

LA
THÉORIE GYROSTATIQUE

DE LA
LUMIÈRE.

PAR
H. CHIPART,
INGÉNIEUR DES MINES.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1904

LA
THÉORIE GYROSTATIQUE
DE LA
LUMIÈRE.

33747 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

LA
THÉORIE GYROSTATIQUE

DE LA
LUMIÈRE,

PAR
H. CHIPART,
INGÉNIEUR DES MINES.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1904
(Tous droits réservés.)

THÉORIE GYROSTATIQUE

DE LA

LUMIÈRE.

INTRODUCTION.

L'éther est un milieu dénué de rigidité élastique et uniquement doué de rigidité gyrostatique. Autrement dit, à l'inverse de ce qui se passe dans les milieux matériels, une déformation sans rotation n'entraîne aucun travail des actions intérieures, tandis qu'une simple rotation suffit pour produire une variation du potentiel interne : telle est l'hypothèse fondamentale énoncée en 1890 par lord Kelvin et qui résume la théorie gyrostatique. Avant d'en développer les conséquences, et pour en faire ressortir toute la portée, nous nous proposons de rappeler les progrès accomplis dans l'étude de la lumière.

Avec la découverte du célèbre principe qui ramène l'effet d'une onde à la résultante des effets de ses éléments considérés chacun comme un point particulier, Huygens jette les bases de la théorie et donne un premier aperçu du mécanisme de la réflexion, de la réfraction et de la biréfringence. Euler étend plus loin la comparaison entre la lumière et le son ; il insiste sur la notion de périodicité des vibrations et assimile les différences de coloration à des différences de tonalité. Young ramène au principe des interférences le phénomène des anneaux colorés, mais ses raisonnements

C.

1

peu rigoureux ne rencontrent aucune faveur et sont complètement inconnus de Fresnel lorsque celui-ci entreprend ses premières recherches sur l'Optique.

On sait quelle impulsion inattendue devait recevoir la Théorie ondulatoire pendant la courte et brillante carrière scientifique d'Augustin Fresnel.

Après avoir réfuté par une étude approfondie de la diffraction les objections formulées jadis par Newton, Fresnel s'attaque à l'explication du phénomène de la polarisation, resté incompréhensible depuis sa découverte par Huygens : il tente sans succès de produire l'interférence des deux rayons réfractés par le spath d'Islande; modifie, en collaboration avec Arago, les conditions expérimentales et conclut en toute certitude à la non-interférence des rayons polarisés à angle droit. Dès ce moment la notion fondamentale de la transversalité s'impose à son esprit, et, dans ce paradoxe apparent, il aperçoit la liaison entre les phénomènes récemment découverts par Malus, Arago, Biot, Brewster, qui, à première vue, semblaient se rapporter à des causes profondément distinctes : l'interprétation physique de la polarisation rotatoire, les formules de la réflexion et de la réfraction, la loi de l'ellipsoïde optique sont obtenues comme des conséquences de ce principe et font ressortir la merveilleuse intuition qui a conduit Fresnel à de telles découvertes, alors que la Théorie de l'élasticité, à peine ébauchée, lui était encore inconnue.

Le « Premier Mémoire sur la double réfraction » date en effet du 19 novembre 1821, et ce fut le 14 avril de la même année que Navier présenta son « Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques », créant ainsi la *Mécanique des milieux continus* (1).

Navier aborde successivement le problème par deux voies distinctes : dans une première méthode, il calcule directement la résultante des forces qui agissent sur chaque molécule matérielle quand le milieu est déformé. C'est le point de vue qui devait être longuement développé par Cauchy dans ses recherches sur les forces centrales, et qui a guidé Franz Neumann dans ses travaux

(1) Le Mémoire de Navier ne fut publié qu'en 1827 (*Mémoires de l'Institut*, t. VII), c'est-à-dire l'année même de la mort de Fresnel.

sur la double réfraction. La seconde méthode, bien plus profonde, est une application des principes de la *Mécanique analytique* de Lagrange. Elle consiste à calculer le potentiel des actions internes, et à annuler sa variation diminuée des travaux virtuels des forces extérieures et des forces d'inertie. Les intégrations par parties fournissent enfin les trois équations indéfinies et les équations aux limites.

L'analyse de Navier n'était appliquée qu'aux solides isotropes, avec des hypothèses particulières sur la nature des forces intérieures. Green, mettant à profit les travaux de Cauchy sur la déformation, énonça en 1837 la forme la plus générale du potentiel dans les milieux continus : les actions intérieures doivent admettre un potentiel, et ce potentiel, localisé dans chaque élément de volume, est fonction des paramètres qui définissent la déformation subie par l'élément de volume, c'est-à-dire des dérivées du déplacement par rapport aux coordonnées. Grâce à ce principe, la Mécanique des milieux continus avait reçu sa forme définitive, et l'on possédait enfin une méthode puissante permettant de résoudre la plupart des problèmes posés par les découvertes de Fresnel : signification mécanique de la transversalité, double réfraction, polarisation rotatoire, dispersion normale, réflexion et réfraction à la surface des milieux transparents holoédres ou hémioédres, etc.

Il pourrait sembler inconcevable que la plupart des recherches se soient, dès le début, égarées dans une fausse direction. En fait, par un brusque revirement d'idées, la transversalité, si discutée jusqu'alors, parut chose toute naturelle lorsque Cauchy eut montré que les solides élastiques participaient à la fois des deux modes de vibration des fluides et de l'éther ; et, sur la foi de cette analogie trompeuse, on se dépensa en tentatives stériles en vue d'assigner aux milieux élastiques l'impossible tâche de ne propager que des vibrations transversales.

La faveur persistante dont a joui auprès de certains physiciens la théorie élastique trouve sa raison dans cette particularité analytique qui leur semblait une justification de leurs hypothèses : c'est que la théorie élastique était, en apparence, compatible avec la condition de transversalité et conduisait, sans hypothèse additionnelle, à la découverte de l'ellipsoïde optique, comme l'ont montré

en particulier Neumann et Green. En étendant l'approximation aux termes d'ordre supérieur, on aurait de même obtenu la quadrique de gyration et les surfaces invariantes qui donnent les lois de la polarisation rotatoire et de la dispersion normale. Mais une explication des faits ne constitue pas un criterium permettant de conclure à l'exactitude des hypothèses sur lesquelles elle est basée. Le principe d'Hamilton nous apprend au contraire que les lois de la propagation dans un milieu indéfini sont entièrement déterminées par la connaissance de la valeur moyenne du potentiel; et, par conséquent, on peut déduire d'une explication exacte une infinité d'explications absurdes au point de vue mécanique, en ajoutant au potentiel primitif un potentiel dont la valeur moyenne soit nulle.

Nous avons là une démonstration de ce principe, progressivement dégagé par la discussion des théories successives, que la prévision de nouveaux phénomènes vérifiés plus tard par l'expérience n'établit nullement le bien-fondé des hypothèses. Il est, avant tout, indispensable que ces hypothèses n'impliquent pas de contradiction avec les principes de la Mécanique. Enfin, la Physique mathématique ne saurait être un prétexte à formules empiriques, mais le physicien est tenu de se préoccuper du sens mécanique de ses équations et de chercher dans la théorie une compréhension plus approfondie de la constitution de la matière.

C'est dans cet ordre d'idées qu'on se trouve amené à faire porter la discussion des théories de la lumière sur les trois points suivants :

- Signification mécanique de la transversalité ;
- Principe de continuité des pressions ;
- Principe de stabilité.

1° *Signification mécanique de la transversalité.* — Le potentiel élastique est, en première approximation, une forme quadratique des trois dilatations et des trois glissements. Cette forme à 21 coefficients est la somme de covariants de deux surfaces, savoir : une surface du 4^e ordre (15 coefficients) découverte par Haughton, et une quadrique (6 coefficients) découverte par Rankine. Annuler la quadrique de Rankine équivaut à imaginer un milieu à forces centrales, et la signification mécanique des 6 conditions est rendue tangible. Annuler au contraire la surface

de Haughton équivaut à imaginer la transversalité des vibrations : la quadrique de Rankine joue alors le rôle de l'ellipsoïde optique ; mais, dans ce dernier cas, le résultat est la conséquence de 15 relations numériques dont la signification mécanique n'a pu être dégagée.

Ainsi, entre le principe énoncé plus haut et l'hypothèse fondamentale qui se trouve à la base de la théorie élastique, surgissait une contradiction de nature à en faire suspecter le caractère artificiel. En fait, cette théorie n'a pas reçu sa consécration dans l'enseignement ; la majorité des physiciens ont persisté à conserver, en dépit de l'insuffisance manifeste des raisonnements qui ont servi à les établir, les équations proposées par Fresnel, et cette préférence était justifiée, car les équations de Fresnel exprimaient des rapports vrais : qu'on y remplace le mot « vibration » par le mot « rotation », et le mot « force » par le mot « couple », on obtiendra les équations de la théorie gyrostatique.

2° *Continuité des pressions.* — A l'origine de la théorie de l'élasticité, la continuité des pressions à la surface de séparation de deux milieux constituait un dogme évident. Or il fallut reconnaître qu'après annulation de la surface de Haughton ce principe était contredit par les équations de continuité nécessaires pour rendre compte des lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière. Cauchy crut à l'inexactitude du principe et tenta d'en donner la raison. Plus tard, Kirchhoff rechercha dans un potentiel complémentaire réductible à des intégrales de surface, et, par suite, sans influence sur les équations indéfinies, l'appoint qui manquait pour parfaire la continuité des pressions. Mais, dans cette hypothèse additionnelle, il est impossible de rendre compte des valeurs particulières des coefficients de ce potentiel superficiel. La difficulté signalée précédemment ne fait que s'aggraver.

3° *Stabilité de l'équilibre.* — D'après Lagrange, la condition nécessaire et suffisante de stabilité est que le potentiel interne soit un minimum. Or, si l'on annule la surface de Haughton et si l'on réduit par suite le potentiel élastique à un covariant de la quadrique de Rankine, on ne peut obtenir une forme définie positive, et, par suite, la condition de stabilité ne saurait être remplie.

En définitive, le mécanisme de la transversalité reste une énigme,

la continuité des pressions ne peut s'expliquer qu'à l'aide d'hypothèses additionnelles dont le caractère artificiel est manifeste, enfin la propagation par ondes exclusivement transversales devient une absurdité mécanique, puisqu'elle équivaut à l'instabilité. Au total le désaccord est complet; on se trouve engagé dans une impasse, et, pour retrouver la véritable voie, il faut revenir à l'origine même de la mécanique des milieux continus.

Quelle est l'hypothèse fondamentale de la théorie de l'élasticité? C'est que le potentiel interne qui serait, en dehors de toute interprétation mécanique, une fonction arbitraire des neuf dérivées du déplacement se réduit à une fonction des six dilatations et glissements. Cette notion est évidente tant qu'il s'agit de centres de forces ou même d'actions intérieures définies par les positions relatives des points matériels; mais elle dégénère en hypothèse inconsciente quand on la généralise à tous les milieux mécaniquement possibles. Au lieu de s'inspirer de cette idée d'Huygens (1) que l'élasticité de l'éther résultait d'un mode de mouvement d'une matière plus subtile, les partisans de la théorie élastique ont admis que son potentiel interne est indépendant de la rotation. Ils ont, en somme, raisonné comme cet observateur qui étudierait les mouvements d'un gyrostatis se dérochant par un déplacement transversal à l'action qui le sollicite, et chercherait vainement dans des causes extérieures l'explication des effets dus en réalité aux forces d'inertie.

La conclusion de cet aperçu s'impose : il n'est pas légitime de toujours restreindre le potentiel interne à un potentiel élastique, et il faut revenir à l'équation fondamentale sous sa forme la plus générale, telle qu'elle s'était présentée à l'origine

$$\int \rho \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \delta u + \frac{d^2 v}{dt^2} \delta v + \frac{d^2 w}{dt^2} \delta w \right) d\omega + \delta \int W(\rho, q, r, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) d\omega = 0.$$

(1) « Je diray pourtant en passant qu'on peut concevoir que ces particules de » l'éther, non obstant leur petitesse, sont encore composées d'autres parties et » que leur ressort consiste dans le mouvement tres-rapide, d'une matière sub- » tile, qui les traverse de tous costez; et contraint leur tissu à se disposer en » sorte, qu'il donne un passage à cette matière fluide le plus ouvert, et le plus » facile qui se puisse. » (HUYGENS, *Traité de la Lumière*, p. 13.)

Cette équation, dans laquelle

$$(u, v, w), \quad \left(\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}q, \frac{1}{2}r\right) \quad (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$$

représentent le déplacement, la rotation et les dilatations et glissements, résolue par les méthodes de la Mécanique analytique, fournit les trois équations indéfinies

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \frac{d^2 u}{dt^2} &= \left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \right) + \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz}, \\ \rho \frac{d^2 v}{dt^2} &= \left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} \right) + \frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dy}, \\ \rho \frac{d^2 w}{dt^2} &= \left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} \right) + \frac{dT_1}{dx} + \frac{dT_2}{dy} + \frac{dN_3}{dz}, \end{aligned} \right.$$

avec

$$P = \frac{dW}{dp}, \quad N_1 = \frac{dW}{da_1}, \quad T_1 = \frac{dW}{db_1},$$

et ces équations suggèrent à première vue le mécanisme de la transversalité :

Dans les milieux élastiques, W ne dépend que des dilatations et glissements, et les équations se réduisent à la forme bien connue

$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz},$$

.....

Dans les milieux gyrostatiques, W sera uniquement fonction de la rotation, et les équations se réduiront à

$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy},$$

.....

d'où l'on déduit, dans les milieux homogènes, la relation

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = 0,$$

qui exprime la transversalité.

Pour justifier cette première induction, on formera l'expression générale des potentiels qui vérifient la condition de transversalité et l'on démontrera que, parmi toutes les solutions du problème, le potentiel gyrostatique est le seul qui satisfasse au principe de

stabilité. Cette forme de potentiel est d'ailleurs compatible avec le principe de la continuité des pressions, ce qui nous explique le succès de la tentative de Kirchhoff : en ajoutant un potentiel de surface au potentiel de volume fourni par la théorie élastique, Kirchhoff n'a fait que reconstituer un potentiel gyrostatique.

En résumé, la théorie gyrostatique de lord Kelvin donne le mécanisme de la transversalité qu'on cherchait en vain depuis plus d'un demi-siècle, et se trouve à l'abri des objections qui ont été soulevées contre la théorie élastique. Il n'est pas inutile de faire remarquer que les équations posées dès 1839 par Mac Cullagh correspondent à la théorie gyrostatique. Mais, faute d'avoir fait connaître la signification mécanique de ses formules, les travaux si remarquables de ce physicien, trop en avance sur son époque, ne se sont pas imposés dès leur apparition aussi complètement qu'ils le méritaient.

Le Mémoire actuel sera consacré à l'exposé et au développement de la théorie gyrostatique.

Le Chapitre I rappelle d'abord, afin de fixer les notations, quelques notions sommaires sur la symétrie des milieux cristallisés et l'étude cinématique des déformations. Il traite ensuite de l'hypothèse fondamentale de Green et des équations de la Mécanique analytique qui en sont la conséquence.

Le Chapitre II est consacré à l'étude de la propagation dans un milieu gyrostatique indéfini, par deux méthodes différentes : la méthode analytique, habituellement utilisée jusqu'à présent, et la méthode géométrique qui découle de l'application du principe d'Hamilton aux équations du mouvement, linéaires et à coefficients constants.

Le Chapitre III traite de la réflexion et de la réfraction à la surface des milieux transparents doués de pouvoir rotatoire et de dispersion. On montrera que le problème de la réfraction uniradielle, résolu en première approximation par Mac Cullagh, est susceptible d'une généralisation complète qui définit géométriquement les éléments des vibrations incidentes uniradielles.

La propagation dans un milieu indéfini vérifiant l'équation de Green est étudiée dans le Chapitre IV. On en déduira l'expression

générale des potentiels vérifiant la condition de transversalité, et l'on retrouvera les lois étudiées plus haut. Les résultats seront discutés au point de vue de la continuité des pressions et de la stabilité de l'équilibre.

Enfin on terminera, au Chapitre V, par la démonstration d'un principe que l'étude des ondes lumineuses a mis progressivement en évidence et qui paraît avoir guidé Fresnel dans sa découverte de l'ellipsoïde optique : c'est que toute loi relative à la matière cristallisée peut être définie par des surfaces invariantes. On en fera l'application à quelques phénomènes physiques, et en particulier à la dispersion normale dans les cristaux.



CHAPITRE I.

SYMÉTRIE DES MILIEUX CRISTALLISÉS. — GRANDEURS SCALAIRES ET VECTORIELLES.
ÉTUDE CINÉMATIQUE DES DÉFORMATIONS. — HYPOTHÈSE FONDAMENTALE DE GREEN.
ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

I. — Symétrie. — Grandeurs scalaires et vectorielles.

1. *Milieux cristallisés. — Symétrie directe et inverse.* —
Soit la substitution (S)

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 = f(x, y, z), \\ y_1 = \varphi(x, y, z), \\ z_1 = \psi(x, y, z) \end{cases}$$

qui fait correspondre à un point $M(x, y, z)$ un point homologue $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

Un ensemble E de points M possède la symétrie définie par la substitution (S) quand il coïncide avec son transformé E_1 .

