta(u, v),$$

le (VI) si traducono al limite nelle altre:

$$\left.\begin{array}{l} x' = x + \dfrac{2}{m_1^2 \Theta}\Big\{[m_1(\lambda_1 \varphi' - \varphi_1 \lambda') + \lambda_1 \varphi_1] X_1 + \\ + [m_1(\mu_1 \varphi' - \varphi_1 \mu') + \mu_1 \varphi_1] X_2 + [m_1(w_1 \varphi' - \varphi_1 w') + w_1 \varphi_1] X_3\Big\} \end{array}\right\} \quad \text{(VII)}$$

e danno tutte le trasformate della S_1 per mezzo della trasformazione D_{m_1}, come viene confermato da ciò che restano nella (VII) tre costanti arbitrarie essenziali. Rispetto alla funzione Θ che figura nella (VII), facciamo ancora le osservazioni seguenti. Formando le derivate rapporto ad u, v della Ω data dalla (VI), abbiamo

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u} = (m - m_1)\, e^\theta (\sigma \lambda_1 - \lambda \sigma_1), \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v} = (m - m_1)\, e^\theta (\sigma \mu_1 - \mu \sigma_1). \qquad (30)$$

Se deriviamo queste due volte rapporto ad m, poi facciamo $m = m_1$, ne viene

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u} = 2\, e^\theta (\lambda_1 \sigma' - \sigma_1 \lambda'), \quad \frac{\partial \Theta}{\partial v} = 2\, e^\theta (\mu_1 \sigma' - \sigma_1 \mu'), \qquad (30^*)$$

le quali formole definiscono Θ a meno di una costante additiva.

§ 11.

Ulteriori ricerche sul teorema di permutabilità.

Prima di lasciare il soggetto delle generali superficie isoterme, vogliamo esporre alcune nuove proprietà che si riferiscono al teorema fondamentale. Prendasi una quaderna (S, S_1, S_2, S') di superficie isoterme nella relazione del teorema di permutabilità e siano D_{m_1}, D_{m_2} le trasformazioni di Darboux che legano le rispettive coppie $((S, S_1), (S_2, S'))$, $((S, S_2), (S_1, S'))$. Consideriamo ora una terza trasformazione di Darboux D_{m_3}, con $m_3 \neq m_2 \neq m_1$, che cangi p. e. S in Σ. Pel teorema di permutabilità, sotto la forma B) § 5, la D_{m_3} cangierà le tre coppie (S, S_1), (S, S_2), (S_1, S') in tre coppie omologhe, che indicheremo con (Σ, Σ_1), (Σ, Σ_2), $\Sigma_1, \Sigma')$ ed infine cangierà la quarta coppia (S_2, S') in un'altra (Σ_2, Σ''); *ora noi diciamo che Σ' coincide con Σ''*. Vogliamo cioè provare che: *Le trasformazioni di* Darboux *cangiano ogni quaderna di superficie isoterme nella relazione del teorema di permutabilità in un'altra tale quaderna.* È questa la medesima proprietà che al § 9 abbiamo visto competere alla trasformazione di Christoffel ed all'inversione per raggi vettori reciproci (cf. anche § 5). Si ha così una notevole configurazione di 8 superficie isoterme costituite in guisa che a ciascuna delle 8 superficie sono contigue per trasformazioni D_{m_1}, D_{m_2}, D_{m_3} di Darboux altre tre superficie del gruppo, le costanti m_1, m_2, m_3 rimanendo fisse. In altre parole possiamo dire che se partendo da una superficie iniziale S si applicano tre diverse trasformazioni di Darboux D_{m_1}, D_{m_2}, D_{m_3} che cangino S rispettivamente in S_1, S_2, Σ, indi si costruiscono le nuove superficie isoterme che ne derivano col teorema di permutabilità e così di seguito, non si ottengono, come potrebbe sembrare a prima vista, un'infinità di superficie, ma bensì un ciclo chiuso di 8 superficie dotate delle proprietà descritte.

Per dimostrare le proprietà enunciate adotteremo questo secondo punto di vista e indicheremo come sopra con S', Σ_1, Σ_2 le rispettive superficie isoterme che completano le terne (S, S_1, S_2), (S, S_1, Σ), (S, S_2, Σ) alle quaderne del teorema di permutabilità. Indicando in fine con Σ' la quarta superficie del teorema di permutabilità dopo Σ, Σ_1, Σ_2 sarà provato il nostro teorema se dimostreremo che gli elementi relativi alla Σ' sono composti simmetricamente coi tre sistemi di funzioni trasformatrici

$$(\lambda_1, \mu_1, w_1, \varphi_1, \sigma_1), \quad (\lambda_2, \mu_2, w_2, \varphi_2, \sigma_2), \quad (\lambda_3, \mu_3, w_3, \varphi_3, \sigma_3),$$

che corrispondono ai rispettivi passaggi da S a S_1, da S a S_2, da S a Σ, e colle tre costanti m_1, m_2, m_3. Noi qui sopprimiamo i calcoli alquanto prolissi che accertano la circostanza indicata per le coordinate di un punto mobile sopra Σ' e ci limitiamo a constatare che ha luogo in effetto per l'elemento lineare di Σ' (*). Indichiamo per ciò rispettivamente con

$$(\overline{\lambda}_1, \overline{\mu}_1, \overline{w}_1, \overline{\varphi}_1, \overline{\sigma}_1), \quad (\overline{\lambda}_2, \overline{\mu}_2, \overline{w}_2, \overline{\varphi}_2, \overline{\sigma}_2)$$

(*) Con ciò resta propriamente dimostrato soltanto che le tre superficie ottenute completando le tre terne $(\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2)$, (S_1, Σ_1, S'), (S_2, Σ_2, S') a quaderna del teorema di permutabilità coincidono, *a meno di movimenti nello spazio.*

le rispettive funzioni trasformatrici nel passaggio da Σ a $\bar{\Sigma}_1$, $\bar{\Sigma}_2$ mediante le trasformatrici D_{m_1}, D_{m_2}. Troviamo i valori di queste funzioni, ricordando che Σ_1, Σ_2 completano rispettivamente le terne (S, S_1, Σ), (S, S_2, Σ) ed applicando le formole di composizione (III) § 8. Se poniamo per brevità

$$W_{12} = \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + w_1 w_2, \quad W_{23} = \lambda_2 \lambda_3 + \mu_2 \mu_3 + w_2 w_3,$$
$$W_{31} = \lambda_3 \lambda_1 + \mu_3 \mu_1 + w_3 w_1,$$

le formole indicate si scrivono:

$$\left.\begin{aligned}
-\bar{\lambda}_1 &= [W_{13} - m_1(\sigma_1 \varphi_3 + \sigma_3 \varphi_1)] \frac{\lambda_3}{\varphi_3 \sigma_3} + (m_1 - m_3)\lambda_1, \\
\bar{\mu}_1 &= [W_{13} - m_1(\sigma_1 \varphi_3 + \sigma_3 \varphi_1)] \frac{\mu_3}{\varphi_3 \sigma_3} + (m_1 - m_3)\mu_1, \\
\bar{w}_1 &= [W_{13} - m_1(\sigma_1 \varphi_3 + \sigma_3 \varphi_1)] \frac{w_3}{\varphi_3 \sigma_3} + (m_1 - m_3) w_1, \\
\bar{\varphi}_1 &= [W_{13} - m_1(\sigma_1 \varphi_3 + \sigma_3 \varphi_1)] \frac{1}{\sigma_3} + (m_1 - m_3)\varphi_1, \\
\bar{\sigma}_1 &= [W_{13} - m_1(\sigma_1 \varphi_3 + \sigma_3 \varphi_1)] \frac{1}{\varphi_3} + (m_1 - m_3)\sigma_1,
\end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

e similmente:

$$\left.\begin{aligned}
-\bar{\lambda}_2 &= [W_{23} - m_2(\sigma_2 \varphi_3 + \sigma_3 \varphi_3)] \frac{\lambda_3}{\varphi_3 \sigma_3} + (m_2 - m_3)\lambda_2, \\
\bar{\mu}_2 &= [W_{23} - m_7(\sigma_2 \varphi_3 + \sigma_2 \varphi_2)] \frac{\mu_3}{\varphi_3 \sigma_3} + (m_2 - m_3)\mu_2, \\
\bar{w}_2 &= [W_{23} - m_2(\sigma_2 \varphi_3 + \sigma_3 \varphi_2)] \frac{w_3}{\varphi_3 \sigma_3} + (m_2 - m_2) w_2, \\
\bar{\varphi}_2 &= [W_{23} - m_2(\sigma_2 \varphi_3 + \sigma_3 \varphi_2)] \frac{1}{\sigma_3} + (m_2 - m_3)\varphi_2, \\
\bar{\sigma}_2 &= [W_{23} - m_2(\sigma_2 \varphi_3 + \sigma_3 \varphi_2)] \frac{1}{\varphi_3} + (m_2 - m_3)\sigma_2.
\end{aligned}\right\} \qquad (a^*)$$

Se con $d s_i^2 = e^{2\theta_i}(d u^2 + d v^2)$ indichiamo, per $i = 1, 2, 3$, rispettivamente l'elemento lineare di S_1, S_2, Σ abbiamo (formole (9) § 2):

$$e^{\theta_i} = e^{-\theta} \frac{\varphi_i}{\sigma_i}.$$

Per l'elemento lineare $d s^2 = e^{2\theta'} (d u^2 + d v^2)$ di S', che è la quarta superficie dopo S, S_1, S_2 e proviene da S_1 colle funzioni trasformatrici λ'_1, $\mu'_1, \ldots$ abbiamo dunque

$$e^{\theta'} = e^{-\theta_1} \frac{\varphi'_1}{\sigma'_1} = e^{\theta} \frac{\sigma_1 \varphi'_1}{\varphi_1 \sigma'_1},$$

ossia per le (III) § 8

$$e^{\theta'} = e^{\theta} \frac{\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + w_1 w_2 - m_1 \sigma_1 \varphi_2 - m_2 \sigma_2 \varphi_1}{\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + w_1 w_2 - m_1 \sigma_2 \varphi_1 - m_2 \sigma_1 \varphi_2}.$$

Ora come S' è la quarta superficie dopo S, S_1, S_2, così Σ' è la quarta dopo Σ, Σ_1, Σ_2; e per ciò se $d s^2 = e^{2\omega} (d u^2 + d v^2)$ è l'elemento lineare di Σ' si ha dalla precedente

$$e^{\omega} = e^{\theta_3} \frac{\overline{\lambda}_1 \overline{\lambda}_2 + \overline{\mu}_1 \overline{\mu}_2 + \overline{w}_1 \overline{w}_2 - m_1 \overline{\sigma}_1 \overline{\varphi}_2 - m_2 \overline{\sigma}_2 \overline{\varphi}_1}{\overline{\lambda}_1 \overline{\lambda}_2 + \overline{\mu}_1 \overline{\mu}_2 + \overline{w}_1 \overline{w}_2 - m_1 \overline{\sigma}_2 \overline{\varphi}_1 - m_2 \overline{\sigma}_1 \overline{\varphi}_2},$$

ossia

$$e^{\omega} = e^{-\theta} \frac{\varphi_3 [\overline{\lambda}_1 \overline{\lambda}_2 + \overline{\mu}_1 \overline{\mu}_2 + \overline{w}_1 \overline{w}_2 - m_1 \overline{\sigma}_1 \overline{\varphi}_2 - m_2 \overline{\sigma}_2 \overline{\varphi}_1]}{\sigma_3 [\overline{\lambda}_1 \overline{\lambda}_2 + \overline{\mu}_1 \overline{\mu}_2 + \overline{w}_1 \overline{w}_2 - m_2 \overline{\sigma}_2 \overline{\varphi}_1 - m_2 \overline{\sigma}_1 \overline{\varphi}_2]}. \tag{b}$$

Dopo ciò se, osservando le (a), (a^*), calcoliamo effettivamente le espressioni al numeratore e denominatore nella funzione del secondo membro, troviamo con facili riduzioni le formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_3 [\overline{\lambda}_1 \overline{\lambda}_2 + \overline{\mu}_1 \overline{\mu}_2 + \overline{w}_1 \overline{w}_2 + m_1 \overline{\sigma}_1 \overline{\varphi}_2 - m_2 \overline{\sigma}_2 \overline{\varphi}_1] = \\
&\quad = (m_1 - m_2)(m_1 - m_3) \varphi_1 W_{23} + (m_2 - m_3)(m_2 - m_1) \varphi_2 W_{31} + \\
&\quad + (m_3 - m_1)(m_3 - m_2) \varphi_3 W_{12} - m_1 (m_2 - m_3)^2 \sigma_1 \varphi_2 \varphi_3 - \\
&\quad - m_2 (m_3 - m_1)^2 \sigma_2 \varphi_3 \varphi_1 - m_3 (m_1 - m_2)^2 \sigma_3 \varphi_1 \varphi_2 \\
&\sigma_3 [\overline{\lambda}_1 \overline{\lambda}_2 + \overline{\mu}_1 \overline{\mu}_2 + \overline{w}_1 \overline{w}_2 - m_1 \overline{\sigma}_2 \overline{\varphi}_1 - m_2 \overline{\sigma}_1 \overline{\varphi}_2] = \\
&\quad = (m_1 - m_2)(m_1 - m_3) \sigma_1 W_{23} + (m_2 - m_3)(m_2 - m_1) \sigma_2 W_{31} + \\
&\quad + (m_3 - m_1)(m_3 - m_2) \sigma_3 W_{12} + m_1 (m_2 - m_3)^2 \varphi_1 \sigma_2 \sigma_3 - \\
&\quad - m_2 (m_3 - m_1)^2 \varphi_2 \sigma_3 \sigma_1 - m_3 (m_1 - m_2)^2 \varphi_3 \sigma_1 \sigma_2 .
\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

Queste espressioni sono appunto simmetriche rispetto ai tre sistemi di funzioni trasformatrici λ_i, μ_i, w_i, σ_i, φ_i $(i = 1, 2, 3)$ e alle tre costanti m_1, m_2, m_3, onde è provato quanto si voleva.

Si osservi infine che le due espressioni (c) si ottengono l'una dall'altra scambiando le lettere σ, φ fra loro. Secondo i risultati del § 3, ciò dimostra che: *La trasformazione di* CHRISTOFFEL *cangia ad un tempo le 8 superficie isoterme di un ciclo della natura considerata nelle 8 superficie di un altro ciclo.*

§ 12.

SUPERFICIE ISOTERME SPECIALI.

Lasciando il soggetto delle generali superficie isoterme, passiamo ora a quelle particolari che si collegano, secondo DARBOUX, alla deformazione delle quadriche e che diciamo superficie isoterme *speciali.*

Supponendo di avere una superficie S isoterma dapprima qualunque, riteniamo le nostre solite notazioni (§ 1) e poniamo ancora

$$H=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}, \quad L=e^{2\theta}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right), \quad M=\frac{1}{2}LH, \tag{31}$$

sicchè con H si rappresenta in particolare la curvatura media. Se si ha riguardo alle equazioni di CODAZZI ((5) § 1), e si formano le derivate delle funzioni H, L, M, si trova subito che hanno luogo le formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial u}=-e^{2\theta}\frac{\partial H}{\partial u}, \qquad \frac{\partial L}{\partial v}=+e^{2\theta}\frac{\partial H}{\partial v}\\
&\frac{\partial M}{\partial u}=\frac{1}{r_2}\frac{\partial L}{\partial u}, \qquad \frac{\partial M}{\partial v}=\frac{1}{r_1}\frac{\partial L}{\partial v}.
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Diremo che la superficie S è *isoterma speciale* se le funzioni H, L, M, definite dalle (31), soddisfano sopra S alla relazione di DARBOUX

$$e^{2\theta}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)^2\right]+M^2+2AM+2BH+2CL+D=0, \tag{A}$$

dove A, B, C, D sono costanti. A causa delle prime (32) la (A) si può anche scrivere sotto la forma equivalente:

$$\Delta_1 L+M^2+2AM+2BH+2CL+D=0, \tag{A*}$$

il parametro differenziale primo $\Delta_1 L$ essendo calcolato rispetto all'elemento lineare di S. Siccome poi dai valori delle costanti A, B, C, D dipende unicamente, come si vedrà fra breve (§ 15), la quadrica *associata* alla superficie S, così diremo per abbreviare che una superficie isoterma speciale S, per la quale i valori delle quattro costanti nella relazione (A) siano A, B, C, D, *appartiene alla classe* (A, B, C, D).

Conviene subito osservare che: *una superficie isoterma speciale non può appartenere a due classi diverse* (A, B, C, D), (A_1, B_1, C_1, D_1), se si eccettua il caso delle superficie a curvatura media costante ed eventualmente il caso di superficie di rotazione. Se avvenisse il contrario, sottraendo le due corrispondenti relazioni (A) ne verrebbe una relazione bilineare fra L, H e però il determinante funzionale $\dfrac{\partial (H, L)}{\partial (u, v)}$ dovrebbe annullarsi. Dalle (32) avremmo allora:

$$\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial v}=0,$$

ciò che dà luogo alle due possibilità seguenti:

1.° $H=\text{cost.}$ indi per le (32) anche L, M costanti. In tal caso la superficie S è a curvatura media costante e si possono nella (A) prendere p. e. ad arbitrio A, B, C e determinarne D.

2.° Se H non è costante, sarà per la (33) H funzione o di u soltanto o di v soltanto, poniamo p. e. di u. Allora anche L, M sono funzioni solo di u, e per la prima delle (32) anche θ, indi r_1, r_2. Dunque la S sarebbe superficie di rotazione.

Le formole (32) conducono anche facilmente alla dimostrazione del teorema seguente: *La trasformazione di* Christoffel *cangia una superficie S isoterma speciale della classe (A, B, C, D) in un'altra superficie $\overline{S}$ isoterma speciale della classe (A, B, C, D) colle costanti B, C permutate.* Avendo infatti $\overline{H}, \overline{L}, \overline{M}$ per la trasformata $\overline{S}$ di Christoffel il significato stesso di H, L, M per la S, dalle formole (14) del § 3 deduciamo:

$$\overline{H}=L,\quad \overline{L}=H,\quad \overline{M}=M$$

e quindi, perchè $e^{2\overline{\theta}}=e^{-2\theta}$, abbiamo dalle (32)

$$e^{2\overline{\theta}}\left[\left(\frac{\partial \overline{H}}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial \overline{H}}{\partial v}\right)^2\right]=e^{-2\theta}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2\right]=\Delta_1 L.$$

La (A*) che supponiamo soddisfatta dalla S può dunque scriversi

$$e^{2\bar{\theta}}\left[\left(\frac{\partial \overline{H}}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial \overline{H}}{\partial v}\right)^2\right]+\overline{M}^2+2\,A\,\overline{M}+2\,B\,\overline{L}+2\,C\,\overline{H}+D=0,$$

ciò che dimostra il teorema enunciato.

§ 13.

Proprietà caratteristica delle superficie isoterme speciali.

Una proprietà di fondamentale importanza delle superficie isoterme speciali consiste in ciò che per una tale superficie siamo in grado di assegnare *in termini finiti* tre trasformate di Darboux. Per dimostrarlo consideriamo dapprima una superficie isoterma qualunque S e cerchiamo se si può trovare una tale soluzione delle equazioni differenziali (I) per la trasformazione D_m che la quinta funzione trasformatrice σ eguagli una funzione lineare intera (a coefficienti costanti) della curvatura media H. Escludiamo il caso di σ costante che porta unicamente a coppie parallele di superficie di curvatura media costante (*); allora alterando σ di un fattore costante potremo fare

$$\sigma = H + c \quad (c \text{ costante}).$$

Dalle formole (I) del sistema differenziale paragonate colle (32) si trae

$$\varphi = b - L, \quad w = a - M \quad (a,\ b, \text{ costanti}),$$

(*) E infatti se $\sigma = \text{cost.}$ le (I) danno $\lambda = \mu = 0$, $\varphi = \text{cost.}\, w = \text{cost.}$ e le (7) § 2 dimostrano che la S_1 è parallela alla primitiva S ed essendovi fra le due corrispondenze conforme le due superficie hanno la medesima curvatura media costante. Ciò risulta del resto anche dalle due equazioni (I) $\frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial \mu}{\partial v} = 0$ che danno

$$m\,e^{\theta}\,\sigma + m\,e^{\;\theta}\,\varphi - \frac{e}{r_2}\,w = 0, \quad m\,e^{\theta}\,\sigma - m\,e^{-\theta} - \frac{e^{\theta}}{r_1}\,w = 0,$$

e sommate danno appunto $H = \text{cost.}$, ecc.

e l'equazione (II) $\lambda^2 + \mu^2 + w^2 = 2\, m\, \varphi\, \sigma$ diventa quindi

$$e^{2\theta}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)^2\right] + (a - M)^2 + 2\, m\, (H + c)\, (L - b) = 0\,;$$

questa ha appunto la forma caratteristica (A) della equazione per le superficie isoterme speciali ove si ponga

$$A = 2\, m - a, \quad B = -\, b\, m, \quad C = c\, m, \quad D = a^2 - 2\, m\, b\, c. \tag{34}$$

Dunque intanto: perchè il sistema differenziale (I) ammetta una soluzione con $\sigma = H +$ cost. è necessario che la superficie S sia isoterma speciale. Inversamente se questo avviene ed S appartiene alla classe (A, B, C, D) possiamo prendere le costanti a, b, c, m in guisa da soddisfare le (34), per la qual cosa basta che m sia radice dell'equazione di 3.° grado

$$(2\, m - A)^2 .\, m - D\, m + 2\, B\, C = 0, \tag{B}$$

ottenuta eliminando a, b, c fra le (34), indi conviene assumere per a, b, c i valori

$$a = 2\, m - A\,, \quad b = -\frac{B}{m}\,, \quad c = \frac{C}{m}\,. \tag{35}$$

Dopo ciò constatiamo che le formole

$$\lambda = e^{\theta} \frac{\partial H}{\partial u}\,, \quad \mu = -\, e^{\theta} \frac{\partial H}{\partial v}\,, \quad w = a - M, \quad \varphi = b - L, \quad \sigma = H + c \tag{36}$$

danno una soluzione delle equazioni fondamentali (I), (II). Intanto, a causa delle (32), risultano così soddisfatte le equazioni del sistema (I) relative alle derivate di φ, w, σ. E sono ancora verificate le altre due

$$\frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} \lambda, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} \mu,$$

che si riducono all'unica

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial H}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial H}{\partial v} = 0, \tag{d}$$

la quale segue dalle due prime (32) per eliminazione di L. D'altra parte, essendo per ipotesi verificata la (A), i valori (36) soddisfano l'equazione (II)

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 = 2\, m\, \varphi\, \sigma.$$

Se deriviamo questa rapporto ad u, v troviamo i valori ancora mancanti di $\frac{\partial \lambda}{\partial u}$, $\frac{\partial \mu}{\partial v}$ e vediamo che sono identici a quelli forniti dalle (I. In ciò che precede abbiamo naturalmente supposto $m \neq 0$ per cui le nostre conclusioni cadono in difetto quando l'equazione cubica (B) possiede un'unica radice (tripla) nulla, quando cioè $A = 0$, $D = 0$, $B\,C = 0$. Così abbiamo stabilito il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una superficie isoterma S sia speciale è che il sistema differenziale (I) *di* Darboux *ammetta, per un conveniente valore di $m \neq 0$, una soluzione in cui σ sia funzione lineare intera della curvatura media H. Viceversa se la S è isoterma speciale della classe* (A, B, C, D), *prendasi per m una radice non nulla, dell'equazione cubica B e si assumano le costanti a, b, c secondo le* (35); *allora le* (36) *daranno una soluzione del sistema* (I) *con $\sigma = H + c$.*

Da questa proposizione s'intende escluso il caso in cui l'equazione cubica (B) abbia tutte le radici nulle. Così pure lo intenderemo escluso dalle ricerche dei seguenti paragrafi, ove non s'avverta il contrario.

§ 14.

Superficie isoterme speciali complementari.

Da quanto si è visto sopra risulta che per una superficie isoterma speciale S della classe (A, B, C, D), corrispondentemente alle tre radici m_1, m_2, m_3 dell'equazione cubica (B), potremo trovare, con soli calcoli di derivazione, tre nuove superficie isoterme S_1, S_2, S_3. Dimostreremo subito che S_1, S_2, S_3 sono anch'esse isoterme speciali della classe stessa (A, B, C, D) e ciascuna di esse sta colla primitiva S in relazione invertibile; diremo per ciò che p. e. S, S_1 formano una coppia di superficie isoterme speciali *complementari.* Per dimostrare le nostre asserzioni osserviamo in primo luogo che se S è una superficie isoterma qualunque ed S_1 una sua trasformata di Darboux per mezzo di una D_m, le formole (11) § 2 danno subito le formole generali seguenti

$$H_1 = \frac{\sigma L + 2w}{\varphi}, \quad L_1 = \frac{\varphi H - 2w}{\sigma}, \quad M_1 = M + \left(\frac{H}{\sigma} - \frac{L}{\varphi} - \frac{2w}{\varphi\sigma}\right)\cdot w, \tag{37}$$

avendo H_1, L_1, M_1 per S_1 il significato di H, L, M per S. Ora suppongasi che la S sia isoterma speciale ed S_1 sia una delle tre complementari definita dai valori (36) delle funzioni trasformatrici. Le (37) diventano così:

$$H_1 = \frac{2\,a + c\,L}{b - L}, \quad L_1 = \frac{b\,H - 2\,a}{H + c}, \quad M_1 = \frac{b\,c\,M + a\,b\,H - a\,c\,L - a^2}{b\,c + b\,H - c\,L - 2\,M},$$

che possiamo scrivere

$$H_1 + c = \frac{2\,a + b\,c}{\varphi}, \quad b - L_1 = \frac{2\,a + b\,c}{\sigma}, \quad a - M_1 = \frac{(2\,a + b\,c)\,w}{\varphi\,\sigma}. \tag{38}$$

Ora si rammenti, dal § 4, che nel passaggio inverso da S_1 a S valgono per le funzioni trasformatrici λ_1, μ_1, w_1, φ_1, σ_1 le formole (15), che possono del resto alterarsi per un fattore costante arbitrario nei secondi membri. Confrontando colle (38) e supponendo dapprima $2\,a + b\,c \neq 0$, vediamo che nel passaggio inverso da S_1 a S possiamo prendere

$$\sigma_1 = H_1 + c, \quad \varphi_1 = b - L_1, \quad w_1 = a - M_1.$$

I risultati del paragrafo precedente provano allora che S_1 è isoterma speciale della classe (A, B, C, D); e si ottiene S da S_1 precisamente come S_1 da S. Così se $2\,a + b\,c \neq 0$ è dimostrato quanto si voleva. Ma il caso $2\,a + b\,c = 0$ non fa nemmeno eccezione, poichè dalle (36) segue

$$H_1 = -c, \quad L_1 = b, \quad M_1 = a;$$

la superficie S_1 è a curvatura media costante $-c$ e può dirsi che essa appartiene alla classe (A, B, C, D) poichè, a causa delle (34) e di $2\,a + b\,c = 0$, la (A) trovasi verificata per la S_1.

Dimostrate così le proprietà enunciate per le superficie isoterme speciali complementari, osserviamo che, secondo il teorema del § 11, la superficie isoterma speciale S determinerà colle sue complementari un ciclo di 8 superficie isoterme. Per un teorema generale, che dimostreremo al § 19, tutte queste 8 superficie sono isoterme speciali della medesima classe; di più figura nel gruppo insieme a ciascuna superficie la sua trasformata di Christoffel. Colle formole (c) del § 11 questo si dimostra osservando che se m_1, m_2, m_3 sono le radici della (B) i due secondi membri delle (c) risultano eguali e per ciò $e^{\omega} = e^{\theta}$, il che significa appunto che la Σ' è la trasformata di Christoffel della S.

Queste proprietà singolari del ciclo di 8 superficie isoterme speciali provenienti da una data furono osservate dal DARBOUX (l. c.). Nel caso generale che abbiamo considerato al § 11 la trasformazione di CHRISTOFFEL fa uscire dal ciclo mentre nel caso speciale di DARBOUX trasforma il ciclo in sè stesso. Osserviamo ancora che se le tre radici m_1, m_2, m_3 della equazione cubica sono reali, saranno pure reali le 8 superficie del ciclo; se invece p. e. m_3 è reale ed m_1, m_2 coniugate immaginarie, saranno reali solo le quattro superficie S, S', Σ, Σ' e sarà Σ' trasformata di CHRISTOFFEL di S e medesimamente Σ di S', mentre le rimanenti quattro superficie del ciclo saranno immaginarie.

§ 15.

LE QUADRICHE ASSOCIATE ALLE SUPERFICIE ISOTERME SPECIALI.

Consideriamo una coppia (S, S_1) di superficie isoterme speciali complementari ed il sistema ciclico costituito dai circoli normali ad S, S_1 nelle coppie P, P_1 di punti corrispondenti, e prendiamo a studiare la superficie Σ inviluppo dei piani dei circoli. Dimostreremo che l'elemento lineare di Σ dipende solo dalle quattro costanti (A, B, C, D) che individuano la classe delle due superficie isoterme. Così per tutte le superficie isoterme speciali S di una medesima classe (A, B, C, D) le superficie Σ corrispondenti sono applicabili l'una sull'altra. Dimostreremo ancora, con DARBOUX, che per superficie tipica su cui le Σ sono applicabili può prendersi una quadrica Q (immaginaria), che diciamo *associata* alla classe (A, B, C, D) di superficie isoterme speciali.

Per compiere il calcolo dell'elemento lineare dell'inviluppo Σ applicherò le formole generali del Cap. XX delle *Lezioni* (Vol. II, pag. 204 e ss.), relative alla superficie inviluppo dei piani dei circoli in un sistema ciclico. E dapprima darò le formole generali per il sistema ciclico normale a due superficie isoterme S, S_1, trasformate l'una dell'altra per una D_m di DARBOUX. I piani del sistema ciclico, colle notazioni del § 1, sono i piani normali alle linee $\varphi =$ cost. sulla superficie S; e se indichiamo con ξ, η, ζ le coordinate del punto di contatto del piano mobile col suo inviluppo Σ, le formole (1) Vol. II, pag. 206, danno

$$\xi = x + P(\lambda X_1 + \mu X_2) + Q X_3, \tag{39}$$

e le analoghe per η, ζ, dove i coefficienti P, Q sono da determinarsi dalle condizioni

$$\Sigma(\lambda X_1 - \mu X_2)\frac{\partial \xi}{\partial u} = 0, \quad \Sigma(\lambda X_1 - \mu X_2)\frac{\partial \xi}{\partial v} = 0,$$

le quali esprimono che il piano considerato è tangente a Σ. Da queste si traggono per P, Q i valori

$$P = -\frac{L}{m(\sigma L + \varphi H)}, \quad Q = -\frac{2m\varphi + wL}{m(\ L + \varphi H)}, \tag{40}$$

onde le (39) divengono:

$$\xi = x - \frac{1}{m(\sigma L + \varphi H)}[L\lambda X_1 + L\mu X_2 + (2m\varphi + wL)X_3]. \tag{39*}$$

Supponiamo ora che la S sia isoterma speciale ed appartenga alla classe (A, B, C, D) e la S_1 sia una delle sue tre complementari, avendo φ, w, σ i valori dati dalle (36). Le (40), (39*) diventano così rispettivamente

$$P = \frac{\varphi - b}{m(b\sigma - c\varphi)}, \quad Q = \frac{w(\varphi - b) - 2m\varphi}{m(b\sigma - c\varphi)}, \tag{41}$$

$$\xi = x + \frac{\varphi - b}{m(b\sigma - c\varphi)}[\lambda X_1 + \mu X_2 + wX_3] - \frac{2\varphi}{b\sigma - c\varphi}X_3. \tag{42}$$

Ora, secondo le formole generali del § 296 delle *Lezioni* (Vol. II, pag. 210), se poniamo

$$\alpha = Q - Pw, \quad \beta = P, \quad \psi = w\alpha + m\varphi\sigma\beta + \varphi,$$

ossia per le (41):

$$\alpha = -\frac{2\varphi}{b\sigma - c\varphi}, \quad \beta = \frac{\varphi - b}{m(b\sigma - c\varphi)}, \quad \psi = \frac{\varphi}{b\sigma - c\varphi}[b\sigma - (2a + bc)], \tag{43}$$

per i differenziali $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ abbiamo

$$d\xi = X_3\, d\alpha + [\lambda X_1 + \mu X_2 + wX_3]\, d\beta \tag{44}$$

colle analoghe per $d\eta$, $d\zeta$ e quindi per l'elemento lineare di Σ:

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = d\alpha^2 + 2\, d\beta\, d\psi. \tag{44*}$$

In questo elemento lineare, espresso così per le variabili indipendenti

φ, σ (*), figurano solo le quattro costanti a, b, c, m, ovvero A, B, C, D, onde segue che variando la coppia (S, S_1) di superficie isoterme speciali entro la classe (A, B, C, D) la superficie Σ subisce solo una deformazione, come si era asserito.

Ed ora se assumiamo le coordinate x, y, z di un punto mobile nello spazio date dalle formole

$$x = \alpha, \quad y - iz = \beta, \quad y + iz = 2\psi,$$

questo punto (x, y, z) descrive una superficie d'elemento lineare (41*). Sostituendo i valori effettivi (43) di α, β, ψ, abbiamo

$$x = -\frac{2\varphi}{b\sigma - c\varphi}, \quad y - iz = \frac{\varphi - b}{m(b\sigma - c\varphi)},$$

$$y + iz = \frac{2\varphi}{b\sigma - c\varphi}[b\sigma - (2a + bc)]$$

e l'eliminazione di φ, σ porta all'equazione di 2.° grado

$$\left.\begin{aligned}(y + iz)[x + 2m(y - iz)] = 2ax^2 + 2bx + \\ + 2m(2a + bc)x(y - iz).\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

La superficie in questione è dunque una quadrica Q, e di più, finchè le quattro costanti A, B, C, D (o a, b, c, m) restano qualunque, la quadrica è generale nel senso che i suoi quattro punti d'incontro col circolo immaginario all'infinito sono distinti.

§ 16.

Trasformazioni delle superficie isoterme speciali.

Le proprietà delle superficie isoterme speciali esposte fin qui sono in sostanza quelle fondamentali dovute a Darboux; solo ho modificato il processo di dimostrazione in vista delle ulteriori proprietà che mi propongo di stabilire.

(*) Le variabili φ, σ (o L, H) sono certo indipendenti, inteso escluso il caso delle superficie S a curvatura media costante e delle superficie di rotazione.

Si è visto al § 14 che ogni superficie isoterma speciale S possiede in generale tre superficie trasformate, le sue complementari, che sono ancora isoterme speciali e della medesima classe di S. Ora vogliamo stabilire una proprietà molto più generale e feconda di applicazioni, dimostrando che fra le ∞^4 trasformate di una superficie isoterma speciale S ne esistono ∞^3 che sono nuovamente isoterme speciali e della stessa classe. Arriviamo dapprima a questo risultato fondamentale applicando opportunamente il teorema di permutabilità coll'analisi seguente.

Sia S_1 una superficie complementare di S ottenuta colla trasformazione D_{m_1} di Darboux, corrispondente alle speciali funzioni trasformatrici (36)

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1 = e^\theta \frac{\partial H}{\partial u}, \quad \mu_1 = -e^\theta \frac{\partial H}{\partial v}, \quad w_1 = a - M, \quad \varphi_1 = b - L, \\ &\sigma_1 = H + c, \quad \left(a = 2\, m_1 - A, \quad b = -\frac{B}{m_1}, \quad c = \frac{C}{m_1}\right). \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Si consideri poi una *qualunque* trasformata S_2 della S mediante una trasformazione D_{m_2} *a costante* $m_2 \neq m_1$, per la quale siano $\lambda_2, \mu_2, w_2, \varphi_2, \sigma_2$ le funzioni trasformatrici. Applicando il teorema di permutabilità indichiamo, come al solito, con S' la quarta superficie dopo S, S_1, S_2. Sappiamo che si passa dalla S_2 alla S' mediante una trasformazione D'_{m_1} e le funzioni trasformatrici per questo passaggio sono date dalle formole di composizione (III*) § 8, e cioè:

$$\left.\begin{aligned} -\lambda'_2 &= \frac{\Phi_2}{\varphi_2\,\sigma_2}\lambda_2 + (m_1 - m_2)\lambda_1, \quad \mu'_2 = \frac{\Phi_2}{\varphi_2\,\sigma_2}\mu_2 + (m_1 - m_2)\mu_1, \\ w'_2 &= \frac{\Phi_2}{\varphi_2\,\sigma_2} w_2 + (m_1 - m_2) w_1, \quad \varphi'_2 = \frac{\Phi_2}{\sigma_2} + (m_1 - m_2)\varphi_1, \\ \sigma'_2 &= \frac{\Phi_2}{\varphi_2} + (m_1 - m_2)\sigma_1, \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

avendo posto

$$\Phi_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + w_1 w_2 - m_1(\sigma_1 \varphi_2 + \sigma_2 \varphi_1).$$

Se indichiamo con H_2, L_2, M_2 le quantità H, L, M per la S_2, abbiamo dalle (37)

$$\left.\begin{aligned} &H_2 = \frac{\sigma_2 L + 2\, w_2}{\varphi_2}, \quad L_2 = \frac{\varphi_2 H - 2\, w_2}{\sigma_2}, \\ &M_2 = M + \left(\frac{H}{\sigma_2} - \frac{L}{\varphi_2} - \frac{2\, w_2}{\varphi_2\,\sigma_2}\right) \cdot w_2 . \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Ora dimostriamo che, legando soltanto i valori *iniziali* di λ_2, μ_2, w_2, φ_2, σ_2 con una conveniente relazione lineare omogenea, possiamo ottenere che sussistano le formole:

$$\left.\begin{array}{c}\sigma'_2 = (m_1 - m_2)\,(H_2 + c), \quad \varphi'_2 = (m_1 - m_2)\,(l - L_2), \\ w'_2 = (m_1 - m_2)\,(a - M_2)\,;\end{array}\right\} \tag{49}$$

allora, da quanto abbiamo dimostrato al § 13, risulterà che la S_2 sarà anch'essa isoterma speciale della classe (A, B, C, D) e di più avrà per superficie complementare la S'. Per questo osserviamo che la prima delle (49) si traduce, a causa delle (47), (48), nella

$$\frac{\Phi_2}{\varphi_2} + (m_1 - m_2)\,\sigma_1 = (m_1 - m_2)\left[\frac{\sigma_2}{\varphi_2}\,L + \frac{2\,w_2}{\varphi_2} + c\right],$$

ovvero

$$\Phi_2 + (m_1 - m_2)\,(H\,\varphi_2 - L\,\sigma_2 - 2\,w_2) = 0.$$

Ponendo per abbreviare

$$\Psi = \Phi_2 + (m_1 - m_2)\,(H\,\varphi_2 - L\,\sigma_2 - 2\,w_2), \tag{50}$$

la nostra condizione si scrive quindi

$$\Psi = 0. \tag{50*}$$

Ora dalle (26) § 8 deduciamo

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial u} = (m_2 - m_1)\,\lambda_1\,(e^{\theta}\,\sigma_2 + e^{-\theta}\,\varphi_2), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} = (m_2 - m_1)\,\mu_1\,(e^{\theta}\,\sigma_2 - e^{-\theta}\,\varphi_2),$$

le quali formole, a causa delle equazioni

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} = e^{\theta}\,\lambda_1, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = e^{\theta}\,\mu_1, \quad \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} = e^{-\theta}\,\lambda_1, \quad \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} = -e^{-\theta}\,\mu_1$$

e delle (46), si cangiano nelle altre

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial u} = (m_1 - m_2)\left[\sigma_2\,\frac{\partial L}{\partial u} - \varphi_2\,\frac{\partial H}{\partial u}\right], \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} = (m_1 - m_2)\left[\sigma_2\,\frac{\partial L}{\partial v} + \varphi_2\,\frac{\partial H}{\partial v}\right].$$

Dopo ciò se formiamo le derivate della funzione Ψ, definita dalla (50), troviamo identicamente

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial v} = 0.$$

Dunque in generale l'espressione Ψ è una costante e per soddisfare alla nostra condizione (50*) basta legare con questa relazione lineare omogenea i valori *iniziali* di λ_2, μ_2, w_2, φ_2, σ_2. Dopo ciò la (50*), e quindi anche la prima delle (49) risulterà soddisfatta. Ma è molto facile vedere che anche le due seconde condizioni (49) si troveranno verificate, per la qual cosa basta introdurre in esse per Φ_2 il valore $\Phi_2 = (m_1 - m_2)(L\sigma_2 + 2w_2 - H\varphi_2)$ tratto dalla $\Psi = 0$.

Dimostrate così le nostre asserzioni (*), osserviamo che dalla tripla infinità di trasformate di Darboux della S per mezzo di una D_{m_2}, a costante m_2 fissa, la condizione $\Psi = 0$ fra i valori *iniziali* di λ_2, μ_2, w_2, φ_2, σ_2 stacca una doppia infinità di superficie S_2 isoterme speciali trasformate di S. Abbiamo dunque stabilita la proposizione fondamentale seguente:

Se si considera una superficie isoterma speciale S della classe (A, B, C, D) ed una sua complementare S_1 (**), derivata da S con una D_{m_1} a costante m_1, fra le ∞^3 trasformate della S per mezzo di una trasformazione D_{m_2} a costante fissa $m_2 \neq m_1$, ne esistono ∞^2 che sono isoterme speciali della medesima classe (A, B, C, D), e si ottengono legando i valori iniziali delle funzioni trasformatrici λ_2, μ_2, w_2, φ_2, σ_2 colla relazione lineare omogenea (50*) $\Psi = 0$. *Inoltre la quarta superficie S' del teorema di permutabilità è anche essa isoterma speciale della classe (A, B, C, D) e precisamente complementare di S_2 come S di S_1.*

§ 17.

Integrale primo delle equazioni differenziali (I) per una superficie isoterma speciale.

Della proposizione fondamentale sopra stabilita vogliamo ora dare un'altra dimostrazione più diretta e completa, ove non faremo uso del teorema di permutabilità e comprenderemo non solo il caso $m_2 = m_1$ sopra escluso, ma ben anche quello in cui l'equazione cubica abbia tutte le radici nulle.

(*) Rispetto alla realità delle trasformazioni vedi più avanti la conclusione del § 18.
(**) Con questo naturalmente escludiamo che la S sia singolare nel senso del § 13.

Perciò conviene prima trasformare il risultato ottenuto al paragrafo precedente: che per una superficie isoterma speciale il sistema differenziale (I) possiede l'integrale primo $\psi = \text{cost.}$ Osservando le (46), abbiamo

$$\psi = e^{\theta} \frac{\partial H}{\partial u} \lambda_2 - e^{\theta} \frac{\partial H}{\partial v} \mu_2 - (m_2 H + m_1 c) \varphi_2 + (a - M - 2 m_1 + 2 m_2) w_2 + \\ + (m_2 L - m_1 b) \sigma_2 ,$$

e per le (35) possiamo scrivere

$$\psi = e^{\theta} \frac{\partial H}{\partial u} \lambda_2 - e^{\theta} \frac{\partial H}{\partial v} \mu_2 - (m_2 H + C) \varphi_2 + (2 m_2 - A - M) w_2 + \\ + (m_2 L + B) \sigma_2 ,$$

facendo comparire solo le costanti (A, B, C, D) che individuano la classe di S. Così intanto abbiamo il teorema notevole:

Per una superficie isoterma speciale S della classe (A, B, C, D) il sistema differenziale (I) *di* Darboux, *per una trasformazione D_m, possiede l'integrale primo*

$$\left. \begin{aligned} e^{\theta} \frac{\partial H}{\partial u} \lambda - e^{\theta} \frac{\partial H}{\partial v} \mu - (m H + C) \varphi + (2 m - A - M) w + \\ + (m L + B) \sigma = \text{cost.} \end{aligned} \right\} \tag{C}$$

Cominciamo dal dare una nuova e diretta dimostrazione di questo teorema, senza appoggiarci sul teorema di permutabilità. Osserviamo perciò in primo luogo che all'equazione (d) del § 13

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u \, \partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial H}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial H}{\partial v} = 0,$$

alla quale abbiamo visto soddisfare la curvatura media H di qualunque superficie isoterma S, si può dare l'una o l'altra delle due forme equivalenti

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(e^{\theta} \frac{\partial H}{\partial u}\right) = - e^{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial H}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(e^{\theta} \frac{\partial H}{\partial v}\right) = - e^{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial H}{\partial u}. \tag{e}$$

Supponiamo ora di più che la S sia isoterma speciale della classe (A, B, C, D) e valga quindi la (A) § 12

$$\left(e^{\theta} \frac{\partial H}{\partial u}\right)^2 + \left(e^{\theta} \frac{\partial H}{\partial v}\right)^2 + M^2 + 2 A M + 2 B H + 2 C L + D = 0.$$

Derivando questa rapporto ad u, v coll'aver riguardo alle (32) § 12 ed alle superiori (e), ne deduciamo le altre

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}\left(e^\theta \frac{\partial H}{\partial u}\right) &= e^\theta \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial H}{\partial v} + (A+M)\frac{e^\theta}{r_2} + C e^\theta - B e^{-\theta} \\ \frac{\partial}{\partial v}\left(e^\theta \frac{\partial H}{\partial v}\right) &= e^\theta \frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial u} - (A+M)\frac{e^\theta}{r_1} - C e^\theta - B e^{-\theta}. \end{aligned}\right\} \quad (f).$$

Ed ora se formiamo le due derivate della funzione

$$\psi = e^\theta \frac{\partial H}{\partial u}\lambda - e^\theta \frac{\partial H}{\partial v}\mu - (mH + C)\varphi + (2m - A - M)w + \\ + (mL + B)\sigma,$$

osservando le (e), (f) e le (32) § 12, nonchè le equazioni differenziali (I), vediamo che si ha identicamente

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0;$$

dunque il sistema differenziale (I) possiede l'integrale primo $\psi = \text{cost.}$, c. d. d.

§ 18.

Nuova ricerca delle trasformazioni per le superficie isoterme speciali.

Appoggiandoci sul teorema nuovamente stabilito, prendiamo ora una tale soluzione (λ, μ, w, φ, σ) del sistema fondamentale (I), (II) che la costante del secondo membro nell'integrale primo (C): $\psi = \text{cost.}$ risulti nulla: dimostreremo allora che la superficie trasformata S_1 sarà isoterma speciale della classe (A, B, C, D) di S.

Per ipotesi sussistono le due equazioni

$$e^{2\theta}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)^2\right] + M^2 + 2AM + 2BH + 2CL + D = 0 \quad (51)$$

$$\left.\begin{aligned} e^\theta \frac{\partial H}{\partial u}\lambda - e^\theta \frac{\partial H}{\partial v}\mu - (mH + C)\varphi + (2m - A - M)w + \\ + (mL + B)\sigma = 0, \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

e il nostro teorema sarà provato se dimostriamo che ne segue l'altra

$$e^{2\theta_1}\left[\left(\frac{\partial H_1}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial H_1}{\partial v}\right)^2\right]+M_1^2+2\,A\,M_1+2\,B\,H_1+2\,C\,L_1+D=0. \tag{53}$$

Sostituiremo perciò nel primo membro di quest'ultima per H_1, L_1, M_1 i valori (37) § 14 verificando che ne risulta un'identità. Ora, derivando la prima delle citate (37) rapporto ad u, v, tenendo conto delle (I) e delle (32) § 12, troviamo le seguenti:

$$e^{\theta_1}\frac{\partial H_1}{\partial u}=-e^{\theta}\frac{\partial H}{\partial u}+\Lambda\,\lambda,\quad e^{\theta_1}\frac{\partial H_1}{\partial v}=e^{\theta}\frac{\partial H}{\partial v}+\Lambda\,\mu, \tag{54}$$

dove Λ ha questo significato:

$$\Lambda=\frac{H}{\sigma}-\frac{L}{\varphi}-\frac{2\,w}{\varphi\,\sigma}, \tag{54*}$$

colla quale notazione la formola (37) per M_1 si scrive

$$M_1=M+\Lambda\,w. \tag{55}$$

Facendo nella (53) le sostituzioni date dalle (54), (55), (37), sottraendone la (51), poi dividendo per Λ, resta l'equazione equivalente alla (53):

$$\Lambda\,(\lambda^2+\mu^2)+2\,e^{\theta}\left(\mu\frac{\partial H}{\partial v}-\lambda\frac{\partial H}{\partial u}\right)+(2\,M+\Lambda\,w)\,w+2\,A\,w-$$
$$-2\,B\,\sigma+2\,C\,\varphi=0.$$

Se ora ricordiamo che per la (II) $\lambda^2+\mu^2+w^2=2\,m\,\varphi\,\sigma$ ed alla precedente aggiungiamo il doppio della (52) la trasformiamo nell'altra

$$2\,m\,\varphi\,\sigma\,\Lambda+4\,m\,w-2\,m\,H\,\varphi+2\,m\,L\,\sigma=0,$$

che è un'identità a causa della (54*).

Abbiamo così dimostrato il teorema: *Fra le ∞^3 superficie isoterme dedotte da una superficie isoterma speciale S con una trasformazione D_m di* Darboux *a costante fissa qualunque m, ne esistono ∞^2 isoterme speciali e della classe di S. Queste si ottengono vincolando linearmente ed omogeneamente i valori iniziali delle funzioni trasformatrici per modo che la costante del secondo membro nell'integrale primo (C) § 17 ne risulti nulla.*

Però, affinchè non resti dubbia l'effettiva esistenza di tali trasformazioni *reali*, conviene ancora accertarsi che le due condizioni imposte ai valori iniziali, la prima lineare omogenea data dalla (52) l'altra quadratica fornita dalla (II) $\lambda^2 + \mu^2 + w^2 = 2\, m\, \varphi\, \sigma$, sono compatibili fra loro con valori *reali.* Ma da quest'ultima si ha

$$\left(\frac{\lambda}{m\,\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{m\,\sigma}\right)^2 + \left(\frac{w}{m\,\sigma}\right)^2 = 2\,\frac{\varphi}{m\,\sigma}, \qquad (\alpha)$$

dopo di che la (52) moltiplicata per $\frac{2}{m\,\sigma}$ diventa coll'eliminazione di φ

$$(m\,H + C)\left[\left(\frac{\lambda}{m\,\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{m\,\sigma}\right)^2 + \left(\frac{w}{m\,\sigma}\right)^2\right] = 2\,e^\theta\,\frac{\partial H}{\partial u}\,\frac{\lambda}{m\,\sigma} - 2\,e^\theta\,\frac{\partial H}{\partial v}\,\frac{\mu}{m\,\sigma} +$$
$$+ 2\,(2\,m - A - M)\,\frac{w}{m\,\sigma} + 2\,\frac{m\,L + B}{m}.$$

Escludendo il caso delle superficie a curvatura media costante, per le quali il risultato che vogliamo stabilire è ben noto, è certamente $m\,H + C \neq 0$ e la precedente divisa per $m\,H + C$ si scrive

$$\left(\frac{\lambda}{m\,\sigma} - \frac{e^\theta\,\frac{\partial H}{\partial u}}{m\,H + C}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{m\,\sigma} + \frac{e^\theta\,\frac{\partial H}{\partial v}}{m\,H + C}\right)^2 + \left(\frac{w}{m\,\sigma} + \frac{A + M - 2\,m}{m\,H + C}\right)^2 =$$
$$= \frac{e^{2\theta}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^2 + e^{2\theta}\left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)^2 + (A + M - 2\,m)^2 + 2\,\frac{m\,L + B}{m}\,(m\,H + C)}{(m\,H + C)^2}.$$

Il numeratore del 2.° membro, in forza della (A) § 12, è identicamente eguale a $(2\,m - A)^2 + 2\,\frac{B\,C}{m} - D$, ossia, se indichiamo con $f(m)$ il primo membro dell'equazione cubica (B) § 13, a $\frac{f(m)}{m}$, talchè la condizione da soddisfarsi dai valori iniziali di $\frac{\lambda}{m\,\sigma}$, $\frac{\mu}{m\,\sigma}$, $\frac{w}{m\,\sigma}$ è:

$$\left(\frac{\lambda}{m\,\sigma} - \frac{e^\theta\,\frac{\partial H}{\partial u}}{m\,H + C}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{m\,\sigma} + \frac{e^\theta\,\frac{\partial H}{\partial v}}{m\,H + C}\right)^2 + \left(\frac{w}{m\,\sigma} + \frac{A + M - 2\,m}{m\,H + C}\right)^2 =$$
$$= \frac{f(m)}{m\,(m\,H + C)^2}.$$

Si può dunque soddisfare con valori reali tutte le volte che m verifichi la diseguaglianza

$$\frac{f(m)}{m}=\frac{4\,(m-m_1)\,(m-m_2)\,(m-m_3)}{m}>0,$$

indicando m_1, m_2, m_3 le tre radici dell'equazione cubica (B). Esistono quindi effettivi intervalli per m nei quali le nostre trasformazioni D_m, che cangiano la superficie isoterma speciale S in altre della medesima classe, sono reali. Ed anzi nel caso in cui l'equazione cubica (B) ha radici tutte nulle, caso che prima (§ 16) era escluso, la diseguaglianza è sempre verificata, qualunque sia m, perchè allora $\frac{f(m)}{m}=4\,m^2$. Si osserverà ancora come segua dalle precedenti formole che quando m assume uno dei tre valori m_1, m_2, m_3 le trasformazioni *reali* della nostra classe si riducono all'unica che cangia S nella relativa superficie complementare S_1, S_2, S_3.

§ 19.

Il teorema di permutabilità per le trasformazioni delle superficie isoterme speciali.

Veniamo in fine ad applicare il teorema generale di permutabilità alle nostre trasformazioni delle superficie isoterme speciali. Dimostreremo la proposizione finale seguente:

Se da una superficie isoterma speciale S della classe (A, B, C, D) si passa, colle rispettive trasformazioni di Darboux D_{m_1}, D_{m_2}, *a due nuove superficie isoterme speciali della classe (A, B, C, D), anche la quarta superficie S' del teorema di permutabilità è isoterma speciale della stessa classe* (*).

Adoperando le solite notazioni, dobbiamo qui supporre che le funzioni trasformatrici $(\lambda_1, \mu_1, w_1, \varphi_1, \sigma_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, w_2, \varphi_2, \sigma_2)$ pei rispettivi passaggi

(*) Questa proposizione comprende evidentemente, come caso particolare la seconda parte del teorema al § 16.

da S a S_1 ed a S_2 soddisfino le relative equazioni (C)

$$\left.\begin{aligned} & e^\theta \frac{\partial H}{\partial u}\lambda_1 - e^\theta \frac{\partial H}{\partial v}\mu_1 - (m_1 H + C)\varphi_1 + (2m_1 - A - M) w_1 + \\ & \qquad + (m_1 L + B)\sigma_1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (56)$$

$$\left.\begin{aligned} & e^\theta \frac{\partial H}{\partial u}\lambda_2 - e^\theta \frac{\partial H}{\partial v}\mu_2 - (m_2 H + C)\varphi_2 + (2m_2 - A - M) w_2 + \\ & \qquad + (m_2 L + B)\sigma_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (56^*)$$

La proposizione sarà dimostrata se si prova che i valori delle funzioni trasformatrici λ'_1, μ'_1, w'_1, φ'_1, σ'_1, dati dalle formole di composizione (III) § 8, pel passaggio da S_1 a S' soddisfano conseguentemente alla loro volta l'equazione analoga

$$\left.\begin{aligned} & e^{\theta_1} \frac{\partial H_1}{\partial u}\lambda'_1 - e^{\theta_1} \frac{\partial H_1}{\partial v}\mu'_1 - (m_2 H_1 + C)\varphi'_1 + (2m_2 - A - M_1) w'_1 + \\ & \qquad + (m_2 L_1 + B)\sigma'_1 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (57)$$

Ora moltiplichiamo la (56) per $\frac{\Phi_1}{\varphi_1 \sigma_1}$, la (56*) per $m_2 - m_1$ e sommando, coll'aver riguardo alle (III) § 8, troviamo la formola (58)

$$\left.\begin{aligned} & - e^\theta \frac{\partial H}{\partial u}\lambda'_1 - e^\theta \frac{\partial H}{\partial v}\mu'_1 - C\varphi'_1 - (A + M) w'_1 + B\sigma'_1 - \\ & \qquad - H\left[m_1 \frac{\Phi_1}{\sigma_1} + m_2 (m_2 - m_1)\varphi_2\right] + \\ & \qquad + 2\left[m_1 \frac{\Phi_1}{\varphi_1 \sigma_1} w_1 + m_2 (m_2 - m_1) w_2\right] + \\ & \qquad + L\left[m_1 \frac{\Phi_1}{\varphi_1} + m_2 (m_2 - m_1)\sigma_2\right] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (58)$$

Ma si ha per le (54)

$$\left\{\begin{aligned} & e^{\theta_1} \frac{\partial H_1}{\partial u} = - e^{-\theta} \frac{\partial H}{\partial u} + \Lambda_1 \lambda_1, \quad e^{\theta_1} \frac{\partial H_1}{\partial v} = e^\theta \frac{\partial H}{\partial v} + \Lambda_1 \mu_1 \\ & \Lambda_1 = \frac{H}{\sigma_1} - \frac{L}{\varphi_1} - \frac{2 w_1}{\varphi_1 \sigma_1} \end{aligned}\right.$$

e quindi, sottraendo la (58) dalla (57), quest'ultima si cangia nell'equivalente:

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda_1(\lambda_1\lambda'_1-\mu_1\mu'_1)-m_2H_1\varphi'_1+(2m_2+M-M_1)w'_1+m_2L_1\sigma'_1+\\ &+H\left[m_1\frac{\Phi_1}{\sigma_1}+m_2(m_2-m_1)\varphi_2\right]-2\left[m_1\frac{\Phi_1}{\varphi_1\sigma_1}w_1+m_2(m_2-m_1)w_2\right]-\\ &\qquad-L\left[m_1\frac{\Phi_1}{\varphi_1}+m_2(m_2-m_1)\sigma_2\right]=0. \end{aligned}\right\}\tag{59}$$

Se in questa sostituiamo per H_1, L_1, M_1 i loro valori (37) § 14

$$H_1=\frac{\sigma_1L+2w_1}{\varphi_1},\quad L_1=\frac{\varphi_1H-2w_1}{\sigma_1},\quad M_1=M+\Lambda_1w_1,$$

il primo membro diventa una funzione lineare intera di H, L. Ma i tre coefficienti di questa funzione effettivamente calcolati, col tener conto delle (III) § 8 e dell'identità $\lambda_1^2+\mu_1^2+w_1^2=2m_1\varphi_1\sigma_1$, si riscontrano essere tutti nulli. Dunque la (59) è verificata, e per ciò anche la (57); così è dimostrato l'enunciato teorema di permutabilità.

Ed ora se applichiamo le considerazioni del § 10 per le attuali trasformazioni delle superficie isoterme speciali di assegnata classe (A, B, C, D), veniamo a stabilire il teorema:

Se di una superficie isoterma speciale della classe (A, B, C, D) *sono note tutte le trasformate isoterme speciali della stessa classe, si possono trovare con soli calcoli di derivazione tutte le trasformate delle nuove superficie, e così di seguito illimitatamente.*

Possiamo poi riguardare questi risultati come concernenti le superficie applicabili sopra la superficie Σ associata alla classe (A, B, C, D) e di cui abbiamo calcolato, al § 15, l'elemento lineare. Per questa classe di superficie applicabili la teoria è così portata al punto stesso raggiunto dalla teoria delle superficie a curvatura costante (applicabili sulla sfera o sulla pseudosfera).

Introducendo la quadrica generale (immaginaria) Q, di cui al § 15, possiamo enunciare il nostro risultato finale così:

Se di una superficie Σ applicabile sulla quadrica generale Q sono note tutte le ∞^3 trasformate contigue (applicabili sopra Q), le trasformate delle nuove superficie si avranno senza alcun calcolo d'integrazione. Per tal modo si conosceranno in termini finiti ∞^∞ superficie applicabili sulla quadrica Q.

§ 20.

Caso particolare delle superficie minime e a curvatura media costante.

I risultati a cui siamo giunti nel corso della presente Memoria sono di natura assai generale, comprendendo estese classi di superficie. In questi ultimi paragrafi del lavoro vogliamo brevemente indicare alcuni casi particolari notevoli.

Cominciamo dalle superficie d'area minima o a curvatura media nulla e più in generale da quelle a curvatura media costante, che sono le più semplici superficie isoterme speciali. Troviamo allora quelle trasformazioni di queste superficie che provengono dall'inversione dei teoremi di Guichard, trasformazioni di cui mi occupai in altri lavori (*).

Supponendo in primo luogo che la S sia ad area minima, potremo fare

$$d s^2 = e^{2\theta} (d u^2 + d v^2)$$

$$r_1 = - e^{2\theta}, \quad r_2 = e^{2\theta},$$

e per ciò

$$H = 0, \quad L = -2, \quad M = 0. \tag{60}$$

Considerando la S come superficie isoterma speciale in cui tutte quattro le costanti A, B, C, D sono nulle, saranno applicabili i nostri teoremi generali, come del resto è facile constatare ogni volta con calcolo diretto. L'integrale primo (C) delle equazioni differenziali fondamentali diventa qui, a causa delle (60):

$$w - \sigma = a \quad (a \text{ costante}).$$

Se si prende nulla la costante a, la superficie trasformata S_1 sarà ancora ad area minima, come risulta dal teorema generale al § 17, o come dimostrano subito le formole (37) del § 14. Una tale coppia (S, S_1) di superficie minime, trasformate l'una dell'altra per una D_{m_1}, è un inviluppo conforme di

(*) *Sulle trasformazioni delle superficie a curvatura costante.* Questi *Annali,* Serie 3.ª, Tomo 3 e: *Sulle trasformazioni delle superficie d'area minima.* Rendiconti dei Lincei, settembre 1899.

sfere i cui centri sono distribuiti sopra una superficie applicabile sul paraboloide di rotazione di parametro m_1 (Vol. II, § 350).

Consideriamo ora della superficie minima S due trasformate egualmente d'area minima S_1, S_2, derivate di S per mezzo di due trasformazioni D_{m_1}, D_{m_2}; avremo

$$w_1 = \sigma_1, \quad w_2 = \sigma_2$$

e quindi anche per le (III), (III*) § 8

$$w'_1 = \sigma'_1, \quad w'_2 = \sigma'_2,$$

onde risulta il teorema:

Se di una superficie minima S si considerano due trasformate S_1, S_2 egualmente d'area minima, anche la quarta superficie S' del teorema di permutabilità sarà ad area minima.

Questo è del resto un caso particolare del teorema di permutabilità al principio del paragrafo precedente. Da quanto abbiamo ricordato sopra risulta poi che questa notevole configurazione di quattro superficie minime gode della seguente proprietà: *I luoghi dei centri delle sfere che hanno per rispettivi inviluppi le coppie (S, S_1), (S', S_2) sono applicabili sul paraboloide di rotazione di parametro m_1; e similmente quelli relativi alle coppie (S, S_2) (S', S_1) sul paraboloide di rotazione di parametro m_2.*

Ed ora se delle quattro superficie minime S, S_1, S_2, S' prendiamo le superficie minime coniugate in applicabilità Σ, Σ_1, Σ_2, Σ', sappiamo (Vol. II, pag. 335) che queste, convenientemente collocate nello spazio, formano quattro coppie

$$(\Sigma, \Sigma_1), \quad (\Sigma, \Sigma_2), \quad (\Sigma', \Sigma_1), \quad (\Sigma', \Sigma_2),$$

ciascuna delle quali è costituita dalle due falde di una congruenza rettilinea conforme W (congruenza di Thybaut). Così il teorema superiore dà luogo ad un teorema di permutabilità per le congruenze di Thybaut, affatto analogo a quello che sussiste per le congruenze pseudosferiche (o per le trasformazioni di Bäcklund).

Procedendo ora a considerare il caso di una superficie S a curvatura media costante H, potremo fare per semplicità $H = 1$ ed assumere quindi (Vol. II, pag. 437)

$$d s^2 = e^{2\theta} (d u^2 + d v^2)$$

$$\frac{1}{r_1} = e^{-\theta} \cosh \theta, \quad \frac{1}{r_2} = e^{-\theta} \operatorname{senh} \theta,$$

indi

$$H = 1, \quad L = 1, \quad M = \frac{1}{2}.$$

Riguardando la S come isoterma speciale della classe

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = C = 0, \quad D = \frac{1}{4},$$

tutti i nostri teoremi generali saranno applicabili, in particolare l'integrale primo (C) delle equazioni differenziali fondamentali assumerà qui la forma

$$\sigma - \varphi + 2w = a \quad (a \text{ costante}).$$

Se prendiamo le funzioni trasformatrici λ, μ, w, φ, σ in guisa che la costante a si annulli, anche la superficie trasformata S_1 sarà a curvatura media costante $= 1$, giacchè le (37) § 14 danno subito

$$H_1 = 1, \quad L_1 = 1, \quad M_1 = \frac{1}{2}.$$

Così, procedendo come nel caso superiore, troviamo il teorema analogo:

Se di una superficie S a curvatura media costante si considerano due trasformate contigue S_1, S_2 colla stessa curvatura media di S, anche la quarta superficie S' del teorema di permutabilità ha la medesima curvatura media costante.

Nel caso attuale poi i luoghi dei centri dei quattro sistemi di sfere sono applicabili due a due sul medesimo ellissoide (allungato) o iperboloide (a due falde) di rotazione.

Osserviamo ancora che se delle quattro superficie a curvatura media costante S, S_1, S_2, S', prendiamo le rispettive parallele a curvatura costante positiva, possiamo riguardare il teorema superiore come teorema di permutabilità per le trasformazioni *reali* delle superficie applicabili sulla sfera. Proprietà del tutto analoghe hanno luogo, senza che vi insistiamo, per le trasformazioni delle superficie pseudosferiche. Questi teoremi di permutabilità possono del resto geometricamente dedursi da quello elementare delle trasformazioni di Bäcklund; ed anzi da queste considerazioni geometriche, le quali dimostravano il teorema di permutabilità in casi particolari, fui condotto alle ricerche generali esposte nel presente lavoro.

§ 21.

Altre classi notevoli di superficie isoterme speciali.

Dopo le superficie a curvatura media costante o nulla sono notevoli, come superficie isoterme speciali, quelle superficie S che si ottengono quali immagini delle superficie Σ a curvatura media costante o nulla dello spazio generale di curvatura media costante, rappresentando nel noto modo conforme questo spazio sull'ordinario spazio euclideo (*). Proveremo in effetto che queste superficie S sono isoterme speciali e determineremo la classe a cui appartengono nel modo seguente.

