

Ecole Polytechnique.

1^{ère} Division.

1906-1907

Cours de Mécanique et Machines.

M. Painlevé, Professeur.

Introduction

Ce cours est consacré à l'étude du mouvement des systèmes matériels quelconques, en particulier des machines. La première partie traite des systèmes matériels (continus et discontinus) dont la position ne dépend que d'un nombre fini de paramètres, notamment des solides invariables. La seconde partie traite des systèmes continus déformables [fluides, solides élastiques], dont la position ne peut plus être déterminée par un nombre fini de paramètres.

En réalité, il n'existe pas de solides rigoureusement invariables, (cours de 1^{ère} année, Introduction, page XXXII), et les corps qui nous semblent les plus rigides se déforment. Les mouvements que perçoivent nos sens ne sont, en quelque sorte, que des mouvements moyens: nous négligeons, sans le savoir, les petites vibrations des particules matérielles autour de leurs positions apparentes, vibrations dont

L'amplitude est très faible mais qui peuvent être rapides.

Ce sont ces mouvements moyens, - les seuls, je le répète, qui soient perçus directement par nos sens, - que calcule la Mécanique des solides invariables. Ce calcul repose tout entier sur les axiomes fondamentaux de la Mécanique rationnelle et sur l'hypothèse de l'invariabilité des distances mutuelles des points d'un solide : il s'accorde d'ailleurs d'une façon saisissante avec l'étude expérimentale des solides naturels.

Si on tient compte de la déformation des solides, le problème devient d'une extrême complexité et conduit à la théorie de l'élasticité qui sera l'objet des dernières leçons de ce cours. Quand un corps donné est dans un état de déformation donné, ses réactions intérieures et celles qu'il exerce sur les obstacles en contact avec lui, sont bien déterminées. Mais si on admet que ses déformations échappent à toute mesure, [et c'est ce qu'on fait dans la dynamique des solides indéformables], la forme (invariable) du corps n'apprend plus rien sur les réactions : on sait seulement qu'elles satisfont au principe de l'action et de la réaction. C'est pourquoi il arrive souvent qu'on peut calculer le mouvement d'un solide indéformable, sans pouvoir calculer exactement ses réactions internes et externes. Nous avons déjà rencontré cette circonstance en Statique [1^{ère} année, p. 361-363], et nous avons vu que les réactions dépendent alors de la matière qui compose le corps et de son élasticité.

Dynamique générale des systèmes.

Chapitre I.

Rappel des théorèmes généraux de la Dynamique des systèmes.

1. - Quantité de mouvement et moment cinétique d'un système matériel.

Un certain trièdre ayant été adopté comme trièdre fixe, soit S un système matériel, P un de ses éléments, de masse m , \vec{V} la vitesse de P à l'instant t ; soit G le centre de gravité de S , point dont la position est bien déterminée à chaque instant t , et \vec{V} la vitesse de ce point géométrique. Soit enfin $M = \sum m$ la masse totale du système.

Par définition, la quantité de mouvement de l'élément

P (à un instant t) est le vecteur $m\vec{V} = \vec{PQ}$ construit avec P comme origine. La quantité de mouvement de S est la somme géométrique \vec{GH} des vecteurs \vec{PQ} construite avec G comme origine. Ce vecteur \vec{GH} coïncide avec le vecteur $M\vec{V}$ construit avec G comme origine: autrement dit, la quantité de mouvement de S est la même que si, à chaque instant, toute la masse du système était concentrée en G . (1^{ère} année, pages 22-23). Je représenterai la quantité de mouvement du système par le symbole: $M.V$ de S .

Le moment cinétique de S par rapport à un point O (ou par rapport à une droite OZ) est le moment résultant par rapport à O (ou à OZ) des vecteurs \vec{PQ} (1^{ère} année, pages 27-28). Je représenterai ce moment cinétique par le symbole: (mV, O) de S [ou (mV, OZ) de S].

2. Théorème du mouvement du centre de gravité
[ou théorème des quantités de mouvement].

Le mouvement du centre de gravité d'un système S
est le même que si à chaque instant (toute la masse de
S étant concentrée en ce point) toutes les forces extérieures
qui s'exercent sur le système étaient appliquées à ce point
 (1^{ère} année p. 102-116).

Cet énoncé équivaut au suivant :

La dérivée géométrique par rapport au temps de la quan-
tité de mouvement de S est (à chaque instant) équipollente
à la somme géométrique des forces extérieures appliquées à S.

Si on veut encore :

Soit O un point fixe et \overline{OK} un vecteur équipollent à la
quantité de mouvement GH de S : la vitesse du point K est \mathcal{Q}
équipollente à la somme géométrique des forces extérieures
appliquées à S.

Soit $Oxyz$ le trièdre de référence (trirectangle ou non);
 soit (x, y, z) les coordonnées de P, (ξ, η, ζ) celles de G. Le théo-
 rème précédent se traduit par trois équations, à savoir
 l'équation :

$$(1) \quad M \xi'' = \sum m x'' = \sum X^e,$$

et deux analogues ; (X^e, Y^e, Z^e) sont les composantes d'une
 quelconque des forces extérieures appliquées à S.

3. Théorème des moments cinétiques ou des mo-
ments des quantités de mouvements, ou théorème des
aires.

Soit O un point fixe quelconque, et \overline{OI} le moment
cinétique de S par rapport à O. La dérivée géométrique de
 \overline{OI} par rapport au temps [ou, si on veut, la vitesse de I] est
équipollente au moment résultant (par rapport à O) des
forces extérieures appliquées à S. [1^{ère} année, p. 116-121].

Le même énoncé s'applique au moment cinétique de S
 par rapport à une droite fixe OZ .

Le trièdre de référence $Oxyz$ étant supposé trirec-
 tangle, le théorème précédent se traduit par trois équations,
 à savoir l'équation :

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \sum m (xy' - yx') = \sum (xY^e - yX^e)$$

et deux analogues. L'équation (2) traduit le théorème des moments par rapport à OZ . Si r, θ, z sont les coordonnées semi-polaires de P , le 1^{er} membre de (2) peut se remplacer par $\frac{d}{dt} \sum m r^2 \dot{\theta}$.

4. - Remarque sur les deux théorèmes précédents..

Les deux théorèmes précédents qui se traduisent par six équations, s'appliquent à n'importe quel système matériel. Ces six équations, équations universelles du mouvement d'un système, signifient au fond [1^{ère} année, p. 107-109] que les forces d'inertie et les forces extérieures forment (à chaque instant) un ensemble de vecteurs géométriquement équivalent à un système de vecteurs nuls, autrement dit satisfont aux six conditions d'équilibre d'un solide. Elles résultent immédiatement du fait que les forces intérieures de S sont deux à deux égales et directement opposées.

Il est impossible d'ailleurs d'écrire pour un système quelconque une équation distincte des six précédentes et indépendante des forces intérieures, sans faire sur ces forces des hypothèses particulières qui ne découlent point du principe de l'action et de la réaction.

5. - Mouvement d'un système autour de son centre de gravité G .

Soit Gx, y, z , des axes parallèles aux axes fixes et ayant constamment pour origine le centre de gravité G de S . Le mouvement de S par rapport aux axes Gx, y, z , sera dit mouvement de S autour de son centre de gravité. (1^{ère} année, pages 599-600). Ce mouvement est bien déterminé si on connaît les directions des axes choisis comme axes fixes.

Le moment cinétique de S par rapport à un point A , dans son mouvement autour de G , est indépendant du point A choisi. Autrement dit, il est le même en grandeur, direction et sens quel que soit A . Nous donnerons à ce vecteur le nom de moment cinétique de S autour de son centre de gravité. Pour calculer ce vecteur, il est loisible de prendre comme point A le point G : autrement dit, on considère le mouvement de S par rapport aux axes Gx, y, z , et dans ce mouvement le moment cinétique de S par rapport à G . (1) (Voir cette note page suivante).

Théorème des moments cinétiques dans le mouvement autour de G. - La dérivée géométrique (par rapport au temps) du moment cinétique d'un système autour de son centre de gravité est équipollente au moment résultant par rapport à G des forces extérieures (1^{ère} année, p. 601).

Théorème qui s'énonce encore ainsi :

« On peut appliquer le théorème des moments cinétiques au mouvement autour du centre de gravité [et par rapport à ce point] sans changer les forces extérieures. »

Ce troisième théorème est une conséquence des deux premiers, mais il est d'un emploi commode dans un grand nombre d'applications.

Si (x_1, y_1, z_1) sont les coordonnées de l'élément P par rapport aux axes Gx, y, z , ce théorème se traduit par trois équations, à savoir l'équation :

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \sum m(x_1 y_1' - y_1 x_1') = \sum (x_1 Y^e - y_1 X^e)$$

et les deux analogues.

Rappelons enfin l'énoncé du théorème de Hœnig, qui joue un rôle utile dans le calcul des moments cinétiques.

Théorème de Hœnig. - A chaque instant t, le moment cinétique d'un système par rapport à un point O [ou par rapport à une droite OZ] est la somme géométrique.

- 1° du moment cinétique du système autour de G;
- 2° du moment cinétique du centre de gravité où toute la masse serait concentrée.

6. - Théorème des forces vives.

Ce théorème [1^{ère} année, p. 141-143] se traduit par l'égalité :

(¹) Si on remplace les axes fixes $Oxyz$ par des axes dont les directions varient relativement aux premiers, le nouveau mouvement de S autour de G est le mouvement de S par rapport à des axes Gx_2, y_2, z_2 mobiles relativement aux axes Gx, y, z . Le moment cinétique de S autour de G n'est pas en général, le même avec les nouveaux axes qu'avec les premiers.

$$d\Sigma \frac{1}{2} m v^2 = \Sigma (X dx + Y dy + Z dz).$$

Dans le second membre, figurent toutes les forces appliquées au système [forces intérieures et extérieures, forces de contact et forces à distance, réactions et forces données].

Cette équation est, en général, distincte des six équations universelles du mouvement. Toutefois, quand S est un solide, indéformable, le travail des forces intérieures est nul: le second membre de (4) ne fait intervenir que la somme géométrique des forces extérieures et leur moment résultant par rapport à un point O [1^{ère} année, p. 149-150]. On prévoit donc que le théorème des forces vives doit être, dans ce cas, une conséquence du théorème du mouvement du centre de gravité et du théorème des moments cinétiques. C'est ce que nous vérifierons dans la Dynamique du corps solide.

Supposons que S se compose de solides indéformables (de dimensions d'ailleurs aussi petites qu'on veut); supposons de plus que ces solides soient parfaitement lisses ainsi que les obstacles extérieurs fixes Σ avec lesquels ils sont en contact [1^{ère} année, p. 153 et p. 346-348]. Les réactions mutuelles [forces de contact] des éléments de S et les réactions des obstacles fixes sur S ont un travail constamment nul tant que le mouvement a lieu sans choc, (1^{ère} année, p. 152-154) et on peut ne conserver dans le second membre de (4) que les forces autres⁽¹⁾ que ces réactions. Or, en particulier ces forces dérivent d'une fonction de forces U, le théorème des forces vives donnera une intégrale première:

$$T \equiv \Sigma m v^2 = U + h.$$

7. Sur une difficulté qui se présente dans le calcul du travail.

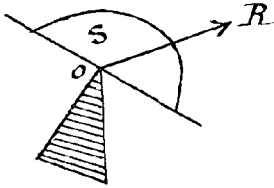
Quand le système matériel est formé d'un nombre fini de points matériels séparés, le calcul du travail ne saurait donner lieu à aucune difficulté. Soit, en effet, \vec{F} une force appliquée au point matériel P du système; le

(1) Ces forces seront les forces à distance, intérieures et extérieures, [pesanteur, attractions newtoniennes] qui s'exercent sur les éléments de S, et les forces de contact exercées sur S par les obstacles mobiles (s'il en existe).

travail de \vec{F} entre les instants t et $(t+dt)$ est égal à $FV \cos(\vec{V}, \vec{F}) dt$, V désignant la vitesse du point P .

Quand le système est continu, c'est toujours la même définition du travail qu'il faut appliquer; il faut donc considérer l'élément matériel P du système auquel la force est appliquée à l'instant t , la vitesse V de cet élément et former l'expression $FV \cos(\vec{F}, \vec{V}) dt$. De même, dans la formule $F ds (\cos \alpha, ds)$, ds désigne le déplacement infinitésimal de l'élément matériel P du système auquel F est appliquée à l'instant t . Mais l'emploi de l'une ou l'autre de ces deux formules n'est pas sans soulever parfois certaines difficultés, sur lesquelles les deux exemples suivants suffisent à attirer l'attention.

1^{er} Exemple. - Considérons un solide S glissant avec frottement sur un appui fixe O ; soit \vec{R} la réaction exercée par l'appui O sur S , réaction qui est oblique sur la surface limite de S . Calculons son travail dans l'intervalle de



temps t à $t+dt$. Si V désigne la vitesse (à l'instant t) de l'élément matériel P de S qui (à cet instant) est en contact avec O , le travail cherché est égal à $R \cdot V \cdot \cos(\vec{R}, \vec{V}) dt$. Le vecteur \vec{V} , tangent en O (comme on sait) à la surface limite de S , est oblique sur \vec{R} . Si

donc V est $\neq 0$, le travail de \vec{R} , n'est pas nul.

L'erreur qu'on peut commettre consiste à raisonner ainsi: "Le point (géométrique) d'application de la force \vec{R} coïncide constamment avec O ; il est donc fixe et le travail de \vec{R} est nul."

2^e Exemple. - Soit un disque plan S qui se meut dans un plan fixe xOy et qui est assujéti à rouler sans glisser sur une droite fixe Ox . Soit \vec{R} la réaction, oblique en général sur Ox , exercée par Ox sur le disque. Calculons le travail de \vec{R} dans l'intervalle de temps t à $t+dt$.

Puisqu'il y a roulement sans glissement, à l'instant t , la vitesse \vec{V} de l'élément matériel P de S en contact avec Ox , est nulle. Le travail $RV \cos(\vec{R}, \vec{V}) dt$ de la force \vec{R} qui est appliquée à cet élément est donc nul.

L'erreur eût consisté à dire: "Le point (géométrique)

« d'application de la force \vec{R} décrit la droite Ox avec une
 « certaine vitesse égale à W à l'instant t . Le travail de
 « \vec{R} est donc égal à $RW \cos(R, W) dt$, quantité différente de
 « zéro en général. »

8. — Théorème des forces vives dans le mouvement
autour du centre de gravité G .

On peut appliquer le théorème des forces vives au
mouvement du système autour de G sans changer les
forces [1^{ère} année, p. 603-604].

Si (x_i, y_i, z_i) sont les coordonnées de l'élément P par
 rapport aux axes Gx, y, z , ce théorème se traduit par
 l'égalité :

$$(5) \quad d. \frac{1}{2} \sum m(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = \sum (X dx_i + Y dy_i + Z dz_i).$$

Cette équation (5) est une conséquence de l'équation (4)
 et du théorème du mouvement du centre de gravité, mais
 elle est d'une application commode dans une foule d'ap-
 plications.

Remarque. — Le travail de la même force n'est pas
 le même suivant qu'on considère le déplacement de S
 par rapport aux axes $Oxyz$ ou par rapport aux axes
 Gx, y, z , (1^{ère} année, pages 604). Le travail total des forces inté-
 rieures est indépendant du choix des axes [ibidem, p. 143-144],
 mais non celui des forces extérieures.

Supposons notamment que le système S soit en
 contact avec des obstacles extérieurs fixes Σ parfaitement
 lisses. Les réactions de ces obstacles ne donnent rien dans
 le second membre de (4). Mais si on adopte les axes
 Gx, y, z , les obstacles Σ sont mobiles par rapport à ces
 nouveaux axes, et leurs réactions introduisent dans
 le second membre de (5) un terme en général différent
 de zéro. [1^{ère} année, p. 605-606].

Rappelons enfin le théorème de Kœnig analogue au
 théorème énoncé plus haut pour les moments cinétiques.

Théorème de Kœnig. — La force vive d'un système est,
 à chaque instant la somme : 1^o de la force vive du système
 dans son mouvement autour de G ; 2^o de la force vive de G
 où toute la masse serait concentrée. [1^{ère} année, p. 604].

8. - Application des théorèmes précédents.

Les théorèmes précédents [théorème du mouvement du centre de gravité, théorème des moments cinétiques, théorème des forces-vives] sont vrais pour tous les systèmes matériels. Nous en avons donné, dans le cours de l'an dernier, plusieurs applications: nous les emploierons constamment par la suite, notamment dans la Dynamique des solides. Appliquons les immédiatement à quelques exemples.

Quand un système est formé de solides invariables, libres ou assujettis à des liaisons, sa position se laisse déterminer à l'aide d'un nombre fini de paramètres. Il faut avant tout chercher le nombre de paramètres indépendants dont dépend la position du système. Soit K ce nombre.

Il faut ensuite, en se servant des théorèmes fondamentaux, former (si possible) K équations indépendantes des réactions inconnues. Ces K équations définiront le mouvement: dans les applications simples, ces K équations, ou certaines d'entre elles, si on les choisit convenablement, donneront des intégrales premières.

9. - Systèmes à liaisons complètes.

Considérons, en particulier, un système S à liaisons complètes formé de solides parfaitement lisses, en contact avec des obstacles fixes parfaitement lisses. Si toutes les forces autres que les réactions intérieures et les réactions de ces obstacles sont données, le théorème des forces vives suffit à déterminer le mouvement. Soit q le paramètre dont dépend la position de S , et T sa demi force-vive; on a:

$$T = \frac{1}{2} \sum m(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2} A(q) q'^2, \quad [1^{\text{ère}} \text{ année, p. 620}]$$

et l'équation (4) peut s'écrire:

$$(6) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} A(q) q'^2 = \sum \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right) \equiv Q(q', q, t) q'$$

Q désignant une fonction connue de q', q, t ; ou encore:

$$Aq'' + \frac{1}{2} \left(\frac{dA}{dq} \right) q'^2 = Q(q', q, t),$$

équation différentielle du second ordre qui définit q en

fonction de t connaissant q_0 et q'_0 pour $t = t_0$.

Si notamment les forces données ne dépendent que de la position du système, c'est-à-dire de q , Q est une simple fonction de q , et le théorème des forces-vives donne l'intégrale première:

$$\frac{1}{2} A(q) q'^2 = \int Q(q) dq$$

d'où t en fonction de q par une nouvelle quadrature.

10. - Exemples de systèmes à liaisons complètes.

I. Mouvement d'une vis mobile sans frottement dans son écrou.

Dans ce mouvement, tous les points de la vis décrivent des hélices circulaires de même pas h , et quand la vis tourne de l'angle θ , ils se déplacent parallèlement à l'axe (dans un certain sens) de $\frac{h}{2\pi} \theta$. Dans l'intervalle de temps t à $t + dt$, le déplacement 2π infinitésimal de la vis se décompose en une rotation (de vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$) autour de l'axe, et une translation parallèle à l'axe. La vitesse d'un élément P de la vis est la résultante de deux vitesses rectangulaires: la première égale à $P \cdot \omega$ en valeur absolue [si r est la distance de P à l'axe], la seconde égale à $\frac{h}{4\pi} \omega$. Le carré de la vitesse de P est donc: $\omega^2 \left[r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2} \right]$ et la force vive de la vis est égale à

$$\omega^2 \sum m r^2 + \omega^2 \frac{h^2}{4\pi^2} M, \quad (M \text{ masse totale de la vis}).$$

Si on représente par $M K^2$ le moment d'inertie⁽¹⁾ $\sum m r^2$ de la vis autour de l'axe, on a en définitive:

$$2T = M \left(K^2 + \frac{h^2}{4\pi^2} \right) \omega^2.$$

Prenons comme axe des z l'axe de la vis, le trièdre $Oxyz$ étant choisi dextrorsum. La quantité h est positive ou négative suivant que la vis est dextrorsum ou sinistrorsum. Soit r, θ, z les coordonnées semi-polaires d'un élément de la vis, Z la projection sur OZ de la somme géométrique et N le moment résultant, par rapport à OZ , des forces extérieures données. Le travail de ces forces dans la rotation $d\theta$ autour de OZ et la translation $\frac{h}{2\pi} d\theta$ parallèle à OZ , est égal à:

(1) Cours de 1^{ère} année, p. 161.

$$N d\theta + \frac{h}{2\pi} Z d\theta = \left(N + \frac{h}{2\pi} Z \right) d\theta.$$

L'équation du mouvement est donc :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ M \left(K^2 + \frac{h^2}{4\pi^2} \right) \theta'^2 \right\} = \left(N + \frac{h}{2\pi} Z \right) \theta', \quad [\omega^2 = \theta'^2],$$

ou encore :

$$M \left(K^2 + \frac{h^2}{4\pi^2} \right) \theta'' = N + \frac{h}{2\pi} Z.$$

Si $N + \frac{h}{2\pi} Z$ est constant, θ'' est constant : la tête de la vis avance (ou recule) sur OZ d'un mouvement uniformément accéléré ou retardé. Si $N + \frac{h}{2\pi} Z = 0$, le mouvement de la vis est uniforme.

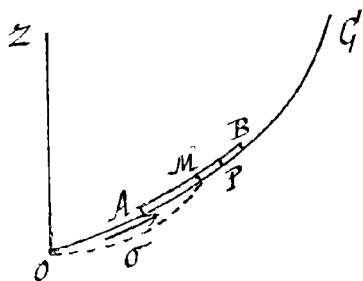
II. - Mouvement d'une chaîne homogène pesante glissant sans frottement sur une courbe fixe \mathcal{C} . [La chaîne est supposée inextensible et parfaitement flexible].⁽¹⁾

Soit $2l$ la longueur totale de la chaîne, ρ la masse de l'unité de longueur ; la masse totale M est $2l\rho$.

Prenons comme axe OZ la verticale ascendante O menée d'un point O de la courbe \mathcal{C} . Appelons s l'arc de cette courbe compté à partir du point O jusqu'au point P d'ordonnée z ; la courbe étant donnée, on peut toujours exprimer z en fonction de s ,

(1)

$$z = \varphi(s).$$



Ceci posé, appelons σ l'arc OM qui va du point O au milieu⁽²⁾ de la chaîne : il est évident que la position de la chaîne est connue dès qu'on connaît σ . Cette position ne dépend donc que d'un paramètre.

Les forces intérieures se réduisent ici aux réactions intérieures (tensions) dont le travail est nul. Les forces extérieures sont la pesanteur et les réactions de la courbe sur la chaîne : comme la chaîne glisse sans frottement sur la courbe,

(1) La chaîne peut alors être regardée comme formée de petits chaînons solides, articulés sans frottement. Le travail des réactions intérieures [tensions] est nul (1^{ère} année, p. 396).

(2) Ce point n'est pas le centre de gravité de la chaîne.

le travail de ces dernières forces est nul, car chacune de ces forces est normale à la vitesse de l'élément de la chaîne auquel elle est appliquée.

Le travail de toutes les forces appliquées à la chaîne se réduit donc au travail de la pesanteur. Or ce travail, dans un déplacement élémentaire de la chaîne, est la différentielle de la fonction $-\sum mgz = -g \sum mz = -gM\zeta$, si ζ désigne le z du centre de gravité de la chaîne. L'intégrale des forces vives s'écrit :

$$(1) \quad T = -2\rho l g \zeta + h.$$

Or tous les points de la chaîne ont même vitesse absolue $V = \frac{d\sigma}{dt}$; la demi force vive est donc égale à $\frac{MV^2}{2} = \rho l \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$. Pour calculer le z du centre de gravité, considérons un élément PP' de longueur $d\lambda$ de la chaîne, et soit λ l'arc MP compté positivement dans le sens des arcs croissants, négativement dans le sens contraire. Quand le point P [pour une position donnée σ de la chaîne] varie d'une extrémité à l'autre dans le sens des arcs croissants, soit de A ou B , λ croît de $-l$ à $+l$, et ζ est donné par l'égalité :

$$2l\zeta = \int_{-l}^{+l} \varphi(\sigma + \lambda) d\lambda;$$

cette intégrale définie représente une certaine fonction déterminée $\Psi(\sigma)$, et l'équation (1) devient :

$$(2) \quad l \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = -g \int_{-l}^{+l} \varphi(\sigma + \lambda) d\lambda + h = -g\Psi(\sigma) + h;$$

t est ainsi donné en fonction de σ par une quadrature.

Au lieu de l'intégrale des forces vives (2), on aurait pu écrire l'égalité même des forces vives, qui n'est autre que l'équation (2) dérivée par rapport à t et qui donne ici :

$$(3) \quad 2l \frac{d^2\sigma}{dt^2} = -g\Psi'(\sigma).$$

$$\text{Or } \Psi'(\sigma) = \int_{-l}^{+l} \varphi'(\sigma + \lambda) d\lambda = \varphi(\sigma + l) - \varphi(\sigma - l);$$

d'où, en définitive,

$$(4) \quad \frac{d^2\sigma}{dt^2} = -g \frac{\varphi(\sigma + l) - \varphi(\sigma - l)}{2l} = -g[z_1(\sigma) - z_0(\sigma)],$$

si z_0 et z_1 sont les z des deux extrémités A, B de la chaîne.

Cette équation (4) est celle du mouvement rectiligne d'un point sous l'action d'une force dépendant de la seule position, à savoir la force $-mg[z_1(\sigma) - z_0(\sigma)]$, σ désignant l'abscisse du point.

Comme vérification, si l'on suppose que la longueur l de la chaîne tend vers zéro, le deuxième membre tend vers $-g\varphi'(\sigma)$, et on retombe sur l'équation :

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = -g\varphi'(\sigma)$$

équation du mouvement d'un point matériel pesant sur la courbe fixe.

Comme l'équation du mouvement de la chaîne ne dépend que de la fonction φ , le mouvement reste le même après qu'on a développé le cylindre qui projette horizontalement la courbe donnée, sur un de ses plans tangents.

Il y a deux cas où le mouvement du milieu M de la chaîne ne dépend pas de sa longueur :

1° La courbe fixe est une droite, ou une hélice tracée sur un cylindre vertical. - On a alors :

$$z = \varphi(s) = \alpha s$$

α désignant une constante, et l'équation (5) se réduit à :

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = -g\alpha,$$

équation indépendante de l .

2° La courbe fixe est une cycloïde d'axe vertical, ou une courbe obtenue en l'enroulant sur un cylindre vertical.

On sait qu'on a dans ce cas (1^{ère} année, p. 264)

$$z = \varphi(s) = \frac{s^2}{8R}, \quad (R \text{ rayon du cercle générateur}).$$

L'équation du mouvement est donc :

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = -\frac{g}{4R}\sigma.$$

Dans les deux cas, le milieu M de la chaîne se déplace comme un point pesant glissant sans frottement sur la courbe.

Autre cas particulier. - La courbe est un cercle situé dans un plan vertical. - On a, dans ce cas :

$$z = \varphi(\sigma) = R - R \cos \frac{\sigma}{R},$$

en prenant comme origine 0 des arcs, le point le plus bas

du cercle, et en appelant R le rayon du cercle. L'équation du mouvement est ici :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dt^2} &= \frac{g}{2l} \left[R \cos\left(\frac{\sigma+l}{R}\right) - \cos\left(\frac{\sigma-l}{R}\right) \right] \\ &= -\frac{g}{l} \sin\frac{\sigma}{R} \sin\frac{l}{R}, \end{aligned}$$

ou encore, en posant : $\theta = \frac{\sigma}{R}$,

$$(6) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin\frac{l}{R} \sin\theta.$$

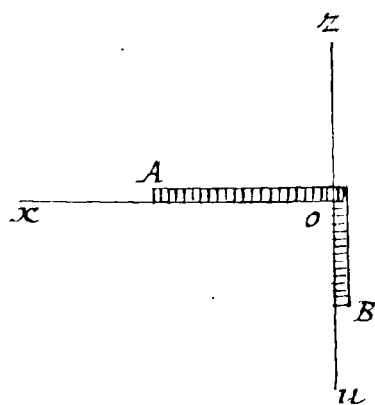
Si l tend vers zéro, on retombe bien sur l'équation du pendule simple :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{R} \sin\theta.$$

Le mouvement du milieu M de la chaîne est celui d'un pendule simple de longueur égale à $\frac{l}{\sin\frac{l}{R}}$.

Si $l = \pi R$, le mouvement de la chaîne est uniforme. On pouvait le prévoir puisque la chaîne occupe toute la circonférence.

Exemple d'une courbe formée de deux courbes distinctes. - La courbe est formée d'une horizontale OX et d'une verticale descendante OY .



Si la chaîne est toute entière sur la partie horizontale, son mouvement est uniforme, puisqu'on a : $z \equiv 0$, et $\frac{d^2\sigma}{dt^2} = 0$. Si un des éléments de la chaîne $\frac{dt^2}{dt^2}$ coïncide avec O , soit B l'extrémité de la chaîne qui se trouve sur OY , et u la distance OB ; on a, en comptant σ à partir de O dans le sens AOB :

$$z_0 = 0, \quad z_1 = -u, \quad \sigma = u - l;$$

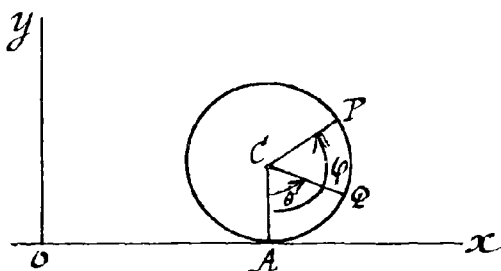
d'où l'équation du mouvement :

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{g}{2l} u;$$

le point B se déplace comme s'il était repoussé par l'origine proportionnellement à la distance. Cette dernière équation est valable tant que O se trouve entre A et B ; si B descend, A atteint le point O à un instant t_1 , et la chaîne pour $t > t_1$ tombe verticalement comme si chacun de ses éléments était libre.

11. - Exercice où le nombre des paramètres est supérieur à l'unité.

Un tube solide, homogène, pesant, ayant la forme d'un tore de très petite section, est assujéti à glisser sans frottement⁽¹⁾ sur un plan horizontal. A l'intérieur du tube glisse sans frottement un point pesant P de masse égale à celle du tube. Etudier le mouvement en supposant qu'à l'instant initial le système est abandonné dans un plan vertical Π sans vitesse ou avec des vitesses dirigées dans ce plan.



Il est évident, par raison de symétrie⁽²⁾, que le mouvement aura lieu dans le plan Π .

Prenons ce plan comme plan des xy , l'axe des x étant l'horizontale sur laquelle glisse le tube, et Oy une verticale ascendante. De combien de para-

mètres dépend la position du système?

Le centre du tube est défini par son abscisse x ; la position du tube autour de son centre est définie par l'angle $\theta = \angle ACQ$ que fait avec la verticale un rayon CQ lié invariablement au tube. Enfin la position du tube étant connue, la position de P sur le tube est définie par l'angle $\varphi = \angle ACP$ que fait CP avec la verticale.

Pour déterminer le mouvement, nous avons besoin de trois équations, où ne figurent que les forces données à l'exclusion des réactions. - Le théorème des forces vives nous en donnera une; - cherchons-en deux autres.

Les seules forces extérieures appliquées au système sont la pesanteur et la réaction de Ox sur le tube, laquelle est normale à Ox . Les forces extérieures n'ont donc pas de composantes suivant Ox . Soit $2M$ la masse totale du système, ξ l'abscisse du centre de gravité; on a:

$$2M\xi'' = 0 \text{ d'où } \xi = at + b.$$

⁽¹⁾ On entend par là que le tube est assujéti à rester en contact avec le plan horizontal, et que la réaction de ce plan sur le tube est normale au plan. Le disque est libre de glisser, rouler et pivoter sur le plan [1^{ère} année, p. 65-67]

⁽²⁾ Voir le N^o 14.

Pour trouver une troisième équation remarquons que le tube considéré comme un système, est soumis à des forces extérieures (pesanteur, réaction de Ox , réaction de P normale au tube) qui passent toutes par son centre de gravité. Appliquons le théorème des moments cinétiques au mouvement du tube autour de son centre de gravité : le tube, dans ce mouvement, est animé d'une rotation autour de l'axe CZ , perpendiculaire au plan xoy , rotation dont la vitesse angulaire ω est égale à $|\frac{d\theta}{dt}|$; le moment résultant, par rapport à CZ , des quantités de mouvement est égal (1^{ère} année, p. 161), en valeur absolue, à :
 $\omega \sum m r^2 = \omega M l^2$ [M désignant la masse du tube circulaire, et l le rayon du cercle]. Par conséquent, ω est constant, $\theta' = \theta'_0$; le tube tourne d'un mouvement uniforme autour de son centre.

Nous possédons ainsi assez d'équations pour définir le mouvement du système. Écrivons explicitement ces équations.

Écrivons d'abord l'équation des forces vives. Les forces données se réduisent ici à la pesanteur, dont le travail est la différentielle de la fonction $-2Mg\eta$, η désignant l'ordonnée du centre de gravité G du système, milieu de CP ; $\eta = l(2 - \cos\varphi)$; on a donc, en appelant T la demi-force vive du système :

$$T = -2Mg\eta + Cte = 2Mgl \cos\varphi + Cte$$

Calculons T , en remarquant qu'il importe peu, dans l'égalité précédente, de la diminuer d'une constante.

Cette force vive est la somme : 1^o de la force vive $2T'$ du point G où la masse $2M$ serait concentrée; 2^o de la force vive $2T''$ du système dans son mouvement rapporté aux axes Gx, y , (parallèles aux axes Oxy).

1^o La force vive $2T'$ est égale à $2M(\xi^2 + \eta^2)$ et, comme $\xi = \xi_0$, on ne la diminue que d'une constante en la réduisant à : $2M\eta^2 = 2Ml^2 \sin^2\varphi$.

2^o La force vive relative T'' est la somme des forces vives de P et du tube dans le mouvement autour de G . Dans ce mouvement, P reste à la distance l de G et sa force vive est égale à : $Ml^2\varphi'^2$. Quant à la force vive du tube, elle s'obtient en ajoutant à la force vive de son centre de gravité G (supposé de masse M), c'est-à-dire à $Ml^2\varphi'^2$, la force vive du tube dans son mouvement autour de C , c. à. d. $4Ml^2\theta'^2 = 4Ml^2\theta_0'^2$.

En définitive, à une constante d'addition près,
 $2T$ se réduit à :

$$2Ml^2\dot{\varphi}^2 [1 + \sin^2\varphi];$$

le théorème des forces vives donne donc ici, en divisant les deux membres par Ml :

$$l\dot{\varphi}^2 [1 + \sin^2\varphi] = 2g(\cos\varphi + h);$$

d'où t en fonction de φ par une quadrature. Il est facile de voir que les variations de φ sont périodiques⁽¹⁾; elles sont, de plus, oscillatoires si h est compris entre -1 et $+1$, et $\dot{\varphi}$ s'annule et change de signe chaque fois que φ atteint une des valeurs $\varphi_1, -\varphi_1$ qui annulent $(\cos\varphi + h)$.

Écrivons enfin l'équation : $\xi = at + b$.

On a : $\xi = x + l\sin\varphi$;

d'où :

$$x = at + b - l\sin\varphi.$$

Si T désigne la période de la fonction $\varphi(t)$, chaque fois que t s'accroît de T , le système reprend (avec les mêmes vitesses) la même position, transportée seulement parallèlement à Ox de la longueur aT , et le même mouvement recommence à ce transport préalable près. En particulier, si ξ_0 est nul, c'est-à-dire si $x_0 = -l\cos\varphi_0$, le système, au bout du temps T , reprend exactement la même position avec les mêmes vitesses⁽²⁾.

Remarque. - On aurait pu être tenté d'appliquer le théorème des forces vives au mouvement du système autour de son centre de gravité G . On aurait dit : « Le travail de la pesanteur est nul dans ce déplacement relatif, et comme le travail des réactions est nul, la force vive relative T' du système est constante; d'où « $\dot{\varphi} = Cte$ »

⁽¹⁾ La discussion est toute semblable à celle du pendule simple; on a :

$$\frac{\sqrt{2g}}{l} dt = d\varphi \sqrt{\frac{1 + \sin^2\varphi}{\cos\varphi + h}},$$

et, sous le radical, le signe du dénominateur est seul à considérer.

⁽²⁾ C'est uniquement pour simplifier l'écriture que j'ai supposé égales les deux masses du tube et du point. La solution s'appliquerait aussi bien au cas où ces deux masses seraient quelconques.

Ce résultat et ce raisonnement sont inexacts [N° 8]: le travail des réactions intérieures est bien nul encore, mais par rapport aux axes Gx, y , la droite Ox (obstacle) est mobile et le travail élémentaire de la réaction R exercée par Ox sur le tube n'est plus nul; ce travail est égal à $-Rd\eta$, car, dans le déplacement \mathcal{D} du système rapporté aux axes Gx, y , le déplacement élémentaire du point A du tube en contact, à l'instant t , avec Ox , a comme composante $-d\eta$ suivant la verticale ascendante [direction de \vec{R}].

Chapitre II

Chapitre II.

Étude du mouvement d'un système quand toutes les forces sont données.

12. - Equations du mouvement.

Soit S un système composé de n éléments P_1, P_2, \dots, P_n , de masse m_1, m_2, \dots, m_n . Soit $Oxyz$ le trièdre de référence adopté, \vec{F}_j la force totale (relative aux axes $Oxyz$) qui s'exerce sur le point P_j . Supposons que, pour un instant t arbitraire, les forces \vec{F} soient connues quand on connaît la position et la vitesse de chaque élément P : autrement dit, les X_j, Y_j, Z_j sont des fonctions connues de $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, x'_1, \dots, z'_n, t$. On dit alors que toutes les forces appliquées au système sont données.

Les équations du mouvement s'écrivent alors :

$$(1) \begin{cases} m_1 x_1'' = X_1(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, x'_1, \dots, z'_n, t), \\ m_1 y_1'' = Y_1(\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}), \\ m_1 z_1'' = Z_1(\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}), \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ m_n z_n'' = Z_n(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, x'_1, \dots, z'_n, t). \end{cases}$$

Ces équations définissent le mouvement du système S , connaissant les conditions initiales de S à l'instant t_0 .

Par exemple, les axes choisis étant invariablement liés à l'écorce terrestre, supposons que le système se compose de n éléments pesants P_1, \dots, P_n , sans contact entre eux, lancés dans le vide, et qui s'attirent suivant les lois de Newton. Le mouvement de S sera défini par des équations de la forme (1) où les seconds membres ne dépendent que de x_1, y_1, \dots, z_n (et point des vitesses ni du temps) et dériveront même d'une fonction de forces.

(1) Voir cette note page 21.

Si le système, au lieu d'être lancé dans le vide, est lancé dans un fluide immobile, admettons que la résistance du milieu soit, pour chaque élément P_n , directement opposée à la vitesse et fonction donnée de cette vitesse: dans les équations (1), les seconds membres seront des fonctions connues de $x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n$, mais ne dépendront pas du temps.

13. Des forces de contact et des forces à distance.

Les forces absolues qui s'exercent entre deux éléments matériels peuvent être, comme on sait, ou des forces de contact ou des forces à distance.

Les forces à distance sont 1° les attractions newtoniennes [qui ne dépendent que de la distance des deux éléments et de leurs masses]; 2° les attractions et répulsions électriques, électrodynamiques et magnétiques, qui dépendent et de la position des deux éléments et de leur état physique (électrique et magnétique).

Les forces de contact, qui s'exercent entre deux éléments donnés, dépendent de leur déformation, de leur température etc.

Supposons que le système matériel, dans les conditions étudiées, ne puisse présenter d'autres phénomènes que des déplacements et des déformations légères de ses éléments. Si, à un instant t , on connaît la position du système \mathcal{S} , les forces à distance qui s'exercent à cet instant entre ses éléments sont déterminées. Mais pour que les forces de contact le soient aussi, il faut connaître en outre les vitesses et les déformations de ces éléments. Quand ces déformations sont inappréciables, tout le problème est de déterminer, à chaque instant t , la position de divers éléments sensiblement solides, du système: mais, pour des positions et des vitesses données de ces éléments, les forces de contact qui s'exercent entre eux ne sont point déterminées. Les contacts entre éléments du système introduisent alors, dans les seconds membres

(1) À condition de confondre la pesanteur avec la pesanteur vulgaire, ainsi que nous le ferons toujours à moins de spécifier expressément le contraire. Si on introduit la pesanteur vraie [1^{ère} année, p. 313-314 et 331-332], elle fait figurer dans les seconds membres des équations (1), de petits termes dépendant des vitesses et du temps.

de (1), des réactions inconnues. Mais, d'autre part, l'impenétrabilité des éléments solides en contact diminue le degré de liberté du système et lui impose des liaisons géométriques.

Des remarques analogues s'appliquent aux forces absolues exercées sur le système par des corps extérieurs indéformables.

Par exemple, considérons une bille homogène, pesante, de très petit rayon, qui repose sur un plan horizontal fixe et parfaitement lisse. La réaction (normale) du plan sur la bille, soit N , est inconnue, mais le centre de la sphère se meut dans un plan horizontal fixe⁽¹⁾, soit $z=0$, [Oz étant la verticale ascendante]; la troisième équation du mouvement donne: $mz'' = -mg + N$, et \mathcal{D} , comme $z \equiv 0$, elle détermine N .

L'étude des systèmes soumis à des liaisons géométriques qui introduisent des réactions inconnues, constituera une des parties les plus importantes de ce cours. Dans ce chapitre, nous nous limitons au cas où toutes les forces sont données.

14. - De la symétrie en Mécanique.

Soit Π un plan absolument fixe, et S un système qui à l'instant t est symétrique par rapport à Π ainsi que ses vitesses: si S est infiniment éloigné de tous les autres corps, il reste symétrique par rapport au plan Π . Il en va de même si S se trouve en présence d'autres corps qui restent eux-mêmes symétriques par rapport au plan Π . Quand il est ainsi, les forces absolues qui s'exercent sur S à chaque instant sont symétriques

⁽¹⁾ En réalité, la bille et le plan se déforment au point de contact, et le centre P de la bille descend un peu au dessous du plan $z=0$; soit $z = -\varepsilon$ la cote de ce point à l'instant t ; admettons [conformément à un mode d'hypothèse que nous retrouverons en élasticité] que la réaction du plan sur la bille soit proportionnelle à ε , et posons: $N = \lambda \varepsilon$ [λ constante donnée]; on a:

$$mz'' = -mg - \lambda z;$$

si pour $t=0$, $z_0 = z'_0 = 0$, cette équation donne: $z = -\frac{mg}{\lambda} (1 - \cos \sqrt{\frac{\lambda}{m}} t)$ le z du point P varie périodiquement de 0 à $-\frac{mg}{\lambda}$, la période des oscillations étant $2\pi \sqrt{\frac{m}{\lambda}}$. Si λ est très grand, ces oscillations sont très faibles, ainsi que leurs vitesses, et leur période très courte.

par rapport au plan π .

On peut étendre le principe de la symétrie au mouvement apporté à des axes quelconques.

Soit \vec{F}_K la force totale (relative aux axes choisis $oxyz$) qui s'exerce sur l'élément P_K du système, et π un plan invariablement lié aux axes. Les conditions initiales du système S à l'instant t sont dites symétriques par rapport au plan π , si à tout élément P_i de S non situé dans π correspond un élément symétrique P_1 de S , de même masse et dont la vitesse est symétrique de celle de P_i . De plus, tout élément P de S situé dans π (à l'instant t) a sa vitesse contenue dans ce plan.

Ceci posé, admettons que, S étant placé (à un instant arbitraire t) dans des conditions initiales symétriques d'ailleurs quelconques, les forces \vec{F}_K qui s'exercent à l'instant t sur S soient elles-mêmes symétriques par rapport à π . Je dis que S restera symétrique par rapport à π si pour l'instant initial t_0 ses conditions initiales sont symétriques.

En effet, soit P_1 et P_2 , P_3 et P_4, \dots, P_{j-1} et P_j les éléments de S symétriques à l'instant t_0 , les autres éléments étant contenus dans le plan π . Faisons, dans les équations (1):

$z_2 \equiv -z_1, z_4 \equiv -z_3, \dots, z_j \equiv -z_{j-1}$, et $z_{2j+1} \equiv z_{2j+2} \equiv \dots \equiv z_n \equiv 0$,
d'où: $z'_2 \equiv -z'_1$, etc. et $z'_{2j+1} \equiv 0$, etc. Le nombre $3n$ des coordonnées inconnues est ainsi réduit de $(n-j)$ unités. D'autre part, après cette substitution, on a (d'après l'hypothèse sur la symétrie des forces):

$$Z_1 \equiv -Z_1, Z_4 \equiv -Z_3, \dots, Z_j \equiv -Z_{j-1}, \text{ et } Z_{2j+1} \equiv Z_{2j+2} \dots \equiv Z_n \equiv 0,$$

Les deux équations (1):

$$m_1 z''_1 = Z_1, \quad m_2 z''_2 = Z_2 \quad (\text{où } m_2 = m_1)$$

se réduisent à une seule; l'équation $m_{2j+1} z''_{2j+1} = Z_{2j+1}$ se réduit à une identité. Le nombre des équations distinctes se réduit donc à $2n+j$. On obtient ainsi un système de $(2n+j)$ équations du 2^e ordre portant sur $(2n+j)$ fonctions inconnues, et qui définissent un mouvement (symétrique) et un seul répondant aux conditions initiales symétriques.

C. q. f. d.

Le même théorème s'applique à la symétrie par rapport à une droite ou par rapport à un point.

Exemple. - Un disque plus, pesant, est abandonné dans une position où son plan est vertical, sans vitesse ou avec des vitesses situées dans ce plan. En vertu du théorème précédent, son mouvement aura lieu dans le plan vertical Π , qui contient la position initiale du disque. Il en va de même si le disque est en contact, sans frottement, avec un plan horizontal, ou avec un plan incliné que il coupe selon une ligne de plus grande pente.

Le théorème de la symétrie s'applique de même à l'exemple du N° 11.

15. - Systèmes soumis à des forces qui ne dépendent que de la position du système.

Quand les seconds membres des équations (1) ne dépendent que de x_1, y_1, \dots, z_n , le mouvement jouit de certaines propriétés remarquables.

Tout d'abord, si on change t en $-t$ (ou en $\pm t + \alpha$), les équations (1) ne changent pas. A tout mouvement $x_1 = f_1(t), y_1 = \varphi_1(t), \dots, z_n = \psi(t)$, du système en correspond un autre obtenu en remplaçant t par $-t$ dans $f_1, \varphi_1, \dots, \psi$, et cela quel que soit l'instant choisi pour origine du temps. C'est ce qu'on peut traduire brièvement en disant que les mouvements du système sont réversibles.

En particulier, si pour $t = t_0$, toutes les vitesses de S sont nulles, changeons $t - t_0$ en $-(t - t_0)$: les conditions initiales de S à l'instant t_0 ne changent pas; le nouveau mouvement répond aux mêmes conditions initiales que le premier, et par suite coïncide avec lui. Autrement dit, les fonctions $x_1(t), y_1(t), \dots, z_n(t)$ sont des fonctions paires de $(t - t_0)$.

Plus généralement, changeons t en kt : les nouvelles équations du mouvement se déduisent des premières en multipliant les seconds membres par k^2 .

D'où ce théorème :

Si on modifie dans le même rapport invariable k^2 l'intensité de toutes forces F_k appliquées au système S , sans changer leur direction ni leur sens, les nouveaux mouvements de S se déduisent des premiers en changeant t en kt .

L'ensemble des trajectoires de S n'est donc pas modifié: en particulier, si le système part sans vitesse d'une position donnée,

la suite des positions qu'il occupe est la même, quelle que soit la valeur numérique donnée à h , mais le déplacement de S est plus ou moins rapide selon que h est plus ou moins grand.

- Cas particuliers où le mouvement est périodique.
Si la force vive de S s'annule à deux instants t_0 et t_1 , les fonctions x, y, \dots, z_n sont des fonctions paires de $t - t_0$ et de $t - t_1$, par suite [1^{ère} année p.] des fonctions périodiques de t dont la demi-période est égale à $t_1 - t_0$.

16. - Systèmes conservatifs.

Un système est dit conservatif [1^{ère} année, p. 146] si les forces intérieures dérivent d'une fonction de forces U qui ne dépend que de la configuration du système, c'est-à-dire des distances mutuelles $P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_{p-1}$ des éléments $P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_{p-1}$ de S . A une configuration donnée du système correspond une seule détermination de U .

En particulier, supposons le système infiniment éloigné des autres corps matériels, et étudions son mouvement absolu. Les forces extérieures sont nulles; chaque fois que S reprend la même configuration, sa force-vive T reprend la même valeur, car $T = U + h$. En particulier si $T = 0$ pour $t = 0$, et si à l'instant t_1 il reprend la même configuration, T est nul pour $t = t_1$, et le mouvement admet la période $2t_1$.

Les équations du mouvement sont :

$$(2) \quad m_i x_i'' = \sum_{j,k} \frac{\partial U}{\partial P_{jk}} \frac{\partial P_{jk}}{\partial x_i},$$

et $(3n-1)$ équations analogues: elles ne changent pas quand on remplace les axes par de nouveaux axes rectangulaires invariablement liés aux premiers.

17. - Les axes choisis étant quelconques, et le système S n'étant plus isolé, admettons que la force extérieure totale (relative aux axes choisis) qui s'exerce sur chaque élément P_k de S soit $m_k \vec{f}$, le vecteur \vec{f} (bien déterminé à chaque instant t) étant le même pour les divers éléments. Étudions le mouvement de S autour de son centre de gravité G , c.à.d. par rapport aux axes $Gxyz$ parallèles aux axes donnés: ce mouvement [1^{ère} année, p. 113] est le même que si les axes

$Gxyz$ étant des axes absolus, le système S était isolé. Dans le cas où S est conservatif, ce mouvement est donc défini par les équations (2) et les remarques du N.° précédent subsistent. Ceci s'applique notamment à la chute dans le vide d'un système pesant conservatif.

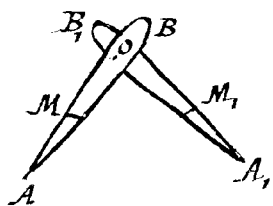
18. - Remarque sur le théorème des aires.

Ces dernières propositions vont nous conduire à un résultat intéressant qui concerne le changement d'orientation d'un système sous l'action des seules forces extérieures.

Lorsqu'on abandonne un corps solide pesant dans le vide sans vitesse initiale, nous savons [1^{ère} année, p. 602] qu'il tombe verticalement d'un mouvement de translation; son orientation dans l'espace reste invariable. Ce fait résulte du théorème des aires, ou si on veut du principe de l'action et de la réaction qui régit les forces intérieures.

Mais quand le système pesant S est déformable, cette conclusion ne subsiste plus. Abandonné sans vitesse dans le vide, le système peut reprendre sa configuration initiale avec une orientation différente. Sans recourir à l'exemple du chat qui retombe sur ses pattes, il est facile de montrer dans un cas très simple que la chose est possible.

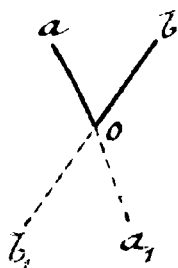
Exemple. - Imaginons un compas dont les deux branches A_0B_0, A_1B_1 sont légèrement décalées l'une par rapport à l'autre, de façon à pouvoir tourner sans se rencontrer autour de l'axe OO_1 . Les deux branches sont pesantes, de même longueur et de même masse. Le centre de gravité du compas est au milieu du segment



du compas est au milieu du segment OO_1 , que nous assimilons à un point. Enfin, les deux branches exercent l'une sur l'autre des forces qui satisfont au principe de l'action et de la réaction, et qui peuvent se remplacer par les deux forces suivantes: soit θ l'angle A_0B_0 compris entre $-\pi$ et $+\pi$ et compté positivement autour de la demi-droite OO_1 ; tout se passe comme si le milieu M de A_0B_0 et le milieu M_1 de A_1B_1 exerçaient l'un sur l'autre la force $F = \mu \sin \theta$, force attractive si $\sin \theta$ est < 0 , répulsive si $\sin \theta$ est > 0 .

Ceci posé, abandonnons le compas sans vitesse

dans un plan vertical, les pointes en l'air et faisant un angle θ positif et très petit dont la verticale est la bissectrice. Par raison de symétrie, le compas va se mouvoir dans le plan vertical initial, et la verticale Oz restera bissectrice de l'angle AOB . Étudions le mouvement du système autour de son centre de gravité O : au début du mouvement, les deux branches se repoussent, s'écartent, viennent en prolongement ($\theta = \pi$); elles commencent alors à s'attirer, se rapprochent, se croisent ($\theta = 0$), recommencent



alors à se repousser et à s'écarter, et à un certain instant occupent les positions Oa_1, Ob_1 qui prolongent les positions primitives Oa, Ob . Le système a repris alors sa configuration primitive, mais tournée de 180° .⁽¹⁾

Remarque. — La vitesse (absolue) de rotation des deux branches va constamment en croissant. Quand il atteint la position a, ob , le système a une force vive différente de zéro. Il n'est donc pas conservatif. Les forces intérieures dérivent pourtant d'une fonction de forces, qui ne dépend que de la configuration du système mais qui n'est pas uniforme.⁽²⁾ En effet, si l désigne la longueur $OA = OB$, on a: $MM_1 = l |\sin \frac{\theta}{2}|$, et le travail élémentaire de F est: $\epsilon \mu \frac{l}{2} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} d\theta$, ($\epsilon = \pm 1$, $\epsilon \sin \frac{\theta}{2} > 0$); ce travail est la différentielle de $-\frac{2}{3} \epsilon \mu l \cos^3 \frac{\theta}{2} + C^te$. Si, par exemple, θ varie ∞ d'une façon continue de 0 à 2π , on prend (pour avoir une fonction de forces continue)

$$U = -\frac{2}{3} \mu l \cos^3 \frac{\theta}{2} \quad \text{pour } 0 \leq \theta < \pi, \text{ et } U = +\frac{2}{3} \mu l \cos^3 \frac{\theta}{2} \quad \text{pour } \pi \leq \theta < 2\pi.$$

Pour $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$, la différence des deux valeurs de U est $\frac{4}{3} \mu l$. Chaque fois que θ s'accroît de 2π (ce qui ramène

⁽¹⁾ Au lieu d'admettre la loi de force indiquée, il serait loisible de supposer que les deux branches du compas sont chargées d'électricité de même nom, mais se déchargent à partir de l'instant initial, en sorte que leur répulsion s'annule avant que θ ait atteint la valeur π .

⁽²⁾ Pour deux valeurs de θ égales et de signes contraires, la configuration du système est la même.

la même configuration du système), la force vive autour de O s'accroît de $\frac{4}{3}\mu l$.

19. — Le théorème des aires et les systèmes conservatifs.

Il n'existe pas d'exemple analogue au précédent et où le système soit conservatif. Nous allons démontrer, en effet, le théorème suivant :

Un système conservatif pesant abandonné sans vitesse dans le vide, ne peut reprendre sa configuration initiale orientée différemment par rapport au sol.

En effet, étudions le mouvement du système S autour de son centre de gravité G , c'est-à-dire par rapport à des axes $Gxyz$ (de direction invariable relativement au sol). Pour $t=0$, la force vive $2T$ de S autour de G est nulle, ainsi que son moment cinétique autour de G : ce dernier vecteur reste donc constamment nul [théorème des moments cinétiques autour de G]. A un certain instant t_1 , S reprend sa configuration initiale, et $2T$ par suite la valeur zéro. Par rapport à des axes trirectangles $G\xi\eta\zeta$ convenablement choisis et fixes relativement aux premiers, les coordonnées ξ, η, ζ d'un élément quelconque P de S à l'instant t_1 sont les mêmes que les coordonnées x, y, z de P à l'instant $t=0$; les vitesses de S sont nulles, et pour $t=t_1$, comme pour $t=0$; enfin, les équations du mouvement [équations (2)] sont les mêmes que le mouvement soit rapporté aux axes $Gxyz$ ou aux axes $G\xi\eta\zeta$ [N° 16]; si on pose $t = t_1 + T$, les conditions initiales pour $T=0$ et les équations différentielles, qui définissent les fonctions ξ, η, \dots, ζ de T sont les mêmes que celles qui définissent les fonctions x, y, \dots, z de t : il suit de là que les valeurs de ξ, η, \dots, ζ à l'instant $t_1 + h$, coïncident respectivement avec les valeurs de x, y, \dots, z à l'instant h . La distance r_{jk} de deux éléments quelconques P_j, P_k de S est donc la même à l'instant h et à l'instant $t_1 + h$: les r_{jk} sont les fonctions de t qui admettent la période t_1 .

Mais, d'autre part, ce sont des fonctions paires de t , car x, y, \dots, z sont des fonctions paires de t [N° 15] : leurs dérivées $r'_{jk}(t)$ s'annulent donc⁽¹⁾ toutes pour $t = \frac{t_1}{2}$. Je dis qu'à cet instant $\frac{t_1}{2}$, T est nul.

En effet, les r'_{jk} étant nuls pour $t = \frac{t_1}{2}$, les vitesses de S autour de G à cet instant sont les mêmes que si S

(1) En effet, les r'_{jk} sont des fonctions impaires de t admettant la période t_1 ; on a donc :

$$(r'_{jk}(-\frac{t_1}{2})) = -r'_{jk}(\frac{t_1}{2}) = r'_{jk}(\frac{t_1}{2}) = 0.$$

éti un solide; S est donc animé d'une rotation instantanée d'ensemble ω autour d'une certaine droite GW ; Or nous savons que son moment cinétique par rapport à G est nul; il en est donc de même de son moment par rapport à GW . Mais ce dernier est égal à $MK^2\omega$, MK^2 désignant le moment d'inertie de S autour de GW [$MK^2 > 0$]; il faut donc que ω soit nul: d'où $T=0$ pour $t=\frac{t_1}{2}$.

La force-vive T de S étant nulle pour $t=0$ et $t=\frac{t_1}{2}$, le mouvement de S admet la période t_1 , [N° 15]; à l'instant t_1 , il reprend non seulement sa configuration initiale, mais sa position initiale par rapport au trièdre $Gxyz$, c'est-à-dire son orientation initiale par rapport au sol.
C. q. f. d.

20. Remarques. — Il est évident que le théorème comprend le suivant:

Dans son mouvement absolu, un système conservatif isolé⁽¹⁾ qui part du repos ne peut reprendre sa configuration initiale sans reprendre aussi son orientation initiale.

Nous verrons par la suite que les propositions précédentes s'étendent aux systèmes formés d'éléments indéformables, dont les forces intérieures autres que les forces de contact dérivent d'un potentiel fonction uniforme de la configuration du système. Ses éléments peuvent être lisses ou rugueux, avoir des contacts quelconques, se heurter, etc.

Dans certaines théories cinétiques de la matière, on admet que les corps sont formés de particules en mouvement formant des systèmes conservatifs. Ces théories sont-elles détruites par le simple exemple du chat qui retombe sur ses pattes? Il n'en est rien. Pour qu'il en fût ainsi, il faudrait que tous les atomes qui composent le corps du chat eussent repris à la fin de la chute leur configuration initiale. Or nous savons seulement que le chat reprend sensiblement la même forme extérieure; mais ses muscles se sont contractés et détendus; ils ne sont plus dans le même état élastique, thermique, etc.

⁽¹⁾ C'est-à-dire infiniment éloigné de tous les autres corps.

Dynamique des solides indéformables.

Chapitre I.

Mouvement d'un solide plan parallèlement à un plan fixe.

21. Equations du mouvement d'un disque plat dans un plan.

Soit $Oxyz$ les axes choisis, et Π un plan fixe qu'on peut toujours supposer être le plan xoy . Soit S un disque solide plat, soumis à des forces extérieures qui présentent la symétrie suivante : si, à un instant t , S occupe une position quelconque dans le plan xoy avec des vitesses quelconques contenues dans ce plan, toutes les forces extérieures qui s'exercent sur S à l'instant t sont elles-mêmes contenues dans ce plan. Nous savons (N° 14) que le disque restera indéfiniment dans le plan xoy , s'il y est contenu ainsi que ses vitesses à l'instant initial. Étudions son mouvement.

La position du disque dans le plan dépend de 3 paramètres : soit les coordonnées (ξ, η) de son centre de gravité G , et l'angle θ que fait une direction fixe GA du disque \mathcal{D} avec Ox . [$\theta = x, \bar{A}b$] appelons M la masse totale du disque, MK^2 son moment d'inertie autour de G ,⁽¹⁾ X^e et Y^e les composantes de la somme géométrique de toutes les forces extérieures appliquées au disque, Γ^e leur moment par rapport⁽²⁾ au point G .

Le théorème du mouvement du centre de gravité donne :

$$(1) \quad M\xi'' = X^e, \quad M\eta'' = Y^e;$$

le théorème des moments cinétiques autour de G donne :

$$(2) \quad MK^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = \Gamma^e,$$

car (dans son mouvement autour de G) le moment cinétique

⁽¹⁾ $MK^2 = \sum mr^2$, m étant la masse d'un élément P de S et r la distance PG .

⁽²⁾ C'est-à-dire le moment par rapport à l'axe Gz_3 tel que le trièdre trirectangle $Gx_1 y_1 z_1$ soit positif (Gx_1, Gy_1 parallèles à Ox, Oy).

de S par rapport à GZ , est (en grandeur et signe) $MK^2 \frac{d\theta}{dt}$.

22. - Remarque sur le théorème des forces-vives.
Vérifions, comme nous l'avons prévu [N° 6], que le théorème des forces vives est une conséquence des équations (1) et (2). La force-vive $2T$ du disque est [théorème de Krönig]:

$$2T = M(\xi^2 + \eta^2) + MK^2 \theta^2.$$

D'autre part, dans le déplacement élémentaire $d\xi, d\eta, d\theta$ du disque, le travail des forces intérieures est nul, celui des forces extérieures est [1^{ère} année, p. 148-149]:

$$X^e d\xi + Y^e d\eta + \Gamma^e d\theta;$$

le théorème des forces vives donne donc:

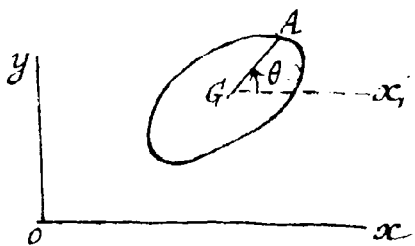
$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ M(\xi^2 + \eta^2) + MK^2 \theta^2 \} = X^e \xi + Y^e \eta + \Gamma^e \theta,$$

ou:

$$(3) \quad M(\xi' \xi + \eta' \eta + K^2 \theta' \theta'') = X^e \xi + Y^e \eta + \Gamma^e \theta;$$

équation qui se déduit des trois équations (1) et (2) en les multipliant respectivement par ξ', η', θ' et faisant la somme.

23. - Cas où le solide est libre.



Supposons le solide libre et les forces extérieures données, [c'est-à-dire connues à un instant t quand on connaît à cet instant la position de S et ses vitesses]: X^e, Y^e, Γ^e sont des fonctions données de $\xi, \eta, \theta, \xi', \eta', \theta', t$, et les trois équations différen-

tielles du second ordre (1) et (2) définissent les trois fonctiona ξ, η, θ de t connaissant les conditions initiales de S , c.à.d. $\xi_0, \eta_0, \theta_0, \xi'_0, \eta'_0, \theta'_0$ pour $t = t_0$.

Par exemple, si S est un corps pesant lancé dans le vide, les équations (1) expriment que G se meut comme un point pesant libre; l'équation (2) montre que θ' reste constant: le disque tourne uniformément autour de G .

24. Remarque sur les forces extérieures géométriquement équivalentes.

Ses équations qui définissent le mouvement ne changent pas quand on y remplace les forces extérieures par des forces géométriquement équivalentes [1^{ère} année, p. 120-121]: le mouvement lui-même ne change donc pas. Par exemple, si les éléments P de S sont attirés par O proportionnellement à leur masse m et à la distance OP , ces forces admettent une résultante géométrique $-\mu M \cdot OG$ [μ coefficient d'attraction]. Le mouvement de S est le même que si G était attiré par O proportionnellement à la distance: G décrit une ellipse de centre O , le disque tournant uniformément autour de G .

25. Cas où le solide est assujéti à une liaison.

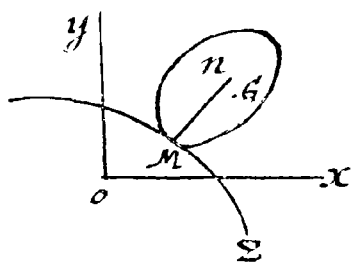
Supposons au contraire que le disque S soit assujéti à rester en contact avec un disque fixe Σ , les deux courbes étant parfaitement lisses. Les trois paramètres ξ, η, θ sont alors liés par une relation, soit:

$$(3) \quad H(\xi, \eta, \theta) = 0,$$

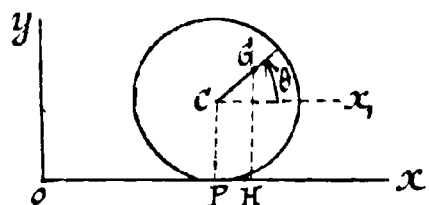
qui exprime que S est en contact avec Σ : par exemple, si Σ est un cercle de centre O et de rayon λ , et S un cercle homogène de rayon l extérieur à S , on aura:

$$\xi^2 + \eta^2 = (l + \lambda)^2.$$

D'autre part, la réaction de Σ sur S est normale aux deux courbes en contact, mais son sens et son intensité sont inconnus, soit MN la demi-normale à S au point de contact M menée dans un certain sens, et N la réaction de Σ sur S comptée positivement dans le sens MN ; les seconds membres des équations (1) et (2) renferment linéairement N ; les quatre équations (1), (2), (3) portent sur les quatre fonctions inconnues ξ, η, θ, N de t , et définissent ces fonctions connaissant les conditions initiales.



26 - Exemple. - Mouvement d'un disque circulaire plan non homogène, pesant, glissant sans frottement sur un plan horizontal Π et lancé initialement dans un plan vertical.



Le mouvement a lieu dans le plan vertical initial xoy , et on aperçoit immédiatement deux intégrales premières du mouvement: la première donnée par le théorème du mouvement du centre de gravité projeté sur l'horizontale Ox , la seconde par le théorème des forces vives.

Comme la position du disque ne dépend que de deux paramètres, ces deux intégrales vont définir le mouvement⁽¹⁾.

Preions comme axe Ox l'intersection du plan du mouvement et du plan horizontal fixe, comme axe Oy la verticale ascendante. Soit l le rayon du disque, C son centre géométrique, λ la distance CG ; la position du disque est déterminée si on connaît l'abscisse x de C et l'angle θ de CG avec Ox [$\theta = x, CG$], et on a :

$$\xi = x + \lambda \cos \theta, \quad \eta = l + \lambda \sin \theta.$$

Les deux intégrales premières signalées donnent :

$$\xi' = \xi_0, \quad \eta^2 + K^2 \theta'^2 = -2gy + C^{lc},$$

c'est-à-dire :

$$x + \lambda \cos \theta = at + b,$$

$$(\lambda^2 \cos^2 \theta + K^2) \theta'^2 = -2g\lambda \sin \theta + h,$$

d'où t en fonction de θ par une quadrature.

⁽¹⁾ On aurait deux intégrales premières analogues si le disque était de forme quelconque, et s'il était lancé sur un plan incliné Π parfaitement lisse, dans un plan vertical coupant Π suivant une ligne de plus grande pente.

Calcul de la réaction. - Pour calculer la réaction il suffit d'écrire les trois équations (1), d'y remplacer ξ, η en fonction de x, θ et d'éliminer x'' et θ'' : soit N la réaction du plan Π sur S , comptée positivement dans le sens ascendant Oy ; les deux dernières équations (1), (3) sont indépendantes de x'' et donnent:

$$\begin{aligned} M\eta'' &\equiv M\lambda (\cos \theta \theta'' - \sin \theta \theta'^2) = N - Mg \\ MK^2 \theta'' &= -\lambda \cos \theta N, \end{aligned}$$

d'où en éliminant θ'' :

$$(6) \quad N(K^2 + \lambda^2 \cos^2 \theta) = MK^2 (g - \lambda \sin \theta \theta'^2),$$

ou encore:

$$N = \frac{M(g - \lambda \sin \theta \theta'^2)}{1 + \frac{\lambda^2}{K^2} \cos^2 \theta}.$$

On voit que N n'est nullement égal au poids Mg du disque, sauf dans le cas particulier où λ est nul, c'est-à-dire où G coïncide avec C . Si notamment la rotation instantée du disque est nulle à l'instant t , la réaction N à cet instant est toujours moindre que Mg , à moins que G ne soit sur la verticale de C . Enfin N est négatif, c.à.d. que la réaction est dirigée vers le bas si θ'^2 est supérieur à $\frac{g}{\lambda \sin \theta}$, ce qui ne peut avoir lieu que quand G est au dessus de G .

27. - Cas où la liaison est unilatérale.

Nous avons fait la discussion en supposant que le disque ne pouvait ni descendre au dessous ni s'élever au dessus de Ox . On pourrait imaginer par exemple S réduit à un cerceau non homogène, la droite Ox réalisée matériellement, et un très petit anneau parfaitement lisse entourant à la fois Ox et le bois du cerceau. On pourrait encore supposer que le disque est situé entre deux plans horizontaux parallèles fixes Π et Π_1 , dont la distance est égale à $2l$, le plan le plus bas Π ne pouvant exercer sur S qu'une réaction dirigée vers le haut, et le plan le plus haut qu'une réaction dirigée vers le bas. Dans ces conditions, la réaction serait exercée par Π_1 dans les intervalles de temps où N serait négatif.

Mais dans la plupart des applications, la liaison imposée au solide mobile S est unilatérale, c'est-à-dire que S peut quitter le solide fixe d'un certain côté. Dans l'exemple précédent, S placé sur le plan Π pourrait se soulever au dessus du plan. Comment dans ce cas, étudier le mouvement?

Nous admettons que le plan Π et le disque sont parfaitement lisses et sans adhérence: S ne peut pénétrer le plan Π , mais peut s'en séparer sans rencontrer aucune résistance. Autrement dit, la réaction de Π sur S est ou nulle ou verticale et dirigée vers le haut: N est ou nulle ou positif.

La liaison imposée au disque S se traduit alors non par une égalité, mais par une inégalité, à savoir l'inégalité: $y = l \geq 0$, y désignant l'ordonnée de C , ou encore (puisque $\eta = y + l \sin \theta$):

$$(7) \quad \eta - l \sin \theta - l \geq 0.$$

À l'instant initial, le disque peut être en contact avec Ox ou situé au dessus de Ox . Dans ce dernier cas, il se meut comme un solide pesant libre jusqu'au moment où il vient heurter la droite Ox ; les deux corps se choquent, les vitesses de S subissent en général une variation brusque. Nous verrons, dans la théorie des percussions, que les nouvelles conditions initiales après le choc dépendent de la nature des deux corps.

Si à l'instant initial S est en contact avec Ox , la vitesse verticale y' du centre géométrique C de S est ou positive ou nulle: autrement dit, si pour $t = t_0$ le premier membre de (7) est nul, sa dérivée par rapport au temps est positive ou nulle. Quand elle est positive, le disque se soulève immédiatement au dessus de Ox et se meut comme un corps pesant libre jusqu'au moment où il vient choquer Ox . Le seul cas qui prête à difficulté est donc celui où le disque est en contact avec Ox à l'instant initial et où la vitesse de C est horizontale: pour $t = t_0$, le premier membre de (7) est nul ainsi que sa dérivée première par rapport à t . Les conditions initiales conviendraient à la liaison bilatérale.

Discussion des conditions initiales $y-l=0, y'=0$.

Dans ce cas, deux hypothèses sont possibles : ou bien S reste en contact avec Ox (du moins pendant un certain temps), comme si la liaison était bilatérale, ou bien S s'élève immédiatement au-dessus de Ox .

Dans la première hypothèse, le mouvement est défini par les égalités du n° 26, et N est donné par l'égalité (6) : comme N doit être positif ou nul, l'hypothèse n'est admissible que tant que l'expression $(g - \lambda \sin \theta \theta'^2)$ reste positive. Si pour $t=0$, on a : $(g - \lambda \sin \theta_0 \theta_0'^2) < 0$, S ne peut rester en contact avec Ox .

Dans la seconde hypothèse, le disque se meut comme un solide libre, mais comme il doit s'élever au-dessus de Ox , le premier membre de (7) doit être positif, et comme il est nul ainsi que sa dérivée première pour $t=t_0$, sa dérivée seconde doit être positive ou nulle pour $t=t_0$; autrement dit, on doit avoir :

$$\eta'' - \lambda \cos \theta \theta'' + \lambda \sin \theta \theta'^2 > 0 \text{ pour } t=t_0 ;$$

or, dans le mouvement libre, $\eta'' = -g$, $\theta'' = 0$, d'où la condition :

$$-g + \lambda \sin \theta_0 \theta_0'^2 > 0.$$

Si donc $g - \lambda \sin \theta_0 \theta_0'^2 > 0$, S ne peut se soulever au-dessus de Ox .

On voit que les deux faces de la discussion se correspondent parfaitement : si $g - \lambda \sin \theta_0 \theta_0'^2 > 0$, le mouvement libre est inadmissible, le mouvement lié est possible et seul possible ; c'est l'inverse qui a lieu si $g - \lambda \sin \theta_0 \theta_0'^2 < 0$.

Qu'arrive-t-il dans le cas exceptionnel ou :

$$g - \lambda \sin \theta_0 \theta_0'^2 = 0 ?$$

Si S se sépare de Ox , le signe du premier membre de (7) pour t voisin de t_0 est donné par celui de sa dérivée 3^e pour $t=t_0$; c'est-à-dire par le signe de :

$$\frac{d}{dt} \lambda \sin \theta \theta'^2 = 2\lambda \cos \theta \theta'^3, \text{ - puisque } \theta'' = 0.$$

Le mouvement libre n'est donc admissible que si $\cos \theta_0 \theta_0'$ est positif.

Si S reste en contact avec Ox , la réaction N est donnée par l'égalité (6) ; elle est nulle pour $t=t_0$ et son signe pour t voisin de t_0 est celui de $\frac{dN}{dt}$ pour $t=t_0$. Or on a, d'après (6), pour $t=t_0$:

$(K^2 + \lambda^2 \cos^2 \theta_0) \frac{dN}{dt} = MK^2 \frac{d}{dt} (-\lambda \sin \theta \theta'^2)$: mais pour $t = t_0$, N étant nul, les accélérations de S sont les mêmes que dans le mouvement libre, $\theta_0'' = 0$, et $\frac{dN}{dt}$ (pour $t = t_0$) a le signe de $-2\lambda \cos \theta_0 \theta_0'^3$. Le mouvement lié n'est donc admissible que si $\cos \theta_0 \theta_0' < 0$.

Enfin si $\cos \theta_0 \theta_0'$ est nul [en même temps que $(g - \lambda \sin \theta_0 \theta_0'^2)$], $\cos \theta_0$ est nul, $\sin \theta_0 = 1$. Dans le mouvement libre, le signe du premier membre de (7) est le signe (pour $t = t_0$) de $\frac{d}{dt} \cos \theta \theta'^3 = -3 \sin \theta \theta'^4 = -3 \theta_0'^4$; le mouvement libre est inadmissible. Dans le mouvement lié, le signe de N est celui de $\frac{d^2 N}{dt^2}$ pour $t = t_0$. Or on a, d'après (6),

$$\text{pour } t = t_0, \quad N = 0, \quad \frac{dN}{dt} = 0, \quad (K^2 + \lambda^2 \cos^2 \theta_0) \frac{d^2 N}{dt^2} = MK^2 \frac{d}{dt} (-\lambda \sin \theta \theta'^2);$$

pour $t = t_0$, θ'' et θ''' ont même valeur que dans le mouvement libre (puisque $N = \frac{dN}{dt} = 0$ pour $t = t_0$; $\theta_0'' = \theta_0''' = 0$). Le signe de $\frac{d^2 N}{dt^2}$ est donc celui de $3 \sin \theta_0 \theta_0'^4 > 0$. Le mouvement lié est admissible et seul admissible.

Remarquons que l'égalité: $\eta = y + \lambda \sin \theta$ donne $\eta' = y' + \lambda \cos \theta \theta'$; pour $t = t_0$, comme $y' = 0$, on a $\eta_0' = \lambda \cos \theta_0 \theta_0'$.

Conclusions - A des conditions initiales données où $y - l = 0$, $y' = 0$, correspond un mouvement et un seul.

- 1°. Si $g - \lambda \sin \theta_0 \theta_0'^2 < 0$, S se soulève immédiatement au-dessus de ox , et se meut comme un solide libre jusqu'au moment où il vient heurter ox .

- 2°. Si $g - \lambda \sin \theta_0 \theta_0'^2 > 0$, S reste en contact avec ox tant que l'expression $g - \lambda \sin \theta \theta'^2$ ne s'annule pas.

- 3°. Si $g - \lambda \sin \theta_0 \theta_0'^2 = 0$, S reste en contact avec ox quand la vitesse initiale de G est horizontale ou descendante [$\cos \theta_0 \theta_0' < 0$]; S se soulève immédiatement au-dessus de ox quand la vitesse initiale de G est ascendante ($\cos \theta_0 \theta_0' > 0$).

Insistons sur ce fait que S ne peut se soulever au-dessus de ox si $g - \lambda \sin \theta \theta'^2 < 0$.

28... La discussion que nous venons de faire sur un exemple particulier peut se répéter dans tous les cas : considérons un solide S de forme quelconque en contact avec un solide fixe parfaitement lisse et sans adhérence qu'il peut quitter d'un certain côté : les forces autres que la réaction de Σ qui s'exercent sur S étant données et Ω d'ailleurs quelconques, les conditions initiales définissent toujours un mouvement de S et un seul.

29. - Lois du frottement de glissement.

Dans l'étude de la liaison précédente, [N° 25], nous avons supposé les deux corps en contact parfaitement lisses. Quand il en est autrement, la réaction du disque fixe Σ sur le disque mobile S n'est plus normale aux deux disques : soit \vec{F} sa composante tangente aux deux disques et \vec{N} sa composante normale. L'expérience montre (1^{ère} année, p. 534-537) que \vec{F} est toujours directement opposée à la vitesse de glissement de S sur Σ , c. à d. ici (Σ étant fixe) à la vitesse \vec{W} de l'élément de S en contact avec Σ à l'instant considéré. De plus, on admet, d'après les résultats de Coulomb et de Morin, que \vec{F} est proportionnel à \vec{N} , soit $\frac{F}{N} = f$, le coefficient f (dit coefficient de frottement de glissement) ne dépendent que de la nature des surfaces en contact.

Ces lois supposent toutefois que le glissement ne soit pas nul. Quand W est nul à l'instant considéré, l'expérience montre que W reste nul c'est-à-dire roule sans glisser sur Σ tant que la réaction \vec{R} de Σ sur S qui empêche le glissement satisfait à la condition :

$$(1) \quad F \leq f_0 N,$$

le coefficient numérique f_0 (dit coefficient de frottement au repos ou au départ) étant un peu plus grand que f . Si, à l'instant t , la condition (1) n'est pas vérifiée, le disque commence immédiatement à glisser et les lois du frottement de glissement s'appliquent.

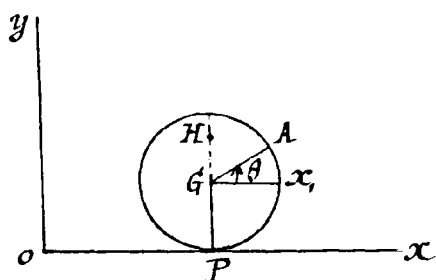
Nous avons dit [1^{ère} année, p. 536-537] que les lois de Coulomb ne tiennent compte que très grossièrement des phénomènes très complexes qui se passent au contact des deux solides. Elles sont tout à fait en défaut dans le cas du frottement médial (frottement entre corps lubrifiés),

et même dans le cas du frottement immédiat ou à sec, elles sont loin d'être exactes.

Quoiqu'il en soit, nous admettrons ces lois dans ce qui va suivre : pour plus de simplicité, nous supposons que f a la même valeur quel que soit le point de contact de S et de Σ , et nous confondrons f et f_0 .

50. - Mouvement d'un cerceau glissant avec frottement sur une droite horizontale.

Comme première application, considérons un cerceau ou (plus généralement) un disque circulaire solide dont le centre de gravité G coïncide avec le centre géométrique : le disque est lancé sur un plan horizontal dépoli Π , sa position et ses vitesses initiales étant situées dans un plan vertical. Mouvement du disque.



Le mouvement a lieu [N° 14] dans le plan vertical initial xoy : soit oy la verticale ascendante, ox l'horizontale intersection du plan xoy et de Π . La position du cerceau dépend de deux paramètres, soit ξ (abscisse de G) et θ (angle $\theta = x, \widehat{GA}$, \widehat{GA} désignant un rayon déterminé du disque et Gx , une parallèle à ox).

La vitesse du glissement du disque sur ox est dirigée selon ox dans un sens ou dans l'autre et égale en grandeur et signe à :

$$\xi' + l\theta' = u \quad (\text{L rayon du disque})$$

si on la compte positivement dans le sens ox . Quand, pour $t=0$, u n'est pas nul, il est loisible de supposer $u_0 > 0$ en choisissant convenablement le sens ox .

Ceci posé, soit R_x, R_y les composantes de la réaction \bar{R} exercée par ox sur le disque ; soit MK^2 le moment d'inertie par rapport à G et M la masse totale du disque. Les équations du mouvement du disque sont :

$$(2) \quad \begin{cases} M\xi'' = R_x \\ 0 = M\eta'' = R_y - Mg \\ MK^2\theta'' = lR_x \end{cases} \quad (\eta = l)$$

d'où on déduit :

$$(3) \quad \frac{du}{dt} = \xi'' + l\theta'' = \frac{R_x}{M} \left[1 + \frac{l^2}{R^2} \right].$$

Soit d'abord $u_0 > 0$: puisque u est positif pour $t=0$, R_x est négatif pour $t=0$ et reste négatif tant que u ne s'annule pas. On a donc :

$$R_x = -fR_y = -fMg,$$

et, par suite :

$$\xi'' = -fg, \quad R^2\theta'' = -fgl, \quad \frac{du}{dt} = -fg \left(1 + \frac{l^2}{R^2} \right).$$

Les accélérations ξ'' , θ'' sont donc constantes, tant que u ne s'annule pas ; u diminue proportionnellement au temps et s'annule au bout du temps

$$t_1 = \frac{\xi_0' + l\theta_0'}{fg \left(1 + \frac{l^2}{R^2} \right)}.$$

Nous sommes ainsi ramenés au cas où le glissement est nul à l'instant considéré.

Soit donc, pour $t=0$, $u=0$.

Je dis que u ne peut que rester nul : en effet, il résulte du raisonnement précédent que $|u|$, (du moment qu'il n'est pas nul), ne peut que décroître quand t croît ; si donc à un instant $t > 0$, $|u|$ est égal à $h > 0$, $|u|$ est supérieur à h pour $t=0$.

Puisque le disque roulera sans glisser sur ox , nous devons vérifier que l'inégalité

$$F \leq fN, \text{ c'est-à-dire } |R_x| \leq fMg$$

est satisfaite. Or quelle doit être la valeur de R_x pour que u reste nul, c'est-à-dire pour qu'on ait : $\xi'' + l\theta'' = 0$?

D'après (3), il faut et il suffit que R_x soit nul.

L'inégalité $|R_x| \leq fMg$ est donc vérifiée a fortiori.

En résumé, si le glissement est nul à un instant, il reste nul indéfiniment et le disque roule sans glisser sur ox , d'un mouvement uniforme (car R_x étant nul, ξ et θ' sont constants).

Conclusion. - Quelles que soient les conditions initiales, le disque au bout d'un temps fini, roule sans glisser sur OX d'un mouvement uniforme.⁽¹⁾

- Remarque sur une discontinuité du mouvement.
A l'instant t , où le disque cesse de glisser pour rouler sans glisser, les accélérations du système subissent une discontinuité, car ξ'' et θ'' passent brusquement de la valeur $-fg$ et $-fg \frac{l}{K^2}$ à la valeur zéro.

Une telle discontinuité se présente en général quand le frottement au repos succède au frottement de glissement.

Remarque sur la force vive perdue de par le frottement.
A partir de l'instant t , où le disque roule sans glisser sur OX , sa force vive reste constante; il est intéressant de remarquer que la perte de force vive due au frottement de glissement est indépendante du coefficient f et ne dépend que des vitesses initiales du disque; mais plus le coefficient f est petit, plus le temps t , nécessaire pour annuler le glissement est grand.

On le voit aisément en remarquant que les équations⁽²⁾ entraînent la conséquence :

$$\xi'' - \frac{K^2}{l} \theta'' = 0, \quad \text{ou} \quad \xi' - \frac{K^2}{l} \theta' = \alpha,$$

égalité qui est vraie pendant toutes les périodes du mouvement, puisque les équations (2) ne supposent rien sur R_x . Cette égalité s'interprète aisément: soit H le point du disque situé sur la verticale ascendante de G , à la distance $\frac{K^2}{l}$ de G ; la vitesse de ce point H est la même quel que soit l'instant considéré.⁽³⁾

En particulier, à l'instant t , on a:

$$\xi_1' - \frac{K^2}{l} \theta_1' = \xi_0' - \frac{K^2}{l} \theta_0' = \alpha,$$

en même temps que:

$$\xi_1 + l\theta_1' = 0.$$

Ces égalités donnent aussitôt:

⁽¹⁾ En réalité, il s'arrête au bout d'un temps fini à cause du frottement de roulement que nous avons négligé et que nous introduisons plus loin.

⁽²⁾ Voir la page suivante.

$$\xi_1' = \frac{a}{1 + \frac{K^2}{\rho^2}}, \quad \theta_1' = -\frac{\xi_1'}{\rho}.$$

La force vive $2T_1$ du disque à l'instant t , ne dépend donc que de a , et non de f . La valeur explicite de $2T_1$ est :

$$2T_1 = M(\xi_1'^2 + K^2 \theta_1'^2) = M \xi_1'^2 \left[1 + \frac{K^2}{\rho^2} \right] = \frac{M a^2}{1 + \frac{K^2}{\rho^2}}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} 2T_0 - 2T_1 &= M \left[\xi_0'^2 + K^2 \theta_0'^2 - \frac{(\xi_0' - \frac{K^2}{\rho} \theta_0')^2}{1 + \frac{K^2}{\rho^2}} \right] \\ &= \frac{MK^2}{\rho^2 + K^2} (\xi_0'^2 + \rho \theta_0'^2) = \frac{MK^2}{\rho^2 + K^2} u_0^2. \end{aligned}$$

Celle est la valeur de la force vive perdue. En particulier, pour que le disque s'arrête, il faut que $\rho \xi_0' = K^2 \theta_0'$.

Remarquons encore que si ξ_0' est positif et θ_0' positif et plus grand que $\frac{\rho \xi_0'}{K^2}$, le centre du disque se meut d'abord dans le sens ox ; mais quand le cerceau roule, le centre G se meut dans le sens contraire, car a est négatif, par suite ξ_1' ; le disque s'éloigne donc de sa position initiale dans le sens ox , puis revient en arrière. C'est ce qu'il est facile de réaliser en lançant le cerceau en avant après lui avoir imprimé un fort mouvement de rotation sur lui-même dans un sens convenable.

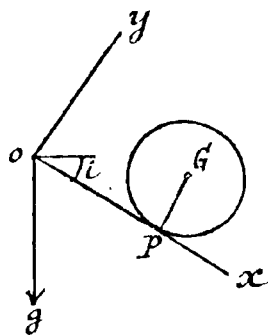
31. - Mouvement du cerceau sur une droite inclinée.

Le problème se traiterait sans plus de difficulté en supposant la droite ox non plus horizontale, mais inclinée. Donnons-nous à chercher les conditions nécessaires pour que le disque, abandonné sans vitesse dans le plan vertical xoy sur la droite ox roule sans glisser sur ox .

Les équations (2) doivent ici être remplacés par les

Note 2 de la page précédente.

Si le disque est un cerceau, $K^2 = \rho^2$, et le point H est le point le plus élevé du cerceau. Si le disque est plein et homogène, $K^2 = \frac{\rho^2}{2}$, et H est le milieu du rayon vertical ascendant : en effet, $M K^2 = \sum m r^2$; or considérons la masse du disque comprise entre deux cercles de centres G et de rayon λ et $\lambda + \rho \lambda$; elle est égale (ρ désignant la densité superficielle du disque) à $2\pi \rho \lambda d\lambda$, et son moment d'inertie par rapport à O est : $2\pi \rho \lambda^3 d\lambda$; d'où $M K^2 = 2\pi \rho \int_0^{\rho} \lambda^3 d\lambda = \frac{\pi \rho \rho^4}{2} = M \frac{\rho^2}{2}$.



suivantes (où i désigne l'angle de la demi droite fixe ox menée dans le sens descendant avec une horizontale du plan xoy):

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{\xi} &= R_x + Mg \sin i \\ 0 = M\ddot{\eta} &= R_y - Mg \cos i \\ M K^2 \ddot{\theta} &= l R_x \end{aligned} \right\} (4)$$

La vitesse de glissement, comptée positivement dans le sens ox , est égale encore à $\dot{\xi} + l\dot{\theta} = u$.

Des équations (4) on déduit :

$$\frac{du}{dt} = \ddot{\xi} + l\ddot{\theta} = \frac{R_x}{M} \left(1 + \frac{l^2}{K^2}\right) + g \sin i.$$

Pour que u reste nul, il faut qu'on ait :

$$R_x = -\frac{Mg \sin i}{1 + \frac{l^2}{K^2}}.$$

L'inégalité (1) du frottement au repos exige qu'on ait :

$$\frac{Mg \sin i}{1 + \frac{l^2}{K^2}} \leq f Mg \cos i$$

c'est-à-dire :

$$(5) \quad \operatorname{tgi} \leq f \left(1 + \frac{l^2}{K^2}\right).$$

Si, par exemple, le disque est un cerceau, $\frac{l^2}{K^2}$ est égal à 1, et la condition précédente devient :

$$\operatorname{tgi} \leq 2f.$$

Si le disque est homogène, $\frac{l^2}{K^2} = 2$, et on doit avoir :

$$\operatorname{tgi} \leq 3f.$$

Inversement, démontrons que quand l'inégalité (5) est remplie, le glissement est impossible. S'il y a glissement, les équations du mouvement sont :

$$(6) \quad \begin{cases} M\ddot{\xi} = \varepsilon f Mg \cos i + Mg \sin i = Mg \cos i [\operatorname{tgi} + \varepsilon f] \\ M K^2 \ddot{\theta} = \varepsilon f M g l \cos i \end{cases}$$

$(\varepsilon = \pm 1, \quad \varepsilon(\dot{\xi} + l\dot{\theta}) < 0)$

Des équations (6) on tire :

$$(7) \quad \frac{du}{dt} = \xi'' + l\theta'' = g \cos i \left[tgi + \varepsilon f \left(1 + \frac{l^2}{R^2} \right) \right]$$

Or, pour $t=0$, u est nul; pour t voisin de zéro, u a le signe de $\frac{du}{dt}$; d'où la condition $\varepsilon \frac{du}{dt} \leq 0$ pour $t=0$, c.à.d.

$$(8) \quad \varepsilon tgi + f \left(1 + \frac{l^2}{R^2} \right) \leq 0 \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Cette inégalité n'est possible que si ε est égal à -1 , et si :

$$tgi \geq f \left(1 + \frac{l^2}{R^2} \right).$$

Si donc $tgi < f \left(1 + \frac{l^2}{R^2} \right)$, le disque roule sans glisser sur ox ; si $tgi > f \left(1 + \frac{l^2}{R^2} \right)$, le disque glisse sur ox , la vitesse de glissement a le sens ox et le mouvement est défini par les équations (6) ou $\varepsilon = -1$. Enfin, si $tgi = f \left(1 + \frac{l^2}{R^2} \right)$, il y a roulement sans glissement: car la valeur de $\frac{du}{dt}$ donnée par l'équation (7) (où on fait $\varepsilon = -1$) est nulle.

32. - Extension au mouvement d'un cylindre.

Le mouvement que nous venons d'étudier dans le N° précédent est celui d'un disque placé ou lancé sur un plan matériel Π , dans un plan vertical xoy perpendiculaire à Π . Le mouvement du disque a lieu nécessairement dans le plan xoy .

Au lieu d'un disque, considérons un cylindre de révolution homogène lancé sur un plan horizontal fixe Π et animé à l'instant initial d'une translation horizontale perpendiculaire aux génératrices et d'une rotation autour de son axe de révolution. De plus, le plan matériel Π est symétrique par rapport au plan xoy , plan initial de section droite moyen du cylindre⁽¹⁾. Le plan xoy est un plan de symétrie du système, des forces et des conditions initiales. La section droite C du cylindre (cercle solide) se mouvra dans le plan xoy , et on voit immédiatement, en appliquant 1° le théorème du centre de gravité; 2° le théorème des moments par

(1) Si le plan Π était inégalement rugueux de part et d'autre du plan xoy , le cylindre pivoterait sur le plan Π .

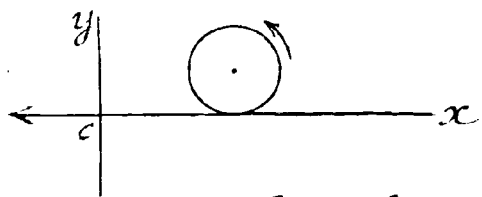
rapport à Gz (axe du cylindre), que les équations du mouvement de la section droite C sont celles du N° 30.

Si le plan fixe Π , au lieu d'être horizontal, est incliné, les mêmes conclusions subsistent pourvu que [en sus des conditions précédentes] le plan xoy (plan initial de la section droite moyenne du cylindre) soit vertical. Si notamment le cylindre est abandonné sans vitesse, les conclusions du N° 31 s'appliquent sans modification.

Application au démarrage d'une locomotive en palier.

33. — Nous supposons toutes les roues de la locomotive liées entre elles, de façon qu'elles tournent d'ensemble. La locomotive part du repos sur deux rails horizontaux parallèles : sa position dépend de deux paramètres : son déplacement le long des rails, et l'angle dont tournent ses roues.

Je considère le système formé par la locomotive la vapeur, la fumée qui s'échappe etc. Comme ces dernières masses sont négligeables devant celle de la locomotive, on peut, pendant le démarrage de la locomotive, confondre le centre de gravité G du système avec celui de la locomotive, lequel est sensiblement fixe par rapport à l'armature de la locomotive⁽¹⁾. Ceci posé j'admets qu'on dispose de la pression de la vapeur pour communiquer aux roues une rotation connue $\omega(t)$. Il s'agit d'étudier le mouvement de la machine.



Soit xoy le plan vertical parallèle aux rails dans lequel se meut le centre de gravité G , ox désignant la projection des rails sur ce plan, et oy la verticale ascendante. Je prends sur ox un sens tel que le sens xoy soit celui de la rotation des roues⁽²⁾ : la fonction $\omega(t)$ nulle pour $t=0$, est donc une fonction

(1) Le centre de gravité des pièces mobiles (bielles, piston, roues, etc) se déplace très peu dans la locomotive, et la masse de ces pièces est petite devant la masse de la locomotive.

(2) Dans ce qui suit, Gz désigne une demi-droite normale au plan xoy et telle que le sens des rotations positives autour de Gz soit le sens xoy .

croissante. Les seules forces extérieures qui s'exercent sur le système sont (si on néglige la résistance de l'air) la pesanteur et les réactions des rails. Je représente par R_i la réaction qui s'exerce sur une des roues, par N_i sa composante verticale (nécessairement dirigée vers le haut) par F_i sa composante horizontale; je représente par R la somme géométrique des quatre réactions R_i , par N sa composante verticale par F sa composante horizontale. Si une des roues glisse dans un sens, les trois autres glissent dans le même sens, et on a: $F_i = f N_i$, et $F = \sum F_i = f \sum N_i = f N$; si une des roues roule sans glisser, il en est de même des trois autres, et on a: $F_i \leq f N_i$, et $F \leq f N$.

Faisons-nous d'abord dans la seconde hypothèse: les quatre roues roulent sans glisser sur les rails. Soit ξ l'abscisse du centre de gravité G de la locomotive; la vitesse de translation de la machine est $\dot{\xi}$. La vitesse de glissement des roues sur les rails, comptée positivement dans le sens ox , est $u = \dot{\xi} + l\omega$, (l rayon des roues); $\dot{\xi}$ est égal, si ce glissement est constamment nul, à $-l\omega(t)$; la machine se meut alors dans le sens opposé à ox . D'autre part d'après le théorème en mouvement du centre de gravité; on a (M désignant la masse totale du système):

$$M\ddot{\xi} = -Ml \frac{d\omega}{dt} = R_x, \quad 0 = M\ddot{\eta} = -Mg + R_y,$$

d'où :

$$N = R_y = Mg > 0, \quad R_x = -F = -Ml \frac{d\omega}{dt} < 0.$$

Pour qu'il n'y ait pas glissement, il faut donc:

$$l \frac{d\omega}{dt} \leq fg.$$

Faisons nous maintenant dans l'hypothèse où les roues patinent, c'est-à-dire glissent sur les rails. Le glissement est sûrement de sens ox ; autrement dit, u est positif⁽¹⁾. Le glissement ayant lieu dans le sens ox , R_x est négatif, et on a:

$$\ddot{\xi} = -fg, \quad \text{et}$$

$$\frac{du}{dt} = \ddot{\xi} + l \frac{d\omega}{dt} = -fg + l \frac{d\omega}{dt};$$

⁽¹⁾ Si u était négatif, R_x serait positif, par suite $\ddot{\xi}$, par suite $\dot{\xi} + l \frac{d\omega}{dt} = \frac{du}{dt}$; la quantité u , qui est nulle pour $t=0$, serait donc positive pour t voisin de zéro; ce qui est contraire à l'hypothèse.

puisque u (nul pour $t=0$) est positif, par hypothèse, pour t voisin de zéro, il faut qu'on ait :

$$fg \leq l \frac{d\omega}{dt};$$

si $l \frac{d\omega}{dt} = fg$, $\xi + l\omega$ reste nul.

En définitive, pour qu'il y ait roulement sans glissement dans l'intervalle de temps 0 à t , il faut et il suffit que, dans cet intervalle, $\omega(t)$ satisfasse à la condition

$$l \frac{d\omega}{dt} \leq fg.$$

Pour que la locomotive acquière sa vitesse normale dans le temps minimum et sans patiner, il faudra dépenser assez de vapeur pour qu'on ait

$$(1) \quad \frac{d\omega}{dt} = f \frac{g}{l}, \quad \omega = f \frac{g}{l} t$$

la vitesse de translation, au bout du temps t , sera alors fgt .

Si on force la vapeur davantage, la machine atteindra la même vitesse de translation au bout du même temps t , et on fera patiner les roues: le frottement de glissement absorbera une quantité d'énergie égale à $fMg \int u(t) dt$, énergie dépensée inutilement à échauffer les rails et les roues.

En définitive, la machine, au bout d'un temps t , ne peut acquérir une vitesse supérieure à fgt ; et pour qu'elle atteigne cette vitesse sans dépense de vapeur inutile, il faut et il suffit que ω soit égal à chaque instant à $f \frac{g}{l} t$ [régime optimum].⁽¹⁾

34. Calcul du couple moteur. — Le piston de la machine agit sur une seule paire de roues, d'axe CZ par exemple; soit Γ le moment par rapport à CZ des forces exercées par la bielle du piston sur ces deux roues [forces motrices]. Considérons le système S , formé par les quatre roues⁽²⁾ et les deux bielles qui les unissent, et supposons la masse des bielles négligeable devant la masse totale des

⁽¹⁾ Dans le régime optimum, le travail des réactions du sol est nul; la force vive de la locomotive au bout du temps t est la même que si les rails étaient parfaitement lisses. La rugosité des rails transforme une partie de l'énergie cinétique sur la locomotive en énergie de translation, sans en absorber aucune partie.

⁽²⁾ Le raisonnement serait identique si la locomotive avait plus de deux paires de roues.

roues : le centre de gravité G de S , est sensiblement immobile par rapport aux centres des roues. Appliquons le théorème des forces-vives au mouvement de S , autour de G : dans ce mouvement, chaque roue tourne avec la vitesse ω autour de son centre fixe : si toutes les roues sont identiques, et si mK^2 désigne leur moment d'inertie autour de leur centre, la force vive de S , est $4mK^2\omega^2$. D'autre part, le travail élémentaire des forces motrices est $T\omega dt$; le travail des réactions intérieures est nul; celui des réactions des deux axes sur les deux paires de roues est nul également, puisque les centres des roues sont fixes dans le mouvement considéré. Les autres forces appliquées à S , sont la pesanteur dont le travail est nul, et les réactions des rails : Or soit P , l'élément d'une des roues en contact avec les rails; la vitesse de P (dans le mouvement de S , autour de G) est $\ell\omega$, si on la compte positivement dans le sens Ox , et le travail élémentaire des réactions des rails est par suite : $R_x \ell\omega dt = -F\ell\omega dt$. Le théorème des forces-vives s'écrit donc :

$$\frac{d}{dt} 4mK^2\omega^2 = (T - F\ell)\omega,$$

$$\text{ou bien: } 4mK^2 \frac{d\omega}{dt} = T - F\ell;$$

$$\text{d'où, comme } \frac{d\omega}{dt} = \frac{F}{M\ell} :$$

$$T = F\ell \left(1 + \frac{4mK^2}{M\ell^2} \right)$$

Pour que la machine acquière sa vitesse normale dans le temps minimum et sans perte d'énergie, il faut que $F = fMg$, donc⁽¹⁾

$$(2) \quad T = fgl \left(M + 4m \left(\frac{K^2}{\ell^2} \right) \right).$$

Si T reste inférieur à cette valeur, il y a roulement sans glissement, mais la machine met plus de temps à

(1) Si on avait distingué le coefficient de frottement de glissement du coeff. de frottement au repos f_0 , ($f_0 > f$), la règle serait que la vitesse de translation ne peut dépasser $f_0 g t$, et qu'il faut donner à $\omega(t)$ la valeur $\frac{f_0 g t}{\ell}$. Dans l'égalité (2), f devrait être remplacé par f_0 . De plus, nous avons négligé les frottements entre roues et axes et bielles) et le frottement de roulement des roues sur les rails.

acquérir sa vitesse normale; si Γ est supérieur à cette valeur, la machine patine sans que sa translation soit accélérée.

Si on néglige la masse des roues devant celle de la machine, comme k^2 est $\ll l^2$, $4M \frac{k^2}{l^2}$ est négligeable devant M et Γ est sensiblement égal à $fMgl$.

35. Marche normale de la locomotive.

Une fois que la locomotive a atteint en roulant sa vitesse normale, on maintient ω constant: comme $\frac{d\omega}{dt}$ est nul, Γ est nul, donc $\ll fMg$, le glissement est impossible (N° 33), le roulement sans glissement va se poursuivre indéfiniment avec la même vitesse. La valeur de Γ calculée comme précédemment est nulle.

Ceci est vrai si faible que soit f , et même si $f=0$. On voit que la rugosité des rails, indispensable pour le démarrage, devient inutile dès que le train a acquis sa vitesse normale. La vapeur une fois supprimée, la machine roulera en gardant une vitesse constante, si faible que soit la rugosité des rails.

En réalité, le train s'arrêterait au bout d'un certain temps à cause de la résistance de l'air, des frottements des pièces mobiles et du frottement de roulement qui s'oppose à la rotation des roues [N° 44]. Mais à partir de l'instant où la machine est en marche normale, les forces-motrices n'ont plus pour objet que de vaincre ces résistances. Soit $\Phi(V)$ la somme des projections (sur la direction des rails) des résistances de l'air supposé immobile, V désignant la vitesse de translation de la machine: pour que la machine puisse garder sa vitesse V , il faut et il suffit que $\frac{\Phi(V)}{Mg}$ soit moindre que f .

Arrêt de la locomotive. — La machine roulant à vitesse constante, supposons qu'on veuille l'arrêter en renversant la vapeur. Le raisonnement employé plus haut montre que $\frac{dV}{dt}$ (en valeur absolue) est au plus égal à $f g$, et pour arrêter le train dans le temps minimum, il suffit de faire en sorte⁽¹⁾ que $\frac{d\omega}{dt} = -\frac{f g}{l}$. Si on force davantage

(1) Il faut, pour cela que Γ soit négatif et égal, en valeur absolue, au second membre de (2).

la vapeur, les roues patinent sans que le train s'arrête plus vite. Le temps d'arrêt sera donc au moins égal à $\frac{V}{g}$. On ne peut abaisser ce temps davantage⁽¹⁾, à moins de f g freiner directement sur les rails à l'aide de freins griffes par exemple.

36. Calcul des réactions. - Supposons que, pendant le démarrage, $\frac{d\omega}{dt}$ soit au moins égal à $f \frac{g}{r}$; on a: $F_1 = fN_1$, $F_2 = fN_2$ etc; les quatre réactions sont parallèles de même sens, et symétriques par rapport au plan xoy si on admet (pour simplifier) que xoy est un plan de symétrie de la machine. Leur somme géométrique a comme projections sur ox et oy : $-fMg$ et Mg . Appliquons le théorème des moments cinétiques au mouvement de la machine autour de G ; le moment cinétique du système, où on néglige les masses des bielles et du piston, est (théorème de Kœnig) $AmK^2\omega$; le moment résultant des réactions R_1, R_2, \dots par rapport à G est parallèle à GZ ; posons $f_1 = \frac{R_1}{M}$, $f_2 = \frac{R_2}{M}$, etc. et soit γ le moment par rapport à GZ des M vecteurs $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$. Le théorème des moments cinétiques s'écrit:

$$\frac{AmK^2}{M} \frac{d\omega}{dt} = \gamma,$$

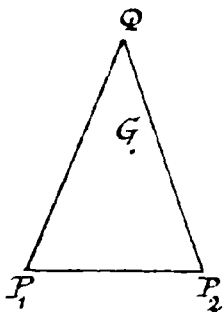
et si on néglige Am devant M , on voit que γ est sensiblement nul; autrement dit, la résultante géométrique des quatre réactions passe sensiblement par G .

Projetons sur le plan xoy les deux roues C_1, C_2 en contact avec le même rail, et soit P_1, P_2 les points de contact projetés. Construisons avec G comme origine, le vecteur dont les composantes sont $-f \frac{Mg}{2}$ et $\frac{Mg}{2}$, et décomposons ce vecteur en deux vecteurs équivalents parallèles d'origine P_1 et P_2 , soit $\vec{P}_1\vec{R}_1$ et $\vec{P}_2\vec{R}_2$; nous obtenons ainsi les réactions du rail sur C_1 et sur C_2 . Le point G est toujours compris en fait entre les deux verticales de P_1 et de P_2 : mais pour que la construction

(1) On obtient le même résultat en bloquant les roues à l'aide d'un frein.

précédente soit possible, il faut qu'il soit compris entre les deux droites parallèles passant par P_1, P_2 et faisant avec Ox un angle dont la cotangente est f . Si G était à droite de la ligne $P_1 P_2$, la résultante calculée $P_1 R_1$ serait dirigée vers le bas, ce qui est impossible : les roues d'avant se soulevaient au dessus des rails.⁽¹⁾

Dans la période d'arrêt, si $-\frac{dw}{dt}$ est au moins égal à $\frac{Lg}{d}$, le même raisonnement ^{dt}montre que les roues d'arrière se soulevaient si G était à gauche de la droite $P_1 Q$ qui fait avec Ox un angle dont la cotangente est f . Pour que la machine ne se soulève pas (si rapidement qu'on opère le démarrage ou l'arrêt), il faut donc que G soit



compris dans le triangle isocèle $P_1 Q P_2$, où les angles \bar{P}_1 et \bar{P}_2 ont comme cot. f . Cette condition est toujours remplie dans la pratique. Si G est équidistant des axes des deux paires de roues, soit $2d$ l'écart de ces axes, h la hauteur de G au dessus du niveau des rails : la condition exprime que $f h$ est $< d$.

37. - Démarrage d'un train.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où la locomotive, au lieu d'être isolée, est attelée à un train. Les quatre roues de chaque wagon sont supposées libres, et toutes les roues du train sont identiques et affectées du même coefficient de frottement f . Chaque wagon est symétrique par rapport au plan vertical xoy équidistant des deux rails, et son centre de gravité G' est équidistant des axes des deux paires de roues : de plus si $2d$ désigne l'écart de ces deux axes et h la hauteur de G' au dessus du niveau

⁽¹⁾ Quand la machine roule sans glisser, les lois du frottement ne permettent pas de calculer exactement les réactions. Par exemple, supposons le roulement uniforme : F est nul, F_1 et F_2 sont égaux et directement opposés, et si G est supposé équidistant de P_1 et P_2 , N_1 et N_2 sont égaux à $\frac{Mg}{4}$; une infinité de réactions sont compatibles avec les lois du frottement au repos ; on les obtient en ajoutant à N_1 et N_2 deux forces F_1, F_2 égales et directement opposées, mais d'intensité arbitraire, au plus égale toutefois à $f \frac{Mg}{4}$.

des rails, fh est inférieur à d (N° 36). Les chaînes d'attache sont supposées symétriques par rapport au plan xoy , parallèles aux rails et situées dans le même plan horizontal que le centre de gravité de la locomotive et de chaque wagon. Enfin, M désigne la masse de la locomotive, μ celle de l'ensemble des wagons (roues comprises), μ_1 celle d'un wagon, m la masse totale d'une roue quelconque, mK^2 son moment d'inertie autour de son centre, l son rayon; la masse μ_1 d'un wagon est supposée au moins double de la masse des 4 roues ($\mu_1 > 8m$).

Je représente encore par R_x et R_y la somme des projections sur ox et sur oy de réactions des rails sur la locomotive, et par f_x et f_y les sommes analogues étendues à toutes les réactions des rails sur les wagons.

Le théorème du mouvement du centre de gravité appliqué à tout le système donne, en projetant sur ox :

$$(3) \quad (M + \mu) \ddot{\xi} = R_x + f_x ;$$

le même théorème appliqué à la locomotive seule donne en projetant sur oy :

$$(4) \quad 0 = R_y - Mg .$$

Enfin le théorème des moments cinétiques appliqué au mouvement d'une des roues de wagon, soit la roue C_1 , donne (ω_1 désignant sa vitesse angulaire comptée dans le sens xoy , f_1 la réaction du rail sur C_1)

$$(5) \quad mK^2 \frac{d\omega_1}{dt} = f_1^x .$$

Nous admettons, comme au N° 33, que la vitesse angulaire des roues de la locomotive, nulle pour $t=0$, est une fonction croissante du temps, et nous suivons la même marche de discussion.

1ère Hypothèse. — Toutes les roues roulent sans glisser.
On a :

$$-\dot{\xi} = l\omega = l\omega_1 = l\omega_2 = \dots = V ,$$

(V vitesse de translation du train). D'où :

$$f_x = \sum f_1^x = 4nm \frac{K^2}{l} \frac{d\omega}{dt} = 4nm \frac{K^2}{l^2} \frac{dV}{dt}$$

(n nombre des wagons), et d'après (3):

$$(6) \quad (M + \mu + 4nm \frac{K^2}{l^2}) \frac{dV}{dt} = -R_x, \text{ avec la condition: } |R_x| \leq fMg .$$

On a donc :

$$(7) \quad \frac{dv}{dt} \leq \frac{fg}{1 + \frac{\mu}{M} + \frac{4nmh^2}{Ml^2}}$$

De plus, pour que l'hypothèse soit admissible, il faut que pour chaque roue de wagon, soit C_i , on ait (ρ_i^x étant > 0):

$$(8) \quad \rho_1^x \leq \rho_1^y.$$

Cette condition est toujours remplie si $\mu > 8m$. En effet, dans le mouvement du wagon autour de G' le théorème des moments par rapport à $G'Z$ donne aussitôt (N° 36), ρ_1 et ρ_2 désignant les réactions sur une roue d'arrière et une roue d'avant :

$$2mk^2\omega' = (\rho_1^x + \rho_2^x)h - (\rho_2^y - \rho_1^y)d,$$

ou d'après (5):

$$0 = (\rho_1^x + \rho_2^x)(h-l) - (\rho_2^y - \rho_1^y)d,$$

et comme on a: $\rho_1^x = \rho_2^x$ et $\rho_1^y + \rho_2^y = \frac{\mu_1 g}{2}$, la plus petites des deux réactions normales est :

$$\rho_1^y = \frac{\mu_1 g}{4} - \frac{d}{h-l} \rho_1^x;$$

l'inégalité (8) peut donc s'écrire :

$$(9) \quad \rho_1^x \left(1 + \frac{h-l}{d}\right) \leq \frac{\mu_1 g}{4};$$

or $\rho_1^x = m \frac{k^2}{l^2} \frac{dv}{dt} \leq m \frac{k^2}{l^2} fg \leq mfg$, et, comme $\frac{h}{d} \leq 1$, l'inégalité (9) est vérifiée a fortiori si $2m < \frac{\mu_1}{4}$.

Le roulement sans glissement est donc admissible si l' $\frac{d\omega}{dt}$ ne dépasse pas le 2^e membre de (7).

2^e Hypothèse. - La locomotive glisse, les wagons roulent sans glisser. - Dans les équations (5), il faut remplacer $\frac{d\omega}{dt}$ par $\frac{v}{l}$; l'égalité (6) subsiste. Le raisonnement de la page 46 montre que le glissement ne peut se produire que dans le sens ox et seulement si l' $\frac{d\omega}{dt}$ dépasse le second membre de (7); la discussion de l'inégalité (8) n'est pas modifiée.

Il serait facile enfin de vérifier que l'hypothèse dans laquelle une au moins des roues de wagon glisse n'est jamais admissible, quand les restrictions énoncées sont remplies, et elles le sont toujours dans la pratique.

En définitive, le train s'ébranlant à l'instant $t=0$, il est impossible que sa vitesse à l'instant t dépasse la valeur

$$\frac{f g t}{1 + \frac{\mu}{M} + \frac{4 n m K^2}{M \rho^2}}$$

et pour qu'elle atteigne cette valeur sans dépense d'énergie inutile, il faut et il suffit que $\frac{dW}{dt}$ soit égal à chaque instant à $\frac{f g}{1 + \frac{\mu}{M} + \frac{4 n m K^2}{M \rho^2}}$. Quand on force la vapeur davantage, le démarrage du train n'est pas accéléré, mais la locomotive patine en avançant sur les rails.

On peut calculer, comme au N° 36, le couple moteur correspondant à la mise en marche optimale. On trouve:

$$(10) \quad \Gamma = f g l \left[M + \frac{4 m K^2}{\rho^2 \left(1 + \frac{\mu}{M} + \frac{4 n m K^2}{M \rho^2} \right)} \right]$$

valeur plus faible que si la locomotive n'était pas attelée. Si lourd que soit le train, le couple moteur ne doit donc pas dépasser la limite qui lui est imposée dans le cas où la locomotive est seule. Dans la pratique, $4m$ est très petit devant M , et la valeur de Γ doit être très voisine de $f M g l$, quantité indépendante de μ .

Remarque. - Quand μ est très grand devant M , le démarrage théorique est extrêmement lent si puissant que soit le moteur de la locomotive. En fait, il devient impossible: les forces $f_x' = m K^2 \frac{dv}{dt}$ sont trop faibles pour surmonter la résistance au roulement des roues de wagon, résistance que nous avons négligée; les wagons restent immobiles, et la locomotive patine sur place, si grandes que soient les forces motrices. On remédie à cet inconvénient en employant les locomotives très lourdes ou en attelant deux locomotives.

Si toutes les roues tant des wagons que de la locomotive étaient reliées de manière à tourner d'ensemble on pourrait raisonner sur tout le train comme sur une locomotive unique (N° 33)⁽¹⁾ et on arriverait à cette conclusion

⁽¹⁾ Le raisonnement du N° 33 est, en effet, indépendant du nombre des roues.

que la valeur maxima de V est fgl et que la valeur de $|\Gamma|$ correspondant à la mise en marche optimale est

$$fgl \left(M + \mu + \frac{4mnK^2}{\rho^2} \right).$$

Dans ces conditions, le démarrage est toujours possible si lourd que soit le train, pourvu que la machine motrice soit assez puissante. C'est un tel dispositif qui est adopté dans le train Renard, où les axes de toutes les paires de roues sont reliés entre eux et à l'axe moteur à l'aide de joints de Cardan.

Quand la force motrice qui agit sur les roues vient de l'extérieur [tramuways à trolley, métropolitain], il y a avantage à la distribuer à toutes les roues : chaque voiture est alors automotrice.

Arrêt du train. — Une fois que le train a acquis sa vitesse normale, les forces motrices n'ont plus qu'à surmonter la résistance de l'air, les frottements intérieurs et la résistance au roulement. Si ces forces résistantes n'existaient pas, le train roulerait indéfiniment et uniformément, une fois la vapeur arrêtée, et cela même sur des rails parfaitement lisses.

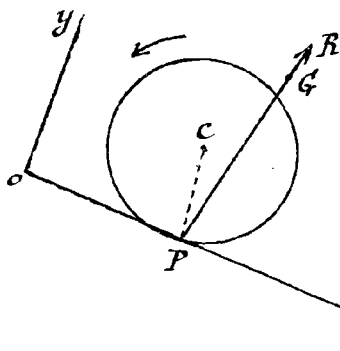
Quand on veut arrêter le train en renversant la vapeur, le raisonnement fait plus haut montre que $\frac{dV}{dt}$, alors négatif, ne peut en valeur absolue dépasser le second membre de (7); le temps d'arrêt ne peut donc être inférieur à $\frac{V_0}{fg} \left(1 + \frac{\mu}{M} + \frac{4mnK^2}{M\rho^2} \right)$, et il ne sert à rien de forcer la vapeur au delà de la limite où $|\Gamma|$ a la valeur (10). Mais si on bloque toutes les roues (locomotive et wagons) à l'aide de freins, elles glissent, et $\frac{dV}{dt}$ atteint la valeur $-fg$. Le temps d'arrêt est alors réduit à $\frac{V_0}{fg}$; il est le même, si lourd que soit le train. On ne peut d'ailleurs abaisser cette limite, à moins de freiner directement sur les rails.

(1) Si on bloque seulement plusieurs des roues, le temps d'arrêt est supérieur à $\frac{V_0}{fg}$.

38. Démarrage et arrêt d'une bicyclette ou d'une automobile en palier ou sur une pente.

Considérons d'abord un monocycle monté par un cavalier : le cycle est lancé dans un plan vertical xoy contenant la ligne de plus grande pente Ox d'une route droite. Le cavalier est en équilibre sur le cycle, c'est-à-dire que, G désignant le centre de gravité du système (cycle et cycliste), la droite CG du plan xoy a une longueur et une inclinaison constantes (abstraction faite des petites variations dues aux mouvements des jambes du cycliste). Nous représentons par Γ le moment (par rapport à l'axe CZ du cycle) des forces qu'exerce sur cet axe la chaîne actionnée par les pédales du cavalier (Γ est le moment du couple moteur).

Les sens Ox étant choisis descendant, on a :



$$(1) \begin{cases} M \ddot{\xi} = Mg \sin i + R_x, & 0 = Mg \cos i - R_y \\ mK^2 \frac{d\omega}{dt} = l R_x + \Gamma, \end{cases}$$

(M masse totale du système, mK^2 moment d'inertie de la roue autour de C , le rayon du cycle).

Les inégalités :

$$(2) -fMg \cos i \leq R_x \leq fMg \cos i$$

qui sont vérifiées dans tous les cas, montrent que $\ddot{\xi}$ est nécessairement compris entre $Mg(tg i - f)$ et $Mg(tg i + f)$, quels que soient les mouvements du cavalier. Nous supposons⁽¹⁾ $tg i < f$.

Si le cycle roule sans glisser, on a :

$$\ddot{\xi} + l \frac{d\omega}{dt} = 0; \text{ les équations (1) donnent :}$$

$$R_x \left(1 + \frac{mK^2}{Ml^2} \right) = -Mg \sin i \frac{mK^2}{Ml^2} - \frac{\Gamma}{l},$$

et les inégalités (2) montrent que Γ doit être compris entre les deux valeurs :

$$Mgl \cos i \left\{ \pm f \left(1 + \frac{mK^2}{Ml^2} \right) - \frac{mK^2}{Ml^2} tg i \right\}$$

⁽¹⁾ Si $tg i > f$, le cycle descend la pente avec une vitesse de plus en plus grande, quels que soient les mouvements du cavalier.

Comme $mK^2 < ML^2$, et $\text{tgi} < f$, la plus petite (en valeur absolue) de ces deux quantités, soit Γ_1 , est positive, l'autre Γ_2 est négative.

Si $\Gamma > \Gamma_1$, on vérifie aisément (comme au n° 33) que le cycle glisse sur ox , la vitesse de glissement $(\xi + l\omega)$ ayant le sens ox ; si $\Gamma < \Gamma_2$, la vitesse de glissement a le sens inverse. Si $\Gamma_2 \leq \Gamma \leq \Gamma_1$, le glissement est impossible.

Quand $\Gamma > \Gamma_1$, $R_x = -fR_y$; quand $\Gamma \leq \Gamma_2$, $R_x = fR_y$.

De plus, le théorème des moments cinétiques appliqué au mouvement du système autour de G montre [N° 36] que $K^2 \frac{d\omega}{dt}$ doit être égal au moment de PR par rapport à G ; PR est plus grand que $Mg \cos i$, et on a, l désignant la distance de G à PR :

$$\frac{l}{l} < \frac{mK^2 \left| \frac{d\omega}{dt} \right|}{Mgl \cos i}.$$

Si cette dernière quantité est très petite (comme c'est le cas de la pratique)⁽¹⁾, PR passe sensiblement par G .

D'après cela, quand le cavalier descend la côte, pour qu'il atteigne la plus grande vitesse possible dans un temps donné, il faut que Γ soit $\leq \Gamma_2$: le couple moteur a le sens inverse de la flèche, l'accélération du système est $g \cos i (tgi + f)$; le cavalier doit être penché en avant de façon que PG fasse avec la route descendante un angle aigu dont la cotangente est sensiblement égale à f . Si $\Gamma = \Gamma_2$, le frottement du sol sur le cycle a un travail nul; il y a aucune dépense inutile d'énergie: il ne sert à rien d'accroître davantage l'effort musculaire; le seul résultat serait de faire patiner le cycle sur le sol.

Pour que la vitesse descendante du système reste constante, il faut que $\Gamma = Mgl \sin i$, le cavalier se tenant de façon que PG soit vertical.

(1) Il n'est pas utile, d'après la discussion de ce paragraphe, que $\left| \frac{d\omega}{dt} \right|$ dépasse $\frac{2 \cos i}{l} (f + tgi)$. On a donc:

$$\frac{mK^2 \left| \frac{d\omega}{dt} \right|}{Mgl \cos i} < \frac{mK^2}{Ml^2} (f + tgi) < \frac{mK^2}{Ml^2} 2f < \frac{mK^2}{Ml^2} < \frac{m}{M}, \text{ si } f < \frac{1}{2}.$$

Pour arrêter (en contrepédalant) la machine le plus vite possible dans son mouvement descendant, il faut que le cavalier se penche en arrière de façon que $P\bar{G}$ fasse avec la route montante un angle aigu dont la cotg est f , et que Γ soit au moins égal à Γ_1 ; le couple moteur a le sens de la flèche. Le système s'arrête alors au bout du temps $\frac{V_0}{fg \cos i (f - \operatorname{tgi})}$. Il ne sert à rien de faire dépasser à Γ la limite Γ_1 .

Lorsque le cavalier monte la côte, pour qu'il acquière la plus grande vitesse possible dans un temps donné et sans dépense inutile d'énergie, il faut que $\Gamma = \Gamma_1$, le cavalier se penchant en avant de façon que $\operatorname{cotg} P\bar{G}x = -f$; l'accélération ascendante est alors $g \cos i (f - \operatorname{tgi})$. Pour que le système garde une vitesse constante, il faut que $\Gamma = Mg l \sin i$, $P\bar{G}$ étant vertical. Pour que le contrepédalage l'arrête dans le temps minimum (et sans dépense inutile d'énergie), il faut que $\Gamma = \Gamma_2$, le cavalier se penchant en arrière de façon que $\operatorname{cotg} P\bar{G}x = f$.

Si $\frac{mK^2}{Ml^2}$ est très petit, et a fortiori si $\frac{m}{M}$ est très petit, Γ_1 et Γ_2 se réduisent sensiblement à $fMgl \cos i$ et $-fMgl \cos i$.

39. Démarrage de la bicyclette.

Les résultats précédents s'étendent aisément à la bicyclette. Soit C_1 la roue d'arrière, C_2 la roue d'avant, \bar{R}_1 et \bar{R}_2 les réactions du sol sur les éléments P_1 et P_2 de C_1 et C_2 , et soit $\bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2$. Les deux premières équations (1) subsistent, ainsi que les inégalités (2); ξ est encore compris entre les valeurs $g \cos i (\operatorname{tgi} \pm f)$. Il peut d'ailleurs atteindre ces deux limites, si le cavalier sait se mettre dans une position telle que la réaction du sol sur C_2 soit exactement nulle, c.à.d. employer la roue d'arrière comme un monocycle.

La discussion (N. 38) s'applique dans ce cas particulier; pour démarrer (ou s'arrêter) le plus rapidement possible, le cycliste doit pédaler (ou contre-pédaler) de façon que $|\Gamma|$ soit sensiblement égale à $fMgl \cos i$; de plus, il doit se placer dans une position telle que $\operatorname{tg} \angle P_1 \bar{G} = f$ (en valeur absolue!); enfin $P_1 \bar{G}$ doit être incliné en avant sur la route pendant le démarrage, et en arrière pendant l'arrêt.

Dans toute autre position de G par rapport à la bicyclette, il est impossible que R_x soit constamment égal à fMg (ou à $-fMg$), et par suite que le démarrage (ou l'arrêt) s'effectue aussi rapidement. En effet, si $R_x = \varepsilon f R_y$ ($\varepsilon = \pm 1$), on a nécessairement :

$$R_1^x = \varepsilon f R_1^y, \quad R_2^x = \varepsilon f R_2^y, \quad (R_1^y > 0, R_2^y > 0),$$

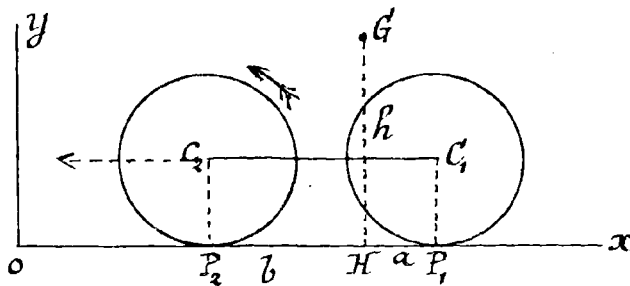
et si $u = \xi + l\omega_2$ désigne la vitesse de glissement de la roue d'avant, on a :

$$mK^2 \frac{d\omega_2}{dt} = \varepsilon f l R_2^y, \quad u = \xi + l\omega_2 = Mg \cos i (tgi + \varepsilon f) + \frac{\varepsilon f R_2^y l^2}{mK^2}.$$

Si $\varepsilon = 1$, u est constamment positif, par suite u , et R_2^x devrait être négatif. Si $\varepsilon = -1$, u est négatif, par suite u et R_2^x devrait être positif. Dans les deux hypothèses, il y a contradiction. C. q. f. d.

Pour démarrer (ou s'arrêter) le plus rapidement possible, le cycliste doit donc se placer dans des conditions où la roue d'arrière fonctionne sensiblement comme monocycle, la roue d'avant ne servant qu'à maintenir l'équilibre⁽¹⁾.

HO. — Il est facile d'ailleurs de discuter le mouvement de la bicyclette, pour une position donnée de G relativement aux points C_1, C_2 . Indiquons rapidement cette discussion dans le cas où $i = 0$.



Preons comme sens ox le sens inverse de $C_1 C_2$. Soit h la hauteur de G au-dessus du sol, a et b la distance de P_1 et P_2 à la verticale PH de G , [en supposant H compris entre P_1 et P_2].

⁽¹⁾ On peut s'arrêter aussi vite en freinant sur les deux roues la position du corps étant quelconque. Quand on bloque instantanément les deux roues, la durée de l'arrêt est $\frac{v_0}{g(\cos i + \sin i)}$ ou $\frac{v_0}{g(\cos i - \sin i)}$, suivant que le cycliste monte ou descend la pente. Si l'on freine seulement sur la roue d'avant, le cycliste devra se pencher en avant pour accroître la pression que supporte la roue d'avant. Il devra au contraire se pencher en arrière autant que le comporte l'équilibre s'il freine seulement sur la roue d'arrière.

Le théorème du mouvement du centre de gravité G et celui des moments cinétiques dans le mouvement autour de G donnent (appliqués à tout le système) :

$$(1) \quad M\ddot{\xi} = R_1^x + R_2^x, \quad 0 = Mg - R_1^y - R_2^y,$$

$$(2) \quad mK^2(\omega_1' + \omega_2') = h(R_1^x + R_2^x) + aR_1^y - bR_2^y.$$

Le théorème des moments cinétiques appliqué au mouvement d'une roue autour de son centre donne :

$$(3) \quad mK^2\omega_2' = GR_2^x, \quad mK^2\omega_1' = \Gamma + GR_1^x.$$

Plaçons-nous dans l'hypothèse où la machine démarré sans qu'aucune des roues glisse.

On a :

$$(4) \quad \dot{\xi} = -l\omega_1 = -l\omega_2,$$

et les équations (1), (2) et (3) donnent aussitôt $R_1^x, R_1^y, R_2^x, R_2^y$ et Γ en fonction de $\ddot{\xi}$; à savoir :

$$(5) \quad (a+b)R_1^y = Mgb - (Mh + 2m\frac{K^2}{l})\ddot{\xi}$$

$$(6) \quad (a+b)R_2^y = Mga + (Mh + 2m\frac{K^2}{l})\ddot{\xi}$$

$$(7) \quad R_2^x = -\frac{mK^2}{l^2}\ddot{\xi}, \quad R_1^x = (M + m\frac{K^2}{l^2})\ddot{\xi}.$$

Il nous faut exprimer qu'on a :

$$R_1^y > 0, \quad R_2^y > 0, \quad |R_1^x| \leq fR_1^y, \quad |R_2^x| \leq fR_2^y.$$

Par hypothèse, $\ddot{\xi}$ est < 0 ; R_1^y est donc > 0 ainsi que R_2^x ; R_1^x est négatif. Pour que R_2^y soit > 0 , il faut que :

$$(8) \quad |\ddot{\xi}| \leq \frac{ag}{h + \frac{2m}{M}\frac{K^2}{l}}.$$

L'inégalité $R_2^x \leq fR_2^y$ donne :

$$(9) \quad |\ddot{\xi}| \leq \frac{ag}{h \left\{ 1 + \frac{mK^2}{Ml^2} \left(\frac{a+b}{fh} + \frac{2l}{h} \right) \right\}}.$$

L'inégalité $-R_1^x \leq fR_1^y$ donne :

$$(10) \quad |\xi''| \leq \frac{fg}{1 + \frac{a-fh}{f} + \frac{mK^2}{Ml^2} \left(1 + \frac{a-2fl}{f}\right)}$$

Le second membre de (9) est toujours plus petit que celui de (8); l'inégalité (9) entraîne donc l'inégalité (8). Quant au second membre de (10), il est plus petit que celui de (9) (ou plus grand) suivant qu'on a :

$$(11) \quad fh < a - \frac{mK^2}{Ml^2} (b - a + 2fl)$$

ou l'inégalité inverse.

En discutant les hypothèses où une au moins des roues glisse dans le démarrage, on verrait de même qu'aucun glissement n'est possible si les inégalités (9) et (10) sont vérifiées; que la roue d'arrière glisse seule si l'inégalité (9) est seule vérifiée; que la roue d'avant glisse seule si l'inégalité (10) est seule vérifiée que les deux roues glissent si aucune des inégalités (9) et (10) n'est vérifiée.

Dans la pratique, le cycliste se placera dans une position où l'inégalité (11) soit vérifiée, et pédalera de façon que $-\xi''$ ait la valeur μ du second membre de (10), c'est-à-dire de façon que $\Gamma = (M + 2m \frac{K^2}{l^2}) \mu$. Les inégalités (8), (9), (10) sont alors satisfaites et le démarrage a lieu sans glissement. Comme m est très petit, les inégalités (8), (9) et (10) peuvent s'écrire approximativement :

$$|\xi''| < \frac{ag}{h}, \quad |\xi''| < \frac{fg}{1 + \frac{a-fh}{f}}$$

et la seconde entraîne la première (ou inversement) suivant qu'on a : $a > fh$ ou l'inégalité inverse. On voit que $|\xi''|$ est nécessairement inférieur à fg , et pour qu'il s'en rapproche, il faut que a soit très voisin de fh . Si $a < fh$, la machine se cabrerait quand on pédalerait trop énergiquement: le cycliste devra donc prendre une position telle que a soit un peu supérieur à fh , [tg , C, G un peu plus grand que f], et pédaler de façon que

$$\Gamma = \frac{fMgl}{1 + \frac{a-fh}{f}}$$

On discuterait l'arrêt de la même manière: par exemple, la verticale GH étant encore comprise entre C_1 et C_2 , et $\frac{m}{M}$ négligeable, on verrait que la roue d'avant roule sans glisser dans tous les cas, que la roue d'arrière glisse quand

$\Gamma < \frac{fMgl}{1 + \frac{a+fh}{b}}$. Pour s'arrêter le plus vite possible, sans dépense inutile d'énergie, le cycliste doit contrepédaler de façon que $|\Gamma| = \frac{fMgl}{1 + \frac{a+fh}{b}}$: la durée de l'arrêt est alors $\frac{v_0(1 + \frac{a+fh}{b})}{fg}$. Des résultats analogues s'appliquent au démarrage et à l'arrêt d'une automobile.

41 - Traction d'une voiture. - Considérons une voiture à quatre roues chargée, démarrant sur une route horizontale: le système admet, par hypothèse, un plan de symétrie verticale xoy et est tiré par une force horizontale Φ parallèle à ce plan et passant par le centre de gravité G du système. Étudions le démarrage, en supposant, pour simplifier le calcul, que G soit dans le même plan horizontal que les centres des quatre roues et équidistant de ces centres.

Le sens de l'horizontale Ox étant celui de Φ , soit \bar{R}_1 la réaction du sol sur une des roues d'avant, \bar{R}_2 la réaction sur une des roues d'arrière, \bar{R} la somme $\bar{R}_1 + \bar{R}_2$; soit enfin $2d$ l'écart des axes des deux paires de roues. On trouve aussitôt (comme au N° précédent):

$$(1) \begin{cases} M\ddot{\xi} = \Phi + 2R_x, & Mg = 2R_y, \\ 2mK^2(\omega_1' + \omega_2') = 2l(R_1^x + R_2^x) + 2d(R_1^y - R_2^y) \\ mK^2\omega_1' = lR_1^x, & mK^2\omega_2' = lR_2^x, \end{cases}$$

Note de la page suivante.

Inversement, le glissement n'est possible que si Φ dépasse le second membre de (2); les quatre roues glissent alors dans le sens ox , et on a:

$$(3) \quad M\ddot{\xi} = \Phi - fMg \quad \omega_1' = \omega_2' = -\frac{fMgl}{4mK^2}$$

Si, à un instant t_1 , la traction est supprimée, $\ddot{\xi}$ devient égal à $-fg$, ω_1' et ω_2' gardent la valeur (3), tant que le glissement persiste, c'est-à-dire jusqu'à l'instant $t_1 + h$, $\left\{ h = \frac{\xi_1}{fg \left[1 + \frac{fMl^2}{4mK^2} \right]} \right\}$; pour $t > t_1 + h$, la voiture roule d'un mouvement uniforme.

Soit e le chemin parcouru par G , e_1 le chemin parcouru sur une des roues par le point de contact avec le sol [$e_1 \leq e$]; le travail des réactions du sol est $-fMg(e - e_1)$.

équations d'où on tire aussitôt : $R_1^y = R_2^y = \frac{Mg}{4}$.

Si aucune roue ne glisse, on a :
 $\xi' = -l\omega_1 = -l\omega_2$, et les équations (1) donnent :

$$(M + 4mK^2)\xi'' = \Phi, \quad R_1^x = R_2^x = \frac{mk^2}{l^2} \frac{\Phi}{M + 4m \frac{K^2}{l^2}}$$

et on doit avoir :

$$(2) \quad \Phi \ll \frac{fMg \cdot Ml^2}{4mk^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4mK^2}{Ml^2}}$$

Quand $\frac{M}{m}$ est très grand, cette condition est remplie à moins que Φ ne soit considérable⁽¹⁾. Dans tous les cas, on peut appliquer à la voiture une traction assez faible pour que les roues roulent sans glisser : le travail des réactions du sol est nul, l'énergie cinétique du système est égale (à chaque instant t) au travail de Φ entre l'instant t et l'instant initial. Quand la voiture a atteint la vitesse voulue $V = \xi$, si on supprime la traction, elle roule indéfiniment (sans glisser) avec la même vitesse. Comme on peut prendre V aussi petit qu'on veut, on voit qu'on peut transporter une masse M d'un point à un autre de même niveau à l'aide d'une force tractrice Φ et d'un travail $\Phi \cdot \epsilon$ aussi faibles qu'on veut [ϵ désignant le chemin rectiligne parcouru]. En réalité, à cause des petites résistances que nous avons négligées [voir le N°44], Φ et $\Phi \cdot \epsilon$ ne peuvent descendre au-dessous d'un certain minimum très faible.

Au contraire si on traînait directement la masse M sur le sol, la force tractrice devrait dépasser fMg et le travail dépensé serait plus grand que $fMg\epsilon$, si lent que fût le transport.

42. - Transport par rouleaux. - Au lieu de voiturier un fardeau, un madrier par exemple, on peut le transporter horizontalement sur une suite de rouleaux libres, dont les axes sont disposés perpendiculairement à la direction Ox du déplacement. On fait en sorte que les points les plus bas du fardeau forment une droite ou des droites parallèles à Ox ; par suite les contacts ont toujours lieu avec les points les plus élevés du rouleau. Nous admettons encore que le plan vertical xOy est un plan de symétrie du système :

(1). Voir la note page précédente.

la traction Φ est de sens Ox et appliquée au fardeau de façon à passer par son centre de gravité H .

Étudions l'hypothèse où le démarrage a lieu sans qu'aucun glissement se produise soit entre le sol et les rouleaux, soit entre les rouleaux et le fardeau. Soit V la vitesse du fardeau, V_1 celle du centre C_1 d'un des rouleaux porteurs, ω_1 sa rotation instantanée; on a: $V_1 = -l\omega_1$, puisque le rouleau roule sans glisser sur le sol; d'autre part, la vitesse du point le plus élevé Q_1 du rouleau est $V_1 - l\omega_1$ et doit être égale à V ; d'où: $\frac{V}{2} = V_1 = -l\omega_1$. Le chemin parcouru par le centre d'un des rouleaux porteurs est la moitié du chemin parcouru dans le même temps par le fardeau.

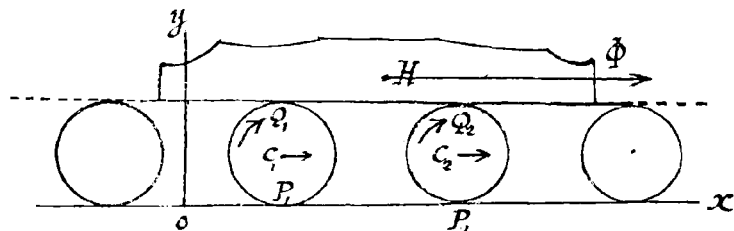
Soit R_1 la somme géométrique des réactions du sol sur le rouleau C_1 , f_1 la somme géométrique des réactions de ce rouleau sur le fardeau, M la masse du fardeau.

En a:

$$(1) \quad M \frac{dV}{dt} = \Phi + \sum f_1^x.$$

Le théorème du mouvement du centre de gravité appliqué au rouleau C_1 donne:

$$(2) \quad \frac{m}{2} \frac{dV}{dt} = R_1^x - f_1^x, \quad mg = R_1^y - f_1^y;$$



le théorème des moments appliqué par rapport à C_1 dans le mouvement de la roue autour de C_1 donne:

$$(3) \quad -\frac{m}{2} \frac{K^2}{\rho^2} \frac{dV}{dt} = R_1^x + f_1^x.$$

Des équations (2) et (3) on tire:

$$(4) \quad R_1^x = \frac{m}{4} \left(1 - \frac{K^2}{\rho^2}\right) \frac{dV}{dt}, \quad f_1^x = -\frac{m}{4} \left(1 + \frac{K^2}{\rho^2}\right) \frac{dV}{dt}.$$

D'où en portant dans (1):

$$(5) \quad M \left\{ 1 + \frac{j}{4} \frac{m}{M} \left(1 + \frac{K^2}{\rho^2}\right) \right\} \frac{dV}{dt} = \Phi,$$

j désignant le nombre des rouleaux qui portent le fardeau à l'instant t . Quand les rouleaux sont homogènes, $\frac{K^2}{\rho^2}$ est égal à $\frac{1}{2}$, et on a:

$$(6) \quad \frac{dV}{dt} = \frac{\Phi}{M \left(1 + \frac{3j}{8} \frac{m}{M}\right)}.$$

Mais pour qu'aucun glissement ne se produise, il faut que chaque rouleau porteur satisfasse aux restrictions:

$$(7) \quad |P_1^x| \leq f P_1^y, \quad |R_1^x| \leq f R_1^y,$$

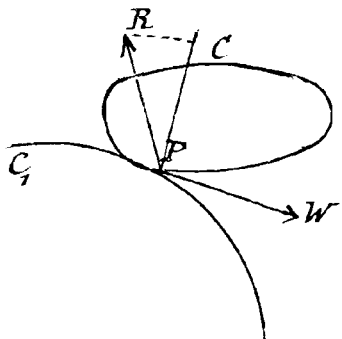
(le coefficient de frottement étant supposé le même pour tous les contacts). Admettons que le fardeau ne repose, à l'instant t , que sur deux rouleaux porteurs C_1 et C_2 et que la verticale de H passe entre P_1 et P_2 , et soit à la distance a du premier, b du second; admettons en outre que la masse des deux rouleaux soit négligeable devant celle du fardeau, et que $m\phi$ soit négligeable devant fMg : dans ces conditions, R_1^x et R_2^x , P_1^x et P_2^x , donnée par (4), sont négligeables devant fMg ; P_1^y et R_1^y ne diffèrent de $\frac{b}{a+b}Mg$, P_2^y et R_2^y de $\frac{a}{a+b}Mg$ que d'une quantité très petite devant Mg , et les inégalités (7)⁽¹⁾ sont vérifiées pourvu que a ou b ne soit pas très petit.

Quand le fardeau passera sur un nouveau rouleau immobile, il glissera un instant sur lui et lui imprimera très vite un roulement sans glissement.

On peut faire au sujet du travail dépensé les mêmes remarques qu'à la fin du N^o précédent.

43. - De l'influence du frottement sur la composante normale des réactions.

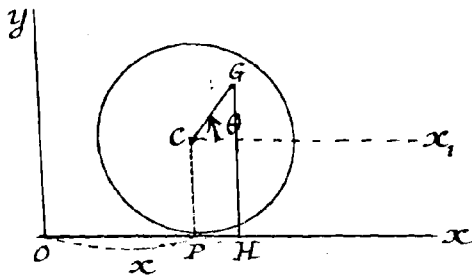
Revenons au cas simple d'un disque plat C , lancé dans le plan xOy , et mobile sur une courbe fixe C_1 . Toutes les forces qui s'exercent sur C , autres que la réaction \vec{R} de C_1 sur C au point de contact, sont supposées données. Le disque C étant placé, à l'instant t , dans une position déterminée avec des vitesses déterminées, soit \vec{W} la vitesse (à cet instant) de l'élément P de C en contact avec C_1 , vitesse que nous supposons différente de zéro. Si les deux disques étaient parfaitement lisses, la réaction de C_1 sur C à l'instant t serait une certaine force f ; les deux disques étant rugueux, la réaction R a une composante tangentielle R_t directement opposée à \vec{W} , mais en



(1) Il serait facile de vérifier que quand les inégalités (7) [où P_1^x , R_1^x sont remplacées d'après (4)] sont vérifiées, aucun glissement ne peut se produire.

outre sa composante normale R_n est en général différente de P . Bornons-nous à le montrer sur l'exemple très simple du N° 26, mais en supposant cette fois que les courbes en contact sont rugueuses.

Exemple. - Un cercle non homogène, pesant, est lancé dans le plan vertical xoy sur un plan horizontal fixe rugueux. Mouvement du système.



La notation étant la même qu'au N° 26, nous admettons qu'à l'instant t_0 considéré, le disque est en contact avec ox , que la vitesse de C est horizontale et que $\lambda \theta_0'^2$ est $\langle g$.

Dans ces conditions il est impossible que le disque se soulève au dessus de ox (N° 27); il reste en contact avec cette droite au moins un certain temps.

Écrivons les équations du mouvement comme au N° 26, mais en introduisant dans les seconds membres la composante horizontale R_x de la réaction \bar{R} .

Il vient :

$$(1) \quad \begin{cases} M\ddot{\xi} = M[x'' - \lambda \sin \theta \theta'' - \lambda \cos \theta \theta'^2] = R_x \\ M\ddot{\eta} = M[\lambda \cos \theta \theta'' - \lambda \sin \theta \theta'^2] = R_y - Mg, \\ MK^2 \theta'' = R_x [l + \lambda \sin \theta] - R_y \lambda \cos \theta \end{cases}$$

Entre ces trois équations linéaires en x'' , θ'' , R_x , R_y , K^2 , on peut éliminer x'' et θ'' ; il suffit de multiplier la 2^e par K^2 , la troisième par $-\lambda \cos \theta$, et d'ajouter. Il vient :

$$(2) \quad R_y (K^2 + \lambda^2 \cos^2 \theta) - R_x \lambda \cos \theta (l + \lambda \sin \theta) = MK^2 (g - \lambda \sin \theta \theta'^2).$$

Donnons à cette équation une forme un peu plus géométrique : soit H la projection de G sur ox et h , la distance de G à ox et à la verticale de G . Il est loisible de choisir pour sens de ox le sens de PH , [$\cos \theta > 0$]; l'équat. (2) s'écrit alors :

$$(3) \quad R_y - R_x \frac{hd}{K^2 + d^2} = \frac{M \{g - (h-l) \sin^2 \theta\}}{1 + \frac{d^2}{K^2}}.$$

Si les deux courbes sont parfaitement lisses, R_x est nul, et on a :

$$R_y = \frac{M \{g - (h-l) \sin^2 \theta\}}{1 + \frac{d^2}{K^2}} = \frac{M \{g - l \sin^2 \theta\}}{1 + \frac{d^2}{K^2}} \equiv \rho > 0.$$

Mais quand elles sont rugueuses, $R_x \neq 0$ et on voit que R_y diffère de ρ . La vitesse de glissement comptée positivement dans le sens ox est : $u = x' + l\theta'$; supposons la différente de zéro à l'instant t_0 . Si elle est positive c'est-à-dire si la vitesse de glissement a le sens PH , R_x est négatif et l'égalité (4) nous montre que la pression normale R_y est plus petite à l'instant t_0 que s'il n'y avait pas frottement; si u est < 0 , c'est-à-dire si la vitesse de glissement a le sens HP , la pression R_y est plus grande que s'il n'y avait pas frottement. La rugosité des surfaces diminue immédiatement dans le premier cas, et accroit dans le second cas, la pression normale. Ce résultat est indépendant de toute loi de frottement, et suppose seulement que la composante tangentielle de la réaction s'oppose à la vitesse de glissement.

Introduisons maintenant les lois de Coulomb; R_y doit être positif, puisque la réaction R est nécessairement dirigée vers le haut; on a

$$\text{et} \quad \begin{aligned} R_x &= f R_y & \text{si } x'_0 + l\theta'_0 < 0 \\ R_x &= -f R_y & \text{si } x'_0 + l\theta'_0 > 0. \end{aligned}$$

Plaçons-nous dans le premier cas : la vitesse de glissement a le sens HP . L'équation (3) donne alors :

$$(4) \quad R_y \left(1 - fh \frac{d}{K^2 + d^2}\right) = \frac{M [g - (h-l) \theta'^2]}{1 + \frac{d^2}{K^2}} = \rho;$$

le second membre de (4) est positif; pour que R_y soit positif, il faut que f soit inférieur à $\frac{K^2 + d^2}{hd}$. Si donc $f > \frac{K^2 + d^2}{hd}$, le

mouvement étudié est inadmissible ; et comme le mouvement libre est impossible, on voit que les lois de Coulomb sont en contradiction, dans ce cas, avec la Dynamique des solides rigides.

Si au contraire on a, $f < \frac{K^2}{h^2} + d$, il suffit de remplacer dans la seconde équation (1) R_y par sa valeur tirée de (II), pour former une équation différentielle en $\theta(t)$ de la forme :

$$\theta'' = A(\theta)\theta' + B(\theta),$$

équation qui s'intègre par deux quadratures. On déduit ensuite des deux premières équations (1) [où $R_x = fR_y$], la combinaison :

$$\xi - f\eta' = +fg, \text{ ou } \xi - f\eta = fg \frac{t^2}{2} + at + b,$$

ou enfin :

$$x + \lambda \cos \theta - f\lambda \sin \theta = fg \frac{t^2}{2} + at + C.$$

44. Sois du frottement de roulement dans le cas du cerceau.

Sans insister davantage sur les difficultés que présentent les lois du frottement de glissement, passons à l'étude du frottement de roulement.

Reprenons l'exemple du cerceau homogène glissant sur une droite horizontale [N° 31]. Au bout d'un temps fini, le cerceau, avons-nous dit, roule sans glisser sur Ox d'un mouvement uniforme. En réalité, la force vive du cerceau diminue lentement et au bout d'un temps très long, le cerceau s'arrête. La raison en est que le cerceau et le plan horizontal fixe Π soit en contact, non par le point géométrique P , mais par un petit élément, et que les réactions du plan Π sur le cerceau doivent être remplacées non seulement par une force \bar{R} appliquée en P , mais en outre par un couple de très petits bras de levier qu'on appelle souvent couple de frottement de roulement. Ce couple, par raison de symétrie, est évidemment situé dans le plan xOy ; l'expérience montre qu'il s'oppose toujours à la rotation du cerceau (c'est-à-dire au roulement) et que l'axe Γ de ce couple est sensiblement proportionnel à la pression N [composante normale de \bar{R}], soit

$$\Gamma = hN;$$

h est un coefficient linéaire (puisque Γ est le produit d'une

force par une longueur), qui pour un rayon l donné du disque, ne dépend sensiblement que de la nature des deux substances en contact. On peut poser encore :

$$\Gamma = h_1 l N;$$

h_1 est alors un coefficient sans dimensions qui est très petit devant f . L'expérience montre que (pour deux substances données) h_1 croît avec l , et que h_1 décroît quand l croît ⁽¹⁾. Mais la loi précise de ces variations est fort mal déterminée. Pour des roues de bois de dimensions ordinaires roulant sur du bois dressé, la valeur de h_1 (en mètres) est de l'ordre de $\frac{1}{1000}$; pour des roues de voiture roulant sur une chaussée empierrée bien entretenue, on admet que h_1 a la valeur Omètre 015.

Les lois précédentes supposent que la rotation du cerceau n'est pas nulle. Si elle est nulle dans un intervalle de temps t_0 à t_1 , l'expérience montre que le couple Γ (dont le sens peut d'ailleurs être quelconque) a son axe inférieur ou égal à $h_0 N$ [h_0 coefficient déterminé supérieur à h].

En définitive, soit N et F les composantes normale et tangentielle de R , et Γ la longueur de l'axe du couple de frottement de roulement précédée du signe + si le couple a le sens xoy , du signe - dans le sens contraire. Soit W la vitesse de glissement et ω la rotation instantanée du cerceau à l'instant t : si W et ω sont tous deux différents de zéro, F est directement opposé à W et Γ est de signe contraire à ω ; on a de plus

$$(1) \quad F = fN, \quad |\Gamma| = hN$$

Si les deux quantités W et ω sont nulles pendant un certain temps, c'est-à-dire si le cerceau reste immobile, le sens de F et le signe de Γ peuvent être quelconques, mais on a :

$$(2) \quad F \leq f_0 N, \quad |\Gamma| \leq h_0 N \quad \left(\begin{array}{l} f_0 > f \\ h_0 > h \end{array} \right).$$

Si une des quantités W ou ω est nulle, la grandeur correspondante F ou Γ peut avoir un sens quelconque et satisfaire à l'inégalité (2) correspondante (et non à l'égalité ⁽¹⁾).

⁽¹⁾ Si l était très petit, h_1 atteindrait les valeurs supérieures à f .

45. - Travail du frottement de roulement.

Le travail du frottement de roulement est toujours négatif, car son travail élémentaire est égal à $fWdt$, et f est toujours de signe contraire à W . On sait, d'autre part, que le travail du frottement de glissement est aussi négatif. Pour que ce dernier travail soit nul, il faut que la vitesse de glissement soit constamment nulle. Pour que le travail du frottement de roulement soit nul, il faut que la rotation du cerceau soit constamment nulle. Pour que le travail total essentiellement négatif, des forces de frottement soit nul, il faut donc et il suffit que le cerceau reste immobile. Ce résultat, établi dans le cas particulier du cerceau glissant et roulant sur une droite fixe, sera étendu au cas général du contact entre deux solides.

Le travail du frottement de roulement est très faible comparé au travail du frottement de glissement. Pour comparer ces deux travaux, faisons parcourir au centre du cerceau un chemin e d'abord en le faisant glisser sur Ox d'un mouvement de translation, ensuite en le faisant rouler sur Ox sans glisser, la pression normale étant dans les deux cas le poids du cerceau. Dans le premier mouvement, la vitesse de glissement est celle du centre; le travail élémentaire du frottement est $-fMg Wdt$; le travail total est $-fMge$. Dans le second mouvement, le chemin parcouru e est égal en valeur absolue à: $l\omega t$ [t durée du mouvement]; le travail élémentaire du frottement est $-hN\omega dt$; le travail total est $-hMg \frac{e}{l}$; le rapport du second travail au premier est $\frac{h}{fl}$. Si, par exemple, $f=0,3$, $l=0^m,33$; $h=0^m,001$, le rapport $\frac{h}{fl}$ est sensiblement égal à $\frac{1}{100}$.

46. - Mouvement d'un cerceau homogène pesant sur une droite inclinée, en tenant compte du frottement de roulement.

Le cerceau⁽¹⁾ est abandonné sans vitesse dans un plan vertical xoy normal au plan matériel fixe dépoli Π . Le mouvement a lieu évidemment dans ce plan xoy . Ses équations du mouvement sont les mêmes qu'au N° 32, à cela près que dans la 3^e équation,

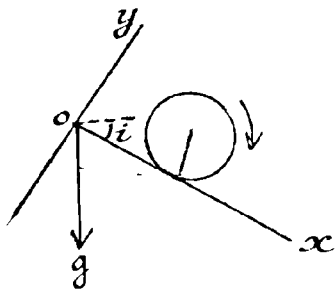
(1) Tout ce qui suit suppose seulement que le disque est circulaire et que son centre de gravité coïncide avec son centre de figure.

il faut ajouter Γ au second membre. On a donc

$$(3) \quad \begin{cases} M\ddot{\xi} = R_x + Mg \sin i \\ 0 = M\ddot{\eta} = R_y - Mg \cos i; \\ MK^2\ddot{\theta} = lR_x + \Gamma \end{cases}$$

Quatre hypothèses sont possibles :

1° le cerceau reste immobile ; 2° il roule sans glisser ;
3° il glisse sans rouler ; 4° il glisse et roule. Discutons ces hypothèses, en confondant, pour simplifier, h_0 avec h , f_0 avec f .



1^{ère} Hypothèse. - On a : $\ddot{\xi} = \ddot{\theta} = 0$;
d'où :

$$R_x = -Mg \sin i, \quad R_y = Mg \cos i, \quad \Gamma = -lR_x;$$

et pour que l'hypothèse soit admissible, il faut :

$$|R_x| \leq fR_y, \quad \Gamma \leq hR_y, \quad \text{c'est-à-dire :}$$

$$\operatorname{tgi} \leq f, \quad \operatorname{tgi} \leq \frac{h}{l} = h_1.$$

Comme h_1 est toujours ⁽¹⁾ $\leq f$, ces conditions se réduisent à :

$$(4) \quad \operatorname{tgi} \leq h_1 \leq f.$$

2^e Hypothèse. - On a : $\ddot{\xi} + l\ddot{\theta} = 0$,

$$(5) \quad 0 = M(\ddot{\xi} + l\ddot{\theta}) = R_x \left[1 + \frac{l^2}{K^2} \right] + \frac{l\Gamma}{K^2} + Mg \sin i,$$

et

$$(6) \quad MK^2\ddot{\theta} = lR_x + \Gamma = \frac{\Gamma - Mgl \sin i}{1 + \frac{l^2}{K^2}}.$$

Pour $t=0$, θ est nul ; pour t voisin de zéro, θ a le signe de θ_0 ; Γ doit être de signe contraire à θ , donc de signe contraire à θ_0 , par suite il faut que θ'' ait le signe de $-Mgl \sin i$, c'est-à-dire le signe $-$, et que Γ ait le signe $+$. Comme $\Gamma = hN = h_1 l Mg \cos i$, θ'' n'aura le signe $-$ que si

$$(7) \quad \operatorname{tgi} > h_1 ;$$

si $\operatorname{tgi} = h_1$, $\theta'' = 0$.

(1) Il n'en serait autrement que si le rayon du disque était extrêmement petit.

D'autre part, d'après (5), $R_x = \frac{-Mg}{\left(1 + \frac{l^2}{K^2}\right)} \left[\sin i + \frac{l^2}{K^2} h_1 \cos i \right]$;
il faut que cette quantité soit, en valeur absolue, inférieure ou égale à $fN = fMg \cos i$,

d'où :

$$(8) \quad \operatorname{tgi} \leq f \left(1 + \frac{l^2}{K^2}\right) - h_1 \frac{l^2}{K^2}.$$

Remarquons que, dans cette hypothèse, la rotation du disque est toujours négative; le disque descend en roulant d'un mouvement uniformément accéléré; on a :

$$(9) \quad \xi'' = -l\theta'' = + \frac{gl^2 \cos i [\operatorname{tgi} - h_1]}{K^2 + l^2}.$$

3^e Hypothèse. - $\theta' \equiv 0$, $\xi' + l\theta' \neq 0$.

On a, dans ce cas, $\theta'' = 0$, d'où : $\Gamma = -lR_x$, et $|R_x| = fMg \cos i$;
d'où $|\Gamma| = fMg \cos i$. La condition $|\Gamma| \leq h_1 lN$ exige donc :
 $fMg \cos i \leq h_1 Ml g \cos i$, ou $f \leq h_1$, condition qui n'est jamais remplie dans les applications⁽¹⁾.

4^e Hypothèse. - $\theta' \neq 0$, $\xi' + l\theta' \neq 0$.