Les substitutions qui définissent la symétrie des milieux matériels doivent satisfaire à la condition fondamentale de laisser invariable la distance de deux points arbitraires. Elles sont, par suite, linéaires et orthogonales, et c'est exclusivement à des substitutions de cette nature que se rapporteront tous les caractères d'invariance que l'on sera amené à considérer dans la suite de ce Mémoire.

A moins d'indication contraire, nous rapporterons constamment le milieu à trois axes coordonnés rectangulaires formant trièdre direct (¹). Dans ces conditions, la symétrie du milieu sera définie

(¹) Le trièdre $Oxyz$ est, par définition, direct, lorsque l'observateur, placé suivant Oz et ayant les pieds en O , voit s'effectuer de gauche à droite la rotation inférieure à 180° qui amène Ox sur Oy .

par des substitutions de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = x_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z, \\ y_1 = y_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z, \\ z_1 = z_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z, \end{cases}$$

les a , b , c désignant les cosinus directeurs de trois directions rectangulaires A, B, C. Leur déterminant D

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

est, en valeur absolue, égal à l'unité et l'on est amené à distinguer deux cas :

1° Le trièdre (OABC) est direct ($D = 1$). Les formules (1) représentent le déplacement d'un corps solide, c'est-à-dire un mouvement hélicoïdal. La substitution et la symétrie qui lui correspondront seront dites *directes*.

2° Le trièdre (OABC) est inverse ($D = -1$). La substitution et la symétrie correspondante seront dites *inverses*.

Un cas particulier de symétrie inverse est fourni par la substitution

$$\frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y} = \frac{z_1}{z} = -1,$$

c'est la symétrie par rapport à un centre, c'est-à-dire l'*inversion*, au sens donné par les cristallographes.

2. Toute substitution inverse équivaut au produit d'une substitution directe par une inversion.

Deux substitutions qui ne diffèrent que par la translation sont dites *isomorphes*.

Le produit de plusieurs substitutions directes est une substitution directe.

Le produit de plusieurs substitutions inverses est une substitution directe ou inverse suivant que les facteurs du produit sont en nombre pair ou impair.

Si les substitutions S_1, S_2, \dots, S_n sont respectivement isomorphes à S'_1, S'_2, \dots, S'_n , les produits $S_1 S_2 \dots S_n$ et $S'_1 S'_2 \dots S'_n$ seront isomorphes entre eux.

3. Lorsque les substitutions S_1, S_2, \dots, S_n sont telles que le produit $S_i S_k$ de deux quelconques d'entre elles soit égal à l'une des substitutions de la suite S_1, S_2, \dots, S_n , on dit que cette suite forme un groupe de substitutions.

Dans le cas des milieux cristallisés, ce groupe contient nécessairement trois translations non situées dans le même plan, car la constitution de la matière est périodique. On en conclut que les axes de symétrie sont nécessairement d'ordre 2, 3, 4 ou 6; et qu'il suffit de limiter le choix des éléments de symétrie inverse au centre, au plan de symétrie et à l'axe quaternaire inverse.

Si l'on mène par un même point de l'espace les axes de rotation (directs ou inverses) isomorphes aux axes hélicoïdaux (directs ou inverses) qui définissent la symétrie du milieu, l'ensemble de ces substitutions (en y comprenant, s'il y a lieu, le centre de symétrie) forme un groupe d'opérations qui définit le type de symétrie du cristal considéré.

On sait que la solution de ce dernier problème, ébauchée par Haüy et Delafosse, a été obtenue par Hessel et par Bravais, qui ont énuméré les 32 types de symétrie de la matière cristallisée, tandis que le problème plus général de la recherche des axes hélicoïdaux qui définissent la structure même de la matière a fait l'objet des travaux de MM. Jordan, Sohncke, Fedorow et Schœnflies, travaux qui ont conduit à la découverte des 230 types de structure. Si l'observation ne pouvait porter que sur une matière homogène, exempte de macles et de groupements, et qui serait dénuée de caractères de symétrie limite, la recherche du type de structure correspondant à chaque cristal serait chose illusoire, et l'on se trouverait réduit à limiter le champ de ses investigations au type de symétrie. Ce dernier point de vue est nécessairement le seul que l'on ait à envisager dans le Mémoire actuel, qui est consacré à l'étude des milieux continus.

Le réseau des translations participe de la symétrie du cristal; les cristallographes ont donc été amenés à le choisir comme base de la classification, et à répartir les 32 types de symétrie en 7 classes distinctes de réseaux :

Cubique (5), Hexagonal (7), Rhomboédrique (5), Quadratique (7),
Orthorhombique (3), Clinorhombique (3), Triclinique (2).

4. *Grandeurs scalaires directes et inverses.* — On appellera *grandeur scalaire* toute fonction des coordonnées dont l'expression analytique ne sera pas modifiée par une substitution orthogonale directe.

Autrement dit, soit une fonction

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots)$$

qui devient après la substitution

$$\varphi_1(x'_1, y'_1, z'_1, x'_2, y'_2, z'_2, \dots),$$

cette fonction φ représentera une grandeur scalaire lorsque la suppression des accents dans les x'_1, y'_1, \dots entraînera l'identité

$$\varphi \equiv \varphi_1.$$

En vertu de leur définition géométrique, les deux fonctions

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2,$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

qui représentent respectivement le produit géométrique de deux vecteurs, et le volume du parallélépipède construit sur trois vecteurs, sont des grandeurs scalaires.

Tout scalaire est homogène par rapport à l'ensemble des coordonnées ou se ramène à une somme de scalaires homogènes séparément. Il suffit donc d'étudier les scalaires homogènes.

Dans une substitution inverse les scalaires se comportent de manière différente suivant la parité de leur degré.

Effectuons, en effet, la substitution $\begin{pmatrix} x & y & z \\ -x' & -y' & -z' \end{pmatrix}$, c'est-à-dire l'inversion, on aura

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, y_1, z_1, \dots) &= \varphi(-x'_1, -y'_1, -z'_1, \dots) \\ &= (-1)^n \varphi(x'_1, y'_1, z'_1, \dots) = \varphi_1(x'_1, \dots), \end{aligned}$$

n désignant le degré de la fonction homogène φ .

Comme toute substitution inverse équivaut au produit d'une substitution directe par une inversion, on en conclut que :

1° Les scalaires de degré pair se comportent de la même ma-

nière dans les substitutions directes et inverses. On les appellera des *scalaires directs*; tel est le scalaire $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

2° L'expression analytique des scalaires de degré impair change de signe après une substitution inverse. On les appellera des *scalaires inverses*; tel est le scalaire

$$\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

5. *Grandeurs vectorielles directes et inverses.* — Les considérations précédentes s'étendent aux grandeurs vectorielles.

Le vecteur $OM_1(x_1, y_1, z_1)$ qui aboutit à un point matériel M_1 est un *vecteur direct*.

Soit, au contraire, le vecteur $OP(X, Y, Z)$ perpendiculaire au plan des deux vecteurs $OM_1(x_1, y_1, z_1)$ et $OM_2(x_2, y_2, z_2)$, égal à l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs et dirigé dans un sens tel que le trièdre (OP, M_1, M_2) soit direct. Le produit géométrique de OP et d'un vecteur arbitraire $OM(x, y, z)$ est, en vertu de cette définition, égal au volume du parallélépipède construit sur OM, OM_1, OM_2 . Donc, les composantes X, Y, Z de OP sont définies par l'identité en x, y, z :

$$Xx + Yy + Zz \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Les conséquences de cette identité sont les suivantes :

1° Quand la substitution est directe, les formules de transformation de X, Y, Z sont celles d'un vecteur direct x, y, z ;

2° Quand la substitution est inverse, il faut appliquer les mêmes formules et changer ensuite le signe du résultat, car le déterminant figurant au second membre de l'identité est un scalaire inverse.

Pour ce motif, on donne aux vecteurs qui satisfont aux formules de transformation précédentes le nom de *vecteurs inverses*.

6. *Axe de deux vecteurs.* — Le vecteur inverse $OP(X, Y, Z)$ qui vient d'être défini s'appelle l'*axe des deux vecteurs* $OM_1(x_1, y_1, z_1)$ et $OM_2(x_2, y_2, z_2)$.

Ses composantes, qui sont les trois déterminants du Tableau rectangulaire

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

seront, dans le cours de ce Mémoire, représentées par la notation de Grassmann

$$(2) \quad X = [x_1.x_2], \quad Y = [y_1.y_2], \quad Z = [z_1.z_2],$$

qui a l'avantage de rappeler leur mode de formation.

Axe de plusieurs vecteurs. — Soit OQ l'axe de OM_2 et de OM_3 ; par définition, l'axe de OM_1 et de OQ s'appelle l'*axe des trois vecteurs* OM_1, OM_2, OM_3 .

On le représentera par la notation

$$X = [x_1.x_2.x_3], \quad Y = [y_1.y_2.y_3], \quad Z = [z_1.z_2.z_3],$$

et l'on a, par définition

$$[x_1.x_2.x_3] = [x_1.x]$$

avec

$$x = [x_2.x_3],$$

d'où, en remplaçant les binomes alternés x, y, z par leurs valeurs :

$$(3) \quad [x_1.x_2.x_3] = x_2(x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3) - x_3(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2).$$

De cette formule (3) on déduit les relations

$$\begin{aligned} [x_1.x_2.x_3] + [x_2.x_3.x_1] + [x_3.x_1.x_2] &\equiv 0, \\ x_1[x_1.x_2.x_3] + x_2[x_2.x_3.x_1] + x_3[x_3.x_1.x_2] &\equiv 0. \end{aligned}$$

La définition précédente s'étend d'elle-même au cas d'un nombre quelconque de vecteurs, directs ou inverses.

L'axe de n vecteurs dépend essentiellement de l'ordre de ces vecteurs. En particulier,

$$[x_1.x_2] = -[x_2.x_1].$$

L'axe de d vecteurs directs est direct ou inverse suivant que $(-1)^{d+1}$ est positif ou négatif. L'axe de vecteurs inverses est toujours inverse, etc.

7. *Vortex d'un vecteur.* — Les mêmes considérations s'étendent aux symboles de dérivation.

Quand on effectue une substitution orthogonale, les trois symboles $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\frac{d}{dz}$ se transforment à la manière des trois composantes d'un vecteur direct.

Soit donc V une fonction de x, y, z :

Au vecteur x_1V, y_1V, z_1V correspond le vecteur direct

$$\frac{d}{dx} V; \quad \frac{d}{dy} V; \quad \frac{d}{dz} V;$$

Au scalaire $(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)V$ correspond le scalaire direct

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) V.$$

Soient de même u, v, w trois fonctions de x, y, z :

Au scalaire $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ correspond le scalaire direct

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz};$$

Aux composantes $(y_1z_2 - z_1y_2) \dots$ de l'axe de deux vecteurs correspondent les composantes p, q, r d'un vecteur inverse défini par les formules

$$p = \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}, \quad q = \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}, \quad r = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy},$$

ces composantes sont représentées symboliquement par les trois déterminants du Tableau rectangulaire

$$\begin{vmatrix} \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ u & v & w \end{vmatrix},$$

ou, en notation de Grassmann, par

$$(4) \quad p = \left[\frac{d}{dx} \cdot u \right], \quad q = \left[\frac{d}{dy} \cdot v \right], \quad r = \left[\frac{d}{dz} \cdot w \right].$$

Ce sont les composantes du *vortex* du vecteur (u, v, w) . Le vortex d'un vecteur direct est donc un vecteur inverse.

On définira de même le vortex du second ordre de (u, v, w) par les formules

$$(5) \quad p_1 = \left[\frac{d}{dx} \cdot \frac{d}{dx} \cdot u \right], \quad q_1 = \left[\frac{d}{dy} \cdot \frac{d}{dy} \cdot v \right], \quad r_1 = \left[\frac{d}{dz} \cdot \frac{d}{dz} \cdot w \right].$$

Si l'on applique la formule (3) en ayant égard aux termes sur lesquels porte l'opération de dérivation, on obtiendra les formules suivantes, utilisées en Physique mathématique (Électrodynamique, Élasticité, Hydrodynamique, etc.),

$$(5) \left[\frac{d}{dx} \cdot \frac{d}{dx} \cdot u \right] = \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) - \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) u,$$

$$(6) \left[u_1 \cdot \frac{d}{dx} \cdot u_2 \right] = \left(u_1 \frac{du_2}{dx} + v_1 \frac{dv_2}{dy} + w_1 \frac{dw_2}{dz} \right) - \left(u_1 \frac{d}{dx} + v_1 \frac{d}{dy} + w_1 \frac{d}{dz} \right) u_2,$$

$$(7) \left[\frac{d}{dx} \cdot u_1 \cdot u_2 \right] = \frac{d(u_1 u_2)}{dx} + \frac{d(u_1 v_2)}{dy} + \frac{d(u_1 w_2)}{dz} - \left\{ \frac{d(u_2 u_1)}{dx} + \frac{d(u_2 v_1)}{dy} + \frac{d(u_2 w_1)}{dz} \right\}.$$

8. *Potentiel-Vecteur.* — Dans l'étude des milieux gyrostatiques, on donne ce nom au vecteur P, Q, R, dont le vortex représente la force d'inertie. Les équations des milieux gyrostatiques sont en effet

$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} = - \left[\frac{d}{dx} \cdot P \right] = \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}.$$

Pour justifier cette dénomination, il convient de se reporter à la formule générale de décomposition d'un champ de forces, due à Stokes.

La formule de Poisson

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) L + 4 \pi X = 0, \quad L = \int \frac{X_1}{r} d\omega_1$$

combinée avec la formule (5')

$$(5') \left[\frac{d}{dx} \cdot \frac{d}{dx} \cdot L \right] = \frac{d}{dx} \left(\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} \right) - \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) L$$

donne

$$(8) \quad 4 \pi X = - \frac{d}{dx} \left(\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} \right) + \left[\frac{d}{dx} \cdot \frac{d}{dx} \cdot L \right],$$

ou, en écrivant

$$\begin{cases} 4 \pi V = \frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz}, \\ 4 \pi P = - \left[\frac{d}{dx} \cdot L \right], \end{cases}$$

donne

$$(8') \quad X = -\frac{d}{dx}V - \left[\frac{d}{dx} \cdot P \right].$$

Cette formule de décomposition du champ vectoriel le plus général se simplifie dans ces deux cas particuliers :

1° $P = Q = R = 0$. Les formules (8') se réduisent à

$$X = -\frac{d}{dx}V,$$

la condition d'intégrabilité de $X dx + Y dy + Z dz$ est remplie, et l'on dit que le champ vectoriel dérive d'une *fonction potentielle* V .

2° $V = 0$. Les formules (8') se réduisent à

$$X = -\left[\frac{d}{dx} \cdot P \right],$$

et l'analogie avec les formules précédentes conduit à dire que le champ vectoriel dérive d'un *potentiel-vecteur* P, Q, R .

Un champ de forces quelconque dérive donc d'une fonction potentielle et d'un potentiel-vecteur.

9. *Différences entre la symétrie directe et la symétrie inverse.* — Les cristallographes ont depuis longtemps constaté que le pouvoir rotatoire est incompatible avec certains caractères de symétrie. La mécanique des milieux continus permet de le prévoir, car elle nous apprend que le pouvoir rotatoire est représenté par une grandeur inverse.

On verra, en effet, au Chapitre II, n° 27, que le potentiel moyen d'un milieu gyrostatique a pour valeur (au degré d'approximation $W = W_2 + W_3$),

$$(9) \quad \frac{2}{\mu^2} W_m = F(p_1, q_1, r_1) + F(p_2, q_2, r_2) + 2\mu \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} k(\alpha, \beta, \gamma),$$

α, β, γ est la normale à l'onde lumineuse ;

$\mu = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ est la longueur d'onde dans le milieu ;

(p_1, q_1, r_1) et (p_2, q_2, r_2) sont deux diamètres conjugués de l'ellipse décrite par le vortex (vecteur de Fresnel);

F et k sont (au degré d'approximation $W = W_2 + W_3$) deux formes quadratiques, la première en p, q, r , la seconde en α, β, γ .

Pour obtenir les formules de transformation des fonctions F et k , on observera que le potentiel moyen W_m , en vertu de sa signification mécanique, reste invariant quand on effectue un changement d'axes de coordonnées, direct ou inverse.

La présence du facteur μ , variable avec la longueur d'onde, nous apprend de plus que les deux fonctions

$$F(p_1, q_1, r_1) + F(p_2, q_2, r_2)$$

et

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} k(\alpha, \beta, \gamma),$$

sont invariantes séparément. D'ailleurs, le déterminant qui multiplie $k(\alpha, \beta, \gamma)$ est un scalaire inverse, on a donc les formules de transformation

$$(10) \quad \text{Substitution directe...} \begin{cases} F(x, y, z) = F_1(x', y', z'), \\ k(x, y, z) = k_1(x', y', z'), \end{cases}$$

$$(11) \quad \text{Substitution inverse...} \begin{cases} F(x, y, z) = F_1(x', y', z'), \\ k(x, y, z) = -k_1(x', y', z'). \end{cases}$$

La quadrique $F(x, y, z) - 1 = 0$ est donc une surface invariante directe. C'est d'ailleurs l'*ellipsoïde optique* de Fresnel.

Au contraire, la quadrique $k(x, y, z) - 1 = 0$ est une surface invariante inverse. Nous l'appellerons la *quadrique de gyration*. Quand elle n'existe pas, le milieu est dénué de pouvoir rotatoire.