Abbiasi nello spazio di curvatura costante K_0 una superficie Σ di curvatura media costante h. Le sue linee di curvatura u, v formano un sistema isotermo, al quale riferendo la superficie abbiamo per l'elemento lineare

$$d s^2 = e^{2\theta} (d u^2 + d v^2).$$

Le equazioni di Codazzi danno poi per le curvature principali $\frac{1}{\rho_1}$, $\frac{1}{\rho_2}$ di Σ le formole

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{2} (h + e^{-2\theta}), \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{2} (h - e^{-2\theta}),$$

mentre l'equazione di Gauss si traduce nell'equazione a derivate parziali per θ:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \left(K_0 + \frac{h^2}{4}\right) e^{2\theta} - \frac{e^{-2\theta}}{4} = 0. \tag{D}$$

Se dello spazio curvo facciamo la rappresentazione conforme sull'euclideo colla nota formola di Riemann, per l'elemento lineare del primo spazio avremo

$$d s^2 = \frac{d x^2 + d y^2 + d z^2}{\lambda^2},$$

(*) Queste superficie isoterme furono considerate la prima volta nella mia Memoria del 1888 negli *Atti dei Lincei*. Molto posteriormente se ne occuparono i geometri francesi, in particolare Thybaut.

avendo posto

$$\lambda = 1 + \frac{K_0}{4}(x^2 + y^2 + z^2). \tag{61}$$

Indicando con S la superficie immagine di Σ, la S avrà, come Σ, le linee di curvatura isoterme e l'elemento lineare

$$d\,s^2 = \lambda^2\, e^{2\theta}\,(d\,u^2 + d\,v^2).$$

Per le curvature principali $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$ di S dalle formole del Vol. I, pagina 514, abbiamo

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{2\,\lambda}(h + e^{-2\theta}) + \frac{K_0}{2\,\lambda}W, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{2\,\lambda}(h - e^{-2\theta}) + \frac{K_0}{2\,\lambda}W,$$

dove con $W = X\,x + Y\,y + Z\,z$ si indica la distanza dell'origine dal piano tangente di S; adoperando le consuete notazioni della presente Memoria, abbiamo qui adunque

$$H = \frac{h + K_0\,W}{\lambda}, \quad L = \lambda\,, \quad M = \frac{h + K_0\,W}{2}. \tag{62}$$

Ed ora per dimostrare che S è isoterma speciale e per determinarne la classe, dobbiamo determinare le costanti A, B, C, D in guisa da soddisfare l'equazione (A*) § 12:

$$\Delta_1\,L + M^2 + 2\,A\,M + 2\,B\,H + 2\,C\,L + D = 0. \tag{63}$$

Ma si ha (Vol. I, pag. 146)

$$\Delta_1\,L = \Delta_1\,\lambda = \frac{K_0^2}{4}(x^2 + y^2 + z^2 - W^2),$$

ossia

$$\Delta_1\,L = K_0\,(L - 1) - \frac{K_0^2 \,.\, W^2}{4}$$

e sostituendo nella (63) i valori (62) per H, L, M ed il precedente per $\Delta_1\,L$ troviamo

$$A = -\frac{h}{2}, \quad B = 0, \quad C = -\frac{K_0}{2}, \quad D = K_0 + \frac{h^2}{4}.$$

Concludiamo di qui: *Le immagini euclidee delle superficie di curvatura* *media costante h immerse nello spazio a curvatura costante K_0, nella rappresentazione conforme di questo spazio sull'euclideo data dalla formola Riemanniana:*

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left[1 + \frac{K_0}{4}(x^2 + y^2 + z^2)\right]^2},$$

sono superficie isoterme speciali della classe

$$\left(-\frac{h}{2},\ 0,\ -\frac{K_0}{2},\ K_0 + \frac{h^2}{4}\right).$$

È chiaro che le trasformazioni delle superficie a curvatura media costante o nulla dello spazio ellittico ed iperbolico da me studiate nei Vol. 4, 5 di questi *Annali* restano subordinate, come caso particolare, alle trasformazioni delle superficie isoterme speciali della presente Memoria.

Se consideriamo ora più particolarmente il caso della curvatura K_0 negativa e poniamo $K_0 = -\frac{1}{R^2}$, possiamo più semplicemente prendere la rappresentazione conforme sul semispazio euclideo data da

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Allora le (62) ci danno

$$H = \frac{Rh + 2Z}{z}, \quad L = \frac{z}{R}, \quad M = \frac{h}{2} + \frac{Z}{R} \tag{64}$$

e inoltre abbiamo

$$\Delta_1 L = \frac{1 - Z^2}{R^2},$$

per cui si soddisfa la (63) ponendo

$$A = -\frac{h}{2}, \quad B = C = 0, \quad D = \frac{h^2}{4} - \frac{1}{R^2}.$$

In questo caso adunque: *La superficie isoterma speciale S dello spazio euclideo appartiene alla classe* $\left(-\frac{h}{2},\ 0,\ 0,\ \frac{h^2}{4} - \frac{1}{R^2}\right)$.

È degno di nota il caso particolare in cui la curvatura media h ha il valore $\pm\frac{2}{R}$; allora la (D) si riduce all'equazione di Liouville che si integra completamente. Le superficie in questione si hanno dunque in termini finiti, come già osservai nella mia Memoria del 1888 sopra citata. Queste superficie furono poi particolarmente studiate da Thybaut nel Tom. 17, ser. 3.ª degli *Annales de l'École Normale supérieure* (1900) e caratterizzate dal fatto che le sfere tangenti alla superficie e ad un piano fisso (piano limite della metrica non euclidea) tracciano una rappresentazione conforme della superficie sul piano (*). Colle nozioni attuali sulle trasformazioni di Darboux possiamo dire in altre parole: *Le superficie attuali sono le trasformate di* Darboux *del piano, considerato come superficie isoterma.*

Possiamo darne una nuova dimostrazione osservando che per le superficie in discorso la prima delle (64) dà l'equazione caratteristica a derivate parziali:

$$H = 2\,\frac{Z \pm 1}{z}.$$

D'altra parte, considerando un piano come superficie isoterma ed applicando le formole (37) relative alle trasformate di Darboux troviamo appunto che per queste trasformate del piano si verifica l'equazione superiore.

§ 22.

Le superficie isoterme speciali con $B = 0$.

Le superficie isoterme speciali a cui siamo giunti nel paragrafo precedente con considerazioni di geometria non euclidea hanno questa proprietà comune che per esse $B = 0$. Vogliamo ora terminare dimostrando che le superficie isoterme speciali con $B = 0$, oltre quelle del paragrafo precedente, sono unicamente le superficie di curvatura media costante e le loro trasformate per raggi vettori reciproci.

Supposto che per la superficie isoterma speciale S sia $B = 0$, sarà anche $b = 0$; e le formole (43) del § 15 dimostrano che allora le funzioni α, β si

(*) La stessa cosa, sotto forma leggermente diversa, trovasi stabilita nelle mie *Ricerche di geometria non euclidea* nel Tomo II, Serie 3.ª di questi *Annali* (1898).

riducono a costanti, onde le (44) danno

$$d\xi = 0, \quad d\eta = 0, \quad d\zeta = 0,$$

cioè $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$, $\zeta = \zeta_0$, essendo ξ_0, η_0, ζ_0 tre costanti. Tutti i piani del sistema ciclico normale alle due superficie complementari S, S_1 passano dunque pel punto fisso (ξ_0, η_0, ζ_0) e quindi, per un noto teorema (Vol. II, pag. 157), i circoli sono normali ad una sfera fissa col centro in (ξ_0, η_0, ζ_0). Questa sfera può essere reale od immaginaria ed anche ridursi al centro, annullandosi il raggio. Se la sfera non ha raggio nullo, si assuma come sfera limite della rappresentazione conforme dello spazio di curvatura costante sull'euclideo, ove allora i circoli normali alla sfera limite rappresentano geodetiche dello spazio curvo. Le due superficie S, S_1 sono le immagini di due superficie *parallele* dello spazio curvo, che risultano rappresentate conformemente l'una sull'altra ed hanno quindi la medesima curvatura media costante (*).

Se poi la sfera si riduce al centro (ξ_0, η_0, ζ_0) per questo punto passano tutti i circoli del sistema, ed un'inversione per raggi vettori reciproci con questo centro cangia i circoli in rette e le due superficie isoterme speciali complementari in due superficie parallele (dello spazio euclideo) rappresentate conformemente l'una sull'altra, e quindi di curvatura media costante. È facile ora provare inversamente che ogni trasformata per raggi vettori reciproci di una superficie S di curvatura media costante è una superficie iso-

(*) Questa proprietà, ben nota in geometria euclidea, si dimostra con eguale facilità in geometria ellittica od iperbolica. Per esempio, se lo spazio è ellittico, di curvatura $K_0 = \frac{1}{R^2}$, e consideriamo una superficie S riferita alle sue linee di curvatura, colle notazioni e colle formole del § 215, Vol. I (pag. 497), troviamo che l'elemento lineare della superficie S' parallela ad S e distante da questa di un tratto $= a$ è dato da

$$ds'^2 = \left(\cos\frac{a}{R} + \frac{1}{r_2}\,\mathrm{sen}\,\frac{a}{R}\right)^2 . E\,du^2 + \left(\cos\frac{a}{R} + \frac{1}{r_1}\,\mathrm{sen}\,\frac{a}{R}\right)^2 . G\,dv^2.$$

Se la rappresentazione di S' su S è conforme si deve avere

$$\cos\frac{a}{R} + \frac{1}{r_2}\,\mathrm{sen}\,\frac{a}{R} = \pm\left(\cos\frac{a}{R} + \frac{1}{r_1}\,\mathrm{sen}\,\frac{a}{R}\right),$$

e quindi o $r_1 = r_2$ (sfera), ovvero $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = -2\cot.\frac{a}{R}$. Così S, S' hanno la medesima curvatura media costante.

terma speciale con $B = 0$. Ed infatti se prendiamo per origine il centro d'inversione ed il raggio $= 1$, le formole d'inversione

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad y' = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad z' = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

danno

$$d s'^2 = \frac{d x^2 + d y^2 + d z^2}{\lambda^2}, \quad \lambda = x^2 + y^2 + z^2.$$

Procedendo in modo perfettamente analogo a quello del § 21, troviamo che la superficie S', inversa della S a curvatura media costante $= h$, è isoterma speciale della classe

$$A = -\frac{h}{2}, \quad B = 0, \quad C = -2, \quad D = \frac{1}{4}.$$

Se ricordiamo poi che le uniche rappresentazioni conformi dello spazio euclideo sopra sè stesso sono date dalle inversioni, possiamo enunciare il risultato ottenuto col teorema: *Le superficie isoterme speciali con* $B = 0$ *sono tutte e sole le immagini nello spazio euclideo delle superficie di curvatura media costante degli spazî di curvatura costante positiva, negativa* (*o nulla*) *in una rappresentazione conforme di questi spazî sull'euclideo.*

Pisa, Luglio 1904.

Sulla teoria dei gruppi discontinui.

(*Di* GUIDO FUBINI, *a Catania.*)

§ 1. La teoria dei gruppi discontinui (cioè *senza trasformazioni infinitesime*) (*) di proiettività su una sola variabile è dovuta nei suoi tratti essenziali a POINCARÉ e KLEIN; qualche interessante risultato è dovuto a HILBERT e dimostrato da BLUMENTHAL. Qualche caso di gruppi a due variabili fu studiato da PICARD nei primi volumi degli *Acta Mathematica*; i gruppi, che lasciano fissa una forma, o un sistema di forme quadratiche o Hermitiane del tipo ellittico o iperbolico furono studiate in una mia Memoria degli *Atti dell'Accademia Gioenia di Catania* (1903), che io citerò con (A). Ecco qui i teoremi principali finora noti:

I. *Teor. di* POINCARÉ: Un gruppo discontinuo di proiettività reali in una variabile z, opera in modo propriamente discontinuo sulla z, immaginata come variabile complessa.

II. *Teor. di* POINCARÉ. Sia dato un gruppo G di proiettività P reali o complesse su una variabile z. Se noi pensiamo z come parametro definente una retta variabile di uno dei sistemi di generatrici (immaginarie) di una quadrica Q di tipo iperbolico esistente in uno spazio S euclideo a tre dimensioni, ogni P definirà una proiettività P' reale in S, trasformante Q in sè stessa. Il gruppo G' così ottenuto di proiettività P' è propriamente discontinuo entro Q. Il gruppo G opera o no sulla z in modo propriamente discontinuo, secondochè un poliedro fondamentale di G' ha o non ha qualche faccia su Q, o qualche vertice esterno a Q.

III. *Teor. di* HILBERT-BLUMENTHAL. Sia dato un gruppo G di proiettività P_1 reali unimodulari su di una variabile complessa z_1; i suoi coefficienti siano numeri interi in un campo algebrico H_1, reale insieme ai campi con-

(*) Alcuni autori danno un altro significato alla parola: « *gruppo discontinuo* ».

iugati H_2, $H_3, \ldots, H_m$. Consideriamo insieme a ognuna delle P_1 le proiettività P_2, $P_3, .., P_m$ coniugate su nuove variabili z_2, $z_3, \ldots, z_m$ (*). Il prodotto delle P_1, $P_2, \ldots, P_m$ si indichi con P. Le P formano un gruppo operante in modo propriamente discontinuo sulle variabili z_1, $z_2, \ldots, z_m$.

Ricorderò ancora che la teoria della riduzione delle forme definite quadratiche ternarie fu enunciata da Klein sotto la forma:

IV. *Teor. di* Klein. Il gruppo delle $z'_i = \sum_k a_{ik} z_k$ $(i, k = 1, 2, 3)$ dove le a_{ik} sono interi razionali il cui determinante è uguale a $+1$, opera in modo propriamente discontinuo sulle forme ternarie quadratiche definite a coefficienti razionali.

Infine nella mia Memoria (A) io ho dato il seguente teorema generale, di cui i primi tre precedenti sono casi particolarissimi:

V. *Teor.* Un gruppo discontinuo di proiettività reali (complesse), che trasformino in sè una forma quadratica (Hermitiana) del tipo ellittico o iperbolico, opera in modo propriamente discontinuo sui punti reali (complessi) di una conveniente regione dello spazio ambiente.

In (A) ho pure dimostrato che:

VI. Teor.). Il teorema V si può estendere ai sistemi di forme quadratiche o Hermitiane.

Su ciò ritorneremo nel presente lavoro.

Corollario immediato dei teoremi V, VI è il seguente teorema, che include in sè i teoremi di Poincaré come casi assolutamente particolari:

VII. Un gruppo di movimenti in una metrica definita da una forma quadrica, ossia in uno spazio euclideo, ellittico o iperbolico (non-euclideo) a quante si vogliano dimensioni, se è discontinuo, è anche propriamente discontinuo.

In (A) ho pure dimostrato che:

VIII. A ognuno dei gruppi G, di cui si tratta nei teoremi V e VI, corrisponde una metrica, definita da una forma differenziale quadratica positiva, che ammette un gruppo continuo di Lie di movimenti, di cui G è un sottogruppo discontinuo.

Lo scopo del presente lavoro è di riunire tutti questi risultati sotto un unico punto di vista, di ridurne le dimostrazioni alla massima semplicità, di

(*) Diciamo proiettività coniugate, quelle proiettività, i cui coefficienti omologhi sono numeri coniugati rispettivamente nei campi H_1, $H_2, .., H_m$.

studiare senz'altro i gruppi proiettivi più generali in quante si vogliano variabili, di studiare insieme i gruppi discontinui di movimenti in una metrica qualunque definita da una forma differenziale positiva, quadratica o no, che ammette un gruppo di LIE di movimenti, di approfondire infine le relazioni tra tutti questi gruppi, mettendo anche in rilievo i casi particolari più notevoli.

Gli ultimi paragrafi sono dedicati a un rapido cenno sulle applicazioni dei nostri gruppi alla teoria delle funzioni (automorfe), e alla teoria dei numeri, ossia alla teoria dell'equivalenza di forme algebriche intere a coefficienti interi, non solo nel campo assoluto di razionalità, ma addirittura in un qualsiasi campo algebrico.

Ricorderò infine che le proiettività su una sola variabile furono da POINCARÉ e KLEIN distinte in ellittiche, iperboliche, paraboliche, lossodromiche; nella mia Mem. cit. (A) io ho dimostrato che i movimenti in una metrica definita da una quadrica (metrica di CAYLEY, ossia a curvatura costante) a quante si vogliano dimensioni si distinguono pure in ellittici, parabolici, iperbolici e lossodromici (prodotto di un movimento ellittico per un altro parabolico o iperbolico) Nei casi generali, che noi studieremo, è impossibile giungere a una classificazione tanto precisa e uniforme per casi tanto disparati; io mi accontenterò perciò di premettere alcune proprietà, che, caso per caso, potranno facilitare una tale classificazione, e che in ogni modo ci permetteranno di dimostrare in più modi qualcuno dei nostri teoremi.

§ 2. È ben noto dalla teoria dei divisori elementari, che una proiettività $x'_i = \sum_k a_{ik} x_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ in n variabili è, con una trasformazione di variabili, riducibile a essere prodotto di più proiettività parziali, tutte operanti su variabili distinte, del tipo

$$z'_1 = \rho z_1$$

oppure

$$z'_1 = \rho(z_1 + z_2); \quad z'_2 = \rho(z_2 + z_3); \ldots; \quad z'_{m-1} = \rho(z_{m-1} + z_m);$$

$$z'_m = \rho z_m$$

che noi diremo proiettività a un ciclo di una o di m variabili, di radice ρ (la z_1 sarà detta la *prima* variabile del ciclo). Le radici dei singoli cicli parziali non sono poi altro che le radici dell'equazione (caratteristica)

$$|a_{ik} - \varepsilon_{ik}\rho| = 0 \quad (\varepsilon_{ii} = 1;\ \varepsilon_{ik} = 0\ (i \neq k)).$$

Il punto che ha nulle tutte le nuove coordinate z, eccetto che la prima coordinata di un certo ciclo, *sarà detto punto sostegno di questo ciclo* ed è un punto *lasciato fisso* dalla proiettività in discorso.

Teor. Sia P una proiettività reale, che lascia fissa una forma $V(x_1 x_2 \ldots x_n)$; se essa, ridotta a forma canonica contiene un ciclo (*o più cicli*) *a un termine, la cui radice è in modulo differente da* $+1$, *oppure contiene un ciclo* (*o più cicli*) *a più di un termine, i punti sostegno di tutti questi cicli giacciono sulla varietà $V=0$. Se P contiene due* (o più) *cicli a più di un termine, la retta, che ne congiunge i punti sostegno giace su $V=0$. Se di due punti A, B, lasciati fissi da P, il punto A non giace sulla $V=0$ e la retta AB non è tutta composta di punti uniti, B giace sull'iperpiano polare di A rispetto alla $V=0$. Se A, B sono i punti sostegno di due cicli a un sol termine di radici ρ_1, ρ_2 e se è $\rho_1^h \rho_2^{n-h} \neq 1$, $(h=1, 2, \ldots, n-1)$ allora B giace sulla h^{esima} polare di A rispetto alla $V=0$. Se $\rho_1^h \rho_2^{n-h} \neq 1$ per $h=0, 1, \ldots, n$ allora la retta AB giace sulla $V=0$ ecc.*

Infatti se $z'_1 = \rho z_1$ è un ciclo a un termine di radice ρ (in modulo differente da 1) della nostra proiettività P e $V=f(z_1 z_2 \ldots z_n)$ è la nostra forma mutata in sè stessa dalla P, la semplice sostituzione dimostra che in V è nullo il coefficiente di z_1^k (se k è il grado di f) e che quindi il punto sostegno del ciclo giace sulla $V=0$. Se $z'_1 = \rho(z_1+z_2)\ldots$ è un ciclo a più di un termine di P ed è

$$V = a_0 z_1^k + a_1 z_1^{k-1} + \cdots + a_n$$

(dove a_i è una forma di grado i nelle $z_2, z_3, \ldots$, cosicchè, indicando con b_i delle costanti si può porre in particolare $a_1 = b_2 z_2 + \cdots + b_n z_n$) deve essere

$$a_0 z_1^k + a_1 z_1^{k-1} + \cdots =$$
$$= a_0 \rho^k (z_1+z_2)^k + \{ a_1 + (b_2 z_3 + \cdots) \} \rho^k (z_1+z_2)^{k-1} + \cdots$$

Confrontando i termini in z_1^k se $\rho^k \neq 1$, o quelli in z_1^{k-1} se $\rho^k = 1$ si trova sempre che $a_0 = 0$, ossia che il punto sostegno del ciclo giace su $V=0$. Nello stesso modo si prova che, se y_1, z_1 sono le prime variabili di due cicli a più di un termine, in V mancano tutti i termini di grado k in y_1, z_1 e che quindi la retta unente i punti sostegno giace sulla $V=0$. Se poi A, B sono due punti fissi per P, anche la retta AB è fissa per P. Se A è esterno alla $V=0$, esso è pure esterno al suo iperpiano polare α, che quindi incontra AB in un punto C differente da A; se C è anche distinto da B, allora la retta

AB contenendo tre punti uniti, è tutta composta di punti uniti; se ciò non è, C coincide con B, ossia B cade nell'iperpiano polare di A. Sieno ora A, B i punti sostegno di due cicli a un solo termine di radici ρ_1, ρ_2, le cui variabili corrispondenti sieno y_1, x_1. Sia $\Sigma a_i x_1^{k-i} y_1^i$ $(i=0,\ldots, k)$ il complesso dei termini di grado k in x_1, y_1, dove le a_i sono costanti. Se $\rho_1^h \rho_2^{k-h} \neq 1$ si riconosce tosto, con la semplice sostituzione $x'_1 = \rho_2 x_1$, $y'_1 = \rho_1 y_1$ che $a_h = 0$, ciò che dimostra le ultime parti del precedente teorema.

Questo teorema può essere utile per la classificazione delle proiettività, che lasciano fissa una data forma; p. es., ne è immediato corollario il Teor.: *Se una proiettività reale P lascia fissa una forma definita V (tale cioè che V sia nulla solo per valori nulli di tutte le variabili, quando si escludano valori complessi delle variabili stesse) a coefficienti reali, allora la P è in modulo uguale a* ± 1, *le radici della corrispondente equazione caratteristica sono in modulo uguali a* $+1$, *e i cicli corrispondenti sono tutti a un solo termine.*

Infatti esista, se possibile, in P un ciclo a più di un termine, oppure un ciclo a un solo termine, la cui radice ρ è in modulo differente da $+1$; e ne sia A il punto sostegno; esso per il teor. precedente giacerà su $V=0$, e (poichè per ipotesi $V=0$ non contiene punti reali) sarà un punto immaginario e quindi distinto dal punto B immaginario coniugato. B sarà pure, essendo P a coefficienti reali, sostegno di un ciclo a più di un termine, oppure a un solo termine, di radice immaginaria coniugata alla ρ e quindi in modulo uguale a ρ (modulo per ipotesi $\neq 1$). La retta *reale* AB giacerebbe per il teor. precedente sulla $V=0$, che non contiene rette reali. Dunque tutte le radici sono in modulo uguale a $+1$, e i cicli corrispondenti sono a un solo termine. Il determinante di P (che è reale) e che è uguale al prodotto di dette radici (al più cambiato di segno) è quindi uguale a ± 1. c. d. d.

« *Una proiettività del tipo precedente sarà detta ellittica, perchè si può considerare come movimento in uno spazio ellittico* ». (Cfr. (A)).

È fondamentale per la futura trattazione il

Teor. Se $V = V(x_1 x_2 \ldots x_n)$ *è una forma definita* (nel senso testè spiegato) *allora, dato un numero qualunque a, esiste un numero A, dipendente solo da a e dalla forma V, tale che, se noi prendiamo un sistema qualunque di valori reali per le x per cui $V=a$, questi valori sono in modulo non maggiori di A.*

Infatti diamo a una delle x il valore $+1$, mentre alle altre x diamo valori reali, minori in modulo di $+1$; i valori assoluti corrispondenti della V (funzione naturalmente continua delle x) avranno un minimo p positivo non nullo (perchè se $V=0$ tutte le x sono nulle).

Sia k il grado di V; sarà $V(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e perciò, se diamo alle x dei valori qualunque, di cui il più grande in modulo è λ, sarà $|V| \geqq p |\lambda|^k$; se dunque $V = a$, saranno i valori assoluti delle x tutti minori di $A = \sqrt[k]{\left|\frac{a}{p}\right|}$:

Teor. *Una proiettività reale P che trasformi in sè una forma reale definita V, ha tutti i coefficienti in modulo minori di una costante, dipendente dalla data forma V.*

Se infatti $x'_i = \sum_k a_{ik} x_k$ muta $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in sè stessa, è:

$$V(\sum_k a_{1k} x_k, \sum_k a_{2k} x_k, \ldots, \sum_k a_{nk} x_k) = V(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Sia la V di grado h, e sia b_i il coefficiente di x_i^h. Sarà

$$V(a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}) = b_i$$

e per il teorema precedente le a_{ki} saranno in modulo minori di una costante determinata e finita. Nello stesso modo si dimostra che:

Una proiettività reale P, che muta una forma definita V in un'altra forma (definita), *i cui coefficienti differiscano dai corrispondenti di V di una quantità inferiore a una costante fissa h, ha i propri coefficienti minori in modulo di una costante determinata, dipendente soltanto dalla forma V e dalla costante h.*

§ 3. È ben noto che una proiettività unimodulare reale $z'_i = \sum_k a_{ik} z_k$ è infinitesima allora e allora soltanto che le $a_{ik} - \varepsilon_{ik}$ (dove $\varepsilon_{ii} = 1$, $\varepsilon_{ik} = 0$ per $i \neq k$) (*) sono infinitesime. Un gruppo di proiettività si dice discontinuo, se non contiene proiettività infinitesime, ossia *se, dato il gruppo, si può trovare un numero positivo non nullo α, tale che presa una qualunque proiettività del gruppo, almeno una delle corrispondenti differenze $a_{ik} - \varepsilon_{ik}$ è in modulo maggiore di α.*

Ora io dico che:

Condizione necessaria e sufficiente, affinchè un gruppo G di proiettività unimodulari $z'_i = \sum_k a_{ik} z_k$ sia discontinuo è che, scelto un qualunque numero

(*) Si potrebbero supporre le ε_{ii} tutte uguali a -1; ma con ciò non otterremmo nulla di più, perchè questo caso rientra nel precedente, appena si mutino, come è lecito, i segni di tutte le a_{ik}.

positivo N, esista in G al più un numero finito di proiettività, i cui coefficienti sono in valore assoluto minori di N (e ciò qualunque sia il numero N scelto).

Infatti, se G contiene trasformazioni infinitesime, queste hanno i coefficienti a_{ik} tali che tutte le $a_{ik} - \varepsilon_{ik}$ sono contemporaneamente in modulo piccole a piacere; quindi in G esistono infinite proiettività, i cui coefficienti sono in valore assoluto minori p. es. di 2. Viceversa, se esistono in G infinite proiettività unimodulari, i cui coefficienti in modulo sono minori di N, queste avranno, per noti teoremi della teoria degli insiemi, *almeno* una proiettività limite P, pure unimodulare (appartenente o no a G). Esisteranno quindi in G almeno due proiettività unimodulari distinte prossime quanto si vuole alla P; il prodotto di una per l'inversa dell'altra (apparterrà a G e) sarà infinitesimo. G non è dunque discontinuo.

Donde in particolare: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo di proiettività unimodulari reali trasformanti in sè una data forma definita sia discontinuo, è che esso sia finito (cioè consti di un numero finito di proiettività) e sia perciò anche propriamente discontinuo.*

I. Dim. Infatti le proiettività che mutano una forma definita in sè hanno (§ 2) i coefficienti minori in modulo di una costante finita e quindi per il teor. precedente, se il gruppo è discontinuo è condizione necessaria (ed evidentemente anche sufficiente) che il gruppo sia finito.

II. Dim. Le proiettività di un tal gruppo sono (§ 2) ellittiche; i metodi della mia Mem. cit. (A) dicono subito che il gruppo, se è infinito, (se cioè contiene infinite proiettività) non è discontinuo.

§ 4. Prima di procedere oltre, analizzeremo l'antica dimostrazione del teorema (di Poincaré) relativo ai gruppi discontinui reali su una variabile complessa z (cfr. § 1), che, come è noto, è equivalente al teorema:

Un gruppo G discontinuo di movimenti del piano di Lobacevskij *(di proiettività P reali lascianti fissa una conica reale) è propriamente discontinuo (entro la conica).*

Infatti le proiettività P reali, che lasciano fissa una tal conica C, portano un punto A interno a C in un punto A' infinitamente vicino, soltanto se lasciano fisso un punto B vicino ad A e quindi pure interno a C. Se in una regione R interna a C il gruppo G non fosse propriamente discontinuo esisterebbero in R infiniti punti B, lasciati fissi da qualche P. Esisterebbero quindi in R almeno due tali punti B vicini a piacere; se u, v sono le proiettività di G corrispondenti, $u^{-1} v u$ e v sarebbero proiettività *simili* lascianti fissi due punti interni a C e infinitamente vicini; sarebbe quindi $u^{-1} v u v^{-1}$ una proiettività infinitesima di G, ciò che non può essere.

Questo metodo di dimostrazione, che io con le convenienti modificazioni usai sempre nella mia Mem. (A), è assai più complicato di quello che useremo qui: esso in ogni modo può condurre a qualche interessante risultato, se usato con le dovute cautele. La generalizzazione di quanto diremo ora è lasciata al benevolo lettore. A chi leggesse superficialmente la superiore dimostrazione, potrebbe sembrare che, mutando la parola « interno » con la « esterno », essa dovesse valere anche per i punti esterni a C: ciò che non è. Ed eccone il perchè: per le proiettività che lasciano fisso un punto *interno* a C le radici dell'equazione caratteristica sono tutte in modulo uguali a 1; cosicchè se B, B' sono due punti infinitamente vicini interni a C, qualunque proiettività che lasci fisso B porta B' in un punto infinitamente vicino; invece le radici dell'equazione caratteristica di una proiettività P che lasci fisso un punto B esterno a C possono essere grandi a piacere, cosicchè dato B e un punto B' vicino a piacere si potrà trovare una tale P che lasci fisso B, ma che non porti B' in un punto vicino a B. Applicando il ragionamento di Poincaré ai punti esterni a C, si ha: *Sia G un gruppo discontinuo di proiettività reali lascianti fissa una conica reale C; se vicino quanto si vuole a un punto B esterno a C esistono dei punti lasciati fissi da qualche proiettività di G, allora l'infinito è il limite superiore dei valori assoluti delle radici delle corrispondenti equazioni caratteristiche* (*).

Approfondiamo un po' le conseguenze di questo teorema, limitandoci per brevità al caso classico del gruppo modulare e alla teoria di Klein delle forme quadratiche di Gauss (**). Sia $y^2 - x z = 0$ la conica C in coordinate omogenee; i punti esterni a C di coordinate razionali sono immagini di forme di Gauss a discriminante negativo; in ogni regione R, per quanto piccola, cadono infiniti di questi punti: sia A uno di essi. Esso definisce un sottogruppo ciclico infinito del gruppo modulare, che lascia fisso A e quindi in ogni intorno α di A cadono infinite coppie di punti equivalenti; ora supponiamo, p. es., la forma F (di cui A è l'immagine) ridotta; le forme equivalenti alla F, pure ridotte, sono in numero finito e i loro punti immagine sono

(*) Questo teorema ricorda l'altro: *Se noi consideriamo le frazioni irriducibili (a termini interi positivi) pochissimo differenti da un numero fisso irrazionale, $+\infty$ è il limite superiore dei loro denominatori.*

(**) Cfr., p. es., le *Elliptische Modulfunctionen* di Klein e Fricke.

quindi a distanza finita l'uno dall'altro; « a fortiori » tutti i punti equivalenti ad A sono a distanza finita da A. Quindi:

« *In ogni regione R esterna a C, per quanto piccola, cadono punti A immagini di forme di* Gauss; *in ogni intorno α di A cadono coppie di punti equivalenti, pure non esistendo, se α è abbastanza piccolo, alcun punto equivalente ad A* ».

Come si vede il nostro gruppo discontinuo fuori di C gode *soltanto in parte* delle proprietà inerenti alla discontinuità propria; a questa, diremo così, *semipropria discontinuità* si deve la possibilità di costruire una *teoria della riduzione* delle forme di Gauss a discriminante negativo.

§ 5. *Se un gruppo G discontinuo di proiettività reali unimodulari conserva fisso un sistema S di forme* **definite** *di grado qualunque, ossia muta una forma qualunque di S in un'altra forma di S, allora esso opera in modo propriamente discontinuo sul dato sistema S di forme.*

Infatti sia A una forma di S, tale che una proiettività variabile in G la porti in una forma (di S) i cui coefficienti differiscono dai corrispondenti di A di quanto poco si vuole; esisterebbero in G infinite proiettività, i cui coefficienti (§ 2) sarebbero in valore assoluto minori di una costante fissa; e perciò (§ 3) il gruppo non sarebbe discontinuo. Questo semplice teorema comprende, come vedremo, tutti quelli del § 1 come casi particolari, anzi permette di costruire la teoria generale dei gruppi discontinui di proiettività.

Teor. I. *Un gruppo G discontinuo di proiettività reali operi in uno spazio di Σ a quante si vogliano dimensioni; pensiamo Σ come uno spazio S luogo di quadriche* (*). *Sia R quella regione di S, i cui punti sono immagini di forme quadriche definite di Σ. G è propriamente discontinuo in R.*

Infatti il sistema R di *tutte* le quadriche definite è lasciato fisso da *ogni* proiettività reale e perciò anche da G; ad esso si può quindi applicare il precedente teorema. Analogamente si dimostra:

Teor. II. *Il Teor. I è ancora vero, se invece di forme quadriche* (definite) *si parla di forme* (definite) *di grado qualunque, anche superiore al secondo.*

L'importanza di questi due teoremi consiste in ciò: che essi definiscono uno spazio, in cui ogni gruppo *discontinuo* è *propriamente* discontinuo, e

(*) Vi sia cioè corrispondenza biunivoca tra i punti di S e le quadriche di Σ, o, in altre parole, se $\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k$ è la più generale forma quadrica di Σ, S sia lo spazio in cui le a_{ik} sono coordinate (omogenee).

possiede un campo *fondamentale;* vedremo più avanti l'importanza di questo fatto per le *applicazioni aritmetiche* e *funzionali.*

Può darsi però che per certi gruppi non sia necessario di ricorrere al sistema formato da *tutte* le quadriche (definite), in quanto che anche un sistema parziale subordinato resta invariante per il gruppo.

P. es. un gruppo G di proiettività P complesse su alcune variabili z, di cui indicheremo rispettivamente con x, y la parte reale e l'immaginaria, equivale chiaramente a un gruppo G' di proiettività *reali* P' sulle x, y; ma evidentemente le P' godono di una particolare proprietà. Per vederla, osserviamo che G muta una forma Hermitiana delle variabili z, definita o no, in una forma Hermitiana delle z pure definita o no. Queste forme equivalgono a forme quadratiche sulle x, y definite o no, il cui sistema è lasciato fisso dalle P'. Quindi:

Teor. III. *Sia G un gruppo discontinuo di proiettività reali o complesse su certe variabili z; consideriamo tutte le forme Hermitiane in queste variabili e sia S lo spazio, in cui sono coordinate omogenee la parte reale e l'immaginaria dei coefficienti di queste forme. Sia R quella regione di S, che corrisponde a forme definite. G è in R propriamente discontinuo.*

I teoremi così importanti di Poincaré non sono *che caso particolare dei precedenti;* p. es. ricordando che una forma quadrica non degenere a discriminante positivo $a\, x_1^2 + 2\, b\, x_1\, x_2 + c\, x_2^2$ è, a meno d'un fattore trascurabile (*), determinata, quando sia nota una radice (complessa) di $a\, z^2 + 2\, b\, z + c = 0$, *si ottiene subito il I teorema di* Poincaré (§ 1) *sui gruppi reali di collineazioni su* 2 *variabili omogenee* (una non omogenea).

Quanto al teorema sulle collineazioni immaginarie, basta ricordare che per i risultati del prof. Bianchi (*Math. Ann.*, Tomo 38) l'artificio di Poincaré si può appunto ottenere, considerando i gruppi immaginarii di proiettività su *due* variabili omogenee, come operanti sulle forme Hermitiane di dette variabili, e considerando inoltre queste forme come punti di uno spazio S (a tre dimensioni). È pure ben chiaro per quale ragione i gruppi *reali* (*complessi*) di proiettività su una variabile non omogenea o su due variabili omogenee *sono connessi alla teoria delle metriche* (non euclidee) *rispetto a una quadrica di uno spazio a* 2 (o a 3) *dimensioni;* ciò avviene perchè il gruppo

(*) Non ci occupiamo di questo fattore, perchè nella teoria aritmetica di queste forme se ne suppone noto a priori p. e. il discriminante: ciò, che basta a determinare detto fattore.

considerato come operante sulle forme

$$a x_1^2 + 2 b x_1 x_2 + c x_2^2 \; [a x_1 x_1^0 + (b' + i b'') x_1 x_2^0 + (b' - i b'') x_1^0 x_2 + c x_2 x_2^0]$$

(dove x_i^0 è immaginario coniugato di x_i), che si immaginano come punti di un piano S (spazio S a tre dimensioni), lascia fissa la conica (quadrica) reale di tipo iperbolico

$$a c - b^2 = 0 \; [a c - (b' + i b'')(b' - i b'') = a c - b'^2 - b''^2 = 0].$$

Questa osservazione ci conduce a studiare in generale i gruppi di proiettività, che lasciano fissa una data forma; e noi dimostreremo:

Teor. IV. *Se un gruppo reale proiettivo discontinuo G lascia fissa una forma reale di grado qualunque $f(x_1 x_2 \ldots x_n)$, esso è propriamente discontinuo in quella regione R dello spazio ambiente S* (se pure una tale regione esiste) *i cui punti A godono della proprietà che la loro quadrica e il loro iperpiano polare rispetto alla $f = 0$ non hanno punti comuni, o, in altre parole, che la loro quadrica polare o sia ellittica, o sia iperbolica e contenga all'interno il suo polo, o, in altre parole ancora, che il cono C di vertice A tangente alla quadrica polare di A sia a generatrici immaginarie.*

Teor. V. *Se la $f = 0$* (pure essendo per ipotesi la f a coefficienti reali) *è completamente immaginaria, G è propriamente discontinuo in tutto lo spazio.*

Il teor. V è evidente perchè, essendo in tal caso la f definita, G è per un teorema precedente composto di un numero finito di proiettività ed è quindi propriamente discontinuo.

Per il teor. IV osserviamo, che se $\lambda = 0$ è l'equazione di C, sarà per ipotesi unico suo punto reale il punto A. Ma λ è una forma degenere, perchè C è un cono; e se noi scegliamo la piramide di riferimento, in guisa che A ne sia un vertice e l'iperpiano polare di A (di cui sia $\mu = 0$ l'equazione) ne sia la faccia opposta, allora λ diventa una forma indipendente dalla μ e definita (p. es. positiva) nelle rimanenti variabili. Sarà perciò $\lambda + \mu^2$ una forma non degenere definita, corrispondente al punto A, della quale costruiremo le analoghe per gli altri punti di R; queste forme costituiscono un sistema S invariante per G, *riferito biunivocamente ai punti di R* (*). Applicando il nostro solito teorema fondamentale al sistema S, se ne deduce tosto il teor. IV.

(*) In altre parole a ogni punto di R corrisponde una delle nostre forme, e una proiettività di G, che porta un punto A di R in un punto B, porterà la forma corrispondente al punto A nella forma corrispondente al punto B; se poi A, B sono infinitamente vicini, anche queste due forme sono infinitamente poco differenti l'una dall'altra.

È facile vedere che *p. es. il Teor. I è immediata conseguenza del IV.* Infatti un gruppo di proiettività sulle variabili x, pensato operante sulle forme $\Sigma a_{ik} x_i x_k$, diventa un gruppo proiettivo nello spazio S, in cui le a_{ik} sono coordinate omogenee. In S esso lascia fissa la varietà V, la cui equazione si ottiene annullando il determinante $|a_{ik}|$ ossia ponendo $|a_{ik}| = 0$. Sia ora A una forma quadrica definita delle x; senza diminuire la generalità, potremo supporla uguale a Σx_i^2 ossia potremo supporre che essa abbia in S per coordinate: $a_{ii} = 1$; $a_{ik} = 0 \; (i \neq k)$. La sua quadrica e il suo iperpiano polare rispetto a V sono rispettivamente:

$$\Sigma (a_{ii} a_{kk} - a_{ik}^2) = \frac{1}{2} (\Sigma a_{ii})^2 - \frac{1}{2} \Sigma a_{ii}^2 - \Sigma a_{ik}^2 = 0$$

$$\Sigma a_{ii} = 0.$$

Ed essi non hanno punti reali comuni, perchè da queste equazioni discende $\frac{1}{2} \Sigma a_{ii}^2 + \Sigma a_{ik}^2 = 0$ ossia $a_{ii} = a_{ik} = 0$.

Ritorniamo ora al caso generale del teor. IV; e osserviamo che a ogni punto B dello spazio ambiente S sono connesse proiettivamente più varietà, p. es. le varietà polari di B, e anche più coni di vertice B, p. es. i coni di vertice B tangenti alle varietà polari di B. Ricordando ora che i teoremi del § 2 non solo valgono per forme quadriche definite, ma anche per forme definite di ordine superiore, e ripetendo considerazioni analoghe a quelle del teor. IV, otteniamo:

Teor. VI. *Un gruppo discontinuo di proiettività reali, che trasformano in sè una ipersuperficie $f = 0$, è propriamente discontinuo in quella regione R dello spazio ambiente* (se pure una tal regione esiste) *la quale gode della proprietà che una almeno delle varietà connesse ai suoi punti B (pure avendo un'equazione a coefficienti reali) è immaginaria o uno almeno dei coni di vertice B connessi a B è a generatrici immaginarie.*

È importante per noi ricordare che oltre ai coni di vertice B tangenti a una varietà polare di B, sono invariabilmente connessi a B p. es. anche i coni che proiettano da B l'intersezione di due varietà polari di B, e in particolare l'intersezione di una di queste varietà polari con l'iperpiano polare di B.

Se noi consideriamo p. es. addirittura i coni di vertice B tangenti alla f ritroviamo il teorema:

Un gruppo discontinuo di proiettività reali trasformanti in sè una forma *quadrica ellittica (iperbolica) è propriamente discontinuo in tutto lo spazio (entro la quadrica).*

Noi abbiamo già visto che i gruppi di proiettività complesse si possono studiare, riconducendoli al caso di proiettività reali; qui, come esempio, ci accontenteremo di studiare un caso particolarmente interessante, già studiato in altro modo nella mia Mem. cit. (A). Sia F una forma Hermitiana del tipo $x_1 x_1^0 + \cdots + x_{n-1} x_{n-1}^0 \pm x_n x_n^0$ (dove le x_i^0 sono immaginarie coniugate delle x_i); *un punto* (x_i) *si immagini rappresentato in uno spazio* $S_{2(n-1)}$ (a $2n-2$ dimensioni) *da quel punto, di cui sono coordinate reali non omogenee le* u'_l, u''_l, *essendo* $\frac{x_l}{x_n} = u'_l + i u''_l$ $(l = 1, 2, \ldots, n-1)$. *A una trasformazione sulle* x *corrisponde una trasformazione in* S. Io dico che:

Teor. VII. *A un gruppo discontinuo di proiettività reali o complesse trasformanti in sè la* $F = \sum_1^{n-1} x_i x_i^0 \pm x_n x_n^0$ *corrisponde un gruppo discontinuo di trasformazioni in* S (sulle variabili u'_i, u''_i dove è

$$\frac{x_i}{x_n} = u'_i + i u''_i \, (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

che è propriamente discontinuo in tutto S, *oppure in quella regione* R *di* S *in cui è* $\Sigma\, [(u'_i)^2 + (u''_i)^2] < 1$, *secondo che in* F *vale il segno superiore o inferiore.*

Infatti sia A un punto rispettivamente di S o di R; i valori corrispondenti delle x_i, x_i^0 sono noti a meno di fattori immaginarii coniugati, di cui fisseremo il modulo in guisa che sia $x_n x_n^0 \pm (x_1 x_1^0 + \cdots + x_{n-1} x_{n-1}^0) = +1$; ciò che è possibile, perchè per ipotesi (se vale il segno inferiore, A è in R e quindi) il primo membro dell'uguaglianza precedente è sempre positivo. Siano $x_i = \alpha_i$, $x_i^0 = \alpha_i^0$ i valori così ottenuti; al punto A sono invariabilmente connesse (a meno di fattori immaginari coniugati, indeterminati, di modulo 1) le forme:

$$\Sigma\, \alpha_i \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad \Sigma\, \alpha_i^0 \frac{\partial F}{\partial x_i^0}$$

e quindi è invariabilmente connessa la forma

$$H = \Sigma\, \alpha_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \Sigma\, \alpha_i^0 \frac{\partial F}{\partial x_i^0}$$

e quindi anche la $F + 2H$, che individua, come è facile verificare, il nostro punto A e che, espressa come forma quadratica nella parte reale e nella immaginaria delle x, è una forma quadrica definita. Ciò che per i nostri principi dimostra il precedente teorema (*).

Faremo ora un'altra applicazione dei nostri risultati.

Siano $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$ n variabili omogenee e sia $P^{(1)}$ una proiettività reale unimodulare $(x_i^{(1)})' = \sum_k a_{ik}^{(1)} x_k^{(1)}$ generica in un gruppo G.

Siano le $a_{ik}^{(1)}$ numeri interi reali in un dato campo algebrico, reale insieme ai campi algebrici coniugati. Come sappiamo, se il nostro campo non è il campo assoluto di razionalità, la $P^{(1)}$ potrà essere infinitesima e G non essere discontinuo; allora se i nostri campi algebrici (tutti reali per ipotesi) sono in numero di m $(m \geqq 1)$, introdurremo $m - 1$ nuovi sistemi di variabili $x_t^{(s)}$ $(s = 2, 3, \ldots, m)$ $(t = 1, 2, \ldots, n)$ e considereremo insieme a ogni proiettività $P^{(1)}$ le proiettività $P^{(2)}, P^{(3)}, \ldots, P^{(m)}$ coniugate

$$[x_i^{(s)}]' = \sum_k a_{ik}^{(s)} x_k^{(s)} \ (**).$$

Diremo P il prodotto (l'insieme) di una $P^{(1)}$ e delle coniugate $P^{(2)} \ldots P^{(m)}$. Poichè queste m proiettività $P^{(s)}$ (che diremo proiettività *parziali*) non possono essere contemporaneamente infinitesime, la P considerata come unica proiettività non sarà mai infinitesima. La P sarà detta proiettività *totale*. Sorge dunque spontanea dalla teoria dei numeri interi algebrici la questione di studiare i gruppi di proiettività *unimodulari* P (*totali*), ciascuna delle quali sia prodotto di m proiettività $P^{(i)}$ *parziali* unimodulari $(i = 1, 2, \ldots, m)$ su n_i variabili $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_{n_i}^{(i)})$.

Una tal proiettività, che diremo *mista*, è infinitesima allora e allora soltanto che tutte le proiettività parziali sono infinitesime. Dapprima studiamo il caso di proiettività miste reali. Indichiamo con $A^{(i)}$ la più generale forma, p. es. quadratica, di determinante 1, delle $x^{(i)}$ e con $\overline{A}^{(i)}$ la più generale forma (quadratica, a determinante 1) definita delle $x^{(i)}$. E indichiamone rispettivamente con $a^{(i)}$ e con $\overline{a}^{(i)}$ i coefficienti (reali). Le forme $\sum_1^m A^{(i)}$ costituiscono un sistema Σ di forme, che ogni P trasforma in sè stesso, e tra

(*) Cfr. la dim. del teor. IV; la forma $\lambda + \mu^2$ del teor. IV è l'analoga di $F + 2H$ nel teorema attuale.

(**) I numeri $a_{ik}^{(1)} a_{ik}^{(2)} \ldots a_{ik}^{(m)}$ sono per ipotesi numeri coniugati; noto uno di essi, p. es. $a_{ik}^{(1)}$, sono noti tutti gli altri.

queste le $\Sigma \overline{A^{(i)}}$ costituiscono pure un sistema R invariante subordinato di forme però *definite.*

Ognuna delle forme di Σ è determinata se si danno gli $\frac{n_1(n_1+1)}{2}-1$ rapporti delle $a^{(1)}$, gli $\frac{n_2(n_2+1)}{2}-1$ rapporti delle $a^{(2)}$ ecc. Σ costituisce quindi uno spazio lineare S a $\nu = \Sigma \frac{n_i(n_i+1)}{2} - m$ dimensioni. Avremo dunque in generale (*):

Teor. VIII. *Un gruppo discontinuo di proiettività miste reali (immaginarie) è sempre propriamente discontinuo in una regione R di uno spazio S. I punti di S corrispondono rispettivamente ai sistemi di forme F p. es. quadratiche (Hermitiane), una per ciascun sistema parziale di variabili; R è quella regione di S, che corrisponde a forme definite.*

Questo teorema include in sè come caso particolare il teorema di Hilbert-Blumenthal, appunto come il teor. IV include in sè il teor. di Poincaré.

Con considerazioni analoghe si ottiene un altro teorema, che include in sè i teor. di (A) ricordati al § 1, e di cui in un altro lavoro (**) ho già dato qualche applicazione funzionale. Per brevità di locuzione, dirò spazii parziali $S^{(i)}_{n_i-1}$ quelli in cui le $x^{(i)}$ sono coordinate omogenee, ossia in cui le $\frac{x^{(i)}_1}{x^{(i)}_{n_i}}, \frac{x^{(i)}_2}{x^{(i)}_{n_i}}, \ldots, \frac{x^{(i)}_{n_i-1}}{x^{(i)}_{n_i}}$ sono coordinate non omogenee. Lo spazio S_μ, in cui sono coordinate non omogenee tutti insieme questi $\mu = \Sigma n_i - m$ rapporti si dirà spazio totale; un punto A di S_μ si dirà avere per proiezione $A^{(k)}$ sullo spazio parziale S_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ quel punto, per cui tutte le coordinate precedenti sono nulle, ad eccezione delle coordinate $\frac{x^{(k)}_l}{x^{(k)}_{n_k}}$ $(l = 1, 2, \ldots, n_k - 1)$ che sono uguali alle corrispondenti di A. E avremo tosto, coi soliti procedimenti, e con le precedenti locuzioni e notazioni:

Teor. IX. *Un gruppo discontinuo di proiettività P miste reali, tali che la i^{esima} $(i = 1, 2, \ldots, m)$ proiettività parziale di una P qualunque lasci invariata una forma $F^{(i)}$ nelle corrispondenti variabili omogenee, è propriamente discontinuo in quella regione R (se pure esiste) dello spazio ambiente totale,*

(*) Basta applicare il teorema fondamentale a questo sistema Σ di forme quadratiche, o, nel caso di proiettività complesse, al sistema analogo di forme Hermitiane.

(**) Annali di Matematica 1904: *Sulle funzioni automorfe a più variabili indipendenti.* Indicherò questa Memoria con (B).

i cui punti A sono tali che alla loro proiezione $A^{(i)}$ su un qualunque spazio parziale sia in quest'ultimo spazio invariabilmente connessa (nel senso del Teor. VI) *o una ipersuperficie totalmente immaginaria, o un cono a generatrici immaginarie (pure essendo l'equazione della ipersuperficie o del cono in discorso a coefficienti reali).*

Teor. X. *Un gruppo discontinuo di collineazioni P miste reali o complesse, tali che la i^{esima} ($i = 1, 2, \ldots, m$) collineazione parziale corrispondente a una qualunque delle P lasci invariata una forma Hermitiana*

$$x_1^{(i)} x_1^{(i)0} + x_2^{(i)} x_2^{(i)0} + \cdots + x_{n_i-1}^{(i)} x_{n_i-1}^{(i)0} \pm x_{n_i}^{(i)} x_{n_i}^{(i)0},$$

è propriamente discontinuo in una regione R di uno spazio S così definito. Lo spazio S è quello, in cui sono coordinate reali non omogenee la parte reale e l'immaginaria dei rapporti $\frac{x_t^{(i)}}{x_{n_i}^{(i)}}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ $(t = 1, 2, \ldots, n_i - 1)$. La regione R è quella tale che se A è un suo punto, allora o la i^{esima} forma Hermitiana delle $x^{(i)}$ è definita (ellittica), oppure nel punto A si ha:

$$|\operatorname{mod} x_1^{(i)}|^2 + |\operatorname{mod} x_2^{(i)}|^2 + \cdots + |\operatorname{mod} x_{n_i-1}^{(i)}|^2 < |\operatorname{mod} x_{n_i}^{(i)}|^2$$

per ogni valore di i ($i = 1, 2, \ldots, m$).

Questi teoremi comprendono tutti i precedenti e in particolare quelli del § 1 come casi assolutamente particolari.

§ 6. Questo paragrafo è dedicato alla teoria dei gruppi discontinui di movimenti e alla relazione tra essa teoria e quella testè svolta dei gruppi discontinui di proiettività.

Come è noto, una forma $F_2 = d s^2 = \Sigma a_{ik} d x_i d x_k$ quadratica definita positiva nelle $d x_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), i cui coefficienti a_{ik} sono funzioni di x_i, definisce una metrica, in quanto che permette di definire la lunghezza di un arco qualunque come il valore dell'integrale $\int \sqrt{\Sigma a_{ik} d x_i d x_k}$ esteso all'arco stesso. *Qui è importante il considerare anche metriche definite da forme differenziali positive F_{2m} di grado $2m$,* con m qualunque, assumendo come lunghezza di un arco il valore dell'integrale $\int \sqrt[2m]{F_{2m}}$ esteso all'arco stesso. Queste nuove metriche non sono però suscettibili, come le precedenti, di una interpretazione meccanica: ciononostante le nostre attuali ricerche ne dimostreranno l'importanza in altre classi di studii.

Si dicono *movimenti* in una metrica quelle trasformazioni, che lasciano inalterate le lunghezze di un arco qualunque, o, in altre parole, che non mutano la corrispondente forma differenziale; la ricerca delle metriche, che ammettono un gruppo continuo di Lie di movimenti fu effettuata in una mia Memoria (*Annali di Matematica*, 1902).

Osserviamo intanto che, data una metrica, sono subito in essa definite le linee *geodetiche* (da equazioni differenziali, che il calcolo delle variazioni insegna a scrivere). Queste linee, come è noto, sono determinate, quando si dia un punto della linea e la tangente alla linea in questo punto; ora poichè i movimenti portano evidentemente una geodetica in una geodetica e conservano le distanze geodetiche di due punti, troviamo che:

« *Un movimento*

$$x'_i = f_i(x_1 x_2 \ldots x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

in una metrica qualunque è individuato, quando si sappia come esso trasforma un certo punto (generico) A e le direzioni uscenti da esso, o, in altre parole, quando in un punto (generico) A si conoscano i valori delle f_i e delle loro derivate prime ».

Dico che A è *generico*, quando la nostra forma F_{2m} $(m \geqq 1)$ non è in A singolare, ma è in A *definita* e coi coefficienti regolari e finiti, ecc.

Essendo F_{2m} una forma definita non degenere nei differenziali dx, essa, considerata come forma algebrica di questi differenziali, possederà almeno un invariante I non nullo, (p. es., se $m = 1$, il discriminante di F) funzione intera dei suoi coefficienti, e perciò funzione continua delle x. Con $I(A)$, $I(B)\ldots$ indicheremo il valore di I nei punti A, $B\ldots$ Se ora (1) porta un punto A in un punto B, sarà evidentemente $I(B)$ uguale a $I(A)$ moltiplicato per una potenza (ad esponente intero non nullo) di $\Delta(A)$, essendo $\Delta(A)$ il valore nel punto A del Iacobiano Δ di (1), ossia del determinante delle $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$. Se perciò B è sufficientemente vicino ad A, sarà $\Delta(A)$ pochissimo differente da ± 1, perchè (essendo I funzione continua delle x) $I(B)$ è poco differente da $I(A)$.

Indicheremo ora con b_{ik} il valore di $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ nel punto A, con $a_{ik}(A)$ il valore di a_{ik} nel punto A, o (più generalmente se $m > 1$) con $a(A)$ i valori in A dei coefficienti a della forma F_{2m}; e infine indicheremo con $F(A)$ ciò che diventa F, quando alle a si sostituiscano le $a(A)$. La proiettività

$$d\,x'_i = \sum_k b_{ik}\,d\,x_k \tag{2}$$

porta $F(A)$ in $F(B)$, se, come dicemmo, B è il trasformato di A per (1).

Sia ora G un gruppo di movimenti nella nostra metrica; e sia esso tale che in ogni, per quanto piccolo, intorno di un punto *generico* A esistano dei punti B trasformati di A per un movimento M di G. I valori delle $a(B)$ differiranno dai corrispondenti $a(A)$ di quanto poco si vuole, perchè le a si suppongono funzioni continue delle x, e B si suppone vicino a piacere al punto A. Poichè ora (2) porta $F(A)$ in $F(B)$, avremo per i teoremi del § 2 che le b_{ik}, corrispondenti ai movimenti M testè considerati, sono tutte inferiori a una costante finita. Di più, come dicemmo, $|b_{ik} \pm 1$ è piccolo a piacere. I valori delle f_i (corrispondenti a uno dei nostri movimenti M) nel punto A, essendo uguali alle coordinate di B, differiranno di quanto poco si vuole dalle coordinate di A.

Con ragionamenti analoghi a quelli del primo teorema del § 3, vediamo che esistono in G almeno due movimenti M, M' *distinti*, tali che i valori delle f_i, $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ nel punto A relativi al movimento M sono pochissimo differenti dai valori analoghi delle f_i, $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ nel punto A, relativi a M'. Ma, se (1) è un movimento qualunque, esso, come dicemmo, è determinato pienamente dai valori che in A hanno le funzioni f_i corrispondenti e le loro derivate prime. Quindi M, M' sono movimenti pochissimo differenti l'uno dall'altro, e (poichè, come vedemmo, i loro Iacobiani in A sono pochissimo differenti da ± 1) la trasformazione $M' M^{-1}$ sarà una trasformazione infinitesima, appartenente a G. Il gruppo G non sarebbe dunque discontinuo. In altre parole:

Un gruppo discontinuo di movimenti in una metrica qualunque, definita da una forma differenziale positiva di qualsiasi grado, è nei punti generici propriamente discontinuo.

È ora di grande importanza, tra l'altro, per la ricerca dei corrispondenti campi fondamentali, l'osservazione che i gruppi del § 5 *si possono considerare come gruppi di movimenti in una metrica conveniente*, cosicchè *i teoremi del* § 5 *possono considerarsi come casi particolari del precedente.*

Questo fatto è anche interessante, perchè

1.°) *conduce a intiere nuove classi di metriche che ammettono un gruppo di* Lie *di movimenti;*

2.°) *dimostra come (almeno se si prescinde da metriche reali, ossia dal fatto che le F_{2m} debbono essere positive) il problema di trovare le varietà algebriche, che ammettono un gruppo di* Lie *di proiettività in sè stesse, non è che un caso particolare del problema di determinare le metriche che ammettono un gruppo continuo di movimenti.*

È opportuno ricordare intanto alcuni fatti già noti:

I) *I gruppi di proiettività trasformanti in sè stessa una quadrica si possono considerare come movimenti nelle metriche cosidette non-euclidee (a curvatura costante).*

II) Nella mia Mem. cit. (A) ho dimostrato che *i gruppi* **misti**, *lascianti fissa una quadrica in ogni spazio* **parziale**, *si possono considerare come gruppi di movimenti in una metrica, il cui elemento lineare è somma di forme differenziali, tutte su variabili distinte, a curvatura costante.*

III) In (A) ho pure dimostrato che (come del resto è agevole verificare), *le proiettività trasformanti in sè una forma Hermitiana*

$$x_1 x_1^0 + x_2 x_2^0 + \cdots + x_{n-1} x_{n-1}^0 \pm x_n x_n^0$$

diventano, espresse nelle u_i, u_i^0 (*), un gruppo di movimenti nella metrica reale:

$$d s^2 = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \dots & u_{n-1} & \sqrt{\pm 1} \\ d u_1 & d u_2 \dots & d u_{n-1} & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d u_1^0 & d u_2^0 \dots & d u_{n-1}^0 & 0 \\ u_1^0 & u_2^0 \dots & u_{n-1}^0 & \sqrt{\pm 1} \end{vmatrix}}{\left(\sum_1^{n-1} u_i u_i^0 \pm 1 \right)^2} .$$

IV) *In* (A) *ho pure dimostrato che le proiettività miste, lascianti fissa in ciascuno spazio parziale una forma Hermitiana ellittica o iperbolica, si possono considerare come movimenti in una metrica, il cui elemento lineare è somma di elementi parziali, tutti su variabili distinte, del tipo precedente.*

La metrica III) fu da me rapidamente studiata in una Nota dell'Istituto Veneto (1904). Per completare questi risultati, ricorderò che nel § 5 o si

(*) Con le solite notazioni sono x_i^0, u_i^0 immaginarie coniugate delle x_i, u_i ed è $u_i = \frac{x_i}{x_n}$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$.

supponeva a priori che il gruppo proiettivo considerato lasciasse fissa una data ipersuperficie, oppure lo si pensava come trasformante le forme F di un certo sistema, le quali si rappresentavano mediante punti di un conveniente iperspazio S. In questo iperspazio il nostro gruppo era ancora in generale un gruppo proiettivo, che lasciava fisse delle ipersuperficie: quelle p. es. i cui punti erano immagine di forme F degeneri, oppure di forme F per cui fosse nullo un certo invariante (*). Potremo dunque limitarci allo studio dei gruppi proiettivi che lasciano fissa una data forma V. Se A, B sono due punti e C, D, $E\ldots$ sono i punti in cui la retta $A\,B$ incontra la $V=0$, i rapporti anarmonici $(A\,B\,C\,D)$, $(A\,B\,C\,E),\ldots$ e le loro funzioni sono esempi di invarianti di A, B, lasciati inalterati dal nostro gruppo; ma non tutti possono servire alle applicazioni che abbiamo in vista, nè si possono prendere a base di una metrica. Per ottenere queste metriche, osserviamo intanto che, se $x_i\,(i=1,\,2,\ldots,\,n)$ sono le nostre variabili (omogenee), noi potremo supporre

$$V(x_i)=k, \quad (k=\text{cost.}) \tag{1}$$

perchè, se una tale relazione è soddisfatta in un punto A, essa è per ipotesi soddisfatta anche nei punti trasformati di A per una delle nostre proiettività; sarà quindi pure identicamente:

$$\sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\,d\,x_i=0. \tag{2}$$

Sia ora $\lambda\,(x,\,z)$ (dove con z indichiamo le coordinate correnti) una forma invariabilmente connessa al punto generico (x), tale cioè che una proiettività, che trasformi la V in sè stessa e porti un punto (x) in un punto (y), porti la $\lambda\,(x,\,z)$ nella $\lambda\,(y,\,z)$. Allora le proiettività che trasformano in sè stessa la V, trasformano in sè stessa anche la forma differenziale

$$F=\lambda\,(x,\,d\,x), \tag{3}$$

e si possono quindi *considerare come movimenti nella metrica definita da* $\pm\,F$. Quando sarà una tal metrica reale? ossia, quando la (3) sarà forma definita dei $d\,x$? ossia, quando non vi sarà, oltre alla soluzione $d\,x=0$, nessun'altra

(*) Se p. es. le forme F sono forme quadriche $\Sigma\,a_{ik}\,x_i\,x_k$, e lo spazio S è quello in cui le a_{ik} sono coordinate omogenee, il nostro gruppo, pensato come operante sulle F, lascia in S fissa la ipersuperficie $|\,a_{ik}\,|=0$, immagine delle forme F degeneri.

soluzione reale del sistema di equazioni (2) e $F=0$? Ciò avverrà evidentemente per tutti i punti (x) tali che $\lambda(x, z)=0$ non sia soddisfatta per alcun valore reale delle z (eccetto che per $z=0$), oppure anche per quei punti (x), che sono esterni alla $V=0$, e tali che $\lambda(x, z)=0$ rappresenti un cono di vertice (x) e a generatrici immaginarie. In quest'ultimo caso infatti la $\lambda(x, z)=0$ è soddisfatta (oltre che per $z=0$) soltanto per (z_i) uguali o proporzionali a x_i; mentre è escluso che $d x_i$ possano essere proporzionali a x_i, poichè da (2) discenderebbe $\Sigma \frac{\partial V}{\partial x_i} x_i=0$ ossia, per il teorema di Eulero, $V(x_i)=0$ (mentre il punto (x_i) si suppone esterno alla $V=0$).

Dunque (cfr. § 5) *i nostri gruppi di proiettività si possono considerare come gruppi di movimenti nella metrica reale definita dalla* (3) *in quella regione R, in cui la forma $\lambda(x, z)$ [invariabilmente connessa ai suoi punti x] rappresenta, uguagliata a zero, o una superficie totalmente immaginaria, o un cono di vertice (x) a generatrici immaginarie. Le x si suppongono variabili legate dalla* (1). *Così* p. es. *le nostre proiettività si potranno considerare come gruppi di movimenti nelle metriche reali definite dalle forme*

$$\Sigma \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} d x_i d x_k \quad \text{oppure} \quad \Sigma \frac{\partial^4 V}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l \partial x_m} d x_i d x_k d x_l d x_m$$

oppure, ecc., *in quella regione R, i cui punti sono tali che il loro iperpiano polare e la loro quadrica polare, oppure il loro iperpiano polare e la loro « $n-4$ »$^{\text{esima}}$ ipersuperficie polare, oppure ecc., non hanno punti reali comuni.*

Notiamo tosto che se $V=0$ è una quadrica del tipo ellittico o iperbolico, allora poichè il cono uscente da un punto B e tangente a V è invariabilmente connesso al punto B, ne discende tosto:

Delle metriche generali scoperte nel precedente teorema sono un caso assolutamente particolare le metriche a curvatura costante.

È p. es. un'interessante conseguenza dei nostri attuali risultati e di quelli del § 5 il:

Teor. *Un gruppo qualunque di collineazioni reali in uno spazio S lineare a n dimensioni diventa, considerato come operante sulle quadriche di questo spazio* (pensate come punti), *un gruppo di movimenti in uno spazio a*

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1=\frac{n(n+3)}{2}$$

dimensioni, dove viga una metrica definita proprio da una forma differenziale quadratica positiva.