Comme θ'' doit être de signe contraire à Γ , la 3^e équation (3) exige que lR_x soit de signe contraire à Γ et l'emporte (en valeur absolue) sur Γ ; cette dernière condition est toujours remplie, puisqu'on a :

$$|\Gamma| = h_1 lN, \quad l|R_x| = flN, \quad \text{et } h_1 < f.$$

Calculons, d'autre part, $\xi'' + l\theta''$:

$$(10) \quad M(\xi'' + l\theta'') = R_x \left[1 + \frac{l^2}{K^2}\right] + l \frac{\Gamma}{K^2} + Mg \sin i \\ = Mg \cos i \left[\operatorname{tgi} + \varepsilon \left\{ f \left(1 + \frac{l^2}{K^2}\right) - h_1 \frac{l^2}{K^2} \right\} \right];$$

dans cette égalité, ε est égal à +1 ou à -1 suivant que $\xi' + l\theta'$ est négatif ou positif pour t voisin de zéro, c. à. d. suivant que $\xi'' + l\theta''$ est négatif ou positif. Comme le coefficient de ε dans le dernier membre de (10) est sûrement positif, il faut que $\xi'' + l\theta''$ ait le signe de $Mg \sin i$, c. à. d. le signe +, que ε soit égal à -1 et que, de plus, l'inégalité :

$$\operatorname{tgi} > f \left(1 + \frac{l^2}{K^2}\right) - h_1 \frac{l^2}{K^2}$$

(1). Si l est très petit, h_1 surpasse f . Le disque reste immobile si $\operatorname{tgi} \leq f < h_1$. Il glisse sans tourner si $\operatorname{tgi} > f$. On retombe ainsi sur la discussion du mouvement d'un élément pesant sur un plan incliné rugueux.

soit remplie. Si $tgi = f(1 + \frac{l^2}{R^2}) - h_1 \frac{l^2}{R^2}$, le glissement est nul.⁽¹⁾

Conclusion. - En définitive,
Si $tgi \leq h_1$, le disque reste immobile;

Si $h_1 < tgi \leq f(1 + \frac{l^2}{R^2}) - h_1 \frac{l^2}{R^2}$, le disque descend en roulant sans glisser;

Si $tgi > f(1 + \frac{l^2}{R^2}) - h_1 \frac{l^2}{R^2}$, le disque descend en glissant et roulant, et la vitesse de glissement est dirigée vers le bas.

A2. - Mouvement sur une droite horizontale d'un disque homogène pesant tiré sur une force parallèle à la droite.

Imaginons que notre disque circulaire, au lieu de reposer sur une droite inclinée ox , repose sur une horizontale, et qu'on lui applique, en son centre C , une force Φ parallèle à ox . Le problème est exactement le même que le précédent, à cela près que Φ remplace partout $Mg \sin i$, et que la pression N , au lieu d'être égale à $Mg \cos i$ est égale à Mg ; $\frac{\Phi}{N}$ remplace tgi . La discussion du N° précédent conduit donc aux conclusions suivantes:

Si $\frac{\Phi}{Mg} \leq h_1$, le disque reste immobile;

Si $h_1 < \frac{\Phi}{Mg} \leq f(1 + \frac{l^2}{R^2}) - h_1 \frac{l^2}{R^2}$, le disque roule (sans glisser) dans le sens de Φ ;

Si $\frac{\Phi}{Mg} > f(1 + \frac{l^2}{R^2}) - h_1 \frac{l^2}{R^2}$, le disque glisse et roule.

Pour mettre le disque en mouvement le plus rapidement possible, sans perdre de travail à vaincre le frottement de glissement, on lui appliquera donc une force égale à

$$Mg \left[f \left(1 + \frac{l^2}{R^2} \right) - h_1 \frac{l^2}{R^2} \right];$$

la vitesse du centre du disque au bout du temps t sera alors [d'après (9)]:

⁽¹⁾ La quantité $f(1 + \frac{l^2}{R^2}) - h_1 \frac{l^2}{R^2} = f + \frac{l^2}{R^2}(f - h_1)$ est plus grand que f , donc que h_1 .

$$\int_0^t t = \frac{l^2 [\Phi - h_1 N]}{M (R^2 + l^2)} t = g (f - h_1) t.$$

Quand le disque aura atteint la vitesse désirée, on n'exercera plus sur lui qu'une traction Φ égale à $h_1 Mg$, et le disque roulera d'un mouvement uniforme⁽¹⁾

47. - Extension au mouvement d'un rouleau.

Au lieu d'un disque plat, considérons un cylindre homogène de révolution limité par deux sections droites, et qui repose sans vitesse sur un plan horizontal partout le même. Au centre de gravité G du cylindre, appliquons une force horizontale Φ normale à l'axe du cylindre. Il est évident, par raison de symétrie, que la section moyenne du cylindre va se mouvoir dans son plan vertical initial, et toute la discussion précédente s'appliquera, M étant la masse totale du cylindre.

Il en serait de même si on appliquait à l'axe du cylindre des forces horizontales deux à deux symétriques par rapport au plan de section moyenne, à condition d'appeler Φ la somme géométrique de ces tractions.

Enfin, la discussion du N° 45 s'applique au mouvement d'un rouleau homogène pesant, abandonné sans vitesse sur un plan incliné, dans une position où les sections droites du cylindre sont verticales.

On discuterait aussi aisément, en tenant compte du frottement de roulement, le démarrage d'une voiture [les conditions étant celles du N° 41] ou d'une locomotive, etc. Par exemple, la voiture ne démarrera que si Φ dépasse $4h_1 Mg$.

⁽¹⁾ Quand le cerceau glisse, soit e le chemin parcouru entre deux instants par son centre, e_1 le chemin parcouru sur le cerceau par le point de contact avec le sol ($e_1 \leq e$). Le travail des réactions du sol (essentiellement négatif) est en valeur absolue $Mg \{ f(e - e_1) + h_1 e_1 \}$; cette quantité quand $e = e_1$ (roulement sans glissement) est égale à $Mg h_1 e$, et dans tous les autres cas elle surpasse $Mg h_1 e$ de $Mg (f - h_1) (e - e_1)$.

Chapitre II.

Mouvement d'un corps solide de révolution. Coupie. Phénomène gyroscopique. Dérivation des projectiles.

48. - Corps de révolution fixe par un point de son axe : nutation, précession, rotation propre.

Avant d'étudier le mouvement d'un solide quelconque, nous traiterons d'abord le cas particulier où le corps est un solide de révolution S , homogène ou tel que sa densité soit constante sur chaque circonférence décrite par un point tournant autour de ^{l'axe de révolution ou du corps}. Ce cas particulier se rencontre dans de nombreuses applications, notamment en Astronomie et en balistique.

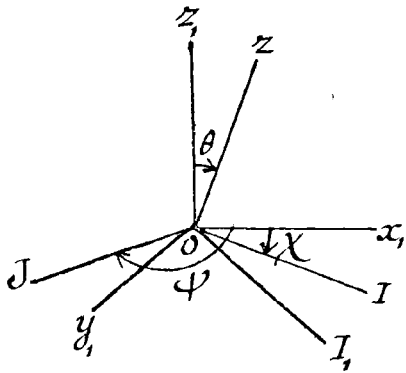
Le centre de gravité du solide est alors situé sur l'axe de révolution OZ . Nous supposons en premier lieu que le solide est fixé par un point O de cet axe

et que les forces extérieures autres que la réaction de l'appui fixe O sont données.

Soit Ox, y, z , les axes fixes : la position du solide dépend de trois paramètres, par exemple l'angle avec Oz , de l'axe de révolution Oz , l'angle du plan z, Oz avec le plan fixe z, Ox , et l'angle que fait un plan z, Ox fixe dans le corps avec le plan z, Oz . Précisons la définition de ces paramètres.

Preons une fois pour toutes sur l'axe de révolution un sens déterminé Oz , et soit OI la projection de Oz sur le plan x, oy . Appelons θ l'angle $z, \bar{O}z$ compris entre 0 et π ; appelons χ l'angle $x, \bar{O}I$ compté positivement autour de Oz . Soit d'autre part OJ la demi-perpendiculaire au plan z, Oz telle que le sens $z, \bar{O}z$ soit le sens positif autour de OJ ; OJ est perpendiculaire à OI , et si ψ désigne l'angle $x, \bar{O}J$ (compté positivement autour de Oz), on a : $\psi = \frac{\pi}{2} + \chi$; il est loisible de substituer ψ à χ . Enfin, z, Ox étant un demi-plan fixe dans le solide, appelons φ l'angle de ce demi-plan avec le demi-plan ⁽¹⁾ z, OJ , angle compté positivement à

(1) Ce demi-plan passe par Oz et est perpendiculaire au plan z, Oz .



partir de ZOJ autour de OZ .

La position du solide étant donnée, les angles θ , ψ [ou χ] et φ sont déterminées sans ambiguïté à un multiple près de 2π . Inversement, si θ , ψ et φ sont donnés, ($0 \leq \theta \leq \pi$), définit ψ sans ambiguïté la demi droite OJ ; θ (compté autour de OJ) définit ensuite sans ambiguïté la position de OZ ; φ (compté autour de OZ) définit enfin sans ambiguïté la position du demi-

plan zox de S , donc la position de S .

A cause de leur signification astronomique, on appelle souvent θ l'angle de nutation du solide, ψ l'angle de précession, φ l'angle de rotation propre.

49 - Décomposition de la rotation instantanée du solide.

Soit $\overline{O\omega}$ la rotation instantanée du solide à l'instant: nous pouvons la décomposer en trois rotations a, b, c autour des trois demi-droites OZ, OJ, OZ . Dans chacune de ces rotations, un seul des trois angles ψ, θ, φ change; à savoir ψ qui s'augmente de adt dans la première rotation, θ qui s'augmente de bdt dans la seconde, φ qui s'augmente de cdt dans la troisième⁽¹⁾. On a donc:

$d\psi = adt, d\theta = bdt, d\varphi = cdt$. Autrement dit, les composantes de $O\omega$ selon les trois demi-droites OZ, OJ, OZ sont ψ', θ', φ' .

Décomposons encore $\overline{O\omega}$ en un vecteur dirigé selon OZ et un vecteur $\overline{O\omega}$ perpendiculaire à OZ . A cet effet, introduisons la demi droite OI , projection de OZ sur le plan xoy perpendiculaire à OZ , et cherchons les projections de $O\omega$ sur OZ, OI , et OJ ; il nous suffit, pour cela, de projeter les trois composantes a, b, c de $\overline{O\omega}$ sur OZ (ou sur OI , etc) et de faire la somme. Soit P la projection de $\overline{O\omega}$ sur OZ ; la composante b ne donnant rien sur OZ , on trouve

$$(1) \quad P = \psi' \cos \theta + \varphi'$$

On trouve de même:

(1) a, b, c sont positifs ou négatifs.

$$(2) \quad \text{proj. } \overline{O\omega} \text{ sur } OI, = -\psi' \sin \theta$$

$$(3) \quad \text{proj. } \overline{O\omega} \text{ sur } OJ = \theta'$$

d'où on tire :

$$(4) \quad \omega_1^2 = \psi'^2 \sin^2 \theta + \theta'^2.$$

50. Moment cinétique et force vive du solide.

Pour calculer le mouvement du solide, il faut connaître trois équations indépendantes de la réaction de l'appui fixe O . Le théorème des moments cinétiques par rapport à O fournit évidemment trois telles équations.

La rotation instantanée de S étant $\overline{O\omega}$, calculons le moment cinétique \overline{OK} de S par rapport à O .

Cout d'abord, il est évident par raison de symétrie⁽¹⁾ que le vecteur \overline{OK} est situé dans le plan $Z, O\omega$.

En particulier, quand la rotation a lieu autour de OZ , $[P] = \omega$, \overline{OK} est dirigé selon OZ , et si on le compte positivement dans le sens OZ , il se confond en grandeur et signe avec le moment cinétique de S par rapport à OZ , c'est-à-dire avec CP , C désignant le moment d'inertie de S autour de son axe.

Quand $\overline{O\omega}$ est perpendiculaire à OZ , $[P=0, \omega=\omega_1]$, \overline{OK} est dirigé selon $\overline{O\omega_1}$. En effet, faisons tourner $\overline{O\omega_1}$ de 180° autour de OZ : \overline{OK} décrit un demi-cône de révolution autour de OZ , mais d'autre part il doit coïncider, dans sa nouvelle position, avec sa position primitive changée de sens. Il faut donc que l'angle Z, \overline{OK} soit droit, c'est-à-dire que \overline{OK} soit dirigé selon la droite $O\omega_1$. Dans ce cas, \overline{OK} a donc

(1) Soit S et S_1 deux solides symétriques l'un de l'autre par rapport à un plan Π et animés respectivement de la rotation instantanée $\overline{O\omega}$ et $\overline{O_1\omega_1}$, les deux vecteurs $\overline{O\omega}$ et $\overline{O_1\omega_1}$ étant symétriques par rapport à Π : le moment cinétique de S par rapport à O et celui de S_1 par rapport à O_1 sont symétriques par rapport à Π . En effet, soit P un élément de masse m de S , et P_1 l'élément symétrique de S_1 ; soit \overline{PQ} et $\overline{P_1Q_1}$ la quantité de mouvement de P et de P_1 ; $\overline{P_1Q_1}$ est symétrique de $-\overline{PQ}$, et par suite (PQ, O) et (P_1, Q_1, O_1) sont symétriques par rapport à Π .
C. q. f. d.

Corollaire. Si S est symétrique par rapport à Π et si $\overline{O\omega}$ est contenu dans Π , le moment cinétique de S par rapport à O est contenu dans Π . Ce corollaire s'applique au plan $Z, O\omega$.

le sens de 0ω , et comme longueur $A\omega$, A désignant le moment d'inertie de S par rapport à une droite quelconque passant par O et perpendiculaire à OZ .

Enfin, si 0ω a une direction quelconque, le moment cinétique de S par rapport à O est la somme géométrique des moments cinétiques définis respectivement par la rotation P autour de OZ et la rotation 0ω . Le vecteur $0K$ du plan $Z, 0\omega$ a donc pour composantes suivant OZ et 0ω , les quantités CP et $A\omega$.

Calculons enfin la force vive $2T$ de S : soit \bar{V} la vitesse d'un de ses éléments P , W et \bar{V}_1 les vitesses que lui communiqueraient respectivement la rotation P autour de OZ , et la rotation 0ω . On a: $\bar{V} = \bar{W} + \bar{V}_1$, et

$$\sum mV^2 = \sum mW^2 + \sum mV_1^2 + 2 \sum mWV_1 \cos(W, V_1)$$

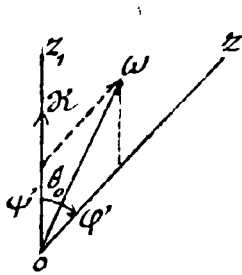
Si 0ω effectue une demi-rotation autour de OZ , la force vive ^{correspondante} ne change pas, W ne change pas, \bar{V}_1 change de sens; le terme $2 \sum mWV_1 \cos(W, V_1)$ change de signe: ce terme est donc nécessairement nul. D'où l'égalité:

$$2T = A\omega^2 + CP^2.$$

Conclusion. - Soit 0ω la rotation instantanée de S , P et 0ω , les projections de 0ω sur OZ et sur le plan perpendiculaire à OZ ; soit C et A les moments d'inertie de S autour de OZ et autour d'une droite quelconque OX perpendiculaire à OZ : le moment cinétique $0K$ de S par rapport à O est situé dans le plan $Z, 0\omega$ et ses projections sur OZ et 0ω , sont: CP et $A\omega$. La force vive de S est $A\omega^2 + CP^2$.

51. - Cas où les forces extérieures ont un moment nul par rapport à O .

Le moment résultant par rapport à O des forces extérieures étant nul, le moment cinétique $0K$ de S est invariable en grandeur, direction et sens. Il est loisible de choisir comme axe fixe OZ , la direction et le sens $0K$. Les droites OZ , OZ , 0ω restent alors dans un même plan; la projection de 0ω sur $0K$ est nulle; d'où $\theta' = 0$ (N° 49); $\theta = \theta_0$. Comme on a, d'autre par, $CP = 0K \cos \theta$, $A\omega = 0K \sin \theta$, P et ω sont constants; l'axe instantané de rotation 0ω fait



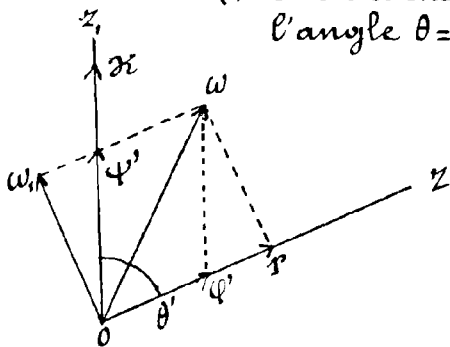
donc un angle constant (dans le plan z_1Oz) avec OZ , donc avec OZ_1 . Les composantes de $\vec{\omega}$ suivant OZ et OZ_1 , sont constantes et égales respectivement à φ' et φ'_0 : d'où $\varphi' \equiv \varphi'_0$, $\varphi'_0 \equiv \varphi'_0$. L'axe OZ décrit donc d'un mouvement uniforme un cône de révolution autour de OZ_1 en même temps

que S tourne uniformément autour de OZ . Le lieu des axes instantané dans le corps est un cône de révolution autour de OZ , et dans l'espace un cône de révolution autour de OZ_1 : dans le mouvement, le premier cône Γ roule sans glisser et uniformément sur le second Γ_1 .⁽¹⁾

Si $O\vec{\omega}$ coïncide avec OZ , ω_1 est nul, par suite $C\omega_1$, et OZ_1 coïncide aussi avec OZ ; l'axe instantané est fixe dans le corps et dans l'espace. Si donc à l'instant initial le corps tourne autour de l'axe de révolution OZ , il tourne indéfiniment et uniformément autour de cet axe fixe dans l'espace. De plus, OZ est un axe stable de rotation: autrement dit, si $\frac{\omega_1}{P}$ est très petit à l'instant initial, OZ et $O\vec{\omega}$ restent confondus sensiblement avec la droite fixe OZ , car $\frac{\omega_1}{P}$ et $\frac{A\omega_1}{P}$ ont des valeurs constantes très petites. Lorsqu'on C^P donne une légère secousse au solide animé d'une rotation rapide autour de OZ , il continue à tourner sensiblement autour de OZ .

Si $O\vec{\omega}$ coïncide avec OZ mais non avec OZ_1 , ω_1 est $\neq 0$, et si $C \neq A$, l'égalité $\frac{CP}{A\omega_1} = \frac{P}{\omega_1}$ entraîne $P=0$. Ce cas ne se présente donc que si S tourne initialement autour d'une droite, soit Ox , perpendiculaire à OZ ; l'axe instantané, est alors fixe dans l'espace, donc aussi dans S .

(1) Si on a choisi le sens de OZ de façon que P soit positif, l'angle $\theta = z_1\vec{\omega}z$ est aigu; $\text{tg } \theta = \frac{A\omega_1}{P}$. Si $\frac{A}{C} > 1$, $O\vec{\omega}$ est compris dans l'angle $z_1\vec{\omega}z$; si $\frac{A}{C} < 1$, $O\vec{\omega}$ est compris dans l'angle $\omega\vec{\omega}z$.



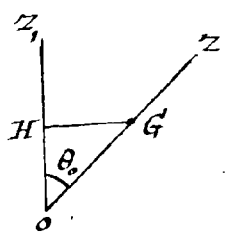
Dans le premier cas, les deux cônes Γ et Γ_1 sont extérieurs l'un à l'autre; dans le second cas, le cône base est intérieur au cône roulette. Dans tous les cas, φ' est positif et les équations (1) et (2) du N° 49 donnent:

$$P_0 = \varphi'_0 \cos \theta_0 + \varphi'_0, \quad \omega_1 = \varphi'_0 \sin \theta_0, \quad \text{d'où} \\ \varphi'_0 = P_0 - \omega_1 \cotg \theta_0 = P_0 \left(1 - \frac{C}{A}\right).$$

Le demi-plan $z_1O\omega$ tourne dans l'espace autour de OZ_1 avec la vitesse angulaire $\varphi'_0 > 0$; le demi-plan $zO\omega$ ou zOz_1 , tourne dans le solide autour de OZ avec la vitesse angulaire $-\varphi'_0 = P_0 \left(\frac{C}{A} - 1\right)$, vitesse positive si $\frac{C}{A} > 1$, négative si $\frac{C}{A} < 1$.

Le solide tourne indéfiniment autour d'une droite fixe et OZ décrit un plan perpendiculaire à cette droite. Mais l'axe OX n'est pas un axe stable de rotation: si $\frac{P}{\omega_0}$ est petit, OW et OK font un angle très petit avec OW_0 , et ω_0 par suite entre eux; le cône base se réduit sensiblement à une droite; mais l'angle ZOW diffère peu d'un droit et le cône rouletté Γ se confond sensiblement avec le plan xoy . Comme le plan ZOW tourne dans le solide autour de OZ avec la vitesse angulaire $\varphi'_0 = \frac{P}{\omega_0} (1 - \frac{C}{A})$, on voit que l'axe instantané balayera sensiblement dans le corps solide le plan xoy avec cette vitesse angulaire. Si P est très petit, l'axe OW se déplacera très lentement dans le solide, mais il balayera à la longue tout le plan xoy ; si $P = 0$, il sera immobile dans le solide.

Cas où $A = C$ - Lorsque $A = C$, OK et OW sont toujours confondus en direction et sens, le mouvement de S est une rotation uniforme autour d'un axe fixe dans le corps et dans l'espace. Ce cas se présente notamment si S est une sphère homogène (ou formée de couches concentriques homogènes) suspendue par son centre.



Calcul de la réaction du point O - Pour calculer la réaction du point O , il suffit d'appliquer le théorème du mouvement du centre de gravité G . Le point G décrit autour de OZ , un cercle avec une vitesse constante; son accélération est dirigée selon \overline{GH} , (H pied de la perpendiculaire abaissée de G sur OZ), et elle est égale à $\varphi_0'^2 \overline{GH}$. La réaction \overline{OR} de O sur S est donc équipollente au vecteur: $M \varphi_0'^2 \overline{GH} - \Phi$, si Φ désigne la somme géométrique des forces extérieures, autres que la réaction de O , appliquées à S .

En particulier, quand les forces extérieures sont nulles, on a: $\overline{OR} = M \varphi_0'^2 \overline{GH}$; si, dans ce cas, G coïncide avec O ou si OZ coïncide avec OZ , OR est nul. Il suit de là que si le corps S , absolument libre, n'est soumis à aucune force extérieure, et tourne initialement autour de GZ (ou d'une droite GX perpendiculaire à GZ), il tourne uniformément autour de GZ (ou de GX) fixe dans l'espace comme dans le corps.

52. - Application au cas où S est pesant et suspendu par son centre de gravité - gyroscope.

Les résultats s'appliquent notamment au mouvement de S, par rapport à l'écorce terrestre, quand S est pesant et suspendu par son centre de gravité. En particulier, si S est animé d'une rotation initiale autour de son axe de révolution GZ , GZ sera immobile par rapport au sol et S tournera uniformément autour de GZ . Ce sera encore l'apparence indéfinie du mouvement si la rotation initiale $G\omega$ fait un angle très petit avec GZ . - Quant à la réaction de l'appui O, elle est égale à :

$$\mu \Psi^2 \overline{GH} - M \cdot \bar{g}.$$

On donne le nom de gyroscope à un corps solide de révolution homogène et fixé par un point O de son axe à un appui Π . Quand O coïncide avec G, imaginons que le pied Π du gyroscope soit maintenu immobile ou bien qu'on lui imprime un mouvement entièrement quelconque ; la réaction de l'appui sur le gyroscope a toujours un moment nul par rapport à G ainsi que la pesanteur. Si Gx, y, z sont des axes de direction fixe par rapport à l'écorce terrestre, les conclusions du N° précédent s'appliquent au mouvement de S par rapport à ces axes⁽¹⁾ ; en particulier, si la rotation initiale de S a lieu sensiblement autour de GZ , GZ gardera une direction invariable par rapport au sol, quel que soit le mouvement imprimé au pied du gyroscope, et S tournera uniformément autour de GZ .

53. - Mouvement du gyroscope quand on tient compte du mouvement de la terre (gyroscope de Foucault).

Ce que nous venons de dire suppose que l'accélération de la pesanteur peut être regardée comme une constante en grandeur, direction et sens au même lieu de la terre. Or nous savons qu'en réalité l'accélération (par rapport à l'écorce terrestre) d'un élément matériel P lancé dans le vide au voisinage d'un point O du sol n'est pas un vecteur constant, mais qu'il varie avec la vitesse du point P et même avec la position de la lune du soleil et des planètes du système solaire. Lorsqu'on tient compte de ces variations de la pesanteur, quel est le mouvement du gyroscope fixé par son centre de gravité ?

(1) D'après le théorème des moments cinétiques dans le mouvement autour de G.

Nous partons du principe de la gravitation universelle. Les forces absolues qui s'exercent sur le gyroscope sont les attractions newtoniennes de tous les autres corps et la réaction de l'appui appliquée en G . Les dimensions du gyroscope étant négligeables par rapport au rayon terrestre, on peut admettre que l'attraction de la terre sur une masse m est la même en grandeur, direction et sens, quelle que soit la position de cette masse m dans le gyroscope. La même remarque s'applique a fortiori à l'attraction de la lune, du soleil et des planètes. Les forces absolues appliquées au gyroscope admettent donc une résultante passant par G , et le mouvement du gyroscope par rapport à des axes $Gxyz$ de directions absolument fixes sera le mouvement défini au N. 51.

En particulier, si la rotation absolue du gyroscope S a lieu initialement autour de GZ , la direction GZ restera absolument fixe; si la rotation initiale $G\bar{W}$ de S par rapport à la terre est très grande et a lieu sensiblement autour de GZ , il en est de même de sa rotation absolue [résultante de $G\bar{W}$ et de la rotation de la terre très faible devant $G\bar{W}$]; la direction GZ sera donc sensiblement fixe par rapport à des axes absolus. Or nous savons que les directions qui vont de la terre aux étoiles sont absolument fixes: l'axe GZ du gyroscope, s'il vise une étoile initialement, la visera indéfiniment.⁽¹⁾

La seule difficulté de l'expérience est de réaliser une suspension aussi parfaite que possible du solide de révolution autour de G . Toute la théorie précédente suppose essentiellement que le moment des réactions de l'appui par rapport au point d'appui est nul. Cette condition est évidemment remplie si on réalise la liaison à l'aide d'un pied qui n'a qu'un point de contact G avec le gyroscope S : mais c'est là une liaison purement théorique, et dans la pratique le gyroscope aura avec l'appui plusieurs contacts voisins de G . Par exemple, l'axe de S se terminera par une petite sphère σ glissant à l'intérieur d'un cône de révolution fixe ou d'une sphère creuse de même rayon (1^{ère} année, p. 381); le centre de la sphère mobile σ sera le point fixe de S . Si les surfaces en contact sont parfaitement lisses, les réactions de l'appui fixe sur σ passent par le centre de σ et toute la théorie s'applique. Mais, en fait, il y aura toujours des

(1) Ceci est vrai quel que soit le mouvement imprimé à G , par exemple si le gyroscope est embarqué sur un navire: Gz tournera autour de l'axe du monde quel que soit l'état de la mer.

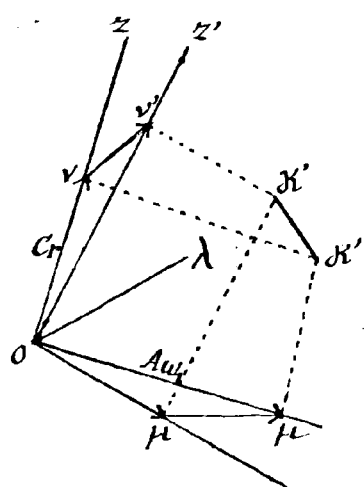
frottements légers dont l'influence sera d'autant plus faible que les corps en contact seront mieux lubrifiés et que le rayon de σ sera plus petit.

Dans l'expérience de Foucault, la déviation de l'axe GI par rapport à la terre est très lente, puisque GZ accomplit sa révolution autour de l'axe du monde en 24 heures. Le phénomène peut donc être facilement masqué si les frottements sont notables ou si le point fixe diffère sensiblement de G . Ces influences perturbatrices sont d'autant moins sensibles que la suspension est mieux réalisée et la rotation initiale plus grande.

Mouvement d'un solide de révolution S fixé par un point de son axe et soumis à des forces quelconques.

54. - Equations du mouvement.

Lorsque les forces extérieures appliquées à S sont quelconques, soit \overline{OK} leur moment résultant par rapport à O ; il nous faut exprimer [N° 50] par la vitesse du point K est équipollente à \overline{OK} .



Soit, à l'instant t , OZ la position de l'axe de révolution de S , $O\omega$ l'axe instantané de S , P la projection de $O\omega$ sur OZ , $A\omega$ la projection de $O\omega$ sur le plan perpendiculaire à OZ . Ses projections OV et $O\mu$ de OK sur OZ et sur $O\omega$, sont CP et $A\omega$. A l'instant $t+dt$, OZ est venu en OZ' , et l'angle $z\hat{O}z'$ compté positivement autour de $O\omega$, est égal à $\omega_1 dt$; K est venu en K' , V en V' , μ en μ' , et on a :

$$\overline{KK'} = \overline{VV'} + \overline{\mu\mu'}$$

La demi-droite Ol étant la perpendiculaire au plan $zO\mu$ telle que le trièdre $Ol\mu z$ soit positif, cherchons les projections de $\overline{KK'}$ sur OZ , $O\mu$ et Ol .

Le vecteur ${}^{dt}\overline{VV'}$ du plan zOz' est sensiblement perpendiculaire

à $O\mu$ et ses projections sur OZ et $O\lambda$ sont Cdr et $Cr\omega_1 dt$.
Le vecteur $\mu\mu'$ ou plan $\mu O \mu'$ est sensiblement perpendiculaire à OZ , et ses projections sur $O\mu$ et $O\lambda$ sont $A \frac{d\omega_1}{dt}$ et $A\omega_1 u dt$, si $u dt$ désigne l'angle infinitésimal $\mu O \mu'$ dt compté positivement autour de OZ .

D'après cela, soit N, M_1, L_1 les projections de OK sur $OZ, O\mu, O\lambda$ respectivement. On a :

$$(4) \quad C \frac{dr}{dt} = N, \quad A \frac{d\omega_1}{dt} = M_1, \quad \omega_1 (Au - Cr) = L_1.$$

Il est aisé de déduire l'équation des forces vives des deux premières équations (4); en effet, le travail des forces extérieures entre les instants t et $t + dt$ est $(M_1 \omega_1 + N r) dt$; l'équation des forces vives s'écrit donc (n° 50):

$$(5) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (A\omega_1^2 + Cr^2) = M_1 \omega_1 + N r.$$

Or il suffit de multiplier la première équation (4) par r , la seconde par ω_1 et de faire la somme, pour obtenir l'équation (5).

D'autre part, il est loisible de remplacer la 3^e équation (4) par l'équation qui exprime que la vitesse de la projection de K sur OZ est égale à la projection N_1 de OK sur OZ . - La projection de OV sur OZ est $Cr \cos \theta$; la projection de ω_1 sur le plan Z, OZ est dirigée selon la droite OI [n° 49] et égale à $\psi' \sin \theta$, si on la compte positivement dans le sens OI , qui fait avec OZ l'angle $\theta + \frac{\pi}{2}$; la projection de ω_1 sur OZ est donc $\psi' \sin^2 \theta$. La troisième équation (4) peut ainsi se remplacer par l'équation

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \left\{ A\psi' \sin^2 \theta + Cr \cos \theta \right\} = N_1.$$

Lorsque les forces extérieures autres que la réaction de l'appui dérivent d'une fonction de force U , on pourra définir le mouvement par la première équation (4):

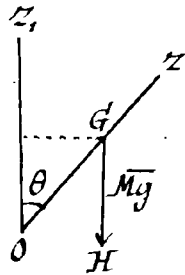
$C \frac{dr}{dt} = N$, l'équation (6) et l'intégrale des forces vives:

$$(7) \quad A\omega_1^2 + Cr^2 = 2(U + h)$$

55. Mouvement d'un solide de révolution pesant fixé par un point O de son axe Oz .

La discussion de ce mouvement peut être faite sans calcul et d'une façon tout élémentaire, au moins dans le cas où la rotation initiale de S est très grande et a lieu sensiblement autour de Oz .

Preons comme sens Oz sur l'axe de révolution le sens OG , et comme axe Oz , la verticale ascendante. Soit M la masse totale du corps, l la distance OG ; si ζ est le z , de G , on a : $\zeta = l \cos \theta$.



Le moment résultant de la pesanteur par rapport à Oz (qui renferme G) est nul, ainsi que par rapport à Oz_1 .

L'équation $C \frac{dP}{dt} = N$ donne donc ici :

$$(1) \quad P = P_0 ;$$

de plus, le moment cinétique de S par rapport à Oz , est constant; d'où, τ désignant

l'angle x, OA' :

$$A \omega_1 \cos \tau + C P_0 \cos \theta = C \tau_0, \text{ ou encore}$$

$$(2) \quad A(\omega_1 \cos \tau - \gamma \cos \tau_0) = C P_0 (\cos \theta_0 - \cos \theta),$$

γ, θ_0 et τ_0 désignant les valeurs initiales de ω_1, θ et τ .

Le théorème des forces vives donne enfin :

$$A \omega_1^2 + C P_0^2 = -2Mg\zeta + C \tau_0^2 = -2Mgl \cos \theta + C \tau_0^2,$$

ou encore

$$(3) \quad A(\omega_1^2 - \gamma^2) = 2Mgl (\cos \theta_0 - \cos \theta).$$

56. - Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse où $|P_0|$ est très grand et $\frac{\gamma}{|P_0|}$ très petit. Je dis d'abord que les trois droites $Oz, O\omega$ et OA' restent sensiblement confondues pendant tout le mouvement.

Représentons par P_0 la valeur absolue de P_0 ; l'égalité (2) entraîne :

$$(4) \quad \cos \theta_0 - \cos \theta \leq \frac{A(\omega_1 + \gamma)}{C P_0};$$

d'où en tenant compte de (3) :

$$(5) \quad A \omega_1^2 \leq \frac{2Mgl}{C P_0} A \omega_1 + A \gamma \left(\gamma + \frac{2Mgl}{C P_0} \right).$$

L'équation :

$$\omega_1^2 - 2\alpha\omega_1 - \gamma(\gamma + 2\alpha) = 0 \quad \left(\alpha = \frac{Mgl}{C_p^2}\right)$$

a une racine négative $-\gamma$ et une racine positive $2\alpha + \gamma$;
l'inégalité (4) exprime que la quantité essentiellement positive ω_1 est inférieure à $\frac{2Mgl}{C_p^2} + \gamma$, ou encore qu'on a :

$$\omega_1 - \gamma \leq \frac{2Mgl}{C_p^2} \quad (\omega_1 > 0)$$

La tangente de l'angle $\widehat{zO\omega}$ et celle de l'angle \widehat{zOK} restent donc (en valeur absolue) inférieures respectivement

$$\begin{aligned} \text{à } \frac{\gamma}{C_p} + \frac{2Mgl}{C_p^2} &= |\operatorname{tg} \widehat{zO\omega_0}| + \frac{2Mgl}{C_p^2} \text{ et à } \frac{A\gamma}{C_p} + \frac{2MgAl}{C_p^2 p^2} \\ &= |\operatorname{tg} \widehat{zOK_0}| + \frac{2Mgl}{C_p^2 p^2}. \end{aligned} \quad \text{C. q. f. d.}$$

De plus, l'égalité (2) nous montre que $(\cos \theta_0 - \cos \theta)$ reste compris entre $\pm \frac{A(\omega_1 + \gamma)}{C_p}$, donc entre $\pm \frac{2A}{C_p} \left[\gamma + \frac{Mgl}{C_p} \right]$;

θ ne s'écarte que très peu de θ_0 ; l'axe oz reste compris entre deux cônes de révolution autour de oz_1 , dont les angles au sommet sont $\theta_0 + \varepsilon$ et $\theta_0 + \eta$, ε et η tendant vers zéro avec $\frac{1}{p^2}$.
Si $\gamma = 0$, $\theta - \theta_0$ est positif et de l'ordre de $\frac{1}{p^2}$.

Il suit de là que OK , très voisin de oz , reste également compris entre deux cônes analogues aux précédents et presque confondus ; la longueur OK ne diffère de OK_0 que d'une quantité très petite avec $\frac{1}{p^2}$. En outre, la vitesse \overline{KL} de K est équipollente au moment par rapport à O du vecteur $M\bar{g} = \overline{GH}$; ce moment, soit OK , est perpendiculaire au plan $\tau_1 oz$, donc sensiblement au plan $\tau_1 OK$; il est orienté positivement par rapport à \overline{GH} et égal en valeur absolue à $l \sin \theta Mg$. D'après cela, \overline{KL} est orienté positivement ou négativement autour de oz , selon que K est du même côté du plan $\tau_1 OK$ que G ou du côté opposé, c'est-à-dire suivant que p_0 est positif ou négatif. On voit qu'approximativement le point K tourne autour de oz_1 d'un mouvement uniforme ; sa vitesse angulaire est égale en valeur absolue à $\frac{Mgl \sin \theta}{OK \sin \theta}$,

c'est-à-dire sensiblement à $\frac{Mgl}{C|\dot{\rho}_0|}$, et comme elle a le signe de $\dot{\rho}_0$, elle est égale en grandeur à $\frac{Mgl}{C|\dot{\rho}_0|}$ et signe à $\frac{Mgl}{C\dot{\rho}_0}$. Si $|\dot{\rho}_0|$ est assez grand pour que l'écart des droites OZ , OW et OX soit inappréciable, ainsi que $\frac{Mgl}{C\dot{\rho}_0^2}$, l'aspect du mouvement sera le suivant :

L'axe OZ décrit très lentement un cône de révolution autour de la verticale (mouvement de précession) tandis que le corps tourne très vite autour de OZ . Les deux rotations ont lieu dans le même sens, la première autour de la verticale ascendante OZ , la seconde autour de la demi-droite OG . La vitesse angulaire de la première rotation est $\frac{Mgl}{C}$; celle de la seconde est $\dot{\rho}_0$. Le point G décrit un cercle autour de OZ , et le chemin parcouru par G dans le temps t est $\frac{M\dot{\rho}_0^2}{C} g \sin \theta t$.⁽²⁾

D'après cette règle, le sens de la précession est différent suivant que la rotation de S autour de OG a lieu de gauche à droite ou de droite à gauche. C'est ce que met en évidence la balance gyoscopique : un corps homogène de révolution S étant fixé par un point O de son axe OZ et animé d'une rotation rapide autour de OZ , imaginons que, pendant le mouvement, on fasse glisser le long de OZ une masse (de révolution) du corps S , de façon que la nouvelle position G du centre de gravité de S soit de l'autre côté de O par rapport à la première position G : on voit la précession changer de sens.

57. Remarque. - Le travail de la pesanteur reste très petit pendant toute la durée du mouvement, puisque $mgl(\cos \theta_0 - \cos \theta)$ reste très petit; l'effet de la pesanteur n'est cependant pas négligeable puisque l'axe OZ à la longue décrit un cône de révolution autour de OZ , et cela un nombre indéfini de fois; au contraire, si la pesanteur était nulle, OZ resterait sensiblement fixe. Voici donc un exemple

(1) Si θ est obtus, on considère encore la rotation de OZ autour de OZ ,

(2) L'égalité $\omega^2 = \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta$ montre que $\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi} \sin \theta$ restent très petits. L'égalité $\dot{\rho} = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\varphi}$ montre que $\dot{\varphi}$ se confond sensiblement avec $\dot{\rho}_0$. Le cône base du mouvement est approximativement un cône de révolution autour de OZ , dont θ_0 est le demi-angle au sommet; le cône roulette se réduit sensiblement à OZ . La formule $\omega = V(\cotg \theta + \cotg \theta_0)$ du cours de l'ère année (p. 70) montre (ω, V , et $\cotg \theta$, étant sensiblement constants) que $\cotg \theta$ est constant et que le petit cône roulette est sensiblement de révolution.



naturel où une force modifie le mouvement d'une façon très notable, bien que son travail soit sensiblement nul⁽¹⁾.

Il est intéressant de comparer ce mouvement à celui du même corps abandonné sans vitesse : dans ce dernier cas, le plan initial $Z_1 OG$ (soit le plan $Z_1 OX_1$) est un plan de symétrie du mouvement (N° 14) ; la droite OG tourne autour de l'horizontale OY_1 et descend avec une vitesse angulaire croissante jusqu'au moment où sa direction est la verticale dirigée vers le bas ; elle remonte alors, et la force vive de S ne s'annule que quand S arrive dans une position S_1 symétrique de la position initiale par rapport au plan $Z_1 OY_1$; le mouvement de S est oscillatoire autour de OY_1 . — Au contraire quand $|P_0|$ est très grand, l'axe OG ne semble pas céder à l'action de la pesanteur, puisque G décrit sensiblement un cercle horizontal.

58. — Extension au gyroscope dont un point de l'axe OZ est soumis à une force constante.

Considérons un gyroscope fixé par son centre de gravité, et supposons qu'en un point P de l'axe GZ soit appliquée une force Φ constante en grandeur direction et sens. Soit GZ , la parallèle à Φ de sens contraire : rien ne sera changé aux conclusions précédentes, si ce n'est que Φ remplacera partout Mg . D'où cette règle qui définit les apparences du mouvement :

Soit S un gyroscope fixé par le point G et animé d'une rotation très rapide autour d'un axe très peu différent de l'axe de révolution GZ ; quand on applique en un point donné P de GZ une force $\Phi = P\vec{Q}$ constante en grandeur, direction et sens, l'axe GP , au lieu de se mouvoir dans le sens de cette force, sort du plan $GP_0 Q_0$ perpendiculairement à ce plan, et décrit lentement un cône de révolution autour d'une parallèle GZ à Φ , cependant que S tourne uniformément autour de GP . Si GZ est de sens contraire à Φ , la rotation de GP autour de GZ , et la rotation de S autour de G ont lieu dans le même sens ; la vitesse angulaire de la première rotation est $(n l = GP) \frac{\Phi l}{G I_0}$, celle de la seconde est 1° . Le point P décrit

(1) Un exemple tout différent du même fait est celui du pendule de Foucault (1^{ère} année p. 329), ou encore celui d'une locomotive démarrant sans glisser (N° 33).

un cercle autour de GZ , d'un mouvement sensiblement uniforme et le chemin e parcouru par P dans le temps t est $\frac{\Phi \sin \theta l^2}{C |I_0|} t = \frac{Fl}{C |I_0|} t$, F désignant la composante de Φ normale à GZ . La déviation PGP' de GP dans un petit intervalle de temps h est $\frac{Fl}{C \omega_0} h$; pour F et h donnés, elle est d'autant plus faible que ω_0 est plus grand, que C est plus grand (c'est-à-dire que le corps est plus renflé) et enfin que l est plus petit.

Par exemple, attachons une ficelle en un point P de l'axe GZ et exerçons sur cette ficelle une traction de direction et d'intensité constantes. Pour que l'axe GP soit dévié de GP en GP' [l'angle $PGP' = \varepsilon$ étant petit] dans un temps donné h , il faut que la traction Φ soit perpendiculaire à PP' , (et non de sens PP') et que la composante F de Φ normale à GP soit égal à $\frac{C \omega_0}{l} \varepsilon$; le sens de F doit être renversé si on change le sens de ω_0 autour de GP .

59 - Mouvement du gyroscope fixé par un point O de son axe et soumis à des forces quelconques.

Soit \overline{OK} le moment résultant par rapport à O des forces appliquées au gyroscope S , N la projection de \overline{OK} sur OZ , et \overline{OK}_1 la projection de \overline{OK} sur un plan perpendiculaire à OZ . Considérons un couple dont l'axe soit N (couple dont le plan sera perpendiculaire à OZ), et une force Φ dont le moment par rapport à O soit \overline{OK}_1 . Cette force Φ est dans le plan ZOH perpendiculaire à OK_1 , où on peut choisir arbitrairement sa ligne d'action; si Φ est le point où elle rencontre OZ , θ l'angle (compris entre O et $\frac{\pi}{2}$) qu'elle fait avec OZ , l la longueur OP , on a:

$\Phi = \frac{\overline{OK}_1}{l \sin \theta}$ et le sens de Φ est déterminé sans ambiguïté par celui de \overline{OK}_1 . Il est donc loisible de remplacer toutes les forces par une force Φ appliquée en un point déterminé P de OZ et un couple dont l'axe est dirigé selon OZ et est égal à N en grandeur et signe.

Lorsque Φ est invariable en grandeur direction et sens, \overline{OK}_1 est perpendiculaire à la direction fixe, soit OZ , de Φ , et égale en valeur absolue à $\Phi l \sin \theta$. Inversement si \overline{OK}_1 est perpendiculaire à une droite fixe OZ , et si sa longueur est proportionnelle à $\sin \theta$, OZ , on peut choisir comme

force Φ une force constante en direction et intensité appliquée en un point déterminé P de OZ . Supposons en premier lieu que ces conditions soient remplies, et Θ qu'en outre N soit constant. Si N est nul on rentre dans le cas du N° précédent. Soit donc $N \neq 0$.

60. — L'axe fixe OZ , étant de sens contraire à la force constante Φ et l désignant toujours la distance OP , les équations du mouvement sont (N° 54) :

$$(1) \quad C \frac{dr}{dt} = N, \text{ ou } C(r - r_0) = Nt \quad (t=0 \text{ instant initial}),$$

$$d \frac{1}{2} (A\omega_1^2 + Cr^2) = -d\Phi l \cos \theta + Nrdt$$

$$\frac{d}{dt} (A\omega_1 \cos \tau + Cr \cos \theta) = N \cos \theta, \quad (\tau = z, \dot{\theta} = \omega_1)$$

La seconde équation où on tient compte de (1) donne comme plus haut :

$$(2) \quad A(\omega_1^2 - \gamma^2) = \Phi l (\cos \theta_0 - \cos \theta),$$

le troisième donne :

$$(3) \quad A(\omega_1 \cos \tau - \gamma \cos \tau_0) - C(r \cos \theta - r_0 \cos \theta_0) = \int_0^t N \cos \theta dt = Nt \cos \Theta,$$

Θ désignant une certaine des valeurs que prend θ quand le temps croît de 0 à t .

1^{er} Cas. — N a le signe de r_0 . — Toutes les conclusions au N° 58 subsistent sans modification (à cela près que $|r|$ croît indéfiniment). Pour l'établir, il suffit de montrer que θ reste compris entre les mêmes limites $\theta_0 - \varepsilon$, $\theta_0 + \eta$ qu'au N° 56; [Φ remplaçant partout Mg]; le raisonnement de ce N° peut dès lors se répéter.

Tout d'abord, si $\cos \theta_0 - \cos \theta$ est négatif, sa valeur absolue est inférieure, d'après (2), à $\frac{A\gamma^2}{\Phi l}$, comme au N° 56.

Soit d'autre part θ le maximum de θ entre 0 et t , valeur que θ atteint à un certain instant t_1 , [$\cos \theta_0 - \cos \theta_1 > 0$; $0 \leq t_1 \leq t$]. L'égalité (3) peut s'écrire,

$$(4) \quad A(\omega_1 \cos \tau - \gamma \cos \tau_0) = Cr(\cos \theta_0 - \cos \theta) - C(r - r_0) \cos \theta_0 + Nt \cos \Theta, \\ = Cr(\cos \theta_0 - \cos \theta) - Nt(\cos \theta_0 - \cos \theta)$$

$$\text{ou } (\cos \theta_0 - \cos \Theta) \leq \cos \theta_0 - \cos \theta,$$

Pour $t = t_1$, le dernier membre de (4) est donc en valeur absolue, au moins égal à :

$$(\cos \theta_0 - \cos \theta_1) |C_P - Nt_1| \gg (\cos \theta_0 - \cos \theta_1) C_P.$$

Le premier membre de (4) a un module au moins égal à $A(\omega_1 + \gamma)$; d'où l'inégalité

$$(5) \quad \cos \theta_0 - \cos \theta_1 \leq \frac{A \cos_1 \gamma}{C_P};$$

$\cos \theta_0 - \cos \theta_1$ étant le maximum de $(\cos \theta_0 - \cos \theta)$ entre 0 et t , on voit que $\cos \theta_0 - \cos \theta$ reste inférieur au second membre de (5) quel que soit t . Cette inégalité étant celle du N° 56, le raisonnement peut se répéter : les droites OZ et OK sensiblement confondues décrivent lentement un cône de révolution autour de OZ_1 , dans le sens de la rotation de S autour de OP . La vitesse de Ka , il est vrai, une composante selon OZ égale à N , mais sa composante normale à OZ est toujours égale au moment de Φ par rapport à O . Le plan Z_1OZ tourne autour de OZ avec la vitesse angulaire $\frac{\Phi l}{C_P} = \frac{\Phi l}{C_P + Nt}$; le point P décrit un cercle autour de OZ_1 avec la vitesse linéaire $\frac{\Phi l^2 \sin \theta}{C_P}$.

2° Cas N a le signe de $-P_0$. Les résultats du N° 56 subsistent tant que $|P|$ reste très grand, par exemple pour $t \leq -\frac{C_P}{2N}$. Dans cet intervalle de temps, on a $|P| \gg |\frac{P_0}{2}|$. Rien à changer pour les valeurs négatives de $\cos \theta - \cos \theta_0$. Pour les valeurs positives, considérons encore leur maximum $\cos \theta_0 - \cos \theta_1$ entre les instants $t=0$, et $t = -\frac{C_P}{2N}$. Soit t_0 la valeur de t inférieure à t_1 et la plus voisine $\frac{2N}{C_P}$ de t_1 pour laquelle $(1) \theta = \theta_0$ (et par suite $\omega_1 = \gamma$); si on applique l'égalité (4) entre les instants t_0 et t_1 , elle donne (τ_0 désignant cette fois la valeur de τ à l'instant t_0):

$$\begin{aligned} A(\omega_1 \cos \tau - \gamma \cos \tau_0) &= C_P (\cos \theta_0 - \cos \theta) - N(t - t_0)(\cos \theta_0 - \cos \theta), \\ &= P \left\{ C(\cos \theta_0 - \cos \theta) + \left| \frac{N}{P} \right| (t - t_0)(\cos \theta_0 - \cos \theta) \right\}, \end{aligned}$$

θ étant compris entre θ_0 et θ_1 , et par suite $(\cos \theta_0 - \cos \theta)$ étant

(1) t_0 peut être l'instant initial $t=0$.

positif. Pour $t = t_1$, le module du second membre est donc au moins égal à $C|P|(\cos \theta_0 - \cos \theta_1) \geq C \frac{I_0}{2} (\cos \theta_0 - \cos \theta_1)$. D'où l'inégalité : $\cos \theta_1 - \cos \theta_0 \leq \frac{2A(\omega_1 + \gamma)}{C \frac{I_0}{2}}$, inégalité analogue à (5) mais où I_0 est remplacé par I_1 . Les conclusions du 1^{er} cas subsistent donc mais seulement pour $t \leq -\frac{C I_0}{2N}$. Dans cet intervalle de temps, Ψ est égal à $\frac{\Phi I}{2N}$, donc $\Psi \geq \frac{\Phi I}{C I_0}$, et Ψ varie au moins de $\frac{\Phi I}{2N}$ entre les $C I_0$ instants $t=0$ et $t = -\frac{C I_0}{2N}$. Dans les deux cas, pour $t \leq \left| \frac{C I_0}{2N} \right|$, on a :

$$\omega_1 \leq \gamma + \frac{4\Phi I}{C I_0} \frac{2N}{2N}$$

61. - Phénomène gyroscopique général.

Les forces appliquées au gyroscope étant quelconques, il nous est loisible de les remplacer par une force unique F normale à OZ et appliquée en un point P tel que $OP = l$, et par un couple dont l'axe, dirigé selon OZ , a comme valeur N ($N > 0$ ou < 0). De plus, on a pu choisir le sens OZ de façon que I_0 soit positif.

Nous faisons seulement sur la force F et le couple N les hypothèses suivantes : quels que soit l'instant t considéré et la position et les vitesses de S , F et N restent en valeur absolue moindres respectivement que deux quantités fixes Φ et V , et dans tout intervalle de temps suffisamment court, soit le temps $\frac{1}{n}$, F et N peuvent être regardés comme invariable (en grandeur et sens)⁽¹⁾. Il est loisible de supposer $n > \sqrt{\frac{V}{C}}$. Si $N = 0$, on choisit $V > 0$ arbitrairement.

Ceci posé, plaçons-nous dans le cas où pour $t=0$, $|P|$ est très grand par rapport à n et par rapport à γ (valeur initiale de ω) : soit $I_0 = \frac{n}{\varepsilon}$, ε étant très petit devant $\frac{V}{C}$.

Je dis que l'axe OZ et le vecteur OP resteront sensiblement confondus pendant un temps très long de l'ordre de I_0 , par exemple pendant le temps $\frac{C I_0}{2V} = \frac{C n}{2\varepsilon V}$.

En effet, d'abord, dans cet intervalle de temps, I reste supérieur à $\frac{I_0}{2}$ en vertu de l'égalité $C \frac{dI}{dt} = N$, [$|N| \leq V$].

(1) Ces hypothèses très larges écartent néanmoins le cas où une des quantités $|N|$ et F croîtrait indéfiniment avec I , ainsi que le cas où la direction de F , son sens ou sa valeur varierait d'autant plus rapidement que le corps tournerait plus rapidement.

D'autre part dans l'intervalle de temps $t=0$ à $t=\frac{1}{n}$, les conclusions du N.° 60 s'appliquent et on a :

$$\omega_1 \leq \gamma + \frac{4\Phi l}{C R_0}$$

Dans l'intervalle de temps $t=\frac{1}{n}$ à $t=\frac{2}{n}$, on a, γ_1 désignant la valeur de ω , pour $t=\frac{1}{n}$:

$$\omega_1 \leq \gamma_1 + \frac{4\Phi l}{C R_0} \leq \gamma + \frac{8\Phi l}{C R_0},$$

et d'une manière générale entre $t=\frac{j-1}{n}$ et $t=\frac{j}{n}$, on a :

$$\omega_1 \leq \gamma + \frac{4j\Phi l}{C R_0}$$

Prenons l'entier ⁽¹⁾ j tel que $\frac{j}{n} \leq \frac{C R_0}{2V} < \frac{j+1}{n}$:
pour $t \leq \frac{j}{n}$ (c'est-à-dire approximativement pour $t < \frac{C R_0}{2V}$)
on a :

$$\omega_1 \leq \gamma + \frac{2\Phi l n}{V}, \text{ d'où}$$

$$\operatorname{tg} z, \overline{OK} = \frac{A\omega_1}{C P} \leq \frac{A\omega_1}{C R_0} \leq \frac{2A}{C R_0} \left(\gamma + \frac{2\Phi l n}{V} \right) \leq \frac{2A}{C} \left(\frac{\gamma}{R_0} + \frac{2\varepsilon\Phi l}{V} \right).$$

L'angle z, \overline{OK} reste donc très petit pour $t < \frac{C R_0}{2V}$. On peut, dans cet intervalle de temps, confondre les droites OZ et OK ; le déplacement de P entre les instants t et $t+\frac{1}{n}$ est sensiblement perpendiculaire au plan OPF ; il est orienté de gauche à droite autour de la droite OH parallèle à PF et de sens contraire; enfin il est égal à $\frac{Fl^2}{C P} \frac{1}{n}$; nous représentons ici par \overline{PF} la force F à l'instant $t+\frac{1}{n}$ moyen $t+\frac{1}{2n}$; par F sa valeur absolue, par R la valeur de r au même instant. ⁽²⁾

La déviation totale $P'OP$ de OP entre $t=0$ et t sera au plus égale à $\frac{2\Phi l^2}{C R_0} t$, quelles que soient les forces appliquées au gyroscope. Pour produire une déviation donnée en un temps donné, il faudra donc que F soit d'autant plus grande que la rotation du corps est plus rapide.

Si la force F d'intensité variable a une direction fixe, OZ décrit sensiblement un plan perpendiculaire à cette direction. Si le plan OP passe par une droite fixe, soit OZ_1 , OZ décrit un cône de révolution autour de OZ_1 .

⁽¹⁾ Ses inégalités qui définissent j s'écrivent encore :

$$j \leq \frac{6n^2}{2\varepsilon\gamma} < j+1, \text{ d'où, comme } n^2 > \frac{V}{C} :$$

$$j+1 > \frac{1}{2\varepsilon}$$

⁽²⁾ Entre les instants t et $t+\frac{1}{n}$, la valeur de r peut être confondue avec sa valeur à l'instant $t+\frac{1}{2n}$ à une erreur près Δr au plus égale à $\pm \frac{V}{C} \frac{1}{2n}$, et comme $r > \frac{R_0}{2}$, $\frac{|\Delta r|}{r}$ est $\leq \frac{V}{C r} \frac{1}{n}$ donc $\leq \frac{V\varepsilon}{C n^2} < \varepsilon$.

62. - Mise en équation du mouvement gyroscopique.

Exprimons que la vitesse de P à l'instant t est équipol-lente sensiblement au moment de \vec{F} par rapport à O divisé par $\frac{CP}{l}$. La notation étant celle du N° 49, la vitesse du point P a pour projections sur OI_1 et sur OJ_1 , en grandeur et signe, $l\theta'$ et $l \sin \theta \psi' = l \sin \theta \chi'$. Si I_1 et I_2 sont les moments des forces appliquées à S par rapport à OI_1 et à OJ_1 , on a donc :

$$(1) \quad \theta' = \frac{I_1}{CP}, \quad \psi' \sin \theta = \frac{I_2}{CP}, \quad \text{avec } C \frac{dP}{dt} = N.$$

Quand on a remplacé comme au N° 61 toutes les forces par la force unique F et le couple N , soit F_1 et F_2 les projections de F sur les demi-droites OI_1 et OJ_1 ; (F_1 et $F_2 > 0$ ou < 0); les équations (1) s'écrivent⁽¹⁾:

$$(2) \quad \theta' = \frac{-lF_2}{CP}, \quad \psi' \sin \theta = \frac{-lF_1}{CP}, \quad CP' = N,$$

où $P = \psi' \cos \theta + \psi'$

Si $N \equiv 0$, ces équations donnent

$$P = P_0, \quad \theta' = \frac{-lF_2}{CP_0}, \quad \psi' \sin \theta = \frac{-lF_1}{CP_0}.$$

63. - Sur une théorie élémentaire du phénomène gyroscopique.

Toute la difficulté de la théorie précédente consiste à démontrer que si $|P|$ est très grand initialement et ω_1 très petit, il en est de même pendant un temps très long de l'ordre de $\frac{CP_0}{l}$. On se borne souvent à dire pour justifier la théorie: « Pour $t=0$, $|P|$ étant très grand, ω_1 nul ou fini, OZ et Ox sont sensiblement confondus; « il est évident qu'il en sera de même pendant un certain temps t , et dans cet intervalle de temps la théorie « s'appliquera ».

Il est facile de voir, sur l'exemple d'un gyroscope pesant suspendu par son centre de gravité, qu'un tel raisonnement n'a aucune valeur. S'il était admissible, il s'appliquerait aussi au cas où, pour $t=0$, le corps tourne rapidement autour d'un axe sensiblement perpendiculaire à OZ . Soit donc pour $t=0$, P_0 fini et ω_1 très grand, et soit Ox la direction fixe dans le solide

(1) Dans les applications, les forces (autres que la réaction de O) appliquées à S ne dépendent pas en général de la position de S autour de OZ ni de sa vitesse P de rotation propre; I_1 , I_2 et N sont, par suite, des fonctions de θ , ψ , θ' , ψ' , t et comme θ' et ψ' restent petits, on peut les annuler dans I_1 , I_2 , N , les équations (2) sont alors trois équations du 1^{er} ordre qui définissent θ , ψ , P en t connaissant θ_0 , ψ_0 , P_0 pour $t=0$.

qui coïncide pour $t=0$ avec $\overline{O\omega}$, et oy la perpendiculaire au plan zOx . Soit enfin p et q les projections de $\overline{O\omega}$ sur ox et oy . Pour $t=0$, q est nul, $p = \omega_0$ est considérable, $P = P_0$ a une valeur finie; Ox et Ox' sont sensiblement confondus. Il est évident que pendant un certain temps t , p et q resteront très petits devant p , et que l'angle xOx' sera inférieur à un petit angle η . Évaluons ce temps t ; nous savons (N° 52) que $\overline{O\omega}$ (et par suite $\overline{Ox'}$) décrit sensiblement, dans le solide, le plan xOy avec la vitesse angulaire $(1 - \frac{C}{A}) |P_0|$. L'angle xOx' ne restera donc inférieur à η que^A pour $t < \frac{\eta}{(1 - \frac{C}{A}) |P_0|} = t_1$; t_1 est donc très petit avec η si P_0 a une valeur finie non nulle.

Le raisonnement indiqué ne nous apprend donc rien sur le temps t_1 pendant lequel xOx' reste inférieur à η . Or pour que la théorie gyroscopique ait un sens, il faut qu'elle s'applique à un temps de l'ordre de $\frac{CP_0}{C}$.

En effet, supposons, pour plus de clarté, $N \equiv 0$. Φ L'angle des deux directions de Ox' pour $t=0$ et $t=t_1$ est au plus égal à $\frac{\Phi t_1}{CP_0}$; l'angle des deux directions de Oz pour $t=0$ et $t=t_1$ peut différer du précédent de 2η . Pour qu'on puisse confondre les deux angles, il faut que $\frac{\Phi t_1}{CP_0}$ soit très grand par rapport à η , c'est-à-dire que $\frac{t_1 \Phi}{CP_0}$ soit fini.

Le soi-disant raisonnement élémentaire ne prouve donc absolument rien, et peut même conduire à de graves erreurs.

Étude analytique du mouvement d'un corps de révolution pesant suspendu par un point de son axe, les conditions initiales étant quelconques.

64 - La discussion des N°s 56-61 ne s'applique qu'au cas où le solide est animé d'une rotation rapide autour d'un axe sensiblement confondu avec Oz . Nous allons reprendre maintenant l'étude du cas où le solide est pesant, les conditions initiales étant quelconques.

Écrivons les équations du mouvement [N° 56]

$$(1) \quad P = P_0, \quad A\omega_1^2 = -2Mgl \cos \theta + h, \quad \text{proj. } Ox' \text{ sur } Oz = C t^2$$

Les projections de $O\omega_1$ sur OI_1 et OJ sont (N° 49) :

— $\Psi' \sin \theta$ et θ' ; les projections de \overline{OR} sur OZ , OI , et OJ sont par suite $C\psi$, $-A\Psi' \sin \theta$, $A\theta'$; de plus, $\omega^2 = \Psi'^2 \sin^2 \theta + \theta'^2$. En fin, $P^2 = \Psi' \cos \theta + \Psi'$. Ses équations (1) peuvent donc recevoir la forme

$$\begin{aligned} (2) \quad & \Psi'^2 \sin^2 \theta + \theta'^2 = \alpha - \alpha \cos \theta, & (\alpha = \frac{2Mgl}{A} > 0, \quad \alpha \text{ Cte arbitraire}) \\ (3) \quad & \Psi' \sin^2 \theta = \beta - b\psi_0 \cos \theta, & (b = \frac{C}{A} > 0, \quad \beta \text{ Cte arbitraire}) \\ (4) \quad & \Psi' \cos \theta + \Psi' = P_0, & (P_0 \text{ conste arbitraire}). \end{aligned}$$

Dans ces équations, Ψ' et Ψ ne figurent que par leurs dérivées; on en peut donc tirer θ' , Ψ' , Ψ en fonction de θ et le problème est ramené aux quadratures. L'élimination de Ψ' entre (2) et (3) donne:

$$(\beta - b\psi_0 \cos \theta)^2 + \theta'^2 \sin^2 \theta = \sin^2 \theta (\alpha - \alpha \cos \theta);$$

ou, en posant $\cos \theta = u$:

$$(5) \quad \left(\frac{du}{dt} \right)^2 = (\alpha - \alpha u)(1 - u^2) - (\beta - b\psi_0 u)^2 \equiv f(u);$$

l'équation (3) donne ensuite:

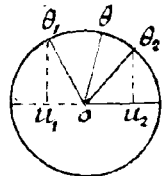
$$(6) \quad \frac{d\Psi}{dt} = \frac{\beta - b\psi_0 u}{1 - u^2}, \quad \text{ou} \quad d\Psi = \frac{\beta - b\psi_0 u}{1 - u^2} \frac{du}{\sqrt{f(u)}},$$

et la troisième:

$$(7) \quad \frac{d\Psi}{dt} = P_0 - \frac{d\Psi}{dt} = P_0 - u \frac{\beta - b\psi_0 u}{1 - u^2}.$$

Le polynôme du 3^e degré $f(u)$ est négatif pour les valeurs $-1, +1$ de u , tandis qu'il est positif (ou nul) pour la valeur u_0 de u , $[-1 \leq u_0 \leq +1]$; il a donc une racine u_0 comprise entre -1 et $+1$, une autre u_1 entre u_0 et $+1$, une 3^e u_2 entre 1 et $+\infty$.

Dans le mouvement, u varie entre u_1 et u_2 . Marquons sur le cercle trigonométrique les angles θ_1 et θ_2 (compris entre 0 et π) dont les cosinus sont u_1 et u_2 : l'angle θ varie entre θ_1 et θ_2 . D'après une discussion connue



[1^{ère} année, p. 181], si $u(t)$ est égal à u_1 pour $t=0$,

u est une fonction paire de t , qui atteint la valeur u_2 à l'instant $T = \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}$; c'est aussi

une fonction paire de $t - T$ et elle admet la période $2T$.
Les fonctions $\Psi''(t)$, $\Psi'(t)$ données par (6) et (7) admettent

la période 2π ; il en résulte qu'aux instants t et $t+2\pi$, Ψ et φ reprennent les mêmes valeurs à une constante d'addition près. Autrement dit, à l'instant $t+2\pi$, les conditions initiales du système sont les mêmes qu'à l'instant t , à cela près que le solide a tourné d'un certain angle 2ψ autour de la verticale OZ , et d'un certain angle sur lui-même autour de OZ .

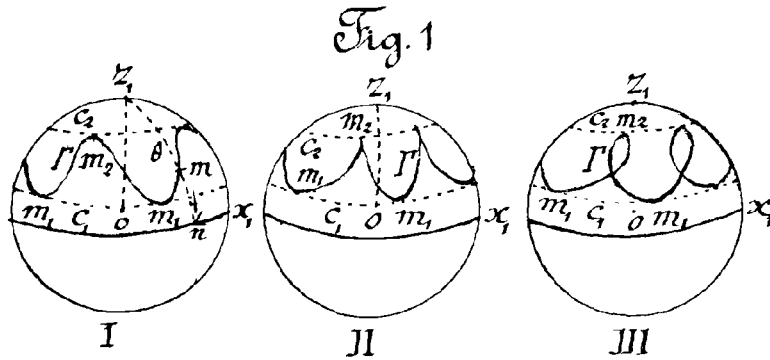


Fig. 1

De plus, si, pour $t=0$, $u=1_1$ (ou u_2) et $\Psi=0$, Ψ est une fonction impaire de t , et par suite u une fonction paire de Ψ [1^{ère} année p. 225].
 Marquons sur la sphère Σ de centre O et de rayon 1, la trace m de l'axe OZ ; la courbe Γ décrite par m

[L'angle $\chi = \text{arc } x$. Ses plans $z_0 m_i$]
 $z_0 m_i$ sont plans de symétrie de la courbe Γ .

reste comprise entre les deux parallèles C_1 et C_2 tracés sur Σ par les deux cônes de révolution d'axe OZ , et sont le demi-angle au sommet est θ_1 et θ_2 . La position de m est définie par l'angle $\theta = \angle z_0 m$ (colatitude) et l'angle $\chi = x, \widehat{OI} = \varphi - \frac{\pi}{2}$ (longitude) [voir le n° 48]. Si m_1, m_2 sont deux points de Γ situés le premier sur C_1 , le second sur C_2 , les plans $z_0 m_1, z_0 m_2$ sont plans de symétrie de Γ , il suffit de connaître l'arc $m_1 m_2$ de Γ pour savoir construire toute la courbe⁽¹⁾. L'équation différentielle de la courbe est :

$$(8) \quad d\chi = \frac{(\beta \cdot b r_0 u) du}{(1-u^2) \sqrt{f(u)}}$$

65 - Discussion des conditions initiales.

1^{er} cas particulier [$\varphi_0' = \psi_0' = 0$]. Si φ_0' et ψ_0' sont nuls, c. à d. si la rotation initiale de S a lieu autour de la droite OJ perpendiculaire au plan $z_0 OZ$, β_0 est nul ainsi que β , et les égalités (6) et (7) montrent que φ et ψ sont constants; le plan vertical $z_0 OZ$ est immobile, et le corps tourne autour de l'horizontale fixe OJ perpendiculaire à ce plan;

(1) Si $\beta = b r_0, u_2 = 1, C_2$ se réduit au pôle z_1 de Σ . On voit aussitôt que le plan normal à Γ en ce pôle z_1 est plan de symétrie de Γ . Si $\beta = -b r_0, u_1 = -1, C_1$ se réduit au pôle inférieur.

ce qui était évident par raison de symétrie: C'est le mouvement du pendule composé qui sera étudié plus tard.

2^e cas particulier - [$\theta \equiv 0$] Si $\theta_0 = 0$ et $\theta'_0 = 0$, θ reste identiquement nul. En effet, les égalités (2) et (3) donnent pour $t=0$: $\alpha = a$, $\beta = b r_0^2$, $u=1$ est racine double de $f(u)$, et nous savons par suite que si $u_0 = 1$, $u \equiv 1$ quel que soit t . Remarquons que dans ce cas, la troisième racine de $f(u)$ est $u = -1 + \frac{b^2 r_0^2}{a}$.

3^e cas particulier [$\theta \equiv \pi$] Si $\theta_0 = \pi$ et $\theta'_0 = 0$; $\theta \equiv \pi$ quel que soit t . On a, en effet, dans ce cas: $\alpha = -a$, $\beta = -b r_0^2$, et $u = -1$ est racine double de $f(u)$. La troisième racine est $u = 1 + \frac{b^2 r_0^2}{a}$, c'est-à-dire u_3 .

Si donc OZ coïncide initialement avec la verticale ascendante ou descendante, ^{S tournant autour de OZ ,} OZ reste vertical indéfiniment et S tourne uniformément⁽¹⁾ autour de cet axe vertical.

(gyroscope dormant). Quand on déränge un peu le gyroscope, dans le cas de $\theta_0 = \pi$, les deux racines u_1, u_2 restent très voisines de $+1$, θ reste très voisin de π .

Dans le cas de $\theta_0 = 0$, il en est de même si $\frac{b^2 r_0^2}{a}$ est au moins égal à 2. Si on contraire $\frac{b^2 r_0^2}{a} < 2$, les racines u_1, u_2 diffèrent peu respectivement de $-1 + \frac{b^2 r_0^2}{a} = \cos \theta$, et de $+1$; θ oscille entre θ_2 voisin de zéro et θ . Le gyroscope dormant est donc toujours stable quand OG' est dirigé vers le bas. Quand OG' est dirigé vers le haut, il n'est stable que si $|r_0|$ est supérieur ou égal à $\frac{\sqrt{2a}}{b} = \frac{2}{c} \sqrt{\mu g \zeta A}$.

4^e cas particulier: θ tend vers zéro pour $t = \infty$. Lorsque $\sin \theta$ n'est pas identiquement nul, il est impossible qu'il s'annule avec θ' à un instant t_1 . En effet, si $f(1)$ est nul, $C_0 = b r_0^2$, $\Psi' = \frac{b r_0^2}{1+u}$; à l'instant t_1 , on aurait donc $\theta = 0$, $\theta' = 0$, $\Psi' = \frac{b r_0^2}{2}$, $\Phi' = r_0 \left(1 - \frac{b}{2}\right)$, et des valeurs déterminées pour Ψ et Φ : or ce sont là des conditions initiales du 2^e cas particulier [$\theta \equiv 0$]. Le même raisonnement s'applique à la valeur $u = -1$.

Mais il peut arriver que $\sin \theta$ tende vers zéro avec θ' quand t croît indéfiniment. Il faut pour cela que (u_0 étant différent de ± 1), $u=1$ [ou $u=-1$] soit racine double de $f(u)$ sans que u_1 et u_2 soient confondues toutes deux avec cette racine. D'après ce qui précède, ceci n'a

⁽¹⁾ Il reste immobile si la rotation initiale est nulle.

lieu que si $+1$ est racine double de $f(u)$ en même temps qu'on a $\frac{b^2 r_0^2}{a} < 2$; $f(u)$ est alors positif pour u compris entre $+1$ et $u_1 = -1 + \frac{b^2 r_0^2}{a} = \cos \theta_1$; si θ atteint la valeur θ_1 à l'instant t_1 , on a: $\theta' = 0$, $\psi'^2 = \frac{a}{1+u_1}$, $\psi' = \frac{b r_0}{1+u_1}$ pour $t = t_1$.

D'après cela, si nous plaçons S à l'instant $t=0$ dans une position arbitraire $\theta_0, \varphi_0, \psi_0$ avec les vitesses

$$\theta'_0 = 0, \quad r'_0 = \frac{\sqrt{a(1+\cos\theta_0)}}{b}, \quad \psi'_0 = \frac{a}{b r_0},$$

θ décroît de θ_0 à zéro quand t croît indéfiniment; OZ tend vers la verticale descendante Oz , et le mouvement tend vers une rotation uniforme de S sur lui-même autour de cette verticale. La courbe sphérique Γ s'enroule asymptotiquement vers le pôle supérieur z_1 de la sphère z_1 de la sphère. Cas particulier - OZ décrit rigoureusement un cône de révolution autour de Oz .

Les cas exceptionnels précédents $a=\alpha$, $b=\beta$ et $a=-\alpha$, $b=-\beta$, étant écartés, $+1$ n'est pas racine double de $f(u)$, et si $f(u)$ a une racine double, u_1 et u_2 sont confondus avec cette racine; θ reste constamment égal à $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$; θ' est identiquement nul.

Montrons que pour une position arbitraire de S , et une valeur arbitraire de r_0 , on peut disposer de ψ'_0 de façon que θ ne varie pas dans le mouvement, cela dans la seule condition que r_0^2 soit au moins égal à $2au_0$.

Il est loisible, dans tous les cas, de prendre comme instant initial $t=0$ un des instants où θ s'annule. Soit donc, pour $t=0$, $\theta_0, \varphi_0, \psi_0$; $\theta'_0=0$, φ'_0 et ψ'_0 les conditions initiales de S ; on a, d'après (2) et (3):

$$\alpha = \alpha u_0 + \psi_0'^2 (1 - u_0^2), \quad \beta = b r_0 u_0 + \psi_0' (1 - u_0^2),$$

et en portant ces valeurs dans $f(u)$:

$$(9) \quad u^2 = (u_0 - u) \left\{ a(1 - u^2) - b^2 r_0^2 (u_0 - u) + (1 - u_0^2) \psi_0' \left[(u + u_0) \psi_0' - 2b r_0 \right] \right\} \\ = (u_0 - u) f_1(u)$$

D'autre part, $\frac{df}{du}$ pour $u = u_0$ est égal à $-\frac{df_1}{du}(u_0)$, d'où:

$$(10) \quad \frac{df}{du}(u_0) = -(1 - u_0^2) \left\{ \alpha - 2b r_0 \psi_0' + 2u_0 \psi_0'^2 \right\}.$$

La valeur u_0 se confond avec u_1 si le second membre de (10) est positif, c'est-à-dire si

$$(11) \quad a - 2br_0 \varphi_0' + 2u_0 \varphi_0'^2 < 0.$$

Elle se confond avec u_2 si l'inégalité inverse a lieu. Elle est racine double de $f|u|$ si

$$a - 2br_0 \varphi_0' + 2u_0 \varphi_0'^2 = 0,$$

d'où deux valeurs de φ_0' , pourvu que r_0^2 soit supérieur ou égal à $\frac{2au_0}{b^2}$. Cette condition toujours remplie si $u_0 \leq 0$, c'est-à-dire b^2 si pour $t=0$, OG est horizontal ou dirigé vers le bas. Lorsque OG fait un angle aigu θ_0 avec OZ , il faut que $|r_0|$ soit supérieur à

$$\frac{\sqrt{2au_0}}{b} = \frac{2}{c} \sqrt{\mu g \zeta A \cos \theta_0}.$$

Si $|r_0|$ est très grand, une des racines, à savoir $\varphi_0' = \frac{br_0}{2u_0} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{2au_0}{b^2 r_0^2}} \right] = \frac{br_0}{u_0} (1 + \varepsilon)$ est très grande en valeur absolue avec $|r_0|$, (ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r_0^2}$); l'autre $\varphi_0' = \frac{a}{2br_0(1+\varepsilon)}$ est très petite avec $\frac{1}{r_0}$. L'angle θ_0 étant quelconque, θ_0 nul et $|r_0|$ très grand, on peut donc toujours choisir φ_0' très petit (en valeur absolue) tel que OZ décrive rigoureusement un cône de révolution autour de OZ ; ce choix n'est possible d'ailleurs que d'une seule manière, et φ_0' est sensiblement égal à $\frac{a}{2br_0}$.

Lorsque $\theta \equiv \theta_0$, on a $\varphi \equiv \varphi_0'$, $\varphi' \equiv \varphi_0'$ d'après (6) et (7); φ et φ' varient proportionnellement au temps; OW fait un angle constant avec OZ et avec OZ_1 ; le cône base et le cône rouleté du mouvement sont deux cônes de révolution autour de OZ , et autour de OZ respectivement; Ox décrit uniformément un cône de révolution autour de OZ , dans l'espace et un cône de révolution autour de OZ dans le solide.

6^e cas particulier - $\theta_0 = \varphi_0' = 0$, $r_0 \neq 0$. La rotation initial a lieu autour de OZ . - L'équation (9) donne alors :

$$w^2 = (u_0 - u) \left\{ a(1 - u^2) - b^2 r_0^2 (u_0 - u) \right\} \equiv (u_0 - u) f_1(u)$$

et comme le premier membre de (11) se réduit à $a > 0$, u_0 se confond avec $u_2^{(1)}$; $f_1(u)$ a une racine u_1 comprise entre

⁽¹⁾ Nous avons vu déjà (N^o 55) que $u_0 - u_1$ est, dans ce cas, toujours positif.

$u_0 = -1$.

C'est ce qu'on vérifie aussitôt; la racine u_1 de $f_1(u)$ comprise entre -1 et $+1$ satisfait à l'équation

$$(11) \quad u_0 - u_1 = \frac{a(1-u_1^2)}{b^2 r_0^2} > 0 ;$$

l'autre racine u_2 de $f_1(u)$ est donnée par :

$$(12) \quad u_2 = u_1 + \frac{b^2 r_0^2}{a} .$$

L'équation (8) donne ici, $[\chi = \psi - \frac{\pi}{2}]$:

$$(13) \quad \frac{d\chi}{du} = \frac{br_0}{1-u^2} \sqrt{\frac{u_0 - u}{a(1-u^2) - b^2 r_0^2 (u_0 - u)}} .$$

Pour $u = u_0$, $\frac{d\chi}{du} = 0$; la courbe Γ est tangente au plan méridien z, om_0 au point initial m_0 situé sur le parallèle C_2 , et comme le plan z, om_0 est un plan de symétrie de Γ , le point m_0 est un point de rebroussement de Γ .

D'autre part, l'équation: $\chi' = \psi' = \frac{br_0(u_0 - u)}{1-u^2}$ montre que ψ varie toujours dans le même sens; autrement dit oz tourne toujours dans le sens positif autour de oz_1 , si $r_0 > 0$ et toujours dans le sens négatif si $r_0 < 0$. La forme de la courbe Γ est la forme II de la figure 1 [page 97]; elle atteint tangentiellement le cercle C_2 [car $\frac{du}{dt} = 0$ pour $u = u_0$]. L'arc $m_0 m_2$ étant tracé, la courbe peut se construire par symétrie.

Ce cas est le seul où la courbe Γ atteint un des cercles C_1, C_2 sans lui être tangente. En effet, les cas exceptionnels traités plus haut étant écartés, les deux racines u_1, u_2 sont distinctes entre elles ainsi que de -1 et $+1$. Prenons comme instant initial un instant où $u = u_1$ ou u_2 : Si $\psi'_0 \equiv \chi'_0 \neq 0$, comme $u'_0 = 0$, $\frac{du}{dt} = 0$ pour $t = 0$, la courbe Γ est tangente ou parallèle; si $\frac{d\chi}{dt} \psi'_0 = 0$, on se trouve dans le cas précédent.

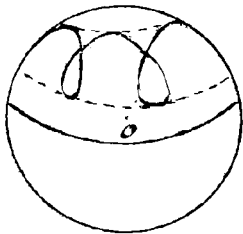
Cas général. - Les cas exceptionnels traités plus haut étant écartés, les deux racines u_1, u_2 sont distinctes.

Prenons comme instant initial un instant où $u = u_1$ [ou u_2]. Si $\psi'_0 \equiv \chi'_0 \neq 0$, comme $u'_0 = 0$, $\frac{du}{dt}$ est nul, la courbe γ est tangente au parallèle $u = u_0$. Si $\psi'_0 = 0$, on rentre dans le cas précédent, et u_0 coïncide alors nécessairement avec u_2 . La courbe γ vient donc

toucher alternativement les deux parallèles C_1, C_2 , sauf dans les cas exceptionnels où elle atteint normalement la parallèle supérieure C_2 et y présente un point de rebroussement. Les conditions initiales étant quelconques, ce cas qui correspond au 6^e cas particulier, est caractérisé par ce fait que Ψ' , c'est-à-dire $(\beta - b_1^2 u)$, s'annule pour $u = u_2$; si on veut, $\frac{\beta}{b_1^2}$ ou $\left\{ u_0 + \frac{\Psi_0' \sin^2 \theta_0}{b_1^2} \right\}$ est racine⁽¹⁾ de $f(u)$.

La forme des courbes Γ dans le cas général est différente suivant que $\frac{\beta}{b_1^2}$ est extérieur ou intérieur aux racines u_1, u_2 de $f(u)$. Dans la première hypothèse, $\chi = \Psi'$ garde un signe constant, le signe de Ψ_0' ; χ varie toujours dans le même sens; la forme des courbes Γ est la forme I de la figure (1) [page 97]. Il est clair d'ailleurs qu'on peut donner à Ψ_0' et ρ_0 des valeurs de signes entièrement quelconques et telles que $\left| \frac{\beta}{b_1^2} \right|$ soit > 1 . L'axe OZ tourne donc toujours dans le même sens autour de OZ_1 , mais ce sens est quelconque et indépendant du signe de ρ_0 .

Si $\frac{\beta}{b_1^2}$ est compris entre u_1 et u_2 , considérons un intervalle b_1^2 de temps où u décroît de u_2 à u_1 . L'expression $\frac{d\Psi}{dt} = \beta - b_1^2 u$ a le signe contraire de ρ_0 quand u décroît de u_2 à $\frac{\beta}{b_1^2}$ et le signe de ρ_0 quand u décroît de $\frac{\beta}{b_1^2}$ à u_1 . Soit $\rho_0 > 0$; $b_1^2 \Psi$ décroît d'une certaine quantité $b_1^2 \lambda$ quand u varie de u_2 à $\frac{\beta}{b_1^2}$, et croît ensuite de μ quand u varie de $\frac{\beta}{b_1^2}$ à u_1 . Si $\lambda < \mu$, la forme des courbes Γ est la forme III de la figure 1, et l'angle $2\Phi_1 = 2(\lambda - \mu)$ dont tourne OZ autour de OZ_1 pendant une période 2π du mouvement est positif comme ρ_0 . Si λ était supérieur ou égal à μ , $2\Phi_1$ serait négatif ou nul; la forme des courbes Γ serait la forme ci-contre.



Mais on démontre [par un raisonnement analogue à celui de Poiseux sur le pendule sphérique 1^{ère} année, p. 295] que ce cas ne peut se présenter. Les seules formes des courbes Γ sont donc⁽²⁾ les formes I, II, III de la figure (1), et quand la précession change de sens durant le mouvement, la précession totale $2\Phi_1$ de OZ autour de OZ_1 pendant une période du mouvement a toujours le signe de ρ_0 .

(1) Il résulte de ce qui précède que u coïncide alors avec u_2 et non avec u_1 .

(2) En écartant les cas irréguliers 1, 2, 3, 4, 5. De plus, C_1 ou C_2 peut se confondre avec un des deux pôles de la sphère [$u_2 = 1$, ou $u_1 = -1$].

66. - Cas où $|P_0|$ est très grand.

Nous savons [N° 56] que les égalités (1) entraînent les inégalités :

$$\omega_1 \leq \gamma + \frac{2Mgl}{C|P_0|} \equiv \gamma + \frac{a}{b|P_0|}, \quad (\gamma = \omega_1^0)$$

$$\text{et } |\cos \theta - \cos \theta_0| \leq \frac{2A\omega_1^0}{C|P_0|} + \frac{2AMgl}{C^2 P_0^2} = \frac{2\omega_1^0}{b|P_0|} + \frac{a}{b^2 P_0^2}.$$

Si $C|P_0|$ est très grand devant $A\omega_1^0$ et $\sqrt{2AMgl}$, θ_1 et θ_2 sont très voisins ; OZ et OZ' restent sensiblement confondus ; la théorie du phénomène gyroscopique s'applique. Le calcul permet de préciser quelques points de cette théorie.

Tout d'abord, θ varie périodiquement entre θ_1 et θ_2 ; durant une période 2π , ψ augmente de $2\psi_1$; au bout ϑ du temps $2\pi\tau$, il augmente de $2\pi\psi_1$; il survient de là que ψ_1 a toujours le signe de P_0 , puisque la variation de ψ au bout d'un temps suffisamment long [N° 56] a toujours le signe de P_0 . Étudions de plus près ce qui se passe pendant une période du mouvement, en prenant pour instant ϑ initial $t=0$ un des instants où $\theta = \theta_2$.

Étude de la nutation. - Puisque, pour $t=0$, $u = u_2$, on a : $\theta_0' = 0$, $|\psi_0' \sin \theta_0| = \omega_1^0 = \gamma$,

$$(III) \quad \text{et} \quad a + 2u_0 \psi_0'^2 - 2bP_0 \psi_0' > 0.$$

La différence de $u_2 - u_1$ vérifie d'après (9) l'égalité :

$$u_2 - u_1 = u_0 - u_1 = \frac{a(1-u_1^2)}{b^2 P_0^2} + \psi_0' (1-u_0^2) [(u_1 + u_0) \psi_0' - 2bP_0],$$

ce qui donne, en confondant dans le second membre u_1 et u_0

$$u_2 - u_1 = \frac{\sin^2 \theta_0}{bP_0} \left\{ \frac{a + 2u_0 \psi_0'^2 - 2bP_0 \psi_0'}{bP_0} \right\}.$$

Si ψ_0' est nul ou de l'ordre de $\frac{1}{P_0}$, $u_2 - u_1$ est de l'ordre de $\frac{1}{P_0}$. Mais si ψ_0' est fini [par exemple, si $u_0 > 0$, $P_0 > 0$ et ψ_0' négatif P_0^2 et fini], la partie principale de $u_2 - u_1$ est $-\frac{\sin^2 \theta_0 \psi_0'}{bP_0}$, quantité de l'ordre de $\frac{1}{P_0}$.

Dans tous les cas, posons : $u_2 - u_1 = 2\varepsilon$, $u = \frac{u_2 + u_1}{2} + v$; il

(*) C'est la démonstration, dans le cas de $|P_0|$ très grand, de la proposition générale énoncée à la fin du N° 65.

vient alors

$$(15) \quad u'^2 v'^2 = \alpha (\varepsilon^2 - v^2) (V_3 - v),$$

équation qui dérivée, donne :

$$(16) \quad 2v'' = -2\alpha V_3 \varepsilon - \alpha (\varepsilon^2 - v^2).$$

On a, d'autre part, d'après (5) :

$$u_1 + u_2 + u_3 = \frac{b^2 \rho_0^2 + \alpha}{\alpha} = \frac{b^2 \rho_0^2 + \alpha u_0 + \psi_0'^2 \sin^2 \theta_0}{\alpha} = v_1 + v_2 + v_3 + 3 \frac{(u_1 + u_2)}{2} = v_3 + 3 \frac{(u_1 + u_2)}{2}$$

Il suit de là que (v variant de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$), on peut écrire :
 $v_3 - v = \frac{b^2 \rho_0^2}{\alpha} (1 + \eta)$, η étant de l'ordre de $\frac{1}{\rho_0^2}$, et les équat.

(16) et (15) prennent la forme :

$$(17) \quad v'^2 = b^2 \rho_0^2 (\varepsilon^2 - v^2) (1 + \eta)$$

et

$$(18) \quad v'' = -b^2 \rho_0^2 v (1 + \eta_1) + \eta_2,$$

η_1 étant de l'ordre de $\frac{1}{\rho_0^2}$ et $|\eta_2|$ étant inférieur à $\frac{\alpha \varepsilon^2}{2}$.

La nutation vérifie donc sensiblement l'équation :

$$b \rho_0 dt = \frac{dv}{\sqrt{\varepsilon^2 - v^2}}, \quad \text{d'où}$$

$$v = u - \frac{u_0 + u_1}{2} = \varepsilon \cos b \rho_0 t;$$

la période 2π de la nutation est sensiblement égale à $\frac{2\pi}{b \rho_0}$.
 Les vibrations nutatoires de oz sont d'autant plus faibles et plus rapides que $|\rho_0|$ est plus grand : leur durée $\frac{2\pi A}{b \rho_0}$ est indépendante de ω_0' .

La vitesse $\theta' = \frac{u'}{\sin \theta} = -\frac{\varepsilon b \rho_0 \sin b \rho_0 t}{\sin \theta_0}$ est sensiblement com-

prise entre $\pm \frac{\varepsilon b \rho_0}{\sin \theta_0}$; elle est nulle pour $t = n\pi$, égale à $\frac{\varepsilon b |\rho_0|}{\sin \theta_0}$
 pour $t = (2n + \frac{1}{2})\pi$, égale à $-\frac{\varepsilon b |\rho_0|}{\sin \theta_0}$ pour $t = (2n - \frac{1}{2})\pi$.

Si ψ_0' est très petit, $\varepsilon b |\rho_0| \sin \theta_0$ est très petit, mais si ψ_0' est fini ⁽¹⁾ θ' oscille entre deux valeurs finies peu différentes de $\pm \frac{\sin \theta_0 \psi_0'}{\rho_0}$, valeurs qui sont grandes si $|\psi_0'|$ est grand bien que $|\frac{\psi_0'}{\rho_0}|$ soit petit.

⁽¹⁾ Il est facile de voir, d'après l'inégalité (14), que ψ_0' s'il n'est pas de l'ordre de $\frac{1}{\rho_0}$ est de signe contraire à ρ_0 .

Enfin on a :

$u'' = -\varepsilon b^2 p_0^2 \cos b p_0 t$; u'' oscille entre $\pm \varepsilon b^2 p_0^2$.
Si ψ'_0 est de l'ordre de $\frac{1}{p_0}$, u'' reste fini pour $|p_0|$ très grand, mais
si ψ'_0 est fini, u'' oscille entre deux valeurs très grandes et de
signes contraires.

Si $\psi'_0 = 0$ on a :

$$\varepsilon = \frac{a \sin^2 \theta_0}{b^2 p_0^2}.$$

Précession. - Au bout du temps $2\pi\tau$, si grand que
soit n , la variation de ψ est très sensiblement ($N^{\circ} 56$):
 $2\pi\tau \frac{Mgl}{C p_0^2}$; on a donc

$$2\pi\psi_1 = 2\pi\tau \frac{Mgl}{C p_0^2}, \text{ ou } \psi_1 = \frac{\pi A Mgl}{C^2 p_0^2} = \frac{\pi \alpha}{2b^2 p_0^2}.$$

Cette variation est indépendante de ψ'_0 .

D'autre part

$$\psi' = \psi'_0 + \frac{b p_0 (u_0 - u)}{1 - u^2}; \text{ d'où } \frac{\psi'}{p_0} = \frac{\psi'_0}{p_0} + \frac{b(u_0 - u)}{1 - u^2}.$$

Si $\frac{\psi'_0}{p_0} > 0$, $\frac{\psi'}{p_0}$ croît de $\frac{\psi'_0}{p_0}$ à $\psi'_0 + \frac{b p_0 \varepsilon}{\sin^2 \theta_0}$ quand t croît de
 0 à τ ; ψ' ne s'annule jamais; ψ'_0 est nécessairement de
l'ordre de $\frac{1}{p_0}$, puisque $\psi_1 = \frac{\pi A Mgl}{C^2 p_0^2}$ est plus grand que $\psi'_0 \frac{\pi}{b p_0}$.

Si $\psi'_0 < 0$, ψ' s'annule une fois et une seule et change
de signe entre $t=0$ et $t=\tau$. Quand ψ'_0 est fini, ψ' oscille sen-
siblement entre les deux valeurs finies $\pm \psi'_0$. Si donc $|p_0|$ très
grand et $\frac{\psi'_0}{p_0}$ très petit mais ψ'_0 fini, dans chaque
période très courte $\frac{2\pi}{n}$, la vitesse de précession varie entre
deux valeurs notables $b p_0$ de signes contraires; la précession
négative et la précession positive sont de l'ordre de $\frac{1}{p_0}$,
mais leur somme (algébrique) est de l'ordre de $\frac{1}{p_0}$ et égal
à $\frac{\pi \alpha}{b^2 p_0^2}$. Si $\psi'_0 = 0$, il est facile de retrouver par le calcul la
valeur de ψ_1 . On a :

$$\psi' = \frac{b p_0 (u_0 - u)}{\sin^2 \theta} = \frac{b p_0 (\varepsilon - v)}{\sin^2 \theta} = \frac{b p_0 \varepsilon (1 - \cos b p_0 t)}{\sin^2 \theta_0} \text{ sensiblement;}$$

d'où en posant $b p_0 t = t_1$:

$$\psi_1 = \frac{\varepsilon}{\sin^2 \theta_0} \int_0^\pi (1 - \cos t_1) dt_1 = \frac{\pi \varepsilon}{\sin^2 \theta_0} = \frac{\pi \alpha}{2b^2 p_0^2}.$$

Réaction. - Bornons-nous à calculer la composante

verticale R_z de la réaction de l'appui; les deux autres composantes se calculeraient de la même manière. On a (théorème du mouvement du centre de gravité):

$$M \ddot{\zeta}_1 = -Mg + R_z,$$

ou, comme $\zeta_1 = l \cos \theta = lu$:

$$R_z = M(g + lu'') = M(g - \varepsilon l b^2 \rho_0^2 \cos b \rho_0 t)$$

si φ_0' est de l'ordre de $\frac{1}{\rho_0}$, R_z reste fini, mais si φ_0' est fini, R_z oscille pendant chaque période entre deux valeurs très grandes dont la partie principale est $\pm M b l \rho_0 \varphi_0'$.

Si $\varphi_0' = 0$, R_z oscille entre $M \left[g \pm \frac{a^2 l}{2} \right] = Mg \left[1 \pm \frac{M l^2}{A} \right]$, et par suite reste positive⁽¹⁾.

Conclusion. - Si les quantités $\frac{A \omega_0'}{C |\rho_0|}$ et $\frac{A M g l}{C^2 \rho_0^2}$ (de dimensions zéro) sont très petites⁽²⁾, les nutations de OZ sont de très faibles oscillations périodiques et très courtes: l'amplitude de ces oscillations est de l'ordre de la plus grande de ces deux quantités; leur durée $2T$ est sensiblement indépendante de ω_0' et égale à $\frac{2\pi A}{C |\rho_0|}$; la vitesse de nutation θ' oscille entre deux valeurs sensiblement de signes contraires et qui sont notables quand ω_0' n'est pas petit.

Pendant une période $2T$, φ s'augmente sensiblement de la quantité $2\varphi_1 = \frac{2\pi A M g l}{C^2 \rho_0^2}$, quantité indépendante de ω_0' ; φ' oscille entre

deux valeurs qui sont ou toutes deux du signe de ρ_0 ou de signes opposés entre elles. Dans ce dernier cas, la précession $2\varphi_1$ résulte de deux précessions de sens contraires, précessions qui sont toutes deux très grandes devant $2\varphi_1$ si ω_0' est notable. Enfin la réaction verticale de l'appui oscille périodiquement

⁽¹⁾ $M l^2$ est toujours $\leq A$ (moment d'inertie du solide S autour d'une droite Ox perpendiculaire à OZ). En effet, si S tourne autour de Ox avec la vitesse 1, sa force-vive A est en vertu du théorème de Koenig, plus grande que la force-vive $M l^2$ de son centre de gravité où toute la masse M serait concentrée.

⁽²⁾ La quantité $\frac{A \omega_0'}{C |\rho_0|}$ est alors très petite, elle aussi: car $\frac{C}{A}$ est ≤ 2 et $\frac{\omega_0'}{|\rho_0|} \leq 2 \frac{A \omega_0'}{C |\rho_0|}$. Pour voir que $\frac{C}{A} \leq 2$, soit Ox, Oy deux axes perpendiculaires en O entre eux et à Oz ; on a: $A = \sum m (y^2 + z^2) = \sum m (z^2 + x^2) = \sum m (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{C}{2} + \sum m z^2$. D'où $\frac{C}{A} \leq 2$, à moins que $\sum m z^2 = 0$, (c.à.d. que S ne soit entièrement dans le plan xoy); alors, $C = 2A$.

entre deux valeurs très différentes et même considérables et de signes contraires quand ω_0' est fini. Mais la valeur moyenne (dans une période) de θ' est nulle; celle de ψ' est $\frac{Mgl}{C\Gamma_0}$; celle de R_z est Mg .

Ci ω_0' est nul ou de l'ordre de $\frac{Mgl}{C\Gamma_0}$, les variations périodiques de θ sont de l'ordre de $\frac{AMgl}{C\Gamma_0}$; celles de θ' et de ψ' de l'ordre de $\frac{Mgl}{C\Gamma_0}$; les variations $C\Gamma_0^2$ de R_z sont de l'ordre du poids Mg .

67. Exemple numérique. - Supposons que le gyroscope fasse cent tours sur lui-même à la seconde :

$\Gamma_0 = 2\pi \times 100$, $\omega_0' = 0$, et soit :

$$b = \frac{C}{A} = \frac{3}{2}, \quad \frac{A}{\mu l^2} = 2, \quad l = 10 \text{ cm}, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Appliquons les formules [θ_0 étant nul] :

$$(I) \quad \tau = \frac{\pi}{b\Gamma_0}, \quad \cos \theta_0 - \cos \theta_1 = \sin \theta_0 (\theta_1 - \theta_0) = 2\varepsilon = \sin^2 \theta_0 \left\{ \frac{a}{b^2 \Gamma_0^2} - \frac{2\psi_0'}{b\Gamma_0} \left(1 - \frac{u_0 \psi_0'}{b\Gamma_0}\right) \right\};$$

pendant chaque période 2τ de la nutation, θ oscille entre $\pm \frac{\varepsilon b \Gamma_0}{\sin \theta_0}$; ψ' entre ψ_0' et $\psi_0' + \frac{2b\Gamma_0 \varepsilon}{\sin^2 \theta_0}$; R_z entre $M(g \pm l \varepsilon b^2 \Gamma_0^2)$; ψ croît de $\frac{2\psi_0'}{\sin^2 \theta_0}$.

$$2\psi_0' = \frac{2\pi \varepsilon}{\sin^2 \theta_0}. \text{ Pendant une seconde, } \psi \text{ croît de } \frac{a}{2b\Gamma_0}.$$

Les unités étant les unités C. G. S, on a :

$$(II) \quad \psi_0' = 0, \quad \Gamma_0 = 2\pi \times 100; \quad \theta_0 = \frac{\pi}{4}, \quad b = \frac{3}{2}; \quad a = \frac{2Mgl}{A} = \frac{2g}{l} \frac{Ml^2}{A} = 98.$$

D'où :

$$\tau = \frac{1}{300}; \quad 2\varepsilon = \sin^2 \theta_0 \frac{a}{b^2 \Gamma_0^2} = \frac{1}{2} \frac{98}{(2\pi \times 100)^2} = \frac{1}{18.000} \text{ sensiblement;}$$

$$\theta_1 - \theta_0 = 2\varepsilon \sqrt{2} = \frac{1}{12500} \text{ rad.} = 16'' \text{ environ;}$$

enfin :

$$\frac{\varepsilon b \Gamma_0}{\sin \theta_0} = 0,037; \quad \frac{2\varepsilon b \Gamma_0}{\sin^2 \theta_0} = 0,10; \quad l \varepsilon b^2 \Gamma_0^2 = 250; \quad \frac{a}{2b\Gamma_0} = \frac{1}{19}.$$

L'angle θ oscille donc périodiquement 49° et $49^\circ 0' 18''$, et cela 150 fois par seconde. En une seconde, ψ s'accroît de $\frac{1}{20}$ rad. = 3° environ. La vitesse de précession oscille 150 fois par seconde entre zéro et $\frac{1}{20}$, sa valeur moyenne est $\frac{1}{40}$, [$\frac{1}{120}$ de tour à la seconde]; en $\frac{1}{150}$ de seconde, ψ s'accroît de $\frac{1}{50}$ de degré. Enfin, R_z oscille 150 fois par seconde entre $M(g \pm 260) = Mg(1 \pm \frac{1}{4})$ environ, c'est-à-dire entre

les $\frac{5}{4}$ et les $\frac{3}{4}$ du poids du corps.

Dans cet exemple, Ψ ne change pas de signe et oscille entre des valeurs petites (0° et $\frac{1}{10}$); θ oscille entre $\pm 0,037$. Mais supposons que les autres conditions initiales restent les mêmes (et $\theta_0 = \text{nul}$), Ψ_0 soit égal à -2π [vitesse d'un tour à la seconde]. Dans le second membre de la dernière équation I, le terme $\frac{-2\Psi_0 \sin^2 \theta_0}{b r_0}$ est beaucoup plus grand que les deux autres, et on a sensiblement (τ gardant la même valeur):

$$2\xi = -\sin^2 \theta_0 \frac{2\Psi_0'}{b r_0} = +\frac{1}{2} \frac{4\pi}{\frac{2}{3} \times 2\pi \times 100} = \frac{1}{150};$$

$$\theta_1 - \theta_0 = \frac{\sqrt{2}}{150} = 0,0093 = 32' \text{ environ};$$

$$\frac{\xi b r_0}{\sin \theta_0} = 4,4; \quad \frac{2\xi b r_0}{\sin^2 \theta_0} = 12,5; \quad \xi b^2 r_0^2 = 30000; \quad \frac{\alpha}{2b r_0} = \frac{1}{19}.$$

L'angle θ oscille 150 fois par seconde entre 45° et $45^\circ 32'$, θ oscillant entre $\pm 4,4$. Quant à Ψ , il s'accroît, comme plus haut, de 3° environ en une seconde, de $\frac{1}{50}$ de degré pendant une période; mais pendant chaque 150^{e} de seconde, Ψ oscille entre -2π et $+2\pi$, et le corps subit deux précessionnaires de sens contraires de l'ordre du degré, dont le résultat est d'accroître Ψ de $\frac{1}{50}$ de degré. Enfin, R_z oscille, en un $\frac{1}{150^{\text{e}}}$ de seconde, entre $50^{\text{e}} + 31 \text{ Mg}$ et -29 Mg environ, c'est-à-dire entre deux valeurs de signes contraires sensiblement égales à 30 fois le poids du corps! (1)

Dans les deux cas, pendant une période $2T = \frac{1}{150}$, la vitesse moyenne θ' de θ est nulle, celle de Ψ est $\frac{1}{20}$; la valeur moyenne de R_z est Mg .

Tout se passera donc pour nos sens comme si on décrivait un cône de révolution autour de OZ , d'un mouvement uniforme et comme si R_z restait égal à Mg . C'est là un exemple de ces mouvements moyens qui sont seuls perçus par nos sens, et auxquels nous faisons allusion au début de ce cours à propos des petites déformations des solides.

(1) Quand on donne au gyroscope une grande vitesse de rotation sur lui-même, il faut faire en sorte qu'elle ait lieu bien exactement autour de OZ , c'est-à-dire que ω_0 soit très petit, pour que les réactions imposées à la suspension ne soient pas trop fortes.

Le mouvement apparent serait d'ailleurs rigoureusement réalisé [page 100] si on donnait à Ψ' la valeur $\frac{61^{\circ} - \sqrt{61^{\circ 2} - 2au_0}}{2u_0}$ (sensiblement) $\frac{a}{2br_0} = \frac{1}{19}$.

68. Remarque sur l'approximation du mouvement gyroscopique.

Appliquons au dernier exemple numérique la théorie élémentaire du gyroscope (N° 56) d'après cette théorie, θ est sensiblement constant et $\Psi - \Psi_0$ égal à $\frac{a}{2br_0} t$. Prenons $t = \frac{\tau}{2} = \frac{1}{600}$ de seconde: nous savons qu'en réalité θ a crû de $16'$ et que Ψ a diminué d'environ $\frac{1}{2}^{\circ}$, au lieu que d'après la théorie élémentaire il aurait augmenté de $\frac{1}{200}^{\circ}$ de degré; l'erreur relative ainsi commise est donc considérable. Mais considérons, au contraire, une durée t de 1 minute: la théorie élémentaire nous apprend que θ est égal à θ_0 et $\Psi - \Psi_0$ égal à $\frac{a}{2br_0} 60 = 179^{\circ}$: en réalité, θ est compris entre θ_0 et $\theta_0 + 32'$, et $\Psi - \Psi_0$ est égal à 179° à un degré près. Si long que soit le temps considéré, l'erreur commise sur θ reste inférieure à $32'$ et l'erreur relative sur $\Psi - \Psi_0$ est très faible. L'approximation en question offre donc ce caractère remarquable qu'étant détestable pour les durées très petites, elle est excellente pour les longues durées.

69. Conditions moyennant lesquelles s'applique la théorie gyroscopique.

Tout ce qui précède s'étend au cas où le gyroscope fixé par son centre de gravité est soumis à une force Φ constante en grandeur et direction et appliquée en un point déterminé P de l'axe GZ : il suffit, le sens GP ayant été pris comme sens GZ et l représentant la distance GP , de remplacer partout Mg par Φ .

Pour que la théorie gyroscopique s'applique, il n'est nullement nécessaire que $|1^{\circ}|$ soit très grand: il faut et il suffit que les deux quantités:

$$\frac{A\omega_0^2}{G|1^{\circ}|} \quad \text{et} \quad \frac{2\Phi l}{G^2 1^{\circ 2}}$$

soient très petites⁽¹⁾. Ces deux quantités sont de dimensions

⁽¹⁾ La quantité $\frac{\omega_0^2}{|1^{\circ}|}$, comme nous l'avons dit, est $\left\{ 2 \frac{A\omega_0^2}{G|1^{\circ}|} \right.$

nulles ; leur valeur, purement numérique, est indépendante des unités choisies. Si on choisit l'unité de temps de façon que $|\Gamma^2| = 2\pi$, la théorie s'appliquera pourvu que

$$\frac{A\omega^0}{G} \text{ et } \frac{2\Phi l}{G^2} \text{ soient très petits.}$$

70. Retour sur le mouvement d'un gyroscope soumis à une force variable rencontrant l'axe OZ .

Le gyroscope S étant fixé par un point O de son axe OZ , supposons que les forces appliquées à S aient, par rapport à O , un moment résultant toujours perpendiculaire à OZ , ($N \equiv 0$). On peut alors remplacer ces forces par une force unique Φ appliquée en un certain point déterminé P de l'axe OZ ($l = OP$). J'admetts que Φ satisfasse aux restrictions suivantes : 1° En valeur absolue Φ reste inférieur à Φ et $\frac{2\Phi l}{G^2} \text{ est très petit}$; 2° Pendant toute période de temps égale $\frac{2\pi A}{G^2 |\Gamma^2|}$ à $\frac{2\pi A}{G^2 |\Gamma^2|}$, Φ est sensiblement constant en grandeur direction $|\Gamma^2|$ en sens.

Ces conditions remplies, si en outre $\frac{A\omega^0}{G}$ est très petit, je dis que OZ et OK vont rester sensiblement confondus⁽¹⁾.

En effet, considérons les instants

$$t=0, \quad t=2\tau, \quad t=4\tau, \dots \quad t=2n\tau, \dots$$

entre les instants $t=0$ et $t=2\tau$, prenons comme axe OZ , la direction fixe de Φ changée de sens, et appliquons les résultats du N°66 : à l'instant $t=2\tau$ $\theta, \theta', \varphi, \varphi'$ ont même valeur qu'à l'instant $t=0$; les composantes de OW et OK selon OZ , OZ et OJ sont les mêmes aux deux instants; l'angle $Z\bar{O}K$ très petit entre $t=0$ et $t=2\tau$ a même valeur pour $t=0$ et $t=2\tau$. Le même raisonnement pouvant se répéter entre $t=2\tau$ et $t=4\tau$, etc, on voit que l'angle $Z\bar{O}K$ reste sensiblement nul.

Ce raisonnement n'impose aucune limite au temps. En fait, la conclusion ne s'appliquera qu'à une durée très longue mais non indéfinie : 1° à cause des frottements de la suspension (et ce motif intervient même

⁽¹⁾ Dans le raisonnement du N°61 il faut, pour établir ce résultat, admettre que Φ est sensiblement invariable pendant un temps très long par rapport à la durée $\frac{2\pi A}{G^2 |\Gamma^2|}$.

dans le cas où Φ est rigoureusement invariable; parce que Φ n'est qu'approximativement invariable pendant une durée 2π .

71 - Cas où $A = C$. - Lorsque $A = C$, \overline{OK} et \overline{OW} coïncident toujours en direction et sens quel que soit \overline{OW} et \overline{OK} en valeur absolue est égal à AW ; la force-vive du solide est AW^2 ; le moment d'inertie du solide est le même autour de n'importe quelle droite passant par O .

Quand il en est ainsi, on peut, dans tout ce qui précède, faire jouer le rôle de OZ à n'importe quelle droite fixe dans le solide et passant par O . La chose était évidente dans le cas d'une sphère homogène (ou formée de couches concentriques homogènes), fixée par son centre O : le moment d'inertie de la sphère est le même autour d'un quelconque de ses diamètres, et tout diamètre peut être regardé comme un axe de révolution du solide.

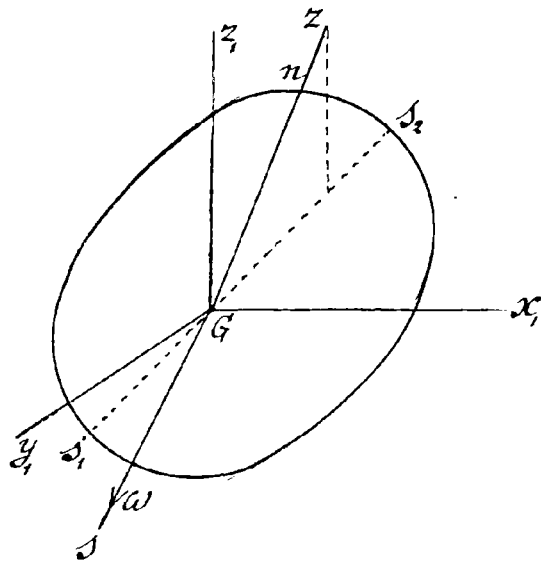
72 - Application au mouvement d'un solide de révolution autour de son centre de gravité.

Le gyroscope S étant libre ou soumis à des liaisons quelconques, étudions son mouvement autour de son centre de gravité G , c'est-à-dire par rapport aux axes Gx, y, z , parallèles aux axes fixes. Soit \overline{GK} le moment résultant par rapport à G de toutes les forces extérieures appliquées à S . Supposons que \overline{GK} soit constamment perpendiculaire à Gz et inférieur en valeur absolue à une quantité fixe $l\Phi$. De plus, le gyroscope est animé d'une rotation très rapide autour d'un axe sensiblement \mathcal{D} confondu avec Gz , et pendant tout intervalle de temps inférieur à $\frac{2\pi A}{C^2 p^2}$, nous admettons que le vecteur \overline{GK} peut être regardé comme constant; de plus $\frac{l\Phi A}{C^2 p^2}$ est très petit.

Dans ces conditions, il est évident que la théorie gyroscopique et notamment les équations du N° 62 s'appliquent au mouvement de S autour de G .

73 - Application au phénomène de la précession des équinoxes.

La terre est regardée comme un solide de révolution autour d'un certain axe Gz , ce solide se composant de couches homogènes de révolution. Étudions son mouvement

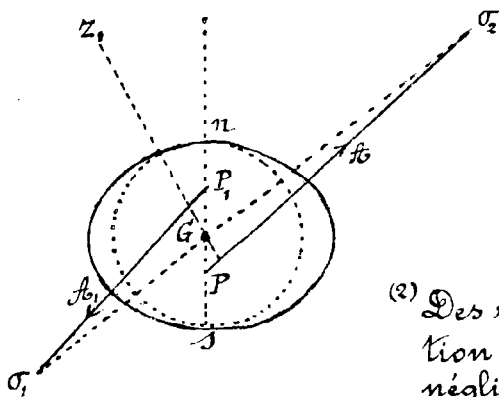


par rapport aux axes Gx, y, z , de directions fixes relativement aux étoiles. L'axe instantané \overline{GW} de la terre fait un angle inappréciable avec l'axe Gz (et est dirigé vers le sud). L'attraction \overline{A} du soleil sur la terre admet une résultante qui passerait par G si la terre était sphérique, mais qui en réalité, à cause du renflement de l'équateur, rencontre Gz en un point variable P , voisin de G : ce point P est situé par rapport à G du côté du pôle sud S pendant l'été et du côté du

pôle nord n pendant l'hiver. Mais, dans tous les cas, Gz , désignant la perpendiculaire au plan de l'écliptique qui fait avec Gn un angle aigu, la projection de \overline{A} sur le plan z, Oz tendrait toujours à rapprocher Gz de Gz , si la rotation de la terre était nulle.⁽¹⁾ Enfin, à deux instants t et t_1 (de la même année) également éloignés du solstice d'été, les deux attractions \overline{A} et \overline{A}_1 sont symétriques par rapport au plan z, Gz (qui contient la ligne σ_1, σ_2 des solstices et reste sensiblement immobile pendant un an); les moments par rapport à G de \overline{A} et de \overline{A}_1 sont symétriques par rapport au plan z, Gz .⁽²⁾

On peut calculer le moment \overline{GK} par rapport à G de \overline{A} ; on constate que $\frac{GK \times A}{c^2 p^2}$ ou (puisque $\frac{A}{c}$ diffère peu de 1)

⁽¹⁾ Il suffit pour s'en rendre compte de jeter les yeux sur la figure ci-contre; l'attraction \overline{A} du soleil σ se compose de l'attraction de la sphère de diamètre ES (attraction qui est dirigée selon $G\sigma$) et de l'attraction du boudin compris entre cette sphère et la surface terrestre. Quand σ est en S_2 au solstice d'été, l'attraction est dirigée selon $P\sigma_2$; quand σ est en σ_1 au solstice d'hiver, elle est dirigée selon $P\sigma_1$.

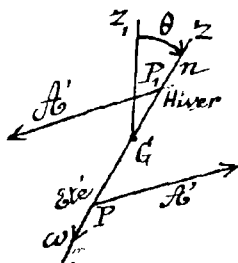


⁽²⁾ Des remarques analogues s'appliqueraient à l'attraction de la lune et des planètes, mais leur influence est négligeable devant celle du soleil.

$\frac{GK}{C.P.}$ est très petit à n'importe quel jour de l'année. D'autre C.P. part, la quantité $\frac{2\pi A}{C.P.}$ diffère peu de $\frac{2\pi}{T}$ ou d'un jour sidéral. En un jour C.P. sidéral θ reste \approx sensiblement invariable, par suite GK. Toutes les conditions pour que la théorie gyroscopique s'applique sont donc remplies, et on peut écrire les équations (N° 62)

$$(1) \quad \theta' = \frac{I_1}{C.P.}, \quad \sin \theta \psi' = \frac{I_2}{C.P.}$$

Étudions ce qui se passe dans une année : prenons comme origine du temps le solstice d'été, et soit t une durée au plus égale à une demi-année. Pour t et $-t$, les valeurs de I_1 sont égales et de signes contraires; I_1 est une fonction impaire de t ; $\theta - \theta_0$ est donc, d'après (1), une fonction paire de t ; θ reprend la même valeur à deux solstices d'hiver consécutifs (après avoir subi une variation insignifiante). Quant à I_2 (moment par rapport à GJ de



la projection $A'B'$ de AB sur le plan $z_1 G z_2$, il est toujours négatif puisque $A'B'$ est orienté par rapport à G dans le sens des θ décroissants: $\sin \theta$ est positif; comme Gz_3 a le sens Gn_3 , est négatif; $\psi' = \frac{I_2}{\sin \theta C.P.}$ est positif et au bout d'un an ψ

a augmenté de $\frac{2}{C.P.} \int_0^{t_1} \frac{I_2 dt}{\sin \theta} = \frac{2\alpha t_1}{C.P.}$, t_1 dési-

gnant le temps écoulé entre le solstice d'été et le solstice d'hiver et α la valeur moyenne de $\frac{I_2}{\sin \theta}$ dans cette demi-année. Cou. se passera comme si l'axe $\frac{I_2}{\sin \theta}$ de la terre était soumis à une force de sens opposé à Gz_3 , appliquée en un point P de Gz_3 tel que $GP=1$, et égale à $|\alpha|$, valeur moyenne de $|\frac{I_2}{\sin \theta}|$ dans une année. L'axe Gz_3 de la terre décrira donc $\frac{I_2}{\sin \theta}$ sensiblement un cône de révolution Γ autour de Gz_3 , d'un mouvement uniforme et très lent, dans le sens positif. Le calcul montre que ψ varie en un an de $\frac{2\pi}{23.806.250}$ rad. Le mouvement peut être représenté sensiblement par le roulement sans glissement d'un très petit cône de révolution⁽¹⁾ lié à la terre sur le cône Γ .

(1) Nous avons vu (cours de 1^{ère} année, p. 71), que le demi-angle au sommet de ce cône est $\frac{1}{23.806.250}$ rad. Sa trace sur la terre est un cercle de 26 cm.

74- Gyroscopie fixé par un point de son axe et assujéti à d'autres liaisons.

Ses équations du N° 54 permettent aussi bien d'étudier le mouvement du gyroscopie fixé par un point O de son axe quand celui-ci est soumis à d'autres liaisons. Supposons, par exemple, que l'axe OZ du gyroscopie S (pesant) soit assujéti à se mouvoir sans frottement dans un plan fixe.

Prendons pour axe Oz , la perpendiculaire au plan Π fixe Π menée vers le haut, pour axe Ox , une ligne de plus grande pente du plan menée vers le bas: θ reste égal à $\frac{\pi}{2}$.

Le moment N par rapport à Gz des forces extérieures étant nul, on a:

$$P = P_0, \text{ ou } P_0 = \Psi' \cos \theta + \Phi' = \Phi'.$$

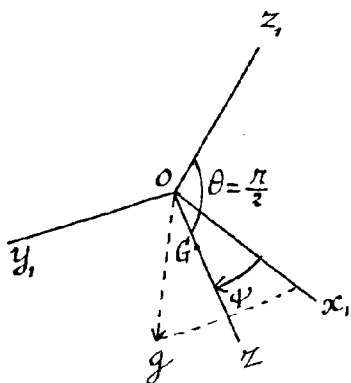
Le théorème des forces vives donne ensuite:

$$A\omega_1^2 + C\dot{\Psi}_0^2 = 2Mg \sin i l \cos \Psi + C^{te}, \quad (l = OG, i = \angle Z, \hat{OG})$$

$$\text{ou, comme } \omega_1^2 = \Psi'^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2,$$

$$A\Psi'^2 = 2Mg \sin i l \cos \Psi + C^{te}, \text{ équation d'un mouvement pendulaire.}$$

Dans le cas particulier où G coïncide avec O , l est nul, Ψ' et Φ' sont des constantes.



75- Étude d'un gyroscopie fixé par son centre de gravité G et dont l'axe Gz se meut dans un plan fixe, en tenant compte du mouvement de la terre.

Dans le N° précédent, nous avons étudié le mouvement du gyroscopie par rapport à l'écorce terrestre, en supposant \bar{g} constant en grandeur et sens. Étudions le même problème lorsque O et G coïncident, en tenant compte du mouvement de la terre.

Soit Gx, y, z , des axes liés invariablement à la terre, et $G\xi, \eta, \zeta$ des axes de directions fixes par rapport aux étoiles. Par rapport aux premiers axes, le plan Π est fixe; ses réactions ont un travail nul. D'autre part, dans l'application du théorème des forces vives, la pesanteur vraie peut, nous le savons, être réduite à la pesanteur vulgaire \bar{g} [1^{ère} année, p. 321]; la force-vive du gyroscopie dans son mouvement par

rapport à la terre est donc ici une constante: d'où l'égalité

$$(1) \quad A\psi'^2 + Cp^2 = h.$$

Mais, d'autre part, rapportons le mouvement de S aux axes $G\xi, \eta, \zeta$; dans ce mouvement nous pouvons appliquer le théorème des moments cinétiques par rapport à G , en gardant comme forces extérieures les forces absolues. Ces forces sont les attractions newtoniennes (N° 53) et les réactions de Π dont le moment par rapport à Gz est nul. D'après cela, soit $G\Omega$ la rotation instantanée absolue de S , et R la projection de $G\Omega$ sur Gz ; on a:

$C \frac{dR}{dt} = 0$, $R = R_0$. Mais \bar{p} désignant la rotation instantanée (absolue) de la terre, on a: $\bar{\Omega} = \bar{\omega} + \bar{p}$, et $R = p + p \cos(Gz, G\bar{s})$, si $G\bar{s}$ désigne la direction du pôle sud. Prenons comme axe Gx , la projection de $G\bar{s}$ sur le plan Π , comme axe Gz , une perpendiculaire à ce plan, et soit λ l'angle (aigu) de $G\bar{s}$ et du plan Π ; on a: $p \cos(Gz, G\bar{s}) = p \cos \lambda \cos \psi$; d'où

$$(2) \quad p + p \cos \lambda \cos \psi = \alpha \quad (\alpha \text{ conste arbitraire}).$$

En remplaçant p par cette valeur dans (2), et en négligeant le terme en p^2 devant le terme en p , il vient:

$$A\psi'^2 = 2Cp\alpha \cos \lambda (\cos \psi - \beta), \quad (\beta \text{ Cte arbitraire}),$$

équation d'un mouvement pendulaire où Gx , projection sur Π de l'axe du monde joue le rôle de la verticale.

Donnons au gyroscope une rotation très grande autour de Gz , et choisissons le sens Gz de façon qu'elle soit positive; $\alpha = p_0 + p \cos \lambda \cos \psi_0$ est alors positif. Si $|\beta| < 1$, Gz oscille entre deux positions qui comprennent comme bissectrice la demi-droite Gx , projection sur Π de l'axe du monde mené vers le sud. En réalité, à cause des petits frottements qu'entraînent les liaisons, Gz s'arrêtera au bout d'un temps fini dans une position très peu différente de Gx .

Quand Π est un plan méridien ou un plan vertical, le gyroscope joue le rôle de boussole d'inclinaison. Quand Π est horizontal, Gx coïncide avec la projection horizontale de $G\bar{s}$ (boussole de déclinaison).

Mouvement général d'un solide de révolution.

76. - Equations du mouvement. - Exemples. - Supposons maintenant que le solide de révolution S ne soit plus fixé par un point de son axe. Pour calculer son mouvement, on appliquera d'abord le théorème du mouvement du centre de gravité G (3 équations), puis le théorème des moments cinétiques dans le mouvement autour de G , comme il a été expliqué au N° 72. On obtiendra ainsi ^{six équations pour calculer en fonction du temps les} six paramètres qui définissent la position de S , à savoir les coordonnées ξ, η, ζ et G , et les trois angles θ, φ, ψ qui définissent l'orientation de S autour de G . Si toutes les forces extérieures appliquées à S sont données [c'est-à-dire connues en fonction de $\xi, \eta, \zeta, \theta, \varphi, \psi, \xi', \eta', \zeta', \theta', \varphi', \psi', t$], ces six équations déterminent le mouvement quand on connaît les conditions initiales.

Par exemple, si S est pesant et lancé dans le vide, son centre de gravité décrit une parabole comme un point pesant libre, tandis que S est animé autour de G du mouvement décrit au N° 51: GZ décrit uniformément un cône de révolution autour d'une droite de direction fixe. En particulier, quand le corps est animé initialement d'une vitesse de rotation autour de GZ , la direction GZ reste fixe dans l'espace.

Considérons encore un gyroscope fixé par son centre de gravité G , et supposons que nous transportions le pied du gyroscope d'un mouvement quelconque, après avoir imprimé au gyroscope une rotation très rapide de ω_0 sur lui-même: quel que soit le mouvement du pied du gyroscope, GZ garde une direction fixe dans l'espace. Si nous voulons faire dévier cet axe en exerçant une traction sur un de ses points, il faudra que cette traction soit perpendiculaire, au sens de la déviation désirée, et d'autant plus forte que ω_0 est plus grand. L'expérience peut être rendue saisissante de la façon suivante: enfermons le gyroscope dans une boîte cubique, en le plaçant de façon que son axe coïncide avec une diagonale du cube, et, avant de fermer la boîte, imprimons au gyroscope une rotation rapide sur lui-même. Puis promenons cette boîte à la main. La masse de la boîte étant supposée négligeable, les forces \vec{F} que nous exerçons sur elle et les réactions du gyroscope sur la boîte se font équilibre [1^{ère} année p. 430], d'où il suit que la somme géométrique \vec{GK} des forces \vec{F} et celle des forces exercées

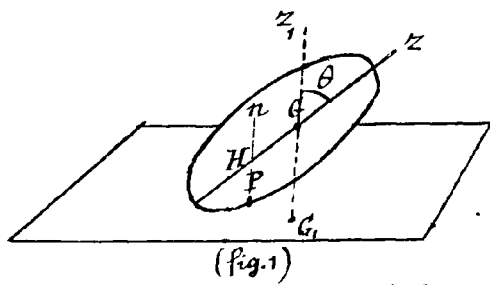
par la boîte sur le gyroscope coïncident, et la même remarque s'applique au moment résultant par rapport à G , soit GK , de ces forces. Le centre de gravité du gyroscope se meut donc comme un point libre de masse M (M masse totale du gyroscope) soumis à la force $GK + Mg$; ce mouvement est le même quel que soit ω_0 . Au contraire l'effet du couple d'axe GK sera d'autant plus faible que ω_0 sera très grande: le système oppose à un changement d'orientation une résistance qui croît indéfiniment avec ω_0 . Si ω_0 est grand, lors même que la masse du gyrostal est petite, l'effort musculaire nécessaire pour changer l'orientation de la boîte est très sensible. Nous réalisons aussi un gyrostal, c'est-à-dire un système qui a l'apparence d'un solide et qui possède, en outre de l'inertie ordinaire des solides, une inertie de rotation qui peut être considérable. — Dans la théorie gyrostatique de la lumière, on admet que la matière est composée d'éléments qui sont des gyrostals, c'est-à-dire qui opposent une résistance non seulement à la translation, mais à la rotation autour d'un de leurs points.

77. Cas où le solide S est mobile sur une surface fixe.
Lorsque S est mobile sur une surface fixe parfaitement lisse Σ , la réaction N de cette surface sur S est normale aux deux surfaces au point de contact P , mais son sens et son intensité sont inconnus. Comptons-la positivement dans un certain sens Pn de la normale. Les seconds membres des six équations du mouvement renferment linéairement N ; mais d'autre part le contact entre S et Σ se traduit par une certaine relation entre $\xi, \eta, \zeta, \theta, \varphi, \psi$. On a donc en tout sept équations pour déterminer en fonction du temps les six paramètres et N .

Appliquons immédiatement ces généralités au problème de la toupie.

78. Cas où le solide pesant S glisse sans frottement sur un plan horizontal fixe. (Problème de la toupie).

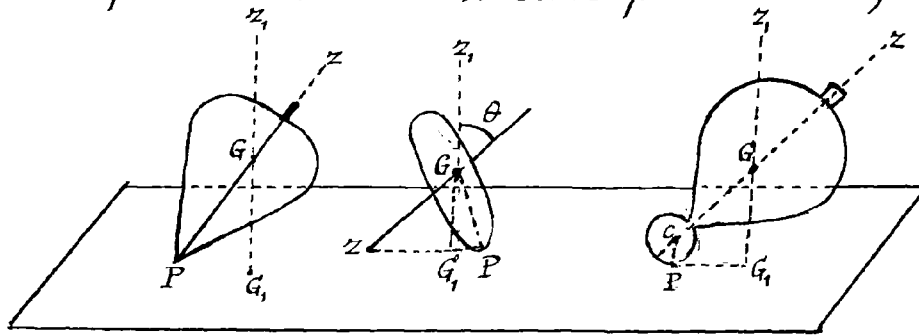
Equation de la liaison. Soit z la distance de G au plan fixe Π (prise avec le signe — suivant que G est au-dessus ou au-dessous de ce plan), et P le point de contact de S et



(fig. 1)

du plan: la normale Pn en P à S est verticale et fait l'angle θ avec l'axe Pz de S qu'elle rencontre. Or le long d'un parallèle de S , l'angle que fait la normale avec l'axe de révolution, soit θ , est constant, ainsi

que la distance $GG_1 = \zeta$ du point G au plan tangent en un point P du parallèle; quand la parallèle varie, θ et ζ sont donc fonctions d'un même paramètre; autrement dit,



Π
(fig. 2)

ζ est une fonction de θ , qui dépend de la forme de la méridienne, soit $\zeta = \lambda(\theta)$. Nous supposons le sens Gz choisi de façon que G s'abaisse quand θ croît.

Par exemple, si le corps est une toupie terminée par une pointe P , on a: $\zeta = l \cos \theta$, l désignant la distance PG (et Pz ayant le sens PG).

Si S est une pièce de monnaie de rayon R , touchant Π par sa tranche, on a: $\zeta = R \sin \theta$. Si S est une toupie dont l'axe se termine par une petite sphère S (pointe mousse), on a: R désignant le rayon de S et l la distance de G au centre C de S : $\zeta = l \cos \theta + R$.

79- Mise en équation du mouvement. - Cherchons cinq équations (et si possible cinq intégrales premières) indépendantes de la réaction de Π . Soit $O\xi\eta\zeta$ les axes fixes, le plan Π étant le plan $\zeta = 0$, et l'axe des ζ la verticale ascendante. Le théorème du centre de gravité projeté sur le plan Π donne:

$$(1) \quad \zeta' = \zeta'_0, \quad \eta' = \eta'_0.$$

Le théorème des moments cinétiques dans le mouvement autour de G donne, puisque toutes les forces

extérieures rencontrent Gz , [$N \equiv 0$],

$$(2) \quad C \frac{d\rho}{dt} = 0, \text{ ou } \rho = \rho_0;$$

et puisque toutes les forces extérieures sont parallèles à Gz ,

$$(3) \quad A\omega_1 \cos \tau + C\rho_0 \cos \theta = C^{te} \quad (\tau = z, \vec{G}\omega_1)$$

Enfin le théorème des forces-vives dans le mouvement rapporté aux axes fixes $O\xi\eta\zeta$ donne [théorème de Koenig]:

$$M(\zeta^2 + \eta^2 + \zeta'^2) + A\omega_1^2 + C\rho^2 = -2Mg\zeta + C^{te},$$

c'est-à-dire:

$$(4) \quad M\zeta'^2 + A\omega_1^2 = -2Mg\zeta + C^{te} = -2Mg\lambda(\theta) + C^{te}$$

égalité qui entraîne

$$(5) \quad A\omega_1^2 - A\gamma^2 - M\zeta_0'^2 \leq 2Mg[\lambda(\theta_0) - \lambda(\theta)],$$

où $\gamma = \omega_1^0$,

D'autre part, l'équation (3) entraîne (N° 56):

$$(6) \quad \cos \theta_0 - \cos \theta \leq \frac{A(\omega_1 + \gamma)}{C\rho_0}, \quad (\rho_0 = |\rho_0|).$$

Ces égalités et inégalités permettent de discuter le mouvement dans le cas où $|\rho_0|$ est très grand et ω_1^0 fini.

80. Cas où la rotation initiale est très grande et a lieu sensiblement autour de Gz .

Posons $\cos \theta = u$, et soit $\zeta = \mu(u)$, $\mu' = \frac{d\mu}{du}$, ($\mu' > 0$)
Représentons par μ la plus grande valeur de μ entre θ_0 et θ ; l'inégalité (5) entraîne:

$$A\omega_1^2 - A\gamma^2 - M\zeta_0'^2 \leq 0 \text{ si } u_0 - u \leq 0$$

et

$$A\omega_1^2 - A\gamma^2 - M\zeta_0'^2 \leq 2Mg\mu_1(u_0 - u), \text{ si } u_0 - u > 0.$$

D'où, en comparant avec (6):

$$A\omega_1^2 - A\gamma^2 - M\zeta_0'^2 \leq 2Mg\mu_1 \frac{A(\omega_1 + \gamma)}{C\rho_0},$$

ou bien, en posant: $\frac{Mg\mu_1}{C\rho_0} = c$:

$$\omega_1^2 - 2c\omega_1 - 2c\gamma - \gamma^2 - \frac{M}{A}\zeta_0'^2 \leq 0,$$

et comme $\zeta_0' = \left(\frac{d\mu}{du} u'\right)_0$ est inférieur en module à $|\mu'(u_0)|\omega_1^0$:

$$\omega_1^2 - 2c\omega_1 - 2c\gamma - \gamma^2 - \frac{M}{A} \mu_0^2 \gamma^2 \ll 0.$$

On tire de là aussitôt, comme au N° 56

$$\omega_1 < c + \sqrt{(c+\gamma)^2 + \frac{M}{A} \mu_0^2 \gamma^2} \equiv \Omega_1, \quad (c = \frac{Mg\mu_1}{C\rho_0}).$$

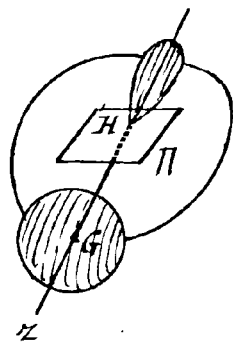
Ceci posé, donnons-nous une quantité positive η aussi petite que nous voulons, et soit μ_1 le maximum de $\mu'(u)$ pour u compris entre u_0 et $u_0 + \eta$, (μ_1 diffère très peu de μ_0'). Il est évident que ($\omega_1 = \gamma$ étant donné), la quantité $\frac{A(\Omega_1 + \gamma)}{C|\rho_0|}$ est inférieure à η dès que $|\rho_0|$ dépasse une certaine limite (facile d'ailleurs à calculer). Pour les grandes valeurs de $|\rho_0|$, u reste donc compris entre $u_0 \pm \eta$; $\frac{\omega_1}{\rho_0}$ et $\frac{A\omega_1}{C\rho_0}$ restent très petits. Si \overline{GK} représente le moment cinétique de S dans son mouvement autour de G , on peut confondre sensiblement les droites \overline{GK} et Gz .

D'autre part, la vitesse du point K est équipollente au moment \overline{GK} par rapport à G des forces extérieures, c'est-à-dire ici de la réaction N du plan Π ; \overline{GK} est perpendiculaire au plan zGz , et égal en valeur absolue à $N\delta$, si δ désigne la distance des deux droites parallèles Π et Gz . Mais δ est constant le long d'un parallèle, et par suite reste sensiblement constant avec θ ; de plus, pendant un temps fini quelconque t , ζ reste sensiblement constant, la valeur moyenne de ζ'' est nulle, et par suite la valeur moyenne de N reste égale à Mg ; la vitesse du point K est donc perpendiculaire au plan zGz et égale sensiblement à la constante $Mg\delta$. — Si on prend sur la demi-droite Gz un point P à la distance l de G , ce point P semblera décrire lentement autour de Gz , un cercle horizontal ayant son centre sur Gz , avec une vitesse uniforme très petite égale à $\frac{Mg\delta}{C\rho_0}$; comme N a le sens de Gz , (et non le sens inverse), cette vitesse (N° 56) sera orientée de Gz , dans le sens inverse de la rotation du solide autour de la demi-droite \overline{GH} (H point de rencontre de Gz et de Π , fig. 1). Convenons de donner à δ le signe + ou le signe - suivant que \overline{GH} a le sens Gz ou le sens contraire; ψ est égal dans tous les cas à $-\frac{Mg\delta}{C\rho_0 \sin \theta}$. En définitive, \overline{Gz} semble décrire autour de Gz , $C\rho_0 \sin \theta$ un cône de révolution, d'un mouvement uniforme et très

lent, dans le sens inverse de la rotation du solide autour de GH⁽¹⁾

Par exemple, dans le cas de la figure 1, Gz est dirigé vers le haut, GH vers le bas : le sens de la précession (rotation de Gz autour de Gz_1) est celui de la rotation de S autour du demi-axe mené vers le haut. Il en est de même dans le cas de la figure (2), pour la toupie à pointe aiguë ou mousse.

Pour la pièce de monnaie, Gz est dirigé vers le bas, GH vers le haut ; le sens de la précession est le sens de la rotation de S autour du demi-axe Gz mené vers le bas. De même, si la toupie est construite de façon que G soit au-dessous du plan Π , (fig. 3), la précession a lieu dans le même sens que la rotation de S autour du demi-axe Gz mené vers le bas.



En définitive, G est animé sensiblement d'un mouvement rectiligne et uniforme parallèle au plan Π et l'axe Gz de S décrit lentement un cône de révolution autour de la verticale Gz , tandis que le corps tourne rapidement sur lui-même.

Si la vitesse horizontale de G est nulle à l'instant initial, G reste sensiblement immobile, et le point de contact P de S et du plan Π décrit un parallèle sur la surface de S , et un cercle de centre G , sur le plan Π ; quand S est une toupie pointue, P se confond avec la pointe de la toupie.

80. - Étude analytique du mouvement correspondant à des conditions initiales quelconques.

Les équations (3) et (4) peuvent s'écrire (N° 64) :

⁽¹⁾ Il semble naturel d'appliquer directement à l'exemple de la toupie la théorie du phénomène gyroscopique développée aux N° 61-62, et on arrive ainsi aux mêmes conclusions. Mais pour que cette application fût légitime, il faudrait être certain [N° 70] que la réaction N reste inférieure à une limite fixe et ne subit pas de variations sensibles dans une durée $\frac{2\pi A}{C}$. Or nous allons voir précisément que N subit des variations finies^C et périodiques de période $\frac{2\pi A}{C|p_0|}$.

(7) $\Psi' \sin^2 \theta = \beta - b r_0 \cos \theta$, ($b = \frac{c}{A}$, β Cte arbitraire);
 et
 (8) $[1 + c \lambda^2(\theta)] \theta'^2 + \Psi^2 \sin^2 \theta = \alpha - e \lambda(\theta)$, ($c = \frac{M}{A}$, $e = \frac{2Mg}{A}$, α Cte arbitraire)
 où $\lambda(\theta) = \zeta$.

On a de plus :

$$(9) \quad r_0 = r = \Psi' \cos \theta + \Psi.$$

Ces relations donnent θ' , Ψ' , Ψ en θ , par suite t , φ , φ en θ par trois quadratures.

Pour former l'équation entre θ' et θ , éliminons Ψ' entre (7) et (8). Il vient :

$$\theta'^2 \sin^2 \theta [1 + c \lambda^2] = [\alpha - e \lambda(\theta)] \sin^2 \theta - (\beta - b r_0 \cos \theta)^2,$$

ou bien, en posant $\cos \theta = u$, $\lambda(\theta) = \mu(u)$, $\mu' = \frac{d\mu}{du}$:

$$(10) \quad u^2 (1 + c \mu^2) = [\alpha - e \mu(u)] (1 - u^2) - (\beta - b r_0 u)^2,$$

équation entièrement analogue à l'éq. (5) du N° 64 et qui prête à une discussion toute semblable.

Bornons-nous pour plus de clarté, au cas d'une toupie à pointe mousse ou aiguisée ; on a, l'étant le rayon de la sphère qui sert de pointe ^{mousse} :

$$\zeta = l_1 + l \cos \theta = l_1 + l u.$$

L'équation (10) devient

$$(11) \quad u^2 (1 + c_1 - c_1 u^2) = (\alpha_1 - a u) (1 - u^2) - (\beta - b r_0 u)^2 \equiv f(u),$$

en posant

$$c_1 = c l^2 = \frac{M l^2}{A}, \quad a = e l = \frac{2 M g l}{A}, \quad \alpha_1 = \alpha - a l_1.$$

L'expression $f(u)$ coïncide avec celle du N° 64, et toute la discussion peut se répéter identiquement.

- Cas particuliers. - 1° Si $\Psi' = \varphi'_0 = 0$, Gz se meut parallèlement à un plan vertical fixe ; le mouvement de S autour de G est une rotation autour d'une droite horizontale fixe Gy_1 .

2° Si $\sin \theta$ et θ' sont nuls simultanément à l'instant, $\sin \theta$ est identiquement nul, l'axe Gz reste vertical, (toupie dormante). La toupie dormante est stable quand G est au-dessous de Π , ($\theta = \pi$). Quand G est au-dessus de Π , ($\theta = 0$), elle

n'est stable que si $b^2 r_0^2 > 2\alpha$.

3°. Si les conditions initiales sont telles que $\alpha_1 = \alpha$ et $\beta = b r_0$ avec $u_0 \neq 1$, θ tend asymptotiquement vers zéro et GZ vers $G'Z$, quand t croît indéfiniment.

Cas général. — Ces cas particuliers écartés, soit Σ une sphère de centre G et de rayon 1, et Γ la courbe tracée sur Σ par GZ . Cette courbe est toujours comprise entre deux parallèles de la sphère, qu'elle atteint alternativement en m_1, m_2, \dots . Les plans $Z_1 O m_1, Z_2 O m_2, \dots$ etc sont plans de symétrie de Γ . Elle est tangente en m_1, m_2, \dots aux deux parallèles, sauf dans le cas particulier où Ψ' s'annule en même temps que θ sur le parallèle supérieur: Γ atteint alors normalement ce parallèle et y présente un point de rebroussement. Si $\beta = \pm b r_0$, un des parallèles se réduit à un des pôles de la sphère, et le plan normale en ce pôle à Γ est un plan de symétrie de Γ .

Enfin, pour une valeur arbitraire de θ_0 et de r_0 , on peut disposer de Ψ' de façon que les deux parallèles se confondent et que GZ décrive rigoureusement un cône de révolution autour de GZ . Deux valeurs de Ψ' répondent à cette condition et sont données par la même équation qu'au N° 65, p. 100. Pour $|r_0|$ très grand, une et une seule de ces deux valeurs est très petite.

Le cas particulier 3° écarté, la fonction $\theta(t)$ est toujours périodique. Soit $2T$ sa période: Ψ' et Ψ sont des fonctions de t admettant la même période. Pendant une période $2T$, Ψ augmente d'une certaine constante $2\Phi'$. Lorsque Ψ' change de signe, $2\Phi'$ a toujours le signe de r_0 . Les seules formes de courbes Γ sont les formes I, II, III de la fig. (1) de la page 97.

81. Cas où $|r_0|$ est très grand — Prenons comme instant $t=0$ un des instants où $u = u_2$; θ_0 est nul et l'expression de $f(u)$ en u_0, Ψ_0, r_0 est identiquement la même qu'au N° 66 (p. 103). Gardons les mêmes notations; les évaluations de $u_2 - u_1 = 2\varepsilon$, de u_3 subsistent, et V désignant toujours $u - \frac{u_1 + u_2}{2}$, l'équation (11) s'écrit:

$$V^2(1 + C_1 - C_1 u^2) = b^2 r_0^2 (\varepsilon^2 - V^2) (1 + \eta),$$

ou si on veut:

$$(12) \quad V''(1 + C_1 \sin^2 \theta_0) = b^2 r_0^2 (\varepsilon^2 - V^2) (1 + \eta_1)$$

De même l'équation (11) dérivée donne :

$$V''(1 + C_1 - C_1 \omega^2) - C_1 u V' = -b^2 r_0^2 V (1 + \eta_1) + \eta_2,$$

c'est-à-dire :

$$(13) \quad V''(1 + C_1 \sin^2 \theta_0) = -b^2 r_0^2 V,$$

les termes non écrits étant négligeables. Si on pose :

$t = t_1 \sqrt{1 + C_1 \sin^2 \theta_0}$, les équations (12) et (13) sont celles du N° 66. Il vient approximativement :

$$u = \cos \theta = \frac{u_1 + u_2}{2} + \varepsilon \cos b r_0 t_1 = u_0 - \varepsilon (1 - \cos b r_0 t_1),$$

$$u' = \frac{-\varepsilon b r_0}{\sqrt{1 + C_1 \sin^2 \theta_0}} \sin b r_0 t_1, \quad u'' = \frac{-\varepsilon b^2 r_0^2}{1 + C_1 \sin^2 \theta_0} \cos b r_0 t_1;$$

la période de la nutation est $2\tau = \frac{2\pi \sqrt{1 + C_1 \sin^2 \theta_0}}{b |r_0|}$.

Soit d'autre part, N la réaction du plan π sur la toupie; on a :

$$N = M(g - lu'') = M \left(g + \frac{\varepsilon l b^2 r_0^2}{1 + C_1 \sin^2 \theta_0} \cos b r_0 t_1 \right).$$

La réaction oscille donc pendant chaque période entre $M \left(g \pm \frac{\varepsilon l b^2 r_0^2}{1 + C_1 \sin^2 \theta_0} \right)$. Le moment de N par rapport à G est perpendiculaire au plan z, Gz et égal en valeur absolue à $l \sin \theta N$. Soit GK le moment cinétique de S autour de G : la vitesse de K par rapport aux axes Gx, y, z , a pour valeur $l \sin \theta N$; la vitesse de sa projection sur le plan x, Gy , est lN (très sensiblement): en une période 2τ , l'angle dont tourne le plan z, GK autour de Gz , est égal en grandeur à

$$\frac{l}{C |r_0|} \int_0^{2\tau} N dt = \frac{M l \sqrt{1 + C_1 \sin^2 \theta_0}}{C |r_0|} \int_0^{\frac{2\pi}{b r_0}} \left(g + \frac{\varepsilon l b^2 r_0^2}{1 + C_1 \sin^2 \theta_0} \cos b r_0 t_1 \right) dt,$$

$$= \frac{2\pi M g l \sqrt{1 + C_1 \sin^2 \theta_0}}{C b r_0^2}.$$

La vitesse moyenne ψ' de la précession est égale en grandeur et signe à $\frac{Mgl}{C r_0}$, comme si N restait constamment égal à sa valeur moyenne Mg .

Dans le cas où $\theta'_0 = \psi'_0 = 0$, on a:

$$2\varepsilon = \frac{a \sin^2 \theta_0}{b^2 r_0^2}, \quad \frac{d\psi}{dt_1} = \frac{a}{2br_0} (1 - \cos br_0 t_1),$$

$$N = Mg \left[1 + \frac{Ml^2}{A} \frac{\sin^2 \theta_0}{1 + \frac{Ml^2}{A} \sin^2 \theta_0} \cos br_0 t_1 \right].$$

Comme $Ml^2 < A$, cette dernière quantité est toujours positive.

Mais si θ'_0 étant nul, ψ'_0 a une valeur finie, N oscille entre des valeurs positives et négatives: et comme N ne peut être négatif, la toupie sautille au dessus du plan.

82 - Exemple numérique. - Supposons, comme au n° 67 :

$$b = \frac{c}{A} = \frac{3}{2}, \quad \frac{A}{Ml^2} = 2, \quad l = 10, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{4},$$

(en C. G. S)

et $r_0 = 2\pi \times 100$, $\theta'_0 = 0$, $\psi'_0 = 0$.

L'amplitude de la nutation est de $18''$; la période 2τ ou $\frac{2\pi}{br_0} \sqrt{1 + c_1 \sin^2 \theta_0}$ est égale à $\frac{2\pi}{\frac{3}{2} \times 2\pi \times 100} \times \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{400}$

de seconde. En une seconde, ψ s'accroît d'environ 3° .

Enfin en un $\frac{3}{400}$ de seconde, N oscille entre les deux valeurs

$$Mg \left[1 \pm \frac{Ml^2}{A} \frac{\sin^2 \theta_0}{1 + \frac{Ml^2}{A} \sin^2 \theta_0} \right] = Mg \left(1 \pm \frac{1}{5} \right),$$

c'est-à-dire entre les $\frac{6}{5}$ et les $\frac{4}{5}$ du poids du corps.

Si, les autres conditions initiales restant les mêmes, ψ'_0 était égal à -2π , ψ en $\frac{3}{400}$ de seconde subirait deux variations de sens contraire de l'ordre du demi degré dont la résultante serait un accroissement de $\frac{9}{400}$ de degré; N oscillerait entre $25Mg$ et $-23Mg$, et comme N ne peut être négatif, la toupie sautillerait sur le plan.

Mouvement d'une sphère homogène glissant
avec frottement sur un plan horizontal fixe (bille de billard).

83. - Equations du mouvement. - Dans la discussion précédente, nous avons supposé que le plan Π et S étaient parfaitement lisses. Supposons maintenant que les deux corps frottent l'un sur l'autre, et étudions le mouvement dans le cas où le solide S est une sphère homogène, ou formée de couches concentriques homogènes. Je représenterai par l le rayon de la sphère, par MK^2 son moment d'inertie autour d'un quelconque de ses diamètres; K^2 est égal à $\frac{2l^2}{3}$ si la sphère est une sphère homogène creuse, et inférieure à $\frac{2l^2}{3}$ dans les autres cas⁽¹⁾.

Soit $oxyz$ les axes fixes, xoy le plan horizontal fixe, oz la verticale ascendante, (ξ, η, ζ) les coordonnées du point G , (p, q, r) les projections sur les axes fixes de la rotation instantanée $\bar{\omega}$ de S . Enfin, soit R_x, R_y, R_z les projections sur les mêmes axes de la réaction \bar{R} de Π sur S . Le moment cinétique de S autour de G est $MK^2 \bar{\omega}$.

Les équations du mouvement du centre de gravité donnent :

$$(1) \quad M\ddot{\xi} = R_x, \quad M\ddot{\eta} = R_y, \quad 0 = M\ddot{\zeta} = R_z - Mg, \quad (\zeta = l).$$

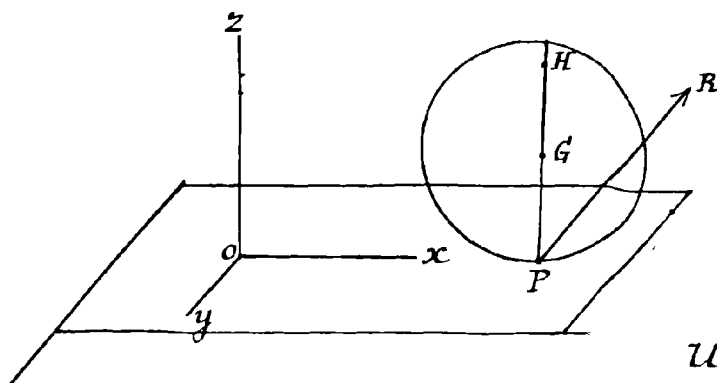
Le théorème des moments cinétiques autour de G exprime que la dérivée géométrique $\frac{d}{dt} MK^2 \bar{\omega}$ est équipolente au moment par rapport à G des forces extérieures. Or la pesanteur a un moment nul par rapport à G ; quant au moment de R par rapport à G , il a pour projections sur les axes

$$lR_y, \quad -lR_x, \quad 0;$$

car rapportées aux axes Gx, y, z (parallèles aux axes fixes) les coordonnées de G sont $0, 0, -l$. D'où les équations

$$(2) \quad MK^2 \frac{dp}{dt} = lR_y, \quad MK^2 \frac{dq}{dt} = -lR_x, \quad MK^2 \frac{dr}{dt} = 0.$$

⁽¹⁾ En effet, la sphère étant formée de couches concentriques homogènes, et $Gxyz$ étant un trièdre trirectangle quelconque de centre G , on a:
 $\sum mx^2 = \sum my^2 = \sum mz^2 = \frac{\sum m(x^2 + y^2 + z^2)}{3} \leq Ml^2$; or
 $MK^2 = \sum m(x^2 + y^2) = 2\sum mx^2 \leq \frac{2Ml^2}{3}$.



Soit u et v les composantes suivant ox et oy de la vitesse de glissement W (vitesse du point le plus bas P de la sphère à l'instant t).

Les formules

$$u = \xi' + qz_1 - py_1, \quad v = \eta' + px_1 - pz_1,$$

où on fait $x_1 = y_1 = 0$, $z_1 = -l$ donnent ici :

$$(3) \quad u = \xi' - ql, \quad v = \eta' + pl,$$

Des équations (1), (2), (3) on déduit aussitôt :

$$(4) \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{M} R_x \left[1 + \frac{l^2}{R^2} \right], \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{M} R_y \left[1 + \frac{l^2}{R^2} \right].$$

§4. Discussion. - 1^{er} Cas. - La vitesse initiale de glissement n'est pas nulle.

Il est loisible de prendre comme axe ox la direction et le sens de cette vitesse initiale ; on a alors : $u_0 > 0$, $v_0 = 0$

Enons compte maintenant des lois du frottement de glissement. On a :

$$R_x = -fN \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad R_y = -fN \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (N = Mg)$$

d'où

$$\frac{R_y}{R_x} = \frac{v}{u},$$

et par suite, d'après (4) :

$$\frac{dv}{du} = \frac{v}{u}, \quad \text{ou} \quad \frac{dV}{V} = \frac{du}{u},$$

c'est-à-dire $V = cu$ (c C^{te} arbitraire).

La vitesse de glissement a donc une direction constante tant qu'elle ne s'annule pas ; ici elle reste parallèle à ox ; v est constamment nul.⁽¹⁾

Les équations (1), (2) et (3) deviennent alors :

(1) Remarquons que cette conclusion subsiste si on sait seulement que la force de frottement est directement opposée à la vitesse de glissement, sans rien admettre sur l'intensité de cette force.

$$(5) \quad \begin{cases} \zeta'' = -fg, & \eta'' = 0 \\ K^2 \frac{dp}{dt} = 0, & K^2 \frac{dq}{dt} = -fg, & K^2 \frac{dr}{dt} = 0 \\ \frac{du}{dt} = -fg \left(1 + \frac{l^2}{K^2}\right), & \frac{dV}{dt} = 0 \end{cases}$$

L'accélération du centre de gravité est donc constante en grandeur et de sens opposé à Ox ; le point G , de même que le point de contact P , décrit un arc de parabole dont l'axe est parallèle à Ox et qui tourne sa convexité vers Ox , parabole qui se réduit à une droite si la vitesse initiale de G est parallèle à Ox . D'autre part, p et r gardent une valeur constante, et q décroît proportionnellement au temps. C'est le mouvement de la sphère tant que la vitesse de glissement, c'est-à-dire tant que u , ne s'annule pas: or u décroît proportionnellement au temps et s'annule à l'instant $t_1 = \frac{u_0}{fg \left(1 + \frac{l^2}{K^2}\right)}$. Nous sommes ramenés ainsi à discuter le mouvement dans le cas où la vitesse de glissement est nul à l'instant considéré.

2^e Cas. — La vitesse de glissement est nulle à l'instant initial.

D'après ce qui précède, la vitesse de glissement $\sqrt{u^2 + v^2}$, quand elle n'est pas nulle, ne peut que décroître en valeur absolue. Il suit de là que la vitesse de glissement, si elle est nulle à l'instant $t=0$, ne peut que rester nulle: car si, à l'instant $t > 0$, on a $W = \alpha > 0$, on a sûrement, pour $t=0$, $W > \alpha$.

Donc la sphère roulera et pivotera sans glisser sur le plan fixe. Vérifions que l'inégalité $F \leq fN$ (où F et N sont les composantes horizontale et verticale de R) est bien vérifiée⁽¹⁾.

Calculons R_x et R_y dans l'hypothèse du glissement nul. Les conditions $\frac{du}{dt} = 0$, $\frac{dV}{dt} = 0$ donnent [équations 4]: $R_x = 0$, $R_y = 0$; F est donc nul et inférieur par conséquent à fN . Il suit de là que ζ , η , p , q sont constants [ainsi que ζ et r].

Ceci nous montre que, si la sphère, à un instant t , roule et pivote sans glisser sur un plan horizontal même parfaitement lisse, elle roule et pivote sans glisser indéfiniment; son centre de gravité G décrit une droite d'un

⁽¹⁾ Je confonds, ici encore, f et f_0 .

mouvement uniforme, et elle tourne uniformément autour d'un axe GW fixe dans le corps et fixe en direction dans l'espace. Quand le plan est rugueux, le mouvement de la sphère reste le même si grand que soit le coefficient de frottement.

83- Remarques. - On peut remarquer, comme dans le cas du cerceau, que les accélérations de la sphère subissent une brusque discontinuité à l'instant t_1 où l'on passe de la période de glissement à la période de roulement et de pivotement purs: ξ'' , par exemple, saute de la valeur $-fg$ à la valeur zéro. Le centre de gravité abandonne la parabole qu'il décrivait sur une tangente à cette parabole.

Comme dans le cas du cerceau, la perte totale de force vive du frottement est indépendante du coefficient f , mais le temps nécessaire pour que le glissement s'évanouisse est d'autant plus grand que f est plus petit. Il suffit, pour s'en rendre compte, de déduire des équations (1) et (2) les combinaisons:

$$\xi'' + \frac{K^2}{l} \frac{dq}{dt} = 0, \quad \eta'' - \frac{K^2}{l} \frac{dp}{dt} = 0,$$

qui donnent

$$(6) \quad \xi' + \frac{K^2}{l} q = a, \quad \eta' - \frac{K^2}{l} p = b.$$

Ces égalités (6) sont vraies pendant toute la durée du mouvement, en particulier à l'instant t_1 ; à cet instant, on a aussi:

$$(7) \quad \xi' = ql, \quad \eta' = -pl;$$

d'où on déduit:

$$\xi' = ql = \frac{a}{1 + \frac{K^2}{l^2}}, \quad \eta' = -pl = \frac{b}{1 + \frac{K^2}{l^2}} \quad (\text{pour } t > t_1).$$

La force vive finale [force vive à l'instant t_1 et au-delà] ne dépend donc que des constantes initiales

$$a = \xi'_0 + \frac{K^2}{l} q_0, \quad b = \eta'_0 - \frac{K^2}{l} p_0, \quad \text{et nullement de } f.$$

Les égalités (6) s'interprètent immédiatement de la manière suivante: prenons sur la verticale ascendante de G , à partir de G , une longueur GH égale à $\frac{K^2}{l}$: la vitesse

du point H de la sphère, à chaque instant t , est constant en grandeur direction et sens. Pour que le centre de la sphère s'arrête au bout d'un temps fini t_1 , il faut et il suffit que cette vitesse soit nulle (c'est-à-dire que a et b soient nuls); la sphère tourne alors uniformément autour d'une verticale fixe. Pour qu'elle reste immobile, au bout d'un temps fini, il faut qu'on ait à la fois: $a=0$, $b=0$, $\rho_0=0$. Quand la sphère est une sphère creuse homogène, le point H est aux $\frac{2}{3}$ (à partir de G) du rayon vertical ascendant de S .

Considérons, en particulier, le cas où, pour $t=0$, la vitesse du centre G de la sphère est perpendiculaire à l'axe instantané de rotation: c'est encore, si on veut, le cas où la vitesse de glissement \vec{W} et la vitesse de G sont parallèles. Avec les axes que nous avons choisis, on a, dans ce cas, $\eta'=0$, $\rho_0=0$. Le point G et le point de contact P de la sphère et du plan décrivent respectivement deux parallèles à Ox : supposons $q_0 < 0$, et $\xi_0 > 0$ mais $\xi_0 < -\frac{K^2}{l} q_0$; la sphère s'éloigne d'abord du point O parallèlement à Ox , puis revient vers le point O , car pour $t \gg t_1$, $\xi = \frac{\xi_0 + \frac{K^2}{l} q_0}{1 + \frac{K^2}{l^2}}$ est négatif [effet de retro au billard].

Si le coefficient de frottement est considérable (par exemple, si le plan horizontal est garni de petites pointes très fines et souples mais très serrées), le glissement de la sphère ne se produit pas, ou, s'il existe, est arrêté presque instantanément; et on réalise sensiblement ainsi une liaison non holonome: la sphère est assujettie à rouler et pivoter sans glisser sur un plan fixe.

Quand, au lieu d'être horizontal, le plan fixe est incliné, on peut encore intégrer les équations du problème et discuter complètement le mouvement, d'après les valeurs de l'inclinaison et du coefficient f .

§4 - Mouvement d'un corps de révolution sur un plan dépoli.