Les conséquences de ce caractère de symétrie sont immédiates : si le milieu possède un élément de symétrie inverse on devra avoir

$$k(x, y, z) \equiv -k(x', y', z'),$$

il en résulte que :

$$1^\circ \text{ Un centre de symétrie } \begin{pmatrix} x & y & z \\ -x & -y & -z \end{pmatrix} \text{ entraîne l'annu-}$$

lation de la fonction $k(x, y, z)$. Autrement dit les milieux holédres sont dénués de pouvoir rotatoire.

2° Un plan de symétrie $z = 0$ $\left(\begin{array}{ccc} x & y & z \\ x & y & -z \end{array} \right)$ donne la condition

$$k(x, y, z) = 2z(B'y + B'x).$$

La quadrique de gyration se réduit à un cylindre équilatère dont $z = 0$ est un des plans asymptotes, et le cristal possède le double pouvoir rotatoire : il est dextrogyre pour toute direction de propagation contenue dans l'un des dièdres formés par les plans asymptotes, lévogyre dans le second dièdre.

3° Un axe quaternaire inverse dirigé suivant Oz $\left(\begin{array}{ccc} x & y & z \\ -y & x & -z \end{array} \right)$ donne la condition

$$k(x, y, z) = A(x^2 - y^2) + 2B''xy$$

et la quadrique de gyration se réduit encore à un cylindre équilatère dont les plans asymptotes se coupent suivant Oz .

En résumé, des trois éléments de symétrie inverse, le centre supprime le pouvoir rotatoire, les deux autres entraînent le double pouvoir rotatoire.

La relation

$$k(x, y, z) = k_1(x', y', z')$$

vérifiée pour une substitution directe, montre que tout caractère de symétrie direct du cristal doit se retrouver dans la quadrique de gyration, et la combinaison de ces résultats avec les précédents résout la question du pouvoir rotatoire pour les 32 types de symétrie : 15 d'entre eux possèdent le pouvoir rotatoire, les 17 autres sont inactifs.

C'est ainsi que le quartz ($\Lambda^3, 3L^2$) possède le pouvoir rotatoire : son ellipsoïde optique et sa quadrique de gyration sont de révolution autour de l'axe ternaire. De même, le chlorate de soude ($3\Lambda^3, 4L^3$) est actif. Au contraire, l'apatite (Λ^6, C, II) et la tourmaline ($\Lambda^3, 3P$) sont dénuées de pouvoir rotatoire, et il en est de même des types (Λ^3, II), — ($\Lambda^4, 2P, 2P'$), . . .

La même discussion établit que le pouvoir rotatoire doit exister dans les cinq cristaux biaxes répondant aux symétries

suivantes :

OC.....	Système triclinique.
P.....	} Système clinorhombique.
L ²	
L ² , P', P''.....	} Système orthorhombique.
L ² , L' ² , L'' ² ...	

II. — Étude cinématique des déformations. — Dynamique des milieux continus. — Équations de Lagrange. — Milieux élastiques et gyrostatiques.

10. *Étude cinématique des déformations. Dilatations, glissements, rotation.* — Soient

x, y, z les coordonnées du point matériel M;
 $x + u, y + v, z + w$ ses coordonnées après la déformation du milieu. Le vecteur (u, v, w) représente le déplacement du point M résultant de la déformation.

Pour un second point M₁ de coordonnées $x + h, y + k, z + l$, le déplacement absolu sera $u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w$, et le déplacement relatif des deux points M et M₁ aura pour composantes les $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ donnés par le développement en série

$$(12) \quad \Delta u = du + \frac{1}{2!} d^2u + \frac{1}{3!} d^3u + \dots$$

Ceci suppose qu'on restreint l'étude des déformations aux déplacements qui sont des fonctions analytiques.

Par suite de cette hypothèse, qui est à la base de la mécanique des milieux continus, la modification de l'élément de volume qui entoure le point x, y, z est définie par les dérivées de tous ordres de u, v, w , en x, y, z ; et le vecteur $\Delta(u, v, w)$ est la résultante des vecteurs $\Delta_1(u, v, w), \Delta_2(u, v, w), \dots, \Delta_k(u, v, w), \dots$ dont l'expression générale est

$$(13) \quad \Delta_k u = \frac{1}{k!} d^k u = \frac{1}{k!} \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} + l \frac{d}{dz} \right)^{(k)} u.$$

Cauchy a fait l'étude du premier terme, le vecteur $\Delta_1(u, v, w)$,

et a montré qu'on pouvait l'exprimer au moyen de 9 combinaisons linéaires des dérivées premières douées de signification géométrique.

A cet effet, il imagine la forme quadratique

$$\varphi(h, k, l) = a_1 h^2 + a_2 k^2 + a_3 l^2 + b_1 kl + b_2 lh + b_3 hk,$$

et le vecteur p, q, r , autrement dit la forme linéaire $ph + qk + rl$; et il exprime la fonction vectorielle linéaire $\Delta_1(u, v, w)$ comme somme de covariants de ces deux formes, en vertu de l'équation

$$(14) \quad \Delta_1 u = \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dh} + \frac{1}{2} [p \cdot h].$$

L'identification avec

$$\Delta_1 u = h \frac{du}{dx} + k \frac{du}{dy} + l \frac{du}{dz}$$

lui donne les 9 équations linéaires qui définissent les 9 quantités $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, p, q, r$ en fonction des 9 dérivées partielles de u, v, w , et les solutions de ces équations sont

$$(15) \quad a_1 = \frac{du}{dx}, \quad b_1 = \frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}, \quad p = \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} = \left[\frac{d}{dx} \cdot u \right].$$

L'analyse de Cauchy s'étend à un vecteur d'ordre quelconque : le vecteur $\Delta_k(u, v, w)$ est défini par trois surfaces invariantes d'ordre $k + 1, k, k - 1$, et l'une des deux dernières satisfait à la relation d'invariance

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right)^{k'} J_{2k'} = 0,$$

$2k'$ représentant celui des deux nombres h et $k - 1$ qui est pair. (Voir n° 112.)

Revenons à l'étude du vecteur $\Delta_1(u, v, w)$ et calculons les dilatations linéaires et angulaires au point x, y, z . La définition des dilatations supposant les h, k, l infiniment petits, il suffit de réduire $\Delta(u, v, w)$ à son premier terme.

Soient (h_1, k_1, l_1) et (h_2, k_2, l_2) deux vecteurs infiniment petits de longueurs r_1 et r_2 issus du point M et faisant entre eux un angle V. La variation du produit géométrique, $r_1 r_2 \cos V$, de ces

deux vecteurs a pour valeur

$$\Delta(r_1 r_2 \cos V) = \Delta \Sigma h_1 h_2 = \Sigma h_1 \Delta h_2 + \Sigma h_2 \Delta h_1 + \Sigma \Delta h_1 \Delta h_2.$$

ou

$$(16) \quad \Delta(r_1 r_2 \cos V) = h_1 \frac{d\Phi}{dh_2} + k_1 \frac{d\Phi}{dk_2} + l_1 \frac{d\Phi}{dl_2},$$

en posant

$$\Phi(h, k, l) = \varphi(h, k, l) + \frac{1}{2} \left(h \frac{du}{dz} + k \frac{du}{dy} + l \frac{du}{dx} \right)^{(2)},$$

formule d'où l'on déduit les dilatations et glissements dans une déformation finie. Dans tout ce qui va suivre on ne s'occupera que de déplacements infiniment petits, autrement dit on négligera les produits des $u, v, w, \frac{du}{dx}, \frac{d^2 u}{dx^2}, \dots$ vis-à-vis des premières puissances.

Dans cette hypothèse Φ se réduit à φ et la formule (16) nous apprend que :

1° ($V = 0, r_1 = r_2$), $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ représente la dilatation linéaire suivant α, β, γ , et, par suite, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont les trois dilatations suivant Ox, Oy, Oz .

2° ($V = \frac{\pi}{2}, r_1 = r_2 = 1$), $\sum \alpha_i \frac{d\varphi}{dx_i}$ représente la diminution de l'angle de deux droites rectangulaires $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, et, par suite, b_1, b_2, b_3 sont les trois glissements.

Enfin, la formule (14) signifie que la modification de l'élément de volume au point M est (au second ordre près en h, k, l) la résultante d'une rotation $\frac{1}{2} [p \cdot h] \dots$ autour de l'axe $\frac{1}{2} (p, q, r)$, et d'une déformation $\frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dh} \dots$ qui laisse fixe un trièdre trirectangle.

On a donc la signification mécanique du vortex (p, q, r) . C'est le double de la rotation élémentaire.

11. *Équations de la mécanique des milieux continus (Green)*. — Les actions internes dérivent d'un potentiel localisé dans chaque élément de volume, et ce potentiel est fonction des paramètres qui définissent la déformation subie par l'élément de volume, c'est-à-dire des dérivées de tous ordres du déplacement

(u, v, w) par rapport aux trois coordonnées. Enfin le milieu est indéfini, et les déplacements, de même que les forces, sont nuls à l'infini.

Telle est l'hypothèse fondamentale de Green, et les principes de la Mécanique analytique la traduisent par l'équation des travaux virtuels

$$(17) \quad \int \rho \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \delta u + \frac{d^2 v}{dt^2} \delta v + \frac{d^2 w}{dt^2} \delta w \right) d\omega + \delta \int W d\omega = 0.$$

La mécanique des milieux continus laisse entièrement de côté, par définition même, les phénomènes dont la cause doit être recherchée dans la coexistence de deux milieux différents : entraînement des ondes lumineuses par la matière en mouvement, absorption, dispersion anormale, etc. C'est, en un mot, le développement de la conception donnée par Fresnel dans ses études sur la double réfraction :

« Je suppose les particules du cristal et les intervalles qui les séparent infiniment petits par rapport à la longueur d'une ondulation lumineuse, et je considère ici ces particules et l'éther qui les environne comme formant ensemble un milieu homogène. Cette conception mathématique, qui n'est pas applicable aux corps opaques ou imparfaitement transparents, peut représenter cependant, dans beaucoup de cas, les effets mécaniques des corps diaphanes sur la lumière avec une approximation suffisante. » (FRESNEL, *Note sur le calcul des teintes que la polarisation développe dans les lames cristallisées. Œuvres*, p. 637.)

12. Équations de Lagrange. Première forme. — Les équations du mouvement se déduiront de l'équation fondamentale de Green par application du calcul des variations (*Mécanique analytique*, seconde Partie, Section IV) :

Si B est nul à l'infini, l'intégration par parties donne

$$\int_A \frac{dB}{dx} d\omega = - \int_B \frac{dA}{dx} d\omega,$$

et, plus généralement, si les B, DB, D²B, . . . , Dⁿ⁻¹B sont nuls à l'infini, Dⁿ désignant une dérivée quelconque d'ordre n en x, y, z

($D^n = \frac{d^n}{dx^a dy^b dz^c}$), on aura

$$\int A D^n B d\varpi = (-1)^n \int B D^n A d\varpi.$$

Cette formule permettra d'évaluer, en fonction de δu , δv , δw , la variation virtuelle

$$\delta \int W d\varpi,$$

qu'on peut successivement écrire

$$\delta \int W d\varpi = \int \delta W d\varpi = \int \sum \frac{dW}{dD^n u} \delta D^n u d\varpi = \int \sum \frac{dW}{dD^n u} D^n \delta u d\varpi,$$

ou enfin

$$\delta \int W d\varpi = \int \sum (-1)^n \delta u D^n \frac{dW}{dD^n u} d\varpi \quad \left(\begin{array}{l} u = u, v, w \\ n = 1, 2, 3, \dots, n \end{array} \right).$$

Portant cette valeur dans l'équation des travaux virtuels et égalant séparément à zéro les coefficients de δu , δv , δw , on aura les trois équations indéfinies

$$(18) \quad \rho \frac{d^2 u}{dt^2} = \sum_{n=1}^n (-1)^{n-1} D^n \frac{dW}{dD^n u} = \frac{d}{dx} \frac{dW}{du_x} + \frac{d}{dy} \frac{dW}{du_y} + \frac{d}{dz} \frac{dW}{du_z} \\ - \left(\frac{d^2}{dx^2} \frac{dW}{du_{xx}} + \frac{d^2}{dx dy} \frac{dW}{du_{xy}} + \dots \right) + \dots$$

13. *Équation de Lagrange. Deuxième forme.* — Choisissons comme paramètres les dilatations, glissements, composantes du vortex, ainsi que leurs dérivées de tous ordres.

La transformation

$$W \left(\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \dots, \frac{d^2 u}{dx^2}, \dots \right) = \Phi \left(a_1, \dots, b_1, \dots, p, \dots, \frac{da_1}{dx}, \dots \right)$$

est toujours possible, et même d'une infinité de manières dès que s'introduisent les dérivées en u , v , w d'ordre supérieur au premier.

Calculons la variation virtuelle de $\int W d\varpi = \int \Phi d\varpi$. Pour une variation virtuelle δu , δv , δw , les $a_1, \dots, b_1, \dots, p_1, \dots$ éprouvent des variations virtuelles $\delta a_1, \dots, \delta b_1, \dots, \delta p, \dots$, et

la variation correspondante de $\int W d\omega$ a pour valeur

$$\delta \int W d\omega = \int \sum \frac{dW}{dD^n p} \delta D^n p = \int \sum (-1)^n \delta p \cdot D^n \frac{dW}{dD^n p} d\omega$$

($p = a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, p, q, r; n = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$),

ce que nous écrirons

$$\delta \int W d\omega = \int (P \delta p + Q \delta q + R \delta r) d\omega + \int (N_1 \delta a_1 + N_2 \delta a_2 + N_3 \delta a_3 + T_1 \delta b_1 + T_2 \delta b_2 + T_3 \delta b_3) d\omega,$$

les P, ..., N₁, ..., T₁, ... ayant pour valeurs

$$(19) \quad \begin{cases} P = \sum (-1)^n D^n \frac{dW}{dD^n p} \\ N_1 = \sum (-1)^n D^n \frac{dW}{dD^n a_1} \\ T_1 = \sum (-1)^n D^n \frac{dW}{dD^n b_1} \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Enfin, une dernière application de la formule d'intégrations par partie mettra en évidence, dans $\delta \int W d\omega$, les variations $\delta u, \delta v, \delta w$:

$$\int (P \delta p + Q \delta q + R \delta r) d\omega = \int \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ \delta u & \delta v & \delta w \end{vmatrix} d\omega = \int \begin{vmatrix} \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\omega$$

(dans cette notation symbolique, les déterminants sont développés par rapport à leur première ligne),

$$\begin{aligned} \int (N_1 \delta a_1 + \dots) d\omega &= \int \left(N_1 \delta \frac{du}{dx} + T_3 \delta \frac{du}{dy} + T_2 \delta \frac{du}{dz} \right) d\omega + \dots \\ &= - \int \delta u \left(\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} \right) d\omega + \dots, \end{aligned}$$

ce qui fournit les trois équations indéfinies

$$(20) \quad \rho \frac{d^2 u}{dt^2} = \left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \right) + \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz},$$

.....

14. *Milieux élastiques et milieux gyrostatiques.* — Les équations de Lagrange, sous leur deuxième forme, ont été rappelées dans l'Introduction. On y avait supposé que W était une forme quadratique homogène à coefficients constants des 9 dérivées premières de u, v, w . Comme le montre l'analyse précédente, ce résultat est plus général : non seulement les équations gardent la même forme quand l'approximation est poussée aux termes d'ordre supérieur, mais encore la forme analytique de la fonction W reste entièrement indéterminée et W peut contenir explicitement les variables x, y, z . Autrement dit, ces équations s'appliquent aux milieux hétérogènes aussi bien qu'aux milieux homogènes, et ce résultat est fondamental dans l'étude de la réfraction, comme on le verra au Chapitre III.

L'étude des tensions met en évidence une différence essentielle entre les milieux élastiques

$$(21) \quad \rho \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz}$$

et les milieux gyrostatiques

$$(22) \quad \rho \frac{d^2 u}{dt^2} = - \left[\frac{d}{dx} \cdot P \right] = \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}.$$

Les tensions qui s'exercent en tout point d'une surface limitant un volume fini s'obtiennent en remplaçant, dans les seconds membres des équations indéfinies (2^e forme), les symboles de dérivation $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$ par les cosinus directeurs de la normale l, m, n extérieure au volume considéré.

Dans les milieux élastiques, la tension a donc pour composantes

$$p_x = lN_1 + mT_3 + nT_2,$$

c'est-à-dire

$$p_x = \frac{1}{2} \frac{d\Psi}{dl}, \quad p_y = \frac{1}{2} \frac{d\Psi}{dm}, \quad p_z = \frac{1}{2} \frac{d\Psi}{dn},$$

en désignant par $\Psi(x, y, z)$ la forme quadratique (quadrique des tensions)

$$\Psi(x, y, z) = N_1 x^2 + N_2 y^2 + N_3 z^2 + 2T_1 yz + 2T_2 zx + 2T_3 xy.$$

Ces formules expriment que les tensions, dans un milieu élastique,

satisfont à la loi de réciprocité

$$(21') \quad p_{xy} - p_{yx} = 0,$$

et que, par suite, le couple résultant des tensions exercées à la surface d'un élément de volume $d\varpi$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à $d\varpi$.