In particolare al gruppo completo proiettivo a $n(n+2)$ parametri in S per $n=1, 2, 3\ldots$ corrisponde un gruppo di movimenti a 3, 8, 15... parametri in uno spazio a 2, 5, 9... dimensioni. Il primo di questi casi non è che il caso della *metrica del piano di* LOBACEVSKIJ:

Analogamente si ha:

« *Un gruppo qualunque di collineazioni immaginarie in uno spazio a* n *dimensioni considerato come operante sulle* $\infty^{n(n+2)}$ *forme Hermitiane* (dipendenti da $n(n+2)$ parametri reali), *pensate come punti, diventa un gruppo di movimenti reali in un* $S_{n(n+2)}$, *dove viga proprio una metrica definita da una forma differenziale quadratica positiva.*

In particolare, considerando il gruppo completo a $2n(n+2)$ parametri (reali), otteniamo successivamente per $n=1, 2, 3\ldots$ spazii a 3, 8, 15... dimensioni con un gruppo di movimenti ad almeno 6, 16... parametri. Il primo di questi spazii non è che *lo spazio di* LOBACEVSKIJ.

Il nostro teorema fondamentale si può anche generalizzare ai gruppi *misti* di proiettività. E con locuzioni già usate, potremo (restringendoci per brevità al caso che un gruppo *misto* di proiettività lasci fissa in ogni spazio *parziale* una ipersuperficie, caso, che noi già vedemmo potersi considerare come caso generale) enunciare il seguente teorema, da cui si potrebbero anche *dedurre conseguenze analoghe a quelle trovate negli ultimi due teoremi.*

Teor. *Sia dato un gruppo misto, che negli* m *spazii parziali lascia fisse rispettivamente* m *ipersuperficie* $V_1, V_2, \ldots, V_m$. *Siano corrispondentemente* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *forme differenziali dello stesso ordine* (in ciascun sistema *parziale* di variabili) *definite in modo analogo a quanto facemmo più sopra, e positive almeno in una porzione dello spazio parziale corrispondente. Sieno* $K_i\,(i=1, 2, \ldots, m)$ *costanti positive. La forma* $\sum_i K_i A_i$ *definisce in una regione dello spazio totale una metrica reale, tale che il nostro gruppo si può per essa considerare come gruppo di movimenti.*

L'importanza di queste metriche e di questi concetti si può già, nei casi particolarissimi delle funzioni Fuchsiane e Kleiniane, rilevare da chi legga p. es. le « Automorphe Functionen » di KLEIN e FRICKE; altre applicazioni io feci nelle mie Memorie citate; i metodi p. es., che in questi lavori si danno per costruire i campi fondamentali dei gruppi discontinui o per studiare le funzioni (automorfe) corrispondenti, si possono, in virtù delle metriche qui scoperte, estendere a moltissimi altri casi, come può facilmente rilevare chi studiasse qualche caso particolare, p. es. i gruppi di HILBERT-BLUMENTHAL o altro.

§ 7. *Applicazioni alla teoria dei numeri.* I problemi principali cui si possono applicare i nostri metodi sono: 1.° quello di riconoscere se due forme date su n variabili di grado *qualunque* a coefficienti interi in un *qualsiasi* campo algebrico sono equivalenti, cioè se esse sono trasformabili l'una nell'altra mediante una proiettività unimodulare a coefficienti interi nello stesso campo algebrico, e, in caso affermativo, di trovare tutte queste proiettività (*); 2.° quello di costruire per le forme più generali una *teoria della riduzione*, analoga a quella data da Gauss per le forme binarie quadratiche. Qui io indicherò i principii generali, che possono condurre alla risoluzione di questi problemi.

Supporremo per semplicità che il nostro campo algebrico sia reale, insieme agli « $m-1$ » campi coniugati ($m \geq 1$); e insieme alle variabili $x_i^{(1)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ introdurremo $m-1$ sistemi di nuove variabili $x_i^{(k)}$ $(k = 2, 3, \ldots, m)$. Considereremo poi, insieme a ogni proiettività unimodulare a coefficienti interi sulle $x^{(1)}$, le $m-1$ proiettività coniugate sulle $x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots, x^{(m)}$. Otterremo così un gruppo *misto* proiettivo discontinuo, cui applicheremo il teor. VIII del § 5, notando che le forme F citate in detto teorema possono, come sappiamo, essere di grado superiore al secondo. Sia questo grado uguale a $2h$ $(h \geq 1)$ e sia K un poliedro fondamentale per il nostro gruppo in R. Sia ora $H^{(1)}$ una forma di grado $2h$ nelle $x^{(1)}$ a coefficienti interi: *quando la* diremo ridotta? Costruiamo le forme $H^{(2)}, \ldots, H^{(m)}$ nelle variabili $x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots, x^{(m)}$ coniugate alla forma data.

Il sistema di queste forme, che è individuato da $H^{(1)}$, definisce un punto A dello spazio S (**). Viceversa se è dato questo punto A, la $H^{(1)}$ è definita a meno di un fattore; cosicchè se noi ne diamo « a priori » un invariante non nullo (p. es. il discriminante nel caso di forme quadriche non degeneri), che le nostre proiettività (unimodulari) lasciano inalterato, la $H^{(1)}$ è nota, in generale, senza ambiguità (al più a meno del segno).

I° Caso: $H^{(1)}$ *è definita.* Allora si può subito assumere per definizione *che la* $H^{(1)}$ (il cui punto immagine A è dentro R) *è ridotta allora e allora*

(*) Di questo problema è caso particolare l'altro di determinare quelle proiettività a coefficienti interi, che mutano una data forma in sè stessa.

(**) Ricordo che S è quello spazio, in cui sono coordinate non omogenee i rapporti dei coefficienti di una forma di grado $2h$ nelle $x^{(1)}$, quelli di una forma di grado $2h$ nelle $x^{(2)}$, ecc.; se tutte queste forme sono definite, il punto corrispondente di S descrive la regione R.

soltanto che A cade entro o sul contorno del campo fondamentale K; ne viene subito *che ogni forma è equivalente ad almeno una ridotta*, che soltanto *eccezionalmente due ridotte possono essere equivalenti* (ciò *può* avvenire soltanto se i loro punti immagine sono ambedue sul contorno di K). *Infine due forme sono equivalenti allora e allora soltanto che i loro punti immagine sono punti corrispondenti di due campi fondamentali K_1, K_2; la proiettività, che porta l'uno nell'altro questi due campi, porta in tal caso una forma nell'altra.*

II° Caso: $H^{(1)}$ *non è definita.* Il suo punto immagine A, costruito nel modo precedente, non cadrà più entro R, e le nostre considerazioni non si possono più estendere a questo caso. Per evitare equivoci, indicheremo perciò la nostra forma con $L^{(1)}$ e con $L^{(2)}$, $L^{(3)} \ldots$ le forme coniugate nelle variabili $x^{(2)}$, $x^{(3)} \ldots$; e supporremo che il grado di queste forme L sia anche differente da $2\,h$. Supporremo dati *a priori* uno o più invarianti i di $L^{(1)}$, e indicheremo con H_1, $H_2, \ldots$ delle forme qualsiasi generiche nelle $x^{(1)}$, $x^{(2)} \ldots$, di grado $2\,h$, coniugate o no. Una forma $L^{(i)}$ con una forma H_i avrà degli invarianti, funzioni tanto dei coefficienti della $L^{(i)}$, quanto dei coefficienti della H_i. Prendiamo un certo numero di invarianti dei sistemi formati da una delle L e dalla H corrispondente; e siano essi $j_1, j_2, \ldots, j_\tau$. Supporremo in essi fissi i coefficienti delle L, variabili quelli delle H. Le equazioni $j_1 = j_2 = \cdots = j_\tau = 0$ definiranno in S (in cui appunto i rapporti dei coefficienti delle H sono le variabili coordinate) una certa varietà V. Ora noi *supporremo :*

1.° La varietà V (insieme agli invarianti i, supposti noti *a priori*) determina la forma $L^{(1)}$.

2.° La varietà V ha almeno un pezzo interno a R. Noi allora potremo dire che $L^{(1)}$ è ridotta se un pezzo di V penetra entro K; ne discende subito che ognuna delle nostre forme $L^{(1)}$ è equivalente ad almeno una ridotta. Di più due forme ridotte distinte possono essere equivalenti : chè, se $L^{(1)}$ è ridotta e la varietà V, oltre che penetrare entro K, penetra dentro qualche altro campo fondamentale K_1, la proiettività, che porta K_1 in K, porta $L^{(1)}$ in un'altra ridotta equivalente, ecc., ecc.

Un po' più sotto daremo un esempio di applicazione della presente teoria generale.

Prima di passare ad esso, accennerò a un altro metodo di studiare l'equivalenza di forme indefinite; e, per brevità, ci limiteremo a forme date nel campo assoluto di razionalità. Sia data una forma F indefinita; e, se possibile, studiamone il gruppo aritmetico riproduttore, e costruiamone coi metodi già accennati un campo fondamentale K. Sia F un'altra forma e sia K' il campo fondamentale del gruppo riproduttore corrispondente, costruito *in modo analogo* a K. Se le due forme sono equivalenti, deve esistere una proiettività a coefficienti interi unimudolare, che porti K in K'. Alla ricerca di tale proiettività è ricondotta la nostra questione: questo metodo fu già usato dal prof. Bianchi per le forme quadratiche e noi quindi non ce ne occuperemo più oltre.

Ritorniamo ora al metodo precedente, applicandolo a forme quadratiche a coefficienti interi razionali; sia S il nostro spazio pensato come luogo di quadriche, ossia sieno le a_{ik} coordinate omogenee in S, quando $\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k$ è la più generale forma quadrica nelle nostre variabili x. Sia R quella regione di S, che corrisponde a *forme definite*, in cui, come dicemmo, immaginiamo costruito un campo fondamentale K per il nostro gruppo. Sia F una forma quadrica indefinita, il cui punto immagine è perciò esterno ad R; noi la immagineremo espressa in coordinate ξ_i di iperpiano (anzichè in coordinate x_i di punto) ossia *considereremo la* $F=0$ *come quadrica inviluppo* (*).

Sia $F=\Sigma\,\beta_{ik}\,\xi_i\,\xi_k$; e sia $\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k$ una forma H generica in coordinate di punto; sarà $\Sigma\,\alpha_{ik}\,\beta_{ik}$ come è noto, un invariante. La $\Sigma\,\beta_{ik}\,a_{ik}=0$ (dove ora le a_{ik} sono coordinate correnti in S) rappresenta in S un iperpiano I; viceversa, dato I, sono determinati i rapporti delle β_{ik}, cosicchè, se (come dicemmo) è noto *a priori* il discriminante di F, le β_{ik} sono completamente determinate (se mai a meno del segno). Osserviamo ora che *I penetra entro R*; per vederlo, supponiamo F ridotta a forma canonica, ossia supponiamo $\beta_{ik}=0\,(i \neq k)$. Le β_{ii} non saranno tutte dello stesso segno, perchè F è indefinita; quindi la $\Sigma\,\beta_{ik}\,a_{ik}=0$ può essere soddisfatta da forme H definite, p. es. da quelle tra esse, per cui è $a_{ik}=0\,(i \neq k)$ e per cui le a_{ii} sono tutte positive (legate dalla $\Sigma\,\beta_{ii}\,a_{ii}=0$). Se I penetra proprio entro K, diremo che F è ridotta: ne discende che ogni forma è equivalente a una forma ridotta; se K' è un campo fondamentale contiguo a K, attraversato da I, la proiettività, che porta K' in K, porterà la F in una forma ridotta *contigua*, ecc., ecc. Come si vede, la teoria delle forme indefinite si presenta spontanea, appena sia costruita la rete dei campi fondamentali, ossia appena sia risoluta la questione della ridu-

(*) È questo un artificio semplicissimo, di cui anche più tardi vedremo interessanti applicazioni.

zione delle forme definite. Anzi la teoria si presenta affatto analoga alla ben nota teoria di KLEIN (*) delle forme di GAUSS.

§ 8. *Applicazioni alla teoria delle funzioni automorfe.* Ecco i problemi fondamentali:

I) *Dato un gruppo G discontinuo di trasformazioni birazionali su n variabili complesse $x_1, x_2, \ldots, x_n$, quando detto gruppo sarà propriamente discontinuo?*

II) *Dato un gruppo G propriamente discontinuo di trasformazioni birazionali su n variabili complesse $x_1 x_2 \ldots x_n$, e dato un gruppo Γ di trasformazioni birazionali su p variabili $z_1, z_2, \ldots, z_p$ oloedricamente o meriedricamente isomorfo a G, costruire un sistema di p funzioni z analitiche uniformi delle x tali che, se le x subiscono una trasformazione di G, le z subiscono la trasformazione corrispondente di Γ.*

Se Γ si riduce all'identità, si può anche dire che le z devono essere invarianti per le trasformazioni di G (fatte sulle x).

Naturalmente noi studieremo qui soltanto gruppi *lineari* e risolveremo completamente soltanto il primo problema, che più si riannoda alle nostre ricerche. Osserverò che ora le x non sono più variabili omogenee; noi supporremo le x coordinate (non omogenee) di punto, e indicheremo con ξ coordinate *omogenee* di iperpiano; *la risoluzione del nostro problema si ha* di nuovo *con l'artificio già usato* al § 7. Sia G un gruppo di proiettività reali (complesse); dal § 5 noi sappiamo che esso è *propriamente* discontinuo in una regione R di uno spazio S. Questo spazio S è quello, nel quale sono coordinate omogenee i coefficienti della più generale forma-inviluppo quadrica $\Sigma\, a_{ik}\, \xi_i\, \xi_k$ (la parte reale e la immaginaria dei coefficienti della più generale forma-inviluppo Hermitiana $\Sigma\, a_{ik}\, \xi_i\, \xi_k^0$ dove $a_{ik} = a_{ki}^0$). R è quella parte di S, che corrisponde a forme definite, e tra le sue *varietà limiti* ci sarà quella varietà W, che corrisponde a forme spezzate in due fattori lineari, $\Sigma\, \alpha_i\, \xi_i$, $\Sigma\, \alpha_i^0\, \xi_i$ $[\Sigma\, \alpha_i\, \xi_i,\ \Sigma\, \alpha_i^0\, \xi_i^0]$ [dove le α_i, α_i^0 e le ξ_i, ξ_i^0 sono quantità immaginarie coniugate]. Questi due fattori rappresentano due stelle immaginarie coniugate di iperpiani, o, in sostanza, due punti immaginarii coniugati. (Uno di questi

(*) Come si sa, nel semipiano positivo di una variabile complessa z, i punti rappresentano per KLEIN le forme di GAUSS definite e i cerchi ortogonali all'asse reale le forme indefinite. Detto semipiano è per le forme di GAUSS appunto la regione R del nostro spazio S, e questi cerchi non sono che le varietà I. È bene noto che con opportuna trasformazione questi cerchi si possono mutare in rette.

due fattori individua l'altro e rappresenta una stella di iperpiani, o, in sostanza, un punto dello spazio iniziale.) Quindi: *Il gruppo G opera in modo propriamente discontinuo sui punti complessi dello spazio iniziale, allora e allora soltanto che esso opera in modo propriamente discontinuo sulla W, ossia che ogni suo campo fondamentale in R ha una porzione a $2n$ dimensioni sulla varietà W.* Ecco dunque risoluta, in modo indiretto, la nostra prima questione (*).

Quanto alla seconda questione, anche restringendoci a gruppi lineari, è necessario studiare i singoli casi uno per volta: è ben noto p. es. già dai lavori di Poincaré che le sue serie, relative alle funzioni zeta-fuchsiane, non sempre sono convergenti. In questa Memoria, non dedicata allo studio di casi particolari, mi accontenterò di fare alcune riflessioni generali, rimandando per lo studio di qualche caso singolo, oltrechè ai lavori di Poincaré e al trattato di Fricke, alla Memoria citata di Blumenthal nei *Math. Annalen*, alla mia Mem. cit. degli *Annali di Matematica*, e a un'altra, di cui darò qui un breve cenno (*Applicazioni analitiche dei gruppi*, ecc.) (*Atti dell'Accademia Gioenia*, 1904). Se noi indichiamo con s_k e σ_k due trasformazioni corrispondenti di G, Γ ($k = 1, 2, 3, \ldots$), con f, f_μ ($\mu = 1, 2, \ldots p$) delle funzioni razionali delle corrispondenti variabili, con I_k il Iacobiano della s_k, potremo chiamare serie di Poincaré generalizzate le serie (**):

$$\sum_k f\,[s_k(x_i)]\, I_k^h \quad (h = \text{numero intero positivo}) \tag{1}$$

$$\sum_k \{ \sigma_k^{-1} [f_\mu (s_k (x_i))] \} \, I_k^h \quad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{2}$$

dove $s_k(x_i)$, $\sigma_k^{-1}[f_\mu]$ indicano i valori trasformati di (x) o di f_μ rispettivamente per s_k, σ_k^{-1} (inversa di σ_k).

È ben chiaro che, formalmente, il quoziente di 2 serie (1) corrispondenti a due funzioni f distinte, rappresenta una funzione uniforme invariante per G, e che il quoziente delle (2) per (1) rappresenta un sistema di funzioni, che (se le x subiscono una trasformazione di G) subiscono la trasformazione corrispondente di Γ. La prima questione fondamentale è di vedere

(*) Questo metodo si può considerare come la più ampia generalizzazione dell'artificio di Poincaré per i gruppi automorfi Kleiniani.

(**) Cfr. le celebri Memorie di Poincaré negli *Acta Math.* relative alle funzioni fuchsiane, Kleiniane, zetafuchsiane.

quando una serie (1) o (2) converge. Usando un procedimento analogo a quello che si segue nei lavori testè citati in casi particolari, si trova il seguente teorema generale (che comprende quelli di questi lavori come casi particolari e che si può applicare anche a nuove classi di gruppi propriamente discontinui).

Le serie (1) *sono per h abbastanza grande assolutamente e uniformemente convergenti nell'intorno* α *di un punto* A, *e possono servire alla costruzione di funzioni automorfe, se nello spazio rappresentativo, in cui la parte reale e l'immaginaria delle* x *sono coordinate cartesiane, una rete di poliedri fondamentali è tutta a distanza finita* (ciò che si può sempre ottenere, se la rete ha una ipersuperficie limite trascendente o algebrica) *e se in detto intorno* α (piccolo a piacere) *di* A *il rapporto tra il minimo e il massimo modulo di* I_k *è inferiore a una costante fissa per ogni valore di* k.

Quanto alle serie (2), oltre che nel caso di Poincaré delle funzioni zetafuchsiane, esse convergono (come io dimostrai nell'ultimo lavoro citato) per i gruppi *discontinui* G lascianti fissa una forma Hermitiana (*), almeno quando il corrispondente poliedro fondamentale non ha, nelle metriche corrispondenti, alcun punto a distanza infinita. E, come le funzioni zetafuchsiane servono all'integrazione delle equazioni lineari a derivate ordinarie a coefficienti algebrici, così queste più generali funzioni servono p. es. *all'integrazione di sistemi di equazioni lineari a coefficienti algebrici, il cui integrale generale dipende* (linearmente) *da un numero finito di costanti arbitrarie.*

Coassolo Torinese, li 8 Agosto 1904.

(*) La dimostrazione è analoga a quella di Poincaré: solo che in questo caso le metriche (§ 5) corrispondenti a una forma Hermitiana tengono luogo di quelle a curvatura costante: ecco un caso p. es., in cui si dimostra l'importanza delle nuove metriche (Cfr. loc. cit.).

Sur une extension de la méthode de Jacobi-Hamilton.

(*Par* MAURICE FRÉCHET, *à Paris.*)

Dans une Note (*) publiée en 1890, M. VOLTERRA a montré l'intérêt qu'il y aurait à étendre au cas d'une intégrale multiple les beaux travaux de JACOBI et HAMILTON sur les équations qui expriment que la variation première d'une intégrale simple est nulle. Il a effectué cette généralisation dans le cas de l'intégrale:

$$\int\int U\, d\, x_4\, d\, x_5$$

où U est une fonction de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 et des déterminants fonctionnels

$$\frac{D(x_1,\ x_2)}{D(x_4,\ x_5)},\quad \frac{D(x_2,\ x_3)}{D(x_4,\ x_5)},\quad \frac{D(x_3,\ x_1)}{D(x_4,\ x_5)}$$

(mais fonction non homogène par rapport à ces trois dernières quantités). Je me propose de traiter le cas le plus général, c'est-à-dire celui de l'intégrale:

$$I = \int\int\int\cdots\int f\left(x_{r+1},\ldots, x_n,\ x_1,\ldots, x_r,\ \frac{\partial x_{r+1}}{\partial x_1},\ldots,\ \frac{\partial x_n}{\partial x_r}\right) d\,x_1 \ldots d\,x_r \qquad (1)$$

(où $x_{r+1},\ldots, x_n$ sont certaines fonctions de $x_1,\ldots, x_r$) qui comprend celui de JACOBI comme cas particulier pour $r = 1$. Je me servirai pour cela des définitions et des théorèmes relatifs à l'espace à n dimensions énoncés par M. VOLTERRA dans une Note précédente (**).

(*) *Sopra una estensione della teoria* JACOBI-HAMILTON *del calcolo delle variazioni.* Accademia dei Lincei, *Rendiconti,* Vol. VI, page 127.

(**) *Delle variabili complesse negli iperspazî.* Loc. cit., Vol. V, page 159.

I. — Tout d'abord, nous mettrons l'intégrale I sous une forme plus commode. Posons:

$$F = f\frac{D(x_1, \ldots, x_r)}{D(\omega_1, \ldots, \omega_r)} \tag{2}$$

en supposant $x_1, \ldots, x_r$ exprimés en fonction de r paramètres $\omega_1, \ldots, \omega_r$. On voit qu'on pourra écrire:

$$I = \int \ldots \int F\, d\omega_1\, d\omega_2 \ldots d\omega_r \tag{3}$$

F désignant une fonction homogène et du premier degré des déterminants fonctionnels $\frac{D(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r})}{D(\omega_1, \ldots, \omega_r)}$, où $i_1, \ldots, i_r$ est une combinaison quelconque des n premiers nombres entiers r à r. Car on a:

$$\frac{\partial x_{r+k}}{\partial x_i} = \frac{D(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{r+k}, x_{i+1}, \ldots, x_r)}{D(\omega_1, \ldots, \omega_r)} : \frac{D(x_1, \ldots, x_r)}{D(\omega_1, \ldots, \omega_r)}.$$

Réciproquement, *l'intégrale* (3) *pourra toujours se ramener à la forme* (1) *quelle que soit la forme de la fonction F de $x_1, \ldots, x_n$, homogène et du premier degré par rapport aux quantités*

$$\lambda_{i_1, i_2, \ldots, i_r} = \frac{D(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r})}{D(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r)}$$

car l'égalité (2) définira f comme une fonction de $x_1, \ldots, x_n$ et des déterminants fonctionnels:

$$\frac{D(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_r)}$$

lesquels sont certaines fonctions des quantités

$$\frac{\partial x_{r+1}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial x_r};$$

il suffit de choisir parmi les variables $x_1, \ldots, x_n$, les lettres $x_1, \ldots, x_r$ par rapport auxquelles les équations de la multiplicité S_r considérée sont résolubles.

En définitive, *la forme* (1) *est équivalente à la forme* (*):

$$I = \int_{S_r} F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_{1,2,\ldots,r}; \ldots; \lambda_{i_1, i_2, \ldots, i_r}; \ldots)\, d(\omega_1, \ldots, \omega_r) \tag{3}$$

(*) Cette forme (3) est l'analogue de la forme paramétrique employée par Weierstrass dans le cas d'une intégrale simple. L'extension au cas d'une intégrale multiple a été réalisée pour la première fois sous une forme pratique par M. Hadamard dans son cours du Collège de France.

ou :

$$I=\int_{S_r} F\left(x_1,\ldots,\ x_n,\ d\,(x_1,\ldots,\ x_r),\ldots,\ d\,(x_{i_1},\ldots,\ x_{i_r}),\ldots\right)$$

dans lesquelles j'emploie la notation de M. Méray pour les intégrales multiples en posant :

$$d\,(x_{i_1},\ldots,\ x_{i_r})=\frac{D\,(x_{i_1},\ldots,\ x_{i_r})}{D\,(\omega_1,\ldots,\ \omega_r)}\,d\,\omega_1\,d\,\omega_2\ldots\,d\,\omega_r\,.$$

II. *Variation première.* — Calculons la variation première de I.

On aura :

$$\delta\,I=\int_{S_r}\left[\sum_i F_{x_i}\,\delta\,x_i+\sum_{i_1,\ldots,i_r} F_{\lambda_{i_1,\ldots,i_r}}\,\delta\,\lambda_{i_1,\ldots,i_r}\right]d\,(\omega_1,\ldots,\ \omega_r)$$

en désignant par F_{x_i} et $F_{\lambda_{i_1,\ldots,i_r}}$ les dérivées partielles de F prises par rapport à x_i et $\lambda_{i_1,\ldots,i_r}$ considérés comme des variables indépendantes, tandis que $\frac{\partial F}{\partial\,\omega_1}$, par exemple, désignera la dérivée prise en considérant les x et les λ comme des fonctions de $\omega_1,\ldots,\ \omega_r$.

D'où, en intégrant par parties les termes en $\delta\,\lambda$:

$$\delta\,I=\int_{S_r}\left(\sum_{i=1}^{i=n} Q_i\,\delta\,x_i\right)d\,(\omega_1,\ldots,\ \omega_r)+\int_{S_{r-1}}\sum_{i_1,\ldots,i_r} F_{\lambda_{i_1,\ldots,i_r}}\,\delta\,x_{i_1}\,d\,(x_{i_2},\ldots,\ x_{i_r}) \tag{4}$$

en posant :

$$Q_i\equiv F_{x_i}-\sum_{i_1,\ldots,i_{r-1}}\left[\frac{D\,(F_{\lambda_{i,i_1,\ldots,i_{r-1}}},\ x_{i_1},\ x_{i_2},\ldots,\ x_{i_{r-1}})}{D\,(\omega_1,\ \omega_2,\ldots,\ \omega_r)}\right] \tag{5}$$

et en appelant S_{r-1} la multiplicité à $r-1$ dimensions au plus qui forme la limite de S_r. On voit que si S_{r-1} reste fixe, on a :

$$\delta\,I=\int_{S_r}\left(\sum_i Q_i\,\delta\,x_i\right)d\,(\omega_1,\ldots,\ \omega_r).$$

Conformément aux dénominations employées dans le calcul des variations, nous appellerons *extrémales* toute multiplicité S_r qui vérifie l'équation $\delta\,I=0$ lorsque les limites sont fixes. Il faut et il suffit pour cela que S_r soit une multiplicité intégrale des équations

$$Q_1=0,\ldots,\ Q_n=0. \tag{6}$$

III. *Equations canoniques des extrémales.* — Pour arriver à la forme canonique des équations (6), nous poserons:

$$q_{i_1 i_2,\dots,i_r} = F_{\lambda_{i_1,i_2,\dots,i_r}} \tag{7}$$

et nous nous placerons dans le cas général où, en considérant les λ comme des variables indépendantes (*), le hessien de F (qui est nul et d'ordre C_n^r) a au moins un mineur d'ordre $C_n^r - 1$ différent de zéro. Sous cette condition, les relations (7) montrent qu'en considérant encore les λ comme des variables indépendantes, il y a une relation et une seule entre les q:

$$H(x_1,\dots, x_n, q_{1,\dots,r};\dots; q_{i_1,\dots,i_r};\dots) = 0. \tag{8}$$

D'ailleurs, inversement, connaissant la fonction H, choisie arbitrairement mais non homogène, une théorie bien connue montre que si les q sont reliés par la seule relation (8), on pourra trouver une fonction F homogène et du premier degré par rapport aux variables indépendantes λ, telles que les relations (7) soient verifiées. Il suffit de prendre:

$$\frac{F}{\lambda_{1,2,\dots,r}} = \frac{\sum\limits_{i_1,\dots,i_r} q_{i_1,\dots,i_r} H_{q_{i_1,\dots,i_r}}}{H_{q_{1,2,\dots,r}}} \tag{10}$$

si par exemple $H_{q_{1,2,\dots,r}}$ n'est pas identiquement nul. Et on sait qu'on aura:

$$\frac{\lambda_{1,2,\dots,r}}{-H_{q_{1,2,\dots,r}}} = \dots = \frac{\lambda_{i_1,\dots,i_r}}{-H_{q_{i_1,\dots,i_r}}} = \dots = \frac{F_{x_1}}{H_{x_1}} = \dots = \frac{F_{x_n}}{H_{x_n}}\,. \tag{11}$$

Ceci résulte du changement de variables, sans qu'on ait à se préoccuper des équations (6). On voit en particulier que l'on a:

$$I = \int_{S_r} \left[\sum_{i_1,\dots,i_r} q_{i_1,\dots,i_r} H_{q_{i_1,\dots,i_r}}\right] d(\omega_1,\dots, \omega_r) \tag{12}$$

lorsqu'on pose:

$$q_{i_1,\dots,i_r} = F_{\frac{D(x_{i_1},\dots,x_{i_r})}{D(\omega_1,\dots,\omega_r)}} \tag{13}$$

(*) Ce qui n'est pas lorsqu'on tient compte des égalités $\lambda_{i_1,\dots,i_r} = \dfrac{D(x_{i_1},\dots, x_{i_r})}{D(\omega_1,\dots, \omega_r)}$, car on a alors:

$$\sum_{s=1}^{s=r+1} (-1)^s \lambda_{i_1,\dots,i_{s-1},i_{s+1},\dots,i_{r+1}} \times \lambda_{i_s,j_2,\dots,j_r} = 0. \tag{9}$$

et dans ce cas les quantités $q_{i_1,\ldots,i_r}$ ne sont pas seulement liées par la relation (8), mais encore par les équations :

$$\sum_{s=1}^{s=r+1} (-1)^s H_{q_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{s+1},\ldots,i_{r+1}}} \times H_{q_{i_s,j_2,\ldots,j_r}} = 0 \tag{14}$$

qui résultent des identités (9), (11).

Si nous introduisons maintenant les nouvelles variables dans les équations (6), *nous voyons qu'on pourra regarder les extrémales comme définies par le système canonique suivant, dont on remarquera l'analogie avec celui de* HAMILTON (auquel il se réduit pour $r = 1$) :

$$\left.\begin{aligned} &H(x_1,\ldots,x_n,\ q_{1,2,\ldots,r};\ldots;\ q_{i_1,\ldots,i_r};\ldots) = 0 && (8)\\ &\ldots = \frac{\sum\limits_{i_2,\ldots,i_r} d(q_{i_1,i_2,\ldots,i_r};\ x_{i_2},\ldots,x_{i_r})}{H_{x_i}} = \ldots = \frac{d(x_{i_1},\ x_{i_2},\ldots,x_{i_r})}{-H_{q_{i_1,\ldots,i_r}}} = \ldots && \end{aligned}\right\} (15)$$

On peut d'ailleurs l'écrire sous la forme :

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i_2,\ldots,i_r} \frac{D(q_{i_1,\ldots,i_r},\ x_{i_2},\ldots,x_{i_r})}{D(\omega_1,\ldots,\omega_r)} = \rho\, H_{x_{i_1}} \quad (i_1 = 1,\ldots,n) && (16)\\ &\frac{D(x_{i_1},\ x_{i_2},\ldots,x_{i_r})}{D(\omega_1,\ldots,\omega_r)} = -\rho\, H_{q_{i_1,\ldots,i_r}} \quad (i_1,\ i_2,\ldots,i_r = 1,\ldots,n) && (17)\\ &H(x_1,\ldots,x_n,\ q_{1,\ldots,r},\ldots,q_{i_1,\ldots,i_r},\ldots) = 0. && (8) \end{aligned}\right\} (E)$$

Observons d'ailleurs qu'on peut remplacer la condition (8) par une autre plus simple.

En effet, H est une constante dès que les x et les q vérifient les équations (16) et (17). Car on aura dans ce cas :

$$\rho \frac{\partial H}{\partial \omega_1} \equiv \sum_i \rho H_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \omega_1} + \sum_{i_1,\ldots,i_r} H_{q_{i_1,\ldots,i_r}} \frac{\partial q_{i_1,\ldots,i_r}}{\partial \omega_1}$$

$$= \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial \omega_1} \sum_{i_2,\ldots,i_r} \frac{D(q_{i,i_2,\ldots,i_r},\ x_{i_2},\ldots,x_{i_r})}{D(\omega_1,\ldots,\omega_r)} - \sum_{i_1,\ldots,i_r} \frac{\partial q_{i_1,\ldots,i_r}}{\partial \omega_1} \frac{D(x_{i_1},\ldots,x_{i_r})}{D(\omega_1,\ldots,\omega_r)}$$

$$\equiv \sum_{i_1,\ldots,i_r} \frac{\partial q_{i_1,\ldots,i_r}}{\partial \omega_1}\left[\left(\sum_s (-1)^s \frac{\partial x_{i_s}}{\partial \omega_1} \frac{D(x_{i_1},\ldots,x_{i_{s-1}},\ x_{i_{s+1}},\ldots,x_{i_r})}{D(\omega_2,\ldots,\omega_r)}\right) - \frac{D(x_{i_1},\ldots,x_{i_r})}{D(\omega_1,\ldots,\omega_r)}\right]$$

$$+ \sum_{i_1,\ldots,i_r} \sum_{s=|=1} (-1)^s \frac{\partial q_{i_1,\ldots,i_r}}{\partial \omega_s}\left[\sum_t (-1)^t \frac{\partial x_{i_t}}{\partial \omega_1} \frac{D(x_{i_1},\ldots,x_{i_{t-1}},\ x_{i_{t+1}},\ldots,x_{i_r})}{D(\omega_1,\ldots,\omega_{s-1},\ \omega_{s+1},\ldots,\omega_r)}\right] \equiv 0$$

car les deux crochets sont identiquement nuls.

Par suite, $\frac{\partial H}{\partial \omega_1}$ est nul et de même pour les autres dérivées. Dès lors, H est une constante et au lieu de l'équation (8) on peut se contenter d'écrire que la valeur *initiale* de H est nulle. Si l'on n'imposait pas cette condition, les équations (16) et (17) représenteraient, après le changement de variables :

$$\lambda_{i_1,\ldots,i_r} = H_{q_{i_1,\ldots,i_r}}, \tag{18}$$

les équations des extrémales de l'intégrale :

$$\int_{S_r} f \, . \, d(\omega_1, \ldots, \omega_r) \tag{19}$$

où f est une fonction *en général non homogène* par rapport aux λ, définie par l'équation :

$$f = \left(\sum_{i_1,\ldots,i_r} q_{i_1,\ldots,i_p} H_{q_{i_1,\ldots,i_r}}\right) - H \tag{20}$$

où les q sont déterminées par le système (18) en fonction des λ. On n'aurait plus du tout le même problème, car la valeur de l'intégrale ne dépendrait pas seulement de la multiplicité S_r mais de sa représentation paramétrique en fonction de $\omega_1, \ldots, \omega_r$.

IV. *Fonctions d'hypersurfaces.* — Revenons à l'expression (4) de δI; lorsque S_r est une extrémale, δI se réduit à l'intégrale prise sur le contour S_{r-1} de S_r. Cette intégrale peut s'écrire de la manière suivante :

$$\delta I = \int_{\delta S_r} \left[\sum_{i_1,\ldots,i_r} F_{\lambda_{i_1},\ldots,_{i_r}} \frac{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})}{D(\theta_1, \ldots, \theta_r)}\right] d(\theta_1, \ldots, \theta_r)$$

δS_r étant la multiplicité à r dimensions engendrée par le déplacement infiniment petit de S_{r-1}, multiplicité dont on peut représenter les coordonnées en fonctions de r paramètres $\theta_1, \ldots \theta_r$. On voit que δI sera nul si l'on a en tout point de S_{r-1}:

$$\sum_{i_1,\ldots,i_r} F_{\lambda_{i_1},\ldots,\lambda_{i_r}} \frac{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})}{D(\theta_1, \ldots, \theta_r)} = 0.$$

Nous dirons dans ce cas que S_r est une extrémale *transversale* à δS_r le long de S_{r-1}.

Nous allons maintenant supposer par extension d'une théorie connue dans le cas de $r = 1$ que l'on peut déterminer une extrémale S_r par les conditions suivantes: 1.° passer par la multiplicité Σ_{r-1} à $r-1$ dimensions choisie arbitrairement; 2.° être transversale à une multiplicité fixe T_r. Lorsqu'on fait varier Σ_{r-1}, le contour S_{r-1} de S_r se compose de Σ_{r-1} et d'une multiplicité à $r-1$ dimensions au plus Σ'_{r-1} située sur T_r et l'on a

$$\partial I = \int_{\delta_1 S_r} \left[\sum_{i_1,\dots,i_r} F_{\lambda i_1,\dots,\lambda i_r} \frac{D(x_{i_1},\dots, x_{i_r})}{D(\theta_1,\dots, \theta_r)} \right] d(\theta_1,\dots, \theta_r).$$

en appelant $\delta_1 S_r$ la multiplicité engendrée par Σ_{r-1} seulement.

D'après cela, *on voit qu'à chaque position de la multiplicité Σ_{r-1} correspond une valeur bien déterminée de I*: $U_{\Sigma_{r-1}}$, dont la variation est donnée par l'équation :

$$\partial U_{\Sigma_{r-1}} = \int_{\delta_1 S_r} \left[\sum_{i_1,\dots,i_r} \frac{\partial U}{\partial (x_{i_1},\dots, x_{i_r})} \frac{D(x_{i_1},\dots, x_{i_r})}{D(\theta_1,\dots, \theta_r)} \right] d(\theta_1,\dots, \theta_r)$$

en posant:

$$\frac{\partial U}{\partial (x_{i_1},\dots, x_{i_r})} = F_{\lambda i_1,\dots,i_r}. \tag{20}$$

Par suite $U_{\Sigma_{r-1}}$ *est une des fonctions étudiées par M.* Volterra *sous le nom de fonctions d'hyperespace* et que j'appellerai fonction de M. Volterra ou fonction (V) de la multiplicité Σ_{r-1}. Cette fonction n'est d'ailleurs pas en général du premier degré (*). Si l'on pose alors

$$q_{i_1,\dots,i_r} = \frac{\partial U}{\partial (x_{i_1},\dots, x_{i_r})} \tag{21}$$

on voit que cela revient à faire le changement de variables (7) et par conséquent on peut énoncer le théorème suivant:

Si $x_1,\dots, x_n$ représentent les coordonnées d'une multiplicité Σ_{r-1} à $r-1$ dimensions et si les quantités $q_{i_1,\dots,i_r}$ représentent les dérivées fonctionnelles $\frac{\partial U}{\partial (x_{i_1},\dots, x_{i_r})}$ de la fonction $U_{\Sigma_{r-1}}$ définie plus haut, il y a un système d'intégrales des équations (E) qui coïncide sur Σ_{r-1}, avec le système formé par ces quantités.

Les dérivées de la fonction U vérifient donc un système d'équations finies qu'il est facile de former et qui est l'analogue de l'équation aux dérivées

(*) Voir la note déjà citée, vol. V, page 159.

partielles de Jacobi (obtenue pour $r = 1$). Il se compose des équations (8) et (14), puis des équations obtenues de la manière suivante. Appelons $\mu_{i_1,\ldots,i_{r-1}}$ les cosinus directeurs de Σ_{r-1} relativement aux axes $x_{i_1},\ldots, x_{i_{r-1}}$. Les équations (17) vérifiées sur Σ_{r-1} pourront se mettre sous la forme:

$$\ldots = \frac{\delta x_{i_1} \mu_{i_2,\ldots,i_r} - \delta x_{i_2} \mu_{i_1,i_3,\ldots,i_r} + \cdots}{H_{q_{i_1,\ldots,i_r}}} = \ldots$$

Nous avons $C_n^r - 1$ équations à $n-1$ inconnues $\frac{\delta x_2}{\delta x_1}, \cdots, \frac{\delta x_r}{\delta x_1}$ qui par élimination de ces inconnues pourront fournir des équations de la forme:

$$\varphi_i(x_1,\ldots, x_n,\ldots, \mu_{i_2,\ldots,i_r},\ldots, q_{i_1,\ldots,i_r},\ldots) = 0. \qquad (22)$$

Par exemple dans le cas de $r = 2$, on a:

$$H_{q_{ij}} \mu_k + H_{q_{jk}} \mu_i + H_{q_{ki}} \mu_j = 0 \quad (i, j, k = 1,\ldots, n).$$

En définitive, *les dérivées* $\frac{\partial U}{\partial(x_{i_1},\ldots, x_{i_r})}$ *de* $U_{\Sigma_{r-1}}$ *sont liées par les équations* (8), (14) et (22) *aux coordonnées* x_i *et aux cosinus directeurs* $\mu_{i_1,\ldots,i_r}$ *relatifs au point considéré de* Σ_{r-1}. Si l'on s'était contenté de remarquer que les $\frac{\partial U}{\partial(x_{i_1},\ldots, x_{i_r})}$ satisfont à l'équation (8), on n'aurait pas eu un résultat intéressant. Car on sait que ces dérivées ne sont pas déterminées d'une façon unique (*), et que quelle que soit la fonction (V) considérée, *on aurait toujours pu choisir ces dérivées de façon à satisfaire à* (8).

V. *Fonctions du premier degré.* — Cette remarque n'est plus applicable dans le cas où la fonction (V) considérée est du premier degré. En effet, on convient dans ce cas de prendre pour dérivées de la fonction, le seul des systèmes précédents qui soit uniquement fonction des coordonnées du point où l'on prend la dérivée. Dès lors, c'est énoncer *effectivement* une propriété d'une fonction de premier degré que de dire qu'elle satisfait à l'équation

$$H\left(x_1,\ldots, x_r,\ldots, \frac{\partial U}{\partial(x_{i_1},\ldots, x_{i_r})},\cdots\right) = 0. \qquad (8)'$$

Nous démontrerons alors le théorème suivant:

(*) Volterra, Loc. cit., page 160.

Si une fonction (V) du premier degré: $U_{\Sigma_{r-1}}$ *satisfait à* l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles (8)', *elle vérifie le système* (E) *sur toute multiplicité* S_r *telle que l'on ait :*

$$(i_1, \dots, i_r = 1, \dots, n) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{D(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})}{D(\omega_1, \dots, \omega_r)} = H_{q_{i_1,\dots,i_r}} \\ q_{i_1,\dots,i_r} = \dfrac{\partial U}{\partial (x_{i_1}, \dots, x_{i_r})} . \end{array} \right\} \tag{23}$$

En effet, d'après l'hypothèse, les q sont des fonctions de $x_1, \dots, x_n$ telles que l'on ait identiquement (*) :

$$A_{i_1,\dots,i_{r+1}} \equiv \sum_{s=1}^{s=r+1} (-1)^{s+1} \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} q_{i_1,\dots,i_{s-1},i_{s+1},\dots,i_{r+1}} = 0.$$

L'équation (8) étant vérifiée quels que soient $x_1, \dots, x_n$, on aura :

$$\frac{\partial H}{\partial x_{i_1}} = 0 = H_{x_{i_1}} +$$

$$+ \sum_{i_2,\dots,i_{r+1}} \left[q_{i_2,\dots,i_{r+1}} \frac{\partial q_{i_2,\dots,i_{r+1}}}{\partial x_{i_1}} + \sum_s H_{q_{i_1,\dots,i_{s-1},i_{s+1},\dots,i_{r+1}}} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} q_{i_1,\dots,i_{s-1},i_{s+1},\dots,i_{r+1}} \right]$$

$$(i_1 = 1, \dots, n)$$

ou :

$$0 = H_{x_{i_1}} + \sum_{i_2,\dots,i_{r+1}} H_{q_{i_2,\dots,i_{r+1}}} A_{i_1,\dots,i_{r+1}}$$

$$+ \sum_{i_2,\dots,i_r} \left\{ H_{q_{i_2,\dots,i_r}} \frac{\partial}{\partial x_1} q_{i_1,\dots,i_r} + (-1)^r \left[H_{q_{i_1,\dots,i_{r-1},i_{r+1}}} \frac{\partial}{\partial x_{i_{r+1}}} q_{i_1,\dots,i_r} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \dots + H_{q_{i_1,\dots,i_{r-1},i_n}} \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} q_{i_1,\dots,i_r} \right] \right\} .$$

D'après les hypothèses, ces équations peuvent s'écrire :

$$0 = \rho H_{x_{i_1}} + \sum_{i_2,\dots,i_r} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} q_{i_1,\dots,i_r} \frac{D(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r})}{D(\omega_1, \dots, \omega_r)} + \right.$$

$$\left. + (-1)^r \left[\frac{\partial}{\partial x_{i_{r+1}}} q_{i_1,\dots,i_r} \frac{D(x_{i_1}, \dots, x_{i_{r-1}}, x_{i_{r+1}})}{D(\omega_1, \dots, \omega_r)} + \dots \right] \right\}$$

(*) Voir la note déjà citée, vol. V, page 162.

ce sont donc les équations (16) :

$$-\rho\, H_{x_{i_1}} = \rho \sum_{i_2,\dots,i_r} \frac{D(q_{i_1,\dots,} x_{i_2},\dots, x_{i_r})}{D(\omega_1,\dots,\omega_r)}.$$

Inversement, supposons qu'il existe des fonctions $q_{i_1,\dots,i_r}$ de $x_1,\dots, x_r$ qui vérifient le système (16), (17). Voyons si elles peuvent être considérées comme les dérivées d'une fonction du premier degré; c'est-à-dire si toutes les quantités $A_{i_1,\dots i_{r+1}}$ sont nulles. Nous avons vu plus haut que si le système (16), (17) est vérifié, H est une constante. Donc les équations $\frac{\partial H}{\partial x_i} = 0$ sont vérifiées. Et alors en remontant les calculs précédents, on voit qu'on aura :

$$\sum_{i_2,\dots,i_{r+1}} H_{q_{i_2,\dots,i_{r+1}}} A_{i_1,\dots,i_{r+1}} = 0 \qquad (i_1 = 1,\dots, n).$$

Nous avons ainsi n équations linéaires et homogènes par rapport aux C_n^{r+1} quantités $A_{i_1,\dots,i_{r+1}}$. Ces équations sont bien vérifiées lorsque les $A_{i_1,\dots,i_{r+1}}$ sont nuls. Mais le raisonnement ne prouve pas que cela ait lieu nécessairement. Cependant, *on peut affirmer qu'il en est ainsi lorsque* $r = n - 1$. Car le système précédent peut s'écrire dans ce cas sous la forme :

$$H_{q_{1,\dots,s-1,s+1,\dots,n}} A_{1,\dots,n} = 0 \qquad (s = 1,\dots, n).$$

Comme nous supposons précédemment possible le changement de variables :

$$\frac{\lambda_{1,\dots,r}}{H_{q_{1,\dots,r}}} = \dots = \frac{\lambda_{i_1,\dots,i_r}}{H_{q_{i_1,\dots,i_r}}} = \dots,$$

les $H_{q_{i_1,\dots,i_r}}$ ne sont pas tous nuls et on a bien :

$$0 = A_{1,\dots,n} \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} q_{2,\dots,n} - \frac{\partial}{\partial x_2} q_{1,3,\dots,n} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_n} q_{1,\dots,n-1}.$$

VI. *Généralisation des théorèmes de* Jacobi. — *Supposons qu'on ait trouvé une fonction de premier degré* $U_{\Sigma_{r-1}}$ *dépendant d'un paramètre arbitraire* a *et qui vérifie « l'équation aux derivées partielles »* (8') *quel que soit* a. *Je dis que la valeur de* $\frac{\partial U}{\partial a}$ *est constante sur toute extrémale vérifiant les équations* (23). En effet, si Σ_{r-1} et Σ'_{r-1} sont deux multiplicités situées sur l'extrémale S_r, on aura:

$$\frac{\partial}{\partial a} U_{\Sigma'_{r-1}} - \frac{\partial}{\partial a} U_{\Sigma_{r-1}} = \int_{S_r} \Sigma \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{\partial U}{\partial (x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})}\right] d(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$$

ou en posant:

$$V_{\Sigma_{r-1}} = \frac{\partial}{\partial a} U_{\Sigma_{r-1}}:$$

$$V_{\Sigma'_{r-1}} - V_{\Sigma_{r-1}} = \int_{S_r} \left[\frac{\partial}{\partial a} \Sigma \, (q_{i_1, \ldots, i_r} H_{q_{i_1, \ldots, i_r}})\right] d(\omega_1, \ldots, \omega_r).$$

On a donc bien

$$V_{\Sigma_{r-1}} = V_{\Sigma'_{r-1}} = \int_{S_r} \frac{\partial H}{\partial a} d(\omega_1, \ldots, \omega_r) = 0.$$

Considérons maintenant une fonction du premier dégré $U_{\Sigma_{r-1}}$ dépendant de C_n^r paramètres arbitraires: $a_{i_1, \ldots, i_r}$. Nous dirons que c'est une intégrale complète de l'équation $H = 0$, si l'élimination des paramètres a entre les équations

$$q_{i_1, \ldots, i_r} = \frac{\partial U}{\partial (x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})}$$

(où les seconds membres sont certaines fonctions de $x_1, \ldots, x_n$, et des $a_{i_1, \ldots, i_r}$) conduit à la seule relation:

$$H(x_1, \ldots, x_n, \ldots, q_{i_1, \ldots, i_r}; \ldots) = 0.$$

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant qui est la généralisation directe du théorème de Jacobi:

Si une fonction du premier degré $U_{\Sigma_{r-1}}$ est une intégrale complète de l'équation (8') *dépendant de C_n^r paramètre $a_{i_1, \ldots, i_r}$, les équations:*

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_{i_1, \ldots, i_r}} U_{\Sigma_{r-1}} &= b_{i_1, \ldots, i_r} \\ q_{i_1, \ldots, i_r} &= \frac{\partial U}{\partial (x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})} \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

définissent, quelles que soient les constantes a et b laissant ces équations compatibles, un système d'intégrales des équations canoniques (E).

Autrement dit, les multiplicités S_r engendrées par les multiplicités Σ_{r-1} qui donnent des valeurs constantes aux $\frac{\partial}{\partial a} U_{\Sigma_{r-1}}$ sont des multiplicités extrémales. En effet, si $\frac{\partial}{\partial a_{i_1,\ldots,i_r}} U_{\Sigma_{r-1}}$ est constant, on doit avoir en annulant sa variation première:

$$\sum_{j_1,\ldots,j_r} \frac{\partial}{\partial a_{i_1,\ldots,i_r}} q_{j_1,\ldots,j_r} d(x_{j_1},\ldots, x_{j_r}) = 0. \tag{25}$$

Or puisque l'équation (8) est vérifiée quels que soient les a, on a:

$$\sum_{j_1,\ldots,j_r} \frac{\partial}{\partial a_{i_1,\ldots,i_r}} q_{j_1,\ldots,j_r} H_{q_{j_1,\ldots,j_r}} = 0. \tag{26}$$

Mais d'après la définition de l'intégrale complète, on voit facilement que l'un des déterminants fonctionnels d'ordre $C_n^r - 1$ formé par les

$$\frac{\partial}{\partial a_{i_1,\ldots,i_r}} q_{j_1,\ldots,j_r},$$

doit être différent de zéro, tandis que le déterminant d'ordre C_r^n est nul. Par conséquent, les équations (25) et (26) déterminent la même série de rapports pour les $H_{q_{j_1,\ldots,j_r}}$ et les $d(x_{j_1},\ldots, x_{j_r})$. Par suite, on peut écrire:

$$\frac{D(x_{j_1},\ldots, x_{j_r})}{D(\omega_1,\ldots, \omega_r)} = \rho\, H_{q_{j_1,\ldots,j_r}}$$

et alors d'après le théorème démontré page 195, l'on aura aussi:

$$\sum_{j_2,\ldots,j_r} \frac{D(q_{j_1,\ldots,j_r};\, x_{j_2},\ldots, x_{j_r})}{D(\omega_1,\ldots, \omega_r)} = -\rho \frac{\partial H}{\partial x_{j_1}}$$

ce qui démontre le théorème.

Donnons un exemple; les équations:

$$\frac{P^2}{y^2} + \frac{Q^2}{z^2} + \frac{R^2}{x^2} = 1; \quad \frac{d(y, R) - d(z, Q)}{\frac{R^2}{x^3}} = \frac{d(z, P) - d(x, R)}{\frac{P^2}{y^3}} =$$

$$\frac{d(x, Q) - d(y, P)}{\frac{Q^2}{z^3}} = \frac{d(y, z)}{\frac{P}{y^2}} = \frac{d(z, x)}{\frac{Q}{z^2}} = \frac{d(x, y)}{\frac{R}{x^2}}$$

sont vérifiées en prenant

$$P = \frac{\partial U}{\partial (y, z)}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial (z, x)}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial (x, y)}$$

avec

$$U = \int_L [z^2 a c - 2 x y b c] \, d x + y^2 \sqrt{1 - a^2 c^2 - b^2 c^2} \, d z$$

sur toute surface engendrée par la ligne L telle que l'on ait

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \text{const.} \quad \frac{\partial U}{\partial b} = \text{const.} \quad \frac{\partial U}{\partial c} = \text{const.}$$

Nous voyons se manifester dans la résolution des équations canoniques (E) la différence entre le cas de $r = 1$ considéré par Jacobi et le cas général. En effet, l'intégrale complète qu'employait Jacobi pour les résoudre n'est plus une fonction de n variables, *mais une fonction d'hyperespace.* C'est une des nombreuses circonstances où la considération de ces fonctions est imposée par la nature du problème.

Octobre, 1904.

Alcune superficie di Guichard e le relative trasformazioni.

(Di Pasquale Calapso, *a Palermo.)*

In una elegante Nota pubblicata dal sig. Guichard nei *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* (*), l'autore s'imbatte in una notevole classe di superficie, le cui linee di curvatura soddisfano ad una particolare condizione.

L'autore definisce la superficie generica N della classe sudetta mediante la seguente proprietà caratteristica:

« Il existe une surface N' ayant même image sphérique de ses lignes « de courbure que la surface N et telle que si r_1 et r_2 sont les rayons de « courbure principaux de N, r'_1 et r'_2 les rayons correspondantes de N', « on ait

$$r_1 r'_2 + r_2 r'_1 = \text{const.}, \tag{1}$$

« la constante n'étant pas nulle. »

Nella presente Memoria ogni superficie che ammetta una superficie coniugata nella sudetta relazione, la chiameremo *una superficie di* Guichard e talora anche brevemente una superficie N.

Volendo assoggettare queste superficie ad uno studio particolare, conviene riferire la superficie generica N alle sue linee di curvatura.

Scrivendo le due forme quadratiche fondamentali

$$f = E\,d\,u^2 + G\,d\,v^2$$

$$\varphi = D\,d\,u^2 + D''\,d\,v^2,$$

e cercando la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza della super-

(*) *Sur les Surfaces isothermiques* [Comptes Rendus, vol. 130, pg. 159].

ficie N' nella relazione richiesta, si perviene alla condizione

$$\left(\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}}-\sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}}\right)^2=G\pm E.$$

Si è quindi condotti ad una classificazione delle superficie di Guichard secondo due tipi differenti definiti rispettivamente dalle relazioni:

$$\left(\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}}-\sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}}\right)^2=G-E, \tag{α}$$

$$\left(\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}}-\sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}}\right)^2=G+E. \tag{β}$$

Diremo *superficie di* Guichard *di prima specie* quelle definite dalla relazione (α); chiameremo *di seconda specie* le altre.

Tra le superficie di Guichard di prima specie conviene notare le superficie a curvatura costante positiva che costituiscono una importante soluzione particolare del problema; alle superficie di Guichard di seconda specie appartengono le superficie a curvatura costante negativa.

Fra le principali proprietà di queste superficie si ha che l'inversione per raggi vettori reciproci trasforma una superficie di Guichard in infinite nuove superficie di Guichard.

Ho trovato questa proposizione utilizzando gl'invarianti dell'inversione già da me osservati in una precedente Memoria (*).

Partendo da una superficie qualunque, sulla quale non si faccia alcuna ipotesi, di cui le due forme fondamentali siano

$$E\,d\,u^2+G\,d\,v^2$$
$$D\,d\,u^2+D''\,d\,v^2,$$

ed applicando l'inversione, si ha una nuova superficie con tre costanti arbitrarie. Siano le due forme di quest'ultima

$$E_1\,d\,u^2+G_1\,d\,v^2$$
$$D_1\,d\,u^2+D''_1\,d\,v^2.$$

Ho chiamato invariante dell'inversione una funzione

$$\psi\left(E,\ G,\ D,\ D'',\ \frac{\partial E}{\partial u},\cdots\right)$$

(*) *Sulle superficie a linee di curvatura isoterme.* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XVII, p. 275.]

dei coefficienti E, G, D, D'' e delle loro derivate d'ordine qualunque, quando ha luogo identicamente la relazione

$$\psi\left(E,\ G,\ D,\ D'',\ \frac{\partial E}{\partial u},\ldots\right)=\psi\left(E_1,\ G_1,\ D_1,\ D''_1,\ \frac{\partial E_1}{\partial u},\ldots\right).$$

Ho riconosciuto che l'espressione

$$\frac{\left(\sqrt{G}\,\dfrac{D}{\sqrt{E}}-\sqrt{E}\,\dfrac{D''}{\sqrt{G}}\right)^2}{G\pm E}$$

è un invariante nel senso sopra definito, donde ho dedotto il teorema enunciato.

Questo teorema conduce ad un metodo di trasformazione per le superficie N.

Chiamando trasformazione di Guichard il passaggio da una superficie N alla superficie coniugata N', possiamo dire che il sudetto metodo di trasformazione consiste nel comporre l'inversione colla trasformazione di Guichard.

Per le superficie N sussiste un secondo metodo di trasformazione il quale deriva da un teorema di Guichard, che stabilisce alcune relazioni tra le superficie N e le superficie isoterme.

Per enunciare il teorema di Guichard sotto una nuova forma, utile per il seguito della presente Memoria, conviene introdurre come incognita principale per la determinazione di una superficie N, di prima specie, la funzione Θ dei coefficienti del suo elemento lineare definita dalla formola

$$\operatorname{tgh}\Theta=\sqrt{\frac{E}{G}}\,.$$

La funzione Θ è caratterizzata dal fatto che le due equazioni differenziali nella funzione incognita W

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial u}&=\frac{1}{\cosh^2\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}+\frac{1}{\operatorname{senh}^2\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}\\&\quad-\frac{1}{\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta}\frac{\partial^3\Theta}{\partial u\,\partial v^2}-2\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}W,\\\frac{\partial W}{\partial v}&=-\frac{1}{\cosh^2\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}-\frac{1}{\operatorname{senh}^2\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}\\&\quad+\frac{1}{\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta}\frac{\partial^3\Theta}{\partial u^2\,\partial v}-2\coth\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}W\end{aligned}\right\}\qquad(\gamma)$$

debbono ammettere una soluzione comune.

D'altra parte, sappiamo che la determinazione delle superficie isoterme dipende dall'equazione di quarto ordine

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v}\right)+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v}\right)+\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}(\Omega^2)=0 \qquad (\delta)$$

a cui deve soddisfare il suo invariante Ω (*).

Ciò posto, il teorema di Guichard che permette di trasformare una superficie N in infinite superficie isoterme, può enunciarsi nel modo seguente:

Se due funzioni Θ e W sono legate dalle relazioni (γ), il sistema di Riccati

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \Omega}{\partial u}&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{senh}\Theta\,(\Omega^2+W)+i\frac{\partial \Theta}{\partial v}\Omega+\frac{1}{\sqrt{2}\cosh\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2},\\ i\frac{\partial \Omega}{\partial v}&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cosh\Theta\,(\Omega^2+W)+\frac{\partial \Theta}{\partial u}\Omega-\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2},\end{aligned}\right\} \qquad (\varepsilon)$$

è illimitatamente integrabile. Si avrà dell'integrazione una funzione Ω con una costante arbitraria che sarà una soluzione dell'equazione (δ).

Volendo pervenire al secondo metodo di trasformazione per le superficie N è necessario procedere in certo modo alla inversione del teorema di Guichard; potremo così inversamente far derivare da una superficie isoterma infinite superficie N con tre costanti arbitrarie.

Frattanto le formole, che dànno l'invariante Θ della superficie N, supposti noti gl'invarianti Ω e J della superficie isoterma, sono:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}&=-i\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\Theta}{\partial v}+\sqrt{2}\cosh\Theta\frac{\partial\Omega}{\partial u}+\sqrt{2}\,\Omega\operatorname{senh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}+i\frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\partial v},\\ \frac{\partial^2\Theta}{\partial u\partial v}&=\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)^2-\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)^2+\sqrt{2}\,\Omega\operatorname{senh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}\\ &\quad-i\sqrt{2}\,\Omega\cosh\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}+\frac{1}{2}i\Omega^2\cosh 2\Theta-\frac{1}{2}i(J+m),\\ \frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}&=i\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\Theta}{\partial v}-i\sqrt{2}\operatorname{senh}\Theta\frac{\partial\Omega}{\partial v}-i\sqrt{2}\,\Omega\cosh\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}-i\frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\partial v},\end{aligned}\right\} \qquad (\tau)$$

m essendo una costante.

(*) Vedi formola (9) della mia citata Memoria. La medesima equazione di 4.° ordine, sotto forma diversa, fu stabilita precedentemente dal D.r Rothe nella sua tesi di laurea, che ora soltanto vengo a conoscere: *Untersuchungen über die Theorie der isothermen Flächen*, Inaugural-Dissertation, Berlin, 1897 [Vedi formola (D), pag. 23].

Le trasformazioni rappresentate analiticamente dalle formole (ε) e (τ) le chiameremo rispettivamente G, e G^{-1}.

Consideriamo altresì le trasformazioni analoghe che si deducono da (ε) e (τ) cambiando i in $-i$ e che indicheremo con G e $\overline{G}^{-1}$.

Veniamo alle nuove trasformazioni per le superficie di Guichard mediante la composizione di due trasformazioni G, G^{-1}.

Limitando le considerazioni alle trasformazioni reali, potremo dedurre da una ben nota superficie N una nuova superficie N_1 con tre costanti arbitrarie.

Il passaggio dall'invariante Θ della superficie N all'invariante Θ_1 di N_1 è rappresentato analiticamente dal seguente sistema di equazioni

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \Theta_1}{\partial u} &= \lambda \cosh \Theta_1 + \frac{1}{\mu}\frac{\partial \lambda}{\partial v},\\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial v} &= \mu \operatorname{senh} \Theta_1 + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \mu}{\partial u},\end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \lambda}{\partial u} &= \frac{1}{\cosh \Theta}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} - \mu \frac{\partial \Theta}{\partial v} - \frac{1}{2}\operatorname{senh}\Theta\,(\lambda^2 - \mu^2 + 2W),\\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} &= \mu \frac{\partial \Theta}{\partial u} - \cosh \Theta\,.\,\lambda\,\mu,\end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \mu}{\partial u} &= \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial v} - \operatorname{senh}\Theta\,.\,\lambda\,\mu,\\ \frac{\partial \mu}{\partial v} &= \frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} - \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{1}{2}\cosh\Theta\,(\lambda^2 - \mu^2 + 2W),\end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

nella funzione incognita Θ_1 e in due ausiliarie λ e μ.

È notevole che l'integrazione di questo sistema può compiersi mediante la successiva integrazione di due sistemi di Riccati illimitatamente integrabili; ne discende la seguente proposizione:

Se si conosce una soluzione particolare del sistema (II), (III), si può compiere la trasformazione con sole quadrature; e in tale ipotesi l'applicazione della medesima trasformazione alle superficie trasformate richiederà soltanto successive quadrature.

Risultati analoghi sussistono per le superficie di Guichard di seconda specie.

La nuova forma sotto cui ho enunciato il teorema di Guichard, permette altresì di rappresentare la trasformazione di Darboux per le superficie isoterme, chiamata dal Bianchi *una trasformazione* D_m (*), mediante il passaggio da una soluzione particolare della (δ) ad una nuova soluzione contenente quattro costanti arbitrarie.

Le formole relative si ottengono manifestamente componendo una trasformazione G^{-1} con una $\overline{G}$. Si avrà:

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2} = -i\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\Theta}{\partial v} + \sqrt{2}\cosh\Theta\frac{\partial\Omega}{\partial u} + \sqrt{2}\,\Omega\,\mathrm{senh}\,\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u} + i\frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v},$$

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{2}\,i\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{2}\,i\left(\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)^2 + \sqrt{2}\,\Omega\,\mathrm{senh}\,\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}$$

$$- i\sqrt{2}\,\Omega\cosh\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u} + \frac{1}{2}\,i\,\Omega^2\cosh 2\Theta - \frac{1}{2}\,i\,(J+m),$$

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2} = i\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\Theta}{\partial v} - i\sqrt{2}\,\mathrm{senh}\,\Theta\frac{\partial\Omega}{\partial v} - i\sqrt{2}\,\Omega\cosh\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v} - i\frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v},$$

$$\frac{\partial\Omega_1}{\partial u} = \frac{\partial\Omega}{\partial u} - i\,(\Omega_1+\Omega)\frac{\partial\Theta}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{senh}\,\Theta\,(\Omega_1^2-\Omega^2),$$

$$\frac{\partial\Omega_1}{\partial v} = -\frac{\partial\Omega}{\partial v} + i\,(\Omega_1-\Omega)\frac{\partial\Theta}{\partial u} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\cosh\Theta\,(\Omega_1^2-\Omega^2).$$

Si può mettere questo sistema sotto forma reale in virtù dell'esistenza di una funzione ψ soddisfacente alle condizioni

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = -i\frac{\partial\Theta}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{senh}\,\Theta\,(\Omega_1-\Omega),$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial v} = i\frac{\partial\Theta}{\partial u} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\cosh\Theta\,(\Omega_1+\Omega).$$

Mediante l'introduzione della ψ, potremo rappresentare analiticamente la trasformazione sotto la forma seguente:

$$2\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{2}\,(\Omega^2-\Omega_1^2-2\,\Omega\,\Omega_1) - (J+m),$$

$$2\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v} = 2\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{2}{\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v},$$

$$2\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{2}\,(\Omega^2-\Omega_1^2+2\,\Omega\,\Omega_1) + (J+m),$$

(*) Bianchi, *Il teorema di permutabilità per le trasformazioni di* Darboux *delle superficie isoterme.* [Atti della Reale Accademia dei Lincei, 1.° semestre, 1904, pag. 359.]