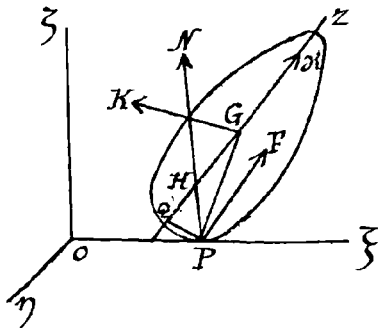
Lorsque le corps de révolution S n'est pas une sphère homogène, l'étude de son mouvement sur un plan horizontal fixe dépoli Π est un problème difficile, dont nous ne dirons que quelques mots.

Je suppose que le point de contact P de S et du plan

est notablement éloigné de l'axe Gz : ce sera le cas d'un œuf, (à moins que Gz ne soit sensiblement vertical), d'une pièce de monnaie; d'une toupie à pointe très mousse, mais non d'une toupie terminée par une pointe. J'appelle δ la distance PQ de P à l'axe Gz .

Je suppose de plus que S , à l'instant initial $t=0$, est animé d'une grande vitesse de rotation ω^0 autour d'un axe sensiblement confondu avec Gz , et que la vitesse horizontale, soit V_1 , de G est négligeable devant la vitesse \bar{W}_1 imprimée par la rotation ω^0 au point P de S en contact avec Π ; la vitesse \bar{W} de P (qui est horizontale) se confond donc sensiblement avec \bar{W}_1 . Le moment cinétique de S autour de G , soit GK , se confond sensiblement avec l'axe Gz pour $t=0$, et il en sera de même tant que $A\omega$ sera petit devant $C|\omega^0|$; le sens de la vitesse de glissement \bar{W} se confondra avec celui de la vitesse \bar{W}_1 engendrée par la rotation ω^0 autour de Gz , tant que (par accroît) la vitesse horizontale V_1 de G sera inférieure à $|\omega^0|\delta$ et que sa composante normale à \bar{W}_1 sera négligeable devant $|\omega^0|\delta$. Dans cet intervalle de temps t_1 , la force de frottement \bar{F} a sensiblement le sens contraire de \bar{W}_1 .

Soit $O\xi\eta\zeta$ le trièdre fixe, Oz étant la verticale ascendante, et $\zeta=0$ le plan Π .



Plaçons-nous, pour fixer les idées, dans l'hypothèse où la rotation autour de la demi-droite Gz menée vers le haut est dextrosum, et supposons que le plan vertical qui contient Gz et le point de contact P à l'instant t soit le plan du tableau $\xi O \zeta$. De plus, choisissons le sens Oz de façon que l'angle (Oz, Gz) soit aigu.

Dans la rotation dextrosum du solide autour de Gz , la vitesse du point P (perpendiculaire au plan $\xi O \zeta$) est dirigée en avant du tableau, (c'est-à-dire dans le sens $o\eta$), et la force de frottement \bar{F} est de sens contraire à $o\eta$. Le moment, par rapport à G , de la force \bar{F} est un vecteur GK situé dans le plan PGz et perpendiculaire à GP , et il est situé de l'autre côté de Gz par rapport à P si QG a le sens ascendant (cas de la figure). Il est dirigé selon Gz (dans le sens descendant) si G coïncide avec Q ; il est du même côté de Gz que P si QG a le sens descendant. D'autre part, le

moment de R_3 par rapport à G est un vecteur GI perpendiculaire au plan $P'GZ$. Or la dérivée

géométrique $\frac{d\vec{GK}}{dt}$ est égale à $\vec{GK} + \vec{GI}$; elle a donc une composante normale à GZ et située dans le plan $P'GZ$, laquelle est dirigée vers le haut dans le cas de la figure: La droite GK se redresse pendant tout l'intervalle de temps t_1 , si G est constamment au-dessous de Q .

Quant au centre de gravité G , sa projection horizontale G' a comme accélération $\frac{F}{C}$. Si on suppose que la vitesse initiale de G est nulle, G ne reste pas immobile, mais sort du plan initial $\xi O \zeta$ perpendiculairement à ce plan et dans le sens inverse de $o\eta$.

D'autre part, pendant l'intervalle de temps t_1 , GK et GZ font un très petit angle, inférieur à η par exemple; si l'angle dont GK se redresse entre $t=0$ et $t=t_1$ est supérieur à 2η , l'axe GZ se redresse lui-même. Mais la vitesse angulaire de redressement de GK est au plus égale $\frac{FR_3}{C|P|}$; pour prouver que GZ se redresse, il faudrait donc établir que t_1 est de l'ordre de $|P_0|$. La chose serait certaine si nous étions dans un cas où la théorie gyroscopique s'applique [N° 61]. Mais il n'en est rien: même quand f est nul, R_3 subit, nous le savons, des variations considérables pendant chaque intervalle de temps $\frac{2\pi A}{C}$. Si on passe toutefois sur cette grave objection, le raisonnement précédent montre que GZ se redresse⁽¹⁾ dans le cas où G est au-dessous de Q .

Si S tourne de droite à gauche autour du demi-axe GZ , il est évident, par raison de symétrie, que l'axe GZ se relève encore, mais G sort du plan $\xi O \zeta$ dans le sens $o\eta$. Pour retrouver ces conclusions, il suffit d'ailleurs de remarquer que F change alors de sens ainsi que GK . L'expérience de l'œuf dur lancé sur une assiette vérifie le redressement de l'axe.

85. Gyroscope Fleurié.

Considérons encore une toupie dont l'axe se termine par une petite sphère G , cette sphère étant intérieure à une autre sphère creuse⁽²⁾ fixe (crapaudine) de rayon à peine plus

(1) D'après le raisonnement, l'axe GZ mené par le haut s'incline au contraire si Q est au-dessus de G . Il fait un angle constant avec la verticale de Q et G coïncident-
(pièce de monnaie).

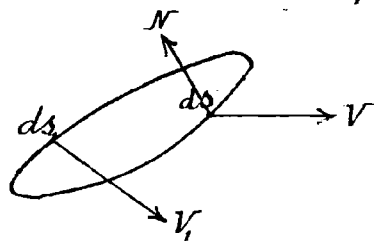
(2) Cette sphère présente une large ouverture pour laisser passer et se mouvoir l'axe de la toupie.

grand. Le centre O de σ est sensiblement fixe et si les deux sphères étaient parfaitement lisses, leurs réactions passeraient par O , la théorie du N.º 57 s'appliquerait: la toupie étant animée d'une rotation rapide autour de GZ , GZ décrirait un cône de révolution autour de la verticale. S'il y a frottement, l'étude du mouvement constitue un problème plus difficile encore que dans le cas du plan fixe. C'est à un appareil de ce genre qu'est assimilable le gyroscope de l'amiral Fleuryais, qui a pour but de donner la direction de la verticale en mer. La toupie est disposée de façon que son centre de gravité soit au-dessous de la crapaudine. L'expérience montre que l'axe ascendant GZ tend vers la verticale, c'est-à-dire que G tend à se placer sur la verticale descendante de O . Il faut toutefois que l'appareil soit bien lancé, c'est-à-dire que sa rotation initiale ait lieu très sensiblement autour de GZ ; si cette condition n'est pas remplie, les remarques faites au N.º 67 sur les réactions de l'appui font comprendre que l'appareil subirait des perturbations telles qu'aucun phénomène précis ne se dégagerait.

Dérivation des projectiles.

86. Soit de la résistance de l'air.

Considérons un solide mobile dans l'air, et soit ds un élément de la surface du solide, V la vitesse relative (par rapport à l'air) de cet élément du solide⁽¹⁾



L'élément ds éprouve de la part de l'air une résistance $f ds$, qu'on peut décomposer en une force normale à l'élément ds , soit $\bar{p}_n ds$, dite résistance normale, et une force tangente

⁽¹⁾ Si l'air est immobile, V est la vitesse de l'élément ds ; si le solide et l'air sont mobiles, V est la différence géométrique entre la vitesse de l'élément solide et la vitesse de l'élément d'air en contact avec lui.

à ds , soit $\vec{F} ds$, dite force de frottement. La première, de beaucoup la plus importante, n'existe que pour les éléments ds qui frappent l'air, c'est-à-dire tels que la vitesse V soit dirigée en dehors du solide (au voisinage de ds); dans le cas de la figure, elle n'existerait pas pour l'élément ds .

On admet que la résistance normale $\vec{p}_n ds$ est dirigée en sens inverse de la composante normale V_n de V et qu'elle est une fonction rapidement croissante de V_n ; on adopte souvent la formule :

$$p_n = \lambda V_n^2,$$

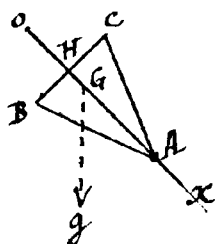
λ désignant un certain coefficient constant grossièrement égal à $\frac{9}{10}$ en C.G.S.

La ^{10^e} force de frottement $\vec{F} ds$ est directement opposée à la composante tangentielle V_t de V et fonction croissante de V_t (nulle pour $V_t = 0$).

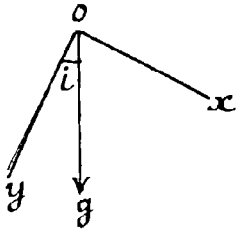
Application. Une plaque solide homogène et pesante S , d'épaisseur infiniment mince, ayant la forme d'un triangle isocèle ABC , est abandonnée sans vitesse dans une position où le plan de symétrie de la plaque, soit le plan xoy , est vertical. - Mouvement de la plaque dans l'air immobile.

Tout d'abord, la plaque reste symétrique par rapport au plan xoy [N. 14]. Je dis de plus que son mouvement est une translation. Si en est ainsi, 1^o l'accélération du centre de gravité G de la plaque doit être égale à chaque instant à $\frac{\Phi}{M}$, Φ désignant la somme géométrique des forces extérieures appliquées à S [Φ est bien parallèle dans ce cas au plan xoy]; 2^o en vertu du théorème des moments cinétiques, les forces extérieures doivent admettre une résultante unique passant par G . Or cela est vrai et pour la pesanteur et pour les résistances $\vec{p}_n ds$ et pour les résistances $\vec{F} ds$, parallèles, de même sens et proportionnelles à ds . Tout mouvement qui satisfait aux conditions précédentes satisfait donc aux six équations du mouvement d'un solide. Parmi ces mouvements, celui qui répond aux conditions initiales est le mouvement vrai. Étudions ce mouvement.

La hauteur AH de la plaque se meut parallèlement à elle-même dans le plan xoy ; la position de la plaque est définie à un



instant t si on connaît la position (x, y) de G dans ce plan.



Prenons comme origine O la position initiale de G , comme axe Ox la direction constante de la hauteur menée vers le bas, comme axe Oy la perpendiculaire à Ox menée vers le bas. La résultante des résistances $\bar{P} ds$ est de sens contraire à Oy et égale à μy^2 [μ désignant une certaine constante]; la résultante des résistances $\bar{F} ds$ est en sens inverse de Ox et égale à $\varphi(x')$, φ désignant une certaine fonction croissante de $|x'|$ nulle avec x' .

Les équations du mouvement de G sont donc :

$$Mx'' = Mg \sin i - \varphi(x'), \quad My'' = Mg \cos i - \mu y^2,$$

chacune de ces équations est identique à celle de la chute verticale d'un point dans un milieu résistant [1^{ère} année p191-193]. Si notamment on néglige les frottements de l'air $\bar{F} ds$, on a :

$$x = g \sin i \frac{t^2}{2}, \quad \frac{\mu}{M} y = \log \left(\frac{e^{vt} + e^{-vt}}{2} \right), \quad \text{où } v = \sqrt{\frac{\mu g \cos i}{M}}.$$

Au bout du temps t , le point G est descendu verticalement de

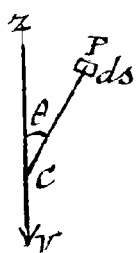
$$x \sin i + y \cos i = g \sin^2 i \frac{t^2}{2} + \frac{M \cos i}{\mu} \log \left(\frac{e^{vt} + e^{-vt}}{2} \right).$$

Le même calcul subsiste pour une plaque quelconque, si la plaque dans sa position initiale est symétrique (géométriquement et mécaniquement) par rapport à un plan vertical.

C'est là le principe du vol plané.

87 - Résistance opposée à une sphère.

Soit S une sphère solide animée d'un mouvement quelconque : calculons la résistance de l'air en négligeant les frottements. Prenons comme axe Gz la direction opposée à la vitesse V du centre C de S ; pour



chaque élément ds ou P de l'hémisphère opposé à V , V_n se réduit à la projection de V sur la normale, c'est-à-dire à $V \cos \theta$, si $\theta = \angle CP$. Il est évident d'autre part que les

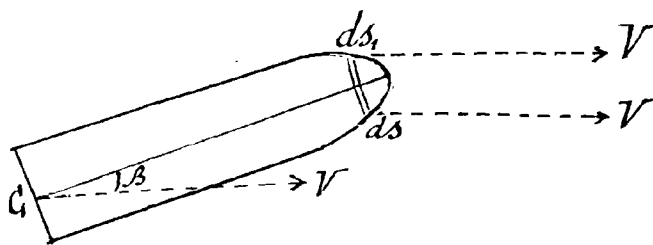
résistances normales, passant toutes par C, admettent une résultante, et que cette résultante par raison de symétrie est dirigée selon CZ. La projection sur CZ de la résistance normale opposée à l'élément ds est: $\lambda V^2 \cos^3 \theta ds$; les éléments de la sphère compris entre les parallèles θ et $\theta + d\theta$ engendrent la résistance $\lambda V^2 \cos^3 \theta \times 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$; la résultante de toutes les résistances normales est par suite une force de sens CZ appliquée en C et égale à

$$2\pi R^2 \lambda V^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 \frac{\lambda V^2}{4} = \frac{A \lambda V^2}{8} = \frac{A}{8} \frac{9}{10^4} V^2$$

$= A \frac{11}{10^5} V^2$ (en C. G. S), A désignant l'aire totale de la sphère.
(1^{ère} année, p. 190).

88. Résistance opposée à un corps de révolution.

Au lieu d'une sphère, considérons un corps de révolution animé d'une translation \vec{V} et d'une rotation quelconque sur lui-même. Là encore V_n se réduit à la projection de \vec{V} sur la normale; soit CZ l'axe de révolution de S, Cxyz un trièdre trirectangle, le plan CzX renfermant \vec{V} . Chaque résistance $\vec{P}_n ds$ rencontre Cz en un certain point, soit D, et peut être décomposée en trois forces parallèles à Cz, Cx et Cy. Par raison de symétrie, les composantes parallèles à Cy se détruisent, les résistances parallèles

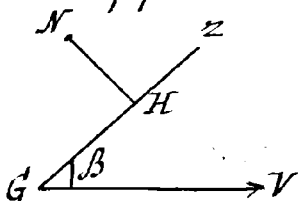


à CZ admettent une résultante dirigée selon CZ en sens inverse de la projection de \vec{V} sur CZ.

Enfin les composantes parallèles à Cx admettent une résultante de sens HN [c'est-à-dire

dirigée par rapport à CZ du côté opposé à \vec{V}]. En effet, soit ds et ds_1 deux éléments symétriques

par rapport au plan zCy; l'élément ds_1 , situé par rapport à ce plan du côté opposé à CV, ou bien ne supporte aucune résistance ou bien fait avec \vec{V} un angle plus petit que celui de ds avec \vec{V} ; la résistance normale qui



s'exerce sur ds est donc toujours supérieure à celle qui s'exerce sur ds_1 , et comme les normales à ds et à ds_1 font le même angle avec Cz , la composante perpendiculaire à Cz de la résistance que supporte ds l'emporte toujours (en grandeur) sur la composante analogue relative à ds_1 . Il suit de là que toutes les résistances normales peuvent être remplacées par une force dirigée selon zC , soit R , et par une force normale à Cz , appliquée en un certain point H de l'axe Cz , située dans le plan zCV , et dirigée par rapport à Cz du côté opposé à CV , soit la force N .

Soit β l'angle que fait V avec le sens Cz adopté sur l'axe de révolution. Si $\beta = 0$, les résistances admettent une résultante directement opposée à Cz ; $N = 0$.

Pour des valeurs données de β et de V , ces deux forces et le point H sont bien déterminées; quand β tend vers zéro, H tend vers une certaine position H_0 qu'on appelle centre de résistance de $S^{(1)}$. La force HN tend vers zéro avec β et (pour V donné) peut être regardée comme proportionnelle à β , si β reste petit.

89. Application à un cône de révolution.

Supposons que S soit un cône de révolution limité par une section droite. Soit C le centre de base, Cz la droite qui va de C au sommet P du cône. Si V a la direction et le sens Cz , la résistance de l'air ont une résultante R directement opposée à Cz . Soit α le demi-angle au sommet du cône: $V_n = V \sin \alpha$; la projection de $\int_n ds$ sur Cz est $\lambda V^2 \sin^3 \alpha ds$; R par suite est égal à $\lambda V^2 \sin^3 \alpha S_0$, S_0 désignant l'aire latérale du cône.

Si V fait un angle β avec Cz , considérons l'aire aPb comprise entre deux génératrices infiniment voisines du cône; les résistances $f_n ds$ sont parallèles, de même sens et proportionnelles à ds ; elles admettent une résultante normale au cône et appliquée au centre de gravité du triangle

⁽¹⁾ Si on prenait le sens opposé sur Cz , on obtiendrait un autre centre des résistances, mais dans les applications, S se termine par une pointe, et le sens choisi Cz va de la base à la pointe.

infinitésimal aPb , c'est-à-dire au point c de Pa tel que $Pc = \frac{2}{3} Pa$. La normale au cône en ce point coupe l'axe Cz au point H tel que $PH = \frac{2}{3} \frac{PC}{\cos^2 \alpha}$. Ses résistances de l'air admettent donc une résultante $\frac{2}{3} \frac{\mu \beta}{\cos^2 \alpha}$ passant par H . Ce point H , indépendant de β , est le centre des résistances du cône. Quand le cône est homogène, il est entre G et P ou entre G et C suivant que $\sin \alpha$ est \leq ou $>$ $\frac{1}{3}$.

Supposons β très petit, et calculons la force $N = \mu \beta$. Prenons comme plan des zx le plan CPV , soit Pa une des génératrices du cône, φ l'angle du demi plan CPx et du demi plan CPa . Rapportés au trièdre trirectangle $Pxyz$, les cos. directeurs de V sont $\sin \beta, 0, \cos \beta$ (le sens Px étant celui de la composante de V normale à CP). Les cos. directeurs de

la normale intérieure au cône en un point de Pa sont :

$$-\cos \alpha \cos \varphi, -\cos \alpha \sin \varphi, -\sin \alpha;$$

la valeur de V_n^2 est

$$V^2 (\sin \beta \cos \alpha \cos \varphi + \cos \beta \sin \alpha)^2$$

Ses projections de V_n^2 sur Px et sur Pz sont :

$$-V_n^2 \cos \alpha \cos \varphi, -V_n^2 \sin \alpha,$$

et celles de la résultante des forces $f_n d\sigma$ appliquées à l'aire du cône comprise entre α et une

génératrice voisine sont :

$$-2V_n^2 \cos \alpha \cos \varphi \times \frac{P^2}{2 \sin \alpha} d\varphi, \quad -2V_n^2 \sin \alpha \frac{P^2}{2 \sin \alpha} d\varphi$$

(P rayon de base du cône). L'angle β étant très petit, on peut réduire V_n^2 à

$$\text{ou encore à : } \begin{aligned} &V^2 (2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \cos \varphi + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha) \\ &V^2 (2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \beta \cos \varphi + \sin^2 \alpha). \end{aligned}$$

Il vient ainsi :

(1) Pour une forme arbitraire de méridienne, H varie avec β .

$$\begin{aligned}\frac{R}{V^2} &= -\frac{\lambda r^2}{2} \int_0^{2\pi} (2\beta \sin\alpha \cos\alpha \cos\psi + \sin^2\alpha) d\psi = -\lambda \pi r^2 \sin^2\alpha \\ &= -\lambda \sin^2\alpha \beta; \\ \frac{N}{V^2} &= \frac{-\lambda \cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{r^2}{2} \int_0^{2\pi} (2\beta \sin\alpha \cos\alpha \cos\psi + \sin^2\alpha) \cos\psi d\psi = -\lambda \pi r^2 \cos^2\alpha \beta \\ &= -\lambda \cos^2\alpha \sin\alpha \beta.\end{aligned}$$

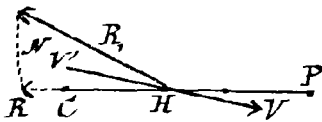
Les réactions normales de l'air ont donc pour résultante une force appliquée au point H de PC tel que $PH = \frac{2}{3} \frac{PC}{\cos^2\alpha}$, et dont les projections sur PC et Px sont :

$$\lambda \sin^3\alpha \beta \cdot V^2 \text{ et } -\lambda \cos^3\alpha \sin\alpha \beta \cdot V^2.$$

Exemple numérique - Si $PC = 100 \text{ cm}$, $r = 10 \text{ cm}$; $\tan\alpha$ est égal à $\frac{1}{10}$, α et $\sin\alpha$ sensiblement égaux à $\frac{1}{10}$, et on a :

$$\frac{R}{V^2} = \frac{9}{10^4} \times \frac{1}{10^3} \pi 10 \sqrt{100 \times 101} = \frac{28}{10^4} \text{ C.G.S.};$$

$$\frac{N}{V^2} = -\frac{28\beta}{10^2}; \quad PH = \frac{2}{3} 101 = 67,3 \text{ cm}.$$



$\frac{N}{R}$ étant égal à 100β , l'angle que fait R avec PC la résultante R_1 de R et de N a comme tangente 100β , et par suite est plus grand que β .

La direction HV inverse de V est donc comprise dans l'angle CHR_1 .

Si le cône est plein et homogène, H est compris entre P et G, et la distance GP est égale à $75,67,3 = 7,67,3$. Si la densité du cône homogène est égale à 7 (densité de la fonte), son poids est $\frac{\pi}{3} \times 10^3 \times 100 \times 7 \times 980 = 7 \times 10^7$ sensiblement. On a, dans ce cas :

$$\frac{R}{Mg} = \frac{V^2 \times 28}{7 \times 10^{11}} = \frac{V^2}{25 \times 10^9} = \left(\frac{V}{158000} \right)^2;$$

pour que R dépasse Mg, il faut que V dépasse 1580 mètres à la seconde.

Quelle serait la résistance que rencontrerait une sphère homogène de même densité et de même poids ? Le rayon de la sphère serait donné par l'égalité :

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = 3^7 \times 10^3 \times 100, \quad \text{d'où } r^3 = 136, \text{ et on aurait :}$$

$$\frac{R}{V^2} = 4 \pi r^2 \times \frac{11}{10^5} = \frac{4 \times \pi \times 185 \times 11}{10^5} = \frac{37 \times 69}{10^4} = \frac{2553}{10^4}$$

à même vitesse V, R serait près de 100 fois plus grand que pour le cône.

90. Remarques sur les lois de la résistance de l'air.

Les lois que nous avons admises comme lois de la résistance de l'air doivent être regardées seulement comme donnant une idée du sens et de la grandeur des forces en jeu, mais non comme une approximation même grossière de la réalité. En fait, le mouvement d'un solide dans un fluide donne lieu à un phénomène d'hydrodynamique très compliqué, et il n'y a pas de loi de résistance de l'air : autrement dit, il est impossible qu'une même formule donne la résistance de l'air pour un élément de surface ds animé dans l'air d'une vitesse donnée, quelle que soit la forme de la surface solide dont ds fait partie. Admettons en effet qu'une telle formule existe : un hémisphère solide creux de centre C lancé parallèlement à son axe CP dans l'air immobile devrait rencontrer la même résistance que le sens du mouvement fût de sens CP ou le sens PC : or l'expérience montre que la résistance est beaucoup plus grande dans le second cas (où l'air s'oppose à la concavité de la surface) que dans le premier.

Il est toutefois une conséquence des lois de la résistance de l'air qui se vérifie assez sensiblement. Considérons deux solides quelconques mais de formes semblables, animés ^{dans l'air} immobile d'un mouvement de translation, la vitesse de translation ayant même direction et sens dans les deux corps & même valeur absolue : par exemple, les deux corps sont deux cônes semblables, et leurs vitesses de translation sont égales et respectivement parallèles à leurs axes CP et C'P' et de sens CP, C'P' ou font le même angle β avec CP et C'P'. En considérant les éléments correspondants des deux surfaces, on voit immédiatement que (si les lois du N° 86 sont vraies) les résistances de l'air ont même direction et sens dans les deux corps, mais que leurs intensités sont dans le rapport du carré du rapport de similitude : par exemple, dans le cas des deux cônes, soit $\lambda = \frac{C'P'}{CP}$; si R, N' sont les forces correspondantes à R et à N (C'P') qui s'exercent sur le second cône, on a :

$$R' = \lambda^2 R, \quad N' = \lambda^2 N.$$

C'est là un résultat que l'expérience vérifie assez bien pourvu que les variations de λ ne soient pas trop considérables.

D'après cela, si deux corps de révolution semblables S et S' sont animés d'une translation parallèle à leur axe et de même sens, on aura : pour une même valeur de la vitesse de translation :

$$R' = \lambda^2 R, \quad (\lambda \text{ rapport de similitude de } S \text{ à } S').$$

Si les deux corps sont homogènes et de même densité, leurs masses M et M' sont dans le rapport λ^3 , et on a :

$$\frac{R'}{M'} = \frac{R}{\lambda M}, \quad \frac{R'}{M'^{2/3}} = \frac{R}{M^{2/3}};$$

à vitesse V égale, l'effet de R sur le projectile sera d'autant plus moindres que ses dimensions seront plus grandes. Mais pour chaque forme de corps S , la loi de la résistance sera différente.

21. - Lois de la résistance pour les projectiles usuels.

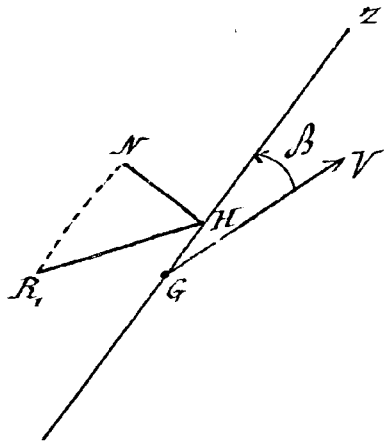
Le mouvement d'un projectile dans l'air peut être étudié très simplement quand ce projectile est sphérique et homogène⁽¹⁾, du moins si on néglige (comme on le fait en balistique) les frottements de l'air; on peut alors remplacer les résistances de l'air par une force unique appliquée au centre G de la sphère; le mouvement du centre de la sphère peut être étudié comme celui d'un point libre (1^{ère} année, p. 207); et la sphère tourne uniformément autour d'une droite GZ fixe dans le corps et de direction fixe dans l'espace.

Mais la résistance de l'air sur un tel projectile est considérable. Pour atténuer cette résistance, on a été conduit à allonger l'avant du projectile: les projectiles modernes communément employés ont la forme d'un long cylindre de révolution terminé par une pointe ogivale. Le projectile est toujours formé de couches de révolution homogènes; son centre de gravité G est sur l'axe de révolution. Dans ce qui suit nous désignerons toujours par GZ l'axe de révolution du projectile \mathcal{P} mené du centre de gravité vers la pointe P .

Si le projectile est animé d'une vitesse de translation V de direction et de sens GZ , les résistances de l'air ont une résultante \bar{R} directement opposée à GZ et qui est une certaine

⁽¹⁾ Il suffit même que le centre de gravité coïncide avec le centre géométrique de la sphère.

fonction croissante de la vitesse (nulle avec V), soit $\varphi(V)$, fonction qui dépend de la forme du projectile. Si la vitesse de translation fait avec GZ un petit angle β , les résistances de l'air admettent une résultante située dans le plan ZGV , soit \overline{HR} , H étant un certain point de GZ , et quand β tend vers zéro, H tend vers une position limite H_0 (centre de résistance du projectile); pour les projectiles usuels, le point H_0 est à peu près à la moitié de l'ogive, donc entre le centre de gravité G et la pointe P . La force \overline{HN} , composante de \overline{HR} , normale à GZ , est dirigée par rapport à GZ du côté opposé à GV . Quand β est petit, elle peut être regardée comme proportionnelle à β ou, si on veut, à $\sin \beta$, soit

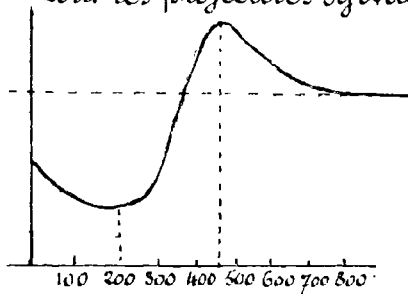


$N = \mu(V) \sin \beta$, μ désignant une certaine fonction croissante de V , nulle avec V , et qui dépend de la forme du projectile. Quant à la projection de \overline{HR} sur GZ , elle se confond sensiblement avec \overline{R} quand β est petit, et sa valeur absolue est $\varphi(V)$ ⁽¹⁾.

Il est loisible de remplacer cette force \overline{HN} par une force équipollente appliquée en G et un couple dont l'axe est défini par le moment de \overline{HN} relatif à G (couple perturbateur): cet axe \overline{GL} est normal au plan ZGV , et son sens (d'après ce qui précède) est tel qu'un observateur placé les pieds en G , la tête en L , voit s'effectuer de gauche à droite la petite rotation qui amène GV sur GZ . Par exemple, si GZ et GV sont dans le plan X, GZ , [fig. 2], GV étant compris entre GX et GZ , et GZ entre GV et GZ , le vecteur \overline{GL} est directement opposé à Gy .

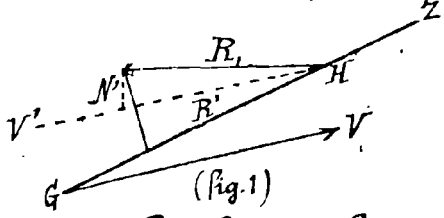
Enfin, décomposons \overline{HR} en une force $\overline{R'}$ de sens opposé

⁽¹⁾ Pour les projectiles ogivaux de la marine, la loi $R = \varphi(v)$ déduite des expériences du



polygone de Gâvre, est la suivante: $\frac{R}{M} = \lambda V^2 f(V)$, λ désignant un certain coefficient constant qui dépend des dimensions du projectile et de la densité de l'air, et $f[V]$ étant défini par la courbe ci-contre où les vitesses comptées en mètres à la seconde sont portées en abscisse. Le maximum de $f(V)$ correspond sensiblement à la vitesse du son dans l'air.

à V et en une force \bar{N}' normale à V . Pour les projectiles usuels, la demi droite HV' de sens opposé à V est comprise dans l'angle aigu formé par les deux demi-droites \bar{R}_1 et HG [fig. 1]. La force \bar{R}_1 est dite la force retardatrice, et la force \bar{N}' la force déviatrice⁽¹⁾.



Ces lois subsistent si en outre de sa translation, le projectile est animé d'une rotation sur lui-même.

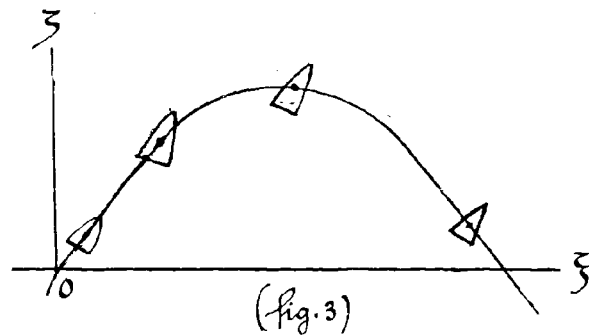
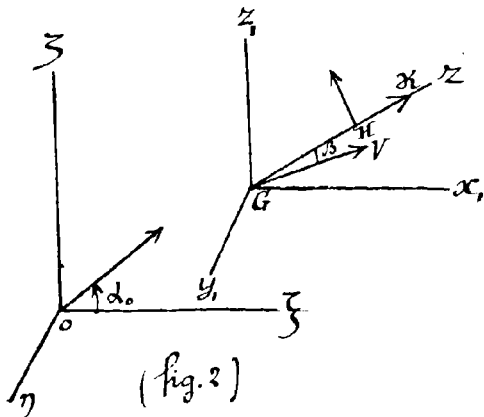
Remarquons que la pesanteur et la résistance de l'air ayant une résultante qui rencontre l'axe GZ , la vitesse de rotation du projectile autour de GZ restera constante (si on néglige le frottement de l'air). En fait, ces lois empiriques ne sont vraies qu'autant qu'on néglige la faible influence des frottements de l'air: ces frottements ralentissent la rotation du projectile sur lui-même.

92. - Mouvement d'un projectile lancé dans l'air sans rotation.

Soit $O\xi\eta\zeta$ des axes liés invariablement à la terre, O désignant la position initiale du centre de gravité G du projectile, $O\xi$ la verticale ascendante et $O\zeta$ le sens de la projection horizontale de la vitesse initiale V_0 de G : le plan $\xi O \zeta$ s'appelle le plan de tir [fig. 2].

Soit Gx, y, z , des axes parallèles aux premiers et ayant G comme origine. Pour $t=0$, les deux systèmes d'axes coïncident.

Si le projectile était lancé dans le vide, le point G décrirait dans le plan du tir une parabole, et l'axe GZ garderait une orientation fixe dans l'espace; le projectile tomberait donc la pointe en l'air, et la direction GZ serait



⁽¹⁾ Au point de vue de la disposition des forces, tout se passe comme dans l'exemple numérique du cône de révolution traité plus haut (n° 89).

avec la vitesse finale de G un angle égal à $2\alpha_0$, si α_0 désigne l'angle avec le plan horizontal de la vitesse initiale.

Supposons maintenant le projectile lancé dans l'air, mais animé, au sortir de la pièce d'un simple mouvement de translation, dirigé selon l'axe de la pièce, et par suite selon l'axe GZ . Par raison de symétrie, le point G et l'axe GZ se mouvoient dans le plan de tir. L'axe GI , du couple perturbateur sera perpendiculaire à ce plan: nul pour $t=0$, il ne deviendra appréciable que quand l'angle GZ avec V sera lui-même sensible, et d'après ce que nous avons dit (N° 91) ce couple tendra à écarter GZ de GV , c. à d. accroîtra l'angle de GZ avec le plan horizontal. La résistance de l'air redresserait donc le projectile et accentuerait encore l'angle de son axe de figure avec la vitesse de G : le projectile prêterait le flanc de plus en plus à la résistance de l'air; et cette résistance deviendrait au moins aussi considérable que pour un boulet sphérique.

C'est pourquoi il est indispensable que le projectile soit animé d'une grande vitesse de rotation sur lui-même au sortir de la pièce. Cette rotation ne corrige pas seulement l'effet perturbateur que je viens de signaler: elle assure la stabilité du projectile sur sa trajectoire contre les causes perturbatrices accidentelles (vent, etc).

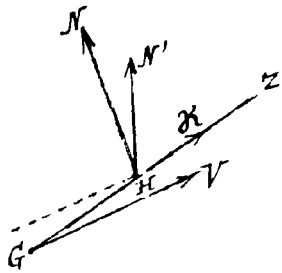
93. Mouvement d'un projectile animé d'une rotation sur lui-même: discussion élémentaire.

La théorie de l'effet gyroscopique permet de se rendre compte de l'influence de cette rotation. La vitesse de rotation ω_0 du projectile autour de OZ étant très grande, et les forces qui s'exercent sur le projectile étant des forces finies qui ne varient pas très rapidement avec le temps nous pouvons [N° 70] confondre (pendant la durée du mouvement) la direction de l'axe GZ et la direction GI du moment cinétique du solide autour de G .

Si la rotation ω_0 était colossale, la déviation de l'axe GZ (qui est d'autant plus faible que ω_0 est plus grand) serait négligeable, et cet axe garderait sensiblement la même orientation dans l'espace. Mais, dans la réalité, ω_0 n'est pas tellement grand que GZ ne subisse une déviation appréciable. Rendons-nous compte de son sens.

Supposons pour fixer les idées, que le projectile tourne de gauche à droite autour de la demi-droite GZ . Le vecteur \vec{GK} a, dans ce cas, le sens de GZ . Le moment, par rapport à G , des forces appliquées au projectile n'est autre que l'axe GL du couple perturbateur : ce couple n'exerce d'influence appréciable que quand l'angle β de GV et de GZ est lui-même sensible. A un instant t voisin de l'instant initial, le point G , sa vitesse et l'axe GZ sont encore sensiblement dans le plan de tir ; l'axe GZ (resté parallèle à lui-même) fait avec V un angle β égal sensiblement à $\alpha_0 - \alpha$. Dans le petit intervalle de temps suivant t à $t+h$, l'extrémité K de GK va subir une déviation dirigée selon GL [c'est-à-dire (N° 91) directement opposée à GK] ; la demi-droite GZ va donc être déviée par rapport au plan de tir à la gauche⁽¹⁾ du tireur qui regarde s'éloigner le projectile ; autrement dit, la pointe du projectile est déviée à gauche du plan de tir.

Quand cette déviation est devenue appréciable la force déviation HN' [située dans le plan ZGV et dirigée normalement à V de l'autre côté de GZ par rapport à GV] a



une petite composante normale au plan de tir et dirigée à gauche⁽²⁾ du plan de tir (puisque GZ est dévié à gauche). Or le point G se meut comme un point pesant de masse égale à la masse du corps, qui serait soumis à la force \vec{K} directement opposée à sa vitesse V et à la force N' . Cette dernière force (de sens opposé à GK) fait donc sortir le point

G du plan de tir à gauche du tireur : l'écart entre G et le plan du tir s'appelle dérivation du projectile.

En outre, l'axe GL du couple perturbateur a une petite composante verticale et dirigée vers le bas : le point K dévie donc un peu vers le bas, l'axe GZ s'incline sur le plan

(1) Si le projectile tourne de droite à gauche autour de la demi-droite GZ , le point K est sur la demi-droite opposée à GZ : la demi-droite GZ est donc déviée à droite du plan de tir.

(2) Si la rotation du projectile a lieu de droite à gauche autour de GZ , la demi-droite GZ est déviée à droite, et la composante de HN' normale au plan de tir est dirigée à droite : le projectile dérive à droite du tireur.

horizontal⁽¹⁾

En définitive, voici l'aspect du mouvement quand le solide est animé d'une rotation rapide, de gauche à droite, autour de GZ .

Le point G se meut tout d'abord très sensiblement dans le plan de tir, ainsi que la pointe du projectile; puis la pointe sort lentement du plan de tir sur la gauche du tireur; puis (en même temps que cette déviation s'accroît) le centre de gravité sort très lentement du plan de tir sur la gauche du tireur, et l'axe GZ du projectile s'incline très lentement sur le plan horizontal.

Si la rotation autour de GZ a lieu de droite à gauche, les mêmes conclusions subsistent avec cette modification que la pointe et le centre de gravité dévient du plan de tir à droite du tireur; l'axe GZ s'incline, là encore, sur l'horizon.

C'est l'aspect du mouvement au moins au début. Cette description convient pour une durée d'autant plus longue que ω_0 est plus grand. Elle s'appliquera notamment à la durée de la chute du projectile si ω_0 est suffisamment grand.

Dans l'artillerie moderne, on imprime à l'obus une rotation progressive à l'aide de rayures hélicoïdales, à pas graduellement croissant⁽²⁾, pratiquées dans l'âme de la pièce: suivant que ces rayures hélicoïdales sont dextrorsum ou sinistrorsum, l'obus (à la sortie de la pièce) est animé autour de GZ d'une rotation dextrorsum ou sinistrorsum. Pour les pièces de marine, la rotation est dextrorsum; elle est sinistrorsum pour l'artillerie de terre. La pointe de l'obus et son centre de gravité dévient donc à gauche du plan de tir pour les pièces de marine; ils dévient à droite pour l'artillerie de terre.

Remarque. — Toute cette discussion suppose essentiellement que le projectile est un corps de révolution non

(1) Si le projectile tourne de droite à gauche autour de GZ , la composante verticale de GI est ascendante, mais I est sur la demi-droite opposée à GZ ; GZ s'incline donc encore sur le plan horizontal.

(2) La valeur h du pas à l'orifice de la pièce fait connaître le rapport $\frac{V}{\omega}$ par la formule: $\frac{h}{V} = \frac{1}{\omega}$. Pour les gros projectiles modernes, la rotation est de 50 tours² à la seconde (3000 tours à la minute).

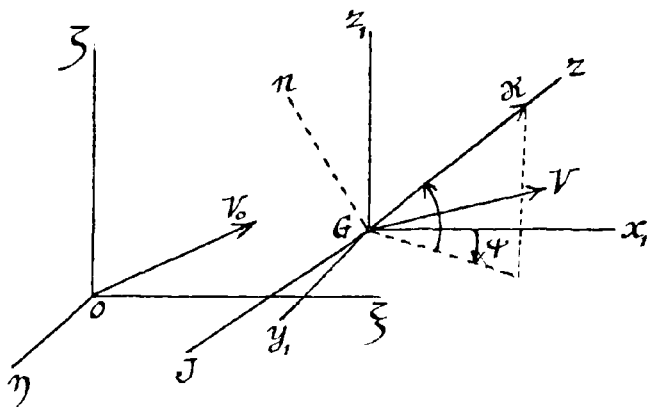
seulement quant à la forme, mais quant à la répartition des masses. D'une façon précise pour que la discussion précédente soit valable, il faut : 1° que G soit sur l'axe de figure du corps ; 2° que l'ellipsoïde central d'inertie soit de révolution autour de l'axe de figure. Supposons par exemple, que G soit sensiblement en dehors de l'axe de figure : en vertu de la rotation du projectile, le point G aurait, à la sortie du canon, une vitesse qui ne serait nullement dirigée selon l'axe de la pièce, et le projectile divaquerait en dehors du plan de tir.

94 - Étude analytique du mouvement.

Nous supposons que l'angle du tir est faible, en sorte que l'inclinaison de la vitesse V du point G sur le plan horizontal restera petite (en valeur absolue) pendant la chute du projectile. Soit Gx, y, z , des axes parallèles aux axes fixes $O\xi\eta\zeta$ ($O\xi$ verticale ascendante) : je définirai l'axe Gz du projectile par sa latitude (angle de Gz avec le plan horizontal compté entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$), soit θ , et sa longitude, soit ψ .⁽¹⁾ Le projectile est animé initialement d'une vitesse de translation V_0 de sens Gz et d'une rotation autour de Gz ; je représente par ω_0 la vitesse angulaire de cette rotation, précédée du signe + ou - suivant qu'elle a lieu de gauche à droite ou de droite à gauche autour de Gz . Nous savons que la théorie gyroscopique s'applique si $|\omega_0|$ est suffisamment grand : $|\theta|$ et $|\psi|$ seront très petits avec $\frac{1}{\omega_0}$. Or θ (angle du tir) est très petit par hypothèse ; ψ_0 est nul, si on prend comme plan $O\xi\eta\zeta$ le plan de tir ; par conséquent, $|\theta|$ et $|\psi|$ resteront petits pendant la chute du projectile si ω_0 est grand. D'autre part, la vitesse V de G ne fera qu'un petit angle avec le plan de tir : j'appelle α et ε la latitude et la longitude qui définissent la direction GV ; $|\alpha|$ et $|\varepsilon|$ resteront petits. J'admets donc, pour simplifier les calculs, que pendant la chute du projectile, $|\theta|$, $|\psi|$, $|\alpha|$, $|\varepsilon|$ restent assez petits pour qu'on puisse négliger leurs carrés et leurs produits devant l'unité : dans ces conditions, on peut confondre $\sin \theta$ avec θ , $\cos \theta$ avec 1, etc.

⁽¹⁾ Les lettres θ et ψ ont une autre signification qu'au N.º 48 ou elles désignaient la colatitude et la longitude augmentée de $\frac{\pi}{2}$.

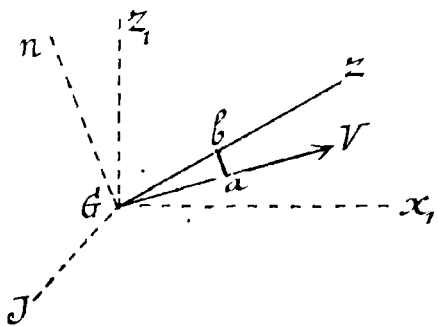
Ceci posé, appliquons les équations du N° 62, en tenant compte du changement de notation :



Soit GK le moment cinétique du projectile S autour de G ; nous confondons la direction de GK et celle de l'axe GZ . Soit GN la demi-perpendiculaire à GZ menée dans le plan z, GZ dans le sens des θ croissants, et GJ la demi-perpendiculaire au plan z, GZ qui fait avec Gx , l'angle $\psi + \frac{\pi}{2}$:

la vitesse de K par rapport aux axes Gx, y, z , a comme projections (ω étant constant): $C\omega$ sur GN , et $C\omega \cos \theta \psi'$ sur GJ . (C moment d'inertie du projectile autour de GZ).

Calculons maintenant le moment par rapport à GN et à GJ des forces extérieures, c'est-à-dire ici du couple perturbateur. L'axe GL de ce couple est perpendiculaire au plan zGV , égal⁽¹⁾ à $\lambda \sin \beta$, et son sens est tel que le petit angle VGZ compté autour de GL est positif. Autrement dit soit Ga, Gb deux segments égaux à l'unité pris sur GV et GZ , et soit $G\bar{L}$ le moment par rapport à G du vecteur $\bar{a}\bar{b}$; GL est égal à $\lambda G\bar{L}$. Or on peut passer de la position Ga à la position Gb par une rotation $(\psi - \gamma)$ autour de GZ ,



suivie d'une rotation $(\theta - \alpha)$ autour de GJ . Dans la première rotation, a décrit un petit arc de cercle qu'on peut confondre avec un chemin rectiligne parallèle à GJ et qui compté positivement dans le sens GJ est égal à $\psi - \gamma$. Dans la seconde, a décrit un petit chemin sensiblement paral-

lèle à GN et qui compté positivement dans le sens GN est égal à $\theta - \alpha$. La projection de $\bar{a}\bar{b}$ sur GJ est donc $\psi - \gamma$, et le moment de $\bar{a}\bar{b}$ par rapport à GN est, par suite, $\psi - \gamma$ sensiblement (en grandeur et signe); de même la projection de $\bar{a}\bar{b}$ sur GN est $\alpha - \theta$; le moment de $\bar{a}\bar{b}$ par rapport

(1) λ désigne une certaine fonction croissante de V .

à GJ est $-(\alpha - \theta)$ ou $\theta - \alpha$ (sensiblement).

Les équations du mouvement gyroscopique donnent donc ici :

$$(1) \quad C\omega_0 \theta' = \lambda(V)\psi, \quad C\omega_0 \psi' = \lambda(V)(\alpha - \theta).$$

D'autre part, écrivons les équations du mouvement du centre de gravité. Les deux équations intrinsèques nous donnent (M désignant la masse totale du projectile et ρ le rayon de courbure de la trajectoire) :

$$(2) \quad M \frac{dV}{dt} = -Mg \sin \alpha + R'(V)$$

$$(3) \quad M \frac{V^2}{\rho} = Mg \cos \alpha + N' \cos \eta,$$

η désignant l'angle du plan z, GV et du plan osculateur à la trajectoire de G . Enfin le théorème du mouvement du centre de gravité projeté sur une perpendiculaire au plan z, GV donne :

$$(4) \quad MV \cos \alpha \frac{d\varepsilon}{dt} = N' \sin \eta,$$

η , désignant l'angle du plan z, GV et du plan z, GV . Or η est nul si $\psi = \varepsilon$; il est donc très petit avec ψ et ε ; N' est inférieur à N , c'est-à-dire inférieur à $\frac{\lambda}{h} \beta$, (h désignant la distance GH , N° 91) et β est très petit h avec θ, ψ, α ; le second membre de (4) est donc une quantité du 2^e ordre si on regarde $\theta, \psi, \alpha, \varepsilon$ comme des infiniment petits. L'approximation dont nous nous contentons nous permet de le négliger. Comme $\varepsilon_0 = 0$, l'équation (4) nous donne alors $\varepsilon \equiv 0$; GV reste dans le plan z, OX_1 ; la trajectoire de G est située dans ce plan; ρ est égal à $\left| \frac{ds}{d\alpha} \right| = V \left| \frac{dt}{d\alpha} \right|$, et comme α décroît quand t croît :

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{V} \frac{d\alpha}{dt}, \quad \text{d'où}$$

(1) On a : $\left| \frac{d\varepsilon}{dt} \right| < \frac{\lambda}{h} \frac{\beta \eta_1}{MV \cos \alpha}$. Or dans la pratique MVh dépasse $C\omega_0$: par exemple, pour les grosses pièces de marine, V atteint 800 mètres et ω 50 tours à la seconde; c'est de l'ordre de Mh^2 , $\frac{MVh}{C\omega_0}$ est $> \frac{V}{h\omega_0} = \frac{800 \text{ mètres}}{h \cdot 314}$; or h est inférieur à 1 mètre. Si on compare d'après cela les seconds membres de l'équation (1) au second membre de (5), on voit que $\left| \frac{\psi'}{\theta'} \right|$ est $< \frac{\beta \eta_1}{\psi}$ et $\left| \frac{\psi'}{\psi} \right| < \frac{\beta \eta_1}{\alpha - \theta}$.

$$(5) \quad \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{g \cos \alpha}{V}, \text{ ou } \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{g}{V}$$

en négligeant $|N \cos \eta| \ll \frac{\lambda}{\rho} \beta$ devant Mg .

V est une fonction du temps qui varie peu pendant la chute du projectile. Nous pouvons la regarder comme une constante⁽¹⁾.

L'équation (5) donne ainsi :

$$(6) \quad \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{g}{V_0} = -n, \quad (n \text{ C}^{\text{te}} \text{ positive}).$$

Dans les équations (1), λ est une constante (valeur de λ correspondant à V_0); ces équations deviennent ainsi deux équations linéaires à coefficients constants et à second membre fonction de t . Pour les intégrer rapidement posons :

$$u = t \frac{\lambda}{C\omega}, \quad \theta - \alpha = \theta_1; \text{ il vient :}$$

$$\frac{d\theta}{du} + \frac{d\alpha}{du} = \psi, \quad \frac{d\psi}{du} = -\theta_1,$$

c'est-à-dire (comme $\frac{d\alpha}{du} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dt}{du} = -n \frac{C\omega}{\lambda}$):

$$(7) \quad \frac{d\theta}{du} = \psi + n \frac{C\omega}{\lambda} \equiv \psi', \quad \frac{d\psi'}{du} = -\theta_1.$$

Or les équations (7) admettent deux solutions évidentes :

$$\theta_1 = \sin u, \quad \psi'_1 = \cos u$$

et

$$\theta_1 = \cos u, \quad \psi'_1 = -\sin u;$$

l'intégrale générale de (7) est donc :

$$\theta_1 = \alpha \sin u + b \cos u, \quad \psi'_1 = \alpha \cos u - b \sin u,$$

(α, b constantes arbitraires).

Pour $t=0$, c'est-à-dire pour $u=0$, on a :

$$\theta_1 = \theta_0 - \alpha_0 = 0, \quad \psi'_1 = \psi_0 + n \frac{Cn}{\lambda} = n \frac{C\omega}{\lambda};$$

⁽¹⁾ Cette hypothèse ne sert qu'à simplifier les calculs; il serait bien facile d'achever la discussion en sachant seulement que V est une fonction positive de t . Les variations de V sont données sensiblement par l'équation: $M \frac{dV}{dt} = -R'(V)$.

$$\text{d'où : } b=0, \quad a=n \frac{C\omega}{\lambda}.$$

Les angles θ et ψ sont donc donnés par les valeurs :

$$\theta = \alpha + n \frac{C\omega}{\lambda} \sin \frac{\lambda t}{C\omega} = \alpha_0 - nt + n \frac{C\omega}{\lambda} \sin \left(\frac{\lambda t}{C\omega} \right)$$

$$\psi = -n \frac{C\omega}{\lambda} \left[1 - \cos \frac{\lambda t}{C\omega} \right] = -\frac{2n C\omega}{\lambda} \sin^2 \frac{\lambda t}{2C\omega}.$$

Ces équations montrent que $\omega\psi$ est toujours négatif; ψ est donc positif si la rotation du projectile autour de Gz a lieu de droite à gauche, et négatif dans le cas contraire. De plus, θ va toujours en décroissant, car $\omega^2\theta'$ a le signe de $\omega\psi < 0$; $\theta - \alpha$ commence par croître.

De plus, pour $t=0$, ψ' et θ' sont nuls; ψ'' est égal à $-\frac{n\lambda}{C\omega}$; θ'' est nul et θ''' est égal à $\frac{\lambda}{C\omega} \psi'' = -n \frac{\lambda^2}{C\omega^2}$. C'est donc ψ qui prendra d'abord une valeur sensible [déviation de Gz à gauche ou à droite]; la variation de θ [inclinaison de Gz sur le plan horizontal] ne se manifestera qu'ensuite. Ce sont bien là les résultats de la discussion qualitative [N° 93].

Si on veut que le projectile pointe vers le bas à l'arrivée, il ne faut pas que ω soit trop considérable; autrement, la variation finale de θ serait très faible et inférieure à $\alpha_0^{(1)}$. Il faut donc que d'une part, ω soit assez grand pour que la stabilité du projectile soit assurée, et d'autre part que, pour cette valeur de ω , la variation finale de θ dépasse α_0 . Mais, il convient de remarquer qu'en diminuant ω , si on diminue $\theta - \alpha$ on augmente ψ (au début tout au moins).

L'angle β de Gz et de Gv est donné sensiblement par l'égalité :

$$\beta^2 = (\theta - \alpha)^2 + \psi^2 = \frac{C^2\omega^2}{\lambda^2} n^2 \left[2 - 2 \cos \frac{\lambda t}{C\omega} \right] = 4n^2 \frac{C^2\omega^2}{\lambda^2} \sin^2 \left[\frac{\lambda t}{2C\omega} \right];$$

⁽¹⁾ Si ω était trop grand, les variations de θ, ψ pendant la chute seraient extrêmement faibles, et pourraient être inférieures à l'angle négligé de Gz et de Gv ; la théorie gyroscopique ne fournirait alors aucune indication, ainsi que nous l'avons déjà remarqué (N° 63), parce qu'elle porterait sur un temps trop court.

d'où :

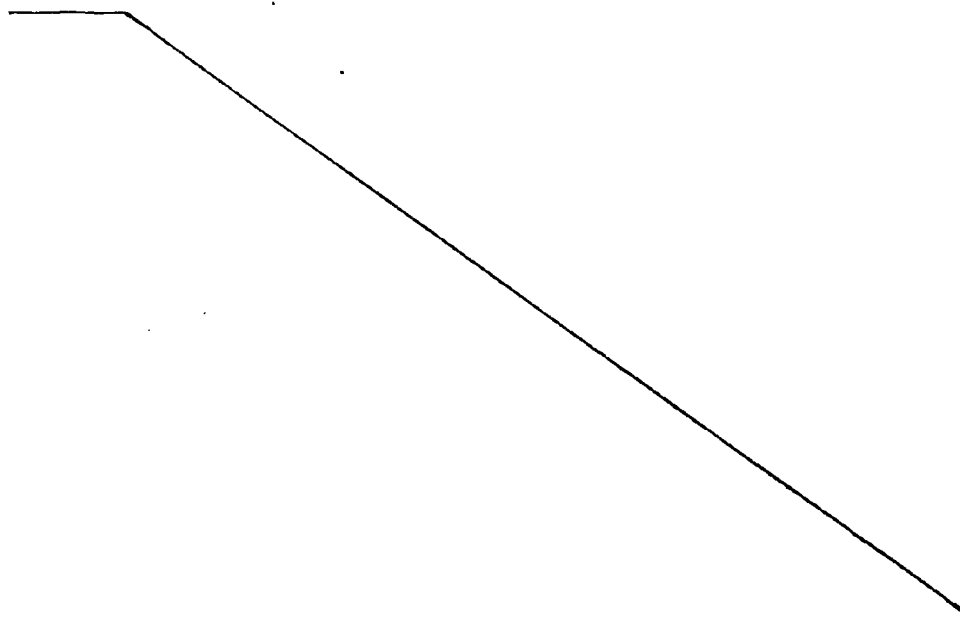
$$\beta = 2n \frac{c\omega}{\lambda} \sin \frac{\lambda t}{2c\omega},$$

comme on a : $\alpha_0 - \alpha = nt$, la valeur de β peut s'écrire :

$$\beta = (\alpha_0 - \alpha) \frac{2c\omega}{\lambda t} \sin \frac{\lambda t}{2c\omega} = (\alpha_0 - \alpha) \frac{\sin t'}{t'}, \left[t' = \frac{\lambda t}{2c\omega} \right].$$

Le coefficient de $(\alpha_0 - \alpha)$, dans cette dernière expression, est égal à 1 pour $t' = 0$ et décroît avec t' . Soit t , l'instant où le projectile atteint le but, α la valeur de α pour $t = t_1$, $[\alpha_1, (-\alpha_0)]^{(1)}$; si, pour $t = \frac{\lambda t_1}{2c\omega}$, $\frac{\sin t'}{t'}$ est inférieur à $\frac{1}{2}$, l'angle final de GZ et de GV est inférieur à $\frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2}$; par suite $(\theta_1 - \alpha_1)$ est inférieur à $\frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2}$, d'où $\theta_1 < \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} < 0$: le projectile pointe donc vers le sol à l'arrivée.

Si on poussait l'approximation plus loin, en tenant compte des termes du 2^e ordre en θ , φ , α , ε , on retrouverait la déviation de G hors du plan de tir (N^o 93).



Chapitre III.

(1)



On aurait $\alpha_1 = -\alpha_0$ si le projectile se mouvait dans le vide, et on sait que la résistance de l'air raccourcit en quelque sorte la branche de parabole décrite par G [1^{ère} année, p. 217].

Chapitre III.

Théorie générale des moments d'inertie.

95. Moments d'inertie d'un système matériel.

Avant de développer la Dynamique d'un solide de forme quelconque, nous traiterons de la théorie des moments d'inertie. Nous avons défini

le moment d'inertie d'un système de masses par rapport à une droite. Le calcul de ces moments d'inertie qui interviennent à chaque instant dans la Dynamique des systèmes est grandement facilité, dans bien des cas, par la considération des moments d'inertie d'un système matériel par rapport à un plan ou par rapport à un point.

Étant donné un système de masses qui, à un instant t , occupent des positions déterminées, on appelle (à cet instant):

1° Moment d'inertie du système par rapport à un plan la somme des produits obtenus en multipliant chaque masse m par le carré de sa distance d au plan, soit $\sum md^2$;

2° Moment d'inertie du système par rapport à une droite ou un axe la somme des produits obtenus en multipliant chaque masse m par le carré de sa distance r à l'axe, soit $\sum mr^2$; on désigne d'ordinaire ce moment par MK^2 , où M est la masse totale du système; K est alors appelé rayon de gyration du système autour de l'axe considéré;

3° Moment d'inertie par rapport à un point la somme des produits obtenus en multipliant chaque masse par le carré de sa distance au point.

Par un point O , faisons passer trois axes rectangulaires x, y, z . Le moment d'inertie par rapport aux trois plans coordonnés sont:

$$\sum mx^2, \quad \sum my^2, \quad \sum mz^2;$$

les moments d'inertie par rapport aux axes sont

$$\sum m(y^2+z^2), \quad \sum m(z^2+x^2), \quad \sum m(x^2+y^2);$$

enfin le moment d'inertie par rapport au point 0 a pour valeur

$$\sum m(x^2+y^2+z^2)$$

Des expressions ci-dessus résultent les théorèmes suivants :

I. — Le moment d'inertie par rapport à un axe est la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans rectangulaires passant par cet axe.

II. — Le moment d'inertie par rapport à un point est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à trois plans rectangulaires passant par ce point ou à la demi-somme des moments d'inertie par rapport à trois droites rectangulaires passant par ce point.

Produits d'inertie. — On appelle souvent produits d'inertie les sommes $\sum mxyz$, $\sum mxz$, $\sum mxy$ qui se ramènent aussitôt aux moments d'inertie. Menons en effet les deux plans $x+y=0$, $x-y=0$, bissecteurs des dièdres formés par les plans zOx et zOy ; appelons d et d' les distances du point de masse m de coordonnées x, y, z à ces deux plans. Nous avons :

$$d^2 = \frac{1}{2}(x+y)^2, \quad d'^2 = \frac{1}{2}(x-y)^2,$$

$$\sum mxy = \frac{1}{2} (\sum md^2 + \sum md'^2),$$

relation où les quantités qui figurent dans le second membre sont des moments d'inertie.

96. — Moments d'inertie d'un système continu. — Exemples.

Les moments d'inertie d'un système continu sont donnés par des intégrales simples, doubles, ou triples suivant que le corps est à une, deux, ou trois dimensions.

Nous avons déjà vu que le moment d'inertie d'une barre homogène par rapport à son milieu G ou par rapport à un axe Gz perpendiculaire à AB est égal à :

$$M \frac{l^2}{3}.$$

Le moment d'inertie d'un cercle homogène par rapport à son centre O (ou par rapport à une droite oz normale à ce plan) est égal à : $M \frac{l^2}{2}$ où l est le rayon du cercle; car en décomposant le cercle en anneaux concentriques, on voit aussitôt que le moment d'inertie cherché est égal à l'intégrale $\int^l 2\pi r^3 dr$, [ρ densité superficielle du cercle]. Le rayon de gyration du cercle homogène autour de oz est $\frac{l}{\sqrt{2}}$. Le rayon de gyration autour d'un diamètre est $\frac{l}{2}$; $\sqrt{2}$ car le moment d'inertie a la même valeur MK^2 par rapport à un diamètre quelconque, ou un plan diamétral quelconque normal au plan du cercle; en faisant passer par oz deux plans rectangulaires, on voit qu'on a $M \frac{l^2}{2} = 2MK^2$.

C. q. f. d.

Moments d'inertie d'une sphère homogène. — Soit ρ la densité de la sphère, l son rayon. Cherchons d'abord le moment d'inertie μ de la sphère par rapport à son centre; décomposons la sphère en couches sphériques concentriques de rayon intérieur r et d'épaisseur dr ; le moment d'inertie d'une telle couche est : $4\pi r^2 dr \times r^2$. Le moment d'inertie de la sphère par rapport au point O est donc : $4\pi \rho \frac{l^5}{5}$. Le moment d'inertie par rapport à un plan diamétral est égal à $\frac{1}{3}$ du précédent, c'est-à-dire à $\frac{4\pi \rho l^5}{15}$, puisque le moment d'inertie par rapport à tous les plans diamétraux est le même, et que le moment d'inertie par rapport au centre est la somme des moments d'inertie par rapport à trois plans diamétraux rectangulaires. Il suit de là que le moment d'inertie par rapport à un diamètre (somme des moments d'inertie par rapport à deux plans diamétraux rectangulaires) a pour valeur :

$$I = \frac{2}{3} \mu = \frac{8}{15} \pi \rho l^5 = M \frac{2}{5} l^2,$$

M désignant la masse totale $\frac{4}{3} \pi \rho l^3$. Le rayon de gyration de la sphère autour d'un diamètre est donc :

$$K = l \sqrt{\frac{2}{5}} = l \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Moments d'inertie d'un ellipsoïde homogène.

Soit :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde. Son moment d'inertie par rapport au plan des xy est, en appelant ρ sa densité :

$$\Sigma m z^2 = \iiint \rho z^2 dx dy dz,$$

l'intégrale triple étant étendue à tout le volume de l'ellipsoïde, c'est-à-dire à tout l'espace défini par la condition

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Faisons le changement de variables :

$$x = ax', \quad y = by', \quad z = cz'.$$

On aura :

$$\Sigma m z^2 = abc^3 \iiint \rho z'^2 dx' dy' dz';$$

la nouvelle intégrale triple, étant étendue au volume de la sphère

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1 \leq 0,$$

représente le moment d'inertie de cette sphère de rayon 1 par rapport à un plan diamétral et a pour valeur : $\frac{4}{15} \pi \rho$. On a donc :

$$\Sigma m z^2 = \frac{4}{15} \pi \rho abc^3;$$

ou enfin :

$$\Sigma m z^2 = M \frac{c^2}{5}$$

M étant la masse $\frac{4}{3} \pi \rho abc$ de l'ellipsoïde.

On trouverait de même que les moments d'inertie de l'ellipsoïde sont respectivement, par rapport au plan des xz et par rapport au plan des yz , les quantités

$$M \frac{b^2}{5} \text{ et } M \frac{a^2}{5}.$$

Les moments d'inertie par rapport aux axes ox, oy, oz sont, par suite :

$$M \frac{b^2 + c^2}{5}, \quad M \frac{c^2 + a^2}{5}, \quad M \frac{a^2 + b^2}{5}$$

et par rapport au centre :

$$M \frac{a^2 + b^2 + c^2}{5}.$$

Je n'insiste pas davantage sur le calcul des moments

d'inertie par des intégrales définies, me contentant de renvoyer sur ce point au cours du Calcul intégral.

97. — Variation du moment d'inertie, par rapport à un axe, d'un système donné⁽¹⁾ de masses, quand cet axe se déplace parallèlement à lui-même.

Cette variation est définie par le théorème suivant :

Le moment d'inertie d'un système par rapport à un axe est égal au moment d'inertie par rapport à un axe parallèle passant par le centre de gravité, augmenté du produit de la masse totale par le carré de la distance des deux axes.

Soit AB un axe quelconque donné; prenons pour axe des z l'axe parallèle Gz passant par le centre de gravité, et soient $x = a$, $y = b$ les équations de l'axe donné AB . Le moment d'inertie par rapport à cet axe est :

$$\sum m [(x-a)^2 + (y-b)^2],$$

ce qu'on peut écrire :

$$\sum m (x^2 + y^2) + (a^2 + b^2) \sum m - 2a \sum mx - 2b \sum my;$$

mais les sommes $\sum mx$, $\sum my$ sont nulles, puisque le centre de gravité se trouve sur l'axe des z ; il reste alors pour expression du moment d'inertie par rapport à AB :

$$\sum m (x^2 + y^2) + (a^2 + b^2) \sum m,$$

ce qui démontre la proposition⁽¹⁾

Soit I le moment d'inertie par rapport à AB , I_G le moment par rapport à l'axe parallèle passant par G , d la distance de ces deux axes; on a : $I = I_G + Md^2$.
Soit de même I' le moment d'inertie par rapport à un axe $A'B'$ parallèle à la même direction, mais situé

(1) On serait arrivé aussitôt au même résultat en appliquant le théorème de Koenig à la force vive du système tournant autour de AB [ou au moment cinétique par rapport à AB du système.]

à une distance d' du centre de gravité ; on a : $I' = I_G + Md'^2$;
d'où, en retranchant :

$$I - I' = M(d^2 - d'^2),$$

formule qui permet de calculer I' connaissant I, M , et la position du centre de gravité.

Il résulte du théorème $I' = I_G + Md'^2$ que, de tous les axes parallèles à une direction donnée, celui pour lequel le moment d'inertie est minimum passe par le centre de gravité. Tous ceux pour lesquels ce moment a même valeur forment un cylindre de révolution dont l'axe contient le centre de gravité.

On démontre de même que :

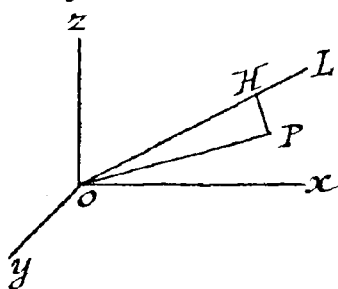
Le moment d'inertie d'un système par rapport à un plan est égal au moment d'inertie par rapport à un plan parallèle qui renferme le centre de gravité, augmenté du produit de la masse totale par le carré de la distance des deux plans.

Le moment d'inertie d'un système par rapport à un point O est égal au moment d'inertie par rapport au centre de gravité G , augmenté du produit de la masse totale par OG^2 .

98 - Variations du moment d'inertie par rapport à des axes passant par un même point. Ellipsoïde d'inertie (Poincaré).

Étudions maintenant les variations du moment d'inertie par rapport aux diverses droites issues d'un point O . Prenons ce point comme origine, et soit

α, β, γ les cosinus directeurs d'une droite OL . Le carré \overline{PH}^2 de la distance à OL du point P de masse m et de coordonnées (x, y, z) est donné par :



$$\begin{aligned} \overline{PH}^2 &= \overline{OP}^2 - \overline{OH}^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 \\ &= \alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(z^2 + x^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) \\ &\quad - 2\beta\gamma yz - 2\gamma\alpha zx - 2\alpha\beta xy. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sum m r^2 = \sum m \cdot \overline{PH}^2 = \alpha^2 \sum m (y^2 + z^2) + \beta^2 \sum m (z^2 + x^2) + \gamma^2 \sum m (x^2 + y^2) \\ - 2\beta\gamma \sum m yz - 2\gamma\alpha \sum m zx - 2\alpha\beta \sum m xy. \end{aligned}$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$(1) \quad \sum m r^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta.$$

les constantes A, B, C désignant les moments d'inertie par rapport aux axes coordonnés, et D, E, F les produits d'inertie.

Pour interpréter géométriquement le résultat auquel nous venons d'arriver, portons de part et d'autre de O , sur chaque droite $O\Omega$, une longueur OS égale à $\frac{1}{\sqrt{\sum m r^2}}$, et cherchons le lieu de ce point S ou (X, Y, Z) . Nous avons $\alpha = \frac{X}{OS}$, $\beta = \frac{Y}{OS}$, $\gamma = \frac{Z}{OS}$, avec $OS^2 = \frac{1}{\sum m r^2}$; en portant ces valeurs dans l'équation (1), il vient :

$$(2) \quad 1 = AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EZX - 2FXY,$$

équation d'une quadrique. Cette quadrique, qui a l'origine comme centre, est nécessairement un ellipsoïde; le rayon vecteur OS est, en effet, toujours réel et fini, puisqu'il a pour valeur $\frac{1}{\sqrt{\sum m r^2}}$ et que le moment d'inertie est toujours positif. Il n'y aurait d'exception que dans le cas où tous les points matériels du système seraient en ligne droite avec O : dans ce cas le moment d'inertie par rapport à cette droite $O\Omega$ serait nul; on voit aussitôt que l'ellipsoïde (2) se réduirait alors à un cylindre de révolution autour de $O\Omega$.

L'ellipsoïde dont l'équation vient d'être établie a reçu le nom d'ellipsoïde d'inertie relatif au point O , ses plans et ses axes de symétrie se nomment plans principaux et axes principaux d'inertie relatifs au point O . L'ellipsoïde relatif au centre de gravité est l'ellipsoïde central d'inertie. En général, il n'y a donc que trois axes principaux d'inertie relatifs à un point; si l'ellipsoïde d'inertie relatif à ce point est de révolution, il y en a une infinité qui sont

les perpendiculaires OL à l'axe de révolution (en outre de cet axe); si c'est une sphère, toute droite passant par le point est axe principal d'inertie par ce point.

Une fois l'ellipsoïde d'inertie relatif au point O tracé, le moment d'inertie par rapport à un axe OL est $\frac{1}{OS^2}$, S désignant le point où la droite OL perce l'ellipsoïde. De toutes les droites menées par O , celle qui correspond au plus petit moment d'inertie est donc le grand axe de l'ellipsoïde.

99 - Conclusions sur le calcul des moments d'inertie.

Quand on connaît la masse totale M d'un système donné de masses, la position (ξ, η, ζ) du centre de gravité, et l'ellipsoïde d'inertie de ces masses relatif à un point O , les théorèmes des N^{os} 97 et 98 permettent de calculer immédiatement le moment d'inertie des masses par rapport à une droite quelconque, et l'ellipsoïde d'inertie relatif à un point quelconque.

Si le système donné de masses est un système continu à trois dimensions, le calcul des moments d'inertie de ces masses par rapport à une droite (ou un plan, ou un point) arbitraire se ramènera donc au calcul 1^o des quatre intégrales triples qui déterminent M, ξ, η, ζ ; 2^o des six intégrales qui font connaître les moments d'inertie des masses par rapport à Ox, Oy, Oz et les trois produits d'inertie. On choisira le point O de façon que ce dernier calcul soit le plus simple possible. En particulier, dans beaucoup d'applications, il y aura lieu de prendre le point G comme origine, c'est-à-dire de déterminer l'ellipsoïde central d'inertie.

Dans les cas simples, des considérations de symétrie simplifient notablement le calcul précédent. Par exemple, si le corps est une barre homogène de longueur $2l$ et de densité ρ , le centre de gravité de la barre est le milieu G de AB , sa masse est $2\rho l$, et la quadrique d'inertie relative à G est un cylindre de révolution autour de AB , de rayon $\sqrt{\frac{Ml^2}{3}}$.

Si le corps est un cercle homogène de densité ρ et de rayon l , le centre de gravité G est le centre du cercle, sa masse est $\pi\rho l^2$, et l'ellipsoïde central d'inertie est un ellipsoïde

de révolution allongé ayant comme axe de révolution la perpendiculaire Gz au plan du cercle, et comme demi-axes $\frac{\sqrt{M}}{2}l$, $\frac{\sqrt{M}}{2}l$, $\frac{\sqrt{M}}{2}l$.

Si le corps est un ellipsoïde homogène, dont les demi-axes sont a, b, c et la densité ρ , le centre de gravité est le centre de l'ellipsoïde, la masse totale est $\frac{4\pi\rho}{3}abc$; l'ellipsoïde central d'inertie a pour plans de symétrie les plans de symétrie de l'ellipsoïde et comme demi-axes $\sqrt{\frac{5}{M(c^2+a^2)}}$, $\sqrt{\frac{5}{M(c^2+a^2)}}$, $\sqrt{\frac{5}{M(a^2+b^2)}}$. Si l'ellipsoïde matériel est de révolution, l'ellipsoïde d'inertie est aussi de révolution. Si c'est une sphère, l'ellipsoïde d'inertie est une sphère.

Dans tous ces cas particuliers, on sait donc calculer bien aisément le moment d'inertie du corps par rapport à une droite quelconque. Il en serait de même si le corps était une circonférence homogène, ou une sphère creuse homogène, etc.

100. — Remarque sur les axes de l'ellipsoïde d'inertie. Un ellipsoïde quelconque ne peut pas toujours être considéré comme un ellipsoïde d'inertie. Si l'on rapporte en effet à ses axes un ellipsoïde d'inertie, son équation devient

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1,$$

ou A, B, C sont les moments d'inertie

(3) $A = \sum m(y^2 + z^2)$, $B = \sum m(z^2 + x^2)$, $C = \sum m(x^2 + y^2)$ par rapport aux trois axes; il suit de ces formules que l'une quelconque des grandeurs A, B, C est au plus égale à la somme des deux autres. Si on veut encore, A, B, C satisfont aux inégalités qui expriment qu'on peut construire un triangle de côtés A, B, C . Par exemple, lorsque l'ellipsoïde de révolution est allongé, il peut être aussi allongé qu'on veut; car si Oz est l'axe de révolution, A, B, C sont alors astreints à la seule condition: $C < 2A$, condition toujours remplie si $\frac{1}{\sqrt{C}} > \frac{1}{\sqrt{A}}$; mais si l'ellipsoïde de révolution est aplatie, son aplatissement est au plus égal à $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$, car l'égalité $C < 2A$ entraîne: $c > \frac{a}{\sqrt{2}}$, ($a, b = a, c$ désignant les demi axes de l'ellipsoïde).

Si le solide est une plaque d'épaisseur infiniment petite,

située dans le plan xoy , l'un des axes principaux relatifs à O est Oz , par raison de symétrie; soient Ox et Oy les deux autres. Alors, z étant nul, les formules (3) montrent que :

$$C = A + B.$$

Exercice. - On verra, à titre d'exercice, que, pour que l'ellipsoïde d'inertie puisse en quelque point de l'espace se réduire à une sphère, il faut et il suffit que l'ellipsoïde central d'inertie soit un ellipsoïde de révolution aplati; il existe alors sur son axe de révolution deux points symétriques par rapport au centre de gravité pour lesquels la condition est satisfaite.

101. Conditions pour qu'un axe Oz soit principal pour le point O .

Cherchons les conditions pour que l'un des axes de coordonnées, soit Oz , soit axe principal d'inertie pour le point O . Il faut et il suffit que l'équation de l'ellipsoïde d'inertie [éq. (2) du N° 98] ne renferme pas de termes du premier degré en z , c'est-à-dire que l'on ait :

$$D = 0, \quad E = 0,$$

ou bien

$$(4) \quad \sum myz = 0, \quad \sum mxz = 0.$$

L'axe des z , étant axe d'inertie pour le point O , ne le sera pas en général pour un autre point O' de Oz . Pour exprimer que Oz est aussi axe principal d'inertie pour le point O' de Oz (de cote $OO' = h$), il faudrait d'après ce qui précède, joindre aux équations (4) les conditions nouvelles:

$$(5) \quad \sum my(z-h) = 0, \quad \sum mx(z-h) = 0,$$

obtenues en transportant l'origine en O' . En les combinant avec les premières, ces équations se réduisent à

$$\sum my = 0, \quad \sum mx = 0,$$

équations qui expriment que Oz renferme le centre de gravité du corps. Si cette condition est remplie l'axe Oz est axe principal d'inertie pour un quelconque O' de ses points, du moment qu'il est principal pour un point O particulier. D'où ce théorème :

Théorème. — Pour qu'une droite soit axe principal d'inertie pour deux de ses points, il faut et il suffit qu'elle soit un des axes de l'ellipsoïde central d'inertie; elle est alors axe principal d'inertie pour tous ses points.

Pour que l'axe oz soit principal par rapport à un de ses points non donné il faut et il suffit que les équat. (5) [où $\sum myz$, $\sum mxz$ ne sont plus nulles] soient compatibles. Autrement dit, il faut et il suffit qu'on ait :

$$\frac{\sum mxz}{\sum mx} = \frac{\sum myz}{\sum my} ,$$

et la valeur commune de ces rapports fait connaître le z du point O' pour lequel oz est principal.

Il est évident que si un corps est symétrique par rapport à un plan, soit le plan xOy , ce plan est plan principal d'inertie pour chacun de ses points; autrement dit, toute perpendiculaire, soit oz , au plan est axe principal d'inertie pour O . En effet, à tout point P ou (x, y, z) , de masse m , du corps correspond un point P' ou $(x, y, -z)$ de même masse, et les sommes

$\sum myz$, $\sum mxz$
sont nulles.

107. Détermination expérimentale des moments d'inertie.

Nous verrons plus loin comment la théorie du pendule composé permet de déterminer expérimentalement un moment d'inertie. Divers appareils ont été inventés par M. Brassine [Comptes-rendus, tome XIV, page 446], par M. Marcel Deprez [ibid. tome LXXIII, p. 785], par M. Jonkowski [Bulletin de l'Association française pour l'avancement des sciences, 1889, page 23], etc., pour effectuer expérimentalement cette détermination.

Les intégrateurs mécaniques permettent également d'évaluer les moments d'inertie (voir le Traité de Statique de M. Maurice Lévy).

Chapitre IV. Dynamique générale des solides.

Mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe.

103. Equation du mouvement.

La position du solide ne dépend que d'un seul paramètre, l'angle dont le corps a tourné autour de l'axe à partir d'une position déterminée.

La liaison étant sans frottement⁽¹⁾, le théorème des forces vives détermine le mouvement. Soit OZ l'axe fixe de rotation, MK^2 le moment d'inertie du solide autour de OZ , ω la vitesse angulaire à l'instant t comptée positivement de gauche à droite autour de OZ . La force vive du solide est $MK^2\omega^2$ (1^{ère} année, p. 161).

Soit d'autre part \vec{F} ou (X, Y, Z) la force extérieure donnée qui s'exerce sur un élément P du solide; le travail des forces \vec{F} dans la rotation ωdt du solide est (1^{ère} année, p. 149)

$$\omega dt \sum (xY - yX).$$

D'où l'égalité :

$$d \frac{1}{2} MK^2 \omega^2 = \omega dt \sum (xY - yX), \text{ ou encore}$$

$$(1) \quad MK^2 \frac{d\omega}{dt} = \sum (xY - yX).$$

On serait arrivé à la même équation (1) en appliquant le théorème des moments par rapport à OZ ; les seules réactions extérieures sont les réactions de l'axe dont le moment par rapport à OZ est nul; or le

moment cinétique par rapport à OZ , du solide est (1^{ère} année, p. 161) $MK^2\omega$; d'où l'équation :

$$MK^2 \frac{d\omega}{dt} = \sum (xY - yX).$$

⁽¹⁾ Dans la liaison idéale, les contacts ont lieu sur l'axe. Mais dans la réalité, les contacts ont lieu à une petite distance de l'axe et entraînent des frottements [1^{ère} année, p. 381-388] Nous reviendrons plus loin sur l'étude de ces frottements.

104. Réactions de l'axe.

Supposons que le solide soit fixé par deux de ses points O et O' . Soient R et R' les réactions des appuis sur les deux éléments O et O' du solide. Le théorème du mouvement du centre de gravité nous donne, (ξ, η, ζ désignant les coordonnées du centre de gravité G du solide):

$$(2) \quad \begin{aligned} M\xi'' &= R_x + R'_x + \Sigma X, \\ M\eta'' &= R_y + R'_y + \Sigma Y, \\ M\zeta'' &= R_z + R'_z + \Sigma Z. \end{aligned}$$

Le théorème des moments des quantités de mouvement appliqué à Ox et à Oy donne (en appelant h le z du point O'):

$$(3) \quad \begin{cases} \Sigma m(yz'' - zy'') = -hR'_y + \Sigma(yZ - zY) \\ \Sigma m(zx'' - xz'') = hR'_x + \Sigma(zX - xZ). \end{cases}$$

Ces deux dernières équations déterminent R'_y et R'_z ; les deux premières équations (2) déterminent R_x et R_y ; et la troisième détermine la somme $R_z + R'_z$. Les deux réactions (R) et (R') ne sont définies qu'à l'addition près de deux forces égales et directement opposées appliquées respectivement en O et O' . Pour calculer exactement R_z et R'_z , il faut tenir compte de la déformation du corps, et recourir à la théorie de l'élasticité: les valeurs de R_z et de R'_z diffèrent suivant les propriétés élastiques attribuées à la matière du solide et des appuis. Suivant une terminologie déjà employée, [1^{ère} année, page 362] les liaisons matérielles sont ici, surabondantes: il suffit, pour assurer la fixité de l'axe de rotation du corps, d'astreindre le point O' du solide à glisser sans frottement sur Oz , et de fixer le point O du solide; dans ces conditions, $R'_z = 0$ et R_z est donné par la 3^e équation (2).

Explicitons les équations (2) et (3). Nous avons:

$$\begin{aligned} x' &= -\omega y, & y' &= \omega x, & z' &= 0 \\ x'' &= -\omega^2 x - \omega y, & y'' &= -\omega^2 y + \omega x, & z'' &= 0 \end{aligned}$$

Les équations (2) et (3) deviennent:

$$(4) \quad \begin{cases} -\omega^2 M \xi - \omega' M \eta = R_x + R'_x + \Sigma X \\ -\omega^2 M \eta + \omega' M \xi = R_y + R'_y + \Sigma Y \\ 0 = R_z + R'_z + \Sigma Z \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} \omega^2 \Sigma myz - \frac{d\omega}{dt} \Sigma mxz = -h R'_y + \Sigma (yZ - zY) \\ -\omega^2 \Sigma mxz - \frac{d\omega}{dt} \Sigma myz = h R'_x + \Sigma (zX - xZ) \end{cases}$$

Les sommes Σmxz , Σmyz varient avec le temps, ainsi d'ailleurs que ξ, η . Introduisons des axes (ox, y, z) liés invariablement au solide, le plan zOx , renfermant le point G et coïncidant avec zOx pour $t=0$. Si θ désigne l'angle x, ox , on a, pour le centre de gravité G :

$$\xi = l \cos \theta, \quad \eta = l \sin \theta$$

et pour un point P quelconque du solide:

$$x = x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta, \quad y = x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta, \quad z = z_1,$$

x_1, y_1, z_1 désignant des constantes, d'où on déduit:

$$\Sigma myz = \sin \theta \Sigma mx_1 z_1 + \cos \theta \Sigma my_1 z_1,$$

$$\Sigma mxz = \cos \theta \Sigma mx_1 z_1 - \sin \theta \Sigma my_1 z_1,$$

et les sommes qui entrent dans le second membre de ces dernières équations sont indépendantes du temps.

105. - Cas particuliers.

Les formules précédentes se simplifient quand l'axe de rotation est axe principal d'inertie par rapport au centre de gravité. On a en effet, dans ce cas:

$$\Sigma mx = 0, \quad \Sigma my = 0, \quad \Sigma mxz = 0, \quad \Sigma myz = 0.$$

Les équations (4) et (5) deviennent:

$$\begin{aligned} R_x + R'_x + \Sigma X &= 0, & R_y + R'_y + \Sigma Y &= 0, & R_z + R'_z + \Sigma Z &= 0, \\ -h R'_y + \Sigma (yZ - zY) &= 0, & h R'_x + \Sigma (zX - xZ) &= 0, \end{aligned}$$

équations qui coïncident avec celles qui donnent les réactions de l'axe dans le cas de l'équilibre.

Pour interpréter géométriquement ce résultat, construisons avec O comme origine la somme géométrique des forces extérieures données, soit \vec{OH} , et le moment résultant par rapport à O de ces forces, soit \vec{OK} . Nous pouvons, sans rien changer dans les équations des Nos 104-105, remplacer les forces extérieures données par une force \vec{OH} et un couple d'axe \vec{OK} ; décomposons ce couple en deux, dont l'un a son axe ON dirigé suivant OZ et dont l'autre a son axe OL perpendiculaire à OZ . Si on supprimait le couple ON en soumettant le corps seulement à la force \vec{OH} et au couple \vec{OL} , le corps supposé immobile serait en équilibre et les réactions de l'axe seraient certaines forces R et R' . Si maintenant on lance le corps avec une vitesse angulaire initiale quelconque et si on fait agir le couple ON , le corps se meut, mais les réactions de l'axe restent ce qu'elles étaient dans l'équilibre.⁽¹⁾

106. - Remarque sur les valeurs des réactions.

Les formules (4) et (5) montrent quel intérêt il y a, dans une machine, à ce que les pièces tournantes, comme les volants, tournent autour d'un axe central d'inertie (axe principal par rapport au centre de gravité). Car s'il n'en est pas ainsi, le carré de la vitesse angulaire figure dans les valeurs des réactions; dès lors, quand la vitesse angulaire devient grande, les réactions, et par suite les pressions sur l'axe, deviennent très grandes et peuvent amener des ruptures ou des arrachements de l'axe.

On peut calculer également la réaction intérieure totale qui s'exerce sur un élément quelconque P du solide. En effet, on connaît l'accélération \vec{y} de P à chaque instant, accélération qui a comme composantes:

$$-\omega^2 x - \omega' y, \quad -\omega^2 y + \omega' x, \quad 0$$

Si m est la masse du point, \vec{F} la force donnée appliquée

⁽¹⁾ à une addition près peut être de deux forces égales et directement opposées appliquées en O et O' .

au point, \bar{P} la réaction totale qui s'exerce sur P ; on a :

$$m\bar{y} = \bar{F} + \bar{P}$$

d'où la valeur de \bar{P} qui dépend en général du carré de ω ⁽¹⁾. Il faut donc se garder dans les applications, de donner à ω des valeurs telles que les réactions \bar{P} dépassent la limite de résistance des pièces qui tournent.

107. - Axes permanents et axes naturels (ou spontanés) de rotation.

Retournons maintenant au cas où l'axe de rotation est quelconque, et supposons d'abord que les forces données admettent une résultante géométrique passant par O . On aura alors :

$$\Sigma(yZ - zY) = \Sigma(zX - xZ) = \Sigma(xY - yX) = 0.$$

et, d'après (1), $\frac{dL}{dt}$ est nul. Les équations (4) et (5) deviennent :

$$(6) \quad \begin{cases} -\omega^2 M\xi = R_x + R'_x + \Sigma X, \\ -\omega^2 M\eta = R_y + R'_y + \Sigma Y, \\ 0 = R_z + R'_z + \Sigma Z, \\ \omega^2 \Sigma myz = -hR'_y \\ -\omega^2 \Sigma mxz = hR'_x \end{cases}$$

Peut-il arriver, dans ces conditions, que la réaction de O soit nulle ? Il faut pour cela qu'on ait :

$$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma mxz = 0,$$

c'est-à-dire que l'axe Oz soit axe principal d'inertie par rapport au point O .

Admettons que ces conditions soient réalisées : la réaction de O peut être supposée nulle. Ce point n'exerçant aucune réaction sur le solide, le mouvement est le même que si l'appui O n'existait pas. D'où cette

(1) Quand P coïncide avec O ou O' , \bar{P} se compose de la réaction intérieure totale et de \bar{R} [ou de \bar{R}'].

conclusion, que nous vérifierons prochainement d'une façon plus rigoureuse.

Si un solide, mobile autour d'un point fixe O , est soumis à des forces extérieures qui admettent une résultante passant par ce point, et si ce corps tourne initialement autour d'une droite qui est axe principal d'inertie pour O , il continuera indéfiniment à tourner autour de cet axe avec une vitesse angulaire constante.

C'est pour cette raison que les axes principaux O d'inertie sont parfois appelés axes permanents de rotation.

Supposons maintenant qu'il n'y ait aucune force donnée appliquée au corps. Dans les équations (6), il faut faire :

$$\Sigma X = \Sigma Y = \Sigma Z = 0.$$

Peut-il arriver alors que la réaction du point O soit nulle en même temps que celle de O' ? Il faut pour cela, que les conditions :

$$\Sigma mxz = 0, \quad \Sigma myz = 0, \quad \Sigma mx = 0, \quad \Sigma my = 0$$

soient remplies à la fois, c'est-à-dire que l'axe OZ soit un axe central d'inertie. D'où ce théorème, qui sera également vérifié par la suite :

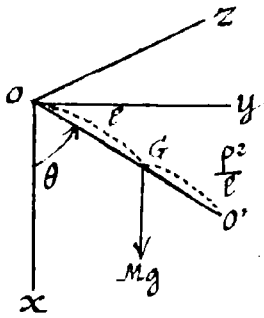
Si un corps solide entièrement libre et qui n'est soumis à aucune force extérieure tourne initialement autour d'un des axes de l'ellipsoïde central d'inertie, il tourne indéfiniment autour de cet axe avec une vitesse angulaire constante.

C'est pour cette raison qu'on donne souvent aux axes de l'ellipsoïde central d'inertie le nom d'axes naturels ou axes spontanés de rotation.

108 - Pendule composé.

Le pendule composé est constitué par un corps solide pesant assujéti à tourner autour d'un axe horizontal fixe.

Prenons comme axe des z l'axe de suspension autour duquel peut tourner le corps, et pour plan des xy le plan vertical qui contient le cercle décrit par le centre de gravité G , l'axe ox étant la verticale descendante.



Soit, à l'instant t , θ l'angle xOG que fait la droite OG avec la verticale ox ; la vitesse angulaire, à cet instant, est $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, et l'équation du mouvement:

$$(1) \quad M K^2 \frac{d\omega}{dt} = \Sigma (xY - yX);$$

le second membre, moment résultant des poids par rapport à oz , est le moment $-Mgl \sin \theta$ du poids total appliqué au

centre de gravité G , dont l'ordonnée est $l \sin \theta$. D'où finalement l'équation:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = - \frac{gl}{K^2} \sin \theta,$$

équation du mouvement d'un pendule simple dont la longueur l' serait $\frac{K^2}{l}$. Ce pendule simple est appelé pendule synchrone du pendule composé.

Si, sur la droite OG , on porte une longueur $OO' = l'$, le point O' du corps oscille comme s'il était détaché du corps et relié au point O par un fil sans masse. Désignons par ρ le rayon de gyration du corps par rapport à un axe ρ passant par G et parallèle à oz ; on a [N°]:

$$MK^2 = M\rho^2 + Ml^2,$$

donc

$$l' = \frac{K^2}{l} = l + \frac{\rho^2}{l}.$$

La distance OO' est donc toujours supérieure à OG , et les distances OG , $O'G$ qui ont respectivement pour valeurs l et $\frac{\rho^2}{l}$, sont liées par la relation:

$$(3) \quad OG \cdot O'G = \rho^2;$$

l'axe mené par O' parallèlement à l'axe de suspension se nomme axe d'oscillation. Tous les points de cet axe oscillent comme s'ils étaient séparés du corps et reliés à l'axe de suspension par des fils sans masse. La formule (3) montre que les deux axes d'oscillation et de suspension sont réciproques: si on suspend le corps par l'axe d'oscillation, le nouvel axe d'oscillation est l'ancien axe de suspension.

Ce théorème peut se traduire encore par le théorème suivant:

Théorème de Huyghens. - Si, dans un plan passant

par le centre de gravité G, de part et d'autre de ce plan, on connaît deux axes de suspension parallèles, inégalement distants de G et pour lesquels la longueur du pendule synchrone est la même, cette longueur est précisément égale à la distance des deux axes.

Si, en effet, l et l_1 sont les distances du centre de gravité aux deux axes, et l' la longueur commune du pendule synchrone on a :

$$l' = l + \frac{f^2}{l} \text{ et } l' = l_1 + \frac{f^2}{l_1}, \text{ d'où :}$$

$$l + \frac{f^2}{l} = l_1 + \frac{f^2}{l_1},$$

équation du second degré en l_1 qui a comme racines : $l_1 = l$ (à rejeter) et $l_1 = \frac{f^2}{l}$. La distance $l + l_1$ des deux axes est donc bien égale à la l' longueur $l + \frac{f^2}{l}$ du pendule synchrone ; l'un des axes étant pris pour axe de suspension, l'autre est l'axe d'oscillation.

Remarque. - Si l'axe de suspension varie dans le corps parallèlement à lui-même, la formule : $l' = l + \frac{f^2}{l}$ montre que la longueur l' du pendule synchrone est minima quand les deux termes l et $\frac{f^2}{l}$ sont égaux, c'est-à-dire quand l'axe de suspension est à une distance du centre de gravité égale à f ; cette valeur minima de l' est égale à $2f$. Si on se donne la longueur l' ($> 2f$), il existe deux valeurs correspondantes de l , les axes de suspension, parallèles à une direction donnée pour lesquels le pendule simple synchrone a la même longueur l' , engendrent donc deux cylindres de révolution dont l'axe passe par G, l'un de rayon plus petit que f , l'autre de rayon plus grand que f .

La considération de l'ellipsoïde d'inertie permettrait d'étudier bien aisément les variations de l' quand la direction de l'axe de suspension varie.

109. - Applications du pendule composé.

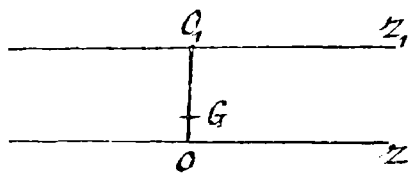
La durée T d'une petite oscillation du pendule composé est donnée par : $T = \pi \sqrt{\frac{I'}{g}}$, ou plus exactement par : $\pi \sqrt{\frac{I'}{g}} \left[1 + \frac{\alpha^2}{16} \right]$, α désignant l'angle maximum d'écart.

avec la verticale.

Si on connaît exactement l' , on peut donc, en faisant osciller un pendule composé⁽¹⁾ et en mesurant la durée et l'amplitude des petites oscillations, calculer g en un point de la terre. C'est ainsi qu'à Paris l'accélération de la pesanteur réduite au niveau de la mer, a été trouvée égale à $9^m,809$ (Expériences du Colonel Desforges).

Inversement, si on connaît g en un lieu de la terre, il suffit de faire osciller un solide autour d'un axe de suspension OZ et de mesurer T pour connaître la longueur l' : cette longueur l' donne le moment d'inertie du solide par rapport à OZ , si on connaît le centre de gravité du solide (et par suite l').

Pendule réversible de Kater. — En géodésie, on emploie le pendule composé pour mesurer g en un point quelconque de la terre; mais il faut connaître très exactement la longueur l' du pendule synchrone, longueur qui (même pour un appareil donné) varie avec la température, les déformations permanentes, etc. Aussi emploie-t-on souvent le pendule réversible de Kater qui repose sur le théorème de Huyghens. Ce pendule peut osciller autour de deux axes de suspension parallèles, soit OZ et O_1Z_1 , dont le plan renferme le centre de gravité G du solide; en déplaçant une masse de plomb dans le solide, on fait coïncider G avec un point arbitraire du segment OO_1 , perpendiculaire aux deux axes de suspension. On amène par tâtonnement le point G dans



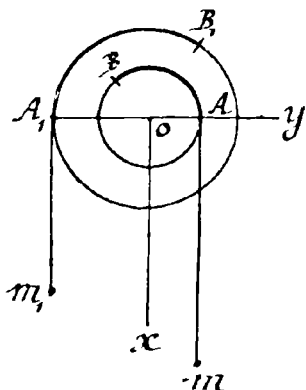
une position inégalement distante des deux axes et telle que les petites oscillations du pendule autour de OZ et de O_1Z_1 aient même durée. En vertu

du théorème de Huyghens, la distance des deux axes est la longueur l' du pendule synchrone.

(1) Tout pendule matériel est un pendule composé; le pendule simple n'est qu'un cas idéal.

110. Mouvement du treuil.

Un treuil⁽¹⁾ homogène et mobile autour d'un axe horizontal, porte enroulé en sens inverse sur chacun de ses deux cylindres, un fil flexible et sans masse. Ces fils supportent deux masses m et m_1 pesantes.



Étudier le mouvement du système.

Les portions de fil qui ne sont pas en contact avec le treuil sont rectilignes, et de plus verticales, car la tension aux extrémités m et m_1 est verticale. Les points A, A_1 où les deux fils quittent les deux cylindres sont donc dans le plan de symétrie horizontal du treuil. Le système est à liaisons complètes: si on connaît l'angle θ dont a tourné le treuil autour de son axe, on connaît

la position des points d'attache B et B_1 des deux fils, et par suite la position de m et de m_1 .

Soit Ox la verticale descendante, Oy la demi-droite OA , Oz l'axe du treuil [le trièdre $Oxyz$ étant comme toujours dextrogyre]; soit ω la vitesse angulaire du treuil en grandeur et signe. La vitesse du point m ne diffère pas de celle du point A de premier cylindre; elle est verticale et égale (en grandeur et signe) à $x' = -r\omega$ [$r = OA$]; la vitesse du point m_1 est également verticale et égale (en grandeur et signe) à $x'_1 = r_1\omega$, [$r_1 = OA_1$]. Le théorème des moments⁽²⁾ appliqué à Oz , n'introduisant aucune réaction, va définir le mouvement. Le moment cinétique, par rapport à Oz , du système est (MK^2 désignant le moment moment d'inertie du treuil par rapport à son axe):

$$-mK^2\omega + mr^2\omega + m_1r_1^2\omega;$$

le moments des poids par rapport à Oz se réduit à $(mgr + m_1gr_1)$. Le théorème des moments donne donc:

$$(MK^2 + mr^2 + m_1r_1^2)\frac{d\omega}{dt} = (m_1r_1 - mr)g;$$

(1) On voit qu'un treuil est un solide formé par deux cylindres de révolution de même axe invariablement liés. La figure représente la projection du système sur une section droite des deux cylindres.

(2) On pourrait appliquer aussi bien le théorème des forces vives.

$\frac{d\omega}{dt}$ étant une constante, il en est de même de $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2x_1}{dt^2}$; les deux masses m et m_1 ont un mouvement uniformément varié; on vérifie d'ailleurs que leurs accélérations (en valeur absolue) sont moindres que g . Le mouvement est uniforme si: $mR = m_1R_1$.

Pour calculer les tensions du fil Am , il suffit d'écrire l'équation du mouvement: du point m :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - T,$$

qui donne:

$$T = m \left[g - \frac{d^2x}{dt^2} \right] = m \left(g + R \frac{d\omega}{dt} \right);$$

on trouverait de même (pour la tension T_1 du second fil).

$$T_1 = m_1 \left[g - R_1 \frac{d\omega}{dt} \right].$$

Enfin, calculons les réactions de l'axe en admettant que le treuil soit symétrique par rapport au plan xOy , et que par suite les réactions de l'axe (symétriques par rapport à ce plan) puissent être remplacés par une force unique R située dans ce plan. Appliquons, au système treuil et fils (les masses m et m_1 étant regardées comme extérieures) le théorème du centre de gravité: comme ici ce point (centre du treuil) est fixe, la somme géométrique $R + Mg + T + T_1$ de toutes les forces extérieures qui s'exercent sur le treuil est nulle. Il suit de là que R est verticale, dirigée vers le haut et égale en valeur absolue à:

$$(M + m + m_1)g - \frac{(m_1R_1 - mR)^2 g}{MR^2 + mR^2 + m_1R_1^2};$$

cette quantité, toujours moindre que la somme des trois poids (du treuil, de m et de m_1), ne lui est égale que si $mR = m_1R_1$, cas où le mouvement du système est uniforme.

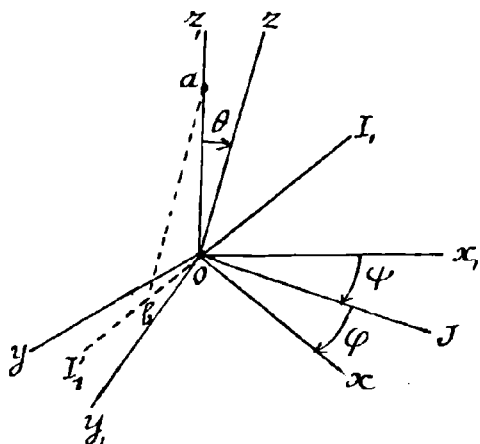
Si $R = R_1$, le problème traité n'est autre que celui de la machine d'Atwood.

Mouvement d'un solide autour d'un point fixe.

111. - Mise en équation du problème. - La position du solide S dépend de trois paramètres. Pour calculer le mouvement nous appliquerons, comme au N° 50, le théorème des moments cinétiques par rapport au point fixe O : soit $O\mathcal{K}$ le moment cinétique de S par rapport à O ; nous exprimerons que la vitesse de \mathcal{K} est équipollente au moment résultant par rapport à O des forces extérieures appliquées à S ; la réaction de O ne donne rien dans ce moment résultant.

C'est d'Alembert qui a mis le premier en équation le problème qui nous occupe. C'est Euler qui a donné aux équations du mouvement la forme élégante à laquelle nous allons parvenir.

112. - Angle d'Euler. - Les trois paramètres qui définissent la position de S peuvent être choisis comme au N° 48.



Soit Ox, y, z , les axes fixes, Ox_1, y_1, z_1 un trièdre trirectangle positif invariablement lié au solide. Soit θ l'angle z, z_1 compris entre O et π ; soit OJ la perpendiculaire au plan z, z_1 ⁽¹⁾ menée dans un sens tel que l'angle z, z_1 compté autour de OJ soit positif, et soit ψ l'angle x, OJ compté positivement.

autour de oz_1 . Soit enfin φ l'angle J, OJ compté positivement autour de oz_1 . Connaissant la position du trièdre $oxyz$, on connaît sans ambiguïté les angles θ, ψ, φ (à un multiple près de 2π).

Inversement, si on connaît ψ, θ, φ les demi-droites

⁽¹⁾ OJ est l'intersection des plans xoy et x_1oy_1 . La figure est faite dans le cas où le plan z, ox_1 , étant le plan du tableau et oy_1 venant en avant, oz_1 fait avec oz , un angle aigu et est dirigé en arrière du plan du tableau et à droite du plan z, oy_1 .

OJ , OZ , OX sont déterminées sans ambiguïté, par suite le trièdre $Oxyz$ (qui est positif); la position de S est donc parfaitement définie (n° 48).

Par extension, nous donnerons encore aux angles ψ , θ , φ les noms d'angle de précession, d'angle de nutation et d'angle de rotation propre. OJ est appelée parfois, comme en astronomie, la ligne des nœuds.

Ses 9 cosinus des trois axes mobiles s'expriment aisément à l'aide des trois angles d'Euler. Indiquons seulement l'expression des trois cosinus, soit γ , γ_1 , γ_2 , des angles de Ox , Oy , Oz avec Oz_1 .

Soit OI' la projection sur le plan xoy de la demi-droite Oz_1 ; l'angle ⁽¹⁾ $\widehat{JOI'}$ (compté autour de Oz) est égal à $\bar{\alpha} + \frac{\pi}{2}$. Prenons sur Oz_1 un segment Oa égal à l'unité; la projection Ob de Oa sur le plan xoy est dirigé selon la demi-droite OI' et égal à $\sin \theta$. Il suit de là que la projection de Oa est égale (en grandeur et signe) sur Ox à $\sin \theta \cos x\widehat{OI'} = \sin \theta \sin \varphi$, sur Oy à $\sin \theta \cos y\widehat{OI'} = \sin \theta \cos \varphi$, enfin sur Oz à $\cos \theta$. Ses cos. directeurs γ , γ_1 , γ_2 de Oz_1 , par rapport à $Oxyz$ sont donc :

$$(1) \quad \gamma = \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma_1 = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma_2 = \cos \theta.$$

Ces expressions nous seront utiles par la suite.

113. - Décomposition de la rotation instantanée $\overline{d\omega}$ du trièdre mobile.

On sait [n° 49] qu'on peut passer de la position ψ, θ, φ du trièdre mobile à la position $\psi + \Delta\psi, \theta + \Delta\theta, \varphi + \Delta\varphi$ par une rotation $\Delta\psi$ autour de Oz_1 (précession), puis par une rotation $\Delta\theta$ autour de OJ (nutation), enfin par une rotation $\Delta\varphi$ autour de OZ (rotation propre). Ceci s'applique notamment si les deux positions sont infiniment voisines, et on déduit de là les composantes de $\overline{d\omega}$

les trois droites Oz_1 , OJ et OZ ; ces composantes sont ψ', θ', φ' .

Appelons, d'autre part, p, q, r les composantes de $\overline{d\omega}$ suivant les trois axes mobiles $Oxyz$. Pour calculer p il suffit de projeter sur Ox les trois vecteurs ψ', θ', φ' portés sur Oz_1 , OJ , OZ et de faire la somme. On trouve ainsi :

(1) OI' a le sens inverse de la demi-droite Oz_1 du n° 49.

$$(2) \begin{cases} p = \psi' \cos(z, ox) + \theta' \cos(JOx) = \psi' \sin \theta \sin \varphi + \theta' \cos \varphi \\ q = \psi' \cos(z, oy) + \theta' \cos(JOy) = \psi' \sin \theta \cos \varphi - \theta' \sin \varphi \\ r = \psi' \cos(z, oz) + \varphi' = \psi' \cos \theta + \varphi' \end{cases}$$

Quand on connaît p, q, r en fonction de t , les fonctions $\theta(t), \psi(t), \varphi(t)$ s'obtiennent en intégrant le système (2) de trois équations différentielles du 1^{er} ordre. On peut démontrer que l'intégration de ce système se ramène à celle d'une équation de Riccati.

114. - Force vive et moment cinétique du solide.

Force vive du solide. - Soit V la vitesse d'un point P du solide, de masse m , ayant comme coordonnées x, y, z par rapport aux axes $oxyz$ liés au corps. Les composantes de la rotation instantanée du solide suivant ox, oy, oz étant p, q, r , les projections V_x, V_y, V_z de V sur les mêmes axes sont [cours de 1^{ère} année, n°55]:

$$V_x = qz - ry, \quad V_y = rx - pz, \quad V_z = py - qx,$$

et on a:

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = p^2(y^2 + z^2) + q^2(z^2 + x^2) + r^2(x^2 + y^2) - 2qryz - 2rpzx - 2pqxy.$$

Reprenons les notations employées au n°98

$$A = \sum m(y^2 + z^2), \quad B = \sum m(z^2 + x^2), \quad C = \sum m(x^2 + y^2), \\ D = \sum myz, \quad E = \sum mzx, \quad F = \sum mxy;$$

A, B, C sont donc les moments d'inertie du corps par rapport aux axes ox, oy, oz . Nous aurons alors: (1)

$$(3) \quad 2T = \sum m v^2 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq.$$

(1) Cette expression de $2T$ pouvait s'obtenir aussitôt ainsi: Soit a, b, c les cosinus directeurs de la rotation instantanée ω , μ la masse totale du solide et μK^2 son moment d'inertie par rapport à l'axe ω ; la force vive du solide est $\mu K^2 \omega^2$. Mais on a [n°98]:

$$\mu K^2 = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 - 2Dbc - 2Eca - 2Fab;$$

Or $a = \frac{p}{\omega}$, $b = \frac{q}{\omega}$, $c = \frac{r}{\omega}$; il suffit de remplacer a, b, c pour ces valeurs dans l'équation précédente pour retrouver l'expression (3) de $2T$.

Dans ce qui suit, nous prendrons pour axes $Oxyz$ liés au corps les axes principaux d'inertie relatifs au point O ; les coefficients D, E, F sont alors nuls; A, B, C sont les moments principaux d'inertie, et la force vive devient:

$$(4) \quad 2T = Ap^2 + Bq^2 + Cp^2.$$

Moment cinétique du solide.

Soit OK le moment cinétique, par rapport au point O , du solide, et soit K_x, K_y, K_z les composantes de OK suivant les axes mobiles $Oxyz$. La quantité de mouvement du point P a pour projections sur Ox, Oy, Oz :

$$mV_x, mV_y, mV_z.$$

La quantité K_x , moment cinétique de S par rapport à Ox est donc:

$$K_x = \sum m(yV_z - zV_y) = \sum m[p(y^2 + z^2) - qxy - rzx].$$

La dernière expression, si on tient compte des relations $D = E = F = 0$, se réduit à: $p \sum m(x^2 + y^2) = Ap$. On obtient K_y et K_z en permutant. D'où en définitive:

$$(5) \quad K_x = Ap, \quad K_y = Bq, \quad K_z = Cp.$$

115. - Equations du mouvement (équations d'Euler).

Soient L, M, N les moments résultants, par rapport aux axes mobiles $Oxyz$ de toutes les forces extérieures (autres que la réaction de O). Exprimons que la vitesse \bar{W} du point R (par rapport au trièdre fixe Ox, y, z) est équivalente, à chaque instant t , au vecteur L, M, N ; autrement dit, qu'on a:

$$(6) \quad W_x = L, \quad W_y = M, \quad W_z = N.$$

Le point R a pour coordonnées (par rapport à $Oxyz$) K_x, K_y, K_z ; soit \bar{W}_p la vitesse de R par rapport au trièdre mobile $Oxyz$, et \bar{W}_c la vitesse, par rapport au trièdre fixe, du point coïncidant (point lié invariablement à $Oxyz$ qui coïncide avec R à l'instant t considéré). On a:

$$\bar{W} = \bar{W}_p + \bar{W}_c.$$

Or les composantes de \bar{W}_r suivant les axes $Oxyz$ sont $\frac{dR_x}{dt}$, $\frac{dR_y}{dt}$, $\frac{dR_z}{dt}$; les composantes de \bar{W}_e sont :

$$qR_z - rR_y, \quad rR_x - pR_z, \quad pR_y - qR_x$$

On a donc :

$$W_x = \frac{dR_x}{dt} + qR_z - rR_y = A \frac{dp}{dt} + (C-B)qr,$$

et de même, en permutant :

$$W_y = B \frac{dq}{dt} + (A-C)rp, \quad W_z = C \frac{dr}{dt} + (B-A)pq.$$

En remplaçant W_x, W_y, W_z par ces valeurs dans les équations (6), on obtient les équations du mouvement sous la forme que leur a donnée Euler :

$$(7) \quad \begin{cases} A \frac{dp}{dt} + (C-B)qr = L \\ B \frac{dq}{dt} + (A-C)rp = M \\ C \frac{dr}{dt} + (B-A)pq = N \end{cases}$$

Joignons à ces équations les trois équations (2) :

$$(2) \quad \begin{cases} p = \psi' \sin \theta \cos \varphi + \theta' \cos \varphi \\ q = \psi' \sin \theta \sin \varphi - \theta' \sin \varphi \\ r = \psi' \cos \theta + \varphi' \end{cases}$$

Si toutes les forces extérieures, autres que la réaction de l'appui O , sont données, les quantités L, M, N sont des fonctions connues de $\theta, \varphi, \psi, \theta', \varphi', \psi'$ et de t , ou, si on veut, de $\theta, \varphi, \psi, p, q, r, t$. Les six équations (7) et (2) forment un système de 6 équations du premier ordre pour déterminer les fonctions $\theta, \varphi, \psi, p, q, r$ de t , connaissant les conditions initiales, c'est-à-dire, pour $t = t_0$, les valeurs $\theta_0, \varphi_0, \psi_0, \theta'_0, \varphi'_0, \psi'_0$, ou, si on veut, $\theta_0, \varphi_0, \psi_0, p_0, q_0, r_0$.

Il est loisible encore de remplacer, dans les équations (7), p, q, r par leurs valeurs tirées de (2); on forme ainsi trois équations linéaires en $\theta'', \varphi'', \psi''$ qui définissent les fonctions θ, φ, ψ de t connaissant, pour $t = t_0$, les valeurs $\theta_0, \varphi_0, \psi_0, \theta'_0, \varphi'_0, \psi'_0$.

116. - Réaction du point fixe.

Pour calculer cette réaction \bar{R} , nous appliquerons le théorème du mouvement du centre de gravité sous sa forme géométrique. Soit μ la masse totale du solide, \bar{V} la vitesse de son centre de gravité G ; \overline{Op} le vecteur $\mu\bar{V}$ construit avec O comme origine. Nous allons exprimer que la vitesse du point p (par rapport aux axes fixes Ox, y, z) est équipollente à la somme géométrique de toutes les forces extérieures appliquées au solide [forces données \bar{F} et réaction \bar{R}].

Soit (a, b, c) les coordonnées du point p par rapport aux axes mobiles $Oxyz$; soit X, Y, Z les composantes o suivant les mêmes axes d'une des forces données \bar{F} ; soit enfin R_x, R_y, R_z les composantes (suivant les mêmes axes) de \bar{R} . Le raisonnement du n° précédent nous montre que les composantes suivant Ox, Oy, Oz de la vitesse du point p sont :

$$\frac{da}{dt} + (qc - pb), \quad \frac{db}{dt} + pa - pc, \quad \frac{dc}{dt} + pa - pc.$$

Il ne faut évaluer ces trois expressions respectivement à :

$$R_x + \Sigma X, \quad R_y + \Sigma Y, \quad R_z + \Sigma Z.$$

Mais, d'autre part, si ξ, η, ζ désignent les coordonnées de G par rapport à $Oxyz$ [coordonnées qui sont invariables], on a :

$$a = \mu [q\xi - p\eta], \quad b = \mu [p\xi - p\zeta], \quad c = \mu [p\eta - q\xi].$$

En remplaçant a, b, c par ces valeurs, on obtient trois équations qui donnent R_x, R_y, R_z , et dont j'écris seulement la première, les deux autres s'en déduisent par permutation :

$$(8) \quad \zeta \frac{dq}{dt} - \eta \frac{dp}{dt} + q [p\eta - q\xi] - p [p\xi - p\zeta] = \frac{R_x + \Sigma X}{\mu}.$$

Si le corps est suspendu par son centre de gravité, ξ, η et ζ sont nuls et les équations précédentes se réduisent à :

$$R_x + \Sigma X = 0, \quad R_y + \Sigma Y = 0, \quad R_z + \Sigma Z = 0;$$

\bar{R} est égal et directement opposé à la somme géométrique des autres forces extérieures construite avec O comme origine.

Application des équations d'Euler au cas où les forces extérieures ont une résultante unique passant par le point fixe.

117. - Remarque sur les équations du mouvement.
Le système différentiel (2), (7) qui définit le mouvement est un système du 6^e ordre. Il est un cas remarquable où l'intégration de ce système se simplifie : c'est celui où L, M, N ne dépendent que de p, q, r, t [et en particulier sont des constantes].

Dans ce cas, on peut intégrer à part les équations (7) [système du 3^e ordre]; les fonctions p, q, r de t étant connues, il reste ensuite à intégrer le système (2), qui se ramène, avons-nous dit, à une équation de Riccati.

En particulier, supposons que les forces extérieures admettent une résultante géométrique passant par le point fixe O . Ses quantités L, M, N sont identiquement nulles; et nous avons tout d'abord à intégrer le système:

$$(9) \quad \begin{cases} A \frac{dp}{dt} + (C-B)qr = 0 \\ B \frac{dq}{dt} + (A-C)rp = 0 \\ C \frac{dr}{dt} + (B-A)pq = 0 \end{cases}$$

Ce système a été intégré à l'aide des fonctions elliptiques dans le cours d'Analyse. Je rappellerai brièvement la marche de l'intégration.

118. - Intégrales premières.

Nous savons que la force vive du solide est constante: car le travail des forces extérieures est nul dans ce cas, puisque le point O du solide reste fixe. Nous savons encore que la longueur OK du moment cinétique de S par rapport à O est constante.

La première intégrale se traduit par l'équation:

$$(10) \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h,$$

intégrale qu'on eût déduite immédiatement des égal^{ions} (2) en multipliant les deux membres de la première égal^{ion} (9), par p , ceux de la seconde par q , ceux de la troisième par r ,

et faisant la somme, ce qui donne :

$$Ap \frac{dp}{dt} + Bq \frac{dq}{dt} + Cr \frac{dr}{dt} = 0$$

égalité qui équivaut à (10).

La seconde intégrale [si on remarque que les projections de OD sur les axes rectangulaires $Oxyz$ sont Ap, Bq, Cr], se traduit par l'égalité :

$$(11) \quad A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = l^2,$$

intégrale qu'on eût déduite aussitôt des équations (9), en multipliant les deux membres de la première équation (9) par Ap , ceux de la seconde par Bq , ceux de la troisième par Cr , et faisant la somme, ce qui donne :

$$A^2 p \frac{dp}{dt} + B^2 q \frac{dq}{dt} + C^2 r \frac{dr}{dt} = 0,$$

égalité équivalente à (11).

Connaissant les intégrales premières (10) et (11), il suffit d'en tirer deux des quantités p, q, r en fonction de la troisième, — soit p, r en fonction de q , — de porter dans une des équations (9), — soit la seconde —, pour obtenir une relation en q et $\frac{dq}{dt}$, qui donne t en fonction de q par une quadrature. Le système (9) s'intègre donc à l'aide d'une seule quadrature. Avant de développer le calcul, je ferai quelques remarques sur les équations (10) et (11).

119. — Cône roulette du mouvement.

Il est facile de former, avec les équations (10) et (11) une combinaison homogène en p, q, r . Il suffit de multiplier l'équation (10) par l^2 , l'équation (11) par h , et retrancher membre à membre. Il vient :

$$(12) \quad A (Ah - l^2) p^2 + B (Bh - l^2) q^2 + C (Ch - C^2) r^2 = 0.$$

Les équations de l'axe instantané de rotation par rapport aux axes mobiles sont :

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}.$$

Cet axe décrit donc dans le solide le cône du second ordre :

$$A(Ah - l^2)x^2 + B(Bh - l^2)y^2 + C(CH - l^2)z^2 = 0.$$

Ce cône est le cône roulette du mouvement.

Les équations précédentes entraînent une conséquence remarquable : la projection de la rotation instantanée sur la direction fixe \mathcal{R} (direction du moment résultant, par rapport à O , des quantités de mouvement, est constante. En effet, l'angle de l'axe instantané $O\omega$ avec $O\mathcal{R}$ a pour cosinus :

$$\cos(O\omega, O\mathcal{R}) = \frac{p \cdot Ap + q \cdot Bq + r \cdot Cr}{\omega l} = \frac{h}{\omega l},$$

d'où :

$$\omega \cos(O\omega, O\mathcal{R}) = \frac{h}{l}.$$

Pour mettre l'homogénéité en évidence, substituons aux constantes arbitraires h et l deux nouvelles constantes λ et \mathbb{I} définies ainsi :

$$\frac{h}{l} = \lambda, \quad \frac{l^2}{h} = \mathbb{I};$$

d'où :

$$h = \mathbb{I}\lambda^2, \quad l = \mathbb{I}\lambda.$$

La constante arbitraire λ [projection de ω sur $O\mathcal{R}$] a les dimensions d'une rotation, c'est-à-dire les dimensions T^{-1} ; la constante arbitraire $\mathbb{I} = \frac{l^2}{h}$ a les mêmes dimensions ML^2 que A, B, C : car h a les dimensions MLT^{-2} d'une force vive.

L'équation (12) du cône roulette prend alors la forme :

$$(13) \quad A(A - \mathbb{I})p^2 + B(B - \mathbb{I})q^2 + C(C - \mathbb{I})r^2 = 0.$$

Cas particuliers. - Soit $A > B > C$. La constante \mathbb{I} est sûrement comprise entre A et C ; $A > \mathbb{I} > C$. Autrement, les trois termes du premier membre de (13) seraient de même signe et l'équation (13) ne serait vérifiée que par : $p = q = r = 0$. Si $\mathbb{I} = A$, l'équation :

$$B(B - A)q^2 + C(C - A)r^2 = 0$$

n'est vérifiée que par : $q = 0, r = 0$. Inversement si $q = 0, r = 0$ [avec $p \neq 0$], on a : $A - \mathbb{I} = 0$, et q, r restent constamment nuls. On voit ainsi que, quand le solide commence à tourner autour du plus petit axe d'inertie principal

relatif au point 0, il tourne indéfiniment autour de cet axe, qui, étant fixe dans le solide, est fixe aussi dans l'espace, comme nous le vérifierons d'ailleurs tout à l'heure (N.º 123).

Une conclusion analogue s'applique au cas où $D = C$. L'équation:

$$A(A-C)p^2 + B(B-C)q^2 = 0$$

n'est vérifiée que par: $p=0$, $q=0$. Inversement, si $p_0 = q_0 = 0$, D est égal à C et p , q sont identiquement nuls:

Enfin, si $D = B$, l'équation (13) se décompose et représente deux plans.

120 - Intégration des équations d'Euler dans le cas où $L = M = N = 0$.

Ces remarques faites, effectuons explicitement l'intégration des équations (9). Soient p et r des équations (10) et (11); il vient (en éliminant r):

$$A(A-C)p^2 + B(B-C)q^2 = D(D-C)\lambda^2, \quad (D > C). \text{ D'où:}$$

$$(14) \quad p^2 = \frac{B(B-C)}{A(A-C)} (f^2 - q^2), \text{ avec } f^2 = \lambda^2 \frac{D(D-C)}{B(B-C)}.$$

On aurait de même:

$$(15) \quad r^2 = \frac{B(A-B)}{C(A-C)} (g^2 - q^2) \text{ avec } g^2 = \lambda^2 \frac{D(A-D)}{B(A-B)}, \quad [A > D].$$

Pour que p et r restent réels, il faut que q^2 reste inférieur à la plus petite des deux quantités f^2 et g^2 ; or la différence

$$g^2 - f^2 = \lambda^2 \frac{D(A-C)(B-D)}{B(B-C)(A-B)}$$

a le signe de $(B-D)$; elle s'annule pour $B=D$, et la valeur commune de f^2 , g^2 est alors λ^2 .

Soit, pour fixer les idées, $B > D$, donc $g^2 > f^2$.

La variable q doit alors varier entre $+f$ et $-f$; donc r ne s'annule jamais et conserve toujours le même signe [à savoir le signe de la valeur initiale r_0 de r : soit $r_0 > 0$]. Au contraire p s'annule chaque fois que q atteint une des valeurs $\pm f$; quand q augmente, $\frac{dq}{dt}$ est positif, et l'équation:

$$(16) \quad B \frac{dq}{dt} + (A-C) p r = 0$$

nous montre que p est négatif [puisque r et $(A-C)$ sont > 0]; quand q décroît, p est positif.

Ceci posé, portons les valeurs (14) et (15) de p^2 et r^2 dans l'équation (16) il vient :

$$(17) \quad \frac{dq}{dt} = \sqrt{(f^2 - q^2)(g^2 - q^2)}, \quad [f^2 < g^2], \quad \text{avec } n = \sqrt{\frac{(B-C)(A-C)}{AC}}$$

équation qui nous montre que $q(t)$ est une fonction elliptique de t . Sans revenir ici sur l'introduction des fonctions elliptiques, discutons directement le mouvement d'après l'équation (17).

121. - Discussion du mouvement.

En vertu de l'équation (17), q oscille périodiquement entre $-f$ et $+f$, et la durée $2T$ d'une oscillation simple est donnée par l'intégrale définie ⁽¹⁾.

$$2nT = \int_{-f}^{+f} \frac{dq}{\sqrt{(f^2 - q^2)(g^2 - q^2)}} = 2 \int_0^{+f} \frac{dq}{\sqrt{(f^2 - q^2)(g^2 - q^2)}}$$

avec

$$n = \sqrt{\frac{(B-C)(A-B)}{AC}}$$

Elle est développable en une série de la forme : $A_1 \sin t_1 + A_3 \sin 3t_1 + A_5 \sin 5t_2 + \dots$, où $t_1 = \frac{\pi}{2T} t$.

Connaissant $q(t)$, on a p en fonction de t par l'égalité :

$$p = + \sqrt{\frac{B(A-B)}{C(A-C)}} \sqrt{g^2 - q^2};$$

chaque fois que q^2 reprend la même valeur, il en est de

(1) Il nous est loisible de prendre comme origine du temps un des instants où $q=0$ et où q' est positif. La fonction $q(t)$ est alors [1^{ère} année, p. 233] une fonction impaire de t , et une fonction paire de $t-T$ et de $t+T$; elle admet la période $4T$; au point de vue de la périodicité, de la parité et de l'imparité, elle est tout à fait comparable à la fonction $\sin(\frac{\pi}{2T} t)$.

même de la quantité positive p ; $p(t)$ est donc une fonction paire qui admet la période $2T$. Enfin, p est donné par l'équation:

$$p = \frac{-B \frac{dq}{dt}}{(A-C)p},$$

et comme $\frac{dq}{dt}$ est une fonction paire qui admet la période 4π , on voit que $p(t)$ est une fonction paire qui admet la période $4T$.

L'introduction des fonctions elliptiques conduit aux mêmes résultats. En définitive, p, q, p sont des fonctions de t qui admettent la période $4T$.

122. - Calcul des trois angles d'Euler.

Il faut maintenant calculer les trois angles d'Euler en fonction du temps c'est-à-dire intégrer les équat. (3) [N° 113] connaissant $p(t), q(t), r(t)$. Pour simplifier ce calcul, nous supposerons qu'on ait pris comme axe fixe Oz , la direction invariable Ox du moment cinétique: ce vecteur Ox est connu par les conditions initiales. Écrivons que les projections du vecteur Ox (de longueur l) sur Ox, Oy, Oz sont respectivement Ap, Bq, Cr . Il vient [en se rappelant les valeurs des cosinus $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ des angles de Oz , avec Ox, Oy, Oz (N° 112)]:

$$(18) \quad \begin{cases} l \sin \theta \sin \varphi = Ap, \\ l \sin \theta \cos \varphi = Bq, \\ l \cos \theta = Cr \end{cases}$$

Ces équations donnent sans intégration θ, φ , et sont compatibles en vertu de l'équation (11):

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = l^2.$$

Remarquons que $\cos \theta$ est donné rationnellement en fonction de r ; quant à $\sin \theta$, sa valeur (essentiellement positive d'après nos conventions) est donnée par $+\sqrt{1 - \frac{C^2 r^2}{l^2}}$. D'ailleurs, $\sin \theta$ ne s'annule jamais; car si, à l'instant t_1 , $\sin \theta_1$ est nul, on a, d'après (18), $p = q = 0$ pour $t = t_1$; p et q seraient donc identiquement nuls; on se trouverait dans le cas particulier $C = \Pi$ que nous

avons écarté et sur lequel nous reviendrons. On voit que $\sin \theta$ [ainsi que $\cos \theta$] a la même périodicité que r : $\sin \theta$ et $\cos \theta$ sont des fonctions paires de t , qui admettent la période 2τ .

Enfin, $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ donnés par les expressions $\frac{Ap}{l \sin \theta}$, $\frac{Bq}{l \sin \theta}$, sont des fonctions de t , la première paire et la seconde impaire, admettant la période 4τ .

En résumé, $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ sont des fonctions de t bien déterminées qui admettent la période 4τ .

Calcul de ψ . - Il reste à calculer l'angle ψ . A cet effet, tirons ψ' des équations (2): il suffit, entre les deux premières équations (2):

$$\begin{aligned} p &= \psi' \sin \theta \sin \varphi + \theta' \cos \varphi \\ q &= \psi' \sin \theta \cos \varphi - \theta' \sin \varphi; \end{aligned}$$

d'éliminer θ' pour obtenir:

$$\psi' = \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \theta}.$$

Or les équations (18) nous donnent:

$$p \sin \varphi + q \cos \varphi = \frac{Ap^2 + Bq^2}{l \sin \theta}, \quad l \sin^2 \theta = A^2 p^2 + B^2 q^2;$$

d'où:

$$(19) \quad \psi' = l \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2 p^2 + B^2 q^2} = l \frac{h - C p^2}{l^2 - C^2 p^2}.$$

L'angle ψ est donc donné en fonction du temps par une quadrature: $\frac{d\psi}{dt}$ est positif, l'angle ψ va donc toujours en croissant; le plan z, OZ tourne toujours dans le sens positif autour de la demi droite OZ , c'est-à-dire de Ox . De plus la fonction $\psi'(t)$ est une fonction paire de t qui admet⁽¹⁾ la période 2τ . Il est loisible, pour $t=0$, de supposer $\psi=0$; la fonction $\psi(t)$ est alors une fonction impaire de t qui, quand on augmente t de 2τ , s'augmente d'une certaine constante α ; en effet, on a:

$$\psi(t+2\tau) - \psi(t) = 0, \quad \text{d'où}$$

$$\psi(t+2\tau) - \psi(t) = \psi(2\tau) - \psi(0) = \alpha.$$

Il suit de la discussion précédente, que quand t s'accroît de $4T$, les variables $p, q, r, \sin \theta, \cos \theta, \sin \varphi, \cos \varphi$ reprennent respectivement la même valeur; Ψ reprend la même valeur augmentée d'une constante 2α (qui dépend des conditions initiales). Après un intervalle de temps égal à $4T$ le solide se retrouve donc dans les mêmes conditions et de vitesses à cela près qu'il a tourné autour de OZ , d'un certain angle 2α . Pour que le mouvement soit rigoureusement périodique, il faut et il suffit que α soit commensurable avec π , soit $\alpha = \pi \frac{V'}{V}$ (V, V' nombres entiers premiers entre eux); le mouvement admet alors la période $4TV$.

123. Cas particuliers où D est égal à A ou C .

Nous avons supposé qu'aucun des trois binômes $(A-D), (B-D), (C-D)$ n'est nul. Le mouvement présente des particularités toutes différentes suivant que l'un des binômes extrême, ou le binôme moyen est nul.

1° Soit d'abord $C = D$. Nous avons vu [N° 119] qu'on a nécessairement dans ce cas: $p \equiv 0, q \equiv 0$. L'axe de rotation coïncide avec OZ quel que soit t . Vérifions qu'il est fixe dans l'espace: les deux premières équations (18) montrent que $\sin \theta$ est constamment nul, $\theta \equiv 0$ ou π ; la droite OZ coïncide avec la droite OZ_1 , et la troisième équation (8) donne:

$$r = r_0 = \pm \frac{L}{C} \dots$$

Si on a pris comme sens OZ le sens de OW , r_0 est positif, et on a:

$$r = r_0 = \frac{L}{C} = \lambda \frac{D}{C} = \lambda.$$

2° Soit $A = D$. On a [N°]: $q \equiv r \equiv 0$. L'axe instantané de rotation est constamment dirigé suivant Ox . Vérifions que cet axe, fixe dans le corps, est fixe aussi dans l'espace. Les deux dernières équations (18) donnent: $\theta = \pm \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$, ce qui montre que les droites Ox et OZ_1 coïncident; la première équation (18) donne:

(1) La fonction $\Psi'(t)$ est une fonction elliptique dont $2T$ est la période réelle; pour calculer $\Psi(t)$, on décompose $\Psi'(t)$ en éléments simples par la formule d'Hermite et on intègre terme à terme.

$$p = p_0 = \pm \frac{\ell}{A},$$

et en prenant comme sens ox le sens OW :

$$p = p_0 = \frac{\ell}{A} = \lambda \frac{\Pi}{A} = \lambda.$$

Le fait que, dans les deux cas, l'axe de rotation coïncide avec OZ , tient à ce qu'on a choisi pour axe OZ , le moment résultant OK des quantités de mouvement. Le fait que, dans les deux cas, la vitesse angulaire de rotation est λ tient à ce que λ désigne la projection de OW sur OK et qu'actuellement les deux directions OW et OK se confondent.

124. - Cas particulier où $\Pi = B$.

Soit enfin $\Pi = B$. L'équation (13) du cône roulette se réduit alors [N° 118] à celle de deux plans :

$$(20) \quad Ap^2(A-B) - Cr^2(B-C) = 0.$$

Pour que ce cas se présente, il faut et il suffit qu'on ait au début du mouvement :

$$(21) \quad p_0 = \pm r_0 \sqrt{\frac{C(B-C)}{A(A-B)}},$$

car l'équation (13) peut s'écrire :

$$A(A-B)p^2 - Cr^2(B-C) + (B-\Pi)(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = 0.$$

Quand la condition (21) est remplie, on a quel que soit t :

$$\frac{p}{r} = + \frac{p_0}{r_0}.$$

Le lieu des axes instantanés dans le solide est un plan bien déterminé⁽¹⁾ qui passe par l'axe moyen de l'ellipsoïde d'inertie.

Dans le cas qui nous occupe, on a [N° 119] : $g = f = \lambda$. L'équation (17) qui relie q à t devient :

$$(22) \quad \frac{dq}{dt} = \pm \sqrt{\frac{(B-C)(A-B)}{AC}} (\lambda^2 - q^2) = \pm n(\lambda^2 - q^2),$$

et p et r sont donnés par les égalités :

⁽¹⁾ Sauf dans le cas particulier, que nous examinerons à part, où $p_0 = r_0 = 0$.

$$(23) \quad p = \pm \sqrt{\frac{B(B-C)}{A(A-C)}} \sqrt{\lambda^2 - q^2}, \quad r = \pm \sqrt{\frac{B(A-B)}{C(A-C)}} \sqrt{\lambda^2 - q^2};$$

enfin, d'après l'équation

$$(24) \quad B \frac{dq}{dt} + (A-C)rp = 0,$$

$\frac{dq}{dt}$ est de signe contraire à rp .

Ceci posé, soit d'abord, pour $t=0$, $p_0 = r_0 = 0$; alors $q_0 = \pm \lambda$; or la solution unique $q(t)$ de l'équation (20) qui satisfait à ces conditions initiales est: $q \equiv q_0 = \pm \lambda$. D'où: $p \equiv 0$, $r \equiv 0$. L'axe instantané de rotation coïncide constamment avec Oy . Vérifions qu'il est fixe dans l'espace: d'après la première et la troisième équation (18) on a

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = 0 \text{ ou } \pi,$$

égalités qui montrent que Oy coïncide avec Oz_1 ; la seconde équation (18) donne:

$$q = q_0 = \pm \frac{C}{B} = \pm \frac{D\lambda}{B} = \pm \lambda,$$

d'où $q = \lambda$, quand on a pris comme sens Oy le sens de $\vec{\omega}$.

Si on rapproche ce résultat du résultat obtenu dans les cas $D=C$ et $D=A$, on voit que quand à l'instant initial, le solide tourne autour d'un axe principal d'inertie (relatif à O), il tourne indéfiniment avec la même vitesse angulaire autour de cet axe fixe dans l'espace. On vérifie bien ainsi en toute rigueur la conclusion du N° 107.

- Soit maintenant $p_0 r_0 \neq 0$. - Si une des quantités p_0, r_0 est $\neq 0$, il en est de même de l'autre [en vertu de (21)], et $p_0 r_0$ est $\neq 0$: soit $p_0 > 0$, $r_0 < 0$, d'où $p_0 r_0 < 0$. On a, dans ce cas, $-\lambda < q_0 < \lambda$ et $q'_0 > 0$ en vertu de (24); l'équation (22) nous montre que q croît de q_0 à $+\lambda$, quand t croît indéfiniment. Effectuons l'intégrale qui donne t en fonction de q ; on a:

$$n dt = \frac{+dq}{\lambda^2 - q^2} = \frac{+dq}{2\lambda} \left[\frac{1}{\lambda - q} + \frac{1}{\lambda + q} \right], \quad [\text{puisque } q'_0 > 0].$$

d'où

$$2\lambda n(t - t_1) = \log \frac{\lambda + q}{\lambda - q},$$

t_1 désignant l'instant (+ ou -) où q s'annule; cette constante t_1 est donnée en fonction des conditions initiales $t=0$, q_0 par : $2\lambda n t_1 = \log \frac{\lambda - q_0}{\lambda + q_0}$. Posons :

$$\text{Il vient : } 2\lambda n (t - t_1) = u.$$

$$\text{d'où : } \frac{\lambda + q}{\lambda - q} = e^u, \quad q = \lambda \frac{(e^u - e^{-u})}{e^u + e^{-u}};$$

$$\lambda^2 - q^2 = \frac{4\lambda^2}{(e^u + e^{-u})^2}, \text{ et par suite, d'après (23):}$$

$$p = + \sqrt{\frac{B(B-C)}{A(A-C)}} \frac{2\lambda}{e^u + e^{-u}}, \text{ (puisque } p_0 > 0),$$

$$p = - \sqrt{\frac{B(A-B)}{C(A-C)}} \frac{2\lambda}{e^u + e^{-u}} \text{ (puisque } p_0 < 0).$$

On a ensuite $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ comme au N° 121, et ψ par une quadrature élémentaire.

Quand t , c'est-à-dire u , croît indéfiniment, q tend vers λ , p et P tend vers zéro. Le mouvement tend vers à devenir une rotation uniforme autour de l'axe Oy qui tend lui-même vers la position Oz , [$\cos \theta$ et $\sin \varphi$ tendent vers zéro]⁽¹⁾

125. - Cas où l'ellipsoïde d'inertie est de révolution.
Ce cas a été traité en fait au N° 51, car le problème est le même que si le corps S était de révolution autour de Oz , A et C étant ses moments d'inertie autour de Ox (ou Oy) et Oz ; les formules des N° 119-121 permettraient aisément de retrouver les résultats connus. Ses fonctions elliptiques dégénèrent ici en fonctions circulaires.

Si l'ellipsoïde d'inertie est une sphère, S tourne uniformément autour d'une droite OU fixe dans le corps et l'espace (N° 51).

Si le solide se réduit à une droite passant par O , soit

(1) On pourrait déduire les formules précédentes des formules d'intégration des fonctions elliptiques, qui pour $f = q$ dégénèrent en fonctions exponentielles.

oz, l'angle θ est l'angle z, oz ; l'angle χ que fait avec ox , la projection sur x, oy , de oz est égal à $\psi - \frac{\pi}{2}$; quant à l'angle ψ , il ne joue aucun rôle, puisque la barre ne cesse de coïncider avec elle-même dans une rotation autour de oz ⁽¹⁾. Le vecteur Ox est normal au plan ozv défini par la barre et la vitesse V d'une des extrémités; on vérifie aussitôt, comme nous le savons déjà, que oz tourne autour de o , d'un mouvement uniforme, dans un plan fixe.

Représentation géométrique de Poinsot.

126. - Quelques théorèmes cinématiques.

Le mouvement d'un solide fixé par un point O et soumis à des forces extérieures qui admettent une résultante passant par O , comporte une représentation géométrique remarquable, découverte par Poinsot. Elle repose sur les trois théorèmes de cinématique suivants, qui s'appliquent au mouvement le plus général d'un solide autour d'un point fixe.

Considérons l'ellipsoïde d'inertie E du corps relatif au point fixe O , et soit ox, oy, oz les axes principaux de cet ellipsoïde. A un instant quelconque, la demi droite OW [qui définit la rotation instantanée] rencontre la surface de E en un point S que Poinsot appelle pôle.

Théorème I. - La force-vive $2T$ du solide est $\frac{W^2}{OS^2}$.

En effet, d'après la définition même de l'ellipsoïde E , le moment d'inertie μk^2 du solide par rapport à la droite OW est $\frac{1}{OS^2}$; la force-vive du solide est $\mu k^2 W^2$, donc $\frac{W^2}{OS^2}$.

Théorème II. - A chaque instant, le plan tangent en S à l'ellipsoïde E est perpendiculaire à Ox (moment cinétique du solide par rapport à O .)

En effet, les axes ox, yz étant les axes principaux d'inertie relatifs à O , l'ellipsoïde E a pour équation:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

⁽¹⁾ Dans ce cas particulier, la troisième équation d'Euler donne $C \frac{dr}{dt} = 0$, ou $C = 0$. Il est loisible de faire ici: $r \equiv 0$. La barre ne dépend en réalité que de deux paramètres θ, ψ .

Or les cosinus directeurs de OS sont $\frac{p}{\omega}, \frac{q}{\omega}, \frac{r}{\omega}$; les coordonnées x, y, z du pôle S (par rapport aux mêmes axes) sont

$$x = \overline{OS} \cdot \frac{p}{\omega}, \quad y = \overline{OS} \cdot \frac{q}{\omega}, \quad z = \overline{OS} \cdot \frac{r}{\omega}.$$

L'équation du plan tangent à E au point x, y, z étant (si X, Y, Z désignent les coordonnées courantes):

$$AXx + BYy + CZz = 1,$$

le plan tangent en S a pour équation:

$$(1) \quad \overline{OS} (ApX + BqY + CrZ) = 0,$$

équation d'un plan ω perpendiculaire à la direction (Ap, Bq, Cr) , c'est-à-dire à OR C. q. f. d.

Théorème III. - La distance du point fixe O au plan tangent en S à l'ellipsoïde est égale à la racine carrée de la force vive divisée par la longueur OR .

En effet, la distance δ de l'origine O au plan tangent (1) est:

$$(2) \quad \delta = \frac{\omega}{\overline{OS}} \frac{1}{\sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2}} = \sqrt{2T} \times \frac{1}{OR} \quad \text{C. q. f. d.}$$

127. - Représentation de Poinsot.

Appliquons ces trois théorèmes au cas particulier où les forces appliquées au corps solide admettent une résultante passant par O . Alors:

1°. La force vive est constante et égale à h ou à $2\lambda^2$; on a donc:

$$\frac{\omega}{OS} = \sqrt{h} = \lambda \sqrt{D};$$

2°. Le moment cinétique OR du solide a une direction fixe; le plan tangent à l'ellipsoïde en S a donc également une direction fixe, perpendiculaire à OR ;

3°. Le moment cinétique OR ayant une longueur constante l ou λD , la distance du plan tangent en S au centre O est:

$$\delta = \frac{\sqrt{h}}{l} = \frac{1}{\sqrt{D}};$$

elle est donc constante.

En résumé, le plan Π tangent en S à E est fixe; car il a une orientation constante et il est à une distance constante du point fixe O .

Nous arrivons donc à ce résultat que l'ellipsoïde d'inertie reste constamment en contact avec un plan fixe Π . Le point de contact S est le pôle : la droite OS est l'axe instantané de rotation, et la vitesse angulaire instantanée est : $\omega = OS \sqrt{H}$; elle varie proportionnellement à OS . De plus, le point S de l'ellipsoïde d'inertie a une vitesse nulle à l'instant considéré, puisqu'il est sur l'axe instantané. — On voit donc que, dans le mouvement du solide, l'ellipsoïde d'inertie roule et pivote sans glisser sur le plan fixe Π .

128. — Polhodie et Herpolhodie.

Pointsoit appelée polhodie la courbe décrite par le pôle S sur la surface de l'ellipsoïde et herpolhodie la courbe décrite par le pôle S sur le plan fixe Π . Le cône lieu des axes instantanés dans le corps a pour sommet le point O , et pour directrice la polhodie;

le cône lieu des axes instantanés dans l'espace a pour sommet O et pour directrice l'herpolhodie. Pour obtenir le mouvement, il faut faire rouler le premier cône [cône roulette] sur le second, [cône base] et cela de telle façon qu'à chaque instant la vitesse angulaire instantanée ω soit proportionnelle à OS , puisque $\omega = OS \cdot \sqrt{H}$.

Imaginons qu'on ait réalisé matériellement le cône-roulette en le limitant à la polhodie [fig. 1]: l'espèce

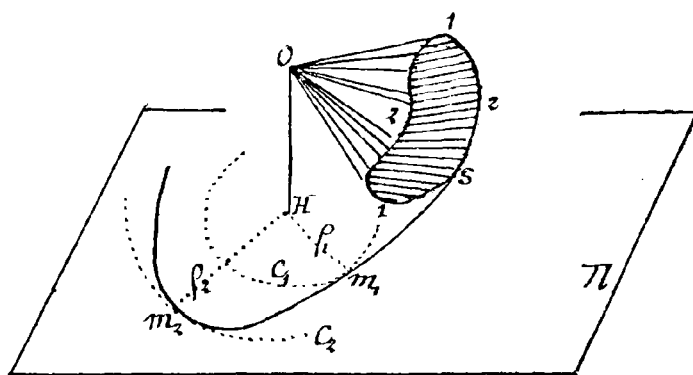


Fig. 1

de roue gauche ainsi formée roule (sans glisser) sur le plan fixe Π , et le lieu de ses points de contact avec Π est l'herpolhodie.

Comme le point de la polhodie S en contact à l'instant t avec l'herpolhodie a une vitesse nulle (à cet instant), la polhodie

roule sans glisser sur l'herpolhodie ; les arcs parcourus sur les deux courbes par le point de contact S sont égaux

129 - Étude de la polhodie.

La polhodie est tracée sur l'ellipsoïde E :

$$(4) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

et c'est le lieu des points (x, y, z) de cette surface tels que le plan tangent

$$AXx + BYy + CZz = 1$$

soit à une constante $d = \frac{1}{D}$ de l'origine. Cette condition s'exprime par l'équation Π :

$$(5) \quad A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = D.$$

Les équations (4) et (5) définissent la polhodie, qui est ainsi une courbe algébrique du 4^e ordre, intersection de l'ellipsoïde et du cône :

$$(6) \quad A(A-D)x^2 + B(B-D)y^2 + C(C-D)z^2 = 0,$$

qui n'est autre que le cône-roulette du mouvement ⁽¹⁾.
Ce cône n'est réel que si on a :

$$A \geq D \geq C.$$

conditions déjà rencontrées et qui sont évidentes dans la représentation de Poincaré, puisque la distance au centre du plan Π tangent à l'ellipsoïde E , à savoir $\frac{1}{D}$, doit être le demi-grand axe $\frac{1}{\sqrt{C}}$ et le demi-petit axe $\frac{1}{\sqrt{A}}$ de l'ellipsoïde.

Si $D = A$, la polhodie se réduit à un point, qui est une des extrémités du petit axe de l'ellipsoïde ; si $D = C$, la polhodie se réduit à une des extrémités du grand axe. Si $D = B$, le cône (6) se décompose en deux plans et la polhodie en deux ellipses ayant un axe commun qui est l'axe moyen de l'ellipsoïde.

La polhodie est donc l'intersection de l'ellipsoïde et d'un cône du second ordre ayant les mêmes plans de symétrie. Elle se compose de deux branches fermées distinctes symétriques l'une de l'autre par rapport au centre et par rapport à un des plans principaux de l'ellipsoïde [celui qui ne coupe pas le cône réel (6), c. à. d.

⁽¹⁾ On aurait pu écrire immédiatement cette équation formée déjà au n° 118.

le plan $z=0$ si $D < B$, et le plan $x=0$ si $D > B$]. Chaque branche admet comme plans de symétrie les deux autres plans principaux de l'ellipsoïde, et quatre sommets 1, 2, 1, 2 [fig. 1 et 2] pour lesquels le rayon vecteur OS est maximum ou minimum; deux de ces sommets, soit 2, 2 sont toujours situés dans le plan $y=0$. Dans le mouvement, une des branches de la polhodie roule sur le plan fixe Π ; cette branche est seule utile: l'autre branche roule sur un plan symétrique de Π par rapport au point O .

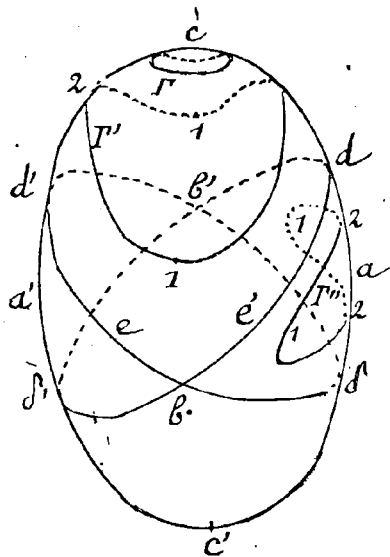


Fig. 2.

Légende:

- Le plan du tableau est le plan principal $y=0$.
- Ses points a, a', c, c' sont les sommets de l'ellipse section de E par ce plan; $0a \angle 0b \angle 0c$.
- Ses points b, b' sont les extrémités de l'axe moyen;
- Ses ellipses e, e' constituent la polhodie dans le cas $B=D$.
- La courbe Γ est une branche de polhodie [ain si que Γ''] dans le cas $D < B$.
- La courbe Γ'' est une branche de polhodie dans le cas $D > B$.
- Ses points 1, 1, 2, 2 sont les 4 sommets d'une branche de polhodie.

Il importe de se rendre compte des formes diverses de la polhodie suivant les conditions initiales [fig. 2]. Pour $D=C$, la branche considérée de polhodie se réduit au sommet c ; pour $D < C$ mais voisin de C , cette branche Γ est une petite courbe fermée entourant C ; quand D augmente et tend vers B , Γ tend vers la courbe $bd'b'db'$ formée par les deux demi-ellipses e, e' situées du même côté du plan $z=0$ que C . Pour $D=A$, la branche considérée de polhodie se réduit au sommet a ; pour $D < A$ et voisin de A , cette branche est une petite courbe fermée entourant a ; quand D décroît et tend vers B , cette branche tend vers la courbe $bd'b'db'$, formée par les deux demi-ellipses e, e' situées du même côté du plan $x=0$ que a .

Il y a donc deux sortes de polhodies; les unes entourent les sommets du petit-axe, les autres les sommets du grand-axe; ces deux sortes de polhodies sont séparées par la polhodie singulière (formée des deux ellipses e, e') qui correspond à $D=B$.

Par chaque point de la surface E , il passe une polhodie et une seule. Pour connaître la polhodie qui correspond à des conditions initiales données, il suffit de connaître le point S_0 où la rotation instantanée initiale perce E ; la polhodie cherchée est celle qui passe par S_0 .

Quant au plan fixe Π correspondant, c'est le plan tangent en S_0 à l'ellipsoïde E dans sa position initiale.

130. — Étude de l'herpolhodie.

Abaissons du point O la perpendiculaire OH sur le plan [fig. 1, page 194], la longueur OH est égale à $\frac{1}{\sqrt{D}}$. Le rayon vecteur $HS = \rho$ d'un point de l'herpolhodie est :

$$\rho = \sqrt{OS^2 - \frac{1}{D}}.$$

Nous savons que, sur une branche de polhodie, OS varie entre un minimum et un maximum; donc ρ varie également entre un minimum et un maximum correspondants ρ_1 et ρ_2 ⁽¹⁾. L'herpolhodie est donc comprise entre deux cercles C_1 et C_2 du centre H et de rayon ρ_1 et ρ_2 , qu'elle touche successivement en des points tels que m_1, m_2 . Considérons l'ellipsoïde E dans la position E_1 , où il est en contact avec Π par le point m_1 : il est évident que le plan OHm_1 [plan de symétrie de E_1] est plan de symétrie à la fois de la polhodie (dans sa position actuelle) et de l'herpolhodie; il suffit de connaître l'arc $m_1 m_2$ de la courbe pour savoir construire toute l'herpolhodie par symétries successives.

L'arc d'herpolhodie $m_1 m_2$ est égal à l'arc 1 2 de polhodie, [fig. 1], c'est-à-dire au quart de la longueur d'une branche de la polhodie. Lorsque tous les points de la polhodie sont venus successivement en contact avec Π , le pôle S reprend la même position sur l'ellipsoïde, mais dans le plan Π , le rayon vecteur PS a tourné d'un angle égal à $\angle Hm_1 Hm_2$; si cet angle n'est pas commensurable avec Π , l'herpolhodie n'est pas fermée, le pôle ne reprend

⁽¹⁾ En dehors des cas $D=A$ ou B ou C , le minimum ρ_1 n'est pas nul; autrement on pourrait placer l'ellipsoïde E dans une position où il serait tangent en H au plan Π (normal à OH); le point de contact sur l'ellipsoïde serait donc un des six sommets de E ; la polhodie passerait par un de ces six sommets, ce qui n'est possible que si $D=A, B$, ou C :

jamais la même position sur E et dans le plan Π . Si cet angle est commensurable avec π , l'herpolhodie est une courbe fermée; le mouvement est rigoureusement périodique.

131. - Équation de l'herpolhodie.

Les coordonnées x, y, z d'un point de la polhodie peuvent s'exprimer à l'aide du rayon vecteur $OS = u$. On a :

$$\begin{aligned} Ax^2 + By^2 + Cz^2 &= 1 \\ A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 &= D \\ x^2 + y^2 + z^2 &= u^2 ; \end{aligned}$$

il est facile, dès lors de former l'expression du ds^2 de la courbe :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = f(u^2) du^2 .$$

D'autre part, entre les rayons vecteurs $u = OS$ et $\rho = HS$ de deux points correspondants de la polhodie et de l'herpolhodie, on a la relation :

$$u^2 = \rho^2 + \frac{1}{D} ;$$

mais les arcs correspondants sur les deux courbes étant égaux, on a $\left\{ \begin{array}{l} \rho \text{ et } \theta \text{ désignant les coordonnées} \\ \text{polaires (de pôle H) dans le plan } \Pi \end{array} \right\}$:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 = f(u^2) du^2 = f\left[\rho^2 + \frac{1}{D}\right] \frac{\rho^2 d\rho^2}{\rho^2 + \frac{1}{D}} ,$$

d'où enfin :

$$(7) \quad d\theta = d\rho \sqrt{F(\rho^2)} .$$

Il suit du raisonnement du N° 130 que f est compris entre deux racines simples ρ_1, ρ_2 de $F(\rho^2)$. La discussion classique sur les intégrales de la forme (7) entraîne cette conséquence que les rayons vecteurs de la courbe égaux à ρ_1 et ρ_2 sont (comme nous l'avons dit), des axes de symétrie de l'herpolhodie.

Quand on fait rouler et pivoter (sans glisser) sur un plan fixe Π un ellipsoïde solide, de forme quelconque, fixé par son centre O , l'herpolhodie [lieu des points de contact] peut présenter des points d'inflexion. Mais quand l'ellipsoïde satisfait aux restrictions imposées

aux ellipsoïdes d'inertie, on peut montrer que l'herpolhodie ne présente jamais de points d'inflexion; c'est une courbe qui tourne constamment sa concavité vers le point H (projection de O sur Π) et qui a la forme indiquée dans la figure 1 [page 194]. Si le nom de polhodie (route des pôles) est bien choisi, le nom d'herpolhodie (route serpentante des pôles) est inexact; mais Loinsoz figurait l'herpolhodie avec des points d'inflexion.

Quand on connaît le plan Π , toutes les herpolhodies se déduisent d'une d'entre elles en la faisant tourner [elle ou sa symétrique par rapport à l'axe polaire HX] d'un angle arbitraire autour de H . Il suit de là que la connaissance de la constante D détermine en forme le cône base et le cône roulette du mouvement: tous les mouvements correspondants s'obtiennent en fixant le cône base (supposé réalisé matériellement) dans une position arbitraire où son sommet est en O ; puis on fait rouler (sans glisser) le cône roulette sur le cône fixe à partir d'une position arbitraire, avec une vitesse instantanée de rotation égale, pour chaque position, à $\sqrt{h} OS$, (h constante arbitraire.)⁽¹⁾

132. - Cas particuliers.

En outre des cas évidents $D=A$, $D=C$, nous avons laissé de côté le cas particulier $D=B$. La polhodie se réduit alors à une ellipse e , dont Oy est un axe. Quand t croît indéfiniment, (OW) tend vers Oy dans le solide et vers Oz , dans l'espace [N° 176]; le point S tend sur l'ellipsoïde vers une extrémité b de l'axe moyen, et dans Π vers le point H . Le minimum ρ_1 et ρ est donc ici zéro; son maximum ρ_2 correspond à l'autre axe de l'ellipse e (qui, d'après cela, est toujours le grand axe de e).

Si m_1 est le point de Π où l'ellipse e touche Π par le sommet 1 de son grand axe, la droite Hm_1 est axe de symétrie de la courbe; quand le point S de l'herpolhodie tend vers H , l'arc parcouru à partir du point m_1

(1) Au lieu d'astreindre les deux cônes à rouler l'un sur l'autre, il suffit d'astreindre la courbe polhodie du cône roulette à rester tangente à l'herpolhodie réalisée matériellement et fixe. Le lieu des positions du solide dans l'espace est ainsi déterminé, mais non la vitesse du mouvement.

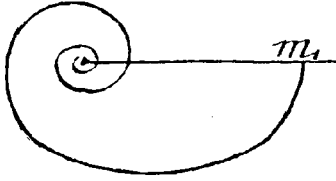


fig. 3

tend vers la longueur d'une demi-ellipse. Je dis que H est un point asymptote de l'herpolhodie: en effet, pour t très grand, la tangente St à l'ellipse E en un point S voisin du sommet b tourne d'un angle égal à 2π en un temps sensiblement égal à $\frac{2\pi}{\omega}$; or si S est le pôle à chaque instant t , cette droite St coïncide avec la tangente à l'herpolhodie en un point S qui tend vers H : la tangente à l'herpolhodie tourne donc indéfiniment dans le même sens quand le point de contact tend vers H ; la forme de la courbe est celle de la figure 3.

133. - Stabilité de la rotation autour des axes principaux.

Quand le corps commence à tourner autour d'un des axes ox, oy, oz de l'ellipsoïde d'inertie, nous savons qu'il tourne indéfiniment autour de cet axe fixe dans le corps et dans l'espace⁽¹⁾; l'ellipsoïde E pivote en restant en contact avec le plan Π par un de ses sommets; la polhodie et l'herpolhodie se réduisent à un point.

On peut se demander si le mouvement de rotation du corps autour d'un axe principal d'inertie est un mouvement stable ou non. Autrement dit, après une légère modification des conditions initiales (d'ailleurs quelconque), le solide continuera-t-il à tourner autour d'un axe sensiblement fixe dans le corps et dans l'espace?

Montrons que la rotation autour du grand et du petit axe de l'ellipsoïde est stable: elle est instable autour de l'axe moyen.

En effet, animons le corps d'une rotation initiale autour du petit axe; alors cet axe reste fixe; la polhodie et l'herpolhodie se réduisent au point H ; la constante Π est égale à C . Si on modifie très peu les conditions initiales, Π est un peu supérieur à C ; la polhodie est une petite courbe entourant a ; l'herpolhodie est une courbe dont le rayon vecteur est compris entre deux

(1) Il résulte aussitôt de ce qui précède que les axes de l'ellipsoïde d'inertie sont les seules droites qui jouissent de cette propriété.

valeurs p_1 et p_2 [N.° 129] très voisines de zéro. Le cône roulette se réduit donc sensiblement à l'axe OX , le cône base à la droite PH . Le mouvement est une rotation sensiblement uniforme autour d'une droite sensiblement fixe dans le corps et dans l'espace. — Le raisonnement est le même pour la rotation autour du grand axe.

Mais si le corps tourne autour de l'axe moyen, une modification des conditions initiales, si légère qu'elle soit, amène le pôle en une position S_0 correspondant à une polhodie qui entoure soit le sommet a , soit le sommet c : l'axe s'écarte donc d'une quantité finie de sa première position (et dans le corps et dans l'espace). La rotation est instable.

Cas où l'ellipsoïde est de révolution. — Quand l'ellipsoïde d'inertie est de révolution, la polhodie du mouvement est un cercle ; l'herpolhodie est un cercle de centre H . Toutes les herpolhodies qui correspondent à une valeur donnée de la constante D se confondent en un cercle unique⁽¹⁾. — Quand l'ellipsoïde d'inertie est une sphère, le mouvement est toujours une rotation uniforme autour d'une droite fixe dans le corps et dans l'espace.

134. Mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe.

Soit un corps solide pesant, fixé par un de ses points O . Prenons comme axe fixe OZ , la verticale ascendante, les axes $Oxyz$ étant toujours les trois axes de l'ellipsoïde d'inertie E (relatif à O). Appelons μ la masse totale du corps, (ξ, η, ζ) les coordonnées de son centre de gravité G par rapport aux axes fixes ; (ξ, η, ζ) les coordonnées du même point G par rapport aux axes mobiles (coordonnées qui sont des constantes). On peut alors écrire les deux intégrales premières suivantes :

⁽¹⁾ Dans ce cas particulier, pour définir l'ensemble des positions du solide dans l'espace, il ne suffit pas de construire l'herpolhodie et d'astreindre la polhodie (tracée sur le cône de la roulette) à rester tangente à l'herpolhodie ; il faut de plus que les deux courbes roulent l'une sur l'autre. Cette dernière condition est remplie d'elle-même dans le cas où l'ellipsoïde est quelconque.

1° Intégrales des forces-vives. - Le travail des forces extérieures se réduisant au travail de la pesanteur, on a :

$$(1) \quad Ap^2 + Bq^2 + Cp^2 = -2Mgz + h.$$

2° Intégrales des moments par rapport à OZ .
Toutes les forces extérieures rencontrent OZ , ou lui sont parallèles ; le moment résultant, par rapport à OZ , des quantités de mouvement est donc constant. Or le moment cinétique du solide par rapport à O , soit OK a pour composantes Ox, Oy, Oz

$$Ap, Bq, Cp ;$$

la projection de OK sur Oz , est donc :

$$(2) \quad Ap \sin \theta \sin \varphi + Bq \sin \theta \cos \varphi + Cp \cos \theta = K.$$

On ne connaît pas en général d'autre intégrale première du mouvement. Dans le cas particulier où le corps est suspendu par son centre de gravité, on est ramené au problème des N° 114-132. (Cas d'Euler et de Poisson).

Quand l'ellipsoïde d'inertie est de révolution, autour de Oz par exemple, ($A = B$), [Cas de Lagrange et de Poisson], le problème coïncide analytiquement avec celui du mouvement d'un corps de révolution pesant suspendu par un point de son axe, problème qui a été traité et discuté dans le second chapitre (N° 54-60).

Il est un autre cas découvert par M. Kovalevski, où le problème peut être ramené aux quadratures : c'est celui où $A = B$, où G est dans le plan $z = 0$, et où de plus $A = 2C$. En dehors des cas énumérés, il n'existe pas d'intégrale 1^{ère} algébrique du problème distincte des intégrales (1) et (2).

Mouvement d'un solide libre.

135. - Equations du mouvement.

Ces équations se déduisent :

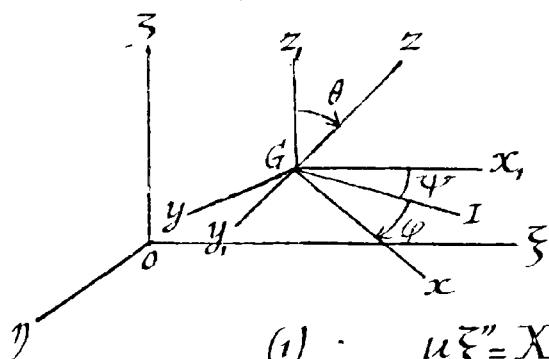
1° du théorème du mouvement du centre de gravité G .

2° du théorème des moments appliqué au mouvement relatif autour de G .

Soit X, Y, Z les composantes de la somme géométrique des forces extérieures appliquées au solide; et soit L, M, N les moments, par rapport aux axes centraux d'inertie Gx, Gy, Gz , de ces mêmes forces.

La position du solide est définie si on connaît: 1° la position (ξ, η, ζ) du centre de gravité par rapport aux axes fixes $O\xi\eta\zeta$;

2° les angles d'Euler θ, φ, ψ qui déterminent la position du trièdre $Ox_1y_1z_1$ par rapport aux axes Gx, y, z , parallèles aux axes fixes.



$$(1) \quad \mu \ddot{\xi} = X, \quad \mu \ddot{\eta} = Y, \quad \mu \ddot{\zeta} = Z.$$

Le théorème des moments cinétiques appliqué au mouvement autour de G donne $\bar{\omega}$ désignant la rotation instantanée du solide, p, q, r ses composantes suivant Gx, Gy, Gz :

$$(2) \quad \begin{cases} A \frac{dp}{dt} + (C-B)qr = L, \\ B \frac{dq}{dt} + (A-C)rp = M, \\ C \frac{dr}{dt} + (B-A)pq = N; \end{cases}$$

à ces équations il faut joindre les relations:

$$(3) \quad \begin{cases} p = \psi' \sin \theta \sin \varphi + \theta' \cos \varphi \\ q = \psi' \sin \theta \cos \varphi - \theta' \sin \varphi \\ r = \psi' \cos \theta + \varphi' \end{cases}$$

Le théorème du mouvement du centre de gravité exprime que le mouvement de G est le même que si toute la masse μ du système y était concentrée et toutes les forces extérieures. Il se traduit par les trois équations:

136. - Mouvement d'un solide libre soumis à des forces extérieures données.

Les forces extérieures étant toutes données, c'est-à-dire connues (à un instant t) quand on connaît la position du solide S et ses vitesses, les quantités X, Y, Z, L, M, N sont des fonctions connues de $\xi, \eta, \zeta, \theta, \varphi, \psi, \xi', \eta', \zeta', \theta', \varphi', \psi'$ et. Les équations (1), (2), (3) définissent alors le mouvement, connaissant les conditions initiales, c'est-à-dire, pour $t = t_0$, les valeurs initiales $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \theta_0, \varphi_0, \psi_0, \xi'_0, \eta'_0, \zeta'_0, \theta'_0, \varphi'_0, \psi'_0$. Si, par exemple, on remplace, dans (2), p, q, r par leurs valeurs tirées de (3), les équations (3) ainsi obtenues, jointes aux équations (1) forment un ensemble de six équations différentielles du second ordre, c'est-à-dire un système différentiel du 12^e ordre.

137. - Quelques cas particuliers.

Dans la plupart des applications simples, des remarques intuitives permettent de simplifier l'intégration du problème. Voici quelques cas particuliers qui se présentent fréquemment.

1^{er} Cas particulier. - La somme géométrique des forces extérieures (X, Y, Z) ne dépend que de la position et de la vitesse du centre de gravité G .

Le mouvement du centre de gravité se calcule alors comme celui d'un point isolé G , de masse μ , soumis à la force donnée (X, Y, Z).

Exemple. - Corps pesant qui, dans sa chute est soumis à un couple résistant.

2^e Cas particulier. - Le moment résultant, par rapport à G , des forces extérieures ne dépend que de l'orientation du solide S et de ses vitesses autour de G .

Le mouvement du solide autour de G se calcule alors comme le mouvement d'un solide autour d'un point fixe G soumis à des forces dont le moment, par rapport à G , est connu. (Problème des N^{os} 108-133).

Il est intéressant de remarquer que, dans ce cas, le mouvement du solide autour de G est entièrement indépendant du mouvement de G .

Exemple. - Les forces extérieures appliquées au solide admettent une résultante unique passant par le centre de gravité. - Le mouvement du solide autour de G est alors

un mouvement de Poinsot [N^{os} 114-132]. Si à l'instant initial, le solide est animé d'un simple mouvement de translation, il garde constamment la même orientation dans l'espace. Si le solide est animé initialement d'une translation quelconque et d'une rotation autour d'un axe central d'inertie GZ , l'axe GZ garde constamment la même orientation dans l'espace, et le solide tourne autour de GZ avec une vitesse constante.

3^e. Cas particulier. - Ses conditions des deux cas particuliers précédents sont remplies à la fois: autrement dit, la somme géométrique (X, Y, Z) des forces extérieures ne dépend que de la position et de la vitesse de G et le moment résultant, par rapport à G , de ces forces ne dépend que de l'orientation du solide et de ses vitesses autour de G .

Le calcul du mouvement du solide se décompose en deux problèmes séparés.

Calcul du mouvement de G

Calcul du mouvement du solide autour de G .

Le premier problème revient à l'intégration des équations (1) où X, Y, Z , sont des fonctions connues de $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta', t$ (problème de la Dynamique du point).

Le second problème revient à l'intégration des équations (2) et (3), où L, M, N sont des fonctions de $\theta, \varphi, \psi, \theta', \varphi', \psi'$ et t . En un mot, le problème, au lieu d'exiger l'intégration d'un système différentiel du 12^e ordre, exige l'intégration de deux systèmes différentiels distincts du 6^e ordre. — Exemples. C'est un solide pesant lancé dans le vide: le centre de gravité G se meut comme un point pesant libre et décrit une parabole suivant la loi connue; le mouvement du solide autour de G est un mouvement à la Poinsot.

De même si chaque élément P du solide pesant est attiré par un point fixe O proportionnellement à sa masse et à la distance OP , le centre de gravité décrit un conique de centre O , et le mouvement autour de G est encore un mouvement à la Poinsot.

Supposons enfin que le solide soit une sphère homogène attiré par un centre fixe O suivant les lois de Newton. Le centre G de la sphère décrit une conique de foyer O , et la sphère est animée d'une rotation uniforme

autour d'un diamètre fixe dans la sphère et de direction fixe dans l'espace.

138. - L'équation des forces vives et la Dynamique du solide.

Ses six équations du mouvement (1) et (2) définissent le mouvement du solide, quand les forces extérieures sont données. L'équation des forces vives est donc nécessairement une conséquence de ces six équations [ainsi d'ailleurs que nous l'avons déjà prouvé N° 6]. Vérifions qu'il en est bien ainsi.

D'après le théorème de Kœnig, la force vive $2T$ du solide est la somme : 1° de la force vive du centre de gravité G où toute la masse serait concentrée; 2° de la force vive du solide dans son mouvement autour de G .

D'où :

$$2T = \mu (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2.$$

D'autre part le déplacement élémentaire du solide consiste : 1° en un déplacement de translation défini par le déplacement $d\xi, d\eta, d\zeta$ de G ; 2° en une rotation instantanée $\bar{\omega}$ autour de G dont les composantes suivant les axes centraux d'inertie Gx, Gy, Gz , sont p, q, r . D'après la formule classique qui donne le travail élémentaire des forces appliquées à un solide, le travail des forces extérieures dans le déplacement considéré est (avec la notation adoptée) :

$$Xd\xi + Yd\eta + Zd\zeta + (Lp + Mq + Nr) dt.$$

L'égalité des forces vives s'écrit donc :

$$(4) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \mu (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 \right\} = X\xi' + Y\eta' + Z\zeta' + Ap + Bq + Cr.$$

Or nous pouvons calculer d'après (1) et (2) la valeur du second membre de (4). Il suffit de multiplier la première équation (1) par ξ' , la 2^e par η' , la 3^e par ζ' ; la première équation (2) par p , la seconde par q , la 3^e par r , et de faire la somme. Le second membre de la combinaison ainsi obtenue est celui de l'équation (4); le premier membre est :

$$\mu (\xi''\xi' + \eta''\eta' + \zeta''\zeta') + Ap \frac{dp}{dt} + Bq \frac{dq}{dt} + Cr \frac{dr}{dt},$$

expression qui coïncide bien avec le premier membre (4)

c. q. f. d.

139. - Intégrales premières de la Dynamique du corps solide.

Il convient de signaler quelques cas particuliers importants où se mettent en évidence des intégrales premières du mouvement.

Comme d'abord, si le solide est libre et si toutes les forces extérieures dérivent d'une fonction de forces U , on a l'intégrale première : $T = U + h$. Il en est de même si le solide est assujéti à des liaisons sans frottement, les forces extérieures données dérivant d'un potentiel.

Si toutes les forces extérieures sont perpendiculaires à une droite fixe, la projection de G sur cette droite est animée d'un mouvement rectiligne et uniforme. Si toutes les forces extérieures sont perpendiculaires à un plan fixe, la projection de G sur ce plan décrit une droite d'un mouvement uniforme.

Si toutes les forces extérieures rencontrent une droite fixe, soit $O\xi$, ou lui sont parallèles, le moment cinétique de S par rapport à cette droite est constant. D'après le théorème de Koenig, le moment résultant, par rapport à $O\xi$ des quantités de mouvement est la somme des deux termes :

$$\mu(\xi\eta' - \eta\xi') \quad \left[\text{moment cinétique du point } G \text{ de masse } \mu \right]$$

et

$$Ap \sin \theta \sin \varphi + Bq \sin \theta \cos \varphi + Cp \cos \theta \quad \left[\text{moment cinétique } S \text{ autour de } G \right];$$

L'intégrale se traduit donc par l'égalité :

$$\mu(\xi\eta' - \eta\xi') + \sin \theta [Ap \sin \varphi + Bq \cos \varphi] + Cp \cos \theta = Cte$$

Si toutes les forces extérieures rencontrent une droite de direction fixe passant par G , soit GZ , le moment résultant (par rapport à GZ) des quantités de mouvement du solide est constant; d'où l'égalité

$$\sin \theta [Ap \sin \varphi + Bq \cos \varphi] + Cp \cos \theta = Cte.$$

Enfin quand l'ellipsoïde d'inertie est de révolution, il arrive, dans un grand nombre de cas, que toutes les

forces extérieures rencontrent l'axe de révolution, soit GZ .
La troisième équation d'Euler équivaut alors à l'intégrale première

$$T = T_0.$$

140. Mouvement d'un solide assujéti à des liaisons.

Quand un solide est assujéti à des liaisons quelconques, on peut toujours écrire les six équations (1) et (2) du mouvement du n° 131; mais parmi les forces extérieures figurent les réactions inconnues qu'exercent les obstacles extérieurs.

Par exemple, supposons que le solide soit un corps pesant S glissant sur un solide fixe parfaitement Σ . La réaction normale de Σ sur S introduit une indéterminée, soit N , dans les seconds membres des 6 équations (1) et (2); d'autre part la liaison se traduit par une relation connue entre $\xi, \eta, \zeta, \theta, \varphi, \psi$. On a donc assez d'équations pour calculer les 7 quantités inconnues $\xi, \eta, \zeta, \theta, \varphi, \psi, N$ en fonction du temps, connaissant les conditions initiales.

Quand le glissement a lieu avec frottement, la réaction \vec{R} de Σ sur S est déterminée en grandeur direction et sens, quand on connaît la composante normale N de \vec{R} , le coefficient de frottement f et la vitesse de glissement de S sur Σ . Elle n'introduit donc qu'une indéterminée N , et la conclusion est la même que dans le cas où $f=0$.

De même si un élément déterminé du solide est assujéti à glisser sans frottement sur une courbe fixe Γ , la liaison introduit deux indéterminées (car la réaction \vec{R} est normale à Γ), mais elle se traduit par deux équations. On peut là encore calculer le mouvement et la réaction à chaque instant.

La même conclusion subsiste quand il y a frottement pourvu qu'on connaisse le coefficient de frottement f . \vec{R} est déterminée si on connaît en grandeur et sens sa composante normale et la vitesse de glissement de S sur Γ .

Au lieu de supposer la surface Σ ou la courbe Γ fixe, on peut imaginer encore qu'elles se déplacent ou se déforment ^{suivant une loi donnée} quand le temps varie. La vitesse de glissement de S sur Σ est alors l'excès géométrique de la vitesse \vec{V} de l'élément P de S sur la vitesse \vec{W} , de l'élément matériel P de Σ (ou de Γ) en contact avec P . Rien n'est changé d'ailleurs aux conclusions énoncées.

Plus généralement, si nous combinons plusieurs

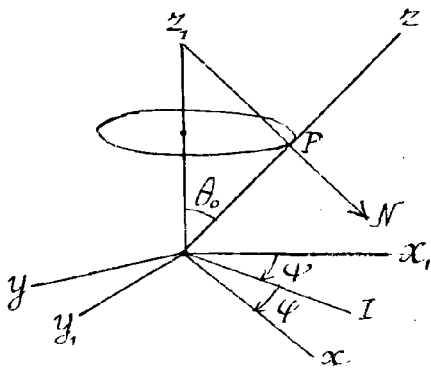
liaisons de l'espèce précédente, chaque liaison introduit autant d'inconnues que d'équations de conditions [une fois connu le coefficient de frottement f attaché à chaque liaison]: on aura donc assez d'équations pour déterminer à la fois le mouvement et les réactions, moyennant une restriction toutefois, c'est que les équations de conditions, qui traduisent chaque liaison forment un système d'équations distinctes. Dans le cas contraire, on dit que les liaisons matérielles sont surabondantes [1^{ère} année, p. 362], et on ne peut en général, calculer le mouvement sans hypothèses nouvelles sur les réactions (intérieures ou extérieures).⁽¹⁾ Par exemple, on peut calculer le mouvement d'un trépiéd pesant qui glisse sur un plan horizontal rugueux, mais non d'un solide rigide qui frotte par quatre pieds sur le plan fixe. Quand les liaisons ne sont pas surabondantes, si on remplace les forces extérieures données (c'est-à-dire autres que les réactions des obstacles) par des forces géométriquement équivalentes, le mouvement ni les réactions extérieures ne sont modifiées.

Au contraire, considérons par exemple un triangle équilatéral pesant qui repose sur un plan horizontal fixe Π par ses trois sommets A, B, C et son centre I : supposons que A, B, C glissent avec frottement sur Π et I sans frottement. Enfin, exerçons sur A, B, C trois forces verticales (descendantes) égales F : le mouvement dépendra de l'élasticité de la matière qui compose le trépiéd. Remplaçons les 3 forces F par leur résultante $3F$ appliquée en I : les pressions des trois pieds A, B, C sur le plan Π sont diminuées, et le mouvement ne reste pas le même.

141. - Exemple. - Mouvement d'un solide pesant fixé par un point O et traversé suivant un axe principal d'inertie Oz relatif à O par une aiguille qui glisse sans frottement sur un cercle horizontal dont le centre est sur la verticale de O .

La position du solide dépend de deux paramètres,

⁽¹⁾ Nous verrons plus tard que si toutes les liaisons sont sans frottement on peut calculer le mouvement lors même qu'elles sont surabondantes.



soit les angles φ, φ' , l'angle θ étant constant ($\theta = \theta_0$). Il suffit de connaître deux équations indépendantes des réactions pour que le mouvement soit déterminé.

Or le théorème des forces vives donne une intégrale première: le théorème des moments des quantités de mouvement appliqué à Oz , en fournit une seconde, car toutes les forces extérieures

[pesanteur, réaction de l'appui θ , réaction N du cercle fixe normale à ce cercle] rencontrent Oz , ou lui sont parallèles. Le moment résultant, par rapport à Oz , des quantités du système est donc constant; d'où l'égalité [N° 133]:

$$(1) \quad Ap \sin \theta_0 \sin \varphi + Bq \sin \theta_0 \cos \varphi + Cr \cos \theta_0 = K.$$

L'intégrale des forces vives s'écrit:

$$(2) \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = -2\mu g \zeta + C t^2;$$

or si (ξ, η, ζ) sont les coordonnées (constantes) du centre de gravité G par rapport aux axes mobiles $Oxyz$, on a

$$\zeta = \xi \sin \theta_0 \sin \varphi + \eta \sin \theta_0 \cos \varphi + \zeta \cos \theta_0.$$

D'autre part, θ' étant nul,

$$p = \varphi' \sin \theta_0 \sin \varphi, \quad q = \varphi' \sin \theta_0 \cos \varphi, \quad r = \varphi' \cos \theta_0 + \varphi'.$$

Les deux équations (1) et (2) s'écrivent donc:

$$\sin^2 \theta_0 \varphi' [A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi] + C \cos \theta_0 [\varphi' \cos \theta_0 + \varphi'] = K$$

$$\sin^2 \theta_0 \varphi'^2 [A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi] + C [\varphi' \cos \theta_0 + \varphi']^2$$

$$= -2\mu g [\xi \sin \theta_0 \sin \varphi + \eta \sin \theta_0 \cos \varphi + \zeta \cos \theta_0] + C t^2$$

équations d'où on tire φ' et φ' en fonction de φ , c'est-à-dire t en φ en fonction de φ par deux quadratures.

142. - Mouvement d'un système de solide.

Pour étudier le mouvement d'un système de solides, on écrit les six équations (1) et (2) du mouvement de chaque

solide, en introduisant dans les seconds membres les réactions qui s'exercent soit entre les solide du système, soit entre ces solides et les obstacles extérieurs.

Par exemple, étudions le mouvement de deux solides assujettis à rester en contact et qui glissent sans frottement l'un sur l'autre. On écrira les six équations du mouvement de chaque solide; dans les seconds membres, figure une indéterminée N qu'introduit la réaction normale des deux corps l'un sur l'autre. Mais d'autre part, la liaison se traduit par une équation de condition. On a donc assez d'équations pour calculer les 12 paramètres et N en fonction du temps, connaissant les positions et les vitesses des deux solides à l'instant initial.

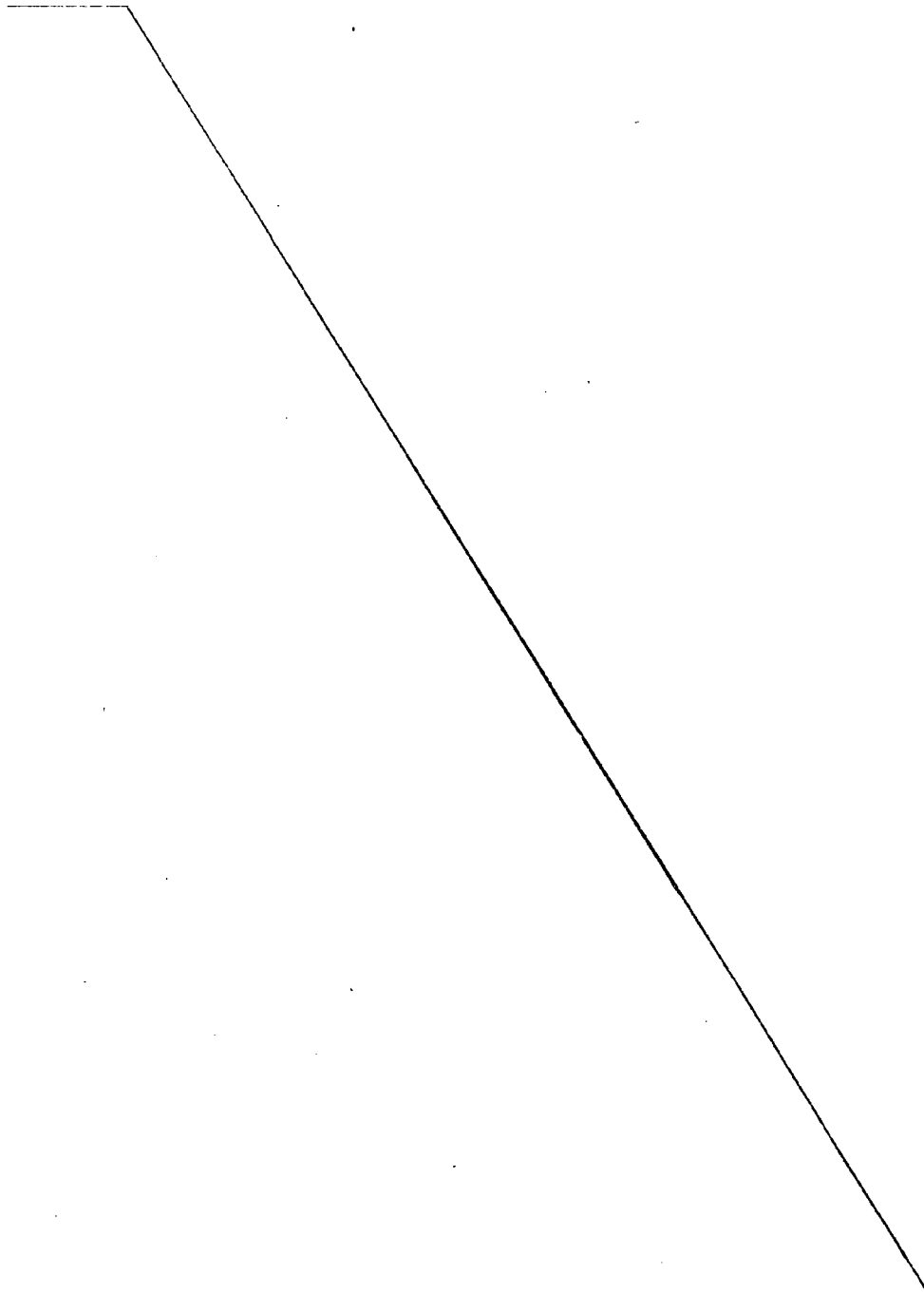
143. — Cas où les liaisons sont unilatérales.

Ce qui précède suppose les liaisons bilatérales. Considérons maintenant un solide S mobile sur une surface fixe Σ parfaitement lisse et sans adhérence, qu'il peut quitter d'un certain côté E : Soit P la demi-normale menée en P à Σ du côté E et N la réaction de Σ sur S comptée positivement dans le sens P : N ne peut être que ≥ 0 . La discussion se fait comme au N° 27: le seul cas litigieux est celui où S est en contact avec Σ à l'instant initial et où l'élément P de S en contact avec Σ a une vitesse tangente à Σ ou nulle. Dans ce cas, ou bien S reste en contact avec Σ au moins pendant un certain temps durant lequel N est ≥ 0 ; ou bien S quitte immédiatement Σ du côté E . On peut montrer que la discussion de ces deux hypothèses conduit à un mouvement unique répondant aux conditions initiales. D'où la règle suivante: on étudie le mouvement comme si la liaison était bilatérale, et le mouvement ainsi calculé est le mouvement vrai tant que $N \geq 0$; S quitte Σ du côté E dès que $N < 0$.

La même conclusion subsiste quand il y a frottement, si f (coefficient de Coulomb) est très petit. Mais quand f dépasse une certaine limite, il y a contradiction entre les lois de Coulomb et la Dynamique

des solides invariables [N° 43].

Quand plusieurs liaisons sont unilatérales,
une discussion analogue doit être faite pour chaque
liaison.



Suite III.

Livres III.

Dynamique des systèmes dont la position ne dépend que d'un nombre fini de paramètres.

Chapitre I.

Propriétés des systèmes sans frottements.

144. - Liaisons indépendantes du temps. - Déplacements virtuels. - Liaisons sans frottements.

Considérons un système S formé d'un nombre fini n d'éléments matériels quelconques P , de dimensions négligeables et sans contacts entre eux: la position de S peut toujours être définie à l'aide des $3n$ coordonnées des n éléments P , coordonnées qui seront indépendantes ou soumises à des relations suivant que les éléments P seront libres ou assujettis à rester sur des surfaces ou des courbes données.

Plus généralement, si le système S est formé: 1° d'un nombre fini de solides indéformables tels que \mathcal{S} , 2° d'un nombre fini de points matériels P sans contact entre eux, la position de S ne dépend encore que d'un nombre fini de paramètres.

D'autre part, appelons Σ les obstacles indéformables et fixes avec lesquels S a des contacts: par définition, les réactions extérieures sont les forces (absolues) de contact exercées sur S par les obstacles Σ ; les réactions intérieures sont les forces de contact qui exercent entre eux les divers éléments de S .

Considérons, à un instant t , deux des positions, soit S_0 et S_1 , que peut occuper S : si la position S_1 est infiniment voisine de S_0 , le déplacement idéal du système de S_0 en S_1 est, par définition, un déplacement virtuel du système (à partir de la position S_0). Dans un mouvement vrai, le système occupe, à l'instant t , une position déterminée, soit S_0 , avec des vitesses déterminées, et ses divers éléments sont soumis à des réactions déterminées \bar{R} : le travail total de ces réactions \bar{R} , dans un déplacement virtuel arbitraire à partir de S_0 , est par définition le travail virtuel des réactions (pour l'instant t considéré).

145. — Supposons désormais que toutes les liaisons du système S soient sans frottements : autrement dit, tous les contacts des solides S entre eux ou avec les points matériels P ont lieu entre surfaces parfaitement lisses, ainsi que les contacts entre S et les obstacles fixes Z . Le travail virtuel des réactions est essentiellement positif ou nul [1^{ère} année, p. 42] : il est nul pour tout déplacement virtuel bilatéral [ibid. p. 344]. Quand toutes les liaisons sont bilatérales, il en est de même de tout déplacement virtuel, et le travail total des réactions est nul pour tout déplacement virtuel.

La propriété du paragraphe précédent subsiste si le système S comprend des fils ou chaînes inextensibles et parfaitement flexibles [1^{ère} année, p. 426], les contacts des fils avec les corps du système et les obstacles fixes ayant lieu sans frottement. Mais la position de S ne se laisse plus alors définir à l'aide d'un nombre fini de paramètres. Toutefois, quand les fils sont de masse négligeable, ils satisfont pendant le mouvement aux conditions d'équilibre ; la position de S ne dépend alors que d'un nombre fini de paramètres [1^{ère} année, p. 430]. Les fils sans masse n'interviennent dans le mouvement du système que pour astreindre les éléments de masse finie à certaines liaisons.

Soit q_1, q_2, \dots, q_k les paramètres choisis pour définir la position du système : si le système est soumis à des liaisons unilatérales, ces liaisons se traduisent par des égalités et inégalités entre q_1, \dots, q_k , et on peut toujours choisir les paramètres de façon que t ne figure pas explicitement dans ces relations. Il suffit par exemple de prendre k coordonnées d'éléments de S . Quand toutes les liaisons sont bilatérales, elles se traduisent par des égalités : il est loisible de se servir de ces égalités pour réduire à son minimum le nombre des paramètres qui sont alors indépendants. Les coordonnées d'un élément quelconque P de S s'expriment ainsi à l'aide de q_1, \dots, q_k sans que t figure.

Enfin le déplacement réel de S entre les instants t et $t + dt$ est toujours un des déplacements virtuels de S . Le travail des réactions dans le déplacement réel de S est constamment nul ⁽¹⁾ [1^{ère} année, N^o 363].

(1) Du moins, tant que le mouvement a lieu sans chocs.

146. - Liaisons qui dépendent du temps. - Déplacements virtuels. - Liaisons sans frottements.

Supposons maintenant que les corps continus qui font partie de S soient, pour chaque instant t , des solides mécaniquement indéformables, mais qui s'échauffent - par exemple, suivant une loi donnée : autrement dit, pour chaque instant t , la forme de chaque solide est bien déterminée, mais elle varie avec t suivant une loi donnée. Supposons de plus, que S soit en contact avec des obstacles Σ , non plus nécessairement immobiles, mais qui occupent à chaque instant une position bien déterminée. Sa position de S se laisse encore définir à chaque instant t à l'aide d'un nombre limité de paramètres; mais l'ensemble des positions que S peut occuper à chaque instant n'est pas le même pour deux instants quelconques : les liaisons dépendent du temps.

Considérons encore, parmi toutes les positions que S peut occuper à un instant donné t , deux positions S_0, S_1 , infiniment voisines : le déplacement idéal qui fait passer S de la position S_0 à la position S_1 est, par définition, un déplacement virtuel de S compatible avec les liaisons du système à l'instant t , ou simplement un déplacement virtuel. Si, à l'instant t , S occupe la position S_0 avec des vitesses données, le travail des réactions \bar{R} dans un déplacement virtuel quelconque à partir de S_0 est le travail virtuel des réactions pour l'instant t .

Si tous les contacts que les solides et les éléments séparés P de S ont entre eux et avec les obstacles Σ ont lieu sans frottement, le travail total des réactions dans tout déplacement virtuel (compatible avec les liaisons à l'instant t) est nul ou positif : en effet, dans un tel déplacement virtuel, les solides de S sont laissés invariables, les obstacles extérieurs Σ sont laissés immobiles. Les raisonnements faits dans le cas des liaisons indépendantes du temps [1^{ère} année, N°361] subsistent donc sans modification.

Par exemple, supposons que S se compose d'un seul point matériel P , mobile sur une surface parfaitement lisse Σ qui varie avec le temps suivant une loi donnée. La réaction \bar{R} de Σ sur P est normale à Σ ; un déplacement virtuel de P (compatible avec la liaison

à l'instant t), c'est un déplacement infinitésimal de P sur Σ immobile; le travail de R dans un tel déplacement est nul.

Remarquons que le travail virtuel des réactions dans un déplacement virtuel déterminé est indépendant des axes auxquels on rapporte le mouvement du système. En effet, soit, à un instant t , S_0 la position de S et S_1 une des positions infiniment voisines que S pourrait occuper à cet instant t ; soit I_0 et I_1 les deux positions de l'élément P de S qui correspondent aux deux positions S_0 et S_1 de S ; soit enfin R la réaction totale (force absolue) qui s'exerce sur P à l'instant t . La somme $\sum \{ R \times I_0 I_1 \times \cos (I_0 I_1 R) \}$ est indépendante du choix des axes.

Tout ce qui précède subsiste si le système renferme des fils sans masse, parfaitement flexibles, et mécaniquement inextensibles, mais dont la longueur varie avec t suivant une loi déterminée.

Soit q_1, q_2, \dots, q_n les paramètres choisis pour définir la position de S . Les liaisons imposées au système se traduiront par des égalités et inégalités entre q_1, \dots, q_n et t . Du moment que les liaisons dépendent du temps, il est impossible que t ne figure pas explicitement, et au moins dans une des relations. Quand toutes les liaisons sont bilatérales, elles se traduisent par des égalités entre q_1, q_2, \dots, q_n, t ; dans ce cas, il est loisible de réduire au minimum le nombre des paramètres; les coordonnées x, y, z de chaque élément de S s'expriment alors à l'aide de q_1, q_2, \dots, q_n, t et il est impossible que t ne figure pas au moins dans certaines de ces expressions.

Enfin, le déplacement réel de P n'est pas en général un déplacement virtuel et le travail des réactions dans le déplacement vrai est, en général différent de zéro, lors même que toutes les liaisons sont sans frottement. Prenons l'exemple où S se compose d'un point pesant P mobile sans frottement sur un plan horizontal qui descend verticalement avec une vitesse uniforme W ; admettons que, dans son mouvement vrai, P coïncide constamment avec le même élément Q du plan: le travail de la réaction R du plan sur P est égal, entre t et $t + \Delta t$, à $-mgW\Delta t$.

147. - Définition générale des systèmes à K degré de liberté.

Les systèmes énumérés aux N^{os} 144 et 146 ne sont pas les seuls dont la position se laisse définir à l'aide d'un nombre limité de paramètres. Par exemple, un fil inextensible de masse finie qui glisse sur courbe fixe [p. 12], une membrane flexible et inextensible qui glisse sur une surface développable fixe, constituent des systèmes dont la position ne dépend respectivement que d'un et de trois paramètres.

Soit, d'une manière générale, S un système dont la position peut être définie à l'aide d'un nombre limité de paramètres. Les liaisons imposées au système se traduisent⁽¹⁾ par certaines égalités et inégalités entre q_1, q_2, \dots, q_k, t . Nous pouvons nous servir des égalités pour éliminer un certain nombre des paramètres : autrement dit, il est loisible d'admettre que les paramètres q ne sont plus assujettis qu'à des inégalités. Les K paramètres q sont alors indépendants : on dit que le système S est à K degrés de liberté.

148. - Définition générale des liaisons parfaites. Réactions - Forces données.

Considérons un système matériel entièrement quelconque : si l'ensemble des positions qu'il peut occuper à un instant t_0 est le même quel que soit l'instant t_0 , on dit que les liaisons de S sont indépendantes du temps. Elles dépendent du temps dans le cas contraire.

Parmi toutes les positions que S peut occuper à un instant t , soit S_0 et S_1 deux positions infiniment voisines. Le déplacement idéal par lequel S passe de S_0 en S_1 est, par définition un déplacement virtuel de S compatible avec les liaisons à l'instant t , ou simplement un déplacement virtuel de S . Je représenterai un tel déplacement par dS . Soit PP' le déplacement d d'un élément P du système dans le déplacement dS , et

(1) Je laisse entièrement de côté pour le moment les liaisons non-holonomes [1^{ère} année, p. 351], dont nous parlerons plus loin.

soit δS le déplacement défini en remplaçant pour chaque élément P le déplacement PP' par PP'' : si δS est lui aussi un déplacement virtuel, le déplacement virtuel δS est dit bilatéral ; il est unilatéral dans le cas contraire. Quand toutes les liaisons sont bilatérales, tout déplacement virtuel est bilatéral.

149. - Nous convenons d'appeler réactions intérieures de S toutes les forces de contact qui s'exercent entre éléments de S , et réactions extérieures les forces de contact exercées sur S par les obstacles (corps impénétrables extérieurs dont la position est donnée à chaque instant). Les autres forces qui s'exercent sur le système seront dites forces données⁽¹⁾. Soit \bar{F} la force totale [relative aux axes choisis $OXYZ$], \bar{F}' la force donnée totale [relative aux mêmes axes] et \bar{R} la réaction totale (force absolue) qui s'exercent sur l'élément P de S . On a :

$$\bar{F} = \bar{F}' + \bar{R}.$$

Le système occupant à l'instant t la position S_0 avec des vitesses données, est soumis à des réactions \bar{R} : le travail total des réactions \bar{R} dans un déplacement virtuel quelconque⁽²⁾ à partir de S_0 est appelé le travail virtuel des réactions. Par définition, les liaisons seront dites parfaites si ce travail est essentiellement nul ou positif ; dans ce cas, ce travail est nul dans tout déplacement

⁽¹⁾ Ses forces données comprennent donc les forces intérieures à distance, et toutes les forces extérieures s'exerçant sur S (pesanteur, résistance de l'air, etc) autres que les forces de contact exercées sur S par les obstacles impénétrables immobiles ou dont le mouvement est donné. Dans la plupart des applications, les forces dites données sont connues à un instant arbitraire t quand on connaît, à cet instant, la position et les vitesses de S [d'où le nom de forces données] ; mais il n'en est pas nécessairement ainsi. Par exemple, supposons S formé de deux corps solides pesants en contact l'un avec l'autre et lancés dans le vide : les forces données qui s'exercent sur S se réduisent à la pesanteur. Mais considérons à part un de ces solides, soit S' , comme un système : les forces données qui s'exercent sur S' sont la pesanteur et la réaction du second solide S'' (dont le mouvement est inconnu).

⁽²⁾ Compatible, bien entendu, avec les liaisons à l'instant t .

virtuel bilatéral; il est essentiellement nul si toutes les liaisons sont bilatérales.

Sous les développements qui vont suivre s'appliquent aux systèmes qui répondent à la double condition :

- 1° Leur position peut être définie à l'aide d'un nombre fini de paramètres;
- 2° Les liaisons du système sont parfaites.

150. — Liaisons sans frottements et liaisons parfaites.
 Les systèmes sans frottements étudiés dans les nos 144 et 146 rentrent évidemment dans la catégorie précédente. Quand les liaisons sont supposées, comme au n° 144 indépendantes du temps, la réciproque est vraie, en ce sens que les éléments qui glissent et pressent sur d'autres éléments doivent être parfaitement lisses pour que les liaisons soient parfaites : en effet, plaçons le système S dans des conditions initiales où aucune des vitesses de glissement ne soit nulle⁽¹⁾ non plus qu'aucune des pressions entre eux des éléments qui glissent l'un sur l'autre; nous savons que (les obstacles extérieurs étant fixes) le travail total des réactions dans le déplacement vrai (qui est ici un déplacement virtuel) est essentiellement négatif, à moins que tous les frottements ne soient nuls.

Mais il n'en va plus de même quand les liaisons dépendent du temps. Considérons, par exemple, un système S composé d'une plaque solide Π mobile autour d'un axe fixe OZ et d'une mouche (que nous assimilons à un point matériel P) qui se meut sur la plaque d'un mouvement rectiligne et uniforme. La position de la mouche et sa vitesse sur le plan Π étant données pour $t=0$, la mouche occupe sur Π à un instant t une position déterminée quel que soit le mouvement de Π ; la position du système S est connue à l'instant t quand on connaît celle de la plaque. Un déplacement virtuel quelconque de S est une rotation de la plaque Π autour de OZ , la mouche restant immobile sur Π ; dans un tel déplacement, le travail des réactions de Π sur P et de P sur Π est nul; les liaisons sont parfaites, bien qu'il y ait frottement entre P et Π .
 Il est loisible, dans cet exemple, de remplacer la mouche

⁽¹⁾ Nous traitons plus loin le cas où certains des corps sont assujettis à rouler et pivoter sans glisser sur d'autres [liaisons non holonomes].

pour un petit moteur monté sur des rails que supporte Π , et dont un régulateur automatique maintient la vitesse de translation constante.⁽¹⁾

Quand les liaisons dépendent du temps, la définition des liaisons parfaites est donc plus générale que celle des liaisons sans frottements.

Chapitre II.

Systèmes à K degrés de liberté dont les liaisons sont parfaites et bilatérales.

151. — Les paramètres et les déplacements virtuels.

Il est loisible de définir la position du système à l'aide de K paramètres indépendants. Les coordonnées x, y, z d'un élément quelconque P du système seront déterminées à un instant t si on connaît, à cet instant, les valeurs de q_1, q_2, \dots, q_K ; autrement dit, x, y, z sont des fonctions données de q_1, q_2, \dots, q_K, t , soit :

$$(1) \quad x = \varphi(q_1, q_2, \dots, q_K, t), \quad y = \psi(q_1, q_2, \dots, q_K, t), \quad z = \chi(q_1, q_2, \dots, q_K, t).$$

A chaque élément P de S est associé un tel système de 3 fonctions φ, ψ, χ .

Si les liaisons sont indépendantes du temps, on peut choisir les K paramètres de façon qu'aucune des fonctions φ, ψ, χ ne renferme t explicitement. Au contraire, quand les liaisons dépendent du temps, t figure nécessairement au moins dans certaines de ces fonctions.

(1) En réalité, dans les liaisons de ce genre, la vitesse est à chaque instant ϑ un peu plus grande ou un peu plus petite que la vitesse donnée, mais le jeu automatique de la machine [ou la volonté de l'être vivant] corrige constamment ces excès ou ce défaut de vitesse. On pourrait supprimer la liaison en question, et faire rentrer le jeu automatique du régulateur dans l'étude du mouvement du système.

L'ensemble des déplacements que le système S peut occuper à un instant t_0 s'obtient en faisant $t = t_0$ dans les Φ, Ψ, X , et en faisant varier arbitrairement les q_1, q_2, \dots, q_k . Un déplacement virtuel δS de S [c.à.d. un déplacement infinitésimal compatible avec les liaisons à l'instant t] s'obtient en laissant t constant et en donnant à q_1, q_2, \dots, q_k des accroissements infinitésimaux arbitraires $\delta q_1, \dots, \delta q_k$. Le déplacement correspondant $\delta x, \delta y, \delta z$ d'un élément P de S est donné par les formules :

$$(2) \begin{cases} \delta x = \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial q_k} \delta q_k, \\ \delta y = \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} \delta q_k, \\ \delta z = \frac{\partial X}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial X}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial X}{\partial q_k} \delta q_k. \end{cases}$$

Un déplacement virtuel est la superposition de k déplacements virtuels distincts, où un seul des paramètres q varie [1^{ère} année, p. 365].

Le déplacement vrai de S entre les instants t et $t + dt$ vérifie les formules

$$(3) \begin{cases} dx = \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt, \\ dy = \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \Psi}{\partial t} dt, \\ dz = \frac{\partial X}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial X}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial X}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial X}{\partial t} dt. \end{cases}$$

Quand les liaisons sont indépendantes du temps, $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial t} \equiv \frac{\partial X}{\partial t} \equiv 0$, et le déplacement vrai est, comme nous le savons déjà, un déplacement virtuel. Au contraire, quand les liaisons dépendent du temps, les termes en dt ne sont pas tous nuls identiquement dans les équations (3), et nous vérifions bien que le déplacement vrai n'est pas en général un déplacement virtuel.

152. - Travail virtuel des forces données.

Le système S occupant à l'instant t la position S_0 avec des vitesses déterminées, soit F' ou (X', Y', Z') la force donnée totale qui s'exerce sur l'élément P de S . Le travail virtuel des forces données, c'est le travail des forces F' dans un déplacement virtuel ⁽¹⁾ arbitraire δS à partir de S_0 . Si le déplacement virtuel δS est défini par les variations $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k$ des paramètres, ce travail a pour valeur [1^{ère} année, p. 365] :

$$(4) \quad Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_k \delta q_k$$

où on a :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_1 = \Sigma \left(X' \frac{\partial x}{\partial q_1} + Y' \frac{\partial y}{\partial q_1} + Z' \frac{\partial z}{\partial q_1} \right), \\ Q_2 = \Sigma \left(X' \frac{\partial x}{\partial q_2} + Y' \frac{\partial y}{\partial q_2} + Z' \frac{\partial z}{\partial q_2} \right) \\ \dots \\ Q_k = \Sigma \left(X' \frac{\partial x}{\partial q_k} + Y' \frac{\partial y}{\partial q_k} + Z' \frac{\partial z}{\partial q_k} \right), \end{array} \right.$$

les sommes Σ étant étendues à tous les éléments de S .

Les liaisons étant toutes bilatérales et parfaites, le travail virtuel des réactions est essentiellement nul; le travail virtuel de toutes les forces (réactions et forces données) qui s'exercent sur S se réduit au travail des seules forces données et par suite a comme valeur l'expression (4).

Quand les liaisons sont indépendantes du temps, le déplacement vrai est un déplacement virtuel et le travail vrai des forces données (qui se confond avec celui de toutes les forces) a comme valeur

$$Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + \dots + Q_k dq_k.$$

Quand les liaisons dépendent du temps, pour obtenir le travail vrai des forces données, il faut augmenter l'expression précédente de la quantité

(1) Déplacement compatible avec les liaisons à l'instant t .

$\Sigma (X' \frac{\partial \Phi}{\partial E} + Y' \frac{\partial \Phi}{\partial E} + Z' \frac{\partial \Phi}{\partial E})$. De plus, le travail vrai des réactions n'est pas nul en général, et le travail vrai de toutes les forces diffère par suite du travail vrai des seules forces données.

153. - Principe de d'Alembert.

Soit m la masse d'un des éléments P du système, \bar{y} son accélération à l'instant t , $-m\bar{y} = \bar{\Phi}$ sa force d'inertie [1^{ère} année p. 107], \bar{F} la force totale qui s'exerce sur P . On a : $\bar{\Phi} + \bar{F} = 0$: le travail total des forces $\bar{\Phi}$ et \bar{F} dans tout déplacement élémentaire (idéal) de S à partir de sa position vrai est donc nul, et cela est vrai notamment si le déplacement élémentaire est un déplacement virtuel de S . Mais, dans un tel déplacement, le travail des réactions est nul. D'où ce théorème, connu sous le nom de principe de d'Alembert (1).

Dans tout déplacement virtuel du système S (déplacement infinitésimal compatible avec les liaisons à l'instant t) le travail total des forces d'inertie $\bar{\Phi}$ et des forces données \bar{F} est nul.

Ce principe suppose les liaisons bilatérales et parfaites. Quand les liaisons sont encore bilatérales mais affectées de frottement, le principe ainsi énoncé n'est plus exact : c'est le travail virtuel des forces d'inertie, des forces données et des réactions qui est nul.

Le principe de d'Alembert se traduit par l'égalité :

$$(6) \quad -\Sigma m(x'' \delta x + y'' \delta y + z'' \delta z) + \Sigma (X' \delta x + Y' \delta y + Z' \delta z) = 0$$

les sommes Σ étant étendues à tous les éléments P de S , et $(\delta x, \delta y, \delta z)$ définissant le déplacement de P dans un déplacement virtuel. Si on exprime les $\delta x, \delta y, \delta z$ à l'aide de $\delta q_1, \dots, \delta q_k$ d'après (2), on voit que l'équation (6) peut s'écrire :

$$(7) \quad \delta q_1 (Q_1 - E_1) + \delta q_2 (Q_2 - E_2) + \dots + \delta q_k (Q_k - E_k) = 0,$$

avec

$$(8) \quad \begin{cases} E_1 = \Sigma m \left(x'' \frac{\partial x}{\partial q_1} + y'' \frac{\partial y}{\partial q_1} + z'' \frac{\partial z}{\partial q_1} \right), \\ E_k = \Sigma m \left(x'' \frac{\partial x}{\partial q_k} + y'' \frac{\partial y}{\partial q_k} + z'' \frac{\partial z}{\partial q_k} \right), \end{cases}$$

(1) D'Alembert n'a pas énoncé ce principe sous une forme aussi précise, mais c'est dans ce sens qu'il l'a appliqué et qu'on l'a appliqué après lui.

les Q étant donnés par (5).

L'équation (7) doit être vérifiée pour tout déplacement virtuel, donc pour $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_K$ arbitraire. Il faut et il suffit pour cela qu'on ait :

$$(9) \quad E_1 = Q_1, \quad E_2 = Q_2, \quad \dots \quad E_K = Q_K$$

Le principe de d'Alembert se traduit donc par K équations distinctes, et comme le système dépend de K paramètres, on conçoit que ces K équations suffisent à déterminer le mouvement connaissant les forces données (et les conditions initiales). Précisons ce résultat fondamental.

154. - Équations déduites du principe de d'Alembert.
Nous pouvons, dans les expressions (8) de E_1, E_2, \dots, E_K , remplacer les x'', y'', z'' par leurs expressions en fonction de t et des q_j, q_j', q_j'' . On a :

$$(10) \quad \begin{cases} x' = \frac{\partial x}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x}{\partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_K} q_K' + \frac{\partial x}{\partial t} \\ x'' = \frac{\partial x}{\partial q_1} q_1'' + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_K} q_K'' + \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} q_1' + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_K} q_K' + \frac{\partial x}{\partial t} \right)'_{(2)} \end{cases}$$

et des égalités analogues en y', y'', z', z'' . Ces égalités permettent d'exprimer les E_j à l'aide de $t, q_1, q_K, q_1', q_K', q_1'', \dots, q_K''$. Les E_j sont linéaires en $q_1'', q_2'', \dots, q_K''$.

D'autre part, les forces données F sont connues, par hypothèse, à un instant t , quand on connaît la position et les vitesses de S . Il suit de là que les Q_j sont des fonctions données des $(2K+1)$ variables $t, q_1, \dots, q_K, q_1', \dots, q_K'$.

En définitive, les équations (9) forment un système de K équations linéaires en q_1'', \dots, q_K'' , dont les coefficients sont donnés en $q_1, \dots, q_K, q_1', \dots, q_K'$ et t . Il est loisible de supposer ce système résolu par rapport à q_1'', \dots, q_K'' , soit

$$(11) \quad q_j'' = B_j(q_1, \dots, q_K, q_1', \dots, q_K', t) \quad (j=1, 2, \dots, K).$$

Pour calculer le mouvement de S , il faut intégrer ce système de K équations différentielles du second ordre, qui définit q_1, \dots, q_K en fonction de t quand on connaît les conditions initiales $t^0, q_1^0, \dots, q_K^0, \dot{q}_1^0, \dots, \dot{q}_K^0$.

Le principe de d'Alembert permet donc de calculer le mouvement d'un système matériel à K degrés de liberté, dont les liaisons sont bilatérales et parfaites.

155. - Calcul des réactions.

Supposons qu'à l'instant t on connaisse la position et les vitesses de S [c'est-à-dire les q_i et les \dot{q}_i]: la force donnée (totale) \vec{F}' qui s'exerce sur un élément P de S est alors connue à l'instant t , ainsi que l'accélération \vec{y} de P ; en effet, les q'' sont donnés par les éq. (11) puis les x'', y'', z'' par les éq. (10). La réaction totale \vec{R} qui s'exerce sur P à l'instant t est donc donnée par la relation géométrique :

$$\vec{R} = m\vec{y} - \vec{F}'.$$

156. - Le théorème des forces vives et le principe de d'Alembert.

Soit $2T$ la force-vive de S ; si les liaisons sont indépendantes du temps, le travail de toutes les forces appliquées à S , entre les instants t et $t+dt$ est $Q_1 dq_1 + \dots + Q_K dq_K$; le théorème des forces-vives se traduit par l'égalité :

$$dT = Q_1 dq_1 + \dots + Q_K dq_K.$$

Cette égalité, doit être une conséquence du principe de d'Alembert (qui définit le mouvement): il suffit, pour le vérifier d'appliquer l'égalité fondamentale (6) au déplacement infinitésimal vrai (qui est un déplacement virtuel). Il vient ainsi :

$$\sum m(x''dx + y''dy + z''dz) = \sum (X'dx + Y'dy + Z'dz),$$

ou bien

$$\sum m(x''x' + y''y' + z''z') = \sum (X'x' + Y'y' + Z'z'),$$

ou enfin :

$$\frac{dT}{dt} = Q_1 \dot{q}_1 + Q_2 \dot{q}_2 + \dots + Q_K \dot{q}_K.$$

Quand les liaisons dépendent du temps, les réactions interviennent en général dans le théorème des forces vives.

157. - Cas où il y a une fonction de forces (en tenant compte des liaisons).

Quand les forces données ne dépendent que de la position du système (et du temps), les Q_j sont des fonctions de q_1, \dots, q_k, t . Si l'expression

$$Q_1 dq_1 + \dots + Q_k dq_k$$

est (pour t constant) la différentielle exacte d'une fonction $V(q_1, \dots, q_k, t)$, on dit qu'il existe une fonction de forces en tenant compte des liaisons. On a, dans ce cas :

$$Q_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, Q_k = \frac{\partial V}{\partial q_k}.$$

Quand les forces données qui s'exercent sur les éléments P de S supposés libres dérivent d'une fonction de forces $U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t)$, il en est de même à fortiori si on tient compte des liaisons : pour obtenir la fonction $V(q_1, \dots, q_k, t)$, il suffit de remplacer dans U les x, y, z en q_1, \dots, q_k, t . Quand U ne renferme pas t explicitement, et quand de plus les liaisons sont indépendantes du temps, V ne renferme pas t explicitement : l'égalité des forces-vives donne alors l'intégrale première : $T = V + Cte$.

Si le système est à liaisons complètes, $k=1$; l'équation unique que fournit le principe de d'Alembert définit le mouvement. Soit q le paramètre unique ; l'équation du mouvement s'écrit :

$$\Sigma m \left(x'' \frac{\partial x}{\partial q} + y'' \frac{\partial y}{\partial q} + z'' \frac{\partial z}{\partial q} \right) = \Sigma \left(X' \frac{\partial x}{\partial q} + Y' \frac{\partial y}{\partial q} + Z' \frac{\partial z}{\partial q} \right) = Q(q, q', t),$$

où

$$x'' = \frac{\partial x}{\partial q} q'' + \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} q'^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t} q' + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad y'' = \dots, \quad z'' = \dots$$

Quand les liaisons sont indépendantes du temps, cette équation coïncide avec celle des forces-vives (N° 9 et 1^{ère} année, p. 611).

Quand Q est indépendant de q' , $Q(q, t)$ est toujours la dérivée $\frac{\partial V}{\partial q}$ d'une fonction $V(q, t)$.

Applications du Principe de d'Alembert.

Nous allons indiquer maintenant quelques applications du principe de d'Alembert à des cas particuliers qui se présentent fréquemment dans les applications.

158. - Les déplacements virtuels (compatibles avec les liaisons à chaque instant t) comprennent une translation parallèle à une droite fixe, soit Ox .

Dans cette translation virtuelle, tous les x subissent la même variation δx , les y et les z ne varient pas, et l'équation fondamentale (6) donne :

$$\delta x \sum m x'' = \delta x \sum X'.$$

Or les forces intérieures données sont deux à deux égales et directement opposées ; la somme $\sum X'$ se réduit donc à $\sum X^e$, somme des projections sur Ox des forces extérieures données. De là l'égalité, où M est la masse totale de S et ζ l'abscisse de son centre de gravité G :

$$(I) \quad M \zeta'' = \sum X^e.$$

La projection de G sur Ox se meut donc comme si (toute la masse M étant concentrée en G), toutes les forces extérieures données étaient appliquées à ce point.

Remarque. - Le théorème du mouvement du centre de gravité aurait donné :

$$M \zeta'' = \sum X^e + \sum R_x^e,$$

en appelant R_x^e la composante suivant Ox d'une des réactions extérieures. Cette dernière égalité s'applique à tous les systèmes ; la précédente ne s'applique qu'à ceux dont les liaisons (à chaque instant t) comportent une translation virtuelle parallèle à Ox ; pour ces systèmes, $\sum R_x^e$ est nul.

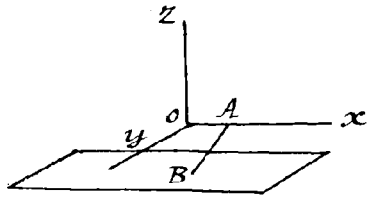
159. - Exemple. - Une barre rigide AB , homogène et pesante, a ses deux extrémités qui glissent sans frottement sur deux cylindres fixes de génératrices parallèles à Ox (lesquels peuvent se réduire chacun à un plan ou

à une droite].

Le théorème précédent fournit l'intégrale première

$$\xi' = q t + C^{te}, \quad (q, \text{projection de } \bar{g} \text{ sur } Ox).$$

Supposons pour fixer les idées, qu'un des cylindres se réduise à une droite horizontale Ox et l'autre à un plan horizontal. Sa position de AB dépend de deux paramètres, soit l'abscisse x de A (mobile sur Ox) et l'angle θ que fait avec Ox la projection de AB sur le plan xOy .



L'égalité précédente, qui donne ici $\xi' = C^{te}$, et l'intégrale des forces vives qui exprime que T est constant définissent le mouvement. Soit α l'angle constant de AB avec Oz ; la force vive de AB , calculée par le théorème de Koenig, est

$$2T = M(\xi^2 + l^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \theta \theta'^2) + \frac{Ml^2}{3} \sin^2 \alpha \theta'^2,$$

l désignant la longueur de AB . En a donc en définitive:

$$\xi \equiv x + l \sin \alpha \cos \theta = \xi_0' t + \xi_0, \quad \theta^2 (\cos^2 \theta + \frac{1}{3}) = h;$$

le problème est ramené aux quadratures.

160. - Les déplacements virtuels (compatibles avec les liaisons à chaque instant t) comprennent une rotation d'ensemble autour d'une droite fixe, soit Oz .

Dans cette rotation virtuelle, on a, pour chaque point P de S :

$$\delta x = -y \delta \theta, \quad \delta y = x \delta \theta, \quad \delta z = 0,$$

$\delta \theta$ étant le même pour tous les points P . L'égalité fondamentale (6) donne par suite:

$$\delta \theta \sum m (xy'' - yx'') = \delta \theta \sum (xY' - yX'),$$

d'où, comme le moment par rapport à Oz des forces données se réduit à celui des forces données extérieures:

$$(II) \quad \frac{d}{dt} \sum m (xy' - yx') = \sum (xY^e - yX^e).$$

Le théorème général des moments cinétiques aurait donné :

$$\frac{d}{dt} \sum m (xy' - yx') = \sum (xY' - yX') + \sum (xR_y^e - yR_x^e).$$

Dans ce cas particulier, $\sum (xR_y^e - yR_x^e) = 0$,

Exemple. - Les extrémités d'une force rigide AB glissent sans frottement sur deux surfaces de révolution fixes et de même axe. - L'égalité (II) s'applique: en particulier, si OZ est vertical et si les forces données se réduisent à la pesanteur, la somme $\sum m(xy' - yx')$ est constante.

161. - Les déplacements virtuels (compatibles avec les liaisons à chaque instant t) comprennent un déplacement hélicoïdal invariable.

Soit OZ l'axe de ce déplacement hélicoïdal et h le rapport constant entre la translation infinitésimale δz et la rotation infinitésimale $\delta \theta$, [$\delta z = h \delta \theta$, $h > 0$ ou < 0].

Dans ce déplacement, on a, pour chaque point P,

$$\delta x = -y \delta \theta, \quad \delta y = x \delta \theta, \quad \delta z = h \delta \theta,$$

et l'équation fondamentale (6) donne:

$$\delta \theta \sum m (xy'' - yx'' + hz'') = \delta \theta \sum (xY' - yX' + hZ'),$$

ou encore:

$$(III) \quad \frac{d}{dt} \sum m (xy' - yx' + hz') = \sum (xY' - yX' + hZ').$$

En particulier, quand les forces extérieures données sont nulles, $\sum m(xy' - yx' + hz')$ est constant.

162 - Exemples. - 1^o Un point matériel P glisse sans frottement sur une surface de vis à filets carrés: mouvement de P quand aucune force donnée ne lui est appliquée.

Soit OZ l'axe de la surface qui, en coordonnées semi-polaires, peut se définir par les équations:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = h \theta.$$

L'intégrale première que nous venons d'indiquer donne ici: $m(r^2 + h^2) \theta' = C^{te}$. L'intégrale des forces-vives donne ensuite: $v^2 = r^2 + r^2 \theta'^2 + z'^2 = r^2 + (r^2 + h^2) \theta'^2 = C^{te}$.

Le problème est ramené aux quadratures: les trajectoires sont les géodésiques de la surface.

2° Deux points pesants P, P_1 de même masse m , mobiles sans frottement sur une hélice circulaire d'axe verticale OZ , s'attirent suivant une certaine fonction de la distance $p = PP_1$. Mouvement du système.

Soit: $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, z = h\theta$

les équations de l'hélice. Le système dépend des deux paramètres θ et θ_1 qui déterminent la position de P et de P_1 .

L'égalité III donne ici (OZ étant la verticale ascendante)

$$m(a^2 + h^2)(\theta' + \theta_1') = -2mgh.$$

L'intégrale des forces-vives donne ensuite:

$$\frac{m}{2}(a^2 + h^2)(\theta'^2 + \theta_1'^2) = -mgh(\theta + \theta_1) + U(p) + C^{te}$$

Le problème se ramène aisément aux quadratures en posant $\theta + \theta_1 = u$ et $\theta - \theta_1 = \psi$.

Equations des petits mouvements.

163. - Rappel du théorème de Sejeune-Dirichlet.

Supposons que les liaisons soient indépendantes du temps et que les forces données admettent une fonction de forces $V(q_1, \dots, q_k)$ où t ne figure pas. Les positions d'équilibre du système sont les positions S_0 ou q_1^0, \dots, q_k^0 telles que la fonction de force satisfasse aux conditions:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \dots = \frac{\partial V}{\partial q_k} = 0,$$

conditions nécessaires pour que S_0 corresponde à un maximum de V . Nous savons [*1^{ère} année, p. 607*], que quand la fonction V est effectivement maxima en S_0 , S_0 est une position d'équilibre stable.

Nous allons étudier les petits mouvements de S autour d'une telle position S_0 .

164. - Equations des petits mouvements de S .

Nous pouvons toujours supposer que les valeurs des paramètres sont toutes nulles, ainsi que V , quand S est en S_0 .

Soit alors, pour chaque élément P de S :

$$(1) \begin{cases} x - x_0 = \varphi(q_1, \dots, q_K) - x_0 \equiv a_1 q_1 + a_2 q_2 + \dots + a_K q_K + \dots, \\ y - y_0 = \psi(q_1, \dots, q_K) - y_0 \equiv b_1 q_1 + b_2 q_2 + \dots + b_K q_K + \dots, \\ z - z_0 = \chi(q_1, \dots, q_K) - z_0 \equiv c_1 q_1 + c_2 q_2 + \dots + c_K q_K + \dots \end{cases}$$

Nous choisissons les paramètres de façon que, les seconds membres de (1) étant réduits à leur partie linéaire, on puisse, parmi les $3n$ relations⁽¹⁾, en trouver K qui soient résolubles par rapport à q_1, \dots, q_K . Il suffit par exemple de prendre comme paramètre K des $3n$ quantités $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ convenablement choisis.

Considérons d'autre part le développement de $V(q_1, \dots, q_K)$ suivant les puissances de q_1, \dots, q_K : soit

$$V = V_2 + V_3 + \dots,$$

V_j désignant un polynôme homogène de degré j en q_1, \dots, q_K . La forme quadratique V_2 est essentiellement négative ou nulle, puisque V est maxima pour $q_1 = q_2 = \dots = q_K = 0$. Je suppose qu'on se trouve dans le cas général où V_2 est une somme de K carrés distincts (tous positifs). La fonction V_2 est donc rigoureusement maxima pour $q_1 = q_2 = \dots = q_K = 0$: elle est négative (et non nulle) si un au moins des q_j n'est pas nul.

164. - Ceci posé, plaçons-nous d'abord dans le cas simple où les équations de liaison se réduisent aux termes écrits dans les équations (1) et où V se réduit à V_2 . La position S_0 est pour S une position d'équilibre stable. Écrivons les équations (9) déduites du principe de d'Alembert; il vient:

$$(2) \quad q_1'' \sum m(\alpha_1^2 + b_1^2 + c_1^2) + q_2'' \sum m(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) + \dots + \\ + q_K'' \sum m(\alpha_1 \alpha_K + b_1 b_K + c_1 c_K) = \frac{\partial V_2}{\partial q_1} = l_1 q_1 + l_2 q_2 + \dots + l_K q_K,$$

et $(K-1)$ autres équations analogues. Le mouvement de S est donc défini par K équations différentielles du 2^e ordre

(1) n désignant le nombre des éléments en lesquels on a décomposé S .

linéaires et homogènes, à coefficients constants et où les dérivées premières ne figurent pas. La position S_0 étant position d'équilibre stable, l'intégrale générale des équations (2) ne renferme que sous les signes \sin et \cos [1^{ère} année, p. 624]. Autrement dit, les petits mouvements de S sont la superposition de K petits mouvements périodiques fondamentaux, de l'espèce suivante :

$$(3) \quad q_1 = A_1 \cos vt + B_1 \sin vt, \dots \dots q_K = A_K \cos vt + B_K \sin vt,$$

équations qu'on peut encore écrire:⁽¹⁾

$$(4) \quad q_1 = c \lambda_1 \cos(vt + h), \dots \dots q_K = c \lambda_K (\cos vt + h),$$

c et h désignant deux constantes arbitraires et v et les λ des constantes numériques. La constante h caractérise la phase du mouvement (4).

165. — Passons maintenant au cas général: nous allons montrer que les équations (2) [équations exactes du mouvement du système quand les équations de liaison (1) sont réduites à leurs termes linéaires et V à V_2] sont les équations approchées des petits mouvements de S .

Ecrivons l'intégrale des forces vives :

$$(5) \quad T = V + \varepsilon^2,$$

où ε désigne une constante positive, qui est très petite si toutes les valeurs initiales des q_i et des q_i' sont très petites.

Pendant tout le mouvement, les q_i, q_i' sont de l'ordre de ε (ou d'ordre supérieur). Autrement dit, si on pose : $q_i = \varepsilon p_i$, (d'où $q_i' = \varepsilon p_i'$), les p_i et p_i' restent moindres en modules qu'une quantité finie (indépendante de ε)⁽²⁾

⁽¹⁾ En effet, les équations (2) ne changeant pas quand on change t en $-t$, à toute solution (3) en correspond une autre où les B sont changés de signe, et en superposant les deux solutions, on en obtient une 3^e où tous les B sont nuls. Si on multiplie cette dernière solution par une constante arbitraire c , en y augmentant t d'une autre constante arbitraire, on obtient le mouvement (4). La superposition des K mouvements (4) introduit $2K$ constantes arbitraires.

⁽²⁾ Voir cette note page suivante.

Ecrivons avec les paramètres q_j les H équations du mouvement déduites du principe de d'Alembert: elles renferment toutes ε en facteur, et une fois divisées par ce facteur elles ne diffèrent des équations (2) [où les lettres q_j sont remplacées par les lettres q_j] que par des termes qui renferment ε en facteur. Si nous négligeons ces termes en ε , nous obtenons les équations approchées des petits mouvements, et ces équations coïncident avec les équations (2).

Toutes les propositions énoncées l'an dernier sur la composition des petits mouvements, sur l'influence des résistances, des forces perturbatrices périodiques, etc. peuvent se répéter dès lors sans modification.

166. - Remarque sur l'influence du frottement.

Considérons un système S de solides invariables en contact entre eux et avec des obstacles fixes: le travail total des réactions dans le déplacement vrai de S est négatif ou nul. Les liaisons, dans ce cas, sont indépendantes

Note de la page 332.
 (2) En effet, posons $\sqrt{q_1^2 + \dots + q_n^2} = \eta$, et $q_1 = \alpha_1 \eta, \dots, q_n = \alpha_n \eta$: il vient $V(q_1, \dots, q_n) = \eta^2 [V_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \eta(\dots)]$ avec $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1$. La forme quadratique essentiellement positive $V_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ reste supérieure à une certaine quantité $\lambda > 0$, et on peut écrire: $-\frac{V}{\eta^2} > \lambda [1 + \rho]$, $|\rho|$ étant nul avec η et ρ moindre que $\frac{1}{2}$ pour η suffisamment petit, soit $\eta < \sigma$.

Posons de même $\sqrt{q_1^2 + \dots + q_n^2} = \zeta$, et $q_1 = \beta_1 \zeta, \dots, q_n = \beta_n \zeta$. Il vient: $T(q_1, \dots, q_n, q_1, \dots, q_n) = \zeta^2 T(\beta_1, \dots, \beta_n, \eta \alpha_1, \dots, \eta \alpha_n)$ avec $\beta_1^2 + \dots + \beta_n^2 = 1$; T est une forme quadratique en q_1, \dots, q_n essentiellement positive. Pour $\eta = 0$, ses coefficients sont numériques, et $T(\beta_1, \dots, \beta_n)$ reste supérieur à une certaine quantité $\mu > 0$; pour η petit, soit $\eta < \sigma$, on aura:

$$T(q_1, \dots, q_n, q_1, \dots, q_n) > \frac{\mu}{2} \zeta^2.$$

Imposons maintenant aux conditions initiales les restrictions suivantes: 1° la valeur initiale η_0 de $\sqrt{q_1^2 + \dots + q_n^2}$ est $< \sigma$; 2° \mathcal{E} ou $T_0 - V_0$ est $< \frac{\sigma^2 \Lambda}{2}$. Ces restrictions sont toujours remplies si la position initiale de S est suffisamment voisine de S_0 en même temps que sa force-vive initiale suffisamment petite. Au début du mouvement $-V$ est $> \frac{\eta_0^2 \Lambda}{2}$; \mathcal{E} est donc supérieur à $\frac{\eta_0^2 \Lambda}{2}$; je dis que η , moindre initialement que $\varepsilon \sqrt{\frac{\Lambda}{2}}$, reste indéfiniment inférieur à cette valeur. En effet, si, à un instant t , η est égal à $\varepsilon \sqrt{\frac{\Lambda}{2}}$, on a: $-V > \frac{\Lambda \eta^2}{2}$, donc $> \mathcal{E}^2$ et $V + \mathcal{E}^2$, c. à. d. T , serait négatif.

D'autre part, η restant inférieur à σ , on a: $\frac{\mu}{2} \zeta^2 < T < \mathcal{E}^2$, d'où $\zeta < \varepsilon \sqrt{\frac{\Lambda}{\mu}}$.

Il suit de là que les quantités $\eta_j = \frac{q_j}{\varepsilon}$ et $\beta_j = \frac{q_j}{\zeta}$ restent en modules moindres respectivement que $\sqrt{\frac{\Lambda}{\mu}}$ et $\sqrt{\frac{\Lambda}{\mu}}$.

du temps. Mais il importe de remarquer que les liaisons peuvent être indépendantes du temps au sens général du N° 148 sans que les obstacles⁽¹⁾ extérieurs soient fixes. Par exemple, considérons un tore solide animé d'une rotation uniforme ω_0 autour de son axe, et un système formé d'un élément P mobile sur le tore : l'espace rempli par le tore est le même quel que soit l'instant t considéré ; l'ensemble des positions que P peut occuper à l'instant t est le même quel que soit t . Les liaisons indépendantes du temps au sens du N° 148. Quand la surface du tore est parfaitement lisse, le mouvement de P est le même que si le tore était immobile. Mais quand il y a frottement, la direction de la composante tangentielle de la réaction R du tore sur P dépend de ω_0 , et le mouvement de P sur le tore (pour les mêmes conditions initiales) n'est pas le même suivant que ω_0 est nul ou non. Si ω_0 est nul, le travail de la réaction R est essentiellement négatif ; il peut être positif si ω_0 est $\neq 0$; supposons par exemple que P soit animé d'une vitesse initiale directement opposée à celle du point coïncidant du tore, mais plus petite. La force de frottement qui s'exerce sur P a initialement le sens de la vitesse de P , et son travail est positif (au moins pendant un certain temps).

Cette remarque est générale : quand les liaisons sont affectées de frottements, il importe de préciser la définition du N° 148. Nous convenons de dire pour plus de clarté ; 1° que les liaisons géométriques sont indépendantes du temps si l'ensemble des positions que S peut occuper à un instant t est le même quel que soit t [condition du N° 148] ; 2° que les liaisons matérielles sont indépendantes du temps si les liaisons géométriques sont indépendantes du temps et si, en outre, les obstacles extérieurs (impénétrables) sont fixes.

Quand les liaisons sont parfaites, cette distinction n'a aucune importance ; en effet, le principe de d'Alembert permet de calculer le mouvement en tenant compte seulement des liaisons géométriques. Ce mouvement est donc le même de quelque manière que ces liaisons géométriques soient réalisées, et si elles sont indépendantes du temps, peu importe que les

⁽¹⁾ Par définition, les obstacles sont les corps impénétrables dont la position est donnée à chaque instant (N° 149).

obstacles extérieurs qui les réalisent se déplacent ou se déforment quand t varie.

Il en va tout autrement quand les liaisons sont affectées de frottement : les forces de frottement sont différentes et leurs effets différents suivant la manière dont les liaisons sont réalisées matériellement.

Mais si les liaisons matérielles sont indépendantes du temps, le travail des forces extérieures dans le mouvement vrai et celui des réactions intérieures sont tous deux essentiellement négatifs ou nuls, du moins quand S se compose de points matériels sans contacts entre eux, de solides indéformables et de fils inextensibles et parfaitement flexibles [1^{ère} année, p. 354 et p. 431]. C'est là une propriété très importante, d'où il résulte notamment que, pour un tel système, toute position S_0 qui est position d'équilibre stable quand les liaisons sont supposées parfaites est encore position d'équilibre stable quand elles sont affectées de frottement [ibid p. 354].

Au contraire, si les liaisons matérielles dépendent du temps, lors même que les liaisons géométriques en seraient indépendantes, le travail total des réactions dans le mouvement vrai peut avoir un signe quelconque, ainsi que le montre l'exemple cité au début de ce N^o.

Nous allons poursuivre maintenant l'étude générale du mouvement d'un système S à liaisons parfaites et à K degrés de liberté.

Equations de Lagrange.

167. - Remarque sur la forme des K équations du mouvement déduites du principe de d'Alembert.

Les K équations du mouvement déduites du principe de d'Alembert peuvent s'écrire :

$$(1) \quad \sum m \left(x'' \frac{dx}{dq_1} + y'' \frac{dy}{dq_1} + z'' \frac{dz}{dq_1} \right) = \sum \left(X \frac{dx}{dq_1} + Y \frac{dy}{dq_1} + Z \frac{dz}{dq_1} \right)$$

et $(K-1)$ équations analogues.

Les premiers membres de ces égalités sont de nature cinématique. Ils sont connus, à un instant t , quand on connaît (à cet instant) les positions et les accélérations des points du système. Les seconds membres sont de nature dynamique: ils dépendent des forces données appliquées au système.

Supposons qu'on remplace les axes par de nouveaux axes liés invariablement aux premiers⁽¹⁾: les quantités Q_1, \dots, Q_k ne changent pas: car $Q_1 dq_1$, par exemple, représente le travail de forces déterminées dans un déplacement déterminé du système. Les premiers membres des équations (1) ne doivent donc pas changer non plus: autrement dit, les E_1, \dots, E_k sont des invariants cinématiques du système dans tout changement d'axes où les axes restent liés invariablement aux premiers.

Or on connaît un invariant cinématique remarquable du système: c'est la force vive $2T = \sum m(x^2 + y^2 + z^2)$. Supposons qu'on remplace, dans T , les x, y, z en fonction des q, q' et de t , et soit $2T(q'_1, \dots, q'_k, q_1, \dots, q_k, t)$ l'expression ainsi obtenue: les dérivées $\frac{\partial T}{\partial q'_1}, \frac{\partial T}{\partial q'_2}, \dots$, etc sont elles-mêmes des invariants cinématiques du système. De là l'idée de Lagrange d'essayer d'exprimer les premiers membres des équations (1) à l'aide de $T(q'_1, \dots, q'_k, q_1, \dots, q_k, t)$ et de ses dérivées. C'est cette idée qui l'a conduit à la forme des équations (1) connue sous le nom d'équations de Lagrange, équations qui jouent aujourd'hui, en Mécanique et en Physique, un rôle considérable.

168. - Notation employée. - Écrivons les équations qui définissent les coordonnées x, y, z d'un élément P (de masse m) du système en fonction des k paramètres q_1, q_2, \dots, q_k : soit

$$(2) \quad \begin{cases} x = \varphi(q_1, q_2, \dots, q_k, t) \\ y = \psi(q_1, q_2, \dots, q_k, t) \\ z = \chi(q_1, q_2, \dots, q_k, t) \end{cases}$$

Dans ce qui suit, (x'', y'', z'') représenteront les composantes de l'élément P ou (x, y, z) de S et (x'', y'', z'')

⁽¹⁾ En gardant, bien entendu, les mêmes paramètres. Par exemple, si le système se compose d'un seul point mobile sur une courbe donnée, et si le paramètre q est l'arc de courbe, compté à partir d'une certaine origine sur la courbe dans un certain sens, on conserve ce même paramètre en changeant d'axes.

les composantes de son accélération (à l'instant t). -
 Étant donnée une fonction quelconque $u(q'_1, \dots, q'_k, q''_1, \dots, q''_k, t)$,
 je désignerai par $\frac{du}{dq'_1}$, $\frac{du}{dq''_1}$, etc, $\frac{du}{dt}$ les dérivées partielles
 de cette fonction par rapport à q' ou q'' , etc ou t , regardés
comme variables indépendantes. - Enfin je représenterai
 par $\frac{du}{dt}$ la dérivée de la fonction de t obtenue en remplaçant
 dans $\frac{du}{dt}$ les q, q' en fonction de t , et je dirai que $\frac{du}{dt}$ est
 la dérivée totale de u .

D'après cette notation, on a :

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dq'_1} q'_1'' + \dots + \frac{du}{dq''_k} q''_k'' + \frac{du}{dq'_1} q'_1' + \dots + \frac{du}{dq''_k} q''_k' + \frac{du}{dt}$$

De plus, si u est une simple fonction de q_1, \dots, q_k, t
 (indépendante des q'), on peut écrire :

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{dq_1} \right) = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{du}{dt} \right)$$

(et les égalités analogues relatives aux autres indices).
 En effet,

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dq_1} q_1' + \frac{du}{dq_2} q_2' + \dots + \frac{du}{dq_k} q_k' + \frac{du}{dt}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{du}{dt} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} q_1' + \frac{\partial^2 u}{\partial q_2 \partial q_1} q_2' + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial q_k \partial q_1} q_k' + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial q_1}$$

D'autre part :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{du}{dq_1} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} q_1' + \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_k} q_k' + \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial t}$$

D'où l'égalité (3).

169. - Expression de la force vive $2T$ à l'aide des paramètres.

Ceci posé, écrivons, d'après (2), les valeurs de x', y', z' . On a :

$$(4) \quad \begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x}{\partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_k} q_k' + \frac{\partial x}{\partial t} \\ y' = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial y}{\partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial y}{\partial q_k} q_k' + \frac{\partial y}{\partial t} \\ z' = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial z}{\partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial z}{\partial q_k} q_k' + \frac{\partial z}{\partial t} \end{cases}$$

Remarquons immédiatement que ces égalités permettent d'écrire :

$$(5) \quad \frac{\partial x'}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial y'}{\partial q_1} = \frac{\partial y}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial z'}{\partial q_1} = \frac{\partial z}{\partial q_1}$$

et les égalités analogues relatives aux autres indices.

Si, dans la somme $\Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2)$, nous remplaçons les x', y', z' par les valeurs (4), nous obtenons un polynôme du second degré en q_1, \dots, q_k , polynôme dont les coefficients sont des fonctions connues de q_1, \dots, q_k, t . C'est cette expression que, dans tout ce qui suit, nous représenterons par $2T$. On peut poser d'après cela, $T = T_2 + T_1 + T_0$, T_0 désignant une forme homogène en q_1, \dots, q_k , de degré l , dont les coefficients dépendent de q_1, \dots, q_k, t . Quand les liaisons sont indépendantes du temps, les Φ, Ψ, X ne renferment pas t , les seconds membres de (4) sont homogènes en q_1, \dots, q_k , et $2T$ est une forme quadratique en q_1, \dots, q_k , indépendante de t , [$T \equiv T_2$].

170. - Formation des équations de Lagrange.

Considérons le premier membre d'une équation (1), la première par exemple, c'est-à-dire l'expression :

$$E_1 = \Sigma m \left(x'' \frac{dx}{dq_1} + y'' \frac{dy}{dq_1} + z'' \frac{dz}{dq_1} \right).$$

Nous pouvons écrire cette expression ainsi :

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \Sigma m \left(x' \frac{dx}{dq_1} + y' \frac{dy}{dq_1} + z' \frac{dz}{dq_1} \right) - \Sigma m \left[x' \frac{d}{dt} \frac{dx}{dq_1} + y' \frac{d}{dt} \frac{dy}{dq_1} + z' \frac{d}{dt} \frac{dz}{dq_1} \right].$$

Dans la première de ces deux sommes, on peut [d'après (5)] remplacer $\frac{dx}{dq_1}, \frac{dy}{dq_1}, \frac{dz}{dq_1}$ par $\frac{dx'}{dq_1}, \frac{dy'}{dq_1}, \frac{dz'}{dq_1}$; dans la seconde somme, on peut remplacer, [d'après (3)], $\frac{d}{dt} \frac{dx}{dq_1}, \frac{d}{dt} \frac{dy}{dq_1}, \frac{d}{dt} \frac{dz}{dq_1}$ par $\frac{\partial x'}{\partial q_1}, \frac{\partial y'}{\partial q_1}, \frac{\partial z'}{\partial q_1}$. L'expression (6) devient ainsi :

$$(7) \quad \frac{d}{dt} \Sigma m \left(x' \frac{dx'}{dq_1} + y' \frac{dy'}{dq_1} + z' \frac{dz'}{dq_1} \right) - \Sigma m \left(x' \frac{\partial x'}{\partial q_1} + y' \frac{\partial y'}{\partial q_1} + z' \frac{\partial z'}{\partial q_1} \right).$$

Or calculons $\frac{\partial T}{\partial q'_1}$ et $\frac{\partial T}{\partial q_1}$. D'après l'égalité :

$$2T = \sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

on a :

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1} = \sum m \left(x' \frac{\partial x'}{\partial q'_1} + y' \frac{\partial y'}{\partial q'_1} + z' \frac{\partial z'}{\partial q'_1} \right),$$

et

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \sum m \left(x' \frac{\partial x'}{\partial q_1} + y' \frac{\partial y'}{\partial q_1} + z' \frac{\partial z'}{\partial q_1} \right).$$

L'expression (7) peut donc s'écrire :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1},$$

et la première équation (1) devient :

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1.$$

Comme le calcul précédent s'applique évidemment aux autres valeurs de l'indice, on voit qu'en définitive les équations (1) prennent la forme :

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1, 2, \dots, K)$$

On donne aux équations (1) écrites sous la forme (9) le nom d'équations de Lagrange⁽¹⁾.

Cas où les forces dérivent d'un potentiel.

Supposons que les Q_j soient les dérivées $\frac{\partial V}{\partial q_j}$ d'une fonction $V(q_1, q_2, \dots, q_K, t)$ où t peut figurer explicitement : les équations de Lagrange prennent alors la forme remarquable :

$$(10) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_j} \right) = \frac{\partial (T+V)}{\partial q_j}.$$

⁽¹⁾ Ces K équations, linéaires en $q''_1 \dots q''_K$, sont résolubles par rapport à q''_1, \dots, q''_K : il est facile de le démontrer rigoureusement en partant de cette remarque que T_2 est une forme quadratique en $q'_1 \dots q'_K$ essentiellement positive.

171. - Systèmes dont les liaisons sont indépendantes du temps. - Théorème des forces vives.

Quand les liaisons sont indépendantes du temps (et sans frottement), nous savons que le théorème de forces vives se traduit par l'égalité :

$$dT = Q_1 dq_1 + \dots + Q_K dq_K,$$

ou encore

$$\frac{dT}{dt} = Q_1 q'_1 + \dots + Q_K q'_K.$$

Cette égalité doit donc être une conséquence des équations de Lagrange. Vérifions-le.

Je multiplie les deux membres de la première équation (9) par q'_1 , ceux de la seconde par q'_2 , etc. et je fais la somme des équations ainsi obtenues, membre à membre. Il vient :

$$(10) \quad \sum q'_j \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_j} - \sum q'_j \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_1 q'_1 + \dots + Q_K q'_K.$$

On peut écrire :

$$(11) \quad \sum q'_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_j} \right) = \frac{d}{dt} \sum q'_j \frac{\partial T}{\partial q'_j} - \sum q''_j \frac{\partial T}{\partial q'_j}.$$

Or les liaisons étant indépendantes du temps, $T(q'_1, \dots, q'_K, q_1, \dots, q_K, t)$ est une forme quadratique en q'_1, \dots, q'_K . D'après l'identité d'Euler, on a donc :

$$q'_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + \dots + q'_K \frac{\partial T}{\partial q'_K} = 2T,$$

et l'égalité (10) prend la forme :

$$(12) \quad 2 \frac{dT}{dt} - q''_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} - \dots - q''_K \frac{\partial T}{\partial q'_K} - q'_1 \frac{\partial T}{\partial q_1} - \dots - q'_K \frac{\partial T}{\partial q_K} = Q_1 q'_1 + \dots + Q_K q'_K.$$

Mais T ne renfermant pas le temps explicitement, on a :

$$(13) \quad \frac{dT}{dt} = q''_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + \dots + q''_K \frac{\partial T}{\partial q'_K} + q'_1 \frac{\partial T}{\partial q_1} + \dots + q'_K \frac{\partial T}{\partial q_K}.$$

L'équation (12) équivaut donc à la suivante :

$$(14) \quad \frac{dT}{dt} = Q_1 q'_1 + \dots + Q_k q'_k.$$

c. q. f. d.

Intégrale des forces vives.

Cette égalité fournit une intégrale première des équations de Lagrange si $Q_1 dq_1 + \dots + Q_k dq_k$ est une différentielle exacte d'une fonction $V(q_1, \dots, q_k)$.

Plus généralement, supposons que l'expression $(Q_1 q'_1 + \dots + Q_k q'_k)$ soit la dérivée exacte d'une fonction $V(q_1, \dots, q_k)$.

L'égalité (14) s'intègre et donne : $T = V + h$.

Faisons dans ce dernier cas :

$$Q_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1} + R_1, \dots, \quad Q_k = \frac{\partial V}{\partial q_k} + R_k.$$

Pour que $Q_1 q'_1 + \dots + Q_k q'_k$ soit la dérivée exacte de la fonction $V(q_1, \dots, q_k)$, il faut et il suffit que $(R_1 q'_1 + \dots + R_k q'_k)$ soit identiquement nul. Autrement dit, les forces données se décomposent en deux classes : les forces de la première classe dérivent d'un potentiel, les forces de la seconde ont un travail total nul dans le déplacement vrai du système matériel.

Par exemple si le système matériel est formé d'un seul point P qui est libre, le théorème des forces vives fournit une intégrale quand la force qui s'exerce sur P est la résultante de deux forces, la première dérivant d'un potentiel, la seconde perpendiculaire à la vitesse. — De telles forces, comme nous le savons, sont introduites dans la théorie des mouvements relatifs, par l'accélération centrifuge composée.

Remarque. — Le raisonnement du N° 171 suppose :
1° que T est une forme quadratique en q'_1, \dots, q'_k ; 2° que T ne dépend pas explicitement du temps. Quand les liaisons dépendent du temps, ni l'une ni l'autre de ces conditions n'est en général remplie.

172. — Des systèmes continus.

Il est clair que tout ce qui précède s'applique aux systèmes continus (ou formés de corps continus) dont la

position dépend d'un nombre fini de paramètres. Mais pour ces systèmes, T [de même que Q_1, \dots, Q_n] est donné, à chaque instant, par une intégrale définie simple, double ou triple, suivant que le corps continu est à une, deux ou trois dimensions.

173. - Emploi des équations de Lagrange.

Pour appliquer les équations de Lagrange à un problème particulier, on doit avant tout se rendre compte du nombre de paramètres indépendants qui définissent la position du système, choisir ces paramètres de la façon qui apparaît comme la plus simple, et exprimer explicitement la force vive $2T$ du système à l'aide de ces paramètres et de leurs dérivées.

On calcule ensuite les dérivées partielles

$$\frac{\partial T}{\partial q_1}, \frac{\partial T}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial T}{\partial q_{n-1}}, \frac{\partial T}{\partial q_n}$$

Puis on forme les équations de Lagrange en calculant les dérivées totales $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_1}, \dots, \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_n}$.

Quelques remarques très simples facilitent souvent la formation des équations de Lagrange.

En premier lieu, si un paramètre, soit q_1 , ne figure dans T que par sa dérivée (et non point explicitement), l'équation de Lagrange correspondante s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{dq_1} = Q_1.$$

Si, en outre, Q_1 est nul (ou est une constante a) l'équation précédente s'intègre et donne

$$\frac{dT}{dq_1} = Cte, \quad \left[\text{ou } \frac{dT}{dq_1} = at + Cte \right].$$

Lorsqu'il y a fonction de forces [dépendant ou non du temps], soit $V(q_1, \dots, q_n, t)$, la remarque s'applique si $(T + V)$ est indépendant de q_1 .

Quand les liaisons sont indépendantes du temps, il y a en général avantage à remplacer une des équations

(*) Et du temps si les liaisons dépendent du temps.

de Lagrange [la plus compliquée à écrire explicitement] par la combinaison de forces vives, surtout si celle-ci donne une intégrale première.

Dans un grand nombre de cas, T ne dépend explicitement que d'un seul paramètre, soit q_1 , les autres ne figurant que par leurs dérivées. Si les liaisons sont indépendantes du temps et si les forces dérivent, en outre, d'un potentiel, simple fonction de q_1 , soit V on connaît K intégrales premières du mouvement :

$$T = V + h, \quad \frac{\partial T}{\partial q_2} = \alpha_2, \dots, \frac{\partial T}{\partial q_k} = \alpha_k$$

Ces égalités donnent q_2, \dots, q_k en fonction de q_1 , soit

$$dt = \frac{dq_1}{f(q_1)}, \quad dq_2 = \varphi(q_1) dt, \dots, dq_k = \chi(q_1) dt,$$

ou encore

$$dt = \frac{dq_1}{f(q_1)}, \quad dq_2 = \frac{\varphi(q_1)}{f(q_1)} dq_1, \dots, dq_k = \frac{\chi(q_1)}{f(q_1)} dq_1.$$

Le problème est donc ramené aux quadratures.

174. - Remarque sur l'intégration des équations de Lagrange.

Quand les liaisons d'un système S à K degrés de liberté sont parfaites et indépendantes du temps, si les forces données dérivent d'une fonction de forces φ $V(q_1, \dots, q_k)$ indépendante du temps, il suffit de connaître $(2K-3)$ intégrales premières distinctes de celle des forces vives et où t ne figure pas explicitement pour que le problème s'achève vivement par quadratures.

En particulier, pour $K=2$, il suffit de connaître, avec l'intégrale des forces vives, une 2^e intégrale où t ne figure pas, pour que le problème se ramène aux quadratures.

Ce théorème, démontré par Jacobi, et que nous nous bornons à énoncer, se vérifiera dans les applications qui vont suivre.

Applications des équations de Lagrange.

175. Mouvement d'un point dans un plan en coordonnées polaires.

Soit P un point matériel mobile dans un plan fixe xoy , r et θ les coordonnées polaires du point :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

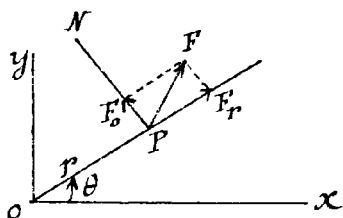
Les équations de Lagrange permettent d'écrire immédiatement les équations du mouvement, en adoptant comme paramètres r et θ . On a, en effet :

$$2T = m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = m (r'^2 + r^2 \theta'^2),$$

et si on pose $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, les expressions Q_1, Q_2 sont :

$$Q_1 = X \frac{\partial x}{\partial r} + Y \frac{\partial y}{\partial r} = X \cos \theta + Y \sin \theta$$

$$Q_2 = X \frac{\partial x}{\partial \theta} + Y \frac{\partial y}{\partial \theta} = r [-X \sin \theta + Y \cos \theta].$$



Représentons par F_r et F_θ les composantes de F suivant la direction des rayons vecteurs croissants et suivant la direction PN perpendiculaire à OP (menée dans le sens des angles θ croissants), on a :

$$Q_1 = F_r, \quad Q_2 = r F_\theta.$$

Autrement dit, Q_2 est le moment de \vec{F} par rapport à OZ (OZ normale au plan menée dans un sens tel que le trièdre $Oxyz$ soit dextrosum.)

Écrivons les équations de Lagrange. Formons d'abord les dérivées partielles de T :

$$\frac{\partial T}{\partial r'} = m r', \quad \frac{\partial T}{\partial r} = m r \theta'^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta'} = m r^2 \theta', \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0;$$

d'où les équations du mouvement :

$$(1) \quad m r'' - m r \theta'^2 = F_r, \quad \frac{d}{dt} m r^2 \theta' = r F_\theta.$$

Si, en particulier, F_θ est nul, la dernière équation donne l'intégrale première $mr^2\theta' = C^{te}$, intégrale des aires par rapport à Oz .

Si F admet un potentiel $V(r, \theta)$, les seconds membres des équations (1) sont $\frac{\partial V}{\partial r}$, $\frac{\partial V}{\partial \theta}$. La première équation peut être remplacée par l'intégrale des forces vives:

$$T = V(r, \theta) + C^{te}.$$

Pour que l'intégrale des aires existe en même temps que la précédente, il faut et il suffit que $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ soit nul, c'est-à-dire que V soit une simple fonction de r . On retrouve ainsi les deux intégrales classiques de la théorie des forces centrales fonctions de la seule distance.

176. - Mouvement d'un point libre dans l'espace en coordonnées semi-polaires r, θ, z .

La force vive $2T$ du point P est ici :

$$2T = m[r'^2 + r^2\theta'^2 + z'^2]$$

et les expressions Q_1, Q_2, Q_3 sont [r, θ, z correspondant à q_1, q_2, q_3]

$$Q_1 = F_r, \quad Q_2 = rF_\theta, \quad Q_3 = Z,$$

en appelant F_r, F_θ, Z les composantes [positives ou négatives] de \vec{F} suivant les trois demi-droites rectangulaires: Op, pN, Oz ; p désigne la projection de P sur le plan xOy , pN la demi-droite qui fait avec Op , dans le plan xOy , un angle $+\frac{\pi}{2}$.

Les équations de Lagrange sont ici:

$$(2) \quad mr'' - mr\theta'^2 = F_r, \quad \frac{d}{dt} mr^2\theta' = rF_\theta, \quad mz'' = Z.$$

Si la force \vec{F} dérive d'un potentiel, $V(r, \theta, z)$, les trois seconds membres des équations (2) sont respectivement $\frac{\partial V}{\partial r}$, $\frac{\partial V}{\partial \theta}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$. La première équation (2), par exemple, peut être remplacée par l'intégrale des forces vives $T = V + h$.

177. - Mouvement d'un point libre en coordonnées polaires de l'espace.

Soit $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, [longitude], $q_3 = \theta$ [colatitude], ($0 \leq \theta \leq \pi$), les coordonnées polaires de l'espace :

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta$$

La force-vive $2T$ du point P est :

$$2T = m [\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \rho^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2]$$

Calculons Q_1, Q_2, Q_3 : soit \vec{F} la force qui s'exerce sur P ; considérons les trois demi-droites rectangulaires

Pa qui prolonge OP ,

Pb perpendiculaire au plan ZOP ,
menée dans le sens des φ
croissants ;

Pc perpendiculaire à OP menée
dans le sens des θ croissants .

Appelons $F_\rho, F_\varphi, F_\theta$ les composantes de \vec{F} suivant ces trois demi-droites.

Dans le déplacement virtuel $\delta q_1 = \delta \rho$ (γ_0), P se déplace sur Pa de la longueur $\delta \rho$, et le travail de F est $Q_1 \delta q_1 = F_\rho \delta \rho$; d'où $Q_1 = F_\rho$.

Dans le déplacement $\delta q_2 = \delta \varphi$ (γ_0), P se déplace sur Pb d'une longueur $\rho \sin \theta \delta \varphi$, et le travail de F est $Q_2 \delta q_2 = F_\varphi \rho \sin \theta \delta \varphi$; d'où $Q_2 = \rho \sin \theta F_\varphi$.

Dans le déplacement $\delta q_3 = \delta \theta$ (γ_0), P se déplace sur Pc d'une longueur $\rho \delta \theta$, et le travail de F est $Q_3 \delta q_3 = F_\theta \rho \delta \theta$, d'où $Q_3 = \rho F_\theta$.

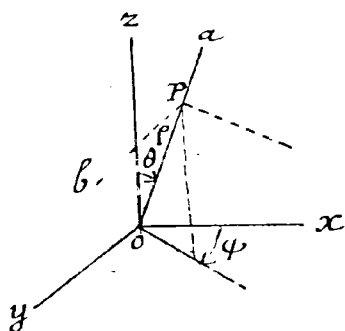
Les équations de Lagrange sont ici :

$$m \ddot{\rho} - m \rho [\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2] = F_\rho$$

$$\frac{d}{dt} (m \rho^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) = \rho \sin \theta F_\varphi$$

$$\frac{d}{dt} (m \rho^2 \dot{\theta}) - m \rho^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = \rho F_\theta$$

on retrouve ainsi les équations déduites du théorème de Coriolis [1^{ère} année, p. 140].

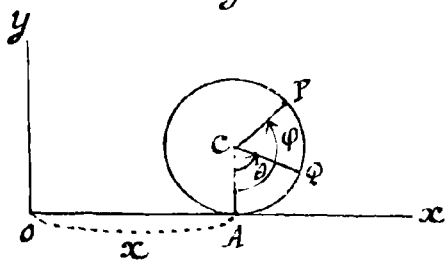


Si, notamment, F rencontre constamment OZ ou lui est parallèle, F_y est nul, et la seconde équation de Lagrange donne: $m\rho^2 \sin^2 \theta \varphi' = C^{te}$ (intégrale des aires). Si F dérive d'un potentiel $V(\rho, \theta, \varphi)$, les trois seconds membres sont respectivement $\frac{\partial V}{\partial \rho}$, $\frac{\partial V}{\partial \theta}$, $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$, et l'intégrale des forces vives peut remplacer une des trois équations.

178. - Appliquons maintenant les équations de Lagrange à quelques exemples simples et tout d'abord à l'exemple du N° 11.

1^{er} Exemple. [N° 11] Un tore creux homogène, pesant, de très petite section, est assujéti à glisser sans frottement sur un plan horizontal. A l'intérieur du tube glisse sans frottement un point P de masse égale à celle du tore. Étudier le mouvement du système lancé à l'instant initial $t=0$ dans le plan vertical xoy .

Le mouvement a lieu dans le plan xoy , et la position du système dans ce plan dépend de trois paramètres, soit x, θ, φ , [la notation étant la même qu'au N° 11]. La force vive du système est:



$$2M(\xi^2 + \eta^2) + 2Ml^2\varphi'^2 + 4Ml^2\theta'^2.$$

On a de plus:

$$\xi = x + l \sin \varphi, \quad \eta = l(2 - \cos \varphi),$$

$$\xi^2 + \eta^2 = x^2 + 2l \cos \varphi x \varphi' + l^2 \varphi'^2, \text{ d'où:}$$

$$T = Mx^2 + 2Ml \cos \varphi x \varphi' + 2Ml^2 \varphi'^2 + 4Ml^2 \theta'^2.$$

Les forces données se réduisent ici à la pesanteur: il y a donc une fonction de force: $V = -2Mg\eta + C^{te} = 2Mgl \cos \varphi$. On voit que ni T ni V ne renferment explicitement θ , ni x . Les équations de Lagrange relatives à ces deux variables équivalent donc à deux intégrales premières:

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = C^{te}, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta'} = C^{te}$$

c'est-à-dire:

$$(1) \quad x' + l \cos \varphi \varphi' = a, \quad \theta' = \theta'_0.$$

La 3^e équation de Lagrange peut être remplacée par l'intégrale des forces vives

$$(2) \quad T = 2Mgl \cos \varphi + C^te.$$

Et, en tenant compte des équations (1), on remplace, dans T , x par $(a - l \cos \varphi)$ et θ par θ_0 , l'équation (2) devient (après division des deux membres par Ml):

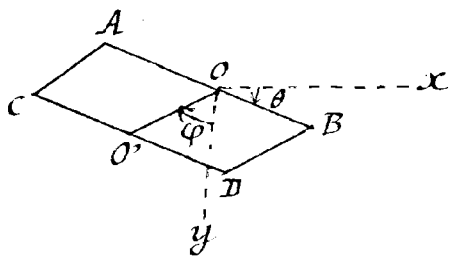
$$l\varphi'^2 [1 + \sin^2 \varphi] = 2g (\cos \varphi + h).$$

On a ainsi t en fonction de φ par une quadrature; on a ensuite: $\theta = \theta_0' t + \theta_0$, et $x + b \sin \varphi = at + b$.

Le problème est donc bien ramené, dans ce cas, aux quadratures, conformément à la remarque du N^o 171.

179 - Deuxième exemple. - Deux barres AB , CD homogènes, pesantes, de même longueur $2l$ et de même densité, ont leurs extrémités A et C , B et D reliées par deux fils flexibles inextensibles, de même longueur λ et de masse négligeable. La barre AB est fixée par son milieu O . Mouvement du système abandonné sans vitesse dans le plan vertical xoy .

Le mouvement a lieu dans le plan xoy , et la position du système dans ce plan dépend de deux paramètres, soit θ ou l'angle xOB que fait OB avec l'horizontale Ox et φ ou l'angle $yO'D$ que fait avec Oy (verticale descendante), la droite OO' qui joint O au milieu O' de CD .



La force vive de AB est égale à $\frac{Ml^2}{3} \theta'^2$, [M masse totale de AB]. Comme CD est parallèle à AB , la force vive de CD est (théorème de Kœnig): $M\lambda^2 \varphi'^2 + \frac{Ml^2}{3} \theta'^2$. La force vive 2T du système est donc: $M\lambda^2 \varphi'^2 + \frac{2Ml^2}{3} \theta'^2$.

Les forces données [la pesanteur] dérivent du potentiel $V = +Mg\lambda \cos \varphi$. L'équation de Lagrange relative à θ donne aussitôt l'intégrale première:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = C^te, \quad \theta = \theta_0'.$$

L'intégrale des forces-vives s'écrit [en tenant compte de l'égalité précédente, et après division des deux membres par $M\lambda$]:

$$\lambda \dot{\varphi}^2 = 2g \cos \varphi + h$$

équation du mouvement d'un pendule circulaire de longueur λ .

180. - Exemples où les liaisons dépendent du temps.

1er Exemple. - Mouvement d'un point P pesant mobile sans frottement dans un plan Π qui tourne autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire constante.

Prenons l'axe fixe comme axe des z , et adoptons comme paramètres q_1 et q_2 les coordonnées du point P rapportées aux axes rectangulaires x, OZ du plan Π .

Il est loisible d'admettre que, pour $t = 0$, Ox coïncide avec l'axe OZ et que la rotation de Π s'effectue autour de OZ dans le sens positif: soit ω la vitesse angulaire de rotation. On a:

$$\begin{aligned} x &= q_1 \cos \omega t, & y &= q_1 \sin \omega t, & z &= q_2 \\ x' &= q_1' \cos \omega t - \omega q_1 \sin \omega t, & y' &= q_1' \sin \omega t + \omega q_1 \cos \omega t, & z' &= q_2' \end{aligned}$$

Calculons T :

$$2T = m(x'^2 + y'^2 + z'^2) = m[q_1'^2 + q_2'^2 + \omega^2 q_1^2].$$

Si a, b, c sont les cosinus directeurs de l'accélération g de la pesanteur, la pesanteur dérive du potentiel:

$$mg[ax + by + cz] = mg[q_1(\alpha \cos \omega t + b \sin \omega t) + cq_2]$$

Les équations de Lagrange sont ici

$$\text{ou} \quad mq_1'' - m\omega^2 q_1 = mg(\alpha \cos \omega t + b \sin \omega t)$$

$$\text{et} \quad (1) \quad q_1'' - \omega^2 q_1 = g(\alpha \cos \omega t + b \sin \omega t)$$

$$(2) \quad q_2'' = gc.$$

Les équations (1) et (2) s'intègrent immédiatement:

$$q_2 = gc \frac{t^2}{2} + Ct + C_0, \quad q_1 = -\frac{1}{2\omega^2} [\alpha \cos \omega t + b \sin \omega t] + c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}.$$

[C, C_0, C_1, C_2 constantes arbitraires.]

2° Mouvement d'un point P pesant, mobile sans frottement sur un cylindre de révolution d'axe vertical qui se dilate proportionnellement au temps en gardant le même axe.

Prenons comme axe des z la verticale ascendante axe fixe du cylindre, et soit r, θ, z les coordonnées semi-polaires du point P .

On a : $r = at$, d'où :

$$x = at \cos \theta \quad y = at \sin \theta \quad z = z$$

$$x' = -at \sin \theta \theta' + a \cos \theta, \quad y' = at \cos \theta \theta' + a \sin \theta, \quad z' = z'$$

La force-vive du point P est :

$$2T = m [a^2 t^2 \theta'^2 + a^2 + z'^2].$$

La fonction de force est $V = -mgz$.

Les équations de Lagrange s'écrivent donc :

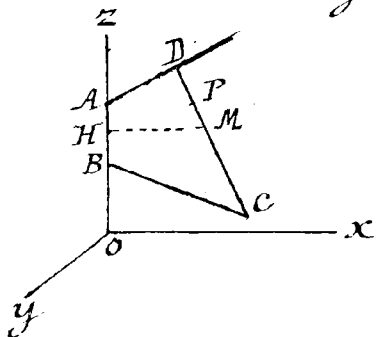
$$\frac{d}{dt} m a^2 t^2 \theta' = 0, \quad \text{ou } t^2 \theta' = c, \quad \theta = -\frac{c}{t} + C t^e,$$

et

$$m z'' = -mg, \quad z = -g \frac{t^2}{2} + at + b.$$

3° Un cadre solide gauche pesant ABCDA, de masse M , est mobile librement autour de la verticale fixe OZ , le long de laquelle son côté AB glisse sans frottement. Une mouche P de masse m se déplace avec une vitesse constante V_0 sur le côté CD (dans le sens ascendant); à l'instant $t=0$, elle occupe le milieu M de CD . Mouvement du système.

(On suppose que la droite H qui joint les milieux M et H de CD et AB est la plus courte distance h de ces deux droites, et que le vecteur CD orienté positivement autour de la verticale ascendante OZ fait avec cette direction un angle de 45° . On représente par Mk^2 le moment d'inertie du cadre autour de OZ).



La position du système dépend de deux paramètres, soit le z de H et l'angle θ du plan zCM avec le plan zOx . La force-vive $2T$ du

ystème⁽¹⁾ est égale à : $M(z'^2 + K^2\theta'^2) + mW^2$, en appelant W la vitesse de la mouche par rapport aux axes $oxyz$. Pour calculer W^2 , choisissons les axes de façon que le plan zOx coïncide avec le plan zOM à l'instant t : les coordonnées de P sont : $\lambda, \frac{V_0 t}{\sqrt{2}}, z + \frac{V_0 t}{\sqrt{2}}$; les composantes de la vitesse du point coïncidant du cadre sont : $-\theta' V_0 t, \theta' \lambda, z'$; celles de la vitesse relative de P sur CD sont $0, \frac{V_0}{\sqrt{2}}, \frac{V_0}{\sqrt{2}}$.

D'où $W^2 = V_0^2 t^2 \theta'^2 + (\theta' \lambda + \frac{V_0}{\sqrt{2}})^2 + (z' + \frac{V_0}{\sqrt{2}})^2$. On a donc :

$$2T = M(z'^2 + K^2\theta'^2) + m \left\{ V_0^2 \frac{t^2 \theta'^2}{2} + (\theta' \lambda + \frac{V_0}{\sqrt{2}})^2 + (z' + \frac{V_0}{\sqrt{2}})^2 \right\},$$

et d'autre part $V = -(M+m)gz - mgV_0 t$.

Les deux équations de Lagrange donnent donc ici :

ou bien : $\frac{d}{dt} \left\{ Mz' + m(z' + \frac{V_0}{\sqrt{2}}) \right\} = -(M+m)g,$

et $z = -g \frac{t^2}{2} + at + b$ (a, b Ctes arbitraires),

ou bien : $\frac{d}{dt} \left\{ MK^2\theta' + m \frac{\theta'}{2} V_0^2 t^2 + m\lambda (\theta' \lambda + \frac{V_0}{\sqrt{2}}) \right\} = 0,$

ou bien : $\theta' [MK^2 + m(\frac{V_0^2}{2} t^2 + \lambda^2)] = \theta'_0 [MK^2 + m\lambda^2].$

On serait arrivé plus rapidement à ces équations en appliquant : 1° le théorème du mouvement du centre de gravité projeté sur ox ; 2° le théorème des moments cinétiques par rapport à oz .

181. - Calcul des réactions extérieures.

Nous avons vu (N° 155) comment on peut calculer la réaction totale qui s'exerce sur chaque point du système. Dans certaines questions, on a besoin de calculer les réactions extérieures appliquées au système ou à certains des corps s du système.

Pour effectuer le calcul, on exprime que, pour le système S (ou le corps s), les forces d'inertie, les forces extérieures données et les réactions extérieures satisfont aux 6 équations d'équilibre des forces appliquées à un solide.

(1) En effet, la vitesse de chaque point du cadre est la résultante de deux vitesses rectangulaires engendrées respectivement par la translation verticale z' et la rotation θ' autour de oz .

On connaît les forces données ; connaissant les accélérations du système on connaît les forces d'inertie : on forme donc ainsi six conditions assujettissant les réactions extérieures.

Ces six conditions suffisent, dans bien des cas, mais ne suffisent pas toujours à calculer les réactions cherchées⁽¹⁾. Elles donnent, dans tous les cas, leur somme géométrique et leur moment résultant par rapport à un point.

C'est ainsi que dans l'exemple du N° 176, les réactions extérieures au système se réduisent à la réaction de l'appui fixe O . Pour calculer cette réaction \vec{R} , on exprime que $\vec{R} + M\vec{g}$ est un vecteur égal et directement opposé au vecteur $2M\vec{y}$, \vec{y} désignant l'accélération du centre de gravité G du système (milieu de OO') ; or $2\vec{y}$, accélération de O' , a comme composante suivant OO' la quantité $\frac{V^2}{\lambda}$ (V vitesse de O'), et comme composante suivant la λ perpendiculaire à $O'O$ (menée dans le sens du mouvement de O') la quantité $\frac{dV}{dt}$ (égale, au signe près, à $\lambda\varphi'' = -\lambda g \sin \varphi$).

Calculons, de même, la tension de chaque fil AC et BD . Le théorème des moments des quantités de mouvement appliqué à AB nous montre que le moment résultant par rapport à O , des deux tensions est nul : car le moment de la pesanteur est nul et $\frac{d}{dt} \sum mr^2 \dot{\theta}$ est nul. Les deux tensions (parallèles) exercées par les deux fils sur les deux extrémités de la barre AB sont donc égales et de même sens.

D'autre part, le point O' (centre de gravité de CD) se meut comme s'il était de masse M et soumis à la pesanteur $M\vec{g}$ et aux tensions des deux fils ; d'où en projetant sur la demi droite OO' , l'égalité (où V est la vitesse de O') :

$$\frac{MV^2}{\lambda} = M\lambda\varphi'^2 = -Mg \cos \varphi + 2N,$$

N désignant la traction exercée par chaque fil sur la

⁽¹⁾ Ces six conditions ne sont pas nécessairement distinctes mais peuvent se réduire à un nombre moindre en vertu des équations mêmes du mouvement. (Exemple : corps solide fixé par deux points).

extrémités de la barre CD . La valeur ainsi trouvée pour N est bien positive sous la seule condition

$$\lambda \varphi^2 + g \cos \varphi > 0.$$

Les deux fils restent tendus tant que cette inégalité a lieu, et notamment si, dans le mouvement, O ne s'élève pas au dessus de ox .

182. - Les équations de Lagrange et la Dynamique des solides.

Si on appliquait les équations de Lagrange au calcul du mouvement d'un solide, on obtiendrait six équations qui doivent être des conséquences des équations (1) et (2). Vérifions-le :

L'expression de la force vive du système est :

$$(1) \quad 2T = \mu(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2,$$

avec

$$(2) \quad p = \psi' \sin \theta \sin \varphi + \theta' \cos \varphi, \quad q = \psi' \sin \theta \cos \varphi - \theta' \sin \varphi, \quad r = \psi' \cos \theta + \varphi'.$$

Les paramètres sont ici $\xi, \eta, \zeta, \theta, \varphi, \psi$. Pour avoir l'expression explicite de T à l'aide de ces six paramètres et de leurs dérivées, il faudrait remplacer p, q, r dans (1) par leurs valeurs (2). Quant au travail des forces données dans le déplacement $d\xi, d\eta, d\zeta, d\theta, d\varphi, d\psi$ du solide je le représente par :

$$\Xi d\xi + H d\eta + \zeta d\zeta + \Theta d\theta + \Phi d\varphi + \Psi d\psi.$$

Je remarque immédiatement que Ξ, H, ζ coïncident respectivement avec X, Y, Z . De plus, le déplacement $d\varphi$ est une simple rotation autour de GZ , et le travail $\Phi d\varphi$ coïncide par suite avec $N d\varphi$, d'où $\Phi = N$. Les quantités Θ, Ψ seraient des combinaisons de L, M que je n'écris pas.

Ceci posé, il est évident que les trois équations de Lagrange relatives à ξ, η, ζ ne sont autres que les trois équations du mouvement du centre de gravité. D'autre part, l'équation relative à φ a comme second membre N , le premier membre

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\varphi'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi}$$

doit donc coïncider avec le premier membre de la 3^e équation d'Euler, à savoir $C \frac{dr}{dt} + (B-A)pq$. Voyons s'il en est bien ainsi.

On a :

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \varphi'} = Cr ;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\partial T}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \varphi} + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \varphi} = Ap \frac{\partial p}{\partial \varphi} + Bq \frac{\partial q}{\partial \varphi} ;$$

Or :

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \psi' \sin \theta \cos \varphi - \theta' \sin \varphi = q, \quad \frac{\partial q}{\partial \varphi} = -\psi' \sin \theta \sin \varphi - \theta' \cos \varphi = -p,$$

d'où $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = (A-B)pq$. En définitive :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = C \frac{dr}{dt} + (B-A)pq.$$

C. q. f. d.

Si on formait les deux équations de Lagrange relatives à θ et ψ , on trouverait deux combinaisons des deux premières équations d'Euler. Mais cette vérification est inutile, puisque, la 3^e équation d'Euler étant formée, les deux autres en découlent immédiatement par permutation.

183. - Les équations de Lagrange et les systèmes affectés de frottement.

Quand les liaisons ne sont pas parfaites, l'équation fondamentale (6) du N° 153 subsiste à condition d'ajouter au second membre le travail virtuel des réactions : soit $R_1 \delta q_1 + \dots + R_K \delta q_K$ l'expression de ce travail. Cette égalité équivaut aux K équations [N° 153] :

$$E_j = Q_j + R_j, \quad (j=1, 2, \dots, K),$$

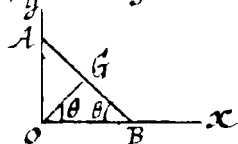
c'est-à-dire aux K équations de Lagrange :

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + R_j. \quad (j=1, 2, \dots, K)$$

Mais les réactions, et par suite les quantités R_j , ne sont pas données, c'est-à-dire connues explicitement en fonction de la position du système, de ses vitesses et de t . Les équations (1) ne définiront le mouvement que si les hypothèses faites sur les réactions [lois du frottement, etc.]

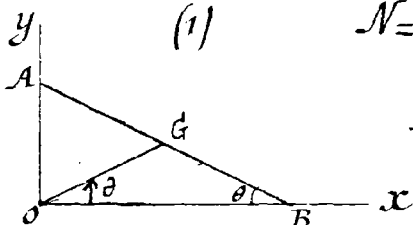
permettent de déterminer les R_j en fonction de t , des q_j , de leurs dérivées, et des forces données. De plus, il faudra effectuer explicitement cette détermination par des équations distinctes des R équations (1), notamment à l'aide des théorèmes généraux de la Dynamique [théorèmes du centre de gravité, des moments cinétiques etc.]. Il peut se faire que ces théorèmes déterminent les R_j à l'aide des q_j et de leurs dérivées des deux premières ordres. Il reste alors à résoudre les k équations (1) par rapport au q_j .

Exemple. - Mouvement d'une barre AB homogène et pesante dont les extrémités glissent la première avec frottement sur une verticale ascendante OY, la seconde sans frottement sur une horizontale OX. Le coefficient de Coulomb est $\frac{1}{3}$.



La composante normale de la réaction des OY sur AB est fournie aussitôt [à l'aide des accélérations] par le théorème du mouvement du centre de gravité projeté sur OX. Si N est la valeur de cette composante comptée positivement dans le sens OX, on a, M désignant la masse de la barre, $2l$ sa longueur, G le milieu de AB, θ l'angle XOG (égal à OBG en valeur absolue), $\xi = l \cos \theta$ l'abscisse du milieu G de AB :

$$(1) \quad N = M \ddot{\xi} = M l [-\sin \theta \ddot{\theta} - \cos \theta \dot{\theta}^2].$$



Si nous tenons compte de toutes les liaisons, la position de la barre dépend du seul paramètre θ . La force-vive du centre de gravité où la masse serait concentrée est :

$M l^2 \dot{\theta}^2$. La force vive de AB dans son mouvement autour de G est $\frac{M l^2}{2} \dot{\theta}^2$. La force vive T de AB est donc (théorème de Koenig)³ : $4 \frac{M l^2}{2} \dot{\theta}^2$. Écrivons l'unique équation de Lagrange. Le travail de la pesanteur, dans le déplacement $\delta \theta$, est $-M g \delta \eta = -M g l \cos \theta \delta \theta$; d'autre part, le déplacement du point A (compté dans le sens OY) est $2l \cos \theta \delta \theta$, et le travail de la réaction de OY est :
 $-f |N| 2l \cos \theta \delta \theta$ si $\theta > 0$ et $+f |N| 2l \cos \theta \delta \theta$, si $\theta < 0$. L'équation de Lagrange est donc :

$$(2) \quad \frac{4M}{3} l^2 \theta'' = -Mgl \cos \theta \mp 2f|N|l \cos \theta, \begin{cases} -\text{si } \theta' > 0 \\ +\text{si } \theta' < 0 \end{cases}$$

ou encore, d'après (1) :

$$(3) \quad \frac{4l}{3} \theta'' = -g \cos \theta \mp 2fl \cos \theta \left| -\sin \theta \theta'' - \cos \theta \theta'^2 \right|, \begin{cases} -\text{si } \theta' > 0 \\ +\text{si } \theta' < 0 \end{cases}$$

Pour fixer les idées, étudions le mouvement en supposant $\theta', \cos \theta$ et $\sin \theta$ positifs mais θ' petit à l'instant initial. L'équation (3), où le double signe doit être remplacé par le signe $-$, montre que la quantité $\frac{4l}{3} \theta'' + g \cos \theta$ est négative; θ'' est donc négatif et $\left\langle -\frac{3g \cos \theta}{4l} \right\rangle$. La quantité placée sous le signe $| |$ est par suite positive ⁽¹⁾. L'équation du mouvement s'écrit, en définitive :

$$\frac{4l}{3} \theta'' = -g \cos \theta - 2fl \cos \theta (-\sin \theta \theta'' - \cos \theta \theta'^2),$$

d'où

$$(4) \quad l \theta'' \left[\frac{4}{3} - 2f \cos \theta \sin \theta \right] = -\cos \theta \left[g - 2fl \cos \theta \theta'^2 \right]$$

équation qui donne bien pour θ'' une valeur négative, car $2f \cos \theta \sin \theta$ est au plus égal à f , et dans les applications f est toujours plus petit que $\frac{4}{3}$ (et même que 1). L'équation (4) s'intègre immédiatement en prenant θ'^2 comme fonction et θ comme variable.

184. — Sur quelques propriétés générales des équations de Lagrange.

Dans insister davantage sur le cas du frottement, revenons aux systèmes dont les liaisons sont parfaites; leurs mouvements sont définis par les k équations de Lagrange :

$$(I) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j.$$

Systèmes correspondants. — Supposons que, pour un choix convenable des paramètres, les forces vives $2T$ et $2T_1$ de deux systèmes matériels S et S_1 (à liaisons parfaites) aient la même expression, ainsi que le travail virtuel $Q_1 \delta q_1 + \dots + Q_k \delta q_k$ des forces données. Les équations I sont

⁽¹⁾ Du moment que $\theta'^2 < \frac{3g}{4l} \sin \theta$. De même, le second membre de (4) est négatif si $\theta'^2 < \frac{g}{2fl \cos \theta}$, condition qui est une conséquence de la précédente si $f < \frac{4}{3}$.

identiquement les mêmes pour S et pour S_1 ; au point de vue mathématique, les deux problèmes (calcul du mouvement de S et de S_1) coïncident. Tout mouvement $q_1(t), \dots, q_k(t)$ de l'un correspond aux forces données et définit un mouvement analogue de l'autre. Les deux systèmes S et S_1 peuvent être dits correspondants.

En appliquant cette remarque au cas où chacun des systèmes S et S_1 se compose d'un point mobile sans frottement sur une surface fixe, on retrouve la correspondance entre mouvements sur deux surfaces applicables [1^{ère} année, p. 281].

Réversibilité du mouvement d'un système à liaisons parfaites indépendantes du temps. — Considérons un système S dont les liaisons sont parfaites et indépendantes du temps, et supposons de plus que les forces données ne dépendent que de la position du système. Les équations de Lagrange, résolues par rapport à q''_1, \dots, q''_k sont alors de la forme [N. 170].

$$(II) \quad q''_i = p(q'_1, \dots, q'_k, q_1, \dots, q_k) + P(q_1, \dots, q_k), \text{ etc.}$$

où les p sont des formes quadratiques en q'_1, \dots, q'_k . Le temps ne figure explicitement dans aucune équation.

Si je change t en $-t$ ou (plus généralement) t en $(\alpha - t)$, les équations (II) ne sont pas changées. C'est ce qu'on traduit en disant que le mouvement d'un système dont les liaisons sont indépendantes du temps et dénué de frottement est réversible.

Si à l'instant $t=0$ un tel système est abandonné au repos, les conditions initiales ($q''_1, \dots, q''_k, q'_1=0, \dots, q'_k=0$) ne changent pas plus que les équations du mouvement quand on change t en $-t$. Les fonctions $q_1(t), \dots, q_k(t)$, qui définissent le mouvement répondant à ces conditions initiales, restent donc les mêmes quand on remplace t par $-t$; ce sont des fonctions paires de t . De là résultent les mêmes conséquences qu'au N. 15 : 1^o Si T s'annule à deux instants t et $t+T$, le mouvement admet la période $2T$; 2^o quand les forces données dérivent d'une fonction de forces, si S part du repos et reprend au bout du temps T sa position initiale, le mouvement admet la période $2T$; etc.

Quand il y a frottement, lors même que les liaisons

sont indépendantes du temps, le mouvement du système n'est plus réversible. Par exemple, le mouvement d'un point sur une courbe fixe dépolie n'est pas réversible.

Changement de t en λt . — Quand on change t en λt dans les équations du mouvement, [λ constante arbitrairement choisie], les q^o et les formes quadratiques \mathcal{L} sont multipliés par $\frac{1}{\lambda^2}$. Les équations du nouveau mouvement sont donc les mêmes que si on avait multiplié les Q_j par λ^2 , sans changer le temps; d'où ce théorème :

Si dans un système dont les liaisons sont parfaites et indépendantes du temps, on amplifie (ou diminue) toutes les forces données dans un rapport constant λ sans changer leur direction ni leur sens, les trajectoires du système ne sont pas changées et les nouveaux mouvements se déduisent du premier en changeant t en λt .

Remarquons que les mêmes trajectoires ne correspondent pas, après la transformation, aux mêmes conditions initiales : soit $q_j^o, q_j^o = a_j$ les conditions initiales adoptées avant la transformation; il faudra remplacer ces conditions initiales pour les nouvelles conditions $q_j^o, q_j^o = \lambda a_j$, pour que les trajectoires ainsi définies coïncident avec les premières.

Esoutefois, si le système part du repos, les conditions initiales ne sont pas modifiées : le lieu des positions occupé par S est le même quelle que soit la valeur donnée à λ , mais le système parcourt cette suite de positions plus ou moins vite selon que λ est plus ou moins grand.

185. — Les équations de Lagrange et les petits mouvements.

Les liaisons étant parfaites et indépendantes du temps, et les forces données dérivant d'une fonction de forces V indépendante, elle aussi, du temps, soit $q_1 = q_2 = \dots = q_k = 0$ une position S_0 de S qui correspond à un maximum de V [où $V = 0$]. Pour étudier les petits mouvements autour de S_0 , la règle que nous avons donnée [N° 165] se résume ainsi : 1° réduire V à V_2 [forme quadratique en q_1, \dots, q_k supposée essentiellement positive]; 2° réduire les équations de liaison à leurs termes linéaires, c'est-à-dire écrire pour chaque point P de S :

$$\begin{aligned}x - x_0 &= a_1 q_1 + a_2 q_2 + \dots + a_K q_K, \\y - y_0 &= b_1 q_1 + b_2 q_2 + \dots + b_K q_K, \\z - z_0 &= c_1 q_1 + c_2 q_2 + \dots + c_K q_K.\end{aligned}$$

Dans ces conditions, I devient une forme quadratique en q_1, \dots, q_K [essentiellement positive], soit I_0 , à coefficients constants. Les petits mouvements sont définis par les équations différentielles linéaires :

$$(III) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial I_0}{\partial q_j} = \frac{\partial V_2}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, K)$$

qui ne diffèrent pas des équations (2) du n° 164. On peut choisir les paramètres de façon à donner à ces équations une forme remarquable. Bornons-nous au cas de $K=3$, pour que la méthode ait une interprétation géométrique, mais elle s'applique quel que soit K .

Si nous effectuons sur les q_i une transformation linéaire, les q_i subissent la même transformation. On peut donc maintenant une transformation linéaire convenable effectuée sur les q_i , ramener la forme quadratique $2I_0$ à la forme: $q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2$.

Ce premier changement de variables opéré, regardons q_1, q_2, q_3 comme les coordonnées rectangulaires de l'espace à 3 dimensions. L'équation

$$-V_2(q_1, q_2, q_3) = 1$$

représente un ellipsoïde qu'il est loisible, par un changement d'axes rectangulaires, de rapporter à ses axes: $-V_2$ prend ainsi la forme: $\lambda^2 q_1'^2 + \mu^2 q_2'^2 + \nu^2 q_3'^2$. D'autre part, dans un tel changement d'axes, l'expression $(q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2)$ ne change pas; il en est de même, par suite de l'expression $(q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2)$ puisque les q' subissent la même transformation linéaire que les q . En définitive, une double transformation linéaire, donc une transformation linéaire convenable, effectuée sur q_1, q_2, q_3 ramène à la fois I_0 à la forme $q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2$, et $-V_2$ à la forme $\lambda^2 q_1'^2 + \mu^2 q_2'^2 + \nu^2 q_3'^2$.

Les équations (III) deviennent alors :

$$q_1'' = -\lambda^2 q_1, \quad q_2'' = -\mu^2 q_2, \quad q_3'' = -\nu^2 q_3.$$

Les petits mouvements sont donnés par les égalités :

$$q_1 = a_1 \cos(\lambda t + b_1), \quad q_2 = a_2 \cos(\mu t + b_2), \quad q_3 = a_3 \cos(\nu t + b_3),$$

les a, b désignant des constantes arbitraires.

186. - Les équations de Lagrange et le mouvement relatif.
 Soit $Oxyz$ les axes fixes, et $\Omega\xi\eta\zeta$, des axes animés par rapport aux premiers d'un mouvement donné. On connaît les forces données F' (relatives aux axes $Oxyz$) qui s'exercent sur un système matériel S à liaisons parfaites, et on se propose de calculer le mouvement du système par rapport aux axes $\Omega\xi\eta\zeta$.

Du moment qu'on définit la portion du système à l'aide des mêmes paramètres q_1, q_2, \dots, q_k , les équations différentielles que vérifient $q_i(t)$, $q_k(t)$ sont les mêmes, ^{qu'elles que soient les axes choisis.} Mais pour écrire effectivement ces k équations, on peut employer deux méthodes différentes, dont l'une est plus rapide que l'autre suivant les cas.

En général, on choisit les paramètres q_1, \dots, q_k de façon que les coordonnées ξ, η, ζ d'un élément quelconque P de S s'expriment le plus simplement possible en q_1, \dots, q_k . Une première méthode consiste alors à se servir du théorème de Coriolis⁽¹⁾ pour calculer les nouvelles forces données relatives aux axes $\Omega\xi\eta\zeta$, soit les forces F'' ; cela fait, on calcule à l'aide des q_i , q'est la force-vive relative de S , soit $2T_p = \sum m (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2)$, et on applique les équations de Lagrange en prenant comme trièdre de référence $\Omega\xi\eta\zeta$.

Au lieu de procéder ainsi, on garde $Oxyz$ comme trièdre de référence; on calcule à l'aide des q_i, q_k et t la force-vive absolue, soit $2T = \sum m (x^2 + y^2 + z^2)$, et l'on applique les équations de Lagrange. Pour calculer effectivement $2T$, on peut exprimer les x, y, z en q_1, \dots, q_k, t , en se servant des formules du changement d'axes. Mais le procédé le plus rapide consiste à former d'abord $2T_p$, puis $2T$ à l'aide de la formule: $V = V_p + V_e$, qui entraîne:

$$2T = \sum m V^2 = 2T_p + \sum m V_e^2 + 2 \sum m V_e V_p \cos(V_p, V_e).$$

Considérons, par exemple comme au N° 180 un système formé du seul point P , pesant, mobile sans frottement sur un plan Π qui tourne autour de Oz avec une vitesse conforme donnée ω ; on se propose d'étudier le mouvement relatif de P par rapport à Π . La méthode suivie au N° 180 est précisément la 2^e méthode que nous venons d'indiquer. La première a été appliquée au même problème en 1^{ère} année [p. 273].

⁽¹⁾ Si m est la masse de l'élément, F' la force donnée relative aux axes $Oxyz$ qui s'exerce sur P , F'' la force donnée relative aux axes $\Omega\xi\eta\zeta$; on a:

$$\vec{F}'' = \vec{F}' - m\vec{y}_2 - m\vec{y}_c \quad [1^{\text{ère}} \text{année, p. 25}].$$

187. - Systèmes dont la position n'est pas définie à l'aide du nombre minimum de paramètres.

Les liaisons étant toujours bilatérales, il peut être difficile dans certains cas, d'exprimer explicitement les coordonnées des points d'un système à l'aide du nombre minimum de paramètres. Supposons donc que la position du système soit définie à l'aide de K paramètres qui, cette fois, ne sont plus indépendants, mais liés par un certain nombre P de relations distinctes.

$$(1) \quad \begin{cases} f_1(q_1, q_2, \dots, q_K, t) = 0 \\ f_2(q_1, q_2, \dots, q_K, t) = 0 \\ \dots \\ f_P(q_1, \dots, q_K, t) = 0 \end{cases}$$

Toutes les liaisons étant supposées sans frottement, comment peut-on se servir des équations de Lagrange pour étudier le mouvement ?

Exprimons la force vive du système $2T = \sum m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ à l'aide de q_1, \dots, q_K, t sans tenir aucun compte des relations (1), comme si les q_1, \dots, q_K étaient indépendants. De même appelons déplacement virtuel tout déplacement où les q subissent des variations infinitésimales δq_i arbitraires (t étant laissé constant). Dans un tel déplacement, on a identiquement :

$$\sum m(\dot{x} \delta \dot{x} + \dot{y} \delta \dot{y} + \dot{z} \delta \dot{z}) = \sum (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) + \sum (R_x \delta x + R_y \delta y + R_z \delta z),$$

équation qui équivaut aux K égalités :

$$(2) \quad \begin{cases} \sum m \left(x'' \frac{\partial x}{\partial q_1} + y'' \frac{\partial y}{\partial q_1} + z'' \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) = Q_1 + R_1, \\ \dots \\ \sum m \left(x'' \frac{\partial x}{\partial q_K} + y'' \frac{\partial y}{\partial q_K} + z'' \frac{\partial z}{\partial q_K} \right) = Q_K + R_K. \end{cases}$$

Le premier membre de la première équation (1) est égal identiquement à $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1}$. D'autre part,

$Q_1 \delta q_1 + \dots + Q_K \delta q_K$ représente le travail virtuel des forces données dont un déplacement $\delta q_1, \dots, \delta q_K$ arbitraire, et l'expression des Q_j est la même que si q_1, \dots, q_K étaient indépendants [$Q_j = \Sigma (X' \frac{\partial x}{\partial q_j} + Y' \frac{\partial y}{\partial q_j} + Z' \frac{\partial z}{\partial q_j}$], etc]. Enfin $R_1 \delta q_1 + \dots + R_K \delta q_K$ représente le travail virtuel des réactions dans un déplacement $\delta q_1, \dots, \delta q_K$ arbitraire, et comme toutes les liaisons (les liaisons (1) comprises) sont parfaites, on sait [1^{ère} année, p. 369] qu'on a :

$$R_1 \delta q_1 + \dots + R_K \delta q_K = \lambda_1 \delta f_1 + \dots + \lambda_p \delta f_p,$$

les λ désignant des quantités qui dans le mouvement vrai du système varient en général avec l'instant t considéré ⁽¹⁾. Autrement dit, on peut écrire :

$$R_1 = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial q_1} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial q_1}$$

et $(K-1)$ autres égalités analogues. Les équations (2) entraînent donc les suivantes :

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q_j} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial q_j} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial q_j}$$

($j = 1, 2, \dots, K$).

Ces K équations (3) jointes aux p équations (1), définissent en fonction de t les $(K+p)$ fonctions inconnues $q_1, \dots, q_K, \lambda_1, \dots, \lambda_p$, connaissant la position et les vitesses initiales de S .

188. - Application aux systèmes affectés de frottement.

Quand les liaisons ne sont pas parfaites, la marche qu'il convient de suivre en général est la suivante : on tient compte de toutes les liaisons sans frottement pour réduire le nombre des paramètres qui définissent la position du système S : soit q_1, \dots, q_K les paramètres ainsi introduits. Les liaisons affectées de frottement se traduisent

⁽¹⁾ δf_j représente $\frac{\partial f_j}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial q_K} \delta q_K$ (t gardant sa valeur). La démonstration du cours de 1^{ère} année a été faite en supposant les f indépendants de t . Mais rien n'est changé à la démonstration quand t figure, puisque t est laissé constant dans un déplacement virtuel.

par un certain nombre de relations entre les q et t , soit les p relations (1). Les équations (2) subsistent, et on peut écrire :

$$(4) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + R_j, \quad (j=1, 2, \dots, k)$$

Mais ici le travail $R_1 \delta q_1 + \dots + R_k \delta q_k$ n'est plus nul dans un déplacement virtuel compatible avec les p relations (1) (à l'instant t). On ne pourra calculer le mouvement que si les hypothèses faites sur les réactions [lois du frottement, etc], permettent d'exprimer les R_j à l'aide de p indéterminées seulement. Autrement dit, il faut que les liaisons affectées de frottement n'introduisent pas, par leurs réactions, dans les équations (4) plus d'indéterminées qu'elles n'introduisent d'équations de liaisons distinctes.

Par exemple, si S est un solide mobile sur une surface fixe dépolie Σ , les six équations de Lagrange (4) sont les équations générales du mouvement d'un solide, et si on connaît le coefficient de Coulomb, les seconds membres ne dépendent que d'une indéterminée (la composante normale de la réaction de Σ). D'autre part, la liaison se traduit par une équation de liaison. On possède donc assez d'équations pour calculer le mouvement.

Il en va de même si S est un solide dont un point est mobile avec frottement sur une courbe fixe Γ [2 indéterminées, 2 équations de liaisons].

Il en va de même encore si S et Σ ou S et Γ sont deux solides libres.

Plus généralement, si S est un système de solides et si les liaisons sont des combinaisons des deux liaisons précédentes, on aura autant d'équations de liaisons que d'indéterminées introduites par les réactions (1), pourvu toutefois que les équations qui traduisent chaque liaison forment un ensemble de relations toutes distinctes.

Mais si parmi les relations ainsi écrites, il en est une au moins qui est conséquence des autres, il est impossible,

(1) Les lois de Coulomb étant admises, et le coefficient f attaché à chaque liaison étant donné.

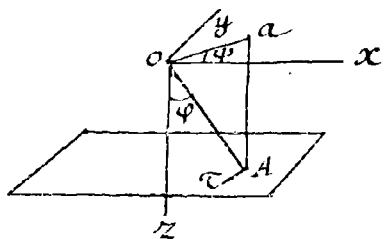
en général, (quand il y a frottement), de calculer le mouvement du système, sans faire sur les réactions des hypothèses spéciales [qui ne résultent pas des lois de Coulomb ni de la connaissance des coefficients de frottement]: on dit, dans ce cas, que les liaisons matérielles sont surabondantes [N° 140]. [Exemple, solide pesant frottant par quatre pieds sur un plan horizontal].⁽¹⁾

Au contraire, quand il n'y a pas frottement, peu importe la manière dont les liaisons sont réalisées. Que les liaisons matérielles soient surabondantes ou non, les équations de Lagrange déterminent un mouvement et un seul répondant aux conditions initiales.

189. - Exercice sur le mouvement d'un affecté doué de frottement.

Mouvement d'une barre OA, homogène et pesante, fixée par son extrémité O et dont l'extrémité A glisse avec frottement sur un plan horizontal fixe π , situé au-dessous de O.

Les liaisons sans frottement (solidité de la barre, fixité du point O) permettent de définir la position de la barre à l'aide des deux paramètres $q = \varphi$, $q = \psi$ [colatitude et longitude], OZ désignant la verticale descendante. Si λ est la distance OP d'un point P de la barre au point O, les coordonnées x, y, z de P sont :



$x = \lambda \sin \varphi \cos \psi$, $y = \lambda \sin \varphi \sin \psi$, $z = \lambda \cos \varphi$,

et l'expression du ds^2 d'une sphère donne aussitôt :

$$x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 (\sin^2 \varphi \psi'^2 + \varphi'^2). \quad \text{D'où}$$

$$2T = \rho (\sin^2 \varphi \psi'^2 + \varphi'^2) \int_0^l \lambda^2 d\lambda = \rho \frac{l^3}{3} (\sin^2 \varphi \psi'^2 + \varphi'^2)$$

$$= M \frac{l^2}{3} (\varphi'^2 + \sin^2 \varphi \psi'^2).$$

(ρ densité, l longueur et M masse de la barre).

(1) Le mouvement dépend alors de l'élasticité des corps qui composent le système.

La réaction \vec{p} de π sur la barre a une composante normale à π que je compte positivement dans le sens OZ et que je désigne par N . La composante tangentielle R_t de la réaction est (si $\psi' > 0$) directement opposée à la direction AT (normale au plan XOA menée dans le sens des ψ croissants); elle a le sens AT si $\psi' < 0$. Dans le déplacement $\delta\varphi (> 0)$ du système, le point A de la barre décrit dans le sens OZ le chemin $-l \sin\varphi \delta\varphi$, le centre de gravité décrit le chemin $-\frac{l}{2} \sin\varphi \delta\varphi$; le travail de la pesanteur Mg et de N est égal à $-(\frac{Mg}{2} + N) l \sin\varphi \delta\varphi$, le travail de R_t est nul. Dans le déplacement $\delta\varphi (> 0)$, A décrit dans le sens AT un chemin $l \sin\varphi d\varphi$; le travail de Mg et de N est nul; le travail de R_t est

$\varepsilon f |N| l \sin\varphi d\varphi$, $[\varepsilon = +1 \text{ si } \psi' > 0, \quad \varepsilon = -1 \text{ si } \psi' < 0;$
 f coefficient de frottement]. Donc

$$Q_1 = -\left(\frac{Mg}{2} + N\right) l \sin\varphi, \quad Q_2 = -\varepsilon f |N| l \sin\varphi, \\ [\varepsilon = \pm 1, \varepsilon \psi' > 0].$$

La liaison avec frottement introduit donc une indéterminée N . D'autre part, elle se traduit par une condition, à savoir: $\varphi = \alpha$.

Ecrivons les deux équations de Lagrange:

$$M \frac{l^2}{3} (\varphi'' - \sin\varphi \cos\varphi \psi'^2) = -\left(\frac{Mg}{2} + N\right) l \sin\varphi \\ \frac{d}{dt} M \frac{l^2}{3} \sin^2\varphi \psi' = -\varepsilon f |N| l \sin\varphi$$

Faisons $\varphi = \alpha$ dans ces conditions, on trouve:

$$M \frac{l}{3} \cos\alpha \psi'' = \left(\frac{Mg}{2} + N\right) \\ M \frac{l}{3} \sin\alpha \psi''' = -\varepsilon f |N|.$$

D'où:

$$\frac{l}{3} \sin\alpha \psi''' = -\varepsilon f \left| \frac{g}{2} - \frac{l}{3} \cos\alpha \psi'' \right|, \quad (\varepsilon = \pm 1, \varepsilon \psi' > 0).$$

Si on suppose $\psi'_0 > 0$ et $\left\langle \sqrt{\frac{3g \cos\alpha}{2l}} \right\rangle$, il vient⁽¹⁾:

(1) Si $\psi'_0 > \sqrt{\frac{3g \cos\alpha}{2l}}$ la réaction normale du plan π sur A serait dirigée vers le

$$(1) \quad \frac{l}{3} \sin \alpha \Psi'' = -f \left(\frac{g}{2} - \frac{l}{3} \cos \alpha \Psi'^2 \right)$$

cela tant que Ψ' , en décroissant, ne s'annule pas.

Cette équation s'intègre immédiatement par la méthode classique, en prenant Ψ' comme fonction et Ψ comme variable. Soit $\Psi' = W$; $\Psi'' = \frac{dW}{d\Psi}$; $\Psi' = W \frac{dW}{d\Psi} = \frac{1}{2} \frac{dW^2}{d\Psi}$, en posant $u = W^2$; d'où l'équation:

$$\frac{l}{6} \sin \alpha \frac{du}{d\Psi} = -f \left[\frac{g}{2} - \frac{l}{3} \cos \alpha u \right],$$

ou encore:

$$2f \cot \alpha \cdot d\Psi = \frac{du}{-\frac{3g}{2l} + u}$$

ou:

$$2f \cot \alpha \cdot \Psi = \log \left(-\frac{3g}{2l} + u \right) + \log C^1$$

ou enfin:

$$u - \frac{3g}{2l} = C e^{2f \Psi \cot \alpha}$$

c'est-à-dire:

$$(2) \quad \Psi'^2 = \frac{3g}{2l} + C e^{2f \Psi \cot \alpha} \equiv F(\Psi)$$

Il est loisible de supposer $\Psi_0 = 0$, d'où: $C = \Psi_0^2 - \frac{3g}{2l} < 0$.
Puisque Ψ croît avec t , Ψ' décroît et s'annule $2l$ quand Ψ atteint la valeur $\frac{1}{2l} \log \left(\frac{3g}{3g - 2l \Psi_0^2} \right)$. Ψ atteint cette valeur Ψ_1 au bout d'un $2l$ temps fini, car Ψ_1 est racine simple de $F(\Psi)$, et on a:
 $t = \int_0^{\Psi_1} \frac{d\Psi}{\sqrt{F(\Psi)}}$. Pour $t > t_1$, la barre reste immobile, car $|\Psi'|$ d'après le raisonnement précédent ne peut que décroître quand le temps croît. Il était d'ailleurs évident que la

bar, et le point A se soulèverait au-dessus du plan π . Si $\Psi_0^2 = \frac{3g \cos \alpha}{2l}$, Ψ' reste constant et $N=0$. Quand on étudie le mouvement en supposant que A quitte le plan π , la première équation de Lagrange [où $N=0$] donne pour $t=t_0$:

$$M \frac{l^2}{3} \varphi'' = M l \sin \alpha \left(\Psi_0^2 \frac{l \cos \alpha}{3} - \frac{g}{2} \right).$$

Pour que, dans ce mouvement, A se soulève au-dessus de π , il faut que $\Psi_0^2 > \frac{3g \cos \alpha}{2l}$. En définitive, si $\Psi_0^2 < \frac{3g \cos \alpha}{2l}$, le mouvement où A glisse sur π est $2l$ possible et seul possible. Si $\Psi_0^2 > \frac{3g \cos \alpha}{2l}$, le mouvement où A se soulève au-dessus de π est possible et seul possible. Si $\Psi_0^2 = \frac{3g \cos \alpha}{2l}$, A glisse de lui-même sur π , [$f=0$].

barre abandonnée sans vitesse dans une position quelconque devait rester en équilibre, car elle reste en équilibre même si le plan Π est parfaitement lisse.

Systèmes à liaisons non holonomes.

190. - Exemples de liaisons non holonomes.

Considérons un solide S assujéti à rouler et pivoter sans glissement sur une surface fixe Σ . La liaison se traduit : 1° par une relation entre les six paramètres, (soit $\xi, \eta, \zeta, \theta, \varphi, \psi$) qui définissent la position de S relation qui exprime que S reste en contact avec Σ ; 2° par deux relations linéaires et homogènes entre $\xi', \eta', \zeta', \theta', \varphi', \psi'$ (relations dont les coefficients dépendent de $\xi, \eta, \zeta, \theta, \varphi, \psi$) et qui expriment que la vitesse de l'élément P de S en contact avec Σ [vitesse qui est nécessairement tangente à Σ] est nulle. Une telle liaison sera réalisée si on suppose la surface Σ assez rugueuse pour s'opposer à tout glissement du moins dans les conditions où se meut S .⁽¹⁾

Considérons maintenant un solide S qui est assujéti à rouler et pivoter sans glisser sur une surface Σ qui varie avec le temps suivant une loi donnée. La liaison se traduira 1° par une relation

$$(1) \quad f(\xi, \eta, \zeta, \theta, \varphi, \psi, t) = 0$$

exprimant que S et Σ sont en contact; 2° par deux relations linéaires (mais non homogènes en général) par rapport à $\xi', \theta', \zeta', \theta', \varphi', \psi'$ exprimant que la vitesse de l'élément P de S en contact avec Σ est équipollente à la vitesse de l'élément coïncidant de Σ ; ces deux relations pourront s'écrire:

$$(2) \quad \begin{cases} a_1 d\xi + a_2 d\eta + a_3 d\zeta + a_4 d\theta + a_5 d\varphi + a_6 d\psi + a_7 dt = 0, \\ b_1 d\xi + b_2 d\eta + b_3 d\zeta + b_4 d\theta + b_5 d\varphi + b_6 d\psi + b_7 dt = 0 \end{cases}$$

les a, b désignant des fonctions déterminées de $\xi, \eta, \zeta, \theta, \varphi, \psi, t$.

Par exemple, supposons que S soit une sphère homogène assujéti à rouler et pivoter sans glisser sur un plan horizontal Π qui se déplace d'un mouvement de translation

⁽¹⁾ Si S et Σ sont deux solides du système, la liaison se traduira par une relation entre les 12 paramètres qui définissent la position de S et Σ , et deux relations linéaires entre les 12 dérivées premières [relations dont les coefficients dépendent des douze paramètres].

rectiligne et uniforme donc la vitesse \bar{a} est inclinée à 45° sur la verticale ascendante oz . Prenons comme plan xoy la position de Π pour $t=0$, l'axe ox étant la projection horizontale de \bar{a} . Ses équations de liaison sont :

$$\xi = l + \frac{at}{\sqrt{2}},$$

$$\xi - ql - \frac{a}{\sqrt{2}} = 0, \quad \eta' + pl = 0,$$

p, q, r désignant ⁽¹⁾ les composantes de la rotation instantanée $\bar{\omega}$ sur ox, oy et oz .

191. — Considérons, à un instant t , deux positions infiniment voisines soit S_0 et S_1 , parmi les positions que S peut occuper à cet instant : dans ces deux positions, S est en contact avec Σ_0 (position de Σ à l'instant t). Si laissant Σ_0 immobile, on voulait faire passer S de S_0 en S_1 , S devrait rouler et pivoter sans glisser sur Σ_0 et les variations de $\xi, \eta, \zeta, \theta, \varphi, \psi$ vérifieraient 1° l'équation (1) différentiée en laissant t constant; 2° les équations (2) où on annule dt . Nous donnerons à un tel déplacement le nom de déplacement virtuel compatible avec toutes les liaisons à l'instant t . Dans un tel déplacement, le travail virtuel de la réaction de Σ sur S est nul ⁽²⁾.

Des remarques analogues subsistent si S est un solide dont la forme est bien déterminée à chaque instant t mais varie avec t , ou encore si S et Σ sont deux solides du système, dont la forme varie avec t suivant une loi donnée, ou enfin, si le système est assujéti (en outre de liaisons holonomes) à plusieurs liaisons de l'espèce précédente.

192. — Liaisons non holonomes dans le cas général.
Admettons qu'on se soit servi de toutes les équations de

(1) Si θ, φ, ψ sont les angles d'Euler qui définissent l'orientation d'un trièdre trirectangle lié invariablement à la sphère, on trouve aisément :
 $p = \varphi' \sin \theta \sin \psi + \theta' \cos \psi, \quad r = -\varphi' \sin \theta \cos \psi + \theta' \sin \psi, \quad r = \psi' + \varphi' \cos \theta,$
(en raisonnant comme au N° 113).

(2) A condition de réduire les réactions de Σ sur S à une force unique appliquée au point géométrique de contact, c'est-à-dire de négliger le frottement de roulement et de pivotement.

liaisons holonomes [supposées bilatérales] pour réduire à son minimum K le nombre des paramètres qui définissent la position du système S . Les valeurs q_1, \dots, q_K de ces paramètres sont alors indépendantes. Nous dirons que le système est assujéti à des liaisons non holonomes (bilatérales) si les q_i sont assujéti à un certain nombre de relations linéaires, soit les P relations.

$$(3) \quad \begin{cases} a_1 dq_1 + a_2 dq_2 + \dots + a_K dq_K + q_{K+1} dt = 0 \\ b_1 dq_1 + b_2 dq_2 + \dots + b_K dq_K + b_{K+1} dt = 0 \\ l_1 dq_1 + l_2 dq_2 + \dots + l_K dq_K + l_{K+1} dt = 0 \end{cases}$$

Les a, b, l désignent des fonctions données de q_1, \dots, q_K, t . Le système est un système à K degrés de liberté, mais ses conditions initiales [positions et vitesses] dépendent non plus de $2K$, mais de $(2K-P)$ constantes arbitraires.

Déplacements virtuels de S . - Considérons, à l'instant t , la position q_1, \dots, q_K du système; par définition, un déplacement virtuel de S compatible avec toutes les liaisons à l'instant t , c'est un déplacement infinitésimal $\delta q_1, \dots, \delta q_K$ où les δq_i vérifient les P équations (3) dans lesquelles on annule dt ; autrement dit, $\delta q_1, \dots, \delta q_K$ satisfont aux P conditions :

$$(4) \quad \begin{cases} a_1 \delta q_1 + \dots + a_K \delta q_K = 0 \\ b_1 \delta q_1 + \dots + b_K \delta q_K = 0 \\ \dots \\ l_1 \delta q_1 + \dots + l_K \delta q_K = 0 \end{cases}$$

Les liaisons sont dites parfaites par définition, si dans chaque déplacement virtuel compatible avec les liaisons à l'instant t , le travail total des réactions est nul. Elles sont indépendantes du temps si les termes en dt sont nuls dans les équations (3) et si t ne figure pas dans les a, b, \dots, l ; c'est-à-dire si les équations de liaisons (3) sont indépendantes de t et dt .

Quand les liaisons sont indépendantes du temps, le déplacement infinitésimal vrai de S est toujours un déplacement virtuel (compatible avec toutes les liaisons

à l'instant t); si de plus, les liaisons sont parfaites, le travail vrai des réactions est nul, et le travail vrai de toutes les forces se réduit au travail vrai des seules forces données. Ces deux propositions sont en défaut en général quand les liaisons dépendent du temps.

Quand les liaisons holonomes sont parfaites et quand les liaisons non holonomes résultent de la combinaison de plusieurs des liaisons simples qui ont été énumérées au N° précédent, le système est à liaisons parfaites :

Supposons que le premier membre d'une ou de plusieurs équation (3) [du moins après qu'on a combiné convenablement ces équations], soit une différentielle totale exacte : on pourra remplacer les équations (3) correspondantes par des relations explicites entre q_1, \dots, q_R, t . Par exemple, s'il en est ainsi pour les deux premières équations (3), ces équations peuvent s'écrire :

totale exacte : par exemple, les deux premières équations (3) sont de la forme :

$$df_1(q_1, \dots, q_R, t) = 0, \quad df_2(q_1, \dots, q_R, t) = 0;$$

elles équivalent aux relations :

$$f_1(q_1, \dots, q_R, t) = C_1^{te}, \quad f_2(q_1, \dots, q_R, t) = C_2^{te}.$$

Il est loisible de se donner la valeur de f_1 et celle de f_2 pour la position initiale de S à l'instant t_0 , soit

$f_1(q_1^0, \dots, q_R^0, t_0) = 0, \quad f_2(q_1^0, \dots, q_R^0, t_0) = 0$. On remplace ainsi les deux premières équations (3) par les deux équations holonomes :

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0.$$

Quand une telle intégration est possible pour les p équations (3), on rentre ainsi dans le cas d'un système à liaisons holonomes, à $(R - p)$ degrés de liberté; et si, en outre, les liaisons sont parfaites, on est ramené à étudier le mouvement d'un système à liaisons holonomes et parfaites [N° 151]. C'est le cas par exemple d'un disque plat roulant sans glisser, dans le plan fixe

xOy , sur une courbe fixe de ce plan, ou d'un cylindre roulant sans glisser ni pivoter sur un cylindre ou un plan fixe, etc.⁽¹⁾ Mais en général, il n'en est pas ainsi et on doit laisser aux équations (3) leur forme différentielle.

193. - Équations du mouvement d'un système à liaisons non holonomes mais parfaites.

Les liaisons étant supposées parfaites, soit $R_1 \delta q_1 + \dots + R_k \delta q_k$ le travail virtuel des réactions dans un déplacement $\delta q_1, \dots, \delta q_k$ arbitraire. Comme ce travail est nul si le déplacement virtuel est compatible avec toutes les liaisons à l'instant t , on sait [1^{ère} année, p. 388] que l'expression $R_1 \delta q_1 + R_2 \delta q_2 + \dots + R_k \delta q_k$ est une combinaison⁽²⁾ des premiers membres des équations (3); autrement dit on a :

$$(4) \quad \begin{cases} R_1 = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \beta_1 + \dots + \lambda_p \ell_1, \\ \dots \\ R_k = \lambda_1 \alpha_k + \lambda_2 \beta_k + \dots + \lambda_p \ell_k, \end{cases}$$

les λ , dans le mouvement vrai de S , variant en général avec t . Le raisonnement du N° 187 montre alors, sans modification, qu'on peut écrire les k équations

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 + \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_p \ell_1, \\ \dots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k + \lambda_1 \alpha_k + \dots + \lambda_p \ell_k, \end{cases}$$

(1) Ce sont des exemples de systèmes dont les liaisons (assimilables à des liaisons holonomes) sont parfaites bien que les corps en contact ne soient pas parfaitement lisses [N° 150]. Dans un tel système, quand les liaisons sont indépendantes du temps, le travail vrai des forces de frottement est nul.

(2) La présence de t et de dt dans les équations (3) ne change rien au raisonnement du cours de 1^{ère} année, puisque dans l'étude de déplacements virtuels on laisse t constant et qu'on annule dt .

où T est exprimé à l'aide des q_i, q'_i sans tenir aucun compte des équations (3). Les K équations (5) jointes aux P équations (3) définissent les $(K+P)$ fonctions inconnues $q_1(t), \dots, q_K(t), \lambda_1(t), \dots, \lambda_P(t)$, connaissant, pour $t=t_0$, les valeurs q^0 et les valeurs q^0 [liées par les P conditions (3)].

Il serait facile de traiter par cette méthode l'exemple d'une sphère homogène roulant et pivotant sans glisser sur un plan horizontal [C^o] ou sur un plan incliné.

Systemes à liaisons unilatérales.

194. - Liaisons unilatérales -

Nous avons supposé, dans tout ce qui précède que les liaisons étaient bilatérales, c'est-à-dire se traduisaient toutes par des égalités. Or, dans beaucoup d'applications, les liaisons, ou du moins certaines d'entre elles, sont unilatérales. - Par exemple, quand un point P ou (x, y, z) glisse sur une surface fixe Σ , il peut en général quitter la surface d'un certain côté. La liaison dans ce dernier cas se traduit par une inégalité, soit l'inégalité :

$$f(x, y, z) \geq 0.$$

Nous allons étudier maintenant le cas où les liaisons du système ne sont plus unilatérales. Nous les supposons d'ailleurs toutes holonomes⁽¹⁾. Il est loisible de tenir compte de toutes les liaisons bilatérales pour définir la position de S à l'aide du nombre minimum K de paramètres. Les liaisons unilatérales se traduisent alors par un certain nombre d'inégalités, soit les r inégalités :

$$(1) \quad \begin{cases} f_1(q_1, q_2, \dots, q_K, t) \geq 0 \\ f_2(q_1, q_2, \dots, q_K, t) \geq 0 \\ \dots \\ f_r(q_1, q_2, \dots, q_K, t) \geq 0. \end{cases}$$

(1) Si, par exemple, le système est un solide assujéti à rouler et pivoter sans glisser sur un plan horizontal fixe au-dessus duquel il peut se soulever, la liaison est unilatérale et non holonome. - Il serait facile d'étendre à de telles liaisons la discussion qui va suivre.

Nous convenons de dire que la liaison $f > 0$, par exemple, est en action entre les instants t et $t+h$, si, dans cet intervalle de temps, l'égalité $f=0$ (et non l'inégalité $f > 0$) est vérifiée.

195. — Ceci posé, on peut toujours diviser le temps en intervalles $t_0, t_1, t_1, t_2, t_2, t_3$, etc. tels que pendant chaque intervalle, ce soient les mêmes liaisons qui soient en action. Par exemple, pour $t_0 < t < t_1$, les 3 équations $f_1=0, f_2=0, f_3=0$ sont vérifiées, tandis qu'on a $f_4 > 0, \dots, f_n > 0$. Entre les instants t_0 et t_1 , tout se passe comme si les trois premières liaisons étaient bilatérales et les autres inexistantes.

A l'instant t_1 , ou bien une au moins des liaisons qui étaient en action cesse d'agir (par exemple, f_1 devient > 0 pour $t > t_1$), ou bien une liaison nouvelle au moins entre en action (par exemple, f_4 s'annule pour $t=t_1$ et reste nul quand t croît); ou bien enfin les deux circonstances se présentent en même temps.

Dans le premier cas, les réactions qu'exerçaient les liaisons qui cessent d'agir s'annulent à l'instant t_1 , et tout se passe entre les instants t_1 et t_2 comme si ces liaisons n'existaient pas.