Il en est tout autrement dans le cas des milieux gyrostatiques : en vertu des équations indéfinies, la tension a pour composantes

$$p_x = [P.l], \quad p_y = [Q.m], \quad p_z = [R.n],$$

autrement dit, elle est l'axe du potentiel-vecteur et de la normale extérieure. On en déduit la formule

$$(22') \quad p_{xy} + p_{yx} = 0;$$

par suite, le couple résultant des tensions exercées à la surface d'un élément de volume $d\varpi$ est, dans les milieux gyrostatiques, de l'ordre de grandeur de cet élément et a pour composantes

$$2P d\varpi, \quad 2Q d\varpi, \quad 2R d\varpi,$$

ce qui nous donne la signification mécanique du potentiel-vecteur.

15. Différents auteurs ont tenté de donner une représentation mécanique des milieux gyrostatiques. Le modèle mécanique, bien connu, proposé par lord Kelvin, est constitué par un ensemble de gyrostats; mais on peut trouver dans sa *Théorie des atomes-tourbillons* un mécanisme qui paraît donner une représentation fidèle des faits.

Soit un ensemble de tourbillons originairement créés au sein d'un fluide incompressible parfait et dont les dimensions sont telles que tout volume $\Delta\varpi$ très petit par rapport aux longueurs d'onde des vibrations lumineuses contienne un nombre très grand de ces tourbillons : tout se passera pour un observateur comme s'il avait affaire à un milieu analogue à l'éther, c'est-à-dire à un milieu isotrope, pourvu de rigidité gyrostatique et d'inertie, et cependant impondérable. On sait, en effet, qu'après avoir vainement tenté de déduire des équations des tourbillons la grandeur mécanique correspondant à la masse astronomique, on a été conduit

à substituer à l'hypothèse précédente la théorie des tourbillons creux qui donne l'explication de la gravitation universelle.

L'intérêt d'un modèle mécanique est de préciser la nature des hypothèses implicitement contenues dans les équations fondamentales. Cherchons donc, dans la théorie des atomes d'éther tourbillons, la signification de l'équation des milieux gyrostatiques ordinaires

$$\int \rho \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \delta u + \frac{d^2 v}{dt^2} \delta v + \frac{d^2 w}{dt^2} \delta w \right) d\omega + \delta \int W(p, q, r) d\omega = 0,$$

qu'on peut encore écrire sous la forme donnée par Hamilton :

$$(23) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} (T - W) dt d\omega = 0, \quad T = \frac{1}{2} \rho \left\{ \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \right\}.$$

Les deux vecteurs u, v, w et p, q, r qui figurent dans la formule (23) ne représentent plus en réalité le déplacement et la rotation dans un milieu rigoureusement continu, mais, au contraire, certaines valeurs moyennes relatives au volume élémentaire $\Delta\omega$ très petit par rapport aux unités. Il n'est plus alors évident que l'expression mécanique à laquelle on attribuera le rôle de force vive soit, dans le cas général (éther + matière), une fonction isotrope. Si on la suppose anisotrope, on sera conduit à regarder dans l'équation d'Hamilton (23) la force vive T comme une forme quadratique des $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$.

Or, on déduit de l'étude des phénomènes lumineux deux résultats essentiels qui vont nous permettre de préciser l'hypothèse précédente, c'est que :

1° L'une des deux fonctions T ou W est nécessairement isotrope, comme le montre la loi de l'ellipsoïde optique qui n'a pu être mise en défaut jusqu'à présent ;

2° Le coefficient de la fonction isotrope est une constante commune à tous les milieux, comme le montrent les lois de la réflexion et de la réfraction.

Il en résulte qu'on ne peut opter qu'entre deux classes de théories gyrostatiques :

Ou bien la force vive est isotrope, comme le pensaient les fondateurs de la mécanique des milieux continus, et l'on retrouve

l'hypothèse fondamentale de Green et les équations de Mac Cullagh;

Ou bien la force vive est anisotrope et, par suite, le potentiel interne doit être isotrope. C'est dans cette catégorie que doivent se ranger les théories de MM. Sarrau, Boussinesq, Glazebrook, etc, ainsi que l'interprétation mécanique des champs électrique et magnétique proposée dès 1847 par lord Kelvin.

Ces deux classes de théories correspondent à deux conceptions opposées des propriétés de la matière. Il est certain que la matière est totalement dénuée de rigidité gyrostatique dans le cas des vibrations sonores; mais cette propriété subsiste-t-elle encore pour les vibrations à haute fréquence? Dans l'affirmative, le potentiel interne W des milieux matériels (éther + matière) sera plus petit que celui du vide, donc T devra être isotrope et l'on aura les équations de Mac Cullagh, tandis que l'hypothèse contraire conduirait à la seconde classe de théories.

Ajoutons que les phénomènes naturels découverts jusqu'à présent s'expliquent aussi facilement dans les deux hypothèses; il est en effet toujours possible de trouver un mode de raisonnement s'adaptant simultanément aux deux théories, par la simple interversion des vecteurs rotation et vibration (¹).

Ainsi l'expérience de Wiener s'interprète dans l'hypothèse de Mac Cullagh en admettant que l'action chimique est fonction du potentiel interne; elle s'interprète dans l'autre hypothèse en admettant que l'action chimique est fonction de la force vive.

De même, les termes de dispersion de Briot, l'absorption et la réflexion métallique s'expliquent dans l'hypothèse de Mac Cullagh en admettant que la rotation (p_1, q_1, r_1) de l'éther entraîne une rotation (p_2, q_2, r_2) de la matière déterminée par la relation

$$A \frac{d^2}{dt^2} p_2 + B \frac{d}{dt} p_2 + Cp_2 = Dp_1;$$

On adaptera cette explication à l'autre hypothèse en substituant la vibration à la rotation, ce qui donne la relation

$$A \frac{d^2}{dt^2} u_2 + B \frac{d}{dt} u_2 + Cu_2 = Du_1,$$

(¹) Voir, en particulier, POINCARÉ, *Comptes rendus*, 2 mars 1891, *Théorie mathématique de la lumière*, t. II. — DRUDE, *Wied. Ann.*, 2 mars 1891.

et la même conclusion s'étend aux termes d'absorption et de dispersion anormale dus à Helmholtz.

Dans ce Mémoire nous adopterons la théorie de Mac Cullagh, c'est-à-dire l'hypothèse de l'isotropie de la force vive, qui est plus conforme à nos idées sur la constitution de la matière. Comme nous l'avons vu plus haut, cette isotropie se traduit par la condition de transversalité qui subsiste d'ailleurs quand on tient compte des termes précédents de dispersion et d'absorption, et des termes additionnels de polarisation rotatoire magnétique proposés par Maxwell. Enfin la constance du coefficient d'isotropie entraîne la transversalité dans les milieux hétérogènes.

CHAPITRE II.

PROPAGATION DANS LES MILIEUX GYROSTATIQUES HOMOGÈNES.
DOUBLE RÉFRACTION. — POLARISATION ROTATOIRE CRISTALLINE. — DISPERSION.
PROPRIÉTÉS ROTATOIRES DES DISSOLUTIONS.
EMPILAGES DE LAMES HÉMIÈDRES. — FORMULES.

I. — Méthode analytique.

16. *Onde monochromatique plane* ⁽¹⁾. — Les équations de la propagation des mouvements infiniment petits dans un milieu homogène sont, en vertu des définitions, linéaires et à coefficients constants, et admettent, comme solutions particulières, les parties réelles des imaginaires u , v , w :

$$(1) \quad \frac{u}{u_0 + iu_1} = \frac{v}{v_0 + iv_1} = \frac{w}{w_0 + iw_1} = e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y + \gamma z - Vt)}$$

V représente la vitesse de propagation ;

λ est la longueur d'onde dans le milieu ;

(u_0, v_0, w_0) et (u_1, v_1, w_1) sont deux diamètres conjugués de la vibration elliptique propagée.

V est réel. Au contraire, α , β , γ peuvent être réels ou imaginaires. Dans ce dernier cas, les composantes (ξ, η, ζ) de la vibration elliptique sont de la forme

$$\xi = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha'x + \beta'y + \gamma'z - Vt + \varphi) e^{-\frac{2\pi}{\lambda} (\alpha''x + \beta''y + \gamma''z)},$$

.....

⁽¹⁾ CAUCHY, *Mémoire sur la réflexion et la réfraction de la lumière* (*Comptes rendus*, t. VII, p. 985, année 1838). — GREEN, *On the laws of reflexion and refraction of light at the common surface of two non crystallized media* (*Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, année 1838).

On voit que toutes les vibrations sont semblables et semblablement orientées. Les deux plans

$$\alpha'x + \beta'y + \gamma'z = 0 \quad \text{et} \quad \alpha''x + \beta''y + \gamma''z = 0$$

définissent : le premier, la *phase*, et, le second, le *rapport de similitude*, qui décroît en progression géométrique avec la distance au plan

$$\alpha''x + \beta''y + \gamma''z = 0,$$

appelé pour cette raison *plan d'évanescence*.

Les ondes évanescentes, qui prennent naissance en particulier dans le phénomène de la réflexion totale, sont, au point de vue expérimental, éteintes au bout d'un trajet très court. C'est pourquoi on n'aura pas à les étudier dans le Chapitre actuel, qui est consacré à l'étude de la propagation dans un milieu indéfini.

Quand l'onde n'est pas évanescente, α , β , γ sont réels et représentent les cosinus directeurs de la normale à l'onde dans le sens de la propagation. Dans ce cas particulier, la condition

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

devient

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0,$$

et elle exprime que la vibration est contenue dans le plan de l'onde.

17. *Propagation des ondes planes.* — Le problème de la propagation des ondes planes consiste à rechercher les solutions particulières (1) u , v , w , qui satisfont aux équations du mouvement (n° 12). On a donc à rechercher ce que devient l'expression

$$\sum (-1)^n D^n \frac{dW}{dD^n u}$$

lorsque W est une forme quadratique des $D^n u \dots$ et qu'on y remplace les $u \dots$ par $u' e^{iP} \dots$, P désignant la fonction linéaire

$$P = \mu(\alpha x + \beta y + \gamma z - Vt) \quad \left(\mu = \frac{2\pi}{\lambda} \right).$$

On effectuera d'abord la transformation

$$\sum (-1)^n D^n \frac{dW}{dD^n u} = \sum (-1)^n \frac{dW}{dD^n u} \times \frac{dD^n u}{du},$$

qui résulte de la comparaison des deux formules

$$D^n u = \frac{d^n u}{dx^a dy^b dz^c} = (i\mu)^n \alpha^a \beta^b \gamma^c \times u,$$

$$D^n \frac{dW}{dD^n u} = (i\mu)^n \alpha^a \beta^b \gamma^c \times \frac{dW}{dD^n u}.$$

Pour poursuivre le calcul, on aura recours à la *méthode des grandeurs ombrales* :

La forme bilinéaire la plus générale peut s'écrire

$$(a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 + \dots)(a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 z_2 + \dots),$$

si l'on convient de regarder les $a_1, b_1, c_1, \dots, a_2, b_2, c_2, \dots$ comme des grandeurs dénuées de signification (grandeurs ombrales de Rankine) et les produits $a_1 a_2, a_1 b_2, \dots$ comme les notations de coefficients indépendants.

On conviendra d'écrire $ab = ba$, et, par suite, les opérations de l'Algèbre pourront se transporter sans modification aux grandeurs ombrales. La multiplication sera commutative et distributive. Les règles de dérivation s'appliqueront aux sommes et aux produits de polynomes ombraux tels que $a_1 x_1 + b_1 y_1 + \dots$, où x_1, y_1, \dots représentent des fonctions de variables concrètes.

En notation ombrale, le potentiel interne, qui est une forme quadratique des dérivées de u, v, w , s'écrira

$$W = (W' + W'')^2,$$

W' représentant une forme ombrale linéaire et homogène des dérivées impaires de u, v, w en x, y, z ;

W'' représentant une fonction analogue des dérivées paires.

Par application des règles de calcul précédemment rappelées, on obtient

$$(2) \quad \sum (-1)^n \frac{dW}{dD^n u} \frac{dD^n u}{du} = 2(W' + W'') \left(\frac{dW'}{du} - \frac{dW''}{du} \right).$$

Dans cette équation $\frac{dW'}{du}$ représente la dérivée de la fonction W' ; où l'on a remplacé $D^n u$ par sa valeur

$$D^n u = (i\mu)^n \alpha^a \beta^b \gamma^c,$$

ce qui donne à W' et W'' les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} W' &= A' u + B' v + C' w, \\ W'' &= A'' u + B'' v + C'' w, \end{aligned}$$

A', A'', \dots désignant des polynomes ombraux en α, β, γ .

L'équation (2) peut encore s'écrire

$$(2') \quad \sum (-1)^n \frac{dW}{dD^n u} \frac{dD^n u}{du} = \frac{d}{du} (W'^2 - W''^2) + 2 \left(W' \frac{dW''}{du} - W'' \frac{dW'}{du} \right).$$

Calculons le binome alterné

$$X_1 = W' \frac{dW''}{du} - W'' \frac{dW'}{du},$$

ainsi que les deux binomes Y_1 et Z_1 qui s'en déduisent par permutations circulaires.

Si x_1, y_1, z_1 désignent des variables arbitraires nous aurons

$$\begin{aligned} X_1 x_1 + Y_1 y_1 + Z_1 z_1 &\equiv W' \left(x_1 \frac{d}{du} + y_1 \frac{d}{dv} + z_1 \frac{d}{dw} \right) W'' \\ &\quad - W'' \left(x_1 \frac{d}{du} + y_1 \frac{d}{dv} + z_1 \frac{d}{dw} \right) W', \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} X_1 x_1 + Y_1 y_1 + Z_1 z_1 &\equiv \begin{vmatrix} A' u + B' v + C' w & A'' u + B'' v + C'' w \\ A' x_1 + B' y_1 + C' z_1 & A'' x_1 + B'' y_1 + C'' z_1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} u & v & w \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ou

$$X_1 x_1 + Y_1 y_1 + Z_1 z_1 \equiv \begin{vmatrix} L & M & N \\ u & v & w \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

en désignant par L, M, N les quantités concrètes

$$L = [A'.A''], \quad M = [B'.B''], \quad N = [C'.C''].$$

Cette identité en x_1, y_1, z_1 nous apprend que (X_1, Y_1, Z_1) est l'axe des deux vecteurs (L, M, N) et (u, v, w) ; on a donc

$$X_1 = [L.u], \quad Y_1 = [M.v], \quad Z_1 = [N.w],$$

et le problème est résolu.

En résumé, les équations indéfinies

$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} = \sum (-1)^{n-1} D^n \frac{dW}{dD^n u}$$

deviennent, après substitution des solutions exponentielles,

$$(3) \quad \rho \mu^2 V^2 u = \frac{d\Phi}{du} + 2 [L \cdot u],$$

La fonction Φ , quadratique en u, v, w , et le vecteur L, M, N qui figurent dans ces équations, sont déduits du potentiel W par les formules ombrales

$$\left\{ \begin{array}{l} W = (W' + W'')^2, \\ W' = A' u + B' v + C' w, \\ W'' = A'' u + B'' v + C'' w, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi = W'^2 - W''^2, \\ L = [A' \cdot A'']. \end{array} \right.$$

18. *Équations des milieux gyrostatiques. — Première forme.* — L'analyse précédente s'applique sans modifications aux milieux gyrostatiques, dont les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d^2 u}{dt^2} = - \left[\frac{d}{dx} \cdot P \right], \\ P = \sum (-1)^n D^n \frac{dW}{dD^n p}, \end{array} \right.$$

deviendront, après substitution des solutions exponentielles,

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \mu^2 V^2 u = i \mu [a \cdot P], \\ P = \frac{dF}{dp} + 2 [L_1 \cdot p], \end{array} \right.$$

équations dans lesquelles la fonction F , quadratique en p, q, r , et le vecteur L_1, M_1, N_1 sont déduits du potentiel W par les formules ombrales

$$\left\{ \begin{array}{l} W = (W'_1 + W''_1)^2, \\ W'_1 = A'_1 p + B'_1 q + C'_1 r, \\ W''_1 = A''_1 p + B''_1 q + C''_1 r, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} F = W'^2_1 - W''^2_1, \\ L_1 = [A'_1 \cdot A''_1]. \end{array} \right.$$

19. *Deuxième forme des équations des milieux gyrostatiques.* — Éliminons le potentiel-vecteur P, Q, R entre les équations

tions (4), et nous obtiendrons

$$(5) \quad \rho \mu^2 V^2 u = i \mu \left[\alpha \cdot \frac{dF}{dp} \right] + 2 i \mu [\alpha \cdot L_1 \cdot p];$$

transformons cette expression, en écrivant

$$F(p, q, r) = \Phi_1(u, v, w),$$

nous aurons

$$\begin{aligned} dF &= \sum \frac{d\Phi_1}{du} du = \sum \frac{dF}{dp} dp = \sum i \mu \frac{dF}{dp} [\alpha \cdot du] = \sum i \mu \left[\frac{dF}{dp} \cdot \alpha \right] du, \\ [\alpha \cdot L_1 \cdot p] &= L_1(\alpha p + \beta q + \gamma r) - p(\alpha L_1 + \beta M_1 + \gamma N_1) \\ &= -p(\alpha L_1 + \beta M_1 + \gamma N_1), \end{aligned}$$

ce qui ramène l'équation (5) à la suivante :

$$(6) \quad \frac{1}{2} \rho V^2 u = \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{du} + i \mu k [\alpha \cdot u],$$

des valeurs de φ et k , étant données par les formules

$$\begin{cases} F(p, q, r) = (i\mu)^2 \varphi(u, v, w), & \varphi = \varphi_0 + \mu^2 \varphi_2 + \dots + \mu^{2r} \varphi_{2r} + \dots, \\ \alpha L_1 + \beta M_1 + \gamma N_1 = i\mu k(\alpha, \beta, \gamma), & k = k_2 + \mu^2 k_4 + \dots + \mu^{2r} k_{2r} + \dots \end{cases}$$

k_{2r} est une fonction homogène de degré $2r$ en α, β, γ , à coefficients réels.