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u} = \frac{\partial \Omega}{\partial u} + (\Omega_1 + \Omega)\frac{\partial \psi}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial v} = -\frac{\partial \Omega}{\partial v} + (\Omega_1 - \Omega)\frac{\partial \psi}{\partial v}.$$

Intorno a questo sistema nelle funzioni incognite ψ, Ω_1, osserviamo che esso non differisce essenzialmente dal sistema (A) (B) nelle funzioni φ, Ω della mia citata Memoria che per lo scambio di J in $J + m$. Ne discende la proposizione:

Una trasformazione D_m equivale, a meno di movimenti, alla trasformazione C_m ad un parametro da me segnalata nella citata Memoria e rappresentata analiticamente dalla formola

$$J^{(1)} = J + m \qquad (m = \text{costante})$$

più una inversione ed una trasformazione di Christoffel (*).

§ I. — Condizione per le linee di curvatura di una superficie di Guichard.

Siano N e N' due superficie coniugate colla relazione (1); e sia

$$d s'^2 = e\, d u^2 + g\, d v^2$$

la rappresentazione sferica delle loro linee di curvatura. I raggi principali di curvatura delle due superficie soddisfano alle equazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial u} &= (r_2 - r_1)\frac{\partial \log\sqrt{g}}{\partial u}, \\ \frac{\partial r_2}{\partial v} &= (r_1 - r_2)\frac{\partial \log\sqrt{e}}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial r'_1}{\partial u} &= (r'_2 - r'_1)\frac{\partial \log\sqrt{g}}{\partial u}, \\ \frac{\partial r'_2}{\partial v} &= (r'_1 - r'_2)\frac{\partial \log\sqrt{e}}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

(*) È notevole per queste trasformazioni un *teorema di permutabilità* scoperto dal Bianchi; le formole relative sono state esposte dall'autore sotto la forma più elegante nella nota sopra citata.

Da queste si ricava:

$$r'_1 \frac{\partial r_1}{\partial u} + r_1 \frac{\partial r'_1}{\partial u} = (r_1 r'_2 + r_2 r'_1 - 2 r_1 r'_1) \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u}$$

e, denotando con $2c$ il valore della costante:

$$r'_1 \frac{\partial r_1}{\partial u} + r_1 \frac{\partial r'_1}{\partial u} = 2(c - r_1 r'_1) \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u}.$$

Si deduce integrando

$$r_1 r'_1 = c - \frac{\psi(v)}{g},$$

in cui $\psi(v)$ denota una funzione arbitraria della sola v.

Analogamente

$$r_2 r'_2 = c - \frac{\varphi(u)}{e}$$

con $\varphi(u)$ funzione arbitraria della sola u.

Possiamo supporre senza ledere la generalità $c = 1$, e che per una opportuna scelta di parametri le funzioni $\varphi(u)$ e $\psi(v)$ si riducano all'unità positiva o negativa, escludendo per ora il caso in cui qualcuna di queste funzioni si annulla identicamente, caso che tratteremo a parte. Sicchè scriveremo

$$r_1 r'_1 = 1 - \frac{\varepsilon}{g} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

$$r_2 r'_2 = 1 - \frac{\varepsilon'}{e} \qquad (\varepsilon' = \pm 1).$$

Sostituendo in (1) per r'_1 ed r'_2 i valori ricavati dalle formole precedenti, si ottiene dopo facili riduzioni

$$(r_1 - r_2)^2 = \frac{\varepsilon'}{e} r_1^2 + \frac{\varepsilon}{g} r_2^2.$$

Si osserva intanto che i valori $\varepsilon = \varepsilon' = -1$ non possono corrispondere ad una soluzione reale del problema; una almeno di queste costanti dovrà essere l'unità positiva. Ed allora possiamo supporre (scambiando se occorre u con v) $\varepsilon' = +1$, quindi avremo

$$(r_1 - r_2)^2 = \frac{1}{e} r_1^2 + \frac{\varepsilon}{g} r_2^2. \tag{4}$$

Ciò posto, introduciamo per una superficie N le due forme quadratiche fondamentali

$$f = E\,d u^2 + G\,d v^2,$$

$$\varphi = D\,d u^2 + D''\,d v^2.$$

Si dovrà avere:

$$r_1 = -\frac{G}{D''}, \qquad r_2 = -\frac{E}{D},$$

$$e = \frac{D^2}{E}, \qquad g = \frac{D''^2}{G},$$

e sostituendo nella (4):

$$\left(\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}} - \sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}}\right)^2 = G + \varepsilon E,$$

che potremo scrivere

$$\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}} - \sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}} = \sqrt{G + \varepsilon E}.$$

In questa assumeremo per il radicale il valore positivo potendo cambiare se occorre D e D'' in $-D$ e $-D''$.

Siamo quindi condotti a classificare le superficie N secondo due tipi differenti, definiti rispettivamente dalle relazioni:

$$\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}} - \sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}} = \sqrt{G - E}, \tag{5}$$

$$\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}} - \sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}} = \sqrt{G + E}. \tag{6}$$

In ciò che segue è dimostrato che ad ognuna di queste relazioni corrisponde effettivamente una soluzione reale del problema; in altri termini:

Se le linee di curvatura di una superficie soddisfano alla condizione (5) o (6), esiste una nuova superficie avente la stessa immagine sferica delle linee di curvatura e legata alla prima dalla condizione (1).

Le linee di curvatura della nuova superficie soddisfano pure alla (5) o (6). Il passaggio da una superficie N alla sua coniugata N', diremo brevemente una trasformazione di Guichard.

Prima d'intraprendere lo studio delle superficie definite dalla relazione (5) o dalla (6), vogliamo esaminare il caso escluso in cui qualcuna delle funzioni $\varphi(u)$ o $\psi(v)$ sia identicamente nulla.

Supponiamo $\psi(v) = 0$; in tal caso avremo:

$$r_1 r'_1 = 1,$$

$$r_2 r'_2 = 1 - \frac{\varphi(u)}{e}.$$

Fra queste e la (1) eliminando r'_1 ed r'_2, otteniamo:

$$r_2 = r_1 \left(1 - \frac{\sqrt{\varphi(u)}}{\sqrt{e}}\right),$$

donde derivando rispetto a v ed eliminando $\varphi(u)$, ricaviamo:

$$\frac{\partial r_2}{\partial v} = (r_1 - r_2) \frac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial v} + \frac{r_2}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial v}.$$

Ciò posto, perchè sia soddisfatta la seconda delle (2) dovrà essere

$$\frac{\partial r_1}{\partial v} = 0,$$

cioè r_1 sarà funzione della sola u.

Ma ciò esprime, come si può facilmente dimostrare, la condizione necessaria e sufficiente affinchè le linee di curvatura ($u =$ cost.) della superficie siano circoli.

Viceversa ogni superficie, per cui le linee di curvatura di un sistema sono circoli, dà un'effettiva soluzione del problema.

Infatti avremo in tale ipotesi:

$$r_1 = \psi(u),$$

ed integrando la seconda delle (2):

$$r_2 = \psi(u) + \frac{F(u)}{\sqrt{e}}.$$

D'altra parte potremo soddisfare alle (3), ponendo:

$$r'_1 = \frac{1}{\psi(u)}$$

$$r'_2 = \frac{1}{\psi(u)} - \frac{F(u)}{\psi(u)^2 \sqrt{e}}.$$

In questo modo avremo

$$r_1 r'_2 + r_2 r'_1 = 2,$$

la quale dimostra la proposizione.

Su questa particolare soluzione del problema, che conduce ad una classe ben nota di superficie, non ci fermeremo più oltre.

§ II. — Le superficie di Guichard di prima specie (definite dalla relazione (5)).

Volendo fare uno studio completo delle superficie definite dalla relazione (5), conviene semplificare quest'ultima col porre

$$\sqrt{E} = e^{\xi} \operatorname{senh} \Theta, \qquad \sqrt{G} = e^{\xi} \cosh \Theta. \tag{7}$$

Con questa nuova notazione, l'equazione di definizione diventa

$$\cosh \Theta \,.\, \frac{D}{\sqrt{E}} - \operatorname{senh} \Theta \,.\, \frac{D''}{\sqrt{G}} = 1.$$

Ed introducendo altresì una funzione H mediante la formola

$$- \operatorname{senh} \Theta \,.\, \frac{D}{\sqrt{E}} + \cosh \Theta \,.\, \frac{D''}{\sqrt{G}} = H$$

si ha:

$$\frac{D}{\sqrt{E}} = \cosh \Theta + H \operatorname{senh} \Theta, \qquad \frac{D''}{\sqrt{G}} = \operatorname{senh} \Theta + H \cosh \Theta. \tag{8}$$

Denotiamo secondo il solito con x, y, z le coordinate di un punto mobile sulla superficie e con

$$(X_1^{(0)}, Y_1^{(0)}, Z_1^{(0)}), (X_2^{(0)}, Y_2^{(0)}, Z_2^{(0)}), (X_3^{(0)}, Y_3^{(0)}, Z_3^{(0)})$$

i coseni di direzione dei tre spigoli del triedro principale, diretti rispettivamente:

1.° secondo la tangente alla linea $v = \text{cost.}$;
2.° secondo la tangente alla linea $u = \text{cost.}$;
3.° secondo la normale alla superficie.

Le funzioni x, y, z, $X_1^{(0)}$, $Y_1^{(0)}$, $Z_1^{(0)}$, $X_2^{(0)}$, $Y_2^{(0)}$, $Z_2^{(0)}$, $X_3^{(0)}$, $Y_3^{(0)}$, $Z_3^{(0)}$ debbono soddisfare al sistema di equazioni:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = e^{\xi} \operatorname{senh} \Theta \,.\, X_1^{(0)}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = e^{\xi} \cosh \Theta \,.\, X_2^{(0)},$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial u} &= -\left(\operatorname{tgh} \Theta \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \Theta}{\partial v}\right) X_2^{(0)} + (\cosh \Theta + H \operatorname{senh} \Theta)\, X_3^{(0)}, \\ \frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial v} &= \left(\coth \Theta \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \Theta}{\partial u}\right) X_2^{(0)}, \end{aligned} \right. \tag{9}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial X_2^{(0)}}{\partial u}=\left(\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial\xi}{\partial v}+\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)X_1^{(0)},\\
&\frac{\partial X_2^{(0)}}{\partial v}=-\left(\coth\Theta\frac{\partial\xi}{\partial u}+\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)X_1^{(0)}+(\operatorname{senh}\Theta+H\cosh\Theta)\,X_3^{(0)},\\
&\frac{\partial X_3^{(0)}}{\partial u}=-(\cosh\Theta+H\operatorname{senh}\Theta)\,X_1^{(0)},\\
&\frac{\partial X_3^{(0)}}{\partial v}=-(\operatorname{senh}\Theta+H\cosh\Theta)\,X_2^{(0)},
\end{aligned}\right. \tag{9}$$

colle analoghe in y e z.

Come è noto, per la illimitata integrabilità di questo sistema sono necessarie e sufficienti le relazioni:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial H}{\partial u}=(H+\coth\Theta)\frac{\partial\xi}{\partial u},\qquad \frac{\partial H}{\partial v}=(H+\operatorname{tgh}\Theta)\frac{\partial\xi}{\partial v}\\
&\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}+\coth\Theta\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}+\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2}-\frac{1}{\operatorname{senh}^2\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial u}+\\
&+\frac{1}{\cosh^2\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial v}+(\cosh\Theta+H\operatorname{senh}\Theta)(\operatorname{senh}\Theta+H\cosh\Theta)=0).
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Conviene porre questo sistema sotto altra forma che meglio si presti per ulteriori ricerche.

A tale scopo introduciamo una funzione ausiliaria W mediante la formola

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2}+\frac{1}{2\operatorname{senh}^2\Theta}\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2-\frac{1}{2\cosh^2\Theta}\left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2+\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}+$$

$$+\coth\Theta\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}+\frac{1}{2}\cosh 2\Theta\,(1+H^2)+2H\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta+W=0.$$

Potremo allora esprimere le derivate seconde della ξ per mezzo delle derivate d'ordine inferiore e di W, cioè

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2-\frac{1}{2}\operatorname{tgh}^2\Theta\left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2+\coth\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial u}-\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial v}$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{senh}^2\Theta\,(1+H^2)-H\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta-\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}+W\operatorname{senh}^2\Theta,$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2-\frac{1}{2}\coth^2\Theta\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2+\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial v}-\coth\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial u}$$

$$-\frac{1}{2}\cosh^2\Theta\,(1+H^2)-H\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta-\coth\Theta\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}-W\cosh^2\Theta.$$

Inoltre dal sistema (10) eliminando la funzione H coll'imporre la condizione

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)=0,$$

si perviene all'equazione

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}+\coth\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\mathrm{tgh}\,\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}.$$

Al sistema (10) si può dunque sostituire il sistema seguente:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2-\frac{1}{2}\,\mathrm{tgh}^2\,\Theta\left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2+\coth\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial u}-\mathrm{tgh}\,\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial v}\\
&\quad-\frac{1}{2}\,\mathrm{senh}^2\,\Theta\,(1+H^2)-H\,\mathrm{senh}\,\Theta\cosh\Theta-\mathrm{tgh}\,\Theta\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}+W\,\mathrm{senh}^2\,\Theta,\\
\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial v}&=\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}+\coth\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial u}+\mathrm{tgh}\,\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v},\\
\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2-\frac{1}{2}\coth^2\Theta\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2+\mathrm{tgh}\,\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial v}-\coth\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial u}\\
&\quad-\frac{1}{2}\cosh^2\Theta\,(1+H^2)-H\,\mathrm{senh}\,\Theta\cosh\Theta-\coth\Theta\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}-W\cosh^2\Theta,
\end{aligned}\right\}\qquad (A)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial u}&=(H+\coth\Theta)\frac{\partial\xi}{\partial u},\\
\frac{\partial H}{\partial v}&=(H+\mathrm{tgh}\,\Theta)\frac{\partial\xi}{\partial v},
\end{aligned}\right\}\qquad (B)$$

Infine calcolando le condizioni d'integrabilità del sistema (A), (B) si trova che le funzioni W e Θ debbono soddisfare alle equazioni

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial u}&=\frac{1}{\cosh^2\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}+\frac{1}{\mathrm{senh}^2\,\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}\\
&\quad-\frac{1}{\mathrm{senh}\,\Theta\cosh\Theta}\frac{\partial^3\Theta}{\partial u\,\partial v^2}-2\,\mathrm{tgh}\,\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}W,\\
\frac{\partial W}{\partial v}&=-\frac{1}{\cosh^2\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}-\frac{1}{\mathrm{senh}^2\,\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}\\
&\quad+\frac{1}{\mathrm{senh}\,\Theta\cosh\Theta}\frac{\partial^3\Theta}{\partial u^2\,\partial v}-2\coth\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}W\ (*).
\end{aligned}\right\}\qquad (C)$$

(*) Considerando le equazioni (C) nella funzione incognita W, basterà determinare la Θ in modo che esse abbiano una sola soluzione comune.

Inversamente, se due funzioni Θ e W soddisfano al sistema (C), il sistema (A), (B) è illimitatamente integrabile; le funzioni ξ, H ricavate da esso e la funzione Θ soddisferanno al sistema (10), e allora si può determinare dalle (9) una superficie di cui l'elemento lineare è

$$d\,s^2 = e^{2\xi}(\operatorname{senh}^2\Theta\,.\,d\,u^2 + \cosh^2\Theta\,.\,d\,v^2)$$

e la rappresentazione sferica di Gauss è

$$d\,s'^2 = (\cosh\Theta + H\operatorname{senh}\Theta)^2\,d\,u^2 + (\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta)^2\,d\,v^2.$$

I coefficienti delle due forme quadratiche soddisfano manifestamente alla relazione (5).

Dimostriamo ora che le superficie così ottenute dànno effettivamente una soluzione del problema.

A tale scopo introduciamo due funzioni ξ_1, Θ_1 definite rispettivamente dalle formole

$$\left.\begin{aligned} e^{\xi_1} &= e^{-\xi}(1 - H^2), \\ \operatorname{senh}\Theta_1 &= \frac{-1}{1-H^2}[\operatorname{senh}\Theta(1+H^2) + 2H\cosh\Theta]. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Avremo allora

$$\cosh\Theta_1 = \frac{1}{1-H^2}[\cosh\Theta(1+H^2) + 2H\operatorname{senh}\Theta]. \tag{12}$$

Dalla prima delle (11) derivando si ha:

$$\frac{\partial\,\xi_1}{\partial\,u} = -\frac{\partial\,\xi}{\partial\,u} - \frac{2\,H}{1-H^2}\frac{\partial H}{\partial\,u}.$$

In questa sostituendo per $\frac{\partial\,\xi}{\partial\,u}$ il suo valore ricavato dalla prima del sistema (10) ed osservando le (11) e (12) si ricava:

$$\frac{\partial\,H}{\partial\,u} = (H + \coth\Theta_1)\frac{\partial\,\xi_1}{\partial\,u}\,. \tag{13}$$

Analogamente:

$$\frac{\partial\,H}{\partial\,v} = (H + \operatorname{tgh}\Theta_1)\frac{\partial\,\xi_1}{\partial\,v}\,. \tag{14}$$

Inoltre dalle (11) e (12) si ricava:

$$\left.\begin{aligned}\cosh\Theta_1 + H\,\mathrm{senh}\,\Theta_1 &= \cosh\Theta + H\,\mathrm{senh}\,\Theta,\\ \mathrm{senh}\,\Theta_1 + H\cosh\Theta_1 &= -(\mathrm{senh}\,\Theta + H\cosh\Theta).\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

E la terza delle (10), potendosi scrivere in forza delle (10) stesse:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\cosh\Theta + H\,\mathrm{senh}\,\Theta}\,\frac{\partial}{\partial u}(\mathrm{senh}\,\Theta + H\cosh\Theta)\right] +$$
$$+\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{\mathrm{senh}\,\Theta + H\cosh\Theta}\,\frac{\partial}{\partial v}(\cosh\Theta + H\,\mathrm{senh}\,\Theta)\right] +$$
$$+(\cosh\Theta + H\,\mathrm{senh}\,\Theta)(\mathrm{senh}\,\Theta + H\cosh\Theta) = 0,$$

sarà soddisfatta altresì dalla funzione Θ_1.

Ed allora le funzioni ξ_1, Θ_1, H soddisferanno al sistema (10) e perciò esiste una nuova superficie le cui forme fondamentali prima e terza sono rispettivamente:

$$d s^2 = e^{2\xi_1}(\mathrm{senh}^2\,\Theta_1\, d u^2 + \cosh^2\Theta_1\, d v^2),$$
$$d s'^2 = (\cosh\Theta_1 + H\,\mathrm{senh}\,\Theta_1)^2\, d u^2 + (\mathrm{senh}\,\Theta_1 + H\cosh\Theta_1)\, d v^2.$$

In forza delle (15) questa nuova superficie ha lo stesso elemento lineare sferico della superficie primitiva; per i raggi di curvatura di esse si hanno le formole:

$$r_1 = \frac{e^{\xi}\cosh\Theta}{\mathrm{senh}\,\Theta + H\cosh\Theta}, \qquad r_2 = \frac{e^{\xi}\,\mathrm{senh}\,\Theta}{\cosh\Theta + H\,\mathrm{senh}\,\Theta},$$
$$r'_1 = \frac{-e^{\xi_1}\cosh\Theta_1}{\mathrm{senh}\,\Theta_1 + H\cosh\Theta_1}, \qquad r'_2 = \frac{-e^{\xi_1}\,\mathrm{senh}\,\Theta_1}{\cosh\Theta_1 + H\,\mathrm{senh}\,\Theta_1}.$$

E da queste tenendo conto delle (11) e (12) si deduce

$$r_1 r'_2 + r_2 r'_1 = 2.$$

Infine notiamo che tra le due forme fondamentali della seconda superficie si ha la relazione identica

$$\cosh\Theta_1(\cosh\Theta_1 + H\,\mathrm{senh}\,\Theta_1) - \mathrm{senh}\,\Theta_1(\mathrm{senh}\,\Theta_1 + H\cosh\Theta_1) = 1,$$

ed è così stabilita la proposizione.

Come soluzione particolarmente interessante notiamo che le equazioni (C) rimangono soddisfatte, assumendo per Θ una soluzione della equazione

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh} \Theta \cosh \Theta = 0,$$

e per W la funzione

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\operatorname{senh} \Theta \cosh \Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{\operatorname{senh} \Theta \cosh \Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

In tal caso le superficie di Guichard si riducono in particolare alle superficie a curvatura costante positiva, e alle loro derivate mediante l'inversione.

§ III. — Le superficie di Guichard di seconda specie (definite dalla relazione (6)).

Per trattare il problema in questa seconda ipotesi porremo

$$\sqrt{E} = e^{\xi} \operatorname{sen} \Theta, \quad \sqrt{G} = e^{\xi} \cos \Theta, \tag{7*}$$

e con questa notazione l'equazione di definizione diventa:

$$\cos \Theta \,.\, \frac{D}{\sqrt{E}} - \operatorname{sen} \Theta \frac{D''}{\sqrt{G}} = 1.$$

Ed introducendo altresì una funzione H mediante la formola

$$\operatorname{sen} \Theta \frac{D}{\sqrt{E}} + \cos \Theta \frac{D''}{\sqrt{G}} = H,$$

avremo

$$\frac{D}{\sqrt{E}} = \cos \Theta + H \operatorname{sen} \Theta, \quad \frac{D''}{\sqrt{G}} = -\operatorname{sen} \Theta + H \cos \Theta. \tag{8)*}$$

Con le solite notazioni siamo condotti al sistema seguente:

$$\left.\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial x}{\partial u} = e^{\xi} \operatorname{sen} \Theta \, X_1^{(0)} \\
\dfrac{\partial x}{\partial v} = e^{\xi} \cos \Theta \, X_2^{(0)}
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial X_1^{(0)}}{\partial u} = -\left(\operatorname{tg} \Theta \dfrac{\partial \xi}{\partial v} + \dfrac{\partial \Theta}{\partial v}\right) X_2^{(0)} + (\cos \Theta + H \operatorname{sen} \Theta) X_3^{(0)} \\
\dfrac{\partial X_1^{(0)}}{\partial v} = \left(\cot \Theta \dfrac{\partial \xi}{\partial u} - \dfrac{\partial \Theta}{\partial u}\right) X_2^{(0)}
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial X_2^{(0)}}{\partial u} = \left(\operatorname{tg} \Theta \dfrac{\partial \xi}{\partial v} + \dfrac{\partial \Theta}{\partial v}\right) X_1^{(0)} \\
\dfrac{\partial X_2^{(0)}}{\partial v} = -\left(\cot \Theta \dfrac{\partial \xi}{\partial u} - \dfrac{\partial \Theta}{\partial u}\right) X_1^{(0)} - (\operatorname{sen} \Theta - H \cos \Theta) X_3^{(0)}
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial X_3^{(0)}}{\partial u} = -(\cos \Theta + H \operatorname{sen} \Theta) X_1^{(0)} \\
\dfrac{\partial X_3^{(0)}}{\partial v} = (\operatorname{sen} \Theta - H \cos \Theta) X_2^{(0)}.
\end{array}\right.
\end{array}\right\} \quad (9)^*$$

Per la illimitata integrabilità di questo sistema sono necessarie e sufficienti le relazioni

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial H}{\partial u} = (H + \cot \Theta) \dfrac{\partial \xi}{\partial u}, \quad \dfrac{\partial H}{\partial v} = (H - \operatorname{tg} \Theta) \dfrac{\partial \xi}{\partial v} \\
\dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} - \dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} + \cot \Theta \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + \operatorname{tg} \Theta \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 \Theta} \dfrac{\partial \Theta}{\partial u} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} + \\
+ \dfrac{1}{\cos^2 \Theta} \dfrac{\partial \Theta}{\partial v} \dfrac{\partial \xi}{\partial v} - (\cos \Theta + H \operatorname{sen} \Theta)(\operatorname{sen} \Theta - H \cos \Theta) = 0.
\end{array}\right\} \quad (10)^*$$

Introduciamo come precedentemente una funzione ausiliaria W definita da:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} - \frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 \Theta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{2 \cos^2 \Theta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 - \operatorname{tg} \Theta \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2}$$

$$- \cot \Theta \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} + \frac{1}{2}(\cos^2 \Theta - \operatorname{sen}^2 \Theta)(1 - H^2) + 2 H \operatorname{sen} \Theta \cos \Theta + W = 0$$

e con procedimento analogo a quello seguito nel paragrafo precedente sostituiamo alle (10)* un sistema risoluto rispetto alle derivate seconde della ξ e alle derivate prime della H. Avremo:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\Theta\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 + \cot\Theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial u}\,\frac{\partial \xi}{\partial u} - \operatorname{tg}\Theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial v}\,\frac{\partial \xi}{\partial v}\\
&\quad + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\Theta\,(1 - H^2) - H\operatorname{sen}\Theta\cos\Theta + \operatorname{tg}\Theta\,\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2} - W\operatorname{sen}^2\Theta\\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v} &= \frac{\partial \xi}{\partial u}\,\frac{\partial \xi}{\partial v} + \cot\Theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial v}\,\frac{\partial \xi}{\partial u} - \operatorname{tg}\Theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial u}\,\frac{\partial \xi}{\partial v}\\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 - \frac{1}{2}\cot^2\Theta\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 - \operatorname{tg}\Theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial v}\,\frac{\partial \xi}{\partial v} + \cot\Theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial u}\,\frac{\partial \xi}{\partial u}\\
&\quad + \frac{1}{2}\cos^2\Theta\,(1 - H^2) + H\operatorname{sen}\Theta\cos\Theta - \cot\Theta\,\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2} + W\cos^2\Theta
\end{aligned}\right\}\quad (A)^*$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial u} &= (H + \cot\Theta)\,\frac{\partial \xi}{\partial u}\\
\frac{\partial H}{\partial v} &= (H - \operatorname{tg}\Theta)\,\frac{\partial \xi}{\partial v}\,.
\end{aligned}\right\}\quad (B)^*$$

Infine calcolando le condizioni d'integrabilità del sistema (A)*, (B)* si trova che le funzioni W e Θ debbono soddisfare alle equazioni

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial u} &= -\frac{1}{\cos^2\Theta}\,\frac{\partial\Theta}{\partial u}\,\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\Theta}\,\frac{\partial\Theta}{\partial u}\,\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}\\
&\quad + \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta\cos\Theta}\,\frac{\partial^3\Theta}{\partial u\,\partial v^2} + 2\operatorname{tg}\Theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial u}\,W,\\
\frac{\partial W}{\partial v} &= \frac{1}{\cos^2\Theta}\,\frac{\partial\Theta}{\partial v}\,\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\Theta}\,\frac{\partial\Theta}{\partial v}\,\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}\\
&\quad + \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta\cos\Theta}\,\frac{\partial^3\Theta}{\partial u^2\,\partial v} - 2\cot\Theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial v}\,W.
\end{aligned}\right\}\quad (C)^*$$

Inversamente, se due funzioni Θ, W soddisfano al sistema (C)*, il sistema (A)*, (B)* è illimitatamente integrabile; le funzioni ξ, H ricavate da esso e la funzione Θ soddisfaranno al sistema (10)*, e allora si può determinare dalle (9)* una superficie di cui l'elemento lineare è

$$d\,s^2 = e^{2\xi}\,(\operatorname{sen}^2\Theta\,d\,u^2 + \cos^2\Theta\,d\,v^2)$$

e la rappresentazione sferica di Gauss è

$$d\,s'^2 = (\cos\Theta + H\operatorname{sen}\Theta)^2\,d\,u^2 + (\operatorname{sen}\Theta - H\cos\Theta)^2\,d\,v^2.$$

I coefficienti delle due forme quadratiche soddisfano manifestamente alla relazione (6).

Si dimostra come nel caso precedente che le superficie così ottenute dànno effettivamente una soluzione del problema; invero le formole che definiscono in questo caso la superficie coniugata sono:

$$\left.\begin{aligned} e^{\xi_1} &= e^{-\xi}(1+H^2) \\ \operatorname{sen}\Theta_1 &= \frac{-1}{1+H^2}\left[\operatorname{sen}\Theta(1-H^2) - 2H\cos\Theta\right], \end{aligned}\right\} \qquad (11)^*$$

Avremo allora

$$\cos\Theta_1 = \frac{1}{1+H^2}\left[\cos\Theta(1-H^2) + 2H\operatorname{sen}\Theta\right)$$

$$r_1 = \frac{e^{\xi}\cos\Theta}{\operatorname{sen}\Theta - H\cos\Theta}, \qquad r_2 = \frac{-e^{\xi}\operatorname{sen}\Theta}{\cos\Theta + H\operatorname{sen}\Theta}$$

$$r'_1 = \frac{e^{\xi_1}\cos\Theta_1}{\operatorname{sen}\Theta_1 - H\cos\Theta_1}, \qquad r'_2 = \frac{-e^{\xi_1}\operatorname{sen}\Theta_1}{\cos\Theta_1 + H\operatorname{sen}\Theta_1}$$

donde discende facilmente la proposizione.

Come soluzione particolarmente interessante notiamo che le equazioni $(C)^*$ rimangono soddisfatte, assumendo per Θ una soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2} + \operatorname{sen}\Theta\cos\Theta = 0,$$

e per W la funzione

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta\cos\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta\cos\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

In tal caso le superficie di Guichard si riducono in particolare alle superficie a curvatura costante negativa, e alle loro derivate mediante l'inversione.

§ IV. — Gl'invarianti dell'inversione.

Allo studio delle classi di superficie sopra considerate siamo altresì condotti da una questione assai più generale di cui per ora tratteremo soltanto in quanto che possa interessare alla presente Memoria.

Riprendiamo per una superficie qualsiasi S, sulla quale non faremo alcuna ipotesi, le consuete notazioni. Siano x, y, z, le coordinate di un punto mobile su S, e siano

$$f = E\,d\,u^2 + G\,d\,v^2$$
$$\varphi = D\,d\,u^2 + D''\,d\,v^2$$

le due forme fondamentali della superficie riferita alle sue linee di curvatura.

Applicando alla superficie S l'inversione di potenza $= -1$, otterremo una superficie S_1 dipendente da tre costanti arbitrarie.

Siano

$$f_1 = E_1\,d\,u^2 + G_1\,d\,v^2$$
$$\varphi_1 = D_1\,d\,u^2 + D''_1\,d\,v^2$$

le due forme fondamentali di quest'ultima.

Chiameremo *invariante* una funzione

$$\psi\left(E,\ G,\ D,\ D'',\ \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots\right)$$

dei coefficienti E, G, D, D'' e delle loro derivate d'ordine qualunque, quando ha luogo identicameute la relazione

$$\psi\left(E,\ G,\ D,\ D'',\ \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots\right) = \psi\left(E_1,\ G_1,\ D_1,\ D''_1,\ \frac{\partial E_1}{\partial u}, \ldots\right).$$

Qui interessano particolarmente alcuni invarianti fondamentali che passiamo a costruire.

Denotiamo con a, b, c le costanti del polo dell'inversione, e poniamo

$$\rho = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$$

Le formole della trasformazione sono:

$$x_1 = a - \frac{x - a}{\rho}, \quad y_1 = b - \frac{y - b}{\rho}, \quad z_1 = c - \frac{z - c}{\rho}. \tag{16}$$

Derivando queste si ottiene:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{x - a}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial u}, \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{x - a}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

con le analoghe in y e z, dalle quali si deducono facilmente le relazioni

$$E = \rho^2 E_1, \quad G = \rho^2 G_1. \tag{18}$$

Secondo la definizione superiore la funzione $\frac{E}{G}$ è un invariante dell'inversione.

Un secondo invariante l'otterremo nel modo seguente.

Esprimendo i coseni direttori della normale alla superficie trasformata per mezzo dei coseni direttori della normale alla superficie primitiva e delle funzioni x, y, z si ottengono con opportuni artifizi le formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned} X_3 &= -X_3^{(0)} + \frac{x-a}{\rho} \sum 2 X_3^{(0)} (x-a) \\ Y_3 &= -Y_3^{(0)} + \frac{y-b}{\rho} \sum 2 X_3^{(0)} (x-a) \\ Z_3 &= -Z_3^{(0)} + \frac{z-c}{\rho} \sum 2 X_3^{(0)} (x-a). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

D'altra parte derivando ancora le (17) e tenendo presenti le (17) stesse, si ricava:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{x-a}{\rho^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2}.$$

D'onde, osservando le (19)

$$X_3 \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} = \left[\frac{1}{\rho} X_3^{(0)} - \frac{x-a}{\rho^2} \sum 2 X_3^{(0)} (x-a)\right] \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial u} X_3 \frac{\partial x_1}{\partial u}$$
$$- \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} \left[\frac{x-a}{\rho} X_3^{(0)} - \frac{(x-a)^2}{\rho^2} \sum 2 X_3^{(0)} (x-a)\right].$$

Sommando e riducendo:

$$\sum X_3 \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} = \frac{1}{\rho} \sum X_3^{(0)} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{1}{2\rho^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} \sum 2 X_3^{(0)} (x-a)$$
$$- \frac{1}{\rho^2} \left[(x-a) \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + (y-b) \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + (z-c) \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right] \sum 2 X_3^{(0)} (x-a).$$

Intanto, avendosi

$$\rho = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

sarà:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \rho}{\partial u}=\sum(x-a)\frac{\partial x}{\partial u},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2}=E+\sum(x-a)\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}.$$

Dopo di che la precedente si può scrivere

$$D_1=\frac{1}{\rho}D+\frac{1}{\rho^2}E\sum 2X_3^{(0)}(x-a). \tag{20}$$

Sostituendo in forza delle (18) per ρ il rapporto $\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E_1}}$, la (20) diventa

$$\frac{D_1}{\sqrt{E_1}}=\frac{D}{\sqrt{E}}+\sqrt{E_1}\sum 2X_3^{(0)}(x-a). \tag{21}$$

In modo analogo si trova

$$\frac{D''_1}{\sqrt{G_1}}=\frac{D''}{\sqrt{G}}+\sqrt{G_1}\sum 2X_3^{(0)}(x-a). \tag{22}$$

Moltiplicando la (21) per $\sqrt{G}$, la (22) per $\sqrt{E}$ ed osservando le (18) si ha:

$$\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}}+\rho\sqrt{E_1G_1}\sum 2X_3^{(0)}(x-a)=\rho\sqrt{G_1}\frac{D_1}{\sqrt{E_1}}$$

$$\sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}}+\rho\sqrt{E_1G_1}\sum 2X_3^{(0)}(x-a)=\rho\sqrt{E_1}\frac{D''_1}{\sqrt{G_1}}.$$

Da queste sottraendo si ricava la relazione

$$\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}}-\sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}}=\rho\left(\sqrt{G_1}\frac{D_1}{\sqrt{E_1}}-\sqrt{E_1}\frac{D''_1}{\sqrt{G_1}}\right). \tag{23}$$

D'altra parte in forza delle (18)

$$\sqrt{G+\varepsilon E}=\rho\sqrt{G_1+\varepsilon E_1} \qquad (\varepsilon=\pm 1). \tag{24}$$

Dalla (23) e (24) si deduce che l'espressione

$$\frac{\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}}-\sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}}}{\sqrt{G+\varepsilon E}} \tag{25}$$

è un invariante dell'inversione.

Questo risultato permette di dedurre importanti conseguenze per la presente teoria.

Invero la proprietà invariantiva dell'espressione (25) mostra che applicando l'inversione ad una superficie di Guichard, si ottengono ∞^3 nuove superficie di Guichard.

Componendo l'inversione colla trasformazione di Guichard si ha un primo metodo di trasformazione per queste superficie.

§ V. — Il teorema di Guichard.

In questo paragrafo ci occuperemo in particolar modo delle superficie N di prima specie, per le quali adotteremo le notazioni introdotte al § II.

Per la teoria di queste superficie ha grande importanza un teorema del sig. Guichard, che può enunciarsi nel modo seguente:

Data una superficie N di prima specie, si può determinare una funzione φ delle variabili u e v, in modo che la superficie I definita dalle equazioni

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + e^{\varphi}\left(X_1^{(0)} + i\, X_2^{(0)}\right) \\ y_1 &= y + e^{\varphi}\left(Y_1^{(0)} + i\, Y_2^{(0)}\right) \\ z_1 &= z + e^{\varphi}\left(Z_1^{(0)} + i\, Z_2^{(0)}\right) \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

sia isoterma.

La determinazione della funzione φ dipende da un sistema di Riccati illimitatamente integrabile.

L'autore viene così a dedurre ∞^1 superficie isoterme, riferite alle linee di curvatura, ciascuna delle quali si ottiene come luogo di un punto A_1 situato sulla tangente isotropa della superficie N.

Per ciò che segue è molto utile dimostrare direttamente questo teorema deducendolo dalle formole superiori.

A tale scopo deriviamo le (26) e sostituiamo alle derivate delle funzioni x, y, z, $X_1^{(0)}$, $Y_1^{(0)}$, $Z_1^{(0)}$, $X_2^{(0)}$, $Y_2^{(0)}$, $Z_2^{(0)}$, le loro espressioni ricavate dalle (9).

Otteniamo così:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= \left[e^{\xi}\,\mathrm{senh}\,\Theta + e^{\varphi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + i\frac{\partial \Theta}{\partial v} + i\,\mathrm{tgh}\,\Theta\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)\right] X_1^{(0)} \\ &+ i\, e^{\varphi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + i\frac{\partial \Theta}{\partial v} + i\,\mathrm{tgh}\,\Theta\frac{\partial \xi}{\partial v}\right) X_2^{(0)} + e^{\varphi}\left(\cosh\Theta + H\,\mathrm{senh}\,\Theta\right) X_3^{(0)}, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial v} &= \left[e^{\xi}\cosh\Theta + e^{\varphi}\left(i\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\Theta}{\partial u} + \coth\Theta\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)\right]X_2^{(0)}\\ &-i e^{\varphi}\left(i\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\Theta}{\partial u} + \coth\Theta\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)X_1^{(0)} + i e^{\varphi}(\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta)X_3^{(0)},\end{aligned}\right\}\quad(27)$$

colle analoghe in y_1 e z_1.

Imponendo le condizioni

$$\sum\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} = 0,$$

$$\sum\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 = \sum\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2,$$

si trova che la funzione φ dovrà soddisfare al sistema seguente:

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{senh}\Theta\left(i\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\Theta}{\partial u}\right) - \cosh\Theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + i\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right) + \cosh\Theta\frac{\partial\xi}{\partial u}\\ &\quad - i\operatorname{senh}\Theta\frac{\partial\xi}{\partial v} - e^{\xi-\varphi}(\cosh\Theta + H\operatorname{senh}\Theta)(\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta) = 0,\\ &\cosh\Theta\left(i\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\Theta}{\partial u}\right) - \operatorname{senh}\Theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + i\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right) + \frac{\cosh^2\Theta}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial\xi}{\partial u}\\ &\quad - i\frac{\operatorname{senh}^2\Theta}{\cosh\Theta}\frac{\partial\xi}{\partial v} - \cosh^2\Theta\operatorname{senh}(\varphi-\xi) - \operatorname{senh}^2\Theta\cosh(\varphi-\xi)\\ &\quad - \frac{1}{2}e^{\varphi-\xi}(H^2\cosh^2\Theta + H^2\operatorname{senh}^2\Theta + 4H\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta) = 0,\end{aligned}\right\}\quad(28)$$

che si può scrivere

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + i\frac{\partial\Theta}{\partial v} &= -\operatorname{senh}\Theta\cosh(\varphi-\xi) - i\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial\xi}{\partial v}\\ &\qquad - \frac{1}{2}e^{\varphi-\xi}(H^2\operatorname{senh}\Theta + 2H\cosh\Theta),\\ i\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\Theta}{\partial u} &= \cosh\Theta\operatorname{senh}(\varphi-\xi) - \coth\Theta\frac{\partial\xi}{\partial u}\\ &\qquad + \frac{1}{2}e^{\varphi-\xi}(H^2\cosh\Theta + 2H\operatorname{senh}\Theta).\end{aligned}\right\}\quad(29)$$

Intorno a questo sistema osserviamo subito che esso è illimitatamente integrabile in forza delle equazioni (10) che supponiamo soddisfatte; inoltre, posto $\rho = e^{\varphi}$, esso assume la forma di Riccati.

Sostituendo nelle (27) per la derivata della φ le espressioni ricavate dalle (29), si ha:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x_1}{\partial u} &= \Big\{ e^{\xi} \operatorname{senh} \Theta - e^{\varphi} \Big[\operatorname{senh} \Theta \cosh (\varphi - \xi) + \\
&\qquad + \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} (H^2 \operatorname{senh} \Theta + 2 H \cosh \Theta) \Big] \Big\} X_1^{(0)} \\
&\quad - i e^{\varphi} \Big[\operatorname{senh} \Theta \cosh (\varphi - \xi) + \\
&\qquad + \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} (H^2 \operatorname{senh} \Theta + 2 H \cosh \Theta) \Big] X_2^{(0)} \\
&\qquad + e^{\varphi} (\cosh \Theta + H \operatorname{senh} \Theta) X_3^{(0)}, \\
\frac{\partial x_1}{\partial v} &= - i e^{\varphi} \Big[\cosh \Theta \operatorname{senh} (\varphi - \xi) + \\
&\qquad + \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} (H^2 \cosh \Theta + 2 H \operatorname{senh} \Theta) \Big] X_1^{(0)} \\
&\quad + \Big\{ e^{\xi} \cosh \Theta + e^{\varphi} \Big[\cosh \Theta \operatorname{senh} (\varphi - \xi) + \\
&\qquad + \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} (H^2 \cosh \Theta + 2 H \operatorname{senh} \Theta) \Big] \Big\} X_2^{(0)} \\
&\qquad + i e^{\varphi} (\operatorname{senh} \Theta + H \cosh \Theta) X_3^{(0)},
\end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

donde si ricava per l'elemento lineare della I

$$d s^2 = e^{2\varphi} (d u^2 + d v^2).$$

Ed ora dimostriamo che per una funzione φ ricavata dal sistema (29), le equazioni (26) dànno effettivamente una superficie isoterma riferita alle sue linee di curvatura.

A tale oggetto basterà mostrare che sulla superficie I le linee u e v sono coniugate.

Denotando con X_1, Y_1, Z_1, i coseni direttori della tangente ad una linea v e con X_2, Y_2, Z_2 i coseni direttori della tangente ad una linea u, si ha:

$$X_1 = e^{-\varphi} \frac{\partial x_1}{\partial u}, \quad Y_1 = e^{-\varphi} \frac{\partial y_1}{\partial u}, \quad Z_1 = e^{-\varphi} \frac{\partial z_1}{\partial u},$$

$$X_2 = e^{-\varphi} \frac{\partial x_1}{\partial v}, \quad Y_2 = e^{-\varphi} \frac{\partial y_1}{\partial v}, \quad Z_2 = e^{-\varphi} \frac{\partial z_1}{\partial v}.$$

E ponendo altresì per brevità

$$l = X_1^{(0)} + i X_2^{(0)}, \quad m = Y_1^{(0)} + i Y_2^{(0)}, \quad n = Z_1^{(0)} + i Z_2^{(0)},$$

avremo le relazioni

$$l X_1 + m Y_1 + n Z_1 = e^{-\varphi} \sum (X_1^{(0)} + i X_2^{(0)}) \frac{\partial x_1}{\partial u},$$

$$l X_2 + m Y_2 + n Z_2 = e^{-\varphi} \sum (X_1^{(0)} + i X_2^{(0)}) \frac{\partial x_1}{\partial v},$$

e sostituendo per le derivate delle funzioni x_1, y_1, z_1 le espressioni (30), scriveremo

$$\left.\begin{aligned} l X_1 + m Y_1 + n Z_1 &= e^{\xi-\varphi} \operatorname{senh} \Theta, \\ l X_2 + m Y_2 + n Z_2 &= i\, e^{\xi-\varphi} \cosh \Theta. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Per i coseni direttori della normale, che denoteremo con X_3, Y_3, Z_3, introdurremo una funzione ausiliaria Ψ che definiremo colla relazione

$$l X_3 + m Y_3 + n Z_3 = \Psi. \tag{32}$$

Per determinare la Ψ basta quadrare e sommare le (31) e (32); tenuto conto della relazione

$$l^2 + m^2 + n^2 = 0,$$

avremo

$$\Psi = e^{\xi-\varphi}.$$

Dopo di che possiamo risolvere le (31) e (32) rispetto ad l, m, n; cioè

$$\left.\begin{aligned} l &= e^{\xi-\varphi} (X_1 \operatorname{senh} \Theta + i X_2 \cosh \Theta + X_3), \\ m &= e^{\xi-\varphi} (Y_1 \operatorname{senh} \Theta + i Y_2 \cosh \Theta + Y_3), \\ n &= e^{\xi-\varphi} (Z_1 \operatorname{senh} \Theta + i Z_2 \cosh \Theta + Z_3). \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Da queste formole tenuto conto delle (30) possiamo facilmente ricavare i coseni direttori della normale; si ha dopo riduzione

$$\left.\begin{aligned} X_3 = &\left[\cosh (\varphi - \xi) - \frac{1}{2} e^{\varphi-\xi} H^2\right] X_1^{(0)} \\ &+ i \left[\operatorname{senh} (\varphi - \xi) - \frac{1}{2} e^{\varphi-\xi} H^2\right] X_2^{(0)} + H X_3^{(0)}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Ed ora derivando, e sostituendo per le derivate di $X_1^{(0)}$, $X_2^{(0)}$, $X_3^{(0)}$, H, φ le loro espressioni ricavate dalle (9), (10), (29) perverremo in forza della (28) alle seguenti relazioni

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X_3}{\partial u} &= \left[\frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \cosh(\varphi-\xi) - \frac{1}{2}e^{\varphi-\xi}H^2\right]e^{-\varphi}\frac{\partial x_1}{\partial u},\\ \frac{\partial X_3}{\partial v} &= \left[-i\frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \operatorname{senh}(\varphi-\xi) - \frac{1}{2}e^{\varphi-\xi}H^2\right]e^{-\varphi}\frac{\partial x_1}{\partial v},\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

colle analoghe in y e z.

Da queste finalmente si ha:

$$\sum\frac{\partial X_3}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} = \left[\frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \cosh(\varphi-\xi) - \frac{1}{2}e^{\varphi-\xi}H^2\right]e^{-\varphi}\sum\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} = 0,$$

e così la proposizione è dimostrata completamente.

Questo teorema del sig. Guichard contiene una trasformazione, che permette di dedurre da una superficie N infinite superficie isoterme dipendenti da una costante arbitraria.

Tale trasformazione chiameremo d'ora innanzi una *trasformazione G*.

§ VI. — Espressione analitica della trasformazione G per mezzo degli invarianti.

Abbiamo sopra espressa analiticamente la trasformazione G per mezzo delle formole (29); ora interessa mettere il risultato sotto una nuova forma introducendo l'invariante Ω (*) della superficie trasformata.

Mostreremo così che la trasformazione G si può rappresentare mediante un sistema di Riccati nella funzione incognita Ω, nel quale i coefficienti sono formati soltanto colla funzione Θ e le sue derivate.

Il vantaggio della nuova rappresentazione per la trasformazione G consiste nel fatto che essa sotto la nuova forma si potrà applicare, oltre che alla superficie N da cui siamo partiti, a tutte le superficie derivate da N mediante l'inversione.

Per la questione che ci siamo proposti calcoliamo anzitutto dalle (35) i

(*) Vedi la mia nota, pag. 283.

coefficienti della seconda forma quadratica per la superficie I; cioè

$$\sum \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial X_3}{\partial u} = \left[\frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \cosh(\varphi - \xi) - \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} H^2 \right] e^{-\varphi},$$

$$\sum \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial X_3}{\partial v} = \left[- i \frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \operatorname{senh}(\varphi - \xi) - \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} H^2 \right] e^{-\varphi}.$$

Indicheremo, secondo le notazioni della mia citata Memoria, le funzioni soprascritte rispettivamente con

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega + \Omega)\, e^{\varphi}, \qquad -\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega - \Omega)\, e^{\varphi},$$

ed avremo così:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega + \Omega) &= -\frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial u} - \cosh(\varphi - \xi) + \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} H^2, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega - \Omega) &= \ \ i \frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial v} - \operatorname{senh}(\varphi - \xi) + \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} H^2, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

le quali possiamo scrivere risolute rispetto ad ω ed Ω, cioè

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{2}\,\omega &= -\frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial u} + i \frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial v} - e^{\varphi - \xi}(1 - H^2), \\ \sqrt{2}\,\Omega &= -\frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial u} - i \frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial v} - e^{\xi - \varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Ciò posto, deriviamo la seconda di queste, avendo cura di sostituire per le derivate seconde della ξ e per le derivate prime della φ le loro espressioni date dalle (A) e dalle (29); potremo scrivere ordinando convenientemente il risultato nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\frac{\partial \Omega}{\partial u} = & -\frac{1}{2\operatorname{senh}\Theta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 + \frac{\operatorname{senh}\Theta}{2\cosh^2\Theta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 - \frac{1}{2} e^{2\xi - 2\varphi} \operatorname{senh}\Theta \\ & - e^{\xi - \varphi}\frac{\partial \xi}{\partial u} - i\, e^{\xi - \varphi} \operatorname{tgh}\Theta \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{i}{\cosh\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} \\ & - i \frac{\partial \Theta}{\partial v}\left(e^{\xi - \varphi} + \frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial u} + i \frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial v}\right) \\ & + \frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} - \operatorname{senh}\Theta \,.\, W, \end{aligned}$$

donde tenuto conto della seconda delle (37) si ricava:

$$\sqrt{2}\,\frac{\partial \Omega}{\partial u} = -\operatorname{senh}\Theta\,.\,\Omega^2 + i\sqrt{2}\,\frac{\partial \Theta}{\partial v}\,\Omega + \frac{1}{\cosh\Theta}\,\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} - \operatorname{senh}\Theta\,.\,W.$$

Analogamente si trova:

$$\sqrt{2}\,\frac{\partial \Omega}{\partial v} = i\cosh\Theta\,.\,\Omega^2 - i\sqrt{2}\,\frac{\partial \Theta}{\partial u}\,\Omega + i\,\frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\,\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} + i\cosh\Theta\,.\,W.$$

Perveniamo dunque al seguente sistema di equazioni differenziali

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial u} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{senh}\Theta\,(\Omega^2 + W) + i\,\frac{\partial \Theta}{\partial v}\,\Omega + \frac{1}{\sqrt{2}\cosh\Theta}\,\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2}, \\ i\,\frac{\partial \Omega}{\partial v} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cosh\Theta\,(\Omega^2 + W) + \frac{\partial \Theta}{\partial u}\,\Omega - \frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{senh}\Theta}\,\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

Questo sistema ha la forma di Riccati ed è illimitatamente integrabile in forza delle relazioni (C) per ipotesi verificate.

Esso dà la nuova rappresentazione analitica della trasformazione G e precisamente il passaggio dall'invariante Θ di una superficie N all'invariante Ω di una superficie isoterma.

Viceversa è sufficiente che una funzione Ω verifichi il sistema (38), perchè si possa assumere come invariante per una superficie isoterma.

Infatti in tale ipotesi definiamo una funzione φ colla formola

$$e^{\xi-\varphi} = -\sqrt{2}\,\Omega - \frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\,\frac{\partial \xi}{\partial u} - i\,\frac{1}{\cosh\Theta}\,\frac{\partial \xi}{\partial v}. \qquad (39)$$

Derivando e sostituendo per le derivate seconde della ξ e per le derivate prime di Ω le espressioni date dalle (A) e dalle (38), si ha:

$$\begin{aligned} e^{\xi-\varphi}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) = {} & \operatorname{senh}\Theta\,.\,\Omega^2 - \frac{1}{2\operatorname{senh}\Theta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 \\ & - i\,\frac{1}{\cosh\Theta}\,\frac{\partial \xi}{\partial u}\,\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\operatorname{senh}\Theta}{2\cosh^2\Theta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 \\ & - i\,\frac{\partial \Theta}{\partial v}\left(\sqrt{2}\,\Omega + \frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\,\frac{\partial \xi}{\partial u} + i\,\frac{1}{\cosh\Theta}\,\frac{\partial \xi}{\partial v}\right) \\ & + \frac{1}{2}\,(H^2\operatorname{senh}\Theta + 2\,H\cosh\Theta) + \frac{1}{2}\operatorname{senh}\Theta. \end{aligned}$$

Fra questa e la precedente eliminando Ω e semplificando, si ottiene la prima delle (29); in modo analogo si verifica che la funzione φ definita dalla (39) soddisfa altresì alla seconda delle (29), sicchè possiamo enunciare il risultato seguente:

Se una funzione Ω soddisfa al sistema (38), si ha dalla (39) in termini finiti una funzione φ che soddisfa al sistema (29); per una tale funzione φ le (26) definiscono una superficie isoterma riferita alle linee di curvatura, la quale ammette come invariante la funzione Ω da cui siamo partiti.

Dopo i risultati da me conseguiti nella citata Memoria possiamo affermare che la funzione Ω così ottenuta soddisfa all'equazione differenziale alle derivate parziali di quarto ordine

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u\, \partial v}\right)+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u\, \partial v}\right)+\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v}(\Omega^2)=0, \tag{40}$$

ond'è che dal punto di vista analitico possiamo enunciare il teorema di Guichard sotto la forma seguente:

Se due funzioni Θ e W sono legate dalle relazioni (C), il sistema di Riccati (38) è illimitatamente integrabile; si avrà da esso una funzione Ω con una costante arbitraria, che soddisfarà all'equazione differenziale (40).

§ VII. — Inversione del teorema di Guichard. La trasformazione G^{-1}.

Per lo sviluppo della presente teoria importa invertire il teorema ora dimostrato, cioè:

Ogni superficie isoterma I può sempre considerarsi come derivata da una superficie N, mediante la costruzione indicata dal teorema di Guichard.

Per la dimostrazione adottiamo le notazioni da me adoperate nella citata Memoria.

Denotiamo con x_1, y_1, z_1 le coordinate di un punto mobile su I e con

$$(X_1,\ Y_1,\ Z_1)\quad (X_2,\ Y_2,\ Z_2)\quad (X_3,\ Y_3,\ Z_3)$$

i coseni di direzione dei tre spigoli del triedro principale. Si avrà:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x_1}{\partial u}=e^{\varphi} X_1, && \frac{\partial x_1}{\partial v}=e^{\varphi} X_2,\\
&\frac{\partial X_1}{\partial u}=-\frac{\partial \varphi}{\partial v} X_2+\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega+\Omega) X_3, && \frac{\partial X_1}{\partial v}=\frac{\partial \varphi}{\partial u} X_2,
\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial X_2}{\partial v} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial u} X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega - \Omega) X_3, & \frac{\partial X_2}{\partial u} &= \frac{\partial \varphi}{\partial v} X_1, \\
\frac{\partial X_3}{\partial u} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega + \Omega) X_1, & \frac{\partial X_3}{\partial v} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega - \Omega) X_2.
\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Per la illimitata integrabilità di questo sistema si dovranno avere le relazioni

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial v}(\omega + \Omega) = (\omega - \Omega)\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \\
&\frac{\partial}{\partial u}(\omega - \Omega) = (\omega + \Omega)\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \\
&\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \frac{1}{2}(\omega^2 - \Omega^2) = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

che supporremo soddisfatte.

Dopo le ricerche da me esposte nella citata Memoria sappiamo che il sistema (42) è equivalente al sistema completo

$$\left.\begin{aligned}
&2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{2}(\Omega^2 - \omega^2 - 2\omega\Omega) - J, \\
&2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = 2\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{2}{\Omega}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v}, \\
&2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{2}(\Omega^2 - \omega^2 + 2\omega\Omega) + J,
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \omega}{\partial u} &= \frac{\partial \Omega}{\partial u} + (\omega + \Omega)\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \\
\frac{\partial \omega}{\partial v} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial v} + (\omega - \Omega)\frac{\partial \varphi}{\partial v},
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

nelle funzioni φ, ω; supposto Ω una soluzione dell'equazione differenziale (40) e J una funzione definita a meno di una costante dalle relazioni

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial u} &= -2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial u}(\Omega^2), \\
\frac{\partial J}{\partial v} &= 2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}(\Omega^2).
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Prendiamo la superficie I come superficie di partenza per una congruenza rettilinea, in cui la direzione del raggio sia espressa mediante le funzioni note X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, X_3, Y_3, Z_3 ed un'ausiliaria Θ, dalle formole

$$\left.\begin{aligned} \rho\, l &= X_1 \operatorname{senh}\Theta + i\, X_2 \cosh\Theta + X_3 \\ \rho\, m &= Y_1 \operatorname{senh}\Theta + i\, Y_2 \cosh\Theta + Y_3 \\ \rho\, n &= Z_1 \operatorname{senh}\Theta + i\, Z_2 \cosh\Theta + Z_3. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Per le coordinate di un punto qualunque sul raggio avremo

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 - e^{\xi}\,(X_1 \operatorname{senh}\Theta + i\, X_2 \cosh\Theta + X_3) \\ y &= y_1 - e^{\xi}\,(Y_1 \operatorname{senh}\Theta + i\, Y_2 \cosh\Theta + Y_3) \\ z &= z_1 - e^{\xi}\,(Z_1 \operatorname{senh}\Theta + i\, Z_2 \cosh\Theta + Z_3)\,; \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

essendo ξ una funzione delle variabili u e v.

Dico che è possibile disporre delle funzioni Θ e ξ in guisa che il luogo descritto dal punto P sia una superficie N, che ammetta come tangente isotropa il raggio della congruenza.

Infatti assoggettiamo anzitutto le funzioni incognite Θ e ξ alle relazioni (29) e (37), che scriveremo risolute rispetto alle derivate prime della Θ e della ξ, cioè:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Theta}{\partial u} + i\frac{\partial\varphi}{\partial v} &= \left[e^{\varphi-\xi} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega+\Omega)\right]\cosh\Theta + e^{\varphi-\xi} H \operatorname{senh}\Theta \\ i\frac{\partial\Theta}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial u} &= -\left[e^{\varphi-\xi} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega-\Omega)\right]\operatorname{senh}\Theta - e^{\varphi-\xi} H \cosh\Theta \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\xi}{\partial u} &= \operatorname{senh}\Theta\left[\frac{1}{2}e^{\varphi-\xi}H^2 - \cosh(\varphi-\xi) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega+\Omega)\right] \\ i\frac{\partial\xi}{\partial v} &= -\cosh\Theta\left[\frac{1}{2}e^{\varphi-\xi}H^2 - \operatorname{senh}(\varphi-\xi) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega+\Omega)\right] \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

ed aggiungiamo a queste le relazioni (B) cioè:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= (H + \coth\Theta)\frac{\partial\xi}{\partial u} \\ \frac{\partial H}{\partial v} &= (H + \operatorname{tgh}\Theta)\frac{\partial\xi}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Noi dimostreremo che il sistema (48), (49), (50) nelle funzioni incognite Θ, ξ, H è illimitatamente integrabile e che per due funzioni Θ e ξ da esso ricavate, le (47) dànno effettivamente una superficie N nelle condizioni volute, avente per prima e terza forma fondamentale

$$d\,s^2 = e^{2\xi}\,(\operatorname{senh}^2\Theta\,.\,d\,u^2 + \cosh^2\Theta\,.\,d\,v^2)$$

$$d\,s'^2 = (\cosh\Theta + H\operatorname{senh}\Theta)^2\,d\,u^2 + (\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta)^2\,d\,v^2.$$

A tale oggetto deriviamo la prima delle (48) rispetto a v ed eliminiamo per mezzo delle (48), (49), (50) le derivate prime delle funzioni incognite.

Posto per brevità

$$\begin{aligned}M = {}& \frac{1}{2}\,i\,e^{\varphi-\xi}\cosh 2\Theta\,.\,(1+H^2) + \cosh\Theta\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{1}{2}\,i\,e^{\xi-\varphi}\\ &+ i\operatorname{senh}\Theta\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega+\Omega)\operatorname{senh}^2\Theta + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega-\Omega)\cosh^2\Theta\\ &+ \left[\operatorname{senh}\Theta\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v} + i\cosh\Theta\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u} + i\,e^{\varphi-\xi}\operatorname{senh}2\Theta + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega\operatorname{senh}2\Theta\right]H,\end{aligned}$$

potremo scrivere

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right) = {}& -i\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + e^{\varphi-\xi}\,M + \frac{1}{\sqrt{2}}\cosh\Theta\cdot\frac{\partial}{\partial v}(\omega+\Omega)\\ &+ i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{senh}\Theta\,.\,(\omega+\Omega)\,\frac{\partial\varphi}{\partial u} + i\operatorname{senh}^2\Theta\cdot\frac{1}{2}(\omega^2-\Omega^2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right) = {}& i\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + e^{\varphi-\xi}\,M + \frac{1}{\sqrt{2}}\cosh\Theta\,.\,(\omega-\Omega)\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ &+ i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{senh}\Theta\cdot\frac{\partial}{\partial u}(\omega-\Omega) + i\cosh^2\Theta\cdot\frac{1}{2}(\omega^2-\Omega^2)\,.\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right) =\\ &= -i\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + \frac{1}{2}(\omega^2-\Omega^2)\right]\\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}}\cosh\Theta\left[\frac{\partial}{\partial v}(\omega+\Omega) - (\omega-\Omega)\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right]\\ &- i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{senh}\Theta\left[\frac{\partial}{\partial u}(\omega-\Omega) - (\omega+\Omega)\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right],\end{aligned}$$

il secondo membro della quale è identicamente nullo in forza delle (42) per ipotesi verificate.

Analogamente si ha dalle (49), tenendo conto delle (48), (49'), (50):

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)=\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}+\coth\Theta\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\operatorname{tgh}\Theta\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{senh}\Theta\left[\frac{\partial}{\partial v}(\omega+\Omega)-(\omega-\Omega)\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right],$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)=\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}+\coth\Theta\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\operatorname{tgh}\Theta\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}$$
$$-i\frac{1}{\sqrt{2}}\cosh\Theta\left[\frac{\partial}{\partial u}(\omega-\Omega)-(\omega+\Omega)\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right],$$

e per le (42):

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)=\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}+\coth\Theta\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\operatorname{tgh}\Theta\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}.$$

E finalmente, tenendo conto di quest' ultima, si verifica facilmemente l'identità

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial H}{\partial v}\right).$$

Dimostrata così la illimitata integrabilità del sistema (48), (40 , (50), veniamo a dimostrare la seconda parte del teorema.

A tale scopo deriviamo le (47) sostituendo per le derivate prime delle funzioni X_i, Y_i, Z_i le loro espressioni ricavate dalle (41). Avremo

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u}=&\ e^{\xi}\left[e^{\varphi-\xi}+\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega+\Omega)-\cosh\Theta\left(\frac{\partial \Theta}{\partial u}+i\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)-\operatorname{senh}\Theta\cdot\frac{\partial \xi}{\partial u}\right]X_1\\
&-i\,e^{\xi}\left[\operatorname{senh}\Theta\left(\frac{\partial \Theta}{\partial u}+i\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)+\cosh\Theta\cdot\frac{\partial \xi}{\partial u}\right]X_2\\
&-\ e^{\xi}\left[\frac{\partial \xi}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{senh}\Theta\,.\,(\omega+\Omega)\right]X_3,\\
\frac{\partial x}{\partial v}=&\ i\,e^{\xi}\left[\cosh\Theta\left(i\frac{\partial \Theta}{\partial v}+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)+i\operatorname{senh}\Theta\cdot\frac{\partial \xi}{\partial v}\right]X_1\\
&+\ e^{\xi}\left[e^{\varphi-\xi}+\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega-\Omega)-\operatorname{senh}\Theta\left(i\frac{\partial \Theta}{\partial v}+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)-i\cosh\Theta\cdot\frac{\partial \xi}{\partial v}\right]X_2\\
&-\ e^{\xi}\left[\frac{\partial \xi}{\partial v}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\cosh\Theta\ (\omega-\Omega)\right]X_3.
\end{aligned}\right\}\quad(51)$$

Eliminando fra queste e le (48) e (49) le derivate prime della Θ e della ξ, otterremo:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} = &- e^{\xi}\Big[\operatorname{senh}^2\Theta \operatorname{senh}(\varphi - \xi) + \\
&\qquad + \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} \operatorname{senh}\Theta\,(H^2 \operatorname{senh}\Theta + 2H\cosh\Theta)\Big] X_1 \\
&- i\,e^{\xi}\Big[\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta\operatorname{senh}(\varphi - \xi) + \\
&\qquad + \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} \operatorname{senh}\Theta\,(H^2\cosh\Theta + 2H\operatorname{senh}\Theta)\Big] X_2 \\
&- e^{\xi}\operatorname{senh}\Theta\Big[\frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} H^2 - \cosh(\varphi - \xi)\Big] X_3, \\
\frac{\partial x}{\partial v} = &- i\,e^{\xi}\Big[\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta\cosh(\varphi - \xi) + \\
&\qquad + \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi}\cosh\Theta\,(H^2\operatorname{senh}\Theta + 2H\cosh\Theta)\Big] X_1 \\
&+ e^{\xi}\Big[\cosh^2\Theta\cosh(\varphi - \xi) + \\
&\qquad + \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi}\cosh\Theta\,(H^2\cosh\Theta + 2H\operatorname{senh}\Theta)\Big] X_2 \\
&- i\,e^{\xi}\cosh\Theta\Big[\frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} H^2 - \operatorname{senh}(\varphi - \xi)\Big] X_3,
\end{aligned}\right\} \quad (52)$$

colle analoghe in y e z.

Sotto questa forma si verificano facilmente le identità:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = e^{2\xi}\operatorname{senh}^2\Theta, \\
&\sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = e^{2\xi}\cosh^2\Theta, \\
&\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (53)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cosh\Theta\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + i\operatorname{senh}\Theta\cdot\frac{\partial x}{\partial v} &= e^{\xi}\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta\,.\,l, \\
\cosh\Theta\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + i\operatorname{senh}\Theta\cdot\frac{\partial y}{\partial v} &= e^{\xi}\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta\,.\,m, \\
\cosh\Theta\cdot\frac{\partial z}{\partial u} + i\operatorname{senh}\Theta\cdot\frac{\partial z}{\partial v} &= e^{\xi}\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta\,.\,n.
\end{aligned}\right\} \quad (54)$$

Le prime mostrano che la superficie (47) ha per elemento lineare

$$d\,s^2 = e^{2\xi}\,(\operatorname{senh}^2\Theta\,.\,d\,u^2 + \cosh^2\Theta\,.\,d\,v^2)\,; \tag{55}$$

le (54) mostrano che il raggio della congruenza è tangente isotropa della superficie, e così è dimostrata una prima parte del teorema.