Mais, dans le cas où des liaisons nouvelles entrent en jeu à l'instant t_1 , en général les vitesses changent brusquement: il y a choc. En effet, si f_4 , par exemple, s'annule pour $t=t_1$, on a $f_4 > 0$ pour $t=t_1 - \varepsilon$; l'expression $\frac{df_4}{dt}$ ou $(\frac{df_4}{dq_1} q'_1 + \dots + \frac{df_4}{dq_n} q'_n + \frac{df_4}{dt})$ est donc négative pour $t_1 - \varepsilon$ et en général elle ne tend pas vers zéro avec ε . Il suit de là que les q doivent subir une brusque variation à l'instant t_1 ; autrement, f_4 étant nul pour $t=t_1$ et $\frac{df_4}{dt}$ négatif, f_4 serait négatif pour $t_1 + \varepsilon$, et les liaisons exigeraient $\frac{df_4}{dt} > 0$. Il y aura donc choc, à moins que les vitesses, quand t atteint en croissant l'instant t_1 , ne soient précisément telles que $\frac{df_4}{dt}$ soit nul.

Dans le cas simple où S se compose d'un seul élément P , mobile d'un certain côté d'une surface fixe, la vitesse V de P varie brusquement chaque fois qu'il atteint non tangentiellement la surface Σ . Si la surface Σ est parfaite-
ment

(1) Si, par exemple, le système est un solide assujéti à rouler et pivoter sans glisser sur un plan horizontal fixe au dessus duquel il peut se soulever, la liaison est unilatérale et non holonome. — Il serait facile d'étendre à de telles liaisons la discussion qui va suivre.

lisse, la composante de \vec{V} tangente à Σ n'est pas modifiée par le choc, mais la composante normale \vec{V}_n de \vec{V} est \rightarrow changée de sens. L'expérience montre que la valeur absolue de V_n après le choc est au plus égale à sa valeur avant le choc : si ces deux valeurs sont égales, P se réfléchit sur Σ suivant les lois de la réflexion de la lumière ; on dit alors que les deux corps qui se choquent sont parfaitement élastiques : ils sont dits parfaitement mous si V_n est nul après le choc. On voit que ce dernier cas excepté, quand P atteint S non tangentielllement, la liaison n'entre en jeu que pendant un temps quasiment nul (durée de choc), mais pendant ce bref contact Σ exerce sur P une force considérable qui modifie presque instantanément sa vitesse. De plus, la force vive de P est toujours diminuée par le choc, et le travail de la réaction de Σ pendant le choc est négatif, sauf dans le cas où les deux corps sont parfaitement élastiques, cas où ce travail est nul.

Des circonstances analogues se présentent pour un système quelconque chaque fois que des liaisons nouvelles entrent en jeu. Nous étudierons, dans un prochain chapitre, l'influence des chocs : il est impossible, comme nous le verrons, de calculer les nouvelles conditions initiales après un choc sans faire des hypothèses sur l'élasticité des corps qui se heurtent. Mais une fois ces nouvelles conditions initiales calculées, les équations de Lagrange permettent de déterminer le mouvement jusqu'au choc suivant.

196. - Calcul du mouvement entre deux chocs quand les liaisons sont parfaites.

Supposons les liaisons parfaites : le travail virtuel des réactions est nul ou positif [n° 149] dans tout déplacement virtuel des (compatible avec les liaisons à l'instant t). Soit S_0 la position de S à l'instant t ; dans cette position, un certain nombre, soit p des relations (1) sont vérifiées en tant qu'égalités [$0 \leq p \leq P$], admettons pour fixer les idées, que ce soient les p premières, les autres étant vérifiées comme inégalités. Un déplacement virtuel (à partir de S_0) compatible avec les liaisons à l'instant t , c'est un déplacement $\delta q_1, \dots, \delta q_k$ où les δq satisfont

l'instant t_0 ; ⁽¹⁾ ce que nous traduisons en disant que les conditions initiales satisfont alors aux mêmes restrictions que si la liaison $f_1 = 0$ était bilatérale. Admettons, pour fixer les idées, que ces restrictions soient remplies pour les p premières liaisons, à l'exclusion des autres. Il est alors possible a priori que ces p liaisons agissent effectivement pendant un certain temps t_0, t_1 ; mais il est possible aussi qu'une des fonctions f_1, \dots, f_p , ou deux; ... ou les p deviennent immédiatement positives. Comment déciderait-on entre ces diverses hypothèses?

On se placera d'abord dans l'hypothèse où les p liaisons agissent. Les équations (11) et les p équations $f_1 = 0, \dots, f_p = 0$ détermineront les q et les λ : le mouvement ainsi calculé ne sera admissible que si les λ sont positifs ou nuls pour $t = t_0$ et voisin de t_0 ; il devient inadmissible dès qu'un des λ s'annule et change de signe. — On se place ensuite dans l'hypothèse où une des p fonctions f_1, \dots, f_p , soit f_1 par exemple, devient immédiatement positive; on doit faire $\lambda_1 \equiv 0$ dans les équations (4), et supprimer la condition $f_1 \equiv 0$; les valeurs $\lambda_2, \dots, \lambda_p$ doivent être positives ou nulles et f_1 doit être positif pour $t = t_0 + \varepsilon$. [Cette seconde hypothèse se décompose en p cas à examiner]. — La troisième hypothèse est celle où deux des fonctions f_1, \dots, f_p , [soit f_1 et f_2] deviennent immédiatement positives: on annule λ_1 et λ_2 dans (4), on supprime les conditions $f_1 = 0, f_2 = 0$; les valeurs de $\lambda_3, \dots, \lambda_p$ doivent être positives ainsi que f_1 et f_2 pour $t = t_0 + \varepsilon$. [Cette troisième hypothèse renferme $p \frac{p-1}{2}$ cas à examiner]; etc. La dernière hypothèse à examiner est celle où aucune des p liaisons n'agit: on annule tous les λ dans (4), mais f_1, \dots, f_p doivent être positifs pour $t > t_0$.

On pourrait montrer (et nous admettrons) que ces diverses hypothèses mettent en évidence un mouvement et un seul répondant aux conditions initiales ⁽²⁾.

(1) Si $f_1 = 0$ mais $\frac{df_1}{dt} \neq 0$ pour $t = 0$, $\frac{df_1}{dt}$ est nécessairement positif pour $t = t_0$; autrement, f_1 (nul pour $t = t_0$) serait négatif pour $t = t_0 + \varepsilon$; c'est-à-dire qu'un choc se produirait immédiatement qui changerait les conditions initiales. Soit donc $f_1 = 0, \frac{df_1}{dt} > 0$ pour $t = t_0$: f_1 est > 0 pour $t > t_0$, au moins pendant un certain temps.

(2) C'est ce que nous avons vérifié dans l'étude approfondie d'un exemple particulier de cette nature [N° 27].

Supposons que ce soit la première hypothèse qui corresponde à la réalité: le mouvement défini par les équations (4) et les équations $f_1=0, \dots, f_p=0$ est le mouvement vrai tant qu'aucune des quantités λ_p ne change de signe et qu'aucune des fonctions f_{p+1}, \dots, f_r ne s'annule. Si, par exemple, λ_p s'annule en changeant de signe à l'instant t_1 (avant qu'aucune des fonctions f_{p+1}, \dots, f_r ne se soit annulée), c'est que f_p devient positif pour $t > t_1$ et les $(p-1)$ premières liaisons agissent seules pour $t > t_1$. Si à l'instant t_1 f_{p+1} s'annule, il y a choc et on ne peut poursuivre l'étude du mouvement sans hypothèses sur la nature des corps composant le système: toutefois, quand $\frac{df_{p+1}}{dt}$ s'annule en même temps que f_{p+1} , il n'y a pas choc, et on est ramené pour l'instant t_1 à une discussion analogue à celle qu'on a faite pour l'instant t_0 ⁽¹⁾.

En définitive, la discussion du mouvement répondant à des conditions initiales données peut être fastidieuse à cause du nombre de cas à examiner. Mais elle ne saurait présenter aucune difficulté nouvelle, puisque chaque cas se discute comme si les liaisons supposées effectives étaient bilatérales. L'étude du mouvement peut être poursuivie analytiquement tant qu'aucun choc ne se produit.

Quand les liaisons sont indépendantes du temps, le travail des réactions entre deux chocs est toujours nul (puisque les liaisons sont supposées parfaites). Mais nous verrons que chaque choc diminue la force vive du système, à moins que les deux corps qui se choquent ne soient parfaitement élastiques. Pendant la durée inappréciable d'un choc, les réactions effectuent donc un travail notable, essentiellement négatif.

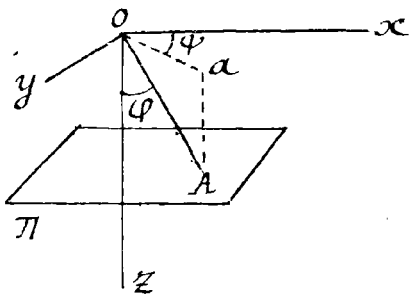
198. - On pourrait étendre la discussion au cas où les liaisons sont affectées de frottement. On aurait les mêmes cas à distinguer; dans chaque cas, on emploierait les équations de Lagrange en tenant compte du frottement. Si les liaisons matérielles ne sont pas surabondantes, on a, dans chaque cas, autant d'équations que de fonctions inconnues de t . Quand les coefficients de frottement [lesquels sont supposés donnés] sont petits, les conclusions sont les mêmes que quand

⁽¹⁾ Voir cette note au bas de la page 279.

il n'y a pas frottement : mais en général, quand ces coefficients dépassent certaines limites, la discussion aboutit à une ambiguïté ou à une contradiction [N°44].

199. - Exemple :

« Une barre homogène pesante OA est fixée par son extrémité O ; son extrémité A glisse sur un plan horizontal fixe π situé au-dessous du point O et peut se soulever au-dessus de ce plan. - Mouvement du système, en supposant qu'à l'instant initial A soit lancé dans le plan π avec une vitesse horizontale. » [Exemple du N°189].



La position du système (N°189), quand on tient compte de toutes les liaisons bilatérales dépend de deux paramètres φ ou q et ψ ou q_2 . La liaison unilatérale se traduit par l'inégalité :

$$\varphi - \alpha \geq 0$$

et pour $t=0$, on a : $\varphi_0 = \alpha$, $\varphi'_0 = 0$.

Si cette liaison entre en jeu, la composante normale de sa réaction est nécessairement dirigée vers le haut.

Supposons le plan π parfaitement lisse et sans adhérence ; le travail virtuel $\delta R_1 \delta q + \delta R_2 \delta \psi$ des réactions est [N°196] : $\lambda \delta \varphi$, avec $\lambda > 0$. On a [N°189] :

$$2T = \frac{Ml^2}{3} (\sin^2 \varphi \psi'^2 + \varphi'^2), \quad U = MgZ = Mg \frac{l}{2} \cos \varphi.$$

Si A reste en contact avec π , les deux équations de Lagrange sont :

$$(1) \begin{cases} M \frac{l^2}{3} (\varphi'' - \sin \varphi \cos \varphi \psi'^2) = -Mg \frac{l}{2} \sin \varphi + \lambda \\ \frac{d}{dt} M \frac{l^2}{3} \sin^2 \varphi \psi' = 0, \quad \text{avec } \varphi = \alpha. \end{cases}$$

Pour que le mouvement soit admissible, il faut :

$\lambda > 0$, c'est-à-dire $Ml^2 \sin \alpha \left[\frac{g}{2} - \frac{l}{3} \cos \alpha \psi'^2 \right] > 0$, ou enfin :

$\psi'^2 \leq \frac{3g}{2l \cos \alpha}$. D'après la seconde équation (1), ψ' est constant :

si $\psi_0'^2 < \frac{3g}{2l \cos \alpha}$, λ est positif et constant ; si $\psi_0'^2 = \frac{3g}{2l \cos \alpha}$,

λ est constamment nul.

Dans l'hypothèse où A se soulève au-dessus de Π , les équations du mouvement sont les équations (1) ou $\lambda \equiv 0$, mais où φ est variable. Pour que ce mouvement soit admissible, il faut que $\varphi - \alpha > 0$ pour $t > t_0$, et, comme $\varphi - \alpha$ et $\frac{d\varphi}{dt}$ sont nuls pour $t = t_0$, le signe de $\varphi - \alpha$ pour $t > t_0$ est celui de $\varphi'' = -Ml \sin \alpha \left[\frac{g}{2} - \frac{l}{3} \cos \alpha \varphi'^2 \right]$; la seconde hypothèse n'est donc admissible que si $\frac{g}{2} - \frac{l}{3} \cos \alpha \varphi'^2 \leq 0$. Les deux parties de la discussion se correspondent parfaitement.

Nous avons supposé Π parfaitement lisse: quand Π est dépoli, soit N la projection sur Oz de la réaction \bar{R} de ce plan sur A ; N doit être négatif ou nul. Le travail des réaction [c'est-à-dire ici de \bar{R}] dans le déplacement virtuel $\delta\varphi$ [où $\delta\varphi = 0$] est: $-N \sin \alpha \delta\varphi$ et l'équation de Lagrange relative à φ est la première équation (1) ou λ est remplacé par $-N \sin \alpha \delta\varphi$. Qu'il y ait frottement ou non, N est donc égal à $-Ml \left[\frac{g}{2} - \frac{l}{3} \cos \alpha \varphi'^2 \right]$, ainsi que nous l'avons remarqué [N° 189]. Les conclusions sont les mêmes que quand le frottement est nul.

En définitive, si $\varphi'^2 > \frac{3g}{2l \cos \alpha}$, la barre se soulève⁽¹⁾ au-dessus du plan Π ; si $\varphi'^2 < \frac{3g}{2l \cos \alpha}$, la barre glisse sur Π , et φ' s'annule au bout d'un temps fini et reste nul [ou bien $\varphi' \equiv \varphi'_0$ quand $f = 0$]; si $\varphi'^2 = \frac{3g}{2l \cos \alpha}$, A se meut de lui-même sur le plan Π sans que le plan exerce sur lui aucune réaction, et $\varphi' \equiv \varphi'_0$.

Note de la page 277.

En général, f est une fonction de t du second ordre en $t - t_i$. Dans l'hypothèse où les p premières liaisons agissent seules pour $t > t_i$ [et non la $(p+1)^e$], $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ont le signe voulu, f est > 0 pour $t > t_i$ comme pour $t < t_i$. Cette hypothèse est donc admissible et correspond par suite au mouvement vrai.

(1) Dans ce cas, le théorème des forces-vives peut remplacer une des équations de Lagrange et donne (en tenant compte de la 2^e):

$$\frac{l}{3} \left(\frac{C^2}{\sin^2 \varphi} + \varphi'^2 \right) = +g \cos \varphi + C_1^2$$

Pour $t = 0$, $\varphi = \alpha$, $\varphi' = 0$; il suit de là que φ oscille entre deux valeurs $\varphi = \alpha$ $\varphi = \beta > \alpha$, et chaque fois que φ reprend la valeur α , φ' s'annule et A atteint le plan Π sans choc.

Libre IV.

Chocs et percussions.

Chapitre I.

Théorie des percussions.

200. Chocs et percussions. — Il peut arriver que les points d'un système matériel changent notablement de vitesses dans un temps extrêmement court, sans que le système change sensiblement de position. Le changement de vitesses nous apparaît alors comme instantané...

C'est ce qui arrive, par exemple, quand une balle élastique rebondit sur un mur : la position de la balle, dans le temps très court que dure son contact avec le mur, change très peu, mais sa vitesse change brusquement, puisqu'elle se dirigeait vers le mur un instant avant le contact et s'en éloigne immédiatement après : à partir de ce moment, le mouvement de la balle se fait à nouveau sous l'action de la pesanteur, dont l'effet est négligeable pendant la durée du contact. On dit, dans ce cas, qu'il y a choc entre le mur et la balle, et que le mur exerce sur la balle une percussion.

De même, un projectile qui s'écrase sur un obstacle, un ballon qu'on lance d'un coup de pied subissent une percussion.

201. Impulsion d'une force. — Pour définir avec précision la percussion qui s'exerce sur un point (à un instant t_0), je définis d'abord l'impulsion d'une force ordinaire dans un intervalle de temps t_0 à t_1 .

Soit P un point matériel de masse m , X, Y, Z les composantes de la force \vec{F} qui s'exerce sur P dans son mouvement. A chaque instant t , ces composantes X, Y, Z sont

bien déterminées, et on a :

$$(1) \quad mx'' = X(t), \quad my'' = Y(t), \quad mz'' = Z(t).$$

D'où on déduit aussitôt, en désignant par (x'_1, y'_1, z'_1) et (x'_0, y'_0, z'_0) les composantes de la vitesse aux instants t_0, t_1 :

$$(2) \quad \begin{cases} mx'_1 - mx'_0 = \int_{t_0}^{t_1} X(t) dt, \\ my'_1 - my'_0 = \int_{t_0}^{t_1} Y(t) dt, \\ mz'_1 - mz'_0 = \int_{t_0}^{t_1} Z(t) dt. \end{cases}$$

On appelle impulsion de la force (X, Y, Z) dans l'intervalle de temps $t_0 - t_1$, le vecteur dont les composantes sont les intégrales $a = \int_{t_0}^{t_1} X(t) dt$, $b = \int_{t_0}^{t_1} Y(t) dt$, $c = \int_{t_0}^{t_1} Z(t) dt$.

Les équations (2) expriment alors ce théorème :

“ La variation géométrique de la quantité de mouvement du point P quand t varie de t_0 à t_1 est égale à l'impulsion (dans cet intervalle de temps) de la force appliquée au point. ”

Si le point P est soumis à plusieurs forces, \vec{F}_1 ou $(X_1, Y_1, Z_1), \dots, \vec{F}_n$ ou (X_n, Y_n, Z_n) , on a, à chaque instant :

$$X = X_1 + \dots + X_n, \quad Y = Y_1 + \dots + Y_n, \quad Z = Z_1 + \dots + Z_n,$$

$$\text{D'où } a = \int_{t_0}^{t_1} X(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} X_1 dt + \dots + \int_{t_0}^{t_1} X_n dt = a_1 + \dots + a_n,$$

et de même

$$b = b_1 + \dots + b_n, \quad c = c_1 + \dots + c_n,$$

égalités qui expriment que l'impulsion de la résultante dans l'intervalle de temps $t_0 - t_1$ est égale à la somme géométrique des impulsions des composantes dans le même intervalle de temps.

202. - Percussions considérées comme les impulsions de forces considérables.

Supposons que l'intervalle de temps $t_0 - t_1$ soit très petit. Si la force (X, Y, Z) n'a pas dans cet intervalle de

temps une intensité très grande, les seconds membres de (2) sont très petits, et par conséquent la vitesse du mobile varie très peu dans l'intervalle de temps t_0, t_1 ; c'est ce qui arrive pour le mouvement d'un point soumis à des forces ordinaires, telles que la pesanteur ou l'attraction newtonienne d'un centre fixe, etc. Mais si la force \vec{F} ou (X, Y, Z) a, dans l'intervalle t_0, t_1 , une intensité très grande de l'ordre de $\frac{1}{t_1 - t_0}$, les seconds membres de (2) ont des valeurs finies, l'impulsion reste finie, et la vitesse du point P subit une variation finie. D'ailleurs, le point se déplace très peu pendant ce même intervalle de temps, puisque sa vitesse reste finie dans tout l'intervalle: d'une façon précise, si on appelle V le maximum de la vitesse dans l'intervalle de temps considéré, le déplacement est moindre que $V(t_1 - t_0)$.

Si l'intervalle de temps t_0, t_1 est inappréciable pour nos sens, nous constatons que le point subit brusquement une variation finie de vitesse sans que sa position change. Nous dirons que le point P a subi une percussion, qui a comme direction, sens et intensité la direction, le sens et la longueur absolue de l'impulsion de la force (X, Y, Z) pendant la durée de la percussion.

En vertu de cette définition, quand un point P subit une percussion $\vec{\Phi}$ ou (a, b, c) , sa quantité de mouvement subit une variation géométrique égale à $\vec{\Phi}$; représentons par ΔV la variation géométrique de V et par $\Delta x', \Delta y', \Delta z'$ les variations de x', y', z' pendant la percussion, les égalités précédentes s'écrivent:

$$m \cdot \overline{\Delta V} = \overline{\Phi},$$

ou (3) $m \cdot \Delta x' = a, \quad m \cdot \Delta y' = b, \quad m \cdot \Delta z' = c.$

203. - Composition des percussions.

Si le point P est soumis à plusieurs percussions simultanées, c. à d. à plusieurs forces considérables de l'ordre de $\frac{1}{t_1 - t_0}$, l'impulsion de la résultante de ces forces est [N° 201] $\frac{1}{t_1 - t_0}$ la somme géométrique des impulsions des composantes [dans l'intervalle du temps t_0, t_1 de la percussion]. La percussion totale que subit le point P est donc la somme géométrique de toutes les percussions qui

lui sont appliquées. Les percussions se composent comme des forces.

D'une manière générale, les percussions n'étant que des forces très grandes, à chaque théorème sur les forces, va correspondre un théorème sur les percussions.

204. - Théorème des moments cinétiques pour un point. Considérons le vecteur \mathfrak{P} d'origine P qui représente la percussion appliquée à P , et le vecteur $m\Delta V$ d'origine P . Ces deux vecteurs coïncident : leurs moments par rapport à un point O quelconque (ou par rapport à une droite OZ quelconque) coïncident donc. Or le moment de $m\Delta V$ par rapport au point O est l'excès géométrique du moment (mV, O) sur le moment (mV_0, O) . D'où ce théorème : La variation géométrique du moment cinétique de P par rapport à un point O , est équipollente, au moment par rapport à O , de la percussion appliquée à P . Si le point P est soumis à plusieurs percussions, ce dernier moment est le moment résultant, par rapport à O , de toutes les percussions. Un théorème analogue s'applique aux moments par rapport à une droite.

L'égalité géométrique des moments se traduit par l'équation [égalité des moments pour OZ].

$$(4) \quad \Delta.m(xy' - yx') = xb - ya$$

et deux équations analogues.

On pouvait déduire immédiatement l'équation (4) des équations (3), en multipliant la première équation (3) par $-y$, la seconde par x , et en ajoutant ; il vient :

$$(5) \quad m(x\Delta y' - y\Delta x') = xb - ya$$

équation qui coïncide avec l'équation (4), si on tient compte de ce fait que x et y ne subissent aucune variation⁽¹⁾.

205. - Percussions et forces ordinaires. - Percussions dans le mouvement relatif.

Si un point matériel P est soumis, à l'instant t , à

⁽¹⁾ D'une manière générale, u désignant une fonction donnée de x, y, z, x', y', z' nous représentons par Δu la variation que subit u pendant la percussion. Il ne faut pas oublier, dans le calcul de Δu , que x, y, z ne subissent aucune variation.

des forces ordinaires et à des percussions, l'effet des premières pendant la durée des percussions est négligeable.

D'après cela, étudions d'abord le mouvement absolu d'un point P , et supposons qu'entre les instants t_0 et t_1 , très voisins, P soit soumis à plusieurs forces (absolues) F_1, \dots, F_n de l'ordre de $\frac{1}{t_1 - t_0}$ dont les impulsions sont $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n$. La percussion que subit le point est $\bar{F}_1 + \dots + \bar{F}_n$. Imaginons maintenant qu'on rapporte le mouvement de P à des axes animés d'un mouvement absolu quelconque, mais régulier; la force relative totale qui s'exerce sur P entre les instants t_0 et t_1 s'obtient en ajoutant à $\bar{F}_1 + \dots + \bar{F}_n$ la force d'entraînement et la force centrifuge composée qui sont finies. La percussion que subit le point P dans ce mouvement relatif se confond donc avec la percussion absolue.

Ce résultat était évident d'après le théorème bien connu de cinématique; la différence géométrique $\bar{V}_1 - \bar{V}$ des vitesses de deux points qui coïncident à l'instant considéré est indépendante des axes auxquels on rapporte le mouvement.

Remarquons que ce dernier théorème exige seulement que les trièdres de référence employés aient des vitesses continues l'un par rapport à l'autre.

D'une façon précise, soit $Oxyz$ et $O_1x_1y_1z_1$ deux trièdres animés l'un par rapport à l'autre d'un mouvement quelconque; la percussion que subit un point P à un instant t est la même qu'on rapporte le mouvement au premier ou au second trièdre; cela sous la seule restriction que les vitesses d'un des trièdres par rapport à l'autre soient continues à l'instant t .

Il n'en va plus de même si, dans son mouvement par rapport au trièdre O , le trièdre O_1 change brusquement de vitesse. Par exemple, supposons que les axes $O_1x_1y_1z_1$ soient parallèles aux premiers, et que leur origine O_1 soit un point matériel dont la vitesse \bar{W} par rapport au trièdre O varie brusquement de ΔW à

l'instant. Soit \bar{v} et \bar{V} la vitesse de P par rapport au trièdre O et au trièdre O_1 , Φ et Φ_1 la percussion que subit P suivant qu'au rapporte son mouvement au premier ou au second trièdre; on a:

$$\Delta \bar{v} = \Delta \bar{V} + \Delta \bar{w}, \text{ et } \bar{\Phi} = \bar{\Phi}_1 + m \Delta \bar{w}.$$

Percussions appliquées à un système.

206. - Percussions extérieures et intérieures. -

Si deux forces sont à chaque instant égales et directement opposées, leurs impulsions sont évidemment égales et directement opposées. D'où ce principe:

En vertu du principe de l'action et de la réaction, les percussions intérieures⁽¹⁾ d'un système sont décomposables en percussions deux à deux égales et directement opposées.

207. - Théorème du mouvement du centre de gravité.

Entre deux instants t_0 , t_1 , la variation $\Delta \bar{V}$ de la vitesse \bar{V} du centre de gravité G du système S est la même que si toute la masse M de S étant concentrée en ce point, toutes les forces extérieures lui étaient appliquées. D'où ce théorème:

La variation géométrique de la quantité de mouvement du système (ou, si on veut, la variation de la vitesse du centre de gravité G du système) est la même que si, toute la masse du système étant concentrée en ce point, toutes les percussions lui étaient appliquées.

Ce théorème se traduit par l'égalité (théorème du mouvement du centre de gravité projeté sur OX):

$$M \Delta \xi \equiv \Delta \sum m x' = \sum \alpha^e, \quad (\xi \text{ abscisse de } G)$$

et deux égalités analogues,

ξ, η, ζ désignant les coordonnées du point G .

208. - Théorème des moments cinétiques.

Soit OK le moment cinétique du système S par rapport au point O ; la variation de OK est la somme géométrique

⁽¹⁾C'est-à-dire les impulsions des grandes forces intérieures du système.

des variations des moments cinétiques des divers éléments P de S . En vertu du théorème du N° 104, $\Delta D\bar{K}$ est équipollent au moment résultant par rapport à O de toutes les percussions appliquées à S , donc au moment résultant de toutes les percussions extérieures.

209. - Théorème des moments cinétiques dans le mouvement autour du centre de gravité.

Substituons aux axes choisis $Oxyz$ de nouveaux axes $O_1x_1y_1z_1$ parallèles aux premiers, et dont l'origine O_1 , à l'instant t de la percussion, subit elle-même un brusque changement de vitesse ΔW (par rapport au trièdre O)⁽¹⁾. Soit $\bar{\Phi}$ et $\bar{\Phi}_1$ la percussion que subit l'élément P de S à l'instant t suivant qu'on rapporte son mouvement au trièdre O ou au trièdre O_1 ; nous savons qu'on a :

$$\bar{\Phi}_1 = \bar{\Phi} - m \Delta W, \quad (m \text{ masse de } P).$$

Il suit de là qu'on peut appliquer le théorème des moments cinétiques au mouvement de S par rapport aux axes $O_1x_1y_1z_1$, à condition de diminuer pour chaque élément P , la percussion extérieure totale $\bar{\Phi}^e$ du vecteur $m \Delta W$.

Mais supposons que O_1 coïncide constamment avec G ; le moment résultant par rapport à G des vecteurs $-m \Delta W$ est nul (puisque ces vecteurs admettent une résultante géométrique passant par G). D'où ce théorème :

On peut appliquer le théorème des moments cinétiques au mouvement ^{autour} de G (et par rapport à G) sans changer les percussions extérieures.

Théorème qui s'énonce encore :

La variation du moment cinétique de S dans son mouvement autour de G est équipollente au moment résultant par rapport à G des percussions extérieures.

(1) Par exemple, S est un solide qui subit une percussion et O_1 , un élément matériel déterminé de S .

Chapitre II

Percussions appliquées à un solide.

210. - Percussions appliquées à un solide mobile au tour d'un axe fixe.

Le solide S , ^{fixé par deux points O, O' ,} étant en mouvement, on lui applique à l'instant t_0 des percussions extérieures $\bar{\Phi}_1, \dots, \bar{\Phi}_n$, qu'on suppose connues. - Pour calculer l'effet de ces percussions, prenons comme axe Oz la droite OO' , et soit ω la vitesse angulaire de rotation du solide, comptée positivement de gauche à droite autour de Oz . Les percussions données font passer brusquement ω de la valeur connue ω_0 à une certaine valeur ω_1 , qu'il faut déterminer. Appelons x, y, z , les coordonnées du point d'application d'une des percussions $\bar{\Phi}_i$ données, dont les composantes sont a_i, b_i, c_i . Le corps exercera des percussions sur les points fixes O et O' , et ceux-ci réagiront en exerçant sur S des percussions inconnues $\bar{\Pi}$ et $\bar{\Pi}'$, dont les composantes seront A, B, C et A', B', C' . Appelons MK^2 le moment d'inertie du solide par rapport à Oz : le moment cinétique de S par rapport à Oz est $MK^2\omega$. Le théorème des moments cinétiques appliqué à Oz donne (N° 208)

$$(1) \quad MK^2(\omega_1 - \omega_0) = MK^2\Delta\omega = \sum(x_j b_j - y_j a_j),$$

les percussions $\bar{\Pi}$ et $\bar{\Pi}'$ n'intervenant pas puisque leurs moments sont nuls. Le problème est résolu par l'équat^{on} (ii).

Proposons-nous maintenant de déterminer les percussions de liaison $\bar{\Pi}$ et $\bar{\Pi}'$. Le théorème des moments par rapport à Ox et Oy et le théorème du mouvement du centre de gravité donnent :

$$\Delta \sum m(yz' - zy') = \sum(y_i c_i - z_i b_i) - hB'$$

$$\Delta \sum m(zx' - xz') = \sum(z_i a_i - x_i c_i) + hA',$$

$$\Delta \sum mx' = \sum a_i + A + A',$$

$$\Delta \sum my' = \sum b_i + B + B',$$

$$\Delta \sum mz' = \sum c_i + C + C',$$

où h est le z de O' .

Mais dans une rotation angulaire ω autour de oz , on a à chaque instant :

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y, \quad \frac{dy}{dt} = \omega x, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

En remplaçant les dérivées par ces valeurs dans les équations ci-dessus et remarquant qu'on peut faire sortir des signes Δ les quantités telles que $\sum mxz$ qui dépendent seulement de la position du corps (puisque le corps est supposé immobile pendant la percussion), nous obtenons :

$$(2) \quad \begin{cases} -(\sum mxz) \Delta\omega = \sum (y_1 c_1 - z_1 h_1) - hB', \\ -(\sum mijz) \Delta\omega = \sum (z_1 \alpha_1 - x_1 c_1) + hA', \\ -(\sum my) \Delta\omega = \sum \alpha_1 + A + A', \\ (\sum mx) \Delta\omega = \sum \beta_1 + B + B', \\ 0 = \sum c_1 + C + C'. \end{cases}$$

Ces équations ne déterminent pas entièrement⁽¹⁾ les percussions Π et Π' , elles nous donnent en effet A', B', A, B et seulement $C + C'$. La quantité $\Delta\omega$ qui entre dans les équations (2) est déterminée par l'équation (1).

211. - Cas d'une percussion unique. - Centre de percussion.

Supposons qu'il n'y ait qu'une percussion extérieure $\bar{\Phi}$ ou (a, b, c) , appliquée au point (x_1, y_1, z_1) , et cherchons si on peut disposer de cette percussion de façon que les appuis O et O_1 ne supportent aucune percussion, c'est-à-dire que A, B, C, A', B', C' soient nuls.

En introduisant ces conditions dans la dernière des équations (2) on trouve :

$$0 = C,$$

c'est-à-dire que la percussion donnée $\bar{\Phi}$ doit être perpendiculaire à l'axe de rotation. Supposons qu'on ait pris pour plan des xy , le plan $l, x'y'$ perpendiculaire à oz et

(1) Les liaisons matérielles sont ici surabondantes [N° 104].

contenant cette percussion, et dans ce plan un axe des x perpendiculaire à Φ ; on aura alors :

$$a=0, \quad c=0, \quad z_1=0,$$

en sorte que les quatre premières équations (2) deviennent dans ce nouveau système d'axes, en appelant z' la nouvelle valeur de z :

$$(3) \quad \begin{cases} \sum mxz' = 0, & \sum myz' = 0, & \sum my = 0, \\ \Delta\omega (\sum mx) = b. \end{cases}$$

$\Delta\omega$ est d'ailleurs donné par l'équation :

$$MK^2 \Delta\omega = \chi, b.$$

Les deux premières équations (3) expriment que OZ est axe principal d'inertie de S pour O_1 ; la troisième exprime que le centre de gravité G du solide est situé dans le plan $z'Ox$; quant à la quatrième, si on y remplace $\Delta\omega$ par sa valeur $\frac{\chi x_1}{MK^2}$, et $\sum mx$ par son expression $M\xi$, (ξ abscisse de G), elle donne :

$$x_1 = \frac{K^2}{\xi}$$

En résumé :

Quand un corps solide est mobile autour d'un axe fixe OZ , pour qu'on puisse lui appliquer une percussion telle que l'axe ne supporte aucune percussion, il faut d'abord que l'axe de rotation OZ soit axe principal d'inertie du solide pour un de ses points O_1 . Cette condition étant remplie⁽¹⁾, la percussion (d'intensité arbitraire) doit : 1° être dans le plan perpendiculaire à OZ et passant par O_1 ; 2° être normale au plan GOZ ; 3° percer ce plan en un point P situé par rapport à l'axe du même côté que le centre de gravité, à une

⁽¹⁾ Cette condition est toujours remplie si le solide admet un plan de symétrie perpendiculaire à OZ .

distance de l'axe égale à $\frac{K^2}{\xi}$. La distance $\frac{K^2}{\xi}$ est la longueur du pendule synchronique du ξ pendule composé ξ formé par le corps S quand l'axe de suspension est horizontal. Le point d'application P ainsi déterminé se nomme le centre de percussion relatif à l'axe OZ . Remarquons de plus que ξ doit être différent de zéro.

212. - Cas d'une plaque.

Supposons que le solide soit une plaque d'épaisseur négligeable assujettie à tourner autour d'un axe OZ de son plan. Quel que soit cet axe, il est possible de déterminer une percussion perpendiculaire au plan de la plaque et telle que l'axe de rotation ne subisse aucun choc. Ceci tient à ce que OZ est toujours axe principal d'inertie pour un de ses points. En effet, le plan de la plaque étant pris pour plan des xz , transportons les axes $Oxyz$ en un point O_1 (ou $z=l$) de OZ . Pour que OZ soit axe principal par rapport à O_1 , il faut qu'on ait :

$$\sum myz' = 0 \quad \sum mxz' = 0 ;$$

la première condition est toujours remplie, puisque l'on a $y=0$ pour tous les points du corps; quant à la seconde, elle s'écrit puisque $z=z_1+l$:

$$\sum mx(z-l) = 0 \quad \text{ou} \quad \sum mxz - l \sum mx = 0.$$

et donne :

$$l = \frac{\sum mxz}{\sum mx}.$$

Comme $M\xi$, ou $\sum mx$ doit être différent à zéro, il existe sur OZ un point O_1 et un seul pour lequel cette droite est axe principal d'inertie. Pour qu'une percussion Φ appliquée à la plaque ne donne aucun choc à l'axe, il faut que cette percussion soit normale au plan de la plaque et rencontre la droite O_1x en un point A donc la distance O_1A à l'axe OZ est donnée par :

$$O_1A = x_1 = \frac{K^2}{\xi}$$

c'est-à-dire par

$$x_1 = \frac{\sum mx^2}{\sum mx}$$

Le point A est le centre de percussion de la plaque.

Je désigne par m la masse du projectile, par v sa vitesse, par a la distance $OP_1 = PH$, par l la distance OG .
 J'applique le théorème des moments cinétiques au système S formé par le pendule balistique et par le projectile. Pendant le choc des deux corps, les seules réactions extérieures appliquées à S sont les réactions de la suspension, dont le moment par rapport à l'axe OZ est nul. Le moment cinétique de S par rapport à OZ ne change donc pas pendant le choc. Or ce moment, avant le choc, est égal (en valeur absolue) à mva , car P est le seul corps de S en mouvement; immédiatement après le choc, il est égal à

$$(mK^2 + ma^2)\omega,$$

ω , désignant la vitesse angulaire (après le choc) du système S (devenu solide). On a par suite :

$$mva = (mK^2 + ma^2)\omega,$$

d'où :

$$(1) \quad v = \frac{(MK^2 + ma^2)\omega}{ma}.$$

Cherchons maintenant la relation entre ω et l'angle d'écart maximum θ du pendule. Nous pouvons appliquer au mouvement du solide S après le choc, le théorème des forces vives. La force-vive de S , à chaque instant t , est $(MK^2 + ma^2)\omega^2$, et on a :

$$(MK^2 + ma^2)\omega^2 = +2g [M\eta + my] + Cte$$

[η et y désignant l'y de G et de P]; or, soit θ l'angle d'écart à l'instant t ; η et y sont égaux respectivement à $l \cos \theta$ et $a \sin \theta$; d'où l'équation :

$$(MK^2 + ma^2)\omega^2 = 2g(Ml + ma) \cos \theta + h;$$

pour $\theta = 0$, ω est égal à ω_1 ; pour $\theta = \theta_1$, ω est nul; d'où :

$$(MK^2 + ma^2)\omega_1^2 = 2g(Ml + ma)(1 - \cos \theta) = 4g(Ml + ma) \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

c'est-à-dire

$$\omega_1 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{g(Ml + ma)}{MK^2 + ma^2}},$$

ou enfin [d'après (1)] :

$$v = \frac{2}{ma} \sqrt{g(Ml + ma)(MK^2 + ma^2)} \sin \frac{\theta}{2}.$$

On voit que si la droite selon laquelle est lancé le projectile est toujours à la même distance de l'axe de suspension, le sinus du demi angle d'écart maximum est proportionnel à la vitesse du projectile.

Remarque sur les percussions de l'axe. - Il importe pour la conservation de l'appareil, de lancer le projectile à une distance de l'axe telle que cet axe ne supporte pas de percussion. Cela est possible, car l'appareil étant symétrique par rapport au plan vertical xOy , l'axe Oz est pour le point O , axe principal d'inertie du solide. D'après les conditions du N° 211, la percussion exercée sur l'appareil doit être normale au plan ZOG , et σ percer ce plan en un point A situé 1° sur la perpendiculaire Oy à Oz menée dans le plan ZOG , 2° du même côté que G par rapport à Oz ; 3° à une distance $OA = \frac{K^2}{OG}$. Ces conditions sont donc remplies si on suppose P , OG situé sur la demi droite OG à une distance de O égale à $\frac{K^2}{OG}$, puisque la percussion exercée sa vitesse V .⁽¹⁾

214. - Fusil pendule et canon-pendule.

On peut déterminer la vitesse d'un projectile à la sortie d'une arme à feu par le recul que subit cette arme lorsqu'on lui permet d'osciller librement autour d'un axe horizontal, (soit Oz): l'appareil ainsi constitué porte le nom de fusil-pendule ou de canon-pendule.

Soit m et V la masse et la vitesse du projectile, M la masse de l'arme et de son support, MK^2 son moment d'inertie par rapport à Oz , ω , la vitesse d'oscillation de l'arme immédiatement après le tir. Soit enfin μ la masse d'un élément de la charge de poudre (gazéifiée pendant l'explosion) et u sa vitesse au sortir de la bouche de l'arme. Pendant la durée de l'explosion, toutes les forces autres que les réactions de l'axe Oz sont des forces intérieures. Le moment cinétique, par rapport à Oz , du système arme-projectile-poudre reste donc nul. Nous supposons l'expérience faite dans les conditions de symétrie du N° précédent: le plan xOy est plan de symétrie de l'arme, du projectile, et

(1) En effet, cette percussion est directement opposée à la percussion $m\Delta P$ que subit P : or la vitesse de P après le choc a le même sens qu'avant le choc et est seulement diminuée.

de la charge de poudre ; le projectile est lancé horizontalement dans le plan xoy . Soit encore à la distance au point O de la vitesse du projectile, et par suite de la direction centrale de l'arme. On a (en tenant compte du sens des mouvements):

$$(3) \quad m\alpha V + \alpha \sum \mu u - MK^2 \omega = 0.$$

On peut, en général, confondre MK^2 avec $M\alpha^2$, la masse de l'arme étant considérable par rapport à celle du support ; la quantité $\alpha \omega$, d'autre part, est la vitesse de recul W de l'arme ; l'équation (3) peut donc encore s'écrire :

$$(4) \quad mV + \sum \mu u - MW = 0.$$

On ne connaît pas la quantité $\sum \mu u$: on admet souvent qu'elle a sensiblement la même valeur que si la vitesse v de la masse $m' = \sum \mu$ de toute la charge était (après l'explosion) la moyenne arithmétique $\frac{V+W}{2}$ entre la vitesse V (vitesse du premier élément gazeux qui sort de l'arme derrière le projectile) et la vitesse $-W$ (vitesse du dernier élément gazeux qui reste dans l'arme). On a alors, entre V et W la relation :

$$V[2m + \sum \mu] = W[M + \sum \mu].$$

Quant à W ou ω , il se déduit de l'angle d'écart maximum du pendule balistique formé par l'arme comme au \S précédent.

215. - Percussions appliquées à un solide qui a un point fixe.

Pour calculer les nouvelles vitesses du solide connaissant toutes les percussions qui s'exercent sur lui (autres que la réaction de l'appui O), il me suffit d'appliquer le théorème des moments cinétiques par rapport au point O .

Soit \overline{OR} le moment cinétique du solide S par rapport à O , et \overline{OK} le moment résultant par rapport à O des percussions extérieures [moment où la réaction de l'appui n'intervient pas]. On a :

$$\Delta \cdot \overline{OR} = \overline{OK}.$$

Nous savons, d'autre part, que les projection de \overline{OR}

sur les trois axes mobiles $Oxyz$ [axes principaux d'inertie du solide relatifs à O] sont :

$$Ap, \quad Bq, \quad Cp.$$

Appelons λ, μ, ν les composantes de \overline{OK} suivant ces mêmes axes. L'égalité géométrique précédente se traduit par les égalités :

$$A(p_1 - p_0) = \lambda, \quad B(q_1 - q_0) = \mu, \quad C(r_1 - r_0) = \nu,$$

qui donnent p, q, r , [valeurs de p, q, r après le choc], connaissant p_0, q_0, r_0 [valeurs de p, q, r avant le choc] et λ, μ, ν .

En particulier quand le solide part du repos [$p_0 = q_0 = r_0 = 0$], soit $\bar{\omega}$, la rotation instantanée imprimée au corps par les percussions. On sait que le plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie E au pôle de Poinsot (point où l'axe de rotation $\bar{\omega}$ perce l'ellipsoïde) est perpendiculaire au vecteur (Ap_1, Bq_1, Cr_1) , c'est-à-dire ici au vecteur (λ, μ, ν) ou \overline{OK} . La rotation instantanée imprimée au corps par les percussions a donc comme axe le diamètre de l'ellipsoïde E conjugué du plan perpendiculaire à \overline{OK} . Quand on n'applique au solide qu'une seule percussion PQ , le plan PQO est perpendiculaire à \overline{OK} ; la rotation $\bar{\omega}$ a donc, comme axe, le diamètre conjugué du plan PQO par rapport à l'ellipsoïde d'inertie.

Pour calculer la percussion de réaction qui s'exerce en O , il suffit d'employer le théorème du mouvement du centre de gravité. Si $\bar{\pi}$ désigne la somme géométrique de toutes les percussions appliquées au solide, autres que percussions de réaction \bar{R} exercée par l'appui O , et si \bar{V} est la vitesse du point G , M la masse du solide, on a :

$$\bar{R} = M \bar{\Delta V} - \bar{\pi}$$

216. - Application.

Le solide S étant mobile autour d'un point fixe O , on en fixe brusquement un second point O' . Calculer les nouvelles vitesses du solide.

Le solide, après le choc, étant mobile autour d'un axe fixe, il suffit d'une seule équation indépendante des percussions de réaction pour déterminer la rotation $\bar{\omega}$ du corps autour de la demi droite OO' (après le choc). Or le moment par rapport à la droite OO' des réactions exercées

sur le solide par les appuis fixes O et O' est nul: le moment cinétique de S par rapport à OO' reste donc constant.

Pour écrire cette équation explicitement, prenons comme axe fixe Oz , la droite OO' ; il vient [n° 134]:

$$A(p_1 - p_0) \sin \theta \sin \varphi + B(q_1 - q_0) \sin \theta \cos \varphi + C(p_1 - p_0) \cos \theta = 0.$$

Or, après le choc,

$$p_1 = \omega_1 \sin \theta \sin \varphi, \quad q_1 = \omega_1 \sin \theta \cos \varphi, \quad p_1' = \omega_1 \cos \theta,$$

d'où

$$\omega_1 \left\{ \sin^2 \theta [A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi] + C \cos^2 \theta \right\} = A p_0 \sin \theta \sin \varphi + B q_0 \sin \theta \cos \varphi + C p_0 \cos \theta.$$

Si on voulait calculer les percussions de réaction qui s'exercent en O et O' , on écrirait les deux autres équations des moments, et les trois équations du mouvement du centre de gravité. On aurait ainsi 5 équations pour déterminer 6 inconnues. Les deux percussions de réaction ne sont déterminées qu'à l'addition près de deux percussions égales et directement opposées appliquées en O et O' .

217. - Percussions appliquées à un solide libre.

Soit $O\xi\eta\zeta$ les axes fixes, (ξ, η, ζ) les coordonnées du centre de gravité G , (a, b, c) les composantes (suivant $O\xi, O\eta, O\zeta$) de la somme géométrique Π des percussions appliquées au solide, M sa masse; le théorème du mouvement du centre de gravité donne:

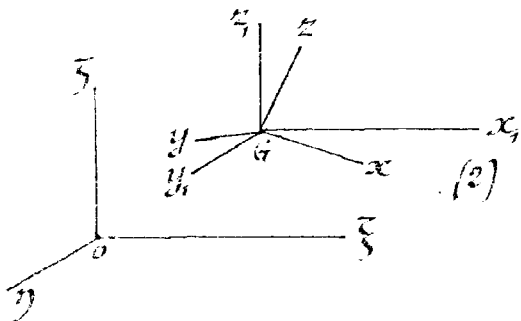
$$(1) \quad M(\xi_1 - \xi_0) = a, \quad M(\eta_1 - \eta_0) = b, \quad M(\zeta_1 - \zeta_0) = c.$$

Soit, d'autre part, (λ, μ, ν) les composantes suivant les axes mobiles Gx, Gy, Gz (axes centraux d'inertie du solide) du vecteur Gh , moment résultant, par rapport à G

des percussions appliquées au solide. Le théorème des moments cinétiques dans le mouvement autour de G donne ici:

$$(2) \quad A(p_1 - p_0) = \lambda, \quad B(q_1 - q_0) = \mu, \quad C(p_1 - p_0) = \nu.$$

Les équations (1) et (2) définissent



les nouvelles vitesses connaissant les vitesses avant le choc et les percussions extérieures qu'il subit.

Les équations, de par leur forme même, entraînent plusieurs conséquences intéressantes.

1° Il est loisible, sans changer leur effet, de remplacer les percussions extérieures par tout autre système de percussions géométriquement équivalent. En un mot, on peut faire subir aux percussions extérieures appliquées à un solide les mêmes transformations qu'aux forces appliquées à un solide, (les remplacer par deux percussions, ou une percussion et un couple, etc.)

2° Si on multiplie par un même facteur p toutes les percussions, sans changer leur direction ni leur sens, toutes les variations $\Delta\xi', \Delta\eta', \Delta\zeta', \Delta p, \Delta q, \Delta r$ sont multipliées par le même facteur p .

3° Si on renverse le sens de toutes les percussions sans en changer l'intensité, toutes les variations $\Delta\xi', \Delta\eta', \Delta\zeta', \Delta p, \Delta q, \Delta r$ changent de signe.

218. - Paramètre de percussion attachée à une ligne d'action donnée dans le solide.

Supposons qu'une seule percussion soit appliquée au solide. Soit Π sa valeur absolue, P son point d'application, Π sa ligne d'action, PQ son sens; considérons la projection W , sur la demi-droite PQ , de la vitesse du point P du solide, projection que nous comptons positivement dans le sens PQ . Je dis que ΔW est positif, ou encore, en posant:

$$(3) \quad \Delta W = W_1 - W_0 = R\Pi,$$

je dis que le coefficient R est positif.

Pour le démontrer, soit PQ un vecteur égal à l'unité porté à partir de P sur la percussion Π soit α, β, γ les projections de PQ sur les axes fixes, et soit (l, m, n) les moments de PQ par rapport aux trois axes centraux d'inertie Gx, Gy, Gz . On a [la notation étant celle du n° précédent]:

$$\lambda = l\Pi, \quad \mu = m\Pi, \quad \nu = n\Pi.$$

Remarquons immédiatement que λ est le moment des deux vecteurs PQ, GR l'un par rapport à l'autre, GR

désignant un segment égal à l'unité porté sur Gx ; si on veut encore, l est le moment de GR par rapport à la demi-droite PQ . D'après cela, considérons une rotation p autour de Gx ; la projection sur la demi droite PQ de la vitesse communiquée à P par cette rotation est représentée en grandeur et signe par pl . Or la vitesse du point P à un instant t quelconque est la somme de la vitesse G et d'une rotation $\bar{\omega}$ ou (p, q, r) autour de G : la projection sur PQ de cette vitesse sera, d'après ce qui précède:

$$W = \alpha \xi + \beta \eta + \gamma \zeta + lp + mq + nr.$$

Calculons maintenant ΔW d'après les équations (1) et (2) du n° précédent où $\alpha = \alpha\pi$, $\beta = \beta\pi$, $\gamma = \gamma\pi$, $l = l\pi$, $m = m\pi$, $n = n\pi$. Il vient aussitôt ($\alpha, \beta, \gamma, l, m$ et n ne changeant pas pendant le choc):

$$\begin{aligned} \Delta W &= \alpha (\xi_1 - \xi_0) + \beta (\eta_1 - \eta_0) + \gamma (\zeta_1 - \zeta_0) + l(p_1 - p_0) + m(q_1 - q_0) \\ &\quad + n(r_1 - r_0) \\ &= \left(\frac{1}{M} + \frac{l^2}{A} + \frac{m^2}{B} + \frac{n^2}{C} \right) \pi. \end{aligned}$$

Le coefficient R coïncide donc avec la quantité $\left(\frac{1}{M} + \frac{l^2}{A} + \frac{m^2}{B} + \frac{n^2}{C} \right)$, quantité positive bien déterminée quand la ligne d'action de Π a une position déterminée par rapport au solide⁽¹⁾. C'est cette quantité que nous appellerons paramètres de percussion de la droite Π .

Quand la droite Π passe par le centre de gravité du solide, R est égal à $\frac{1}{M}$; c'est ce qui a lieu, par exemple, si le solide est une sphère M homogène et Π un de ses diamètres.

219. — Remarque sur la variation de forces vives d'un système soumis à des percussions.

Considérons un système matériel quelconque S , rapporté aux axes fixes $Oxyz$; soit P un de ses éléments de

⁽¹⁾ Il est facile de voir, avant tout calcul, que le coefficient R ne dépend que de la position de la droite Π par rapport au solide. Toute la difficulté est de démontrer qu'il est positif.

masse m , (\bar{w}) ou $(\bar{w}_x, \bar{w}_y, \bar{w}_z)$ la percussion totale qui lui est appliquée; on a pour chaque point P :

$$(4) \quad \begin{cases} m \Delta x' = m(x'_1 - x'_0) = \bar{w}_x \\ m \Delta y' = m(y'_1 - y'_0) = \bar{w}_y \\ m \Delta z' = m(z'_1 - z'_0) = \bar{w}_z \end{cases};$$

multiplions la première équation (4) par $x'_1 + x'_0$, la seconde par $y'_1 + y'_0$, la 3^e par $z'_1 + z'_0$, et ajoutons membre à membre. Il vient:

$$m(v_1^2 - v_0^2) = \bar{w}_x(x'_1 + x'_0) + \bar{w}_y(y'_1 + y'_0) + \bar{w}_z(z'_1 + z'_0),$$

et si nous faisons la somme pour tous les éléments du système:

$$(5) \quad 2T_1 - 2T_0 = \sum \bar{w}_x(x'_1 + x'_0) + \bar{w}_y(y'_1 + y'_0) + \bar{w}_z(z'_1 + z'_0) = \mathcal{T},$$

\mathcal{T} dt représentant le travail qu'effectueraient toutes les percussions (intérieures, extérieures, de contact, etc) dans le temps dt si chaque point du système avait comme vitesse la somme géométrique de la vitesse initiale et de sa vitesse finale.⁽¹⁾

Cette équation s'applique notamment à un solide S ; mais dans ce cas les réactions intérieures ne donnent rien dans le second membre.

Si S reste en contact avec une surface fixe parfaitement lisse Σ , la percussion de réaction de Σ sur S est normale à S et à Σ au point de contact P , et comme la vitesse de l'élément P de S est tangente commune à S et Σ avant et après le choc, cette réaction ne donne rien dans l'équation (5). Si S est soumis à plusieurs liaisons de cette nature, s'il a un point ou plusieurs points fixes, etc., les percussions de réaction n'interviennent pas dans l'équation (5).

Le solide étant libre ou assujéti à de telles liaisons, supposons qu'une seule percussion donnée Π lui soit appliquée en P : la quantité \mathcal{T} est alors égale à

$$\Pi (W_0 + W_1),$$

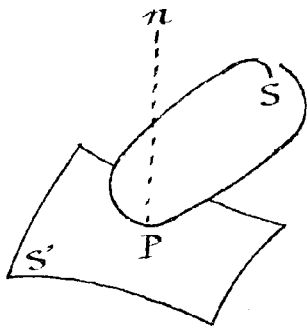
W désignant, comme au n^o précédent, la projection sur la demi-droite Π de la vitesse de P . L'égalité (5) peut alors s'écrire:

$$(6) \quad 2T_1 - 2T_0 = \Pi (W_0 + W_1).$$

⁽¹⁾ On peut dire que \mathcal{T} dt est le travail qu'effectueraient les percussions regardées comme des forces 1^o dans le déplacement vrai de S entre les instants t_0 et t_1 (t_0 et t_1 période du choc), 2^o dans le déplacement vrai de S entre les instants t_1 et $t_1 + dt$ quand le système est solide, les percussions intérieures, deux à deux égales et de sens contraire, ne donnent rien dans \mathcal{T} .

220. - Choc de deux solides. - Considérons maintenant deux solides libres parfaitement lisses qui se choquent à l'instant t . Nous pouvons écrire, pour chacun d'eux, les six équations (1) et (2) du N° 217, à condition d'introduire dans les seconds membres l'indéterminée N , intensité (inconnue) de la percussion que les deux corps exercent l'un sur l'autre. Les nouvelles vitesses dépendent de 12 indéterminées (six pour chaque corps): les 12 équations que nous savons écrire portent donc sur 13 inconnues. On ne peut calculer les nouvelles vitesses sans une hypothèse supplémentaire faite sur la percussion N ou sur son effet.

Soit \vec{v} la vitesse (à l'instant t) du point P du premier solide S qui vient heurter le solide S' ; soit \vec{v}' la vitesse du point P' de S' qui se trouve en contact avec P . Je considère la vitesse relative $\vec{v}_p = \vec{v} - \vec{v}'$ de P par rapport à P' , et je représente par W la projection de \vec{v}_p sur la demi-droite Pn normale aux deux corps et dirigée vers l'extérieur du solide S' : avant le choc, la valeur W_0 de W est négative, c'est-à-dire que S tend à pénétrer dans S' , autrement les deux corps se sépareraient ou glisseraient l'un sur l'autre sans se heurter. Pendant le choc, S exerce sur S' une percussion dirigée selon Pn . Après le choc, W a une valeur positive ou nulle W_1 . L'expérience montre que W_1 est au plus égal à la valeur absolue de W_0 . Les deux corps sont dits parfaitement élastiques si on a:



$$W_1 = -W_0,$$

parfaitement mous si $W_1 = 0$; enfin, dans les cas intermédiaires, on a

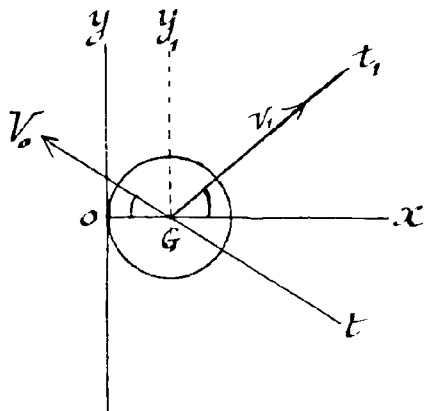
$$W_1 = -eW_0 \quad (0 < e < 1),$$

et le coefficient e dépend de la nature des substances qui se choquent.

Si on connaît ce coefficient e , [en particulier, si les deux corps sont ou parfaitement élastiques ou parfaitement mous], les 12 équations qu'on sait écrire permettent de calculer les nouvelles vitesses après le choc, connaissant les vitesses avant le choc.

221. - Premier exemple. (Problème du billard). Une sphère homogène et pesante glissant sans frottement sur un plan horizontal vient heurter une bande verticale parfaitement lisse et parfaitement élastique. Calculer l'effet du choc.

La percussion exercée par la bande est normale à la bande et par suite horizontale; la percussion exercée par le plan horizontal est nulle, car elle est égale à la variation de la composante verticale de la vitesse V du centre G de la bille (vitesse qui est horizontale avant et après le choc). La seule percussion que subit la bille passant par son centre de gravité, sa rotation instantanée n'est modifiée en rien: p, q, P gardent les mêmes valeurs. La composante parallèle à la bande de la vitesse V de G ne subit, non plus, aucune variation: la composante de V normale à la bande change de sens en gardant la même valeur; car la vitesse du point de la bille en contact avec la bande a même composante normale à la bande que V .



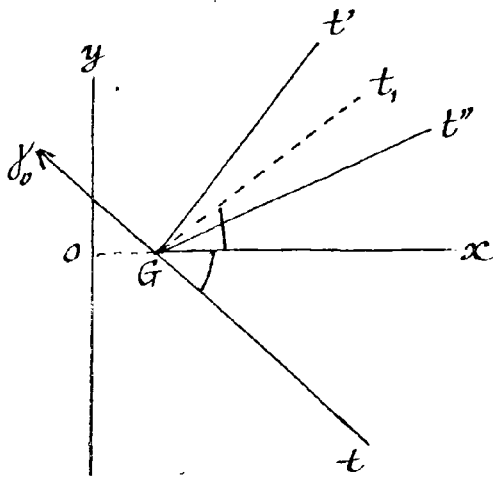
Soit xOy le plan horizontal qui contient le centre G de la bille, Oy la section de la bande par ce plan, Ox la perpendiculaire à la bande menée par le point de contact de la bille et de la bande. Ses deux demi-droites \bar{V}_0 et \bar{V}_1 ont comme bissectrice la droite Gy , parallèle à Oy . La trajectoire de G est celle d'un rayon lumineux tGt , se réfléchissant sur le miroir Gy , suivant les lois classiques de la réflexion.

Admettons maintenant que la bande ne soit pas parfaitement lisse. Quel sera l'effet du choc dans le cas où la bille serait animée d'un mouvement de translation en même temps que d'une rotation très rapide autour d'un axe vertical.

La force due au frottement (opposée à la vitesse de glissement ^{de la bille sur la bande}) sera d'abord horizontale et on peut admettre par raison de symétrie⁽¹⁾ que la vitesse de glissement et

(1) C'est ce qu'on vérifierait aussitôt en étudiant le mouvement pendant la durée du choc d'après les lois ordinaires du frottement de glissement.

par suite la force de frottement restera horizontale pendant la durée du choc.



Soit V_x, V_y les composantes de V suivant ox et oy ; il est loisible de supposer $V_y > 0$ avant le choc. Deux cas sont à distinguer : 1° ou bien la rotation ω de la bille a lieu dans le sens yox , ($\omega < 0$); pour le point P de la bille qui est en O , la vitesse due à la rotation s'ajoute à V_y , et la percussion de frottement est directement opposée à V_y ; 2° ou bien, au contraire, la rotation a lieu dans le sens xoy ($\omega > 0$);

la vitesse de P due à la rotation l'emporte sur la vitesse V_y de sens contraire et la percussion du frottement a le sens de V_y .

Si N et F sont les composantes de la percussion normale et tangente à la bande, on a : $F = fN$, (loi de Coulomb).

Soit, à l'instant du choc, $V_x^0 = -a$, $V_y^0 = b$.

On peut écrire dans tous les cas⁽¹⁾ (M désignant la masse de la bille) :

$2Ma = N$, car $V_x' = -V_x^0 = a$, quand la bille et la bande sont parfaitement élastiques. On a ensuite :

$M(V_y' - b) = F = fN = 2fMa$, dans le 2^e cas ($\omega > 0$); c'est-à-dire :

$$V_y' = b + 2fa$$

et

$M(V_y' - b) = -F = -fN = -2fMa$ dans le 1^{er} cas ($\omega < 0$), c'est-à-dire :

$$V_y' = b - 2fa.$$

Dans le cas $\omega > 0$ la trajectoire de G est la ligne brisée tbt' qui s'écarte de Gx après le choc, par rapport à Gt_1 ; dans le cas $\omega < 0$, la trajectoire de G est tGt'' qui se rapproche de Gx après le choc par rapport à Gt_1 ⁽¹⁾.

(1) Le raisonnement précédent suppose toutefois que, pendant le choc, la vitesse de glissement ne s'annule pas, condition qui sera toujours remplie si ω est suffisamment grand. Si la vitesse de glissement s'annulait pendant le choc, la discussion serait plus délicate.

222. - Deuxième exemple. - Choc direct de deux sphères.
 Deux sphères homogènes m et m' animés d'un mouvement de translation rectiligne dirigé suivant la ligne de leurs centres se heurtent à un instant. Calculer l'effet du choc sachant que les deux sphères sont parfaitement lisses et connaissant le coefficient d'élasticité e des deux sphères.

La percussion que chaque sphère reçoit de l'autre passe par son centre qui est en même temps son centre de gravité : La rotation instantanée n'est donc pas modifiée ; nulle avant le choc elle reste nulle après le choc.

Soit maintenant G et G' les centres des deux sphères ; les composantes des vitesses de G et G' normales à GG' ne subissent non plus aucune variation, et, par suite, restent nulles. D'autre part, appelons V la vitesse de G comptée positivement dans le sens $G'G$, et de même V' la vitesse de G' comptée positivement dans le sens GG' ; si N est la valeur absolue de la percussion que les deux sphères exercent l'une sur l'autre, on a :

$$(1) \quad m(V_1 - V_0) = m'(V'_1 - V'_0) = N.$$

De plus, d'après la définition du coefficient e ,

$$(2) \quad (V_1 + V'_1) + e(V_0 + V'_0) = 0.$$

D'où les valeurs de V_1 et V'_1 .

Remarque sur la perte de force vive. - Soit Γ le centre de gravité du système formé par les deux sphères ; menons par Γ des axes $\Gamma x, \Gamma y, \Gamma z$, parallèles aux axes fixes pendant le choc, la vitesse du point Γ ne change pas (les percussions étant intérieures).⁽¹⁾

Il suit de là, d'après le théorème de Koenig, que la variation de forces-vives causée par le choc est égale à la variation de forces-vives dans le mouvement du système rapporté aux axes $\Gamma x, \Gamma y, \Gamma z$. Remplaçons les axes fixes par ces nouveaux axes en gardant la même notation : comme ces axes ne subissent par rapport aux premiers aucune variation brusque de

⁽¹⁾ C'est là d'ailleurs le sens de l'équation (1).

vitesse, les équations (1) et (2) subsistent [cf. 206], mais nous savons de plus (Γ étant le centre de gravité du système) qu'on a :

$$mV_1 = m'V_1', \quad mV_0 = m'V_0',$$

équations qui, combinées avec (2), donnent :

$$V_1 = eV_0, \quad V_1' = eV_0',$$

d'où

$$mV_1^2 - mV_0^2 + m'V_1'^2 - m'V_0'^2 = (e^2 - 1)[mV_0^2 + m'V_0'^2].$$

La force-vive perdue par le choc est donc égale à la fraction $(1 - e^2)$ de la force-vive que possèdent les deux sphères avant le choc dans leur mouvement autour de leur centre de gravité Γ . On voit que cette force-vive perdue est nulle si $e = 1$, c'est-à-dire si les deux sphères sont parfaitement élastiques; elle est maxima si $e = 0$, c'est-à-dire si les deux corps sont parfaitement mous.⁽¹⁾

On peut dire encore que la perte de force-vive est la fraction $(1 - e^2)$ de la force-vive qui disparaîtrait dans les mêmes conditions si les deux corps étaient parfaitement mous.

Le même calcul et les mêmes conclusions s'appliquent au choc de deux corps de forme quelconque si la normale commune aux deux corps au point du choc passe par les deux centres de gravité et si, de plus, le mouvement de chacun des deux corps avant le choc est une simple translation parallèle à cette normale.

Nous allons d'ailleurs étendre au cas d'un choc quelconque les résultats précédents sur la force-vive perdue.

223. - Conservation de la force-vive dans le choc entre deux corps élastiques.

Soit S et S' deux solides quelconques, qui se choquent à l'instant t ; soit M la normale commune menée au point de contact P en dehors de S , et w la projection sur M de la vitesse du point P de S . On a,

(1) On serait arrivé à ce même résultat par un calcul tout-élémentaire en tirant V_1 et V_1' des quantités (1) et (2) et calculant la nouvelle force-vive.

si N désigne la valeur absolue de la percussion exercée par S' sur S et T la demi-force-vive de S :

$$(3) \quad 2T_1 - 2T_0 = N [w_1 + w_0].$$

On aurait de même, en appelant T'' la demi-force vive de S' et w' la projection sur Pn de la vitesse du point P de S' en contact avec P :

$$(4) \quad 2T''_1 - 2T''_0 = -N [w'_1 + w'_0];$$

le changement de signe tient à ce que Pn est directement opposé à la réaction de S sur S' . Si on ajoute membre à membre les deux égalités précédentes, on trouve:

$$(5) \quad 2(T_1 + T''_1) - 2(T_0 + T''_0) = N [w_1 - w'_1 + w_0 - w'_0].$$

Or considérons la vitesse relative \bar{v}_r de P par rapport à P et la projection de \bar{v}_r sur Pn , soit W ; on a:

$$W = w - w'$$

et l'égalité (5) peut s'écrire:

$$(6) \quad 2(T_1 + T''_1) - 2(T_0 + T''_0) = N [W_1 + W_0].$$

Cette formule est vraie (N° 219) même si les deux solides, au lieu d'être libres, sont assujettis à des liaisons permanentes sans frottement et indépendantes du temps.

Si les deux corps sont parfaitement élastiques, W est égal à $-W_0$, et la perte de force-vive est nulle. Inversement, pour qu'il n'y ait pas de force-vive perdue, il faut que $[W_1 + W_0]$ soit nul.

On voit donc que les deux définitions suivantes des corps parfaitement élastiques sont équivalentes:

1^{ère} Définition. - La composante normale W de la vitesse relative des deux éléments matériels en contact change de sens pendant le choc sans changer de valeur absolue.

2^e Définition. - La force vive du système formé par les deux corps n'est pas modifiée par le choc.

224. - Force vive perdue dans le choc entre deux corps quelconques.

Quand les deux corps ne sont pas parfaitement élastiques, W_1 [quantité positive ou nulle] est toujours [N° 220] inférieure à $-W_0$ [$W_0 < 0$]; la quantité $W_1 + W_0$ est négative; le choc entraîne donc une perte de force vive. Autrement dit, la force vive du système ne peut que diminuer du fait du choc.

Calculons, avec plus de précision, cette perte de force vive. Pour cela, recourons à l'égalité du N° 218.

$$w_1 - w_0 = \mathcal{R}N, \quad \left[\mathcal{R} = \frac{1}{M} + \frac{l^2}{A} + \frac{m^2}{B} + \frac{\pi^2}{C} > 0 \right].$$

On a, de même, pour le solide S' :

$$w'_1 - w'_0 = -\mathcal{R}'N, \quad (\mathcal{R}' > 0),$$

le changement de signe tenant toujours à ce que le sens FN est directement opposé à la réaction de S sur S' .

On déduit de là :

$$(7) \quad w_1 - w'_1 - (w_0 - w'_0) = W_1 - W_0 = N [\mathcal{R} + \mathcal{R}'].$$

Remplaçons, dans (6), N par sa valeur tirée de (7); il vient :

$$(8) \quad 2(T_1 + T_1'') - 2(T_0 + T_0'') \frac{1}{\mathcal{R} + \mathcal{R}'} [W_1^2 - W_0^2] = \frac{W_0^2(e^2 - 1)}{\mathcal{R} + \mathcal{R}'}$$

On voit que la force vive perdue dans le cas général, est égale à la fraction $(1 - e^2)$ de la force vive qui disparaîtrait, toutes choses égales d'ailleurs, si les deux solides étaient parfaitement mous.

Dans le cas particulier où la normale commune passe par les deux centres de gravité, on a : $\mathcal{R} = \frac{1}{M}$, $\mathcal{R}' = \frac{1}{M'}$, d'où

$$(9) \quad 2(T_1 + T_1'') - 2(T_0 + T_0'') = \frac{M M'}{M + M'} (e^2 - 1) W_0^2.$$

On vérifie immédiatement la concordance de cette formule avec la formule relative au choc direct de deux sphères.

225. - Applications: clou et marteau; battage des pieux de fondation. - Soit m la masse du marteau, m'

celle du clou qu'on enfonce dans un mur à coup de marteau. On peut admettre que la normale commune au point d du choc passe par le centre de gravité des deux corps: le choc communique au clou (qui était immobile) une certaine vitesse V_1' , qui, si les deux corps sont parfaitement mous, est égale à celle du marteau après le choc. Le clou, accompagné par le marteau s'enfonce ensuite dans le mur, et le système s'arrête. Dans cette dernière partie du mouvement, le théorème des forces vives donne :

$$(m+m') V_1'^2 + T = 0,$$

T désignant le travail des réactions du mur qui s'opposent à la pénétration du clou. Le clou s'enfoncera donc d'autant plus profondément que la force vive du système (clou-marteau) sera plus grande, c'est-à-dire qu'il y aura moins de force vive perdue dans le choc. La force vive du système avant le choc est mV_0^2 ; la force vive perdue⁽¹⁾ (dans ce cas où $e=0$) est : $mV_0^2 \frac{m'}{m+m'}$. Le rapport de la force vive perdue à la force initiale est : $\frac{m'}{m+m'} = \frac{1}{\frac{m}{m'}+1}$. Le rendement, c'est-à-dire

le rapport entre la force vive dépensée utilement et la force vive donnée est : $1 - \frac{1}{\frac{m}{m'}+1} = \frac{\frac{m}{m'}}{1+\frac{m}{m'}}$: il est d'autant meilleur que $\frac{m}{m'}$ est plus

grand. Pour une même force vive mV_0^2 imprimée au marteau, il y a donc avantage à prendre un marteau massif animé d'une faible vitesse, plutôt qu'un marteau léger animé d'une grande vitesse.

La même discussion s'applique sans modification au battage des pieux de fondation qu'on enfonce par la chute d'un mouton dans un sol peu résistant. Le pieu joue le rôle du clou, et le mouton celui du marteau.

225. - Les percussions et le gyroscope. - La théorie des percussions suppose essentiellement (et c'est là une condition qu'il ne faut jamais perdre de vue) que les points du système ne subissent, pendant la durée 0

(1) Cette force vive est employée à échauffer et à déformer le clou et le marteau.

de la percussion qu'un déplacement négligeable. Si notamment les forces appliquées au système entre les deux instants très voisins t_0, t_1 sont de l'ordre de $\frac{1}{(t_1 - t_0)^2}$, les vitesses deviennent elles-mêmes très grandes, de l'ordre de $\frac{1}{t_1 - t_0}$ et le déplacement de S dans l'intervalle de temps $t_1 - t_0$

t_0, t_1 est sensible; la théorie classique des percussions ne s'applique plus.

Il en va de même si le système étant soumis à des forces de l'ordre de $\frac{1}{t_1 - t_0}$ est animé de vitesses considérables, du même ordre. Par exemple considérons un gyroscope S fixé par son centre de gravité G et animé d'une très grande vitesse de rotation ω_0 autour de son axe GZ: appliquons au gyroscope en un point P de GZ une force considérable Φ constante en grandeur, direction et de sens; nous savons (N° 58) qu'au bout d'un temps 2τ très sensiblement égal à $\frac{2\pi A}{C\omega_0}$, les vecteurs $\overline{G\omega}$, \overline{GR} et \overline{GZ} coïncident à nouveau $\overline{C\omega_0}$ et que P a décrit autour de GZ (parallèle à Φ) un petit arc de cercle sensiblement égal à $\frac{\Phi l \sin \theta}{C\omega_0} \times \frac{2\pi A}{C\omega_0}$ ($\theta = \angle \overline{GZ}, l = GP$). Ceci rappelé supposons que Φ soit de l'ordre de ω et soit appliquée à S pendant le temps 2τ . Après cette percussion, la rotation instantanée de S a encore lieu autour de GZ qui s'est déplacé légèrement dans l'espace. — Appliquons au contraire la théorie des percussions: nous arrivons à la conclusion que GZ est resté sensiblement immobile et que \overline{GR} s'est accru géométriquement d'un vecteur égal au moment par rapport à G de la percussion $2\tau\Phi = \Pi$; après la percussion, la rotation instantanée aurait une composante ω , normale à GZ et égale à $\frac{\Pi \sin \theta}{C}$.

La contradiction provient de ce que la théorie des percussions n'est plus applicable, les éléments de S subissant un déplacement notable pendant le temps 2τ . Cette théorie ne s'applique que si la durée $t_1 - t_0$ de la percussion est très petite devant $\frac{1}{\omega}$, soit $t_1 - t_0 = \frac{\varepsilon}{\omega}$, la force qui engendre la percussion étant de l'ordre de $\frac{\omega}{\varepsilon}$.

Extension à la théorie des percussions du principe de d'Alembert et des équations de Lagrange.

226. — Le principe de d'Alembert et les percussions.
Soit S un système à K degrés de liberté, dont les liaisons sont bilatérales, holonomes et parfaites. Pendant son mouvement, le système vérifie [N° 154] l'équation :

$$(1) \quad \sum m \left(x'' \frac{\partial x}{\partial q_1} + y'' \frac{\partial y}{\partial q_1} + z'' \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) = \sum \left(X' \frac{\partial x}{\partial q_1} + Y' \frac{\partial y}{\partial q_1} + Z' \frac{\partial z}{\partial q_1} \right)$$

et $(K-1)$ autres équations analogues. A chaque instant t , les deux membres de l'équation (1) ont des valeurs déterminées, et on peut écrire en intégrant ces deux membres entre t_0 et t_1 :

$$(2) \quad \sum \int_{t_0}^{t_1} m \left(x'' \frac{\partial x}{\partial q_1} + y'' \frac{\partial y}{\partial q_1} + z'' \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) dt = \sum \int_{t_0}^{t_1} \left(X' \frac{\partial x}{\partial q_1} + Y' \frac{\partial y}{\partial q_1} + Z' \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) dt.$$

Supposons maintenant que t_0 et t_1 soient deux instants très rapprochés entre lesquels les forces données X', Y', Z' sont très grandes, de l'ordre de $\frac{1}{t_1 - t_0}$; pendant cet intervalle de temps inappréciable, q_1, \dots, q_K ne varient pas sensiblement, non plus par suite que les $\frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial y}{\partial q_1}, \frac{\partial z}{\partial q_1}$, et on peut écrire l'équat.^{on} (2) ainsi :

$$(3) \quad \sum m \left\{ (x' - x'_0) \frac{\partial x}{\partial q_1} + (y' - y'_0) \frac{\partial y}{\partial q_1} + (z' - z'_0) \frac{\partial z}{\partial q_1} \right\} = \sum \left(a \frac{\partial x}{\partial q_1} + b \frac{\partial y}{\partial q_1} + c \frac{\partial z}{\partial q_1} \right),$$

a, b, c désignant respectivement

$\int_{t_0}^{t_1} X' dt, \int_{t_0}^{t_1} Y' dt, \int_{t_0}^{t_1} Z' dt$, c'est-à-dire les composantes

de la percussion engendrée par la force donnée \vec{F}' .

On donne souvent le nom de vitesse perdue de l'élément P au vecteur $\vec{v}_0 - \vec{v}_1$, et le nom de quantité de mouvement perdue au vecteur $m(\vec{v}_0 - \vec{v}_1)$. Ce dernier vecteur joue dans la théorie des percussions le même rôle que la force d'inertie dans la mécanique ordinaire: on pourrait l'appeler percussion d'inertie de P . Ceci posé, considérons le déplacement virtuel δq_1 [déplacement compatible]

avec les liaisons à l'instant t de la percussion), et le travail correspondant des percussions d'inertie et des percussions données (en regardant ces vecteurs comme des forces appliquées aux éléments P de S); l'égalité (3) exprime que la somme de ces travaux est nulle. Comme ceci est vrai pour les déplacements $\delta q_1, \dots, \delta q_k$, on voit qu'on peut énoncer ce principe, qui n'est autre que le principe de d'Alembert étendu aux percussions.

Soit S un système à liaisons bilatérales, holonomes et parfaites auquel des percussions sont appliquées à l'instant t : dans tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons à l'instant t , le travail total des percussions d'inertie $m(\bar{v}_0 - \bar{v}_1)$ et des percussions données $\bar{\Phi}$ est nul.

227. - D'autre part, la percussion totale $\bar{\Phi}$ que subit P est la résultante de la percussion donnée $\bar{\Phi}$ et de la percussion de liaison, soit \bar{p} , (engendrée par la réaction totale \bar{R} qui s'exerce sur P): dans tout déplacement infinitésimal de S , quel qu'il soit, le travail total des percussions d'inertie, des percussions données et des percussions de liaison est nul.⁽¹⁾ Si on rapproche ce résultat du précédent, on voit que, dans tout déplacement virtuel de S compatible avec les liaisons à l'instant t , le travail des percussions de liaison est nul.

Quand les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons à l'instant t de la percussion comprennent une translation, ou une rotation, ou un déplacement hélicoïdal d'ensemble, le principe de d'Alembert ainsi généralisé permet d'étendre aussitôt aux percussions les remarques des N.º 158-162.

228. - Les équations de Lagrange et les percussions. L'équation (1) peut s'écrire :

$$(1)^{bis} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \text{ où } Q_i = \Sigma \left(X' \frac{\partial x}{\partial q_i}, Y' \frac{\partial y}{\partial q_i}, Z' \frac{\partial z}{\partial q_i} \right);$$

(1) En effet, on a: $m(\bar{v}_0 - \bar{v}_1) + \bar{\Phi} + \bar{p} = 0$.

et en intégrant encore entre t_0 et t_1 les deux membres, il vient :

$$\Delta \left(\frac{\partial T}{\partial q'_i} \right) - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial q'_i} dt = \pi_i, \text{ avec } \pi_i = \Sigma \left(a \frac{dx}{dq'_i} + b \frac{dy}{dq'_i} + c \frac{dz}{dq'_i} \right).$$

Dans cette égalité, $\Delta \frac{\partial T}{\partial q'_i}$ représente la différence

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i} \right)' - \left(\frac{\partial T}{\partial q'_i} \right)^\circ, \text{ où } \left(\frac{\partial T}{\partial q'_i} \right)^\circ \text{ et } \left(\frac{\partial T}{\partial q'_i} \right)' \text{ sont les valeurs de } \frac{\partial T}{\partial q'_i}$$

au commencement et à la fin du choc; d'autre part, $\frac{\partial T}{\partial q'_i}$ reste fini entre t_0 et t_1 , et l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial q'_i} dt \text{ est négligeable; d'où l'égalité:}$$

$$(4) \quad \Delta \cdot \frac{\partial T}{\partial q'_i} = \pi_i, \quad \left\{ \pi_i = \Sigma \left(a \frac{dx}{dq'_i} + b \frac{dy}{dq'_i} + c \frac{dz}{dq'_i} \right) \right\}$$

et $(K-1)$ égalités analogues.

Les K équations ainsi obtenues sont les équations de Lagrange dans la théorie des percussions. Elles sont linéaires et homogènes en $\Delta q'_1, \dots, \Delta q'_K$, et elles font connaître les nouvelles vitesses connaissant les vitesses avant le choc et les percussions données.

229. - Cas où la position de S n'est pas définie à l'aide du nombre minimum de paramètres.

La notation étant la même qu'au n° 187, et les liaisons étant toujours supposées parfaites, on voit comme au n° 187 que les équations (4) doivent être remplacées par les suivantes :

$$\Delta \frac{\partial T}{\partial q'_1} = \pi_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q'_1} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial q'_1}$$

$$\Delta \frac{\partial T}{\partial q'_K} = \pi_K + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q'_K} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial q'_K},$$

qui jointes aux p équations de liaisons $f_1 = 0, \dots, f_p = 0$, définissent les nouvelles vitesses et les λ .

On peut étendre ces équations au cas où les liaisons sont affectées de frottement, et elles fournissent encore un nombre suffisant de relations quand les liaisons matérielles ne sont pas surabondantes.

Enfin, quand les liaisons ne sont pas holonomes, mais sont encore parfaites, il suffit de raisonner comme au n° 193 en gardant la même notation pour voir que les équations (4) sont remplacées par les suivantes :

$$\Delta \frac{\partial T}{\partial q_i} = \pi_i + \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_p l_i,$$

$$\Delta \frac{\partial T}{\partial q_k} = \pi_k + \lambda_1 \alpha_k + \dots + \lambda_p l_k,$$

qui, jointes aux p équations de liaison non holonomes, définissent les nouvelles vitesses.

En définitive, la théorie précédente permet de calculer les nouvelles vitesses quand toutes les liaisons sont bilatérales et parfaites et quand toutes les percussions, autres que les percussions de réaction, sont données.

230. — Il en va tout autrement quand les liaisons sont unilatérales. Considérons, par exemple, deux billes homogènes, pesantes, identiques, reposant sans vitesse sur un plan horizontal, et tangentes. Appliquons à l'une des billes O une percussion Φ de sens OO' [O et O' désignant les centres des deux billes]. Si les deux billes ne pouvaient se séparer (liaison bilatérale), leur mouvement après la percussion serait facile à calculer : elles seraient animées de la même translation de sens OO' et égale à $\frac{\Phi}{2M}$, (M masse d'une des sphères). En réalité, ce mouvement sera celui des deux sphères quand elles sont parfaitement molles ; dans tous les autres cas, elles se séparent. Si elles sont parfaitement élastiques, O reste immobile⁽¹⁾ et O' est animée de la vitesse $V'_1 = \frac{\Phi}{M}$ de sens OO' .

Des remarques analogues s'appliquent a fortiori si la percussion Φ n'est plus donnée, mais est produite par le choc d'une autre sphère O'' qui vient heurter la sphère O .

(1) En effet, on peut analyser le phénomène ainsi : la percussion Φ donne à O la vitesse $V_0 = \frac{\Phi}{M}$; mais O vient aussitôt heurter O' et (les deux corps étant parfaitement élastiques) on a, après le choc :

$V'_1 - V_1 = V_0$. D'autre part, le théorème du mouvement du centre de gravité donne : $V'_1 + V_1 = V_0$, d'où $V_1 = 0$, $V'_1 = V_0$.

Les conditions initiales après le choc dépendent de l'élasticité de chacune des trois sphères.

C'est seulement dans le cas où les liaisons qui existent au moment du choc persistent après le choc qu'on peut calculer les nouvelles vitesses sans faire d'hypothèses sur la matière des corps du système. Nous allons insister sur ce cas important.

231. - Liaisons persistantes et non persistantes.

D'une façon précise, les liaisons qui existent au moment du choc peuvent être rangées en quatre catégories qui s'excluent :

- 1° Liaison existant avant, pendant et après le choc;
- 2° Liaison existant pendant et après, mais non avant;
- 3° Liaison existant avant et pendant, mais non après;
- 4° Liaison existant seulement pendant le choc, mais n'existant ni avant ni après (liaisons instantanées).

Les liaisons des deux premières catégories sont persistantes; celles des deux dernières catégories ne le sont pas.

Par exemple, dans le pendule balistique, le pendule est mobile autour d'un axe fixe : cette liaison est de la première catégorie. Le projectile, d'abord indépendant du mobile, vient brusquement faire corps avec lui : on a ainsi une nouvelle liaison, dont la brusque réalisation produit le choc et qui existe pendant et après le choc, mais non avant (2^e catégorie). Le déplacement réel qui suit le choc est, dans ce cas, compatible avec toutes les liaisons qui ont lieu au moment du choc.

Le choc de deux corps élastiques est un exemple de liaisons instantanées (4^e catégorie). Comme exemple rentrant dans la 3^e catégorie, imaginons deux points reliés par un fil inextensible et lancés en l'air. Admettons qu'on saisisse un des points, qu'on le fixe brusquement et qu'à ce moment le fil se brise : on a introduit une liaison de la seconde catégorie; en même temps, une liaison existant avant le choc n'existe plus (liaison de la 3^e catégorie)

231. - Remarque.

Quand toutes les liaisons qui existent pendant le choc sont parfaites, le travail virtuel des percussions de

liaisons est nul pour chaque déplacement virtuel compatible avec toutes les liaisons ⁽¹⁾ à l'instant t_0 du choc.

232. - Théorème de Carnot. - Considérons un système S à liaisons parfaites. Le système étant animé d'un mouvement donné, supposons qu'à l'instant t_0 , on introduise brusquement dans le système de nouvelles liaisons parfaites: il se produit alors, en général, des percussions.

La vitesse de l'élément P qui était V_0 , devient V_1 . Toutes les percussions proviennent des liaisons ou antérieures au choc ou brusquement introduites; il n'y a pas de percussions données, et puisque toutes les liaisons sont parfaites, le principe de d'Alembert donne:

$$(1) \quad \sum m \{ (x'_1 - x'_0) \delta x + (y'_1 - y'_0) \delta y + (z'_1 - z'_0) \delta z \} = 0,$$

pour tout déplacement virtuel compatible avec toutes les liaisons à l'instant t_0 du choc.

Le théorème de Carnot est alors le suivant:

Quand toutes les liaisons [antérieures ou brusquement introduites] subsistent après le choc⁽²⁾ et quand, de plus, ces liaisons sont indépendantes du temps et parfaites, la force vive perdue est égale à la force vive que posséderait le système si chaque point était animé de la vitesse qu'il a perdue.

En effet, les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons à l'instant t_0 , comprennent notamment le déplacement réel qui suit immédiatement le choc, puisque les percussions persistent et sont indépendantes du temps. Or, dans ce déplacement réel, on a:

$$\delta x = x'_1 dt, \quad \delta y = y'_1 dt, \quad \delta z = z'_1 dt,$$

et l'équation (1) appliquée à ce déplacement, donne:

$$(2) \quad \sum m \{ (x'_1 - x'_0) x'_1 + (y'_1 - y'_0) y'_1 + (z'_1 - z'_0) z'_1 \} = 0.$$

Or on a:

(1) J'entends pour chaque déplacement virtuel bilatéral, c'est-à-dire pour tout déplacement virtuel où on regarde les liaisons existantes au moment du choc comme bilatérales.

(2) C'est-à-dire subsistent comme liaisons bilatérales.

$$(3) \quad \begin{cases} V_1^2 = x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 ; \\ V_0^2 = x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2 ; \end{cases}$$

la vitesse perdue [N° 226], soit W , vérifie l'équation

$$(4) \quad W^2 = (x_0' - x_1')^2 + (y_0' - y_1')^2 + (z_0' - z_1')^2.$$

Des égalités (2) et (3), on déduit aussitôt :

$$V_1^2 - V_0^2 + W^2 = 2 \left\{ (x_1' - x_0')x_1' + (y_1' - y_0')y_1' + (z_1' - z_0')z_1' \right\}$$

L'équation (2) peut donc s'écrire :

$$\sum m(V_1^2 - V_0^2 + W^2) = 0,$$

ou

$$\sum mV_0^2 - \sum mV_1^2 = \sum mW^2$$

La force vive $\sum mW^2$ s'appelle la force vive due aux vitesses perdues. C. q. f. d.

233. - Extension du théorème de Carnot au cas où le système est soumis à des percussions données.

Les liaisons satisfaisant à toutes les conditions du N° précédent, supposons qu'à l'instant t_0 où de nouvelles liaisons sont brusquement introduites, le système soit soumis (en outre des percussions de liaison) à certaines percussions données, $\bar{\Phi}_1$ ou $(a_1, b_1, c_1), \dots, \bar{\Phi}_n$ ou (a_n, b_n, c_n) . Le principe de d'Alembert donne alors :

$$\begin{aligned} & \sum m \left\{ (x_1' - x_0') \delta x + (y_1' - y_0') \delta y + (z_1' - z_0') \delta z \right\} \\ & = \sum (a \delta x + b \delta y + c \delta z) \end{aligned}$$

pour tous déplacements virtuel compatible avec les liaisons à l'instant t_0 . En appliquant cette équation au déplacement $dx = x_1' dt$, $dy = y_1' dt$, $dz = z_1' dt$ qui suit le choc, on trouve par le même calcul qu'au N° précédent :

$$(5) \quad \sum mV_0^2 - \sum mV_1^2 = \sum mW^2 - 2 \sum (ax_1' + by_1' + cz_1')$$

D'autre part, on a :

$$ax'_1 + by'_1 + cz'_1 = \Phi V_1 \cos(\Phi, V_1)$$

D'où ce théorème :

Quand on introduit brusquement de nouvelles liaisons persistantes et quand on applique en même temps au système des percussions données Φ , la force vive perdue est égale à la force vive due aux vitesses perdues diminuées de la quantité $2T$, $T dt$ désignant le travail qu'effectueraient les percussions données Φ dans le déplacement réel $V_1 dt$ des points du système.

Ce théorème suppose toutes les liaisons parfaites, persistantes et indépendantes du temps.

Lorsque les liaisons qui ont lieu au moment des percussions ne persistent pas toutes, on peut appliquer le dernier théorème à condition de faire rentrer, dans les percussions Φ , les percussions de liaison provenant des liaisons non persistantes.

Ce théorème joue dans la théorie des percussions un rôle analogue à celui qui joue le théorème des forces vives en Dynamique.

234. - Exemples. - Appliquons tout d'abord le théorème de Carnot au problème du pendule balistique [N° 213].

Avant le choc, la force vive du système (appareil et projectile) est : mV^2 . Après le choc, la force vive du système est : $(MK^2 + m\alpha^2)\omega_1^2$. La vitesse perdue par le projectile est $V - a\omega_1$, car la vitesse du projectile a même direction et même sens avant et après le choc ; la force vive due à la vitesse perdue par le projectile est donc $m(V - a\omega_1)^2$. Pour chaque point du pendule, la vitesse perdue est la vitesse après le choc changée de signe ; la force vive due aux vitesses perdues par le pendule est donc $MK^2\omega_1^2$. Le théorème de Carnot donne ici :

$$mV^2 - \omega_1^2 (m\alpha^2 + MK^2) = m(V - a\omega_1)^2 + MK^2\omega_1^2,$$

d'où on tire, après réductions :

$$mVa = (MK^2 + m\alpha^2)\omega_1,$$

formule du N° 213.

Deuxième exemple. - Deux poulies de rayons l et l'

tournent dans le même plan autour de leurs centres O et O' avec des vitesses angulaires dont les valeurs algébriques comptées dans le même sens de rotation sont ω_0 et ω'_0 . Une courroie, que nous assimilons à un fil flexible et inextensible, de masse négligeable, est attachée par ses deux extrémités A, B à un point de chaque poulie. Le fil, d'abord détendu, s'enroule sur les deux poulies; à un instant t_0 , il se tend, et des percussions se produisent. On demande de calculer les vitesses angulaires nouvelles ω_1 et ω'_1 que prennent les poulies, en admettant que le fil reste tendu après le choc.

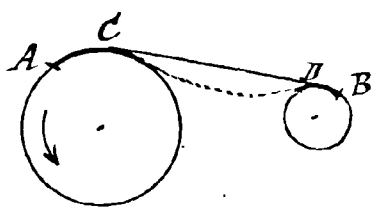
Les liaisons persistent après le choc et étant parfaites appliquons le théorème de Carnot. A cet effet, remarquons que quand un solide tourne autour d'un axe fixe, la force vive du solide due aux vitesses perdues est égale à: $MK^2(\omega_0 - \omega_1)^2$, si ω_0 et ω_1 sont les vitesses angulaires de rotation avant et après le choc, et MK^2 le moment d'inertie du solide autour de l'axe de rotation ⁽¹⁾. Le théorème de Carnot, donne donc, en appelant μ et μ' les moments d'inertie des poulies par rapport à leurs axes:

$$\mu\omega_0^2 + \mu'\omega_0'^2 - \mu\omega_1^2 - \mu'\omega_1'^2 = \mu(\omega_0 - \omega_1)^2 + \mu'(\omega_0' - \omega_1')^2;$$

ou en simplifiant:

$$(1) \quad \mu\omega_0\omega_1 + \mu'\omega_0'\omega_1' = \mu\omega_1^2 + \mu'\omega_1'^2.$$

Mais le fil restant tendu, la longueur $AC + CD + DB$ reste constante; la différentielle de cette longueur



$l\omega_1 dt - l'\omega_1' dt$
est nulle; d'où:

$$(2) \quad l\omega_1 = l'\omega_1'.$$

Des équations (1) et (2) on tire:

$$l\omega_1 = l'\omega_1' = \frac{l l' [\mu l' \omega_0 + \mu l \omega_0']}{\mu l^2 + \mu' l'^2}$$

⁽¹⁾ En effet, la position du solide n'ayant pas changé pendant la percussion, la vitesse de chaque point P a même direction avant et après le choc; car elle est perpendiculaire au plan POZ (OZ axe de rotation) et la vitesse perdue est (au signe près) $P(\omega_0 - \omega_1)$, [P distance de P à OZ].

235. - Détermination des nouvelles vitesses quand toutes les liaisons sont persistantes.

Le théorème de Carnot suffit à déterminer les nouvelles vitesses chaque fois que, les liaisons étant indépendantes du temps et parfaites, le système, après le choc, est à liaisons complètes.

D'une manière générale, les équations de Lagrange étendues aux percussions permettent de calculer les nouvelles vitesses sous la seule condition que toutes les liaisons existant pendant les percussions soient persistantes et parfaites.

On tient compte de toutes les liaisons préexistantes au choc pour définir la position de S à l'aide du nombre minimum de paramètres q_1, \dots, q_k . Supposons qu'à l'instant t_0 on introduise brusquement de nouvelles liaisons, qui se traduisent par p relations entre q_1, \dots, q_k, t : il est loisible de choisir les paramètres de façon que ces p équations de liaisons soient⁽¹⁾:

$$(1) \quad q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad \dots \quad q_p = 0.$$

Un déplacement $\delta q_{p+1}, \dots, \delta q_k$, [$\delta q_1, \dots, \delta q_p$ étant nuls] est un déplacement virtuel compatible avec toutes les liaisons à l'instant du choc. Dans un tel déplacement, le travail des percussions de liaison est nul; soit $\Pi_{p+1} \delta q_{p+1} + \dots + \Pi_k \delta q_k$ le travail des percussions données.

Représentons d'autre part par $2T$ la force vive de S calculée sans tenir aucun compte des équations (1); le principe de d'Alembert (N° 226) appliqué au déplacement δq_{p+1} , puis au déplacement δq_{p+2} , etc donne:

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta \left(\frac{\partial T}{\partial q'_{p+1}} \right) = \Pi_{p+1} \\ \dots \\ \Delta \left(\frac{\partial T}{\partial q'_k} \right) = \Pi_k \end{cases}$$

On connaît, dans les équations (2), q_1^0, \dots, q_k^0 ; d'autre part q_1', \dots, q_p' sont nuls après le choc puisque toutes les liaisons sont persistantes; les $(k-p)$ équations linéaires (2) déterminent donc les $(k-p)$ valeurs q'_{p+1}, \dots, q'_k après le choc. C. q. f. d.

(1) Si ces p équations de liaison étaient de la forme: $f_i(q_1, \dots, q_k, t) = 0$ ($i=1, 2, \dots, p$), on aurait, au lieu des équations (2) les k équations:

$$(2)^{bis} \quad \Delta \frac{\partial T}{\partial q'_j} = \Pi_j + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q'_j} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial q'_j} \quad (j=1, 2, \dots, k).$$

236. - Cas où les liaisons ne sont pas toutes persistantes après le choc. - Si les liaisons (1) ne sont pas toutes persistantes⁽¹⁾ après le choc, les équations (2) subsistent, mais q', \dots, q'_p ne sont pas tous nuls en général après le choc; on n'a plus assez d'équations pour déterminer les nouvelles vitesses. Il est indispensable, dans ce cas, de faire des hypothèses sur l'élasticité plus ou moins parfaite des corps qui se choquent.

237. - Remarque sur les corps parfaitement mous. Quand deux corps qui se choquent sont parfaitement mous, les nouvelles vitesses satisfont aux mêmes restrictions que si les deux corps restaient en contact après le choc. Autrement dit, pour le calcul des nouvelles vitesses, tout se passe comme si la liaison entre les deux corps était persistante, - et cela lors même que les deux corps se séparent en fait après le choc. Par exemple, si un projectile mou vient heurter, en décrivant une branche ascendante de parabole, un plan horizontal, sa vitesse après le choc est tangente à ce plan, qu'il abandonne immédiatement après le choc.

Il suit de là, que si tous les corps qui se choquent sont parfaitement mous, on pourra calculer les nouvelles vitesses comme si toutes les liaisons causes des chocs étaient persistantes, c'est-à-dire par la méthode du n° 235.

238. - Exemples. - On considère un tube solide homogène AB (de très petite section) dans lequel glisse sans frottement un point P . Le système étant animé d'un mouvement de translation à l'instant t_0 , on fixe brusquement le milieu G du tube AB . Calculer les vitesses du système après la percussion, en supposant qu'à l'instant t_0 , P est au milieu de GA .

Toutes les liaisons sont sans frottement et persistantes. Les nouvelles vitesses sont évidemment contenues dans le plan défini par AB et la vitesse de translation. Les liaisons préexistantes au choc permettent de définir la

⁽¹⁾ Les liaisons préexistant au choc étant, elles, persistantes.

position du système à l'aide de quatre paramètres, soit les coordonnées ξ, η du milieu G de AB , θ l'angle de Ox et de BA , u la distance GP comptée positivement dans le sens GA .

Si M est la masse totale du tube, $2l$ sa longueur, m la masse de P , x et y ses coordonnées, on a :

$$x = \xi + u \cos \theta, \quad y = \eta + u \sin \theta, \quad \text{et}$$

$$2T = M(\xi'^2 + \eta'^2 + \frac{l^2}{3}) + m[\xi' + u' \cos \theta - u \sin \theta \theta']^2 + (\eta' + u' \sin \theta + u \cos \theta \theta')^2]$$

Les liaisons introduites brusquement à l'instant t_0 se traduisent par les équations :

$$\xi = 0, \quad \eta = 0$$

Les nouvelles vitesses $\xi'_1 = 0$, $\eta'_1 = 0$, θ'_1 , u'_1 seront déterminées par les deux équations

$$(7) \quad \Delta \left(\frac{\partial T}{\partial \theta'} \right) = 0, \quad \Delta \left(\frac{\partial T}{\partial u'} \right) = 0.$$

Il est loisible de supposer que pour $t = t_0$, θ est nul, et avant d'écrire les équations (7) de faire $\theta = 0$, $u = \frac{l}{2}$ dans l'expression de $2T$ qui devient :

$$(8) \quad (M+m)(\xi'^2 + \eta'^2) + \theta'^2 l^2 \left[\frac{M}{3} + \frac{m}{4} \right] + mu'^2 + 2m\xi'u' + ml\eta'\theta'.$$

Les équations (7) donnent donc, si (ξ'_0, η'_0) définissent la vitesse de translation avant le choc :

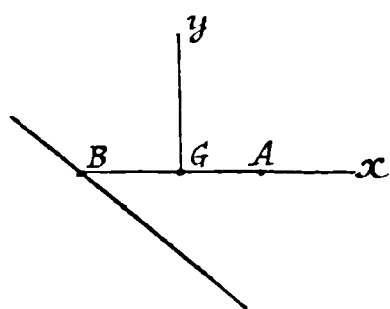
$$\left(\frac{M}{3} + \frac{m}{4} \right) l^2 \theta'_1 = \frac{m}{2} l \eta'_0, \quad mu'_1 = m \xi'_0, \quad \text{ou}$$

$$\theta'_1 = \frac{\eta'_0}{\left(\frac{1}{2} + \frac{2M}{3m} \right)}, \quad u'_1 = \xi'_0$$

2^e Exemple. — Le même système est abandonné sans vitesse dans le vide à l'action de la pesanteur, la position initiale du tube AB étant horizontale et P étant au milieu de GA . A un instant t_0 , l'extrémité B vient heurter un plan fixe parfaitement lisse et élastique, incliné à 45° sur l'horizon. Calculer les nouvelles vitesses du système.

On voit aussitôt que chaque point du système tombe verticalement comme un point libre abandonné sans vitesse dans le vide. A l'instant t_0 , le système est donc animé d'une certaine vitesse de translation verticale soit V_0 , le tube AB est horizontal, et le point P est au milieu

de GA. Prenons comme axe Ox la demi-droite GA dans sa position à l'instant t_0 , comme axe Oy la verticale ascendante Gy. — Les nouvelles vitesses sont situées dans le plan xGy; la position du système dans ce plan est définie par les quatre paramètres ξ, η, θ, u . La liaison sans frottement qui intervient au moment du choc se traduit par la relation :



$$(\xi - l \cos \theta) + (\eta - l \sin \theta) + l = 0.$$

Écrivons les équations 2^{bis} du N° 235: en se servant de la forme de $2T$ donnée par (8), il vient :

$$(9) \quad \begin{cases} \Delta \left(\frac{\partial T}{\partial \xi'} \right) = \Delta \left\{ (M+m)\xi' + mu' \right\} = \lambda \\ \Delta \left(\frac{\partial T}{\partial \eta'} \right) = \Delta \left\{ (M+m)\eta' + m \frac{l}{2} \theta' \right\} = \lambda \\ \Delta \left(\frac{\partial T}{\partial \theta'} \right) = \Delta \left\{ \left(\frac{M}{3} + \frac{m}{4} \right) l^2 \theta' + m \frac{l}{2} \eta' \right\} = -\lambda l \\ \Delta \frac{\partial T}{\partial u'} = \Delta \left\{ mu' + m\xi' \right\} = 0 \end{cases}$$

D'autre part, les corps qui se choquent étant parfaitement élastiques, la composante normale au plan fixe de la vitesse de B doit changer de signe. Or cette composante est égale à : $\frac{\xi' + \eta'}{\sqrt{2}} - \frac{l\theta'}{\sqrt{2}}$. On doit donc avoir :

$$\xi'_1 + \eta'_1 - l\theta'_1 + \xi'_0 + \eta'_0 - l\theta'_0 = 0,$$

c'est-à-dire [puisque $\xi'_0 = 0$, $\eta'_0 = -v_0$, $\theta'_0 = 0$]:

$$(10) \quad \xi'_1 + \eta'_1 - l\theta'_1 = v_0.$$

Les équations (9) et (10) donnent $\xi'_1, \eta'_1, \theta'_1, u'_1$ et λ .

Si les deux corps qui se choquent étaient parfaitement mous, on aurait, au lieu de [10], l'équation :

$$\xi'_1 + \eta'_1 - l\theta'_1 = 0$$

Dynamique des fluides.

(Hydrodynamique).

Quelques théorèmes de cinématique sur la déformation des milieux continus.

²³⁹ Mouvements d'un système continu déformable. - Variables de Lagrange.

Dans toute la première partie de ce cours, nous n'avons considéré que des systèmes dont la position peut être définie à l'aide d'un nombre limité de paramètres (solides, systèmes de solides, etc.). Il nous faut étudier maintenant le mouvement des corps continus déformables [liquides ou gaz, solides élastiques, etc.].

Les axes $Oxyz$ ayant été arbitrairement choisis, considérons un corps matériel, continu et déformable, un fluide par exemple, qui à l'instant t_0 , occupe un certain volume Π_0 de l'espace. Soit P un élément matériel déterminé du corps, ρ_0 sa densité à l'instant t_0 , ε_0 son volume, (a, b, c) ses coordonnées par rapport à $Oxyz$. A l'instant t , le même élément occupe une position bien déterminée x, y, z et a une certaine densité ρ ; on peut écrire :

$$(1) \quad x = f(a, b, c, t), \quad y = \varphi(a, b, c, t), \quad z = \psi(a, b, c, t),$$

et

$$\rho = \chi(a, b, c, t);$$

les fonctions f, φ, ψ, χ sont des fonctions bien déterminées de t (quel que soit t) et de (a, b, c) à l'intérieur du domaine Π_0 . Elles sont continues par rapport à t . Pour $t = t_0$, $f \equiv a$, $\varphi \equiv b$, $\psi \equiv c$.

(1) On envisage dans beaucoup d'applications, des corps continus à une dimension [fils] ou à deux dimensions [plaques et membranes]. Mais il est clair que c'est par une fiction simplificatrice qu'on réduit leurs dimensions à deux ou à une. En réalité, ce sont des corps à trois dimensions très effilés ou très minces.

Inversement, si un élément occupe à l'instant t une position xyz , cet élément occupait à l'instant t_0 une position bien déterminée a, b, c , et on a :

$$(1) \text{bis} \quad a = f_1(x, y, z, t) \quad b = f_2(x, y, z, t), \quad c = \varphi_1(x, y, z, t),$$

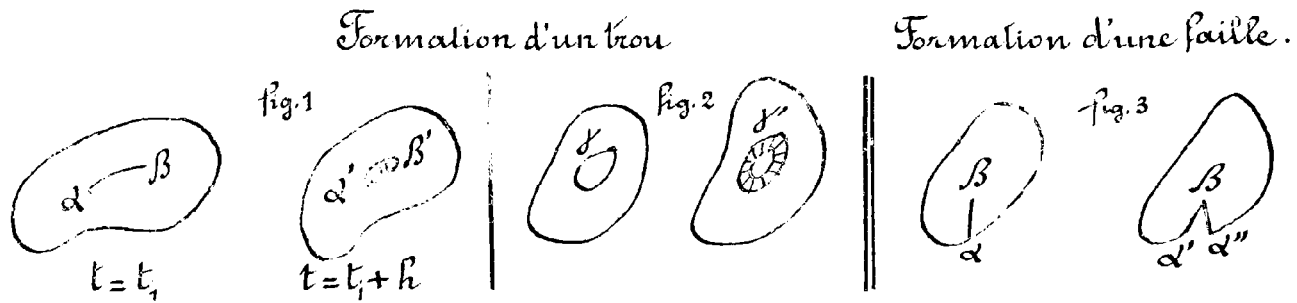
les fonctions $f_1, \varphi_1, \varphi_2$ étant bien déterminées, pour l quelconque, à l'intérieur du domaine occupé à l'instant t par le corps.

Pour connaître le mouvement du corps il faut connaître les fonctions f, φ, ψ des quatre variables indépendantes a, b, c, t , tandis que le mouvement d'un système de n points est défini quand on connaît les 3 n coordonnées en fonction de l'unique variable t . On appelle souvent les variables a, b, c, t variables de Lagrange parce que Lagrange les a constamment employées en Hydrodynamique.

Nous supposons dans tout ce qui suit, que les fonctions f, φ, ψ de (a, b, c, t) sont des fonctions continues de (a, b, c, t) lorsque le temps varie de t_0 à t et le point (a, b, c) dans le domaine Π_0 . Quand il en est ainsi, deux éléments infinitésimaux du fluide en contact à l'instant t restent en contact entre t_0 et t .

240. - De la formation possible de trous, failles et de sillages. - Mais il importe de remarquer que, dans le mouvement du fluide, deux éléments matériels peuvent se séparer à un instant t_1 . D'une façon précise, soit Σ une portion de surface intérieure au fluide à l'instant t_1 ; les deux parties du fluide en contact sur Σ peuvent se séparer pour $t > t_1$ [il se forme alors dans le fluide un trou (fig. 1 et 2), ou une faille⁽¹⁾ (fig. 3)]; elles peuvent aussi glisser l'une sur l'autre (on dit alors qu'il existe un sillage]. — Supposons que l'instant t_1 coïncide avec t_0 : dans ces divers cas, x, y, z sont des fonctions de (a, b, c) qui varient brusquement quand on traverse Σ , cela pour toute valeur de t aussi voisine qu'on veut de t_0 . Si $t_1 > t_0$, soit Σ_0 la surface que formaient à l'instant t_0 dans le fluide les éléments matériels qui sont à l'instant t_1 en contact avec Σ : Σ_0 est une surface de discontinuité des fonctions x, y, z de a, b, c pour $t > t_0$.

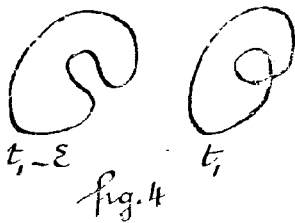
(1) La faille peut séparer le fluide en plusieurs masses continues distinctes.



La figure représente la section du fluide par le plan du tableau, $\alpha\beta$ ou la section de Σ par ce plan à l'instant t_1 ; les parties hachées, représentent le trou $\alpha'\beta'$ ou γ qui s'est creusé dans le fluide pour $t = t_1 + h$ au voisinage de $\alpha\beta$ ou de γ .

Nous écartons expressément dans ce qui suit les cas où il se forme dans la masse fluide considérée des trous, des failles ou des sillages, et nous admettons que x, y, z sont des fonctions continues de a, b, c, t , quel que soit t quand le point (a, b, c) varie dans D_0 .⁽¹⁾

D'autre part, il peut se faire que deux éléments du fluide qui étaient séparés avant l'instant t_1 viennent en contact à cet instant [fig. 4]: nous écartons également



ce cas qui, en général, entraîne-rait un choc (brusque variation de vitesse ou brusque contraction des éléments qui se rencontreraient).

En un mot, nous admettons que, réciproquement, les fonctions a, b, c de x, y, z, t sont pour t quelconque des fonctions continues de (x, y, t) dans tout le domaine D occupé par le fluide à l'instant t . Autrement dit, deux éléments du fluide en contact à un instant t sont en contact pendant tout l'intervalle de temps considéré.

⁽¹⁾ Considérons dans le fluide, à l'instant t_0 , tous les éléments du fluide qui vont se séparer immédiatement d'éléments avec qui ils sont en contact: ces éléments forment dans le fluide certaines surfaces Σ_0 , qui pourront être inexistantes. Si on considère seulement une portion du fluide que Σ_0 ne traverse pas, la restriction énoncée sera remplie pour cette partie du fluide, au moins pendant un certain temps. Mais si on veut étudier le mouvement de tout le fluide, l'existence des singularités que nous écartons complique singulièrement la question.

Enfin, nous supposons que les fonctions continues x, y, z de a, b, c, t admettent des dérivées partielles continues au moins des deux premiers ordres; et qu'inversement les fonctions a, b, c de x, y, z, t jouissent de la même propriété. ⁽¹⁾

Quand toutes les conditions énoncées sont remplies si le fluide à l'instant t_0 remplit un espace Π_0 , d'un seul tenant, l'espace Π qu'il remplit à un instant t est encore d'un seul tenant, et la surface limitée de Π correspond point par point à celle de Π_0 . En effet, soit P_0 un point intérieur à Π_0 : la correspondance univoque ⁽¹⁾ et ^{(1)bis} fait correspondre à P_0 et à un petit volume de Π_0 entourant P_0 un point P et un petit volume de Π entourant P et réciproquement. ⁽²⁾

De plus, le Jacobien $\frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)}$ ou Δ n'est jamais nul; autrement le Jacobien $\frac{D(a, b, c)}{D(x, y, z)}$

serait infini, et les dérivées premières des fonctions a, b, c de x, y, z ne seraient pas finies. Comme $\Delta \equiv 1$ pour $t = t_0$, (puisque $x \equiv a, y \equiv b, z \equiv c$ pour $t = t_0$), Δ est essentiellement positif.

241. Notation de Lagrange. - Étant donnée une fonction quelconque $H(a, b, c, t)$, je représenterai systématiquement par H', H'', \dots les dérivées $\frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}, \dots$

Vitesse et accélération d'un élément. - À l'instant t , la vitesse (x', y', z') de l'élément P est donnée par les équations:

$$(2) \quad x' = f'(a, b, c, t), \quad y' = \varphi'(a, b, c, t), \quad z' = \psi'(a, b, c, t).$$

S'accélération (x'', y'', z'') de l'élément P est donnée, de même, par les équations;

$$(3) \quad x'' = f''(a, b, c, t), \quad y'' = \varphi''(a, b, c, t), \quad z'' = \psi''(a, b, c, t).$$

En particulier, soit (u, v, w) les composantes de la vitesse du point P à l'instant t_0 ; on a:

$$u = x'_0 = f'(a, b, c, t_0), \quad v = y'_0 = \varphi'(a, b, c, t_0), \quad w = z'_0 = \psi'(a, b, c, t_0).$$

(1) Nous étudierons pourtant certains cas où ces nouvelles conditions ne sont pas remplies [propagation des ondes].

(2) Si des éléments du fluide forment une courbe (ou une surface) fermée à un instant t_0 , ils forment constamment une courbe [ou une surface] fermée.

242. - Variation de volume d'un élément matériel.
Dilatation cubique en un point.

Considérons à l'instant t_0 , une certaine portion S du corps, remplissant une certaine région E_0 de l'espace. A l'instant t , la matière de S remplit une autre région E de l'espace, qui correspond point par point au domaine E_0 par les formules (1). D'après la règle du changement de variables sous le signe \iiint , si $\Delta(a, b, c, t)$ désigne le Jacobien (essentiellement positif, N° 240):

$$\Delta \equiv \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix},$$

on a:

$$\iiint_E dx dy dz = \iiint_{E_0} \Delta da db dc$$

Le volume E est donc donné par la dernière intégrale triple.

En particulier, considérons à l'instant t un élément matériel P de dimensions infinitésimales qui comprend à son intérieur le point (a, b, c) : soit ε_0 son volume à l'instant t_0 , ε son volume à l'instant t . On a:

$$\varepsilon = \iiint \Delta da db dc = \Delta(a, b, c, t) \varepsilon_0 (1 + \eta)$$

η tendant vers zéro avec les dimensions de l'élément.

La partie principale de ε est donc $\Delta(a, b, c, t) \varepsilon_0$, et on peut écrire:

$$(4) \quad \varepsilon = \Delta(a, b, c, t) \varepsilon_0.$$

On appelle dilatation cubique de l'élément matériel dans l'intervalle de temps t_0, t , le quotient de la variation (positive ou négative) de volume par le volume initial. Ce quotient d'après (4) est égal à $\Delta - 1$. Il est indépendant

de la forme de l'élément infinitésimal considéré, et ne dépend que de l'affixe (a, b, c) de l'élément à l'instant t_0 et de l'intervalle de temps t_0, t_1 .

Si l'instant t est très voisin de t_0 , soit $t = t_0 + h$, la dilatation est de l'ordre de h : soit $h\delta$ sa partie principale. On appelle δ le coefficient de dilatation cubique du corps, à l'instant t_0 , au point (a, b, c) . Calculons δ .

$$(5) \quad x = f(a, b, c, t_0 + h) = a + hf'(a, b, c, t_0) + h^2(\dots) \\ = a + hu(a, b, c, t_0) + h^2(\dots),$$

et de même

$$y = b + h\varphi'(a, b, c, t_0) + \dots = b + hv(a, b, c, t_0) + \dots,$$

$$z = c + h\psi'(a, b, c, t_0) + \dots = c + hw(a, b, c, t_0) + \dots$$

D'après ces égalités, on peut mettre Δ sous la forme:

$$(7) \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 + h \frac{\partial u}{\partial a} + \dots, & h \frac{\partial u}{\partial b} + \dots, & h \frac{\partial u}{\partial c} + \dots \\ h \frac{\partial v}{\partial a} + \dots, & 1 + h \frac{\partial v}{\partial b} + \dots, & h \frac{\partial v}{\partial c} + \dots \\ h \frac{\partial w}{\partial a} + \dots, & h \frac{\partial w}{\partial b} + \dots, & 1 + h \frac{\partial w}{\partial c} + \dots \end{vmatrix} = 1 + h \left(\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c} \right) + \dots,$$

les termes non écrits renfermant h^2 en facteur. La dilatation cubique $\Delta - 1$ de l'élément matériel P dans l'intervalle de temps infinitésimal t_0 à $t_0 + h$ a donc comme partie principale:

$$h \left(\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c} \right) \equiv h\delta.$$

Le coefficient de dilatation cubique du corps à l'instant t_0 au point (a, b, c) a pour valeur:

$$\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c} \equiv \delta(a, b, c, t_0)$$

243. - Equation de continuité.

Quelles que soient les déformations de l'élément matériel P , sa masse se conserve⁽¹⁾. Or la masse d'un élément de densité ρ et de volume \mathcal{E} est égale à $\rho\mathcal{E}$; on aura donc

(1) C'est là une des propriétés fondamentales de la masse.

$$\rho \mathcal{E} = \rho_0 \mathcal{E}_0,$$

ou encore, d'après (4) :

$$(8) \quad \rho(a, b, c, t) \Delta(a, b, c, t) = \rho_0(a, b, c).$$

Cette équation est désignée sous le nom d'équation de continuité.

Si nous dérivons cette équation par rapport à t , il vient :

$$(9) \quad \rho' \Delta + \rho \Delta' = 0$$

ou encore

$$\frac{\rho'}{\rho} + \frac{\Delta'}{\Delta} = 0.$$

Inversement, l'équation (9) entraîne aussitôt :

$$\rho(a, b, c, t) \Delta(a, b, c, t) = \rho(a, b, c, t_0) \Delta(a, b, c, t_0) = \rho_0(a, b, c).$$

En particulier, à l'instant t_0 , on a d'après (9) :

$$(10) \quad \rho'(a, b, c, t_0) + \rho(a, b, c, t_0) \delta'(a, b, c, t_0) = 0.$$

244. - Variables d'Euler. - On peut se placer à un autre point de vue pour étudier la cinématique d'un corps continu. Considérons, dans l'espace $Oxyz$, un point géométrique M ou (x, y, z) intérieur au fluide, et soit à l'instant t , ρ la densité du corps⁽¹⁾ en ce point M , et (u, v, w) les composantes de la vitesse du corps en M (vitesse de l'élément P du corps qui occupe, à l'instant t , la position M). On a :

$$(11) \quad u = F(x, y, z, t), \quad v = \Phi(x, y, z, t), \quad w = \Psi(x, y, z, t)$$

et

$$\rho = \mathcal{R}(x, y, z, t).$$

On dit qu'on connaît l'état mécanique (ou le régime) du corps à un instant quelconque si on connaît les fonctions u, v, w, ρ des quatre variables indépendantes x, y, z, t . A chaque instant t , les fonctions u, v, w ne sont définies que dans la portion d'espace occupée par le corps, c'est-à-dire dans la région où ρ n'est pas nul.

Les quatre variables x, y, z, t sont les variables d'Euler.

⁽¹⁾ Cette densité est nulle, à chaque instant, en dehors de la région occupée par le corps.

Notation. - Soit, d'une manière générale, $H(x, y, z, t)$ une fonction quelconque de x, y, z, t . Supposons que, quand t varie, on suive le même élément P du corps; la fonction $H(x, y, z, t)$ est alors une fonction bien déterminée du temps, soit $H(t)$: je représente systématiquement par H', H'', \dots les dérivées premières, secondes, de cette fonction $H(t)$. Supposons qu'à l'instant t , l'élément P considéré occupe la position x, y, z : calculons H' , à l'instant t , en fonction de x, y, z, t .

Puisque la vitesse de l'élément P , à l'instant t , a comme composantes u, v, w , les coordonnées x, y, z de cet élément subissent les variations $u dt, v dt, w dt$ dans l'intervalle de temps infinitésimal $t, t+dt$. La variation correspondante de H est donc:

$$dH = dt \left[\frac{\partial H}{\partial x} u + \frac{\partial H}{\partial y} v + \frac{\partial H}{\partial z} w + \frac{\partial H}{\partial t} \right],$$

d'où

$$(12) \quad H' = \frac{\partial H}{\partial x} u + \frac{\partial H}{\partial y} v + \frac{\partial H}{\partial z} w + \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Celle est, à l'instant t , au point (x, y, z) , l'expression de la dérivée de H prise par rapport au temps en suivant l'élément matériel P du corps qui occupe, à l'instant t , la position (x, y, z) .

Accélération en un point du fluide. - En particulier soit $H = u(x, y, z, t)$; la fonction $u[t]$ est à chaque instant la projection sur ox de la vitesse de l'élément matériel P considéré; u' est la composante suivant ox de l'accélération de P .

Les composantes de l'accélération du fluide, en un point x, y, z , à l'instant t sont donc:

$$(13) \quad \begin{cases} X_x = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}, \\ X_y = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}, \\ X_z = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}. \end{cases}$$

Densité. - Considérons encore la fonction $\rho(x, y, z, t)$ qui définit la densité: soit P l'élément matériel du corps qui, à l'instant t , occupe la position x, y, z ; à l'instant t , sa densité est $\rho(x, y, z, t)$; à l'instant $t+dt$, sa densité est $\rho(x, y, z, t) + \rho' dt$, où l'on a:

$$(14) \quad \rho' = u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Coefficient de dilatation cubique en un point x, y, z à l'instant t . - Equation de continuité. - Considérons, à l'instant t_0 , un élément P du corps qui occupe la position (a, b, c) : sa vitesse, à l'instant t_0 , a pour composantes:

$$u(a, b, c, t_0), \quad v(a, b, c, t_0), \quad w(a, b, c, t_0).$$

Le coefficient de dilatation cubique à l'instant t_0 au point (a, b, c) est [N°242]:

$$\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c} \equiv \delta(a, b, c, t_0).$$

Soit (à l'instant t_0) ε_0 un petit volume de corps comprenant à son intérieur le point (a, b, c) , et soit ε le volume du même élément à l'instant infiniment voisin t_0+h ; on a:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 [1 + h\delta(a, b, c, t_0)].$$

Nous savons enfin qu'à l'instant t_0 , l'équation de continuité se traduit par l'égalité

$$\rho'(a, b, c, t_0) + \rho(a, b, c, t_0) \delta(a, b, c, t_0) = 0.$$

Comme les formules précédentes sont vraies quelle que soient t_0, a, b, c , on voit que le coefficient de dilatation cubique, à un instant t quelconque, en un point

(1) Cette équation exprime que la masse $\rho\varepsilon$ du même élément matériel P du corps ne varie pas. En effet, à l'instant $t+dt$, la densité de l'élément est devenue $\rho + \rho' dt$, son volume $\varepsilon(1+dt.\delta)$ sa masse $\varepsilon(\rho + \rho' dt)(1+dt.\delta)$; l'accroissement de la masse réduite à sa partie principale est donc $(\rho' + \rho\delta) dt$. L'équation (17) exprime que $\rho' + \rho\delta \equiv 0$.

x, y, z quelconque est donné par l'expression

$$(15) \quad \delta(x, y, z, t) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} ;$$

le rapport des volumes ε et $\varepsilon + d\varepsilon$ même élément matériel P du corps aux deux instants t et $t + dt$, est donné [si (x, y, z) est la position de P à l'instant t] par la formule :

$$(16) \quad \begin{aligned} \varepsilon + d\varepsilon &= 1 + dt \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] \\ &= 1 + \delta(x, y, z, t) dt. \end{aligned}$$

Enfin, l'équation de continuité (1) s'écrit : [pour chaque instant t et en tout point x, y, z du corps] :

$$(17) \quad \rho' + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 ,$$

c'est-à-dire, en remplaçant ρ' par son expression développée (14) :

$$(18) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho(x, y, z, t) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] = 0 ,$$

ou enfin

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0$$

Celle est l'équation de continuité exprimée à l'aide des variables d'Euler. Cette équation doit être vérifiée à chaque instant t et en tout point (x, y, z) du corps.

245. - Correspondance entre les variables d'Euler et celles de Lagrange.

Supposons connues les fonctions :

$$(1) \quad x = f(a, b, c, t), \quad y = \varphi(a, b, c, t), \quad z = \psi(a, b, c, t), \quad \rho = \chi(a, b, c, t).$$

Proposons-nous de calculer les fonctions :

$$(11) \quad u = f(x, y, z, t), \quad v = \Phi(x, y, z, t), \quad w = \Psi(x, y, z, t), \\ \rho = \mathcal{R}(x, y, z, t).$$

Nous savons que :

$$(2) \quad x' = f'(a, b, c, t), \quad y' = \varphi'(a, b, c, t), \quad z' = \chi'(a, b, c, t).$$

Il suffit de tirer a, b, c des trois premières équations (1), en fonction de x, y, z, t et de porter ces valeurs dans les fonctions f', φ', χ' pour obtenir u, v, w, p en fonction de x, y, z, t .

Le passage des variables de Lagrange à celles d'Euler s'effectue donc sans aucune intégration.

Inversement, connaissant les fonctions (11), comment calculer les fonctions (1)? Autrement dit, connaissant à chaque instant le régime du liquide en chaque point de l'espace, comment calculer la trajectoire d'un quelconque de ses éléments matériels? Les fonctions x, y, z de a, b, c, t , vérifient les égalités :

$$(19) \quad x' = F(x, y, z, t), \quad y' = \Phi(x, y, z, t), \quad z' = \Gamma(x, y, z, t).$$

De plus, pour $t = t_0$, on a : $x = a, y = b, z = c$.

Les équations (19) constituent un système de 3 équations différentielles du premier ordre portant sur les trois fonctions inconnues x, y, z de t . D'après le théorème fondamental de Cauchy, il existe une solution $x(t), y(t), z(t)$ de ce système (19) et une seule telle que, pour $t = t_0$, x, y et z prennent respectivement les valeurs a, b, c . Cette solution définira les fonctions

$$x = f(a, b, c, t), \quad y = \varphi(a, b, c, t), \quad z = \chi(a, b, c, t).$$

Il suffira ensuite de remplacer, dans $R(x, y, z, t)$, les variables x, y, z par ces valeurs pour obtenir $p(a, b, c, t)$. Le passage des variables d'Euler à celles de Lagrange exige donc l'intégration d'un système de trois équations différentielles ordinaires du 1^{er} ordre.

Dynamique des fluides.

246. - Pression en un point d'un fluide. - Dans le cours de première année [N° 543] nous avons défini un fluide parfait comme un corps continu tel que les forces de contact qu'exercent sur eux deux éléments contigus du corps soient normales à la surface de contact, et dirigées de façon à s'opposer à la pénétration des deux éléments l'un dans l'autre, mais non à leur séparation.

D'après cela, considérons dans le fluide un élément très mince; soit $d\sigma$ une de ses faces, P un point de $d\sigma$, Pn la normale en P à $d\sigma$ menée vers l'intérieur de l'élément: la force de contact exercée sur la face $d\sigma$ par le fluide en contact est dirigée selon Pn

est égale à $p d\sigma$ (p désignant une certaine quantité positive). Que le fluide soit en équilibre ou en mouvement nous avons vu qu'en un point du fluide, à un instant t , cette quantité p est indépendante de l'orientation de $d\sigma$: c'est la pression au point x, y, z du fluide à l'instant t .

247. - Équations de l'hydrodynamique. - Soit $f(x, y, z, t)$, $p(x, y, z, t)$ et $\bar{y}(x, y, z, t)$ la densité, la pression et l'accélération du fluide au point M ou (x, y, z) , à l'instant t . Soit $m\bar{F}$ ou (mX, mY, mZ) la force, autre que les forces de contact du fluide, qui à l'instant t s'exerce sur l'élément P (de masse m) du fluide, occupant la position M .

Nous avons vu [1^{ère} année, N° 547] que, dans son mouvement le fluide satisfait aux trois conditions:

$$(20) \quad \gamma_x = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \gamma_y = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \gamma_z = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

A ces équations, il faut adjoindre l'équation de continuité qui exprime que la masse se conserve. Les quatre équations ainsi obtenues sont les seules qu'on puisse déduire de la mécanique rationnelle.

248. - L'hydrodynamique et les variables d'Euler.

Si on emploie les variables d'Euler, les trois équations (10) s'écrivent :

$$(21) \begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} , \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} , \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} , \end{cases}$$

et l'équation de continuité donne :

$$(22) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 .$$

On a ainsi quatre équations portant sur cinq fonctions inconnues u, v, w, p, ρ des quatre variables indépendantes x, y, z, t .

249. - Conditions initiales et aux limites. -

Conditions initiales. - A l'instant t_0 , on connaît la position des divers éléments du fluide, leur vitesse, en grandeur, direction et sens, leur densité et leur pression.

Conditions aux limites. - Sur ses surfaces limites, le fluide est assujéti à des conditions connues : - par exemple, resté en contact avec une paroi fixe, ou avec l'air à la pression atmosphérique, etc.

Les conditions initiales nous font connaître le domaine Π_0 occupé à l'instant t_0 par le fluide, et les fonctions $u_0, v_0, w_0, p_0, \rho_0$ en chaque point de Π_0 .

Pour tenir compte des conditions aux limites, rappelons-nous [N° 240] que, moyennant les hypothèses faites, ce sont les mêmes éléments du fluide qui constituent la surface limite du fluide. Ceci posé, imaginons que le fluide soit en contact avec une paroi Σ , fixe ou variable avec t suivant une loi donnée, et soit $H(x, y, z, t) = 0$ l'équation de la paroi : puisqu'un élément P qui est en contact avec Σ à l'instant t reste en contact avec Σ à l'instant $t+h$, la fonction $H(t)$ qui correspond à cet élément est nulle, donc $H'(t)$, et on a, en chaque point de Σ et à chaque

instant :
(23)
$$u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} + w \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0.$$

Autrement dit, l'équation (23) doit être une conséquence identique de $H=0$. Si H est indépendant de t , cette condition exprime que la vitesse du fluide en un point de la paroi fixe est tangente à la paroi.

Comme second type de condition aux limites imaginons que le fluide ait une surface libre (c'est-à-dire qu'il confine au vide) : p est nul le long de cette surface libre, et le raisonnement précédent montre que le long de la surface libre on a :

$$u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

De même, si le fluide est en contact avec l'atmosphère, supposée à la pression donnée p_0 : sur la surface de séparation, on a :

$$p(x, y, z, t) = p_0 \text{ et } u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

250. - Équations de Lagrange. - Si au lieu des variables d'Euler, on emploie les variables a, b, c, t de Lagrange, les équations (20) sont faciles à écrire explicitement. Quand on suppose en effet, x, y, z exprimés en fonction de a, b, c, t , on a : $\delta_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, et

$$\frac{\partial p}{\partial a} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a};$$

en portant dans cette égalité et les deux analogues les valeurs de $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$ tirées de (20), il vient :

$$(21)^{\text{bis}} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a} = \left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) \frac{\partial x}{\partial a} + \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \frac{\partial y}{\partial a} + \left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) \frac{\partial z}{\partial a},$$

et deux égalités analogues.

Quant à l'équation de continuité elle s'écrit :

$$(22)^{\text{bis}} \quad \rho(a, b, c, t) \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = \rho(a, b, c, t_0) \equiv \rho_0(a, b, c).$$

On forme ainsi quatre équations aux dérivées partielles portant sur les cinq fonctions inconnues x, y, z, p, ρ des quatre variables indépendantes a, b, c, t .

251. - Conditions initiales et aux limites.

Conditions initiales. - A l'instant t_0 , on connaît le domaine Π_0 occupé par le fluide, et dans ce domaine les fonctions $x, y, z, p, \rho, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ de a, b, c (les trois premières se réduisant identiquement à a, b, c).

Conditions aux limites. - Soit $K(x, y, z, t) = 0$ l'équation de la surface limite du fluide à l'instant t , et $K_0(a, b, c) = 0$ l'équation de la surface limite de Π_0 . Les équations :

$$(1) \quad x = f(a, b, c, t), \quad y = \varphi(a, b, c, t), \quad z = \psi(a, b, c, t)$$

transforment l'une dans l'autre ces deux surfaces. Ceci posé, si le fluide est limité en partie par une paroi donnée $H(x, y, z, t) = 0$, il faudra exprimer que la transformée de la paroi par la correspondance (1) fait partie de la surface $K_0(a, b, c) = 0$.

De même, si le fluide reste en contact avec l'atmosphère à la pression p_0 , il faudra exprimer que la surface $p(x, y, z, t) = p_0$ satisfait à la même condition.

252. - Equation caractéristique et relation supplémentaire. - Qu'on adopte les variables de Lagrange ou celles d'Euler, les cinq fonctions inconnues des quatre variables indépendantes ne sont liées que par quatre équations. Même jointes aux conditions initiales et aux limites, ces quatre équations ne suffisent donc pas à définir le mouvement. Il faut leur ajouter une relation supplémentaire pour que le problème soit déterminé.

L'expérience montre que les mouvements d'un fluide compressible s'accompagnent en général de phénomènes non mécaniques, et principalement de dégagement ou d'absorption de chaleur. Bornons-nous au cas où de phénomènes thermiques se produisent seuls avec les phénomènes mécaniques. Supposons que le fluide considéré soit partout de même nature [Exemples : eau pure ou air pur]. Si θ désigne la température en un point \mathcal{Q} du fluide, ρ sa densité et p sa pression, il existe entre ces trois quantités une relation :

$$(24) \quad \rho = h(p, \theta)$$

caractéristique du corps étudié. Par exemple, pour les gaz parfaits, la relation (29) est de la forme :

$$\frac{p}{\rho(1+\alpha\theta)} = \beta,$$

α et β étant deux constantes bien déterminées, dont la 1^{ère} est la même pour tous les gaz⁽¹⁾

Pour les fluides incompressibles tels que l'eau, l'équation caractéristique est de la forme :

$$p = k(\theta),$$

la fonction $k(\theta)$ étant bien déterminée pour chaque fluide.

Si on connaissait la variation de θ avec le temps (en tout point du fluide) l'équation (24) serait une équation supplémentaire qui, jointe aux quatre précédentes, déterminerait le problème. Mais les variations de θ dépendent de la conductibilité du fluide, de ses chaleurs spécifiques, de son rayonnement, etc. Il faut donc introduire les lois de ces phénomènes, et le problème ainsi posé serait d'une extrême complexité.

Il est toutefois des cas étendus où les conditions dans lesquelles se trouve le fluide permettent d'ajouter à l'avance aux 4 équations de l'hydrodynamique une relation supplémentaire simple.

Transformation isotherme. - Un premier cas, est celui où la température du corps est partout la même et reste constante. [Transformation isotherme]. Ce sera le cas, par exemple où la masse fluide peu étendue et ayant une chaleur spécifique faible, est plongée dans une masse considérable maintenue à température constante. L'équation caractéristique fournira alors une relation entre p et ρ , à savoir $\rho = h(p, \theta_0)$. Si le fluide

(1) Nous distinguerons les fluides en liquides et en gaz d'après leur équation caractéristique : si la fonction $\rho = h(p, \theta)$ s'annule avec p (quel que soit θ), le fluide est dit un gaz. Sinon, c'est un liquide. Si on admet que la densité d'un élément matériel ne peut devenir nulle, un gaz ne pourra présenter une surface libre confinant au vide, puisque p serait nul [et par suite ρ] sur la surface de séparation : il remplira instantanément tout l'espace vide qui lui sera offert.

est incompressible, la relation sera simplement $\rho = \rho_0$.

Transformation adiabatique. — Un second cas particulier est celui où les variations de pression dans le fluide sont assez brusques pour que chaque élément ne cède ni n'emprunte de chaleur aux éléments voisins ou aux corps extérieurs, soit par conductibilité soit par rayonnement. La transformation est dite alors adiabatique. Si le fluide est un gaz parfait, on montre, en thermodynamique, que, dans une telle transformation, la pression p et la densité ρ du même élément sont liées par la relation :

$$\frac{p^\gamma}{\rho} = \frac{p_0^\gamma}{\rho_0},$$

γ désignant le rapport de la chaleur spécifique du gaz sous pression constante à sa chaleur spécifique sous volume constant : $\gamma = 1,408$. Si, à l'instant t_0 , en tout point du fluide, $\frac{p_0^\gamma}{\rho_0}$ a la même valeur, la quantité $\frac{p^\gamma}{\rho}$, dans la transformation adiabatique, la même valeur en tout point du fluide, à tout instant.

D'une manière générale, les seuls cas où on ait pu étudier analytiquement le mouvement d'un fluide, sont ceux où on sait à l'avance que la densité et la pression du même élément matériel sont liées, pendant le mouvement, par une relation connue :

$$\rho = k(p, a, b, c),$$

(a, b, c définissant, à l'instant t_0 , la position de l'élément considéré). Par exemple, dans le cas de la détente adiabatique, on aura avec les variables de Lagrange :

$$\frac{\rho^\gamma(a, b, c, t)}{p(a, b, c, t)} = \frac{\rho_0^\gamma(a, b, c, t_0)}{p_0(a, b, c, t_0)}.$$

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que le corps était partout le même. S'il n'en est pas ainsi — par exemple si le fluide est une émulsion d'huile et d'eau où les proportions du mélange varient pour chaque élément, les considérations précédentes s'appliqueraient à chaque élément considéré isolément. Ainsi, quand le fluide est incompressible et hétérogène, la transformation isotherme est caractérisée par la condition

$$\rho(a, b, c, t) = \rho(a, b, c, t_0);$$

cette condition remplace la condition $p \equiv p_0$ (constante absolue) qui caractérise la transformation isotherme quand le fluide incompressible est homogène.

253. - La relation supplémentaire est les variables de Lagrange. - Quand on emploie les variables de Lagrange, la relation supplémentaire

$$(25) \quad p = k(p, a, b, c)$$

fournit explicitement la cinquième équation qui achève de déterminer le problème. Ses quatre équations (21^{bis}) et (22^{bis}), où on remplace p d'après (25), ne portent plus que sur 4 fonctions inconnues x, y, z, p .

En particulier, si le fluide est incompressible et la transformation isotherme, on remplacera p par la fonction donnée $p_0(a, b, c)$. L'équation de continuité devient alors :

$$\Delta = 1$$

254. - La relation supplémentaire et les variables d'Euler.

Si on emploie les variables d'Euler, il n'y a aucune difficulté à tenir compte de la relation supplémentaire quand la relation entre p et p est la même pour tous les éléments du fluide. On a alors : $p = k(p)$, et il suffit de remplacer p par $k(p)$ dans les quatre équations d'Euler. Exemples : fluide incompressible, homogène dont la température reste constante, ou transformation adiabatique d'un gaz parfait qui à l'instant t_0 satisfait à la condition $\frac{p_0}{p_0} = Cte$.

Mais quand la relation (25) dépend de l'élément considéré, c'est-à-dire quand la fonction $k(p, a, b, c)$ dépend effectivement de a, b, c , il faut éliminer a, b, c entre l'équation (25) et les équations dérivées pour obtenir la relation supplémentaire à l'aide des variables d'Euler.

Donnons-nous au cas simple d'un fluide incompressible hétérogène qui subit une transformation isotherme. On a, $p = k(a, b, c)$, d'où

$$p' \equiv \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \text{ On ajoutera donc}$$

aux quatre équations d'Euler, la relation :

$$(26) \quad \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

L'équation de continuité deviendra alors :

$$(27) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Ses 3 équations (21) et les équations (26) et (27) forment un système de 5 équations à 5 fonctions inconnues.

Propagation d'une onde dans un fluide en équilibre.

255. - Définition d'une onde. - Vitesse de propagation.
 Considérons un fluide en équilibre sous l'action de forces quelconques, et supposons qu'une région E_0 du fluide soit mise en mouvement. L'ébranlement se propage de proche en proche dans le fluide : à l'instant t et t_0 , la région ébranlée du fluide est devenue E , le reste du fluide étant encore immobile. On dit alors qu'une onde se propage dans le fluide, et la surface d'onde est, par définition, la surface limite de E . Cette surface vérifie une certaine équation :

$$(1) \quad S(x, y, z, t) = 0;$$

en choisissant convenablement S , il est loisible d'admettre que la région E du fluide est définie (à chaque instant t) par l'inégalité :

$$(2) \quad S(x, y, z, t) < 0$$

tandis que la région encore immobile du fluide est définie par l'inégalité inverse :

$$(3) \quad S(x, y, z, t) > 0.$$

Soit, à l'instant t , P ou (x, y, z) un point de la surface d'onde S . Menons en ce point la normale Pn à la surface S , et soit P' le point où cette normale rencontre la

surface d'onde S qui correspond à l'instant $t + dt$. Par définition, la limite du vecteur $\frac{PP'}{dt}$ (quand dt tend vers zéro) est la vitesse de propagation dt de l'onde au point P à l'instant t .

Nous admettons que le fluide ne subit pas de chocs; autrement dit, la vitesse d'un élément ne varie pas brusquement, non plus que sa densité et sa pression; u, v, w, p, ρ sont alors des fonctions continues de x, y, z, t à chaque instant t et dans toute la masse du fluide. Mais les accélérations varient brusquement quand on traverse la surface d'onde⁽¹⁾. Nous admettons de plus que, dans le mouvement du fluide, la pression de chaque élément reste liée à sa densité par une relation connue soit

$$(4) \quad p = h(\rho, a, b, c), \quad (a, b, c \text{ coordonnées de l'élément pour } t \leq t_0).$$

Dans ces conditions, nous allons montrer que la valeur absolue de la vitesse de propagation en un point P est indépendante de l'onde qui se propage et ne dépend que de la densité du fluide au point considéré.

256 - Théorème d'Hugoniot. - Vitesse du son.

Je me placerai d'abord dans le cas simple où toutes les forces mT qui s'exercent sur le fluide autres que les forces de contact, sont nulles (avant et après l'ébranlement) et où la relation (4) est indépendante de a, b, c , soit:

$$(5) \quad p = h(\rho) \quad (\text{dans toute la masse fluide quelque soit } t)$$

Les équations de l'hydrostatique où on annule X, Y, Z donnent: $p = p_0$ [d'où en vertu de (5): $\rho = \rho_0$] dans toute la masse fluide avant l'ébranlement. Pour

(1) Ceci revient à admettre que l'onde qui se propage est une onde du second ordre: on entend par là qu'elle laisse continus les éléments au premier ordre (vitesses) mais non ceux du second (accélérations). Dans certains cas, on est amené à considérer des ondes du premier ordre ou ondes de choc [ondes sur la surface desquelles les vitesses sont discontinues], ou au contraire des ondes du 3^e ordre [ondes qui laissent continus les vitesses et les accélérations, mais non les accélérations secondes], ou des ondes d'ordre supérieur.

à t_0 , les fonctions $u, v, w, \rho - \rho_0, \rho_1 - \rho_0$, continues, dans tout le fluide, sont nulles dans la région $S > 0$ et prennent dans la région $S < 0$ les valeurs $u_1, v_1, w_1, \rho_1 - \rho_0, \rho_1 - \rho_0$ qui s'annulent sur S , mais dont les dérivées $\frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, \frac{\partial u_1}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial t}$, etc ne sont pas toutes nulles en un point arbitraire⁽¹⁾ de S .

En tout point P de la surface d'onde, les équations d'Euler, où on annule u_1, v_1, w_1 , donnent :

$$(6) \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial w_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) = 0,$$

et comme les accélérations subissent, par hypothèse, une discontinuité quand on traverse S , une au moins des trois quantités $\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial v_1}{\partial t}, \frac{\partial w_1}{\partial t}$ est différente de zéro si P est choisi arbitrairement sur S .

Ceci étant, soit t un instant donné; supposons qu'on ait transporté l'origine en un point P de S et pris comme axe des x la normale Pn à cette surface menée de P vers P' [N° 255]; on a alors :

$\frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial z} = 0$. Mais comme chaque équation $u_1 = 0, v_1 = 0, w_1 = 0; \rho_1 - \rho_0 = 0$, ——— représente aussi la surface d'onde, on a :

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{\partial w_1}{\partial z} = \frac{\partial \rho_1}{\partial y} = \frac{\partial \rho_1}{\partial z}.$$

De plus, soit P' ou $(dx, 0, 0)$ le point de la surface d'onde S' (correspondant à l'instant $t + dt$) qui se trouve sur Pn ; dx et dt vérifient simultanément les égalités :

$$\frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial t} dt = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} dx + \frac{\partial u_1}{\partial t} dt = 0, \dots, \frac{\partial \rho_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} dt = 0.$$

Or, si w est la vitesse de propagation de l'onde au point P , dx est égal à $w dt$ [N° 255] et on a :

⁽¹⁾ La fonction $u_1(x, y, z, t)$ est (pour t donné $> t_0$) continue dans E ainsi que ses dérivées; quand (x, y, z) tend à l'intérieur de E vers un point de S , u_1 tend vers zéro, mais $\frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, \dots$ tendent vers des valeurs qui ne sont pas nulles en général.

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{1}{\omega} \frac{\partial p_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial x} = -\frac{1}{\omega} \frac{\partial p_1}{\partial t}.$$

Les équations (6) donnent donc au point P, en remarquant que $\rho = \rho_0$ sur S :

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{1}{\omega \rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial t}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\rho_0}{\omega} \frac{\partial u_x}{\partial t},$$

et $\frac{\partial u_x}{\partial t}$ n'est pas nul.

Mais $p_1 = h(\rho_1)$ d'après (5), d'où $\frac{\partial p_1}{\partial t} = h'(\rho_1) \frac{\partial \rho_1}{\partial t}$; il vient ainsi :

$$\frac{\frac{\partial \rho_1}{\partial t}}{\frac{\partial u_x}{\partial t}} = \frac{\rho_0}{\omega} = \frac{\omega \rho_0}{h'(\rho_0)}, \quad \text{au point P}$$

et enfin : $\omega^2 = h'(\rho_0)$.

D'où ce théorème : La vitesse de propagation d'une onde dans un fluide au repos où la pression p et la densité ρ sont partout les mêmes avant l'ébranlement, est égale à $\sqrt{h'(\rho_0)}$; ρ_0 représente la densité du fluide (avant l'ébranlement), et $p = h(\rho)$ la relation qu'on suppose vérifiée pendant le mouvement.⁽¹⁾

Par exemple, si le fluide est l'air, l'onde une onde sonore et si la transformation du fluide est adiabatique, on a : $p = \rho^\gamma \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}$, et $h'(\rho) = \gamma \rho^{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}$; d'où

$\omega = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$. Si on supposait la transformation isotherme, on aurait : $p = \beta \rho (1 + \alpha \theta_0) = \rho \frac{p_0}{\rho_0}$ (p_0 désignant la température, d'où $\omega = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}$). Le rapport de la première vitesse

à la seconde est $\sqrt{\gamma} = \sqrt{1,408} = 1,186$. La seconde formule a été donnée par Newton; la première, que l'expérience vérifie d'une façon frappante, a été donnée par Poisson, d'après une indication de Laplace qui corrigeait l'hypothèse de Newton. Les contractions de l'air produites par l'onde sonore sont donc assez rapides pour devoir être regardées comme adiabatiques.

256. — Extension du théorème précédent. — Il est bien facile d'étendre les résultats précédents au cas où le fluide est en équilibre (avant l'ébranlement) sous l'action de forces quelconques, et où la relation (4) supposée

⁽¹⁾ Si $\rho = \rho_0$ quel que soit t [fluide incompressible], la vitesse de propagation est infinie; toute la masse fluide s'ébranle en même temps.

entre p et ρ dépend de l'élément matériel considéré. Il suffit seulement d'admettre que la force $m\bar{F}$ [autre que les pressions du fluide] qui s'exerce sur un élément du fluide de masse m ne varie pas brusquement quand cet élément entre en mouvement: par exemple, la force $m\bar{F}$ est la pesanteur.

L'énoncé du théorème est alors le suivant:

Soit P ou (a, b, c) un point de la surface de l'onde à l'instant t , ρ la densité du fluide en P avant l'ébranlement, et $h'(\rho, a, b, c)$ la valeur de $\frac{\partial h}{\partial \rho}$ pour l'élément matériel qui est en P à cet instant. La vitesse de propagation de l'onde au point P (à l'instant t) est $|h'(\rho_0, a, b, c)|$.

Pour démontrer le théorème, appelons ρ_0 et ρ les valeurs de ρ et ρ en un point x, y, z pour t_0 et t . Avant l'ébranlement, on a:

$0 = X - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x}$ et deux équations analogues; après l'ébranlement, on a, en tout point de S :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \text{ et deux équations analogues.}$$

D'où en retranchant:

$$(6^{bis}) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial \rho_0}{\partial x} \right) \text{ et deux équations}$$

analogues. La fonction $\rho - \rho_0$ définie dans E et sur S pour $t > t_0$ s'annule sur S ; il suffit, de faire jouer partout à $\rho - \rho_0$ le rôle que jouait ρ dans les équations du N^o précédent, pour que le raisonnement puisse se répéter sans modification. Il convient toutefois d'insister sur la différentiation de l'équation (4); les variables indépendantes étant les variables d'Euler, l'équation (4) entraîne: $\rho' = \frac{\partial \rho}{\partial \rho} \rho'$, c'est-à-dire:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial \rho}{\partial y} v + \frac{\partial \rho}{\partial z} w + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial \rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial \rho}{\partial y} v + \frac{\partial \rho}{\partial z} w + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right];$$

mais comme u, v, w sont nuls sur S , cette relation donne au point P :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = h'(\rho, a, b, c) \frac{\partial \rho}{\partial t} = h'(\rho_0, a, b, c) \frac{\partial h}{\partial t}.$$

D'où le théorème énoncé.

Par exemple, si l'onde est une onde sonore qui se propage adiabatiquement dans l'air pesant en équilibre isotherme, on a, avant l'ébranlement :

$$\rho = \lambda \rho_0, \quad [\lambda = \beta (1 + \alpha \theta_0)], \quad \rho_0 = e^{-\frac{g}{\lambda} z}$$

oz étant la verticale ascendante et le point 0 étant convenablement choisi. La relation adiabatique $\rho = \rho_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\gamma}{\beta}}$ donne encore $\omega = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma \lambda}$. Elle est la même

dans toutes les directions, et la même que si le fluide n'était pas pesant.⁽¹⁾ Mais il en est tout autrement si on admet que la température θ est une fonction décroissante de z : la vitesse de propagation est plus faible à mesure qu'on s'élève dans l'air, puisque $\omega = \sqrt{\gamma \beta (1 + \alpha \theta)}$.

Généralités sur le mouvement d'un fluide.

257. - Cas où il y a un potentiel des vitesses. -

Un cas extrêmement important est celui où les composantes u, v, w de la vitesse en un point (x, y, z) sont à chaque instant les dérivées par rapport à x, y, z d'une même fonction $\Pi(x, y, z, t)$:

$$u = \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

On dit alors qu'il existe une fonction ou un potentiel des vitesses.

Si par surcroît, la densité de chaque élément reste constante, l'équation de continuité, qui s'écrit, comme on sait [N° 254] :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

donne ici :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = 0.$$

La fonction Π est donc, pour chaque valeur de t , une fonction harmonique de x, y, z . C'est pourquoi la

(1) D'une manière générale, si le fluide est un gaz parfait en équilibre isotherme sous l'action de forces quelconques, et si l'onde se propage adiabatiquement, la vitesse de propagation est toujours $\sqrt{\beta (1 + \alpha \theta)}$.

théorie des fonctions harmoniques joue un rôle important en hydrodynamique.

258. - Définition du vecteur rotation ou tourbillon en un point du fluide.

Soit, à l'instant t , P un élément matériel du fluide, Σ une sphère de centre P et de rayon très petit ρ , P' un élément du fluide intérieur à Σ . Appelons mouvement des éléments P' autour de P le mouvement de ces éléments rapportés à des axes $P'K'K''$ parallèles aux axes fixes $Oxyz$ et dont l'origine coïncide constamment avec P , et calculons dans ce mouvement le moment cinétique (à l'instant t) $\overline{PK'}$, par rapport à P , du fluide intérieur à Σ . Si P occupe à l'instant t la position x, y, z et P' la position $x+h, y+k, z+l$, les composantes de la vitesse du point P à l'instant t sont $u(x, y, z, t), v(\dots), w(\dots)$, et celles de P' :

$$u + h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + l \frac{\partial u}{\partial z}, \quad v + h \frac{\partial v}{\partial x} + k \frac{\partial v}{\partial y} + l \frac{\partial v}{\partial z}, \quad w + h \frac{\partial w}{\partial x} + k \frac{\partial w}{\partial y} + l \frac{\partial w}{\partial z}.$$

La vitesse de P' dans son mouvement autour de P a pour composantes:

$$h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + l \frac{\partial u}{\partial z}, \quad h \frac{\partial v}{\partial x} + k \frac{\partial v}{\partial y} + l \frac{\partial v}{\partial z}, \quad -h \frac{\partial w}{\partial x} + k \frac{\partial w}{\partial y} + l \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Le moment cinétique $\overline{PK'}$ de la sphère fluide a pour projection sur Oz :

$$(3) \iiint_{\Sigma} \rho \left\{ h \left(h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial v}{\partial y} + l \frac{\partial v}{\partial z} \right) - k \left(h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + l \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\} dh \cdot dk \cdot dl,$$

[ρ densité du fluide au point $(x+h, y+k, z+l)$]. Cette quantité est de l'ordre de ρ^5 ; pour calculer sa partie principale, on peut laisser à ρ sa valeur au point x, y, z , et faire alors sortir ρ du signe \iiint . Si on tient compte des égalités:

$$\iiint_{\Sigma} h^2 dh \cdot dk \cdot dl = \iiint_{\Sigma} k^2 dh \cdot dk \cdot dl = \frac{4\pi\rho^5}{3 \times 5}$$

$$\iiint_{\Sigma} h k \cdot dh \cdot dk \cdot dl = \iiint_{\Sigma} k l \cdot dh \cdot dk \cdot dl = \iiint_{\Sigma} l h \cdot dh \cdot dk \cdot dl = 0,$$

on trouve ainsi pour valeur de l'expression (3):

$$\frac{I}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

I désignant le moment d'inertie par rapport à un diamètre d'une sphère de rayon R et de densité ρ .

Les composantes suivant les axes $Oxyz$ du moment cinétique \overline{PK} sont donc :

$$\frac{I}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right), \quad \frac{I}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right), \quad \frac{I}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right).$$

Pour qu'une sphère solide de même rayon et de même densité que Σ ait le même moment cinétique \overline{PK} dans son mouvement autour de son centre P , il faut et il suffit qu'elle soit animée d'une rotation instantanée \overline{PW} dont les composantes soient :

$$(4) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right), \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right), \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right).$$

On donne à ce vecteur \overline{PW} le nom de rotation ou tourbillon du fluide au point x, y, z à l'instant t .⁽¹⁾

Pour qu'il existe un potentiel des vitesses quel que soit t , il faut et il suffit que le tourbillon soit nul en chaque point, à chaque instant. On dit souvent, dans ce cas, que le mouvement est irrotationnel.

259. - Circulation le long d'une courbe fermée.

Étant donnée, dans le fluide, à l'instant t , une courbe C d'extrémités A et B , on appelle flux le long de cette courbe l'intégrale :

$$\int_{AB} u dx + v dy + w dz$$

prise le long de C , ou encore l'intégrale curviligne

$$\int_{AB} V ds \cos(V, ds),$$

(1) Considérons un champ de vecteurs, c'est-à-dire un ensemble de vecteurs dont chacun est bien déterminé quand on se donne son origine P ou (x, y, z) , et soit $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ les composantes du vecteur dont P est l'origine. Le tourbillon du champ de vecteurs au point P est par définition le vecteur \overline{PW} dont les composantes ont les valeurs (4). Si au trièdre trirectangle $Oxyz$, on substitue un nouveau trièdre trirectangle positif, il résulte de ce qui précède que le vecteur \overline{PW} reste le même.

$\bar{V}(s)$ désignant la vitesse du fluide en un point M ou S de la courbe ($s = \text{arc } AM$). Dans cette intégrale, t a une valeur constante correspondant à l'instant considéré. Cette intégrale est analogue à un travail : ce serait le travail de la force fictive $\bar{V}(s)$ appliquée à un point matériel qui décrirait la courbe de A jusqu'en B .

On peut répéter, au sujet de cette intégrale, toutes les remarques que nous avons faites au sujet du travail [1^{ère} année, p. 137]. Quand la courbe C est fermée, le flux est le même quel que soit le point A choisi comme point de départ ; il change de signe quand on renverse le sens dans lequel on parcourt la courbe. On donne, dans ce cas, au flux le nom de circulation le long de C . A un instant t , la circulation le long d'une courbe fermée L donnée est bien déterminée au signe près.

Cas où il existe, à l'instant t , un potentiel des vitesses. — Dans ce cas, la circulation le long de deux courbes fermées L et L' est la même (à l'instant t), si on peut ⁽¹⁾ faire coïncider L avec L' par une déformation continue où L reste intérieure au fluide [1^{ère} année, page 137]. Quand L par une telle déformation peut être réduite à un point, la circulation le long de L est nulle (à l'instant t) : si on veut encore, la circulation le long de L est nulle quand on peut tracer une surface intérieure au fluide et limitée par le contour simple L . Nous dirons dans ce cas, ^{pour être plus précis, qu'on peut le prouver, à l'intérieur du fluide.} Inversement, admettons que la circulation soit nulle le long de tout contour simple limitant à lui seul une portion de surface intérieure au fluide : les vitesses dérivent d'un potentiel. ⁽²⁾

(1) Quand le potentiel φ est uniforme, la circulation est nulle le long de toute ligne fermée tracée dans le fluide. Quand le potentiel est à déterminations multiples dans le fluide, la circulation le long d'une courbe fermée est la différence de deux branches de φ . — Un mouvement irrotationnel est dit acyclique ou cyclique suivant que φ est uniforme ou non dans le fluide.

(2) En effet, soit P un point quelconque dans le fluide, et Σ une sphère de centre P intérieure au fluide ; l'intégrale $\int^{\Sigma} u dx + v dy + w dz$ a même valeur, d'après l'hypothèse, quel que soit le chemin suivi dans Σ entre le point P et le point Q intérieure à Σ [puisque l'intégrale éten due à un chemin fermé q. q. c. intérieure à Σ est nulle]. Représentons par $\varphi(x, y, z)$ cette intégrale ; la fonction $\varphi(x, y, z)$, bien déterminée dans Σ , a comme différentielle totale $u dx + v dy + w dz$; cette dernière expression est donc une différentielle exacte, dans Σ , donc tout le fluide, à l'instant considéré t .

Cas où $\rho = f(p)$ et où \vec{F} dérive d'une fonction
de force $V(x, y, z, t)$.

260. - Équations du mouvement. - Supposons que la densité soit liée à la pression par une relation indépendante du temps, la même dans tout le fluide, soit $\rho = f(p)$: c'est le cas, par exemple, d'un fluide homogène dont la densité reste constante, ou d'un gaz parfait qui se transforme adiabatiquement à partir d'un état initial où sa densité était partout la même ainsi que sa pression.

D'autre part, à chaque instant t , la force $m\vec{F}$ qui s'exerce sur l'élément P placé en (x, y, z) , est bien déterminée: soit $X(x, y, z, t)$, $Y(x, y, z, t)$, $Z(x, y, z, t)$ ses composantes. Nous admettons que \vec{F} dérive d'une fonction de force qui peut dépendre du temps, soit $V(x, y, z, t)$. Dans ces conditions, les équations de l'hydrodynamique prennent une forme particulièrement simple.