φ_{2r} est une forme quadratique en $[\alpha \cdot u], [\beta \cdot v], [\gamma \cdot w]$, dont les coefficients sont des fonctions homogènes de degré $2r$ en α, β, γ .

20. *Double réfraction dans les milieux gyrostatiques.* — Comme première approximation ($W = W_2$), nous allons étudier un potentiel réduit à son premier terme, c'est-à-dire à une forme quadratique homogène en p, q, r : φ se réduira à son premier terme φ_0 , k sera nul, et pour un système d'unités tel que $\rho = 2$, les équations (6) deviendront

$$(6') \quad \begin{cases} V^2 u = \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{du}, \\ V^2 v = \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dv}, \\ V^2 w = \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dw}. \end{cases}$$

On reconnaît les équations en S de la quadrique

$$\varphi(u, v, w) = F([\alpha \cdot u], [\beta \cdot v], [\gamma \cdot w]).$$

Il en résulte que les vibrations transmises sont rectilignes, dirigées suivant les trois axes de la quadrique $\varphi(u, v, w) - 1 = 0$, et se propagent avec des vitesses respectivement égales aux inverses des axes de la quadrique. Mais, comme les vibrations sont transversales, la quadrique est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la direction de la propagation. Le lemme suivant va nous permettre de déterminer sa section droite :

LEMME. — *Si l'on coupe une surface $\Psi(x, y, z) = 0$ par le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, et si l'on fait tourner la section de 90° dans son plan, l'équation du cylindre ayant pour section droite la nouvelle courbe ainsi obtenue est*

$$\Psi([\alpha \cdot x], [\beta \cdot y], [\gamma \cdot z]) = 0.$$

Soit, en effet,

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ un point de la section primitive de $\Psi = 0$;

$M(x, y, z)$ un point quelconque de la génératrice correspondante du cylindre.

OM_1 est l'axe des deux vecteurs suivants :

1° La normale (α, β, γ) au plan de l'onde;

2° Le vecteur $OM(x, y, z)$.

On a, par suite,

$$x_1 = [\alpha \cdot x], \quad y_1 = [\beta \cdot y], \quad z_1 = [\gamma \cdot z].$$

et, pour obtenir l'équation du cylindre, il faut éliminer x_1, y_1, z_1 entre les équations

$$\begin{cases} \Psi(x_1, y_1, z_1) = 0, \\ x_1 = [\alpha \cdot x], \quad y_1 = [\beta \cdot y], \quad z_1 = [\gamma \cdot z]. \end{cases}$$

CONSÉQUENCE : *Lois de la double réfraction.* — La quadrique $\varphi(u, v, w) - 1 = 0$ représente un cylindre lié à la quadrique $F(x, y, z) - 1 = 0$ par le mode de génération précédent. Or, pour la stabilité, il faut que le potentiel $F(p, q, r)$ soit une forme définie positive. Donc $F(x, y, z) - 1 = 0$ représente un

ellipsoïde réel, et l'on obtient les lois connues de la propagation (en première approximation $W = W_2$) :

1° *Les milieux gyrostatiques propagent deux vibrations rectilignes situées dans le plan de l'onde et rectangulaires;*

2° *Les vibrations transmises sont dirigées suivant les axes de la section de l'ellipsoïde $F(x, y, z) - 1 = 0$ par le plan de l'onde;*

3° *La vitesse de propagation de la vibration est égale à l'inverse de l'axe perpendiculaire.*

On retrouve les lois de Fresnel; mais la vibration est perpendiculaire au vecteur de Fresnel, c'est-à-dire est située dans le plan de polarisation.

$$F(x, y, z) - 1 = 0$$

s'appelle l'*ellipsoïde optique*,

$$\varphi(x, y, z) - 1 = 0$$

s'appelle le *cylindre de polarisation*.

21. *Polarisation rotatoire cristalline dans les milieux gyrostatiques.* — Comme deuxième approximation, étudions maintenant un potentiel réduit à ses deux premiers termes, c'est-à-dire $W = W_2 + W_3$, W_2 représentant, comme précédemment, une forme quadratique en (p, q, r) et W_3 une forme bilinéaire en (p, q, r) et $(p'_x, p'_y, p'_z, q'_x, \dots)$. φ se réduira à son premier terme φ_0 et k à son premier terme k_2 .

La présence de l'imaginaire i dans les équations

$$(6'') \quad \nabla^2 u = \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{du} + i\mu k [a.u]$$

nous montre que les vibrations transmises sont elliptiques, et nous avons vu précédemment qu'elles sont situées dans le plan de l'onde (n° 16).

Soient trois axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 , formant trièdre direct : Ox_1 et Oy_1 situés dans le plan de l'onde et dirigés suivant les axes de la vibration, Oz_1 dirigé suivant la normale à l'onde et dans le sens de la propagation.

Dans ce système d'axes, les composantes de la vibration seront

$$\xi_1 = a \cos \mu(z_1 - Vt), \quad \eta_1 = -b \sin \mu(z_1 - Vt), \quad \zeta_1 = 0,$$

c'est-à-dire les parties réelles de u_1, v_1, w_1

$$\frac{u_1}{a} = \frac{v_1}{ib} = \frac{w_1}{0} = e^{t\mu(z_1 - Vt)}.$$

Si le rapport $\frac{b}{a}$ est positif, l'ellipse est décrite de gauche à droite pour un observateur placé suivant Oz_1 . On dit, dans ce cas, que la vibration est *droite*.

Calculons les valeurs de u, v, w et portons-les dans les équations du mouvement :

Soient $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), (\alpha, \beta, \gamma)$ les cosinus directeurs de Ox_1, Oy_1, Oz_1 .

Le trièdre $Ox_1y_1z_1$ étant direct, on a

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2], \quad \alpha_1 = [\alpha_2, \alpha], \quad \alpha_2 = [\alpha, \alpha_1],$$

et les formules de transformation donnent

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 v_1 + \alpha_3 w_1 = (\alpha_1 a + i\alpha_2 b) e^{iP},$$

$$P = \mu(\alpha x + \beta y + \gamma z - Vt),$$

d'où

$$[\alpha, u] = [\alpha, \alpha_1] a e^{iP} + i[\alpha, \alpha_2] b e^{iP} = (\alpha_2 a - i\alpha_1 b) e^{iP};$$

ces valeurs, portées dans les équations (6''), donnent

$$(7) \quad V^2(\alpha_1 a + i\alpha_2 b) = \frac{1}{2} \left(a \frac{d\varphi}{dx_2} + ib \frac{d\varphi}{dx_1} \right) + \mu k(\alpha_1 b + i\alpha_2 a)$$

qui se dédouble dans les équations (8)

$$(8) \quad \begin{cases} (V^2 a - \mu k b) \alpha_1 = \frac{1}{2} a \frac{d\varphi}{dx_1}, \\ (V^2 b - \mu k a) \alpha_2 = \frac{1}{2} b \frac{d\varphi}{dx_2} \end{cases}$$

équivalentes à l'ensemble des deux systèmes (8') et (8''),

$$(8') \quad \begin{cases} V_1^2 \alpha_1 = \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dx_1}, \\ V_2^2 \alpha_2 = \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dx_2}, \end{cases}$$

$$(8'') \quad \begin{cases} V_1^2 a = V^2 a - \mu k b, \\ V_2^2 b = V^2 b - \mu k a, \end{cases}$$

V_1 et V_2 représentant deux inconnues auxiliaires définies par l'un des deux groupes d'équations (8') ou (8'').

Or, il résulte des équations (8') que $\frac{1}{V_1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et $\frac{1}{V_2}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ sont en grandeur et direction les deux axes du cylindre de polarisation $\varphi(u, v, w) - 1 = 0$.

Les lois de la polarisation rotatoire (en deuxième approximation $W = W_2 + W_3$) sont donc les suivantes :

1° Les milieux gyrostatiques propagent deux vibrations elliptiques situées dans le plan de l'onde et dont les axes sont dirigés suivant les deux axes du cylindre de polarisation, c'est-à-dire suivant les deux axes de la section plane de l'ellipsoïde optique.

2° Le rapport des axes et la vitesse de propagation de chaque vibration sont donnés par les deux équations (8'') :

$$(8'') \quad \begin{cases} V^2 a - \mu k b = V_1^2 a, \\ V^2 b - \mu k a = V_2^2 b \end{cases}$$

dans lesquelles V_1 et V_2 représentent les inverses des axes du cylindre de polarisation, c'est-à-dire les vitesses calculées dans l'hypothèse de la première approximation $W = W_2$.

A chaque valeur de $\mu = \frac{2\pi}{\lambda}$ correspondent deux vibrations elliptiques définies par les deux équations (8'') ou le système (8''') équivalent

$$(8''') \quad \begin{cases} (V^2 - V_1^2)(V^2 - V_2^2) = \mu^2 k^2, \\ \mu k(a^2 - b^2) + (V_2^2 - V_1^2)ab = 0. \end{cases}$$

La première équation fournit deux valeurs V' , V'' réelles, l'une supérieure à V_1 et V_2 , l'autre inférieure à V_1 et V_2 , et l'on a entre V' et V'' la relation

$$V'^2 + V''^2 = V_1^2 + V_2^2.$$

La seconde équation donne le rapport $\frac{b}{a}$ des axes : les deux vibrations elliptiques sont semblables, décrites en sens inverse, et ont leurs grands axes perpendiculaires.

3° La vibration qui se propage avec la plus grande vitesse a

son grand axe dirigé suivant le grand axe de la section de l'ellipsoïde optique par le plan de l'onde.

Car on tire des équations (8'')

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{V^2 - V_1^2}{V^2 - V_2^2},$$

ce qui montre que $a > b$ entraîne $V_1 > V_2$.

4° Si $k(\alpha, \beta, \gamma)$ est positif pour la direction de propagation α, β, γ , la vibration droite se propage avec la plus grande vitesse.

On a, en effet,

$$V^2 a = V_1^2 a + \mu k b,$$

donc, pour $k > 0$, l'inégalité $\frac{b}{a} > 0$ entraîne $V > V_1$. On dit alors que le milieu est *dextrogyre* pour la direction de propagation considérée.

5° *Quadrique de gyration*. — k est une forme quadratique en α, β, γ ; elle représente donc l'inverse du carré du rayon vecteur de la quadrique

$$k(x, y, z) - 1 = 0$$

suivant la direction α, β, γ .

C'est la quadrique à laquelle nous avons donné au Chapitre I, n° 9, le nom de *quadrique de gyration*.

En résumé, les lois de la propagation dans un milieu gyrostatique sont, au degré d'approximation $W = W_2 + W_3$, définies géométriquement par deux surfaces invariantes :

l'ellipsoïde optique

$$F(x, y, z) - 1 = 0,$$

la quadrique de gyration

$$k(x, y, z) - 1 = 0.$$

D'ailleurs l'équation

$$\rho V^2 u = \frac{d\varphi}{du} + i\mu k[\alpha, u],$$

rapportée à un trièdre inverse, devient

$$\rho V^2 u = \frac{d\varphi}{du} - i\mu k[\alpha, u];$$

il en résulte donc que l'ellipsoïde optique est une surface invariante directe, et la quadrique de gyration une surface invariante inverse.

Il convient de signaler une seconde différence entre l'ellipsoïde optique et la quadrique de gyration : la condition de stabilité ne restreint pas la généralité de la quadrique de gyration, dont le cône asymptote peut être réel. Dans ce dernier cas, le cristal possède le double pouvoir rotatoire, et le cône asymptote sépare les directions de propagation en deux catégories : celles pour lesquelles le milieu est dextrogyre et celles pour lesquelles il est lévogyre. C'est en particulier ce qui a lieu pour les cristaux biaxes possédant un plan de symétrie, car le cône asymptote de la quadrique de gyration se décompose, dans ce cas, en deux plans rectangulaires (*voir* n° 9).

Enfin, l'existence du pouvoir rotatoire entraîne, en principe, celle de la dispersion normale; car le potentiel

$$W = W_2 + W_3 + W_4 + \dots$$

devant être une forme définie positive, l'existence des doubles produits $pp'_x \dots$ contenus dans la forme bilinéaire W_3 entraîne celle des carrés $p_x'^2 \dots$ qui sont des termes de W_4 .

22. *Dispersion normale dans les milieux gyrostatiques.* — Étudions le cas général d'un potentiel gyrostatique mis sous la forme

$$W = W_2 + W_3 + W_4 + \dots + W_{2n} + W_{2n+1} + \dots,$$

W_p représentant l'ensemble des termes qui fournissent les dérivées d'ordre p de u, v, w dans les équations indéfinies.

On a

$$W_p = \Sigma W_{ij} \quad (i + j = p),$$

en désignant par W_{ij} une forme bilinéaire par rapport aux dérivées d'ordres i et j .

Les équations du mouvement sont

$$V^2 u = \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{du} + i \mu k [\alpha \cdot u]$$

avec

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_0 + \mu^2 \varphi_2 + \mu^4 \varphi_4 + \dots + \mu^{2n} \varphi_{2n} + \dots, \\ k = k_2 + \mu^2 k_4 + \dots + k^{2n} k_{2n} + \dots \end{cases}$$

Par conséquent :

Dans les milieux holoèdres, les vibrations transmises sont transversales, rectilignes, dirigées suivant les deux axes du cylindre de polarisation $\varphi(x, y, z) - 1 = 0$ et leurs vitesses de propagation sont les inverses des longueurs de ces axes.

Dans les milieux hémihédres, les vibrations transmises sont transversales et elliptiques. Elles sont définies par les équations

$$\begin{cases} V_1^2 a - \mu kb = V_1^2 a, \\ V_2^2 b - \mu ka = V_2^2 b \end{cases}$$

dans lesquelles V_1 et V_2 représentent les vitesses calculées dans l'hypothèse $k = 0$. Les surfaces $k_2, k_4, \dots, k_{2n}, \dots$,

$$k = k_2 + \mu^2 k_4 + \dots + \mu^{2n} k_{2n} + \dots;$$

qui définissent la fonction k sont invariantes inverses.

En ce qui concerne les termes de polarisation rotatoire, les résultats précédemment obtenus se généralisent donc immédiatement; mais il n'en est plus de même pour le mode de génération du cylindre de polarisation

$$\varphi(x, y, z) - 1 = 0.$$

On obtient la section droite de ce cylindre en coupant l'ellipsoïde

$$F(x, y, z) - 1 = 0$$

par le plan de l'onde et faisant tourner cette ellipse de 90° dans son plan; mais il est essentiel de remarquer que cet ellipsoïde varie de forme et de position avec la direction de l'onde.

Il y a un très grand intérêt, au point de vue des réductions imposées par la symétrie du milieu, à rechercher un mode de génération de ce cylindre au moyen de surfaces invariantes. Cette question, qui est purement analytique, sera traitée au Chapitre V où l'on verra que toute forme φ_{2n} quadratique en x, y, z , et homogène de degré $2n$ en α, β, γ , est une somme de covariants de six surfaces dont les ordres respectifs sont

$$2n + 2, \quad 2n + 1, \quad 2n, \quad 2n - 1, \quad 2n - 2$$

dont deux surfaces d'ordre $2n$. Les surfaces d'ordre pair sont

invariantes directes, les autres sont invariantes inverses; et il existe entre elles trois relations d'invariance.

23. Ce qui précède (ainsi que le Chapitre IV) est la reproduction d'un Mémoire rédigé en 1897, et dont la publication a été différée lorsque nous avons eu connaissance des recherches entreprises par Gibbs sur le même sujet.

On trouvera, dans les numéros d'avril et juin 1882 de l'*American Journal of Science*, les deux Mémoires de Gibbs sur la double réfraction et la polarisation rotatoire, étudiées dans la théorie électromagnétique de la lumière. L'étude des travaux expérimentaux et théoriques publiés actuellement sur le pouvoir rotatoire, nous ayant paru établir que les deux Mémoires précédents étaient passés inaperçus jusqu'à présent, nous croyons devoir publier nos recherches qui pourront contribuer à faire connaître cette partie de l'œuvre de Gibbs.

L'étude géométrique que nous allons développer maintenant est, conformément à la méthode de Gibbs, basée sur le principe donné par lord Rayleigh dans sa *Theory of Sound* (Vol. I, § 87) et qui exprime le principe d'Hamilton dans le cas des équations linéaires. Signalons toutefois que, dans les Mémoires de Gibbs, les lois de la double réfraction ont été obtenues par la méthode géométrique et celles de la polarisation rotatoire par une méthode analytique.

L'étude expérimentale du pouvoir rotatoire dans les cristaux biaxes est encore peu avancée. Ce n'est que tout récemment que l'on a constaté son existence dans les cristaux du sucre de canne et du sel de Seignette (¹).