Per dimostrare la seconda parte occorre anzitutto calcolare i coseni direttori della normale alla superficie (47); denotando questi con $X_3^{(0)}$, $Y_3^{(0)}$, $Z_3^{(0)}$ con opportuni artifizi si ottiene

$$\begin{aligned}
X_3^{(0)} &= (\cosh\Theta + H\operatorname{senh}\Theta)\,X_1 + i\,(\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta)\,X_2 + H\,X_3\\
Y_3^{(0)} &= (\cosh\Theta + H\operatorname{senh}\Theta)\,Y_1 + i\,(\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta)\,Y_2 + H\,Y_3\\
Z_3^{(0)} &= (\cosh\Theta + H\operatorname{senh}\Theta)\,Z_1 + i\,(\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta)\,Z_2 + H\,Z_3\,.
\end{aligned}$$

Ed ora derivando e sostituendo per le derivate di X_i, Y_i, Z_i le loro espressioni ricavate dalle (41), avremo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_3^{(0)}}{\partial u} = &\left[(\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u} + i\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + \operatorname{senh}\Theta\frac{\partial H}{\partial u} - H\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega + \Omega)\right]X_1\\
&+ i\left[(\cosh\Theta + H\operatorname{senh}\Theta)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u} + i\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + \cosh\Theta\frac{\partial H}{\partial u}\right]X_2\\
&+ \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega + \Omega)(\cosh\Theta + H\operatorname{senh}\Theta) + \frac{\partial H}{\partial u}\right]X_3\,.
\end{aligned}$$

Ed in questa esprimendo in forza delle (48), (49), (50) le derivate della Θ e della H per mezzo delle funzioni ξ, Θ, H, si è condotti, tenendo presenti le (52), alla relazione

$$\frac{\partial X_3^{(0)}}{\partial u} = -\frac{\cosh\Theta + H\operatorname{senh}\Theta}{e^{\xi}\operatorname{senh}\Theta}\,\frac{\partial x}{\partial u}\,.$$

Allo stesso modo si trova

$$\frac{\partial X_3^{(0)}}{\partial v} = -\frac{\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta}{e^{\xi}\cosh\Theta}\,\frac{\partial x}{\partial v}\,.$$

Ne deriva per la rappresentazione sferica di Gauss la forma

$$d\,s'^2 = (\cosh\Theta + H\operatorname{senh}\Theta)^2\,d\,u^2 + (\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta)^2\,d\,v^2.$$

La quale insieme alla (55) mette in evidenza che la superficie definita dalle (47) è appunto una superficie N.

Questo teorema contiene una trasformazione, che in certo modo può chiamarsi inversa della trasformazione G; essa permette di dedurre da una superficie isoterma infinite superficie di Guichard dipendenti da tre costanti arbitrarie.

Tale trasformazione chiameremo d'ora innanzi una *trasformazione* G^{-1}.

§ VIII. — Espressione analitica della trasformazione G^{-1} per mezzo degli invarianti.

Abbiamo sopra espressa analiticamente la trasformazione G^{-1} per mezzo del sistema completo (48), (49), (50); ora trasformeremo questo sistema in un altro equivalente in cui compariscono soltanto Θ ed Ω.

Dalla prima delle (48) derivando rispetto ad u ed ordinando opportunamente otteniamo:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} + i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \left[e^{\varphi-\xi}(\cosh\Theta + H \operatorname{senh}\Theta) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cosh\Theta \, . \, (\omega + \Omega)\right]\frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

$$+ \left[e^{\varphi-\xi}(\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{senh}\Theta \, . \, (\omega - \Omega)\right]\frac{\partial \Theta}{\partial u}$$

$$+ \sqrt{2}\cosh\Theta\frac{\partial \Omega}{\partial u} + \sqrt{2}\,\Omega \operatorname{senh}\Theta\frac{\partial \Theta}{\partial u},$$

che per le (48) stesse si può scrivere

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} + i\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial u} + i\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \left(i\frac{\partial \Theta}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial \Theta}{\partial u}$$

$$+ \sqrt{2}\cosh\Theta \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial u} + \sqrt{2}\,\Omega\operatorname{senh}\Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial u}.$$

Ed ora sostituendo per $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}$ il suo valore dato dalla seconda delle (43) e semplificando avremo:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} = -i\frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \Theta}{\partial v} + \sqrt{2}\cosh\Theta \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial u} + \sqrt{2}\,\Omega\operatorname{senh}\Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial u} + i\frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v}. \tag{55}$$

Analogamente

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} = i \frac{\partial \Theta}{\partial u} \frac{\partial \Theta}{\partial v} - i \sqrt{2} \operatorname{senh} \Theta \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial v} - i \sqrt{2}\, \Omega \cosh \Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial v} - i \frac{1}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v}.$$

Inoltre dalla prima delle (48) derivando ed eliminando dal risultato la H per mezzo delle (49) e (50), si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = - i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - i \left(\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial \Theta}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \Theta}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

$$+ \sqrt{2}\, \Omega \operatorname{senh} \Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial v} - \sqrt{2}\, \Omega \cosh \Theta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{e^{\varphi - \xi}}{\cosh \Theta} \frac{\partial \xi}{\partial v}.$$

Analogamente

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + i \left(\frac{\partial \Theta}{\partial u}\right)^2 - \frac{\partial \Theta}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \Theta}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

$$- i \sqrt{2}\, \Omega \cosh \Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial u} + i \sqrt{2}\, \Omega \operatorname{senh} \Theta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + i \frac{e^{\varphi - \xi}}{\operatorname{senh} \Theta} \frac{\partial \xi}{\partial u}.$$

Sommando colla precedente e tenendo conto della prima e terza delle (43):

$$2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = - i (J + \omega \Omega) - i \sqrt{2}\, \Omega \cosh \Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial u} + \sqrt{2}\, \Omega \operatorname{senh} \Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial v}$$

$$+ i \sqrt{2}\, \Omega \operatorname{senh} \Theta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \sqrt{2}\, \Omega \cosh \Theta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} + i \left(\frac{\partial \Theta}{\partial u}\right)^2 - i \left(\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)^2$$

$$+ i e^{\varphi - \xi} \left(\frac{1}{\operatorname{senh} \Theta} \frac{\partial \xi}{\partial u} + i \frac{1}{\cosh \Theta} \frac{\partial \xi}{\partial v}\right).$$

Ed infine sostituendo per le derivate della φ e della ξ le espressioni ricavate dalle (48) e (49) e riducendo:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2} i \left(\frac{\partial \Theta}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{2} i \left(\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)^2 + \sqrt{2}\, \Omega \operatorname{senh} \Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial v}$$

$$- i \sqrt{2}\, \Omega \cosh \Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{1}{2} i \Omega^2 \cosh 2 \Theta - \frac{1}{2} i (J + 1).$$

Perveniamo dunque al seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} = -i\frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \Theta}{\partial v} + \sqrt{2}\cosh\Theta\cdot\frac{\partial \Omega}{\partial u} + \sqrt{2}\,\Omega\,\mathrm{senh}\,\Theta\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial u} + i\frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u\,\partial v},\\
&\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u\partial v} = \frac{1}{2}i\left(\frac{\partial \Theta}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{2}i\left(\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)^2 + \sqrt{2}\,\Omega\,\mathrm{senh}\,\Theta\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial v}\\
&\qquad - i\sqrt{2}\,\Omega\cosh\Theta\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{1}{2}i\,\Omega^2\cosh 2\Theta - \frac{1}{2}i\,(J+1),\\
&\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} = i\frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \Theta}{\partial v} - i\sqrt{2}\,\mathrm{senh}\,\Theta\cdot\frac{\partial \Omega}{\partial v} - i\sqrt{2}\,\Omega\cosh\Theta\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial v} - i\frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u\,\partial v}.
\end{aligned}\right\}\quad(56)$$

Esso dà la nuova rappresentazione analitica della trasformazione G^{-1}, e precisamente il passaggio dall'invariante Ω di una superficie isoterma all'invariante Θ di una superficie di Guichard.

Sotto la nuova forma si verificano assai facilmente le condizioni d'integrabilità che si riducono alle sole (45).

Viceversa è sufficiente che una funzione Θ verifichi il sistema (56), affinchè si possa assumere come invariante per una superficie di Guichard.

Possiamo dare due diverse dimostrazioni.

Una prima, ben semplice, si ha nel seguente modo.

Sommando la prima e la terza delle (56), si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} = \sqrt{2}\cosh\Theta\cdot\frac{\partial \Omega}{\partial u} - i\sqrt{2}\,\mathrm{senh}\,\Theta\cdot\frac{\partial \Omega}{\partial v}$$
$$+ \sqrt{2}\,\Omega\,\mathrm{senh}\,\Theta\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial u} - i\sqrt{2}\,\Omega\cosh\Theta\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial v},$$

che si può scrivere

$$\sqrt{2}\cosh\Theta\cdot\frac{\partial \Omega}{\partial u} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} - i\sqrt{2}\,\Omega\cosh\Theta\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial v} =$$
$$i\sqrt{2}\,\mathrm{senh}\,\Theta\cdot\frac{\partial \Omega}{\partial v} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} - \sqrt{2}\,\Omega\,\mathrm{senh}\,\Theta\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial u}.$$

Ciò posto, definiamo una funzione ausiliaria W colla formola

$$\sqrt{2}\cosh\Theta\cdot\frac{\partial \Omega}{\partial u} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} - i\sqrt{2}\,\Omega\cosh\Theta\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial v} + \mathrm{senh}\,\Theta\cosh\Theta\,(W+\Omega^2) = 0,\quad(57)$$

che per la precedente eguaglianza si può anche scrivere

$$i\sqrt{2}\ \mathrm{senh}\,\Theta\cdot\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,v}+\frac{\partial^2\,\Theta}{\partial\,v^2}-\sqrt{2}\ \Omega\,\mathrm{senh}\,\Theta\cdot\frac{\partial\,\Theta}{\partial\,u}+\mathrm{senh}\,\Theta\cosh\Theta\,(W+\Omega^2)=0. \quad (58)$$

Scriviamo quest'ultima sotto la forma

$$\cosh^2\Theta\,.\,W=-i\sqrt{2}\cosh\Theta\cdot\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,v}-\coth\Theta\cdot\frac{\partial^2\,\Theta}{\partial\,v^2}+$$
$$+\sqrt{2}\ \Omega\cosh\Theta\cdot\frac{\partial\,\Theta}{\partial\,u}-\cosh^2\Theta\cdot\Omega^2.$$

Da cui derivando rispetto ad u ed eliminando dal secondo membro le derivate prime di Ω colle (57) e (58) e la derivata seconda di Ω colla terza delle (56), si ricava la prima delle (C).

Analogamente si ricava la seconda delle (C); ed allora per una funzione Θ ricavata dalle (56), le equazioni (C) ammettono la soluzione comune W definita dalle (57), il che è sufficiente per concludere che la funzione Θ si può assumere come invariante per una superficie di Guichard.

La stessa proprietà può anche dimostrarsi così.

Supposto Θ soluzione del sistema (56), definiamo due funzioni ξ, H mediante le formole:

$$\left.\begin{aligned} e^{\varphi-\xi}&=\cosh\Theta\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}+i\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)+\mathrm{senh}\,\Theta\left(i\frac{\partial\Theta}{\partial v}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\\ &-\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega+\Omega)\cosh^2\Theta+\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega-\Omega)\,\mathrm{senh}^2\,\Theta,\end{aligned}\right\} \quad (59)$$

$$\left.\begin{aligned} e^{\varphi-\xi}H&=-\,\mathrm{senh}\,\Theta\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}+i\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)-\cosh\Theta\left(i\frac{\partial\Theta}{\partial v}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\\ &+\sqrt{2}\ \Omega\,\mathrm{senh}\,\Theta\,.\cosh\Theta.\end{aligned}\right\} \quad (60)$$

Dico che la soluzione Θ e le due funzioni ξ ed H sopra definite costituiscono una soluzione del sistema (48), (49), (50).

Infatti le (48) sono soddisfatte in forza delle definizioni stesse delle funzioni ξ ed H.

Inoltre derivando la prima delle (59) rispetto ad u, e sostituendo per le derivate seconde di Θ e φ le loro espressioni date dalle (56) e (43) e per le derivate prime di ω le loro espressioni ricavate dalle (44), dopo riduzione si ha:

$$
\left.\begin{aligned}
2\frac{e^{\varphi-\xi}}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial\xi}{\partial u} &= -\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)^2-2i\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\Theta}{\partial u}+2i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\sqrt{2}\,\Omega\operatorname{senh}\Theta\right)\frac{\partial\Theta}{\partial v}\\
&+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2-2\sqrt{2}\,\Omega\operatorname{senh}\Theta\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}-1\\
&+\Omega^2\cosh 2\Theta-\frac{1}{2}(\Omega^2-\omega^2-2\,\omega\,\Omega);
\end{aligned}\right\}\quad(61)
$$

che in forza delle (59) e (60) si può scrivere

$$
\frac{2\,e^{\varphi-\xi}}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial\xi}{\partial u}=(e^{\varphi-\xi}H)^2-(e^{\varphi-\xi})^2-1-\sqrt{2}\,(\omega+\Omega)\,e^{\varphi-\xi}.
$$

Da questa discende facilmente la prima delle (49); in modo analogo si dimostra che le funzioni ξ ed H verificano la seconda delle (49).

Analogamente derivando la (60) e similmente operando si ha:

$$
\begin{aligned}
2\frac{e^{\varphi-\xi}}{\cosh\Theta}\left(\frac{\partial H}{\partial u}-H\frac{\partial\xi}{\partial u}\right) &= -\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)^2-2i\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\Theta}{\partial u}\\
&+2i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\sqrt{2}\,\Omega\operatorname{senh}\Theta\right)\frac{\partial\Theta}{\partial v}\\
&+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2-2\sqrt{2}\,\Omega\operatorname{senh}\Theta\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}-1\\
&+\Omega^2\cosh 2\Theta-\frac{1}{2}(\Omega^2-\omega^2-2\,\omega\,\Omega).
\end{aligned}
$$

Da questa e dalla (61) deriva

$$
\frac{\partial H}{\partial u}=(H+\coth\Theta)\frac{\partial\xi}{\partial u}\cdot
$$

In modo analogo si dimostra che le funzioni ξ ed H verificano altresì l'equazione

$$
\frac{\partial H}{\partial v}=(H+\operatorname{tgh}\Theta)\frac{\partial\xi}{\partial v}\cdot
$$

Da quanto precede risulta che assumendo come funzione Θ una soluzione del sistema (56), la Θ e le funzioni ξ ed H definite dalle (59) e (60) verificano il sistema (48), (49), (50), e ciò è sufficiente per concludere la proposizione.

§ IX. — Composizione di una trasformazione G con una $\overline{G}^{-1}$.

Lo scopo principale di quanto segue è di venire alle formole di trasformazione per le superficie di Guichard di prima e seconda specie, mediante le quali si possano dedurre da una ben nota superficie di Guichard infinite altre superficie della medesima specie.

Sarà utile considerare oltre alle trasformazioni G e G^{-1}, le trasformazioni che da esse si deducono cambiando i in $-i$, le quali denoteremo rispettivamente con $\overline{G}$, $\overline{G}^{-1}$.

Ciò posto, consideriamo una superficie N; applicando ad essa la trasformazione G otterremo infinite superficie I, ed infine applicando a queste la trasformazione $\overline{G}^{-1}$ otterremo infinite nuove superficie N_1.

Il passaggio da una superficie N ad una superficie N_1 diremo brevemente una *trasformazione T.*

Le formole relative che dànno il passaggio dall'invariante Θ della superficie N all'invariante Θ_1 della superficie N_1 sono manifestamente

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial u^2}&=\frac{\cosh\Theta_1}{\cosh\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}+i\frac{\partial\Theta_1}{\partial u}\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}-i\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\Theta}{\partial v}\\&+\sqrt{2}\,\Omega\left(\operatorname{senh}\Theta_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial u}+\operatorname{senh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)+i\sqrt{2}\,\Omega\frac{\partial\Theta}{\partial v}(\cosh\Theta_1+\cosh\Theta)\\&-\Omega^2\operatorname{senh}\Omega(\cosh\Theta_1+\cosh\Theta)-W\operatorname{senh}\Theta(\cosh\Theta_1+\cosh\Theta),\end{aligned}\right\}\quad(62)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial u\,\partial v}&=-\frac{\partial^2\Theta}{\partial u\,\partial v}-\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}\right)^2+\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)^2\\&+\sqrt{2}\,\Omega\left(\operatorname{senh}\Theta_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}+\operatorname{senh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}+i\cosh\Theta_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial u}-i\cosh\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)\\&+\frac{1}{2}i\,\Omega^2(\cosh 2\Theta-\cosh 2\Theta_1),\end{aligned}\right\}\quad(63)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial v^2}&=\frac{\operatorname{senh}\Theta_1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}-i\frac{\partial\Theta_1}{\partial u}\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}+i\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\Theta}{\partial v}\\&+i\sqrt{2}\,\Omega\left(\cosh\Theta_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}-\cosh\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)+\sqrt{2}\,\Omega\frac{\partial\Theta}{\partial u}(\operatorname{senh}\Theta_1-\operatorname{senh}\Theta)\\&-\Omega^2\cosh\Theta(\operatorname{senh}\Theta_1-\operatorname{senh}\Theta)-W\cosh\Theta(\operatorname{senh}\Theta_1-\operatorname{senh}\Theta).\end{aligned}\right\}\quad(64)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Omega}{\partial u}&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{senh}\Theta\,(\Omega^2+W)+i\frac{\partial\Theta}{\partial v}\Omega+\frac{1}{\sqrt{2}\cosh\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}\\ i\frac{\partial\Omega}{\partial v}&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cosh\Theta\,(\Omega^2+W)+\frac{\partial\Theta}{\partial u}\Omega-\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}.\end{aligned}\right\}\quad(65)$$

Ora, volendo esprimere queste sotto forma reale, porremo

$$\sqrt{2}\,\Omega=\lambda+i\mu,$$

e le (62), (63), (64), (65) dànno per le funzioni incognite λ, μ, Θ_1 il sistema simultaneo:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial u^2}&=\frac{\cosh\Theta_1}{\cosh\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}+\left(\operatorname{senh}\Theta_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial u}+\operatorname{senh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)\lambda\\ &-(\cosh\Theta_1+\cosh\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial v}\mu-\frac{1}{2}\operatorname{senh}\Theta\,(\cosh\Theta_1+\cosh\Theta)\,(\lambda^2-\mu^2+2W),\end{aligned}\right\}\quad(66)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial u\,\partial v}&=-\frac{\partial^2\Theta}{\partial u\,\partial v}+\lambda\left(\operatorname{senh}\Theta_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}+\operatorname{senh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)\\ &-\mu\left(\cosh\Theta_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial u}-\cosh\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)+\frac{1}{2}\lambda\mu\,(\cosh 2\Theta_1-\cosh 2\Theta),\end{aligned}\right\}\quad(67)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial v^2}&=-\frac{\operatorname{senh}\Theta_1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}-\left(\cosh\Theta_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}-\cosh\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)\mu\\ &+(\operatorname{senh}\Theta_1-\operatorname{senh}\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial u}\lambda-\frac{1}{2}\cosh\Theta\,(\operatorname{senh}\Theta_1-\operatorname{senh}\Theta)\,(\lambda^2-\mu^2+2W),\end{aligned}\right\}\quad(68)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Theta_1}{\partial u}\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}&=\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\Theta}{\partial v}-(\cosh\Theta_1+\cosh\Theta)\lambda\frac{\partial\Theta}{\partial v}\\ &-\left(\operatorname{senh}\Theta_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial u}+\operatorname{senh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)\mu+\operatorname{senh}\Theta\,(\cosh\Theta_1+\cosh\Theta)\,\lambda\mu,\end{aligned}\right\}\quad(69)$$

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}\right)^2&=\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)^2+2\lambda\left(\cosh\Theta_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial u}-\cosh\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)\\ &+2\mu\left(\operatorname{senh}\Theta_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}+\operatorname{senh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)\\ &-\frac{1}{2}(\lambda^2-\mu^2)(\cosh 2\Theta_1-\cosh 2\Theta),\end{aligned}\right\}\quad(70)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \Theta_1}{\partial u}\frac{\partial \Theta_1}{\partial v} &= \frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \Theta}{\partial v} + (\operatorname{senh}\Theta_1 - \operatorname{senh}\Theta)\frac{\partial \Theta}{\partial u}\mu \\ &+ \left(\cosh\Theta_1\frac{\partial \Theta_1}{\partial v} - \cosh\Theta\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)\lambda - \cosh\Theta\,(\operatorname{senh}\Theta_1 - \operatorname{senh}\Theta)\,\lambda\mu,\end{aligned}\right\} \tag{71}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \lambda}{\partial u} &= \frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2} - \mu\frac{\partial \Theta}{\partial v} - \frac{1}{2}\operatorname{senh}\Theta\,(\lambda^2 - \mu^2 + 2W), \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} &= \mu\frac{\partial \Theta}{\partial u} - \cosh\Theta\,\lambda\mu,\end{aligned}\right\} \tag{72}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \mu}{\partial u} &= \lambda\frac{\partial \Theta}{\partial v} - \operatorname{senh}\Theta\,\lambda\mu, \\ \frac{\partial \mu}{\partial v} &= \frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2} - \lambda\frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{1}{2}\cosh\Theta\,(\lambda^2 - \mu^2 + 2W).\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Dalle (69), (70), (71) risolvendo algebricamente rispetto alle incognite $\frac{\partial \Theta_1}{\partial u}$, $\frac{\partial \Theta_1}{\partial v}$ si ha:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \Theta_1}{\partial u} &= -\frac{\partial \Theta}{\partial u} + \lambda\,(\cosh\Theta_1 + \cosh\Theta), \\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial v} &= -\frac{\partial \Theta}{\partial v} - \mu\,(\operatorname{senh}\Theta_1 - \operatorname{senh}\Theta).\end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Inoltre si verifica facilmente che in forza delle (72), (73), (74) sono anche soddisfatte le (66), (67), (68).

Se si cambia in (74) Θ_1 in $-\Theta_1 + \pi i$, si ha:

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial u} = \frac{\partial \Theta}{\partial u} + \lambda\,(\cosh\Theta_1 - \cosh\Theta),$$

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial v} = \frac{\partial \Theta}{\partial v} + \mu\,(\operatorname{senh}\Theta_1 - \operatorname{senh}\Theta),$$

o anche per le (72) e (73):

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \Theta_1}{\partial u} &= \lambda\cosh\Theta_1 + \frac{1}{\mu}\frac{\partial \lambda}{\partial v}, \\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial v} &= \mu\operatorname{senh}\Theta_1 + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \mu}{\partial u}.\end{aligned}\right\} \tag{75}$$

§ X. — Le trasformazioni delle superficie di Guichard di prima specie.

Da quanto precede risulta che partendo da una superficie di Guichard ben nota cogli invarianti Θ, W, integrando il sistema completo

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \Theta_1}{\partial u} &= \lambda \cosh \Theta_1 + \frac{1}{\mu}\frac{\partial \lambda}{\partial v},\\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial v} &= \mu \operatorname{senh} \Theta_1 + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \mu}{\partial u},\end{aligned}\right\} \qquad (76)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \lambda}{\partial u} &= \frac{1}{\cosh \Theta}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} - \mu \frac{\partial \Theta}{\partial v} - \frac{1}{2}\operatorname{senh}\Theta\,(\lambda^2 - \mu^2 + 2W),\\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} &= \mu \frac{\partial \Theta}{\partial u} - \cosh \Theta\, \lambda \mu,\end{aligned}\right\} \qquad (77)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \mu}{\partial u} &= \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial v} - \operatorname{senh}\Theta\, \lambda \mu,\\ \frac{\partial \mu}{\partial v} &= \frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} - \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{1}{2}\cosh\Theta\,(\lambda^2 - \mu^2 + 2W),\end{aligned}\right\} \qquad (78)$$

nella funzione incognita Θ_1 e in due ausiliarie λ e μ, si deducono infinite nuove superficie di Guichard dipendenti da tre costanti arbitrarie.

Ciò per altro può verificarsi direttamente introducendo la funzione W_1 definita dalla formola

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}\operatorname{senh}\Theta_1 \cosh\Theta_1 (\lambda^2 - \mu^2 + 2W_1) - \lambda \operatorname{senh}\Theta_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial u} + \mu \cosh \Theta_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial v} =\\ &= \frac{1}{2}\operatorname{senh}\Theta \cosh\Theta\,(\lambda^2 - \mu^2 + 2W) - \lambda \operatorname{senh}\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial u} + \mu \cosh\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial v}.\end{aligned}\right\} \qquad (79)$$

Infatti tra la funzione W_1 così definita e le funzioni λ, μ, Θ ricavate dall'integrazione del sistema (76), (77), (78) passano le relazioni:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \lambda}{\partial u} &= \frac{1}{\cosh \Theta_1}\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial u^2} - \mu \frac{\partial \Theta_1}{\partial v} - \frac{1}{2}\operatorname{senh}\Theta_1\,(\lambda^2 - \mu^2 + 2W_1),\\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} &= \mu \frac{\partial \Theta_1}{\partial v} - \cosh \Theta_1\, \lambda \mu,\end{aligned}\right\} \qquad (80)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \mu}{\partial u} &= \lambda \frac{\partial \Theta_1}{\partial u} - \operatorname{senh} \Theta_1 \lambda \mu, \\ \frac{\partial \mu}{\partial v} &= \frac{1}{\operatorname{senh} \Theta_1} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial v^2} - \lambda \frac{\partial \Theta_1}{\partial u} + \frac{1}{2} \cosh \Theta_1 (\lambda^2 - \mu^2 + 2 W_1).\end{aligned}\right\} \qquad (81)$$

Donde, per essere

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \mu}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \mu}{\partial v}\right),$$

seguono per Θ_1 e W_1 le relazioni fondamentali (C).

Dopo ciò si può assumere come superficie di partenza la superficie generica cogli invarianti Θ_1 e W_1 e ripetere la trasformazione.

In quanto all'integrazione del sistema completo (76), (77), (78) è notevole che essa si compie integrando successivamente due sistemi del tipo di Riccati illimitatamente integrabili.

Invero possiamo sostituire le (77) e (78) con un sistema nella sola funzione incognita $\lambda + i\mu$ che ha manifestamente la forma di Riccati; inoltre le (76) assumono ancora esse la forma di Riccati, ponendo

$$\sigma = \operatorname{tgh} \frac{\Theta_1}{2} .$$

Ne segue che basta conoscere una soluzione particolare del sistema (77) e (78) per avere con sole quadrature l'integrale generale; e in tale ipotesi, conoscendo per il sistema (76) la soluzione particolare $\Theta_1 = \Theta$, potremo anche ricavare la Θ_1 con operazioni di sole quadrature.

Applicando poi la trasformazione T alle nuove superficie, cioè assumendo come funzioni di partenza Θ_1 e W_1, conosceremo per il sistema (77), (78) in forza delle relazioni (80), (81) la soluzione particolare λ e μ.

Concludendo: Se per due funzioni Θ e W si conosce una soluzione particolare del sistema (77) e (78), l'applicazione successiva ed illimitata del metodo di trasformazione richiederà soltanto successive quadrature.

§ XI. — Composizione di una trasformazione G^{-1} con una G.

Ora immaginiamo di partire da una superficie isoterma I; applicando ad essa la trasformazione G^{-1} avremo infinite superficie N, ed infine applicando a queste la trasformazione $\overline{G}$ otterremo infinite nuove superficie isoterme I_1.

Il passaggio da una superficie I ad una superficie I_1 diremo con Bianchi (*) una trasformazione D.

Le formole che dànno il passaggio dall'invariante Ω della superficie I all'invariante Ω_1 della superficie I_1 sono manifestamente

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} &= -i\frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \Theta}{\partial v} + \sqrt{2}\cosh\Theta\frac{\partial \Omega}{\partial u} + \sqrt{2}\,\Omega\,\mathrm{senh}\,\Theta\frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{i}{\Omega}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u\,\partial v},\\
\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u\,\partial v} &= \frac{1}{2}\,i\left(\frac{\partial \Theta}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{2}\,i\left(\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)^2 + \sqrt{2}\;\Omega\,\mathrm{senh}\,\Theta\frac{\partial \Theta}{\partial v} - i\sqrt{2}\;\Omega\cosh\Theta\frac{\partial \Theta}{\partial u}\\
&\quad + \frac{1}{2}\,i\,\Omega^2(\cosh^2\Theta + \mathrm{senh}^2\Theta) - \frac{1}{2}\,i\,(J+1),\\
\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} &= i\frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \Theta}{\partial v} - i\sqrt{2}\,\mathrm{senh}\,\Theta\frac{\partial \Omega}{\partial v} - i\sqrt{2}\;\Omega\cosh\Theta\frac{\partial \Theta}{\partial v} - \frac{i}{\Omega}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u\,\partial v},
\end{aligned}\right\}\quad (82)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega_1}{\partial u} &= \frac{\partial \Omega}{\partial u} - i(\Omega_1+\Omega)\frac{\partial \Theta}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{senh}\,\Theta\,.\,(\Omega_1^2-\Omega^2),\\
\frac{\partial \Omega_1}{\partial v} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial v} + i(\Omega_1-\Omega)\frac{\partial \Theta}{\partial u} - \frac{i}{\sqrt{2}}\cosh\Theta\,.\,(\Omega_1^2-\Omega^2).
\end{aligned}\right\}\quad (83)$$

Ora volendo esprimere queste sotto forma reale, osserveremo che per tre funzioni Ω, Θ, Ω_1 legate dalle relazioni precedenti sono coesistenti le equazioni nella funzione ausiliaria ψ:

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = -i\frac{\partial \Theta}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{senh}\,\Theta\,.\,(\Omega_1-\Omega),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = i\frac{\partial \Theta}{\partial u} - \frac{i}{\sqrt{2}}\cosh\Theta\,.\,(\Omega_1+\Omega).$$

(*) Vedi la Nota citata.

Fra queste e le (82), (83) eliminando la Θ, si perviene al seguente sistema completo:

$$\left.\begin{aligned}
2\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{2}(\Omega^2 - \Omega_1^2 - 2\,\Omega\,\Omega_1) - (J+1),\\
2\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v} &= 2\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{2}{\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v},\\
2\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{2}(\Omega^2 - \Omega_1^2 + 2\,\Omega\,\Omega_1) + (J+1),
\end{aligned}\right\} \quad (84)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\Omega_1}{\partial u} &= \frac{\partial\Omega}{\partial u} + (\Omega_1 + \Omega)\frac{\partial\psi}{\partial u},\\
\frac{\partial\Omega_1}{\partial v} &= -\frac{\partial\Omega}{\partial v} + (\Omega_1 - \Omega)\frac{\partial\psi}{\partial v},
\end{aligned}\right\} \quad (85)$$

che è l'espressione analitica della trasformazione D.

§ XII. — Le trasformazioni delle superficie isoterme.

Da quanto precede risulta che la trasformazione D per le superficie isoterme si riassume nel seguente teorema:

Se la funzione Ω è una soluzione dell'equazione differenziale (40), integrando il sistema completo (45), (84), (85) si avrà una nuova soluzione della stessa equazione contenente quattro costanti arbitrarie.

È notevole che il sistema (84), (85) nelle funzioni ψ, Ω_1 non differisce dal sistema (43), (44) nelle funzioni φ, ω che per lo scambio di J in $J+1$.

D'altra parte è noto, per la mia citata Memoria, che il passaggio da Ω ad ω definito dalle equazioni (43) e (44) equivale ad una inversione e ad una trasformazione di Christoffel; segue che una trasformazione D può eseguirsi a meno di movimenti mediante la trasformazione C_m ad un parametro sull'invariante J da me segnalata e rappresentata analiticamente dalla formola

$$J^{(1)} = J + m \qquad (m = \text{costante})$$

più una inversione ed una trasformazione di Christoffel.

Le trasformazioni delle superficie a curvatura costante, che il Bianchi ha dedotto dall'inversione dei teoremi di Guichard, rientrano nella trasformazione *D*.

Ciò risulta evidente mediante considerazioni sintetiche dirette; ma per altro può verificarsi analiticamente nel seguente modo.

Consideriamo una trasformazione di Bianchi risoluta nelle due componenti immaginarie di Bäcklund mediante le formole:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial u} + i \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \quad \operatorname{senh} \sigma \cosh \varphi \operatorname{senh} \Theta + \cosh \sigma \operatorname{senh} \varphi \cosh \Theta, \\ i \frac{\partial \Theta}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= - \operatorname{senh} \sigma \operatorname{senh} \varphi \cosh \Theta - \cosh \sigma \cosh \varphi \operatorname{senh} \Theta, \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial u} + i \frac{\partial \psi}{\partial v} &= - \operatorname{senh} \sigma \cosh \psi \operatorname{senh} \Theta + \cosh \sigma \operatorname{senh} \psi \cosh \Theta, \\ i \frac{\partial \Theta}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u} &= \quad \operatorname{senh} \sigma \operatorname{senh} \psi \cosh \Theta - \cosh \sigma \cosh \psi \operatorname{senh} \Theta. \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

Dalle formole (86) per derivazione, introducendo le notazioni

$$\sqrt{2}\, \Omega = -i\, e^{-\varphi},$$

$$J = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - \frac{1}{2},$$

si ha:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} &= - i \frac{\partial \Theta}{\partial u} \frac{\partial \Theta}{\partial v} + \sqrt{2} \cosh (\Theta - \sigma) \frac{\partial \Omega}{\partial u} + \sqrt{2}\, \Omega \operatorname{senh} (\Theta - \sigma) \frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{i}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v}, \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} &= \frac{1}{2} i \left(\frac{\partial \Theta}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{2} i \left(\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)^2 + \sqrt{2}\, \Omega \operatorname{senh} (\Theta - \sigma) \frac{\partial \Theta}{\partial v} - i \sqrt{2}\, \Omega \cosh (\Theta - \sigma) \frac{\partial \Theta}{\partial u} \\ &\quad + \frac{1}{2} i\, \Omega^2 [\cosh^2 (\Theta - \sigma) + \operatorname{senh}^2 (\Theta - \sigma)] - \frac{1}{2} i (J + \cosh^2 \sigma), \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} &= i \frac{\partial \Theta}{\partial u} \frac{\partial \Theta}{\partial v} - i \sqrt{2} \operatorname{senh} (\Theta - \sigma) \frac{\partial \Omega}{\partial v} - i \sqrt{2}\, \Omega \cosh (\Theta - \sigma) \frac{\partial \Theta}{\partial v} - \frac{i}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v}. \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

Inoltre, ponendo $\sqrt{2}\, \Omega_1 = e^{\psi}$, dalle (86), (87) si ricava:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u} &= \quad \frac{\partial \Omega}{\partial u} - i (\Omega_1 + \Omega) \frac{\partial \Theta}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\Omega_1^2 - \Omega^2) \operatorname{senh} (\Theta - \sigma), \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial v} &= - \frac{\partial \Omega}{\partial v} + i (\Omega_1 - \Omega) \frac{\partial \Theta}{\partial u} - \frac{i}{\sqrt{2}} (\Omega_1^2 - \Omega^2) \cosh (\Theta - \sigma). \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

Infine dalle (88) e (89) introducendo la funzione ψ definita da

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = -i \frac{\partial \Theta}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\Omega_1 - \Omega) \operatorname{senh} (\Theta - \sigma),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = \quad i \frac{\partial \Theta}{\partial u} - \frac{i}{\sqrt{2}} (\Omega_1 + \Omega) \cosh (\Theta - \sigma),$$

si ottiene il sistema:

$$2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{2} (\Omega^2 - \Omega_1^2 - 2 \Omega \Omega_1) - (J + \cosh^2 \sigma),$$

$$2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{2}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v},$$

$$2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{2} (\Omega^2 - \Omega_1^2 + 2 \Omega \Omega_1) + (J + \cosh^2 \sigma),$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u} = \quad \frac{\partial \Omega}{\partial u} + (\Omega_1 + \Omega) \frac{\partial \psi}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial v} = - \frac{\partial \Omega}{\partial v} + (\Omega_1 - \Omega) \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

il quale mette in rilievo la proprietà enunciata.

§ XIII. — Risultati relativi alle superficie di Guichard di seconda specie.

Abbiamo visto che la determinazione delle superficie di Guichard di seconda specie equivale alla seguente questione di analisi:

Determinare nel modo più generale due funzioni Θ e W legate fra loro dalle relazioni:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial u} &= - \frac{1}{\cos^2 \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial u} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial u} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} \\ &\quad + \frac{1}{\operatorname{sen} \Theta \cos \Theta} \frac{\partial^3 \Theta}{\partial u \partial v^2} + 2 \operatorname{tg} \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial u} W, \\ \frac{\partial W}{\partial v} &= \quad \frac{1}{\cos^2 \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial v} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial v} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} \\ &\quad + \frac{1}{\operatorname{sen} \Theta \cos \Theta} \frac{\partial^3 \Theta}{\partial u^2 \partial v} - 2 \cot \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial v} W. \end{aligned}\right\} \quad (90)$$

Supposta nota una soluzione particolare del sistema (90), possiamo dedurre una nuova soluzione contenente tre costanti arbitrarie, integrando il sistema completo:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \Theta_1}{\partial u} &= \frac{1}{\mu}\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \lambda \cos \Theta_1 ,\\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial v} &= -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \mu}{\partial u} + \mu \operatorname{sen} \Theta_1 ,\end{aligned}\right\} \qquad (91)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \lambda}{\partial u} &= \frac{1}{\cos\Theta}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} + \mu\frac{\partial \Theta}{\partial v} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\Theta\,(\lambda^2 - \mu^2 - 2W),\\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} &= \mu\frac{\partial \Theta}{\partial u} - \cos\Theta\,\lambda\,\mu,\end{aligned}\right\} \qquad (92)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \mu}{\partial u} &= -\lambda\frac{\partial \Theta}{\partial v} + \operatorname{sen}\Theta\,\lambda\,\mu,\\ \frac{\partial \mu}{\partial v} &= \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} - \lambda\frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{1}{2}\cos\Theta\,(\lambda^2 - \mu^2 - 2W),\end{aligned}\right\} \qquad (93)$$

e assumendo la funzione W_1 definita dalla formola

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}\operatorname{sen}\Theta_1\cos\Theta_1\,(\lambda^2 - \mu^2 - 2W_1) - \lambda\operatorname{sen}\Theta_1\frac{\partial \Theta_1}{\partial u} + \mu\cos\Theta_1\frac{\partial \Theta_1}{\partial v} =\\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}\Theta\cos\Theta\,(\lambda^2 - \mu^2 - 2W) - \lambda\operatorname{sen}\Theta\frac{\partial \Theta}{\partial u} + \mu\cos\Theta\frac{\partial \Theta}{\partial v}\,.\end{aligned}\right\} \qquad (94)$$

L'integrazione del sistema (91), (92), (93) si può compiere mediante la successiva integrazione di due sistemi di RICCATI illimitatamente integrabili.

Un ragionamento analogo a quello seguito per le superficie di GUICHARD di prima specie conduce al risultato seguente:

Se per due funzioni Θ e W legate dalle relazioni (90) si conosce una soluzione particolare del sistema (92), (93), l'applicazione successiva ed illimitata del metodo di trasformazione richiederà soltanto successive quadrature.

Estensione delle formole di Meissel-Rogel e di Torelli sulla totalità dei numeri primi che non superano un numero assegnato.

(Di Michele Cipolla, *a Palermo.)*

> L'avenir de l'Arithmétique est une habile combinaison de fonctions habilement choisies.
>
> Cesàro.

Come è noto le formole di Meissel (*) e le altre ancora di Rogel (**), permettono di calcolare la totalità dei numeri primi non superiori ad n, quando sono noti soltanto i numeri primi che non superano $\sqrt{n}$. Nel presente scritto noi cominciamo col risolvere il seguente problema generale:

Trovare la somma dei valori che prende una funzione numerica $f(x)$, quando x percorre la successione dei numeri primi che non superano n, noti soltanto i numeri primi che non superano $\sqrt{n}$.

In conseguenza noi abbiamo risoluto anche la questione d'indole ancora più generale:

Trovare il valore di una funzione possedente la simmetria abeliana pei valori che assume una funzione numerica $f(x)$ quando x percorre la successione dei numeri primi che non superano n, noti solamente i numeri primi che non superano $\sqrt{n}$.

(*) Meissel, *Berechnung der Menge der Primzahlen innerhalb gegebenen Grenze* (Math. Ann. t. II, p. 636; t. III, p. 523; t. XXI, p. 302; t. XXV, p. 251).

(**) Si confronti per es. Rogel, *Recursive Bestimmung der Anzahl Primzahlen unter gegebenen Grenzen* (Sitzungsberichte der k. bömischen Gesellschaft der Wissenschaften. *Math. Nat. Classe*, 1899, N. XXII).

1. Denotiamo con $f(x)$ una funzione numerica qualunque e con $f(k, x)$ la somma dei valori che prende $f(x)$ per tutti i multipli di k non superiori a x, cioè

$$f(k, x) = f(k) + f(2k) + \cdots + f\left(\left[\frac{x}{k}\right]k\right).$$

È evidente che si ha

$$f(k, x) - f(k, x-1) = \begin{cases} 0, \text{ se } k \text{ non divide } x; \\ f(x), \text{ se } k \text{ divide } x. \end{cases}$$

Allora, se $g(x)$ denota un'altra funzione numerica, e $\int g(x)$ il suo *integrale numerico*, vale a dire la somma dei valori di $g(x)$ corrispondenti a tutti i divisori di x, si avrà

$$f(x)\int g(x) = \sum_{k=1}^{x} [f(k, x) - f(k, x-1)]\, g(k).$$

Se per x poniamo in questa formola successivamente $1, 2, \ldots, n$ e sommiamo si ottiene

$$\sum_{x=1}^{n} f(x)\int g(x) = \sum_{k=1}^{n} f(k, n)\, g(k). \tag{1}$$

Questa formola è fonte di innumerevoli identità aritmetiche, ma noi qui ci limiteremo ad applicarla per la risoluzione dei problemi accennati dianzi.

2. Indichiamo con p_i l'i^{imo} numero primo della serie naturale a partire da 2, con $\vartheta(n)$ il numero dei numeri primi che non superano n, e determiniamo un numero intero n_1 in modo che sia

$$\vartheta(n) > n_1 \geqq \vartheta[\sqrt{n}]. \tag{2}$$

Sia inoltre $\omega(x)$ una funzione numerica uguale a 1 se x è costituito esclusivamente da fattori primi appartenenti al sistema

$$p_1, p_2, \ldots, p_{n_1}, \tag{3}$$

ed uguale a 0 in ogni altro caso; $\mu(x)$ denoti, come di consueto, la funzione di Möbius.

Ciò posto, se a, b, c,... sono i fattori primi diversi di x, si ha

$$\int \mu(x)\,\omega(x) = \{1-\omega(a)\}\{1-\omega(b)\}\{1-\omega(c)\}\ldots,$$

quindi $\int \mu(x)\,\omega(x)$ sarà uguale a 1 se x non è divisibile per nessuno dei numeri primi (3), e sarà nullo in ogni altro caso. Poniamo allora in (1)

$$g(x) = \mu(x)\,\omega(x).$$

Il primo membro sarà uguale alla somma dei valori che prende $f(x)$ per tutti i numeri non superiori ad n, che non sono divisibili per nessuno dei numeri primi (3), vale a dire, in virtù di (2), per $x=1$, e per i numeri primi

$$p_{n_1+1},\ p_{n_1+2},\ldots,\ p_{\vartheta(n)}.$$

Se noi dunque poniamo

$$\Theta(n) = f(p_1) + f(p_2) + \cdots + f(p_{\vartheta(n)})$$

il primo membro di (1) risulterà uguale a (4)

$$\Theta(n) - \Theta(p_{n_1}) + f(1)$$

e se indichiamo con $\Psi(n, n_1)$ quel che diviene il secondo membro, cioè

$$\Psi(n, n_1) = f(1, n) - \sum_{i=1}^{n_1} f(p_i, n) + \sum_{i,j=1}^{n_1} f(p_i p_j, n) - \cdots \tag{5}$$

si avrà la formola

$$\Theta(n) = \Psi(n, n_1) + \Theta(p_{n_1}) - f(1). \tag{A}$$

3. La formola (A) è suscettibile di essere notevolmente trasformata. Ma prima facciamone qualche applicazione fra le più importanti.

La funzione $f(x)$ sia una funzione *composta*, cioè goda della proprietà

$$f(xy) = f(x)\,f(y).$$

Allora, se si pone

$$F(x) = f(1) + f(2) + \cdots + f(x),$$

si ha

$$f(k,\ n) = f(k)\, F\left[\frac{n}{k}\right]$$

e però si ottiene

$$\Psi(n,\ n_1) = F(n) - \sum_{i=1}^{n_1} f(p_i)\, F\left[\frac{n}{p_i}\right] + \sum_{i,j=1}^{n_1} f(p_i) f(p_j)\, F\left[\frac{n}{p_i p_j}\right] - \cdots \tag{6}$$

Cosicchè, se si pone nella (**A**) $f(x) = 1$, si ottiene la prima formola di Meissel:

$$\vartheta(n) = n_1 - 1 + n - \sum_{i=1}^{n_1}\left[\frac{n}{p_i}\right] + \sum_{i,j=1}^{n_1}\left[\frac{n}{p_i p_j}\right] - \cdots$$

Se si pone invece $f(x) = x$ e si indica con $S(n)$ la somma dei numeri primi che non superano n, si ottiene (*):

$$\left.\begin{aligned} S(n) = S(p_{n_1}) - 1 + \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{i=0}^{n_1} \frac{p_i}{2}\left[\frac{n}{p_i}\right]\left(\left[\frac{n}{p_i}\right]+1\right) + \\ + \sum_{i,j=1}^{n_1} \frac{p_i p_j}{2}\left[\frac{n}{p_i p_j}\right]\left(\left[\frac{n}{p_i p_j}\right]+1\right) - \cdots \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Si faccia

$$f(x) = \operatorname{sen}\frac{x\pi}{2}, \tag{8}$$

questa funzione è nulla se x è pari, ed è uguale a $+1$ o a -1 secondo che x è congruo a $+1$ o -1 (mod. 4).

Essa è una funzione composta, e si ha

$$F(x) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} + \cdots + \operatorname{sen}\frac{x\pi}{2} =$$

$$= \sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{(x+1)\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{x\pi}{2} = \begin{cases} 0, \text{ se } x \equiv 0,\ 3 \pmod{4} \\ 1, \text{ se } x \equiv 1,\ 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

La formola relativa alla funzione (8), che si ottiene dalla (**A**), fornisce la differenza fra i numeri primi della forma $4n+1$ e quelli della forma $4n+3$, che non superano n, ed è destinata, con le sue successive trasformazioni, a prestare utile servizio per la correzione delle tavole dei numeri primi.

(*) Cfr. Sylvester, *Note sur le théorème de Legendre,* Comptes rendus de l'Ac. d. Sc. de Paris, t. XCVI, 1883, p. 463; Lebon, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo,* t. XVIII, 1904, p. 269.

Se nella formola (A) poniamo $f(x) = 1$ o 0 secondo che x appartiene o no alla progressione aritmetica

$$N, \quad M + N, \quad 2M + N, \quad 3M + N, \ldots,$$

si ottiene una formola la quale comprende come caso particolare le formole di Legendre sulla totalità dei numeri primi di una progressione aritmetica, che non superano un numero assegnato; ecc.

Supponiamo in ultimo che $f(x)$ non sia mai nulla, allora nella formola (A) noi possiamo mutare $f(x)$ in $\log f(x)$. Ponendo

$$P(n) = f(p_1) f(p_2) \ldots f(p_{\vartheta(n)})$$

$$Q(k, n) = f(k) f(2k) \ldots f\left(\left[\frac{n}{k}\right] k\right)$$

si ottiene

$$P(n) = P(p_{n_1}) \frac{Q(1, n) \prod_{i,j=1}^{n_1} Q(p_i p_j, n) \ldots}{f(1) \prod_{i=1}^{n_1} Q(p_i, n) \prod_{i,j,h=1}^{n_1} Q(p_i p_j p_h, n) \ldots} \tag{9}$$

In particolare, per $f(n) = n$, si ha

$$p_{n_1+1} p_{n_1+2} \cdots p_{\vartheta(n)} = \frac{n! \prod_{i,j=1}^{n_1} \left[\frac{n}{p_i p_j}\right]! \, (p_i p_j)^{\left[\frac{n}{p_i p_j}\right]} \ldots}{\prod_{i=1}^{n_1} \left[\frac{n}{p_i}\right]! \, p_i^{\left[\frac{n}{p_i}\right]} \ldots}. \tag{10}$$

4. Per trasformare la formola (A) in un' altra, nella quale il calcolo della funzione Ψ richieda la conoscenza di un minor numero di numeri primi, mutiamo la funzione $f(x)$ in $f(rx)$, essendo r un numero qualunque e poniamo

$$\Theta_r(n) = f(r p_1) + f(r p_2) + \cdots + f(r p_{\vartheta(n)}),$$

$$f_r(k, n) = f(rk) + f(2rk) + \cdots + f\left(rk\left[\frac{n}{k}\right]\right),$$

$$\Psi_r(n, h) = f_r(1, n) - \sum_{i=1}^{h} f_r(p_i, n) + \sum_{i,j=1}^{h} f_r(p_i p_j, n) - \cdots$$

La formola (A) diventerà allora

$$\Theta_r(n) = \Psi_r(n, n_1) + \Theta_r(p_{n_1}) - f(r) \quad \{ \vartheta(n) > n_1 \geq \vartheta[\sqrt{n}] \}. \tag{I}$$

Intanto si noti che si ha

$$f_r(k\,l,\ n) - f_{rk}\left(l,\left[\frac{n}{k}\right]\right),$$

per cui vale la formola

$$\Psi_r(n,\ h) = \Psi_r(n,\ h-1) - \Psi_{rp_h}\left(\left[\frac{n}{p_h}\right],\ h-1\right) \tag{11}$$

e questa permette di trasformare la (I) in un'altra contenente le Θ cogl'indici della forma $r\,p_i$ e nella quale il calcolo della funzione Ψ richiede soltanto i numeri primi

$$p_1,\ p_2, \ldots,\ p_{n_2},$$

essendo n_2 un numero definito dalla relazione

$$\vartheta\,[\sqrt{n}] > n_2 \geqq \vartheta\,[\sqrt[3]{n}]. \tag{12}$$

Invero, se i è un numero per cui siano soddisfatte le relazioni

$$\vartheta\,[\sqrt{n}] > i-1 \geqq \vartheta\,[\sqrt[3]{n}]$$

si avrà con facili considerazioni

$$\vartheta\left[\frac{n}{p_i}\right] > i-1 \geqq \vartheta\left[\sqrt{\frac{n}{p_i}}\right],$$

e però si potrà applicare la (I), mutando n in $\left[\frac{n}{p_i}\right]$, n_1 in $i-1$; inoltre, poichè r è qualunque, si potrà anche mutare r in rp_i, e allora si ottiene

$$\Theta_{rp_i}\left[\frac{n}{p_i}\right] = \Psi_{rp_i}\left(\left[\frac{n}{p_i}\right],\ i-1\right) + \Theta_{rp_i}(p_{i-1}) - f(rp_i)$$

e questa, poichè per la (11) si ha

$$\Psi_{rp_i}\left(\left[\frac{n}{p_i}\right],\ i-1\right) = \Psi_r(n,\ i-1) - \Psi_r(n,\ i),$$

può anche mettersi sotto questa forma

$$0 = \Psi_r(n,\ i-1) - \Psi_r(n,\ i) + \Theta_{rp_i}(p_{i-1}) - \Theta_{rp_i}\left[\frac{n}{p_i}\right] - f(rp_i).$$

Ed ora sommando per tutti i valori di i da n_2+1 a $\vartheta[\sqrt{n}]$ si ottiene

$$0 = \Psi_r(n, n_2) - \Psi_r(n, \vartheta[\sqrt{n}]) +$$
$$+ \sum_{i=n_2+1}^{\vartheta[\sqrt{n}]} \left\{ \Theta_{rp_i}(p_{i-1}) - \Theta_{rp_i}\left[\frac{n}{p_i}\right] \right\} - \Theta(p_{\vartheta[\sqrt{n}]}) + \Theta_r(p_{n_2}).$$

Ma d'altra parte la (I), per $n_1 = \vartheta[\sqrt{n}]$, fornisce

$$\Theta_r(n) = \Psi_r(n, \vartheta[\sqrt{n}]) + \Theta_r(p_{\vartheta[\sqrt{n}]}) - f(r)$$

e addizionando membro a membro questa con la precedente, si ha

$$\left.\begin{aligned} \Theta_r(n) &= \Psi_r(n, n_2) + \Theta_r(p_{n_2}) - f(r) + \\ &+ \sum_{i=n_2+1}^{\vartheta[\sqrt{n}]} \left\{ \Theta_{rp_i}(p_{i-1}) - \Theta_{rp_i}\left[\frac{n}{p_i}\right] \right\}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

e per $r=1$

$$\left.\begin{aligned} \Theta(n) &= \Psi(n, n_2) + \Theta(p_{n_2}) - f(1) + \\ &+ \sum_{i=n_2+1}^{\vartheta[\sqrt{n}]} \left\{ \Theta_{p_i}(p_{i-1}) - \Theta_{p_i}\left[\frac{n}{p_i}\right] \right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{A}_1)$$

Se la funzione $f(x)$ è composta, allora si ha

$$\Theta_{p_i}(p_{i-1}) - \Theta_{p_i}\left[\frac{n}{p_i}\right] = f(p_i) \left\{ \Theta(p_{i-1}) - \Theta\left[\frac{n}{p_i}\right] \right\}$$

e la (A_1) esprimerà $\Theta(n)$ coi valori di questa stessa funzione corrispondenti ad argomenti non superiori a $[\sqrt{n}]$, precisamente come avviene nella seconda formola di Meissel, che si deduce da (A_1) facendo $f(x) = 1$.

Se invece $f(x)$ non è composta, l'espressione (A_1) presupporrà la conoscenza dei valori delle Θ cogl'indici $p_{n_2+1}, p_{n_2+2}, \ldots, p_{\vartheta[\sqrt{n}]}$.

5. Con un analogo procedimento si dimostra che se n_3 soddisfa alle condizioni

$$\vartheta[\sqrt[3]{n}] > n_3 \geq \vartheta[\sqrt[4]{n}]$$

si ha

$$\left.\begin{aligned} \Theta_r(n) &= \Psi_r(n, n_3) + \Theta_r(p_{n_3}) - f(r) + \sum_{i=n_3+1}^{\vartheta[\sqrt[3]{n}]} \left\{ \Theta_{rp_i}(p_{i-1}) - \Theta_{rp_i}\left[\frac{n}{p_i}\right] \right\} + \\ &+ \sum_{i_2=n_3+1}^{\vartheta[\sqrt[3]{n}]} \sum_{i_1=i_2}^{\vartheta\left[\sqrt{\frac{n}{p_{i_2}}}\right]} \left\{ \Theta_{rp_{i_1}p_{i_2}}(p_{i_1-1}) - \Theta_{rp_{i_1}p_{i_2}}\left[\frac{n}{p_{i_1}\, p_{i_2}}\right] \right\}, \end{aligned}\right\} \text{(III)}$$

e così continuando si giunge a stabilire la formola più generale

$$\left.\begin{aligned}&\Theta_r(n)=\Psi_r(n,\ n_c)+\Theta_r(p_{n_c})-f(r)+\\&+\sum_{h=1}^{c-1}\left\{\sum_{i_h=n_c+1}^{\vartheta[\sqrt[h+1]{n}]}\ \sum_{i_{h-1}=i_h}^{[i_h]^{(h)}}\ \sum_{i_{h-2}=i_{h-1}}^{[i_h i_{h-1}]^{(h-1)}}\cdots\sum_{i_1=i_2}^{[i_h\ldots i_2]^{(2)}}\left(\Theta_{rp_{i_1}\cdots p_{i_h}}(p_{i_1-1})-\Theta_{rp_{i_1}\cdots p_{i_h}}\left[\frac{p_{i_1}\cdots p_{i_h}}{n}\right]\right)\right\}\end{aligned}\right\}\text{(IV)}$$

dove si è posto

$$[i_h\, i_{h-1}\ldots i_s]^{(s)}=\vartheta\left[\sqrt[h-s]{\frac{n}{p_{i_h}\,p_{i_{h-1}}\ldots p_{i_s}}}\right]$$

e n_c è un numero intero tale che sia .

$$\vartheta\,[\sqrt[c]{n}]>n_c\geqq\vartheta\,[\sqrt[c+1]{n}]. \tag{13}$$

Per dimostrare la (IV), ammettiamola per un c tale che n_c verifichi (13) e dimostriamo che sussiste quando si muta c in $c+1$, purchè sia

$$\vartheta\,[\sqrt[c+1]{n}]>n_{c+1}\geqq\vartheta\,[\sqrt[c+2]{n}]. \tag{14}$$

Intanto da queste relazioni facilmente si trae

$$\vartheta\left[\sqrt[c]{\frac{n}{p_{h_{c+1}+1}}}\right]>n_{c+1}\geqq\vartheta\left[\sqrt[c+1]{\frac{n}{p_{h_{c+1}+1}}}\right],$$

se quindi i_s è destinato a prendere i valori $n_{c+1}+1,\ n_{c+2}+2,\ldots,\vartheta\,[\sqrt[c+1]{n}]$ si ha

$$\vartheta\,[\sqrt[c+1]{n}]>i_s-1\geqq\vartheta\,[\sqrt[c+2]{n}]$$

e però

$$\vartheta\left[\sqrt[c]{\frac{n}{p_{i_s}}}\right]>i_s-1>\vartheta\left[\sqrt[c+1]{\frac{n}{p_{i_s}}}\right].$$

Potremo allora nella formola (IV) mutare n_c in i_s-1, ed n in $\left[\frac{n}{p_{i_s}}\right]$. Se inoltre si muta r in rp_{i_s} e si fa uso della proprietà (11), si ottiene

$$\begin{aligned}&0=\Psi_r(n,\ i_s-1)-\Psi_r(n,\ i_s)-f(rp_{i_s})+\Theta_{rp_{i_s}}(p_{i_s}-1)-\Theta_{rp_{i_s}}\left[\frac{n}{p_{i_s}}\right]+\\&+\sum_{h=1}^{c-1}\left\{\sum_{i_h=i_s}^{[i_s]^{(h+1)}}\ \sum_{i_{h-1}=i_h}^{[i_s i_s]^{(h)}}\cdots\sum_{i_1=i_2}^{[i_s i_h\ldots i_2]^{(2)}}\left(\Theta_{rp_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_h}p_{i_s}}(p_{i_1}-1)-\Theta_{rp_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_h}p_{i_s}}\left[\frac{n}{p_{i_1}\,p_{i_2}\ldots p_{i_h}\,p_{i_s}}\right]\right)\right\}.\end{aligned}$$

Sommiamo ora per tutti i valori di i_s da $n_{c+1}+1$ a $\vartheta\,[\sqrt[c+1]{n}]$ si ottiene

$$0=\Psi_r(n,\ n_{c+1})-\Psi_r(n,\ \vartheta\,[\sqrt[c+1]{n}])-\Theta_r(p_{\vartheta[\sqrt[c+1]{n}]})+\Theta_r(p_{n_{c+1}})+$$

$$+\sum_{i_s=n_{c+1}}^{\vartheta[\sqrt[c+1]{n}]}\left(\Theta_{rp_{i_s}}(p_{i_s-1})-\Theta_{rp_{i_s}}\left[\frac{n}{p_{i_s}}\right]\right)+$$

$$+\sum_{h=1}^{c-1}\left\{\sum_{i_s=n_{c+1}+1}^{\vartheta[\sqrt[c+1]{n}]}\ \sum_{i_h=i_s}^{[i_s]^{(h+1)}}\cdots\sum_{i_1=i_2}^{[i_s\ldots i_2]^{(2)}}\left(\Theta_{rp_{i_1}\cdots p_{i_h}p_{i_s}}(p_{i_1}-1)-\Theta_{rp_{i_1}\cdots p_{i_h}p_{i_s}}\left[\frac{n}{p_{i_1}\cdots p_{i_h}p_{i_s}}\right]\right)\right\}.$$

Se in questa mutiamo i_s in i_{h+1}, e pei h in $h-1$, si avrà

$$0=\Psi_r(n,\ n_{c+1})-\Psi_r(n,\ \vartheta\,[\sqrt[c+1]{n}])-\Theta_r(p_{\vartheta[\sqrt[c+1]{n}]})+\Theta_r(p_{n_c+1})+$$

$$+\sum_{h=1}^{c}\left\{\sum_{i_h=n_{c+1}+1}^{\vartheta[\sqrt[c+1]{n}]}\ \sum_{i_{h-1}=i_h}^{[i_h]^{(h)}}\cdots\sum_{i_1=i_2}^{[i_h\ldots i_2]^{(2)}}\left(\Theta_{rp_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_h}}(p_{i_1}-1)-\Theta_{rp_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_h}}\left[\frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_h}}\right]\right)\right\}.$$

Nella (IV) possiamo intanto mutare n_c in $\vartheta\,[\sqrt[c+1]{n}]$, se poi addizioniamo la formola che si ottiene con quest'ultima avremo finalmente

$$\Theta_r(n)=\Psi_r(n,\ n_{c+1})+\Theta_r(p_{c+1})-f(r)+$$

$$+\sum_{h=1}^{c}\left\{\sum_{i_h=n_{c+1}+1}^{\vartheta[\sqrt[h+1]{n}]}\ \sum_{i_{h-1}=i_h}^{[i_h]^{(h)}}\cdots\sum_{i_1=i_2}^{[i_h\ldots i_2]^{(2)}}\left(\Theta_{rp_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_h}}(p_{i_1})-\Theta_{rp_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_h}}\left[\frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_h}}\right]\right)\right\}.$$

Cosicchè la formola (IV), dimostrata per il caso di $c=2$, sussiste in generale.

6. La formola (IV), nell'ipotesi che $f(x)$ sia una funzione composta, costituisce effettivamente una formola di ricorrenza per il calcolo di $\Theta(n)$. Difatti, allora è: $\Theta_k(n)=f(k)\,\Theta(n)$, e però in questo caso la (IV) diviene

$$\Theta(n)=\Psi(n,\ n_c)+\Theta(p_{n_c})-1+$$

$$+\sum_{h=1}^{c-1}\left\{\sum_{i_h=n_c+1}^{\vartheta[\sqrt[h+1]{n}]}\ \sum_{i_{h-1}=i_h}^{[i_h]^{(h)}}\cdots\sum_{i_1=i_2}^{[i_h\ldots i_2]^{(2)}}f(p_{i_1}\cdots p_{i_h})\left(\Theta(p_{i_1-1})-\Theta\left[\frac{n}{p_{i_1}\cdots p_{i_h}}\right]\right)\right\}.$$

La formola relativa alla totalità dei numeri primi che non superano n, intravista dal Rogel, si ottiene da questa facendo $f(x) = 1$. Notando poi che allora è $\Theta(p_r) = \vartheta(p_r) = r$, si può con facile calcolo stabilire la formola seguente:

$$\vartheta(n) = \Psi(n, n_c) + (-1)^{c+1}\binom{n_c - 1}{c} + \sum_{h=1}^{c-1}(-1)^{h+1}\binom{\vartheta\left[\sqrt[h+1]{n}\right]}{h+1} +$$

$$+ \sum_{h=2}^{c-1}\sum_{s=0}^{h-2}(-1)^{h-s}\sum_{i_h=n_c+1}^{\vartheta\left[\sqrt[h+1]{n}\right]} \cdots \sum_{i_{h-s}=i_{h\,s+1}}^{[i_h \ldots i_{h-s+1}]^{(h-s+1)}} \binom{[i_h \ldots i_{h-s}]^{h-s)}}{h-s} -$$

$$- \sum_{h=1}^{c-1}\left\{\sum_{i_h=h_c+1}^{\vartheta\left[\sqrt[h+1]{n}\right]}\sum_{i_{h-1}=i_h}^{[i_h]^{(h)}} \cdots \sum_{i_1=i_2}^{[i_h \ldots i_2]^{(2)}} \vartheta\left[\frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_h}}\right]\right\}.$$

7. Formole analoghe possono stabilirsi per il prodotto

$$P_r(n) = f(rp_1)\, f(rp_2) \ldots f(rp_{\vartheta(n)});$$

esse rientrano come casi particolari nella seguente ricerca.

Sia $T(x_1, x_2)$ una funzione delle due variabili x_1, x_2 la quale possegga la simmetria abeliana, cioè

1.° non cambi commutando x_1, x_2;

2.° $$T(x_1, T(x_2, x_3)) = T(x_1, x_2, x_3)$$

non cambi comunque si permutino x_1, x_2, x_3 (*).