En effet, considérons les équations (20) [N° 247]; posons :

$$\int_p^P \frac{dp}{f(p)} = P(p) \equiv P(x, y, z, t)$$

et $Q = V - P$; les équations (20) deviennent :

$$(I) \quad \gamma_x = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \gamma_y = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \gamma_z = \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

On peut interpréter ces équations en disant que, dans le cas considéré, il existe à chaque instant un potentiel des accélérations. La fonction p , par suite P , de (x, y, z, t) est toujours uniforme dans le fluide; nous admettrons, pour plus de clarté, qu'il en est de même de la fonction de forces V .

261. - Constance de la circulation le long d'une ligne fluide fermée. - Considérons, à l'instant t_0 , les éléments a, b, c du fluide qui forment une ligne fermée I_0 ; à un instant t quelconque, les mêmes éléments formeront encore une ligne fermée I , [N° 240]. Nous appellerons ligne fluide fermée une telle ligne I . Les conditions du N° précédent étant supposées remplies, nous allons montrer que la circulation le long de la même ligne fluide fermée est la même quel que soit t : autrement dit, elle est la même sur I_0 à l'instant t_0 et sur I à l'instant t .

La circulation C est donnée par l'intégrale curviligne

étendue à I [où t est constant] :

$$ci = \int_I u dx + v dy + w dz$$

Mettons cette intégrale sous une forme plus commode. A l'instant initial, les coordonnées a, b, c des particules fluides P placées sur I_0 sont des fonctions

$$x = \chi(\lambda), \quad y = \chi_1(\lambda), \quad z = \chi_2(\lambda)$$

d'un paramètre λ (l'arc par exemple) qu'il faut faire varier de 0 à l pour obtenir toute la courbe I_0 . A l'instant t les coordonnées x, y, z d'une particule P sont des fonctions de a, b, c, t , c'est-à-dire de λ, t , soit

$$x = \mathcal{R}(\lambda, t), \quad y = \mathcal{R}_1(\lambda, t), \quad z = \mathcal{R}_2(\lambda, t)$$

et λ doit varier de 0 à l pour que x, y, z parcoure (t gardant sa valeur) la courbe I . L'intégrale ci , où nous exprimons u, v, w, x, y, z en fonction de λ , devient :

$$ci = \int_0^l \left(u \frac{\partial x}{\partial \lambda} + v \frac{\partial y}{\partial \lambda} + w \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right) d\lambda.$$

Cette intégrale dépend en apparence de t puisque $u, v, w, \frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \frac{\partial z}{\partial \lambda}$ sont des fonctions de t et de λ .

Calculons sa dérivée par rapport à t : il suffit de dériver sous le signe \int puisque l est indépendant de t . Il vient [en remarquant⁽¹⁾ que $\frac{\partial}{\partial t} u[\lambda, t]$ est égal à χ_x , donc à $\frac{\partial Q}{\partial x}$, et que $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial x(\lambda, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\lambda, t)}{\partial \lambda}$] :

$$\begin{aligned} \frac{dci}{dt} &= \int_0^l \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \lambda} + u \frac{\partial u}{\partial \lambda} + v \frac{\partial v}{\partial \lambda} + w \frac{\partial w}{\partial \lambda} \right) d\lambda \\ &= \int_0^l \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[Q(\lambda, t) + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right] d\lambda. \end{aligned}$$

(1) Si on laisse λ constant, les fonctions x, y, z de (λ, t) définissent le mouvement de la même particule matérielle, et u, v, w sa vitesse; d'où $u = \frac{\partial x(\lambda, t)}{\partial t}$, $\chi_x = \frac{\partial u(\lambda, t)}{\partial t}$.

Comme la courbe L est une courbe fermée et comme la fonction $Q(x, y, z, t)$ est uniforme, par hypothèse, dans le fluide, ainsi que la fonction $u^2 + v^2 + w^2$, l'intégrale précédente est nulle, puisque Q et $u^2 + v^2 + w^2$ reprennent la même valeur pour $\lambda = 0$ et $\lambda = l$. La dérivée de C par rapport à t étant nulle, C est constant. C. q. f. d.

Remarque. — Lorsque la fonction U n'est pas uniforme dans le fluide, la même proposition subsiste sous la seule restriction qu'on puisse cloisonner L à l'intérieur du fluide. Quand cette restriction est remplie à un instant t , elle l'est quel que soit [N° 240] et la circulation le long de L est constante. En effet, considérons à l'instant t les éléments du fluide voisins de Σ ; ces éléments forment un volume comprenant Σ à son intérieur et dans lequel X, Y, Z sont continus; la fonction U , que nous choisissons nulle en un point P de Σ , est bien déterminée dans ce volume, et reprend sa valeur initiale quand on parcourt une fois L .

262. — Théorème de Lagrange. — La proposition précédente entraîne un corollaire remarquable: S'il existe un potentiel des vitesses à l'instant t_0 pour une certaine masse du fluide, il en est de même à un instant quelconque dans la même masse du fluide.

En effet, soit (à l'instant t) L une courbe fermée quelconque qu'on peut cloisonner à l'intérieur du fluide. Si je démontre que la circulation le long de L est nulle, le théorème est démontré. Or considérons la ligne fermée que forment à un instant quelconque les éléments fluides situés sur L à l'instant t . La circulation le long de cette ligne fluide est constante; elle est donc nulle puisque, pour $t = t_0$, il y a potentiel des vitesses.

C. q. f. d.

Nous avons admis, de plus, dans tous les N° précédents qu'il ne se forme dans le fluide ni trous, ni failles, ni sillages. Mais cette restriction est facile à lever ici en décomposant [N° 240] la masse fluide en parties assez petites [et si besoin est le temps en intervalle assez petits]. Nous avons admis, en outre, qu'il ne se produit point

de chocs entre éléments du liquide) cette restriction, elle, est essentielle. Toute les propositions précédentes sont en défaut si les vitesses subissent des variations brusques.

En définitive, les restrictions précises qu'exige le théorème de Lagrange sont les suivantes:

- 1° ρ est une fonction donnée de p , la même dans tout le fluide;
- 2° la force $m\vec{F}$, autre que les forces de contact, qui s'exerce sur un élément P intérieur au fluide dérive d'une fonction de forces $mU(x, y, z, t)$;
- 3° le fluide est un fluide parfait et ne subit pas de chocs.

Quand ces trois conditions sont remplies, s'il existe un potentiel des vitesses à l'instant t_0 , il en est de même à un instant quelconque. Ceci s'applique notamment au cas où le fluide part du repos.

263. - Remarque. - On donne souvent au théorème de Lagrange une portée excessive: on en conclut que [dans le mouvement absolu d'un fluide parfait] un mouvement rotationnel ne peut être engendré par les forces de la nature [forces à distance qui sont conservatives et pressions du fluide]. Si la rotation $\Gamma\omega$ d'un élément P n'est pas nulle à l'instant t_0 , elle existait pour $t < t_0$ et elle existera pour $t > t_0$.

Mais ce sont là des conclusions excessives:

- 1° Dans la nature, ρ et p ne sont pas liés nécessairement par une relation qui soit la même dans tout le fluide et toujours.

Par exemple, si la masse fluide est une colonne d'air primitivement en équilibre isotherme et qui se transforme adiabatiquement, on a [N° 256] [OZ étant la verticale ascendante, et le plan $z=0$ étant convenablement choisi]:

$$\rho = \rho_0 \lambda e^{\frac{g(z-1)c}{\lambda}}, \quad [\lambda = \beta(1 + \alpha\theta)],$$

c désignant le z initial d'un élément du fluide. Or quand la relation supplémentaire $p = h(\rho, \alpha, \beta, c)$ dépend effectivement de (α, β, c) , la force \vec{F} dérivant d'ailleurs d'un potentiel $U(x, y, z, t)$, il est facile de former des exemples

où le mouvement primitivement irrotationnel devient rotationnel.

Dans une colonne d'air en équilibre une trombe peut donc se former, lors même que la viscosité de l'air serait négligeable.

2°. Admettons que $\rho = f(p)$: des chocs peuvent engendrer des vitesses tourbillonneuses.

Considérons notamment une masse liquide homogène, de densité variable et pesante, enclose dans un vase fermé qu'elle ne remplit pas entièrement. Le système partant du repos, imposons au vase des mouvements arbitraires: si le liquide ne subit aucun choc, son mouvement reste irrotationnel; mais si des chocs se produisent, ils peuvent mettre en rotation des éléments du fluide.

Enfin, le théorème de Lagrange ne s'applique qu'aux fluides parfaits, et la viscosité des fluides peut engendrer des rotations même quand les trois conditions du N° précédent sont remplies.

263. - Signes et surfaces de tourbillon. - Dans tout ce N° et le suivant laissons à t une valeur donnée: les vecteurs tourbillons forment un champ de vecteurs [N° 258]; appelons ligne de tourbillon toute ligne qui en chacun de ses points P est tangente au tourbillon d'origine P . Si on pose:

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

les lignes de tourbillon sont définies par les équations différentielles (où t garde sa valeur donnée).

$$(1) \quad \frac{dx}{\xi(x,y,z,t)} = \frac{dy}{\eta(x,y,z,t)} = \frac{dz}{\zeta(x,y,z,t)}.$$

Par chaque point P intérieur au fluide, il passe une ligne de tourbillon et une seule; la famille des lignes tourbillons dépend de deux constantes arbitraires.

Par exemple, si le fluide est animé d'un mouvement d'ensemble comme s'il était solide, le tourbillon en chaque point est équipollent à la rotation instantanée du système \bar{w} , et les lignes de tourbillon sont des droites parallèles à \bar{w} .

On appelle surface de tourbillon toute surface engendrée par une ligne-tourbillon dépendant d'un paramètre. Par une ligne de tourbillon passent une infinité de surfaces de tourbillon. Inversement l'intersection de deux surfaces de tourbillon est une ligne de tourbillon.

Pour qu'une surface Σ soit surface de tourbillon, il faut et il suffit qu'en chacun de ses points le vecteur-tourbillon lui soit tangent. La condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante, car si elle est remplie on peut tracer sur Σ une famille de lignes tangentielles en chacun de leurs points au vecteur-tourbillon.

264. — Expressions de la circulation à l'aide du théorème de Stokes. — Considérons un contour simple L , tel qu'on puisse faire passer par L une surface S intérieure au fluide et entièrement limitée par L ; en chaque point de cette surface, le tourbillon est un vecteur bien déterminé, et le théorème de Stokes nous donne:

$$\int_L u dx + v dy + w dz = \iint_S \left[\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \gamma \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] d\sigma$$

$$= 2 \iint_S (\alpha \xi + \beta \eta + \gamma \zeta) d\sigma = 2 \iint_S \omega_n d\sigma,$$

(α, β, γ) désignant les cosinus directeurs de la normale à l'élément $d\sigma$, menée dans un certain sens Pn , et ω_n la projection sur Pn du vecteur-tourbillon $\vec{\omega}$.

Si S est une surface de tourbillon, ω_n est nul en chaque point, la circulation est nulle. Inversement, supposons qu'une surface Σ intérieure au fluide jouisse de la propriété suivante: la circulation est nulle sur tout contour simple limitant (à lui seul) une aire fermée S de Σ . Je dis que Σ est une surface tourbillon. En effet, choisissons S de façon que le point P arbitrairement choisi sur Σ en fasse partie; on a: [P_1 désignant un certain point intérieur à S]:

$$0 = ci = 2\omega_n(P_1) A, \quad (A \text{ aire de } S), \text{ d'où } \omega_p(P_1) = 0.$$

Si S tend à se réduire au point P , P_1 tend vers P ; ω_n est donc nul en P , c'est-à-dire en tout point de Σ .

C. q. f. d.

265. - Théorème d'Helmholtz. - Ses conditions énoncées au n° 261 à propos du théorème de Lagrange étant remplies, considérons les éléments matériels qui à l'instant t_0 sont sur une ligne^{de} tourbillon L_0 [ou sur une surface^{de} tourbillon Σ_0]. Je dis que ces éléments forment encore à l'instant t une ligne^{de} tourbillon [ou une surface^{de} tourbillon].

Démontrons d'abord le théorème pour une surface tourbillon Σ_0 . Soit Σ la surface que forment à l'instant t les particules fluides situées à l'instant t_0 sur Σ_0 ; il me suffit d'établir que si S est une aire quelconque de Σ limitée par un contour simple L , la circulation le long de L à l'instant t est nulle. Or les éléments matériels qui, à l'instant t sont sur S , formaient à l'instant t_0 une portion S_0 de la surface Σ_0 , portion limitée par le contour simple L_0 qui correspond à L . La circulation le long de L_0 est nulle, puisque Σ_0 est surface tourbillon. Comme la circulation le long de la ligne fluide L ne change pas avec t , elle est encore nulle à l'instant t .

C. Q. E. D.

Soit maintenant C_0 une ligne de tourbillon: faisons passer par C_0 deux surfaces de tourbillon Σ_0 et Σ'_0 ; les deux surfaces fluides ainsi définies restent des surfaces de tourbillon et se coupent suivant une ligne de tourbillon C , qui n'est autre que la ligne fluide en laquelle s'est transformée C_0 . Le théorème est donc démontré.

Ce théorème, qui est renfermé implicitement dans des formules de Cauchy, a été énoncé et démontré par Helmholtz⁽¹⁾.

En définitive, les restrictions 1°, 2°, 3° énoncées à propos du théorème de Lagrange [N° 261] étant supposées satisfaites, les éléments fluides qui à un instant t_0 forment une ligne de tourbillon, forment une ligne de tourbillon quel que soit t .

266. - Tubes de tourbillon. - Considérons à l'instant t dans le fluide une surface S limitée par un contour simple C , et traçons les lignes de tourbillon, qui rencontrent C . On forme ainsi une sorte de surface-tube qui est une sur-
-face

(1) La démonstration précédente est différente de celle de Cauchy et de celle d'Helmholtz.

de tourbillon, et qu'on appelle tube de tourbillon. Toutes les particules situées à un instant t sur un tube de tourbillon forment, quel que soit t , un tube de tourbillon.

Laissons à t une valeur donnée: Soit C_1 une section arbitraire du tube de tourbillon Σ , ou plus généralement σ une ligne fermée tracée sur Σ et qui peut se déduire de C_1 par une déformation continue où C reste sur Σ .

Je dis que la circulation est la même⁽¹⁾ sur C que sur C_1 .

En effet, appelons S la surface formée par S et par la surface latérale du tube [soit S']⁽²⁾ comprise entre C et C_1 .

La circulation le long de C_1 est, au signe près, donnée [théorème de Stokes] par l'intégrale:

$$\iint_{\sigma} \omega_n d\sigma = \iint_S \omega_n d\sigma + \iint_{S'} \omega_n d\sigma.$$

Mais ω_n est nul sur S' , et d'autre part $\iint_S \omega_n d\sigma$ coïncide avec la circulation le long de C (au signe près).

C. Q. F. D.

D'autre part, la circulation sur la ligne fluide définie par C est indépendante du temps. La circulation le long de tout contour fermé entourant une fois le tube [par exemple, section du tube par un plan] est donc un nombre invariable attaché au tube de tourbillon, et qu'on appelle moment ou intensité du tube de tourbillon.

Il résulte de ce théorème qu'un tube de tourbillon ne peut se terminer au milieu du fluide. En effet, on peut toujours supposer son intensité différente de zéro, (autrement, on le décomposerait en deux tubes de tourbillon continus d'intensité non nulle); or s'il se terminait en un point, son intensité serait nulle.

L'ensemble des particules fluides dont les rotations ne sont pas nulles se trouve ainsi divisé en tubes de

(1) Si C_1 était une courbe limitant (à elle seule) une aire de Σ , la circulation le long de C_1 serait nulle [n° 284]; mais C_1 ne peut alors se déduire de C par déformation continue.

(2) Il est loisible d'admettre que S et le tube se raccordent sur C .

tourbillon, terminés aux parois ou aux surfaces de discontinuité, et en anneaux de tourbillon fermés, les tubes et les anneaux ayant des intensités constantes.

267. — Tubes de tourbillon infiniment déliés ou filets de tourbillon. [Wirbelfäden de Helmholtz].

Supposons que, la section du tube par un plan normal soit de dimensions infiniment petites, et soit $d\sigma$ l'aire de cette section; l'intensité du fluide de tourbillon est sensiblement $2\omega d\sigma$, ω étant le tourbillon en un point de la section [tourbillon qui est normal à $d\sigma$]. Le produit du tourbillon par la section droite d'un filet de tourbillon est constant le long du filet et quand t varie.

Il faut donc se représenter un filet de tourbillon comme une sorte de fil fluide qui se déplace et se déforme en tourbillonnement en chaque point autour de sa tangente en ce point, avec une vitesse angulaire inversement proportionnelle à sa section droite.

Voici une conséquence de ces propriétés :

Considérons à l'instant t la masse du filet fluide comprise entre la section droite $d\sigma$ et une section droite infiniment voisine $d\sigma'$; soit l sa hauteur la distance des deux sections laquelle se confond sensiblement avec l'air compris sur le filet entre les deux sections; la petite masse quasi-cylindrique ainsi définie est égale à $\rho l d\sigma$. A l'instant $t+h$, la même masse fluide est disposée selon un autre petit cylindre qui fait partie du même filet de tourbillon (dans sa nouvelle position): sa section droite est devenue $d\sigma_1$, sa hauteur l_1 , sa densité ρ_1 , et on a:

$\rho l d\sigma = \rho_1 l_1 d\sigma_1$; D'où (comme $\omega d\sigma = \omega_1 d\sigma_1$):

$$\frac{\rho l}{\omega} = \frac{\rho_1 l_1}{\omega_1} = 1.$$

Autrement dit, soit PQ ou l un élément de ligne fluide tangente au tourbillon en P ; à un instant quelconque t , cette ligne fluide est devenue P_1Q_1 ; elle est tangente au tourbillon en P_1 et sa longueur varie proportionnellement à $\frac{\omega}{\rho}$.

268. — Remarque sur les tubes et les anneaux de tourbillon. — La théorie des tourbillons est soumise aux mêmes restrictions que le théorème de Lagrange, restrictions qui, ainsi que nous l'avons remarqué [N° 260] ne sont point nécessairement remplies dans les phénomènes naturels, même si on fait abstraction de la viscosité des fluides.

Comme exemple, considérons les anneaux de fumée lancés dans un air calme par un fumeur ou une locomotive ou produits par la combustion spontanée du phosphore d'hydrogène. L'air est initialement à pression et température constante, et nous admettons qu'il en est de même de la fumée au moment de sa formation; nous admettons de plus que les transformations de l'air et de la fumée sont adiabatiques et nous les regardons comme des fluides parfaits. Dans ces conditions, la théorie des tourbillons s'applique: les anneaux de fumée sont des anneaux de tourbillon indestructibles qui se déplacent ou se déforment dans l'air dénué de rotation.

Sond Kelvin a envisagé les molécules matérielles comme des anneaux de tourbillon existant dans l'éther qui remplirait l'espace.

Il existe enfin entre la théorie des tourbillons et l'électrodynamique une analogie remarquable, on peut même dire une identité véritable, une fois établie une correspondance convenable entre les vecteurs qui interviennent dans ces théories.

Travail des pressions intérieures d'un fluide.

269. - Travail élémentaire des pressions intérieures.
 Considérons, à un instant t , un élément intérieur du fluide, soit P , de volume ε et de densité ρ , et regardons-le comme un point matériel. Sa masse m est $\rho\varepsilon$, la force totale qui s'exerce sur lui à l'instant t est $m\bar{y}$, si \bar{y} désigne son accélération; les forces autres que les forces de contact qui s'exercent lui ont comme résultante $m\bar{F}$; les pressions du fluide sur l'élément ont donc comme résultante $m\bar{y} - m\bar{F} = \rho\varepsilon(\bar{y} - \bar{F})$, or les équations de l'hydrodynamique expriment que le vecteur $\rho(\bar{y} - \bar{F})$ a pour composantes $-\frac{\partial p}{\partial x}$, $-\frac{\partial p}{\partial y}$, $-\frac{\partial p}{\partial z}$, (x, y, z étant la position de P , à l'instant t). - Sa résultante des pressions qui (à l'instant t) s'exercent sur P a donc comme composantes: $-\varepsilon \frac{\partial p}{\partial x}$, $-\varepsilon \frac{\partial p}{\partial y}$, $-\varepsilon \frac{\partial p}{\partial z}$, [ε volume de l'élément à l'instant t].

Le travail de cette résultante entre les instants t et $t + dt$ est (puisque u, v, w sont les composantes de la vitesse de F à l'instant t) :

$$(1) \quad -\varepsilon \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) dt.$$

Le théorème des forces-vives appliqué à l'élément F donne :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m V^2 \right) = m V \frac{dV}{dt} = m(Xu + Yv + ZW) - \varepsilon \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

ou encore

$$\rho [u u' + v v' + w w'] = \rho [uX + vY + wZ] - \left[u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right]$$

égalité qu'on eût écrite aussitôt des trois premières équations (20) [n° 247] en les multipliant respectivement par u, v, w et ajoutant.

Si l'élément F fait partie de la surface limite S du fluide, l'expression (1) représente encore le travail élémentaire de toutes les pressions que subit l'élément, mais ces pressions sont les unes extérieures [exercées par une paroi par exemple], les autres intérieures [exercées par le fluide].

D'après cela, entre les instants t et $t + dt$, le travail total de toutes les pressions tant intérieures qu'extérieures que subissent les éléments du fluide sera représenté par $J dt$, J désignant l'intégrale triple :

$$(2) \quad J = - \iiint_{\mathcal{V}} \left[u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right] dx dy dz$$

étendue à tout le volume \mathcal{V} occupé par le fluide à l'instant t . En transformant cette intégrale par la formule de Green, il vient aussitôt :

$$(3) \quad J = \iint_S \rho (u\alpha + v\beta + w\gamma) d\sigma + \iiint_{\mathcal{V}} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

α, β, γ désignant les cosinus-directeurs de la normale Pn à S menée vers l'intérieur de \mathcal{V} . Si on représente par V_n^P la projection sur Pn de la vitesse du fluide au point P de S , et si on tient compte de l'équation de continuité, la formule (3) devient :

$$(4) \quad J = \iint_S p V_n d\sigma - \iiint_D \frac{p f'}{\rho} dx dy dz.$$

Or l'intégrale double $\iint_S p V_n d\sigma$ représente le travail total des pressions extérieures, car ces pressions sont normales à S , dirigées vers l'intérieur de D , et égales à $p d\sigma$ sur un élément $d\sigma$. Le travail total des seules pressions intérieures est donc égal à

$$- \iiint_D \frac{p f'}{\rho} dx dy dz,$$

quantité qu'on peut écrire encore

$$- \sum p \frac{f'}{\rho^2} m \equiv \sum m p \lambda' \quad \left[\text{si } \lambda = \frac{1}{\rho} \right]$$

m étant la masse d'un élément du fluide et la somme Σ étant étendue à tout le fluide.

Si notamment la pression est la même dans tout le fluide à l'instant t , $\sum m p \lambda'$ est égal à $p \sum m \lambda'$. Or $\sum m \lambda' = \sum \frac{m}{\rho}$ est le volume V occupé à chaque instant t par le fluide, f' et la quantité $dt \times \sum m \lambda'$ est égal à dV , variation infinitésimale de ce volume. Le travail élémentaire des pressions intérieures est donc égal dans ce cas à $p dV$ si p est constant entre t_0 et t_1 , le travail des pressions intérieures (dans cet intervalle de temps) est $p \Delta V$.

Ce qui précède est vrai si on considère seulement une portion du fluide, à condition bien entendu de regarder comme extérieures les pressions exercées sur cette portion par le reste du fluide. En particulier, si on considère une masse du fluide assez petite pour que la pression y puisse être considérée comme constante (à l'instant t), le travail élémentaire des réactions intérieures à cette masse est $p dV$, (dV désignant la variation + ou - du volume de cette masse entre les instants t et $t + dt$).

270. - Cas où le fluide est incompressible. Si la densité de chaque élément reste constante, le travail des réactions intérieures est constamment nul, puisque λ' ou $-\frac{f'}{\rho^2}$ est nul. C'est le cas notamment d'un liquide incompressible, isotherme, qui garde une température constante, que ce liquide soit d'ailleurs homogène ou hétérogène.

Nous avons vu [1^{ère} année, N.º 209] que cette propriété est

intuitive si on assimile un fluide incompressible parfait à un sac de sable dont les grains sont très petits et parfaitement lisses⁽¹⁾.

271. - Déplacement virtuel d'un fluide. - Appelons déplacement virtuel d'un fluide quelconque un déplacement idéal dans lequel les divers éléments (tout en gardant leur densité) subissent un déplacement infinitésimal tel seulement que deux éléments ne se pénètrent pas. Soit S l'état du système à l'instant t . Si le déplacement virtuel considéré [à partir de S] est tel que deux éléments quelconques en contact ne se séparent pas, les résultats précédents s'appliquent au travail virtuel des pressions intérieures dans ce déplacement; ce travail, par suite, est nul. Si dans le déplacement virtuel deux, (ou plusieurs) portions du fluide glissent l'une sur l'autre (sillage virtuel) ou se séparent (trou ou faille virtuelle), le travail virtuel des réactions mutuelles des deux portions est nul dans le premier cas, positif dans le second, ainsi qu'on le voit immédiatement.

Il suit de là que dans tout déplacement virtuel d'un fluide parfait le travail des pressions intérieures est nul ou positif. Cette propriété est intuitive si on assimile un fluide dont chaque élément garde sa densité à un sac de sable.

Inversement, cette propriété peut servir à caractériser les fluides parfaits. Autrement dit, appelons fluide parfait tout corps continu tel que dans un déplacement virtuel quelconque le travail des forces de contact intérieures soit positif ou nul.

En partant de cette définition, on démontre que tout élément infiniment mince du fluide subit sur chacune de ses faces [de la part des autres éléments] une réaction normale à cette face et dirigée vers l'intérieur de l'élément. D'où l'identité de la nouvelle définition des fluides parfaits avec la définition ordinaire.

(1) Dans la réalité, un fluide est toujours plus ou moins visqueux et lorsque la densité de chaque élément reste constante, le travail des pressions intérieures est non pas nul mais négatif, la viscosité jouant le rôle du frottement entre les grains de sable.

Cette nouvelle définition permet de constituer la Statique et la Dynamique des fluides parfaits de la même manière qu'on a constitué la Statique et la Dynamique générales des systèmes à K degrés de liberté et à liaisons parfaites. Le principe des travaux virtuels et le principe de d'Alembert peuvent être étendus ainsi aux fluides parfaits. Si la densité de chaque élément reste constante, ces principes suffisent à définir complètement les lois de l'équilibre et du mouvement du fluide. En un mot, les propriétés mécaniques d'un liquide incompressible sont tout à fait analogues à celle d'un sac de sable à grains très petits et bien lisses.

Au contraire, quand la densité des éléments varie avec le temps, des hypothèses ou des lois d'un caractère physique sont indispensables au calcul du mouvement du fluide. Les phénomènes mécaniques sont bien indissolublement à des phénomènes thermiques.

272. - Potentiel thermodynamique interne. -

Introduisons l'équation caractéristique du corps, supposé partout de même nature, soit

$$p = h(\rho, \theta) = h\left(\frac{1}{\lambda}, \theta\right) \equiv h_1(\lambda, \theta),$$

et appelons \bar{w}_1 une primitive de la fonction h_1 par rapport à λ :

$$\bar{w}_1(\lambda, \theta) = \int h_1(\lambda, \theta) d\lambda \equiv \int - \frac{h(\rho, \theta) d\rho}{\rho^2}.$$

Faisons :

$$(5) \quad \mathcal{W} = \sum m \bar{w}_1(\lambda, \theta) \equiv \sum m \bar{w}(\rho, \theta), \quad [\bar{w} = \bar{w}_1\left(\frac{1}{\rho}, \theta\right)]$$

la somme Σ étant étendue à tout le fluide. On donne à la fonction \mathcal{W} le nom de Potentiel thermodynamique interne de la masse fluide. A chaque instant t , un élément P du fluide a une densité ρ et une température θ bien déterminées; \mathcal{W} a donc une valeur bien déterminée, donnée par l'intégrale triple :

$$(6) \quad \mathcal{W} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \bar{w}(\rho, \theta) dx dy dz \quad \left[\mathcal{V} \text{ volume occupé à l'instant } t \text{ par le fluide} \right].$$

où ρ et θ sont des fonctions connues⁽¹⁾ de x, y, z, t .

Si la densité de chaque élément subit une variation infinitésimale $\delta\rho$, [d'où pour λ la variation $\delta\lambda$], W subit la variation :

$$\delta W = \sum m h_\lambda(\lambda, \theta) \delta\lambda = - \sum m \frac{h(\rho, \theta)}{\rho^2} \delta\rho.$$

On voit que le travail des pressions intérieures entre les instants t et $t + dt$, est égale à la variation que subit le potentiel thermodynamique interne quand, pour chaque élément, ρ subit la variation $d\rho = \rho' dt$, θ gardant sa valeur.⁽²⁾

Par exemple, si le fluide est un gaz parfait, on a :

$$p = \beta\rho(1 + \alpha\theta), \text{ d'où :}$$

$$W = -\beta \sum m (1 + \alpha\theta) \log \rho, \quad \delta W = -\beta \sum m (1 + \alpha\theta) \frac{\delta\rho}{\rho}.$$

Si θ est constant dans tout le fluide ^{et invariable} quel que soit t , le travail des pressions intérieures entre les instants t_0 et t est :

$$\beta (1 + \alpha\theta_0) \left[\iiint_{\mathcal{V}_0} \rho_0 \log \rho_0 \, da \, db \, dc - \iiint_{\mathcal{V}} \rho \log \rho \, dx \, dy \, dz \right].$$

273. - Transformations virtuel d'un fluide. - Appelons transformation virtuelle d'un fluide toute modification infinitésimale du fluide, modification idéale dans laquelle un élément passe de la position P à la position P' et où sa densité varie de la valeur ρ à la valeur $\rho + \delta\rho$, sa température θ gardant sa valeur. La seule restriction imposée à une telle modification, c'est que le même volume de l'espace ne peut être occupé simultanément par deux masses distinctes du corps. La transformation se réduit à un déplacement virtuel [N° 271] quand tous les $\delta\rho$ sont nuls.

(1) Si le fluide était hétérogène, à chaque élément serait attaché une fonction caractéristique; dans l'intégrale triple qui donne W , [éq. (5)], \bar{a} serait une fonction de ρ, θ, a, b, c , où ρ, θ, a, b, c devraient être exprimés en x, y, z, t .

(2) Remarquons que, dans la transformation vraie du fluide, θ en général varie avec t . Si chaque élément garde une température constante, le travail des forces intérieures entre les instants t_0 et t , est $W_t - W_{t_0}$, [W_t et W_{t_0} valeurs de W pour $t = t_t$ et $t = t_0$].

Soit S la position du fluide à l'instant t . Considérons une transformation virtuelle (à partir de S) telle que deux éléments quelconques en contact ^{reste en contact} dans une telle transformation, le travail virtuel T des pressions intérieures est [N° 272]: $\delta W = -\sum mk'(\beta, \theta) \delta p$; il est nul; si tous les δp sont nuls. — Quand des 2 éléments en contact se séparent dans le déplacement virtuel, il suffit de décomposer le fluide en portions où la continuité est respectée et d'étudier (comme au N° 271) le travail des pressions le long des surfaces de séparation, pour voir que le travail T est égal à $\delta W + \varepsilon$, ε étant une quantité essentiellement positive ou nulle.

Inversement on peut constituer toute la théorie des fluides [équation caractéristique comprise] en partant de la définition suivante: un fluide parfait est un corps continu tel que le travail virtuel T des réactions intérieures dans toute transformation virtuelle du corps soit égal à $\delta W + \varepsilon$, ε étant positif ou nul, et δW désignant la variation d'une fonction ⁽¹⁾ $W = \sum m\omega(\rho, \theta)$, [θ restant invariable dans la transformation virtuelle].

Tout d'abord, cette définition appliquée à un déplacement virtuel montre [N° 271] que le corps répond à la définition ordinaire des fluides, et elle entraîne l'existence d'une pression bien déterminée en chaque point du corps à un instant t . En appliquant ensuite la définition à une transformation virtuelle quelconque, on montre aisément que p est lié à ρ et à θ par la relation:

$$p = -\rho^2 \frac{d\omega}{d\rho}(\rho, \theta).$$

La nouvelle définition des fluides constitue l'extension complète à ces corps du principe des travaux virtuels [1^{ère} année, N° 424].

274. — Influence de la viscosité, des chocs et des forces intérieures autres que les pressions. — Tout ce que nous venons de dire sur le travail des pressions intérieures suppose essentiellement que les vitesses varient d'une façon

(1) Si le corps est partout de même nature, la fonction ω est la même pour tous les éléments. S'il est hétérogène, à chaque élément P est attachée une fonction ω ; autrement dit, ω est une fonction de ρ, θ, a, b, c . La somme Σ est, en fait, une intégrale triple.

continue. Par exemple, supposons le fluide incompressible : si des chocs se produisent, l'expérience montre que le travail des réactions des éléments qui se choquent est toujours négatif. De par la double influence des chocs et de la viscosité, le travail des pressions intérieures d'un fluide dont chaque élément garde une densité constante est donc, en fait, non pas nul, mais négatif.

Plus généralement, dans une transformation quelconque d'un fluide, le travail élémentaire des réactions intérieures, est (de par les chocs et la viscosité) non pas égal, mais inférieur à $-\sum mp \frac{df}{\rho^2}$.

Enfin, il ne faut pas oublier que les éléments du fluide peuvent être soumis à des forces intérieures à distance [attractions newtoniennes par exemple]. Le travail que nous avons calculé est exclusivement celui des pressions intérieures, c'est-à-dire des forces intérieures de contact. Dans la plupart des applications mutuelles, d'ailleurs, les forces intérieures à distance sont négligeables et le travail de toutes les forces intérieures se réduit à celui des pressions intérieures.

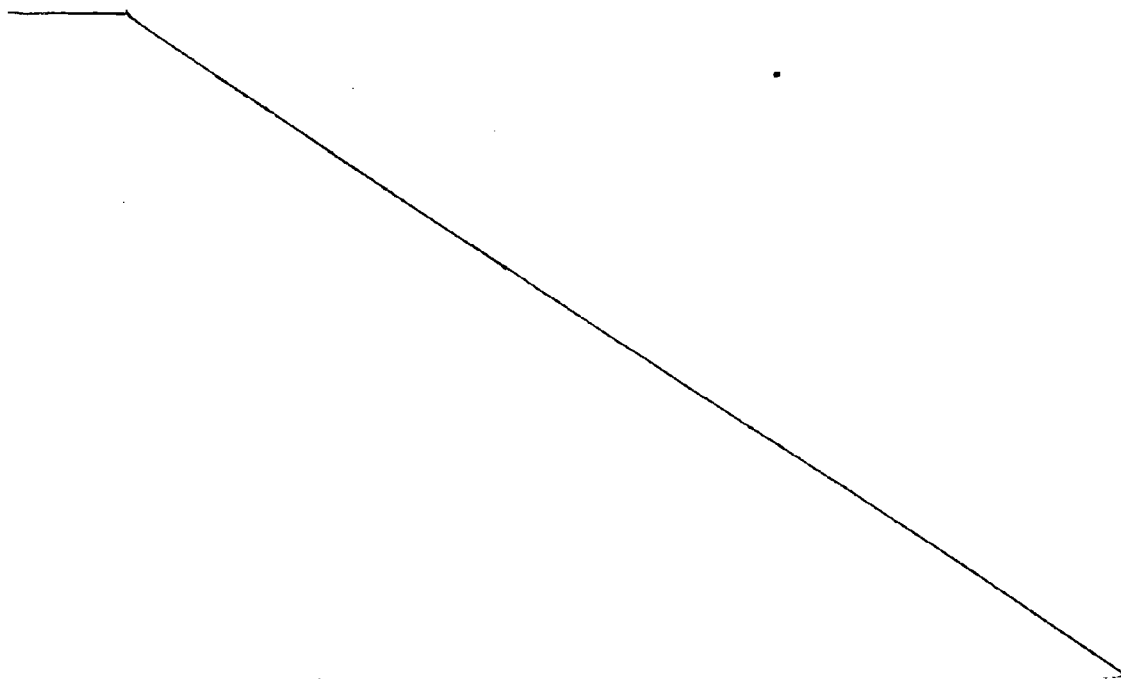
275. - Les forces de viscosité. - Quand un fluide n'est pas parfait [et aucun fluide naturel n'est rigoureusement parfait], la pression qu'exerce l'un sur l'autre deux éléments contigus est oblique sur leur surface de contact. Soit, dans ce cas, p la composante normale de cette pression, et appelons force de viscosité la composante tangentielle. Représentons par $m\vec{F}$ (ou mX, mY, mZ) la résultante de toutes les forces de viscosité exercées (à l'instant) par le reste du fluide sur l'élément P de masse m . Pour obtenir les équations du mouvement en tenant compte de la viscosité, il suffit de remplacer dans les équations de l'hydrodynamique X par $X + X_1$, Y par $Y + Y_1$, Z par $Z + Z_1$.

L'expérience montre que les forces de viscosité sont nulles avec les vitesses. L'hydrostatique des fluides visqueux coïncide donc avec celle des fluides parfaits. Si les vitesses du fluide sont petites, l'influence de la viscosité est négligeable. Si elles sont notables, la viscosité s'oppose aux glissements l'une sur l'autre des particules fluides. Pour calculer son influence, il faut emprunter à l'expérience les lois des actions de viscosité.

Remarque sur le frottement le long des parois.

Le frottement le long des parois ne dépend que de la viscosité intérieure du fluide [une fois le contact bien établi] et non de la nature des parois. En effet, la pression d'une paroi sur un élément superficiel du fluide doit être égale et directement opposée à la pression du fluide sur la face opposée de l'élément, et l'obliquité de cette dernière pression ne dépend que de la viscosité du fluide. En fait, le coefficient de frottement des parois l'emporte toujours sur les coefficients de viscosité des fluides, et quand la paroi est mouillée, une mince couche du fluide adhère à la paroi (de par la rugosité de cette dernière), et c'est sur cette couche que glisse le fluide: le fluide glisse ainsi sur lui-même.

Le travail des forces de viscosité intérieures est essentiellement négatif. Mais le travail des frottements exercés par une paroi sur le fluide peut être positif quand cette paroi est mobile. Considérons, par exemple, un vase de révolution rempli d'eau et tournant autour de son axe; si le système partant du repos, l'eau resterait immobile si elle était dénuée de viscosité; c'est la viscosité qui la met en mouvement, et le travail des frottements exercés par le vase sur l'eau est positif.



Mouvements permanents des fluides.

275. - Mouvement ou régime permanent d'un fluide.

On dit que le mouvement (ou le régime) d'un fluide est permanent dans l'intervalle de temps t_0, t_1 , si l'état du fluide en chaque point géométrique de l'espace reste le même quel que soit t entre t_0 et t_1 . Autrement dit, la région D occupée par le fluide est la même à chaque instant, et en chaque point géométrique déterminé de D la densité, la pression et la vitesse du fluide restent invariables [cette dernière en grandeur, direction et sens]. Analytiquement, cela signifie que, dans le domaine invariable D , les fonctions ρ, p, u, v, w de (x, y, z, t) sont indépendantes de t .

Quand le mouvement d'un fluide est permanent, il n'existe qu'une trajectoire passant par un point déterminé P_0 ou (x_0, y_0, z_0) de D . En effet, les équations qui définissent les trajectoires sont ici [en n'introduisant pas dt]:

$$\frac{dx}{u(x, y, z)} = \frac{dy}{v(x, y, z)} = \frac{dz}{w(x, y, z)};$$

ces équations déterminent, dans l'espace une courbe et une seule passant par le point (x_0, y_0, z_0) . L'ensemble de ces trajectoires forme une famille de courbes à deux paramètres arbitraires. Soit C la trajectoire de l'élément P ; si un autre élément P_1 du fluide se trouve, à un instant t_0 , sur la trajectoire C , il reste indéfiniment sur cette trajectoire. Autrement dit, si nous considérons, à l'instant t_0 , tous les éléments du fluide qui se trouvent sur C , ces éléments resteront indéfiniment sur C . Si l'élément P revient au bout d'un certain temps à son point de départ, la trajectoire est fermée, et chaque élément ^{qui y est renfermé} la parcourt un nombre indéfini de fois.

D'après cela, prenons sur C un point P_0 , et menons par P_0 un plan normal à C ; soit W une aine de très petites dimensions tracée dans ce plan et comprenant P_0 à son intérieur. Par chaque point de W , passe une trajectoire du fluide, et l'ensemble de ces trajectoires forme une sorte de canal, de très petite section, comprenant C à son intérieur. Le fluide contenu à l'instant t , dans ce canal constitue ce qu'on appelle un filet du fluide.

A chaque instant t , la pression p et la densité ρ du même élément fluide sont bien déterminées: ρ peut donc s'exprimer en fonction de p [soit $\rho = k(p)$], ou p en fonction de ρ [soit $p = h(\rho)$]. Tout le long de la trajectoire C de Γ , ρ et p seront ainsi liés par une relation déterminée, et comme ρ et p , en un point (x, y, z) de \mathbb{I} , sont indépendants de t , on voit que, tout le long d'une trajectoire [ou d'un filet], ρ est une certaine fonction de p . Mais cette fonction changera en général quand on passera d'une trajectoire à une autre (ou d'un filet à un autre).

276. - Théorème sur la variation de la vitesse le long d'un filet.

Nous avons vu [N° 269] que le théorème des forces vives appliqué à un élément du fluide, donne :

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} x' + \frac{\partial p}{\partial y} y' + \frac{\partial p}{\partial z} z' \right) = Xx' + Yy' + Zz'.$$

Or, le long d'une trajectoire, ρ est une fonction déterminée $k(p)$ de p ; posons :

$$P(p) = \int \frac{dp}{k(p)}.$$

Admettons de plus que la force X, Y, Z dérive d'un potentiel, soit $U(x, y, z)$. Appelons enfin V la vitesse de l'élément matériel considéré, qui occupe à l'instant t la position x, y, z . L'équation (1) peut s'écrire [en n'oubliant pas que $p(x, y, z)$ est indépendant de t]:

$$\frac{d}{dt} \frac{V^2}{2} + \frac{dP}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$(2) \quad \frac{V^2}{2} + P(p) + U(x, y, z) = C^te$$

tout le long du même filet fluide. Mais la fonction $P(p)$ variera en général quand on passera d'un filet à un autre. Soit (a, b) le point où le filet traverse le plan des x, y ; P est une fonction de p, a, b .

Si nous posons :

$$H = \frac{V^2}{2} + P(p, a, b) + U(x, y, z)$$

le théorème précédent exprime que H est constant tout le long du même filet fluide.

Dans le cas où la relation entre f et p est la même pour tous les éléments du fluide, P est une fonction bien déterminée de p , indépendante du filet considéré.

277. - Cas où il existe un potentiel des vitesses.

Supposons qu'il existe un potentiel des vitesses, un potentiel de X, Y, Z , et que, de plus, f et p soient liés, dans le mouvement permanent, par la même relation [soit $f = k(p)$] pour tous les éléments du fluide.

On a, dans ce cas :

$$x'' = u \frac{du}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dw}{dz} = \frac{\partial \pi}{\partial x} \frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} + \frac{\partial \pi}{\partial y} \frac{\partial^2 \pi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \pi}{\partial z} \frac{\partial^2 \pi}{\partial x \partial z}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\partial \pi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \pi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \pi}{\partial z} \right)^2 \right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + w^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x},$$

et de même :

$$y'' = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} V^2, \quad z'' = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} V^2.$$

L'équation $x'' = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ peut donc s'écrire :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (V^2)}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \left[P = \int \frac{dp}{k(p)}, V^2 = \left(\frac{\partial \pi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \pi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \pi}{\partial z} \right)^2 \right],$$

c'est-à-dire $\frac{\partial H}{\partial x} = 0$, en posant

$$(3) \quad H = \frac{1}{2} V^2(x, y, z) + P(p) + U(x, y, z);$$

et de même

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial H}{\partial z} = 0.$$

Les trois équations (20) [n° 247] signifient donc ici que la fonction H est constante, à chaque instant t , dans toute la région Π du fluide; et comme $p(x, y, z)$, U et V^2 , par suite H , ne dépendent pas de t , on voit que H est une constante absolue dans toute la région Π du fluide.

278. - Mouvements permanents des fluides incompressibles. - Théorème de Bernoulli. - Supposons que chaque élément du fluide garde la même densité: f est alors un

constante sur chaque filet liquide, mais peut varier d'un filet à l'autre si le fluide est hétérogène. L'équation (3) s'écrit alors :

$$(2) \quad \frac{V^2}{2} + \frac{p(x,y,z)}{\rho} + U(x,y,z) = C^{te}$$

et est vérifiée tout le long de chaque filet liquide. Quand le liquide est, en outre, homogène, ρ est une constante absolue ρ_0 , et l'expression $\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} + U$ reste constante tout le long de chaque filet.

Si notamment, la force $m\vec{F}$ est la pesanteur et si le fluide est homogène et de densité constante, on a :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} + gz = C^{te}$$

(Oz verticale ascendante).

C'est cette égalité qui constitue le théorème de Bernoulli. Interprétons-la. Elle peut s'écrire :

$$(5) \quad \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho_0 g} + z = C^{te}$$

La quantité $\frac{V^2}{2g}$ est la hauteur dont il faut laisser tomber sans vitesse $2g$ l'élément fluide en chute libre pour qu'il acquière la vitesse V ; on lui donne le nom de hauteur due à la vitesse V .

La quantité $\frac{p}{\rho_0 g}$ représente la hauteur de la colonne du liquide (en équilibre sous l'action de la pesanteur) qui exerce sur sa base la pression p ; on lui donne le nom de hauteur du liquide qui représente la pression p ; z est la distance du point du fluide considéré à un plan horizontal fixe situé au-dessous du fluide.

De là cet énoncé usuel du théorème :

« Quand un liquide incompressible, homogène, pesant est animé d'un mouvement permanent,
 « considérons, pour chaque point du fluide, la hauteur
 « au-dessus d'un plan horizontal fixe, la hauteur due
 « à la vitesse, et la hauteur représentative de la pression;
 « la somme de ces trois hauteurs est constante tout le
 « long de la même trajectoire (ou du même filet liquide). »

On peut donner à cet énoncé une forme plus géométrique; en tout point M du fluide, portons sur la

verticale ascendante issue de M une longueur MN égale à la somme des deux hauteurs $\frac{V_0^2}{2g}$ et $\frac{p}{\rho g}$: quand M varie le long du même filer, l'extrémité N de la longueur MN reste dans un même plan horizontal, qu'on appelle le plan de charge relatif à ce filer. La somme $\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g}$ se nomme la charge. En hydrostatique, la charge $\frac{p}{\rho g}$ se compose du terme unique $\frac{p}{\rho g}$; ici, la charge est augmentée de la hauteur $\frac{V^2}{2g}$ due à la vitesse ; pour une position de M et une pression données, le plan de charge est d'autant plus élevé que V est plus grand.

On peut démontrer le théorème des forces vives à la masse liquide comprise entre deux sections droites du filer, et en tenant compte de ce fait que le travail des pressions intérieures est nul.

Mouvements permanents de fluides compressibles.

279. — Formule générale de la détente d'un fluide compressible.

Considérons un fluide compressible dont les éléments intérieurs ne sont soumis à d'autres forces qu'aux pressions du fluide. Cette restriction est réalisée approximativement dans le cas où les variations des pressions sont considérables : auprès de l'effet de ces variations de pressions de pressions, l'influence des forces ordinaires (pesanteur et autres) est négligeable. Analytiquement, cela signifie que X, Y, Z sont négligeables devant $\frac{dp}{dx}, \frac{dp}{dy}, \frac{dp}{dz}$. C'est ce qui a lieu par exemple dans la détente brusque d'un gaz fortement comprimé.

Le mouvement du fluide étant supposé permanent, la formule (2) du N° 276 donne :

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = Cte$$

tout le long de chaque filer fluide, ou encore :

$$V^2 - V_0^2 = -2 \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho},$$

V_0 et p_0 étant les valeurs de V et de p en un point déterminé du filer.

Enfin, s'il existe sur chaque filet un point où la vitesse est nulle ou négligeable, soit le point M_0 , on a :

$$(6) \quad V^2 = -2 \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}.$$

Le long de chaque filet, ρ est une fonction déterminée de p . La valeur de V^2 donnée par l'équation (6) dépend de cette fonction $\rho(p)$, c'est-à-dire de la loi de transformation à laquelle obéit la détente du gaz. Suivant qu'on admet que cette loi est adiabatique, ou isotherme, etc. on obtient les diverses formules de la vitesse d'écoulement de gaz.

280 - Formule de Zeuner. - Quand la transformation de chaque élément de gaz est adiabatique, on a (formule de Zeuner) :

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (\gamma = 1,408)$$

d'où

$$V^2 = -2 \rho_0 \int_{p_0}^p \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} dp = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{\rho_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$$

p diminue donc quand V augmente. Si on représente par ω la vitesse du son qui correspond à la densité ρ_0 , à la pression p_0 , et à la détente adiabatique, on a :

$$\omega^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}.$$

On peut donc écrire :

$$V^2 = \omega^2 \frac{2}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right].$$

Cette formule montre que V ne peut dépasser la limite

$$\omega \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}},$$

valeur de V qui correspond à $p=0$.

Considérons, par exemple, un réservoir très vaste et rempli d'air comprimé à haute pression. Laissons le gaz se détendre par un conduit qui débouche dans le vide, et supposons le réservoir et la pression assez considérables pour qu'un régime sensiblement permanent s'établisse pendant un certain temps. Appelons p et ρ la pression et la densité du gaz dans la partie du réservoir où il est sensiblement immobile. Enfin, admettons que la

détente soit adiabatique. La vitesse d'un élément ne peut dépasser la valeur $\omega \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}$. [ω représentant la vitesse du son qui correspond à la densité ρ_0 et à la transformation adiabatique].

Dans l'écoulement adiabatique, d'un gaz parfait, la température s'abaisse. En effet, on a :

$$1 + \alpha \theta = \frac{p}{\beta \rho} \quad (\theta \text{ température}),$$

d'où

$$\frac{1 + \alpha \theta}{1 + \alpha \theta_0} = \frac{p}{\rho} \frac{\rho_0}{p_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

et comme p est $\ll p_0$, on voit que θ est $\ll \theta_0$, est d'autant plus petit que V est plus grand et plus voisin de sa limite $\omega \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}$. Au débouché dans le vide, p serait nul, V égal à $\omega \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}$ et la température absolue serait nulle [circonstances purement idéales].

281. - Formule de Navier.

Supposons maintenant que la température reste constante sur chaque trajectoire. On a alors pour un gaz parfait :

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0}$$

et la formule (6) donne :

$$V^2 = 2 \frac{p_0}{\rho_0} \log \left(\frac{p_0}{p} \right).$$

La vitesse ici peut dépasser toute limite quand p tend vers zéro.

Cette loi de détente est celle qui convient si chaque élément gazeux, à chaque instant, gagne ou perd, par conductibilité ou rayonnement, une quantité de chaleur qui compense exactement la variation de température qu'entraînerait la transformation. En réalité, la détente du gaz ne sera jamais ni rigoureusement adiabatique, ni rigoureusement isotherme. Mais, dans les circonstances habituelles de l'écoulement des gaz, la formule de Zeuner est celle qui représente le mieux les résultats observés.

282. - Variations de la section transversale d'un filet.

Considérons un filet fluide et deux sections normales

$A_0 B_0$, AB de ce filet: en vertu de la permanence du mouvement, la masse du fluide comprise entre $A_0 B_0$ et AB est toujours la



même: la masse fluide qui traverse dans le temps dt la section $A_0 B_0$ et celle qui traverse (dans le même temps) la section AB sont les mêmes. Il suit de là que le produit $\rho \omega V$ [ρ densité en AB] reste

constant tout le long du même filet. On a donc:

$$\omega = \frac{K}{\rho V}$$

le long de chaque filet. Les maxima et minima de l'aire ω [dilatations et contractions] du filet ou de la veine correspondent donc aux minima et maxima du produit $\rho^2 V^2$. Adoptons comme variable indépendante l'arc s de la trajectoire (ou du filet) compté à partir du point M_0 où la vitesse V est nulle. Le long du filet, la densité ρ est une certaine fonction de s : on a, d'autre part, $\rho = h(p)$ ou, si on veut, $p = h(\rho)$, et

$$V^2 = -2 \int_{p_0}^p \frac{h'(p)}{p} dp.$$

Preons la dérivée, par rapport à s , du produit $V^2 \rho^2$; on a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} V^2 \rho^2 &= \frac{d\rho}{ds} \left[2\rho V^2 + \rho^2 \frac{dV^2}{ds} \right] \\ &= 2\rho \frac{d\rho}{ds} \left[V^2 - h'(\rho) \right]. \end{aligned}$$

Pour qu'il y ait contraction ou dilatation de la veine, en un point M , il faut donc: ou bien que $\frac{d\rho}{ds}$ soit nul, c'est-à-dire que la densité le long du filet passe au point M par un maximum ou un minimum, ou bien que $V^2 = h'(\rho)$, c'est-à-dire que la vitesse V au point M soit égale à la vitesse du son correspondant à la densité ρ en M et à la loi de transformation de l'élément fluide considéré.

Si notamment la transformation est adiabatique [formule de Zeuner, N° 280], on doit avoir, ou bien $\frac{d\rho}{ds} = 0$, ou

$$V^2 = \gamma \frac{p}{\rho}.$$

Notions d'Hydraulique.

292. - Principes généraux. - Les problèmes d'Hydrodynamique auxquels conduisent les applications sont si compliqués, surtout quand il faut tenir compte des frottements intérieurs, qu'on est contraint, dans la plupart des cas, de se contenter d'une solution grossièrement approchée du problème. On emprunte alors à l'expérience quelques règles empiriques ou quelques hypothèses simples qu'on estime sensiblement vérifiées. La science d'application, imparfaite mais utile, qu'on constitue ainsi a reçu le nom d'Hydraulique.

Nous nous bornerons ici à indiquer quelques principes généraux que l'Hydraulique emploie constamment; puis nous les appliquerons à quelques exemples particuliers, où ces principes devront être complétés par des hypothèses empiriques particulières.

293. - Écrivons les équations du mouvement d'un fluide parfait :

$$(1) \quad \begin{cases} X_x + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X \\ Y_y + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = Y \\ Z_z + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = Z \end{cases}$$

Si le fluide est visqueux, il faut compléter les seconds membres par des termes qui s'annulent avec les vitesses.

Ces équations permettent d'énoncer les principes suivants :

1° Quand tous les points d'un fluide parfait ont un mouvement rectiligne et uniforme, la pression vérifie (à chaque instant t) dans toute la masse fluide, les équations de l'Hydrostatique.

En effet, on a alors : $x'' = y'' = z'' = 0$, et les équat. (2) se réduisent à celles de l'Hydrostatique.

2° Dans un fluide naturel animés de mouvements très lents [et où par suite les vitesses et les accélérations restent très faibles], la pression varie approximativement (à chaque instant) suivant la loi hydrostatique.

On peut, en effet, dans ce cas, négliger x'' , y'' , z'' et les forces de viscosité.

3° Quand chaque élément d'un fluide parfait se meut comme un point libre soumis à la force $m(F)$, la pression est constante (à un instant t) dans toute la masse du fluide. Autrement dit, p est une simple fonction de t . Si notamment le fluide est en contact en un point avec un autre fluide à pression constante, p est une constante absolue.

Le principe résulte évidemment des équations (1); si on y fait $x' = X$, $y' = Y$, $z' = Z$, il vient en effet

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

C. Q. F. D.

4° Lorsque, dans un fluide parfait ou visqueux, il existe une section plane traversée normalement par toutes les trajectoires, et que celles-ci sont sensiblement rectilignes au voisinage de la section, la pression (à un instant t) varie suivant la loi Hydrostatique dans toute l'étendue de la section.

En effet, prenons le plan de la section pour plan yz : les trajectoires étant sensiblement parallèles à Ox , les accélérations n'ont pas de composante normale à Ox ; y'' et z'' sont nuls, et on a, en tout point de la section, à chaque instant t :

$$(2) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = Y, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = Z.$$

Si le fluide est visqueux, il faudrait ajouter à Y et Z des termes représentant les forces de viscosité; mais ces forces, au voisinage de la section $x=0$, sont parallèles à Ox , puisque les mouvements des éléments du fluide sont tous parallèles à Ox ; la viscosité ne modifie donc pas les équations (2). Or ces équations sont celles qui définissent la répartition hydrostatique des pressions dans le plan $x=0$.

294. - Les théorèmes généraux de la Dynamique et l'Hydraulique. - Les principes très simples qui précèdent, complétés dans chaque application par quelques hypothèses

empiriques, permettent dans une foule de cas de se rendre compte assez aisément du mouvement du fluide : on peut, en général, éviter de recourir aux équations de l'hydrodynamique, en appliquant à une masse finie du fluide certains des théorèmes fondamentaux de la Dynamique des systèmes : théorème du mouvement du centre de gravité, théorème des moments des quantités de mouvement, et théorème des forces-vives. Il ne faut pas oublier, quand on applique le dernier théorème à un fluide compressible, de tenir compte du travail des pressions intérieures. Mais ce sont surtout les mouvements permanents des liquides (incompressibles) pesants qu'étudie l'Hydraulique : si on néglige les frottements intérieurs, le travail des pressions intérieures est alors nul ; en réalité, les liquides étant toujours plus ou moins visqueux, ce travail est négatif.

295. - Théorème de Toricelli.

Considérons un réservoir où l'eau est maintenue à un niveau constant et qui est percé vers sa partie inférieure d'un orifice de très petites dimensions. Le niveau supérieur du réservoir et l'orifice sont en contact avec l'air libre ; si l'orifice est petit, il semble assez naturel d'admettre qu'à l'intérieur de la veine liquide qui s'échappe, la pression dans la section de sortie, reste sensiblement constante ; cette pression est alors la pression atmosphérique et elle est égale, par conséquent, à la pression qui s'exerce sur le niveau supérieur du réservoir [en négligeant la différence insignifiante due à la hauteur du réservoir].

Ceci posé, considérons un fil de liquide P_0P qui part du niveau supérieur du réservoir et aboutit à l'orifice ; soit V_0 et V la vitesse du fluide aux points P_0 et P . Le théorème de Bernoulli donne ici :

$$\frac{V^2}{2} - \frac{V_0^2}{2} + \frac{p - p_0}{\rho} = gh$$

en appelant h la hauteur du niveau supérieur du réservoir au dessus de l'orifice. Mais p et p_0 sont égaux. D'autre part, si w_0 et w sont les sections de la surface libre du réservoir et de l'orifice on a :

$$\omega_0 V_0 = \omega V$$

(en admettant que la vitesse V_0 vers le niveau supérieur du réservoir est sensiblement verticale)

$$\text{D'où} \quad V^2 \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right] = 2gh,$$

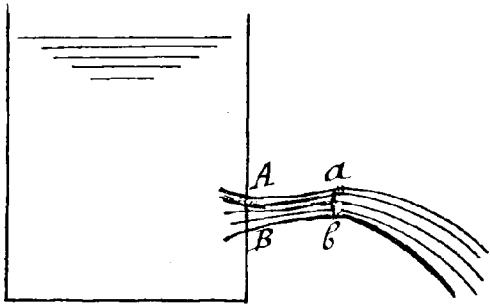
et comme $\frac{\omega}{\omega_0}$ est très petit, on a sensiblement :

$$V^2 = 2gh.$$

C'est le théorème de Toricelli : la vitesse du fluide à la sortie est la même que s'il tombait librement d'une hauteur h . Mais elle est horizontale si le trou est percé dans la paroi verticale du vase.

D'autre part, appelons dépense le volume de liquide débité par unité de temps : d'après ce qui précède la dépense est égal à $\omega \sqrt{2gh}$. Or si on mesure le volume d'eau débité, on trouve qu'il ne dépasse guère les $\frac{6}{10}$ du volume calculé. Étudions donc le phénomène de plus près.

Si l'orifice AB est sur la paroi verticale du réservoir, l'expérience montre qu'après la sortie, les trajectoires du liquide convergent au delà de AB, de manière que la veine présente en AB une section contractée, traversée



normalement par les trajectoires au delà de laquelle les éléments du fluide parcourent des paraboles sensiblement identiques à celles qu'ils parcourraient librement sous l'action de la pesanteur. Il en résulte, d'après le principe 3° du N° 293, que la pression est constante (à chaque instant) à l'intérieur

de toute la veine au-delà de ab , et par suite constante dans toute l'étendue de la section contractée et égale à la pression atmosphérique. Le raisonnement fait plus haut s'applique donc non à l'orifice AB mais à la section contractée ab ; la vitesse V du liquide, quand il sort de la section contractée est égale à $\sqrt{2gh}$; [h hauteur du niveau du réservoir au-dessus de ab , c'est-à-dire au-

dessus de l'orifice].

Or la forme des paraboles décrites par les éléments du fluide au-delà de ab permet de mesurer expérimentalement V : on vérifie ainsi que V est bien égal sensiblement à $\sqrt{2gh}$. C'est d'ailleurs par ce procédé empirique que Torricelli a établi sa formule; c'est Bernoulli qui, le premier, en apporta une démonstration.

Si ω_1 est la section contractée de la veine, la dépende est égale à $\omega_1 V$; elle est égale aussi à ωV_1 , si V_1 est la vitesse du liquide à la sortie du réservoir. On a donc:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\omega_1}{\omega}$$

Le coefficient $\frac{\omega_1}{\omega}$ s'appelle coefficient de dépende. Pour les mesurer, il suffit de mesurer le volume d'eau D débité par unité de temps; on a: $\omega_1 = \frac{D}{V}$, et comme ω se mesure directement, on connaît $\frac{\omega_1}{\omega}$. La valeur de ce rapport varie avec la forme de l'orifice: pour un orifice circulaire il est égal à 0,60 [d'où $V_1 = 0,6V$]; pour un orifice carré, il est égal à 0,62.

Voici un cas où la valeur de ce rapport peut se calculer théoriquement.

296. - Ajutage rentrant de Borda.

Je rappellerai d'abord deux propositions très simples d'Hydrostatique.

1°. Si chaque élément $d\sigma$ d'une surface fermée S supporte une pression $p d\sigma$ normale à cet élément et dirigée vers l'intérieur [p_0 désignant une constante], la somme géométrique de ces pressions est nulle.

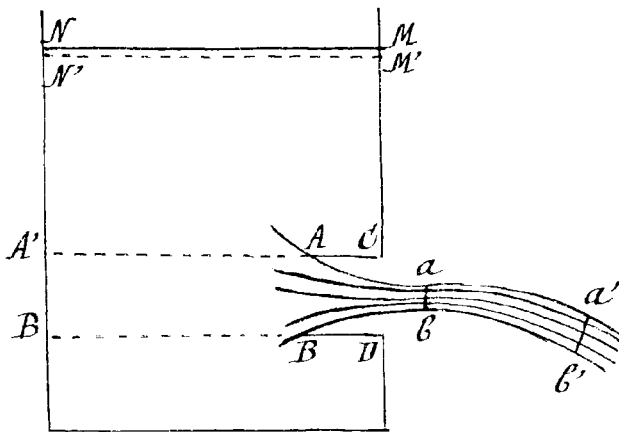
Corollaire. - Si on supprime de la surface S un petit élément ω , la somme géométrique de toutes les pressions $p d\sigma$ appliquées à tous les autres éléments $d\sigma$ de S est équivalente à la pression $p\omega$ normale à ω et dirigée vers l'extérieur de S .

2°. Dans un liquide en équilibre sous l'action de la pesanteur, la somme géométrique de toutes les pressions extérieures est équivalente à $-Mg$ [M masse totale du liquide, g accélération de la pesanteur].

En particulier, si le liquide a une surface libre [plan horizontal] qui confine à l'atmosphère, la pression en

chaque point du fluide est égale à $(p_a + \rho gh)$, où p_a désigne la pression atmosphérique, ρ la densité du liquide (supposé homogène) et h la hauteur de la surface libre au dessus du point considéré. D'après cela, considérons sur la paroi qui limite le liquide, un petit élément de surface ω qui soit vertical, et faisons la somme géométrique des pressions $(p + \rho gh) d\sigma$ qui s'exercent sur toute la surface extérieure du liquide, l'élément ω excepté : la projection de cette somme géométrique sur la normale à ω [droite horizontale] est égale à $(p_a + \rho gh_0) \omega$ et dirigée vers l'extérieur du liquide, [h_0 désignant la hauteur du niveau libre au-dessus de ω].

297. — Ces remarques préliminaires permettent de faire très simplement la théorie de l'ajutage rentrant de Borda.



L'ajutage de Borda est un tube cylindrique ABCD rentrant dans le réservoir. Cet ajutage a pour effet de rendre négligeables les vitesses des particules liquides en contact avec les parois, notamment dans le voisinage de C et D où ces vitesses seraient grandes si l'ajutage n'existait pas. Le liquide reste donc sen-

siblement au repos le long des parois, de sorte que la distribution des pressions sur les parois est à peu près la même que dans l'équilibre.

Considérons toute la masse liquide comprise à l'instant t entre la surface libre MN et la section contractée ab : à l'instant $t + dt$, cette masse μ occupe la position $M'N'a'b'$. Appliquons à cette masse le théorème du mouvement du centre de gravité projeté sur un axe perpendiculaire à la section contractée ab , mené dans le sens du mouvement, soit l'axe Ox . Si on compare la quantité de mouvement (projetée) de la masse μ à

l'instant t et à l'instant $t + dt$, on voit aussitôt qu'en vertu de la permanence du mouvement, la quantité de mouvement de la partie du fluide $M'N'$ ab est la même aux deux instants; la variation de la quantité de mouvement (projetée) de la masse μ entre les instants t et $t + dt$ est donc égale à $\varepsilon(V - u_0)$, ε désignant la masse ab d' b' ou MN $M'N'$, V la vitesse du liquide à la sortie de la section contractée, et u_0 la projection sur l'horizontale OX de la vitesse du liquide à la surface libre MN ; mais cette dernière vitesse étant très faible devant V et sensiblement verticale, u_0 est tout à fait négligeable, et l'accroissement dans le temps dt de la projection sur OX de la quantité de mouvement de la masse μ se réduit en définitive à

$$\varepsilon V dt = \rho \omega V^2 dt$$

(ρ densité du liquide, ω aire de la section contractée).

D'autre part, quelle est la somme des projections, sur OX des forces extérieures appliquées à la masse μ ? Ces forces extérieures sont (à l'instant t) la pesanteur, les pressions des parois, la pression atmosphérique sur les surfaces MN et sur la surface latérale $AabB$; enfin la pression sur l'aire ab des éléments fluides qui sont au-delà de ab . Comme cette dernière pression est égale à p [N° 295], on peut raisonner comme si la section ab était en contact avec l'atmosphère.

Les pressions élémentaires de l'atmosphère sur la surface $AabB$ [aire ab comprise] ont [lemme 1° du N° 296] une somme géométrique égale à $p\omega$ (ω section AB), normale à ω et dirigée vers l'extérieur du volume $ABab$, c'est-à-dire vers l'intérieur du réservoir. La composante de cette somme géométrique suivant OX est donc: $-p\omega$.

Les pressions sur les parois étant réparties sensiblement comme dans le cas de l'équilibre, leur somme géométrique [lemme 2° du N° 296] a comme composante horizontale une force normale à ω , dirigée vers l'extérieur du réservoir, et égale en valeur absolue à $\omega[p_a + h\rho g]$, [h hauteur de la surface libre au-dessus de l'orifice AB]; la projection de cette force sur OX est donc

$$\omega [p_a + h\rho g]^{(1)}$$

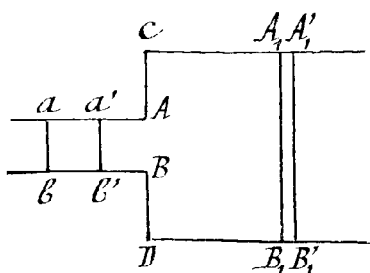
Le théorème des quantités de mouvement projetées sur Ox donne donc ici :

$$\text{d'où : } \rho\omega_1 V^2 = \omega [p_a + h\rho g] - \omega p_a = \omega h\rho g,$$

$$V^2 = gh \frac{\omega}{\omega_1}.$$

Mais, d'autre part, d'après le théorème de Torricelli, $V^2 = 2gh$: d'où $\frac{\omega}{\omega_1} = 2$, conclusion que l'expérience vérifie très sagement.

298. - Perte de charge due à un élargissement brusque dans une conduite.



Considérons un mouvement permanent d'un liquide incompressible dans une conduite cylindrique que nous prendrons, pour simplifier, horizontale⁽²⁾. Supposons que ce liquide passe brusquement dans une conduite de section agrandie; la section du fluide qui était AB devient brusquement CII . Le liquide, dont les trajectoires étaient, dans le premier conduit, des droites parallèles au conduit, pénètre par l'orifice AB dans le conduit de section CII : des remous se produisent dans une certaine étendue, mais nous admettons qu'au-delà d'une certaine section A_1B_1 , le mouvement est redevenu rectiligne et régulier.

Nous désignerons par :

(1) Il faut bien se garder de croire d'ailleurs que la pression vraie du fluide entre A et B soit égale à $(p_a + h\rho g)$. Si on prolonge par la pensée l'ajutage dans l'intérieur du réservoir jusqu'à ce qu'il traverse la paroi en $A'B'$, la pression p du fluide $A'B'$ est $p_a + \rho gh$ et elle décroît de cette valeur à p_a entre $A'B'$ et ab ; elle a une valeur intermédiaire en AB .

(2) Nous négligeons les variations de pression dues à la pesanteur, à l'intérieur des conduits : p est constant dans le premier conduit et constant dans le second au-delà de A_1B_1 .

ω et ω_1 les aires des sections $AB, A_1 B_1$,
 p et p_1 les pressions en AB et en $A_1 B_1$,
 V et V_1 les vitesses du liquide en AB et $A_1 B_1$.

Considérons la masse μ du fluide comprise entre la section ab du petit conduit et la section $A_1 B_1$. Appliquons le théorème du mouvement du centre de gravité (ou des quantités de mouvement) au mouvement de cette masse en prenant comme axe de projection l'axe OX des deux conduites mené dans le sens du mouvement.

À l'instant $t + dt$, la masse μ occupe la position $a'b' A_1' B_1'$ et, (en vertu de la permanence du mouvement); la variation de la quantité de mouvement de la masse μ , entre les instants t et $t + dt$, est :

$$\varepsilon V_1 - \varepsilon V,$$

ε désignant la masse du volume $ab' a'b'$ ou $A_1 B_1 A_1' B_1'$ du liquide;

$$\varepsilon = \rho \omega V dt = \rho \omega_1 V_1 dt.$$

Calculons maintenant la somme des projections sur OX des forces extérieures appliquées à la masse μ à l'instant t . Ces forces sont les pressions extérieures et la pesanteur qui n'a pas de composante suivant OX , non plus que les pressions latérales. Il n'y a donc à considérer que les pressions sur la section ab , sur les surfaces AC et $B'D$, et sur la section $A_1 B_1$. Nous admettrons que sur toute la section CD , la pression a la même valeur p que sur AB . Comme la pression reste égale à p dans le petit conduit, on voit que les pressions élémentaires sur $ab, AC, B'D$ ont une somme égale à $p\omega$. Les pressions sur la section $A_1 B_1$ comptées suivant OX ont comme somme $-p_1\omega_1$. Le théorème des quantités de mouvement appliqué à la masse μ donne donc :

$$\rho \omega_1 V_1 [V_1 - V] = \omega_1 [p - p_1],$$

d'où :

$$(1) \quad V_1 [V_1 - V] = \frac{p - p_1}{\rho},$$

ou encore :

$$(2) \quad V^2 \frac{\omega}{\omega_1} \left[1 - \frac{\omega}{\omega_1} \right] = \frac{p_1 - p}{\rho},$$

formule que l'expérience vérifie sensiblement.

Si on avait appliqué à la même masse fluide le théorème des forces vives en négligeant la viscosité, qu'aurait-on trouvé?

La variation de la force-vive entre les instants t et $t + dt$ est: $\varepsilon (V^2 - V^2)$.

Le travail de la pesanteur est nul, ainsi que le travail des pressions des parois et celui des pressions intérieures de la masse. Quant aux pressions qui s'exercent sur ab , leur travail est évidemment $p\omega V dt$; le travail des pressions qui s'exercent sur A, B , est $-p\omega V_1 dt$. Comme $\omega V dt = \omega_1 V_1 dt = \frac{\varepsilon}{\rho}$, le théorème des forces vives donne:

$$(3) \quad \frac{1}{2} V^2 - \frac{1}{2} V_1^2 = \frac{p - p_1}{\rho}.$$

Il y a contradiction entre les équations (1) et (3). Appelons p_1' la valeur de p donnée par (3) et comparons la à la valeur de p_1 donnée par (1). Il vient:

$$\frac{p - p_1}{\rho} = \frac{p - p_1'}{\rho} + \frac{1}{2} (V - V_1)^2,$$

c'est-à-dire:

$$(4) \quad \frac{p_1}{\rho} = \frac{p_1'}{\rho} - \frac{1}{2} (V - V_1)^2 = \frac{p_1'}{\rho} - \frac{1}{2} V^2 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right)^2.$$

La valeur de p fournie par le théorème des forces vives l'emporte donc sur la valeur vraie de p . On peut expliquer le fait par deux raisons: d'abord les frottements intérieurs du liquide effectuent un travail négatif sensible notamment dans la région des remous, et ce travail introduit dans le second membre de l'équal. (3) un terme négatif; ensuite, le liquide au sortir de la section A, B , est encore animé de vitesses tourbillonnaires dues aux remous qui accroissent la force vive de la masse A, B, A', B' du liquide. Cette double influence diminue p_1' d'une quantité qui, d'après ce qui précède doit être égale à: $\frac{1}{2} V^2 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right)^2$.

Le liquide étant supposé pesant, nous avons appelé charge en un point du fluide [N° 289] la quantité $\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g}$: quand on passe de la section AB à la section A', B' , la charge, qui devrait rester constante

si l'égalité (3) s'appliquait, est diminuée, d'après (4), de la quantité

$\frac{V^2}{2g} \left[1 - \frac{\omega}{\omega_1} \right]^2 = \frac{(V - V_1)^2}{2g}$. On donne à cette dernière quantité le nom de perte de charge due à l'élargissement brusque du conduit; d'après la terminologie du N° 289 cette perte de charge est égale à la hauteur due à la vitesse perdue $(V - V_1)$ (Principe de Borda).

300. - Pression exercée sur une paroi plane par une veine liquide en mouvement.

Pour donner une idée de la manière dont on peut calculer les pressions qu'un fluide en mouvement exerce sur la surface d'un solide, nous considérerons le cas où une veine liquide en mouvement permanente vient s'écraser sur un plan fixe Π , perpendiculaire à l'axe de la veine que nous supposerons horizontale.

Nous admettrons que l'aire de la paroi plane est assez grande pour que les filets liquides déviés finissent par être tous perpendiculaires sensiblement à l'axe de la veine OX .

Considérons la masse μ du liquide qui, à l'instant t , se trouve comprise entre la section MN et la paroi Π et intérieure au cylindre de révolution de base AB d'axe OX . A l'instant $t + dt$, cette masse occupe la position $M'N'AB'C'D'$. Appliquons, à cette masse μ le théorème des quantités de mouvement projetées sur OX . La variation de la quantité de mouvement (projetée sur OX) de la masse μ est la différence entre la quantité

de mouvement projetée des masses comprises entre les deux cylindres de base AB et $A'B'$, et celle de la masse $MN M'N'$: la vitesse des premières masses est sensiblement perpendiculaire à OX ⁽¹⁾. La différence en question se réduit

(1) La masse $MN M'N'$ est égale à la somme de ces masses.

donc à $-\rho\omega V dt$, $V = -\rho\omega V^2 dt$, [ρ désignant la densité du liquide et ω l'aire de la section MN].

Les forces extérieures qui s'exercent sur la veine sont la pesanteur (normale à ox), et les pressions extérieures, parmi lesquelles les pressions latérales n'ont pas de composante suivant ox . Soit Φ la pression totale exercée par la veine sur la paroi: la somme des pressions élémentaires exercées par la paroi sur le liquide est égale à $-P$, la somme des pressions élémentaires qui s'exercent sur la section MN est $p\omega$. D'où l'égalité:

$$-\rho\omega V^2 = p\omega - P,$$

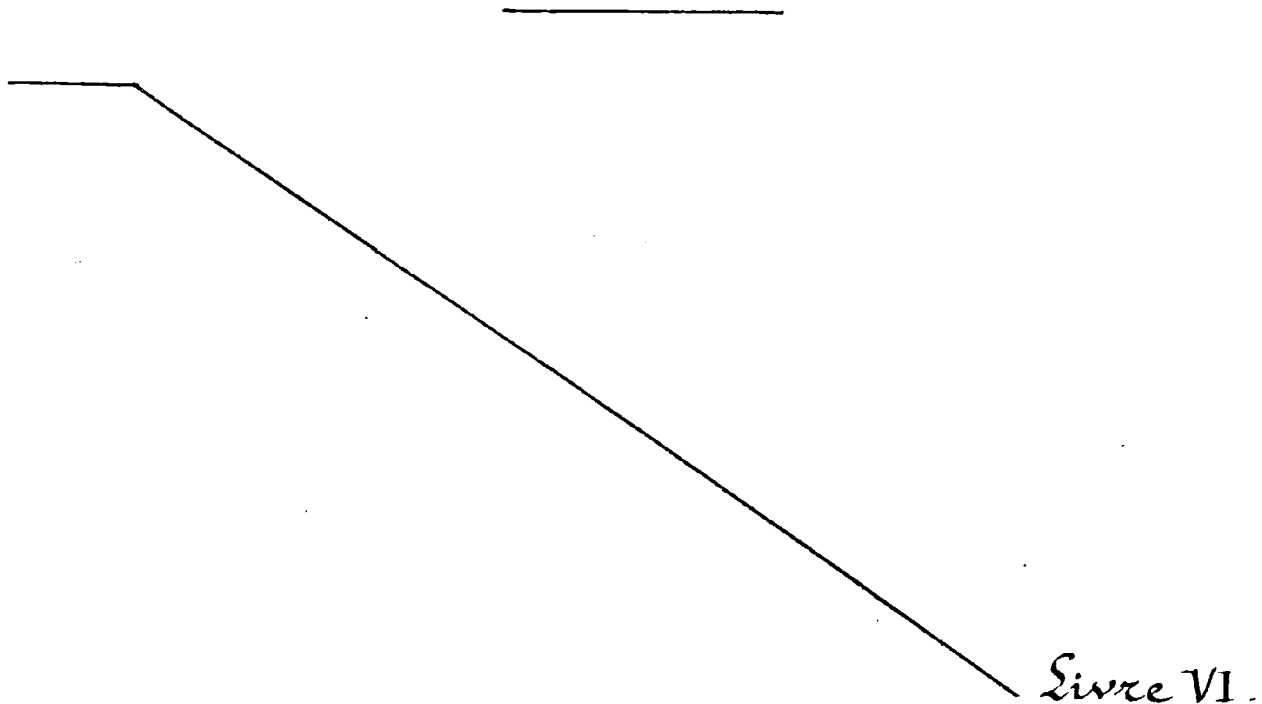
c'est-à-dire:

$$P = \omega[\rho V^2 + p].$$

Si notamment p est négligeable devant ρV^2 , on a:

$$P = \rho\omega V^2.$$

Celle est la pression totale exercée par la veine liquide sur la paroi.



Livre VI.

Machines.

Chapitre I.

Notions générales; résistances passives; rendement; puissance.

301. — Généralités sur le frottement. — Les frottements entre pièces d'une machine jouent dans la marche de la machine un rôle capital. Nous insisterons d'abord sur la nature des forces de frottement et sur leur travail.

Considérons, d'une manière générale, deux solides S et Σ en contact par un point P . Supposons d'abord que Σ soit fixe; quand S reste en contact avec Σ , son mouvement infinitésimal se décompose en un glissement \overline{W} tangent à Σ [vitesse du point P de S en contact à l'instant t avec Σ], et en une rotation instantanée autour de P , soit Ω ; je représente par Ω_n la composante de Ω normale à Σ [pivotement instantané] et par Ω_t la composante de Ω tangente à Σ [roulement instantané].

Dans la réalité, les deux solides sont en contact non par un point géométrique P , mais par une petite aire entourant le point P [1^{ère} année, N^o 204]. Soit \overline{R} la somme géométrique des réactions de Σ sur S (à l'instant t) et $\overline{\Gamma}$ leur moment résultant⁽¹⁾ par rapport à P . On peut remplacer ces réactions par la force \overline{R} appliquée en P et un couple d'axe $\overline{\Gamma}$. Je représente par N et T par F les composantes de \overline{R} normale et tangente à Σ , par Γ l'axe du couple, par Γ_n et Γ_t les composantes de Γ normale

(1) La longueur de Γ est très petite avec les dimensions de l'aire de contact.

et tangente à Σ . Le couple d'axe Γ_n est appelé couple de frottement de pivotement; le couple d'axe Γ_t est appelé couple de frottement de roulement.

Nous savons que \vec{F} est directement opposé à \vec{W} . D'autre part, l'expérience montre que le vecteur Γ_n est toujours directement opposé au vecteur Ω_n et que le vecteur Γ_t est toujours directement opposé au vecteur Ω_t ; autrement dit, le couple de frottement de pivotement et le couple de frottement de roulement s'opposent respectivement au pivotement et au roulement de S sur Σ . De plus, en valeur absolue, Γ_t est proportionnel à N , soit $\Gamma_t = hN$, h représentant un coefficient linéaire qui dépend de la substance des deux surfaces et de leur forme au voisinage du point de contact. Quant à Γ_n , sa valeur est une fonction plus compliquée de N ; si on pose

$$\Gamma_n = R N$$

R n'est pas un coefficient linéaire constant, mais une fonction croissante de N qui dépend de la nature et de la forme des deux surfaces en contact.

Les lois précédentes supposent que ni W , ni Ω_t , ni Ω_n ne sont nuls. Si Ω_t est nul, par exemple, pendant un certain temps, Γ_t peut avoir une direction quelconque, mais sa valeur est inférieure ou égale à $h_0 N$, [h_0 coefficient déterminé supérieur à h]. De même, si $\Omega_n = 0$, Γ_n peut avoir un sens quelconque, mais on a :

$$\Gamma_n \leq R_0 N,$$

R_0 étant une certaine fonction de N supérieure à R . Enfin si $W = 0$, on sait que \vec{F} peut avoir un sens quelconque, mais est au plus égal à fN , [$f_0 > f$].

Supposons notamment que le solide S pesant soit placé sans vitesse sur un plan horizontal. Deux hypothèses sont possibles, car les trois quantités W [vitesse de glissement], Ω_t et Ω_n peuvent rester nulles, ou deux seulement, ou une seulement ou aucune. Si aucune des quantités W, Ω_t, Ω_n ne reste nul, le sens et la longueur des vecteurs $\vec{F}, \Gamma_t, \Gamma_n$ sont définis en fonction de N par les lois du frottement de mouvement; on a notamment :

$$(1) \quad F = fN, \quad \Gamma_t = hN, \quad \Gamma_n = \mathcal{R}N.$$

Si au contraire les trois quantités W, Ω_t, Ω_n restent nulles (c'est-à-dire si le solide S reste en équilibre), on sait seulement qu'on doit avoir :

$$(2) \quad F \leq f_0 N, \quad \Gamma_t \leq h_0 N, \quad \Gamma_n \leq \mathcal{R}_0 N \\ (f_0 > f, \quad h_0 > h, \quad \mathcal{R}_0 > \mathcal{R}).$$

Enfin, si une (ou deux) des quantités W, Ω_t, Ω_n restent nulles, le (ou les deux) vecteurs correspondants F, Γ_t, Γ_n ont un sens inconnu et satisfont à l'inégalité⁽²⁾ correspondante et non à l'égalité (1).

302. - Travail des forces de frottements.

Le travail de toutes les forces de frottement réaction \bar{R} et couple $\bar{\Gamma}$, est toujours négatif. En effet, le travail élémentaire de \bar{R} est, comme nous le savons, $-F W dt$. Le travail du couple Γ_t est égal à : $\Gamma_t \times \text{proj}_{\bar{\Gamma}_t} \Omega dt$, la projection de Ω étant faite sur la demi droite $\bar{\Gamma}_t$; or cette projection a comme longueur Ω_t et est directement opposée à $\bar{\Gamma}_t$; le travail Γ_t est donc $-\Gamma_t \Omega_t dt$.

Pour les mêmes raisons, le travail de Γ_n est $-\Gamma_n \Omega_n dt$, [Ω_n valeur absolue de $\bar{\Omega}_n$]. Le travail de la force R , celui du couple Γ_t , celui du couple Γ_n sont donc tous trois négatifs ou nuls. Si $N \neq 0$, pour que le premier soit nul, il faut que W soit nul; pour que le second soit nul, il faut que Ω_t soit nul; pour que le troisième soit nul, il faut que Ω_n soit nul. Il suit de là que si S n'est pas immobile, le travail des forces de frottement est essentiellement négatif (et non nul), à moins que S et Σ , n'exercent pas de forces de contact l'un sur l'autre.

303. - Cas où les deux corps en contact sont mobiles.

Nous avons supposé dans ce qui précède, que le solide S était immobile. Supposons maintenant que les deux solides en contact soient animés de mouvements quelconques et soumis à des liaisons quelconques. Soit P l'élément de S en contact avec Σ à l'instant t , \bar{V} sa vitesse, $\bar{\omega}$ la rotation instantanée de S . Soit P'

l'élément de Σ en contact avec S à l'instant t , \bar{V} sa vitesse; $\bar{\omega}'$ la rotation instantanée de Σ . Étudions le mouvement de S par rapport à Σ , c'est-à-dire par rapport à des axes liés invariablement à Σ , et soit \bar{W} la vitesse relative de P et $\bar{\Omega}$ la rotation instantanée de S par rapport à ces axes. Les vecteurs \bar{W} , $\bar{\Omega}_t$, $\bar{\Omega}_n$ sont les vitesses de glissement, de roulement et de pivotement de S sur Σ . D'autre part, $\bar{W} = \bar{V} - \bar{V}'$, $\bar{\Omega} = \bar{\omega} - \bar{\omega}'$ [1^{ère} année, N^o 108]. Les lois du N^o 301 s'appliquent sans modification, une fois bien entendu que les vecteurs \bar{W} et $\bar{\Omega}$ sont respectivement $\bar{V} - \bar{V}'$ et $\bar{\omega} - \bar{\omega}'$.

Le travail des réactions mutuelles de S et de Σ est encore négatif. En effet, soit S_0, Σ_0 et S_1, Σ_1 les positions du système S, Σ à l'instant t et à l'instant $t + dt$. On peut passer de la première à la seconde : 1^o en déplaçant le système comme un système solide de façon à amener Σ en Σ_1 ; S occupant alors une certaine position S' ; 2^o en laissant ensuite Σ immobile et en amenant S de la position S' à la position S_1 . Dans le premier déplacement, le travail total des réactions intérieures du système S, Σ est nul. Dans le second, le travail des réactions exercées par S sur Σ immobile est nul, et le travail des réactions exercées par Σ sur S est

$$-F \bar{W} dt - \int_t \bar{\Omega}_t dt - \int_n \bar{\Omega}_n dt.$$

Cette quantité essentiellement négative n'est nulle que si \bar{W} , $\bar{\Omega}_t$ et $\bar{\Omega}_n$ sont nuls, c'est-à-dire si les deux solides sont immobiles l'un par rapport à l'autre.

L'expression précédente du travail suppose seulement que \bar{F} , \bar{I}_t et \bar{I}_n soient directement opposés aux vecteurs \bar{W} , $\bar{\Omega}_t$, $\bar{\Omega}_n$. Quand cette condition est remplie ce travail est essentiellement négatif, même si les autres lois de frottement admises sont inexactes.

304. - Du frottement de pivotement.

Lorsqu'il y a glissement franc, c'est le travail du frottement de glissement qui l'emporte considérablement sur le travail des frottements de roulement et de pivotement, à cause de la petitesse de \bar{I} . L'influence de ces derniers est noyée en quelque sorte dans celle du frottement de glissement, et comme les lois du frottem^t

de glissement sont très grossièrement connues⁽¹⁾, il est inutile de tenir compte des deux autres frottements dont les effets sont inférieurs aux erreurs d'évaluation commises.

C'est seulement dans le cas où le glissement est nul ou négligeable que le faible travail des frottements de roulement et de pivotement devient prépondérant, et c'est dans ce cas seulement qu'on a étudié [tant par voie théorique que par voie expérimentale] les lois de ces frottements. Encore s'est-on limité à l'étude du roulement pur et du pivotement pur. Nous avons indiqué [N° 44] les lois du frottement de roulement d'une roue ou d'un rouleau sur un plan, quand le rouleau tourne sans pivoter ni glisser; le roulement pur de deux roues ou rouleaux l'un sur l'autre, a fait aussi l'objet de mesures expérimentales.

Disons maintenant quelques mots du pivotement pur et des lois du frottement correspondant, telles qu'elles ressortent des travaux de M. M. Hertz, Léauté et Lecornu.

Les deux solides en contact tournent l'un par rapport à l'autre autour de leur normale commune fixe dans les deux corps: ils se touchent non par un point, mais par une petite aire, qu'on démontre être sensiblement une ellipse, dont le périmètre dépend de la nature et de la forme géométrique des surfaces en contact: si E désigne la longueur de ce périmètre, l'axe Γ_n du couple de frottement de pivotement est donné par la formule:

$$\Gamma_n = \frac{3}{32} f E N, \quad [f \text{ coefficient de Coulomb}]$$

On admet que les lois du frottement de roulement pur et de pivotement pur sont encore vraies quand il y a à la fois roulement et pivotement. Comme E est d'autant plus grand (toutes choses égales d'ailleurs) que les deux surfaces sont plus écrasées l'une contre l'autre, c'est-à-dire que N est plus grand, on voit que, dès que N sera suffisamment grand, la quantité $\frac{3fE}{32}$ l'emportera très notablement sur le coefficient $k = \frac{fE}{N}$, et

(1) 1^{ère} année N° 522. Quand les corps frottants sont lubrifiés, nous avons vu que les lois de Coulomb sont tout à fait inexactes.

par suite le frottement de pivotement et son travail jouera un rôle prédominant, à moins que ω_n ne soit nul ou négligeable devant ω_t , c'est-à-dire que le mouvement se réduise sensiblement à un roulement pur.

Dans le cas particulier où une des surfaces S, Z est une sphère et l'autre une surface de révolution, la loi de variation de E , d'après les courbures des surfaces en contact se simplifie et conduit à la conclusion suivante: pour des substances identiques [c'est-à-dire pour la même valeur de f] et pour des pressions normales égales, le périmètre E est plus grand si la surface de révolution tourne sa concavité vers le centre de la sphère que si elle tourne sa convexité vers ce centre ou que si elle est à courbures opposées. La résistance au pivotement est donc plus grande dans le premier cas que dans les deux autres.

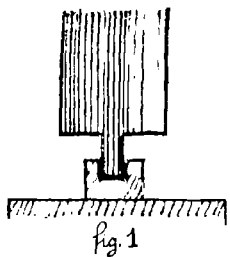
305. - Mouvements lousvoyants. - Signalons une conséquence intéressante des lois du frottement: considérons un solide S de masse M qui repose par une base sur un plan horizontal rugueux. Si j'applique à S en son centre de gravité une force horizontale Φ , le solide ne se mettra en mouvement (et dans le sens de Φ) que si Φ surpasse $f_0 Mg$, [f_0 coefficient de frottem^t au départ]. Mais si le solide est animé d'un mouvement de translation de vitesse V et si on lui applique en G une force $\bar{\Phi}$ horizontale et perpendiculaire à V , le solide déviara dans le sens de $\bar{\Phi}$ si petit que soit $\bar{\Phi}$. La force $\bar{\Phi}$ surmonte la résistance au glissement en lousvoyant en quelque sorte, comme un bateau qui évite le vent debout. De là le nom de mouvement lousvoyant donné à l'effet dont il s'agit. Cette remarque prête à de nombreuses applications. Elle explique, par exemple, le dérapage auquel sont exposés les véhicules circulant en courbe lorsqu'une roue est brusquement enrayée.

306. - Liaisons des arbres tournants. - Les liaisons qu'on rencontre le plus fréquemment dans les machines, sont celles qui assujettissent un arbre [c'est-à-dire un solide de révolution] à tourner autour de son axe de figure maintenu fixe, ou lié invariablement à un autre arbre de

⁽¹⁾ Dans les applications des N^{os} 45-47, ω_n est nul.

machine. Quel que soit le mode de suspension adopté, les réactions vraies ne se réduisent jamais à des forces rigoureusement appliquées en des points de l'axe géométrique de l'arbre et la liaison engendre des frottements, qu'il faut rendre aussi faibles que possible, tant à l'aide de lubrifiants qu'à l'aide des modes de suspension les mieux adaptés. Nous avons déjà discuté le cas où les extrémités de l'arbre reposent sur des coussinets et discuté le frottement des coussinets [1^{ère} année N^o 529]. Nous allons étudier maintenant un autre mode de suspension qui va nous faire concevoir comment le calcul du frottement de pivotement pur peut se déduire des lois ordinaires du frottement de glissement.

307 - Pivot sur crapaudine. - Considérons un arbre de machine, que nous supposons vertical et fixé par ses deux extrémités. Pour réaliser la liaison, on fait souvent supporter l'extrémité inférieure de l'arbre par une crapaudine, boîte métallique cylindrique à parois très épaisses à l'intérieur de laquelle tourne l'extrémité de l'arbre [fig. 1]. L'extrémité supérieure peut être engagée



dans une crapaudine analogue, mais c'est la crapaudine inférieure qui supportera vraiment la pression de l'axe. Soit N la pression totale de l'arbre sur la base circulaire de la crapaudine, O le centre de cette base (située sur l'axe de rotation OZ) et r son rayon. Nous supposons N répartie uniformément entre tous les éléments de surface $d\sigma$ de cette base. Soit $d\sigma$ et $d\sigma'$ deux éléments de la base symétriques par rapport à O ; les deux forces de frottement F et F' qui s'exercent sur les éléments de l'arbre en contact respectivement avec $d\sigma$ et $d\sigma'$ sont égales à $\mu \frac{N d\sigma}{\pi r^2}$, et de sens contraire, car elles sont directement opposées aux vitesses de ces éléments, vitesses dues à la rotation ω de l'arbre et qui sont de sens contraire pour ces deux éléments. Les deux forces F et F' équivalent donc à un couple, et l'axe de ce couple est évidemment dirigée selon OZ en sens inverse de ω . Associons à tous les éléments de surface $d\sigma$ compris entre les deux

cercles de centre O et de rayon r et $r + dr$: le moment [en valeur absolue] des forces F par rapport au point O est évidemment: $\frac{fN r}{\pi l^2} \times \text{aire de la couronne} = \frac{fN r^2}{\pi l^2} 2\pi r dr = 2 \frac{fN}{l^2} r^3 dr$.

L'axe du couple engendré par tous les frottements a donc comme valeur absolue:

$$\frac{2fN}{l^2} \int_0^l r^3 dr = \frac{2}{3} fN l = \int \frac{E \cdot N}{3\pi}$$

si E désigne la longueur du périmètre de la base⁽¹⁾.

On voit qu'il y a avantage, pour diminuer le frottement, à diminuer le rayon de base autant que l'on permet la résistance de l'arbre et du pivot, ce qui était d'ailleurs intuitif, puisqu'on se rapproche d'autant plus de la suspension idéale que les contacts imposés par la liaison sont plus voisins de l'axe géométrique.

Pivot sur épaulement.

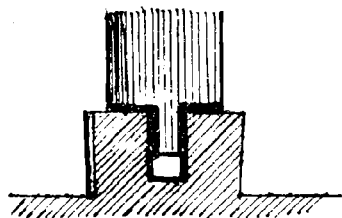


fig. 2

Dans certains cas, l'arbre repose sur un épaulement [fig. 2], en sorte que la base qui supporte l'arbre est une couronne circulaire. Rien n'est changé au calcul précédent, à cela près que r , au lieu de varier de 0 à l , varie de l' à l [$l' < l$].

L'aire de la base, au lieu d'être égale à πl^2 est égale à $\pi (l^2 - l'^2)$; on a donc, comme valeur de l'axe du couple engendrée par tous les frottements

$$\frac{2fN}{l^2 - l'^2} \int_{l'}^l r^3 dr = \frac{2fN}{3(l^2 - l'^2)} (l^3 - l'^3) = \frac{2fN}{3} \frac{(l^2 + ll' + l'^2)}{l + l'}$$

Quant au travail (négatif) des forces de frottement, on l'obtient immédiatement en multipliant la valeur que nous venons de calculer par l'angle dont a tourné l'arbre.

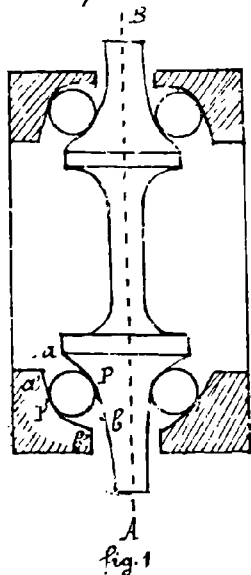
(1) Il est intéressant de comparer cette formule avec la formule du N° 304: $\Gamma_n = \frac{3}{32} fEN$; les coefficients numériques de fEN , dans les deux formules, diffèrent peu de $\frac{1}{10}$.

Roulement sur billes.

308. - Description du dispositif.

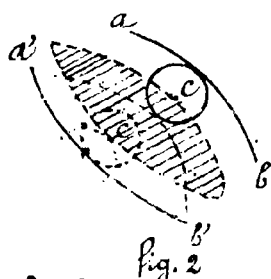
Un procédé qui diminue considérablement le travail des forces de frottement dans la rotation d'un arbre, consiste à interposer des billes entre l'arbre et son support de façon à supprimer les glissements. Ce procédé est aujourd'hui d'un usage courant notamment dans les cricages, de bicyclettes et d'automobiles.

L'arbre et le support sont deux corps de révolution autour de l'axe de rotation AB , qui ne sont en contact que par les billes. Pour que les billes ne puissent s'échapper, on les loge vers chaque bout de l'arbre dans un espace annulaire compris entre un épaulement présenté par l'axe

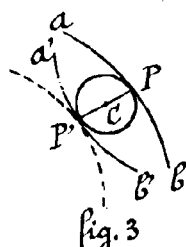


et un évidement présenté par le support. L'évidement (surface de révolution engendrée par $a'b'$) constitue la cuvette; l'épaulement (surface de révolution engendrée par ab) s'appelle le cône. La cuvette est une surface de révolution à courbure positive qui tourne sa concavité vers l'axe AB , le cône est une surface à courbures opposées. Dans chaque plan méridien, tel que le plan de la figure 1, la distance entre le cône et la cuvette présente un maximum précisément égal au diamètre de la bille.

On obtient ce résultat à l'aide d'un jeu de vis (filetage) qui permet d'écarter ou de rapprocher soit les deux cônes, soit les deux cuvettes: si on rapproche, par exemple, les deux cuvettes, à un certain moment on écrasera les billes. On dit alors que le serrage est



L'espace hachuré est l'espace exagéré, sur la figure où peut se mouvoir le centre de la bille.



fait à fond. Avant que le serrage soit fait à fond, chaque cavité présente l'aspect de la figure (2) où C est un grand cercle de la

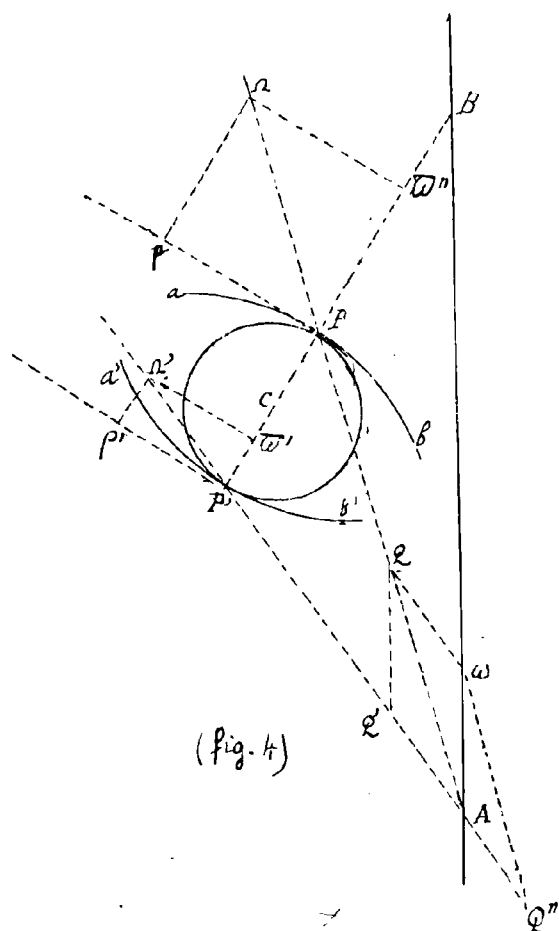
bille; quand le serrage est fait à fond, l'aspect est celui de la figure 3, la bille est tangente au cône et à la cuvette en deux points P, P' diamétralement opposés. Le centre C de la bille ne peut que décrire un parallèle, ainsi que les points P et P' , pendant que la bille tourne autour de C . Le serrage doit être fait presque à fond pour éviter les ballottements de l'arbre, mais sans excès de pression: sinon, les frottements deviendraient considérables.

Au lieu de supposer fixe le support auxquelles sont liées invariablement les cuvettes, il est loisible de supposer que ce support est un arbre creux qui peut être animé d'un mouvement quelconque⁽¹⁾. Le système que nous considérons est donc en définitive un système de deux arbres assujettis à tourner l'un par rapport à l'autre autour de l'axe AB par l'intermédiaire de billes. Je représenterai dans ce qui suit, par ω la rotation instantanée de l'arbre creux (extérieur), par rapport à l'arbre plein (intérieur). La rotation de l'arbre plein par rapport à l'arbre creux est la rotation inverse.

309. — Étude du mouvement. — Chaque bille est supposée de masse négligeable, c. à d. que son poids est négligeable par rapport aux pressions qu'elle supporte. Les forces extérieures qui lui sont appliquées se font donc sensiblement équilibre. Ces forces sont les réactions (sur la bille) du cône [pression normale, N , force de frottement F , couple Γ] et de la cuvette [pression N' , force de frottement F' , couple Γ']. Les pressions N et N' sont donc égales et de sens contraires, de même que F et F' . Je dis, d'autre part, que la bille va rouler et pivoter sans glisser sur le cône et la cuvette: en effet, le moment des deux forces égales F et F' par rapport à C est égal (en valeur absolue) à $2Fl$ [l rayon de la bille], et on a: $2Fl = \Gamma_1$, si Γ_1 est la longueur de $\Gamma + \Gamma'$. Comme $\frac{\Gamma}{CN} + \frac{\Gamma'}{CN}$ sont très petits par rapport à f [à moins que l'écrasement de la bille ne soit considérable], la valeur $\frac{F}{N} = \frac{\Gamma_1}{2lN}$ est inférieure à f . La condition pour que le glissement reste nul est remplie.

(1) C'est ce dispositif que présentent les roues de bicyclettes.

La bille va donc rouler et pivoter sans glisser sur le cône et sur la cuvette. Par rapport au cône, le mouvement élémentaire de la bille est une rotation $\bar{\Omega}$ autour de P . De même le mouvement infinitésimal de



(Fig. 4)

la bille par rapport à la cuvette est une rotation $\bar{\Omega}'$ autour de P' . Comme la cuvette est animée de la rotation $\bar{\omega}$ autour de l'axe AB , les deux rotations simultanées $A\bar{\omega}$ et $P'\bar{\Omega}'$ équivalent à la rotation $P\bar{\Omega}$. Autrement dit, les deux vecteurs $P'\bar{\Omega}'$ et $A\bar{\omega}$ admettent une résultante géométrique qui est $P\bar{\Omega}$. Les trois vecteurs $A\bar{\omega}$, $P\bar{\Omega}$, $P'\bar{\Omega}'$ sont donc concourants ou parallèles : Soit A leur point de rencontre sur AB , point qui peut être à l'infini : une fois A connu, il suffit de décomposer $A\bar{\omega}$ suivant les deux directions AP et AP' pour obtenir les deux vecteurs $A\bar{Q}$ et $A\bar{Q}''$ équipollents à $\bar{\Omega}$ et à $\bar{\Omega}'$. Ses vecteurs $\bar{\Omega}$ et $\bar{\Omega}'$ sont donc bien définis en fonction de $\bar{\omega}$ et de l'unique indéterminée dont dépend la position de A sur AB . Pré-

cisons ce résultat.

Appelons \bar{w} et ρ les composantes de $\bar{\Omega}$ suivant la normale $P'P$ et la tangente en P à la méridienne du cône : \bar{w} est la vitesse de pivotement, ρ la vitesse de roulement de la bille sur le cône. De même, soit \bar{w}' et ρ' les projections de $\bar{\Omega}'$ sur la normale PP' et la tangente en P' à la méridienne de la cuvette : \bar{w}' et ρ' sont les vitesses de pivotement et de roulement de la bille sur la cuvette. Soit enfin l le rayon de la bille, d et d' les distances de P et de P' à l'axe AB . Le moment de $P\bar{\Omega}$ par rapport à P' est égal à $2l\rho$; mais il est égal aussi au moment résultant de $P'\bar{\Omega}'$ et de $A\bar{\omega}$ [par rapport à P'], c'est-à-dire à

ω . d. On a donc :

$$2lp = \omega d'.$$

De même, en considérant les moments par rapport à P , on trouve :

$$2lp' = \omega d.$$

Les vitesses de roulement f et f' sont donc bien déterminées en grandeur [et évidemment en sens], en fonction de ω , indépendamment de la position de A sur l'axe. Quant à $\bar{\omega}$ et $\bar{\omega}'$ en projetant sur PP' on trouve aussitôt (dans le cas de la figure) en appelant α l'angle PBA :

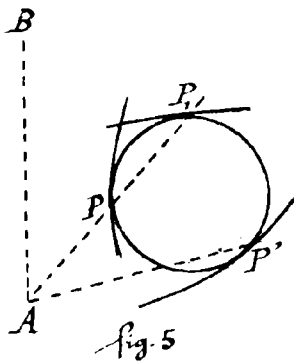
$$\bar{\omega} = \bar{\omega}' + \omega \cos \alpha.$$

On voit que la somme des pivotements de la cuvette par rapport à la bille ^{et de la bille} par rapport au cône est égale à $\omega \cos \alpha$.

310. - Rôle de frottement de pivotement. - On connaît donc f et f' en fonction de ω , et $\bar{\omega}'$ en fonction de ω et de $\bar{\omega}$. Mais $\bar{\omega}$ reste indéterminé. Admettons que le pivotement ait lieu par rapport à celle des deux surfaces (cône et cuvette) qui oppose au pivotement la moindre résistance. Le cône et la cuvette sont supposés de même matière et affectés du même coefficient de frottement de glissement f ; les pressions N et N' de la bille sur ces deux surfaces sont les mêmes. D'après la remarque du n° 304, la cuvette (qui tourne sa concavité vers le centre de la sphère) oppose au pivotement une résistance plus grande que le cône. La bille pivotera donc sur le cône et roulera sans pivoter sur la cuvette : $\bar{\omega}' = 0$, $\bar{\omega} = \omega \cos \alpha$, AP est tangent à la cuvette. D'après les lois du frottement de pivotement, on aura (Γ_n et Γ_n' désignant les axes des couples dus au frottement de pivotement entre la sphère et le cône et entre la sphère et la cuvette) :

$$\Gamma_n = RN, \quad \Gamma_n' \leq R'N', \quad (\text{car } N' = N).$$

Le travail du frottement de pivotement entre la bille et la cuvette est nul; le travail du frottement de pivotement entre la bille et le cône est $\int RN \omega \cos \alpha dt$ (en valeur absolue). D'autre part, c'est le travail du frottement de pivotement qui est ici le plus important [n° 304]. Le cône doit donc s'user plus vite que la cuvette. C'est ce que vérifie l'observation.

311. - Billes à plusieurs contacts.

Quand les pressions à transmettre sont considérables, on emploie un dispositif où chaque bille a plusieurs contacts, deux contacts par exemple, avec le cône (ou la cuvette); le mouvement de la bille par rapport au cône est alors une rotation Ω autour de PP_1 (puisque P et P_1 ont une vitesse nulle par rapport au cône), et la formule⁽¹⁾ donnant ρ , Ω est connu. Le mouvement de la bille sur la cuvette est une rotation connue autour de AP' [fig. 5]; il y a roulement sans pivotement si AP' est tangent à la cuvette.

Quand la bille touche aussi la cuvette par deux points P', P_1 , il faut que les trois droites $PP_1, P'P_1$ et AB soient concourantes pour que la bille ne glisse ni sur le cône ni sur la cuvette en aucun point.

Rappel des principes de l'énergétique.

312. - Principe de la conservation de l'énergie. -

Les axes $Oxyz$ étant arbitrairement choisis, soit T l'énergie cinétique d'un système matériel quelconque S , ΔT la variation de cette énergie entre les instants t_0 et t_1 , E_e le travail des forces extérieures, E_i le travail des forces intérieures dans cet intervalle de temps. Le théorème des forces vives s'écrit :

$$(1) \quad \Delta T - E_e = E_i$$

Les forces intérieures étant décomposées en forces à distance et forces de contact, si E_i^d est le travail des premières, E_i^c le travail des secondes, on a : $E_i = E_i^d + E_i^c$. Chacune des quantités E_i^d, E_i^c [donc E_i] est indépendante du choix des axes. [1^{ère} année, N° 196]. Les quantités $T, \Delta T, E_e$ changent quand on substitue aux axes de nouveaux axes mobiles par rapport aux premiers; mais la différence $\Delta T - E_e$ est une grandeur absolue [j'entends indépendante]

du choix des axes].

Supposons d'abord que les mouvements du système s'accompagnent exclusivement de phénomènes thermiques. Soit Q_e la quantité de chaleur cédée par le système à l'extérieur [Q_e est < 0 si S emprunte de la chaleur à l'extérieur] L'unité de chaleur étant choisie de façon que son équivalent mécanique soit l'unité du travail, on sait qu'on a [1^{ère} année, N. 209]:

$$(2) \quad \Delta T - \mathcal{E}_e + Q_e = -\Delta W,$$

W étant une expression qui reprend la même valeur chaque fois que le système reprend la même configuration, et chacun de ses éléments la même température. Appelons énergie interne totale de S la quantité $T + W = \mathcal{E}$; l'égalité (2) s'écrit:

$$(3) \quad \Delta \mathcal{E} - \mathcal{E}_e + Q = C^{te}$$

La quantité $\Delta \mathcal{E}$ dépend du choix des axes, mais $\Delta \mathcal{E} - \mathcal{E}_e$ est une grandeur absolue.

Quand des phénomènes chimiques, électriques, etc. accompagnent les phénomènes mécaniques et thermiques, l'égalité (3) subsiste; mais Q_e représente la quantité totale d'énergie [positive ou négative] cédée sous diverses formes par S à l'extérieur, et W est une expression qui reprend la même valeur chaque fois que S reprend la même configuration et chacun de ces éléments la même température et le même état chimique, électrique, etc.

313. - Considérons, par exemple, une arme à feu, et le système formé par l'arme (de masse M), et la charge de poudre (de masse μ). Soit t_0 l'instant où commence l'explosion, t , l'instant où le projectile sort de l'âme de l'arme. Appelons H la variation d'énergie interne non cinétique ($H > 0$) de la masse de poudre, dans la transformation chimique qu'elle subit entre les instants t_0 et t . Soit \bar{V} la vitesse du projectile et \bar{W} celle de l'arme à l'instant t , et soit $\mu \frac{U^2}{2}$ l'énergie cinétique de la charge de poudre [volatilisée totalement ou partiellement]. Soit enfin Q l'énergie calorifique acquise par l'arme, le projectile ou cédée à l'extérieur [entre les instants t_0 et t]. Enfin admettons que l'arme et le projectile ne subissent

pas de déformation, c'est-à-dire que leur variation d'énergie interne (non cinétique) résulte seulement de leur changement de température. On a :

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Mw^2}{2} + \frac{\mu u^2}{2} + Q_e - \mathcal{E}_e = H ;$$

\mathcal{E}_e se réduit au travail de la pesanteur et des réactions de l'air sur l'arme, le projectile et les gaz d'explosion; si on néglige ce travail dans le court intervalle de temps t_0 à t_1 , il vient :

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Mw^2}{2} + \frac{\mu u^2}{2} + Q = H .$$

314. - Cas où les phénomènes thermiques accompagnent exclusivement les phénomènes mécaniques. -

Dans ce cas, on admet, d'après l'expérience, que les forces intérieures à distance dérivent d'un potentiel, soit W^d ; posons alors :

$$W = W^d + W^c ;$$

l'expression W^c est une somme de termes dont chacun ne dépend que de l'état d'un élément de système [à savoir de sa densité, de sa déformation et de sa température]. Les égalités (1) et (2) entraînent :

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_i^d + \mathcal{E}_i^c = \Delta T - \mathcal{E}_e = -Q_e - \Delta W = -Q_e - \Delta(W^d + W^c) ,$$

ou (comme $\mathcal{E}_i^d = \Delta W_i^d$)

$$\mathcal{E}_i^c = -Q_e - \Delta W^c .$$

Dans la plupart des applications aux machines, les forces intérieures à distance sont négligeables, et le travail de toutes les forces intérieures se réduit à \mathcal{E}_i^c et W à W^c . — Exemples. — Si S est un fluide parfait partout de même nature, W^c est une expression de la forme $\Sigma m \varphi(\rho, \theta)$, [m masse d'un élément, ρ sa densité, θ sa température].

Si S est formé de solides indéformables [de dimensions d'ailleurs aussi petites que nous voulons], autrement dit, si S se compose d'éléments matériels dont chacun reste identique à soi-même, — ΔW^c est nul, et on a :

$$E_i^c = Q_e.$$

Nous savons que, dans ce cas, le travail des forces de contact intérieures est toujours négatif [N° 305]; le système cède donc toujours dans ce cas de la chaleur à l'extérieur. Ce cas se présentera dans la réalité quand S sera formé de solides ^{naturels} ayant partout et constamment la même température.

315. - Remarque sur l'évaluation de Q_e . - L'évaluation de Q_e prête dans certains cas, à des difficultés qu'il convient de signaler. Considérons un solide S_1 qui frotte sur un autre solide S_2 , les deux solides gardant la même température. Le système S formé par S_1 et S_2 cède au milieu extérieur une certaine quantité de chaleur Q_e engendrée par les frottements mutuels de S_1 et S_2 . Mais regardons S_1 comme un système? Quelle sera la quantité de chaleur cédée par S_1 au milieu extérieur? Ce ne sera pas Q_e , car alors S_2 ne céderait aucune chaleur à l'extérieur, et pourquoi?

Pour éviter cette difficulté, nous appliquerons toujours le principe de la conservation de l'énergie en faisant rentrer dans le système les corps dont les contacts avec le système considéré engendrent par frottement une quantité appréciable d'énergie calorifique. Par exemple, supposons que le système S soit un arbre monté sur crapaudine; nous ferons rentrer les pivots dans le système.

316. - Principe de Carnot-Clausius. - Le résultat que nous avons énoncé à la fin du N° 314 n'est qu'un cas particulier d'un principe plus général applicable à tous les systèmes matériels. Convenons de dire qu'un système matériel parcourt un cycle entre les instants t_0 et t_1 , quand chacun de ses éléments se retrouve à l'instant t_0 dans le même état mécanique physique et chimique qu'à l'instant t_1 , abstraction faite de sa position dans l'espace et de sa vitesse. On peut alors énoncer le principe suivant:

Quand un système, dont la température est partout la même et constante, parcourt un cycle, la chaleur

Q_e cédée par le système au milieu extérieur pendant la durée du cycle, est nécessairement positive.

Notamment, quand chaque élément de S reste identique à soi-même, le principe précédent s'applique à tout intervalle de temps t_0, t_1 . Ce principe rentre lui-même dans le cas du principe de Carnot, que nous allons rappeler.

Soit Σ la surface limite totale du système S , $d\sigma$ un élément de Σ et $dq = q'd\sigma dt$ la quantité de chaleur⁽¹⁾ qui, entre les instants t et $t + dt$, traverse $d\sigma$ vers l'intérieur de S , [$q' > 0$ ou < 0]; posons

$$K = \iint_{\Sigma} \frac{q'd\sigma}{\Theta},$$

Θ désignant la température absolue de S en $d\sigma$ à l'instant t . L'expression $K dt$ est de la forme :

$$dW - \varepsilon dt,$$

où W représente une quantité qui reprend la même valeur chaque fois que S décrit un cycle, et ε une quantité essentiellement positive. Notamment, chaque fois que S décrit un cycle, entre t_0 et t_1 , l'expression $\int_{t_0}^{t_1} K dt$ est essentiellement négative.

Quand t_0 et t_1 sont quelconques, si W_0 et W_1 sont les valeurs de W correspondant à l'état du système aux instants t_0 et t_1 , on a :

$$(4) \quad \int_{t_0}^{t_1} K dt = W_1 - W_0 - \int_{t_0}^{t_1} \varepsilon dt.$$

317. - En particulier, si la température du système est partout la même et constante, l'égalité (4) donne :

$$- \frac{Q_e}{\Theta} = W_1 - W_0 - \int_{t_0}^{t_1} \varepsilon dt.$$

Dans ce cas, quand le système parcourt un cycle entre les instants t_0 et t_1 , on a donc $Q_e > 0$. Quand chaque élément demeure identique à soi-même, Q_e est essentiellement positif, [N° 314].

Si le système a partout la même température,

(1) Q_e entre les instants t et $t + dt$ est égal à $- dt \iint_{\Sigma} q'd\sigma$.

Holt

mais si cette température varie avec t , soit dq la quantité de chaleur empruntée à l'extérieur par S entre les instants t et $t+dt$; on a:

$$\frac{dq}{\Theta} = dW - \varepsilon dt.$$

Quand le système parcourt un cycle entre les instants t_0, t_1 , on a: $\int_{t_0}^{t_1} \frac{dq}{\Theta} < 0$.

Supposons maintenant que l'échange de chaleur entre S et l'extérieur n'ait lieu que par deux parties Σ_1, Σ_2 de la surface Σ , et que la température Θ_1 de Σ_1 soit partout la même et constante, ainsi que la température Θ_2 de Σ_2 . Soit $\Theta_1 > \Theta_2$, et soit dq_1 la quantité de chaleur qui pénètre par Σ_1 dans S entre les instants t et $t+dt$, et dq_2 la quantité de chaleur qui sort de S par Σ_2 ; le principe exprime alors qu'on a:

$$\frac{dq_1}{\Theta_1} - \frac{dq_2}{\Theta_2} = dW - \varepsilon dt,$$

Si notamment S parcourt un cycle, et si Q_1 est la quantité de chaleur gagnée par S à travers Σ_1 pendant le cycle, Q_2 la quantité de chaleur cédée par S à travers Σ_2 , on a:

$$\frac{Q_1}{\Theta_1} - \frac{Q_2}{\Theta_2} < 0.$$

On donne, dans tous ces cas, le nom d'entropie à l'expression W attachée au système et bien déterminée quand on connaît l'état de chaque élément. Si, en particulier, S n'a aucun échange de chaleur avec l'extérieur, on a: $q \equiv 0, K=0$, et

$$W_1 - W_0 = \int_{t_0}^{t_1} \varepsilon dt > 0.$$

L'entropie d'un système qui n'a aucun échange calorifique avec l'extérieur croît donc constamment.

La quantité $\int_{t_0}^{t_1} \varepsilon dt$ est appelée par Clausius le travail non compensé.

318. - Réversibilité. - Lorsque la transformation du système est assujettie à certaines restrictions, (et notamment sont très lentes)⁽¹⁾, l'expérience montre qu'on peut faire en sorte que la transformation s'effectue en sens inverse en même temps que le flux de chaleur est renversée.

Dans ces conditions, K change de signe ainsi que dW ; ε devrait donc changer de signe, et comme il est positif, ε est nul [c'est-à-dire négligeable]. On dit alors que la transformation de S est réversible: dans une telle transformation, Kdt se réduit sensiblement à dW .

319

⁽¹⁾ Par exemple, si le système est un liquide incompressible visqueux, ses mouvements, s'ils sont rapides, s'accompagnent d'un dégagement de chaleur, à cause de la viscosité: le phénomène est irréversible. Mais quand les mouvements sont lents, les forces de viscosité sont négligeables, ainsi que la chaleur qu'elles engendrent; le phénomène est sensiblement réversible.

Notions générales sur les Machines.

319. - Définitions. - Lorsqu'on dispose d'un agent naturel (chûte d'eau, vapeur, muscle, etc) pour produire un effet déterminé, il est très rare qu'on puisse l'employer directement à l'usage qu'on a en vue. Il faut commencer par transformer les forces immédiates qu'il exerce. L'organe de cette transformation s'appelle une machine. C'est ainsi que, quand on dispose d'une chute d'eau pour écraser du blé, entre la chute et le blé on interpose un moulin.

Les machines affectent les types les plus variés. Elles se composent essentiellement d'un certain nombre de pièces rigides, reliées entre elles et à des appuis, les liaisons [ou du moins certaines d'entre elles] pouvant être effectuées par les liens déformables [courroies, etc]. Mais dans la marche normale d'une machine, la machine reprend périodiquement la même configuration: les pièces déformables reprennent la même forme⁽¹⁾ et toutes les pièces (rigides et autres) reprennent les mêmes dispositions mutuelles. En général, une machine est un système à liaisons complètes, mais cette restriction n'est point essentielle⁽²⁾.

320. - Choix des axes. - Pour étudier la marche d'une machine, nous rapporterons systématiquement son mouvement à des axes liés invariablement au corps même⁽³⁾ de la machine. La machine sera dite fixe si son corps est lié invariablement au sol. Par exemple, pour étudier la marche d'une machine à vapeur fixe, nous rapporterons le mouvement de la machine à des axes liés invariablement à la terre. Si la machine à vapeur fait partie d'un navire ou d'un ballon, nous

(1) En réalité, toutes les pièces de la machine (rigides et autres) subissent de lentes déformations permanentes; en un mot, la machine s'use. Mais cette usure est très lente et tout à fait négligeable dans l'étude de la marche normale d'une machine.

(2) Comme exemple (très rare) d'une machine qui n'est pas à liaisons complètes, on peut citer les anciennes meules à poudre où les cylindres qui parcourent la piste peuvent tourner librement autour de leur axe.

(3) Il n'y aura jamais, dans les applications, d'ambiguïté sur le sens de ce terme.

rapporçons le mouvement de la machine à des axes liés invariablement à la carcasse du navire ou à la nacelle du ballon.

321. - Périodicité de la marche normale. - Les axes étant ainsi choisis, chaque fois que la machine reprend la même configuration, elle reprend la même position par rapport aux axes. D'une manière précise, dans la marche normale, la machine doit périodiquement reprendre les mêmes positions, avec les mêmes vitesses, être soumise aux mêmes forces, etc. Cette régularité est indispensable à son bon fonctionnement. En particulier, la force-vive de la machine est ou constante ou périodique pendant la marche normale. La période d'ailleurs est très courte par rapport à la durée d'emploi continu de la machine : par exemple, pour une locomotive, la période est la durée d'un tour de roue.

322. - Réactions intérieures. - Les pièces mobiles de la machine sont en général assujetties à des liaisons avec des appuis fixes [pivots, etc.] c'est-à-dire avec des appuis invariablement liés au corps de la machine. Nous regarderons toujours (N^o 315) ces appuis comme faisant partie de la machine : d'après cette convention, les réactions qui s'exercent entre les pièces mobiles de la machine et les appuis fixes seront toujours des forces intérieures⁽¹⁾ Nous admettrons, pour plus de clarté que les forces intérieures à distance sont négligeables. Dans ces conditions, quand la machine se compose de pièces rigides, le travail total des forces intérieures est toujours négatif. Soit T_p ce travail : nous donnerons à T_p le nom de travail perdu : cette perte de travail est causée par les frottements et par les chocs intérieurs. Pour qu'elle fût nulle, il faudrait qu'il n'y eût ni chocs intérieurs, (ce qui est sensiblement réalisable dans bien des cas), ni frottements intérieurs (ce qui est impossible).

Quand la machine renferme des câbles et des courroies, les conclusions précédentes subsistent si on assimile les câbles et courroies à des cordes inextensibles

(1) Mais nous ne faisons pas rentrer dans la machine les corps sur lesquels l'outil exerce son effet, et qui peuvent être des corps fixes.

affectées de raideur. [1^{ère} année N. 27]. Mais on peut aussi regarder ces liens comme des systèmes quelconques dont la température est partout la même et constante. En vertu du principe du N. 316, le travail des réactions intérieures de ces liens pendant une période est essentiellement négatif.

Les réactions intérieures de la machine sont souvent appelées les résistances passives. Le travail perdu a surtout pour effet 1° d'échauffer la machine; 2° de l'user (c'est-à-dire d'infliger à ces pièces des déformations permanentes).

323. - Forces motrices et résistances extérieures. -

Considérons maintenant les forces extérieures appliquées à la machine. Supposons d'abord la machine fixe: les éléments de la machine seront soumis, en outre de la pesanteur, à certaines forces extérieures absolues. Parmi ces forces, les unes ont un travail positif⁽¹⁾, les autres un travail négatif: les premières seront dites forces motrices, les autres résistances utiles. Le mot utile est justifié par ce fait que ces résistances accompagnent l'effet utile qu'on veut produire: par exemple, s'il s'agit d'une machine à laminier, les résistances extérieures sont les réactions exercées sur l'outil par le métal qu'on lamine.

On donne au travail des forces motrices le nom de travail moteur, et au travail des résistances utiles [pris en valeur absolue] le nom de travail utile. Nous reviendrons tout à l'heure sur la notion de travail utile.

Pour ce qui est de la pesanteur, son travail pendant une période du mouvement est nul. Si on étudie la marche de la machine pendant un temps assez long, ce temps sera toujours (avec une très faible erreur) un nombre exact de périodes, et le travail de la pesanteur sera négligeable.

Nous avons supposé la machine fixe. Si le corps de la machine est animé d'un mouvement de translation

(1) Ce travail est bien déterminé puisque les axes auxquels on rapporte le mouvement sont déterminés.

rectiligne et uniforme par rapport à la terre, rien n'est changé à ce qui précède. Si le corps de la machine est animé d'un mouvement quelconque, dans toutes les applications ce mouvement, pendant une période, peut être regardé comme un mouvement de translation dont l'accélération \vec{j} est constante: les axes étant liés au corps de la machine, il faut alors remplacer \vec{q} par $\vec{q} - \vec{j}$. Le travail total (pendant une période) de la nouvelle pesanteur $m[\vec{q} - \vec{j}]$ est encore nul, et la conclusion précédente subsiste.

En définitive, dans le calcul du travail des forces extérieures, nous n'avons à tenir compte que des forces motrices et des résistances utiles [toutes forces absolues].

324. - Récepteur, outil et transmissions.

On distingue, en général, trois parties dans une machine⁽¹⁾.

1° Le récepteur auquel sont appliquées les forces motrices;

2° l'outil qui exerce sur les corps soumis à la machine les forces utiles [égales et directement opposées aux résistances utiles].

3° les transmissions qui relient le récepteur à l'outil.

Le récepteur se compose essentiellement en général, soit d'un arbre tournant autour d'un axe fixe, soit d'un piston animé d'un mouvement alternatif. Les forces motrices sont alors les forces absolues qu'exerce sur l'arbre [et les organes qui lui sont liés invariablement] l'agent moteur dont on dispose [chûte d'eau, muscle, etc], ou bien les pressions qu'exerce sur le piston la vapeur motrice, etc.

325. - Application du théorème des forces vives aux machines.

La machine étant en marche normale, considérons un intervalle de temps, t_0, t_1 , égal à un nombre entier de périodes. On a, dans ce cas: $T_0 = T_1$, et si on appelle

(1) Cette distinction n'a d'ailleurs rien d'absolu, une machine pouvant toujours être décomposée en machines partielles, dont chacune reçoit un travail moteur et fournit un travail utile.

τ_m le travail moteur _____ dans l'intervalle
de temps t_0, t_1

τ_p le travail perdu (travail changé de
signe des résistances passives) _____ " _____

τ_u le travail utile (travail changé de
signe des résistances utiles) _____ " _____

le théorème des forces vives donne : $\tau_e + \tau_i = 0$, c'est-à-dire :

$$(1) \quad \tau_m = \tau_p + \tau_u .$$

Quand on embrasse toute la durée de marche de la machine, depuis la mise en train jusqu'à l'arrêt, on a : $T_0 = T_1 = 0$; si on admet que la machine s'arrête dans la même position qu'au départ, le travail de la pesanteur est nul, et l'égalité (1) subsiste⁽¹⁾.

Si t_0, t_1 est l'intervalle de mise en train de la machine, on a (en admettant toujours qu'à l'instant t_1 la machine occupe la même position qu'à l'instant t_0):

$$T_1 = \tau_m - \tau_p - \tau_u ,$$

d'où :

$$\tau_m = \tau_p + \tau_u + T_1 ;$$

la force-vive acquise joue le rôle d'un travail résistant; une partie du travail moteur a été employé à communiquer à la machine l'énergie cinétique T_1 .

Si t_1, t_2 est la période d'arrêt, on a :

$$T_1 > 0, \quad T_2 = 0 \quad \text{et} : \\ -T_1 = \tau_m - \tau_p - \tau_u ,$$

d'où :

$$\tau_m + T_1 = \tau_p + \tau_u ;$$

l'énergie cinétique joue alors le rôle d'un travail moteur: la machine ne s'arrête qu'après avoir surmonté certaines des résistances.

326 - Rendement d'une machine.

On appelle rendement d'une machine le rapport

(1) En général, les pièces de la machine dont le centre de gravité n'est pas fixe ont une masse peu considérable, et le travail de la pesanteur entre deux positions de la machine est faible.

entre le travail utile et le travail moteur [pendant la marche normale de la machine]; ce rapport ρ est égal d'après ce qui précède à

$$\rho = \frac{T_u}{T_m} = \frac{T_m - T_p}{T_m} = \left(1 - \frac{T_p}{T_m}\right).$$

On doit chercher à rendre ρ le plus grand possible, d'abord pour que le travail moteur soit dépensé aussi efficacement que possible; ensuite parce que le travail perdu est non seulement inutile, mais nuisible puisqu'il a pour effet d'échauffer et d'user la machine. On diminue T_p par un ajustement aussi parfait que possible des pièces de la machine (ajustement qui empêche les chocs sans gêner les mouvements), par le polissage et le graissage des pièces en contact, etc.⁽¹⁾.

Lorsque les forces motrices, les résistances extérieures et la vitesse de marche sont données, le régime de marche et le rendement sont parfaitement définis. Mais en général, la même machine doit être adaptée à une infinité de régimes de marches: à chaque régime de marche normale, correspondent une vitesse de marche, des forces motrices et des résistances extérieures déterminées. Le rendement, dans la plupart des cas, sera différent pour ces différents régimes: le régime pour lequel le rendement sera le plus élevé sera le régime optimum. C'est à ce régime en général qu'il faudra de préférence faire travailler la machine.

327. - Puissance.

Il ne suffit pas de considérer le travail utile total fourni par une machine: il faut considérer encore le temps employé pour produire ce travail. On appelle puissance d'une machine le travail utile qu'elle fournit pendant l'unité de temps.

(1) Une machine idéale serait une machine où T_p serait nul. On dit souvent, sans précaution, qu'une machine idéale est une machine où tous les chocs et tous les frottements intérieurs et extérieurs sont supprimés: d'après cela, une locomotive idéale serait une locomotive qui ne frotterait pas sur les rails, et qui par suite, n'avancerait pas. En réalité, on ne peut parler des frottements entre toutes les pièces de la machine mobiles et fixes [N° 323].

On adopte dans l'industrie, comme unité de puissance, le cheval vapeur c'est-à-dire (par définition) la puissance d'une machine qui fournit 75 kilogrammètres par seconde de travail utile.

Ainsi une machine de 50 chevaux est une machine qui fournit régulièrement et indéfiniment un travail moyen de $50 \times 75 = 3750$ kilogrammètres par seconde. Quand la machine comporte plusieurs régimes de marche, sa puissance varie avec le régime.

Dans certains cas, c'est la puissance qui importe plus que le rendement; par exemple, pour une machine volante, pour une automobile de vitesse, il faut chercher avant tout la plus grande puissance possible pour un poids donné de la machine, fût-ce aux dépens du rendement.

Dimensions. - Les dimensions d'un travail sont, comme on sait, les mêmes que celles d'une force vive ML^2T^{-2} ; les dimensions d'une puissance sont donc ML^2T^{-3} .

328. - Du travail utile.

Nous avons défini le travail utile comme le travail (changé de signe) des résistances utiles, c'est-à-dire le travail des résistances qui accompagnent l'effet utile auquel on emploie la machine. Discutons cette définition.

Dans certains cas, T_u est bien égal au travail vraiment absorbé par l'effet utile. Par exemple, considérons un monte-charge qui élève un fardeau de masse μ et revient (après s'en être déchargé) à sa position initiale. Le travail vraiment utile accompli est égal à Wh , W désignant le poids du fardeau, h la hauteur dont il a été soulevé. Or le travail des résistances utiles [réactions du fardeau sur le plateau du monte-charge] est égal à $-Wh$; T_u représente bien ici le travail vraiment utilisé.

Mais en général le travail vraiment absorbé par l'effet utile est inférieur à T_u .

Supposons d'abord que la machine S ait pour but d'actionner une autre machine (un arbre, ou une bielle, etc) avec laquelle elle est articulée. Les forces \vec{F} que S exerce sur l'arbre (ou sur cette bielle, etc) sont égales et directement opposées aux résistances utiles \vec{R} [forces exercées par l'arbre (ou la bielle, etc) sur S]; chaque force \vec{F} a même point d'application qu'une des résistances \vec{R} , à savoir un des points d'articulation de la machine et de l'arbre (ou de la bielle, etc.) Le travail total des forces \vec{F} et \vec{R} est nul, si on admet que les articulations sont parfaites et par suite sans frottement. Le travail vraiment utile, à savoir le travail des forces \vec{F} , coïncidera donc avec le travail (changé de signe) T_u des résistances \vec{R} , c'est-à-dire avec le travail que, par définition, nous avons appelé le travail utile. En fait, les articulations entraînant toujours des frottements, le travail total des forces \vec{F} et \vec{R} sera négatif, et le travail vraiment utilisé sera inférieur au travail T_u , la différence entre les deux travaux étant absorbée par les frottements des articulations.

Si la machine S , au lieu d'être articulée avec la seconde machine, est en contact avec elle par certaines pièces solides, soit C et Γ deux pièces en contact des deux machines; le travail des deux forces \vec{F} et \vec{R} serait nul si les deux pièces glissaient sans frottement (ou engrenaient parfaitement l'une sur l'autre). En réalité, il est toujours négatif: si W est la vitesse de glissement de Γ sur C , F_t la composante tangentielle de \vec{F} , il

est égal (en négligeant les frottements de roulement et de pivotement) à

$$-\int_{t_0}^{t_1} F_t W dt.$$

Quand la machine S agit sur un liquide ou un gaz, soit encore \vec{F} la force exercée par S sur un élément du fluide en contact avec S : \vec{F} est égale et directement opposée à une résistance utile \vec{R} , et quand il n'y a pas de

chocs, le travail des forces \bar{F} est égal à T_u diminuée de la valeur absolue du travail des forces de frottement. Ce travail donné par la même formule que ci-dessus, est très faible. Mais quand il y a chocs, le travail (négalif) des percussions de contact peut être considérable, et le travail des forces \bar{F} est très notablement inférieur à T_u . Si la machine est un ventilateur, le travail dépensé à ébranler l'air est moindre que T_u .

D'une manière générale, le travail vraiment absorbé par l'effet utile est presque toujours très inférieur à T_u .

Par exemple, si la machine est une machine à forer, ou un marteau-pilon etc., l'effet utile accompli [déformation permanente d'un certain corps] s'accompagne toujours d'un grand dégagement de chaleur, et la quantité de chaleur ainsi dégagée, évaluée en travail, ainsi que le travail d'usure de l'outil, diminue d'autant le travail vraiment utilisé.

329. — Il est même des cas où l'effet utile qu'on veut produire n'exige par lui-même aucun travail. Considérons un hélicoptère [c'est-à-dire un corps plus lourd que l'air muni d'hélices animées d'une rotation rapide], qui reste en équilibre dans l'air immobile. Le travail T_u est ici le travail (chargé de signe) des résistances de l'air sur les hélices. L'effet utile qu'on veut obtenir en battant l'air avec les hélices, c'est d'engendrer une résistance de l'air dont la résultante équilibre la pesanteur. Le travail de cette résultante, ainsi d'ailleurs que celui de la pesanteur, est nul. Si on maintient l'hélicoptère en équilibre en le soutenant à la main par son centre de gravité, il n'y aurait aucune dépense de travail. La dépense de travail T_u tient ici uniquement au procédé de sustentation employé (hélices sustentatrices); suivant que la forme des hélices sera plus ou moins bien choisie, le même effet utile (sustentation de l'hélicoptère) sera obtenu, pendant le même temps, avec une dépense plus ou moins faible de travail.

330. — Rendement industriel.

Nous avons supposé jusqu'ici qu'on connaissait les forces motrices appliquées au récepteur de la machine,

et par suite leur travail. Par exemple, s'il s'agit d'une roue hydraulique (ou d'une machine à vapeur, etc), nous avons admis qu'on connaissait les forces exercées sur les palettes de la roue par l'eau motrice (ou les pressions exercées par la vapeur sur le piston, etc). Le rendement tel que nous l'avons défini ne fait que comparer le travail de ces forces au travail des résistances utiles, c'est-à-dire un travail mécanique proprement dit à un autre.

En réalité, ce n'est pas ainsi que le problème se pose naturellement. Considérons une machine à vapeur. Le problème industriel est le suivant: On a du charbon, de l'eau à vaporiser, une machine adaptée; quelle est la quantité de travail utile T_u que fournit la machine par kilogramme de charbon brûlé?

D'une manière générale, la marche de la machine étant entretenue par une source d'énergie quelconque [chûte d'eau, charbon, pétrole etc,], il s'agit de comparer l'énergie naturelle dépensée (évaluée en travail), soit ΔE , au travail utile T_u de la machine. Le quotient $\frac{T_u}{\Delta E} = \rho$ peut s'appeler le rendement industriel de la machine, tandis que le rapport $\frac{T_u}{T_m} = P$ peut s'appeler le rendement mécanique (T_m désignant toujours le travail moteur, travail des forces absolues exercées par l'agent naturel sur le récepteur).

On a:

$$\rho = \frac{T_u}{\Delta E} = \frac{T_u}{T_m} \frac{T_m}{\Delta E} = P \frac{T_m}{\Delta E}.$$

Ainsi soit une machine à vapeur, où la chaleur qui transforme l'eau en vapeur est fournie, dans l'intervalle de temps t_0, t_1 , par la combustion d'un certain poids W de charbon. Prenons comme unité de masse le kilogramme, comme unité de force le kilogramme poids, comme unité de travail le kilogrammètre; soit n le nombre de calories dégagé par la combustion d'un kilogramme de charbon, et soit T_u le travail utile de la machine dans l'intervalle de temps t_0, t_1 . On a:
 $\Delta E = nW \times 425$ et le rapport $\frac{T_u}{nW \times 425}$ est le rendement industriel de la machine à vapeur.

331 - Machines qui englobent l'agent-moteur.

Dans certains cas, on est amené à englober dans la machine la source naturelle d'énergie (charbon, pétrole, etc.). C'est ce qui a lieu par exemple, quand on étudie le mouvement d'une locomotive et de son tender. Dans ce dernier cas, la machine proprement dite, le charbon, l'eau et la vapeur motrice, sont regardés comme formant un système. Les forces motrices (appliquées au récepteur) sont alors des forces intérieures. Les transformations du système ne sont plus rigoureusement périodiques, mais l'énergie cinétique des éléments non périodiques de la machine [eau volatilisée, charbon brûlé] est négligeable, et à chaque tour de roue on peut regarder la force vive du système comme redevenue la même.

Soit t_0, t_1 la durée d'un certain nombre de tours de roue. Par la combustion du poids W de charbon, l'énergie interne du charbon est diminuée de $\Delta E = nW \times 425$. Je représente par ΔW la variation d'énergie interne (non cinétique) des autres parties du système (eau vaporisée, vapeur condensée, etc) et par Q_e l'énergie calorifique cédée au milieu extérieur. D'après le principe de la conservation de l'énergie, on a [la variation d'énergie cinétique étant nulle entre t_0, t_1 pendant la marche normale de la machine, ainsi que ΔW].

$$-\Delta E + Q_e = T_e, \quad [Q_e > 0]$$

T_e représentant le travail des forces extérieures, qui sont toutes ici des résistances utiles; autrement dit, $T_e = -T_u$, d'où :

$$T_u = \Delta E - Q_e, \quad T_u < \Delta E.$$

Il est intéressant de remarquer que l'équation (1) n'est pas modifiée si on prend comme axes non pas des axes liés invariablement au corps de la machine mais des axes quelconques assujettis à la seule condition que, par rapport à ces axes, la force vive de la machine proprement dite soit périodique.

332. - Machines motrices ou moteurs.

Considérons une machine mise en mouvement par un agent naturel et réduite à son récepteur: une telle machine s'appelle machine motrice ou moteur. Le récepteur, comme nous l'avons dit, [N° 324], se compose essentiellement en général soit d'un arbre mobile autour d'un axe fixe auxquelles les forces motrices, impriment une rotation continue, soit d'un piston que les forces motrices animent d'un mouvement alternatif. Dans ce dernier cas, ce mouvement alternatif est presque toujours transformé, par un jeu d'articulations en mouvement circulaire continu. De sorte qu'en définitive l'effet de l'agent moteur est de communiquer à un arbre un mouvement de rotation continu.

333. - Rendement sur l'arbre. - Puissance.

Il est évident que l'étude d'un moteur peut être faite indépendamment des transmissions et de l'outil auxquelles il est loisible de l'adapter. Dans cette étude, c'est le rendement et la puissance qui sont surtout à considérer. Soit t_0, t_1 un intervalle de temps dans lequel l'arbre du moteur tourne avec une vitesse angulaire uniforme ω sous l'action, d'une part des forces motrices, d'autre part d'un couple résistant constant (qui empêche la rotation de s'accélérer). Soit N l'axe du couple (dirigé selon l'axe de l'arbre): le travail du couple est égal à $-N\omega(t_1 - t_0) = -T_u$. Soit de plus ΔE l'énergie dépensée par l'agent naturel (charbon, pétrole, etc) dans ce même intervalle de temps: le rapport $\frac{T_u}{\Delta E}$ est appelé le rendement sur l'arbre. Le quotient $\frac{T_u}{t_1 - t_0}$ est la puissance sur l'arbre.

Le rendement peut varier avec la vitesse ω . Le régime optimum est le régime pour lequel le rendement est le plus élevé. Mais dans beaucoup d'applications, ce qui importe avant tout, c'est (comme nous l'avons déjà remarqué, N° 327) la puissance: il faut que le travail utile T_u , produit dans l'unité de temps par le moteur, soit le plus grand possible, fût-ce aux dépens du rendement, c'est-à-dire en sacrifiant de l'énergie motrice. Dans les applications de cette nature, on se trouve amené à comparer la puissance maxima du moteur à son poids:

si, par exemple, une machine pèse 100 kilogrammes et a une puissance maxima de 20 chevaux, on dit que sa puissance est d'un cheval par cinq kilogrammes. Le poids d'une machine de puissance donnée a été, ces dernières années, abaissé dans des proportions colossales, grâce aux progrès des moteurs à pétrole. On fabrique aujourd'hui des moteurs fournissant un cheval vapeur par 3 kilogrammes et au-dessous.

Ces généralités bien comprises, nous allons étudier maintenant quelques types de moteurs. Les moteurs rentrent dans deux grandes catégories: les moteurs hydrauliques et les moteurs thermiques. Nous traiterons d'abord des moteurs hydrauliques.

Chapitre II.

Chapitre II.

Moteurs hydrauliques.

Notions générales.

334. Puissance d'un chute.

Les moteurs hydrauliques sont des moteurs qui sont actionnés par de l'eau courante (fleuve ou chute d'eau), issue d'un niveau plus élevé que le moteur et mise en mouvement par la pesanteur.

Le moteur [moue hydraulique ou turbine hydraulique] est constitué essentiellement par un arbre mobile autour d'un axe fixe et muni de palettes ou d'aubes. L'eau arrive sur les aubes, et par sa vitesse et ses pressions met l'arbre en mouvement, puis s'échappe.

Considérons une chute d'eau naturelle ou artificielle. Appelons niveau d'amont le niveau de l'eau avant chute, niveau d'aval le niveau de l'eau après la chute; représentons par h la hauteur de la chute, c'est-à-dire la différence des deux niveaux. Nous supposons qu'au niveau d'amont comme au niveau d'aval, l'eau est en contact avec l'air libre, et par conséquent à la pression atmosphérique. Nous supposons de plus qu'au niveau d'amont la vitesse d'écoulement de l'eau est très faible. Soit m la masse et W le poids d'eau débités par la chute pendant l'unité de temps ($W = mg$). Si l'eau tombait en chute libre, sans rencontrer les aubes de la roue, sa vitesse V au niveau d'aval serait $\sqrt{2gh}$, l'énergie de la masse m d'eau serait $\frac{mV^2}{2} = mgh = Wh$. C'est ce qu'on exprime

en disant que l'énergie débitée par la chute pendant l'unité de temps est égale à Wh , ou encore que la puissance de la chute est égal à Wh ; si W est mesurée en kilogrammes, h en mètres, cette puissance en chevaux vapeurs est $W \frac{h}{75}$.

Par exemple, une chute d'eau débitant 100 m^3 cubes d'eau par seconde et d'une hauteur de 1^m50 fournit une énergie de 150.000 kilogrammètres par seconde, soit 2.000 chevaux.

335. - Rendement du moteur.

La roue actionnée par la chute et soumise d'autre part à un couple résistance convenable tourne avec une vitesse uniforme pendant sa marche normale: soit T_u le travail (changé de signe) du couple résistant pendant l'unité de temps. Le rendement du moteur (rendement sur l'arbre) est par définition le rapport $\frac{T_u}{Wh}$; c'est si on veut, le rapport de la puissance du moteur à la puissance de la chute.

Rendement des moteurs hydrauliques.

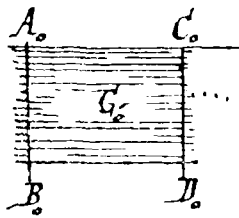
336. - Etude générale du rendement.

La discussion qui va suivre du rendement d'un moteur hydraulique s'applique quel que soit le dispositif de la machine, que l'eau tombe à l'air libre, ou qu'elle soit conduite jusqu'à la roue dans les conduites fermées où elle est soumise à de fortes pressions, etc.

Nous supposons seulement pour fixer les idées (comme au N° 334), qu'au niveau d'amont et au niveau d'aval l'eau est en contact avec l'air libre et par conséquent à la pression atmosphérique. Appelons T_m le travail des forces exercées par l'eau sur les aubes de la roue (T_m est le travail mécanique moteur): si l'arbre tournerait sans frottement, T_m serait, comme on sait, égal à T_u ; en fait, T_u est un peu inférieur à T_m ⁽¹⁾. Soit, d'autre part, $-T_r$ le travail des réactions exercées sur l'eau par les aubes de la roue. S'il n'y avait ni chocs, ni frottements, T_r serait égal à T_m : en réalité, $T_m - T_r$ est $\neq 0$

(1) Le rapport $\frac{T_u}{T_m}$ est le rendement mécanique du récepteur au moteur [N° 325].

négligés, la différence représentant le travail absorbé par les frottements et les chocs entre les aubes et l'eau; ces derniers frottements sont faibles, tandis que l'influence des chocs est très importante. — Le régime permanent



étant établi, considérons à l'instant t deux sections $A_0 B_0$, $A B$ perpendiculaires au courant, l'une en amont, l'autre en aval, et la masse μ du liquide comprise entre ces deux sections. Appliquons le théorème des forces vives à cette masse μ entre ces instants t et $t + dt$. À l'instant $t + dt$, la masse μ occupe la position $C_0 D_0 C D$



et d'après un raisonnement maintes fois employé (voir le n° 297), la variation de la force vive de la masse μ est égale à

$$\varepsilon(V^2 - V_0^2)$$

ε désignant la masse du volume d'eau $A_0 B_0 C_0 D_0$ (ou $A B C D$), V_0 la vitesse avec laquelle l'eau traverse la section $A_0 B_0$ et V la vitesse avec laquelle elle traverse la section $A B$. Si ω_0 et ω sont les aires des sections $A_0 B_0$ et $A B$ et ρ la densité de l'eau, on a :

$$\varepsilon = \rho \omega_0 V_0 dt = \rho \omega V dt = m dt,$$

m représentant la masse d'eau débitée pendant l'unité de temps. La variation de la force vive de la masse μ est donc, en définitive :

$$m(V^2 - V_0^2) dt.$$

D'autre part, les forces intérieures ont un travail nul [n° 269] si nous négligeons les frottements intérieurs. Les forces extérieures sont la pesanteur, les pressions extérieures [pressions sur les sections $A_0 B_0$, $A B$ et pressions latérales], et les réactions des aubes sur l'eau dont le travail ⁽¹⁾ est $-T_p dt$. Le travail des pressions latérales (normales au courant si on néglige la viscosité

⁽¹⁾ T_p est le travail de ces réactions pendant l'unité de temps.

du liquide) est nul. Calculons le travail de la pesanteur et le travail des pressions qui s'exercent sur les sections $A_0 B_0$, AB .

(1) Le travail de la pesanteur est le même que si la masse d'eau $\varepsilon = m dt$ avait été transportée de la position $A_0 B_0 C_0 D_0$ à la position $ABCD$; ce travail est : $\varepsilon g(\zeta - \zeta_0) = mg(\zeta_0 - \zeta) dt = \omega(\zeta_0 - \zeta) dt$, ζ_0 et ζ étant les hauteurs des centres de gravité G_0 et G des volumes d'eau $A_0 B_0 C_0 D_0$ et $ABCD$; si d_0 est la hauteur du niveau d'amont au-dessus de G_0 , et d la hauteur du niveau d'aval au-dessus de G , on a : $\zeta_0 - \zeta = h + d - d_0$, h désignant la hauteur du niveau d'amont au-dessus du niveau d'aval. Le travail de la pesanteur dans le temps dt est donc, en définitive :

$$mg[h + d - d_0] dt.$$

D'autre part, le mouvement dans le voisinage de la section $A_0 B_0$ étant sensiblement rectiligne et normal à $A_0 B_0$, la répartition des pressions le long de la section $A_0 B_0$ est sensiblement la même qu'en hydrostatique [principe IV du N° 292]; ces pressions, toutes normales à $A_0 B_0$ et dirigées dans le sens du courant, effectuent un travail égal à $\Pi V_0 dt$, où Π désigne la pression totale, laquelle (d'après un théorème d'hydrostatique) est égale à $\omega(p_a + \rho g d_0)$, p_a représentant la pression atmosphérique. Le travail pendant le temps dt des pressions qui s'exercent sur la section $A_0 B_0$ est donc :

$$(p_a + \rho g d_0) \omega V_0 dt = (p_a + \rho g d_0) \frac{m}{\rho} dt.$$

On verrait de même que le travail des pressions qui s'exercent sur la section AB (pressions dirigées en sens inverse du courant) est égal à $-(p_a + \rho g d) \frac{m}{\rho} dt$.

L'égalité des forces vives appliquées à la masse μ du liquide, pendant le temps dt , donne en définitive :

$$\begin{aligned} \frac{m}{2}(V^2 - V_0^2) &= mg[h + d - d_0] + (p_a + \rho g d_0) \frac{m}{\rho} - (p_a + \rho g d) \frac{m}{\rho} \\ &\quad - \tau_p \\ &= mgh - \tau_p. \end{aligned}$$

D'où

$$\tau_p = mgh + \frac{m}{2}(V_0^2 - V^2).$$

(1) - En effet, ce travail est égal à $-\mu g dz$ (dz désignant la variation entre les instants t et $t+dt$, du z du centre de gravité de la masse liquide μ). Or, cette variation dz est la même que si la masse liquide $A_0 B_0 C_0 D_0$ était passée en $ABCD$.

Si V_0 et V sont négligeables, T_p est égal à mgh , c'est-à-dire à la puissance de la chute.

Comme $T_p = T_m = T_u$ s'il n'y a ni chocs, ni frottements entre l'arbre et l'eau ou entre l'arbre et ses pivots, on arrive à la conclusion suivante :

Quand le moteur hydraulique fonctionne sans frottements ni chocs d'aucune espèce, quand la viscosité du liquide est négligeable, et quand de plus la vitesse du courant en amont et en aval est négligeable, le travail utile T_u fourni par l'arbre pendant l'unité de temps est égal à la puissance mgh de la chute; autrement dit, le rendement sur l'arbre est égal à l'unité.

337. - Analyse de la perte de travail.

En réalité, les frottements intérieurs de l'air, les frottements entre l'eau et les aubes et entre l'arbre et ses pivots, mais surtout les chocs entre l'eau et les aubes diminuent notablement le rendement. Analysons cette perte de rendement.

Considérons (à l'instant t) le système Z formé par la masse d'eau μ et par la roue et ses aubes, et appliquons à ce système, entre les instants t et $t+dt$, le principe de la conservation de l'énergie. Les frottements et les chocs (de l'eau sur les aubes, de la roue sur ses pivots, etc) dégagent de la chaleur, mais une fois le régime permanent établi, l'énergie interne totale de la roue reste constante; elle cède à l'air une quantité de chaleur égale à celle que lui communiquent les frottements et les chocs. D'autre part, la masse d'eau $ABCD$ sort à une température θ plus élevée que la température θ_0 de la masse d'eau $A_0 B_0 C_0 D_0$; et de plus les chocs entre l'eau et les aubes provoquent des remous qui non seulement accroissent les frottements internes, mais communiquent à l'eau des vitesses tourbillonnaires; ces vitesses subsistent partiellement à la sortie de l'eau en aval, de sorte que la force vive de la masse $ABCD$ est supérieure à $mV^2 dt$ [$V = \frac{m}{dt}$ désignant la vitesse moyenne de sortie]; soit $m[V^2 + V_1^2] dt$ cette force-vive. Désignons par q la quantité de chaleur nécessaire pour élever de la température θ_0 à la température θ une masse d'eau égale

à l'unité: la variation d'énergie interne de la masse d'eau μ entre les instants t et $t+dt$ est [en vertu de la permanence du régime] l'excès de l'énergie interne de la masse ABC sur celle de la masse $A_0B_0C_0$, c'est-à-dire:

$$\frac{m}{2} [V^2 + V_1^2 - V_0^2] dt + m q dt.$$

Je peux toujours représenter par $m q dt$ la quantité de chaleur cédée à l'extérieur (dans le temps dt) par le système Σ (masse d'eau μ et roue). Le principe de la conservation de l'énergie donne alors [en remarquant que le travail des forces extérieures est, d'après un résultat du N° 335 égal à $mgh - \tau_u$]:

$$(1) \quad \frac{m}{2} [V^2 + V_1^2 - V_0^2] + m q = mgh - \tau_u - m q_1,$$

d'où:

$$(2) \quad \tau_u = mgh + \frac{m}{2} V_0^2 - \frac{m}{2} (V^2 + V_1^2) = m(q + q_1).$$

Si V_0 est négligeable, l'équation (2) devient:

$$\begin{aligned} \tau_u &= mgh - \frac{m}{2} (V^2 + V_1^2) - m(q + q_1) \\ &= \bar{w} [h - \eta], \end{aligned} \quad (\bar{w} = mg)$$

où

$$\eta = \frac{1}{g} \left[\frac{V^2 + V_1^2}{2} + q + q_1 \right].$$

La quantité η est appelée perte de hauteur de chute.

Si V_0 n'est pas négligeable, on convient d'appeler hauteur de chute la longueur $H = h + \frac{V_0^2}{2g}$, somme de la hauteur réelle de la chute et de la hauteur due à la vitesse V_0 . On a encore:

$$(3) \quad \tau_u = \bar{w} [H - \eta].$$

Le but qu'on devra se proposer est de diminuer η ; il faudra pour cela atténuer autant que possible les chocs et réduire autant que possible la force vive de l'eau à sa sortie.

338. - Cas où la pression en amont n'est pas la pression atmosphérique.

Nous avons supposé dans ce qui précède, que la pression au niveau supérieur d'amont était (comme en aval) la

pression atmosphérique⁽¹⁾. Admettons maintenant que l'eau (enfermée dans des tuyaux) sorte d'un réservoir où sa pression p_0 au niveau supérieur soit plus grande que la pression atmosphérique. Rien ne sera changé dans les raisonnements des Nos 335 et 336, si ce n'est que le travail des pressions élémentaires sur la section $A_0 B_0$ sera égal à :

$(p_0 + \rho g d_0) \omega_0 V_0 dt = (p_0 + \rho g d_0) \frac{m}{\rho} dt$, et l'égalité (1) deviendra par suite :

$\frac{m}{2} [V_2^2 + V_1^2 - V_0^2] + m q = m g h + m \frac{(p_0 - p_a)}{\rho} - \tau_u - m q_1$,

ou encore

$$\tau_u = m g \left[h + \frac{p_0 - p_a}{\rho g} + \frac{V_0^2}{2g} \right] m - \left[\frac{V_2^2 + V_1^2}{2} + q + q_1 \right]$$

$$= \omega (H - \eta), \quad (\omega = m g),$$

en posant :

$$H = h + \frac{V_0^2}{2g} + \frac{p_0 - p_a}{\rho g}, \quad \eta = \frac{V_2^2 + V_1^2}{2g} + \frac{q + q_1}{\rho g}.$$

La hauteur de chute H est donc ici la hauteur du niveau A_0 au-dessus du niveau A , augmentée de l'excès de la charge du liquide au point A_0 sur la hauteur $\frac{p_a}{\rho g}$ représentative de la pression atmosphérique.

La puissance de la chute est ωH ; la puissance du moteur hydraulique, qui serait sensiblement égale à celle de la chute s'il n'y avait ni chocs, ni frottements, et si la vitesse de sortie de l'eau en aval était négligeable, est toujours notablement inférieure à ωH .

⁽¹⁾ Quand on utilise de hautes chutes, l'eau est captée au niveau supérieur de la chute dans des conduites où sa pression peut devenir considérable. On peut toujours, en remontant à l'origine de la chute, atteindre un niveau où la pression est atmosphérique, mais les frottements de l'eau dans toute la longueur des tuyaux qui rejoignent ce niveau au niveau de la roue, ont une influence notable qu'il est difficile d'évaluer. Il est préférable alors de choisir la section initiale $A_0 B_0$ en amont mais au voisinage de la roue, en tenant compte de la pression de l'eau en $A_0 B_0$.

339. - Discussion de l'effet des chocs.