II. — Méthode géométrique.

24. *Définition de l'action hamiltonienne.* — Soit un milieu continu dont la force vive est $\int T d\omega$ et le potentiel interne $\int W d\omega$. Par définition, l'action hamiltonienne relative à ce mi-

(¹) POCKLINGTON, *Philosophical Magazine*, 1901, p. 361.

lieu est l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - W) d\omega dt.$$

Principe d'Hamilton. — Soient

$x + u, y + v, z + w$ une trajectoire virtuelle du point x, y, z ;
 $x + u + \delta u, y + v + \delta v, z + w + \delta w$ une trajectoire virtuelle
 infiniment voisine passant aux instants t_0 et t_1 aux mêmes points
 que la première trajectoire.

La variation de l'action hamiltonienne, qui est du premier ordre
 quand on passe d'une trajectoire virtuelle à une autre trajectoire
 virtuelle infiniment voisine, devient du second ordre quand la tra-
 jectoire satisfait aux équations du mouvement. C'est le principe
 d'Hamilton qu'on peut encore énoncer :

*Au voisinage d'une solution l'action hamiltonienne reste
 stationnaire.*

En effet, il faut vérifier que

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - W) d\omega dt$$

est nul pour les solutions du système

$$\int \rho \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \delta u + \frac{d^2 v}{dt^2} \delta v + \frac{d^2 w}{dt^2} \delta w \right) d\omega + \delta \int W d\omega = 0.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} T d\omega dt &= \int_{t_0}^{t_1} \sum \rho \frac{du}{dt} \delta \frac{du}{dt} d\omega dt \\ &= \int \left\{ \sum \rho \frac{du}{dt} \delta u \right\}_{t_0}^{t_1} d\omega - \int_{t_0}^{t_1} \sum \rho \frac{d^2 u}{dt^2} \delta u d\omega dt, \end{aligned}$$

les $\delta u, \delta v, \delta w$ s'annulant par hypothèse aux instants t_0 et t_1 , la
 première intégrale est nulle et l'on retrouve l'équation des travaux
 virtuels de la Mécanique analytique.

23. *Application du principe d'Hamilton aux équations li-
 néaires.* — Les équations du mouvement, étant linéaires, sont

vérifiées par des solutions (u, v, w) de la forme

$$u = \text{partie réelle de } (u_1 + i u_2) e^{iP}, \quad P = \mu(\alpha x + \beta y + \gamma z - V t),$$

$$\mu = \frac{2\pi}{V\tau}.$$

Appliquons à cette solution le principe d'Hamilton, et choisissons pour limite supérieure $t_1 = t_0 + \tau$, τ représentant la période du mouvement vibratoire.

Nous aurons

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} T dt = \tau \times \frac{1}{2} \rho \mu^2 v^2 \times \frac{1}{2} (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + u_2^2 + v_2^2 + w_2^2) = \tau T_m,$$

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} W dt = \tau W_m.$$

T_m et W_m sont les valeurs moyennes de T et W pendant une période. W_m est une forme quadratique en $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2$.

Si donc on pose

$$\Psi = T_m - W_m,$$

l'équation d'Hamilton s'écrit

$$\delta\Psi(u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, V) = 0,$$

pour toute modification virtuelle d'une trajectoire véritable.

Faisons subir à la trajectoire (u, v, w)

$$u = \text{partie réelle de } (u_1 + i u_2) e^{iP},$$

la modification virtuelle $\delta u, \delta v, \delta w$, définie par l'égalité

$$u + \delta u = \text{partie réelle de } (u_1 + \delta u_1 + i u_2) e^{iP},$$

et choisissons une valeur de t_0 qui rende P égal à $\frac{\pi}{2}$; δu s'annulera pour $t = t_0$ et $t = t_0 + \tau$, et le principe d'Hamilton nous apprend que

$$\sum \frac{d\Psi}{du_1} \delta u_1 = 0.$$

De même, la modification virtuelle $(\delta u, \delta v, \delta w)$, définie par l'égalité

$$u + \delta u = \text{partie réelle de } (u_1 + i u_2 + i \delta u_2) e^{iP},$$

donne, en choisissant pour t_0 une valeur qui rende P égal à π ,

$$\sum \frac{d\Psi}{du_2} \delta u_2 = 0.$$

La fonction Ψ est donc indépendante de $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2$, et, comme c'est une fonction homogène du deuxième degré par rapport à ces variables, elle est identiquement nulle.

En définitive, le principe d'Hamilton se résume dans le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi = 0, \\ \sum \frac{d\Psi}{du_1} \delta u_1 + \sum \frac{d\Psi}{du_2} \delta u_2 = 0, \end{array} \right.$$

auquel on peut substituer le système équivalent

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi = 0, \\ \frac{d\Psi}{dV} \delta V = 0, \end{array} \right.$$

et, comme $\frac{d\Psi}{dV}$ est différent de zéro, ce système entraîne

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi = 0, \\ \delta V = 0. \end{array} \right.$$

En résumé, les équations du mouvement prennent la forme géométrique suivante :

1° *La solution des équations linéaires à coefficients constants*

$$\int \rho \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \delta u + \frac{d^2 v}{dt^2} \delta v + \frac{d^2 w}{dt^2} \delta w \right) dt + \delta \int W dt$$

satisfait à l'équation $T_m = W_m$ qui définit la vitesse V de propagation en fonction des éléments de la vibration (T_m et W_m représentant les valeurs moyennes de T et W pendant une période).

2° *Au voisinage d'une solution, la vitesse de propagation V déduite de l'équation $T_m - W_m = 0$ reste stationnaire (1).*

(1) Comparer avec l'énoncé donné par lord Rayleigh dans sa *Theory of Sound* (vol. I, § 87). Comme le principe d'Hamilton s'applique à toute modification virtuelle compatible avec les liaisons, il y a équivalence entre les deux énoncés.

26. *Calcul de la valeur moyenne* W_m . — Étant données deux fonctions sinusoidales u et v de la forme

$$u = \text{partie réelle de } (u_1 + iu_2) e^{iP},$$

u_1, u_2 désignant des constantes et P désignant une fonction linéaire des variables x, y, z, t , on sait que la valeur moyenne du produit

$$D^m u D^n v \quad \left(D^m = \frac{d^m}{dx^a dy^b dz^c dt^e} \right)$$

s'obtient par la règle suivante :

On remplace l'une des fonctions, u par exemple, par l'imaginaire $(u_1 + iu_2) e^{iP}$, et la seconde fonction v par l'imaginaire conjuguée correspondante $(v_1 - iv_2) e^{-iP}$. On effectue les opérations de dérivation $D^m u D^n v$, et l'on prend la partie réelle du produit $D^m u D^n v$. C'est le double de la valeur moyenne cherchée.

Appliquons cette règle au calcul de la valeur moyenne de W . Cette forme s'écrit, en notation ombrale,

$$W = (W' + W'')^2;$$

on peut la considérer comme le produit de deux facteurs égaux chacun à $W' + W''$. Remplaçons dans le premier facteur u, v par $(u_1 + iu_2) e^{iP} \dots$ et ce facteur ombral aura pour valeur

$$\left\{ i(V'_1 + iV'_2) + V''_1 + iV''_2 \right\} e^{iP},$$

V'_1, V'_2, V''_1, V''_2 désignant des grandeurs ombrales réelles définies par les égalités

$$\begin{cases} iV'_1 = A' u_1 + B' v_1 + C' w_1, \\ V''_1 = A'' u_1 + B'' v_1 + C'' w_1; \end{cases}$$

donc la valeur moyenne W_m sera égale à la moitié du carré du module de l'imaginaire $W' + W''$, c'est-à-dire à

$$(9) \quad W_m = \frac{1}{2} \left\{ (V'_1 + V''_2)^2 + (V'_1 - V''_2)^2 \right\} = \frac{1}{2} (V'^2_1 + V''^2_2) + \frac{1}{2} (V'^2_2 + V''^2_1) + (V'_1 V''_2 - V''_1 V'_2)$$

avec

$$V'^2_1 + V''^2_1 = (A' u_1 + B' v_1 + C' w_1) - (A'' u_1 + B'' v_1 + C'' w_1)^2 = \Phi(u_1, v_1, w_1),$$

$$V'_1 V''_2 - V''_1 V'_2 = i \begin{vmatrix} A' u_2 + B' v_2 + C' w_2 & A'' u_2 + B'' v_2 + C'' w_2 \\ A' u_1 + B' v_1 + C' w_1 & A'' u_1 + B'' v_1 + C'' w_1 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} L & M & N \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_1 & v_1 & w_1 \end{vmatrix}.$$

Dans ces équations, les A' , A'' , ..., Φ , L , ... ont les mêmes significations que dans la méthode analytique (n° 17).

27. *Cas particulier des milieux gyrostatiques.* — Les formules (9) donnent

$$2W_m = F(p_1, q_1, r_1) + (p_2, q_2, r_2) + 2i \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & N_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_1 & q_1 & r_1 \end{vmatrix},$$

F , L_1 , ... ayant les mêmes significations que dans la méthode analytique.

Remplaçons les p_1 , p_2 , ... par leurs valeurs tirées de

$$p_1 + ip_2 = \left[\frac{d}{dx} \cdot u \right] = i\mu[\alpha \cdot u_1 + iu_2],$$

et nous aurons

$$\begin{vmatrix} L_1 & M_1 & N_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_1 & q_1 & r_1 \end{vmatrix} = \Sigma p_1 [L_1 \cdot p_2] = \mu \Sigma p_1 [L_1 \cdot \alpha \cdot u_1] \\ = -\mu(L_1\alpha + M_1\beta + N_1\gamma)(u_1 p_1 + v_1 q_1 + w_1 r_1),$$

et, par conséquent, en écrivant

$$F(p_1, q_1, r_1) = \mu^2 \varphi(u, v, w), \quad \alpha L_1 + \beta M_1 + \gamma N_1 = i\mu k,$$

l'équation (9) prend la forme (10)

$$(10) \quad \frac{2}{\mu^2} W_m = \varphi(u_1, v_1, w_1) + \varphi(u_2, v_2, w_2) + 2\mu k \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix}.$$

28. *Forme de l'équation fondamentale* $T_m = W_m$. — Dans l'équation $T_m = W_m$, remplaçons T_m et W_m par leurs valeurs, et nous obtenons

$$(11) \quad \frac{1}{2} \rho V^2 \mu^2 (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + u_2^2 + v_2^2 + w_2^2) \\ = \Phi(u_1, v_1, w_1) + \Phi(u_2, v_2, w_2) + 2i \begin{vmatrix} L & M & N \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_1 & v_1 & w_1 \end{vmatrix};$$

telle est, pour les milieux continus, l'équation qui exprime le principe d'Hamilton et contient implicitement les équations du mouvement. Par application de l'énoncé de lord Rayleigh (n° 23),

il suffira en effet d'écrire $dV = 0$ pour toute modification virtuelle, ce qui donnera

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \rho \mu^2 V^2 u_1 = \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{du_1} + i[L.u_2], \\ \frac{1}{2} \rho \mu^2 V^2 u_2 = \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{d\mu_2} + i[L.u_1], \end{cases}$$

et l'on retrouve les deux équations en termes réels déduites de l'équation (3)

$$\frac{1}{2} \rho \mu^2 V u = \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{du} + [L.u].$$

Un des principaux avantages de l'énoncé de lord Rayleigh est de se prêter à la recherche des lois de propagation par la méthode géométrique. Nous allons en faire l'application aux milieux gyrostatiques pour lesquels l'équation $T_m = W_m$ est, en vertu de (10) et pour $\rho = 2$,

$$(12) \quad V^2(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + u_2^2 + v_2^2 + w_2^2) = \varphi(u_1, v_1, w_1) + \varphi(u_2, v_2, w_2) + 2\mu k \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix}.$$

29. *Recherche géométrique des lois de la propagation dans les milieux gyrostatiques. Double réfraction.* — En première approximation ($W = W_2$) étudions un potentiel réduit à son premier terme; c'est-à-dire à une forme quadratique en p, q, r . Par raison de symétrie, les vibrations seront rectilignes, et l'équation fondamentale $T_m - V_m = 0$ devient

$$(12') \quad V^2(u^2 + v^2 + w^2) = \varphi(u, v, w),$$

φ désignant la forme quadratique en $[\alpha.u] \dots$,

$$\varphi(u, v, w) = F([\alpha.u], [\beta.v], [\gamma.w]).$$

Conséquences :

1° *La vibration est dans le plan de l'onde.* — Donnons, en effet, à la vibration (u, v, w) une modification virtuelle $\delta(u, v, w)$ parallèle à la normale (α, β, γ) . La fonction φ restera invariable, et l'équation $\delta V = 0$ donnera

$$u \delta u + v \delta v + w \delta w = 0$$

pour toutes les valeurs

$$\frac{\delta u}{\alpha} = \frac{\delta v}{\beta} = \frac{\delta w}{\gamma},$$

ce qui équivaut à

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0.$$

2° *La vitesse de propagation a pour valeur* $V = \frac{1}{r}$, r représentant la longueur du rayon vecteur (x, y, z) du cylindre de polarisation, dirigé suivant la vibration u, v, w .

En effet, l'équation (12') donne

$$V^2 = \frac{\varphi(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2},$$

et comme

$$\varphi(x, y, z) = 1,$$

on a

$$V^2 = \frac{1}{r^2}.$$

3° *La vibration est orientée suivant l'un des deux axes du cylindre de polarisation, c'est-à-dire suivant l'un des deux axes de la section plane de l'ellipsoïde optique.* — On a, en effet,

$$V = \frac{1}{r},$$

et la condition $\delta V = 0$ entraînera $\delta r = 0$. r est donc un rayon vecteur maximum ou minimum du cylindre de polarisation.

Polarisation rotatoire cristalline. — En deuxième approximation, étudions un potentiel interne réduit à ses deux premiers termes $W = W_2 + W_3$. L'équation $T_m = W_m$ s'écrit

$$\begin{aligned} & V^2(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + u_2^2 + v_2^2 + w_2^2) \\ & = \varphi(u_1, v_1, w_1) + \varphi(u_2, v_2, w_2) + 2\mu k \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

φ représentant une forme quadratique en $[x, u] \dots$ à coefficients constants; k représentant une forme quadratique en α, β, γ .

Conséquences :

1° *La vibration est dans le plan de l'onde.* — Laissons, en effet, invariable le demi-diamètre (u_2, v_2, w_2) de la vibration et

donnons à son conjugué (u_1, v_1, w_1) une modification virtuelle $\delta(u_1, v_1, w_1)$ parallèle à la normale (α, β, γ) . Cette modification laissera invariables la fonction φ et le déterminant.

Donc on aura

$$\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 = 0,$$

et de même

$$\alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2 = 0.$$

2° *Les axes de la vibration elliptique coïncident en direction avec les axes du cylindre de polarisation.* — Soient, en effet, a et b les longueurs des demi-diamètres conjugués (u_1, v_1, w_1) et (u_2, v_2, w_2) , et r_1, r_2 les rayons vecteurs suivant a et b du cylindre de polarisation.

L'équation (12) s'écrit

$$(12'') \quad V^2(a^2 + b^2) = \frac{a^2}{r_1^2} + \frac{b^2}{r_2^2} + 2\mu k ab \sin(\alpha, b).$$

Faisons subir au demi-diamètre OA une modification virtuelle AA' parallèle à son conjugué OB . Une telle modification est caractérisée par

$$\begin{aligned} b &= \text{const.}, \\ ab \sin(\alpha, b) &= \text{const.}, \\ r_2 &= \text{const.} \end{aligned}$$

et la condition $\delta V = 0$ se réduit à

$$V^2 \delta a^2 = \delta \left(\frac{a}{r_1} \right)^2.$$

Cette équation s'applique à deux diamètres conjugués quelconques. Si, en particulier, a et b sont les deux axes de la vibration, on aura

$$\delta a = 0$$

et par suite l'équation $\delta V = 0$ entraînera $\delta r_1 = 0$. c. q. f. d.

3° *La forme des vibrations et la vitesse de propagation sont données par les deux équations*

$$\begin{cases} \left(V^2 - \frac{1}{r_1^2} \right) a = \mu k b, \\ \left(V^2 - \frac{1}{r_2^2} \right) b = \mu k a. \end{cases}$$

Donnons en effet à la vibration une modification virtuelle laissant invariable l'orientation des axes et la longueur de l'axe a : r_1, r_2, a ne seront pas modifiés ; $a \sin(a, b)$ subira une modification $a \delta b$, et l'équation $\delta V = 0$ deviendra

$$V^2 \delta b = \frac{b \delta b}{r_2^2} + \mu k a \delta b.$$

Dispersion normale. — Les raisonnements précédents ne subissent aucune modification et l'on retrouve les résultats annoncés dans la discussion analytique.

30. *Comparaison avec les équations de Fresnel.* — Les résultats donnés par Fresnel dans le problème de la double réfraction sont, au point de vue expérimental, identiques aux précédents. La seule différence est que Fresnel attribue à la vibration le rôle qui est dévolu au vortex dans la théorie gyrostatique, et que par suite le vecteur de Fresnel est perpendiculaire à la vibration de la théorie gyrostatique.

Comme on sait, *a priori*, que la vibration est située dans le plan de l'onde, elle sera entièrement déterminée quand son vortex (p, q, r) sera connu, et l'on peut reprendre dans cet ordre d'idées la recherche géométrique des lois de la propagation.