Senza entrare in ulteriori dettagli, ricordiamo che dalle ricerche di Abel si sa che queste due condizioni sono necessarie e sufficienti perchè esista una funzione Φ la quale ammetta come teorema di addizione la funzione T, cioè, quando si ponga

$$x_i = \Phi(z_i) \tag{15}$$

si ha

$$\Phi(z_1 + z_2) = T(x_1, x_2) \tag{16}$$

e in generale

$$\Phi(z_1 + z_2 + \cdots + z_\mu) = T(x_1, x_2, \ldots, x_\mu). \tag{17}$$

Inoltre se

$$v = V(y, u)$$

(*) Cfr. Lémeray, *Sur les fonctions numériques et la symétrie abélienne.* (Nouv. Ann., 1901, pp. 163-7.)

verifica l'equazione

$$y = T(u, v),$$

posto

$$y = \Phi(z_r), \qquad u = \Phi(z_s),$$

si ha

$$V(y, u) = \Phi(z_r - z_s). \tag{18}$$

Ciò premesso, limitandoci a generalizzare la formola (A), noi dimostriamo che, se si pone

$$T(k, n) = T\left(f(k), f(2k), \ldots, f\left(\left[\frac{n}{k}\right]k\right)\right), \tag{19}$$

$$\mathop{\mathrm{T}}_{i=1}^{n_1} T(p_i, n) = T\Big(T(p_1, n), T(p_2, n), \ldots, T(p_{n_1}, n)\Big), \tag{20}$$

$$T_1(n, n_1) = T\left(\mathop{\mathrm{T}}_{i=1}^{n_1} T(p_i, n), \mathop{\mathrm{T}}_{i,j,h=1}^{n_1} T(p_i p_j p_h, n), \ldots\right), \tag{21}$$

$$T_2(n, n_1) = T\left(T(1, n), \mathop{\mathrm{T}}_{i,j=1}^{n_1} T(p_i p_j, n), \mathop{\mathrm{T}}_{i,j,h,k=1}^{n_1} T(p_i p_j p_h p_k, n), \ldots\right), \tag{22}$$

l'espressione di

$$U(n) = T\Big(f(p_1), f(p_2), \ldots, f(p_{\vartheta(n)})\Big)$$

mediante i soli numeri primi $p_1, p_2, \ldots, p_{n_1}$, dove è

$$\vartheta(n) > n_1 \geqq \vartheta[\sqrt{n}],$$

è data dalla formola

$$U(n) = V\left[T\Big(U(p_{n_1}), T_2(n, n_1)\Big), T\Big(f(1), T_1(n, n_1)\Big)\right]. \tag{B}$$

Se infatti Φ_{-1} è la funzione inversa di Φ, si ha da (15)

$$z_i = \Phi_{-1}(x_i)$$

e, posto

$$x_i = f(p_i),$$

la (17) fornisce

$$U(n) = \Phi\left[\Phi_{-1} f(p_1) + \Phi_{-1} f(p_2) + \cdots + \Phi_{-1} f(p_{\vartheta(n)})\right],$$

e le (19), (20), (21), (22) divengono

$$T(k, n) = \Phi\left[\Phi_{-1} f(k) + \Phi_{-1} f(2k) + \cdots + \Phi_{-1} f\left(\left[\frac{n}{k}\right] k\right)\right]$$

$$\mathop{\mathrm{T}}_{i=1}^{n_1} T(p_i, n) = \Phi\left[\Phi_{-1} T(p_1, n) + \Phi_{-1} T(p_2, n) + \cdots + \Phi_{-1} T(p_{n_1}, n)\right]$$

$$T_1(n, n_1) = \Phi\left[\Phi_{-1} \mathop{\mathrm{T}}_{i=1}^{n_1} T(p_i, n) + \Phi_{-1} \mathop{\mathrm{T}}_{i,j,h=1}^{n_1} T(p_i p_j p_h, n) + \cdots\right]$$

$$T_2(n, n_1) = \Phi\left[\Phi_{-1} T(1, n) + \Phi_{-1} \mathop{\mathrm{T}}_{i,j=1}^{n_1} T(p_i p_j, n) + \cdots\right].$$

Onde, se applichiamo la formola (A), prendendo per $f(n)$ la funzione $\Phi_{-1} f(n)$, si ottiene

$$\Phi_{-1} U(n) = \Phi_{-1} T_2(n, n_1) - \Phi_{-1} T_1(n, n_1) + \Phi_{-1} U(p_{n_1}) - \Phi_{-1} f(1),$$

da cui segue

$$U(n) = \Phi\left[\left(\Phi_{-1} U(p_{n_1}) + \Phi_{-1} T_2(n, n_1)\right) - \left(\Phi_{-1} f(1) + \Phi_{-1} T_1(n, n_1)\right)\right], \quad (23)$$

ossia, poichè per la (16) si ha

$$\Phi_{-1} U(p_{n_1}) + \Phi_{-1} T_2(n, n_1) = \Phi_{-1} T\left(U(p_{n_1}), T_2(n, n_1)\right),$$

$$\Phi_{-1} f(1) + \Phi_{-1} T(n, n_1) = \Phi_{-1} T\left(f(1), T_1(n, n_1)\right),$$

la (23) diviene

$$U(n) = \Phi\left(\Phi_{-1} T\left[U(p_{n_1}), T_2(n, n_1)\right] - \Phi_{-1} T\left[f(1), T_1(n, n_1)\right]\right),$$

e, per la proprietà (18), questa è nient'altro che la (B).

È chiaro che con analoghi processi possono generalizzarsi le altre formole.

8. Un'altra categoria di formole si ottiene estendendo le espressioni della totalità dei numeri primi non superiori ad n, date recentemente dal Torelli (*).

(*) G. Torelli, *Nuove formule, ecc.* (Rend. della R. A. delle s. f. e m. di Napoli, dicembre 1904.)

Per fare questa estensione, cominciamo col segnalare una proprietà delle funzioni *numerico-logaritmiche* (Bougaief), cioè di quelle funzioni $l(x)$, che verificano l'equazione funzionale

$$l(xy) = l(x) + l(y),$$

essendo x, y due numeri interi qualunque.

La derivata numerica di una funzione numerico-logaritmica è nulla se n non è primo nè una potenza di un numero primo.

Infatti, posto $n = a^\alpha b^\beta \dots s^\sigma$, si ha

$$\partial\, l(n) = \sum_{\alpha_1, \beta_1, \dots, \sigma_1} \mu(a^{\alpha-\alpha_1} . b^{\beta-\beta_1} \dots s^{\sigma-\sigma_1})\, l(a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \dots s^{\sigma_1}) =$$

$$= \sum_{\alpha_1, \dots \sigma_1} \mu(a^{\alpha-\alpha} b^{\beta-\beta} \dots s^{\sigma-\sigma_1})\, l(a^{\alpha}) + \sum_{\alpha_1, \dots, \sigma_1} \mu(a^{\alpha-\alpha_1} . b^{\beta-\beta_1} \dots s^{\sigma-\sigma_1}\, l(b^{\beta_1}) + \dots +$$

$$+ \sum_{\alpha_1=0} \mu(a^{\alpha-\alpha_1} b^{\beta-\beta_1} \dots s^{\sigma-\sigma_1})\, l(s^{\sigma_1}) =$$

$$= \sum_{\alpha_1=0}^{\alpha} l(a^{\alpha_1}) \int \mu\left(\frac{n}{a^{\alpha_1}}\right) + \sum_{\beta_1=0}^{\beta'} l(b^{\beta_1}) \int \mu\left(\frac{n}{b^{\beta_1}}\right) + \dots \sum_{\sigma_1=0}^{\sigma} l(s^{\sigma_1}) \int \mu\left(\frac{n}{s^{\sigma_1}}\right).$$

Ora se n non è primo nè una potenza di un numero primo, si ha, come è noto,

$$\int \mu\left(\frac{n}{a^{\alpha_1}}\right) = \int \mu\left(\frac{n}{b^{\beta_1}}\right) = \dots = \int \mu\left(\frac{n}{s^{\sigma_1}}\right) = 0,$$

e però

$$\partial\, l(n) = 0.$$

Se invece è $n = a^\alpha$ $(\alpha > 0)$, si ha

$$\partial\, l(a^\alpha) = \alpha\, l(a) - (\alpha - 1)\, l(a) = l(a).$$

Ciò posto sia

$$p_{i_1},\ p_{i_2},\ p_{i_3}, \dots \tag{a}$$

un sistema di numeri primi qualunque, in numero finito o infinito, e indichiamo con Ω il sistema dei numeri non divisibili per nessuno dei numeri primi (a). Consideriamo la somma

$$\Psi_r(n) = \sum_{x>1}^{\Omega, n} f(x^r) \frac{\partial\, l(x)}{h(x)}, \tag{1}$$

estesa a tutti i numeri x di Ω che non superano n e sono superiori a 1, dove è $f(x)$ una funzione numerica qualunque e $l(x)$, $h(x)$ due funzioni numerico-logaritmiche.

Per la proprietà ora dimostrata si ha

$$\Psi_r(n^{\frac{1}{r}}) = \sum_p^{\Omega, n^{\frac{1}{r}}} f(p^r) \frac{l(p)}{h(p)} + \frac{1}{2} \sum_p^{\Omega, n^{\frac{1}{2r}}} f(p^{2r}) \frac{l(p)}{h(p)} + \frac{1}{3} \sum_p^{\Omega, n^{\frac{1}{3r}}} f(p^{3r}) \frac{l(p)}{h(p)} + \cdots$$

Invertendo questa coi fattori di Möbius si ottiene

$$\sum_p^{\Omega, n} f(p) \frac{l(p)}{h(p)} = \Psi_1(n) + \frac{\mu(2)}{2} \Psi_2(n^{\frac{1}{2}}) + \frac{\mu(3)}{3} \Psi_3(n^{\frac{1}{3}}) + \cdots \qquad (2)$$

Torna acconcio trasformare la (1)). Essa può scriversi così

$$\Psi_r(n) = \sum_{x>1}^{\Omega, n} \frac{f(x^r)}{h(x)} \sum_{uv=x} \mu(u)\, l(v),$$

quindi si ottiene

$$\Psi_2(n) = \sum_{u \geqq 1}^{\Omega, n} \mu(u) \sum_{v>1}^{\Omega, \frac{u}{n}} \frac{f(u^r v^r)\, l(v)}{h(u) + h(v)}. \qquad (3)$$

Specializzando le funzioni si ottiene un gran numero di identità.

Si ponga p. e. $h(n) = l(n)$, si ottiene

$$\sum_p^{\Omega, n} f(p) = \Phi_1(n) + \frac{\mu(n)}{2} \Phi_2(n^{\frac{1}{2}}) + \frac{\mu(3)}{3} \Phi_3(n^{\frac{1}{3}}) + \cdots \qquad (4)$$

dove è

$$\Phi_r(n) = \sum_{u>1}^{\Omega, n} \mu(u) \sum_{v>1}^{\Omega, \frac{n}{u}} \frac{f(u^r v^r)\, l(v)}{l(u) + l(v)}. \qquad (5)$$

In particolare per $f(x) = 1$ si ottiene una espressione della totalità dei numeri primi che non superano n, e appartengono al sistema Ω:

$$\vartheta_\Omega(n) = \Phi(n) + \frac{\mu(n)}{2} \Phi(n^{\frac{1}{2}}) + \frac{\mu(3)}{3} \Phi(n^{\frac{1}{3}}) + \cdots \qquad (6)$$

dove è

$$\Phi(n) = \sum_{u>1}^{\Omega, n} \mu(u) \sum_{v>1}^{\Omega, \frac{n}{u}} \frac{l(v)}{l(u) + l(v)}. \qquad (7)$$

Se si fa $h(n) = l(n)$, e $f(x)$ si muta in $\log f(x)$, posto

$$P_r(n) = \prod_{u \geqq 1}^{\Omega, n} \prod_{v > 1}^{\Omega, u} f(u^r v^r)^{\frac{\mu(u) l(v)}{l(u) + l(v)}}, \tag{8}$$

si ottiene

$$\prod_{p}^{\Omega, n} f(p) = P_1(n) \cdot \left[P_2(n^{\frac{1}{2}})\right]^{\frac{\mu(2)}{2}} \cdot \left[P_3(n^{\frac{1}{3}})\right]^{\frac{\mu(3)}{3}} \cdots \tag{9}$$

Si può ottenere una espressione più semplice, quando $f(x)$ è composta. Si faccia allora $f(x) = 1$, $h(x) = \tau(x)$, rappresentando $\tau(x)$ il numero dei fattori primi uguali e disuguali di x. Dapprima si ha

$$\sum_{p}^{\Omega, n} l(p) = T(n) + \frac{\mu(2)}{2} T(n^{\frac{1}{2}}) + \frac{\mu(3)}{3} T(n^{\frac{1}{3}}) + \cdots \tag{10}$$

dove è

$$T(n) = \sum_{u > 1}^{\Omega, n} \mu(u) \sum_{v > 1}^{\Omega, n} \frac{l(v)}{\tau(u) + \tau(v)}, \tag{11}$$

poi, supponendo $f(x)$ composta e ponendo $l(x) = \log f(x)$ e

$$Q(x) = \prod_{u \geqq 1}^{\Omega, n} \prod_{v > 1}^{\Omega, u} f(v)^{\frac{\mu(u)}{\tau(u) + \tau(v)}}, \tag{12}$$

si ottiene

$$\prod_{p}^{\Omega, n} f(p) = Q(n) \cdot \left[Q(n^{\frac{1}{2}})\right]^{\frac{\mu(2)}{2}} \cdot \left[Q(n^{\frac{1}{3}})\right]^{\frac{\mu(3)}{3}}. \tag{13}$$

Il campo Ω è arbitrario; se p. es. Ω è il campo dei numeri dispari, e si prende $l(x) = \log x$, la (6) diviene la formola del TORELLI.

Queste formole hanno su quelle di MEISSEL-ROGEL il vantaggio che i numeri primi non vi figurano esplicitamente, e che la funzione $l(x)$ essendo qualunque (purchè logaritmica), può essere sostituita dalla funzione *continua* $\log x$. Riteniamo perciò che queste formole debbano riuscire molto più vantaggiose delle prime nella valutazione assintotica delle funzioni sopra studiate.

Palermo, ottobre-novembre 1904.

Sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi.

(*Di* Giuseppe Lauricella, *a Catania.*)

Mi propongo di dimostrare l'esistenza degli integrali regolari delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi, quando in superficie sono date le componenti degli spostamenti, per tutti quei campi convessi finiti per i quali è valevole *il metodo di* Neumann relativo *al problema di* Dirichlet (*).

Questa limitazione, posta per riguardo ai campi ai quali ci riferiamo, dipende unicamente dal fatto che il nostro studio si fonda su alcuni risultati generali, relativi al *problema di* Dirichlet, stabiliti dal Liapounoff (**) solo per tali detti campi; di modo che il nostro teorema sarà ancora vero per tutti quei campi pei quali si potrà, in un modo qualsiasi, dimostrare la validità dei risultati di Liapounoff. Così si può verificare che essi, e quindi ancora il detto teorema, sussistono per un parallelepipedo rettangolo e per altri

(*) L'estensione del *metodo di* Neumann ai campi non convessi è stata fatta, con alcune restrizioni, dal Poincaré (*Acta Math.*, T. XX). Tale estensione è stata notevolmente semplificata dallo Stekloff (*Ann. de la Faculté des Sc. de Toulouse;* 2.ª S.; II) e dal Korn (*Lehrbuch der Potentialtheorie.* Berlino, 1899). In questi ultimi tempi poi lo Zaremba (*Bull. intern. de l'Acad. des Sc. de Cracovie;* 1901, N. 3, Mars). (Veggasi ancora: Zaremba, *Journal de Math.*; S. 5.ª, T. VIII. — Stekloff, *Ann. de l'École Norm. Sup.*; 1904) ha portato un notevole contributo alla quistione, togliendo ogni restrizione per la validità del *metodo di* Neumann; però è da notare che le considerazioni dello Zaremba si fondano essenzialmente sull'applicazione, ai campi non convessi e che non possono scindersi in un numero finito di campi convessi, di un celebre lemma del Poincaré (*Circ. Mat. di Palermo*, 1894; § III), il quale è stato dimostrato fin ora pei soli campi convessi o che possono scindersi in un numero finito di campi convessi.

(**) *Sur certaines quistions qui se rattachent au problème de* Dirichlet (Journal de Math.; S. 5ª, T. IV).

campi convessi ancora i quali sfuggono all'applicazione del *metodo di* NEUMANN, ma per i quali è conosciuta la *funzione di* GREEN.

Alcuni anni or sono pubblicai sul *Nuovo Cimento* (S. 4.ª, Vol. IX, 1899) un'altra dimostrazione del teorema enunciato, la quale non differisce nelle sue linee generali dalla presente; però ne è meno semplice, mentre poi in varii punti può dare luogo a delle obiezioni, alle quali non è sempre facile rispondere. Uno studio della quistione, secondo i concetti esposti in una Nota dei *Comptes rendus* (15 juillet 1901) dai sigg. E. e F. COSSERAT, deve offrire nei suoi dettagli parecchie difficoltà, alcune delle quali, credo, possono essere superate con i concetti esposti nella presente Nota.

SULLA FUNZIONE DI GREEN.

1. Sia σ una superficie convessa chiusa, la quale abbia il piano tangente determinato in ogni suo punto e per la quale valga *il metodo di* NEUMANN. Si indichi con S lo spazio finito limitato da σ, e con n la direzione che entra in S della normale nei punti di σ; e si riferiscano i punti dello spazio ad una terna di assi cartesiani ortogonali.

Sia (x_1, y_1, z_1) un punto di S discosto da σ, (x, y, z) un punto variabile di S; ed r la distanza di questi due punti fra di loro. La funzione H armonica nei punti (x, y, z) di S e che nei punti di σ coincide con $\frac{1}{r}$, ha (*) le derivate prime rispetto ad x, y, z finite e continue in tutto S (i punti di σ compresi, intendendo, *come faremo sempre nel seguito*, di prendere per valori di una funzione nei punti di σ i limiti dei valori che questa funzione prende nei punti dell'interno di S, quando questi punti interni si avvicinano indefinitamente a σ); e se la funzione arbitraria f dei punti di σ è finita e continua ed è tale che la funzione armonica u dei punti di S, la quale nei punti di σ coincide con f, ha le derivate prime finite e continue in tutto S (i punti di σ compresi), si può scrivere, come è noto,

$$u(x_1, y_1, z_1) = \int_\sigma f \frac{dG}{dn} d\sigma, \tag{1}$$

(*) LIAPOUNOFF, l. c., § 24.

dove si è posto:

$$G = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - H\right)$$

e dove $\frac{dG}{dn}$ indica la derivata di G nella direzione n calcolata nei varii punti di σ.

2. Indichiamo con (x_2, y_2, z_2) un nuovo punto di S discosto da σ, con $H(x_2, y_2, z_2; x_1, y_1, z_1)$ il valore nel punto (x_1, y_1, z_1) della funzione H relativa al punto (x_2, y_2, z_2) e con r' la distanza di (x_2, y_2, z_2) da un altro punto qualsiasi (x, y, z). Poichè, come si è rammentato, finchè il punto (x_2, y_2, z_2) è discosto da σ, la funzione $H(x_2, y_2, z_2; x_1, y_1, z_1)$ è finita e continua insieme alle sue derivate prime rispetto ad x_1, y_1, z_1 in tutti i punti (x_1, y_1, z_1) del campo S (quelli di σ compresi), avremo, applicando la (1),

$$H(x_2, y_2, z_2; x_1, y_1, z_1) = \int_\sigma \frac{1}{r'} \frac{dG}{dn} d\sigma;$$

e poichè ancora $\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial x_2}, \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial y_2}, \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial z_2}$ sono funzioni finite e continue dei punti (x, y, z) di σ, si avrà da questa per (x_2, y_2, z_2) discosto da σ, derivando sotto il segno,

$$\frac{\partial H}{\partial x_2} = \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial x_2} \frac{dG}{dn} d\sigma, \quad \frac{\partial H}{\partial y_2} = \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial y_2} \frac{dG}{dn} d\sigma, \ldots$$

Le funzioni $\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial x_2}, \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial y_2}, \ldots$, nelle quali pel momento il punto (x_2, y_2, z_2) si suppone fisso, hanno le derivate dei due primi ordini rispetto ad x, y, z finite e continue in tutto il campo limitato da σ, e da una superficie qualsiasi σ', isolante il punto (x_2, y_2, z_2) e tutta interna ad S; quindi (*) le funzioni H_1, H_2, H_3 armoniche nei punti di S e che nei punti di σ coincidono rispettivamente con $\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial x_2}, \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial y_2}, \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial z_2}$ hanno le derivate prime finite e con-

(*) Liapounoff, l. c., § 22.

tinue in tutto S (i punti di σ compresi); e per conseguenza si potrà scrivere, in forza della (1),

$$H_1(x_1, y_1, z_1) = \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial x_2} \frac{dG}{dn} d\sigma, \quad H_2(x_1, y_1, z_1) = \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial y_2} \frac{dG}{dn} d\sigma, \ldots$$

Queste formole, confrontate con le precedenti, ci dànno:

$$H_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2}, \quad H_2 = \frac{\partial H}{\partial y_2}, \quad H_3 = \frac{\partial H}{\partial z_2};$$

quindi possiamo concludere che le derivate nella direzione della normale a σ delle funzioni $\frac{\partial H}{\partial x_2}, \frac{\partial H}{\partial y_2}, \cdots$ sono finite e continue anche nei punti (x_1, y_1, z_1) di σ stessa Osserviamo ancora che le funzioni $\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial x_2}, \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial y_2}, \cdots$ e le loro derivate dei due primi ordini rispetto ad x, y, z sono finite e continue anche rispetto ad x_2, y_2, z_2, finchè il punto (x_2, y_2, z_2) si mantiene discosto da σ'; per conseguenza le derivate normali di H_1, H_2, H_3, ossia le derivate normali di $\frac{\partial H}{\partial x_2}, \frac{\partial H}{\partial y_2}, \frac{\partial H}{\partial z_2}$, delle quali si è testè parlato, sono finite e continue anche rispetto ad x_2, y_2, z_2 nei punti dell'interno di S (*). Possiamo quindi applicare il teorema dell'inversione dell'ordine di derivazione e scrivere, per (x_2, y_2, z_2) discosto da σ e per un punto (x_1, y_1, z_1) qualsiasi di σ,

$$\frac{d}{dn}\frac{\partial H}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{dH}{dn}, \quad \frac{d}{dn}\frac{\partial H}{\partial y_2} = \frac{\partial}{\partial y_2}\frac{dH}{dn}, \ldots, \tag{2}$$

nelle quali:

$$\frac{d}{dn} = \cos(nx)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cos(ny)\frac{\partial}{\partial y_1} + \cos(nz)\frac{\partial}{\partial z_1}.$$

(*) Infatti al citato teorema del Liapounoff (l. c., § 22) si può fare seguire l'altro: *Se $F(x, y, z; x_2, y_2, z_2)$ e le sue derivate dei due primi ordini rispetto ad x, y, z sono funzioni finite e continue dei punti (x, y, z) delle vicinanze di σ e dei punti (x_2, y_2, z_2) di un certo campo S_2, ed $f(x, y, z; x_2, y_2, z_2)$ rappresenta i valori di F nei punti (x, y, z) di σ, la funzione $V(x, y, z; x_2, y_2, z_2)$ armonica nei punti (x, y, z) del campo S e che nei punti di σ coincide con f, ammette le derivate prime rispetto ad x, y, z, le quali saranno finite e continue tanto rispetto alle coordinate x, y, z dei punti di S (quelli di σ inclusi), quanto rispetto alle coordinate x_2, y_2, z_2 dei punti di S_2.* La dimostrazione di questo teorema si può fare modificando lievemente e in modo spontaneo la dimostrazione del detto teorema di Liapounoff.

Nello stesso modo si dimostra che, finchè il punto (x_2, y_2, z_2) è discosto da σ, esistono le derivate normali delle funzioni $\frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2}$, $\frac{\partial^2 H}{\partial y_2^2}, \dots$ e sono finite e continue tanto rispetto alle coordinate x_1, y_1, z_1 dei punti delle vicinanze di σ e di σ stesso, quanto rispetto alle coordinate del punto (x_2, y_2, z_2); e per conseguenza si può scrivere ancora:

$$\frac{d}{dn}\frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{d}{dn}\frac{\partial H}{\partial x_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\frac{dH}{dn}, \dots \qquad (2)'$$

3. Prendiamo a considerare la formola (1) nella ipotesi che *la funzione f soddisfi alla sola condizione di essere finita e continua nei punti di σ.*

Il Liapounoff dimostra allora (l. c., § 25) che il limite dei valori di $u(x_1, y_1, z_1)$, quando il punto (x_1, y_1, z_1) dell'interno di S si avvicina indefinitamente ad un certo punto di σ, coincide col valore di f in tale punto. Lo Stekloff poi, a compimento di questo importante risultato, dimostra (*), mediante sviluppi in serie di *funzioni fondamentali*, che la funzione $u(x_1, y_1, z_1)$ è armonica nel campo S. Noi possiamo qui dimostrare direttamente questa seconda proposizione nel seguente modo.

Osserviamo che le variabili della funzione $\frac{dH}{dn}$, che comparisce sotto integrale nella formola (1), sono x_1, y_1, z_1; x, y, z che corrispondono rispettivamente alle variabili x_2, y_2, z_2; x_1, y_1, z_1 delle funzioni che compariscono nelle formole (2), (2)'; ed allora avremo, appunto in forza delle (2), (2)', che volendo nella (1) derivare una o due volte rispetto ad una qualsiasi delle variabili x_1, y_1, z_1, finchè il punto (x_1, y_1, z_1) si mantiene discosto da σ, si può applicare al secondo membro il teorema della derivazione sotto il segno; quindi si potrà scrivere:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x_1} = \int_\sigma f \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{dG}{dn}\,d\sigma, \quad \frac{\partial u}{\partial y_1} = \int_\sigma f \frac{\partial}{\partial y_1}\frac{dG}{dn}\,d\sigma, \dots \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \int_\sigma f \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{dG}{dn}\,d\sigma = \int_\sigma f \frac{d}{dn}\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2}\,d\sigma, \dots; \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

e per conseguenza, come si voleva dimostrare,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} = 0.$$

(*) *Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique;* Cap. II, n. 19. (Ann. de l'Éc. Norm. Sup., 1904).

Adunque *la sola continuità della funzione finita f dei punti di σ è sufficiente, perchè la formola* (1) *valga ad esprimere la funzione regolare armonica del campo S, che nei punti di σ coincide con f.*

Formole fondamentali.

4. Si considerino le equazioni:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{(nei punti di } S) & \Delta^2 \xi + \dfrac{\partial \pi}{\partial x_1} = 0, & \text{(nei punti di } \sigma) & \xi = 0; \\ \quad\text{»} & \Delta^2 \eta + \dfrac{\partial \pi}{\partial y_1} = 0, & \quad\text{»} & \eta = 0; \\ \quad\text{»} & \Delta^2 \zeta + \dfrac{\partial \pi}{\partial z_1} = 0, & \quad\text{»} & \zeta = 0, \end{array}\right\} \tag{4}$$

nelle quali si è posto:

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}$$

e nelle quali π è una funzione armonica, finita e continua insieme alle sue derivate prime in tutti i punti (x_1, y_1, z_1) del campo S, i punti di σ al più esclusi per le derivate.

Si ponga:

$$\xi = \xi' - \frac{x_1}{2}\pi, \quad \eta = \eta' - \frac{y_1}{2}\pi, \quad \zeta = \zeta' - \frac{z_1}{2}\pi \tag{5}$$

con ξ' η', ζ' funzioni da determinarsi convenientemente.

Dalle (4) si ricavano per ξ', η', ζ' le seguenti equazioni (*):

$$\begin{array}{llll} \text{(nei punti di } S) & \Delta^2 \xi' = 0, & \text{(nei punti di } \sigma) & \xi' = \dfrac{x}{2}\pi; \\ \quad\text{»} & \Delta^2 \eta' = 0, & \quad\text{»} & \eta' = \dfrac{y}{2}\pi; \\ \quad\text{»} & \Delta^2 \zeta' = 0, & \quad\text{»} & \zeta' = \dfrac{z}{2}\pi; \end{array}$$

(*) Ora e nel seguito indicheremo le coordinate dei punti di σ con x, y, z.

e queste ultime ci dànno, applicando la (1) (cfr. § 3),

$$\xi = \int_\sigma \frac{x}{2} \pi \frac{dG}{dn} d\sigma, \qquad \eta' = \int_\sigma \frac{y}{2} \pi \frac{dG}{dn} d\sigma, \ldots$$

Per altro si può scrivere:

$$\pi = \int_\sigma \pi \frac{dG}{dn} d\sigma;$$

sicchè in conclusione abbiamo dalle (5):

$$\xi = \int_\sigma \frac{1}{2} (x - x_1) \pi \frac{dG}{dn} d\sigma, \qquad \eta = \int_\sigma \frac{1}{2} (y - y_1) \pi \frac{dG}{dn} d\sigma, \ldots \tag{5'}$$

5. Posto:

$$\theta = \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial \eta}{\partial y_1} + \frac{\partial \zeta}{\partial z_1}, \tag{6}$$

avremo dalle (5)' per (x_1, y_1, z_1) discosto da σ, in forza delle (3),

$$\left.\begin{aligned} \theta = -\frac{3}{2}\int_\sigma \pi \frac{dG}{dn} d\sigma + \int_\sigma \frac{\pi}{2} \Big\{ (x - x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{dG}{dn} + (y - y_1) \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{dG}{dn} + \\ + (z - z_1) \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{dG}{dn} \Big\} d\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{6'}$$

Intanto si ha dalle (2), finchè il punto (x_1, y_1, z_1) è discosto da σ (*),

$$\begin{aligned} (x - x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{dG}{dn} + (y - y_1) \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{dG}{dn} + (z - z_1) \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{dG}{dn} = \\ = (x - x_1) \frac{d}{dn} \frac{\partial G}{\partial x_1} + (y - y_1) \frac{d}{dn} \frac{\partial G}{\partial y_1} + \cdots = \\ = \frac{d}{dn} \Big\{ (x - x_1) \frac{\partial G}{\partial x_1} + (y - y_1) \frac{\partial G}{\partial y_1} + (z - z_1) \frac{\partial G}{\partial z_1} \Big\} - \\ - \Big\{ \frac{\partial G}{\partial x_1} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial G}{\partial y_1} \frac{dy}{dn} + \frac{\partial G}{\partial z_1} \frac{dz}{dn} \Big\}; \end{aligned}$$

(*) Rammentiamo che le variabili x_1, y_1, z_1; x, y, z di queste formole equivalgono rispettivamente alle variabili x_2, y_2, z_2; x_1, y_1, z_1, delle formole (2).

e poichè nei punti (x, y, z) di σ si ha:

$$\frac{\partial G}{\partial x_1}=\frac{\partial G}{\partial y_1}=\frac{\partial G}{\partial z_1}=0,$$

potremo scrivere la $(6)'$ sotto la forma:

$$\left.\begin{aligned}\theta(x_1, y_1, z_1) &= -\frac{3}{2}\pi + \\ &+\int_\sigma \frac{\pi}{2}\frac{d}{dn}\left\{(x-x_1)\frac{\partial G}{\partial x_1}+(y-y_1)\frac{\partial G}{\partial y_1}+\cdots\right\}d\sigma.\end{aligned}\right\} \qquad (6)''$$

6. Dalla formola:

$$K=(x-x_1)\frac{\partial G}{\partial x_1}+(y-y_1)\frac{\partial G}{\partial y_1}+(z-z_1)\frac{\partial G}{\partial z_1}=-r\frac{\partial G}{\partial r}=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r}+r\frac{\partial H}{\partial r}\right),$$

nella quale le derivazioni rispetto ad r si intendono eseguite nel punto (x_1, y_1, z_1), se supponiamo il punto (x, y, z) discosto da σ e fisso e il punto (x_1, y_1, z_1) variabile, risulta che si può isolare (x, y, z) con una superficie σ' tutta interna ad S e tale che nei punti (x_1, y_1, z_1) di σ' si abbia: $K>0$.

La funzione G, nella quale supponiamo (x, y, z) discosto da σ e fisso e (x_1, y_1, z_1) variabile, si può considerare, in forza del noto *teorema di* Riemann, come la *funzione di* Green relativa al punto (x, y, z). Ora questa funzione si annulla nei punti (x_1, y_1, z_1) di σ, e nei punti (x_1, y_1, z_1) dell'interno di S è positiva; cosicchè le sue derivate nei punti di σ nelle direzioni che dai punti di σ stessa vanno nell'interno di S sono positive; e quindi, essendo il campo S convesso, l'espressione $-\frac{\partial G}{\partial r}$, che rappresenta la derivata di G nel punto (x_1, y_1, z_1) nella direzione che da (x_1, y_1, z_1) va al punto (x, y, z), e così ancora l'espressione K nei punti di σ non saranno mai negative. In questo modo avremo che la funzione K è regolare ed armonica rispetto alle variabili x_1, y_1, z_1 nel campo limitato da σ e σ', e in superficie non è mai negativa; per conseguenza ***essa non sarà mai negativa in alcun punto di** S* (*).

(*) La dimostrazione precedente di questa proposizione mi è stata suggerita dal Chiariss. Prof. G. Fubini.

Premesso ciò, supponiamo il punto (x_1, y_1, z_1) interno al campo S e fisso, il punto (x, y, z) variabile in S. Essendo la funzione K nulla nei punti (x, y, z) di σ e giammai negativa nei punti dell'interno di S, ne segue che *la funzione:*

$$\frac{dK}{dn} = \frac{d}{dn}\left\{(x - x_1)\frac{\partial G}{\partial x_1} + (y - y_1)\frac{\partial G}{\partial y_1} + (z - z_1)\frac{\partial G}{\partial z_1}\right\} \tag{7}$$

nei punti (x, y, z) di σ *non è mai negativa.*

Facendo $\pi = 1$ nelle (4), risulterà: $\theta(x_1, y_1, z_1) = 0$; e quindi dalla (6)'':

$$3 = \int_\sigma \frac{d}{dn}\left\{(x - x_1)\frac{\partial G}{\partial x_1} + (y - y_1)\frac{\partial G}{\partial y_1} + (z - z_1)\frac{\partial G}{\partial z_1}\right\} d\sigma.$$

Da questa formola, dalla continuità di π e dal fatto che l'espressione (7) non cambia mai di segno, segue facilmente che la funzione $\theta(x_1, y_1, z_1)$, data dalla (6)'', si mantiene finita e continua anche quando il punto (x_1, y_1, z_1) va su σ (intendendo al solito di prendere per valori nei punti di σ i limiti ...), e risulta ancora, indicando con M_π il massimo valore assoluto di π e con M_θ il massimo valore assoluto di θ,

$$M_\theta \leqq 3\, M_\pi. \tag{8}$$

Sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio.

7. Premessi questi risultati preliminari, proponiamoci di dimostrare che, *date ad arbitrio tre funzioni u_σ, v_σ, w_σ dei punti di σ, esistono gli integrali regolari u, v, w delle equazioni:*

$$\left.\begin{array}{c} \text{(nei punti di } S)\left\{\begin{array}{l} \Delta^2 u + k\dfrac{\partial \theta}{\partial x_1} = 0, \\ \Delta^2 v + k\dfrac{\partial \theta}{\partial y_1} = 0, \\ \Delta^2 w + k\dfrac{\partial \theta}{\partial z_1} = 0, \end{array}\right. \qquad \text{(nei punti di } \sigma)\left\{\begin{array}{l} u = u_\sigma \\ v = v_\sigma \\ w = w_\sigma \end{array}\right. \\ \left(\theta = \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v}{\partial y_1} + \dfrac{\partial w}{\partial z_1}\right) \end{array}\right\} \tag{9}$$

per qualsiasi valore reale e positivo della costante k.

Siano u', v', w' gli integrali regolari delle equazioni:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{(nei punti di } S) & \Delta^2 u' = 0, & \text{(nei punti di } \sigma) & u' = u_\sigma, \\ \quad\text{"} & \Delta^2 v' = 0, & \quad\text{"} & v' = v_\sigma, \\ \quad\text{"} & \Delta^2 w' = 0, & \quad\text{"} & w' = w_\sigma; \end{array}\right\} \quad (10)$$

e si supponga che *le funzioni* u_σ, v_σ, w_σ, *oltre di essere finite e continue su tutta la superficie* σ, *siano tali che l'espressione:*

$$\theta' = \frac{\partial u'}{\partial x_1} + \frac{\partial v'}{\partial y_1} + \frac{\partial w'}{\partial z_1}$$

sia finita e continua in tutto il campo S (*i punti di* σ *inclusi*) (*).

Posto:

$$u'' = u - u', \quad v'' = v - v' \quad w'' = w - w'; \quad \theta'' = \frac{\partial u''}{\partial x_1} + \frac{\partial v''}{\partial y_1} + \frac{\partial w''}{\partial z_1},$$

si avrà dalle (9), (10):

$$\text{(nei punti di } S)\left\{\begin{array}{l} \Delta^2 u'' + k\dfrac{\partial \theta''}{\partial x_1} = -k\dfrac{\partial \theta'}{\partial x_1}, \\ \Delta^2 v'' + k\dfrac{\partial \theta''}{\partial y_1} = -k\dfrac{\partial \theta'}{\partial y_1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \quad \text{(nei punti di } \sigma)\left\{\begin{array}{l} u'' = 0, \\ v'' = 0, \\ \dots\dots; \end{array}\right\} \quad (9)'$$

per conseguenza *la dimostrazione del teorema proposto si può ridurre alla dimostrazione dell'esistenza degli integrali regolari delle equazioni* (9)' *nelle quali* θ' *è una nota funzione armonica* (**).

8. Posto:

$$\theta_0 = k\,\theta',$$

si considerino le equazioni:

$$\text{(nei punti di } S)\left\{\begin{array}{l} \Delta^2 u_i + \dfrac{\partial \theta_{i-1}}{\partial x_1} = 0; \quad \left(\theta_i = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_i}{\partial y_1} + \cdots\right) \\ \Delta^2 v_i + \dfrac{\partial \theta_{i-1}}{\partial y_1} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots) \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \quad \text{(nei punti di } \sigma)\left\{\begin{array}{l} u_i = 0, \\ v_i = 0, \\ \dots\dots \end{array}\right\} \quad (11)$$

(*) Per condizioni sufficienti veggasi ad es. LIAPOUNOFF; l. c., § 22.

(**) La continuità delle funzioni u_σ, v_σ, w_σ è sufficiente perchè le derivate prime di θ' siano finite e continue in qualunque punto dell'interno di S (i punti di σ cioè esclusi).

Dai risultati stabiliti nei paragrafi 4, 5, 6 segue che gli integrali u_i, v_i, w_i $(i = 1, 2, \ldots)$ di queste equazioni e le corrispondenti espressioni θ_i sono funzioni finite e continue in tutto il campo S (i punti di σ inclusi), che ammettono le derivate prime finite e continue in tutti i punti dell'interno di S (i punti di σ cioè esclusi) e si possono esprimere mediante le formole:

$$u_i = \int_\sigma \frac{1}{2} (x - x_1)\, \theta_{i-1} \frac{d\,G}{d\,n}\, d\,\sigma, \qquad v_i = \int_\sigma \frac{1}{2} (y - y_1)\, \theta_{i-1} \frac{d\,G}{d\,n}\, d\,\sigma, \ldots \qquad (5)'_i$$

$$\theta_i = -\frac{3}{2}\,\theta_{i-1} + \int_\sigma \frac{\theta_{i-1}}{2} \frac{d}{d\,n} \left\{ (x - x_1) \frac{\partial\, G}{\partial\, x_1} + (y - y_1) \frac{\partial\, G}{\partial\, y_1} + \cdots \right\} d\,\sigma. \quad (6)''_i$$

Inoltre, se M_i indica il massimo valore assoluto di θ_i, si ha dalla (8):

$$M_i \leqq 3\, M_{i-1}. \qquad (8)_i$$

Ciò premesso, si consideri la serie:

$$\theta = \theta_1 + \theta_2\, k' + \theta_3\, k'^2 + \cdots + \theta_i\, k'^{i-1} + \cdots$$

In forza della $(8)_i$ essa è convergente assolutamente e in ugual grado in tutto S (i punti di σ inclusi) per qualunque valore positivo (*) di k inferiore ad $\frac{1}{3}$; e quindi si avrà per $0 < k' < \frac{1}{3}$, integrando per serie e supponendo (y_1, y_1, z_1) discosto da σ,

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{3}{2}(\theta_0 + k'\,\theta) + \int_\sigma \frac{1}{2}(\theta_0 + k'\,\theta) \frac{d}{d\,n}\Big\{ (x - x_1)\frac{\partial\, G}{\partial\, x_1} + \\
&\qquad\qquad + (y - y_1)\frac{\partial\, G}{\partial\, y_1} + \cdots \Big\} d\,\sigma = \\
&= -\frac{3}{2}\,\theta_0 + \int_\sigma \frac{\theta_0}{2} \frac{d}{d\,n}\Big\{ (x - x_1)\frac{\partial\, G}{\partial\, x_1} + \cdots \Big\} d\,\sigma + \Big[-\frac{3}{2}\,\theta_1 + \\
&\qquad\qquad + \int_\sigma \frac{\theta_1}{2} \frac{d}{d\,n}\Big\{ (x - x_1)\frac{\partial\, G}{\partial\, x_1} + \cdots \Big\} d\,\sigma \Big] k' + \cdots \\
&\cdots + \Big[-\frac{3}{2}\,\theta_{i-1} + \int_\sigma \frac{\theta_{i-1}}{2} \frac{d}{d\,n}\Big\{ (x - x_1)\frac{\partial\, G}{\partial\, x_1} + \cdots \Big\} d\sigma \Big] k'^{i-1} + \\
&\qquad\qquad + \cdots = \theta_1 + \theta_2\, k' + \cdots + \theta_i\, k'^{i-1} + \cdots = \theta.
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

(*) Qui teniamo conto dei soli valori positivi.

In forza della continuità delle funzioni θ e θ_0 nei punti di σ, questa formola (come si osservò al § 6 per la (6)'') vale anche quando il punto (x_1, y_1, z_1) va su σ, e si può ancora scriverla:

$$\left(1+\frac{3}{2}k'\right)\theta = -\frac{3}{2}\theta_0 + \int_\sigma \frac{1}{2}(\theta_0 + k'\theta)\frac{d}{dn}\left\{(x-x_1)\frac{\partial G}{\partial x_1} + \cdots\right\} d\sigma. \qquad (12)'$$

Di qui risulta, indicando con M il massimo valore assoluto di θ,

$$\left(1+\frac{3}{2}k'\right)M \leq \frac{3}{2}M_0 + \frac{3}{2}(M_0 + k'M),$$

ossia:

$$M \leq 3\,M_0. \qquad (8)'$$

9. Poniamo:

$$\left.\begin{aligned} u(x_1, y_1, z_1) &= \int_\sigma \frac{1}{2}(x-x_1)(\theta_0 + k'\theta)\frac{dG}{dn}\,d\sigma, \\ v(x_1, y_1, z_1) &= \int_\sigma \frac{1}{2}(y-y_1)(\theta_0 + k'\theta)\frac{\partial G}{\partial n}\,d\sigma, \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Le funzioni u, v, w sono finite e continue in tutto il campo S (i punti di σ inclusi) e hanno le derivate prime finite e continue in qualunque punto dell'interno di S (i punti di σ cioè al più esclusi); e se si ha riguardo alla formola:

$$\theta_0 + k'\theta = \int_\sigma (\theta_0 + k'\theta)\frac{dG}{dn}\,d\sigma,$$

mediante cui si può esprimere la funzione armonica $(\theta_0 + k'\theta)$ dei punti (x_1, y_1, z_1) di S, risulterà:

$$\text{(nei punti di } S\text{)}\left\{\begin{aligned} &\Delta^2 u + k'\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + \frac{\partial\theta_0}{\partial x_1} = 0, \\ &\Delta^2 v + k'\frac{\partial\theta}{\partial y_1} + \frac{\partial\theta_0}{\partial y_1} = 0, \quad \left(\theta = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{\partial w}{\partial z_1}\right) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \qquad \text{(nei punti di } \sigma\text{)}\left\{\begin{aligned} &u = 0, \\ &v = 0, \\ &\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

con k' costante positiva e minore di $\frac{1}{3}$.

10. Fissato un valore positivo qualsiasi k_1 di k', inferiore ad $\frac{1}{3}$, si considerino le equazioni:

$$
\text{(nei punti di } S\text{)} \left\{
\begin{aligned}
&\Delta^2 u_i + k_1 \frac{\partial \theta_i}{\partial x_1} + \frac{\partial \theta_{i-1}}{\partial x_1} = 0, \\
&\qquad\qquad \left(\theta_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \cdots\right). \\
&\Delta^2 v_i + k_1 \frac{\partial \theta_i}{\partial y_1} + \frac{\partial \theta_{i-1}}{\partial y_1} = 0, \\
&\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
\right.
\qquad
\text{(nei punti di } \sigma\text{)} \left\{
\begin{aligned}
&u_i = 0, \\
&v_i = 0, \\
&\ldots\ldots,
\end{aligned}
\right\}
\tag{14}
$$

che sono della natura di quelle scritte sopra.

Da quanto si è premesso, risulta che gli integrali u_i, v_i, w_i $(i = 1, 2, \ldots)$ di queste equazioni e la corrispondente espressione θ_i sono funzioni finite... e si possono esprimere mediante le formole:

$$
\left.
\begin{aligned}
u_i &= \int_\sigma \frac{1}{2} (x - x_1)(\theta_{i-1} + k_1 \theta_i) \frac{dG}{dn} d\sigma, \\
v_i &= \int_\sigma \frac{1}{2} (y - y_1)(\theta_{i-1} + k_1 \theta_i) \frac{dG}{dn} d\sigma, \ldots
\end{aligned}
\right\}
\tag{13)$_i$ \quad (}
$$

$$
\theta_i = -\frac{3}{2} (\theta_{i-1} + k_1 \theta_i) + \int_\sigma \frac{1}{2} (\theta_{i-1} + k_1 \theta_i) \frac{d}{dn} \left\{ (x - x_1) \frac{\partial G}{\partial x_1} + \cdots \right\} d\sigma. \quad (12)_i
$$

Inoltre, se M_i indica il massimo valore assoluto di θ_i, si ha dalla $(8)'$:

$$
M_i \leqq 3 M_{i-1}. \qquad (8)'_i
$$

Ciò premesso, si consideri la serie:

$$
\theta = \theta_1 + \theta_2 k' + \cdots + \theta_i k'^{i-1} + \cdots
$$

In forza della $(8)'_i$ essa è convergente assolutamente e in ugual grado in tutto S (i punti di σ inclusi) per qualunque valore positivo di k' inferiore ad $\frac{1}{3}$; e quindi si avrà per $0 < k' < \frac{1}{3}$:

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{3}{2}\left\{\theta_0+(k_1+k')\theta\right\}+\int_\sigma\frac{1}{2}\left\{\theta_0+(k_1+k')\theta\right\}\frac{d}{dn}\left\{(x-x_1)\frac{\partial G}{\partial x_1}+\cdots\right\}d\sigma=\\
&=-\frac{3}{2}(\theta_0+k_1\theta_1)+\int_\sigma\frac{1}{2}(\theta_0+k_1\theta_1)\frac{d}{dn}\left\{(x-x_1)\frac{\partial G}{\partial x_1}+\cdots\right\}d\sigma+\\
&+\left[-\frac{3}{2}(\theta_1+k_1\theta_2)+\int_\sigma\frac{1}{2}(\theta_1+k_1\theta_2)\frac{d}{dn}\left\{(x-x_1)\frac{\partial G}{\partial x_1}+\cdots\right\}d\sigma\right]k'+\\
&+\cdots+\left[-\frac{3}{2}(\theta_{i-1}+k_1\theta_i)+\int_\sigma\frac{1}{2}(\theta_{i-1}+k_1\theta_i)\frac{d}{dn}\left\{(x-x_1)\frac{\partial G}{\partial x_1}+\cdots\right\}d\sigma\right]k'^{i-1}+\cdots=\\
&=\theta_1+\theta_2k'+\cdots+\theta_ik'^{i-1}+\cdots=\theta,
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

ossia:

$$\left\{1+\frac{3}{2}(k_1+k')\right\}\theta=-\frac{3}{2}\theta_0+\int_\sigma\frac{1}{2}\left\{\theta_0+(k_1+k')\theta\right\}\frac{d}{dn}\left\{(x-x_1)\frac{\partial G}{\partial x_1}+\cdots\right\}d\sigma. \tag{15$'$}$$

Di qui risulta, indicando con M il massimo valore assoluto di θ in tutto S (i punti di σ inclusi),

$$M < 3\,M_0. \tag{8$''$}$$

11. Poniamo:

$$u(x_1, y_1, z_1)=\int_\sigma\frac{1}{2}(x-x_1)\left\{\theta_0+(k_1+k')\theta\right\}\frac{dG}{dn}d\sigma,\ldots,\ldots \tag{16}$$

Le funzioni u, v, w sono finite e continue...; e se si ha riguardo alla formola:

$$\theta_0+(k_1+k')\theta=\int_\sigma\left\{\theta_0+(k_1+k')\theta\right\}\frac{dG}{dn}d\sigma,$$

mediante la quale si può esprimere la funzione armonica $\theta_0+(k_1+k')\theta$ dei punti (x_1, y_1, z_1) di S, risulterà:

$$\text{(nei punti di } S\text{)} \begin{cases} \Delta^2 u + (k_1 + k') \dfrac{\partial \theta}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \theta_0}{\partial x_1} = 0, \\ \Delta^2 v + (k_1 + k') \dfrac{\partial \theta}{\partial y_1} + \dfrac{\partial \theta_0}{\partial y_1} = 0, \quad \left(\theta = \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v}{\partial y_1} + \cdots\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \quad \text{(nei punti di } \sigma\text{)} \begin{cases} u = 0, \\ v = 0, \\ \dots \end{cases}$$

con k' quantità costante positiva ed inferiore ad $\frac{1}{3}$.

Arrivati a questo punto, è facile capire come, seguitando n volte nella medesima maniera, si può giungere a dimostrare l'esistenza degli integrali regolari delle equazioni:

$$\text{(nei punti di } S\text{)} \begin{cases} \Delta^2 u + (n k_1 + k') \dfrac{\partial \theta}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \theta_0}{\partial x_1} = 0, \\ \Delta^2 v + (n k_1 + k') \dfrac{\partial \theta}{\partial y_1} + \dfrac{\partial \theta_0}{\partial y_1} = 0, \quad \left(\theta = \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \cdots\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \quad \text{(nei punti di } \sigma\text{)} \begin{cases} u = 0, \\ v = 0, \\ \dots \end{cases}$$

con k' quantità costante positiva minore di $\frac{1}{3}$.

In questo modo, rammentando che si è posto:

$$\theta_0 = k\,\theta',$$

risulta appunto dimostrata l'esistenza degli integrali regolari delle equazioni (9)$'$ *per un qualsiasi valore costante e positivo prestabilito di* k.

Catania, Luglio 1904.

Studii sulle equazioni differenziali lineari.

(Di ULISSE DINI, *a Pisa.)*

1. Gli studii che si contengono in questa Memoria e in un'altra che pubblicherò fra breve possono considerarsi come un seguito e complemento di quelli che esposi in due Memorie collo stesso titolo che pubblicai nei Vol. II e III della serie III di questi *Annali.*

A queste Memorie dovrò quindi riferirmi bene spesso; e anzi, a rendere più semplici e comodi gli studii che ora voglio fare, riporterò qui senz'altro, nei primi paragrafi, la formola generale che detti nella prima delle Memorie medesime, e richiamerò alcuni particolari che in quelle si trovano esposti; dopo di che esporrò quello che forma il soggetto principale di questa Memoria, cioè la ricerca di casi nei quali un'equazione lineare ammette integrali regolari anche nell'intorno dei punti nei quali il coefficiente del primo termine si annulla, mentre gli altri coefficienti restano in quei punti determinati e finiti.

Avendosi una equazione lineare completa

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + a_2\, y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = X,$$

nella quale a_0, a_1, $a_2, \ldots, a_{n-1}$, a_n e X sono funzioni conosciute della x e regolari (*) in tutto un intervallo (a, b) nel quale ora si suppone anche che a_0

(*) Dicendo qui che una funzione è regolare in un intervallo (a, b), s'intende che sia finita e continua insieme a quelle delle sue derivate che occorre di considerare, salvo tutt'al più quella di ordine più alto fra queste derivate per la quale il più spesso basterà che sia atta alla integrazione anche ridotta ai valori assoluti.

In questi studii l'esistenza delle derivate bisogna ammetterla per a_0 fino all'ordine n, per a_1 fino all'ordine $n-1$, per a_2 fino all'ordine $n-2$, e in generale per a_{n-h} fino all'ordine h, bastando però il più spesso pei singoli coefficienti che le derivate dell'ordine più alto che devono considerarsi siano integrabili e finite, e talvolta anche soltanto intesia diverso da zero, si prendano n funzioni regolari qualsiansi $z_1, z_2, \ldots, z_n$ per le quali il determinante

$$Q = \begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & z''_1 & \ldots & z_1^{(n-1)} \\ z_2 & z'_2 & z''_2 & \ldots & z_2^{(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_n & z'_n & z''_n & \ldots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

è diverso da zero nello stesso intervallo (a, b); e per ciascuna z_r di queste funzioni si indichi con $\varepsilon_{n-1} Z_r$ quello che si usa chiamare *polinomio aggiunto* del primo membro della equazione data (1), pel quale cioè si ha

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{n-1} Z_r = (a_0 z_r)^{(n)} + \varepsilon_1 (a_1 z_r)^{(n-1)} + \varepsilon_2 (a_2 z_r)^{(n-2)} + \cdots + \\ + \varepsilon_{n-1} (a_{n-1} z_r)' + \varepsilon_n (a_n z_r), \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

dove $\varepsilon_s = (-1)^s$.

Allora, indicando con Q_c, $q_{x x_1}$ e $\mathfrak{q}_{x x_1}$ i determinanti che si ottengono da Q ponendo al posto degli elementi della ultima colonna respettivamente le costanti arbitrarie $c_1, c_2, \ldots, c_n$ quando si vuole Q_c, e le funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_n$, e $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ nelle quali alla variabile x sia sostituito x_1 quando si vogliono $q_{x.x_1}$ e $\mathfrak{q}_{x.x_1}$, e ponendo in generale

$$A_x = Q_c + \int_\alpha^x X_{x_1} q_{x,x_1} \, d x_1, \qquad (4)$$

dove α è un valore qualunque di x nell'intervallo (a, b), per quanto dimostrai nella prima delle citate Memorie, si avranno infinite espressioni analitiche per mezzo di serie dell'integrale y della equazione (1) (*), le quali sono

---

grabili anche quando si riducono ai valori assoluti (essendo quindi sempre finite o no), e potendo anche, invece di queste ultime derivate, esistere solo gli estremi oscillatorii dotati però di queste particolarità per la loro integrabilità (V. i miei *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali.* Pisa, Nistri, 1878). Così per X e per a_n non si richiede neppure l'esistenza delle derivate, nè che queste funzioni siano sempre finite, e spesso anche basta che esse siano integrabili anche ridotte ai loro valori assoluti, ecc....

(*) Il Fuchs con altre considerazioni ottenne altre forme in serie per gli integrali delle equazioni lineari nella sua Memoria: *Sur le développement en séries des intégrales des équations différentielles linéaires,* pubblicata a pag. 36 del Vol. IV della serie II di questi *Annali.*

date dalla formola

$$
\left.\begin{aligned}
y = {} & \varepsilon_{n-1} \frac{A_x}{(a_0 Q)_x} + \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x \frac{A_{x_1} \mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} d\, x_1 + \\
& + \frac{\varepsilon_{n-1}^3}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} d\, x_1 \int_\alpha^{x_1} \frac{A_{x_2} \mathfrak{q}_{x_1,x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} d\, x_2 + \\
& + \frac{\varepsilon_{n-1}^4}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} d\, x_1 \int_\alpha^{x_1} \frac{\mathfrak{q}_{x_1,x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} d\, x_2 \int_\alpha^{x_2} \frac{A_{x_3} \mathfrak{q}_{x_2,x_3}}{(a_0 Q)_{x_3}} d\, x_3 + \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots + \\
& + \frac{\varepsilon_{n-1}^{m+1}}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} d\, x_1 \int_\alpha^{x_1} \frac{\mathfrak{q}_{x_1,x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} d\, x_2 \int_\alpha^{x_2} \frac{\mathfrak{q}_{x_2,x_3}}{(a_0 Q)_{x_3}} d\, x_3 \int_\alpha^{x_3} \cdots \int_\alpha^{x_{m-1}} \frac{A_{x_m} \mathfrak{q}_{x_{m-1},x_m}}{(a_0 Q)_{x_m}} d\, x_m + \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots ,
\end{aligned}\right\} \quad (5)
$$

la quale può anche scriversi sotto la forma semplice

$$
y = \varepsilon_{n-1} \frac{A_x}{(a_0 Q)_x} + \frac{\varepsilon_{n-1}}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x \mathfrak{q}_{x.x_1}\, y_{x_1}\, d\, x_1 , \qquad (6)
$$

che è anzi la formola dalla quale nella Memoria citata si ricava la precedente (5), e non è altro che una di quelle che il sig. HILBERT ha chiamato equazioni integrali di seconda specie, e alla quale quindi potrebbero applicarsi le considerazioni che egli ha fatto nella sua Memoria (*).

E si può anche notare che, siccome la equazione data (1) può sempre moltiplicarsi per un fattore qualsiasi t, purchè regolare e diverso da zero nell'intervallo (a, b), e per essa vengono allora a mutarsi i polinomii aggiunti Z_r e quindi le $\mathfrak{q}_{x.x_1}$, così conservando lo stesso sistema di funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_n$ gli integrali della equazione data (1), con questo semplice artifizio, potranno porsi sotto infinite altre forme differenti.

(*) Nelle mie Memorie: *Sulle equazioni differenziali* ricordate sopra, si ammette anche che X possa contenere le $y, y'\; y'', \ldots, y^{(n)}$, e si giunge ancora alla formola (6) la quale viene in tal caso ad essere una formola più generale delle equazioni integrali di seconda specie, e viene a valere per qualsiasi equazione differenziale anche non lineare.

2. Se poi si osserva che a causa della (4) ogni termine della serie (5) può scomporsi in due, e le serie corrispondenti a questi singoli termini risultano convergenti al modo stesso, se ne deduce che l'integrale y della (1) può sempre riguardarsi come composto di due parti Y e Y_X, venendo così a porsi sotto la forma

$$y = Y + Y_X, \tag{7}$$

nella quale la prima parte Y è data dalla formola

$$\left.\begin{aligned}
Y = {} & \varepsilon_{n-1} \frac{Q_{c,x}}{(a_0 Q)_x} + \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x \frac{Q_{c,x_1} \mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} d\, x_1 + \\
& + \frac{\varepsilon_{n-1}^3}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} d\, x_1 \int_\alpha^{x_1} \frac{Q_{c,x_2} \mathfrak{q}_{x_1,x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} d\, x_2 + \\
& + \frac{\varepsilon_{n-1}^4}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} d\, x_1 \int_\alpha^{x_1} \frac{\mathfrak{q}_{x_1,x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} d\, x_2 \int_\alpha^{x_2} \frac{Q_{c,x_3} \mathfrak{q}_{x_2,x_3}}{(a_0 Q)_{x_3}} d\, x_3 + \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots + \\
& + \frac{\varepsilon_{n-1}^{n+1}}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} d\, x_1 \int_\alpha^{x_1} \frac{\mathfrak{q}_{x_1,x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} d\, x_2 \int_\alpha^{x_2} \frac{\mathfrak{q}_{x_2,x_3}}{(a_0 Q)_{x_3}} d\, x_3 \int_\alpha^{x_3} \cdots \int_\alpha^{x_{m-1}} \frac{Q_{c,x_m} \mathfrak{q}_{x_{m-1},x_m}}{(a_0 Q)_{x_m}} d\, x_m + \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

e corrisponde quindi all'integrale generale della equazione (1) ridotta omogenea col porvi $X = 0$, e per l'altra parte Y_X si ha

$$\left.\begin{aligned}
Y_X = {} & \frac{\varepsilon_{n-1}}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x X_{x_1} q_{x,x_1} d\, x_1 + \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} d\, x_1 \int_\alpha^{x_1} X_{x_2} q_{x_1,x_2} d\, x_2 + \\
& + \frac{\varepsilon_{n-1}^3}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} d\, x_1 \int_\alpha^{x_1} \frac{\mathfrak{q}_{x_1,x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} d\, x_2 \int_\alpha^{x_2} X_{x_2} q_{x_2,x_3} d\, x_3 + \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots + \\
& + \frac{\varepsilon_{n-1}^m}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} d\, x_1 \int_\alpha^{x_1} \frac{\mathfrak{q}_{x_1,x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} d\, x_2 \int_\alpha^{x_2} \frac{\mathfrak{q}_{x_2,x_3}}{(a_0 Q)_{x_3}} d\, x_3 \int_\alpha^{x_3} \cdots \int_\alpha^{x_{m-1}} X_{x_m} q_{x_{m-1},x_m} d\, x_m + \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ;
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

e questa corrisponde evidentemente a un integrale particolare della equazione completa data (1).

3. E anche per ciascuna di queste due parti Y e Y_X si hanno equazioni integrali colle formole

$$\left.\begin{aligned} Y &= \varepsilon_{n-1}\frac{Q_{c,x}}{(a_0 Q)_x} + \frac{\varepsilon_{n-1}}{(a_0 Q)_x}\int_\alpha^x \mathfrak{q}_{x,x_1} Y_{x_1}\, d\, x_1\,, \\ Y_X &= \frac{\varepsilon_{n-1}}{(a_0 Q)_x}\int_\alpha^x X_{x_1}\, q_{x,x_1}\, d\, x_1 + \frac{\varepsilon_{n-1}}{(a_0 Q)_x}\int_\alpha^x \mathfrak{q}_{x,x_1}\,(Y_X)_{x_1}\, d\, x_1\,; \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

e siccome evidentemente le derivate rispetto ad x di q_{x,x_1} fino alla $(n-1)^a$ inclusive sono tutte zero per $x_1 = x$, e la n^a è uguale a $\varepsilon_{n-1}\, Q$, basterà derivare successivamente la seconda di queste formole (10), o anche la precedente (9) coll'osservare che alla serie del secondo membro possono applicarsi le derivazioni almeno fino all'n^a inclusive, per dedurne subito anche che l'integrale particolare Y_X della equazione completa (1) è quello che gode della particolarità notevole di essere zero per $x = \alpha$ insieme alle sue derivate fino alle $(n-1)^a$ inclusive, mentre l'n^a è $\dfrac{X(\alpha)}{a_0(\alpha)}$.

4. E qui è da osservare che l'integrale particolare $\overline{Y}$ della equazione completa (1) che si dà ordinariamente nei trattati trovandolo col metodo della variazione delle costanti arbitrarie, è quello pel quale, essendo $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un sistema qualsiasi d'integrali fondamentali della equazione omogenea e D il determinante fondamentale, si ha la formola

$$\overline{Y} = \Sigma\, y_s \int \frac{X\, D_{s,n}}{a_0\, D}\, d\, x,$$

dove $D_{s,n}$ è l'elemento reciproco di $y_s^{(n-1)}$ in D; e quando in esso s'intenda che gli integrali siano tutti estesi fra α e x, questo integrale viene a godere della stessa particolarità dell'integrale Y_X che abbiamo dato sopra, giacchè evidentemente si hanno per esso le formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{Y} &= \Sigma\, y_s \int_\alpha^x \frac{X D_{s,n}}{a_0 D}\, d\,x = \int_\alpha^x \frac{X_{x_1} D_{x_1,x}}{(a_0 D)_{x_1}}\, d\,x_1,\\
\overline{Y}' &= \Sigma\, y'_s \int_\alpha^x \frac{X D_{s,n}}{a_0 D}\, d\,x = \int_\alpha^x \frac{X_{x_1} D'_{x_1,x}}{(a_0 D)_{x_1}}\, d\,x_1,\\
\overline{Y}'' &= \Sigma\, y''_s \int_\alpha^x \frac{X D_{s,n}}{a_0 D}\, d\,x = \int_\alpha^x \frac{X_{x_1} D''_{x_1,x}}{(a_0 D)_{x_1}}\, d\,x_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\overline{Y}^{(n-1)} &= \Sigma\, y_s^{(n-1)} \int_\alpha^x \frac{X D_{s,n}}{a_0 D}\, d\,x = \int_\alpha^x \frac{X_{x_1} D^{(n-1)}_{x_1,x}}{a_0 D}\, d\,x_1,\\
\overline{Y}^{(n)} &= \Sigma\, y_s^{(n)} \int_\alpha^x \frac{X D_{s,n}}{a_0 D}\, d\,x + \frac{X}{a_0} = \int_\alpha^x \frac{X_{x_1} D^{(n)}_{x_1,x}}{a_0 D}\, d\,x_1 + \frac{X}{a_0},
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

dove con $D_{x_1\,x}$ abbiamo indicato ciò che diviene D quando in essò nell'ultima colonna a $y_1^{(n-1)}, y_2^{(n-1)}, \ldots, y_n^{(n-1)}$ si sostituiscono $y_1, y_2, \ldots, y_n$ e negli altri elementi a x s'intende sostituito x_1, e $D'_{x_1\,x}$, $D''_{x_1,x}, \ldots, D^{(n)}_{x_1,x}$ rappresentano le derivate di $D_{x_1.x}$ rispetto ad x.

Segue da ciò evidentemente che quando i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ e X fra a e b sono regolari, e a_0 è diverso da zero, e in $\overline{Y}$ le integrazioni si intendono tutte limitate fra α e x, i due integrali Y_X e $\overline{Y}$ della equazione completa (1) sono gli stessi (*), e si ha $Y_X = \overline{Y}$ qualunque siano le funzioni

(*) Poichè ammettiamo che a_0 sia diverso da zero per $x=\alpha$, il fissare per la equazione data (1) il valore dell'integrale e quelli della sua derivata fino alla $(n-1)^a$ nello stesso punto α, *nel quale* a_0 *non è zero,* determina completamente l'integrale, poichè se esistessero due di tali integrali distinti se ne avrebbe uno y_0 per la equazione omogenea corrispondente che per $x=\alpha$ sarebbe zero insieme alle sue prime $n-1$ derivate; e poichè dovremmo pure avere

$$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$$

colle $c_1, c_2, \ldots, c_n$ costanti, e le $y_1, y_2, \ldots, y_n$ integrali fondamentali il cui determinante $D = D_0\, a^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}$ (D_0 cost.) è diverso da zero per $x=\alpha$, basterebbe fare $y=\alpha$ in questa ausiliarie $z_1, z_2, \ldots, z_n$, e qualunque sia il sistema d'integrali fondamentali $y_1, y_2, \ldots, y_n$ della equazione omogenea dai quali si parte per la determinazione di $\overline{Y}$; talchè si hanno infinite relazioni fra questi sistemi di funzioni.

5. Del resto, potendo sempre prendere in tutti questi studii per le funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \ldots, z_n$ infiniti sistemi di funzioni, pei quali non si hanno altro che le condizioni di essere regolari fra a e b e di avere il loro determinante Q diverso da zero, tutte le formole che abbiamo dato, collo scegliere in modi diversi queste funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_n$ e col prendere ogni volta per le costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ valori adattati, conducono ad altrettante relazioni notevoli fra le funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_n$ e $y_1, y, \ldots, y_n$ e X; e in particolare quando per le funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_n$ si prendano quelle $y_1, y_2, \ldots, y_n$ che costituiscono il sistema d'integrali fondamentali che si vuole considerare, si ottengono sempre relazioni fra questi integrali fondamentali.