Supposons d'abord que la roue hydraulique soit munie d'aubes planes ou palettes, plantées normalement à la roue, sur lesquelles l'eau vient en quel que sorte s'écraser presque normalement, pour accompagner ensuite la palette dans son mouvement jusqu'au moment où l'eau s'échappe. Soit V la vitesse avec laquelle la masse d'eau Σ arrive sur une palette, U sa vitesse après le choc, vitesse qui est sensiblement égale en grandeur et direction, à celle du point coïncidant⁽¹⁾ de la palette. L'eau et la palette restant en contact, la force vive perdue (Théorème de Carnot N°239) est égale à la force vive due aux vitesses perdues, c'est-à-dire à ΣW^2 , où

$$W^2 = V^2 + U^2 - 2VU \cos(V, U).$$

D'autre part, la masse d'eau Σ sort en aval avec la force vive non utilisée mU^2 . La force vive perdue de par les chocs ou non utilisée de par la vitesse de sortie est donc égale, pour la masse d'eau Σ , à :

$$\Sigma [V^2 + 2U^2 - 2VU \cos(V, U)] ;$$

pendant l'unité de temps, la demi force vive perdue ou non utilisée est donc :

$$\frac{m}{2} [V^2 + 2U^2 - 2VU \cos(V, U)],$$

en négligeant les pertes de forces vives dues aux frottements. Le théorème des forces vives appliqué au système Σ (comme tous à l'heure le principe de l'équivalence), donne :

$$\frac{m}{2} [V^2 + 2U^2 - 2VU \cos(V, U)] - \frac{m}{2} V_0^2 = mgh + \frac{m}{\rho} (\rho_0 - \rho_a) - \tau_u,$$

d'où :

$$\tau_u = mgh - \frac{m}{2} [V^2 + 2U^2 - 2VU \cos(V, U)].$$

Le rendement ρ est égal à

$$(A) \quad 1 - \frac{V^2 + 2U^2 - 2VU \cos(V, U)}{2gH}$$

⁽¹⁾ Cette vitesse est normale au rayon r qui va du point coïncidant au centre de la roue et égale en valeur absolue à la quantité constante $r\omega$, (ω vitesse angulaire de la roue).

Le calcul précédent n'est que grossièrement approché; car nous avons négligé d'une part l'influence des frottements, et d'autre part les vitesses tourbillonnaires de sortie et les fuites (puisqu'on a admis que chaque élément d'eau s'échappe avec la vitesse u). La formule (4) indique cependant les conditions essentielles d'un bon rendement. L'expression (4) dépend à la fois de V , de u et de l'angle (V, u) . Son maximum, lorsqu'on laisse V constant ainsi que l'angle (V, u) , et qu'on fait varier u , correspond à :

$$u = \frac{V}{2} \cos(V, u)$$

et a pour valeur :

$$P = 1 - \frac{1}{2} \frac{V^2}{2gH} [1 + \sin^2(V, u)].$$

Il convient donc de diminuer l'angle des deux vitesses V et u , et de régler le mouvement de la roue de façon que la vitesse à la circonférence soit la moitié de la projection (sur la tangente à la roue) de la vitesse d'arrivée de l'eau. Si l'eau arrive tangentielllement à la roue et si $u = \frac{V}{2}$ (régime optimum), on a :

$$P = 1 - \frac{1}{2} \frac{V^2}{2gH}.$$

Si notamment la pression de l'eau en A_0 est toute long de la chute est la pression atmosphérique on a (en négligeant les frottements de l'eau sur elle-même) :

$$v^2 = V_0^2 + 2gh = 2gH,$$

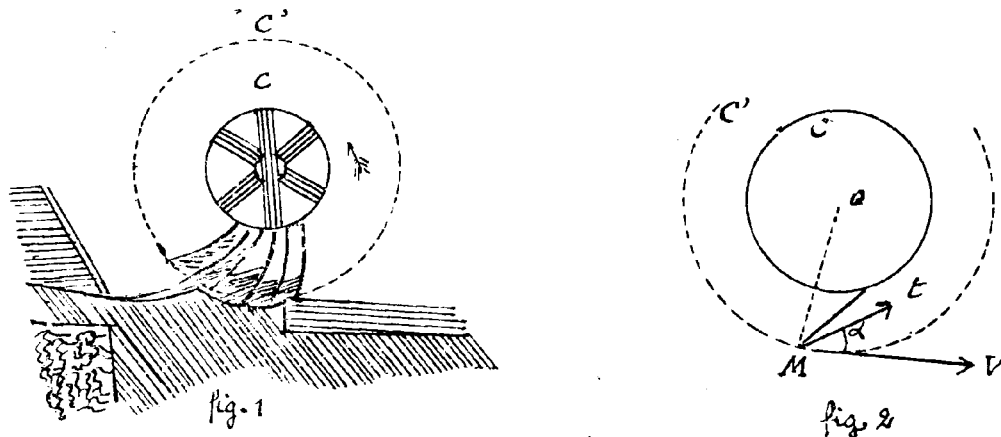
et le rendement P est égal à $\frac{1}{2}$. En réalité, on doit s'attendre à le trouver moindre que $\frac{1}{2}$, à cause des influences que nous avons négligées.

340... Influence des aubes.

Au lieu de recevoir l'eau sur des palettes, on peut la recevoir sur des aubes courbes calculées de façon à diminuer l'importance des chocs. C'est la perfectionnement principal apporté par Doncelet aux roues hydrauliques. L'eau arrive tangentielllement à la circonférence extérieure c' de la roue (fig. 1), et après avoir frappé une aube, monte puis redescend en glissant le

le long de cette aube et l'abandonne.

Soit α l'angle sous lequel l'aube coupe la circonférence extérieure C' de la roue, v la vitesse de la masse d'eau \mathcal{E} à son arrivée sur l'aube au point M , u la vitesse du point M de l'aube. La vitesse v et la vitesse u ont

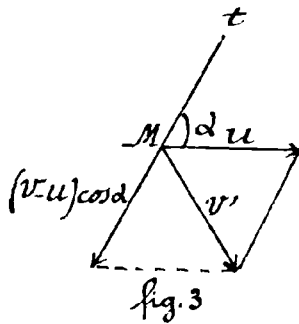


même direction et sens. La vitesse relative $v-u$ de l'élément d'eau \mathcal{E} par rapport au point M de l'aube a une composante normale à l'aube à savoir $(v-u) \sin \alpha$, laquelle est détruite (vitesse perdue) et une composante tangente à l'aube, à savoir $(v-u) \cos \alpha$, qui est la vitesse initiale de glissement de l'élément d'eau \mathcal{E} sur l'aube. La perte de force vive due au choc est donc ici :

$$\mathcal{E} (v-u)^2 \sin^2 \alpha$$

Considérons maintenant le mouvement relatif de l'élément d'eau \mathcal{E} par rapport à l'aube. On peut regarder le mouvement de l'aube comme sensiblement rectiligne et uniforme pendant le temps très court durant lequel l'élément d'eau \mathcal{E} reste intérieur au même aube. Le mouvement relatif de la masse \mathcal{E} est donc celui d'un point pesant qui glisserait sur l'aube fixe, sa vitesse initiale [dirigée selon Mt , fig. 2] étant $(v-u) \cos \alpha$: dans ce mouvement (où on néglige le frottement de l'eau sur l'aube) l'élément \mathcal{E} s'élève le long de l'aube, puis redescend, revient à l'extrémité M de l'aube avec une vitesse égale et opposée à sa vitesse initiale $(v-u) \cos \alpha$, et s'échappe. Sa vitesse absolue v' , quand il s'échappe, est la résultante [fig. 3] de la vitesse relative $(v-u) \cos \alpha$, et de la

vitesse d'entraînement u du point M de l'aube; elle est donnée, en grandeur, par la relation :



$$V^2 = (V-u)^2 \cos^2 \alpha + u^2 - 2(V-u)u \cos^2 \alpha$$

et la force vive non utilisée correspondante est εV^2 .

La somme des forces vives perdue et non utilisée est donc, pour la masse ε :

$$\varepsilon \left\{ (V-u)^2 \sin^2 \alpha + (V-u)^2 \cos^2 \alpha + u^2 - 2(V-u)u \cos^2 \alpha \right\}$$

$$= \varepsilon \left\{ (V-u)^2 + u^2 - 2(V-u)u \cos^2 \alpha \right\};$$

pendant l'unité de temps, la somme des forces vives perdue et non utilisée est donc

$$m \left\{ (V-u)^2 + u^2 - 2(V-u)u \cos^2 \alpha \right\}$$

et si on néglige les autres influences (frottements, etc) qui diminuent encore le rendement, on voit (comme au N° 339) que le rendement P est donné par la formule :

$$(5) \quad P = 1 - \frac{(V-u)^2 + u^2 - 2(V-u)u \cos^2 \alpha}{2gH}$$

Si nous faisons varier u seul, le maximum de P correspond à $u = \frac{V}{2}$, et a pour valeur

$$(6) \quad P = 1 - \frac{1}{2} \frac{V^2}{2gH} \sin^2 \alpha.$$

Si $\alpha = 90^\circ$, on a : $P = \frac{1}{2}$, valeur déjà trouvée pour les aubes planes.

Si $\alpha = 0$, le rendement est maximum et égal à l'unité. Mais d'une part nous avons négligé les frottements, et d'autre part nous n'avons pas tenu compte de ce fait que l'eau en redescendant le long des aubes est gênée par celle qui se présente pour monter, et il en résulte nécessairement des vitesses tourbillonnaires dont l'influence est sensible. Enfin, il est matériellement impossible de faire $\alpha = 0$, parce que l'eau n'entrerait pas dans les aubes. Pour les basses chutes, (chutes dont la hauteur H n'excède pas 1^{mètre} 30) les expériences de Poncelet ont montré que le meilleur rendement s'obtient en prenant $\alpha = 30^\circ$. Si on suppose que la pression p_0

du liquide au point A_0 et tout le long de la chute est la pression atmosphérique, on a :

$$v^2 = V_0^2 + 2gh = 2gH,$$

et la formule (6) donne pour $\alpha = 30^\circ$,

$$P = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha = 0,875$$

valeur un peu supérieure (ainsi qu'on devait s'y attendre) à celle que donne l'expérience.

Pour les hautes chutes, c'est-à-dire pour les grandes valeurs de v , on peut prendre α inférieur à 30° . Le calcul de la forme des aubes d'après la vitesse d'arrivée de l'eau est un problème d'hydraulique des plus compliqués, où la théorie doit constamment faire appel à l'expérience. Mais une règle pratique à laquelle a conduit la discussion précédente, c'est que l'eau doit arriver tangentielle-ment à la circonférence extérieure de la roue avec une vitesse sensiblement double de la vitesse des points de cette circonférence.

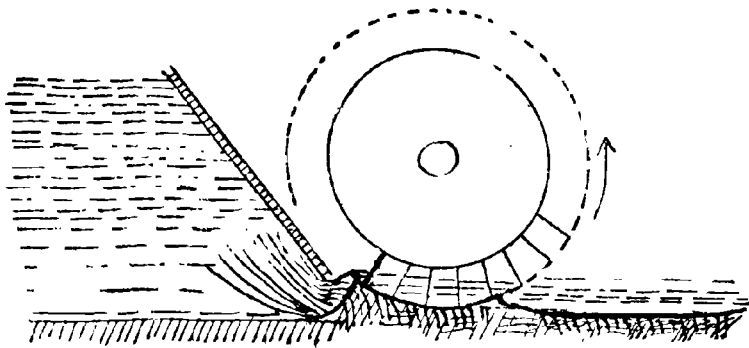
Description de quelques roues hydrauliques.

341. - Roues en dessous.

La roue en dessous est une roue mobile autour d'un axe horizontal, et qui, sur tout son contour extérieur, est munie de palettes ou d'aubes. Cette roue est disposée en avant d'une vanne qu'on lève d'une certaine quantité pour laisser l'eau couler par sa partie inférieure; l'eau sort de la vanne avec la vitesse due à la hauteur du niveau d'amont au-dessus de l'orifice: un coursier⁽¹⁾ horizontal ou légèrement incurvé l'amène sous la roue qui est enfermée entre deux murs latéraux.

Ses chocs et les pressions de l'eau sur la roue lui communiquent une vitesse de rotation qui dépend des résistances que la roue doit surmonter. Si les aubes sont planes et plantées normalement sur la roue [roue à palettes], l'expérience montre que le meilleur

(1) On appelle coursier le lit artificiel, en général maçonné, où l'eau doit couler pendant son contact avec la roue.



rendement s'obtient quand la vitesse u de la roue, mesurée à sa circonférence, est égale aux $\frac{45}{100}$ de la vitesse d'arrivée V de l'eau sur les aubes (vitesse sensiblement tangente à la circonférence de la roue) : le rendement ne dépasse pas alors

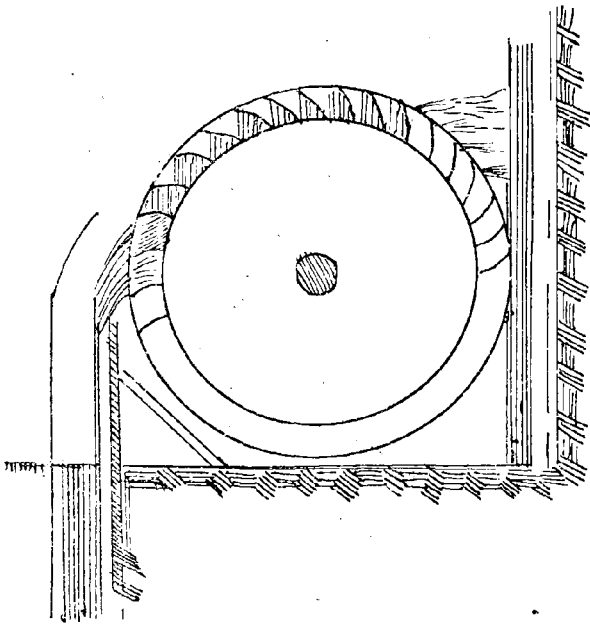
0,30. [D'après la discussion du N° 339, le rendement maximum devrait s'obtenir pour $u = \frac{V}{2}$, et atteindre $\frac{1}{2}$].

On améliore notablement le rendement en remplaçant les palettes par des aubes courbées (roues Poncellet) qui font un petit angle α avec la circonférence extérieure de la roue. Le rendement, pour les basses chutes, est maximum quand $\alpha = 30^\circ$ et $u = 0,55 V$; il est alors égal à 0,60. (D'après la discussion du n° 340, le rendement devrait être maximum pour $u = \frac{V}{2}$, et être égal à 0,875 quand $\alpha = 30^\circ$.)

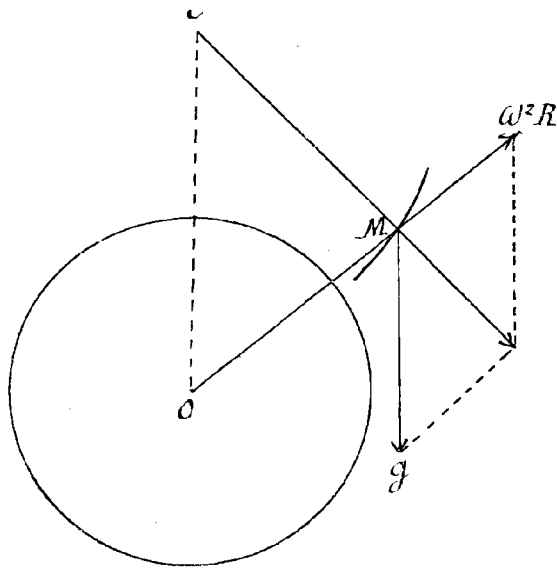
342. - Roues en dessous.

Imaginons deux cylindres de révolution concentriques creux, en bois par exemple, limités par deux bases solides assez rapprochées (soit deux planches), et divisons l'espace annulaire (extérieur au petit cylindre) ainsi limité, en capacités égales (augets) par des cloisons cylindriques dont les arêtes sont parallèles à l'axe des cylindres. Supprimons enfin la surface latérale du grand cylindre. Nous obtenons ainsi la roue à augets ou roue de moulin qu'on emploie comme roue en dessous. La roue est mobile autour d'un axe horizontal et met en mouvement un arbre moteur.

L'eau sortant du bief d'amont par un vannage, est dirigée sur une certaine étendue par un coursier rectiligne légèrement incliné qui l'amène sur le sommet de la roue. L'eau ne prend dans ce coursier que la vitesse nécessaire pour atteindre la roue et elle tombe, en nappe



parabolique, dans les augets qu'elle remplit successivement à mesure que, par le mouvement de la roue, ils se présentent à l'extrémité du coursier. Lorsque les augets arrivent à la partie inférieure de la roue, l'eau en sort pour tomber dans le bief d'aval et les augets remontent vides pour se remplir de nouveau à la partie supérieure. C'est le poids de l'eau ainsi contenue dans une moitié de la roue qui détermine son mouvement et qui surmonte les résistances.



Par suite de la rotation de la roue, la surface de l'eau, considérée comme étant en équilibre dans les augets, n'est pas horizontale. Soit M un point de la surface libre: la force qui s'exerce en ce point sur l'unité de masse, et qui est la normale à la surface d'équilibre, est, d'après la théorie des mouvements relatifs, la résultante de la pesanteur g et de la force centrifuge $\omega^2 R$, OM ou R désignant la perpendiculaire abaissée de M sur l'axe de la roue. On a donc

dans le plan $MO C$, [OC verticale du point O]:

$$d'où \quad \frac{\omega^2 R}{g} = \frac{OM}{OC} = \frac{R}{OC}$$

$$OC = \frac{g}{\omega^2} ;$$

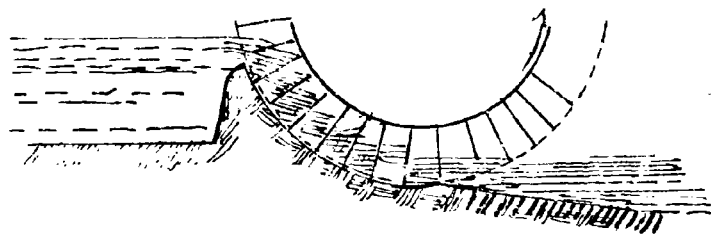
Considérons d'après cela la droite II parallèle à l'axe Ox de la roue et située dans le plan vertical qui contient cet axe, à une hauteur $\frac{g}{2}$ au-dessus de Ox . Le long de chaque section de la surface libre par un plan perpendiculaire à Ox , les normales de la surface libre concourent en un point C de la droite II ; la surface libre est un cylindre de révolution autour de II .

De là le phénomène connu sous le nom de déversement anticipé.

Les roues en dessus doivent être employées pour les chutes dont la hauteur est comprise entre 2,50 et 10 mètres; quand elles tournent lentement, leur rendement peut atteindre 0,80, mais quand la vitesse à la circonférence dépasse 2 mètres, le rendement descend rapidement et peut s'abaisser à 0,40.

343. - Roues de côté.

La roue de côté est une roue à aubes planes qui est emboîtée dans un coursier circulaire entre deux murs verticaux et qui reçoit l'eau, latéralement, à la partie supérieure de ce coursier. Elle tient à la fois de la roue en dessous et de la roue en dessus; l'eau agit d'abord sur les aubes par sa vitesse au moment où elle entre dans la roue, puis elle est maintenue entre ces aubes par le coursier et elle agit par son poids jusqu'à ce qu'elle soit



arrivée à la partie inférieure. Les roues de côté doivent être employées pour les chutes dont la hauteur varie de 1^m30 à 2^m50. En pratique, on s'arrange de manière que la vitesse, à la circonférence de

la roue, reste comprise entre 1 et 2 mètres et soit les 0,45 de la vitesse de l'eau à l'arrivée sur les aubes. Le rendement varie de 0,50 à 0,70.

344. - Lorsque les roues hydrauliques doivent être adaptées à de hautes chutes, l'eau est captée dans des conduites où elle peut atteindre de fortes pressions; elle

s'échappe à grande vitesse par des tuyères dans une direction tangente à la circonférence extérieure de la roue et rencontre sous un petit angle les aubes courbes de la roue [roue Pelton]. L'expérience confirme la conclusion du N° 339 : le rendement est le meilleur quand la vitesse d'arrivée de l'eau sur la roue est sensiblement double de la vitesse de la roue mesurée sur la circonférence extérieure.

Turbines hydrauliques.

345. - Dans les dispositifs précédents, l'eau est libre à son arrivée sur la roue et s'échappe librement après avoir frappé la roue ; les trajectoires de l'eau présentent des rebroussements, forment de gerbes, en un mot manifestent, par toutes leurs singularités, l'influence des chocs. Il est d'autres dispositifs où l'eau est guidée par les cloisons des aubes d'une façon beaucoup plus étroite avant et pendant le contact avec la roue et glisse à l'intérieur de la roue dans de véritables tuyères, qui, lui imposent des trajectoires bien régulières, calculées de façon à rendre son action moins brusque, plus prolongée et plus continue. Les roues hydrauliques ainsi aménagées ont reçu le nom général de turbines. Les turbines ont en général leur axe vertical tandis que les roues hydrauliques vulgaires ont en général leur axe horizontal, mais c'est là une disposition qui n'a rien d'essentiel.

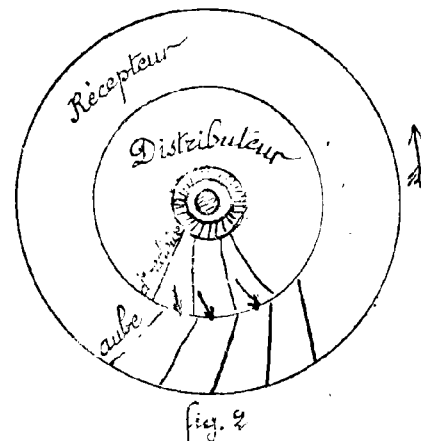
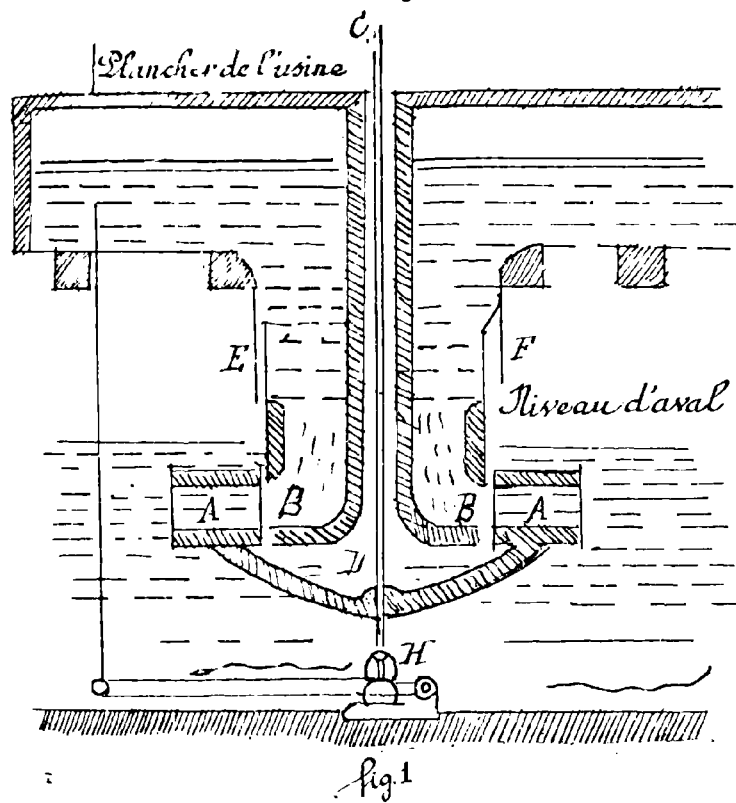
Descrivons d'abord deux types usuels de turbines, la turbine Fourneyron et la turbine Fontaine.

346. - Turbine Fourneyron. [Portefeuille, Planch. V]. Un réservoir cylindrique EF, d'axe vertical, rempli d'eau [distributeur] présente vers le bas des ouvertures latérales BB (fentes verticales); une roue, dont l'axe CD coïncide avec celui du cylindre, entoure la partie inférieure du réservoir et offre ses aubes AA, toutes orientées de la même manière, aux nappes d'eau qui s'échappent. Une telle turbine est dite radiale parce que l'eau s'échappe normalement au cylindre, c'est-à-dire suivant un rayon d'une section droite du cylindre; elle est de plus centrifuge

parce que l'eau s'écarte de l'axe du cylindre; l'eau rayonne en quelque sorte à partir de l'axe.

En fait, on guide l'eau avant sa sortie, à l'intérieur du réservoir, à l'aide de cloisons dont la courbure est de sens contraire à celle des aubes de la roue; l'eau, par suite ne sort pas normalement au cylindre, mais sa vitesse fait un petit angle avec la normale au cylindre.

Les aubes de la roue et les aubes du réservoir sont des surfaces cylindriques, à génératrices verticales, dont les sections horizontales sont représentées sur la fig. 2.

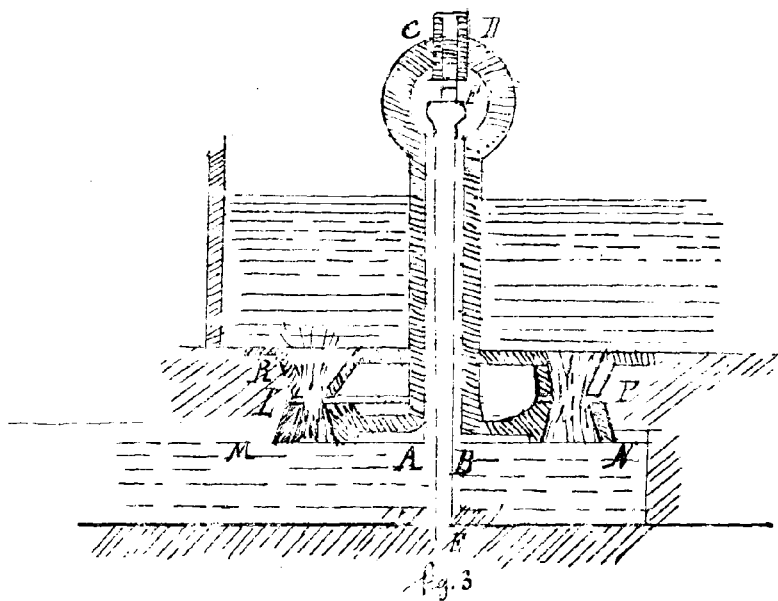


La turbine, entièrement immergée dans l'eau d'aval, est reliée à son arbre CD par une calotte de fonte II . L'arbre vertical CD passe à l'intérieur d'un tuyau creux qui traverse le réservoir, en sorte que la partie inférieure de l'arbre est seule immergée. L'extrémité inférieure H de l'arbre repose sur un levier qu'on peut manier de l'extérieur, de façon à disposer la turbine exactement en face des orifices du distributeur. Enfin, dans le réservoir, une vanne mobile verticalement obture plus ou moins

ces orifices, ce qui permet de régler arbitrairement le débit. Cette turbine s'adapte parfaitement à toutes les hauteurs de chute⁽¹⁾. Son rendement, qui varie très peu avec la vitesse de régime, atteint 0,80 pour les hautes chutes et est encore égal à 0,75 pour une chute de 1^m15 et à 0,60 pour une chute de 0^m30.

347. - Les turbines radiales et centrifuges sont des turbines où l'eau du réservoir entoure un cylindre creux d'axe vertical, et s'échappe par des fentes verticales en nappes radiales, lancées vers l'axe du cylindre. À l'intérieur du cylindre creux, une turbine de même axe présente ses aubes aux orifices du cylindre, et est mise en mouvement par la poussée des nappes centrifuges.

348. - Turbine Fontaine [Porte-feuille Planche V]. Imaginons un réservoir cylindrique rempli d'eau et dont la base est percée, vers sa circonférence extérieure, d'orifices égaux



et également espacés. L'eau s'échappe de haut en bas parallèlement à l'axe (d'où le nom de turbines axiales donné aux turbines Fontaine et analogues⁽²⁾); elle rencontre les aubes L, M, P, N d'une roue [fig. 3] dont l'axe vertical coïncide avec l'axe du réservoir cylindrique, et qui est disposée au-dessous du réservoir, de sorte que ses aubes sont face aux orifices du réservoir. En réalité

(1) À St. Blaise dans la Forêt-Noire, une turbine dont le diamètre n'était que de 0,55 a été établie sous une chute de 108 mètres à la vitesse de 2.300 tours par minute en utilisant les 0,75 de la puissance de la chute égale à 40 chevaux.

(2) Sa première idée de ce genre de turbine est due à Euler.

ces orifices sont prolongés par des sortes d'ajutages RL, SP qui guident l'eau⁽¹⁾ avant qu'elle ne rencontre la roue et dont la courbure est opposée à celle des aubes de la roue,

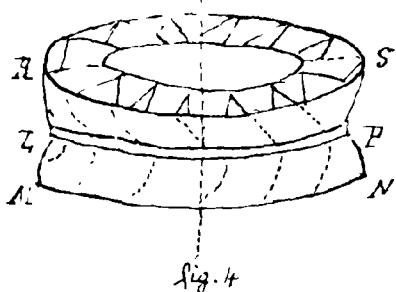


fig. 4

[fig. 4]. Le bas du réservoir, prolongé par les ajutages, constitue le distributeur. La roue et sa couronne d'aubes constituent le récepteur.

La roue est reliée à son arbre par une calotte sphérique: cet arbre ABCD est creux, et enveloppe un arbre fixe EF qui repose sur le fond du bief d'aval. La tête F de cet arbre fixe forme crapaudine, et

c'est sur cette crapaudine que l'arbre mobile ACDB repose par un pivot, qui se trouve ainsi hors de l'eau.

Chaque orifice du distributeur est muni d'une vanne spéciale à l'aide de laquelle on peut le fermer plus ou moins: une couronne réunit les extrémités supérieures des tiges verticales de ces vannes, et est soutenue elle-même par des triangles qui permettent de la faire monter ou descendre, ce qui fait varier la largeur des ouvertures par lesquelles l'eau peut s'écouler.

349. - Divers types de turbines hydrauliques.

Entre ces deux types de turbines que nous venons de décrire: turbines radiales (centrifuges ou centripètes) et turbines axiales (dites encore hélicoïdales), s'intercalent dans la pratique un grand nombre des types intermédiaires.

À un autre point de vue, les turbines se divisent en deux classes: les turbines où l'eau peut acquérir de fortes pressions et travaille à la fois par ses pressions et par sa vitesse: ces turbines sont dites turbines à réaction. Dans les autres, les aubes ou tuyères de la turbine sont incomplètement remplies d'eau et la pression reste sensiblement égale à la pression atmosphérique; ces turbines, où l'eau agit par sa vitesse, sont dites turbines à action ou à impulsion.

(1) À cause de ce guidage, la trajectoire de l'eau est plutôt hélicoïdale que parallèle à l'axe.

L'étude théorique des turbines est fort compliquée. Si on peut discuter assez aisément les conditions d'entrée et de sortie de l'eau (entrée qui doit être sans choc et sortie qui doit être presque sans vitesse), il est très difficile d'analyser les phénomènes qui se passent dans les conduits de la turbine et d'évaluer les pertes de force vive ou de charge dues aux remous, chocs et frottements intérieurs, aux élargissements brusques des filets liquides dans les turbines à impulsion, etc.

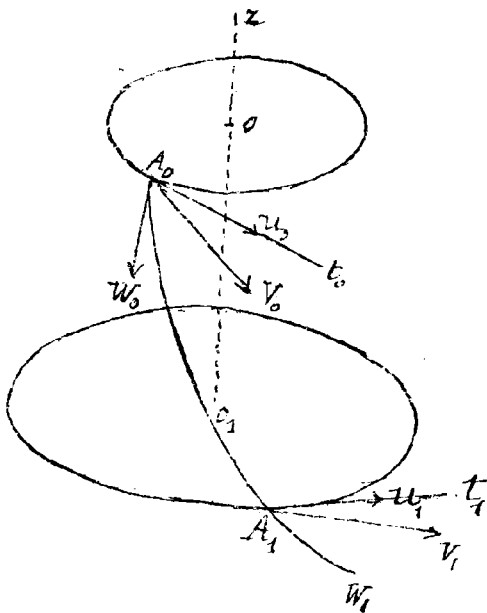
Voici pourtant quelques considérations simples qui permettent d'évaluer approximativement le couple moteur.

351. - Formule d'Euler.

L'axe de la turbine étant vertical, soit O la circonférence horizontale sur laquelle sont distribués les orifices d'entrée de la turbine, et O_1 la circonférence horizontale sur laquelle sont distribués les orifices de sortie. Chaque tuyère qui guide l'eau à l'intérieur de la turbine part d'un point tel que A_0 de la circonférence O et aboutit à un point tel que A_1 de la circonférence O_1 . Le mouvement de l'eau par rapport aux axes fixes [mouvement que nous appellerons absolu] est la résultante du mouvement relatif de l'eau dans la turbine [mouvement où l'eau décrit comme trajectoire une tuyère $A_0 A_1$] et du mouvement de rotation de la tuyère (liée à la turbine) autour de l'axe OO_1 .

Prenons comme sens positif sur l'axe $O_1 O$ le sens ascendant $O_1 Z$ et considérons la demi-tangente $A_0 t_0$ (ou $A_1 t_1$) menée en A_0 (ou A_1) à la circonférence O (ou O_1) dans le sens positif des rotations. La vitesse u_0 de l'élément A_0 de la turbine, comptée positivement suivant $A_0 t_0$, est égale à $\rho_0 \omega$, si ω représente en grandeur et signe la vitesse angulaire de la turbine ^{autour de OO_1} et ρ_0 le rayon de la circonférence O . De même la vitesse u_1 de l'élément A_1 de la turbine est égale à $\rho_1 \omega$.

D'autre part, soit W_0 et W_1



la vitesse relative de l'eau dans la turbine, à l'entrée et à la sortie; soit α_0, β_0 les angles sous lesquels une des tuyères de la turbine coupe la circonférence d'entrée O et la verticale: d'une façon précise, α_0 et β_0 sont les angles de \vec{W}_0 [vecteur tangent en A_0 à la tuyère] avec $A_0 t_0$ et la verticale descendante. De même α_1, β_1 sont les angles de \vec{W}_1 avec $A_1 t_1$ et la verticale descendante.

Ceci posé, la vitesse absolue \vec{V}_0 de l'eau à l'entrée a , comme composante a_0 tangente à la circonférence O (et comptée positivement dans le sens $A_0 t_0$):

$$(1) \quad a_0 = \omega r_0 + W_0 \cos \alpha_0$$

et comme composante verticale b_0 comptée dans le sens descendant:

$$(2) \quad b_0 = W_0 \cos \beta_0$$

De même, la vitesse absolue \vec{V}_1 de l'eau à la sortie a , comme composante a_1 tangente à la circonférence O_1 :

$$(3) \quad a_1 = \omega r_1 + W_1 \cos \alpha_1,$$

et comme composante verticale b_1 , comptée dans le sens descendant:

$$(4) \quad b_1 = W_1 \cos \beta_1.$$

351. — Ces remarques faites, supposons le régime permanent établi: il sort, dans le temps dt , de la turbine, une masse d'eau $\mathcal{E} = m dt$, et il y entre une masse d'eau égale $\mathcal{E}_0 = m dt$. Considérons la masse d'eau μ qui, à l'instant t , est intérieure à la turbine et appliquons à ce système μ entre les instants t et $t + dt$, le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe O, O . En vertu de la permanence du régime, la variation du moment cinétique (par rapport à O, O) du système μ est égal à l'excès du moment de la masse \mathcal{E} , sur le moment de la masse \mathcal{E}_0 . Or le moment cinétique (par rapport à O, O) de \mathcal{E} , (ou de \mathcal{E}_0) est égal à:

$$\mathcal{E} a_1 r_1 = m a_1 r_1 dt \quad (\text{ou à } \mathcal{E}_0 a_0 r_0 = m a_0 r_0 dt).$$

La variation du moment cinétique (par rapport à O, O) du système μ , entre les instants t et $t + dt$ est donc:

$$m (\alpha_1 r_1 - \alpha_0 r_0) dt,$$

m désignant le débit de la turbine (masse d'eau qui entre dans la turbine pendant l'unité de temps).

D'autre part, les forces extérieures qui, à l'instant t , sont appliquées à la masse μ , sont la pesanteur, les pressions sur les sections horizontales d'entrée et de sortie de l'eau (toutes forces verticales), enfin les réactions des tuyères de la turbine sur l'eau. Ces dernières forces donnent seules un moment, soit $-N$, par rapport à l'axe O, O , et [en vertu du principe de l'action et de la réaction] ce moment est égal et directement opposé à l'axe du couple moteur⁽¹⁾ [couple exercé par l'eau sur la turbine]. Le théorème des moments appliqué à l'axe O, O et à la masse μ donne donc :

$$(5) \quad m (\alpha_1 r_1 - \alpha_0 r_0) = -N, \text{ ou bien } N = m (\alpha_0 r_0 - \alpha_1 r_1),$$

l'axe N du couple moteur étant compté positivement dans le sens O, O . Cette formule remonte à Euler.

352. — Les quantités α_0 et α_1 sont faciles à calculer pour les turbines à réaction (turbines entièrement remplies d'eau). On connaît, en effet, les sections des tuyères par les plans horizontaux O et O_1 , par suite les surfaces σ_0 et σ_1 d'entrée et de sortie de l'eau. Or, une fois mesuré le débit m de la turbine, on a :

$$m = \rho \sigma_0 b_0 = \rho \sigma_1 b_1,$$

d'où les valeurs de b_0 et de b_1 . Comme on connaît les angles β_0 et β_1 , ainsi que les angles α_0 et α_1 , les formules (2) et (4) nous donnent W_0 et W_1 , et les formules (1) et (3) nous donnent α_0 et α_1 . Le couple moteur est dès lors déterminé.

353. — Quand les tuyères de la turbine ne sont pas entièrement remplies d'eau, il n'est pas difficile de mesurer directement la vitesse verticale d'entrée de l'eau⁽²⁾ : d'où la

(1) Ce couple moteur est un peu supérieur (par suite des frottements des pivots) au couple résistant qu'il faut appliquer à l'arbre pour que sa rotation demeure uniforme.

(2) La formule $m = \rho \sigma_0 b_0$ subsiste, parce que les tuyères sont pleines d'eau à l'entrée.

valeur de α_0 comme plus haut. Mais la valeur de α_1 ne peut plus se déduire du débit de la turbine, car la section horizontale de sortie de l'eau n'est qu'une fraction inconnue de la somme des ouvertures des tuyères.

Pour calculer α_1 , nous allons appliquer le théorème généralisé de Bernouilli [N°278] au mouvement relatif de l'eau dans la turbine. La force mF qui s'exerce sur un élément du liquide de masse m (force relative aux axes ox, y, z , liés à la turbine) est la somme géométrique de la pesanteur, de la force d'entraînement et de la force centrifuge composée.

Dans le mouvement relatif, une fois le régime établi, on a [N°278]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = Xx' + Yy' + Zz'.$$

Mais dans l'expression $Xx' + Yy' + Zz'$, la force centrifuge composée ne donne rien; la pesanteur dérive de la fonction de forme $-mgz$, et la force d'entraînement de la fonction de force $m \frac{\omega^2 r^2}{2}$. L'égalité précédente donne donc:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = \frac{d}{dt} \left(-gz + \frac{\omega^2 r^2}{2} \right),$$

c'est-à-dire:

$$\frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz - \frac{\omega^2 r^2}{2} = C^te,$$

et enfin:

$$(6) \quad \frac{W_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + gZ_1 - \frac{r_1^2 \omega^2}{2} = \frac{W_0^2}{2} + \frac{P_0}{\rho} + gZ_0 - \frac{r_0^2 \omega^2}{2}.$$

La turbine n'étant qu'incomplètement remplie, l'air circule librement entre les aubes et les pressions p et p_0 coïncident avec la pression atmosphérique. L'équation (6) devient donc:

$$W_1^2 = W_0^2 + \omega^2 (r_1^2 - r_0^2) + 2gh = W_0^2 + U_1^2 - U_0^2 + 2gh,$$

h désignant la hauteur $Z_0 - Z_1$ de la turbine. Cette formule fait connaître W_1 , d'où α_1 par l'égalité (3), et par suite N .

Mais, en réalité, il faut introduire dans l'égalité (6) un terme correctif pour tenir compte des pertes de charge qui résultent des remous, frottements, élargissements brusques des filets liquides, etc. Ce terme correctif varie avec le type de turbine considéré: on admet qu'il est égal à une fonction linéaire de W_1^2 , W_0^2 , $U_0^2 = r_0^2 \omega^2$, $U_1^2 = r_1^2 \omega^2$, fonction dont on détermine empiriquement les coefficients.

Quand la turbine est complètement noyée, la formule (6) s'applique encore et doit être corrigée de la même manière: p coïncide encore sensiblement avec la pression atmosphérique, mais la valeur de p_0 peut être beaucoup plus grande.

Moteurs thermiques.

353 - Généralités. - Les moteurs thermiques, comme leur nom l'indique, sont des machines qui transforment en travail moteur l'énergie calorifique dégagée par un phénomène en général chimique [combustion de la houille, combustion ou explosion du pétrole, etc.].

On peut diviser les machines thermiques en deux grandes classes: dans les premières, (machines à vapeur, machines à air chaud, etc.) la chaleur dégagée par la réaction chimique est employée à volatiliser ou à échauffer un corps intermédiaire (eau, air, etc) et c'est cette vapeur, ou cet air chaud, ainsi portés à haute pression, qui actionnent le moteur. Dans les machines thermiques de la seconde classe [moteurs à gaz, à pétrole, armes à feu], ce sont les gaz mêmes produits par la réaction chimique [combustion, explosion, etc] qui, par leur expansion, entretiennent le mouvement de la machine.

Dans la plupart des moteurs thermiques, qu'ils appartiennent à la première ou à la seconde classe, la vapeur motrice agit par pression sur une face d'un piston cylindrique, qui se meut dans un cylindre de même diamètre. Le mouvement du piston qui est alternatif s'obtient en établissant des pressions inégales sur les deux faces. La machine est à simple ou double effet, suivant que l'excès de pression agit dans une oscillation complète (aller et retour) du piston sur une seule de ses faces, ou alternativement sur les deux faces.

Machines à vapeur.

354. - Dispositions générales.

Toute machine à vapeur comprend :

1° une chaudière ou générateur, où l'eau est transformée en vapeur sous une pression p ;

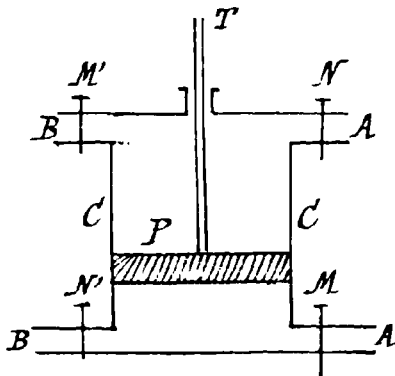
2° un ou plusieurs cylindres dans lesquels la vapeur agit sur les pistons, leur donne un mouvement alternatif et produit ainsi du travail moteur;

3° un milieu (condenseur ou air libre) dans lequel la vapeur après avoir travaillé, est envoyée et maintenue à une pression p , inférieure à p .

Le condenseur est une cavité où de l'eau froide se renouvelle périodiquement; la machine est dite alors à condensation et la contre-pression p_0 est égale à la pression de la vapeur saturée qui correspond à la température de l'eau du condenseur après la condensation opérée. Presque toutes les machines de l'industrie, sont des machines à condensation. Quand on se borne à envoyer la vapeur (qui a travaillé) dans l'atmosphère, la machine est dite à échappement et la contre-pression est alors égale à la pression atmosphérique ou plutôt lui est un peu supérieure, en raison des résistances qui s'opposent à l'écoulement de la vapeur.

355. - Fonctionnement de la machine à double effet.

Le piston P , mobile dans le cylindre C , est alternativement poussé sur ses deux faces et transmet son mouvement au dehors par la tige T , qui traverse par joint étanche l'un des fonds du cylindre; A, A sont des tubes d'admission conduisant la vapeur de la chaudière au cylindre; B, B sont des tubes d'émission conduisant la vapeur au condenseur ou à l'échappement.



Dans la figure, on suppose que les tubes A, B sont ouverts ou fermés

à volonté par la manœuvre de robinets de distribution M, N, M', N' . Si on ouvre M, M' en fermant N, N' , le piston est sollicité, par une force verticale ascendante, égale à $(p_1 - p_0) \omega$, ω étant sa surface⁽¹⁾. Il monte; lorsqu'il est parvenu en haut de sa course, on ferme M, M' et on ouvre N, N' ; il est sollicité en sens inverse par une force égale à la précédente; il descend et ainsi de suite; par le jeu indéfini des robinets, il prend donc un mouvement alternatif.

On conçoit d'ailleurs que l'on puisse produire automatiquement la manœuvre des robinets à l'aide d'un mécanisme spécial, commandé par le mouvement même du piston.

Transformation du mouvement du piston.

Dans la machine de Watt, le mouvement rectiligne alternatif du piston se transforme d'abord en oscillation d'un balancier, par l'intermédiaire d'un parallélogramme de Watt, puis un mouvement de rotation continu d'un arbre par le moyen d'une bielle et d'une manivelle (Portefeuille; pl. IX).

On a renoncé aujourd'hui, à peu près universellement, à l'appareil encombrant du balancier. La tige du piston, guidée dans son mouvement rectiligne par une glissière ou par un galet mobile entre des pièces fixes, s'articule à une bielle agissant directement sur une manivelle qui fait corps avec l'arbre principal; la machine est dite alors à connexion directe.

Détente.

La manœuvre schématisée des robinets M, M' et N, N' peut être modifiée de façon à obtenir une meilleure utilisation de la vapeur (Watt).

Considérons le piston dans sa course ascendante: N, N' sont fermés, M, M' sont d'abord ouverts. La cavité inférieure du cylindre communique avec la chaudière,

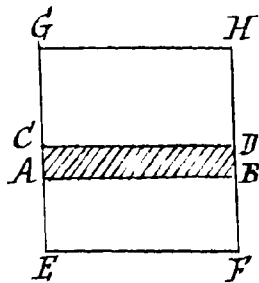
⁽¹⁾ Nous supposons, pour fixer les idées, l'axe du cylindre vertical, et nous négligeons le poids. Mais rien n'est changé à ce qui va suivre si le cylindre est orienté d'une façon quelconque, par exemple est horizontal.

la cavité supérieure avec le condenseur. Lorsque le piston est arrivé à une certaine position de sa course, fermons M en laissant M' ouvert. A partir de ce moment jusqu'à la fin de la course ascendante, la cavité inférieure du cylindre est close, la vapeur enfermée dans cette cavité se détend et, par son expansion, produit du travail sans qu'il y ait une nouvelle introduction de vapeur. Cette détente de la vapeur doit être réglée de manière que la pression sur la face inférieure du piston, soit, au haut de la course au moins égale à la pression p_0 qui est celle du condenseur ou de l'échappement.

Il y a détente complète quand cette pression à la fin de la détente, est exactement égale à p . En pratique, un excès de la pression finale sur p , nécessaire à l'écoulement de la vapeur dans le condenseur, est de plus utile pour éviter les rentrées d'air⁽¹⁾. D'ailleurs, la détente complète exigerait un allongement excessif de la course et on perdrait par les frottements plus qu'on ne gagnerait en achevant la détente.

357. - Lorsque le piston, arrivé au bout de sa course ascendante, revient en sens inverse, il importe que la pression sur sa face inférieure soit immédiatement moindre que celle qui s'exerce sur l'autre face. Pour assurer sans retard cette condition, on met la cavité inférieure du cylindre en communication avec le condenseur avant que le piston soit arrivé au bout de sa course; c'est ce qu'on appelle l'échappement anticipé.

Dans le même but et aussi pour diminuer le choc qui se produit au changement de sens, on fait communiquer la cavité supérieure $CDGH$ avec la chaudière un peu avant la fin de la course du piston; c'est l'admission anticipée. Il est utile de diminuer, à ce moment, la différence entre la pression de l'espace $CDGH$ et celle de la chaudière, afin de diminuer la vitesse avec laquelle la vapeur s'écoule de la chaudière dans le cylindre et les frottements et choc



(1) Cet air arrive dans le condenseur dissous dans l'eau froide, et, comme cette eau s'échauffe, il se dégage à une pression plus élevée que la pression atmosphérique (Voir le N.º 354).

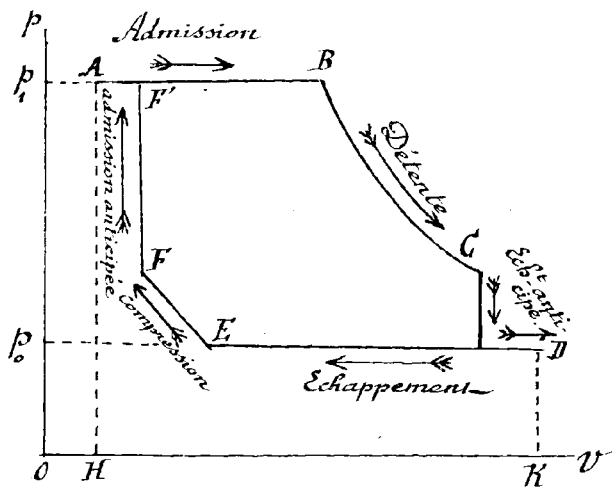
concomitants. On réalise cette condition en supprimant, avant l'admission anticipée de la vapeur, la communication qui, depuis le commencement du mouvement ascendant, existe entre l'espace $C D G H$ et le condenseur. La cavité $G D G H$ est alors close, et la vapeur qu'elle renferme est comprimée entre le piston et le fond $G H$; c'est la période de compression.

Les mêmes phases se répètent pendant la descente du piston, mais les rôles des deux cavités sont permutés.

En résumé, le développement des pressions dans les deux cavités du cylindre présente les phases suivantes:

	<u>Cavité inférieure</u>	<u>Cavité supérieure</u>
Montée du piston	1° Admission	1° Echappement
	2° Détente	2° Compression
	3° Echappement anticipé.	3° Admission anticipée.
Descente du piston.	4° Echappement	4° Admission
	5° Compression	5° Détente
	6° Admission anticipée.	6° Echappement anticipé.

358. - Diagramme représentatif.



Représentons (à un instant t) le volume V de la cavité inférieure et la pression p dans cette cavité par un point en prenant pour abscisse le volume et pour ordonnée la pression. En considérant comme instantanées les variations de pression dues à la manœuvre des robinets, les phases énumérées au N° 356 sont figurées par le

diagramme théorique suivant.

1° Pendant toute la durée de l'admission, la pression est égale à la pression p de la chaudière; cette période est représentée par la droite AB parallèle à l'axe des volumes.

2° Pendant la détente, représentée par la courbe BC, la pression s'abaisse de p à une valeur supérieure à p (pression du condenseur), si la détente est incomplète; égale à p , si la détente est complète.

3° L'échappement anticipé amène, brusquement et sans variation sensible de volume, la pression à p et, sous cette pression, le piston arrive au bout de sa course. D'où la ligne brisée CC'D: CC' n'existe que si la détente est incomplète.

4° Le piston revenant sur lui-même, le volume diminue et, la pression restant égale à p , la période d'échappement est représentée par la droite DE parallèle à l'axe des volumes.

5° La compression, qui se produit ensuite, est représentée par la courbe EF;

6° Enfin, la période d'admission anticipée est représentée par la ligne brisée FF'A.

Le volume représenté par OH, qui existe entre le fond du cylindre et le piston, quand celui-ci est au bout de sa course, s'appelle espace libre, espace mort ou espace nuisible. La longueur HK représente la course totale du piston.

Le même diagramme convient pour la cavité supérieure du cylindre, mais le nouveau point figuratif est en D quand le premier est en A.

Enfin, le travail développé par les pressions sur une des faces du piston, pendant la durée de sa double course, est représenté par l'aire F'BC'C'EFF'; car le travail des pressions élémentaires sur la face inférieure du piston, dans le déplacement dh (>0 ou <0) du piston est $p \cdot \omega dh = p dV$; et le travail pendant la montée du piston est égal à l'aire HABCK; pendant la descente, il est égal à l'aire KDEF AH changée de signe.

Le travail des pressions sur les deux faces du piston pendant un aller et retour du piston est donc égal au double de l'aire F'BC'C'EFF'.

Preons comme unité de longueur le mètre; le volume V sera exprimé en mètres cubes; soit p la pression en kilogrammes-poids par mètre carré⁽¹⁾. Le double de

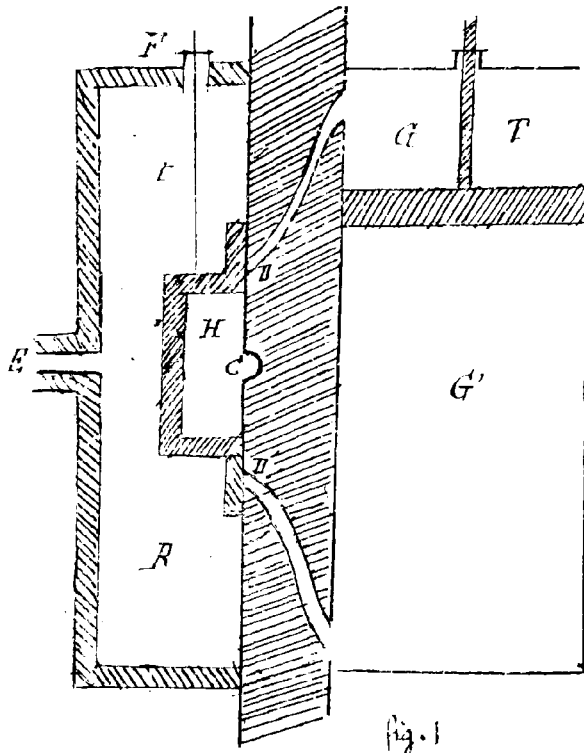
(1) Si, à un instant t , la pression est de dix atmosphères, p (avec les unités choisies) est égal à $760 \times 13,596$ kilogrammes poids.

l'aire $F'BCC'E'F'F'$, (évaluée en mètres carrés) représentera le travail total en kilogrammètres des pressions de la vapeur sur les deux faces du piston.

359. - Distribution par tiroir.

Le mode de distribution par quatre robinets que nous avons indiqué pour expliquer le fonctionnement de la machine à double effet, présente des inconvénients: les robinets sont difficilement étanches, et la manœuvre en est compliquée. On évite ces inconvénients avec la distribution par tiroir dont le premier type (tiroir en D, planche VI du porteseuille) a été imaginé par Watt. Cette distribution est ordinairement réalisée comme il suit (tiroir ordinaire, pl. VI du porteseuille):

Le tiroir est une sorte de boîte ouverte d'un côté qui glisse sur une paroi plane bien dressée, faisant corps avec le cylindre. Le tiroir est appliqué sur cette paroi et lui présente sa cavité intérieure H (coquille); il se meut dans un espace clos B dit boîte à vapeur, lequel communique par un tuyau E avec la chaudière.

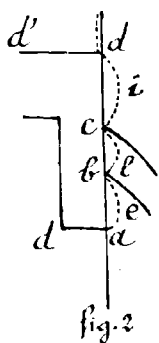


L'intérieur H du tiroir communique avec le condenseur (ou l'échappement) au moyen d'une conduite dont C est l'orifice. Il résulte de ces dispositions que la pression de la vapeur appuie constamment le tiroir sur la paroi lisse. De chaque côté de l'ouverture centrale C se trouvent les orifices (lumières) de deux canaux recourbés D, D' qui viennent déboucher dans le cylindre G, G' vers les deux fonds.

Le schéma ci-dessus suppose que le cylindre (dont on a réduit les proportions par rapport au tiroir) est vertical, ainsi que le tiroir, et il montre le tiroir dans sa position moyenne. Supposons maintenant

que le tiroir ait été déplacé vers le haut, à partir de sa position moyenne, de manière à dégager les lumières: la cavité inférieure G' du cylindre communique avec la boîte à vapeur, donc avec la chaudière, et la cavité supérieure G communique avec la coquille, donc avec le condenseur. Si, au contraire, le piston a été déplacé vers le bas de façon à dégager encore les lumières, les communications sont interverties.

On anime le tiroir d'un mouvement vertical alternatif à l'aide d'une tige t commandée elle-même par le piston moteur. Lorsque le tiroir, dans son mouvement ascendant, commence à dégager la lumière inférieure, l'admission anticipée commence dans la cavité inférieure G' du cylindre: il faut, par suite, qu'à ce moment le piston moteur n'ait pas encore atteint le bas de sa course. Quand le piston moteur est au bas de sa course, la lumière inférieure est donc dégagée au moins partiellement, et l'admission se prolonge tant que le tiroir en redescendant n'a pas obturé complètement la lumière. A ce moment, la détente commence dans la cavité G , et elle cesse quand le tiroir en descendant dégage la lumière inférieure.



L'échappement se produit alors et dure jusqu'à l'instant où le tiroir en remontant obture complètement la lumière inférieure; la compression commence alors dans la cavité G , et elle dure jusqu'à l'instant où le tiroir en remontant commence à dégager la lumière inférieure; l'admission se produit alors et ainsi de suite.

Ses corrélations sont analogues si on considère la cavité supérieure G du cylindre et la lumière supérieure, mais les phases de la cavité supérieure retardent sur celles de la cavité inférieure d'une durée égale à un aller simple du piston.

Relations entre les mouvements du piston et du tiroir. — Le mouvement de la tige T du piston moteur est transformé en un mouvement circulaire continu par l'intermédiaire d'une bielle B et d'une manivelle M ou OI ; une manivelle OJ ou m invariablement liée à l'arbre O (et par suite à la manivelle OI) commande, par l'intermédiaire

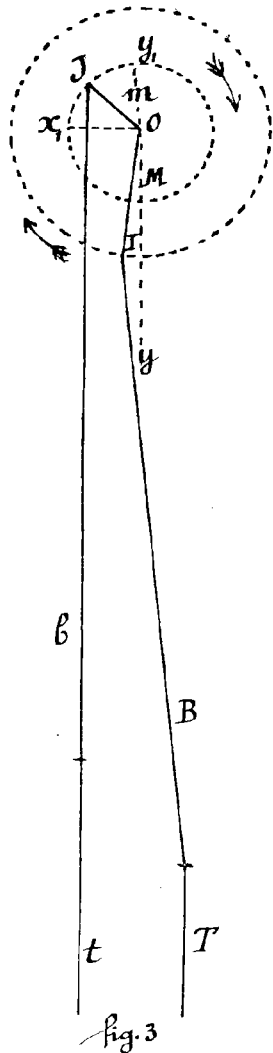


fig. 3

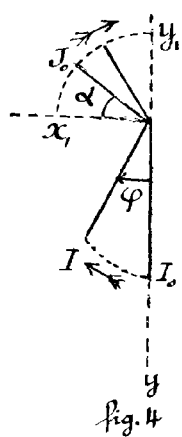


fig. 4

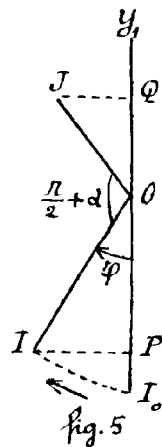


fig. 5

d'une bielle b , le mouvement alternatif de la tige et du tiroir.⁽¹⁾

Nous négligerons dans ce qui suit, l'inclinaison des bielles sur la verticale. Quand la manivelle OJ est horizontale, le tiroir occupe sa position moyenne; quand le point J atteint sa position la plus haute ou la plus basse, il en est de même du tiroir. Les mêmes remarques s'appliquent au piston moteur et à la manivelle OI .

Appelons φ l'angle yOI que fait OI avec la verticale descendante oy , angle compté positivement dans le sens du mouvement de la manivelle OI . Pour $\varphi = 0$, I est en I_0 au point le plus bas de sa course, et le tiroir doit être au-dessus de sa position moyenne et continuer à monter; ce qui exige que la position correspondante J_0 de J soit sur le quadrant x_1y_1 , parcouru par le point J lorsqu'il est au-dessus de O et qu'il monte. Autrement dit, l'angle I_0OJ_0 doit être compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π soit $I_0OJ_0 = \frac{\pi}{2} + \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$). Quand φ croît, l'angle yOJ croît et est constamment égal à $\frac{\pi}{2} + \alpha + \varphi$. L'angle α s'appelle angle d'avance ou de calage.

Considérons maintenant les projections P et Q de I et de J sur la verticale de O . Les segments OP , OQ représentent en grandeur et sens les déplacements du piston et du tiroir à partir de leur position moyenne (puisque nous négligeons les obliquités des bielles). Le segment I_0P , toujours dirigé dans le sens

(1) En fait, le mouvement du tiroir est pris sur l'arbre O à l'aide d'un excentrique à collier [cours de 1^{ère} année, n^o 97].

ascendant, représente le déplacement du piston à partir de sa position la plus basse. Posons $I_0P = x$, $OQ = y$; les segments étant comptés positivement dans le sens ascendant; appelons r la longueur de la manivelle OI , et c la course de du piston (égale au double de la longueur OI); on a:

$$(1) \quad x = \frac{c}{2} (1 - \cos \varphi) = c \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$(2) \quad y = r \sin(\alpha + \varphi),$$

équations qui expriment les déplacements en fonction de φ .

Relations entre les éléments de la distribution.

Le tiroir étant dans sa position moyenne, les parties pleines ab , cd (fig. 2) qui s'étendent de part et d'autre d'une lumière (soit la lumière inférieure) s'appellent recouvrements; ab est le recouvrement extérieur et cd le recouvrement intérieur. Nous désignerons par e , l , i les longueurs ab , bc , cd .

Quand le piston est au bas de sa course, il faut que aa' , dans sa course ascendante, ait dépassé le bord b' de la lumière d'une certaine longueur δ qu'on appelle l'avance linéaire de aa' . Le déplacement du tiroir est alors $e + \delta$; et comme ce déplacement correspond à $\varphi = 0$, on a [équation (2)]:

$$(3) \quad e + \delta = r \sin \alpha.$$

Étudions la succession des quatre phases de la cavité inférieure: admission, détente, échappement, compression.

1° L'admission cesse quand aa' , après avoir atteint sa hauteur maxima et rétrogradé, affleure au bord b' de la lumière; le déplacement est alors égal à e , et on a, si φ_1 est la valeur correspondante de φ :

$$(4) \quad e = r \sin(\alpha + \varphi_1).$$

2° La détente commence alors, et cesse quand dd' , dans le mouvement descendant du tiroir, affleure au bord c de la lumière; le déplacement est alors $-i$, et on a, si φ_2 est la valeur de φ correspondante:

$$(5) \quad -i = r \sin(\alpha + \varphi_2);$$

3° L'échappement commence, et il cesse quand dd' , ayant atteint sa position la plus basse et rétrogradant,

affleure de nouveau au bord de la lumière; la valeur φ_3 correspondante vérifie la même équation que dans le cas précédent :

$$(6) \quad -i = P \sin(\alpha + \varphi_3)$$

4° La compression commence, et elle cesse quand ad, dans son mouvement ascendant affleure de nouveau au bord b de la lumière; si φ_4 est la valeur de φ correspondante, on a :

$$(7) \quad c = P \sin(\alpha + \varphi_4)$$

L'échappement commence alors, et ainsi de suite.

La cavité supérieure G du cylindre et la lumière supérieure présentent les mêmes phases, mais elles correspondent aux valeurs $\varphi + \pi$, $\varphi_2 + \pi$, $\varphi_3 + \pi$, $\varphi_4 + \pi$; car pendant un aller simple du piston, le point I parcourt une demi-circconférence.

360. - Le problème de la distribution consiste à trouver une disposition du tiroir amenant successivement la détente, l'échappement, la compression et l'admission pour des valeurs données x_1, x_2, x_3, x_4 du déplacement du piston. Si nous nous reportons au diagramme du N° 355, x_1, x_2, x_3, x_4 sont proportionnels aux segments H_1, H_2, H_3, H_4 , qui représentent les volumes du cylindre compris entre la position la plus basse du piston et sa

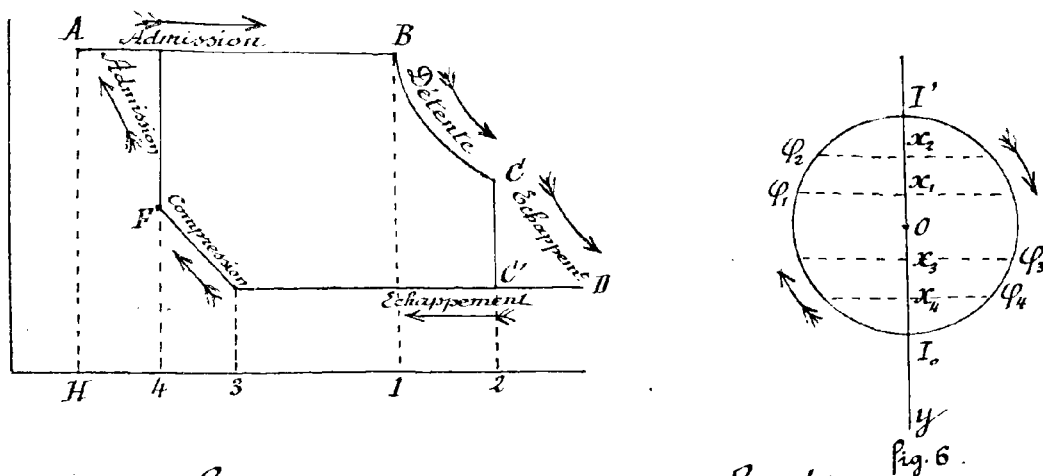


Fig. 6.

position à l'instant où commence la détente, puis l'échappement, etc. Aux valeurs x_1, x_2, x_3, x_4 , la relation (1) fait

correspondre des valeurs $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$.

Sur le diamètre vertical du cercle de centre O et de rayon OI , portons, en effet, à partir du point I , dans le sens ascendant, les longueurs x_1, x_2, x_3, x_4 ; les angles $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sont déterminés sans ambiguïté (fig. 6°); car φ_1 et φ_2 doivent être compris entre 0 et π (variation de φ pendant la montée du piston) et φ_3, φ_4 entre π et 2π .

Ces valeurs $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ doivent vérifier les quatre équations (4), (5), (6), (7) du N° précédent. Or ces équations ne renferment que trois indéterminées e, i, α , elles entraînent donc une condition entre $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. Formons-la. Les équations (4) et (7) donnent: $\alpha + \varphi_1 = \pi - (\alpha + \varphi_4) + 2K\pi$ ou

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_1 + \varphi_4}{2} + K\pi \quad (K \text{ entier } + \text{ ou } -);$$

Comme $(\varphi_1 + \varphi_4)$ est compris entre 3π et 2π , α n'est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ que pour $K=1$, on a donc:

$$(8) \quad \alpha = \frac{3\pi}{2} - \frac{\varphi_1 + \varphi_4}{2};$$

les équations (5) et (6) donnent de même:

$$\alpha = \frac{3\pi}{2} - \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}$$

Il faut donc qu'on ait

$$(9) \quad \frac{\varphi_1 + \varphi_4}{2} = \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}$$

Cette égalité impose une condition corrélatrice aux quantités x_1, x_2, x_3, x_4 , qui par suite ne sont pas arbitraires.

Cette condition étant supposée remplie, α est donné par l'équation (8). On a ensuite:

$$(10) \quad e = P \sin(\alpha + \varphi_1) = P \sin \left[\frac{3\pi}{2} - \frac{\varphi_4 - \varphi_1}{2} \right],$$

$$(11) \quad i = -P \sin(\alpha + \varphi_2) = -P \sin \left[\frac{3\pi}{2} - \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2} \right];$$

$$(12) \quad \delta = P \sin \alpha - e = P \left[\sin \alpha - \sin(\alpha + \varphi_1) \right].$$

Il faut donc que $\frac{\varphi_4 - \varphi_1}{2}$ (qui est toujours $< \pi$) soit compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π [pour que le second membre de (10) soit positif], et que $\frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2}$ soit compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ [pour que le second membre de (11) soit positif].

Pour que le second membre (12) soit positif, il faut que $(\alpha + \varphi_1)$ [toujours $\langle 3\frac{\pi}{2}$] soit inférieur à $\pi - \alpha$, d'où l'inégalité:

$$\alpha + \varphi_1 > \pi - \alpha, \text{ ou } \alpha > \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_1}{2}, \text{ ou } \frac{3\pi}{2} - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} > \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_3}{2}, \text{ ou enfin } \pi > \frac{\varphi_4}{2},$$

condition toujours remplie.

Il est loisible d'après cela, de choisir arbitrairement φ_1 et φ_2 sous les seules restrictions $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi$. On prendra ensuite: $\varphi_3 = \varphi_2 + \mu\pi$, μ désignant une quantité arbitraire assujettie aux inégalités:

$$1 - \frac{2}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_1) < \mu < 1,$$

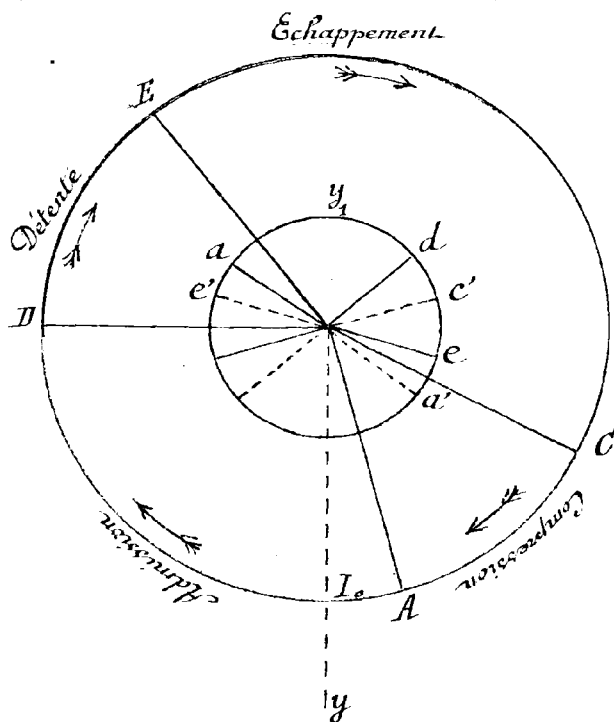
et on prendra enfin:

$$\varphi_4 = \varphi_3 + \varphi_2 - \varphi_1.$$

Les angles $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ étant ainsi choisis, e, i, r, l sont donnés en fonction de r par (10) et (11), r et l pouvant être pris arbitrairement. Il est loisible d'assujettir e, i, r, l à une condition supplémentaire; par exemple, on exigera que le tiroir redescende aussitôt que la lumière inférieure l est entièrement démasquée par le tiroir dans son mouvement ascensionnel; cette condition signifie que, pour $\varphi = \pi$, le déplacement du tiroir est $e + l$; d'où l'égalité:

$$e + l = r,$$

qui détermine l , une fois r choisi arbitrairement.



361. - Représentation graphique de la distribution.

Le graphique ci-contre résume toute cette discussion. Traçons le petit cercle décrit par la tête J de la manivelle OJ du tiroir, et le grand cercle décrit par la tête I de la manivelle OI du piston. Considérons les phases de la cavité inférieure du cylindre et soit:

A	la position de I et à la position de J au début de l'admission;
D	" " " " de la détente;
E	" " " " de l'échappement;
C	" " " " de la compression;

Les points a', d', e', c' , diamétralement opposés aux points a, d, e, c , sont les positions de J au début de phases analogues de la cavité supérieure du cylindre.

Les angles AOa, DOd, EOE, COc sont égaux entre eux et à $\frac{\pi}{2} + \alpha$. Les points a et d sont sur une même horizontale, de même que c et e , car les projections de Oa et Od sur Oy coïncident avec la longueur e , et les projections de Oc et Oe coïncident avec $-i$.

362. - Épure de Fauveau.

Une autre représentation graphique est celle de Fauveau dont voici le principe:

Au lieu de compter le déplacement x du piston à partir de la position la plus basse, comptons-le (comme le déplacement du tiroir) à partir de la position moyenne. On a alors:

$$x = \frac{c}{2} \cos \varphi \quad y = P \sin (\alpha + \varphi);$$

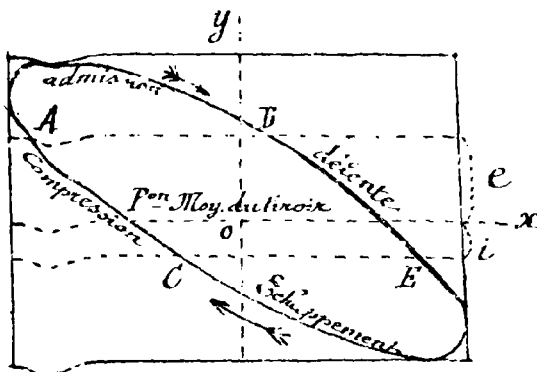
l'élimination de φ donne l'ellipse

$$\frac{11x^2}{c^2} - \frac{y^2}{P^2} - 4 \frac{xy}{cP} \sin \alpha = \cos^2 \alpha.$$

Le plus simple est de la construire paramétriquement par points. On a d'ailleurs, pour définir la tangente:

$$dx = -\frac{c}{2} \sin \varphi d\varphi \quad dy = P \cos (\alpha + \varphi) d\varphi;$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2P \cos (\alpha + \varphi)}{c \sin \varphi}$$



Soit A et B les points où la droite $y = e$ rencontre l'ellipse, C et E les points où la droite $y = -i$ rencontre l'ellipse. Les phases de la cavité inférieure du cylindre sont:

de A à B admission
de B à E détente
de E à C échappement
de C à A compression.

363. Distribution Corliss.

La durée de chacune des périodes successives du fonctionnement du piston influe évidemment sur la valeur du travail qu'il accomplit dans sa double course; d'après ce qui précède, ces durées ne peuvent varier arbitrairement, et par suite on ne peut pas toujours choisir les valeurs les plus avantageuses. Dans la distribution Corliss (pl. VI du portefeuille), l'admission et l'échappement se font au moyen de soupapes s'ouvrant brusquement à un instant arbitrairement choisi. Cet avantage est un de ceux qui font préférer aujourd'hui, pour les machines fixes, ce mode de distribution, bien que le dispositif Corliss (jeu de bielles et de cames excentriques commandant les soupapes à l'aide de tiges et commandé lui-même par l'arbre de la machine) soit moins simple que le tiroir.

Comme il y a intérêt à manœuvrer rapidement les soupapes afin d'éviter le laminage de la vapeur qui produit des pertes de charge, la tige agit en libérant un déclic qui déplace la soupape à l'aide d'un ressort puisant; la tige ramène ensuite le déclic à sa position primitive. Le fonctionnement est analogue à celui d'un chien de fusil qui serait attentivement armé et désarmé.

364. Chaudières. - Les chaudières ordinaires ont la forme d'un cylindre allongé à base circulaire terminée aux extrémités par des calottes sphériques; deux cylindres, dits bouilleurs, qui ont à peu près la même longueur que la chaudière, et dont le diamètre est plus petit, sont placés au-dessous de la chaudière avec laquelle ils communiquent par des tubulures; ils sont destinés à augmenter la surface de chauffe, c'est-à-dire la portion de paroi exposée à l'action du foyer.

Généralement, la chaudière n'utilise que 0,60 de la chaleur dégagée par le combustible; les pertes se font:

1° par les cendres et scories du foyer;
2° par les gaz combustibles et le noir de fumée qui correspondent à une combustion incomplète et sortent avec la fumée.

3° par le dégagement des gaz chauds produits par la combustion et la vaporisation de l'eau qu'ils renferment.

4° par rayonnement et conductibilité.

Ces diverses pertes ont à peu près les valeurs moyennes suivantes :

cendres et scories	0,02	} 0,40
matières combustibles de la fumée	0,06	
dégagement de gaz chauds et vapeur	0,08	
rayonnement et conductibilité	0,24	

Dans ces conditions, la chaudière n'utilise que 5.000 calories environ pour la combustion d'un kilogramme de houille dégageant de 8.000 à 8.500 calories. La quantité de chaleur nécessaire pour transformer un kilogramme d'eau, prise à la température de 0°, en vapeur saturée à la pression de 5 ou 6 atmosphères étant 650 calories environ, on voit que la quantité d'eau vaporisée par un kilogramme de houille est $\frac{5000}{650} = 7^{\frac{2}{3}}$ environ.

365. - Les chaudières du type précédent, à foyer extérieur, de construction et d'installation simples, ont l'inconvénient d'exiger un grand emplacement. Les autres types usuels sont :

1° Les chaudières à foyer intérieur pour diminuer les pertes par rayonnement et conductibilité ;

2° Les chaudières tubulaires dont la surface de chauffe est constituée par des tubes plongés dans l'eau à vaporiser et parcourus intérieurement par la flamme ; on a ainsi une grande puissance de vaporisation pour un poids et un volume de chaudière relativement faible : ce sont les chaudières des locomotives.

3° Les chaudières dites inexplosibles, inverses des précédentes ; l'eau est à l'intérieur des tubes ; il n'y a pas ainsi de grand réservoir de vapeur et d'eau et, si une fissure se produit, l'accident ne porte que sur un faible volume de vapeur.

366. - Condenseurs. - Il y a deux types de condenseurs ; les condenseurs par mélange et les condenseurs par surface.

Les condenseurs par mélange consistent en une cavité close, communiquant avec le conduit d'échappement du cylindre et recevant continuellement un jet d'eau froide qui détermine la condensation de la vapeur. L'appareil comprend :

- 1° une pompe à eau froide élevant l'eau à injecter au niveau du condenseur,
- 2° une bache à eau froide pour recueillir cette eau;
- 3° le condenseur proprement dit, communiquant d'une part avec le cylindre, d'autre part avec la bache à eau froide par un robinet dont on règle l'ouverture. D'ordinaire le condenseur est plongé dans la bache à eau froide;
- 4° une pompe à air, enlevant le mélange d'eau froide et d'eau de condensation au fur et à mesure de sa production, ainsi que l'air qui, primitivement dissous dans l'eau froide à la pression très faible du condenseur, se dégage et constituerait une contre-pression s'opposant au mouvement du piston;
- 5° une bache à eau chaude où la pompe à air déverse l'eau extraite du condenseur;
- 6° une pompe à eau chaude (ou un injecteur, tel que l'injecteur Giffard) qui prend dans la bache à eau chaude l'eau nécessaire à l'alimentation de la machine et l'envoie dans la chaudière.

Les condenseurs par surface sont formés par des tubes métalliques de petit diamètre et de grande longueur placés dans un récipient; tantôt la vapeur passe à l'intérieur des tubes et l'eau froide circule autour d'eux; tantôt c'est l'inverse qui se produit. En tous cas, il faut, pour renouveler l'eau froide, une pompe de circulation. Cette pompe est actionnée, soit par la machine elle-même, soit par un petit moteur spécial.

Rendement d'une machine à vapeur.

367. - Application du principe de l'équivalence et du principe de Carnot...

Considérons la masse d'eau μ , vaporisée partiellement, qui entretient le mouvement de la machine. Cette masse d'eau μ est alternativement vaporisée, condensée, etc. En un mot elle parcourt indéfiniment le même cycle, une fois la machine en marche normale. Au foyer de la chaudière, dont la température sera représentée par Θ ,^{absolue}

elle emprunte pendant un cycle une quantité de chaleur Q_1 employée à échauffer et à vaporiser l'eau partiellement. Au condenseur, dont la température absolue sera représentée par Θ_0 , elle cède pendant un cycle une quantité Q_0 de chaleur. La chaleur totale Q_e empruntée par la masse d'eau μ à l'intérieur, pendant un cycle, est égale à $Q_1 - Q_0$.

Appliquons le principe de l'équivalence à cette masse d'eau μ et à la durée d'un cycle. Au début et à la fin du cycle, l'énergie interne de la masse μ (énergie cinétique et autre) est la même. Le travail des forces extérieures est celui des réactions des deux faces du piston sur la vapeur; or ce travail est égal⁽¹⁾ sensiblement [N° 329] au travail T_m (chargé de signe) des pressions de la vapeur sur les faces du piston. Le principe de l'équivalence donne donc ici :

$$-Q_e = -T_m, \quad \text{ou } T_m = Q_e = Q_1 - Q_0,$$

T_m désignant le travail moteur (travail des forces motrices appliquées au piston) pendant un cycle.

D'autre part, en vertu du principe de Carnot-Clausius, on a [N° 316]:

$$\frac{Q_1}{\Theta_1} - \frac{Q_0}{\Theta_0} \ll 0,$$

le signe \ll ne convenant qu'au cas d'un cycle réversible, cas qui n'est jamais rigoureusement réalisé.

D'où :

$$Q_0 > Q_1 \frac{\Theta_0}{\Theta_1}, \quad \text{et}$$

$$T_m < Q_1 \left[1 - \frac{\Theta_0}{\Theta_1} \right].$$

368. - Rendement thermique.

Le rapport T_m du travail moteur produit à la quantité de chaleur Q_1 empruntée au foyer s'appelle le rendement thermique de la machine.

D'après ce qui précède, quelle que soit la nature du corps qui se transforme et quel que soit le cycle décrit, le rendement est inférieur à la quantité :

(1) En effet, les frottements et les chocs de la vapeur sur le piston sont négligeables.

$$1 - \frac{\Theta_0}{\Theta_1} = \frac{\Theta_1 - \Theta_0}{\Theta_1},$$

rendement du cycle réversible de Carnot.

Dans les machines à vapeur, la température Θ_1 (température de la chaudière) est limitée par la résistance des parois sur lesquelles s'exerce la pression de la vapeur. Cette pression croît rapidement avec la température: elle est de 5 atmosphères à 152° (au-dessus de zéro) et de 10 atmosphères à 180° . On ne peut sans crainte d'explosion, dépasser 200° ; la température absolue⁽¹⁾ Θ_1 est alors $273 + 200 = 473$.

La température du condenseur est en général égale à 40° ; la valeur de Θ_0 est alors $273 + 40 = 473$.

La limite supérieure du rendement thermique est donc:

$$\frac{473 - 313}{473} = 0,36,$$

mais ce rendement, dans les machines industrielles, est très inférieur à cette limite et s'abaisse au-dessous de $\frac{1}{4}$; sa valeur commune est voisine de 0,15.

Mesure de la puissance d'une machine à vapeur.

369. - Puissance indiquée; puissance effective.

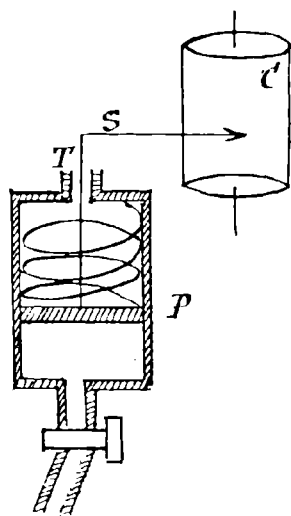
Soit T_m le travail des pressions de la vapeur sur le piston pendant un aller et retour du piston; soit T_u le travail utile de la machine pendant le même temps, travail (changé de signe) du couple résistant qu'il faut appliquer à l'arbre de la machine pour que sa vitesse de rotation garde sa valeur constante normale. Il importe de savoir mesurer ces deux travaux: le premier se mesure à l'aide de l'indicateur de Watt, le second à l'aide du frein de Prony. Si on désigne, d'autre part, par Π la durée d'un aller et retour d'un piston, la puissance motrice du piston sera, par définition, $\frac{T_m}{\Pi}$, puissance

⁽¹⁾ On sait que, si θ désigne la température en degrés centigrades à partir de la température de la glace fondante, et α le coefficient de dilatation à 0° de l'air ($\alpha = \frac{1}{273}$), on peut mesurer Θ par la formule:

$$\Theta = \frac{1}{\alpha} + \theta.$$

qu'on appelle souvent puissance indiquée de la machine; la puissance effective de la machine (ou puissance sur l'arbre) sera $\frac{T_u}{D}$. Si T_m et T_u sont exprimés en kilogrammètres, D en secondes, pour avoir les deux puissances en chevaux-vapeur, il faut diviser par 75 les nombres $\frac{T_m}{D}$ et $\frac{T_u}{D}$.

369. - Indicateur de Watt. - L'Indicateur de Watt se compose d'un petit cylindre où se meut un piston, dont la face inférieure peut être mise en communication (par l'intermédiaire d'un robinet) avec une des cavités du cylindre de la machine, soit la cavité inférieure, de sorte que la vapeur agissant sur la face inférieure du piston de la machine agit en même temps sur la face inférieure du piston P de l'indicateur.



La face supérieure de ce piston P communique avec l'atmosphère et est pressée par un ressort qui est à l'état naturel quand la pression p sur la face inférieure est égale à la pression atmosphérique p_a (qui s'exerce sur la face supérieure). Lorsque p est plus grand que p_a , le piston P s'élève d'une quantité y à partir de sa position naturelle, et cette quantité est (d'après les propriétés des ressorts) proportionnelle à la force ascensionnelle du piston, c'est-à-dire à $p - p_a$; on peut donc écrire :

$$p - p_a = Ky,$$

K désignant une certaine constante qu'on déterminera une fois pour toutes pour le ressort donné.

La tige T du piston porte un crayon ou style S dont la pointe marque sa trace sur un papier enroulé autour d'un cylindre de révolution C : ce cylindre est animé autour de son axe d'un mouvement alternatif de rotation commandé par le piston moteur de la machine; la transmission est telle que la vitesse angulaire de rotation du cylindre est proportionnelle à la vitesse linéaire

du piston moteur et change de sens en même temps que cette dernière, en sorte qu'il y a proportionnalité entre le chemin parcouru par le piston (pendant un intervalle de temps quelconque) et le chemin parcouru par un point de la circonférence de base du cylindre C .

Si donc on appelle dv le volume parcouru par le piston pendant un temps infinitésimal dt , et dx le chemin parcouru par un point de la circonférence de base de C , on a :

$$dv = K' dx,$$

K désignant une certaine constante, qu'on mesurera une fois pour toutes pour l'appareil employé.

L'indicateur ayant été placé pendant un certain temps sur la machine, si on déroule le papier enregistreur, la courbe tracée par le style dans un aller et retour du piston doit être la transformée du diagramme théorique du n° 358 par les formules : $p - p_a = Ky$, $v = K'x$.

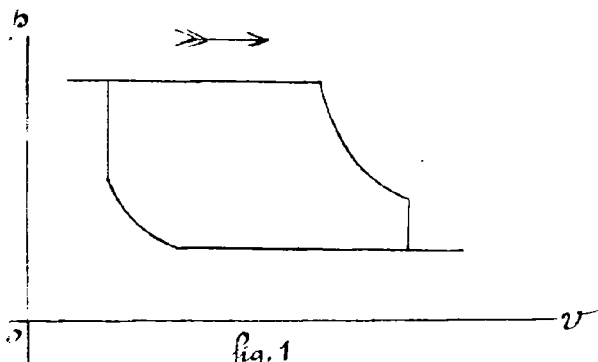


fig. 1
Diagramme théorique

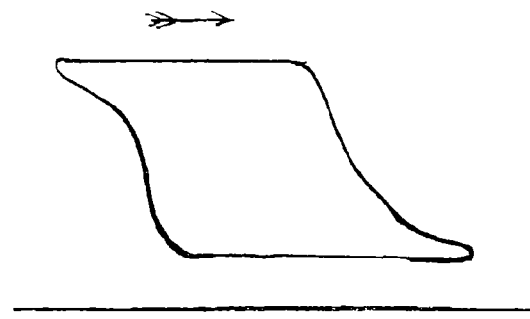


fig. 2
Diagramme enregistré.

En réalité, le jeu des robinets ou du tiroir n'étant pas instantané, la pression ne saute pas brusquement d'une valeur à une autre, et le diagramme enregistré a l'aspect ci-dessus (fig. 2).

371. - Ceci posé, le travail des pressions de la vapeur sur une des faces du piston (pendant une double course) est égal à l'intégrale curviligne $\int p dv$ étendue au contour du diagramme 1 (dans le sens de la flèche). Or on a :

$$\int p dv = K' \int (p_a + Ky) dx = K p_a \int dx + K K' \int y dx,$$

les deux dernières intégrales étant étendues au contour

du diagramme 2 (dans le sens de la flèche): $\int dx$ est nul, $\int y dx$ est l'aire intérieure au diagramme 2, soit A . On voit donc que le travail T_m de la vapeur pendant une double course est $K \cdot K' \cdot A$ si la machine est à simple effet, et $2K \cdot K' A$ si la machine est à double effet.

Quand on a employé, dans toutes les mesures, les unités C. G. S, le travail T_m en kilogrammètres est égal à $\frac{2K \cdot K' \cdot A}{981 \times 10^5}$ (si la machine est à double effet).

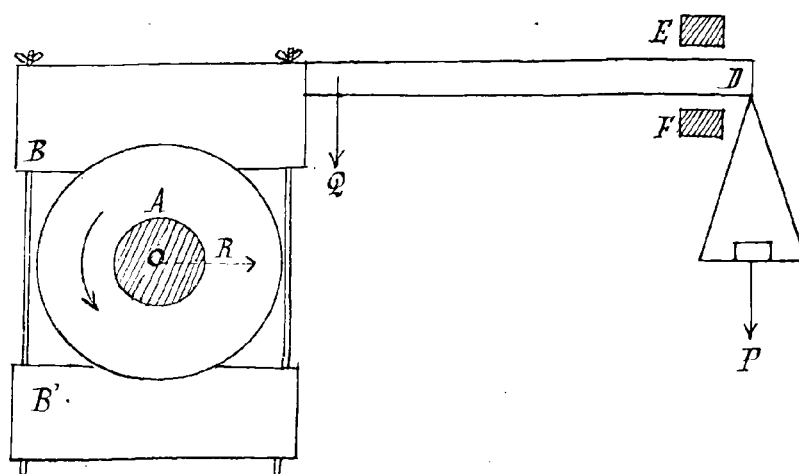
Soit maintenant n le nombre de tours de l'arbre moteur pendant une minute; la durée d'un aller et retour du piston est $\frac{60}{n}$, et la puissance indiquée de la machine est (en chevaux-vapeur) $T_m \times \frac{n}{60} \times \frac{1}{75} = \frac{2K \cdot K' \cdot A}{981 \times 10^5} \times \frac{n}{60} \times \frac{1}{75}$ (si la machine est à double effet).

372. - Frein de Prony.

La machine étant actionnée par la vapeur, pour conserver à la vitesse de rotation de l'arbre la valeur constante qu'elle doit garder pendant la marche normale, on peut exercer sur l'arbre des frottements suffisamment considérables à l'aide d'un frein. Si on sait mesurer le moment (par rapport à l'axe de l'arbre) des frottements exercés par le frein (couple résistant), soit N , on peut en déduire aussitôt le travail utile T_u du moteur pendant un aller et retour du piston, c'est-à-dire pendant un tour de l'arbre, car ce travail T_u est égal $2\pi N$ (N étant la valeur absolue du moment).

C'est là le principe du frein de Prony, dont voici la description sommaire.

Une poulie A , calée sur l'arbre, est ensermée entre deux pièces évidées (mâchoires) formant collier, que l'on peut rapprocher ou écarter à l'aide de deux boulons munis d'écrous. Un levier horizontal CD , fixé à la mâchoire supérieure, passe entre deux taquets fixes qui limitent les oscillations. Le frein, enserrant la poulie, est entraîné par l'arbre dans son mouvement, vient buter contre un des taquets et reste immobile: la poulie frotte alors sur le frein, et on peut régler le serrage des écrous de façon que l'arbre conserve une vitesse de rotation constante (égale à la vitesse de marche normale). Il s'agit de mesurer le moment (par rapport à l'axe OZ de l'arbre) des réactions de frein sur la poulie.



Supposons pour fixer les idées, que la rotation de l'arbre ait le sens de la flèche; si on néglige le poids du levier, le levier sera buté contre le taquet supérieur. Mais si à l'extrémité du levier on attache un poids suffisant, le levier

va venir buter contre le taquet inférieur. On détermine un poids P tel que, si on l'attache à l'extrémité II du levier, le levier reste en équilibre entre les deux taquets.

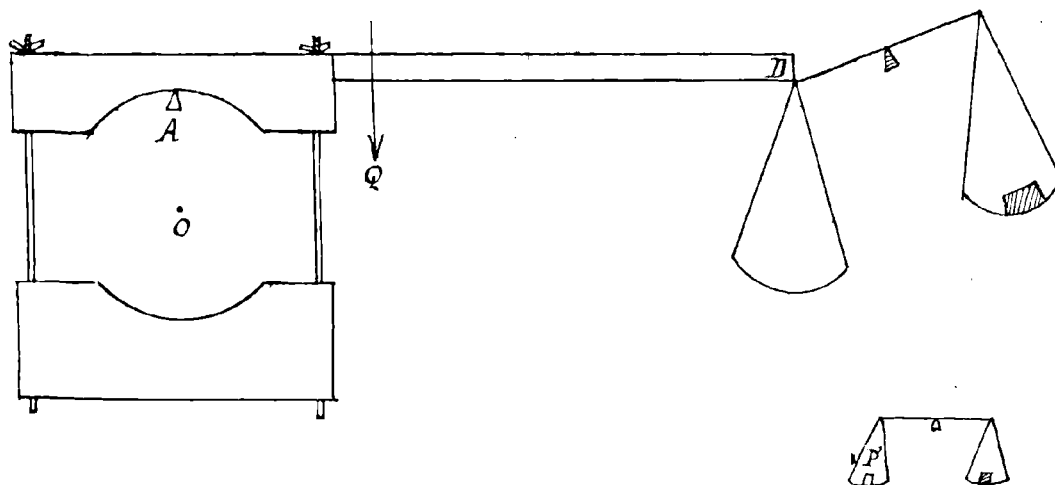
des vecteurs Soit Q le poids total du frein, et p et q les distances P et Q à l'axe OZ . Le moment par rapport à l'axe OZ des forces P, Q et des réactions de la poulie sur le collier est nul; autrement dit, le moment N (par rapport à OZ) des réactions du collier sur la poulie est égal au moment (par rapport à OZ) des forces P, Q ; on a donc

$$N = Pp + Qq,$$

$$\text{et } T_u = 2\pi(Pp + Qq).$$

La quantité Pp se mesure immédiatement d'après l'expérience même. Pour avoir Qq une fois pour toutes, c'est-à-dire pour tarer le frein, on procède de la manière suivante: le frein étant dégagé et libre, on le fait reposer sur un couteau horizontal A situé sur la verticale du point O , puis on attache son extrémité II au plateau W d'une balance qu'on maintient en équilibre en mettant dans l'autre plateau une certaine tare; enfin, on détache l'extrémité II, et on détermine le poids P' qu'il faut placer dans le plateau W pour que l'équilibre de la balance subsiste. Il est évident que le levier exerçait en II sur la balance une force égale au poids P' , et inversement la balance exerçait sur le levier en II une force verticale dirigée vers le haut et égale à P' . Puisque le frein était en équilibre, on a (condition d'équilibre du levier):

$$Qq = P'p.$$



Le frein est ainsi taré, par un procédé analogue à celui de la double pesée.

Remarques. Il est difficile de déterminer un poids P tel que le levier reste en équilibre entre les deux arrêts. Par suite des inégalités des surfaces de contact du collier et de la poulie, le frein (pour un poids P'' voisin du poids P cherché) viendra buter alternativement contre les deux arrêts. Mais il est facile de déterminer un poids minimum P_1 pour lequel le levier restera buté contre F , et un poids maximum P_2 pour lequel le levier restera buté contre E . On prendra pour valeur de P la moyenne arithmétique $\frac{P_1 + P_2}{2}$.

373. - Rendement industriel d'une machine à vapeur.

Soit Q la quantité de chaleur (en kilogrammètres) dégagée par le combustible, et T_u le travail utile correspondant. Le rendement industriel est, comme nous le savons, le quotient $\frac{T_u}{Q}$.

Ce rendement est toujours très faible, et on le comprend aussitôt en remarquant qu'il est le produit de trois rendements plus petits que l'unité. Soit en effet Q_1 la portion de Q utilisée par la chaudière, T_m le travail moteur (travail des pressions de la vapeur sur le piston); on a :

$$\frac{T_u}{Q} = \frac{Q_1}{Q} \times \frac{T_m}{Q_1} \times \frac{T_u}{T_m}.$$

Nous avons dit que $\frac{Q}{Q_1}$ est en général voisin de 0,60, que $\frac{T_m}{Q_1}$ (rendement thermique) ne dépasse guère 0,15. Quant à $\frac{T_u}{T_m}$, il est sensiblement égal à 0,90. On a donc :

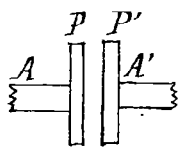
$$\frac{T_u}{Q} = 0,60 \times 0,15 \times 0,90 = 0,08.$$

Il suit de là qu'une machine ordinaire consomme au moins un kilogramme de charbon par cheval vapeur et par heure. En effet, la combustion d'un kilogramme de houille dégage environ 8000 calories c'est-à-dire une énergie équivalente à 8000×425 kilogrammètres. D'autre part, une machine dont la puissance est un cheval-vapeur fournit en une heure $75 \times 60 \times 60$ kilogrammètres. Or le quotient $\frac{75 \times 60 \times 60}{8000 \times 425}$ est égal à 0,08 environ.

374. Dynamomètres enregistreurs.

Au lieu du frein de Prony, on emploie souvent des dynamomètres enregistreurs surtout pour mesurer le travail consommé par un outil. Un type de dynamomètre, dont l'idée remonte à Loncelot, est le suivant :

Deux plateaux P, P', calés normalement sur deux arbres indépendants sont placés en regard l'un de l'autre et reliés par des ressorts (non figurés). L'arbre A est mis en rotation par le moteur et l'arbre A', entraîné par l'intermédiaire des ressorts, actionne l'outil. Si la masse des ressorts est négligeable, les deux couples \mathcal{C} exercés par P et P' sur les ressorts se font équilibre, et c'est la valeur (absolue) commune N des axes de ces deux couples qu'il faut mesurer pour avoir la valeur du couple résistant opposé par l'outil. Si les deux arbres sont immobiles ou si on



les anime en même temps de la même vitesse de rotation, N est nul, les ressorts sont à l'état naturel et les deux plateaux ont une certaine position l'un par rapport à l'autre. Si N n'est pas nul, la flexion des ressorts est sensiblement proportionnelle à N; mais elle est également proportionnelle au déplacement relatif des deux plateaux (c'est-à-dire à l'angle α dont un des plateaux a tourné par rapport à l'autre). Un enregistreur inscrit ce déplacement relatif α , et on a : $N = K\alpha$ (K désignant

une constante qui a été déterminée une fois pour toutes).
 Connaissant la vitesse de rotation de l'arbre moteur
 (qui est donnée par un autre enregistreur), on peut cal-
 culer le travail consommé par l'outil.

Autres types de machines à vapeur.

375. - Machines à vapeurs diverses.

On a essayé d'employer, comme vapeur motrice
 d'autres vapeurs [vapeur d'éther, vapeur d'alcool, etc.] que
 la vapeur d'eau. Mais ces tentatives ont été peu heureuses,
 et on en conçoit aussitôt la raison si on se reporte à
 l'étude du rendement thermique ^{ce rendement} est au plus égal à $\frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_1}$;
 il sera donc d'autant plus faible que $\frac{\Theta_1}{\Theta_2}$ sera plus
 faible. Or les vapeurs d'éther et d'alcool atteignent la
 pression de 10 atmosphères (pression qu'on ne peut dé-
 passer sans danger), la première pour 119°, la seconde pour
 152°, tandis que la vapeur d'eau n'atteint cette pression
 qu'à 180°. On peut, il est vrai, abaisser un peu
 pour l'éther et l'alcool la température Θ_2 , mais cet abais-
 sement est bien loin de compenser celui de Θ_1 . Seules, les
 machines à vapeur de pétrole ⁽¹⁾ semblent pouvoir rendre
 quelque service, surtout à cause du graissage parfait
 des pièces qu'entretiennent le pétrole.

376. - Turbines à vapeur.

Dans certains dispositifs, au lieu d'agir par sa pression
 sur un piston, la vapeur d'eau actionne directement un
 arbre auquel elle communique un mouvement de rota-
 tion uniforme. C'est ce qui a lieu dans les turbines à
vapeur qui ont pris, au cours de ces dernières années
 une grande extension. Ces turbines sont très analogues,
 dans leur principe, aux turbines hydrauliques, mais le
 fait que l'eau motrice est remplacée par la vapeur d'eau
 motrice, entraîne dans leur construction, des modifi-
 cations.

(1) Il ne faut pas confondre ces machines avec les moteurs à pétrole et à
 explosion. Dans les machines à vapeur de pétrole, le pétrole est volati-
 lisé par la chaleur comme l'eau dans les machines ordinaires, l'ex-
 pansion de sa vapeur met le piston en mouvement, puis cette vapeur
 se condense, etc.

considérables. Dans les turbines à vapeur, on laisse la vapeur d'eau se détendre soit complètement, soit partiellement: la vapeur d'eau, guidée dans des tuyères, arrive avec une certaine vitesse sur les aubes d'une roue formant tuyères, et met la roue en mouvement soit par sa vitesse seule, soit par sa vitesse et sa pression.

Dans le premier cas, la turbine est dite turbine à action, dans le second cas turbine à réaction, division analogue à celle que nous avons indiquée pour les turbines hydrauliques.

La turbine à réaction fonctionne à une allure modérée, qui n'exige pas de précautions particulières, et qui permet souvent de supprimer les transmissions par engrenages. Par contre, elle donne lieu à des fuites dues au jeu inévitable entre les parties fixes et les parties tournantes. On atténue cet inconvénient dans une certaine mesure en fractionnant la détente entre plusieurs disques successifs. La turbine est alors composée d'une succession de couronnes, de diamètres croissants et dont les alvéoles sont de plus en plus grandes: la vapeur en effet, pendant à la fois de la vitesse et de la pression doit occuper un volume de plus en plus grand. La turbine Parsons est basée sur ce principe.

La turbine à action n'expose guère aux fuites, parce que la vapeur lui arrive entièrement détendue. Mais le fluide, à son entrée, possède une vitesse considérable, atteignant jusqu'à un kilomètre à la seconde. Pour recevoir, sans choc violent, l'impulsion d'un tel jet, il faut que la turbine elle-même soit animée d'une vitesse de rotation colossale. La turbine de Laval par exemple n'effectue pas pas moins de 500 tours à la seconde. Cette grande vitesse de rotation présente plusieurs inconvénients: tout d'abord, elle nécessite en général l'interposition entre l'arbre et l'outil d'un engrenage qui consomme toujours une quantité notable de travail. Ensuite, elle exige un calibrage parfait du disque et de l'arbre: il faut que l'axe de rotation soit axe central d'inertie de l'arbre (à une erreur insignifiante près⁽¹⁾). On a reconnu d'ailleurs l'utilité de laisser à cet axe une certaine flexibilité, qui permet à l'axe de vibrer comme un gyroscope, au lieu qu'un axe absolument rigide et maintenu dans des

(1) On arrive à faire en sorte que le centre de gravité soit à une distance de l'axe inférieure à $\frac{1}{200^2}$ de millimètre.

coussinets fixes supporterait des réactions capables de le briser ou de le fausser.

Les turbines se recommandent par la simplicité de leurs dispositions, par la grandeur du travail qu'elles peuvent fournir sous un petit volume, par l'uniformité de la rotation due à la constance du couple moteur. Au point de vue du rendement, elles ne sont pas plus avantageuses que les machines ordinaires à piston.

377. - La théorie des turbines à vapeur est plus complexe encore que celle des turbines hydrauliques. Dans les turbines hydrauliques, on sait du moins que l'eau garde un volume invariable; dans les turbines à vapeur, le fluide se détend suivant une loi inconnue qu'il faut déterminer. Or l'étude précise des lois d'écoulement d'une vapeur saturée est loin d'être achevée. Nous avons dit [N° 280] que, pour un gaz parfait, la détente naturelle peut être regardée comme sensiblement adiabatique. Mais une vapeur saturée n'est nullement comparable à un gaz parfait; son équation caractéristique est toute différente, en sorte que la détente d'une vapeur saturée même si elle était adiabatique serait toute différente de la détente adiabatique d'un gaz parfait. L'expérience montre d'ailleurs que la détente naturelle d'une vapeur saturée n'est point adiabatique. Or il est indispensable, pour éviter des chocs et des remous considérables, que les tuyères où se détend la vapeur et qui l'amènent sur la turbine, imitent la forme d'un filet du fluide dans sa détente naturelle: on est réduit à procéder empiriquement. On a reconnu que, dès que la pression d'amont devient considérable et dépasse le double environ de la pression d'aval, il faut employer des tuyères dont la section, après avoir diminué progressivement jusqu'à une certaine limite, augmente ensuite jusqu'à l'issue. On s'explique le fait en admettant [N° 282] que la vapeur traverse la section étranglée σ avec une vitesse égale à celle du son: par vitesse du son, j'entends la vitesse du son qui correspond à la loi de détente de la vapeur (soit $p = h(p)$) et à la pression de la vapeur en σ . En effet, si la densité de la vapeur décroît constamment le long d'un filet fluide et si la vitesse croît constamment

et dépasse la vitesse du son en un certain point σ du fluide, nous savons [N° 282] que le filet présente en ce point un étranglement.

Machines à air chaud.

378. - Au lieu d'employer la chaleur du foyer à transformer l'eau en vapeur motrice, on peut l'employer à échauffer un gaz tel que l'air, dont la pression devient ainsi considérable et agit sur le piston moteur de la machine comme la vapeur d'eau dans les machines ordinaires. La machine d'Ericsson [Portefeuille, pl. VII] est le type des machines à air chaud. C'est une machine cyclique en ce sens que tout se passe comme si la même masse d'air était indéfiniment échauffée, puis refroidie, etc. Le rendement thermique d'une telle machine ne peut donc dépasser le rendement du cycle de Carnot et lui est toujours très inférieur. Ces machines étant aujourd'hui complètement abandonnées, nous n'insisterons pas sur leur description.

Moteurs à explosion et à combustion.

379. - Machines acycliques.

Nous allons étudier maintenant les moteurs thermiques où le phénomène chimique, source d'énergie, produit des gaz dont l'expansion est employée directement comme force motrice [N° 353]. Ces moteurs à explosion ou à combustion, [machines à gaz, moteur à pétrole] ont pris, dans ces dernières années, une importance considérable.

La force vive de la machine proprement dite reste périodique pendant la marche normale. Mais ces machines ne sont plus cycliques [N° 367] : la masse μ de gaz (ou de pétrole) qui alimente la machine pendant un temps donné subit une transformation définitive.

380. - Disposition générale des machines à gaz et à pétrole.

La disposition générale d'une machine à gaz est analogue à celle d'une machine à vapeur. Pendant la marche normale, quand le piston se soulève, le mélange explosif (ou comburant), à la pression atmosphérique, est aspiré sous le piston, dans la cavité inférieure du cylindre : à un certain moment de la course ascendante

du piston, cette cavité est fermée, et une étincelle provoque l'explosion; il en résulte une expansion brusque de gaz qui pousse le piston, et les gaz se détendent jusqu'à l'extrémité de la course. A ce moment, le cylindre est mis en communication avec l'atmosphère, et le piston, entraîné par la vitesse acquise de la machine, redescend jusqu'au bas de la course, et ainsi de suite. ⁽¹⁾

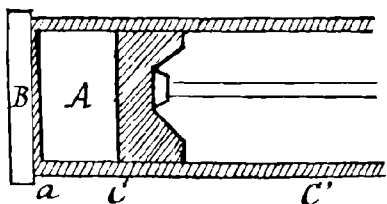
Celle est la marche normale de la machine; mais il convient de remarquer que la machine doit être mise en train. Il faut que le piston soit animé préalablement, par un procédé quelconque, d'un mouvement alternatif.

381. — Types usuels.

Il existe différents types de machines à gaz.

1^{er} type. Le type le plus simple [machine à explosion sans compression] est celui qui vient d'être décrit au N^o précédent. La machine Senoir [portefeuille, pl. XI], la première machine à explosion vraiment pratique, rentre dans ce type. Elle a été rapidement abandonnée, à cause de son mauvais rendement; elle consommait plus de trois mètres cubes de gaz par cheval et par heure.

Deuxième type. [Machine à explosion avec compression]. Le cylindre, qui est à simple effet, est représenté dans la figure avec le piston à l'extrémité de sa course; on voit que le piston laisse un espace considérable A entre sa face postérieure et le fond du cylindre; cet espace est la chambre de compression.



Une période complète de la machine comprend deux aller et retour du piston, ce qu'on traduit en disant que la machine est à 4 temps.

1^{er} Temps. — Le piston va de C en C'; le cylindre A communique avec le mélange explosif qui est aspiré dans le cylindre.

(1) La description de l'appareil suppose le cylindre d'axe vertical, mais ce n'est là qu'une manière d'abréger le langage.

2^e Temps. - Le piston revient de C' en C, et comprime le mélange explosif dans la chambre A (qui est close pendant ce deuxième temps).

3^e Temps. - L'explosion se produit, les gaz chauds se détendent, et poussent le piston de C en C' en produisant du travail.

4^e Temps. - Le piston revient de C' en C et expulse les gaz brûlés dans l'atmosphère (avec lequel communique alors le cylindre A).

L'ouverture et la fermeture des orifices du cylindre A s'effectuent automatiquement par le jeu d'un tiroir que commande un arbre spécial actionné par l'arbre moteur.

On voit qu'il n'y a production de travail moteur que pendant le 3^e temps. Pendant les trois autres temps, le piston ne se meut qu'en vertu de la vitesse acquise de la machine. De là le nom de machine à quart d'effet donné au moteur Otto [Portefeuille, Planche XI], qui est le moteur classique rentrant dans le type en question.

Le moteur Otto présente une grande économie sur les moteurs sans compression⁽¹⁾, car la consommation n'atteint pas 1000 litres par cheval blanc.

Troisième Type. - Machines à combustion.

Dans ces machines, le mélange inflammable, au lieu de faire explosion, brûle graduellement. Les seuls moteurs de cette catégorie qui aient aujourd'hui un intérêt pratique sont à la fois à combustion et à compression [Moteur Diesel].

Le moteur Diesel est à quatre temps, comme le moteur Otto : seulement, dans le premier temps, c'est de l'air seul qui est aspiré dans le cylindre ; dans le second temps, l'air est comprimé par le piston et s'échauffe notablement au dessus du point d'inflammation du combustible. Au début du 3^e temps, on injecte le combustible qui s'enflamme, et l'expansion des gaz pousse le piston. Dans le dernier temps, les gaz sont expulsés.

Le combustible employé dans le moteur Diesel est du pétrole ; la consommation n'atteint pas 250 grammes par cheval-heure.

Dans tous les types de machine qui précèdent, l'avance à l'allumage améliore le rendement, comme le fait l'admission

⁽¹⁾ On peut justifier par certaines considérations de thermodynamique l'utilité de la compression.

anticipée de la vapeur pour les machines à vapeur. Autrement dit, il convient de provoquer l'explosion (ou la combustion) un peu avant que le piston soit à la fin de sa course.

Quatrième type. - Moteurs atmosphériques. - [Machine Otto-Sangen, portefeuille, pl. XI].

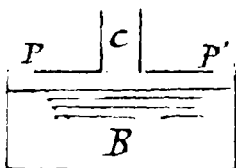
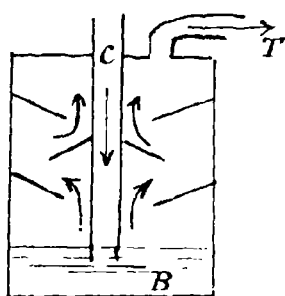
Dans ces machines, le piston est libre pendant l'explosion: le piston est donc lancé violemment par l'expansion des gaz qui se détendent au-dessous de la pression atmosphérique. Cette pression fait ensuite rétrograder le piston qui engrène alors sur l'arbre moteur; c'est donc la pression atmosphérique qui effectue directement un travail moteur.

Bien que ces moteurs aient un rendement très satisfaisant (800 litres de gaz par cheval-heure), leur mécanisme compliqué, bruyant et irrégulier les a fait abandonner aujourd'hui.

382. - Moteurs à pétrole.

Ce sont les moteurs à pétrole à explosion avec compression qui sont le plus employés. Les moteurs à pétrole ne diffèrent des moteurs à gaz que par la substitution au mélange d'air et de gaz d'un mélange d'air et de vapeurs de pétrole préparé dans le carbureteur.

On distingue les carbureteurs à barbotage et les carbureteurs à pulvérisation.

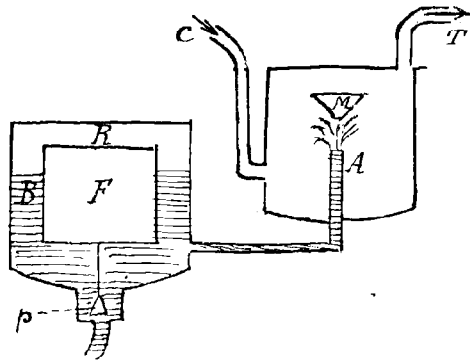


Dans les carbureteurs à barbotage, l'air, appelé du dehors par une cheminée C, plonge dans le bain liquide B, puis remonte par un chemin sinueux au cours duquel les gouttelettes non gazéifiées retombent dans le bain et s'en va ensuite aux cylindres par le tuyaux T.

Une variante de ce dispositif consiste à arrêter la cheminée C un peu au-dessus du bain en lui adjoignant un plateau PP' qui oblige l'air à s'étaler au contact du liquide: on a alors un carbureteur à l'échage.

On règle la carburation par divers procédés: échauffement du bain au moyen d'une dérivation de l'échappement

du moteur ; échauffement de l'air aspiré ; entrée supplémentaire d'air frais venant se mélanger à l'air carburé en un point de son trajet du carburateur au moteur.



Dans les carburateurs à pulvérisation, l'essence est maintenue à un niveau constant dans un petit réservoir R, au moyen d'un flotteur F commandant un pointeau p, placé sur la conduite venant du réservoir principal. De là elle est conduite à un ajutage

A au sortir duquel le jet se brise sur la pointe d'un cône métallique M. L'air frais, arrivant de son côté par la cheminée C, volatilise les gouttelettes.

Le niveau de A doit être un peu supérieur à celui du bain B, afin qu'il ne se produise pas d'écoulement dans les périodes de repos. L'écoulement est déterminé, pendant la marche, par l'aspiration du tuyau T aboutissant aux cylindres moteurs.

Le réglage du mélange se fait par les mêmes procédés que pour les carburateurs à barbotage ; toutefois il demande ici moins de précautions, et l'on se contente généralement de l'addition variable d'air frais au mélange carburé.

Les appareils qui précèdent concernent l'essence volatile. Ils fonctionneraient mal avec le pétrole lampant. Pour celui-ci, on volatilise le liquide par la chaleur directe, après l'avoir injecté, par une petite pompe, dans une capacité spéciale précédant la chambre d'explosion.

La distribution se fait par soupapes.

L'allumage a lieu de diverses façons (brûleurs, ou bien étincelle électrique fournie, en temps opportun, soit par des accumulateurs soit par une petite machine magnéto-électrique).

Chapitre IV.

Volants, régulateurs freins.

383. - Volants et régulateurs.

La régularité de la marche d'une machine est une condition indispensable de son bon fonctionnement.

Nous indiquerons brièvement les divers procédés qui servent à régulariser le mouvement d'une machine.

Pendant la marche normale, la force vive d'une machine, les forces appliquées, etc. sont périodiques. Mais, durant une période, les oscillations de la force vive peuvent être plus ou moins grandes : il importe de réduire autant que possible ces oscillations. C'est là l'objet des volants.

D'autre part, la même machine peut comporter plusieurs régimes. Imaginons, par exemple, qu'une machine actionne plusieurs outils et qu'on arrête un des outils : la machine, ayant à surmonter des résistances moindres, va s'affaiblir à moins qu'on ne diminue les forces motrices. Il importe donc de munir la machine d'un dispositif qui diminue (ou accroît) automatiquement les forces motrices quand les résistances diminuent (ou croissent). C'est le but des régulateurs.

Ainsi, tandis que les volants diminuent les oscillations de la force vive pendant un régime de marche déterminé, les régulateurs réalisent sans à-coups le passage d'un régime de marche à un autre.

Théorie des volants.

384. - Travail des forces appliquées à une machine.

Nous supposons la machine à liaisons complètes, et nous définissons sa position à l'aide du paramètre θ , l'angle dont tourne l'axe principal de la machine. Chaque fois que θ croît de 2π , la force vive, les forces données, les résistances doivent redevenir les mêmes.

Dans un déplacement θ à $\theta + d\theta$ de la machine, le travail des forces appliquées à la machine est de la forme

476

$Q d\theta$. Pour que la force vive soit périodique, il faut et il suffit qu'on ait : $\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} Q d\theta = 0$. Analysons cette condition.

Le travail $Q d\theta$ se compose du travail des forces motrices, du travail des résistances utiles et du travail des résistances passives. Les deux premiers sont de la forme : $\varphi(\theta) d\theta$, $-\psi(\theta) d\theta$, où les fonctions φ , ψ ne dépendent que de θ et admettent la période 2π : en effet, les forces motrices et les résistances utiles ne dépendent (du moins en général) que de la position du système. Quant au travail des résistances passives, il dépend de θ' ; mais ce travail étant faible devant les deux autres, nous le négligerons dans ce qui suit. On aura donc :

$$Q(\theta) = \varphi(\theta) - \psi(\theta);$$

la fonction Q est une fonction uniforme de θ qui admet la période 2π . Remarquons immédiatement que, d'après le principe des vitesses virtuelles, la condition $Q(\theta) = 0$ définit les positions d'équilibre de la machine.

Ceci posé, considérons la fonction $R(\theta) = \int^{\theta} Q(\theta) d\theta$; on a évidemment : $R(\theta+2\pi) - R(\theta) = C^te = R(2\pi) - R(0)$, car $R'(\theta+2\pi) - R'(\theta) = Q(\theta+2\pi) - Q(\theta) = 0$. Il suit de là que $\int_{\theta}^{\theta+2\pi} Q(\theta) d\theta = \int^{\theta+2\pi} Q(\theta) d\theta - \int^{\theta} Q(\theta) d\theta = R(\theta+2\pi) - R(\theta) = R(2\pi) - R(0)$. Pour que la force vive de la machine soit périodique, il faut donc et il suffit que l'intégrale $\int_{\theta}^{\theta+2\pi} Q(\theta) d\theta$ soit nulle.

385. Maxima et minima de la force vive. - On a :

$$T - T_0 = \int^{\theta} Q(\theta) d\theta = R(\theta);$$

les maxima ou minima de la force vive correspondent aux racines de l'équation : $R'(\theta) = Q(\theta) = 0$; c'est-à-dire aux positions d'équilibre de la machine. Puisque la force vive est périodique, elle présente (si elle n'est pas constante) au moins un maximum absolu et un minimum absolu correspondant à deux racines θ_1, θ_2 de $Q(\theta) = 0$; l'oscillation maxima de la force vive est donnée par l'intégrale :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} Q(\theta) d\theta.$$

386. - Expression de la force vive.

La force vive de la machine peut s'écrire :

$$C(\theta) \theta^2 \equiv C(\theta) \omega^2$$

$C(\theta)$ désignant une fonction de θ uniforme et positive, qui admet la période 2π .

Approfondissons l'expression de cette force vive.

La machine comprend deux espèces de pièces :

1° Celles qui tournent avec des vitesses angulaires proportionnelles à ω (pièces tournantes); leur force vive totale est égale à $I\omega^2$, I désignant une certaine constante qui a les dimensions d'un moment d'inertie.

2° Celles qui oscillent (bielles, balanciers, etc), ou qui tournent avec des vitesses angulaires toujours de même sens, mais dont les rapports à ω dépendent de θ , enfin les courroies. Leur force vive totale est de la forme : $f(\theta) \theta^2$, où $f(\theta)$ admet la période 2π . La masse de ces pièces est toujours très faible devant celle des pièces tournantes : il y a exception toutefois pour les balanciers, mais ces derniers sont animés de faibles vitesses. Pour ces deux raisons, $f(\theta)$ est petit, et si \bar{f} est sa valeur moyenne, nous pouvons, moyennant une faible erreur, confondre f avec \bar{f} et le faire rentrer dans I . C'est ce que nous ferons dans ce qui suit.

387. - Calcul d'un volant.

Le volant est une roue supplémentaire en fonte, montée en général sur l'arbre moteur : cette roue a ordinairement un grand diamètre et sa masse est reportée autant que possible sur la circonférence où elle forme une couronne, de façon que le moment d'inertie par rapport à l'axe soit considérable. Nous allons montrer comment l'addition du volant permet de régulariser la marche normale. L'équation des forces vives donne

$$(1) \quad I(\omega^2 - \omega_0^2) = 2 \int_0^\theta Q(\theta) d\theta;$$

comme le volant est supposé mis en place, son moment d'inertie est compris dans la constante I , où il est prépondérant. Cette équation montre que l'on peut, en augmentant ce moment d'inertie, et par suite la

valeur de I , diminuer à volonté, pour une valeur donnée du second membre, l'écart entre ω et ω_0 .

Il est à remarquer que l'équation (1), relative au mouvement général d'une machine, est la même que celle du mouvement d'un arbre unique ayant un moment d'inertie égal à I et soumis à des forces dont le moment total, par rapport à l'axe, est égal à $Q(\theta)$.

Ceci posé, soit ω_2 le plus grand maximum, et ω_1 le plus petit minimum de ω pendant une période. Pour que la marche soit régulière, il faut et il suffit que $\omega_2 - \omega_1$, qui représente dans une période la plus grande variation de la vitesse, soit une petite fraction de la vitesse moyenne $W = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$. Or par l'addition du volant, on peut rendre I assez grand pour que, si l'on pose $\omega_2 - \omega_1 = \frac{W}{n}$, le coefficient de régularisation n ait une valeur donnée très petite.

Écrivons, en effet,

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{W}{n} \quad \omega_2 + \omega_1 = 2W.$$

D'autre part, désignant par θ_1, θ_2 les valeurs de θ qui correspondent aux vitesses ω_1, ω_2 [$Q(\theta_1) = 0, Q(\theta_2) = 0$]; on a :

$$I(\omega_2^2 - \omega_1^2) = 2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} Q(\theta) d\theta$$

ou, par suite des relations précédentes :

$$(2) \quad I \frac{W^2}{n} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} Q(\theta) d\theta.$$

Cette équation détermine I , si W est connu et si l'on se donne n , car la valeur numérique du second membre doit être considérée comme connue.

Désignant par τ le travail moteur effectif pendant un tour de l'arbre, [$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Psi(\theta) d\theta$],

$$(3) \quad \int_{\theta_1}^{\theta_2} Q(\theta) d\theta = A\tau;$$

A est un coefficient numérique indépendant des unités. La formule (2) devient ainsi :

$$(4) \quad I \frac{W^2}{n} = A\tau.$$

Voici comment, dans la pratique, on détermine W et τ .

388. - 1^o Valeur de W . - Soit N le nombre de tours par minute⁽¹⁾. L'angle décrit par minute est $2\pi N$; en divisant ce nombre par 60, on a l'angle décrit par seconde, c.à.d. W .

On a donc :

$$(5) \quad W = \frac{2\pi N}{60} .$$

2^o Valeur de T . - Pendant une minute le travail effectif est NT ; si donc P est (en chevaux) la puissance effective de la machine, on a $\frac{NT}{60} = 75 P$, d'où :

$$(6) \quad T = 4500 \frac{P}{N} .$$

En substituant ces valeurs dans la relation (4), on a pour déterminer le moment d'inertie la formule :

$$(7) \quad I = 4,1 \times 10^5 \frac{nAP}{N^3} .$$

Le coefficient de régularisation n est généralement compris entre 50 et 60.

Dans chaque cas particulier, le seul nombre à calculer est A . Donnons un exemple de ce calcul.

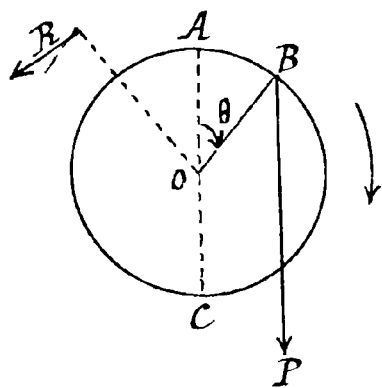
389. - Manivelle à simple effet.

Soit un arbre auquel sont appliquées deux forces : une résistance tangentielle constante R et une puissance constante P agissant sur le bouton B de la manivelle par une bielle donc on néglige l'obliquité. La manivelle est à simple effet, c'est-à-dire que B n'est actionné que sur la demi-circonférence ABC . Désignant par a la distance de R à l'axe et par b le rayon de la manivelle, par θ l'angle AOB , on a :

$$Q(\theta) = Pb \sin \theta - Ra \text{ sur } ABC, \text{ et}$$

$$Q(\theta) = -Ra \text{ sur } CDA. \text{ Voici mainte-}$$

nant dans ce cas particulier, les solutions des trois questions du problème général.



(1) Ce nombre est mesuré à l'aide d'un tachymètre. Il est facile d'enregistrer de bien des manières le nombre de tours d'un arbre en un temps donné.

1° Condition de la périodicité de la vitesse.

Exprimons que, dans un tour, le travail moteur est égal au travail résistant. On trouve $2Pb = 2\pi Ra$, c'est-à-dire

$$(8) \quad \frac{Ra}{Pb} = \frac{1}{\pi}$$

2° Maximum et minimum de la vitesse.

L'équation $Q(\theta) = 0$ donne ici :

$$Pb \sin \theta - Ra = 0, \text{ d'où (en vertu de (8)) :}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\pi}$$

Les deux racines sont

$$\theta_1 = 18^\circ 33' 40''$$

$$\theta_2 = 161^\circ 26' 20''$$

et la première correspond au minimum, la seconde au maximum.

3° Calcul de A . — On a ensuite : en remarquant que $\theta_2 = \pi - \theta_1$:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} Q(\theta) d\theta = 2Pb \cos \theta_1 - Ra(\theta_2 - \theta_1) = 2Pb \left(\cos \theta_1 - \frac{Ra}{Pb} \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right)$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (8) et remarquant que $2Pb$ représente le travail moteur de la bielle dans un tour :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} Q(\theta) d\theta = \left(\cos \theta_1 - \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} \right) \tau.$$

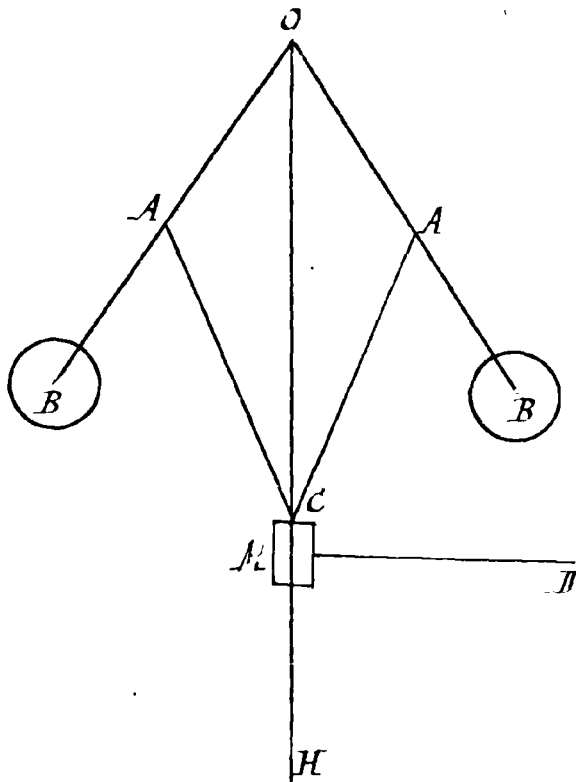
La quantité entre parenthèses est le coefficient A ; en faisant le calcul on trouve ;

$$A = 0,552.$$

Régulateurs.

390. — Régulateur à force centrifuge de Watt.

Le régulateur de Watt se compose de deux bielles pesantes B, B , suspendues par des tiges OB articulées en O autour d'un axe horizontal invariablement lié à un arbre auquel la machine communique une rotation autour de la verticale OH . Le plan BOB tourne donc avec l'arbre.



Les tiges OB sont articulées en A à deux autres tiges AC , lesquelles sont articulées en C avec un manchon M qui peut glisser sans frottement sur l'arbre vertical. L'appareil est symétrique par rapport à OH .

Ce manchon est solidaire d'un levier de manœuvre $M D$ qui agit sur l'organe de distribution (valve d'arrivée de la vapeur dans les moteurs à vapeur, vanne d'arrivée de l'eau dans les moteurs hydrauliques).

Pendant la marche normale, l'appareil conserve une certaine position

d'équilibre relatif; mais si une cause quelconque (par exemple le débraiement d'un outil) vient à augmenter la vitesse de l'arbre, les boules s'élèvent par suite de l'augmentation correspondante de la force centrifuge et le levier, soulevé par le manchon, produit le mouvement de fermeture du distributeur. Au contraire, quand la vitesse diminue, les boules s'abaissent et le levier ouvre davantage le distributeur.

391. - Théorie du régulateur.

Pour étudier le fonctionnement du régulateur de Watt, nous établirons d'abord la condition de l'équilibre relatif de l'appareil.

Désignons par

ω la vitesse angulaire de l'arbre OH , qu'on suppose constante dans l'intervalle de temps considéré.

α l'angle d'écart BOC

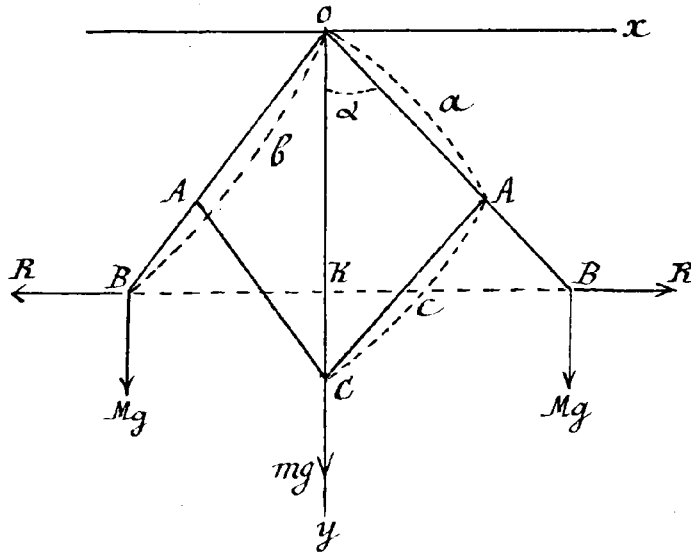
M la masse d'une boule,

m la masse du manchon,

a, b, c les longueurs OA, OB, AC .

Preons comme axe ox l'horizontale du plan OAC ,
comme axe oy la verticale descendante OH .

Soient (x, y) les coordonnées du point B , z l'ordonnée
 OC du point C .



D'après la théorie du mouvement relatif, on peut écrire les conditions d'équilibre comme si les oxy axes étaient fixes, à condition d'ajouter aux forces qui s'exercent sur les diverses parties du système les forces d'entraînement qui correspondent à la rotation ω .

Si on néglige les masses des tiges, les poids se réduisent à ceux des boules et du manchon, et les forces d'entraînement à deux

forces horizontales \bar{R} passant par les points B , dirigées selon BR , et ayant pour intensité $M\omega^2 b \sin \alpha$, [$b \sin \alpha$ est la distance BK de B à Oy]. Si on suppose, d'autre part, nuls les frottements de l'appareil et la résistance du levier (exercée sur le manchon), la condition nécessaire et suffisante d'équilibre exprime que, dans le déplacement $d\alpha$ du système, le travail de la pesanteur et des deux forces BR est nul, cette condition s'écrit donc :

$$(1) \quad 2M\omega^2 b \sin \alpha dx + 2Mg dy + mg dz = 0.$$

Supposons, dans ce qui suit, pour simplifier $\alpha = i = \frac{b}{2}$; les points B et C sont sur la même horizontale; on a

$$(2) \quad x = b \sin \alpha, \quad y = z = b \cos \alpha,$$

et la condition (1) devient

$$(3) \quad b \sin \alpha [2Mb\omega^2 \cos \alpha - 2Mg - mg] = 0.$$

Comme $\sin \alpha$ est $\neq 0$, la condition d'équilibre exige que ω^2 ait pour valeur

$$(4) \quad \omega^2 = \frac{g}{b \cos \alpha} \left[1 + \frac{m}{2M} \right].$$

Les résistances utiles étant données, les forces motrices correspondantes à la marche normale sont déterminées; α est donc déterminé, et la valeur correspondante W de ω est donnée par (4).

392. - Supposons que cette condition ne soit pas remplie; étudions le mouvement relatif du système en supposant d'abord que le levier soit détaché du manchon et que ω reste constant. La force vive relative du régulateur est égale [si on néglige les masses des tiges] à : $(2I + mb^2 \sin^2 \alpha) \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$, où I désigne le moment d'inertie d'une des boules par rapport à l'axe OZ perpendiculaire au plan xOy . Les théorème des forces vives donne donc [la force centrifuge composée ne fournissant aucun travail]⁽¹⁾

$$(5) \quad T = \left(I + \frac{mb^2}{2} \sin^2 \alpha\right) \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \\ = + Mb^2 \omega^2 \sin \alpha + gb [2M + m] \cos \alpha + C^te$$

ou encore

$$(6) \quad dT = b \sin \alpha [2Mb\omega^2 \cos \alpha - (2M + m)g] d\alpha.$$

L'égalité (6) subsiste si le levier est attaché au manchon mais de masse négligeable, et si la vitesse de rotation ω varie; en effet, il faut ajouter seulement aux forces d'entraînement des forces $m\omega^2$ normales au plan xOy et dont le travail est nul dans le mouvement relatif.

Appelons force motrice du manchon la force verticale F appliquée au manchon par laquelle il faudrait (à chaque instant) remplacer la pesanteur et les forces d'entraînement R pour que le mouvement relatif du système ne soit pas changé. Cette force F (comptée positivement dans le sens ascendant) donnerait dans le second membre de l'équation (6) au lieu de l'expression $b \sin \alpha [2Mb\omega^2 \cos \alpha - (2M + m)g]$ le terme $+ F \sin \alpha$. La force F vérifie donc l'égalité :

$$(7) \quad F = 2Mb\omega^2 \cos \alpha - g(2M + m).$$

(1) On voit aussitôt que pour ω donné, soit $\omega = W$, la position d'équilibre définie par (4) est stable, car elle correspond à un maximum de la fonction des forces

$$Mb^2 \omega^2 \sin^2 \alpha + gb [2M + m] \cos \alpha.$$

Ceci posé, la machine étant en marche normale et le régulateur étant en équilibre dans la position α_0 , supposons que les résistances soient brusquement diminuées à un instant t_0 . La machine va s'accélérer, le régulateur va se soulever. Soit α_1 la position que devrait occuper le régulateur pour que la vitesse de la machine restât constante dans le nouveau régime: pour $\alpha < \alpha_1$, la machine s'accélère, pour $\alpha > \alpha_1$, elle se ralentit.

La vitesse de la machine s'accélère donc tant que α n'a pas dépassé la valeur α_1 ; elle diminue ensuite. Pour $\alpha > \alpha_1$, F diminue pour deux raisons: parce que ω diminue et parce que $\cos \alpha$ diminue; F changera donc de signe, puis fera rétrograder α au bout d'un certain temps. Si l'appareil est bien réglé, les oscillations du régulateur devront s'amortir très vite, et il restera sensiblement en équilibre dans la position α_1 , à laquelle correspond une nouvelle vitesse de marche $\omega = \omega_1$, donnée par la formule (4) où $\alpha = \alpha_1$.

393. Sensibilité du régulateur.

Nous avons dans tout ce qui précède négligé les frottements de l'appareil et la résistance du levier: dans ces conditions, le régulateur doit se mettre en mouvement dès que F n'est pas nul. En réalité, à cause de frottements et résistances, le régulateur en équilibre relatif tant que F ne dépasse pas une certaine limite F_1 que nous pouvons supposer constante dans les limites d'emploi de l'appareil. Le manchon ne s'élèvera donc que si on a $|F| > F_1$, c'est-à-dire:

$$2Mb\omega^2 \cos \alpha - g(2M+m) > F_1,$$

et il ne descendra que si on a:

$$2Mb\omega^2 \cos \alpha - g(2M+m) < -F_1.$$

Le manchon restera donc immobile tant que ω^2 sera compris entre les deux limites ω_1^2 et ω_2^2

$$\omega_1^2 = \omega^2 + \frac{F_1}{2M} \frac{1}{b \cos \alpha}, \quad \omega_2^2 = \omega^2 - \frac{F_1}{2M} \frac{1}{\cos \alpha}$$

ω^2 étant donné par l'équation (4).

d'où

$$(8) \quad \omega_1^2 - \omega_2^2 = \frac{F_1}{Mb \cos \alpha}.$$

La différence $\omega_1 - \omega_2$ mesure par définition, la sensibilité du régulateur.

Posons $\omega_1 - \omega_2 = \frac{W}{n}$; n est dit le coefficient de sensibilité du régulateur. Comme $\frac{F_1}{2M}$ est très petit, $\omega_1 + \omega_2$ diffère très peu de ω . L'égalité (8) s'écrit donc :

$$\frac{2W^2}{n} = \frac{F_1}{M \cos \alpha}, \text{ ou encore :}$$

$$\frac{2g}{\cos \alpha} \left(1 + \frac{m}{2M}\right) = \frac{n F_1}{M \cos \alpha}, \text{ ou enfin}$$

$$n F_1 = g [2M + m].$$

La valeur F_1 étant supposée connue et n étant donné, telle est la relation qui doit exister entre M et m pour que l'appareil ait la sensibilité voulue.

394. Régulateurs isochrones.

Dans la nouvelle position d'équilibre du régulateur de Watt, la machine prend une vitesse de marche normale ω_1 qui diffère de la vitesse ω_0 du régime antérieur. On a cherché à construire des régulateurs (régulateurs isochrones) tels que la vitesse de marche reste la même à tous les régimes.

Le principe de ces appareils est le suivant : un tube creux solide C est emporté dans la rotation de l'arbre OH , et à l'intérieur de ce tube glisse une boule homogène B , commandant un levier qui modère ou accroît la force motrice. On cherche à déterminer la courbe C [lieu du centre de B] de façon que pour une certaine vitesse ω_0 de rotation de l'arbre OH (qui sera la vitesse normale adoptée une fois pour toutes), toutes les positions de B sur la courbe C soient des positions d'équilibre. On voit immédiatement que la courbe C doit être une parabole d'axe OH , tournant sa concavité vers le haut et de paramètre $\frac{g}{\omega_0^2}$. On associe deux paraboles et deux boules symétriques par rapport à Oy . En remplaçant les deux arcs utilisés de parabole par les deux cercles osculateurs en leur milieu, on obtient le régulateur à bras croisés de Farco.

Mais ces appareils sont aujourd'hui abandonnés à cause de leur instabilité qui rend leur réglage impraticable.

Modérateurs et freins.

395. - Modérateur à ailettes.

Cet appareil a pour but de rendre sensiblement uniforme le mouvement d'un arbre, soumis à des forces qui autrement accéléreraient ce mouvement.

Soit ω la vitesse de rotation de l'arbre à l'instant t , (on peut supposer $\omega > 0$), soit N le moment (par rapport à l'axe de rotation OZ) des forces appliquées à l'arbre ($N > 0$). On dispose sur l'arbre des palettes planes qui traversent l'arbre suivant son axe et sont symétriques par rapport à cet axe: d'après les lois de la résistance de l'air (N° 86), les réactions de l'air sur les palettes (emportées par l'arbre) ont un moment par rapport à OZ qui est négatif et proportionnel à ω^2 , soit $-\lambda\omega^2$ ce moment. Le théorème des moments par rapport à OZ donne alors (I désignant le moment d'inertie de l'arbre par rapport à OZ).

$$I \frac{d\omega}{dt} = N - \lambda\omega^2,$$

ou encore :

$$\frac{d\omega}{dt} = a \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \quad (a > 1),$$

ou enfin :

$$\frac{d\omega}{c^2 - \omega^2} = \frac{a}{c^2} dt.$$

Intégrons, en supposant que, pour $t=0$, la vitesse soit nulle :

$$\log \frac{c+\omega}{c-\omega} = \frac{2a}{c} t,$$

d'où on déduit :

$$\omega = c \frac{e^{\frac{2at}{c}} - 1}{e^{\frac{2at}{c}} + 1};$$

la vitesse ω croît indéfiniment vers la valeur c , sans jamais l'atteindre. Au bout d'un certain temps, elle est sensiblement uniforme.

396. Freins.

Au lieu de régulateur ou de modérateur à ailettes, on peut employer encore les freins pour rendre le mouvement d'une machine sensiblement uniforme, et en particulier

pour arrêter la machine.

D'ordinaire, un frein consiste essentiellement en un collier qui embrasse l'arbre et détermine des frottements. Soit Rr le moment par rapport à l'axe OZ de l'arbre des résistances exercées par le collier sur l'arbre [r est le rayon du collier]. L'équation du mouvement de l'arbre est comme plus haut :

$$I \frac{d\omega}{dt} = N - Rr.$$

Pour rendre la vitesse constante, il suffit d'annuler le second membre, ce que l'on réalise par tâtonnements en servant plus ou moins le collier.

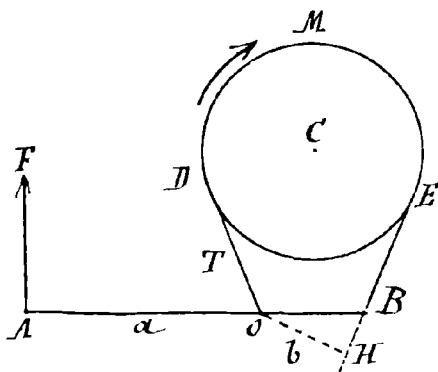
Si l'on veut arrêter l'arbre, il suffit de rendre Rr supérieur à N . Si cette dernière quantité est constante, on peut écrire :

$$\frac{d\omega}{dt} = -\alpha, \text{ d'où } \omega = \omega_0 - \alpha t$$

la vitesse s'annule ainsi au bout d'un temps $\frac{\omega_0}{\alpha}$ et l'arbre reste dès lors immobile.

Le frein à lame flexible et le frein à corde remplacent le collier par une tige flexible ou une corde.

397. Frein à lame flexible. — Cet appareil est constitué par une lame métallique OMB qui entoure en partie la circonférence d'un plateau calé sur l'arbre tournant C ,



et dont les extrémités sont, l'une fixe en O , l'autre attachée en B à l'extrémité d'un levier AB mobile autour de O . Pour mettre le frein en action, on exerce en A sur le levier, une traction verticale F .

Soient T et t les tensions des parties rectilignes OD, BE de la lame que nous assimilons à un fil, et α l'angle au centre

correspondant à l'arc embrassé DME . On a (cours de 1^{ère} année, n° 434) : $T = te^{\alpha}$. Appelons a, b les distances OA et OH du point O à A et à BE . Le levier demeurant en équilibre, il en résulte $Fa = bt$ d'où $t = \frac{Fa}{b}$ et par suite $T = \frac{Fa}{b} e^{\alpha}$. L'équation du mouvement de l'arbre est ; en b appelant R le rayon du plateau :

$$I \frac{d\omega}{dt} = P - Q - (T - t) R = P - Q - \frac{Fa}{b} (e^{\alpha} - 1) R.$$

Pour des valeurs constantes de P, Q, F le mouvement est uniformément varié. Si ω_0 désigne la vitesse à l'instant où le frein entre en action, l'arrêt est obtenu au bout d'un temps égal à $\frac{I\omega_0}{\frac{Fa}{b}R(c^2-1)-P+Q}$. Pour rendre le frein très puissant, il faut donner de grandes valeurs à $\frac{a}{b}$, à R et à c .

398. Frein Lemoine ou frein à corde. - Ce frein employé dans les omnibus parisiens est fondé sur le même principe; la lame est remplacée par une corde enroulée sur le moyeu de la roue. Cette corde est à diamètre variable calculé de façon que la section soit partout proportionnelle à la tension.

Chapitre IV.

Calcul des tensions des liens dans une machine.

399. Dans les chapitres précédents, nous avons surtout étudié les moteurs, c'est-à-dire les récepteurs des diverses machines [N. 324]. Il resterait à étudier 1° les transmissions; 2° l'outil. L'étude des machines-outils doit être faite dans chaque cas particulier. Pour ce qui est des transmissions, les problèmes de mécanique qui les concernent consistent surtout à calculer les réactions et tensions qui s'exercent entre les diverses pièces de la machine (bielles, courroies, etc.). Ces problèmes se traitent comme applications élémentaires des principes de ce cours. Je me bornerai ici à étudier brièvement deux types de tels problèmes.

400. Calcul des tensions dans le mouvement rectiligne.

Soit deux masses m et m' reliées par une tige (ou un lien) inextensible et de masse négligeable, et animées d'un mouvement rectiligne.



La tige étant de masse négligeable, les deux forces exercées par la tige (ou le lien) sur m et m' sont égales et directement opposées, et ce sont deux tensions dans le cas du lien. Soit Ox la direction $m'm$, T la force exercée par la tige sur m' , comptée positivement.

dans le sens Ox ($T \cos \gamma > 0$ dans le cas du lien). Soit enfin X et X' les forces qui s'exercent sur m et m' (en outre des tensions T et $-T$), forces comptées positivement dans le sens Ox .

On a :

$$m\gamma = X - T, \quad m'\gamma = X' + T,$$

γ désignant l'accélération commune de m et de m' , comptée positivement suivant Ox . D'où on tire aussitôt :

$$T = \frac{m'X - mX'}{m + m'}$$

401. Au lieu de deux masses, considérons n masses en ligne droite $m_1, \dots, m_k, m_{k+1}, \dots, m_n$ animées d'un mouvement de translation rectilignes et réunies par des tiges (ou liens) inextensibles. Cherchons la tension de la tige qui réunit m_k et m_{k+1} .

Soit Ox la direction du mouvement, X_1, \dots, X_n les forces (comptées suivant Ox) qui s'exercent sur m_1, \dots, m_n (en outre des tensions des liens); soit γ l'accélération commune des n points (comptée positivement suivant Ox). Appliquons le théorème du mouvement du centre de gravité au système formé par les k premières masses; il vient :

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_k) \gamma = X_1 + \dots + X_k - T$$

(T tension exercée sur m_k par la tige $m_k m_{k+1}$). On a de même pour le système des masses m_{k+1}, \dots, m_n :

$$(m_{k+1} + \dots + m_n) \gamma = X_{k+1} + \dots + X_n + T, \text{ d'où :}$$

$$T = \frac{M'X - MX'}{M + M'}, \text{ avec}$$

$$M = m_1 + \dots + m_k, \quad M' = m_{k+1} + \dots + m_n, \quad X = X_1 + \dots + X_k, \quad X' = X_{k+1} + \dots + X_n.$$

402. Réactions des arbres tournants. Cas de deux arbres. Considérons deux arbres parallèles O et O' réunies par une courroie; soit ω et ω' leurs vitesses angulaires orientées positivement autour des demi-directions $OZ, O'Z'$ (axes des arbres), soit N et N' les moments par rapport à OZ et $O'Z'$ des forces appliquées aux deux arbres (en outre des réactions de la courroie); soit enfin R et R' les rayons des grands cercles sur lesquels est enroulée la courroie.

Si O par exemple est l'arbre moteur et tourne dans le sens de la flèche, la courroie est entraînée par l'arbre (quand

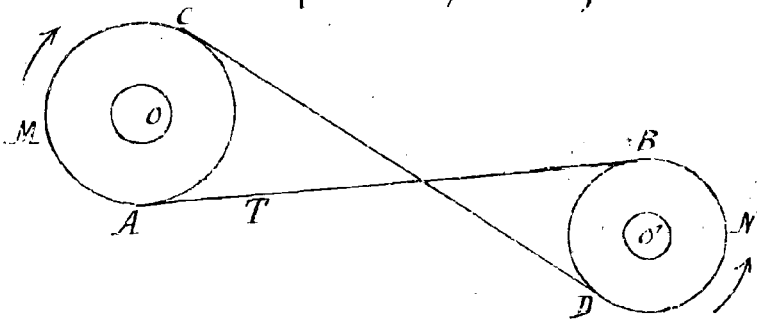
11902

la pression et le frottement de la courroie sur l'arbre sont suffisants); le brin AB entraîne l'arbre O', pendant que le brin CD se détend légèrement.

La masse de la courroie étant supposée négligeable, le brin AB est rectiligne et la tension T_1 le long de AB est constante. La tension T_2 le long de CD est aussi constante et moindre que T_1 . Considérons à l'instant t , le système formé par l'arbre O et la portion AMB de la courroie, et appliquons à ce système le théorème des forces vives. Le travail des forces intérieures est nul (~~puisque la courroie ne glisse pas sur l'arbre~~) et le travail des forces extérieures est

$$(N - \Theta R) \omega dt,$$

$$\text{si } \Theta = T_1 - T_2.$$



La force vive de l'arbre (celle de la courroie étant négligeable) est: $I \omega^2$, si I désigne le moment d'inertie de l'arbre par rapport à Oz . D'où l'égalité (après division par ω):

$$I \frac{d\omega}{dt} = N - \Theta R;$$

le même théorème appliqué au système formé par l'arbre O' et la portion BMD de la courroie donne:

$$I' \frac{d\omega'}{dt} = N' + \Theta R'.$$

Enfin, puisque la courroie ne glisse sur aucun des deux arbres, on a:

$$R \omega = R' \omega',$$

d'où:

$$R \frac{d\omega}{dt} = R' \frac{d\omega'}{dt}.$$

Pour simplifier la notation posons:

$$\begin{aligned} I &= M R^2, & I' &= M' R'^2 \\ N &= F R, & N' &= F' R' \end{aligned}$$

(M et M' ont les dimensions d'une masse, F et F' d'une force).
Il vient:

$$R \frac{d\omega}{dt} = R' \frac{d\omega'}{dt} = \frac{F - \Theta}{M} = \frac{F' + \Theta}{M'}$$

d'où: ⁽¹⁾

$$\Theta = \frac{M' F - M F'}{M + M'}$$

⁽¹⁾ Si l'arbre O est moteur, N (couple moteur) est > 0 , donc $F > 0$, N' (couple résistant) est négatif, donc $F' < 0$.

Si la force motrice F subit une variation brusque ΔF , T augmente de ΔT et on a :

$$\Delta \Theta = \frac{M'}{M+M'} \Delta F.$$

Cette formule entraîne une conséquence d'une grande importance pratique : si la force motrice F peut éprouver de brusques variations on devra, pour atténuer les variations de Θ , rendre le rapport $\frac{M'}{M+M'}$ le plus petit possible, c'est-à-dire augmenter $\frac{M}{M+M'}$; on placera donc le volant $\frac{M}{M+M'}$ sur l'arbre moteur. — Au contraire, si ce sont les résistances utiles dont les variations peuvent être notables, on placera le volant sur l'arbre O .

403. Pour que la courroie ne glisse pas sur le cercle R , il faut (1^{ère} année, N° 434) qu'on ait :

$$(1) \quad T_1 < T_0 e^{\mu \alpha},$$

μ désignant le coefficient de frottement au repos de la courroie sur le cercle R , et α l'angle AOB . La condition analogue doit être remplie pour l'arbre O' .⁽¹⁾

L'enrouleur du capitaine Senexeu permet d'abaisser notablement la limite de T_0 imposée par les deux conditions (1).

Ce dispositif consiste en un galet qui appuie sur le brin mené CB et lui maintient une tension constante tout en augmentant notablement l'angle d'enroulement sur O et O' . D'où un accroissement considérable de C^{tes} .

404. Cas d'un nombre quelconque d'arbres parallèles.

Soit, en général, n arbres parallèles, et $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \omega_{k+1}, \dots, \omega_n$ leurs vitesses angulaires de rotation, orientées positivement autour des demi-droites $O_1 Z_1, \dots, O_n Z_n$ de même sens (axes des arbres). Soit $R_1, R_2, \dots, R_k, R_{k+1}, \dots, R_n$ les rayons des circonférences sur lesquelles s'enroulent les courroies; $N_1, N_2, \dots, N_k, N_{k+1}, \dots, N_n$ les moments (par rapport à $O_1 Z_1, \dots, O_n Z_n$) des forces appliquées aux n arbres (en outre des réactions des courroies); $I_1, I_2, \dots, I_k, I_{k+1}, \dots, I_n$ les moments d'inertie des arbres par rapport à leurs axes de rotation.

Considérons la courroie par laquelle, le mouvement se transmet de l'arbre de rang k à l'arbre de rang $k+1$, et appelons Θ l'excès de la tension du brin moteur sur celle du brin mené.

(1) Si on tient compte de la masse de la courroie et l'on a dans la condition (1) remplacer T et T_0 et par $T - \rho \omega^2 R^2$ et $T_0 - \rho \omega_0^2 R^2$ (ρ désignant la densité linéaire de la courroie assimilée à un fil). [1^{ère} année, p. 540]

Appliquons, pour calculer Θ , les théorème des forces vives à l'ensemble des k -premiers arbres, des $(k-1)$ premières courroies, et de la portion de la k° courroie en contact avec l'arbre O_k .

La force vive de ce système a pour valeur (les masses des courroies étant négligeables):

$$2T = (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + \dots + I_k \omega_k^2).$$

Puisque les courroies ne glissent sur aucun des arbres, la vitesse de rotation de chaque arbre est dans un rapport constant avec celle de l'arbre de rang k , rapport qu'on sait calculer connaissant R_1, \dots, R_k . On peut donc écrire:

$$\frac{\omega_1}{\omega_k} = \lambda_1, \quad \frac{\omega_2}{\omega_k} = \lambda_2, \dots$$

les λ , désignant des constantes numériques. Il en résulte

$$2T = (I_1 \lambda_1^2 + I_2 \lambda_2^2 + \dots + I_k) \omega_k^2$$

et la quantité entre parenthèses est un moment d'inertie que l'on peut représenter par $M R_k^2$, M désignant une masse. On aura ainsi:

$$2T = M R_k^2 \omega_k^2.$$

D'autre part, le travail des forces intérieures est nul, le travail élémentaire des couples N_1, \dots, N_k est:

$$(N_1 \omega_1 + N_2 \omega_2 + \dots + N_k \omega_k) dt$$

c'est-à-dire

$$(N_1 \lambda_1 + N_2 \lambda_2 + \dots + N_k) \omega_k dt$$

et la quantité entre parenthèses est un moment de force que l'on peut représenter par $F R_k$, F désignant une force. L'expression précédente devient alors

$$F R_k \omega_k dt,$$

et le théorème de la force vive donne

$$d\left(\frac{1}{2} M R_k^2 \omega_k^2\right) = F R_k \omega_k dt - \Theta R_k \omega_k dt.$$

On en déduit, après réduction

$$M R_k \frac{d\omega_k}{dt} = F - \Theta.$$

L'ensemble des $(n-k)$ autres arbres fournit, de même,

$$M' R_{k+1} \frac{d\omega_{k+1}}{dt} = F' + \Theta$$

où M', F' sont définis par des égalités analogues:

On a d'ailleurs la condition:

$$R_k \frac{d\omega_k}{dt} = R_{k+1} \frac{d\omega_{k+1}}{dt}$$

et l'on obtient⁽¹⁾ par suite

$$\Theta = \frac{M' F' - M F}{M + M'}.$$

⁽¹⁾ Voir la note de la page 490.

Livre VII.

Elasticité.

Chapitre I.

Compléments à la cinématique des milieux continus.

405. - Déformations infinitésimales d'un corps continu S. - Translation, rotation, déformation pure.

Soit $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ la vitesse du point P du corps S qui, à l'instant t occupe la position (x, y, z) . Considérons un élément matériel E de S , de dimensions infinitésimales et qui à l'instant t comprend à son intérieur le point P . Soit P' un point matériel de E dont les coordonnées à l'instant t sont $x+h$, $y+k$, $z+l$; la vitesse du point P' est $u+\Delta u$, $v+\Delta v$, $w+\Delta w$, où

$$\Delta u = h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + l \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \Delta v = h \frac{\partial v}{\partial x} + k \frac{\partial v}{\partial y} + l \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\Delta w = h \frac{\partial w}{\partial x} + k \frac{\partial w}{\partial y} + l \frac{\partial w}{\partial z}. \quad \text{A l'instant } t + dt, P'$$

occupe la position P_1 dont l'abscisse est $x+h+(u+\Delta u)dt$. Si on prend constamment comme origine des axes

Le point matériel P du corps, les coordonnées de P' à l'instant t sont h, k, l , et leurs valeurs h_1, k_1, l_1 à l'instant $t + dt$ sont : $h_1 = h + \Delta u dt$, $k_1 = k + \Delta v dt$, $l_1 = l + \Delta w dt$, ce qui peut s'écrire :

$$(1) \begin{cases} \Delta h \equiv h_1 - h = \left(h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + l \frac{\partial u}{\partial z} \right) dt \\ \Delta k \equiv k_1 - k = \left(h \frac{\partial v}{\partial x} + k \frac{\partial v}{\partial y} + l \frac{\partial v}{\partial z} \right) dt \\ \Delta l \equiv l_1 - l = \left(h \frac{\partial w}{\partial x} + k \frac{\partial w}{\partial y} + l \frac{\partial w}{\partial z} \right) dt \end{cases}$$

Soit de même P'' un autre point matériel de l'élément E dont les coordonnées à l'instant t (rapportées aux mêmes axes) sont $h + \eta, k + \alpha, l + \lambda$; à l'instant $t + dt$, P'' occupe la position P_1'' et les formules précédentes montrent aussitôt que la projection de $P_1'P_1''$ sur l'axe des x est :

$$\eta + \left(\eta \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u}{\partial z} \right) dt.$$

Comme des formules analogues s'appliquent aux deux autres axes, on en déduit :

$$\overline{P_1'P_1''}^2 = \eta^2 + \alpha^2 + \lambda^2 + 2dt \left\{ \begin{array}{l} \eta^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda^2 \frac{\partial u}{\partial z} \\ + \alpha \lambda \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \lambda \eta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \eta \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{array} \right\}$$

en négligeant les termes en dt^2 ,
ou encore :

$$(2) \quad P'P'' \times \frac{P_1'P_1'' - P'P''}{dt} = a_1 \eta^2 + a_2 \alpha^2 + a_3 \lambda^2 + 2b_1 \alpha \lambda + 2b_2 \lambda \eta + 2b_3 \eta \alpha,$$

en posant :

$$(3) \quad a_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad a_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad a_3 = \frac{\partial w}{\partial z},$$

et

$$(4) \quad 2b_1 = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad 2b_2 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad 2b_3 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Si on connaît les six quantités $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$,

la déformation infinitésimale de l'élément E entre les instants t et $t + dt$ est déterminée, car on connaît la distance de deux points matériels quelconques de E à l'instant $t + dt$. Représentons par E_1 ce qui est devenu à l'instant $t + dt$ l'élément considéré E : les six quantités précédentes définissent E_1 à un déplacement près dans l'espace.

D'après cela, introduisons la forme quadratique :

$$(5) \quad 2\varphi(h, k, l) = a_1 h^2 + a_2 k^2 + a_3 l^2 + 2b_1 kl + 2b_2 lh + 2b_3 hk$$

et la déformation infinitésimale définie par les égalités :

$$(6) \quad \begin{cases} \Delta h = \frac{\partial \varphi}{\partial h} dt = (a_1 h + b_3 k + b_2 l) dt, \\ \Delta k = \frac{\partial \varphi}{\partial k} dt = (b_3 h + a_2 k + b_1 l) dt, \\ \Delta l = \frac{\partial \varphi}{\partial l} dt = (b_2 h + b_1 k + a_3 l) dt. \end{cases}$$

Appellons déformation pure toute déformation (infinitésimale) de l'espèce (6), c'est-à-dire telle que le déterminant des coefficients des h, k, l (dans les seconds membres) soit symétrique. Si E' est l'état de E après la déformation (6), on peut passer de E' à E_1 par une rotation infinitésimale conge-nable $\vec{\omega}$ dt autour de P . Autrement dit, soit p, q, z les composantes de la rotation $\vec{\omega}$: il résulte de ce qui précède qu'on peut mettre les équations (1) sous la forme :

$$(7) \quad \begin{cases} h_1 - h = (a_1 h + b_3 k + b_2 l) dt + (ql - zk) dt \\ k_1 - k = (b_3 h + a_2 k + b_1 l) dt + (zk - pl) dt \\ l_1 - l = (b_2 h + b_1 k + a_3 l) dt + (pk - qh) dt \end{cases}$$

C'est ce qu'on vérifie immédiatement en cherchant à identifier les seconds membres de (1) et ceux de (7). On trouve aussitôt que cette identification est possible à condition de donner à p, q, z les valeurs :

$$(8) \quad p = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad q = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad r = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Ce sont précisément les composantes du vecteur tourbillon au point x, y, z [n° 258].