Cherchons tout d'abord ce que devient l'équation $T_m = W_m$, quand on choisit pour variables p, q, r .

L'équation

$$p = \left[\frac{d}{dx} \cdot u \right] = i\mu [\alpha \cdot u]$$

donne, en tenant compte de la transversalité,

$$[\alpha \cdot p] = i\mu [\alpha \cdot \alpha \cdot u] = -i\mu u.$$

Après avoir porté les valeurs de u_1, u_2, \dots dans l'équation $T_m = W_m$, cette équation deviendra

$$(13) \quad \frac{1}{2} \rho V^2 (p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 + p_2^2 + q_2^2 + r_2^2) \\ = F(p_1, q_1, r_1) + F(p_2, q_2, r_2) + 2\mu k \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix},$$

(p_1, q_1, r_1) et (p_2, q_2, r_2) désignant des vecteurs assujettis, en

vertu même de la définition $p = \left[\frac{d}{dx} \cdot u \right]$ à la condition de transversalité

$$(13') \quad \begin{cases} \alpha p_1 + \beta q_1 + \gamma r_1 = 0, \\ \alpha p_2 + \beta q_2 + \gamma r_2 = 0. \end{cases}$$

On peut donc répéter sur le vortex les raisonnements faits précédemment sur la vibration et l'on aura l'avantage de ne pas avoir à utiliser la notion du cylindre de polarisation.

On peut de même traiter les équations (13), (13') par la méthode analytique, ce qui fournira la signification des égalités proposées par Fresnel, comme nous allons le montrer :

Dans le cas de la double réfraction, l'équation $T_m - W_m = 0$ se réduit à

$$\frac{1}{2} \rho V^2 (p^2 + q^2 + r^2) = F(p, q, r),$$

(p, q, r) étant liés par la relation

$$\alpha p + \beta q + \gamma r = 0;$$

l'équation $\delta V = 0$ donne par suite

$$\rho V^2 (p \delta p + q \delta q + r \delta r) = \frac{dF}{dp} \delta p + \frac{dF}{dq} \delta q + \frac{dF}{dr} \delta r$$

pour toute variation virtuelle $\delta(p, q, r)$ vérifiant la relation

$$\alpha \delta p + \beta \delta q + \gamma \delta r = 0,$$

d'où les équations (14)

$$(14) \quad \begin{cases} \rho V^2 p = \frac{dF}{dp} + \nu \alpha \\ \rho V^2 q = \frac{dF}{dq} + \nu \beta \\ \rho V^2 r = \frac{dF}{dr} + \nu \gamma \\ 0 = \alpha p + \beta q + \gamma r. \end{cases}$$

Dans les idées de Fresnel, le vecteur $\frac{dF}{dp}, \frac{dF}{dq}, \frac{dF}{dr}$, c'est-à-dire le potentiel-vecteur P, Q, R, représente la force exercée sur le point matériel qui a subi le déplacement p, q, r ; et $\nu(\alpha, \beta, \gamma)$ représente la force de liaison exprimant la transversalité qui annule l'effet de la composante de P, Q, R suivant la normale au plan de l'onde.

On obtient donc les formules de la théorie gyrostatique en remplaçant, dans les énoncés de Fresnel, le mot « vibration » par le mot « rotation » et le mot « force » par le mot « couple ».

III. — Propriétés rotatoires des dissolutions.

31. On a depuis longtemps émis l'idée qu'une dissolution ne serait qu'un ensemble de cristaux élémentaires, orientés indifféremment en tous sens, et possédant les propriétés optiques du cristal qu'ils constituent; et l'on a tenté, dans cette hypothèse, de trouver une relation entre les propriétés rotatoires des cristaux et celles de leurs dissolutions.

Voici quels postulats on se trouve logiquement conduit à énoncer pour mettre le problème en équation :

PREMIER POSTULAT. — *Le potentiel gyrostatique d'un mélange de cristaux isomorphes a pour valeur*

$$(15) \quad W = m_1 W_1 + m_2 W_2 + \dots,$$

m_1, m_2, \dots désignant les proportions en volume des cristaux composants ($m_1 + m_2 + \dots = 1$);

W_1, W_2, \dots désignant leurs potentiels gyrostatiques.

C'est l'extension aux phénomènes optiques des lois additives qui régissent, en première approximation, un très grand nombre de phénomènes physiques. L'étude optique des feldspaths (hypothèse de Tschermak, formules de Mallard) en fournit d'ailleurs une vérification très satisfaisante.

DEUXIÈME POSTULAT. — *Une dissolution est assimilable, au point de vue optique, à un mélange de cristaux isomorphes susceptibles de prendre indifféremment toutes les orientations.*

Soient donc

$$W_1, W_2, \dots$$

les potentiels gyrostatiques des cristaux élémentaires (dissolvant compris) contenus dans la dissolution en proportions

$$m_1, m_2, \dots$$

On calculera les valeurs moyennes W'_1, W'_2, \dots , pour toutes les orientations, des W_1, W_2, \dots , et le potentiel gyrostatique de la dissolution sera donné par la formule

$$(16) \quad W' = m_1 W'_2 + m_2 W'_2 + \dots$$

Conséquences :

1° Considérons un mélange de cristaux isomorphes, dont les ellipsoïdes optiques sont

$$F_1(x, y, z) - 1 = 0, \quad F_2(x, y, z) - 1 = 0, \quad \dots,$$

et les quadriques de gyration

$$k_1(x, y, z) - 1 = 0, \quad k_2(x, y, z) - 1 = 0, \quad \dots;$$

le mélange isomorphe aura pour ellipsoïde optique F , et pour quadrique de gyration k les surfaces

$$(17) \quad \begin{cases} 1 = F(x, y, z) = m_1 F_1(x, y, z) + m_2 F_2(x, y, z) + \dots, \\ 1 = k(x, y, z) = n_1 k_1(x, y, z) + m_2 k_2(x, y, z) + \dots; \end{cases}$$

des formules analogues s'appliquent aux termes de dispersion.

2° Considérons une dissolution dont les composantes sont caractérisées, à l'état cristallisé, par les ellipsoïdes optiques F_1, F_2, \dots , et les quadriques de gyration k_1, k_2, \dots .

Son ellipsoïde optique sera une sphère F définie par

$$(18) \quad 1 = F(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{6} \Delta(m_1 F_1 + m_2 F_2 + \dots),$$

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2},$$

et sa quadrique de gyration sera une sphère k définie par

$$(19) \quad 1 = k(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{6} \Delta(m_1 k_1 + m_2 k_2 + \dots).$$

L'invariant $\frac{1}{6} \Delta F_1(x, y, z)$ représente, en effet, la valeur moyenne de la forme quadratique F_1 , quand on donne au système d'axes coordonnés toutes les orientations possibles.

32. Les deux équations (18) et (19) font connaître le pouvoir rotatoire de la dissolution en fonction des paramètres optiques du cristal dissous.

Pour que la dissolution soit douée de pouvoir rotatoire, il est nécessaire et suffisant :

- 1° Que la quadrique de gyration k existe, c'est-à-dire, sous réserve des restrictions formulées au n° 33, que le cristal soit doué de pouvoir rotatoire ;
- 2° Que l'invariant Δk soit différent de zéro.

Or, quand le cristal possède un élément de symétrie inverse autre que le centre (plan de symétrie, axe quaternaire inverse), la quadrique de gyration est un cylindre équilatère, et, par suite, $\Delta k = 0$.

Donc, la condition nécessaire pour que la dissolution soit active est que le cristal ne possède aucun élément de symétrie inverse. Cette condition est en général suffisante ; et deux cristaux symétriques inverses l'un de l'autre fourniront des dissolutions ayant des pouvoirs rotatoires égaux et de sens opposé. On reconnaît les principes qui avaient guidé Pasteur dans ses mémorables *Recherches sur les relations qui peuvent exister entre la forme cristalline, la composition chimique et le phénomène rotatoire moléculaire* (*Annales de Chimie et de Physique*, années 1848 à 1857).

Parmi les 15 types de symétrie doués de pouvoir rotatoire, 11 sont actifs en dissolution dont :

1 dans chacune des trois classes de cristaux biaxes, ce sont les types :

$$oC, L^2, L^2, L'^2, L''^2;$$

2 dans chacune des quatre classes de cristaux uniaxes ou cubiques.

Les équations (19) font prévoir qu'un cristal uniaxe actif, dextrogyre suivant la direction de son axe, peut fournir une solution lévogyre.

Soit, en effet,

$$k = -a^2(x^2 + y^2) + b^2z^2,$$

la quadrique de gyration de ce cristal, il suffira que l'on ait

$$\frac{1}{2} \Delta k = -2a^2 + b^2 < 0.$$

33. Il ne faut, d'ailleurs, pas perdre de vue que, dans la vérification expérimentale des formules précédentes, il convient, tout

comme dans la vérification de la loi de Biot, qui en est une conséquence, de tenir compte des phénomènes de dissociation, polymérisation, ionisation, etc. des corps en présence dans la dissolution, et d'avoir égard au mode de structure du cristal.

On sait, en effet, qu'un cristal à structure hélicoïdale a, en général, des propriétés optiques distinctes de celles de ses constituants. On en trouve un exemple typique dans le pouvoir rotatoire du quartz, qui est dû à sa seule structure hélicoïdale, comme l'avait prévu Fresnel, et comme l'ont montré Reusch, Sohncke et Mallard.

L'étude générale de l'influence du mode de structure sur les propriétés optiques n'appartient pas à la mécanique des milieux continus; mais, dans le cas particulier d'un cristal à axes hélicoïdaux parallèles, et quand on se limite à l'étude de la propagation suivant cette direction commune, on peut obtenir une solution approchée de la question en assimilant le cristal à un empilage de lames hémihédres. C'est le problème que nous allons maintenant examiner.

IV. — Empilages de lames hémihédres.

34. PROBLÈME. — *Un rayon lumineux polarisé elliptiquement traverse normalement un empilage de lames hémihédres. On suppose nulle la perte par réflexion à l'entrée et à la sortie de chaque lame. Déterminer la vibration émergente.*

Cette question se ramène, dans un cas particulier, au problème de la décomposition d'une vibration elliptique suivant deux autres vibrations elliptiques de forme et d'orientation connues; et ce dernier problème trouve sa solution dans la méthode donnée par M. Poincaré (1) pour résoudre le problème des lames holoédres.

35. *Décomposition d'une vibration elliptique en deux vibrations elliptiques.* — Une vibration elliptique située dans le plan

(1) POINCARÉ, *Théorie mathématique de la Lumière*, t. II, Chap. XII. — Voir également : MAC CULLAGH, *Collected Works*, p. 250 (année 1845).

$s = 0$ a pour composantes les parties réelles des imaginaires u, v

$$u = A e^{-i2\pi \frac{t}{\tau}}, \quad v = \Lambda B e^{-i2\pi \frac{t}{\tau}},$$

A et B désignant deux imaginaires.

Cette vibration a même forme et même orientation que la vibration

$$u = e^{-i2\pi \frac{t}{\tau}}, \quad v = B e^{-i2\pi \frac{t}{\tau}}.$$

On peut donc dire que B définit la forme et l'orientation, et que A définit le rapport de similitude (modulé A) et la phase (argument A).

A des valeurs B et B' imaginaires conjuguées correspondent deux vibrations de même forme et de même orientation, mais décrites en sens inverse; car on change le sens d'une vibration en changeant t en $-t$, ce qui revient à changer i en $-i$ dans la valeur de B.

Soient les deux vibrations elliptiques composantes

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = e^{-i2\pi \frac{t}{\tau}}, \\ v_1 = B_1 e^{-i2\pi \frac{t}{\tau}}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u_2 = e^{-i2\pi \frac{t}{\tau}}, \\ v_2 = B_2 e^{-i2\pi \frac{t}{\tau}}, \end{array} \right.$$

une vibration résultante quelconque sera définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = A e^{-i2\pi \frac{t}{\tau}}, \\ v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \Lambda B e^{-i2\pi \frac{t}{\tau}}, \end{array} \right.$$

λ_1 et λ_2 désignant deux imaginaires.

Les équations d'identification sont donc

$$(20) \quad A = \lambda_1 + \lambda_2,$$

$$(21) \quad B = \frac{\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

et, par conséquent, le rapport de similitude et la phase sont respectivement égaux au module et à l'argument de l'imaginaire $\lambda_1 + \lambda_2$.

Quant à l'équation (21), qui fournit la forme et l'orientation, elle est susceptible d'une interprétation géométrique simple.

Désignons par M, M_1, M_2 , les affixes des imaginaires B, B_1, B_2 dans le plan $z = 0$; l'équation (21) s'écrit dans la notation des équipollences

$$OM = \frac{\lambda_1 OM_1 + \lambda_2 OM_2}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

et devient, en transportant l'origine des coordonnées en M ,

$$\lambda_1 MM_1 + \lambda_2 MM_2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(21') \quad \frac{MM_1}{MM_2} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \rho e^{i\omega},$$

cette équation (21') nous apprend que le rapport des deux longueurs MM_1 et MM_2 est égal à ρ , et que l'angle des deux directions MM_1, MM_2 est égal à ω ; d'où cette conclusion :

Les courbes $\omega = \omega_0$ sont des cercles passant par les deux points fixes M_1, M_2 , et faisant des angles $\omega = \omega_0$ avec la droite $M_1 M_2$.

Les courbes $\rho = \rho_0$ sont des cercles ayant leurs centres sur la droite $M_1 M_2$, coupant cette droite en deux points M, M' , conjugués harmoniques par rapport à M_1 et M_2 , et tels que

$$\frac{MM_1}{MM_2} = \rho_0.$$

Les deux familles de cercles sont orthogonales et les cercles de chaque famille ont pour axe radical la droite lieu des centres des cercles de l'autre famille.

36. Transformons la figure plane précédente par rayons vecteurs réciproques, en choisissant d'abord pour centre C de transformation un point quelconque de l'espace, en dehors du plan $z = 0$. Au plan $z = 0$ correspond une sphère passant par C . Aux deux familles de cercles orthogonaux ayant respectivement même axe radical correspondent sur la sphère deux familles de cercles orthogonaux dont les plans pivotent autour de deux droites fixes, savoir : pour les cercles $\omega = \omega_0$, la droite ω qui joint les points m_1, m_2 , transformés de M_1, M_2 ; pour les cercles $\rho = \rho_0$, la droite ρ intersection des plans tangents en m_1 et m_2 (plans des deux cercles de rayon nul appartenant à la famille $\rho = \rho_0$). Donc la droite ρ est la conjuguée de ω par rapport à la sphère.

Les deux familles de courbes contiennent, en particulier, les cercles $C\omega$, $C\rho$ passant par les deux droites ω , ρ et par le centre C de transformation.

De même que, dans le plan $z = 0$, les cercles $\omega = \omega_0$ et $\rho = \rho_0$ peuvent être définis par rapport à la droite M_1M_2 ; de même, sur la sphère, les cercles $\omega = \omega_0$ et $\rho = \rho_0$ seront définis par rapport au cercle $C\omega$ qui est le transformé de la droite M_1M_2 .

Tout d'abord les cercles $\omega = \omega_0$ et $C\omega$, se coupant sous le même angle que leurs transformés, font entre eux l'angle ω_0 , ce qui permet de construire le cercle ω_0 .

Quant au cercle $\rho = \rho_0$, il est défini, dans le plan $z = 0$, par l'un de ses points de rencontre N , N' avec la droite M_1M_2 . Le cercle $\rho = \rho_0$ de la sphère sera de même défini par l'un de ses points de rencontre n , n' avec le cercle $C\omega$. A cet effet, désignons par α , α_1 , α_2 les angles (comptés positivement dans le même sens) que font, dans le plan du cercle $C\omega$, les droites Cn , Cm_1 , Cm_2 avec le diamètre CD de ce cercle. Comme le cercle $C\omega$ est la figure transformée de la droite M_1M_2 , la droite CD est perpendiculaire à M_1M_2 , et l'on a la relation

$$(22) \quad \rho = \frac{NM_1}{NM_2} = \frac{DN - DM_1}{DN - DM_2} = \frac{\tan\alpha - \tan\alpha_1}{\tan\alpha - \tan\alpha_2},$$

relation homographique entre $\tan\alpha$ et ρ qui définit la droite Cm , et, par suite, le plan du cercle $\rho = \rho_0$.

En résumé, le problème de la composition des vibrations elliptiques est ramené à une épure de Géométrie sphérique. On pourra en déduire directement, par un choix convenable du centre de transformation (*voir* n° 38) les formules de Trigonométrie sphérique auxquelles divers auteurs sont arrivés par la résolution des formules d'identification.

Cette méthode va nous donner la solution géométrique du problème de la traversée d'une lame hémisphérique par un rayon lumineux.

37. Traversée d'une lame hémisphérique par un rayon polarisé elliptiquement. — Une lame hémisphérique propage sans altération deux vibrations elliptiques $M_1(u_1, v_1)$ et $M_2(u_2, v_2)$.