6. Giova ora anche osservare che nelle formole dei paragrafi precedenti è sempre supposto che nell'intervallo (a, b) nel quale s'intendono considerati i nostri integrali, il coefficiente a_0 si mantenga diverso da zero; però talvolta questo non accade, e allora le formole stesse possono presentarsi sotto forma illusoria.

In vista di questo, ai §§ 17 e seg. della seconda delle mie Memorie citate, con riferirmi allora anche a quanto avevo fatto osservare ai §§ 10 e 11 della prima, io esposi alcune considerazioni anche pel caso in cui a_0 diviene zero in un punto fra a e b che può sempre supporsi essere il punto α; e tali considerazioni valsero a assicurare che in molti casi si hanno ancora integrali *particolari* che si mantengono regolari anche nell'intorno del punto α nel quale $a_0 = 0$, e pei quali valgono sempre le formole precedenti. Ora poi, a complemento di quanto allora esponemmo daremo dei casi estesissimi nei quali, malgrado la presenza di un infinitesimo di a_0 nell'intervallo che si considera, si hanno ancora integrali che nell'intorno del punto d'infinitesimo si mantengono regolari (nel senso qui inteso § 1) (*).

---

espressione di y_0 e in quelle delle sue prime $n-1$ derivate per concluderne subito che

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0,$$

e quindi $y_0 = 0$.

(*) Fuchs, nei suoi celebri studii sulle equazioni differenziali lineari dette già la condizione necessaria e sufficiente perchè queste equazioni abbiano tutti i loro integrali regolari, *attribuendo però a questa parola un significato diverso dal nostro;* ma egli suppose che i coefficienti della equazione fossero funzioni analitiche di x, mentre qui si suppone

7. Supporremo per semplicità che il punto d'infinitesimo di a_0 fra a e b sia il punto α, e indicheremo ancora come nelle Memorie citate con Θ_n il determinante

$$\begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & z''_1 & \dots & z_1^{(n-2)} & \theta_1 \\ z_2 & z'_2 & z''_2 & \dots & z_2^{(n-2)} & \theta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n & z'_n & z''_n & \dots & z_n^{(n-3)} & \theta_n \end{vmatrix}$$

dal quale si ottengono i soliti tre Q_c, q_{x,x_1} e $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ che figurano nelle nostre formole, col porvi invece delle $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ respettivamente le costanti c_1, $c_2, \dots, c_n$ quando si vuole Q_c, e le quantità $z_1, z_2, \dots, z_n$ e le $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ nelle quali sia posto x_1 al posto di x quando si vogliano $q_{x\,x_1}$, e $\mathfrak{q}_{x,x_1}$; e ricorderemo che al § 15 della seconda di quelle Memorie già trovammo che se si prendono $z_1 = 1$, $z_2 = x - \alpha$, $z_3 = (x-\alpha)^2, \dots, z_{n-1} = (x-\alpha)^{n-2}$ e si lascia indeterminata z_n si ha la formola

$$\left.\begin{aligned} \Theta_n = \varepsilon_{n-1}\,\bar{\pi}_{n-2} \Bigg\{ & z_n^{(n-2)} \sum_1^{n-1} \varepsilon_{s-1} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\,\pi(n-s-1)} (x-\alpha)^{n-s-1} + \\ & + \varepsilon_1 z_n^{(n-3)} \sum_1^{n-2} \varepsilon_{s-1} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\,\pi(n-s-2)} (x-\alpha)^{n-s-2} + \\ & + \varepsilon_2 z_n^{(n-4)} \sum_1^{n-3} \varepsilon_{s-1} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\,\pi(n-s-3)} (x-\alpha)^{n-s-3} + \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots + \\ & + \varepsilon_{n-2} z_n \sum_1^{1} \varepsilon_{s-1} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\,\pi(1-s)} (x-\alpha)^{1-s} + \varepsilon_{n-1}\theta_n \Bigg\}, \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

dove $\bar{\pi}_{n-2} = \pi(0)\,\pi(1)\,\pi(2)\dots\pi(n-2)$; e allora sarà $Q = \bar{\pi}_{n-2}\, z_n^{(n-1)}$, essendo il z_n ancora da determinarsi.

Ora ammettendo, come già abbiamo detto che a_0 sia infinitesimo per $x = \alpha$, ci limiteremo a considerare il caso in cui esso sia infinitesimo di un certo ordine determinato p, e per modo che sia $a_0 = (x-\alpha)^p\,\theta_0(x)$, essendo

---

soltanto che siano funzioni regolari nel senso da noi indicato in principio, cioè che nell'intervallo (a, b) nel quale si considerano siano finite, continue e derivabili almeno fino a quell'ordine pel quale occorre di considerare le loro derivate, bastando ordinariamente che le ultime derivate siano finite e integrabili fra a e b, e talvolta anche potendo essere infinite, purchè sempre integrabili anche quando si riducono ai loro valori assoluti.

$\theta_0(x)$ una funzione di x che nel punto α è finita, continua e diversa da zero ed ha anche le derivate almeno fino a quelle dell'ordine n, per le ultime delle quali però, cioè per le n^e, senza richiedere che siano continue, richiederemo, per semplicizzare i nostri studii, che siano finite e integrabili fra a e b.

E ammesso questo, si vedrà subito che, onde nelle nostre formole i denominatori $a_0 Q$ siano finiti e diversi da zero, basterà determinare z_n partendo dalla formola $z_n^{(n-1)} = \dfrac{1}{\pi_{n-2}(x-\alpha)^p}$ (*), e facendo successive integrazioni. E ciò qualunque siano nell'intorno del punto $x=\alpha$ gli altri coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ della nostra equazione pei quali porremo soltanto in seguito alcune condizioni, senza escludere ora che possano anche divenire infiniti nello stesso punto α.

Determinato così il z_n, avremo intanto $a_0 Q = \theta_0(x)$, e le formole precedenti ci permetteranno di determinare subito anche Q_c, $q_{x.x_1}$ e $\mathfrak{q}_{x x_1}$; ma noi limitandoci, come ora faremo, alle equazioni omogenee, non avremo bisogno di occuparci del $q_{x.x_1}$.

Ora, rispetto a Q_c osserveremo che per la (12), dipendentemente dall'ordine d'infinitesimo p di a_0, esso potrà avere dei termini che divengono infiniti per $x=\alpha$, ed anzi, almeno ordinariamente, lo saranno tutti, all'infuori di quello che porta c_n, se l'ordine d'infinitesimo di a_0 sarà uguale o superiore a $n-1$; noi perciò per non incontrare questa difficoltà ci limiteremo senz'altro all'integrale particolare pel quale $c_1 = c_2 = \cdots = c_{n-1} = 0$, prendendo poi per semplicità $c_n = \dfrac{1}{\pi_{n-2}}$, con che sarà $Q_c = 1$.

Osservando poi che il polinomio aggiunto Z in generale è dato dalla formola

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{n-1} Z = (a_0 z)^{(n)} + \varepsilon_1 (a_1 z)^{(n-1)} + \varepsilon_2 (a_2 z)^{(n-2)} + \cdots + \\ + \varepsilon_{n-1}(a_{n-1} z)' + \varepsilon_n (a_n z), \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

(*) Nel § 17 della seconda delle Memorie citate, volendo che nelle nostre formole fosse $a_0 Q = 1$, fu determinato z_n colla condizione $z_n^{(n-1)} = \dfrac{1}{\pi_{n-2}\, a_0}$; ma più generalmente avrebbe anche potuto determinarsi colle formole $z_n^{(n-1)} = \dfrac{1}{\pi_{n-2}\, a_0^k}$, con k numero qualsiasi, e allora sarebbe stato $a_0 Q = a_0^{1-k}$. Qui le cose restano più semplici determinando z_n colla formola $z_n^{(n-1)} = \dfrac{1}{\pi_{n-2}(x-\alpha)^p}$.

si vede che delle quantità $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-1}, Z_n$ che dovremo porre in Θ_n al posto delle $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}, \theta_n$, dopo di avervi cambiato x in x_1, per avere $\mathfrak{q}_{x,x_1}$, le prime $n-1$ saranno sempre finite se tali saranno i coefficienti della equazione data, e quelle delle loro derivate che occorre di considerare; ma anche in questo caso l'ultima Z_n, a causa del valore che avrà z_n, potrà avere uno o più termini che divengono infiniti per $x=\alpha$.

D'altra parte nel caso nostro ogni termine della serie che deve ancora rappresentare l'integrale sarà della forma

$$\int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)}\, d\, x_1 \int_\alpha^{x_1} \frac{\mathfrak{q}_{x_1,x_2}}{\theta_0(x_2)}\, d\, x_2 \int_\alpha^{x_2} \cdots \int_\alpha^{x_{m-1}} \frac{\mathfrak{q}_{x_{m-1},x_m}}{\theta_0(x_m)}\, d\, x_m, \tag{14}$$

e quindi onde essere sicuri che in un certo intorno di α questi termini conservano un significato, e costituiscono una serie convergente, basterà trovare dei casi nei quali è certo che le quantità $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ sono ancora sempre inferiori a un numero finito, o almeno sono tali che i termini stessi si comportino ancora come quelli di una serie esponenziale, o anche soltanto, più generalmente, sono tali che i varii integrali successivi

$$\int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)}\, d\, x_1, \quad \int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)}\, d\, x_1 \int_\alpha^{x_1} \frac{\mathfrak{q}_{x_1,x_2}}{\theta_0(x_2)}\, d\, x_2, \ldots \tag{15}$$

risultino tutti numericamente inferiori ai termini di una serie convergente.

8. Tratteremo quest'ultimo caso che comprende naturalmente anche gli altri due, e per questo incominceremo col premettere una formola generale relativa agli integrali $\int_\alpha^x \mathfrak{q}_{x,x_1}\, d\, x_1$, e per la quale non si richiede neppure che le $z_1, z_2, \ldots, z_n$ vengano fissate come nel paragrafo precedente, ma si suppone solo, in modo generale, che esse siano tali che, se anche divengono infinite per $x=\alpha$, per ciascuna di esse z_s la funzione corrispondente Z_s risulti integrabile fra α e x, come appunto dovranno poi essere sempre le Z_s nel caso nostro.

Osservando che pel valore di Z si ha la formola generale (13), e che in conseguenza la espressione

$$(a_0 z_s)^{(n-1)} + \varepsilon_1 (a_1 z_s)^{(n-2)} + \varepsilon_2 (a_2 z_s)^{(n-3)} + \cdots + \varepsilon_{n-1}(a_{n-1} z_s) + \varepsilon_n \int a_n z_s\, d\, x_1 \tag{16}$$

rappresenta l'integrale indefinito $\varepsilon_{n-1}\int Z_s\,d\,x$, si potrà affermare, dietro le nostre ipotesi, che questa espressione dovrà avere un valore determinato anche per $x=\alpha$, che noi indicheremo con τ_s; e siccome in generale si ha evidentemente

$$\int_\alpha^x \mathfrak{q}_{x,x_1}\,d\,x_1 = \begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & z''_1 & \ldots z_1^{(n-2)} & \int_\alpha^x Z_1\,d\,x \\ z_2 & z'_2 & z''_2 & \ldots z_2^{(n-2)} & \int_\alpha^x Z_2\,d\,x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n-1} & z'_{n-1} & z''_{n-1} & \ldots z_{n-1}^{(n-2)} & \int_\alpha^x Z_{n-1}\,d\,x \\ z_n & z'_n & z''_n & \ldots z_n^{(n-2)} & \int_\alpha^x Z_n\,d\,x \end{vmatrix},$$

avremo allora

$$\int_\alpha^x \mathfrak{q}_{x.x_1}\,d\,x_1 = \varepsilon_{n+1} \begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & z''_1 & \ldots z_1^{(n-2)} & (a_0 z_1)^{(n-1)} + \varepsilon_1 (a_1 z_1)^{(n-2)} + \cdots + \\ & & & & + \varepsilon_{n-1}(a_{n-1} z_1) + \varepsilon_n \int a_n z_1\,d\,x - \tau_1 \\ z_2 & z'_2 & z''_2 & \ldots z_2^{(n-2)} & (a_0 z_2)^{(n-1)} + \varepsilon_1 (a_1 z_1)^{(n-2)} + \cdots + \\ & & & & + \varepsilon_{n-1}(a_{n-1} z_2) + \varepsilon_n \int a_n z_2\,d\,x - \tau_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n-1} & z'_{n-1} & z''_{n-1} & \ldots z_{n-1}^{(n-2)} & (a_0 z_{n-1})^{(n-1)} + \varepsilon_1 (a_1 z_{-1})^{(n-2)} + \cdots + \\ & & & & + \varepsilon_{n-1}(a_{n-1} z_{n-1}) + \varepsilon_n \int a_n z_{n-1}\,d\,x - \tau_{n-1} \\ z_n & z'_n & z''_n & \ldots z_n^{(n-2)} & (a_0 z_n)^{(n-1)} + \varepsilon_1 (a_1 z_n)^{(n-2)} + \cdots + \\ & & & & + \varepsilon_{n-1}(a_{n-1} z_n) + \varepsilon_n \int a_n z_n\,d\,x - \tau_n \end{vmatrix}$$

e quindi applicando ai termini degli elementi dell'ultima colonna la formola di Leibnitz, e spezzando il determinante in altri colle regole note, giungeremo subito alla formola generale seguente

$$\int_\alpha^x q_{x.x_1}\,d\,x_1 = \varepsilon_{n+1}\,Q - \begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & z''_1 & \ldots z_1^{(n-2)} & \int a_n z_1\,d\,x - \varepsilon_n \tau_1 \\ z_2 & z'_2 & z''_2 & \ldots z_2^{(n-2)} & \int a_n z_2\,d\,x - \varepsilon_n \tau_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ z_{n-1} & z'_{n-1} & z''_{n-1} & \ldots z_{n-1}^{(n-2)} & \int a_n z_{n-1}\,d\,x - \varepsilon_n \tau_{n-1} \\ z_n & z'_n & z''_n & \ldots z_n^{(n-2)} & \int a_n z_n\,d\,x - \varepsilon_n \tau_n \end{vmatrix}, \tag{17}$$

che è quella appunto che volevamo trovare.

9. Premessa questa formola generale che è anche assai notevole, torniamo al caso che dobbiamo studiare, rendendo però prima le nostre formole più generali mediante l'osservazione fatta in fine del § 1, col sostituire cioè alla nostra equazione quella che si ottiene moltiplicandola per una potenza qualsiasi $(x-\alpha)^k$ di $x-\alpha$; e continuando a rappresentare ancora con a_0, a_1, $a_2,\ldots$, a_n i coefficienti della nuova equazione, indichiamo con i il nuovo ordine d'infinitesimo di a_0 (che potrà essere anche d'infinito perchè i potrà risultare negativo) per modo che si abbia ora $a_0=(x-\alpha)^i\,\theta_0(x)$, conservando $\theta_0(x)$ le proprietà indicate sopra.

E essendo a_0 infinitesimo (o infinito) per $x=\alpha$ di ordine i, ci limiteremo a considerare il caso in cui a_1, $a_2,\ldots$, $a_h,\ldots$, a_{n-1} siano infinitesimi almeno (o infiniti al più) degli ordini $i-1$, $i-2,\ldots$, $i-h,\ldots$, $i-(n-1)$ rispettivamente; e per a_n ci limiteremo per ora a supporre che sia integrabile fra a e b insieme ai prodotti $a_n z_s$ anche ridotti ai loro valori assoluti $|a_n z_s|$.

E ammetteremo anche che in generale per $h\leq n-1$ si possa scrivere $a_h=(x-\alpha)^{i-h}\,\theta_h(x)$, essendo $\theta_h(x)$ una funzione finita, continua e derivabile fra a e b almeno fino all'ordine $n-h$, bastando però che le ultime derivate di ordine $n-h$ siano finite e integrabili fra a e b (*); e indicheremo

(*) Se i si supponesse intero, e anche per a_n si ammettesse di avere

$$a_n=(x-\alpha)^{i-n}\,\theta_n(x),$$

e le $\theta_s(x)$ si supponessero tutte funzioni analitiche di x ricadremmo nel caso di Fuchs; ma qui ci limitiamo a fare le ipotesi meno restrittive che abbiamo fatte sopra.

Aggiungiamo che gli studii che ora facciamo, e le formole che si trovano valgono sempre con $\overline{a}(x)$ l'integrale $\int_\alpha^x |a_n z_n| dx$, con chè $\overline{a}(x)$ sarà una funzione di x, positiva per $x > \alpha$, e negativa per $x < \alpha$, che non sarà mai decrescente e tenderà a zero coll'avvicinarsi indefinito di x ad α; e in particolare, nel caso di $a_n z_n$ sempre inferiore in valore assoluto a un numero finito, $\overline{a}(x)$ sarà della forma $(x-\alpha) d$, con d pure numericamente inferiore a un numero finito.

10. Ciò posto, incominciamo dal considerare il caso di $i > n-1$, e allora le $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ saranno tutte finite per $x = \alpha$, e con

$$z_1 = 1, \quad z_2 = x - \alpha, \quad z_3 = (x-\alpha)^2, \ldots, \quad z_{n-1} = (x-\alpha)^{n-2},$$

potremo prendere $z_n = p_n (x-\alpha)^{n-1-i}$, dove

$$p_n = \frac{1}{\pi_{n-2}(1-i)(2-i)\ldots(n-1-i)},$$

e avremo in generale

$$a_0 z_s = (x-\alpha)^{i+s-1}\theta_0(x), \quad a_1 z_s = (x-\alpha)^{i+s-2}\theta_1(x), \ldots,$$
$$a_{n-1} z_s = (x-\alpha)^{i-n+s}\theta_{n-1}(x)$$

per $s \leqq n-1$, e al tempo stesso

$$a_0 z_n = p_n (x-\alpha)^{n-1}\theta_0(x), \quad a_1 z_n = p_n (x-\alpha)^{n-2}\theta_1(x), \ldots,$$
$$a_{n-1} z_n = p_n \theta_{n-1}(x);$$

e quindi per la formola (13) le $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ saranno tutte integrabili se

---

anche pel caso che per la equazione data il punto α non sia un punto d'infinitesimo di a_0 e sia un punto ordinario, essendo al solito gli altri coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ regolari nell'intorno di α; perchè anche in questo caso moltiplicando tutta la equazione per $(x-\alpha)^i$ con $i \geqq n-1$ essa si ridurrà ad avere il coefficiente del primo termine infinitesimo di ordine i, e gli altri saranno finiti, e si potranno ancora porre sotto la forma

$$(x-\alpha)^{i-1}\theta_1(x), \ (x-\alpha)^{i-2}\theta_2(x), \ldots, \ (x-\alpha)^{i-(n-1)}\theta_{n-1}(x),$$

essendo però allora le $\theta_1(\alpha), \theta_2(\alpha), \ldots, \theta_{n-1}(\alpha)$ tutte zero, e solo il $\theta_0(\alpha)$ essendo diverso da zero.

lo saranno i prodotti $a_n z_1$, $a_n z_2, \ldots,$ $a_n z_n$, e allora gli elementi dell'ultima colonna del determinante che figura nella (17) diverranno rispettivamente $\int_\alpha^x a_n z_1 \, dx$, $\int_\alpha^x a_n z_2 \, dx, \ldots,$ $\int_\alpha^x a_n z_n \, dx - \varepsilon_n \tau_n$, essendo τ_n il valore della espressione

$$(a_0 z_n)^{(n-1)} + \varepsilon_1 (a_1 z_n)^{(n-2)} + \cdots + \varepsilon_{n-1} (a_{n-1} z_n)$$

per $x = \alpha$.

Ma quando sia ammesso che $a_n z_n$ sia integrabile da α ad x anche ridotto ai suoi valori assoluti $|a_n z_n|$, le altre quantità $a_n z_1$, $a_n z_2, \ldots,$ $a_n z_{n-1}$ non solo saranno integrabili, ma si avrà anche in generale

$$\int_\alpha^x a_n z_s \, dx = \int_\alpha^x \frac{z_s}{z_n} a_n z_n \, dx = \frac{1}{p_n} (\bar{x} - \alpha)^{i+s-n} \int_\alpha^x |a_n z_n| \, dx,$$

essendo $\bar{x}$ un valore compreso fra α e x, e sarà quindi anche

$$\int_\alpha^x a_n z_s \, dx = \frac{\eta_s}{p_n} (x - \alpha)^{i+s-n} \int_\alpha^x |a_n z_n| \, dx,$$

dove η_s in valore assoluto non passa l'unità; e quindi per essere ora $a_0 Q = \theta_0 (x)$, la formola (17) ci darà la seguente

$$\int_\alpha^x \mathfrak{q}_{x, x_1} \, dx_1 = \varepsilon_{n+1} \theta_0 (x) + \varepsilon_n \bar{\pi}_{n-2} \tau_n -$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \eta_1 (x - \alpha)^{i+1-n} \\ x - \alpha & \pi(1) & \ldots & 0 & \eta_2 (x - \alpha)^{i+2-n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (x - \alpha)^{n-2} & (n-2)(x - \alpha)^{n-3} & \ldots \pi(n-2) & & \eta_{n-1} (x - \alpha)^{i-1} \\ z_n & z'_n & \ldots & z_n^{(n-2)} & 1 \end{vmatrix} \int_\alpha^x |a_n z_n|_{x_1} \, dx_1,$$

e di qui, osservando che pel determinante che figura in questa formola, quando vi si pongano per z_n, z'_n, $z''_n, \ldots,$ $z_n^{(n-2)}$ i loro valori, e vi si applichi la formola (12), o se ne faccia lo sviluppo secondo i termini della ultima linea, si trova che il suo valore è sempre numericamente inferiore a un numero finito, si potrà scrivere senz'altro

$$\int_\alpha^x \mathfrak{q}_{x,x_1}\, d\, x_1 = \varepsilon_{n+1}\, \theta_0\,(x) + \varepsilon_n\, \overline{\pi}_{n-2}\, \tau_n + g\, \overline{a}\,(x),$$

essendo g sempre numericamente inferiore a un numero finito.

Osservando poi che colla integrazione per parti si ha

$$\int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0\,(x_1)}\, d\, x_1 = \frac{1}{\theta_0\,(x)} \int_\alpha^x \mathfrak{q}_{x,x_1}\, d\, x_1 - \int_\alpha^x \left[\frac{1}{\theta_0(x)}\right]' \left(\int_\alpha^x \mathfrak{q}_{x,x_1}\, d\, x_1\right) d\, x,$$

e quindi anche

$$\int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0\,(x_1)}\, d\, x_1 = \frac{1}{\theta_0\,(x)} \int_\alpha^x \mathfrak{q}_{x,x_1}\, d\, x_1 - \left\{ \left[\frac{1}{\theta\,(x)}\right]' \int_\alpha^x \mathfrak{q}_{x,x_1}\, d\, x_1 \right\}_{x=\overline{x}} (x-\alpha),$$

essendo $\overline{x}$ un valore compreso fra α e x, basterà sostituire nel primo termine di questa per $\int_\alpha^x \mathfrak{q}_{x,x_1}\, d\, x_1$ il valore precedente, e osservare che

$$\frac{1}{\theta_0\,(x)} = \frac{1}{\theta_0\,(\alpha)} + \left[\frac{1}{\theta\,(x)}\right]'_{x=\overline{\overline{x}}} (x-\alpha),$$

essendo $\overline{\overline{x}}$ un altro valore compreso fra α e x, per dedurne subito che

$$\int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0\,(x_1)}\, d\, x_1 = \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_n\, \frac{\overline{\pi}_{n-2}\, \tau_n}{\theta_0\,(\alpha)} + g_1\, \overline{a}\,(x) + (x-\alpha)\, d\,,$$

d e $g_1 = \frac{g}{\theta_0\,(\alpha)}$ avendo la solita particolarità di mantenersi sempre in valore assoluto inferiori a quantità finite d_0 e g_0, per modo che si potrà scrivere

$$\int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0\,(x_1)}\, d\, x_1 = \varepsilon_{n+1}\left(1 - \frac{\overline{\tau}_{n-2}\, \tau_n}{\theta_0\,(\alpha)}\right) + \lambda_0\, g_0\, \overline{a}\,(x) + \lambda_1\, d_0\,(x-\alpha), \qquad (18)$$

essendo λ_0 e λ_1 quantità comprese fra -1 e 1; quindi osservando anche che il prodotto $a_n\, z_n$ riportato ai coefficienti della equazione data, cioè di quella che si aveva prima di moltiplicarla per $(x-\alpha)^k$, può scriversi sotto la forma

$p_n \theta_0(x) \frac{a_n}{a_0}(x-\alpha)^{n-1}$, si conclude ora che, nel caso di $i > n-1$, onde la funzione $\frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)}$ sia integrabile rispetto ad x_1 da α ad x basterà che sia tale la espressione $\frac{a_n}{a_0}(x-\alpha)^{n-1}$ anche riducendola ai suoi valori assoluti, e allora si avrà la formola precedente (18).

E quando (come dovrà in particolare avvenire se $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ dovrà essere sempre numericamente inferiore a un numero finito) si voglia anche che l'integrale $\int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)} d\,x_1$ tenda a zero coll'avvicinarsi indefinito di x ad α, allora bisognerà che la quantità $1 - \bar{\pi}_{n-2} \frac{\tau_n}{\theta_0(\alpha)}$ sia zero, cioè che si abbia

$$1 - \frac{\bar{\pi}_{n-2}}{\theta_0(\alpha)} \left\{ (a_0 z_n)^{(n-1)} + \varepsilon_1 (a_1 z_n)^{(n-2)} + \varepsilon_2 (a_2 z_n)^{(n-3)} + \cdots + \varepsilon_{n-1}(a_{n-1} z_n) \right\}_{x=\alpha} = 0,$$

ovvero

$$\left.\begin{aligned} 1 - \frac{1}{(1-i)(2-i)\dots(n-1-i)\,\theta_0(\alpha)} \Big\{ \pi(n-1)\,\theta_0(\alpha) + \\ + \varepsilon_1 \pi(n-2)\,\theta_1(\alpha) + \varepsilon_2 \pi(n-3)\,\theta_2(\alpha) + \cdots + \varepsilon_{n-1}\pi(0)\,\theta_{n-1}(\alpha) \Big\} = 0; \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

e in questo caso l'integrale stesso $\int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)} d\,x_1$ anzichè sotto la forma (18) si presenterà sotto l'altra

$$\int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)} d\,x_1 = \lambda_0\, g_0\, \bar{a}(x) + \lambda_1 (x-\alpha)\, d_0 . \quad (20)$$

E, naturalmente, in quest'ultimo caso, se $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ dovrà anche essere sempre numericamente inferiore a un numero finito, almeno ordinariamente bisognerà porre anche la condizione che il prodotto $a_n z_n$, o $\theta_0(x) \frac{a_n}{a_0}(x-\alpha)^{n-1}$, oltre ad essere integrabile da α ad x, sia anche finito, nel qual caso $\bar{a}(x)$ sarà della forma $(x-\alpha)d$ con d finito.

11. Dobbiamo ora esaminare gli altri integrali successivi (15), e per questo gioverà prima trasformare la espressione di q_{x,x_1} che si ottiene dalla (12) facendovi le solite sostituzioni, e ponendovi per z_n il suo valore, cioè

$$
\left.
\begin{aligned}
q_{x,x_1} = \varepsilon_{n-1} \Bigg\{ & \frac{\varepsilon_0}{1-i} \sum_1^{n-1} \varepsilon_{s-1} \frac{(Z_s)_{x_1}}{\pi(s-1)\,\pi(n-s-1)} (x-\alpha)^{n-s-i} + \\
+ & \frac{\varepsilon_1}{(1-i)(2-i)} \sum_1^{n-2} \varepsilon_{s-1} \frac{(Z_s)_{x_1}}{\pi(s-1)\,\pi(n-s-2)} (x-\alpha)^{n-s-i} + \\
+ & \frac{\varepsilon_2}{(1-i)(2-i)(3-i)} \sum_1^{n-3} \varepsilon_{s-1} \frac{(Z_s)_{x_1}}{\pi(s-1)\,\pi(n-s-3)} (x-\alpha)^{n-s-i} + \\
+ & \cdot \;+ \\
+ & \frac{\varepsilon_{n-3}}{(1-i)(2-i)\dots(n-2-i)} \sum_1^{2} \varepsilon_{s-1} \frac{(Z_s)_{x_1}}{\pi(s-1)\,\pi(2-s)} (x-\alpha)^{n-s-i} + \\
+ & \frac{\varepsilon_{n-2}}{(1-i)(2-i)\dots(n-1-i)} \sum_1^{1} \varepsilon_{s-1} \frac{(Z_s)_{x_1}}{\pi(s-1)\,\pi(1-s)} (x-\alpha)^{n-s-i} + \varepsilon_{n-1}\,\bar{\pi}_{n-2}(Z_n)_{x_1} \Bigg\}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (21)
$$

Osserveremo perciò che da questa formola si ha l'altra

$$
\begin{aligned}
q_{x,x_1} = {} & p_1\,\varepsilon_{n-1}(Z_1)_{x_1}(x-\alpha)^{n-1-i} + p_2\,\varepsilon_{n-1}(Z_2)_{x_1}(x-\alpha)^{n-2-i} + \\
& + p_3\,\varepsilon_{n-1}(Z_3)_{x_1}(x-\alpha)^{n-3-i} + \dots + p_s\,\varepsilon_{n-1}(Z_s)\,(x-\alpha)^{n-s-i} + \dots \\
& + p_{n-1}\,\varepsilon_{n-1}(Z_{n-1})_{x_1}(x-\alpha)^{1-i} + \bar{\pi}_{n-2}(Z_n)_{x_1},
\end{aligned}
$$

dove i coefficienti p_s, per $s = 1, 2, \dots, n-1$, sono dati dalla formola

$$
\begin{aligned}
p_s = \frac{\varepsilon_{s-1}}{\pi(s-1)} \Bigg\{ & \frac{\varepsilon_{n-s-1}}{(1-i)(2-i)\dots(n-s-i)\,\pi(0)} + \frac{\varepsilon_{n-s-2}}{(1-i)(2-i)\dots(n-s-1-i)\,\pi(1)} + \\
& + \dots + \frac{\varepsilon_1}{(1-i)(2-i)\,\pi(n-s-2)} + \frac{\varepsilon_0}{(1-i)\,\pi(n-s-1)} \Bigg\},
\end{aligned}
$$

che, sommando successivamente i varii termini fra parentesi, si riduce all'altra semplicissima

$$
p_s = \frac{\varepsilon_s}{(i+s-n)\,\pi(s-1)\,\pi(n-s+1)}; \qquad (22)
$$

e quindi, siccome la formola generale (13) del valore di $\varepsilon_{n+1} Z$ ci dà per $s \leqq n-1$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{n+1}(Z_s)_{x_1} = {} & [(x_1-\alpha)^{i+s-1}\,\theta_0(x_1)]^{(n)} + \varepsilon_1\,[(x_1-\alpha)^{i+s-2}\,\theta_1(x_1)]^{(n-1)} + \dots \\
& + \varepsilon_{n-1}\,[(x_1-\alpha)^{i+s-n}\,\theta_{n-1}(x_1)]' + \varepsilon_n\,(a_n)_{x_1}(x_1-\alpha)^{s-1},
\end{aligned}
$$

e per $s=n$

$$\frac{1}{p_n}\varepsilon_{n+1}(Z_n)_{x_1}=[(x_1-\alpha)^{n-1}\theta_0(x_1)]^{(n)}+\varepsilon_1[(x_1-\alpha)^{n-2}\theta_1(x_1)]^{(n-1)}+\cdots$$
$$+\varepsilon_{n-1}[\theta_{n-1}(x_1)]'+\frac{1}{p_n}(a_n z_n)_{x_1},$$

e da queste si ha per $s\leqq n-1$

$$\varepsilon_{n+1}(Z_s)_{x_1}=c_s(i+s-n)(x_1-\alpha)^{i+s-1-n}+d_s(x_1-\alpha)^{i+s-n}+\frac{1}{p_n}(a_n z_n)_{x_1}(x_1-\alpha)^{i+s-n},$$

e per $s=n$

$$\varepsilon_{n+1}(Z_n)_{x_1}=(a_n z_n)_{x_1}+l_n,$$

dove p_n è il coefficiente numerico introdotto nel § 10, e le d_s e l_n sono quantità sempre numericamente inferiori a un numero finito, e

$$\left.\begin{aligned}c_s=(i+s-1)(i+s-2)\ldots(i+s-n+1)\theta_0(\alpha)+\\+\varepsilon_1(i+s-2)(i+s-3)\ldots(i+s-n+1)\theta_1(\alpha)+\\+\varepsilon_2(i+s-3)\ldots(i+s-n+1)\theta_2(\alpha)+\cdots+\varepsilon_{n-1}\theta_{n-1}(\alpha),\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

se ne deduce che $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ può porsi sotto la forma

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{q}_{x\,x_1}=\frac{1}{x-\alpha}\Big\{c_1 p_1(i+1-n)\left(\frac{x_1-\alpha}{x-\alpha}\right)^{i-n}+\\+c_2 p_2(i+2-n)\left(\frac{x_1-\alpha}{x-\alpha}\right)^{i+1-n}+\cdots+c_{n-1}p_{n-1}(i-1)\left(\frac{x_1-\alpha}{x-\alpha}\right)^{i-2}\Big\}+\\+l+\frac{l_1}{p_n}(a_n z_n)_{x_1},\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

ovvero

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{q}_{x\,x_1}=\frac{1}{x-\alpha}\Big\{\frac{\varepsilon_1 c_1}{\pi(0)\,\pi(n-2)}\left(\frac{x_1-\alpha}{x-\alpha}\right)^{i-n}+\\+\frac{\varepsilon_2 c_2}{\pi(1)\,\pi(n-3)}\left(\frac{x_1-\alpha}{x-\alpha}\right)^{i+1-n}+\frac{\varepsilon_3 c_3}{\pi(2)\,\pi(n-4)}\left(\frac{x_1-\alpha}{x-\alpha}\right)^{i+2-n}+\\+\cdots+\frac{\varepsilon_{n-1}c_{n-1}}{\pi(n-2)\,\pi(0)}\left(\frac{x_1-\alpha}{x-\alpha}\right)^{i-2}\Big\}+l+\frac{l_1}{p}(a_n z_n)_{x_1},\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

dove

$$l_1=p_1\left(\frac{x_1-\alpha}{x-\alpha}\right)^{i+1-n}+p_2\left(\frac{x_1-\alpha}{x-\alpha}\right)^{i+2-n}+\cdots+p_{n-1}\left(\frac{x_1-\alpha}{x-\alpha}\right)^{i-1}+\bar{\pi}_{n-2}\,p_n,$$

e l è come l_1 sempre numericamente inferiore a un numero finito.

Questa espressione (25) di $\mathfrak{q}_{x\,x_1}$, dopo di averla divisa per $\theta_0(x_1)$ coll'osservare che $\frac{1}{\theta_0(x)}=\frac{1}{\theta_0(\alpha)}+\left(\frac{1}{\theta(x)}\right)'_{x=\bar{x}}(x-\alpha)$, con $\bar{x}$ compreso fra α e x, torna a mostrarci che onde $\frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x)}$ sia integrabile da α ad x rispetto ad x_1 basta che sia tale la espressione $a_n z_n$ o $\frac{a_n}{a_0}(x-\alpha)^{n-1}$ anche riducendola ai suoi valori assoluti; e poi osservando che colla indicata integrazione il primo termine fra parentesi dà luogo al termine $\frac{P}{\theta_0(\alpha)}$, dove

$$\left.\begin{aligned} P=&\frac{\varepsilon_1 c_1}{\pi(0)\,\pi(n-2)(i+1-n)}+\frac{\varepsilon_2 c_2}{\pi(1)\,\pi(n-3)(i+2-n)}+\\ &+\frac{\varepsilon_3 c_3}{\pi(2)\,\pi(n-4)(i+3-n)}+\cdots+\frac{\varepsilon_{n-1} c_{n-1}}{\pi(n-2)\,\pi(0)(i-1)},\end{aligned}\right\}\quad(26)$$

si ritrova una formola come la (18), cioè

$$\int_\alpha^x\frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)}\,d\,x_1=\frac{P}{\theta_0(\alpha)}+\lambda_0\,g_0\,\bar{a}(x)+\lambda_1\,d_0(x-\alpha),\qquad(27)$$

dalla quale si vede anche che se si vorrà che l'integrale $\int_\alpha^x\frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)}\,d\,x_1$ tenda a zero coll'avvicinarsi indefinito di x ad α, bisognerà che sia soddisfatta la condizione $P=0$, cioè

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\varepsilon_1 c_1}{\pi(0)\,\pi(n-2)(i+1-n)}+\frac{\varepsilon_2 c_2}{\pi(1)\,\pi(n-3)(i+2-n)}+\\ &+\frac{\varepsilon_3 c_3}{\pi(2)\,\pi(n-4)(i+3-n)}+\cdots+\frac{\varepsilon_n c_{n-1}}{\pi(n-1)\,\pi(0)(i-1)}=0,\end{aligned}\right\}\quad(28)$$

la quale necessariamente non sarà che la (19) posta sotto altra forma.

Dalla stessa formola (25) poi si vede subito anche che se sarà soddisfatta questa condizione (28) o la (19), come in particolare avverrà quando siano zero tutte le $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$, allora la espressione di $\frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)}$ si ridurrà alla forma semplice $\gamma\,(a_n z_n)_{x_1}+\gamma_1$, con γ e γ_1 numericamente inferiori a numeri finiti μ e μ_1, e quindi sarà anche sempre finita se $a_n z_n$ o $\frac{a_n}{a_0}(x-\alpha)^{n-1}$ nell'intorno di α, oltre ad essere integrabile, sarà anche finita.

E se le $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ non saranno tutte zero, essendo o no soddisfatta la condizione (28), siccome il primo termine della (25) può scriversi anche sotto la forma

$$\frac{(x_1-\alpha)^{i-n}}{(x-\alpha)^{i-n+1}}\left\{P+\frac{\varepsilon_1 c_1}{\pi(0)\pi(n-2)}\left[1-\frac{1}{i+1-n}\right]+\right.$$

$$+\frac{\varepsilon_2 c_2}{\pi(1)\pi(n-3)}\left[\frac{x_1-\alpha}{x-\alpha}-\frac{1}{i+2-n}\right]+\frac{\varepsilon_3 c_3}{\pi(2)\pi(n-4)}\left[\left(\frac{x_1-\alpha}{x-\alpha}\right)^2-\frac{1}{i+3-n}\right]+$$

$$\left.+\cdots+\frac{\varepsilon_{n-1} c_{n-1}}{\pi(n-2)\pi(0)}\left[\left(\frac{x_1-\alpha}{x-\alpha}\right)^{n-2}-\frac{1}{i-1}\right]\right\},$$

e il rapporto $\frac{x_1-\alpha}{x-\alpha}$ durante le integrazioni è sempre compreso fra 0 e 1, si vede subito che se s'indicano con P', $c'_1, c'_2, \ldots, c'_{n-1}$ i valori assoluti di P, $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$, e con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}$ i massimi valori assoluti delle quantità $1-\frac{1}{i+1-n}$, $t-\frac{1}{i+2-n}$, $t^2-\frac{1}{i+3-n}, \ldots, t^{n-2}-\frac{1}{i-1}$ per t fra 0 e 1 (*), ponendo

$$\left.\begin{aligned}K&=\frac{c'_1}{\pi(0)\pi(n-2)}+\frac{c'_2}{\pi(1)\pi(n-3)}+\frac{c'_3}{\pi(2)\pi(n-4)}+\cdots+\frac{c'_{n-1}}{\pi(n-2)\pi(0)},\\K_1&=\frac{\alpha_1 c'_1}{\pi(0)\pi(n-2)}+\frac{\alpha_2 c'_2}{\pi(1)\pi(n-3)}+\frac{\alpha_3 c'_3}{\pi(2)\pi(n-4)}+\cdots+\frac{\alpha_{n-1} c'_{n-1}}{\pi(n-2)\pi(0)},\end{aligned}\right\}\quad(29)$$

il primo termine della (25) sarà numericamente inferiore alle due quantità $K\frac{(x_1-\alpha)^{i-n}}{(x-\alpha)^{i-n+1}}$, $(P'+K_1)\frac{(x_1-\alpha)^{i-n}}{(x-\alpha)^{i-n+1}}$; e quindi indicando con Ω la minore

(*) Poichè $i>n-1$ evidentemente le $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_{n-1}$ saranno sempre i valori di $1-\frac{1}{i+3-n}$, $1-\frac{1}{i+4-n}, \ldots, 1-\frac{1}{i-1}$, mentre le α_1 e α_2 per $i \geqq n$ sono i valori di $1-\frac{1}{i+1-n}$, $1-\frac{1}{i+2-n}$, e per i compreso fra $n-1$ e n (gli estremi $n-1$, e n escl.) saranno i valori di $\frac{1}{i+1-n}-1$, e $\frac{1}{i+2-n}$, per modo che le $\alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_{n-1}$, saranno sempre inferiori ad uno, mentre α_1 lo sarà solo per $i>n-\frac{1}{2}$; donde apparisce che nel caso di $i>n-\frac{1}{2}$, e anche quando i è fra $n-1$ e $n-\frac{1}{2}$ purchè allora sia $c_1=0$, sarà sempre $K_1<K$, e allora se sarà $P=0$ si potrà prendere $\Omega=K_1$.

delle due quantità K e $P' + K_1$, si potrà scrivere evidentemente per la (26)

$$\frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)} = \eta_0 \frac{\Omega}{\overline{\theta}_0(\alpha)} \frac{(x_1-\alpha)^{i-n}}{(x-\alpha)^{i-n+1}} + \gamma(a_n z_n)_{x_1} + \gamma_1, \tag{30}$$

essendo $\overline{\theta}_0(\alpha)$ il valore assoluto di $\theta_0(\alpha)$, η_0 una quantità non superiore ad uno in valore assoluto, e γ e γ_1 altre quantità sempre numericamente inferiori a numeri positivi e finiti μ e μ_1; e il caso precedente di $c_1 = 0$, $c_2 = 0, \ldots,$ $c_{n-1} = 0$ corrisponderà evidentemente a quello di $K = 0$ e $K_1 = 0$ e $\Omega = 0$.

12. Trovata questa espressione (30) per $\frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)}$, si studieranno successivamente con tutta facilità gli integrali (15).

Tenendo conto infatti della stessa formola (30) e del valore (27) di $\int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}(x,x_1)}{\theta_0(x_1)} d x_1$, nel quale siano cambiati x e x_1 in x_1 e x_2, troveremo subito

$$\int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)} d x_1 \int_\alpha^{x_1} \frac{\mathfrak{q}_{x_1,x_2}}{\theta_0(x_2)} d x_2 = \int_\alpha^x \left\{ \eta_0 \frac{\Omega}{\overline{\theta}_0(\alpha)} \frac{(x_1-\alpha)^{i-n}}{(x-\alpha)^{i-n+1}} + \gamma(a_n z_n)_{x_1} + \gamma_1 \right\} \left\{ \frac{P}{\theta_0(\alpha)} + \right.$$

$$\left. + \lambda_0 g_0 \overline{a}(x_1) + \lambda_1 d_0 (x_1 - \alpha) \right\} d x_1,$$

e supponendo ad es.: $x > \alpha$, e eseguendo i calcoli, coll'osservare che durante il corso della integrazione si ha sempre $\overline{a}(x_1) \leqq \overline{a}(x)$, troveremo con tutta facilità

$$\int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)} d x_1 \int_\alpha^{x_1} \frac{\mathfrak{q}_{x_1,x_2}}{\theta_0(x_2)} d x_2 = \frac{P}{\theta_0(\alpha)} \left\{ \eta_1 \frac{\Omega}{\overline{\theta}_0(\alpha)(i-n+1)} + \eta_2 \mu \overline{a}(x) + \eta_3 \mu_1 (x-\alpha) \right\} +$$

$$+ \overline{a}(x) g_0 \left\{ \eta_4 \frac{\Omega}{\overline{\theta}_0(\alpha)(i-n+1)} + \eta_5 \mu \overline{a}(x) + \eta_6 \mu_1 (x-\alpha) + \frac{+\eta_7 \mu d_0}{g_0}(x-\alpha) \right\} +$$

$$+ d_0 \left\{ \eta_8 \frac{\Omega}{\overline{\theta}_0(\alpha)(i-n+1)} + \eta_9 \mu_1 (x-\alpha) \right\} (x-\alpha),$$

essendo $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_9$ quantità il cui valore assoluto non passa l'unità; e quindi se fisseremo di restare con x in un intorno di α sufficientemente piccolo (ma finito), che certo esisterà, pel quale si abbia in valore assoluto

$$\mu \overline{a}(x) + \left(\mu_1 + \frac{\mu d_0}{g_0}\right)(x-\alpha) < \frac{\tau}{\overline{\theta}_0(\alpha)(i-n+1)},$$

essendo τ un numero positivo sufficientemente piccolo, avremo

$$\int_\alpha^x \frac{q_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)}\, d\, x_1 \int_\alpha^{x_1} \frac{q_{x_1,x_2}}{\theta_0(x_2)}\, d\, x_2 = \nu_0 \frac{\Omega+\tau}{\overline{\theta}_0(\alpha)(i-n+1)} \frac{P}{\theta_0(\alpha)} +$$

$$+ \nu_1\, g_0 \frac{\Omega+\tau}{\overline{\theta}_0(\alpha)(i-n+1)} \overline{a}(x) + \nu_2\, d_0 \frac{\Omega+\tau}{\theta_0(\alpha)(i-n+1)}(x-\alpha),$$

essendo ν_0, ν_1 e ν_2 nuove quantità non superiori ad uno in valore assoluto.

Di qui, osservando che il passaggio dall'integrale semplice (27) all'integrale doppio precedente, pei valori di x dell'intorno di α determinato sopra, si fa moltiplicando i tre termini del valore (27) dell'integrale semplice per $\frac{\Omega+\tau}{\overline{\theta}_0(\alpha)(i-n+1)}$ e per quantità ν_0, ν_1 e ν_2 non superiori ad uno in valore assoluto, si comprende subito che il passaggio all'integrale triplo si farà al modo stesso fra gli stessi confini per x, cioè si avrà

$$\int_\alpha^x \frac{q_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)}\, d\, x_1 \int_\alpha^{x_1} \frac{q_{x_1,x_2}}{\theta_0(x_2)}\, d\, x_2 \int_\alpha^{x_2} \frac{q_{x_2,x_3}}{\theta_0(x_3)}\, d\, x_3 = \nu'_0 \left(\frac{\Omega+\tau}{\theta(\alpha)(i-n+1)}\right)^2 \frac{P}{\theta_0(\alpha)} +$$

$$+ \nu'_1\, g_0 \left(\frac{\Omega+\tau}{\overline{\theta}_0(\alpha)(i-n+1)}\right)^2 \overline{a}(x) + \nu'_2\, d_0 \left(\frac{\Omega+\tau}{\overline{\theta}_0(\alpha)(i-n+1)}\right)^2 (x-\alpha),$$

essendo ν'_0, ν'_1 e ν'_2 nuove quantità non superiori ad uno in valore assoluto; quindi siccome questo processo può ripetersi indefinitamente, e gli integrali multipli successivi che così si determinano sono appunto gli integrali (15), si vede ora che se sarà $\frac{\Omega+\tau}{\overline{\theta}(\alpha)(i-n+1)} < 1$, o anche soltanto $\frac{\Omega}{\overline{\theta}_0(\alpha)(i-n+1)} < 1$ perchè τ può prendersi piccolo ad arbitrio, restando con x in un intorno sufficientemente piccolo (ma finito) di α la serie formata dai termini (15) si comporrà di tre serie sempre convergenti assolutamente e in ugual grado.

Ne segue dunque che se $a_n z_n$ o $\frac{a_n}{a_0}(x-\alpha)^{n-1}$ sarà integrabile nell'intorno di α anche ridotto ai valori assoluti, e se, essendo K e K_1 le quantità definite dalle (29), e P' il valore assoluto della espressione (26) di P, la minore Ω delle due quantità K e $P'+K_1$ sarà inferiore a $\overline{\theta}_0(\alpha)(i-n+1)$, la serie formata dai termini (15) sarà sempre convergente indipendentemente dall'ordine dei termini e in egual grado in un intorno sufficientemente piccolo, ma finito, di α; e questo, per quanto si disse ai §§ 10 e 11 della prima delle Memorie citate, basta per potere affermare che la detta serie rappresenterà un integrale della equazione data che sarà regolare (nel senso inteso da noi) per tutti gli indicati valori di x, eccettuato tutt'al più il punto $x = \alpha$ per le derivate.

E avendo riguardo alla forma della quantità entro la prima parentesi della (25), si vede subito che per Ω si può anche prendere in ogni caso il massimo valore assoluto della quantità

$$\frac{\varepsilon_1 c_1}{\pi(0)\pi(n-2)} + \frac{\varepsilon_2 c_2}{\pi(1)\pi(n-3)} t + \frac{\varepsilon_3 c_3}{\pi(2)\pi(n-4)} t^2 + \cdots + \frac{\varepsilon_{n-1} c_{n-1}}{\pi(n-2)\pi(0)} t^{n-2} \tag{31}$$

pei valori di t da 0 a 1 (0 e 1 incl.).

E si può altresì notare che applicando un noto teorema di Abel si vede che nella (30) si può anche intendere che Ω rappresenti un numero positivo del quale siano minori in valore assoluto le somme successive dei coefficienti delle potenze di $\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha}$ nella quantità entro la prima parentesi delle (25); e allora invece della condizione precedente $\Omega < \theta_0(\alpha)(i - n + 1)$ si trova l'altra che nessuna delle stesse somme successive di coefficienti delle (25) arrivi in valore assoluto a $(i - n + 1)\overline{\theta}_0(\alpha)$.

E aggiungiamo inoltre che se senza essere zero tutte le $c_1, c_2, \ldots, c_n$, lo saranno alcune di esse a incominciare dalla prima, p. es. le prime h, cioè c_1, $c_2, \ldots, c_h$, con $h < n - 1$, allora avendo ancora riguardo alla espressione (25) di $\mathfrak{q}_{x x_1}$ e ripetendo i ragionamenti precedenti si trova che le condizioni per essere sicuri della esistenza dell'integrale regolare delle nostre equazioni nell'intorno di $x = \alpha$ vengono meno restrittive, perchè allora basta che la quantità Ω corrispondente a questo caso risulti inferiore a $(i - n + h + 1)\overline{\theta}_0(\alpha)$; e vi ha di più che allora per Ω può prendersi il massimo valore assoluto per t fra 0 e 1 (0 e 1 incl.) della quantità cui si riduce la espressione precedente (31) dividendola per t^h.

Nel caso particolare poi in cui siano zero tutte le $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$, allora per l'esistenza dell'integrale regolare della nostra equazione nell'intorno di α non rimane altra condizione che quella relativa alla integrabilità di $a_n z_n$ o di $\frac{a_n}{a_0}(x - \alpha)^{n-1}$ anche ridotto ai valori assoluti; e se $a_n z_n$ oltre ad essere integrabile sarà anche sempre finito, con chè, come già notammo, sarà pure sempre finito $\mathfrak{q}_{x x_1}$, allora saremo anche sicuri che la serie degli integrali (15) convergerà come una serie esponenziale, e l'integrale corrispondente della nostra equazione sarà certamente regolare da α fino al primo nuovo punto d'infinitesimo che si avesse per a_0 fra a e b, se i coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_n$ non presentano essi singolarità in questo intervallo.

Oltre a ciò poi, siccome nel caso in cui le $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ sono tutte zero le formole che trovammo sopra per gli integrali (15) mostrano che tutti questi integrali tendono a zero all'avvicinarsi indefinito di x ad α, e lo stesso conseguentemente avverrà della serie da essi formata che è convergente in ugual grado nell'intorno di α, si vede che l'integrale regolare che si avrà per la nostra equazione in questo caso avrà anche la particolarità notevole di non potersi annullare per $x=\alpha$, perchè per questo valore di x si ridurrà al suo primo termine $\frac{Q_c}{a_0 Q}$ che per le nostre ipotesi è finito e diverso da zero.

13. Passiamo ora a considerare il caso di $i=n-1$, e per questo osserviamo che allora, dovendo prendere $z_n=\overline{p}_n \log(x-\alpha)$, con $\overline{p}_n=\frac{\varepsilon_n}{\pi_{n-2}\,\pi(n-2)}$, i termini della espressione (16) per $s=n$ considerati separatamente divengono tutti infiniti per $x=\alpha$; e quindi bisognerà che sia soddisfatta qualche condizione perchè la loro somma possa restare finita.

Ora evidentemente considerando uno qualunque di questi termini $(a_h z_n)^{n-h-1}$ per $h=0, 1, 2, \dots, n-1$, coll'osservare che $a_h=(x-\alpha)^{n-1-h}\,\theta_h(x)$, $z_n=\overline{p}_n \log(x-\alpha)$, si vede subito che in esso la parte che diventa infinita per $x=\alpha$ è soltanto $a_h^{(n-h-1)} z_n$; quindi supponendo anche ora, come nel caso precedente, che $a_n z_n$ sia integrabile fra α ed x anche ridotto ai suoi valori assoluti, si vede intanto che onde la espressione (16) possa restare finita per $x=\alpha$ quando $s=n$, bisogna che sia soddisfatta la condizione

$$a_0^{(n-1)}+\varepsilon_1 a_1^{(n-2)}+\varepsilon_2 a_2^{(n-3)}+\cdots+\varepsilon_{n-1} a_{n-1}=0 \quad \text{per } x=\alpha,$$

che può anche scriversi evidentemente

$$\left.\begin{aligned}\pi(n-1)\,\theta_0(\alpha)+\varepsilon_1\,\pi(n-2)\,\theta_1(\alpha)+\varepsilon_2\,\pi(n-3)\,\theta_3(\alpha)+\cdots+\\ +\varepsilon_{n-1}\,\pi(0)\,\theta_{n-1}(\alpha)=0;\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

e quando questo avvenga, se nella espressione (16) quando $s=n$ l'integrale $\int a_n z_n\,dx$ s'intenderà come al solito limitato da α ad x, τ_n avrà un significato, e sarà precisamente il limite per $x=\alpha$ di

$$(a_0 z_n)^{(n-1)}+\varepsilon_1(a_1 z_n)^{(n-2)}+\varepsilon_2(a_2 z_n)^{(n-3)}+\cdots+\varepsilon_{n-1}(a_{n-1} z_n),$$

come nel caso precedente di $i > n-1$; cioè sarà

$$\tau_n = \bar{p}_n \lim_{x=\alpha} \Big\{ \theta_0(\alpha) \left[(x-\alpha)^{n-1} \log(x-\alpha)\right]^{(n-1)} +$$

$$+ \varepsilon_1 \theta_1(\alpha) \left[(x-\alpha)^{n-2} \log(x-\alpha)\right]^{(n-2)} + \cdots + \varepsilon_{n-1} \theta_{n-1}(\alpha) \log(x-\alpha) \Big\},$$

o anche a causa della (32)

$$\tau_n = \bar{p}_n \Big\{ C_{n-1}\theta_0(\alpha) + \varepsilon_1 C_{n-2}\theta_1(\alpha) + \varepsilon_2 C_{n-2}\theta_2(\alpha) + \cdots + \varepsilon_{n-2} C_1 \theta_{n-2}(\alpha) \Big\}, \tag{33}$$

avendo indicato in generale con C_s la parte numerica che, oltre al termine $\pi(s)\log(x-\alpha)$, figura in $[(x-\alpha)^s \log(x-\alpha)]^{(s)}$.

Quanto poi alle altre τ_s corrispondenti a $s = 1, 2, \ldots, n-1$, osservando che si avrà ora

$$a_0 z_s = (x-\alpha)^{n+s-2}(\theta_0(x), \quad a_1 z_s = (z-\alpha)^{n+s-3}\theta_1(x), \ldots,$$
$$a_{n-1} z_s = (x-\alpha)^{s-1}\theta_{n-1}(x),$$

e che, per essere $a_n z_n$ integrabile anche ridotto ai valori assoluti, lo saranno a fortiori anche $a_n z_1$, $a_n z_2, \ldots, a_n z_{n-1}$, e quindi gli integrali $\int a_n z_s \, dx$ che figurano nella (17) potranno intendersi tutti estesi da α ad x, si vedrà subito che le $\tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_{n-1}$ saranno tutte zero a causa dei valori precedenti delle $a_0 z_s$, $a_1 z_s, \ldots, a_{n-1} z_s$ per $s = 2, 3, \ldots, n-1$, mentre la τ_1 sarà pure zero a causa della condizione già posta (32); e quindi osservando anche che per x sufficientemente prossimo ad α (come basta supporlo) si ha

$$\int_\alpha^x a_n z_s \, dx = \eta_s (x-\alpha)^{s-1} \int_\alpha^x | a_n \log(x-\alpha) | \, dx \quad \text{per } s = 1, 2, \ldots, n-1,$$

essendo le η_s quantità numericamente inferiori ad uno, si vede che la (17) conduce anche ora alla (18) quando in questa s'intenda che τ_n sia data dalla (33); e così, in questo caso di $i = n-1$, onde la funzione $\frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)}$ sia integrabile rispetto ad x_1 da α ad x, basterà che sia tale la funzione $a_n \log(x-\alpha)$ o $\frac{a_n}{a_0}(x-\alpha)^{n-1}\log(x-\alpha)$ anche riducendola ai suoi valori assoluti, e che al tempo stesso sia soddisfatta la condizione (32).

E quando si voglia anche che l'integrale $\int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)}\,d\,x_1$ tenda a zero coll'avvicinarsi indefinito di x ad α, allora bisognerà che sia zero anche la quantità $1-\frac{\bar{\pi}_{n-2}\,\pi_n}{\theta_0(\alpha)}$, cioè che si abbia anche la condizione

$$\left.\begin{array}{l} 1-\frac{\varepsilon_n}{\pi(n-2)\,\theta_0(\alpha)}\Big\{C_{n-1}\theta_0(\alpha)+\varepsilon_1 C_{n-2}\theta_1(\alpha)+\varepsilon_2 C_{n-3}\theta_2(\alpha)+\cdots+ \\ \qquad\qquad+\varepsilon_{n-2}C_1\theta_{n-2}(\alpha)\Big\}=0, \end{array}\right\} \quad (34)$$

che corrisponde alla (19) che avevamo nel caso di $i>n-1$, e nella quale le C_s hanno i significati che loro attribuimmo sopra, per modo che, essendo $C_1=1$, nel caso di $n=2$ questa condizione verrà soddisfatta da se.

14. Restano ora a trovarsi anche per questo caso di $i=n-1$ le condizioni che vengono dalla necessità che abbiamo che i successivi integrali (15) siano tutti numericamente inferiori ai termini di una serie convergente; e per questo procederemo ancora come nei §§ 11 e 12.

Valendosi ancora della (12) coll'osservare ai valori attuali di z_n, z'_n, $z''_n,\ldots, z_n^{(n-2)}$, si troverà che $\mathfrak{q}_{x\,x_1}$ si pone ancora sotto la forma (21) nella quale però invece degli ultimi due termini sia scritto l'altro

$$-\bar{\pi}_{n-2}\Big\{z_n\,(Z_1)_{x_1}-(Z_n)_{x_1}\Big\},$$

dove

$$z_n=\frac{\varepsilon_n}{\bar{\pi}_{n-2}\,\pi\,(n-2)}\log(x-\alpha)=\bar{p}_n\log(x-\alpha),$$

che converrà studiare a parte; e quindi, applicando le stesse trasformazioni del § 11 giungeremo per prima cosa alla formola seguente

$$\begin{aligned}\mathfrak{q}_{x,x_1}=\frac{1}{x-\alpha}\Big\{c_2\,p_2+2\,c_3\,p_3\frac{x_1-\alpha}{x-\alpha}+3\,c_4\,p_4\left(\frac{x_1-\alpha}{x-\alpha}\right)^2+\cdots+(n-2)\,c_{n-1}\,p_{n-1}\left(\frac{x_1-\alpha}{x-\alpha}\right)^{n-3}\Big\}+\\ +\varepsilon_n\,(a_n)_{x_1}\Big\{\bar{p}_1+p_2\frac{x_1-\alpha}{x-\alpha}+p_3\left(\frac{x_1-\alpha}{x-\alpha}\right)^2+\cdots+p_{n-2}\left(\frac{x_1-\alpha}{x-\alpha}\right)^{n-3}\Big\}+l_1-\\ -\bar{\pi}_{n-2}\Big\{z_n\,(Z_1)_{x_1}-(Z_n)_{x_1}\Big\},\end{aligned}$$

essendo ora l_1 una quantità sempre numericamente inferiore a un numero finito, e le $p_2, p_3, \ldots, p_{n-1}, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}$ essendo quelle stesse che vengono dalle formole (22) e (23) col farvi ora $i = n - 1$, e essendo ora $\bar{p}_1 = \frac{\varepsilon_1}{\pi(0)\,\pi(n-2)}$; e in questa formola tutti i termini mancheranno all'infuori dell'ultimo se sarà $n = 2$.

Quanto poi a questo ultimo termine $-\bar{\pi}_{n-2}\left\{ z_n (Z_1)_{x_1} - (Z_n)_{x_1} \right\}$, osserviamo che avendo riguardo al valore generale (13) di Z, e all'essere ora $z_n = \bar{p}_n \log(x - \alpha)$, con $\bar{p}_n = \frac{\varepsilon_n}{\bar{\pi}_{n-2}\,\pi(n-2)}$, si ha

$$\varepsilon_{n+1} Z_1 = a_0^{(n)} + \varepsilon_1 a_1^{(n-1)} + \cdots + \varepsilon_{n-1} a'_n + \varepsilon_n a_n ,$$

$$\varepsilon_{n+1} Z_n = \bar{p}_n \varepsilon_{n-1} Z_1 \log(x - \alpha) + \bar{p}_n \frac{c}{x - \alpha} + \bar{p}_n l_0 ,$$

essendo l_0 una quantità sempre numericamente inferiore a un numero finito, e c una costante, dipendente linearmente e in modo omogeneo dalle solite quantità $\theta_0(\alpha)$, $\theta_1(\alpha), \ldots, \theta_{n-1}(\alpha)$, che volendolo potrà facilmente determinarsi (*), e che del resto, come poi vedremo, non potrà differire che per un

---

(*) Se si osserva che sviluppando il polinomio aggiunto Z dato dalla (13) si ha, come è noto

$$\varepsilon_{n+1} Z = a_0 z^{(n)} + q_1 z^{(n-1)} + q_2 z^{(n-2)} + \ldots + q_{n-1} z' + q_n z,$$

dove in generale si ha

$$q_s = n_s a_0^{(s)} + \varepsilon_1 (n-1)_{s-1} a_1^{(s-1)} + \varepsilon_2 (n-2)_{s-2} a_2^{(s-2)} + \ldots +$$
$$+ \varepsilon_{s-1} (n - s + 1)_1 a'_{s-1} + \varepsilon_s (n-s)_0 a_s$$

si vede che sarà

$$\varepsilon_{n+1} Z_n = \bar{p}_n \varepsilon_{n-1} \left\{ \pi(n-1) \frac{a_0}{(x-\alpha)^{n-1}} + \varepsilon_1 \pi(n-2) \frac{q_1}{(x-\alpha)^{n-2}} + \varepsilon_2 \pi(n-3) \frac{q_2}{(x-\alpha)^{n-3}} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \varepsilon_{n-1} \pi(0) q_{n-1} \right\} \frac{1}{x - \alpha} + \bar{p}_n q_n \log(x - \alpha)$$

e poichè i rapporti $\frac{a_0}{(x-\alpha)^{n-1}}, \frac{q_1}{(x-\alpha)^{n-2}}, \frac{q_2}{(x-\alpha)^{n-3}}, \ldots$, sono finiti per $x = \alpha$, sarà evidentemente

$$c = \varepsilon_n \lim_{x=\alpha} \left\{ \pi(n-1) \frac{a_0}{(x-\alpha)^{n-1}} + \varepsilon_1 \pi(n-2) \frac{q_1}{(x-\alpha)^{n-2}} + \varepsilon_2 \pi(n-3) \frac{q_2}{(x-\alpha)^{n-3}} + \ldots + \varepsilon_{n-1} \pi(0) q_{n-1} \right\},$$

fattore numerico dal primo membro della (32); e quindi sarà evidentemente

$$-\bar{\pi}_{n-2}\left\{ z_n (Z_1)_{x_1} - (Z_n)_{x_1}\right\} =$$

$$=\frac{1}{\pi(n-2)}\left\{ \varepsilon_{n+1}(Z_1)_{x_1}\log(x-\alpha) - \varepsilon_{n+1}(Z_1)_{x_1}\log(x_1-\alpha) - \frac{c}{x_1-\alpha} - l_0\right\} =$$

$$=\frac{1}{\pi(n-2)}\left\{ (a_0^{(n)} + \varepsilon_1 a_1^{(n-1)} + \cdots + \varepsilon_{n-1} a'_{n-1} + \varepsilon_n a_n)_{x_1}\log(x-\alpha) - \right.$$

$$\left. - (a_0^{(n)} + \varepsilon_1 a_1^{(n-1)} + \cdots + \varepsilon_{n-1} a'_{n-1} + \varepsilon_n a_n)_{x_1}\log(x_1-\alpha)\right\} -$$

$$-\frac{c}{\pi(n-2)(x_1-\alpha)} - \frac{l_0}{\pi(n-2)},$$

e così sostituendo nel valore dato sopra di $\mathfrak{q}_{x\,x_1}$ troveremo

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{q}_{x\,x_1} = \frac{1}{x-\alpha}\left\{ c_2 p_2 + 2c_3 p_3 \frac{x_1-\alpha}{x-\alpha} + 3c_4 p_4\left(\frac{x_1-\alpha}{x-\alpha}\right)^2 + \cdots + (n-2)c_{n-1}p_{n-1}\left(\frac{x_1-\alpha}{x-\alpha}\right)^{n-3}\right\} + \\ + \varepsilon_n (a_n)_{x_1} l + l_2 + \frac{1}{\pi(n-2)}\left\{ (a_0^{(n)} + \varepsilon_1 a_1^{(n-1)} + \cdots + \varepsilon_{n-1} a'_{n-1} + \varepsilon_n a_n)_{x_1}\log(x-\alpha) - \right. \\ \left. - (a_0^{(n)} + \varepsilon_1 a_1^{(n-1)} + \cdots + \varepsilon_{n-1} a'_{n-1} + \varepsilon_n a_n)_{x_1}\log(x_1-\alpha)\right\} - \frac{c}{\pi(n-2)(x_1-\alpha)},\end{aligned}\right\} \quad (35)$$

dove $l_2 = l_1 - \frac{l_0}{\pi(n-2)}$; e ora posto $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ sotto questa forma, sarà facile studiare $\frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)}$, e l'integrale $\int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)}\,dx_1$, e i varii termini (15).