406. - Au lieu de représenter par (u, v, w) la vitesse de P , il est loisible de représenter par ces quantités le déplacement infinitésimal de P entre les instants t et $t + dt$. Autrement dit, il est loisible de représenter par u, v, w les quantités qui, dans ce qui précède, sont représentées par $u dt, v dt, w dt$. Le coefficient dt disparaît alors dans les seconds membres des équations (1), (6) et (7). De plus, les formules précédentes subsistent (comme toutes les formules cinématiques), si t désigne, non pas le temps, mais un paramètre variable quelconque. En définitive, considérons une déformation infinitésimale quelconque du corps S ; soit P le point du corps qui occupe initialement la position x, y, z et soit $x + u(x, y, z), y + v(x, y, z), z + w(x, y, z)$ sa position après la déformation. La déformation d'un élément E du corps qui comprend P vérifie les formules :

$$(1) \text{ bis } \begin{cases} h_1 - h = h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + l \frac{\partial u}{\partial z}, \\ k_1 - k = h \frac{\partial v}{\partial x} + k \frac{\partial v}{\partial y} + l \frac{\partial v}{\partial z}, \\ l_1 - l = h \frac{\partial w}{\partial x} + k \frac{\partial w}{\partial y} + l \frac{\partial w}{\partial z}, \end{cases}$$

et cette déformation est la résultante : 1° d'une translation d'ensemble qui amène P en P_1 ; 2° d'une rotation d'ensemble autour de P , définie par les égalités (8); 3° de la

(1) Nous avons donné une interprétation mécanique de ce vecteur.

Si on considère une petite sphère Σ de centre P , et le moment cinétique par rapport à P , soit Px , de cette sphère matérielle (dans son mouvement autour de P), le vecteur (p, q, r) est la rotation dont la sphère Σ , supposée solide et de même densité, devrait être animée autour de son centre P , pour que son moment cinétique par rapport à P fût précisément Px .

déformation pure

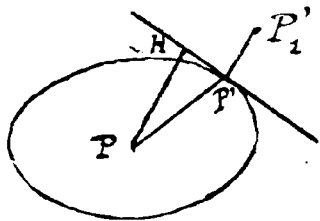
$$(6) \text{ bis} \quad \begin{cases} \Delta h = \frac{\partial \varphi}{\partial h} = a_1 h + b_3 k + b_2 l, \\ \Delta k = \frac{\partial \varphi}{\partial k} = b_3 h + a_2 k + b_1 l, \\ \Delta l = \frac{\partial \varphi}{\partial l} = b_2 h + b_1 k + a_3 l, \end{cases}$$

où $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ et φ sont donnés par les équations (3) (4) et (5).

407. — Propriétés géométriques d'une déformation pure.

pure. —

Soit $P h k l$ des axes parallèles aux axes fixes et ayant P comme origine. Par rapport à ces axes, l'équation $\varphi = \frac{C}{2}$ (C constante) représente une quadrique Q de centre P . Déterminons C de façon que la quadrique passe par P' : les équations (6 bis) signifient que le déplacement $P'P'_1$ du point P' est normal à cette quadrique. La distance PH du centre P au plan tangent en P' à la quadrique est :



$$PH = \frac{C}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial h}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial k}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial l}\right)^2}}$$

$$= \frac{C}{P'P'_1}.$$

Dans la déformation pure (6 bis), les déplacements éprouvés par les points P' situés sur la même quadrique Q sont donc en raison inverse des distances du centre aux plans tangents correspondants.

Précisons enfin le sens du déplacement : si φ est une forme essentiellement positive, les quadriques Q sont des ellipsoïdes homothétiques, C est positif ; le déplacement $P'P'_1$ est extérieur à l'ellipsoïde, la distance des deux points matériels $P P'$ s'accroît dans la déformation [qui est une dilatation].

Si φ est une forme essentiellement négative, C est < 0 , les quadriques Q sont encore des ellipsoïdes, mais $P'P'_1$

est dirigé vers l'intérieur de l'ellipsoïde ; la déformation est une contraction.

— Enfin si l'équation $\varphi = 0$ définit un cône réel Γ , ce cône décompose l'espace en deux régions D et D' ; φ est positif dans l'une d'elles, soit D , et négatif dans l'autre D' . La variation $P'P_1$ accroît la distance PP' (dilatation) dans la région D , et la diminue dans la région D' (contraction) ; elle la laisse invariable si P' est sur le cône Γ . Les quadriques Q sont des hyperboloïdes à une ou deux nappes selon qu'on se trouve dans une des régions D, D' ou dans l'autre.

Dans tous les cas, considérons les trois directions d'axes des quadriques homothétiques Q . Il est clair que ces trois directions ne sont pas altérées par la déformation. D'où ce théorème : une déformation pure laisse inaltérées trois directions rectangulaires dans l'élément E . La déformation la plus générale résultant d'une déformation pure et d'un simple déplacement, on voit que dans toute déformation infinitésimale un certain trièdre trirectangle reste trirectangle⁽¹⁾. Les trois arêtes de ce trièdre sont appelées directions principales de la déformation.

408. — Surface des dilatations — La variation de la distance R des deux points matériels P et P_1 est donnée [n° 405] par :

$$R \cdot \delta R = a_1 h^2 + a_2 k^2 + a_3 l^2 + 2b_1 kl + 2b_2 lh + 2b_3 hk.$$

Appelons $\frac{\delta R}{R}$ la dilatation linéaire du diamètre

PP_1 de la quadrique Q [dilatation qui est une contraction si $\delta R < 0$], et représentons par λ cette quantité [+ ou -] on a :

$$(9) \quad \lambda = \frac{R \delta R}{R^2} = a_1 \alpha^2 + a_2 \beta^2 + a_3 \gamma^2 + 2b_1 \beta \gamma + 2b_2 \gamma \alpha + 2b_3 \alpha \beta,$$

si α, β, γ désignent les cos. directeurs de PP_1 . A chaque direction issue de P correspond ainsi une dilatation

(1) Nous verrons tout à l'heure que ce trièdre est unique en général.

linéaire λ . Il résulte aussitôt de l'équation (9) que si a, a', a'' sont les dilatations correspondant à trois directions rectangulaires quelconques, on a :

$$a + a' + a'' = a_1 + a_2 + a_3.$$

Plaçons-nous dans le cas où φ est essentiellement positif. Portons sur PP_1 , à partir de P une longueur $PM = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, et soit ξ, η, ζ les coordonnées de M . La surface lieu du point M a pour équation :

$$a_1 \xi^2 + a_2 \eta^2 + a_3 \zeta^2 + 2b_1 \zeta \xi + 2b_2 \xi \eta = 1.$$

L'ellipsoïde ainsi défini s'appelle surface des dilatations.

Si φ est essentiellement négatif, on porte sur PP_1 la longueur $\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}$; l'ellipsoïde ainsi défini s'appelle encore surface de dilatations; mais toutes les dilatations sont négatives, c'est-à-dire sont des contractions.

Si φ peut prendre les deux signes, on porte sur chaque droite PP_1 une longueur égale à $\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}$; la surface de dilatations ainsi obtenue se compose de deux hyperboloïdes conjugués.

409. - Invariance de la déformation pure.

D'après sa définition même, la surface de dilatation n'est pas modifiée quand on remplace les axes choisis Ox, y, z par d'autres axes fixes ou animés d'un mouvement quelconque relativement aux premiers. D'autre part, connaissant cette surface, on connaît φ , la quadrique Q qui passe par chaque point P et le déplacement $P'P_1$ de P . La déformation pure de l'élément matériel E reste donc la même dans le changement d'axes. Mais la translation et la rotation de l'élément sont modifiées en général, si

Les nouveaux axes ne sont pas invariablement liés aux premiers.

En définitive, le trièdre de référence $oxyz$ étant arbitrairement choisi, toute déformation infinitésimale d'un élément matériel peut être décomposée (et cela d'une seule manière) en une déformation pure, une translation et une rotation. La transformation pure est indépendante des axes choisis. La translation et la rotation restent les mêmes quand on remplace les axes $oxyz$ par de nouveaux axes liés invariablement aux premiers, mais non pas quand les nouveaux axes sont mobiles par rapport aux premiers. En particulier, on peut toujours choisir les axes de façon que la déformation de l'élément matériel considéré se réduise constamment à une déformation pure.

410.- Interprétation des quantités $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$. Glissements.-

Les coefficients a_1, a_2, a_3 mesurent évidemment les dilatations (ou contractions) linéaires correspondant aux directions des axes de coordonnées. Interprétons les coefficients b_1, b_2, b_3 .

Prenons sur les droites Px, Py parallèles à ox et oy les segments infiniment petits PP', PP'' égaux à ε et soit P_1, P_1', P_1'' les positions après la déformation des trois points matériels P, P', P'' . On a :

$$P_1 P_1' = (1 + a_1) \varepsilon, \quad P_1 P_1'' = (1 + a_2) \varepsilon,$$

et [n° 405] :

$$(1) \quad \overline{P_1' P_1''}^2 = \overline{P_1' P_1}^2 + 2 \varepsilon^2 (a_1 + a_2 - 2b_3) = 2\varepsilon^2 [1 + a_1 + a_2 - 2b_3]$$

mais, d'autre part, soit $(\frac{\pi}{2} - \eta)$ l'angle $P_1' P_1 P_1''$; dans le triangle $P_1' P_1 P_1''$ on a :

$$\begin{aligned} \overline{P_1' P_1''}^2 &= \overline{P_1' P_1}^2 + \overline{P_1 P_1''}^2 - 2 P_1 P_1' \cdot P_1 P_1'' \sin \eta \\ &= 2 \varepsilon^2 (1 + a_1 + a_2 - \sin \eta), \end{aligned}$$

d'où en comparant avec (1):

$$2b_3 = \sin \eta = \eta$$

D'après cela, le coefficient b_3 mesure la moitié de la diminution éprouvée dans la déformation, par l'angle droit matériel $P'PP''$.

Le trièdre matériel trirectangle $PhKl$ dont les côtés sont parallèles aux axes devient donc un trièdre obliquangle dont les faces sont

$$\frac{\pi}{2} - 2b_1, \frac{\pi}{2} - 2b_2, \frac{\pi}{2} - 2b_3.$$

Désignons par i le dièdre opposé à la face $\frac{\pi}{2} - 2b_1$, et appliquons la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

nous trouvons:

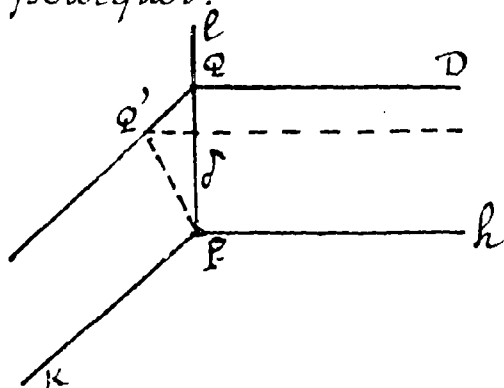
$$2b_1 = 4b_2b_3 + (1 - 2b_2^2)(1 - 2b_3^2) \cos i$$

d'où, en négligeant les quantités du second ordre:

$$\cos i = 2b_1.$$

et par suite $i = \frac{\pi}{2} - 2b_1$.

On peut donc dire encore que $2b_1, 2b_2, 2b_3$ sont les diminutions éprouvées par les dièdres du trièdre des axes. Ces diminutions sont souvent appelées les glissements de la déformation et voici pourquoi.



Considérons le dièdre formé par les deux plans PhK et Phl . Soit QD une droite parallèle à Ph dans le plan Phl et située à la distance $PQ = d$ de Ph . Faisons glisser la droite PQ

parallèlement à elle-même et parallèlement à la face PhK , et soit $2\beta_1$ la grandeur de ce glissement Q Q' estimé parallèlement à PK . Si nous déplaçons ainsi toutes les parallèles à Ph situées dans la face PhL , cette face s'incline en demeurant plane et l'angle dièdre Ph diminue de $2\beta_1$. En même temps, à la distance 1 de la face fixe PhK , le glissement a pour valeur $2\beta_1$: il y a donc égalité entre la diminution du dièdre et le glissement tel qu'on sient de le définir.

Il va sans dire que si un ou plusieurs coefficients β étaient négatifs, les diminutions d'angles correspondants se changeraient en augmentation.

411. — Si nous rapportons l'ellipsoïde des dilatations à ses axes, les coefficients $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ sont nuls et la déformation consiste alors à remplacer les coordonnées h, k, l respectivement par $h(1+a_1), k(1+a_2), l(1+a_3)$. On peut décomposer cette opération en trois opérations plus simples, dont chacune consiste à multiplier l'une des coordonnées par un facteur constant en laissant les deux autres invariables. On remplace par exemple h par $h(1+a_1)$, sans modifier k et l . C'est ce que l'on nomme une dilatation parallèle à un axe. Dans cette dilatation deux plans perpendiculaires à l'axe considéré demeurent parallèles et éprouvent un écartement proportionnel à l'écartement lui-même.

412. — Les trois directions de l'élément qui coïncident avec les axes de la quadrique de déformations restent trirectangles après la déformation. Inversement, si trois directions rectangulaires de l'élément restent rectangulaires, elles sont axes de la quadrique de déformations. En effet, choisissons les axes Ox, Oy, Oz de façon qu'ils soient parallèles avant la déformation aux trois directions considérées; les glissements étant nuls ici, on a: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, et la quadrique de déformation a ses axes parallèles à Ox, Oy, Oz . Quand la quadrique n'est pas de révolution, il existe donc dans l'élément un trièdre

trirectangle et un seul que la déformation laisse trirectangle.⁽¹⁾
 La déformation complète se compose 1^o d'une déformation pure qui laisse immobile ce trièdre trirectangle, 2^o d'une translation et d'une rotation d'ensemble qui amènent ce trièdre dans sa position nouvelle.

413. — Conclusions — Dans la déformation infinitésimale d'un milieu continu, chaque volume élémentaire éprouve un déplacement d'ensemble (translation et rotation) accompagné de trois dilatations (ou contractions) effectuées suivant trois directions rectangulaires. Ces trois directions restent rectangulaires, mais changent en général d'orientation.

Pour que le déplacement d'ensemble se réduise à une translation sans rotation, il faut et il suffit que les composantes Δh , Δk , Δl du déplacement soient les dérivées partielles d'une même fonction de h , k , l .

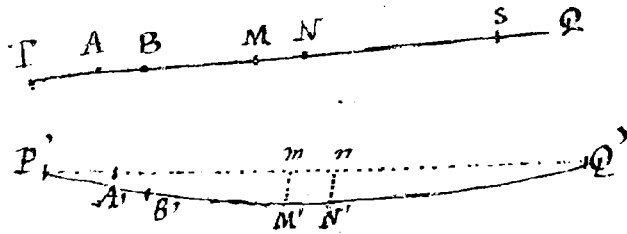
414. — Cas où la déformation pure est nulle pour chaque élément du milieu.

Quand la déformation pure est nulle pour chaque élément du milieu, chaque élément subit un simple déplacement d'ensemble. Nous allons montrer que le milieu subit un déplacement (infinitésimal) d'ensemble.

(1) — Il est facile de démontrer (théorème de J. Bertrand) qu'il existe en général dans l'élément trois directions qui ne changent pas dans la déformation. Quand ces trois directions sont rectangulaires, elles coïncident avec les axes de la quadrique des déformations, et la rotation est nulle. Ces trois directions peuvent se réduire à deux ou à une. Dans le dernier cas, la déformation est un déplacement d'ensemble. Ce théorème n'est que la traduction d'un théorème de géométrie analytique. Une transformation linéaire et homogène effectuée sur les coordonnées conserve trois droites passant par l'origine.

Il nous est loisible d'admettre que la déformation considérée s'effectue entre les instants t et $t+dt$. Soit P et Q deux points matériels du corps continu, r leur distance; si je montre que $\frac{dr}{dt}$ est nul à l'instant t et cela quels que soient les points matériels P, Q choisis dans le corps, le théorème est démontré.

Considérons la droite matérielle qui joint PQ , et décomposons la en ν segments égaux $PA, AB, BC, \dots, MN, \dots, SQ$. A l'instant $t+dt$, cette droite est devenue une ligne sensiblement rectiligne $P'Q'$ et l'élément MN est devenu $M'N'$.



Soit r la distance PQ , $r+dr$ la distance $P'Q'$; si m, n est la projection de $M'N'$ sur $P'Q'$ on a:
 $r+dr = \sum mn$.
 La longueur MN est égale à $\frac{r}{\nu}$; représentons par $\frac{r}{\nu} \varepsilon dt$

la variation de longueur $M'N' - MN$ de cet élément. Comme la déformation pure de chaque élément est nulle, ε est très petit avec la longueur MN , c'est-à-dire avec $\frac{r}{\nu}$. D'autre part, l'angle de $P'Q'$ avec PQ est de l'ordre de dt , ainsi que l'angle de $M'N'$ avec MN ; $\cos(M'N', P'Q')$ ne diffère donc de l'unité que par un terme de l'ordre de dt^2 , soit $-\alpha dt^2$. On a par suite:

$$mn = M'N'(1 - \alpha dt^2) = \frac{r}{\nu} (1 + \varepsilon dt)(1 - \alpha dt^2).$$

la différence $mn - \frac{r}{\nu}$ est donc (en valeur absolue) inférieure à $\frac{r}{\nu} \eta dt$, η tendant vers zéro avec $\frac{1}{\nu}$ et dt .

D'où :

$$r+dr = P'Q' = \sum mn = r(1 + \theta \eta dt), \quad (-1 < \theta < 1),$$

$$\text{et } \left| \frac{dr}{dt} \right| < \eta.$$

Comme v peut être pris aussi grand qu'on veut, on voit que $|\frac{dr}{dt}|$ à l'instant t est inférieur à toute quantité donnée, c'est-à-dire nul.
E. F. D.

415.- Dilatation cubique.

Nous avons évalué [n° 242] la variation de volume d'un élément du corps continu dans une déformation quelconque de ce corps. Quand la déformation est infinitésimale et effectuée dans le temps dt , nous avons vu que la dilatation cubique $\frac{dV}{V}$ est égale à $(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}) dt$.

Avec la notation que nous avons adoptée, cette quantité est égale à :

$$a_1 + a_2 + a_3.$$

Il est aisé de vérifier ce résultat en considérant un parallélépipède infinitésimal construit sur les axes de la quadrique de déformation. Soit a'_1, a'_2, a'_3 les dilatations principales; le parallélépipède d'arêtes h, k, l devient un nouveau parallélépipède rectangle dont les arêtes sont $h(1+a'_1), k(1+a'_2), l(1+a'_3)$; le volume passe de la valeur hkl à la valeur $hkl(1+a'_1)(1+a'_2)(1+a'_3)$, et le quotient $\frac{dV}{V}$ est égal à $a'_1 + a'_2 + a'_3$, (en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur). Or nous savons [n° 408] que

$$(a_1 + a_2 + a_3) \text{ est égal à } (a'_1 + a'_2 + a'_3).$$

Chapitre II.

Tensions intérieures.

416.- Forces de contact intérieures. -

Considérons un corps continu S en équilibre par rapport aux axes choisis $Oxyz$, et un élément infiniment mince du corps, d'affixe P [1^{re} année N° 541]; d'une façon précise, l'élément E est intérieur à un cylindre limité par deux sections droites $d\sigma$ et $d\sigma_2$, et la hauteur du cylindre est infiniment petite par rapport aux dimensions (infinitésimales elles-mêmes) d'une section droite. Les particules du corps extérieures à l'élément E et en contact avec la face $d\sigma$, exercent sur cette face une force de contact qu'on peut représenter par $T d\sigma$. La valeur T , est par définition l'effort (ou la tension) par unité de surface au point P du corps et sur un élément de surface orienté vers Pn , (Pn désignant la normale à $d\sigma$ menée vers l'extérieur de E). La composante de T normale à $d\sigma$ est dite une fraction ou une pression suivant qu'elle a le sens Pn ou le sens contraire (1). Il est entendu une fois pour toutes que, quand nous parlerons de l'effort qui s'exerce sur la petite surface $d\sigma$, il s'agira de l'effort T rapporté à l'unité de surface.

Si l'élément E fait partie de la surface limitée de S

(1) - Tous les développements de ce N° sont analogues à ceux des N° 541-543 au cours de 1^{re} année relatifs aux fluides parfaits, mais pour les fluides, l'effort est normal à $d\sigma$ et dirigé en sens inverse de Pn .

et enfin à l'extérieur par sa face $d\sigma_1$, la force de contact exercée par les corps extérieurs sur la face $d\sigma_1$ est égale et directement opposée à $\bar{T} d\sigma$ [1^{re} année, n^o 543].

Considérons maintenant un élément du corps S qui soit de forme quelconque; soit m sa masse; nous représentons par $m\bar{F}$ la force, outre que les forces de contact, qui s'exercent sur cet élément, et nous admettons que \bar{F} est un vecteur bien déterminé et fini pour chaque élément.

417.- Equations universelles d'équilibre.

Ceci posé, considérons une portion quelconque, soit D , de S , et les forces extérieures appliquées à ce système matériel D en équilibre. Ces forces extérieures sont: 1^o les forces de contact exercées sur la surface limitée de D par les corps extérieurs à D ; 2^o les forces $m\bar{F}$ appliquées aux divers éléments de D . Nous savons que ces forces doivent satisfaire aux six conditions universelles d'équilibre, et cela quelle que soit la portion D de S considérée. Nous allons écrire ces conditions en choisissant d'abord une forme simple du volume D .

418.- Equilibre du tétraèdre.-

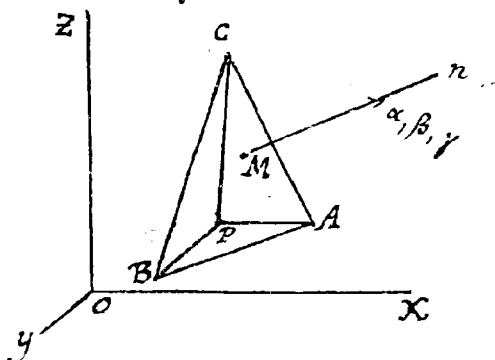
En un point P , les composantes T_x, T_y, T_z de l'effort \bar{T} sont des fonctions déterminées de α, β, γ , cosinus directeurs de \bar{T} . Nous allons montrer que ces fonctions sont linéaires et homogènes en α, β, γ .

Le point P étant donné dans l'intérieur du fluide, représentons par X_1, Y_1, Z_1 les composantes de \bar{T} pour une face normale à ox et orientée du côté des x négatifs; autrement dit, X_1, Y_1, Z_1 sont les composantes de \bar{T} pour $\alpha = -1, \beta = 0, \gamma = 0$. Représentons de même par (X_2, Y_2, Z_2) et (X_3, Y_3, Z_3) les composantes de \bar{T} pour $\alpha = 0, \beta = -1, \gamma = 0$; et pour $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = -1$. Considérons maintenant le tétraèdre $PhkC$ de sommet P et parallèle aux axes, et un plan situé à la distance très petite ϵ de P qui coupe les trois demi-droites Ph, Pk, Pl aux points A, B, C . Nous allons exprimer que les forces extérieures

qui s'exercent sur le tétraèdre $PABC$ ont une somme géométrique nulle.

Les forces en \bar{F} ont une somme géométrique de l'ordre du volume du tétraèdre, c'est-à-dire de l'ordre de ε^3 .

Si $d\sigma$ est l'aire ABC , $d\sigma$ est de l'ordre de ε^2 , et les aires PBC ou $d\sigma_1$, PCA ou $d\sigma_2$, PAB ou $d\sigma_3$ sont égales respectivement à : $\alpha d\sigma$, $\beta d\sigma$, $\gamma d\sigma$, (si α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale Mn à ABC menée vers l'extérieur du tétraèdre). Représentons par $\bar{T} d\sigma$ la force de contact qui s'exerce sur la face



extérieure ABC du tétraèdre et calculons la projection sur Ox des forces extérieures qui s'exercent sur le tétraèdre, en négligeant les termes d'ordre supérieur à ε^2 . Il vient, en annulant cette projection :

$$0 = X_1 d\sigma_1 + X_2 d\sigma_2 + X_3 d\sigma_3 + T_x d\sigma + \varepsilon^3(\dots);$$

si on divise par $d\sigma$, et si on fait tendre ε vers zéro, cette égalité donne :

$$\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 + T_x = 0.$$

En raisonnant de même sur les autres axes, on voit que les composantes de \bar{T} sont des fonctions linéaires et homogènes de α, β, γ . En particulier, \bar{T} est égal et directement opposé à l'effort qui s'exerce sur la face ABC orientée vers l'intérieur du tétraèdre (1). Si nous convenons de représenter par \bar{T} ce dernier effort, les équations précédentes s'écrivent :

$$(1) \quad \begin{cases} T_x = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 ; \\ T_y = \alpha Y_1 + \beta Y_2 + \gamma Y_3 ; \\ T_z = \alpha Z_1 + \beta Z_2 + \gamma Z_3 ; \end{cases}$$

Dans ce qui suit, \bar{T} représentera l'effort qui s'exerce sur la petite face $d\sigma$ orientée vers la demi-direction $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$.

(1) Ceci résulterait aussitôt de l'équilibre d'un élément infiniment mince (1^{re} année, n^o 543).

419.- Equilibre d'un volume quelconque de S.

Considérons à l'intérieur de S un volume quelconque D , limité par une surface Σ , et soit α, β, γ les cos. directeurs de la normale en un point P à Σ menés vers l'intérieur. Exprimons 1^o que la somme des projections sur ox des forces extérieures appliquées à D est nulle; 2^o que le moment de ces forces par rapport à ox est nul.

Il vient, en appelant ρ la densité du corps en (x, y, z) :

$$(2) \quad \iiint_D \rho X \, dx \, dy \, dz + \iint_{\Sigma} T_x \, d\sigma = 0$$

et

$$(3) \quad \iiint_D \rho (yZ - zY) \, dx \, dy \, dz + \iint_{\Sigma} (yT_z - zT_y) \, d\sigma = 0$$

Écrivons compte des formules (1). L'intégrale \iint qui figure dans (2) devient :

$$\iint_{\Sigma} (\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3) \, d\sigma$$

quantité qui, d'après la formule de Green, est égale à :

$$- \iiint_D \left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z} \right) \, dx \, dy \, dz$$

L'équation (2) s'écrit donc :

$$\iiint_D \left(\rho X - \frac{\partial X_1}{\partial x} - \frac{\partial X_2}{\partial y} - \frac{\partial X_3}{\partial z} \right) \, dx \, dy \, dz = 0,$$

et comme elle doit être vérifiée, quel que soit le volume D , le coefficient de $dx \cdot dy \cdot dz$ est identiquement nul. D'où l'équation :

$$(4) \quad \rho X = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z},$$

et deux équations analogues qui s'en déduiraient par permutation.

On a de même, d'après la formule de Green

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (yTz - zTy) d\sigma &= \iint_{\Sigma} [\alpha(yZ_1 - zY_1) + \beta(yZ_2 - zY_2) + \gamma(yZ_3 - zY_3)] d\sigma \\ &= - \iiint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (yZ_1 - zY_1) + \frac{\partial}{\partial y} (yZ_2 - zY_2) + \frac{\partial}{\partial z} (yZ_3 - zY_3) \right\} dx dy dz \\ &= \iiint_D \left\{ Z_2 - Y_3 + y \left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} + \frac{\partial Z_2}{\partial y} + \frac{\partial Z_3}{\partial z} \right) - z \left(\frac{\partial Y_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_2}{\partial y} + \frac{\partial Y_3}{\partial z} \right) \right\} dx dy dz \end{aligned}$$

L'équation (3) s'écrit donc :

$$\iiint_D \left\{ y \left(\rho Z - \frac{\partial Z_1}{\partial x} - \frac{\partial Z_2}{\partial y} - \frac{\partial Z_3}{\partial z} \right) - z \left(\rho Y - \frac{\partial Y_1}{\partial x} - \frac{\partial Y_2}{\partial y} - \frac{\partial Y_3}{\partial z} \right) - Z_2 + Y_3 \right\} dx dy dz$$

mais, en vertu des équations (4) et analogues, le coefficient de y est nul ainsi que celui de z dans la dernière intégrale triple ; on a donc :

$$0 = \iiint_D (Y_3 - Z_2) dx dy dz$$

quelque soit le volume D , c'est-à-dire :

$$Y_3 \equiv Z_2.$$

Il est évident, par permutation, qu'on a aussi :

$$Z_1 = X_3$$

$$\text{et } X_2 = Y_1$$

On peut énoncer ces derniers résultats en disant que le déterminant :

$$(5) \quad \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

est symétrique.

420.- Notations.- Nous appellerons, avec Lamé, N_1, N_2, N_3 les éléments diagonaux de ce déterminant et T_1, T_2, T_3 les éléments symétriques :

$$Y_3 = Z_2 = T_1$$

$$Z_1 = X_3 = T_2$$

$$X_2 = Y_1 = T_3$$

La raison de cette notation est la suivante :

Sur un élément $d\sigma_1$ perpendiculaire à Ox et orienté vers les x négatifs, s'exerce un effort qu'on peut décomposer en une force normale à l'élément

$$X_1 = N_1$$

et en deux forces tangentielles situées dans le plan de l'élément,

$$Y_2 = T_3 \text{ (parallèle à } Oy) \text{ et } Z_1 = T_2 \text{ (parallèle à } Oz).$$

De même pour les efforts s'exerçant sur les éléments $d\sigma_2$ et $d\sigma_3$ perpendiculaires à Oy et à Oz . La symétrie du déterminant (5) exprime ce fait que la projection sur Ox de l'effort appliqué à un élément $d\sigma_2$ mené par P perpendiculairement à Oy , est égale à la projection sur Oy de l'effort appliqué à un élément $d\sigma_1$ mené par P perpendiculairement à Ox .

421.- Résumé.- Avec la notation que nous venons d'introduire, les formules (1) qui donnent l'effort T sur la face ds tournée vers la demi-droite $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$, s'écrivent :

$$(5) \quad \begin{cases} T_x = N_1 \alpha + T_3 \beta + T_2 \gamma \\ T_y = T_3 \alpha + N_2 \beta + T_1 \gamma \\ T_z = T_2 \alpha + T_1 \beta + N_3 \gamma \end{cases},$$

ce qu'on peut écrire

$$(6) \quad T_x = \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}, \quad T_y = \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial \beta}, \quad T_z = \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma},$$

on désignant par 2Ψ la forme quadratique :

$$(7) \quad 2\Psi = N_1 \alpha^2 + N_2 \beta^2 + N_3 \gamma^2 + 2T_1 \beta \gamma + 2T_2 \gamma \alpha + 2T_3 \alpha \beta.$$

De plus, en chaque point du corps en équilibre, on a :

$$(8) \quad \begin{cases} \rho X = \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} \\ \rho Y = \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} \\ \rho Z = \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} \end{cases}$$

422.- Extension au mouvement du corps continu.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé le corps en équilibre. Quand le corps se déplace et se déforme d'une manière quelconque, quelles modifications doit-on apporter aux conclusions énoncées?

À chaque instant t , la force de contact $\bar{T} d\sigma$ qui s'exerce sur un élément de surface $d\sigma$, d'adresse P ou (x, y, z) et tournée vers une demi-droite $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ donnée est bien déterminée, mais en général le vecteur \bar{T} varie avec t ; les composantes de \bar{T} sont donc trois fonctions déterminées de $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t$. De même, à chaque instant t , un élément du corps, de masse m , est soumis à une force bien déterminée $m\bar{F}$ autre que les forces de contact, mais \bar{F} varie en général avec l'instant considéré.

Ceci posé, on voit immédiatement que tous les raisonnements des nos 417-421 subsistent, à condition de remplacer partout \bar{F} par $\bar{F} - \bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}$ désignant l'accélération de l'élément considéré du corps.

En effet, soit D une portion quelconque du corps; les forces d'inertie $-m\bar{\gamma}$ du système D , les forces $m\bar{F}$ et les forces de contact extérieures qui s'exercent sur D satisfont (à chaque instant t) aux six équations universelles d'équilibre. Les égalités (5), (6) et (7) subsistent donc et les équations (8) deviennent :

$$(9) \quad \begin{cases} p (X - \gamma_x) = \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} \\ p (Y - \gamma_y) = \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} \\ p (Z - \gamma_z) = \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} \end{cases}$$

A ces équations (9), il faut joindre l'équation de continuité, exprimant que la masse se conserve [n° 243].

423.- Quadrique directrice.

Si en un point P , à l'instant t , les valeurs des six fonctions $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$ sont déterminées, la loi des efforts sur les divers éléments superficiels d'ores et déjà menés par P est déterminée par les formules (6). On peut interpréter géométriquement ces formules, de la même manière qu'on a interprété les formules qui définissaient une déformation pure [n° 408].

Soit P_n , ou (α, β, γ) une demi-droite issue de P et d'un élément passant par P et orienté vers la direction $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$. Projetons sur P_n l'effort T qui s'exerce sur $d\sigma$: si cette projection T_n est positive, T_n est une pression; sinon, c'est une traction. Les formules (6) donnent

$$\begin{aligned} T_n = \alpha T_x + \beta T_y + \gamma T_z &= N_1 \alpha^2 + N_2 \beta^2 + N_3 \gamma^2 + 2T_1 \beta \gamma + 2T_2 \gamma \alpha + 2T_3 \alpha \beta \\ &= 2 \Psi(\alpha, \beta, \gamma). \end{aligned}$$

T_n est une pression ou une traction suivant que $\Psi(\alpha, \beta, \gamma)$ est positif ou négatif.

Portons à partir de P sur la normale P_n une longueur PQ égale à $\frac{1}{\sqrt{|T_n|}}$. Le lieu du point P est une des quadriques:

$$(10) \quad N_1 x^2 + N_2 y^2 + N_3 z^2 + 2T_1 yz + 2T_2 zx + 2T_3 xy = \varepsilon, \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

$\varepsilon = +1$ convenant dans la région de l'espace où $\Psi(\alpha, \beta, \gamma)$ est > 0 , et $\varepsilon = -1$ dans la région où $\Psi(\alpha, \beta, \gamma)$ est < 0 .

En raisonnant comme pour la surface de dilatations, on voit que trois cas sont à distinguer :

1^{er} Cas. - La forme $\Psi(\alpha, \beta, \gamma)$ est essentiellement positive. Le lieu du point Q est un ellipsoïde [$\varepsilon = 1$]; toutes les forces T_n sont des pressions.

2^e Cas. - La forme $\Psi(\alpha, \beta, \gamma)$ est essentiellement négative. Le lieu du point Q est un ellipsoïde, $\varepsilon = -1$; toutes les forces T_n sont des tractions.

3^e Cas. - La forme $\Psi(\alpha, \beta, \gamma)$ change de signe. Le lieu du point Q se compose alors de deux hyperboloïdes conjugués. Leur cône asymptote commun est le lieu des normales aux éléments sur lesquels l'effort est tangentiel. Ce cône divise l'espace en deux régions : la force T_n est pression ou tension suivant que la droite (α, β, γ) appartient à une des régions ou à l'autre.

On donne à la quadrique (10) ou aux deux quadriques (10), le nom de surface directrice ou de quadrique directrice.

Les formules (6) montrent que l'effort \bar{T} qui s'exerce sur la face $d\sigma$ opposée à la direction P_n est perpendiculaire au plan diamétral conjugué de P_n dans la quadrique directrice. On connaît donc la direction de \bar{T} . Comme on connaît d'autre part T_n en grandeur et signe, on connaît \bar{T} en grandeur, direction et sens.

Les éléments situés dans les plans principaux de la surface directrice sont soumis à des tensions purement normales. D'après cela, en tout point d'un corps, il y a trois plans orthogonaux sur lesquels les tensions sont normales. Ces tensions sont dites les tensions principales au point considéré. Deux d'entre elles sont la plus grande et la plus petite tension en ce point.

424. - Remarque sur la réciprocity des composantes normales.

Soit $d\sigma$ et $d\sigma'$ deux éléments de surface passant par P et opposés aux deux demi-droites P_n ou (α, β, γ) et $P_{n'}$ ou $(\alpha', \beta', \gamma')$. Soit \bar{T} l'effort qui s'exerce sur $d\sigma$, et $T_{n'}$ la projection de \bar{T} sur $P_{n'}$; soit de même \bar{T}' l'effort qui s'exerce sur $d\sigma'$, et T_n la projection de \bar{T}' sur P_n . Je dis que $T_{n'} = T_n$.

En effet, on a, d'après (6) :

$$T_n' = \alpha_1 T_x + \beta_1 T_y + \gamma_1 T_z = N_1 \alpha_1 \alpha' + N_2 \beta_1 \beta' + N_3 \gamma_1 \gamma' + T_1 (\beta_1 \gamma' + \beta' \gamma) \\ + T_2 (\gamma_1 \alpha' + \gamma' \alpha) + T_3 (\alpha_1 \beta' + \alpha' \beta),$$

et la symétrie de cette expression en (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ montre que $T_n' = T_n$.

En appliquant ce résultat au cas où P_n et P_n' sont parallèles à Ox et à Oy , on retombe sur la remarque de la fin du n° 420.

425.- Ellipsoïde des efforts ou des tensions.

Une autre représentation remarquable des efforts en un point s'obtient en cherchant le lieu des extrémités H des vecteurs représentant les efforts sur les éléments plans passant par ce point. Les coordonnées de H sont les valeurs de T_x, T_y, T_z données par (5).

$$\text{Posons } \Delta = \begin{vmatrix} N_1 & T_3 & T_2 \\ T_3 & N_2 & T_1 \\ T_2 & T_1 & N_3 \end{vmatrix}.$$

et soient $n_1, n_2, n_3, t_1, t_2, t_3$ les mineurs de ce déterminant par rapport aux grandes lettres correspondantes. La résolution des équations (5) donne :

$$\alpha = \frac{n_1 X + t_3 Y + t_2 Z}{\Delta} \quad \beta = \frac{t_3 X + n_2 Y + t_1 Z}{\Delta} \quad \gamma = \frac{t_2 X + t_1 Y + n_3 Z}{\Delta}$$

d'où :

$$(n_1 X + t_3 Y + t_2 Z)^2 + (t_3 X + n_2 Y + t_1 Z)^2 + (t_2 X + t_1 Y + n_3 Z)^2 = \Delta^2$$

Ce lieu est un ellipsoïde, qu'on appelle l'ellipsoïde des efforts ou des tensions. Si la surface directrice est rapportée à ses plans principaux, on a $T_1 = T_2 = T_3 = 0$. Alors $\Delta = N_1 N_2 N_3$, les t deviennent nuls et $n_1 = N_2 N_3$, etc. de sorte que l'équation précédente prend la forme :

$$\frac{X^2}{N_1^2} + \frac{Y^2}{N_2^2} + \frac{Z^2}{N_3^2} = 1$$

504.

On voit que l'ellipsoïde des tensions admet les mêmes plans principaux que la surface directrice.

Lorsque $\Delta = 0$, l'une des tensions principales est nulle. La surface directrice dégénère alors en cylindre tandis que l'ellipsoïde des tensions devient infiniment aplati.

Remarque. - Il est évident que la surface directrice et l'ellipsoïde des efforts sont indépendants du choix des axes. Ils restent les mêmes à un instant t si, aux axes choisis $Ox y z$ on substitue d'autres axes animés par rapport aux premiers d'un mouvement quelconque.

Chapitre III.

Relations entre les déformations et les efforts ou tensions d'un corps solide.

426. - Forces de contact d'un solide dont l'état de déformation est donné.

Quand deux corps matériels en contact occupent, à l'instant t , des positions relatives données, avec des vitesses relatives données, et quand on outre l'état physique et chimique de chacun de leurs éléments est donné, les forces absolues qu'ils exercent l'un sur l'autre, à l'instant t , et en particulier les forces de contact, sont bien déterminées. Cela est vrai si petites que soient les dimensions des corps considérés.

Quand les deux corps en question se déforment, mais quand chacun de leurs points matériels garde la même température, le même état électrique, etc., si, à l'instant t , on connaît les positions relatives et les vitesses relatives des points de S au voisinage du point géométrique P , les forces de contact qui s'exercent, à l'instant t , entre deux éléments voisins de P sont bien déterminées. Nous convenons de dire que le corps est un corps élastique si au voisinage de chaque point P les forces de contact ne dépendent que des positions relatives des points matériels de S [c'est-à-dire de la déformation de S] et point de leurs vitesses relatives. Dans le cas contraire, le corps est dit un corps plastique.

Nous nous plaçons exclusivement dans le cas d'un solide élastique.

427.- Considérons un état déterminé du solide, soit l'état S_0 ; dans cet état, les tensions en un point P sont bien définies; appelons $N_1^0, N_2^0, N_3^0, T_1^0, T_2^0, T_3^0$ les six quantités de Lamé qui les définissent. Supposons maintenant que le solide subisse une déformation où les coordonnées (x, y, z) d'un point matériel deviennent $x+u(x, y, z), y+v(x, y, z), z+w(x, y, z)$: la déformation de S au voisinage de l'élément P qui dans l'état S_0 occupait la position x, y, z , est définie par les neuf quantités $\frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial w}{\partial z}$;

les valeurs de N_1, \dots, T_3 dans le nouvel état S_1 du corps vérifieront pour chaque élément P des relations telles que:

$$N_1 - N_1^0 = \chi_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial w}{\partial z}, x, y, z \right)$$

$$T_3 - T_3^0 = \chi_6 \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial w}{\partial z}, x, y, z \right)$$

Si, en particulier, la déformation est très petite, assimilable à une déformation infinitésimale, les fonctions χ_1, \dots, χ_6 qui s'amultiplient avec la déformation, peuvent être réduites à leurs termes du premier degré en $\frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial w}{\partial z}$. D'autre part, comme nous savons

dans l'état naturel, toutes les forces $m\bar{F}$ et toutes les tensions extérieures sont nulles.

Si S_0 est l'état naturel du corps, il suffit d'annuler $N_1^0 \dots T_3^0$ dans les équations (1) du n° 427 et dans leurs conséquences [n° 428].

430.- Corps homogènes et isotropes. - Le corps étant dans l'état naturel, menons par un point P du corps deux demi-droites quelconques Pn, Pn' : si l'état du corps est le même le long du petit segment Pn et le long du petit segment égal Pn' (quels que soient Pn et Pn'), le corps est dit isotrope autour de P . S'il est isotrope autour de P , quel que soit P , il est nécessairement homogène. On dit, dans ce cas, qu'il est homogène et isotrope.

431.- Relation entre les tensions et les déformations dans le cas de l'isotropie. -

Supposons le corps S isotrope autour de P . Nous allons voir que le nombre des coefficients λ, ω distincts [n° 427] attachés au point P s'abaisse de 36 à 2, quand S subit une petite déformation à partir de l'état naturel S_0 .

Dans un corps quelconque, la déformation en un point est, comme nous l'avons vu, symétrique par rapport à trois plans rectangulaires qui sont les plans principaux de la surface des dilatations. Quand le corps est isotrope, la symétrie de la déformation entraîne celle des tensions, et par conséquent la surface directrice des tensions, doit admettre les mêmes plans principaux que la surface des dilatations. En outre, si l'on change la déformation de façon que la surface des dilatations change d'orientation en restant égale à elle-même, la surface des tensions ne subit qu'un déplacement corrélatif : les deux surfaces s'accompagnent comme deux solides invariablement liés.

Ceci posé, considérons une déformation quelconque et rapportons la surface des dilatations à ses plans principaux. Les $\bar{\omega}$ sont alors nuls, et l'équation de la surface est

$$(1) \quad a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 = 1$$

508.-

La surface correspondante des tensions est :

$$N_1 x^2 + N_2 y^2 + N_3 z^2 = 1$$

et, comme les τ sont nuls, les N se réduisent à des fonctions linéaires et homogènes des a .

Soit :

$$N_1 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$$

$$N_2 = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3$$

$$N_3 = \nu_1 a_1 + \nu_2 a_2 + \nu_3 a_3$$

Imprimons au système trois rotations successives $\frac{2\pi}{3}$ autour d'un axe également incliné sur les trois axes de coordonnées. Les a se permutent circulairement, et il doit en être de même des N . On doit donc avoir :

$$N_2 = \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_3 + \lambda_3 a_1$$

$$N_3 = \lambda_1 a_3 + \lambda_2 a_1 + \lambda_3 a_2$$

d'où, en comparant aux valeurs précédentes :

$$\mu_1 = \lambda_3, \quad \mu_2 = \lambda_1, \quad \mu_3 = \lambda_2$$

$$\nu_1 = \lambda_2, \quad \nu_2 = \lambda_3, \quad \nu_3 = \lambda_1.$$

Il vient ainsi :

$$N_1 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$$

$$N_2 = \lambda_3 a_1 + \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_3$$

$$N_3 = \lambda_2 a_1 + \lambda_3 a_2 + \lambda_1 a_3$$

D'autre part, une rotation $\frac{\pi}{2}$ autour de Ox ne peut modifier ni a_1 ni N_1 ; cette rotation permutant a_2 avec a_3 , il faut que N_1 renferme symétri-

quement ces deux quantités, et que par conséquent λ_2 soit égal à λ_3 . On a donc en définitive:

$$N_1 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 (a_2 + a_3)$$

$$N_2 = \lambda_1 a_2 + \lambda_2 (a_3 + a_1)$$

$$N_3 = \lambda_1 a_3 + \lambda_2 (a_1 + a_2)$$

Nous poserons $\lambda_2 = -\lambda$ et $\lambda_2 - \lambda_1 = 2\mu$. Rappelons en outre que la dilatation cubique, soit θ , est égale à $a_1 + a_2 + a_3$. Les expressions précédentes prennent ainsi la forme:

$$-N_1 = \lambda\theta + 2\mu a_1$$

$$-N_2 = \lambda\theta + 2\mu a_2$$

$$-N_3 = \lambda\theta + 2\mu a_3$$

et l'équation $N_1 x^2 + N_2 y^2 + N_3 z^2 = 1$ de la surface des tensions devient:

$$(2) \quad \lambda\theta(x^2 + y^2 + z^2) + 2\mu(a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2) = 1$$

Les deux surfaces (1) et (2) se coupent suivant une ligne sphérique. Il est facile de voir, en outre, qu'elles admettent les mêmes plans cycliques, représentés par les équations telles que: $(a_1 - a_3)x^2 + (a_2 - a_3)z^2 = 0$.

Supposons à l'ensemble de ces deux surfaces une rotation arbitraire autour du centre commun. La fonction $a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2$ se change en $2\Phi = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + 2b_1 yz + 2b_2 zx + 2b_3 xy$. La fonction $S = x^2 + y^2 + z^2$ ne change pas. Le premier membre de (2) doit se transformer en: $2\Psi = N_1 x^2 + N_2 y^2 + N_3 z^2 + 2T_1 yz + 2T_2 zx + 2T_3 xy$.

Il faut donc identifier 2Ψ avec $\lambda\theta S + 2\mu\Phi$, et l'on trouve ainsi:

Mécanique (1^{re} D^o) 1906-1907. - 128^e feuille.

$$(3) \quad \begin{array}{ll} -N_1 = \lambda \theta + 2 \mu a_1 & -T_1 = 2 \mu b_1 \\ -N_2 = \lambda \theta + 2 \mu a_2 & -T_2 = 2 \mu b_2 \\ -N_3 = \lambda \theta + 2 \mu a_3 & -T_3 = 2 \mu b_3 \end{array}$$

Celles sont les relations entre les déformations et les tensions d'un élément isotrope. On voit qu'elles renferment seulement deux paramètres λ et μ , dont les dimensions sont les mêmes que celles d'une tension (quotient d'une force par une surface) c'est-à-dire $ML^{-1}T^{-2}$. Ces paramètres, qui dépendent de la nature physique de l'élément considéré, s'appellent les coefficients de Lamé. Quand le corps est homogène et isotrope, les équations (3) s'appliquent, en chaque point du corps, les coefficients λ et μ gardant partout les mêmes valeurs.

La méthode que nous avons suivie est celle de Lamé. Elle dispense de toute hypothèse sur la nature des actions moléculaires, mais elle suppose l'existence de l'état dit naturel pour lequel toutes les tensions intérieures sont nulles (1).

432.- Longtemps avant Lamé, Cauchy a traité le même problème en supposant le corps formé de points matériels tels que l'action réciproque de deux points soit dirigée suivant la droite qui les réunit et dépende uniquement de la distance. Il n'est point nécessaire alors d'admettre l'existence de l'état naturel. On arrive aux mêmes équations, mais on trouve alors que λ est égal à μ .

On a cherché à vérifier expérimentalement si les deux coefficients de Lamé sont égaux. Il paraît

(1) Au lieu d'admettre l'existence de l'état naturel, supposons que le corps soit dans un état S_0 qui soit partout le même et dans toutes les directions. L'effort \vec{T} qui, dans l'état S_0 , s'exerce en P sur une petite face do est indépendant de l'orientation de l'élément, normal à cet élément, et est le même quel que soit P. On peut répéter tout le raisonnement du n° 431 en substituant l'état S_0 à l'état naturel.

établi qu'avec les corps très rigides, la différence entre λ et μ est d'autant moindre que l'on approche davantage de l'isotropie parfaite. Au contraire, avec les corps facilement déformables, tels que les corps gélatineux, la valeur de λ surpasse beaucoup celle de μ , et il ne saurait en être autrement: Car un fluide parfait est un cas limite d'un corps isotrope, et dans ce cas limite T_1, T_2, T_3 sont nuls pour toutes valeurs de b_1, b_2, b_3 , d'où $\lambda \geq 0$ et $\mu = 0$.

Chapitre IV.

Equilibre élastique d'un corps isotrope.

433.- Equations de l'équilibre.

Nous supposerons désormais que le corps considéré est partout isotrope et de même nature. Les coefficients λ, μ sont deux constantes données, les mêmes dans tout le corps; la densité du corps à l'état naturel est aussi la même partout.

Le corps étant supposé en équilibre dans un état de déformation voisin de l'état naturel, écrivons les équations d'équilibre; à savoir les équations (9) du n° 421 :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} = \rho X, \\ \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} = \rho Y, \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} = \rho Z. \end{cases}$$

Dans ces équations, x, y, z et ρ peuvent être regardés comme les coordonnées et la densité d'un élément P pour l'état naturel [voir la note du n° 428]; ρ est donc une constante donnée.

A ces équations il faut joindre les équations (3) du n° 431 où on remplace les a et les b par leurs valeurs tirées du n° 405 [eq. (2) et (3)]:

$$(2) \quad \begin{cases} -N_1 = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, & -T_1 = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ -N_2 = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, & -T_2 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ -N_3 = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, & -T_3 = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \end{cases} \text{ ou } \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Si nous remplaçons les N, T dans (1) d'après (2), la première équation (1) devient:

$$(3) \quad \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + \rho X = 0,$$

ou (comme $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x}$):

$$(4) \quad (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho X = 0$$

Si nous représentons avec Lamé par ΔF le paramètre différentiel du second ordre d'une fonction F , c'est-à-dire l'expression

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2},$$

l'équation (4) et les deux analogues s'écrivent :

$$(5) \quad \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u + \rho X &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v + \rho Y &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w + \rho Z &= 0 \end{aligned}$$

Ce sont les équations indéfinies de l'équilibre élastique d'un corps isotrope. L'expression « indéfinies » signifie qu'elles ont lieu en un point quelconque du corps. C'est un système de trois équations aux dérivées partielles du second ordre, dont les fonctions inconnues sont u, v, w et dont les variables sont x, y, z , coordonnées d'un élément ayant la déformation.

434.- Conditions à la surface. - Le corps élastique est en outre soumis, sur sa surface limite, à certaines conditions données qu'on appelle conditions à la surface ou conditions aux limites. Ces conditions peuvent être de formes diverses :

1^o Dans certains problèmes, les déplacements des points matériels de la surface sont donnés à l'avance ; par exemple, ces points sont maintenus immobiles. Dans ces problèmes, les fonctions u, v, w sont données sur la surface limite ; elles s'annulent sur cette surface si les éléments superficiels sont maintenus immobiles.

2^o. - Dans d'autres problèmes, on donne l'effort extérieur élémentaire $\vec{T}^e ds$ qu'on applique à chaque

Mécanique (1^{re} D^m) 1906-1907 - 129^e feuille.

éléments do de la surface limite. Si $\bar{T}do$ est l'effort élémentaire qui s'exerce sur la face intérieure de l'élément superficiel do , nous savons [n° 417] qu'on a :

$$(6) \quad \begin{cases} T_x^e = N_1 \alpha + T_3 \beta + T_2 \gamma \\ T_y^e = T_3 \alpha + N_2 \beta + T_1 \gamma \\ T_z^e = T_2 \alpha + T_1 \beta + N_3 \gamma, \end{cases}$$

où (α, β, γ) sont les cosinus directeurs de la normale à la surface menée vers l'intérieur du corps.

Si dans les équations (6) on remplace les N et les T par leurs expressions (2) en fonction des dérivées partielles de u, v, w , on obtient trois équations aux dérivées partielles que les fonctions u, v, w doivent vérifier.

Quand les conditions aux limites sont définies de cette façon, les forces mX, mY, mZ qui s'exercent (en outre des tensions) sur chaque élément P (de masse m) du corps et les tensions extérieures $\bar{T}^e do$ appliquées aux divers éléments de la surface limite doivent vérifier évidemment les six conditions universelles d'équilibre.

3°.- On peut combiner entre elles les deux espèces de conditions aux limites qui précèdent (1). Par exemple, une partie de la surface limite est maintenue immobile et l'autre partie est soumise à une pression normale constante et donnée.

435.- Caractère unique de la solution.

Les forces mF étant données, c'est-à-dire X, Y, Z étant des fonctions données de x, y, z , et les conditions aux limites étant données, le problème admet-il une solution et une seule ? Autrement dit, les équations (5) et les conditions aux limites définissent-elles un système et un seul de fonctions u, v, w de x, y, z ?

La réponse est affirmative, mais il faut la bien

(1) On peut imaginer beaucoup d'autres formes de conditions aux limites. Par exemple, si S est enfermée dans une enveloppe indéformable parfaitement lisse Σ , la tension extérieure est normale à Σ , et le déplacement d'un élément superficiel est tangent à Σ .

préciser. Le problème admet toujours une solution, et, s'il en admet plusieurs, ces solutions se déduisent de l'une d'entre elles par un simple déplacement d'ensemble dans l'espace. Si donc on ne regarde pas comme distincts deux états d'équilibre qui se déduisent l'un de l'autre par un déplacement d'ensemble, on peut dire que le problème de l'équilibre élastique admet une solution et une seule.

Ce théorème fondamental a été longtemps regardé comme évident au point de vue physique, mais il est indispensable de le démontrer analytiquement. La démonstration générale n'a pu en être donnée que moyennant l'hypothèse

$$\frac{\lambda}{\mu} > -\frac{2}{3}$$

Si $\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{2}{3}$ il est établi que la solution ne peut

être unique quand les conditions aux limites sont de la forme 2°. Enfin, si $\mu > 0$ et $\frac{\lambda}{\mu} < -\frac{2}{3}$, il est

probable que la solution est encore unique.

Dans la théorie ondulatoire de la lumière, on admet que l'éther (en dehors des corps cristallisés) est un milieu élastique isotrope, pour lequel μ est > 0 et $\lambda + 2\mu$ nul : pour l'éther, $\frac{\lambda}{\mu}$ est donc égal à -2 .

Nous admettrons sans démonstration le théorème fondamental, et nous supposerons que λ et μ ont des valeurs telles qu'il ne se trouve pas en défaut. Il en résulte que si, par un procédé quelconque, on a découvert des fonctions u, v, w de x, y, z vérifiant dans le corps les équations indéfinies (5), et satisfaisant aux conditions aux limites, ces fonctions définissent sûrement la solution du problème. Toute autre solution, s'il en existe, se déduit de celle-là par un certain déplacement d'ensemble. Dans le cas où les conditions aux limites sont de la forme 1° [les déplacements sont donnés sur la frontière], la solution est rigoureusement unique.

On peut dire, si on veut, qu'à des forces $m\bar{F}$ données et à des conditions aux limites données, correspond un système et un seul de fonctions $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, définissant la déformation du corps en équilibre.

436.- Superposition des états d'équilibre. - Si on connaît un état d'équilibre $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$ correspondant aux forces $m\bar{F}$ et un état d'équilibre $u_1(x, y, z), v_1(x, y, z), w_1(x, y, z)$ correspondant aux forces $m\bar{F}_1$, il est évident (d'après la forme linéaire des équations d'équilibre), que la déformation résultante $u+u_1, v+v_1, w+w_1$ définit un état d'équilibre correspondant aux forces $m(\bar{F}+\bar{F}_1)$.

Sur la surface limite Σ , chaque déplacement dans la déformation résultante, est la somme géométrique des déplacements dans chaque déformation composante, et la tension extérieure sur chaque élément de Σ est la résultante des deux tensions extérieures qui correspondent aux deux états d'équilibre qu'on superpose.

La règle s'étend évidemment à la superposition d'un nombre quelconque d'états d'équilibre.

Considérons, par exemple, un solide isotrope dont la surface limite est maintenue immobile et qui est en équilibre dans un certain état S' sous l'action de forces $m\bar{F}$ et de certaines tensions extérieures. Appliquons au solide d'autres forces $m\bar{F}_1$ (en outre des forces $m\bar{F}$), sa surface limite étant toujours maintenue immobile. Comment déterminerons-nous le nouvel état d'équilibre S'' ? Imaginons le corps à l'état naturel, sa surface maintenue immobile et appliquons-lui les forces $m\bar{F}_1$: soit (u_1, v_1, w_1) sa déformation dans l'état d'équilibre correspondant. Pour déterminer l'état d'équilibre cherché S'' , il suffit d'effectuer sur le solide, à partir de l'état S' , la déformation (u_1, v_1, w_1) .

437.- Equation de la dilatation cubique.

Les équations indéfinies (5) différenciées respectivement

par rapport à x, y, z donne, en ajoutant :

$$(\lambda + \mu) \Delta \theta + \mu \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \frac{\partial \Delta w}{\partial z} \right) + \rho \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right)$$

D'ailleurs, si l'on se reporte à la définition de θ , on trouve aisément :

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \frac{\partial \Delta w}{\partial z} = \Delta \theta$$

et il vient ainsi :

$$(\lambda + 2\mu) \Delta \theta + \rho \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) = 0$$

équation différentielle renfermant l'unique inconnue θ .

Dans le cas de l'éther ($\lambda + 2\mu = 0$), $\Delta \theta$ disparaît,

et il reste $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$. L'équilibre de

l'éther n'est possible que si les forces extérieures vérifient cette relation.

438. - Fonction des déplacements.

Il peut arriver que les déplacements u, v, w soient les dérivées partielles d'une fonction φ des coordonnées. On dit alors qu'il y a une fonction des déplacements.

Si l'on pose :

$$u = \frac{d\varphi}{dx} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

l'on a :

$$\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi$$

et $\Delta u = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial x}$

de même :

$$\Delta v = \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \Delta w = \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

Mécanique (1^{re} ann.) 1906-1907 - 130^e feuille.

518.

Les équations (5) du n° 433 deviennent ainsi :

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + pX = 0 \\ (7) \quad & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + pY = 0 \\ & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + pZ = 0 \end{aligned}$$

Elles sont tout-à-fait analogues à celles de l'équilibre d'un fluide homogène, la pression p étant remplacée par $-(\lambda + 2\mu)\theta$.

On déduit des formules (7)

$$(8) \quad (\lambda + 2\mu) d\theta + p(X dx + Y dy + Z dz) = 0$$

Cette équation exprime que $X dx + Y dy + Z dz$ est la différentielle totale d'une fonction de x, y, z , autrement dit qu'il y a une fonction des forces extérieures. Soit U cette fonction, la dilatation cubique θ vérifie la relation :

$$(\lambda + 2\mu) d\theta + p dU = 0$$

d'où :

$$\theta = \frac{l - pU}{\lambda + 2\mu}, \quad l \text{ désignant une constante arbitraire.}$$

La dilatation cubique est constante sur chaque surface de niveau.

La fonction θ étant ainsi définie, la fonction φ des déplacements est donnée par l'équation :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \theta$$

Quant aux conditions aux limites (6), elles prennent ici la forme :

$$T_e^x = \lambda \theta \alpha + 2\mu \left(\alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \right)$$

$$T_e^y = \lambda \theta \beta + 2\mu \left(\alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \right)$$

$$T_e^z = \lambda \theta \gamma + 2\mu \left(\alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} + \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right)$$

Quand le corps n'est soumis qu'à ses tensions intérieures et aux tensions extérieures, on a : $X \equiv Y \equiv Z \equiv 0$ et les équations précédentes expriment alors que la dilatation cubique est constante, soit $\theta = K$; φ satisfait l'équation $\Delta \varphi = K$.

On peut ramener au cas précédent le cas en apparence plus général où la rotation élémentaire $\bar{\omega}$ ne serait pas nulle, mais serait dans tout le solide équipollente à elle-même. Il suffit en effet d'imprimer tout d'abord au solide la rotation d'ensemble $\bar{\omega}$ pour que les nouveaux déplacements amenant le solide de sa nouvelle position à la position finale d'équilibre aient lieu sans rotation moléculaire.

Remarquons que s'il existe une fonction φ des déplacements, les composantes de la rotation élémentaire sont nulles [n° 406]; il existe donc alors, en chaque point, trois directions rectangulaires qui restent parallèles à elles-mêmes.

Dans le cas de l'éther, $\lambda + 2\mu$ étant nul, l'équation (8) montre que l'existence d'une fonction des déplacements est impossible à moins que X, Y, Z ne soient nuls partout.

Chapitre V.-

Applications.

439.- Remarque sur les forces élastiques.

Quand le corps considéré est un solide élastique, une petite déformation du corps engendre des variations considérables des tensions intérieures. Ceci revient à dire, dans le cas d'un corps isotrope, que les coefficients λ et μ ont de très grandes valeurs. Considérons, par exemple, un solide élastique pesant en équilibre sur un plan horizontal fixe : si la pesanteur était nulle, le corps serait à l'état naturel. En réalité, son état diffère de l'état naturel, mais d'une façon inappréciable ; la déformation qui engendre des tensions capables de contrebalancer la pesanteur échappe à toute mesure. Une déformation petite mais appréciable engendre des tensions considérables relativement à la pesanteur.

Dans la plupart des applications, on étudie l'équilibre par rapport à la terre d'un solide élastique pesant, soumis à des tensions extérieures assez fortes pour lui imposer des déformations sensibles : d'après ce qui précède, il est loisible de négliger la pesanteur, c'est-à-dire de la regarder comme nulle, quand on traite des applications de ce genre. C'est ce que nous ferons dans les exemples qui sont suivis.

Dans ces exemples, nous déterminerons synthétiquement un état d'équilibre et nous vérifierons qu'il satisfait aux conditions imposées.

440.- Compression normale et uniforme d'un corps isotrope :

Considérons un corps isotrope limité par une surface Σ : supposons qu'il ne soit soumis à d'autres forces que ses tensions intérieures et à des pressions normales $\pi d\sigma$ appliquées aux divers éléments $d\sigma$ de Σ , π étant le même pour tous les éléments de Σ . Ce serait le cas d'un solide isotrope (non pesant) plongé dans un gaz à une pression donnée. Il est évident que, si on connaît un état d'équilibre, le corps après un transport d'ensemble dans l'espace est encore dans un état d'équilibre répondant aux conditions imposées.

Considérons la déformation :

$$u = -ax, \quad v = -ay, \quad w = -az,$$

a désignant une constante. Elle admet une fonction des déplacements, et la dilatation cubique θ est égale à $-3a$. Les équations indéfinies étant ainsi satisfaites, les valeurs des tensions sont :

$$N_1 = -\lambda\theta - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = -(3\lambda + 2\mu)a = N_2 = N_3,$$

$$T_1 = -\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0 = T_2 = T_3$$

La surface directrice [n° 423] est donc une sphère, et chaque élément de surface intérieure au corps subit sur une face un effort normal à cette face, le même en tout point quelle que soit l'orientation de la face, et qui est une pression si $(3\lambda + 2\mu)a$ est positif, (une traction dans le cas contraire). Ceci ayant lieu notamment pour la face interne des éléments $d\sigma$ de Σ , on croit que les conditions aux limites sont remplies si on pose : $\pi = (3\lambda + 2\mu)a$, c'est-à-dire si on fait $a = \frac{\pi}{3\lambda + 2\mu}$. Le problème est ainsi résolu⁽¹⁾.

La dilatation cubique $\theta = -3a = -\frac{3\pi}{3\lambda + 2\mu}$ est négative

(1) On voit que la solution du problème est en défaut pour la valeur exceptionnelle déjà signalée de $\frac{\lambda}{\mu}$, à savoir $\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{2}{3}$.

522.

si $3\lambda + 2\mu > 0$. Il y a donc, dans ce cas, contraction. Le corps se contracte, dans la déformation précédente, en restant homothétique à lui-même, le rapport d'homothétie étant $1 - a$; le volume se contracte dans le rapport $(1 - 3a)$; la contraction par unité de volume est

$$3a = \frac{3P}{3\lambda + 2\mu} = cP.$$

Le coefficient $c = \frac{3}{3\lambda + 2\mu}$ s'appelle le coefficient de compressibilité.

Dans le cas de l'éther ($\lambda + 2\mu = 0$, $\mu > 0$), $c = \frac{3}{3\lambda + 2\mu} = -\frac{3}{4\mu} < 0$. Si l'éther pouvait être maintenu en équilibre sous une pression extérieure donnée, il se dilaterait quand cette pression croîtrait.

441. Extension longitudinale d'un prisme.

Un solide prismatique est sollicité sur chacune de ses bases par une traction normale dont la valeur, rapportée à l'unité de surface, est F . Les faces latérales ne sont soumises à aucune force. On demande l'état d'équilibre (1).

Prenons pour origine le centre de gravité et pour axe des z une parallèle aux arêtes. Posons, en appelant a et c deux constantes.

$$u = -ax \quad v = -ay \quad w = -cz$$

La dilatation cubique a la valeur constante $\theta = c - 2a$. Les équations indéfinies étant ainsi vérifiées, les tensions T sont identiquement nulles. Les tensions normales N sont :

$$\begin{aligned} -N_1 = -N_2 &= (c - 2a)\lambda - 2a\mu \\ -N_3 &= (c - 2a)\lambda + 2a\mu \end{aligned}$$

(1) Comme dans l'exemple précédent, un état d'équilibre resté un état d'équilibre si on transporte le corps dans l'espace, les tractions F restant normales aux bases et gardant leur valeur.

Si nous déterminons a et c de façon à avoir partout $N_1 = N_2 = 0$ et $N_3 = F$, les conditions à la surface seront également remplies. On trouve ainsi :

$$c = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} F \quad a = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} F$$

Celle est la solution du problème.

Soit $\lambda > 0$, $\mu > 0$; a est alors négatif, et c positif; il se produit à la fois une contraction uniforme, parallèlement aux bases, et une extension parallèlement aux arêtes. L'expérience est irréalisable: car, pour produire la traction sur les bases, on est obligé de saisir celles-ci dans des étourneaux qui leur imposent des contractions latérales qui ne sont pas nulles comme nous l'avons supposé. Néanmoins si le prisme est très allongé, on peut admettre que les efforts perturbateurs deviennent insensibles à une certaine distance de chaque base et que le prisme, dans sa partie moyenne, se comporte comme nous l'avons indiqué. Le rapport de la contraction transversale à la dilatation longitudinale est

$$\frac{a}{c} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Pour $\lambda = \mu$, ce rapport est égal à $\frac{1}{4}$, résultat trouvé par Poisson.

Le coefficient d'élasticité e est, par définition, l'inverse de l'allongement produit sur l'unité de longueur du prisme par une traction F égale à l'unité. Cet allongement s'obtient en faisant $L = 1$, $F = 1$, ce qui

$$\text{donne: } e = \frac{1}{c} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

Nous avons trouvé (n° 440) que le coefficient de compressibilité est $\beta = \frac{3}{3\lambda + 2\mu}$. On a donc: $e\beta = \frac{3\mu}{\lambda + \mu}$.

Si l'on pouvait mesurer e et β , on aurait deux équations faisant connaître λ et μ . Malheureusement le coefficient de compressibilité n'est pas direc-

tement mesurable, à cause de la difficulté d'apprécier la variation de volume d'un corps.

Si on comprimait le prisme, c'est-à-dire si on changeait le sens des forces F , a et c changeraient de signe.

442.- Traitons un problème analogue en tenant compte de la pesanteur. Imaginons un solide cylindrique S limité par deux sections droites et enfermé dans un tube vertical indéformable de même section parfaitement lisse; le tube est fermé par une base horizontale, et est ouvert par le haut et en communication avec l'atmosphère. On demande l'état d'équilibre du solide S .

Sur sa face supérieure, le solide est soumis à une pression normale et constante p (pression atmosphérique). Sur sa surface latérale et sur sa base, le déplacement du corps est tangent et la tension extérieure est normale à la surface limite. Telles sont les conditions aux limites auxquelles est assujéti le corps.⁽¹⁾

Cherchons s'il existe une solution qui admette une fonction des déplacements. On doit avoir alors [n° 438]

$$\theta = \frac{\rho g z}{\lambda + 2\mu} + c, \quad (c \text{ constante arbitraire}).$$

Posons :

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\rho g z}{\lambda + 2\mu} + c;$$

$$\text{et} \quad w = \frac{\rho g}{\lambda + 2\mu} \frac{z^2}{2} + cz + d \quad (d \text{ constante arbitraire}).$$

Soit $z = 0$ la base du corps, h sa hauteur. Pour $z = 0$, w est nul, donc $d = 0$. D'autre part,

$$N_1 = N_2 = -\lambda \left[\frac{\rho g z}{\lambda + 2\mu} + c \right], \quad N_3 = -(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\rho g z}{\lambda + 2\mu} + c \right)$$

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0.$$

En un point de la surface limite, si α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale menée vers l'intérieur,

(1) Ces conditions aux limites sont d'une nature plus compliquée que les conditions 1°, 2° ou 3° du n° 434.

Les composantes de l'effort extérieur sont : $\alpha N_1, \beta N_2, \gamma N_3$.
 Sur la face supérieure $z = h$, α et β sont nuls, $\gamma = -1$; la tension extérieure est verticale et égale à $\rho g h + c(\lambda + 2\mu)$ (si on la compte positivement dans le sens Oz); d'où la condition :

$$-p_a = \rho g h + c(\lambda + 2\mu), \text{ ou } -c = \frac{p_a + \rho g h}{\lambda + 2\mu};$$

sur la surface latérale les déplacements sont verticaux, et (comme $\gamma = 0$) la tension extérieure est une pression normale à la surface. Sur la base, la tension extérieure est une pression égale à $p_a + \rho g h$.

L'état d'équilibre est à rapprocher de celui d'un liquide de densité ρ , pesant, enfermé dans le tube :

$\frac{-\theta}{\lambda + 2\mu}$ jouant le rôle de la pression [n° 438].

443- Equilibre d'une couche cylindrique.

Un solide est limité par deux cylindres circulaires de même axe et par deux bases normales à cet axe. Les surfaces cylindriques sont soumises à des pressions uniformes P_0 (pour la surface intérieure) et P_1 (pour la surface extérieure); les bases sont soumises à la même traction normale F . Equilibre du corps.

Par raison de symétrie, le déplacement de chaque point s'effectue dans le plan méridien contenant ce point.

Prends pour origine le centre de gravité G , centre de figure), pour axe des z l'axe de révolution et essayons de représenter le déplacement par les formules :

$$u = \varepsilon \frac{x}{r} \quad v = \varepsilon \frac{y}{r} \quad w = cz$$

dans lesquelles ε désigne une fonction de la distance r à l'axe Gz et c , une constante. Comme r^2 est égal à $x^2 + y^2$, l'on a :

$$u dx + v dy + w dz = \varepsilon dr + cz dz$$

Il y a d'après cela une fonction des déplacements, qui est $\int \varepsilon dr + \frac{1}{2} cz^2$. On trouve sans peine

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2}{r^2} \frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{y^2}{r^3} \varepsilon$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{y^2}{r^2} \frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{x^2}{r^3} \varepsilon, \quad \frac{dw}{dz} = c$$

d'où :

$$\theta = \frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{\varepsilon}{r} + c$$

L'expression $\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{\varepsilon}{r}$ doit donc être égale à une constante $2a$, ce qui donne : $\varepsilon = ar + \frac{b}{r}$, avec une nouvelle constante b .

Ayant ainsi u, v, w on obtient pour les tensions :

$$-N_1 = \lambda(2a+c) + 2\mu \left(\frac{x^2}{r^2} \frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{y^2}{r^3} \varepsilon \right) \quad T_1 = 0$$

$$-N_2 = \lambda(2a+c) + 2\mu \left(\frac{y^2}{r^2} \frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{x^2}{r^3} \varepsilon \right) \quad T_2 = 0$$

$$-N_3 = \lambda(2a+c) + 2\mu c \quad -T_3 = 2\mu \frac{xy}{r^2} \left(\frac{d\varepsilon}{dr} - \frac{\varepsilon}{r} \right)$$

Si l'on considère en particulier un point situé dans le plan xOz , x est égal à r , y est nul et il vient :

$$-N_1 = \lambda(2a+c) + 2\mu \frac{d\varepsilon}{dr} \quad T_1 = 0$$

$$-N_2 = \lambda(2a+c) + 2\mu \frac{\varepsilon}{r} \quad T_2 = 0$$

$$-N_3 = \lambda(2a+c) + 2\mu c \quad T_3 = 0$$

ou bien, en remplaçant ε par sa valeur :

$$-N_1 = 2(\lambda + \mu)a + \lambda c - \frac{2\mu b}{r^2}$$

$$-N_2 = 2(\lambda + \mu)a + \lambda c + \frac{2\mu b}{r^2}$$

$$-N_3 = 2\lambda a + (\lambda + 2\mu)c$$

Soient r_0, r_1 les rayons des cylindres ($r_1 > r_0$). On doit avoir pour $r = r_0$, $N_1 = +P_0$ et pour $r = r_1$, $N_1 = +P_1$. En outre, la valeur constante $-N_2$ doit être égale à la traction F exercée sur les bases. De là les trois conditions à la surface:

$$(1) \quad \begin{cases} 2(\lambda + \mu)a + \lambda c - \frac{2\mu b}{r_0^2} = -P_0 \\ 2(\lambda + \mu)a + \lambda c - \frac{2\mu b}{r_1^2} = -P_1 \\ 2\lambda a + (\lambda + 2\mu)c = F \end{cases}$$

Ces équations déterminent⁽¹⁾ a, b, c et toutes les conditions du problème sont ainsi remplies. Des deux premières équations (1) on tire:

$$(2) \quad 2(\lambda + \mu)a + \lambda c = \frac{P_0 r_0^2 - P_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \quad 2\mu b = \frac{(P_0 - P_1) r_0^2 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}$$

et ces valeurs substituées dans les expressions de N_1, N_2 donnent:

$$-N_1 = \frac{P_0 r_0^2 - P_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} - \frac{(P_0 - P_1) r_0^2 r_1^2}{(r_1^2 - r_0^2) r^2} = - \frac{P_0 r_0 (r_1^2 - r^2) + P_1 r_1 (r^2 - r_0^2)}{(r_1^2 - r_0^2) r^2}$$

$$-N_2 = \frac{P_0 r_0^2 - P_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} + \frac{(P_0 - P_1) r_0^2 r_1^2}{(r_1^2 - r_0^2) r^2} = \frac{P_0 r_0^2 (r_1^2 + r^2) - P_1 r_1^2 (r^2 + r_0^2)}{(r_1^2 - r_0^2) r^2}$$

Comme $r_0 < r < r_1$, la valeur de N_1 est toujours positive et correspond à une pression. N_2 , au contraire, peut devenir négatif et correspond alors à une traction qui tend à produire la fissuration suivant un plan méridien. Si P_0 surpasse P_1 le maximum de $-N_2$ a lieu pour $r = r_0$.

Supposons, pour simplifier, que la pression extérieure

(1) La dernière équation (1) et la première équation (2) donnent a et c ; mais leur déterminant est $2\mu(3\lambda + 2\mu)$. La solution s'évanouit donc si $\mu = 0$ ou si $\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{3}{2}$ [valeur exceptionnelle déjà signalée].

528.

P_1 soit négligeable en présence de la pression intérieure P_0 comme cela arrive dans le tir d'une pièce d'artillerie.

On a alors : $N_2 = - \frac{P_0 r_0^2 (r_1^2 + r^2)}{(r_1^2 - r_0^2) r^2}$. Cette valeur de N_2 est constamment négative. Sa valeur absolue maxima est $P_0 \frac{r_1^2 + r_0^2}{r_1^2 - r_0^2}$ et les applications numériques montrent que cet effort peut dépasser les limites admissibles. C'est ainsi qu'on est conduit à fretter les canons.

444.- Principe du frettage.

Pour faire comprendre l'utilité du frettage, considérons un tube composé, obtenu de la manière suivante. On prend un premier tube de rayons R_0 et R_1 et un second tube de rayons R_1' et R_2 , le rayon intérieur R_1' du second tube étant légèrement inférieur au rayon extérieur R_1 du premier. On chauffe le second tube jusqu'à ce que R_1' devienne au moins égal à R_1 et l'on introduit le premier tube dans le second. Après refroidissement, le second tube serre énergiquement le premier. Soient à ce moment r_0 et r_1 les rayons du premier tube, r_1 et r_2 ceux du second. Soit P_0 la pression à l'intérieur du premier tube et P_1 la pression des deux tubes l'un sur l'autre. Supposons, comme tout à l'heure, que la pression extérieure soit négligeable. Les pressions sur les parois sont P_0 et P_1 pour le tube intérieur, P_1 et zéro pour le tube extérieur. Soit L la limite de traction que nous ne voulons dépasser en aucun point du tube composé. Nous écrivons que pour chacun des deux tubes, N_2 est égal à $-L$ dans la partie la plus fatiguée, c'est-à-dire près de la surface intérieure.

Nous obtenons ainsi les équations

$$\frac{P_0 (r_1^2 + r_0^2) - 2P_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} = L$$

$$\frac{P_1 (r_2^2 + r_1^2)}{r_2^2 - r_1^2} = L$$

On en tire :

$$r_1^2 = \frac{(L+P_0) r_0^2}{L+2P_1-P_0} = \frac{(L-P_1) r_2^2}{L+P_1}$$

d'où :

$$\frac{r_2^2}{r_0^2} = \frac{(L+P_0)(L+P_1)}{(L+2P_1-P_0)(L-P_1)}$$

et cette formule fait connaître le rayon extérieur r_2 du tube composé, connaissant le rayon intérieur r_0 , ainsi que la pression de serrage P_1 et la fatigue maximum L .

Pour un tube simple, soumis à la même fatigue L , le rapport des rayons serait $\frac{L+P_0}{L-P_0}$. On voit que le frettage diminue ou augmente l'épaisseur totale correspondant à une fatigue donnée suivant que l'expression $\frac{(L-P_0)(L+P_1)}{(L+2P_1-P_0)(L-P_1)} = x$ est inférieure ou supérieure à l'unité.

Supposons d'abord $L > P_0$ et faisons croître la pression de serrage P_1 à partir de zéro. Pour $P_1 = 0$, on a $x = 1$: le tube composé se comporte comme un tube simple de même épaisseur. Entre $P_1 = 0$ et $P_1 = P_0$, la valeur de x est inférieure à l'unité. Pour $P_1 = P_0$, le rapport x redouble et devient égal à un. Puis il augmente indéfiniment, et est infini pour $P_1 = L$.

La formule $r_1^2 = \frac{L-P_1}{L+P_1} r_2^2$ montre d'ailleurs qu'on ne peut admettre pour P_1 des valeurs supérieures à L . Le frettage n'est donc avantageux que pour les pressions de serrage inférieures à P_0 .

Supposons maintenant $L < P_0$. Dans ce cas, il est impossible, avec un tube simple, d'éviter une fatigue supérieure à L . Le tube composé permet au contraire d'obtenir ce résultat tant que $L + 2P_1 - P_0$ reste positif ce qui exige une pression de serrage supérieure à $\frac{P_0 - L}{2}$.

Comme d'autre part P_1 ne doit pas atteindre L , il faut pour que le problème soit possible que l'on ait $\frac{P_0 - L}{2} < L$,

Mécanique (1^{re} Sem) 1906-1907 - 133^e feuille.

d'où $P_0 < 3L$. Si cette condition n'est pas remplie, il faut avoir recours à un tube composé de plus de deux tubes simples. Nous ne pousserons pas plus loin cette analyse.

445.- Il arrive souvent, dans l'emploi des tubes cylindriques de faible épaisseur, qu'on désire simplement connaître la valeur moyenne de l'effort N_2 exercé sur les méridiens. Cette valeur moyenne n est

$$\frac{1}{r_1 - r_0} \int_{r_0}^{r_1} N_2 dr$$

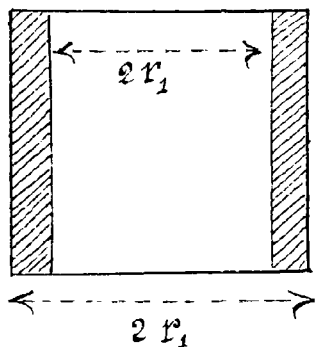
Remplaçons N_2 par son expression :

$$N_2 = \frac{P_0 r_0^2 - P_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} + \frac{(P_0 - P_1) r_0^2 r_1^2}{(r_1^2 - r_0^2) r^2}$$

et effectuons l'intégration. Nous avons :

$$n = \frac{P_0 r_0^2 - P_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} + \frac{(P_0 - P_1) r_0 r_1}{r_1^2 - r_0^2} = \frac{P_0 r_0 - P_1 r_1}{r_1 - r_0}$$

La statique élémentaire permet d'obtenir immédiatement ce résultat. Considérons en effet la portion du

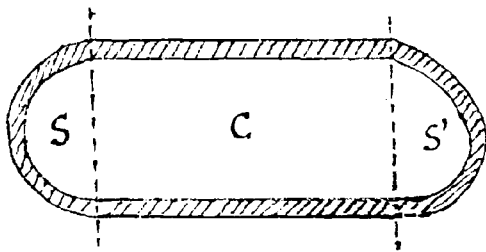


tube comprise entre deux sections droites, distantes de l'unité et un plan méridien. Érigons que la somme algébrique des forces normales au méridien est nulle. L'aire comprise dans le plan méridien est $2(r_1 - r_0)$ et la somme des tensions qu'elle supporte est $2n(r_1 - r_0)$. La pression extérieure P_1 donne $-2P_1 r_1$. On a donc l'équation

$2n(r_1 - r_0) + 2P_1 r_1 - 2P_0 r_0 = 0$, qui concorde avec la précédente. C'est une vérification de la théorie de l'élasticité. Les calculs élémentaires de ce genre sont d'un usage fréquent dans l'art des constructions ; ils fournissent des valeurs moyennes de forces élastiques existant sur certaines

surfaces, mais ne donnent aucune indication sur la répartition de ces forces et sur leurs valeurs extrêmes.

4.46.- Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que le tube supporté à ses extrémités des tractions normales et uniformes. En pratique, cette condition n'est jamais remplie. Soit par exemple une chaudière formée d'un cylindre terminé par deux calottes hémisphériques.



Celles-ci, sous l'action de la pression intérieure, tendent à se déformer, et il n'est pas permis de dire que, dans leurs plans de jonction avec le tube cylindrique C, les actions mutuelles se répartissent uniformément. En réalité le problème est d'une grande complication.

Mais, si la chaudière est suffisamment allongée et d'une faible épaisseur, on admet que dans la région moyenne les sections droites supportent sensiblement des tractions uniformes, ce qui rend applicables pour cette région les formules auxquelles nous sommes parvenus.

4.47.- Torsion d'un cylindre.

Étant donné un cylindre de rayon R , faisons coïncider son axe avec l'axe Oz et l'une de ses bases avec le plan xoy , puis imaginons une déformation définie par les équations

$$(1) \quad u = -Kyz \quad v = Kxz \quad w = 0$$

dans lesquelles K désigne une très petite constante.

Dans cette déformation chaque section droite se comporte comme un cercle invariable tournant dans son plan autour de son centre, d'un angle égal à Kz . Une parallèle à l'axe située à la distance r de l'axe se transforme en hélice dont le pas est $\frac{1}{Kr}$. Il y a en chaque point

une rotation élémentaire dont les composantes sont, avec les notations habituelles, :

$$p_1 = -\frac{k}{2} x \quad q_2 = -\frac{k}{2} y \quad r_3 = k z .$$

Il n'existe pas de fonction des déplacements.

Les coefficients a_1, a_2, a_3 de la déformation sont nuls et il en est de même, par suite, de la dilatation cubique θ . Les autres coefficients sont :

$$b_1 = \frac{k}{2} x \quad b_2 = -\frac{k}{2} y \quad b_3 = 0$$

Les paramètres différentiels du second ordre $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ sont nuls.

La nullité de ces paramètres et celle de θ montrent que si le cylindre est constitué par une matière isotrope, et si aucune force extérieure n'est appliquée à ses éléments, les équations indéfinies de l'équilibre d'élasticité se trouvent vérifiées. Pour que l'équilibre ait lieu effectivement, il suffit d'appliquer, sur les bases et sur la surface latérale, des forces que nous allons calculer.

Commençons par déterminer les tensions intérieures. Les tensions normales N_1, N_2, N_3 sont nulles. Il en est de même de T_3 . Les valeurs de T_1 et T_2 sont :

$$(2) \quad T_1 = -k \mu x \quad T_2 = +k \mu y$$

La surface latérale a pour équation $x^2 + y^2 = R^2$. En un point de cette surface, les cosinus directeurs α, β, γ de la normale intérieure vérifient les deux relations $\gamma = 0$ et $\alpha y - \beta x = 0$. On en déduit, pour les composantes de la force extérieure appliquée à l'élément superficiel :

$$T_x^e = N_1 \alpha + T_3 \beta + T_2 \gamma = 0$$

$$T_y^e = T_3 \alpha + N_2 \beta + T_1 \gamma = 0$$

$$T_z^e = T_2 \alpha + T_1 \beta + N_3 \gamma = 0$$

La surface latérale n'est donc soumise à aucune action extérieure.

Pour la base inférieure ($Z = 0$), les formules (1) donnent partout un déplacement nul. On peut réaliser

cette condition en appliquant à cette base des forces de liaison convenables : par exemple, en la reliant invariablement à un plan rigide et immobile.

Pour la base supérieure, on doit faire $\alpha = \beta = 0$ et $\gamma = 1$. Les formules (3) donnent alors :

$$T_x^e = -K \mu y \quad T_y^e = K \mu x \quad Z = 0.$$

La force $T^e d\sigma$ appliquée à un élément $d\sigma$ de cette base situé à la distance r du centre doit donc être dirigée dans le plan de la base, perpendiculaire au rayon et égale à $K \mu r d\sigma$. Pour deux éléments égaux et diamétralement opposés, ces forces forment un couple. L'ensemble de tous les couples analogues donne un couple résultant qui est situé dans le plan de la base et a pour moment $K \mu \int r^2 d\omega$. L'intégrale $\int r^2 d\omega$ est le moment d'inertie de la section par rapport au centre. Sa valeur est $\frac{\pi}{2} R^4$. Si donc on désigne par M le moment résultant 2 par rapport à Oz des tensions extérieures appliquées à la base supérieure, on a :

$$M = \frac{\pi K \mu R^4}{2},$$

relation qui détermine K une fois donné M .

Toutes les conditions du problème sont ainsi remplies. Cette déformation d'un cylindre sous l'action d'un ensemble de couples appliqué à l'une des bases constitue le phénomène de la torsion. En pratique il serait fort difficile de répartir les forces sur le plan de la base suivant la loi fournie par le calcul. Mais, quelle que soit leur distribution il suffit qu'elles soient statiquement équivalentes à un couple de moment M pour que, dès qu'on s'éloigne un peu de la base, la torsion se produise sensiblement ainsi que l'indiquent les formules (1).

Il y a lieu de remarquer que les tensions développées sur une section droite quelconque ont, comme pour la base libre, les valeurs résultant des formules (2) et sont équivalentes au couple de moment M . Si l'on imagine le cylindre partagé en deux tronçons par l'une de ses sections droites, et si l'on applique à ces

tronçons dans le plan de la section deux couples égaux et contraires de manière à maintenir le contact sans glissement relatif, chaque tronçon se comporte individuellement comme nous l'avons trouvé pour le cylindre complet; le tronçon supérieur se déforme pour son compte et éprouve en outre une rotation d'ensemble égale à celle de la section qui le limite inférieurement. Au lieu de deux tronçons, on peut en considérer un nombre quelconque ^{dont la hauteur par ex. est comparable aux dimensions de la base,} et raisonner de la même façon. On s'explique ainsi que les lois de la torsion puissent, ainsi que l'indique l'expérience, s'étendre sans modification à un fil de longueur indéfinie pour lequel, grâce à la grandeur de Z , la rotation de l'extrémité libre représente plusieurs tours complets.⁽¹⁾ C'est là une remarque que nous allons généraliser dans le no suivant.

Equilibre des fils à torsion ou des tiges de très petite section.

448. - Déformations finies d'un fil ou d'une membrane.

Soit S un corps continu à trois dimensions dont chaque élément subit une déformation infiniment petite qui amène le corps de l'état S_0 à l'état S_1 . La position S_1 du corps diffère très peu de celle du corps à l'état S_0 transportée convenablement dans l'espace.

Considérons au contraire un corps continu à une seule dimension (fil ou tige de petite section); imposons à chaque élément ds du fil un allongement (infiniment petit par rapport à ds), une torsion sur lui-même (de l'ordre de ds ou d'ordre supérieur), enfin une flexion qui modifie sa courbure d'une quantité finie. Dans une telle déformation, la distance r de deux points matériels P, Q de l'élément varie d'une quantité infiniment petite par rapport à r . Chaque élément du système subit donc une déformation infiniment petite; mais l'ensemble du système subit une déformation qui est finie. Par exemple, supposons que le fil primi-

(1) D'une façon précise, si r_1 est le maximum de la distance d'un point de la base à Oz , l'allongement d'un élément ds parallèle à Oz est inférieur à $Kr ds$. La déformation pure de chaque élément de la tige est donc très petite, si r_1 est très petit, lors même que K est fini. A une hauteur finie de la tige [ou du fil] correspond alors une torsion finie.

tigement rectiligne subisse une flexion, qui lui donne la forme d'un arc de cercle L sans tordre ni allonger ou raccourcir ses éléments : quelle que soit la position donnée au fil rectiligne L_0 , la distance des éléments correspondants de L et de L_0 sera finie bien que chaque élément n'ait subi qu'une déformation infinitésimale.

Des remarques analogues s'appliquent aux corps continus à deux dimensions (membranes et plaques).

449. - Reactions intérieures d'une tige de petite section.

Considérons une tige qui, à l'état naturel, est homogène, partout de même nature et forme un cylindre de révolution de très petite section, soit OO' l'axe du cylindre. Après la déformation de la tige, la droite matérielle OO' est devenue une courbe (plane ou gauche) APB . Soit σ

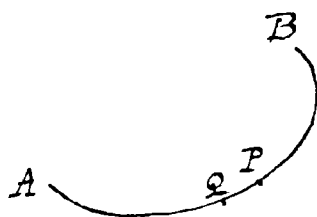


fig. 1.

la section droite en P de la tige APB ; l'élément QP ou ds de la tige, compris entre les deux sections droites P et Q , est soumis, (à l'instant t) sur σ à des forces de contact exercées par la portion PB de la tige. Soit \bar{T} ou \bar{PT} leur somme géométrique, \bar{I} ou \bar{PI} leur moment

résultant par rapport à P . Considérons PQ comme un système matériel : ses forces d'inertie, les forces de contact qu'il subit en P , celles qu'il subit en Q , et les autres forces appliquées aux points matériels de PQ satisfont aux six conditions universelles d'équilibre ; leur somme géométrique est nulle, et leur moment résultant par rapport à Q est nul. Cette dernière condition lorsqu'on peut prendre Q vers P entraîne le résultat suivant :

Soit s l'arc AP compté dans le sens AB ; Pt la tangente menée dans le sens des arcs s croissants. Soit $\bar{P}\mu$ la dérivée géométrique $\frac{d\bar{T}}{ds}$ et \bar{T}_v la composante de

\bar{T} normale à la tige APB : \bar{T}_v est perpendiculaire à $P\mu$, égale en valeur absolue à $\bar{P}\mu$ et de sens tel que le trièdre $Pt\mu v$ soit positif.

Il suit de là que si (à un instant t) on connaît pour chaque valeur de s la composante Θ de \vec{T} tangente à la tige APB et le vecteur \vec{T} , on connaît T_y par la règle précédente.

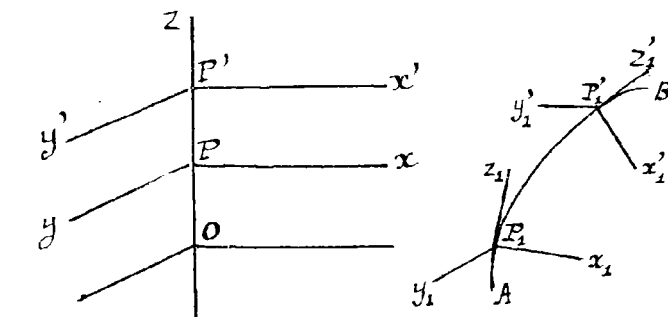
450.- Relations entre les réactions et les déformations -

Nous allons définir Θ et Γ en fonction des déformations de la tige, sans nous préoccuper de T_y .

Considérons la tige à l'état naturel; soit Oz son axe, P et P' deux points matériels situés sur cet axe, le sens PP' étant le sens Oz . Soit Px et Py deux directions matérielles quelconques dans la tige, perpendiculaires entre elles et à Oz ; soit $P'x'$ et $P'y'$ deux directions matérielles parallèles à Px et à Py . Quand la tige se déforme, son axe matériel devient une courbe C , P vient en P_1 , la direction matérielle Pz devient la tangente P_1z_1 à C en P_1 (1). Le trièdre matériel devient $P_1x_1y_1z_1$; le trièdre $P'x'y'z'$ devient $P'_1x'_1y'_1z'_1$. La face $P_1x_1y_1$ par exemple est égale à $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, ε étant très petit; la face $P'_1x'_1y'_1$ est égale à $\varepsilon + \varepsilon'$ ds, ε' étant très petit. Les deux trièdres $P_1x_1y_1z_1$ et $P'_1x'_1y'_1z'_1$ sont donc encore superposables si on néglige les quantités très petites par rapport à ds. Soit \vec{c} ds la rotation infinitésimale qui donne au trièdre $P_1x_1y_1z_1$ l'orientation $P'_1x'_1y'_1z'_1$ et soit p, q, r les composantes de \vec{c} suivant les arêtes de $P_1x_1y_1z_1$. Ceci posé, nous allons définir tout

d'abord trois modes de déformation particulière d'un élément PP' :
 un allongement pur
 une torsion pure et
 une flexion pure.
allongement pur -
 [n° 440]

L'axe de l'élément PP' (regardé comme un petit cylindre) reste rec-



tiligne; les trièdres $Pxyz$ et $P'x'y'z'$ restent trirectangles

(1) Les arcs s de C sont comptés dans le sens P_1z_1 .

- et parallèles ; mais la longueur ds de PP' devient $ds(1+\lambda)$, λ désignant une quantité très petite (positive ou négative). Après la déformation T est nul, et Θ a une valeur Θ_0 proportionnelle à λ [n° 440].

Torsion pure [n° 443] - L'élément PP' reste rectiligne et garde sa longueur ; les trièdres $Pxyz$ et $P'x'y'z'$ restent trirectangles, mais non plus parallèles. La nouvelle orientation de $P'x'y'z'$ se déduit de la nouvelle orientation de $Pxyz$ par une certaine rotation γ ds autour de l'axe Pz de l'élément. Le couple $\bar{\Gamma}$ engendré par cette déformation a son axe Γ_1 dirigé selon Pz et proportionnel à ρ [n° 443]. Si on compte Γ_2 et ρ positivement dans le sens Pz , on a (en grandeur et signe) : $\Gamma_2 = \gamma \rho$, γ désignant un coefficient positif.

Flexion pure - Considérons une déformation de la tige telle que l'axe matériel Oz prenne la forme d'une courbe plane C située dans le plan xOz ou π , et que le trièdre $Pxyz$ reste trirectangle, P_y demeurant perpendiculaire au plan π . La nouvelle orientation $P_1x_1y_1z_1$ de $P'x'y'z'$ se déduit de la nouvelle orientation $P_1x_1y_1z_1$ de $Pxyz$ par une rotation $\frac{ds}{\rho}$ autour d'une droite perpendiculaire au plan π , [$\frac{1}{\rho}$ désignant la courbure de C en P_1].

Le plan du couple $\bar{\Gamma}$ engendré par une telle déformation est, par raison de symétrie, parallèle au plan π ; son moment est proportionnel à $\frac{1}{\rho}$ qui mesure la déformation infiniment petite.

D'une manière générale, une flexion pure de l'élément PP' est une déformation telle 1° que PP' garde sa longueur ; 2° que les deux trièdres $Pxyz$, $P_1x_1y_1z_1$ restent trirectangles ; 3° que l'orientation de $P'x'y'z'$ se déduise de celle de $P_1x_1y_1z_1$ par une rotation autour d'une demi-droite P_1v perpendiculaire à P_1z_1 et à P_1z_1 . Cette droite P_1v est alors la binormale en P_1 à C et la rotation infinitésimale positive autour de la demi-droite P_1v est $\frac{1}{\rho} ds$, ($\frac{1}{\rho}$ courbure de C en P_1). Le couple $\bar{\Gamma}$ engendré par une telle déformation a son axe Γ_2 de sens Pv et égal à $\frac{\alpha}{\rho}$,

α désignant une certaine constante positive ; Θ est nul.

Déformation générale.— Superposons maintenant les trois déformations précédentes ; la déformation résultante ainsi obtenue donne au trièdre trirectangle $P_1 x_1 y_1 z_1$ une position (infiniment voisine) arbitraire par rapport au trièdre $P_1 x_1 y_1 z_1$. Pour obtenir la déformation la plus générale de l'élément PP' , il faudrait combiner cette déformation résultante avec une déformation qui déforme légèrement les trièdres $Pxyz$, $P'x'y'z'$ en les laissant parallèles. Mais nous admettons que cette dernière déformation n'altère pas ⁽¹⁾ la somme géométrique \bar{T} et le moment résultant \bar{F} des forces de contact exercées par la portion BP de la tige sur la portion AP , le long de la section normale σ menée par P .

Conclusions.— En définitive, les réactions engendrées par une déformation infinitésimale quelconque $\gamma PP'$ s'obtiennent [d'après le principe du n° 436] en ajoutant géométriquement les réactions engendrées par les déformations composantes : allongement, torsion et flexion. Autrement dit, on a :

$$\Theta = \Theta_0, \quad \bar{T} = \bar{T}_1 + \bar{T}_2.$$

D'après cela, en chaque point P_1 de la courbe C voisinée par l'axe déformé, construisons le trièdre $P_1 x_1 y_1 z_1$. Ce trièdre est sensiblement trirectangle. L'orientation du trièdre $P_1 x_1 y_1 z_1$ se déduit de celle du trièdre $P_1 x_1 y_1 z_1$ par une rotation infinitésimale $\bar{\omega}$ dont les composantes suivant $P_1 x_1 y_1 z_1$ sont p, q, r . Soit $\bar{\omega}_1$ la composante de $\bar{\omega}$ normale à C ; $\bar{\omega}_1$ est dirigé selon la binormale à C et égale à $\frac{1}{p}$; \bar{T}_1 est dirigé selon $P_1 z_1$ et égal en grandeur et signe à γr ; \bar{T}_2 est dirigé selon $\bar{\omega}_1$ et égal à $\alpha \omega_1 = \frac{\alpha}{p}$.

Les composantes L, M, N de \bar{T} suivant $P_1 x_1 y_1 z_1$ sont :

$$L = \alpha p, \quad M = \alpha q, \quad N = \gamma r,$$

(1) Les forces ordinaires appliquées à une tige (ou à un fil à torsion) ne produisent pas d'ailleurs de telles déformations.

α et γ désignant deux constantes qui ne dépendent que de la nature de la tige et du rayon de sa section. On donne à \bar{T}_1 (composante de \bar{T} tangente à C) le nom de couple de torsion, et à \bar{T}_2 (composante de \bar{T} normale à C) le nom de couple de flexion : la valeur absolue \bar{T}_2 est appelée le moment fléchissant.

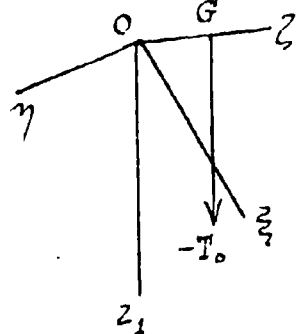
451.- Courbe élastique.-

Nous allons chercher la forme d'équilibre de la tige dans le cas où les seules forces qui s'exercent sur la tige (en outre des réactions intérieures) sont les deux tensions et les deux couples appliqués à ses éléments extrêmes. On donne alors le nom de courbe élastique à la courbe C dessinée par l'axe déformé de la tige en équilibre contraint.

Soit $-\bar{T}_0$ et \bar{T}_1 les deux tensions et $-\bar{\Gamma}_0$ et $+\bar{\Gamma}_1$ les axes des deux couples qui sont appliqués aux deux sections extrêmes A et B de la tige. Puisque la tige est en équilibre, la somme géométrique $\bar{T}_1 - \bar{T}_0$ de toutes ces forces est nulle ; les deux tensions extrêmes \bar{T}_1 et $-\bar{T}_0$ forment donc un couple, et l'axe de ce couple doit être équipollent à $\bar{\Gamma}_0 - \bar{\Gamma}_1$. En particulier, si $\bar{\Gamma}_0$ et $\bar{\Gamma}_1$ sont nuls, \bar{T}_1 et $-\bar{T}_0$ doivent être égaux et directement opposés.

En raisonnant sur la portion AP_1 de la tige [fig. 1], comme sur la tige entière, on voit que \bar{T} est invariable en grandeur, direction et sens tout le long de la tige. La dérivée géométrique $\frac{d\bar{T}}{ds}$ est

[n° 449] perpendiculaire en chaque point P aux deux directions \bar{T}_0 et P_1z_1 et égale à $T_0 \sin \theta$, si θ désigne l'angle de Pz et de Oz_1 .



Ces remarques permettent d'établir une correspondance remarquable entre la recherche des courbes élastiques et la dynamique des solides pesants fixés par un point. Pour chaque valeur de s , construisons avec le point fixe O comme origine un trièdre $Oz_1\eta z$ de côtés parallèles à $P_1x_1y_1z_1$. Imaginons que P_1 parcoure la courbe AP_1B avec une

vitesses égales à l'unité [$s=t$]. A chaque instant t , le trièdre $O\xi\eta\zeta$ a une position déterminée, et sa rotation instantanée a comme composantes sur les axes mobiles $O\xi\eta\zeta$, les quantités p, q, r du n° précédent.

D'autre part, pour chaque valeur $s=t$, construisons, avec O comme origine, un vecteur \vec{OX} équipollent à \vec{T} . La vitesse du point X est $\frac{d\vec{T}}{ds}$; elle est donc équipollente au

moment par rapport à O du secteur $-T_0$ construit avec G comme origine, G étant le point de OZ situé à une distance 1 de O . Enfin, le vecteur \vec{OX} a pour projecteur sur $O\xi, O\eta, O\zeta$ les quantités $\alpha p, \alpha q, \alpha r$.

Or considérons un solide de révolution pesant, fixé par un point O de son axe OZ et dont le centre de gravité G est situé sur OZ à une distance 1 de O . Imaginons que le poids du corps soit le vecteur $-\vec{T}_0$ de sens OZ , et que les moments d'inertie du corps autour de OZ et autour de $O\xi$ (perpendiculaire à OZ) soient γ et α . Le mouvement du solide est défini précisément par les mêmes conditions que celles que doit vérifier le trièdre $O\xi\eta\zeta$ attaché à la courbe élastique. Or l'étude de ce mouvement [n°s 64-67] a été effectuée en détail; les angles d'Euler qui définissent la position du trièdre $O\xi\eta\zeta$ se déterminent en fonction de t par des quadratures. On connaît ainsi, par quadratures en fonction de s les cosinus directeurs $\alpha_2, \beta_2, \delta_2$ de OZ , c'est-à-dire de la tangente P_1Z_1 à la courbe élastique. Autrement dit, x, y, z étant les coordonnées d'un point de la courbe élastique, on a $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ en s , donc x, y, z en s , par des quadratures.

Nombre de constantes⁽¹⁾ dont dépend l'élastique:

Une fois connu T_0 (trois constantes arbitraires), les fonctions θ, φ de $s=t$ dépendent de cinq autres constantes arbitraires et α d'une 6^e constante [n° 64]. D'autre part, θ et α définissent les cosinus directeurs de la tangente à G en fonction de s ; les coordonnées d'un point de G sont donc des fonctions de s qui dépendent de 11 constantes arbitraires.

(1) Une fois les constantes élastiques α, γ données.

Mais quand on connaît une élastique, on en obtient une infinité en la déplaçant et en changeant s en $s + h$; les élastiques différentes en forme dépendent donc de 11 constantes arbitraires (pour α, γ données). Enfin, la position du trièdre $P_1 x_1 y_1 z_1$ en fonction de s dépend de 12 constantes arbitraires.

Supposons, pour fixer les idées, que la tige soit inextensible; que ses extrémités soient maintenues fixes en A et B et qu'on applique à ses éléments extrêmes deux couples donnés $-\bar{T}_0$ et \bar{T}_1 . Il faut que, pour $s=0$, P_1 soit en A , (3 conditions); que, pour $s=l$ (l désignant la longueur de la tige) P_1 soit en B (3 conditions); que le couple \bar{T} initial soit \bar{T}_0 (3 conditions), le couple final \bar{T} soit \bar{T}_1 (3 conditions). Ces 12 conditions définissent les 12 constantes, et par suite la position du trièdre $P_1 x_1 y_1 z_1$ en fonction de s , ($0 \leq s \leq l$).

452.- Cas particuliers - 1.- Les tensions extrêmes $-\bar{T}_0, \bar{T}_1$ sont nulles.

Pour obtenir le mouvement correspondant du solide de révolution, il faut annuler la pesanteur: l'élastique est une hélice circulaire ou une circonférence. En effet, Oz fait un angle constant avec une direction fixe soit Oz_1 , et l'angle ψ du plan Z, oz avec un plan fixe Z, ox_1 varie proportionnellement à $t = s$.

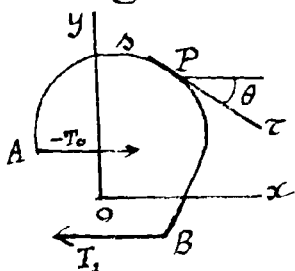
II.- $-\bar{T}$ et \bar{T}_0 sont perpendiculaires au plan π qui contient les points A et B et les deux vecteurs parallèles $-\bar{T}_0$ et \bar{T}_1 . Il est loisible de choisir le plan $P_1 x_1 z_1$ de façon qu'à l'origine A de la tige, le plan $P_1 x_1 z_1$ soit confondu avec π . Par raison de symétrie, la courbe d'équilibre de la tige est contenue dans le plan π et le plan $P_1 x_1 z_1$ est confondu avec π tout le long de la courbe. La tige subit une flexion pure sans torsion. Le mouvement du solide correspondant est celui du pendule composé.

De combien de constantes arbitraires dépendent les courbes élastiques C du plan π ? Une fois \bar{T}_0 connu (deux constantes arbitraires), l'angle θ de la tangente $P_1 z_1$ avec \bar{T}_0 est une fonction de s qui dépend de deux constantes arbitraires. Enfin, la position de A dans le plan introduit deux nouvelles constantes. Il s'introduit ainsi 6 constantes arbitraires. Mais de la

possibilité de déplacer C dans le plan et de changer s en $s+h$, il résulte que la forme des courbes C ne dépend que de deux constantes arbitraires. Les élastiques planes se déduisent donc par déplacement, d'une famille de courbes à deux paramètres.⁽¹⁾

453.- Etude de l'élastique plane.

Preons comme sens ox le sens de $-T_0$ et soit x, y les coordonnées d'un point P de C rapporté aux axes fixes xoy , et θ l'angle avec ox de la tangente $P = \tau$ à C menée dans le



sens des s croissants. La fonction $\theta(s)$ vérifie la même équation différentielle que la fonction $\theta(t)$ qui définit l'écart par rapport à la verticale descendante ox d'un pendule composé mo-

bile autour de Oz , dont le poids μg est égal à T_0 , dont le centre de gravité G est à la distance l de Oz et dont le moment d'inertie μk^2 par rapport à Oz est α . A l'équation différentielle du mouvement du pendule composé [n° 108]

$$\theta'' = -\frac{g}{k^2} \sin \theta, \quad (l = 1)$$

correspond l'équation :

$$(1) \quad \frac{d^2\theta}{ds^2} = -\frac{\sin \theta}{c^2}, \quad \text{ou} \quad c^2 = \frac{\alpha}{T_0}$$

L'équation (1) entraîne aussitôt l'équation suivante (qui correspond à celle des forces vives) :

$$(2) \quad \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = \frac{2}{c^2} (\cos \theta + \mu), \quad (\mu \text{ constante arbitraire}).$$

On a d'autre part :

$$(3) \quad dx = ds \cos \theta, \quad dy = ds \sin \theta = \pm \frac{c \sin \theta d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta + \mu)}} = \mp c d\sqrt{2(\cos \theta + \mu)}$$

(1) Pour α donné, mais α ne figurant que dans le rapport $\frac{T_0}{\alpha}$ ne change pas les formes de la courbe (voir plus loin).

d'où :

$$(4) \quad y = c \sqrt{2(\cos \theta + \mu)} + \nu,$$

ν désignant une constante arbitraire qu'on peut supposer nulle en choisissant convenablement l'origine. On a par suite :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{y^2}{2c^2} - \mu\right)^2}}{\frac{y^2}{2c^2} - \mu} = \frac{dy}{dx}, \quad \text{ou}$$

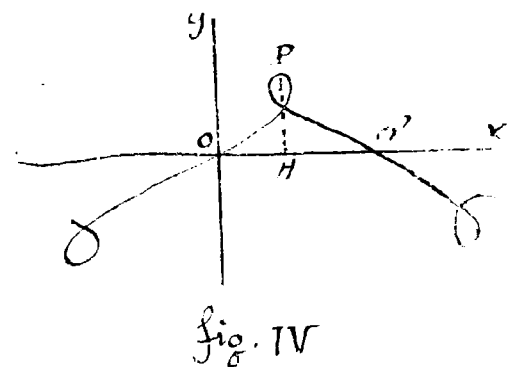
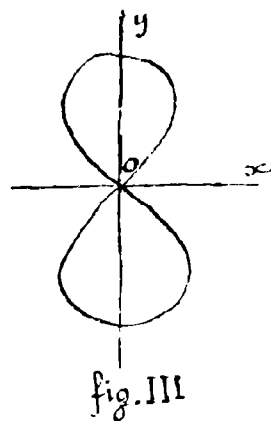
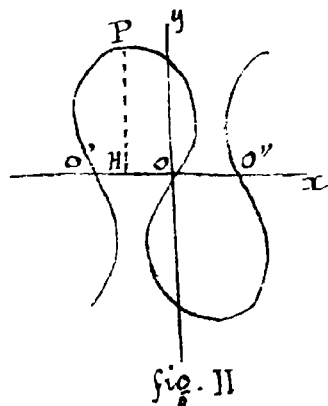
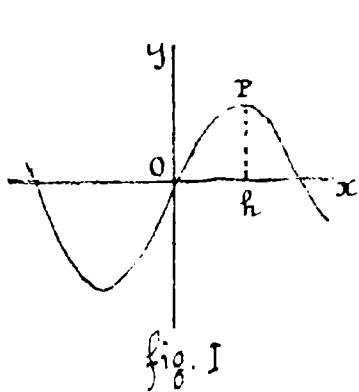
$$(5) \quad dx = \frac{\frac{y^2}{2c^2} - \mu}{\sqrt{1 - \left(\frac{y^2}{2c^2} - \mu\right)^2}} dy.$$

Cette équation définit une courbe dont la forme dépend des deux constantes arbitraires c^2 et μ .

Remarquons que $c^2 = \frac{\alpha}{T_0}$; quand α varie, les courbes élastiques planes restent donc les mêmes.

Une discussion maintes fois répétée [1^{re} année, nos 232-233] nous permet de discuter les diverses formes d'élastiques planes. La courbe rencontre ou non l'axe des x suivant que μ [qui est toujours > -1 d'après (4)] est inférieur ou supérieur à $+1$.

Si μ reçoit des valeurs croissantes de -1 à $+1$, l'élastique affecte les formes I, II, III, IV, (la forme III



intermédiaire entre II et IV correspondant à une valeur particulière de μ). Le point O est centre et point d'inflexion de e élastique; PH (confondu avec oy dans la fig III) est axe de symétrie de la courbe. Le cas particulier III écarté, la courbe se compose d'une infinité d'ondes égales OPO' .

Si $\mu > 1$, la courbe a la forme VI; elle a la forme V dans le cas intermédiaire $\mu = 1$.

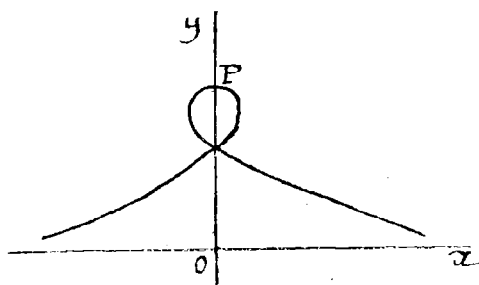


fig. V.

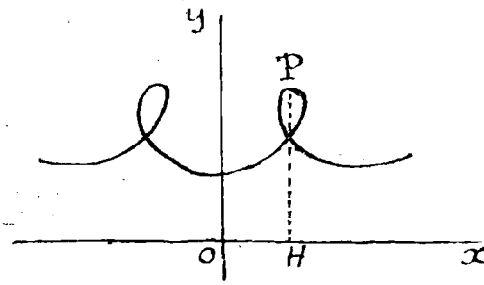


fig. VI.

Dans ce dernier cas, ox est asymptote à la courbe; oy est axe de symétrie. Sur la fig. VI, oy et PH sont axes de symétrie.

454. Limite de la résistance à la flexion.

Supposons notamment que \bar{T}_0 et \bar{T}_1 soient nuls. La tige est alors soumise à deux forces $-\bar{T}_0$ et \bar{T}_1 égales et directement opposées. Sa courbure $\frac{d\theta}{ds}$ à ses deux extrémités est nulle; ces deux extrémités A et B doivent donc se trouver sur l'axe Ox des figures I, II, IV et coïncider avec deux des centres et points d'inflexion O, O', O'', \dots de la courbe. Mais entre A et B il peut exister un nombre quelconque, soit n , d'ondes de la courbe. Si la tige s'écarte peu de la forme rectiligne, $\cos \theta$ diffère peu de l'unité, μ diffère peu de -1 . La forme de la tige est la forme 1 avec des ondes peu accentuées.

La tige, étant fixée par son extrémité A , appliquons à l'autre extrémité B une pression \bar{T}_1 donnée, dirigée de B vers A . La position rectiligne de la tige (supposée de longueur invariable) est une position d'équilibre. En existe-t-il d'autres ?

S'il en existe une, la longueur l de la tige entre A et B est égale à x fois la longueur OP_0' d'une onde.
Or nous avons:

$$ds = c \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\alpha)}}, \quad \text{si } \mu = -\cos\alpha.$$

Transformons cette différentielle comme dans la théorie du pendule simple [1^{re} année, n° 297]; il vient

$$ds = \frac{c du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \quad \text{avec: } \sin \frac{\alpha}{2} = k, \text{ et } \sin \frac{\theta}{2} = ku.$$

La longueur d'une demi-onde est cK , où

$$(6) \quad K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

d'où la condition: $l = 2ncK$, c'est-à-dire

$$(7) \quad K = \frac{l}{2nc}.$$

La quantité C ou $\frac{\alpha}{T_1}$ est connue. La condition précédente détermine donc α (ou μ) en fonction d'un entier arbitraire n . Mais quand k^2 croît de 0 à 1, K croît constamment de $\frac{\pi}{2}$ à $+\infty$: pour que l'équation (7) ait une racine en k^2 , il faut donc:

$$\frac{l}{2nc} > \frac{\pi}{2}, \quad \text{d'où a fortiori } \frac{l}{2c} > \frac{\pi}{2},$$

$$\text{ou } \frac{1}{c^2} = \frac{T_1^2}{\alpha} > \frac{\pi^2}{l^2}, \quad \text{ou enfin } T_1 > \frac{\pi^2 \alpha}{l^2}.$$

Pour qu'il existe une forme d'équilibre autre que la droite, il faut donc que T_1 surpasse $\frac{\pi^2 \alpha}{l^2}$.
Si cette condition est remplie, il y a autant de

Mécanique (1^{re} don) 1906-1907 - 137^e feuille.

546.

formes d'équilibre que de valeurs de l'entier n vérifiant la condition

$$n^2 > \frac{T_1 l^2}{\pi^2 \alpha}.$$

Quand la forme d'équilibre rectiligne est unique, il est à peu près évident physiquement qu'elle est stable.

Quand il existe une autre forme d'équilibre, est-ce cette forme qui est stable ou la forme rectiligne? On peut démontrer que si $T_1 > \frac{\pi^2 \alpha}{l^2}$, la forme d'équilibre

correspondant à $n=1$ est stable, la forme rectiligne est instable. Si donc la tige d'abord rectiligne supporte en B une pression plus grande que $\frac{\pi^2 \alpha}{l^2}$, elle ne restera pas en équilibre à cause

des petites perturbations qui agissent toujours sur la tige; elle s'infléchira et prendra la forme d'une courbe élastique.

455. - Extension au cas d'une tige (ou d'un fil) de section elliptique -

Considérons une tige qui à l'état naturel est rectiligne, homogène, partout de même nature et de même section, mais dont la section est non plus circulaire mais elliptique (les axes des diverses sections étant parallèles). Soit I_x et I_y les axes d'une section. Considérons, comme au n° 450, le trièdre $x y z$. On peut étendre à la nouvelle tige tout ce qui a été dit dans le cas où le secteur de la tige était circulaire: les projections L, M, N de l'axe du couple \vec{I} sur les droites $I_1 x_1 y_1 z_1$ sont encore proportionnelles à p, q, r ; la seule différence est qu'on a:

$$L = \alpha p, \quad M = \beta q, \quad N = \gamma r,$$

α n'étant plus égal à β .

Ces résultats ont été établis par de St Venant comme cas limite du problème de l'équilibre d'un

cylindre tordu et fléchi, le cylindre à l'état naturel étant homogène, isotrope et ayant deux plans de symétrie rectangulaires xoz et yoz . Sans insister davantage sur ce problème qui nous entraînerait trop loin, je remarque seulement qu'une fois admis les résultats énoncés, la théorie des nos 451-454 s'étend sans difficulté.

Appelons encore courbe élastique toute forme d'équilibre de la tige elliptique quand elle n'est soumise à d'autres forces que les deux tensions T_0 et T_1 et les deux couples \bar{T}_0 et \bar{T}_1 appliqués à ses éléments extrêmes : la correspondance entre une courbe élastique et le mouvement d'un solide pesant fixé par un point O et dont le centre de gravité se trouve sur un axe principal d'inertie OZ subsiste avec cette seule modification que le solide n'est plus de révolution ($\alpha = A$ $\beta = B$).

En particulier, si $T_0 = T_1 = 0$, le mouvement du solide correspondant est un mouvement à la Poinsot.

Si T_0 et T_1 sont dans le plan Pxz et si \bar{T}_0 et \bar{T}_1 sont perpendiculaires à ce plan, la tige subit une flexion pure dans le plan de symétrie Pxz , et la théorie des nos 453-454 s'applique.

Chapitre VI.

Petits mouvements des corps élastiques.

456.- Equations générales.

Soit S un corps élastique et soit a, b, c les coordonnées

à l'instant t , d'un élément matériel P de S ; à l'instant t , cet élément occupe la position $x = a + u(a, b, c, t)$, $y = b + v(a, b, c, t)$, $z = c + w(a, b, c, t)$. Nous admettons que quels que soient t et l'élément P de S considéré, le déplacement (u, v, w) de P est très petit ainsi que sa vitesse $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$. Dans ces conditions, la

densité ρ de l'élément P à l'instant t diffère très peu de sa valeur ρ_0 à l'instant t_0 . D'autre part, la force mF qui s'exerce à l'instant t sur P (en outre des forces de contact) diffère très peu de celle qui s'exercerait au même instant sur P si à cet instant le corps S était dans le même état S_0 qu'à l'instant t_0 . Les composantes X, Y, Z de F seront aussi des fonctions données de a, b, c, t .

Ceci posé, à l'instant t , le mouvement vérifie les équations (9) du n° 423. Dans ces équations, x, y, z (coordonnées P à l'instant t) sont les variables indépendantes, mais suivant une remarque du n° 427, on peut les remplacer par les coordonnées (a, b, c) de P à l'instant t_0 , et remplacer ρ par sa valeur $\rho(a, b, c)$ à l'instant t_0 . D'autre part, quand (a, b, c) sont les variables indépendantes (variables de Lagrange), les composantes de l'accélération⁽¹⁾ de P sont $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$.

Nous pouvons donc écrire les équations (9) du n° 423 ainsi :

$$\rho(a, b, c) \left[X(a, b, c, t) - \frac{\partial^2 u(a, b, c)}{\partial t^2} \right] = \frac{\partial N_1}{\partial a} + \frac{\partial T_3}{\partial b} + \frac{\partial T_2}{\partial c}.$$

Ce sont ces équations que nous emploierons dans ce qui va suivre, mais pour plus de commodité, nous remplacerons les lettres a, b, c par x, y, z . Nous représentons donc dorénavant par (x, y, z) la position d'un élément P à l'instant t_0 .

Si le corps est homogène et isotrope et si l'état initial du corps diffère peu de l'état naturel, les équations des petits mouvements du corps se déduisent des équations de l'équilibre en remplaçant partout X, Y, Z

par $X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, $Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$. Elles s'écrivent donc :

(1) Les composantes de la vitesse (représentées au n° 441) par x', y', z' sont ici $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$. Les lettres u, v, w ont ici un sens tout différent de la signification des mêmes lettres dans la notation d'Euler.

$$(1) \begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u + \rho_0 X = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v - \rho_0 Y = \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w + \rho_0 Z = \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{cases}$$

L'équation de continuité [n° 243] donne :

$$\rho = \rho_0 (1 - \theta)$$

Nous nous bornerons ici à l'étude des mouvements vibratoires les plus simples, à savoir les mouvements vibratoires par ondes planes, que nous allons définir.

457.- Mouvement vibratoire par ondes planes.

Soit un mouvement représenté par les formules :

$$\frac{u}{p} = \frac{v}{q} = \frac{w}{r} = \cos(ax + by + cz - st + \alpha)$$

dans lesquelles $p, q, r, a, b, c, s, \alpha$ désignent des constantes.

Le mouvement de chaque point s'effectue également sur une droite fixe. C'est une vibration rectiligne dont la période est $\tau = \frac{2\pi}{s}$. Cette période s'appelle la durée de la vibration.

Sous les points situés dans un plan $ax + by + cz = \text{const.}$ (parallèle au plan fixe $ax + by + cz = 0$) présentent à chaque instant le même déplacement. C'est ce qu'on exprime en disant que le mouvement a lieu par ondes planes.

À un instant déterminé t , correspondent une infinité de plans $ax + by + cz = \text{const.}$ pour lesquels les valeurs de u, v, w sont les mêmes. Ces plans s'obtiennent en attribuant à la constante α les valeurs comprises dans la formule $C \pm 2K\pi$. Deux plans consécutifs sont séparés

550

par l'intervalle $l = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. Nous poserons $\sqrt{a^2+b^2+c^2} = h$,
d'où $l = \frac{2\pi}{h}$. La distance l de deux plans homologues
consécutifs se nomme la longueur d'ondulation.

Soit d la distance de l'un de ces plans à l'origine;
son équation est $ax + by + cz = hd$, et, pour les points
situés dans ce plan, on a :

$$\frac{u}{p} = \frac{v}{q} = \frac{w}{r} = \cos(hd - St + \varphi.)$$

Faisons varier à la fois d et t , sans faire varier
 $hd - St$. Les valeurs de u, v, w ne changent pas. On
a ainsi un plan qui se transporte parallèlement
à lui-même, d'un mouvement continu et dans
lequel l'état vibratoire est constamment le même.
La vitesse ω de ce plan ^{perpendiculaire au plan} s'appelle la vitesse de propa-
gation de l'onde. Si Δd et Δt désignent les varia-
tions simultanées de d et t , l'on a $h\Delta d - S\Delta t = 0$

$$\text{d'où } \omega = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{S}{h}.$$

458.- Il s'agit maintenant de voir si un pareil
mouvement est compatible avec les équations de
l'élasticité : nous supposons que le milieu est
indéfini en tous sens, de sorte qu'il n'y ait pas à
s'occuper des conditions à la surface. Nous admet-
tons en outre qu'il n'y a pas de forces extérieures.

Les équations indéfinies sont alors :

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Posons pour abréger :

$$ax + by + cz - St + \alpha = \psi.$$

Nous avons :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -pa \sin \psi \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -pa^2 \cos \psi$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -pb \sin \psi \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -pb^2 \cos \psi$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -pc \sin \psi \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -pc^2 \cos \psi$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -pS \sin \psi \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -pS^2 \cos \psi$$

Par permutations de p, q, r on obtient les dérivées de v et w .

On déduit de là :

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -(pa + qb + rc) \sin \psi$$

$$\Delta u = -ph^2 \cos \psi \qquad \Delta v = -qh^2 \cos \psi \qquad \Delta w = -rh^2 \cos \psi$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -a(pa + qb + rc) \cos \psi$$

et la première des équations (9) devient, en divisant par $\cos \psi$:

$$(\lambda + \mu) a(pa + qb + rc) + (\mu h^2 - pS^2) p = 0$$

de même :

$$(\lambda + \mu) b(pa + qb + rc) + (\mu h^2 - pS^2) q = 0$$

$$(\lambda + \mu) c(pa + qb + rc) + (\mu h^2 - pS^2) r = 0$$

Ajoutons ces équations, multipliées réciproquement par

a, b, c qui ne peuvent être nuls simultanément (sans quoi tous les points du milieu auraient des mouvements identiques et il n'y aurait plus de déformation). Il s'en suit ainsi :

$$(pa + qb + rc)[(\lambda + 2\mu)h^2 - \rho s^2] = 0$$

Nous arrivons à une équation qui se décompose en deux autres, conduisant à deux hypothèses distinctes.

1^{re} hypothèse .- $pa + qb + rc = 0$

La vibration, qui a ses composantes proportionnelles à p, q, r , est alors dans le plan de l'onde ; les vibrations de ce genre sont dites transversales. Elles sont perpendiculaires à la vitesse de propagation. En se reportant aux équations (2) on constate que le binôme $\rho h^2 - \rho s^2$ est nul, d'où $\omega = \frac{s}{h} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$. L'onde se propage donc avec la vitesse $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$. La dilatation cubique égale à $-(pa + qb + rc) \sin \psi$ est nulle, de sorte que le mouvement se produit sans variation de densité.

2^e hypothèse :- $(\lambda + 2\mu)h^2 - \rho s^2 = 0$

L'expression $pa + qb + rc$ n'étant pas nulle, les équations (2) donnent :

$$\frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{r}{c} = \frac{(\lambda + \mu)(pa + qb + rc)}{\rho s^2 - \mu h^2} = \frac{pa + qb + rc}{h^2}$$

La vibration est normale au plan de l'onde, donc parallèle à la vitesse de propagation. Les vibrations ainsi définies s'appellent vibrations longitudinales. On a

dans ce cas, $\frac{s}{h} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$. La vitesse de propagation Ω est donc égale à $\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$.

En fonction des vitesses ω et Ω les coefficients λ et μ s'expriment par les formules : $\mu = \rho \omega^2$ et $\lambda + 2\mu = \rho \Omega^2$ d'où $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\Omega^2}{\omega^2} - 2$.

De là un moyen indirect d'obtenir le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$. Si $\lambda = \mu$,
 $\Omega = \omega \sqrt{2}$. Si $\lambda + \mu = 0$, les conditions de compatibilité
sont vérifiées quels que soient p, q, r quand on prend
 $p^2 = \mu h^2$.

459.- Propagation de la lumière.

L'expérience montre que les vibrations lumineuses
sont exclusivement transversales. On est ainsi conduit
à regarder l'éther comme un milieu isotrope pour
lequel la vitesse de propagation Ω des vibrations longi-
tudinales est nulle, d'où $\lambda + 2\mu = 0$. Les constantes
 λ et μ sont donc de signes contraires. Comme la
vitesse $\omega = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ des vibrations transversales est réelle,
il faut que μ soit positif, et que par conséquent λ
soit négatif. C'est ce que nous avons admis précédem-
ment [nos 435-437].

Comparaison avec les petits mouvements des fluides :

460.- Considérons un liquide très peu compressible
partout de même nature et dont la température τ est en
tout point la même et invariable : supposons le en équi-
libre sous l'action des seules forces de contact intérieu-
res. Sa pression p est alors partout la même et comme
elle est nulle sur la surface, elle est nulle dans tout
le liquide, qui est, par suite, à l'état naturel S_0 . Dans
cet état, le liquide est homogène : soit ρ_0 sa densité.
Si $p = h(\rho, \tau)$ est son équation caractéristique, ρ_0 est
la valeur de h pour $p = 0$, (τ ayant la valeur τ_0
donnée).

a : Si (pour $\tau = \tau_0$), p subit la petite variation δp , on

$$p = + h' \delta p, \quad \text{où } h' = \frac{\partial h}{\partial \rho}(\rho_0, \tau_0) > 0.$$

$$\text{D'autre part, } \frac{\delta p}{\rho} = -\theta; \text{ d'où :}$$

554.

$$(3) \quad p = -\lambda\theta \quad \text{où } \lambda = +h' \rho_0 = \rho_0 \frac{\partial h}{\partial \rho}(\rho_0, \tau_0)$$

Le coefficient λ étant, par hypothèse, très grand, p est notable pour une très petite contraction θ d'un élément du liquide (1).

Ceci posé, admettons que le liquide, dans son mouvement, s'écarte peu de la position S_0 et n'ait que de petites vitesses, sa température restant égale à P_0 . Les petits mouvements du liquide sont définis par les équations de l'hydrodynamique

$$(4) \quad \delta x = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \text{ etc..}$$

Dans ces équations, on peut remplacer p par $-\lambda\theta$, ρ par ρ_0 et confondre les variables d'Euler avec celles de Lagrange. Il vient ainsi (x, y, z désignant la position d'un élément P du liquide à l'instant t_0 et $x+u, y+v, z+w$ sa position à l'instant t):

$$(5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x, y, z, t) + \frac{\lambda}{\rho_0} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \left(\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right),$$

et deux équations analogues. Ce sont les équations (1) du n° 456, où $\mu = 0$. Quant à l'équation continuité, [n° 456], elle donne :

$$\rho = \rho_0 (1 - \theta).$$

460. Au lieu de partir de l'état naturel, supposons que le liquide S (partout de même nature) soit en équilibre isotherme sous l'action de forces $m\vec{F}_0$ et de pressions extérieures. Imaginons qu'aux forces $m\vec{F}_0$ on substitue les forces $m(\vec{F}_0 + \vec{F}_1)$, et qu'on change les pressions extérieures : le liquide entre en mouvement.

(1) Si les déformations du liquide étaient adiabatiques, on aurait : $p = \int \rho \left[\frac{\partial h}{\partial \rho} + \frac{\partial h}{\partial \tau_0} \frac{\partial \tau}{\partial \rho} \right] = h'_1 \delta \rho$; les équations qui suivent subsisteraient, mais la constante h_1 devrait être remplacée par une autre constante h'_1 .

Admettons que dans son mouvement il reste voisin de la position S_0 et que sa température soit invariable. Si ρ_0 et p_0 sont la densité et la pression du même élément à l'instant t_0 , on a :

$$\mu_1 = p - p_0 = h' \delta \rho = -\lambda \theta, \left[\text{avec } h' = \frac{\partial h}{\partial \rho} (\rho_0, \tau_0) \text{ et } \lambda = h' \rho_0 \right].$$

$$\text{D'autre part, } X_0 = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} \text{ et}$$

en retranchant de la première équation (H), il vient [n° 428] :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X_1(x, y, z, t) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

ou bien

$$(6) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X_1(x, y, z, t) + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

et deux équations analogues. Mais ρ_0 est alors une fonction donnée de x, y, z , ainsi que $\lambda = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial h}{\partial \rho} (\rho_0, \tau_0)$

Ces dernières équations s'appliquent aux petits mouvements d'un gaz (1). Mais, pour un gaz, la valeur de λ n'est plus très grande. Si on admet que les déformations du gaz et les forces $m \vec{F}_1$ sont petites, les équations (6) définissent les petits mouvements du gaz. Si dans l'état S_0 les forces $m \vec{F}_0$ sont négligeables, ρ_0 et λ sont des constantes données.

Solides plastiques et liquides visqueux.

461.- Solides plastiques.

Considérons un solide S dont l'état reste voisin de l'état naturel (2) mais qui n'est plus parfaitement élastique. Les tensions intérieures $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$ dépendent alors (à un instant t), en un point P , non plus seulement de la déformation pure de S autour de P ,

(1) Pour un gaz, l'état naturel [où $p = 0$] n'existe pas.

(2) La température, l'état électrique, etc, des éléments de S sont supposés invariables.

mais des vitesses relatives des éléments voisins de P .

Soit (x, y, z) les positions du point matériel P à l'instant t et $u_1(x, y, z, t)$, $v_1(x, y, z, t)$, $w_1(x, y, z, t)$ sa vitesse. Le déplacement infinitésimal du corps au voisinage de P , entre les instants t et $t + dt$, peut se décomposer en une translation, une rotation et une déformation pure. Cette dernière est définie par les 6 quantités :

$$(7) \quad a'_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad a'_2 = \frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad a'_3 = \frac{\partial u_1}{\partial z}, \quad 2b'_1 = \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z}, \quad 2b'_2 = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad 2b'_3 = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}.$$

Les vitesses relatives, à l'instant t , des éléments voisins de P , sont indépendantes de la translation et de la rotation instantanées d'ensemble, et ne dépendent que des six quantités (7).

Les six tensions N, T sont donc des fonctions de $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, a'_1, a'_2, a'_3, b'_1, b'_2, b'_3$ qui s'annulent avec ces 12 quantités et peuvent être réduites à leurs termes linéaires puisque les a, b, a', b' sont des quantités très petites.

$$\text{Posons : } N_1 = N'_1 + N''_1, \quad \dots \quad T_1 = T'_1 + T''_1, \quad \dots,$$

N'_1 et N''_1 désignant l'ensemble des termes linéaires respectivement par rapport aux a, b , et par rapport aux a', b' . Quand le solide est parfaitement élastique, les N, T se réduisent aux N', T' ; quand il est plastique, les N, T se réduisent aux N'', T'' que les a', b' sont nuls.

Ceci posé, supposons le corps S homogène et isotrope. Le raisonnement du n° 431 subsiste pour les N', T' . D'autre part, il s'étend immédiatement aux N'', T'' ; en sorte qu'on a :

$$(8) \quad -N_1 = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_1 \theta' + 2\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad -T_1 = -\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \mu_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \right)$$

Représentons dorénavant par (x, y, z) la position de l'élément P dans l'état S_0 et par $(x+u, y+v, z+w)$ sa position à l'instant t ; les

tensions N, T que subit P à l'instant t sont encore données par les équations (8) ; on a, d'autre part :

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial t}, \text{ etc...},$$

$$\text{d'où : } a'_1 = \frac{\partial a_1}{\partial t}, \text{ etc...}, \dots b'_1 = \frac{\partial b_1}{\partial t}, \text{ etc...}.$$

Le calcul du n° 433 répété presque identiquement conduit dès lors aux équations des petits mouvements d'un fluide plastique :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u + (\lambda_1 + \mu_1) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu_1 \Delta u' + \rho_0 X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

$$\text{avec (10) } \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \theta' = \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad u' = \frac{\partial u}{\partial t}, \text{ etc..}$$

On a ainsi trois équations aux dérivées partielles du 3^e ordre pour définir les trois fonctions u, v, w de x, y, z, t .

462.- Fluides visqueux.

Le corps plastique est dit un fluide si la tension sur un élément de surface quelconque $d\sigma$ est une pression normale à cet élément quand les vitesses du corps sont nulles. Le fluide est parfait ou visqueux suivant que la même propriété subsiste ou non quand les vitesses relatives des éléments du fluide ne sont plus nulles. Les équations des petits mouvements d'un liquide visqueux au voisinage de son état naturel S_0 s'obtiennent évidemment, d'après ce qui précède en faisant $\mu = 0$ dans les équations (9) ; elles peuvent s'écrire encore :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial p}{\partial x} + (\lambda_1 + \mu_1) \frac{\partial \theta'}{\partial x} + \mu_1 \Delta u' + \rho_0 X = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

$$\text{avec (11) } \quad p = -\lambda \theta, \quad \theta = \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad u' = \frac{\partial u}{\partial t}, \text{ etc.}$$

558.

Si le liquide est incompressible, c'est-à-dire si on regarde θ comme nul et λ comme infini, les équations (10) se simplifient, car l'égalité $\theta \equiv 0$ entraîne $\theta' \equiv 0$, et il vient :

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_1 \Delta u' + \rho_0 X = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

avec :

$$(13) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad u' = \frac{\partial u}{\partial t}, \text{ etc.}$$

Les équations (12) et (13) définissent les petits mouvements isothermes d'un fluide incompressible visqueux au voisinage d'un état S_0 entièrement quelconque [11° 460]. A priori, le coefficient μ_1 (coefficient de viscosité du liquide) peut dépendre de la pression et de la température. L'expérience montre qu'il est sensiblement indépendant de la pression.

Les équations (10) définissent également les petits mouvements isothermes d'un gaz visqueux au voisinage d'un état S_0 , mais l'équation (11) doit être remplacée [11° 460] par : $p - p_0 = -\lambda \theta$. L'expérience montre que λ_1 et μ_1 sont sensiblement indépendants de la pression. Certaines hypothèses conduisent à admettre que $3\lambda_1 + 2\mu_1 = 0$.



F I N.

Table des matières.

	Pages
Introduction	1-2

Livre I

Dynamique générale des systèmes.

Chapitre I.

	Rappel des théorèmes généraux.	
1-2	Théorème du mouvement du centre de gravité.	3-4
3-5	Théorème des moments cinétiques. Extension au mouvement autour du centre de gravité. Théorème de Koenig	4-6
6-9	Théorème des forces vives. Extension au mouvement autour du centre de gravité. Théorème de Koenig. - Systèmes à liaisons complètes	6-11
10-11	Application des théorèmes généraux à quelques exemples	11-20

Chapitre II.

Etude du mouvement d'un système quand toutes les forces sont données.

12	Equations du mouvement	20-21
13	Forces de contact et forces à distance	21-22
14	De la symétrie en Mécanique	22-24
15-17	Systèmes soumis à des forces qui ne dépendent que de la position du système. - Systèmes conservatifs	24-26
17-20	Le théorème des aires et les systèmes conservatifs. Problème du chat qui retombe sur ses pattes	27-29

Livres II

Dynamique des solides invariables

Chapitre I.

Mouvement d'un solide parallèlement à un plan fixe.

N ^{os}		Pages
21-22	Équations du mouvement d'un disque plat dans un plan. Théorème des forces vives _____	30-31
23	Cas où le solide est libre. Exemple _____	31-32
24-28	Cas où le solide est lié. Liaison bilatérale et liaison unilatérale. Discussion du mouvement sur un exemple _____	32-38
29	Liaisons affectées de frottement. Lois du frottement de glissement _____	38-39
30-32	Mouvement d'un cerceau pesant sur une droite horizontale ou inclinée en tenant compte du frottement _____	39-45
33-37	Démarrage et arrêt d'une locomotive ou d'un train en palier _____	45-46
38-40	Démarrage et arrêt d'une bicyclette ou d'une automobile sur une pente ou en palier _____	56-62
41-42	Extraction d'une voiture. Transport par rouleaux _____	62-65
43	Influence du frottement sur la composante normale des réactions. Difficultés qu'introduisent les lois de Coulomb _____	65-68
44-47	Résistance au roulement. Lois du frottement de roulement. Application au mouvement du cerceau _____	68-71

Chapitre II.

Mouvement d'un corps solide de révolution.
Couple. — Phénomène gyroscopique. — Déviation des projectiles.

Corps de révolution fixé par un point de son axe

48-50 | Nutation, précession, rotation propre. e Moment |

N ^{os}		Pages
	cinétique et force vive du solide _____	75-78
51-52	Cas où les forces extérieures admettent une résultante passant par le point fixe. Gyroscope _____	78-81
53	Mouvement du gyroscope quand on tient compte du mouvement de la terre _____	81-83
54	Cas où les forces extérieures appliquées au solide sont quelconques. - Equations du mouvement _____	83-85
55-58	Mouvement d'une toupie pesante fixée par un point de son axe et animée d'une rotation sur elle-même. Phénomène gyroscopique : théorie élémentaire _____	85-89
59-63	Extension au cas où la toupie est soumise à des forces quelconques _____	89-95
63-71	Mouvement d'une toupie pesante fixée par un point de son axe, quand les conditions initiales sont quelconques. - Périodicité de la nutation. Etude rigoureuse du phénomène gyroscopique _____	95-111
72-73	Application de la théorie précédente au mouvement d'un corps de révolution autour de son centre de gravité. Précession des équinoxes _____	111-113
74-75	Toupie fixée par un coin de son axe et soumise à d'autres liaisons. Gyroscope de Foucault dont l'axe fixé par un point est mobile dans un plan fixe : influence de la rotation de la terre _____	113-115

Mouvement d'un solide de révolution libre ou mobile sur une surface fixe.		
76	Equations du mouvement du solide libre _____	116-117
77	Cas où le solide est mobile sur une surface fixe _____	117
78-82	Mouvement d'une toupie pesante sur un plan horizontal fixe parfaitement lisse (problème vulgaire de la toupie) _____	117-126
83-84	Influence du frottement sur le mouvement du solide. Mouvement d'une sphère homogène pesante sur un plan horizontal dépoli _____	126-133

N ^{os}	Dérivation des projectiles	Pages
85-92	Lois théoriques de la résistance de l'air. Application à un projectile sphérique et à un projectile conique. Loi empirique de la résistance de l'air pour les projectiles usuels	133-143
93-94	Mouvement d'un projectile lancé par une arme rayée. Dérivation du projectile	143-152

Chapitre III.

Théorie générale des moments d'inertie.

95-96	Moment d'inertie par rapport à un plan, une droite et un point. Exemples: sphère et ellipsoïde homogènes	153-157
96-100	Variation du moment d'inertie d'un système par rapport à un axe se déplace parallèlement à lui-même ou autour d'un point fixe. Ellipsoïde d'inertie, axes principaux et axes centraux d'inertie	157-162
101	Conditions pour qu'un axe OZ soit axe principal d'inertie	162-163
102	Détermination expérimentale des moments d'inertie	163

Chapitre IV.

Dynamique générale des solides.

Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe.

103-107	Equations du mouvement. Réactions de l'axe. Cas où l'axe de suspension est axe principal	164-169
108-109	Pendule composé. Pendule réversible de Kater	169-173
110	Mouvement du treuil	173-174

Mouvement d'un solide autour d'un point fixe.

111-114	Angles d'Euler: nutation, précession, rotation propre. Moment cinétique et forces vives du solide	174-178
---------	---	---------

N ^o		Pages
115-116	Équations du mouvement (équations d'Euler). Calcul de la réaction	179-180
117-125	Cas où les forces extérieures admettent une résultante passant par le point fixe. Discussion du mouvement. Cas particuliers	180-192
126-134	Représentation géométrique Poinsot. Polhodie; herpolhodie. Stabilité de la rotation autour du petit ou du grand axe d'inertie	192-201
134	Mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe	201-202
<u>Mouvement d'un solide libre.</u>		
135-137	Équations du mouvement. Cas particuliers. Exemples	202-206
138-139	Théorème des forces vives. Intégrales premières du mouvement	206-208
140-143	Mouvement d'un solide assujéti à des liaisons quelconques dénuées ou non de frottement, liaisons bilatérales ou unilatérales. Exemple	208-212

Livre III.

Dynamique des systèmes dont la position ne dépend que d'un nombre fini de paramètres.

Chapitre I.

Principe de d'Alembert.

144	Liaisons d'un système : liaisons indépendantes ou dépendantes du temps ; liaisons bilatérales et unilatérales ; liaisons holonomes. Travail virtuel des forces données et des réactions. Liaisons sans frottement et liaisons parfaites	213-223
153-162	Principe de d'Alembert. - Cas particuliers. - Applications. - Calcul des réactions	223-230
166	Mouvements d'un système	230-237

Chapitre II.

Nos	Equations de Lagrange.	Pages
166-174	Formation et emploi des équations de Lagrange	237-244
175-180	Application des équations de Lagrange	244-252
181	Calcul des réactions	252-253
182	Les équations de Lagrange et la Dynamique des	253-254
183	Cas où les liaisons sont affectées de frottement ^{solides}	254-256
184	Propriétés générales du mouvement des ^{Exemple} systèmes dénusés de frottement. Réversibilité	254-258
185	Les équations de Lagrange et les petits mouvements	258-260
186	Les équations de Lagrange et le mouvement relatif	260-261
187-189	Cas où les paramètres ne sont pas indépendants. Application aux systèmes affectés de frottement. Exemple	261-267
190-193	Liaisons non holonomes	267-273
194-199	Liaisons unilatérales. Discussion. Exemple	273-280

Livre IV.

Chocs et percussions.

Chapitre I.

Théorie des percussions.

200-205	Percussions appliquées à un point : théorèmes fondamentaux	281-285
205-209	Percussions appliquées à un système : théorèmes fondamentaux	285-287

Chapitre II.

Percussions appliquées à un solide.

210-212	Solide mobile autour d'un axe fixe; cas d'une plaque	287-291
---------	---	---------

Nos		Pages
213-214	Pendule balistique. Fusil. pendule, canon-pendule	291-294
215-216	Solide mobile autour d'un point fixe. Exemple —	294-296
217-218	Percussion appliquée à un solide libre. Paramètre de percussion	296-298
219	Variation de la force vive d'un système soumis à des percussions	298-300
220	Choc de deux corps	300
221	Problème du billard en tenant compte du <small>scottement</small>	301-302
222	Choc de deux sphères	303-304
223-225	Force vive perdue dans le choc de deux solides quelconques. Application au problème du choc et du marteau	304-307
226	Les percussions et le gyroscope	307-308

Chapitre III.

Extension à la théorie des percussions du
principe de d'Alembert et des équations de Lagrange.

227	Les percussions et le principe de d'Alembert	309-310
228-229	Les percussions et les équations de Lagrange Cas où les paramètres ne sont pas indépendants	310-312
230-231	Liaisons unilatérales. Liaisons persistantes et non-persistantes	312-314
232-235	Théorème de Carnot. Exemples	314-318
236-238	Cas où toutes les liaisons sont persistantes <small>Exemples</small>	318-321

Livre V. Hydrodynamique.

Chapitre I

Cinématique des milieux continus.

239-240	Déformation d'un milieu continu. Crous, failles, sillages	322-325
---------	--	---------

VIII

N ^{os}		Pages
241-243	Variables de Lagrange. Dilatation cubique. Equation de continuité	325-328
244	Variables d'Euler. Accélération. Equation de continuité	328-331
245	Correspondance entre les variables d'Euler et celles de Lagrange	331-332

Chapitre II.

Dynamique des fluides.

246-247	Equations de l'Hydrodynamique	333-334
248-249	Equations d'Euler. Conditions aux limites	334-335
250-251	Equations de Lagrange. Conditions aux limites	335-336
252-254	Equation caractéristique et relation supplémen- taire. Transformations isothermes, transfor- mations adiabatiques	336-340
255-256	Propagation d'une onde. Théorème d'Hugoniot	340-345
257-258	Potentiel des vitesses. Vecteur tourbillon	345-347
259	Circulation le long d'une ligne fermée	347-348
260-268	Propriétés du mouvement d'un fluide quand $\rho = \rho(p)$ et quand F dérive d'une fonction V . Théorème de Lagrange. Théorie des tourbillons	349-358
269-275	Travail des forces intérieures d'un fluide par- fait. Potentiel thermodynamique intense. Influence de la viscosité	358-366
276-279	Mouvements permanents d'un fluide. Théorème de Bernoulli	366-371
280-282	Écoulement permanent des gaz: formules de Geuner et de Navier. Variations de la section transversale d'un filet	371-374

Chapitre III.

Notions d'hydraulique.

292-294	Principes généraux. — Emploi des théorèmes fondamentaux de la Dynamique des systèmes	375-377
---------	---	---------

N ^{os}		Pages
295-297	Théorème de Coricelli. Ajutage rentrant de Borda	377-382
298-299	Perte de charge due à un élargissement brusque dans une conduite	382-385
300	Pression exercée par une veine liquide sur une paroi	385-386

Livre VI.

Machines.

Chapitre I.

Notions générales. Résistances passives.
Rendement. Puissance.

301-306	Généralités sur le frottement. Frottement de glissement, de roulement et de pivotement.	387-393
307-308	Pivot sur crapaudine. Pivot sur épaulement	393-394
309-311	Roulement sur billes	394-399
312-318	Application des principes de l'énergétique aux machines. Conservation de l'énergie. Principes de Carnot-Clausius	399-405
319-324	Étude générale d'une machine: récepteur, outil, transmissions. Forces motrices; résistances passives	406-409
324-333	Rendement d'une machine... Rendement mécanique. Rendement industriel. Rendement sur l'arbre d'un moteur. Puissance	409-418

Chapitre II.

Moteurs hydrauliques.

334-338	Puissance d'une chute. Rendement. Analyse de la perte de travail	419-425
339-340	Effet des chocs. Influence des aubes	426-430

3^e famille

X

N ^{os}		Pages
341-343	Roues en dessus, roues en dessous, roues de côté	430-434
345-352	Turbines hydrauliques. Types divers. Théorie des turbines hydrauliques	434-442
<hr/>		
<h2>Chapitre III.</h2>		
<h3>Moteurs thermiques</h3>		
353-358	Machine à vapeur. Fonctionnement du piston. Diagramme représentatif	442-448
359-363	Distribution par tiroir. Épure de Taitteau. - Distributeur Corliss	448-456
364-366	Chaudières et condenseurs	456-458
367-374	Rendement d'une machine à vapeur. Puissance indiquée. Puissance effective. Indicateur de Watt. Frein de Prony. - Dynamomètres et enregistreurs	458-467
375-377	Turbines à vapeur. - Turbine Laval. Turbine Parsons	467-470
378-382	Moteurs à explosion. Machines à gaz; types divers; moteurs à quatre temps. Moteurs à pétrole	470-474
<hr/>		
<h2>Chapitre IV.</h2>		
<h3>Volants régulateurs et freins.</h3>		
383-389	Volants	475-480
390-394	Régulateur à force centrifuge. - Régulateurs isochrones	480-485 ^e
395-398	Modérateurs et freins	485 ^e -489 ^h
<hr/>		
<h2>Chapitre V.</h2>		
<h3>Calcul des tensions des liens dans une machine.</h3>		
399-401	Calcul des tensions dans le mouvement rectiligne	488 ^b -489 ⁱ
402-404	Réactions des arbres tournants	489 ⁱ -492 ^l

Livre VIII. Élasticité.

Chapitre I.

Compléments à la cinématique des milieux continus.

N ^{os}		Pages
405-406	Déformation infinitésimale d'un corps continu: translation, rotation, déformation pure	481-485
407-409	Quadrique des dilatations. Propriétés géométriques et invariance de la déformation pure. Glissements. Dilatation cubique	485-493

Chapitre II.

Tensions intérieures.

416-417 418	Forces de contact intérieures Équilibre du tétraèdre	494-495 495-496
419-422 423-425	Équations générales de l'équilibre et du mouvement. Quadrique directrice des tensions. Ellipsoïde des tensions	497-501 501-504

Chapitre III.

Relations entre les déformations et les tensions.

426-428	Tensions correspondant à un état de déformation donné	504-506
429-432	État naturel. Corps isotropes	506-511

Chapitre IV.

433-435	Équilibre élastique d'un corps isotrope. Équations d'équilibre et conditions à la surface. Caractère unique de la solution	511-516
---------	--	---------

N ^{os}		Pages
136	Superposition des états d'équilibre	516
437-438	Fonction des déplacements	516-519
<hr/>		
Chapitre V		
Applications.		
439-440	Compression normale et uniforme d'un corps isotrope	520-522
441-442	Extension longitudinale d'un prisme	522-525
443-446	Équilibre d'une couche cylindrique. Frettage des canons	525-531
447	Torsion d'un cylindre	531-534
448-453	Équilibre d'un fil imparfaitement flexible ou d'une tige de très petite section. Courbe élastique	534-543
454	Limite de la résistance à la flexion d'une tige rectiligne	543-541
<hr/>		
Chapitre VI		
Petits mouvements des corps élastiques.		
456	Équations générales	547-548
457-459	Mouvement vibratoire par ondes planes Propagation de la lumière	548-553
460	Comparaison avec les petits mouvements des fluides	553-555
461-462	Solides plastiques et fluides visqueux	555-558

Errata.

Page 83. — Compléter les égalités de la ligne 22 par les suivantes :

$$x_1 \equiv x_2, \quad x_3 \equiv x_4, \quad \dots \quad x_{2j+1} \equiv x_{2j}$$

$$y_1 \equiv y_2, \quad y_3 \equiv y_4, \quad \dots \quad y_{2j-1} \equiv y_{2j},$$

et les égalités de la ligne 26 par les suivantes :

$$X_1 = X_2, \quad \dots \quad Y_{2j-1} = X_{2j},$$

$$Y_1 = Y_2, \quad \dots \quad Y_{j-1} = Y_{2j}.$$

Page 112. — Remplacer la note 2 par la suivante :

L'influence de la lune donnerait lieu à des remarques analogues, en confondant dans une première approximation le plan de l'écliptique et celui de l'orbite lunaire. Quant à l'influence des planètes, elle est négligeable.

Page 185. — La note I fait partie du texte et doit y être intercalée avant la 6^e ligne à partir du bas.

Note I

Note I.Frein hydraulique.⁽¹⁾

Cet appareil a pour but d'amortir le recul des pièces d'artillerie. Il consiste essentiellement en un cylindre dans lequel le recul fait pénétrer un piston lié à la pièce. Le piston, en s'enfonçant, refoule de l'eau qui passe vers sa face postérieure. Nous admettrons que le passage s'effectue par un jeu ménagé à cet effet entre le piston et la paroi du cylindre. Soit, à un instant quelconque du recul, ω la surface totale du jeu et u la vitesse de passage de l'eau. Dans le temps dt le volume du liquide qui passe est $\omega u dt$. Dans le même temps, si V est la vitesse et S la surface du piston, celui-ci déplace un volume $SV dt$. En a donc :

$$(1) \quad SV = \omega u .$$

Soit P la pression de l'eau contre le piston au même instant (par unité de surface). On peut, par analogie avec le théorème de Coricelli, admettre que u^2 est proportionnel à P et écrire, en appelant K une constante

$$u^2 = 2KP$$

La pression P exerce sur le canon une force retardatrice PS qu'il y a intérêt à rendre sensiblement constante de façon à développer à chaque instant la plus grande résistance compatible avec la solidité des organes. Supposons cette condition remplie, et voyons les conséquences qu'elle entraîne.

Nous admettons que les autres résistances éprouvées pendant le recul par le canon (et le piston qui lui est lié) sont également constantes et représentées par une force R ajoutée à PS .

Le principe des forces vives appliqué, pour un déplacement élémentaire dx du piston donne, en appelant M la masse totale du piston et du canon et en supposant la vitesse de l'ensemble égale à V :

$$MVdV = -(PS + R) dx .$$

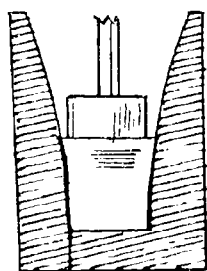
Intégrons depuis une valeur initiale quelconque x

N° 398 oublié dans le texte.

jusqu'à la valeur finale $x=L$, pour laquelle le recul est terminé, et pour laquelle, par suite, la vitesse s'annule. Il vient :

$$(3) \quad MV^2 = 2(PS+R)(L-x).$$

D'ailleurs, en vertu des équations (1) et (2), V^2 est égal à $\frac{2\omega^2 KP}{S^2}$.



Substituant dans l'équation (3) les seules quantités variables sont ω et $L-x$ et l'on voit que ω doit varier proportionnellement à $\sqrt{L-x}$.

Pour réaliser la variation progressive du jeu ω on peut, par exemple, donner aux parois intérieures du cylindre une courbure convenable, comme l'indique la figure.

En pratique, il convient de faire en sorte que le jeu ne soit pas tout à fait nul pour $x=L$, de manière à faciliter le retour du piston à sa position initiale.

Note II. - Équations intrinsèques du mouvement de la toupie fixée par un point de son axe.

On peut donner une forme plus géométrique aux équations du N° 54. Soit OZ l'axe de la toupie, $\overline{O\omega}$ la composante normale à OZ de la rotation instantanée $\overline{O\omega}$, et Ol la perpendiculaire au plan $ZO\omega$ menée dans un sens tel que le trièdre $Ol\omega Z$ soit positif. Les équations du mouvement peuvent s'écrire :

$$(1) \quad C \frac{dp}{dt} = N, \quad A \frac{d\omega_1}{dt} = M_1, \quad \omega_1 (A\omega - r) = I_1,$$

N , M_1 et I_1 désignant le moment résultant par rapport à OZ , $O\omega$, et Ol des forces extérieures appliquées au solide, r la projection de $\overline{O\omega}$ sur OZ , et $\omega_1 dt$ l'angle infinitésimal (compté autour de OZ) que font les directions de $\overline{O\omega}$, qui correspondent aux instants t et $t+dt$.

Prenons sur OZ un segment om égal à l'unité; la vitesse V du point m de la toupie a le sens ol et la valeur ω_1 . D'autre part, soit R la courbure de la courbe

XVI.

sphérique Γ décrite par m , et ρ sa courbure sphérique ($\rho = \sin \beta$): le plan ZOW , est normal à la courbe Γ , et OW , fait avec la normale principale un angle égal à β ; si ε est l'angle des deux tangentes à Γ (ou encore l'angle des deux plans ZOW), qui correspondent aux instants t et $t+dt$, on a:

$$R = \sin \beta = \frac{V dt}{\varepsilon}; \quad \text{mais } \varepsilon = \frac{u dt}{\cos \beta}, \quad \text{d'où}$$

$$u = V \cotg \beta.$$

Les équations (1) peuvent donc s'écrire:

$$(2) \quad C \frac{dr}{dt} = N, \quad A \frac{dv}{dt} = M, \quad AV^2 \cotg \beta - CV = I_1;$$

dans ces équations, V est la vitesse absolue du point m de OZ ($Om=1$); P est la projection de W sur OZ ;

ρ est la courbure sphérique du lieu du point m ;
 N, I_1 , et M , désignent le moment résultant des forces extérieures appliquées au solide par rapport à OZ , par rapport à Ol parallèle à \vec{V} et de même sens, et par rapport à la demi-droite op telle que le trièdre $Ol\mu Z$ soit trirectangle et positif.

Ces équations, qui sont à reprocher des équations intrinsèques du mouvement d'un point sur une surface, sont dues au commandant Guyou.

Dans le cas d'un corps pesant, si on tient compte des intégrales premières (2), (3) et (4) du N.° 64, la troisième équation intrinsèque donne:

$$(3) \quad \cotg \beta = \frac{C}{V} + \frac{C_1}{V^3},$$

C et C_1 désignant deux constantes, qui sont positives dans le cas où ψ s'annule. La relation (3) met aisément en évidence (par une méthode géométrique) le fait que la trajectoire Γ , si elle présente une boucle, la tourne vers le haut [forme III, de la figure 1, p. 97] et jamais vers le bas.