Ricorderemo perciò che pei coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ già abbiamo fatta la ipotesi che siano regolari nell'intorno di α sino alle derivate degli ordini $n, n-1, n-2, \ldots, 1$ respettivamente che si suppongono ancora finite e integrabili; e per a_n abbiamo supposto che se anche diviene infinito

---

e quindi determinando effettivamente i valori di $\frac{q_s}{(x-\alpha)^{n-s-1}}$ per $x=\alpha$, si troverà

$$c = \varepsilon_{n-1}(\bar{q}_0 + \bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \ldots + \bar{q}_{n-1}),$$

essendo in generale

$$\bar{q}_s = \varepsilon_s n_s \pi(n-1)\theta_0(\alpha) + \varepsilon_{s-1}(n-1)_{s-1}\pi(n-2)\theta_1(\alpha) + \varepsilon_{s-2}(n-2)_{s-2}\pi(n-3)\theta_2(\alpha) +$$
$$+ \ldots + \varepsilon_1(n-s+1)_1\pi(n-s)\theta_{s-1}(\alpha) + \varepsilon_s(n-s)_0\pi(n-s-1)\theta_s(\alpha).$$

nell'intorno di α, è tale però che il prodotto $a_n z_n$ o $a_n \log(x-\alpha)$ sia integrabile anche ridotto ai valori assoluti, con chè lo sarà pure a_n.

Risulta da questo che i prodotti

$$(a_0^{(n)} + \varepsilon_1 a_1^{(n-1)} + \varepsilon_2 a_{n-2}^{(n-2)} + \cdots + \varepsilon_{n-1} a'_{n-1} + \varepsilon_n a_n)_{x_1} \log(x-\alpha),$$

$$(a_0^{(n)} + \varepsilon_1 a_1^{(n-1)} + \varepsilon_2 a_{n-2}^{(n-2)} + \cdots + \varepsilon_{n-1} a'_{n-1} + \varepsilon_n a_n)_{x_1} \log(x_1-\alpha)$$

saranno ambedue integrabili rispetto ad x_1 nell'intorno di α anche ridotti ai loro valori assoluti; e, il primo di essi, siccome può scriversi

$$\frac{\log(x-\alpha)}{\log(x_1-\alpha)}(a_0^{(n)} + \varepsilon_1 a_1^{(n-1)} + \varepsilon_2 a_{n-2}^{(n-2)} + \cdots + \varepsilon_n a'_{n-1} + \varepsilon_n a_n)_{x_1} \log(x_1-\alpha),$$

e durante l'integrazione il rapporto $\frac{\log(x-\alpha)}{\log(x_1-\alpha)}$ non supera l'unità se x non si discosta troppo da α, si vede che il suo integrale rispetto ad x_1 sarà numericamente inferiore all'integrale del valore assoluto del secondo prodotto; quindi avuto riguardo alla (35) si può ora evidentemente asserire che, onde $\frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)}$ sia integrabile rispetto ad x_1 da α ad x, basterà che in $\mathfrak{q}_{x\,x_1}$ manchi il termine col divisore $x_1-\alpha$, cioè basterà che sia soddisfatta la condizione $c=0$, la quale dovrà naturalmente corrispondere alle (32) che gli studii precedenti ci dettero come condizione necessaria perchè l'integrale indefinito $\int \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)} d\,x_1$ non avesse il termine della forma $\lambda \log(x-\alpha)$ che sarebbe divenuto infinito limitando l'integrale da α ad x.

E siccome il primo membro della (32) non è altro che il valore che si ha per c_1 dalla forma generale (23) delle c_3 quando vi si fa $s=1$, e $i=n-1$, così la attuale condizione $c=0$ non sarà altro che la $c_1=0$.

Ammesso ora che questa condizione $c=0$, o $c_1=0$, sia soddisfatta, dalla precedente si vede subito che avremo la formola

$$\int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)} d\,x_1 = \frac{P}{\theta_0(\alpha)} + \lambda_0\, g_0\, \overline{b}(x) + \lambda_1\, g_1\, \overline{b}_1(x) + \lambda_2\, d_0(x-\alpha), \tag{36}$$

che è analoga alla (27), e nella quale

$$\left.\begin{aligned} \overline{b}(x) &= \int_\alpha^x \left|(a_0^{(n)} + \varepsilon_1 a_1^{(n-1)} + \varepsilon_2 a_2^{(n-2)} + \cdots + \varepsilon_{n-1} a'_{n-1} + \varepsilon_n a_n)_{x_1} \log(x_1-\alpha)\right| d\,x_1,\\ \overline{b}_1(x) &= \int_\alpha^x |(a_n)_{x_1}|\, d\,x_1, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

e P può intendersi che sia ancora senz'altro la solita espressione (26) che definimmo pel caso di $i > n - 1$, quando in essa sia fatto, come ora è, $c_1 = 0$, e $i = n - 1$; e anche qui se vorremo che l'integrale $\int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)} d x_1$ tenda a zero coll'avvicinarsi indefinito di x ad α bisognerà che come pel caso di $i > n - 1$ sia soddisfatta la condizione $P = 0$, che naturalmente non sarà che la (34) posta sott'altra forma; e in questa formola il termine P mancherà se sarà $n = 2$.

Seguendo ora gli stessi processi dei §§ 11 e 12, dopo di aver fatto nei valori di P, K e K_1 $c_1 = 0$ e poi $i = n - 1$, si trova ancora che essendo Ω la minore delle due quantità K e $P' + K_1$, la solita nostra quantità $\frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)}$ potrà scriversi sotto la forma seguente

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)} = \eta_0 \frac{\Omega}{\overline{\theta_0}(\alpha)} \frac{1}{x - \alpha} + \gamma \,|\, (a_n)_{x_1} \,|\, + \gamma_1 \,|\, (a_0^{(n)} + \varepsilon_1 a_1^{(n-1)} + \cdots + \\ + \varepsilon_{n-1} a'_{n-1} + \varepsilon_n a_n)_{x_1} \log (x_1 - \alpha) \,|\, + \gamma_2 ,\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

essendo η_0 una quantità numericamente non superiore ad uno, e γ, γ_1, γ_2 quantità numericamente inferiori a numeri finiti μ, μ_1 e μ_2; e ora tenendo conto di questo risultato e della formola (36), e facendo ragionamenti del tutto simili a quelli del § 12, si giungerà ancora a concludere che la serie degli integrali (15) rappresenterà ancora un integrale regolare della equazione data in un intorno sufficientemente piccolo, ma finito, del punto $x = \alpha$, se si avrà $c = 0$ o $c_1 = 0$, cioè se sarà soddisfatta la condizione (32), e se al tempo stesso, essendo ancora P, K e K_1 le quantità definite dalle (26), e (29) e nelle quali ora sia soppresso il primo termine col farvi $c_1 = 0$, e sia fatto $i = n - 1$, ed essendo P' il valore assoluto di P, e Ω la minore delle due quantità K e $P' + K_1$, questa quantità Ω avrà un valore inferiore a $\overline{\theta_0}(\alpha)$.

E avendo riguardo alla forma della quantità entro la prima parentesi della (35) si vede subito che per Ω si può anche prendere in ogni caso il massimo valore assoluto della quantità

$$c_2 p_2 + 2 c_3 p_3 t + 3 c_4 p_4 t^2 + \cdots + (n - 2) c_{n-1} p_{n-1} t^{n-3} \quad (39)$$

pei valori di t da 0 a 1 (0 e 1 incl.).

E anche qui, come al § 12, applicando il solito teorema di Abel si può sostituire alla quantità Ω un numero del quale siano minori in valore assoluto le somme successive dei coefficienti delle potenze di $\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha}$ nella quantità fra parentesi del primo termine della (35), e allora invece della condizione precedente si trova l'altra che nessuna delle stesse somme successive arrivi in valore assoluto a $\overline{\theta}_0(\alpha)$.

E come pel caso di $i > n - 1$ se ora, quando sia $n > 2$, oltre alla c_1 saranno zero anche le $c_2, c_3, \ldots, c_h$ con $h < n - 1$, allora per l'esistenza dell'integrale regolare intorno al punto α si troverà al modo stesso che basta che sia $\Omega < h \overline{\theta}_0(\alpha)$, e allora per Ω potrà anche prendersi il massimo valore assoluto per t fra 0 e 1 (0 e 1 incl.) della quantità cui si riduce la espressione precedente (39) dividendola per t^{h-1}.

E nel caso particolare in cui, pure essendo $n > 2$, sono zero tutte le $c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}$ con chè anche P e Ω saranno zero, non rimarrà che la condizione $c = 0$ o $c_1 = 0$ insieme all'altra solita relativa alla integrabilità di $a_n z_n$ o $\frac{a_n}{a_0}(x - \alpha)^{n-1} \log(x - \alpha)$, precisamente come nel caso di $n = 2$ nel quale le quantità Ω e P non figurano affatto; e allora se queste quantità $a_n z_n$ o $\frac{a_n}{a_0}(x - \alpha)^{n-1} \log(x - \alpha)$ saranno anche finite, tale risulterà anche $\frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)}$ e la serie degli integrali (15) convergerà come una serie esponenziale, ecc....

E nel caso di $n = 2$, come in quello di $n > 2$ quando le $c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}$ siano tutte zero, l'integrale regolare corrispondente avrà ancora la particolarità di non annullarsi per $x = \alpha$, come trovammo in fine del § 12 anche pel caso di $i > n - 1$.

E merita altresì di essere notato che pel caso che ora considerammo di $i = n - 1$ si hanno gli stessi risultati che si trovarono pel caso di $i > n - 1$, e possono quindi i due casi riunirsi anche in uno solo, salvo quando $i = n - 1$ a richiedere in più che sia soddisfatta anche la condizione $c = 0$ o $c_1 = 0$, e a sostituire alla espressione $\frac{a_n}{a_0}(x - \alpha)^{n-1}$ l'altra $\frac{a_n}{a_0}(x - \alpha)^{n-1} \log(x - \alpha)$ che dovrà essere atta all'integrazione anche ridotta ai suoi valori assoluti.

15. Rimarrebbe ora a considerare il caso di i positivo o negativo e inferiore a $n - 1$, nel qual caso i coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ della nostra equazione possono come a_n anche divenire infiniti per $x = \alpha$; ma di questo caso, che è assai complicato quando si voglia trattarlo in modo generale anche nei suoi dettagli, noi daremo qui soltanto un cenno che del resto potrà bastare a indicare la via da seguirsi per applicare con facilità questi studii nei casi di equazioni speciali.

Distingueremo perciò il caso in cui i non è uno dei numeri interi 1, 2,..., $n-2$ da quello in cui è appunto uno di questi numeri, e incominciando dal primo di questi due casi, osserveremo che allora avendosi sempre, come nel caso di $i > n-1$,

$$z_n = p_n (x-\alpha)^{n-1-i}, \quad a_0 z_n = p_n (x-\alpha)^{n-1} \theta_0 (x),$$

$$a_1 z_n = p_n (x-\alpha)^{n-2} \theta_1 (x), \ldots, \quad a_{n-1} z_n = p_n \theta_{n-1} (x),$$

la espressione

$$(a_0 z_n)^{(n-1)} + \varepsilon_1 (a_1 z_n)^{(n-2)} + \varepsilon_2 (a_2 z_n)^{(n-3)} + \cdots + \varepsilon_{n-1} (a_{n-1} z_n)$$

avrà ancora un significato nell'intorno di $x=\alpha$, e quindi onde Z_n sia integrabile fra α e x basterà che lo sia il prodotto $a_n z_n$ come nei casi precedenti; e ora questo lo sarà certamente quando lo sia a_n, perchè pei valori inferiori ad $n-1$ e non interi che ora si considerano di i, la funzione z_n tende a zero al tendere di x ad α.

Però ora, avendosi sempre per $s \leqq n-1$,

$$a_0 z_s = (x-\alpha)^{i+s-1} \theta_0 (x), \quad a_1 z_s = (x-\alpha)^{i+s-2} \theta_1 (x), \ldots,$$

$$a_{n-1} z_s = (x-\alpha)^{i+s-n} \theta_{n-1} (x),$$

è certo che, nei casi ora indicati per i, per alcuni, o per tutti questi valori 1, 2,..., $n-1$ di s alcune o tutte le potenze di $x-\alpha$ nei secondi membri di queste formole saranno negative, e altrettanto quindi avverrà nella espressione

$$(a_0 z_s)^{(n-1)} + \varepsilon_1 (a_1 z_s)^{(n-2)} + \varepsilon_2 (a_2 z_s)^{(n-3)} + \cdots + \varepsilon_{n-1} (a_{n-1} z_s) + \varepsilon_n \int a_n z_n \, dx$$

nella quale, a causa dell'ultimo termine, potranno comparire anche termini col fattore $\log (x-\alpha)$; e conseguentemente onde essere certi che le Z_1, $Z_2, \ldots, Z_{n-1}$ risultino integrabili da α ad x bisognerà richiedere che in questa espressione i coefficienti delle potenze negative di $x-\alpha$, e quelli dei termini con $\log (x-\alpha)$ se vi saranno, risultino tutti zero.

Ne segue che avremo ora per questo varie condizioni da soddisfare che noi non scriviamo, ma che potranno trovarsi con facilità caso per caso, e il numero delle quali crescerà quanto più i sarà lontana inferiormente da $n-1$; e se trovando soddisfatte queste condizioni le $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}$ risulteranno zero, potremo ripetere i ragionamenti che facemmo nel caso di $i > n-1$;

e quando si voglia che l'integrale $\int_{\alpha}^{x} \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)} d\, x_1$ tenda a zero coll'avvicinarsi indefinito di x ad α, giungeremo ancora alla condizione (19) che potrà però rientrare in alcune delle condizioni precedenti che qui non abbiamo scritto.

Formando poi il valore di $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ come si fece nel § 11 pel caso di $i > n - 1$, con ragionamenti simili a quelli che allora si fecero si troveranno altre condizioni da aggiungersi alle precedenti e nelle quali alcune potranno anche rientrare, come potranno anche aversi certe incompatibilità.

Se poi i sarà uno dei numeri $1, 2, \ldots, n-2$, allora nelle successive integrazioni che dovremo fare partendo dalla formola $z_n^{(n-1)} = \frac{1}{\pi_{n-2}(x-\alpha)^i}$ per determinare $z_n^{(n-2)}, z_n^{(n-3)}, \ldots, z'_n, z_n$ giungeremo certamente a termini che conterranno $\log(x-\alpha)$ come accadde nel caso di $i = n-1$, e quindi in questo caso oltre alle condizioni che vengono come nel caso precedente dalla considerazione delle quantità $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-1}$ e della espressione di $\mathfrak{q}_{x x_1}$, avremo le altre che vengono dall'uguagliare a zero i coefficienti di quei termini che per la presenza del fattore $\log(x-\alpha)$ o di potenze negative di $x-\alpha$ porterebbero a quantità infinite per $x = \alpha$; e al solito alcune di queste condizioni potranno rientrare in altre, e anche essere fra loro incompatibili.

16. I risultati che abbiamo ottenuti si riferiscono a tutte le equazioni lineari omogenee dell'ordine n

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + a_2\, y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = 0, \qquad (39)$$

che si considerano pei valori reali di x in un certo intervallo (a, b), e nelle quali il coefficiente a_0 per un certo valore α di x in questo intervallo diviene infinitesimo di un cert'ordine p, e i coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ lo divengono almeno degli ordini $p-1, p-2, \ldots, p-(n-1)$, e per modo che in generale per $h = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ si abbia $a_h = (x-\alpha)^{p-h}\, \theta_h(x)$, essendo $\theta_h(x)$ una funzione di x che è finita e continua e derivabile fra a e b almeno fino all'ordine $n-h$, bastando però che queste ultime derivate di ordine $n-h$ siano finite e integrabili fra a e b; e infine il coefficiente a_n è tale che il prodotto $a_n\, z_n$, cioè $a_n\,(x-\alpha)^{n-1-i}$ o $a_n \log(x-\alpha)$, sia integrabile fra a e b anche ridotto ai suoi valori assoluti.

Nei risultati stessi però è sempre inteso che i coefficienti ivi indicati con $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ siano quelli della equazione data dopo di averla moltiplicata per $(x-\alpha)^{i-p}$, e quindi la condizione che ora abbiamo ricordata intorno al prodotto $a_n z_n$, o $a_n (x-\alpha)^{n-1-i}$ o $a_n \log (x-\alpha)$, riportata ai veri coefficienti della equazione data corrisponde a una condizione relativa ai prodotti $a_n (x-\alpha)^{n-1-p}$, e $a_n (x-\alpha)^{n-1-p} \log (x-\alpha)$, o ai rapporti $\frac{a_n (x-\alpha)^{n-1}}{a_0}$, e $\frac{a_n (x-\alpha)^{n-1} \log (x-\alpha)}{a_0}$; e così, riassumendo ora i risultati medesimi con riguardo più specialmente ai casi di $i \geqq n-1$, e riferendoci sempre ai coefficienti della equazione data, noi possiamo dire che

« Data una equazione come la (39) nella quale i coefficienti a_0, a_1, « $a_2, \ldots, a_{n-1}$ siano della forma $a_0 = (x-\alpha)^p \theta_0 (x)$, $a_1 = (x-\alpha)^{p-1} \theta_1 (x), \ldots$, « $a_h = (x-\alpha)^{p-h} \theta_h (x), \ldots$, $a_{n-1} = (x-\alpha)^{p-n+1} \theta_{n-1} (x)$, e le $\theta_0 (x)$, $\theta_1 (x), \ldots$, « $\theta_h (x), \ldots, \theta_{n-1} (x)$ soddisfino alle condizioni sopra indicate, onde essere si- « curi che essa ammette un integrale regolare in un certo intorno (finito) del « punto $x = \alpha$, basterà che siano soddisfatte le condizioni seguenti:

« 1.° che il coefficiente a_n sia tale che la espressione $a_n (x-\alpha)^{n-1-p}$, « o l'altra $a_n (x-\alpha)^{n-1-p} \log (x-\alpha)$, che possono anche scriversi rispettiva- « mente sotto la forma $\frac{a_n}{a_0} (x-\alpha)^{n-1}$, o $\frac{a_n}{a_0} (x-\alpha)^{n-1} \log (x-\alpha)$, risultino atte « alla integrazione da α ad x anche ridotte ai loro valori assoluti.

« 2.° che posto in generale colla (23)

$$\left.\begin{aligned} c_s = (i+s-1)(i+s-2)(i+s-3)\ldots(i+s-n+1)\,\theta_0(\alpha) &+ \\ + \varepsilon_1 (i+s-2)(i+s-3)\ldots(i+s-n+1)\,\theta_1(\alpha) &+ \\ + \varepsilon_2 (i+s-3)\ldots(i+s-n+1)\,\theta_2(\alpha) &+ \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots &+ \\ + \varepsilon_{n-1}\,\theta_{n-1}(\alpha)&, \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

« per $s = 1, 2, \ldots, n-1$, e posto inoltre colle (26) e (29)

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{\varepsilon_1 c_1}{\pi(0)\,\pi(n-2)\,(i+1-n)} + \frac{\varepsilon_2 c_2}{\pi(1)\,\pi(n-3)\,(i+2-n)} + \\ &\quad + \frac{\varepsilon_3 c_3}{\pi(2)\,\pi(n-4)\,(i+3-n)} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n-1} c_{n-1}}{\pi(n-2)\,\pi(0)\,(i-1)}, \\ K &= \frac{c'_1}{\pi(0)\,\pi(n-2)} + \frac{c'_2}{\pi(1)\,\pi(n-3)} + \frac{c'_3}{\pi(2)\,\pi(n-4)} + \cdots + \frac{c'_{n-1}}{\pi(n-2)\,\pi(0)}, \\ K_1 &= \frac{\alpha_1 c'_1}{\pi(0)\,\pi(n-2)} + \frac{\alpha_2 c'_2}{\pi(1)\,\pi(n-3)} + \frac{\alpha_3 c'_3}{\pi(2)\,\pi(n-4)} + \cdots + \frac{\alpha_{n-1} c'_{n-1}}{\pi(n-2)\,\pi(0)}, \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

« dove le α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}$ sono i massimi valori assoluti delle quantità
« $1 - \frac{1}{i+1-n}$, $t - \frac{1}{i+2-n}$, $t^2 - \frac{1}{i+3-n}, \ldots, t^{n-2} - \frac{1}{i-1}$ per t fra
« 0 e 1, e indicati con c'_s, P', e $\overline{\theta}_0(\alpha)$ i valori assoluti di c_s, P, e $\theta_0(\alpha)$,
« esista un valore di i non inferiore a $n-1$ pel quale, essendo Ω la minore
« delle due quantità K e $P' + K_1$, e c_{h+1} la prima delle quantità $c_1, c_2, \ldots,$
« $c_{h+1}, \ldots, c_{n-1}$ che sia diversa da zero, si abbia $\Omega < (i - n + h + 1)\overline{\theta}_0(\alpha)$;
« e con questo però che quando il valore che si abbia così per i sia soltanto
« l'estremo inferiore $n-1$, allora ci si trovi nel caso in cui anche la espres-
« sione $\frac{a_n}{a_0}(x-\alpha)^{n-1}\log(x-\alpha)$ è atta alla integrazione anche ridotta ai valori
« assoluti, e oltre a ciò sia zero almeno il c_1, sicchè sia soddisfatta la con-
« dizione

$$\left.\begin{aligned}\pi(n-1)\theta_0(\alpha) + \varepsilon_1\pi(n-2)\theta_1(\alpha) + \varepsilon_2\pi(n-3)\theta_2(\alpha) + \cdots +\\ + \varepsilon_{n-1}\pi(0)\theta_{n-1}(\alpha) = 0\,;\end{aligned}\right\} \quad (42)$$

« intendendosi allora che in ciascuna delle espressioni di P, K e K_1 sia sop-
« presso il primo termine (*).

« E così in questo ultimo caso di $i = n-1$ se sarà $c_2 = c_3 = \cdots = c_{n-1} = 0$,
« ciò che porterà che sia $P = K = K_1 = 0$, allora anche quando sia $n > 2$
« non si avrà altro che la condizione precedente (42) o $c_1 = 0$, come nel
« caso di $n = 2$.

« E senza introdurre le quantità P, K e K_1, e ammettendo sempre che
« c_{h+1} sia la prima delle $c_1, c_2, \ldots, c_{h+1}, \ldots, c_{n-1}$ diverse da zero, si potrà
« anche intendere che in questa condizione Ω rappresenti il massimo valore
« assoluto della espressione

$$\frac{\varepsilon_{h+1}c_{h+1}}{\pi(h)\pi(n-h-2)} + \frac{\varepsilon_{h+2}c_{h+2}}{\pi(h+1)\pi(n-h-3)}t + \cdots + \frac{\varepsilon_{n-1}c_{n-1}}{\pi(n-2)\pi(0)}t^{n-h-2} \quad (43)$$

« pei valori di t da 0 a 1 (0 e 1 incl.). »

(*) Come già notammo al § 12 le $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}$ non potranno superare l'unità, e lo stesso sarà anche per α_1 se $i > n - \frac{1}{2}$; e quindi per $i > n - \frac{1}{2}$, e anche per i fra $n-1$ e $n - \frac{1}{2}$ purchè allora sia $c_1 = 0$, sarà sempre $K_1 \leq K$; e così in questi casi se sarà $P = 0$ potremo prendere sempre senz'altro $\Omega = K_1$.

17. E si può notare, per riguardo alla prima condizione del paragrafo precedente, che quando nella equazione data (39) l'ordine d'infinitesimo p di a_0 per $x=\alpha$ non sia superiore ad $n-1$, la stessa prima condizione risulterà sempre soddisfatta da se quando a_n nel primo caso e $a_n \log(x-\alpha)$ nel secondo risultino atte alla integrazione anche riducendole ai valori assoluti, e quindi in particolare quando a_n sia finita e integrabile fra a e b, nel qual caso basterà anche che a_0 per $x=\alpha$ non sia infinitesimo di un ordine superiore a un numero vicino quanto si vuole ad n ma inferiore ad n.

E per ciò che ha riguardo alla seconda condizione dello stesso paragrafo è da notare esplicitamente che quando per un certo valore di i superiore o uguale ad $n-1$ si trovi che le $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ sono tutte zero, anche le P, K e K_1 saranno zero esse pure, e la stessa seconda condizione risulterà soddisfatta senz'altro, e quindi allora non rimarrà che la prima condizione, quella cioè relativa alla espressione $a_n(x-\alpha)^{n-1}{}^{p}$, o $\frac{a_n}{a_0}(x-\alpha)^{n-1}$ per $i>n-1$, e all'altra $a_n(x-\alpha)^{n-1-p}\log(x-\alpha)$, o $\frac{a_n}{a_0}(x-\alpha)^{n-1}\log(x-\alpha)$ per $i=n-1$; e quando queste quantità rispettivamente siano anche finite, allora la serie che rappresenterà l'integrale regolare della (39) convergerà come una serie esponenziale per tutti i valori di x dalle due parti di α fino al primo nuovo infinitesimo di a_0 fra a e b se vi sarà, o fino al primo punto nel quale $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ presentino singolarità.

E sempre in questo caso in cui le $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ risulteranno tutte zero per un certo valore di i superiore o uguale ad $n-1$, si avrà anche la particolarità notevole che « l'integrale regolare corrispondente della nostra equazione oltre essere finito sarà anche diverso da zero per $x=\alpha$ ».

18. Se poi la seconda condizione del § 16 non risulterà soddisfatta per nessun valore di i uguale o superiore ad $n-1$, pure essendo soddisfatta la prima condizione dello stesso paragrafo, allora si potrà provare se supponendo $i<n-1$ risulteranno soddisfatte le condizioni che per quel caso dicemmo potersi trovare coi processi del § 15.

In ogni caso poi quando le condizioni che abbiamo date nei due paragrafi precedenti per la esistenza di un integrale regolare della equazione (39) in un intorno del punto α siano soddisfatte, questo integrale regolare potrà sempre determinarsi per mezzo delle nostre formole generali nelle quali, con $z_1=1$, $z_2=x-\alpha$, $z_3=(x-\alpha)^2$, ..., $z_{n-1}=(x-\alpha)^{n-2}$, sia fatto $z_n=p_n(x-\alpha)^{n-1-i}$, con $p_n=\frac{1}{\pi_{n-2}(1-i)(2-i)\ldots(n-1-i)}$, per i diverso da $n-1$, o $z_n = \bar{p}_n \log(x-\alpha)$, con $\bar{p}_n = \dfrac{\varepsilon_n}{\pi_{n-2}\,\pi\,(n-2)}$, per $i=n-1$, e applicandole alla equazione

$$\left.\begin{array}{l} a_0(x-\alpha)^{i-p}\,y^{(n)} + a_1(x-\alpha)^{i-p}\,y^{(n-1)} + \cdots + \\ + a_{n-1}(x-\alpha)^{i-p}\,y' + a_n(x-\alpha)^{i-p}\,y = 0, \end{array}\right\} \tag{44}$$

o

$$\left.\begin{array}{l} (x-\alpha)^i\,\theta_0(x)\,y^{(n)} + (x-\alpha)^{i-1}\,\theta_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + \\ + (x-\alpha)^{i-n+1}\,\theta_{n-1}(x)\,y' + a_n(x-\alpha)^{i-p}\,y = 0, \end{array}\right\} \tag{45}$$

che viene da quella data (39) moltiplicandola per $(x-\alpha)^{i-p}$, e intendendo nel caso di $z_n = \bar{p}_n \log(x-\alpha)$ che allora sia $i=n-1$.

19. Aggiungiamo che questi studii dimostrano che per la equazione data (39) si ha un integrale regolare in un intorno di un punto α d'infinitesimo di a_0 quando sono soddisfatte le condizioni che abbiamo trovato, e assicurano quindi che questo integrale è finito e continuo per $x=\alpha$; ma, come già notammo nel § 12, gli studii stessi non ci assicurano nulla per le sue derivate nel punto α.

Per vedere che cosa accada di queste derivate, che nei casi ordinarii potranno aversi colla derivazione delle nostre serie generali, o della formola finita (6), bisogna vedere se le formole che così si ottengono per la equazione (44) o (45) conservano un significato anche per $x=\alpha$; e per questo occorrerà studiare anche i valori delle derivate di $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ rispetto ad x pei valori di x che si considerano e per quelli di x_1 fra α e x ($x_1 = x$ incl.), e occorrerà studiare anche i termini che vengono dal termine generale (14) o dall'integrale $\int_\alpha^x \mathfrak{q}_{x,x_1}\,y_{x_1}\,dx_1$ della (6) quando in essi al posto di $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ sotto l'integrale relativo ad x_1 si pongono le sue derivate rispetto ad x; e queste derivate dovranno considerarsi fino a quella dell'ordine h se vorremo assicurarci della esistenza delle derivate dell'integrale fino a questo ordine.

Tale studio si farà con facilità, coi processi stessi che seguimmo nei §§ 11 e seg. per studiare $\mathfrak{q}_{x,x_1}$, valendosi delle $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ date dal solito determinante, o dal suo sviluppo (12) nel quale sia posto per z_n il valore corrispondente $p_n(x-\alpha)^{n-1-p}$ o $\bar{p}_n \log(x-\alpha)$, e per $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ siano posti i valori di $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ per $x=x_1$.

20. Questi risultati generali, essendo relativi a tutte le equazioni li-

neari omogenee, ci sembrano assai notevoli, e più ancora appariranno tali dalle applicazioni che poi ne faremo alle equazioni del 2.° e del 3.° ordine.

Però è da notare che quando, essendosi limitati o no ai soli casi di $i \geqq n-1$, le condizioni che abbiamo date per la esistenza di un integrale regolare non risultino soddisfatte per alcun valore di i, allora non potremo affermare che l'integrale regolare nell'intorno del punto α esiste, ma non potremo neppure esser certi del contrario, sia perchè le condizioni dei paragrafi precedenti per l'esistenza di un tale integrale regolare si sono trovate soltanto come condizioni sufficienti, sia perchè può anche darsi che le difficoltà provengano dalla scelta che abbiamo fatta dei valori di $z_1, z_2, \ldots, z_n$, come appunto si troverà nel caso delle equazioni del second'ordine.

E pel caso in cui le indicate condizioni non risultino soddisfatte, potrà giovare l'osservare che trasformando la equazione data (39) colla formola $y = tu$, dove t è una funzione che per ora può lasciarsi indeterminata, la nuova equazione in u sarà la seguente:

$$a_0 t u^{(n)} + \lambda_1 u^{(n-1)} + \lambda_2 u^{(n-2)} + \cdots + \lambda_{n-1} u' + \lambda_n u = 0, \tag{46}$$

dove in generale

$$\lambda_h = n_h a_0 t^{(h)} + (n-1)_{h-1} a_1 t^{(h-1)} + (n-2)_{h-2} a_2 t^{(h-2)} + \cdots + a_h t,$$

e come si vede facilmente ha per polinomio aggiunto $\overline{Z}$ quello stesso Z della equazione primitiva moltiplicato per t.

E potrà darsi che prendendo per t una funzione conveniente che pel solito sarà una potenza di $x-\alpha$, o $\log(x-\alpha)$, e applicando i processi precedenti si trovino soddisfatte per la nuova equazione in u tutte le condizioni che abbiamo trovato per l'applicabilità dei processi stessi insieme a quelle relative ai suoi coefficienti; ed allora essa ammetterà certamente un integrale regolare, e la equazione data ne avrà uno che diventerà regolare moltiplicandolo per $\frac{1}{t}$.

21. Facciamo ora l'applicazione dei risultati generali che abbiamo ottenuti al caso delle equazioni lineari omogenee del second'ordine

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{47}$$

nelle quali ammetteremo che il coefficiente a_0 per $x = \alpha$ divenga infinitesimo di ordine p, e esso e il coefficiente a_1 soddisfino alle condizioni poste in generale pei primi n della (39) al principio del § 16, e ammetteremo inoltre senz'altro che il rapporto $\frac{a_2}{a_0}(x-\alpha)$, o l'altro $\frac{a_2}{a_0}(x-\alpha)\log(x-\alpha)$ siano integrabili nell'intorno di α anche riducendoli ai valori assoluti, ciò che in particolare, come osservammo in generale al § 17, avverrà sempre quando, essendo a_0 infinitesimo di ordine non superiore a un numero determinato minore di 2 per $x=\alpha$, a_2 sia finito e atto alla integrazione nell'intorno di α.

Con questi dati la prima delle condizioni del § 16 sarà già soddisfatta, e quanto alla seconda si vede subito che se sarà $\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} \geqq 1$ essa rimarrà subito soddisfatta col prendere $i=\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}$, perchè allora verrà $c_1=0$.

Se poi sarà $\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}<1$, si osserverà prima che colle notazioni dello stesso § 16, si avrà

$$c_1=i\,\theta_0(\alpha)-\theta_1(\alpha),\quad P=-\frac{c_1}{i-1},\quad K=c'_1=\bar{\theta}_0(\alpha)\left(i-\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}\right),$$

e inoltre sarà $K_1=K\frac{2-i}{i-1}$ per $1<i\leqq 2$, e $K_1=K\frac{i-2}{i-1}$ per $i\geqq 2$, e di qui osservando che per $\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}<1$ il K viene ad essere sempre superiore a $(i-1)\bar{\theta}_0(\alpha)$, e che solo per $i>\frac{3}{2}$ si ha $K_1<K$, e anche allora $P'+K_1$ risulta sempre superiore a $(i-1)\bar{\theta}_0(\alpha)$, si vede subito che non sarà possibile soddisfare alla condizione $\Omega<(i-1)\bar{\theta}_0(\alpha)$ per nessun valore di $i>1$, mentre poi per $i=1$ non può essere $c_1=0$; dunque si può intanto evidentemente concludere che « mentre, per quanto osservammo nel paragrafo precedente, « non si può per ora dire nulla nel caso di $\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}<1$, si può però affermare « che quando sia $\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}\geqq 1$ esisterà sempre un integrale regolare della no- « stra equazione (47) che si troverà applicando le nostre formole generali « alla equazione

$$(x-\alpha)^{i-p}a_0\,y''+(x-\alpha)^{i-p}a_1\,y'+(x-\alpha)^{i-p}a_2\,y=0, \qquad (48)$$

« ovvero

$$(x-\alpha)^{i}\theta_0(x)\,y''+(x-\alpha)^{i-1}\theta_1(x)\,y+(x-\alpha)^{i-p}a_2\,y=0, \qquad (49)$$

« con $i=\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}$, prendendo $z_1=1$, $z_2=\frac{(x-\alpha)^{1-i}}{1-i}$ quando $i=\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}>1$, e « prendendo invece $z_1=1$, $z_2=\log(x-\alpha)$ quando $i=1$, o $\theta_1(\alpha)=\theta_0(\alpha)$. »

E per le considerazioni generali che abbiamo fatte nei paragrafi precedenti si può anche affermare che « questo integrale regolare oltre essere finito « per $x=\alpha$ sarà anche diverso da zero. »

22. E per decidere come si comporta questo integrale regolare rispetto alle derivate, bisognerà applicare le considerazioni generali del § 19, esaminando cioè per la equazione (49) i valori di $\mathfrak{q}_{x\,x_1}$ e delle sue derivate rispetto ad x per x_1 compreso fra α e x ($x_1=x$ inclus.); e così in particolare, limitandosi qui al caso delle derivate di prim'ordine, si osserverà che ora si ha

$$\mathfrak{q}_{x.x_1}=z_2(x)Z_1(x_1)-Z_2(x_1),\quad \mathfrak{q}'_{x.x_1}=z'_2(x)Z_1(x_1),$$

essendo $z_2(x)=\frac{(x-\alpha)^{1-i}}{1-i}$ per $i>1$, e $z_2(x)=\log(x-\alpha)$ per $i=1$, e quindi in ogni caso $z'_2(x)=\frac{1}{(x-\alpha)^i}$, $z''_2(x)=-\frac{i}{(x-\alpha)^{i+1}}$, ed essendo inoltre

$$Z_1(x)=[(x-\alpha)^i\theta_0(x)]''-[(x-\alpha)^{i-1}\theta_1(x)]'+(x-\alpha)^{i-p}a_2(x)=$$

$$=\left\{(i-1)\frac{i\,\theta_0(x)-\theta_1(x)}{x-\alpha}+2i\theta'_0(x)-\theta'_1(x)\right\}(x-\alpha)^{i-1}+(x-\alpha)^i\theta''_0(x)+(x-\alpha)^{i-p}a_2(x),$$

$$Z_2(x)=[(x-\alpha)^i\theta_0(x)z_2(x)]''-[(x-\alpha)^{i-1}\theta_1(x)z_2(x)]'+(x-\alpha)^{i-p}a_2(x)z_2(x)=$$

$$=\left\{2[(x-\alpha)^i\theta_0(x)]'-(x-\alpha)^{i-1}\theta_1(x)\right\}z'_2(x)+(x-\alpha)^i\theta_0(x)z''_2(x)+Z_1(x)z_2(x)=$$

$$=\frac{i\,\theta_0(x)-\theta_1(x)}{x-\alpha}+2\theta'_0(x)+Z_1(x)z_2(x);$$

e siccome le funzioni $\theta_0(x)$ e $\theta_1(x)$ hanno le derivate prime determinate e finite, e per le condizioni poste sopra si ha $i\,\theta_0(\alpha)=\theta_1(\alpha)$, il rapporto $\frac{i\,\theta_0(x)-\theta_1(x)}{x-\alpha}$ che figura in queste formole sarà finito anche per $x=\alpha$, e potrà esserlo anche in altri casi.

Di qui poi si deduce che

$$\mathfrak{q}_{x\,x} = -\frac{i\,\theta_0(x) - \theta_1(x)}{x-\alpha} - 2\,\theta'_0(x),$$

$$\mathfrak{q}'_{x\,x_1} = \frac{1}{x-\alpha}\left\{(i-1)\frac{i\,\theta_0(x_1)-\theta_1(x_1)}{x_1-\alpha} + 2\,i\,\theta'_0(x_1) - \theta'_1(x_1)\right\}\left(\frac{x_1-\alpha}{x-\alpha}\right)^{i-1} +$$

$$+\,\theta''_0(x_1)\left(\frac{x_1-\alpha}{x-\alpha}\right)^{i} + a_2(x_1)(x_1-\alpha)^{i-p}\frac{1}{(x-\alpha)^i};$$

quindi poichè derivando la serie che rappresenta il nostro integrale y, oltre ad un termine certamente finito si hanno termini che si riducono a $\frac{\mathfrak{q}_{x,x}}{\theta_0(x)}\,y$, e si ha inoltre una serie i cui termini sono della forma

$$\int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}'_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)}\,d\,x_1\int_\alpha^{x_1}\frac{\mathfrak{q}_{x_1,x_2}}{\theta(x_2)}\,d\,x_2\int_\alpha^{x_2}\frac{\mathfrak{q}_{x_2,x_3}}{\theta(x_2)}\,d\,x_3\int_\alpha^{x_3}\cdots\int_\alpha^{x_{m-1}}\frac{\mathfrak{q}_{x_{m-1},x_m}}{\theta_0(x)}\,d\,x_m,$$

e sono in conseguenza quelli che vengono dagli integrali (15) eseguendo su essi una nuova integrazione dopo avervi cambiata x in x_1, e averli moltiplicati per $\frac{\mathfrak{q}'_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)}$, così abbiamo ora gli elementi per potere studiare la serie derivata di quella del nostro integrale y.

Si vedrà subito infatti ora che la parte $\frac{\mathfrak{q}_{x\,x}}{\theta_0(x)}\,y$ sarà finita anche per $x=\alpha$, tali essendo $\mathfrak{q}_{x,x}$ e y; e quanto all'altra parte osservando che $\frac{x_1-\alpha}{x-\alpha} \leq 1$, e che per quanto già vedemmo ogni integrale (15) è della forma $A_m\,\overline{a}(x) + B_m(x-\alpha)$, dove le A_m e B_m sono finite, e i loro valori assoluti costituiscono serie convergenti, e $\overline{a}(x)$ è l'integrale da α e x dei valori assoluti delle espressioni $a_2(x-\alpha)^{1-p}$ o $a_2(x-\alpha)^{1-p}\log(x-\alpha)$, o delle altre $\frac{a_2}{a_0}(x-\alpha)$ o $\frac{a_2}{a_0}(x-\alpha)\log(x-\alpha)$ che figurano nella prima condizione del § 16, si vedrà subito che ora tutto dipenderà dal restare o no finiti per $x=\alpha$ i due integrali

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{(x-\alpha)^i}\int_\alpha^x (x_1-\alpha)^{i-1}\,a_2(x_1)\,(x_1-\alpha)^{1-p}\,d\,x_1,\\ \text{e}\quad&\\ &\frac{1}{(x-\alpha)^i}\int_\alpha^x (x_1-\alpha)^{i-1}\,\overline{a}(x_1)\,a_2(x_1)\,(x_1-\alpha)^{1-p}\,d\,x_1;\end{aligned}\right\}\qquad(50)$$

ai quali darà luogo l'ultimo termine di $q'_{x x_1}$, non essendo il caso di occuparsi dell'altro integrale

$$\frac{1}{(x-\alpha)^i}\int_\alpha^x (x_1-\alpha)\, a_2(x_1)\,(x_1-\alpha)^{i-p}\, d\,x_1 =$$

$$= \frac{1}{(x-\alpha)^i}\int_\alpha^x (x_1-\alpha)^i\, a_2(x_1)\,(x-\alpha)^{1-p}\, d\,x_1$$

che sarà certamente finito e tenderà a zero coll'avvicinarsi di x ad α quando sia finito il primo degli integrali precedenti (50).

Ma evidentemente gl'integrali precedenti sono rispettivamente inferiori in valore assoluto a $\frac{\bar{a}(x)}{x-\alpha}$ e $\frac{\bar{a}(x)}{x-\alpha}\int_\alpha^x |\, a_2(x_1)\,(x-\alpha)^{1-p}\,|\, d\,x_1$ cioè anche in ogni caso a $\frac{\bar{a}(x)}{x-\alpha}$, e $\frac{[\bar{a}(x)]^2}{x-\alpha}$; quindi si può ora concludere che la derivata del nostro integrale y sarà determinata e finita anche per $x=\alpha$ se $\bar{a}(x)$ che col tendere di x ad α diviene infinitesimo lo diverrà almeno del prim'ordine.

Allo stesso risultato e con maggiore sollecitudine saremmo giunti anche studiando la derivata della formola (6), cioè di $\frac{1}{\theta_0(x)}+\frac{1}{\theta_0(x)}\int_\alpha^x q_{x x_1}\, y_{x_1}\, d\,x_1$; e così la derivata del nostro integrale, che fuori del punto α poteva sempre, dietro queste considerazioni, ottenersi derivando termine a termine la serie che lo rappresenta o quest'ultima espressione, esisterà e potrà ottenersi al modo stesso anche per $x=\alpha$ quando $\bar{a}(x)$ col tendere di x ad α divenga infinitesimo almeno del prim'ordine, come in particolare avviene sempre quando $a_2(x-\alpha)^{1-p}$, o $a_2(x-\alpha)^{1-p}\log(x-\alpha)$ sono finiti e integrabili.

Studii simili potrebbero farsi per esaminare le derivate 2^e, 3^e, ecc., del nostro integrale; ma queste possono studiarsi anche partendo dalla equazione data.

23. Tutto questo quando il rapporto $\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}$, che non è altro che il limite di $\frac{a_1(x-\alpha)}{a_0}$ per $x=\alpha$, non sia inferiore ad uno.

Se poi lo stesso rapporto sarà inferiore ad uno, la condizione $c_1=0$ del § 16 si soddisfarà ancora quando si prende $i=\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}$; ma, come osservammo in modo generale al § 15 questo non basta per potersi dire sicuri dell'esistenza di un integrale regolare della equazione data nell'intorno del punto α; e bisognerebbe sviluppare le considerazioni generali del § 15 stesso applicate alla nostra equazione del second'ordine.

Anche questo però potrebbe darsi che non conducesse a conclusioni definitive; ed è meglio perciò tener conto della osservazione generale fatta al § 20, secondo la quale può anche darsi che il non potere trattare anche il caso di $\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} < 1$ coi processi relativi al caso di $i \geqq 1$ dipenda soltanto dalla scelta fatta delle funzioni z_1 e z_2, e che in conseguenza un integrale regolare esista sempre per queste equazioni, e possa ancora trovarsi colle nostre formole generali, ma partendo da altre funzioni z_1 e z_2.

24. E difatti nel caso delle equazioni del second' ordine (47) nelle quali i coefficienti soddisfano ancora alle condizioni indicate, ma il rapporto $\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}$ è inferiore alla unità, l'integrale regolare intorno al punto $x = \alpha$ esiste ancora, e per trovarlo colle nostre formole basta partire anzichè dalle funzioni z_1 e z_2 dei casi precedenti da altre che sono integrali della equazione aggiunta di quella $\overline{a}_0 y'' + \overline{a}_1 y' + \overline{a}_2 y = 0$ cui si riduce la equazione data (47) quando si moltiplica per una potenza di $x - \alpha$ tale da rendere il suo primo coefficiente a_0 infinitesimo del prim'ordine per $x = \alpha$ ove già non la sia.

In questo caso infatti la equazione aggiunta ora indicata

$$\overline{a}_0 z'' + \overline{q}_1 z' + \overline{q}_2 z = 0 \tag{51}$$

per quanto ha riguardo ai suoi coefficienti $\overline{a}_0$, $\overline{q}_1$ e $\overline{q}_2$ nell'intorno di $x = \alpha$ viene ad essere nelle stesse condizioni della prima, cioè della (47), perchè per essa si ha $\overline{q}_1 = 2\overline{a}'_0 - \overline{a}_1$, $\overline{q}_2 = \overline{a}''_0 - \overline{a}'_1 + \overline{a}_2$, e il valore i_1 del rapporto corrispondente al valore primitivo $i = \frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}$ relativo alla prima, essendo il limite di $\frac{\overline{q}_1(x-\alpha)}{\overline{a}_0}$ per $x = \alpha$, è $i_1 = 2 - i$; talchè se per la equazione data (47) si ha $i < 1$, per la equazione aggiunta sopra indicata (51) sarà $i_1 > 1$; e questa avrà quindi certamente un integrale η_1 che sarà regolare intorno al punto $x = \alpha$ e non si annullerà in questo punto, dove avrà ancora la derivata determinata e finita se, essendo $\overline{a}(x)$ il solito integrale della espressione $\frac{a_2}{a_0}(x - \alpha)$ ridotta ai valori assoluti, che si suppone esistere, la funzione $\overline{a}(x)$

diverrà infinitesima almeno del prim'ordine per $x=\alpha$, come in particolare avverrà quando a_2 sarà finita, e a_0 sarà infinitesimo di ordine non superiore al primo.

Ma d'altra parte quando una equazione del second' ordine (47) ha un integrale y_1 regolare nell' intorno di un punto $x=\alpha$ dove a_0 può anche essere infinitesimo, si potrà sempre prendere per l'altro integrale y_2

$$y_2=y_1\int\frac{e^{-\int\frac{a_1}{a_0}dx}}{y_1^2}\,dx$$

e di qui si vede subito che se si avrà $\frac{a_1}{a_0}=\frac{\theta_1(x)}{(x-\alpha)\,\theta_0(x)}$, con $\frac{\theta_1(x)}{\theta_0(x)}$ regolare nell'intorno di α, indicando con i il rapporto $\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}$ e supponendo che y_1 non sia zero per $x=\alpha$, potremo scrivere

$$y_2=y_1\int\frac{\nu(x)\,dx}{(x-\alpha)^i},$$

con $\nu(x)$ funzione regolare e diversa da zero per $x=\alpha$; e quindi per i diverso da uno avremo la formola seguente:

$$y_2=y_1(x-\alpha)^{1-i}\mu(x), \tag{52}$$

con $\mu(x)$ funzione regolare e diversa da zero; mentre nel caso di $i=1$ avremo invece l'altra formola

$$y_2=y_1\log(x-\alpha)+\text{funz. reg. per } x=\alpha, \tag{53}$$

venendo così determinato da queste formole il modo di comportarsi del secondo integrale y_2 di una equazione lineare del second'ordine (47) i cui coefficienti a_0 e a_1 soddisfano alle condizioni poste sopra nell'intorno di un punto α d'infinitesimo di a_0, quando l'altro integrale y_1 è regolare e diverso da zero nello stesso intorno.

Applicando ora queste formole al caso della nostra equazione aggiunta (51) quando per essere $i<1$ si ha $i_1>1$, si vede che la stessa equazione aggiunta (51), insieme all'integrale regolare η_1, ammetterà un altro integrale η_2 della forma

$$\eta_2=\eta_1(x-\alpha)^{1-i_1}\mu(x)=\eta_1(x-\alpha)^{i-1}\mu(x);$$

e questi integrali η_1 e η_2 sono appunto quelli che prenderemo ora per le nostre funzioni z_1 e z_2.

25. Così facendo, le nostre formole generali ci daranno per gl'integrali della (47)

$$y = \frac{c_2 \eta_1 - c_1 \eta_2}{a_0 \overline{Q}},$$

essendo c_1 e c_2 costanti arbitrarie, e essendo $\overline{Q}$ il determinante $\begin{vmatrix} \eta_1 & \eta'_1 \\ \eta_2 & \eta'_2 \end{vmatrix}$ relativo alla equazione (51) che, per la nota formola di Liouville, all'infuori di un fattore costante è uguale a $e^{-\int \frac{q_1}{a_0} dx} = \frac{(x-\alpha)^{i-1} \mu_1(x)}{a_0}$, con $\mu_1(x)$ nuova funzione regolare di x nell'intorno di $x = \alpha$ quando, come può sempre farsi, nella equazione data (47) il coefficiente a_0, se già non lo era, sia ridotto ad essere infinitesimo almeno del prim'ordine per $x = \alpha$ col moltiplicare la equazione per una potenza di $x - \alpha$; quindi evidentemente basterà prendere $c_2 = 0$, perchè l'integrale precedente y della (47) risulti regolare; e così si può ora senz'altro affermare che « le equazioni del second'ordine date (47) ammettono tutte « un integrale regolare y nell'intorno del punto $x = \alpha$, quando i coefficienti a_0, « a_1, a_2 soddisfano alle condizioni poste in principio del § 21, incluse nei ri-« spettivi casi quelle relative alle espressioni $\frac{a_2(x-\alpha)}{a_0}$ o $\frac{a(x-\alpha)\log(x-\alpha)}{a_0}$ « che dovranno essere integrabili anche ridotte ai valori assoluti »; e se, essendo al solito $\overline{a}(x)$ il loro integrale questa funzione diverrà infinitesima per $x = \alpha$ almeno del prim'ordine, come in particolare avverrà quando a_0 è infinitesimo del prim'ordine per $x = \alpha$, e a_1 e a_2 si mantengono finiti, allora il nostro integrale regolare y avrà anche la sua derivata prima determinata e finita anche per $x = \alpha$.

E questo integrale quando $\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}$ o il limite di $\frac{a_1(x-\alpha)}{a_0}$ per $x = \alpha$ non sia inferiore ad uno, oltre ad essere finito sarà anche diverso da zero per $x = \alpha$.

26. Quando poi, essendo ancora soddisfatte le condizioni poste in principio del § 21 pei coefficienti a_0, a_1 della (47) per quanto riguarda i loro ordini d'infinitesimo, non sia però soddisfatta l'altra relativa al rapporto $\frac{a_2(x-\alpha)}{a_0}$ nel caso di $i = \lim_{x=\alpha}\left(\frac{a_1(x-\alpha)}{a_0}\right)$ diverso da uno, o quella relativa al prodotto $\frac{a_2}{a_0}(x-\alpha)\log(x-\alpha)$ nel caso di $i = 1$, allora valendosi dei risultati ottenuti, e facendo la trasformazione $y = tu$ della quale parlammo al

§ 20, è facile di trovare la forma dei due integrali quando si ammetta di essere in certi casi particolari; come ad es. quando si supponga che il rapporto $\frac{a_2(x-\alpha)}{a_0}$ divenga infinito del prim'ordine per $x=\alpha$, per modo da avere $\frac{a_2}{a_0}=\frac{g}{(x-\alpha)^2}+\frac{p}{x-\alpha}$, con g quantità costante diversa da zero e p funzione integrabile fra α e x insieme a quella dei suoi valori assoluti $|p|$.

In questo caso infatti facendo la trasformazione $y=tu$ con prendere $t=(x-\alpha)^\beta$, la equazione trasformata in u (46) sarà la seguente:

$$\left.\begin{array}{l} a_0(x-\alpha)^\beta u''+(x-\alpha)^{\beta-1}\{2a_0\beta+a_1(x-\alpha)\}u'+ \\ +(x-\alpha)^{\beta-2}\{a_0\beta(\beta-1)+a_1\beta(x-\alpha)+a_2(x-\alpha)^2\}u=0, \end{array}\right\} \quad (54)$$

e i due primi dei suoi coefficienti soddisfaranno ancora alle solite condizioni per ciò che riguarda i loro ordini d'infinitesimo per $x=\alpha$.

Per questa poi il rapporto corrispondente a quello $\frac{a_2(x-\alpha)}{a_0}$ relativo alla equazione primitiva sarà il seguente

$$\frac{\beta(\beta-1)}{x-\alpha}+\frac{a_1}{a_0}\beta+\frac{a_2}{a_0}(x-\alpha)=\frac{\beta(\beta-1)+i\beta+g}{x-\alpha}+p_1,$$

essendo i il solito valore per $x=\alpha$ del rapporto di $\frac{a_1(x-\alpha)}{a_0}$ relativo alla equazione primitiva, e essendo $p_1=p+\left[\frac{\theta_1(x)}{\theta_0(x)}\right]'_{\bar{x}}$, con $\bar{x}$ intermedio fra α e x, per modo che p_1 sarà una funzione integrabile fra α e x nelle stesse condizioni di p; e quindi basterà prendere β in modo che sia

$$\beta(\beta-1)+i\beta+g=0 \quad (55)$$

perchè la nuova equazione (54) in u pel valore scelto di β abbia un integrale regolare nell'intorno di $x=\alpha$ che avrà anche nel punto α la derivata prima determinata e finita se l'integrale $\int_\alpha^x |p|\,dx$ diverrà infinitesimo almeno del prim'ordine col tendere di x ad α; e quindi se la precedente equazione di secondo grado in β (55) avrà due radici distinte β_1 e β_2, indicando con u_1 e u_2 gli integrali regolari della equazione (54) corrispondenti rispettivamente a questi valori β_1 e β_2 di β, la equazione data (47) avrà i due integrali $(x-\alpha)^{\beta_1}u_1$, $(x-\alpha)^{\beta_2}u_2$.

Se poi la equazione (55) avrà le sue due radici uguali a β_0, allora avendosi $\beta_0 = \frac{1-i}{2}$, si vede subito che per la equazione (54) che corrisponde a questo valore β_0 di β il valore per $x = \alpha$ del solito rapporto $\frac{a_1(x-\alpha)}{a_0}$ sarà precisamente l'unità, e quindi se u_1 sarà l'integrale regolare della equazione in u corrispondente a questo valore β_0 di β, l'altro suo integrale u_2 per quanto dicemmo in generale al § 24 sarà della forma $u_1 \log(x-\alpha) +$ funz. regolare nell'intorno di α; e conseguentemente in questo caso gli integrali della nostra equazione (47) saranno i due

$$(x-\alpha)^{\beta_0} u_1, \quad (x-\alpha)^{\beta_0} [\log(x-\alpha)\, u_1 + \text{funz. reg.}],$$

e in questo caso u_1, come nel precedente u_1 e u_2 avranno *anche per* $x = \alpha$ la derivata prima determinata e finita se, essendo

$$\int_\alpha^x |p|\, dx = \overline{p}(x) \quad \text{o} \quad \int_\alpha^x |p| \log(x-\alpha)\, dx = \overline{p}(x),$$

la funzione $\overline{p}(x)$ diverrà infinitesima almeno del prim'ordine col tendere di x ad α, come in particolare avverrà quando p o $p \log(x-\alpha)$ saranno finiti.

Questi risultati concordano pienamente con quelli che trovò per altra via il sig. Maxime Böcher (*) in una Memoria pubblicata nel Vol. I delle *Transactions of the American Mathematical Society* del 1900. Qui li abbiamo ottenuti come semplici applicazioni dei nostri risultati generali.

27. Applichiamo ora brevemente i risultati generali, che abbiamo ottenuti, anche al caso delle equazioni del terz'ordine

$$a_0 y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0, \tag{56}$$

per le quali ammetteremo al solito che il coefficiente a_0 del primo termine divenga infinitesimo dell'ordine p, e esso come gli altri due a_1 e a_2 soddisfino alle condizioni poste in modo generale pei primi n coefficienti della (39) al principio del § 16, come ammetteremo anche senz'altro che la espressione

(*) Al sig. Böcher non comparisce la condizione che $\overline{p}(x)$ diventi infinitesimo del prim'ordine col tendere di x ad α, perchè le sue considerazioni portano che la derivata dell'integrale sia presa soltanto nei punti *fuori di* α, e allora per p viene, come qui, soltanto la condizione che p o $p \log(x-\alpha)$ siano integrabili anche ridotte ai valori assoluti.

$\frac{a_3}{a_0}(x-\alpha)^2$, o l'altra $\frac{a_3}{a_0}(x-\alpha)^2 \log(x-\alpha)$ siano integrabili da α ad x anche ridotte ai loro valori assoluti, ciò che in particolare avverrà quando, essendo a_0 di ordine non superiore ad un numero inferiore a 3 ma vicino a 3 quanto si vuole, a_3 sia finito e integrabile da a a b.

Allora la prima delle condizioni del § 16 sarà senz'altro soddisfatta; e quanto alla seconda, osserviamo per prima cosa che ora per le (40) avremo le due

$$c_1 = i(i-1)\theta_0(\alpha) - (i-1)\theta_1(\alpha) + \theta_2(\alpha),$$

$$c_2 = (i+1)i\theta_0(\alpha) - i\theta_1(\alpha) + \theta_2(\alpha),$$

dalle quali si ottengono le altre

$$c_2 - c_1 = 2i\theta_0(\alpha) - \theta_1(\alpha),$$

$$c_1 + c_2 = i\{2i\theta_0(\alpha) - \theta_1(\alpha)\} - (i-1)\theta_1(\alpha) + 2\theta_2(\alpha);$$

e quindi se ci poniamo dapprima nel caso più semplice che è quello pel quale si richiede che sia $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, si trova subito che per questo caso basterà che si abbiano le due equazioni $2i\theta_0(\alpha) = \theta_1(\alpha)$, $2\theta_2(\alpha) = (i-1)\theta_1(\alpha)$, la prima delle quali, dandoci $i = \frac{\theta_1(\alpha)}{2\theta_0(\alpha)}$, mostra che onde possa essere $i \geqq 2$, come si richiede, bisognerà che si abbia $\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} \geqq 4$; e così quando questa condizione sia soddisfatta, e fra $\theta_0(\alpha)$, $\theta_1(\alpha)$ e $\theta_2(\alpha)$ sussista l'altra relazione precedente cioè $4\theta_0(\alpha)\theta_2(\alpha) = \{\theta_1(\alpha) - 2\theta_0(0)\}\theta_1(\alpha)$, e oltre a ciò sia soddisfatta la condizione indicata sopra rispetto all'espressione $\frac{a_2}{a_0}(x-\alpha)^2$ quando $\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} > 4$, e rispetto all'altra $\frac{a_2}{a_0}(x-\alpha)^2 \log(x-\alpha)$ quando $\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} = 4$, la nostra equazione (56) avrà sempre un integrale regolare nell'intorno del punto $x = \alpha$, e che in questo intorno, oltre ad essere finito, sarà anche diverso da zero.

E questo integrale si otterrà al solito applicando i nostri processi generali alla equazione

$$\left.\begin{aligned} &(x-\alpha)^i\theta_0(x)y''' + (x-\alpha)^{i-1}\theta_1(x)y'' + \\ &+ (x-\alpha)^{i-2}\theta_2(x)y' + a_3(x-\alpha)^{i-p}y = 0 \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

che viene dalla (56) moltiplicandola per $(x-\alpha)^{i-p}$, essendo $i=\frac{\theta_1(\alpha)}{2\,\theta_0(\alpha)}$, e prendendo per l'applicazione dei detti processi $z_1=1$, $z_2=x-\alpha$, con $z_3=\frac{(x-\alpha)^{1-i}}{(i-1)(i-2)}$ quando $i>2$, e $z_3=-\log(x-\alpha)$ quando $i=2$.

Osservando poi in generale che per le (41) abbiamo

$$P=-\frac{c_1}{i-2}+\frac{c_2}{i-1},\quad K=c'_1+c'_2,\quad K_1=\alpha_1 c'_1+\alpha_2 c'_2,$$

e che essendo Ω la minore delle due quantità $P'+K_1$ e K, la seconda delle condizioni del § 16, quando c_1 e c_2 non sono ambedue zero, richiede che, per un conveniente valore di i non inferiore a 2, si abbia $\Omega<(i-1)\overline{\theta}_0(\alpha)$, o $\Omega<(i-2)\theta_0(\alpha)$, secondo che c_1 è uguale a zero o è diverso da zero, si vede facilmente che si avranno anche altri casi di esistenza di un integrale regolare della (56) nell'intorno del punto $x=\alpha$.

Così, ad esempio, se porremo la condizione che sia $c_1=0$, senza che sia $c_2=0$ per non ricadere nel caso precedente, siccome allora sarà

$$c_2=2\,i\,\theta_0(\alpha)-\theta_1(\alpha),\quad P=\frac{c_2}{i-1},\quad K=c'_2,\quad K_1=\alpha_2 c'_2,$$

e inoltre $P'+K_1=c'_2\left(\frac{1}{i-1}+\alpha_2\right)$ e quindi $P'+K_1=c'_2=K$ per $i\geqq 3$ e $P'+K_1=\frac{2}{i-1}c'_2>K$ per $i<3$, si vede che basterà che la equazione $c_1=0$, o $\theta_0(\alpha)\,i^2-i\{\theta_0(\alpha)+\theta_1(\alpha)\}+\theta_1(\alpha)+\theta_2(\alpha)=0$ abbia in i le sue radici

$$\frac{\theta_0(\alpha)+\theta_1(\alpha)\pm\sqrt{\{\theta_1(\alpha)-\theta_0(\alpha)\}^2-4\,\theta_0(\alpha)\,\theta_2(\alpha)}}{2\,\theta_0(\alpha)}$$

reali, e una almeno non inferiore a 2, e al tempo stesso il valore assoluto di c_2 o di $2\,i\,\theta_0(\alpha)-\theta_1(\alpha)$ risulti inferiore a $(i-1)\,\overline{\theta}_0(\alpha)$.

E così, supponendo come evidentemente può farsi, che $\theta_0(\alpha)$ sia positiva, e ponendo per abbreviare

$$\left(\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}-1\right)^2-4\,\frac{\theta_2(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}=\Delta$$

con che

$$i=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}\pm\sqrt{\Delta}\right\},\tag{58}$$

nel caso attuale avremo le condizioni

$$\Delta \geqq 0, \quad \frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} \pm \sqrt{\Delta} \geqq 3, \quad \text{val. ass. } (1 \pm \sqrt{\Delta}) < i - 1;$$

talchè in particolare prendendo il segno superiore del radicale $\sqrt{\Delta}$, e quindi

$$i = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} + \sqrt{\Delta}\right\},$$

basterà che sia

$$\Delta \geqq 0, \quad \frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} \geqq 3, \quad 3 + \sqrt{\Delta} < \frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)};$$

per modo che se si pone

$$\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} = 3 + \beta \quad \text{con} \quad \beta \geqq 0,$$

ciò che darà

$$i = 2 + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta},$$

$$\Delta = (2+\beta)^2 - 4\frac{\theta_2(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} = \beta^2 - 4\left\{\frac{\theta_2(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} - (1+\beta)\right\},$$

e trasformerà l'ultima condizione nell'altra $\sqrt{\Delta} < \beta$ o $\Delta < \beta^2$, si concluderà che dovrà essere $\frac{\theta_2(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} > (1+\beta)$ insieme a $\beta^2 - 4\frac{\theta_2(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} + 4(1+\beta) \geqq 0$ cioè $\frac{\theta_2(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}$ dovrà essere compreso fra $1+\beta$ e $1+\beta+\frac{1}{4}\beta^2$ (questo limite superiore incluso, ma non l'inferiore), intendendo ora che β sia un numero qualsiasi diverso da zero e positivo; e quando qualunque sia questo numero β, queste condizioni per $\theta_0(\alpha)$, $\theta_1(\alpha)$ e $\theta_2(\alpha)$ risultino soddisfatte, l'equazione (56) avrà ancora un integrale regolare nell'interno di $x = \alpha$ che si troverà coi soliti processi generali partendo dalla equazione (57) nella quale ora $i = 2 + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}$, e si suppone che per questa il coefficiente di y, o per la primitiva (56) la espressione $\frac{a_2}{a_0}(x-\alpha)^2$ sia integrabile nell'intorno di α anche riducendola ai suoi valori assoluti.

Studii simili potranno farsi pel caso in cui nella espressione precedente (58) di i si prende il segno inferiore di $\sqrt{\Delta}$, e in quelli nei quali $P = 0$

senza che siano zero c_1 e c_2 o nei quali P è diverso da zero insieme a c_1, come anche in quelli nei quali per Δ s'intenda preso il massimo valore assoluto della espressione che corrisponda ora alla (43) per t compresa fra 0 e 1 (0 e 1 incl.); e si troveranno così altri casi nei quali la equazione del terz'ordine (56) ha un integrale regolare nell'intorno del punto $x=\alpha$, che potrà ottenersi ancora coi soliti processi generali dalla equazione (57) quando in essa sia posto per i il valore corrispondente che si troverà, ecc.

In tutti questi casi però le derivate di questo integrale potranno mancare o presentare singolarità per $x=\alpha$; e perchè esse siano ancora determinate e finite in questo punto bisognerà che siano soddisfatte speciali condizioni che si troveranno per mezzo delle considerazioni generali del § 19 come facemmo al § 22 pel caso delle equazioni del second'ordine.

Pisa, Ottobre 1904.