Pour obtenir l'effet produit par la traversée de la lame, décom-

posons la vibration elliptique incidente $M(u, v)$ suivant les deux vibrations M_1, M_2 , ce qui donne les deux valeurs de λ_1, λ_2 , résultant des équations d'identification

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, \quad v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2.$$

Les équations de la vibration M_1 qui se propage dans la lame avec la vitesse V_1 sont

$$u_1 = e^{i\frac{2\pi}{\tau}\left(\frac{z}{V_1} - t\right)}, \quad v_1 = B_1 e^{i\frac{2\pi}{\tau}\left(\frac{z}{V_1} - t\right)};$$

donc, après la traversée d'une épaisseur e , les $\lambda_1 u_1$ et $\lambda_2 u_2$ seront devenus

$$\lambda_1 u_1 e^{i\frac{2\pi}{\tau}\frac{e}{V_1}}, \quad \lambda_2 u_2 e^{i\frac{2\pi}{\tau}\frac{e}{V_2}},$$

par suite, les composantes de la vibration émergente $M'(u', v')$ seront

$$\begin{cases} u' = \lambda'_1 u_1 + \lambda'_2 u_2, \\ v' = \lambda'_1 v_1 + \lambda'_2 v_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda'_1 = \lambda_1 e^{i\frac{2\pi}{\tau}\frac{e}{V_1}}, \\ \lambda'_2 = \lambda_2 e^{i\frac{2\pi}{\tau}\frac{e}{V_2}}, \end{cases}$$

et le nouveau rapport $\frac{\lambda'_2}{\lambda'_1}$ aura pour valeur

$$\frac{\lambda'_2}{\lambda'_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{i\varphi}, \quad \varphi = \frac{2\pi}{\tau} e \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} e (n_1 - n_2),$$

λ_0 désignant la longueur d'onde dans le vide, n_1 et n_2 les deux indices.

En résumé, la traversée de la lame cristalline aura pour effet d'amener le point représentatif $M(\rho, \omega)$ en $M'(\rho, \omega + \varphi)$, c'est-à-dire de le déplacer sur le cercle $\rho = \text{const.}$ jusqu'au point de rencontre avec le cercle $\omega + \varphi$ qui fait avec le cercle primitif ω un angle φ proportionnel à l'épaisseur traversée et à la biréfringence.

38. Cet énoncé se simplifie lorsque le choix du centre C de transformation a pour effet de placer les deux points figuratifs m_1, m_2 aux deux extrémités d'un même diamètre de la sphère. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que C soit un point du cercle décrit sur $M_1 M_2$ comme diamètre et qui a son plan perpendiculaire au plan $z = 0$.

Dans ce cas particulier on a

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$$

et la relation homographique (22) devient

$$\rho = \frac{\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \alpha_1}{\operatorname{tang} \alpha + \cot \alpha_1} = \operatorname{tang} \alpha_1 \operatorname{tang}(\alpha - \alpha_1);$$

de plus, les deux familles de cercles ω et ρ sont respectivement les parallèles et les méridiens définis par la ligne des pôles m_1, m_2 . L'angle de deux cercles ω est alors égal à l'angle de leurs plans et, par suite de la traversée de la lame, le point représentatif m de la vibration incidente tourne autour de la ligne des pôles m_1, m_2 d'un angle φ proportionnel à $e(n_1 - n_2)$.

La simplification précédente peut toujours être réalisée dans l'étude des lames hémihédres, et c'est la conséquence de ce fait que les deux vibrations transmises sont semblables, décrites en sens inverse et ont leurs grands axes perpendiculaires.

Pour le montrer, remarquons que les équations de ces vibrations sont (en vertu du n° 35)

$$\begin{cases} u_1 = e^{-i2\pi \frac{t}{\tau}} \\ v_1 = B_1 e^{-i2\pi \frac{t}{\tau}} \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = e^{-i2\pi \frac{t}{\tau}} \\ v_2 = -\frac{1}{B_1'} e^{-i2\pi \frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

B_1' désignant l'imaginaire conjuguée de B_1 .

Ces équations nous apprennent que les points figuratifs M_1, M_2 de ces deux vibrations, dans le plan $z = 0$, sont situés sur une même droite passant par l'origine O des coordonnées et que

$$OM_1 \times OM_2 = -1.$$

Donc, tous les cercles verticaux ayant pour diamètres les diverses droites M_1, M_2 qui correspondent à tous les groupes de deux vibrations propagées par les lames hémihédres, coupent l'axe Oz en deux points fixes situés à une distance unité de l'origine. En choisissant pour centre C l'un de ces deux points, on réalisera, par suite, une transformation amenant les couples de points figuratifs m_1, m_2 aux deux extrémités des divers diamètres de la sphère.

39. Dans ce mode particulier de transformation, l'orientation et le rapport des axes de la vibration sont susceptibles d'une représentation simple, établie par M. Poincaré, et qu'on peut obtenir en décomposant la vibration suivant deux vibrations circulaires inverses :

Soient deux vibrations circulaires, l'une gauche et de rayon 1, l'autre droite et de rayon ρ . Choisissons l'origine des temps à l'époque où la vibration droite rencontre l'axe des x , et soit ω l'angle que fait à ce moment le rayon vecteur de la vibration gauche avec Ox . ρ et ω sont donc les quantités qui interviennent dans l'égalité (21'). Or le rayon vecteur de la vibration résultante oscille entre $1 - \rho$ et $1 + \rho$; il atteint sa valeur maximum $1 + \rho$ lorsque les deux rayons vecteurs des vibrations sont confondus et font, par suite, l'angle $\frac{1}{2}\omega$ avec Ox . Par conséquent, le rapport des axes de la vibration elliptique résultante est égal à $\frac{1-\rho}{1+\rho}$, et l'angle de ses axes avec Ox est égal à $\frac{1}{2}\omega$.

Appliquons à ces vibrations circulaires le résultat du n° 36 :

La ligne des pôles $m_1 m_2$ est dirigée suivant Oy . Les cercles $\omega = \omega_0$ sont des méridiens faisant avec le méridien origine COy l'angle ω .

Les cercles $\rho = \rho_0$ sont des parallèles, et la formule

$$\rho = \frac{\tan \alpha - \tan \alpha_1}{\tan \alpha - \tan \alpha_2}$$

devient, pour $\alpha_1 = -\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$,

$$\rho = \frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1},$$

c'est-à-dire

$$\tan \alpha = \frac{1 - \rho}{1 + \rho}.$$

D'ailleurs l'angle inscrit α est la moitié de l'angle du rayon Dn avec le plan de l'équateur COx , et l'on retrouve cet énoncé :

La demi-longitude du point figuratif de la vibration est égale à l'angle de ses axes avec Ox .

La demi-latitude est égale à l'angle d'ellipticité α (défini par $\tan \alpha = \frac{b}{a}$).

40. *Équivalence d'une lame hémihédre avec un empilage d'une lame holoédre et d'une lame isotrope hémihédre.* — D'après ce qui précède, le problème de la traversée de la lumière par une lame hémihédre est ramené à l'étude cinématique de la rotation d'un corps solide.

On figurera sur la sphère les deux points diamétralement opposés m, m' , qui sont les points représentatifs des vibrations elliptiques transmises par la lame hémihédre et qui ont pour coordonnées sphériques $(2\omega, 2\alpha)$ et $(2\omega, \pi + 2\alpha)$. Une vibration incidente sera représentée par un point $(2\omega', 2\alpha')$ qui tournera autour de mm' d'un angle

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} e(n_1 - n_2).$$

Les éléments $(2\omega', 2\alpha')$ de la vibration émergente repassent donc périodiquement par les mêmes valeurs, en oscillant de part et d'autre d'une valeur moyenne, quand on fait varier l'épaisseur de la lame.

Toute rotation autour d'un axe mm' peut se décomposer en deux rotations : l'une autour de la ligne des pôles m_1, m_2 , l'autre autour d'une droite située dans le plan de l'équateur. Toute lame hémihédre l équivaut donc à l'empilage d'une lame holoédre l_1 et d'une lame isotrope hémihédre l_2 .

Si la lame est infiniment mince, les deux composantes de la rotation infiniment petite autour de m, m' sont données par la règle du parallélogramme. Donc, en premier degré d'approximation, les lames l et l_1 ont leurs sections principales parallèles, et les rotations l_1 et l_2 sont les deux projections de l .

Dans le cas d'une lame d'épaisseur finie, on sera conduit à deux solutions géométriques identiques en appliquant, soit la règle d'Euler, soit la méthode de décomposition en rotations binaires dont les axes font un angle $\frac{1}{2}\varphi$.

41. *Empilage de lames holoédres.* — Mallard a montré que, en deuxième approximation, un empilage de lames holoédres est équivalent à une lame hémihédre dont les éléments sont définis par la construction géométrique suivante :

On numérote 1, 2, 3, . . . , p les lames superposées ;

On forme, dans le plan, une ligne polygonale dont les côtés ont pour longueurs $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ et dont les angles respectifs sont $2(\omega_2 - \omega_1), 2(\omega_3 - \omega_2), \dots, 2(\omega_p - \omega_{p-1})$, φ et ω ayant la même signification que précédemment.

Soient

φ_n la longueur de la résultante du polygone;

$2\omega_n$ l'angle de cette droite avec le côté φ_1 ;

S l'aire du polygone 1, 2, 3, ..., p;

la lame hémisphérique équivalente à l'empilage 1, 2, 3, ..., p est elle-même équivalente à l'empilage d'une lame holoédre φ_n, ω_n et d'une lame isotrope hémisphérique dont le paramètre φ' est égal à l'aire S.

M. Poincaré a donné la solution complète du problème en substituant dans l'énoncé de Mallard les figures sphériques aux figures planes :

Le problème de la traversée de lames holoédres est, en effet (n° 39), identique au problème de la composition de rotations autour d'axes situés dans le plan de l'équateur. Le produit de ces rotations s'obtiendra en faisant rouler sur l'équateur un polygone sphérique dont les côtés sont $2(\omega_2 - \omega_1), 2(\omega_3 - \omega_2), \dots$ et dont les angles dièdres sont $2\pi - \varphi_1, 2\pi - \varphi_2, \dots$ et il suffira de construire son polygone polaire pour obtenir le résultat annoncé.

42. *Empilage de lames hémisphériques.* — Soit un empilage de lames hémisphériques définies par les points représentatifs

$$(m_1, m'_1), (m_2, m'_2), \dots, (m_p, m'_p)$$

et les rotations

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p.$$

Le problème de la traversée de cet empilage par un rayon lumineux est identique au problème de la composition de rotations quelconques. Or, ce dernier peut se ramener à l'étude de rotations situées dans le plan de l'équateur.

Pour le démontrer, décomposons chaque rotation φ_p autour de (m_p, m'_p) en une rotation A_p autour de la ligne des pôles (m_1, m_2) et une rotation B_p autour d'une droite située dans le plan de l'équateur.

Nous sommes ramenés à déterminer le produit des rotations

$$P = A_1 B_1 A_2 B_2 \dots A_p B_p.$$

A cet effet, formons les rotations

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} B'_1 = A_1 B_1 A_1^{-1}, \\ B'_2 = A_1 A_2 B_2 A_1^{-1} A_2^{-1}, \\ \dots\dots\dots, \\ B'_p = A_1 A_2 \dots A_p B_p A_1^{-1} A_2^{-1} \dots A_p^{-1}. \end{array} \right.$$

Ces nouvelles rotations B' , qui sont les transformées des rotations B par les rotations $A_1^{-1}, (A_1 A_2)^{-1}, \dots$, sont, par conséquent, situées dans le plan de l'équateur et les axes B' font respectivement entre eux des angles

$$(2\omega_2 - \omega_1) - A_2, \quad 2(\omega_3 - \omega_2) - A_3, \quad \dots$$

D'ailleurs, il résulte des relations (23) l'égalité

$$P = B'_1 B'_2 \dots B'_p A_1 A_2 \dots A_p.$$

On est donc ramené au problème précédent : on déterminera par la règle du polygone sphérique la résultante des rotations B'_1, B'_2, \dots, B'_p situées dans le plan de l'équateur et on la composera avec la rotation $A_1 A_2 \dots A_p$ autour de la ligne des pôles.

V. — Formules donnant la différence de marche des deux vibrations elliptiques propagées par un cristal doué de pouvoir rotatoire.

1° CRISTAUX UNIAXES.

43. *PROBLÈME. — On découpe dans un cristal uniaxe une lame à faces parallèles dont la normale fait un angle θ avec l'axe optique. Une onde incidente parallèle à la lame se dédouble à l'entrée en deux ondes parallèles caractérisées par des vibrations elliptiques semblables décrites en sens inverse et dont les grands axes sont perpendiculaires. Déterminer en fonction de l'angle θ leur différence de marche à la sortie.*

On a démontré (n° 38) que la traversée d'une lame hémiondre a

pour effet de faire trouver le point figuratif de la vibration résultante d'un angle φ donné par la formule

$$\varphi = \frac{2\pi}{\tau} e \left(\frac{1}{V'} - \frac{1}{V''} \right);$$

$\frac{\varphi}{2\pi}$ représente la distance, en longueurs d'onde, qui existe entre les deux ondes émergentes provenant d'une même onde incidente; c'est la différence de marche à la sortie de la lame.

Pour une épaisseur-unité, la différence de marche p a donc pour valeur

$$p = \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{V'} - \frac{1}{V''} \right).$$

On déterminera p au moyen des formules (8'')

$$(8'') \quad \begin{cases} (V^2 - V_1^2) \cos \alpha = \mu k \sin \alpha, \\ (V^2 - V_2^2) \sin \alpha = \mu k \cos \alpha, \end{cases}$$

dans lesquelles α représente l'ellipticité des vibrations transmises $\left(\tan \alpha = \frac{b}{a} \right)$.

On tire de ces formules

$$(24) \quad \begin{cases} \tan 2\alpha = \frac{2\mu k}{V_1^2 - V_2^2}, \\ V'^2 = V_1^2 + \mu k \tan \alpha = V_2^2 + \mu k \cot \alpha, \\ V''^2 = V_1^2 - \mu k \cot \alpha = V_2^2 - \mu k \tan \alpha, \\ V'^2 + V''^2 = V_1^2 + V_2^2, \\ V'^2 - V''^2 = \frac{V_1^2 - V_2^2}{\cos 2\alpha} = \frac{2\mu k}{\sin 2\alpha}. \end{cases}$$

44. Appliquons ces résultats aux *cristaux uniaxes* :

Soit Oz la direction de l'axe principal. L'ellipsoïde optique et la quadrique de gyration sont de révolution autour de Oz et ont, par conséquent, pour équations

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= V_0^2(x^2 + y^2) + V_z^2 z^2 = 1, \\ K(x, y, z) &= A(x^2 + y^2) + Cz^2 = 1, \end{aligned}$$

d'où les inconnues α et p

$$(25) \quad \tan 2\alpha = \frac{p_0}{P} \cot^2 \theta \left(1 + \frac{A}{C} \tan^2 \theta \right),$$

$$(26) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} p^2 = P^2 \sin^4 \theta + p_0^2 \cos^4 \theta \left(1 + \frac{A}{C} \tan^2 \theta \right)^2,$$

formules dans lesquelles P, p_0, ν ont pour valeurs

$$(27) \quad \begin{cases} P = \frac{1}{\lambda} \frac{n_0(n_e^2 - n_0^2)}{2n_e^2}, \\ p_0 = \frac{1}{\tau} \frac{1}{2V_0^3} 2\mu C, \\ \nu = 1 + \frac{3}{4} \frac{n_e^2 - n_0^2}{n_e^2} \sin^2 \theta + \dots \end{cases}$$

Quand la propagation se fait suivant la direction de l'axe, l'effet de la traversée de la lame se réduit (n° 38) à une rotation $\frac{1}{2}\varphi = \pi p_0$. La valeur de cette rotation détermine donc p_0 et par suite C .

Le facteur ν diffère peu de l'unité; ainsi, pour le quartz, il varie de 1 à 1,0087 quand θ varie de 0° à 90°. Si l'on suppose $\nu = 1$ dans l'équation (26), on en déduit une formule qui contient comme cas particuliers celles de Mac Cullagh et de M. Sarrau.

1° *Formule de Mac Cullagh.* — Nous avons rappelé dans l'Introduction que Mac Cullagh avait donné, dès 1839, les équations de la théorie gyrostatique en première approximation

$$W = W_2(p, q, r).$$

Au lieu de généraliser ce résultat en étudiant une fonction de p, q, r et de leurs dérivées de tous ordres en x, y, z , Mac Cullagh a d'abord, en 1840, tenté de déduire la valeur du terme W_3 de considérations sur les aires relatives qui l'ont amené à choisir pour W_3 le polynome isotrope

$$W_3 = C(pp_1 + qq_1 + rr_1), \quad p_1 = \left[\frac{d}{dx} \cdot \mathbf{P} \right].$$

On obtiendra donc la formule de Mac Cullagh en écrivant $C = A$ dans la formule (26), ce qui donne la formule (28)

$$(28) \quad p^2 = P^2 \sin^2 \theta + p_0^2.$$

2° *Formule de M. Sarrau.* — Dans le cas particulier où k est nul pour les directions perpendiculaires à l'axe principal, la quadrique de gyration se réduit à deux plans parallèles. On a

$$A = 0$$

et la formule (26) se réduit à (29)

$$(29) \quad p^2 = P^2 \sin^4 \theta + p_0^2 \cos^4 \theta;$$

c'est la formule de M. Sarrau.

2° CRISTAUX BIAxes.

45. Soit

$$F(x, y, z) = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1, \quad a > b > c$$

l'équation de l'ellipsoïde optique.

Soient θ' et θ'' les angles que fait la normale à l'onde avec les deux axes optiques.

On a les formules

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2\mu k}{(a^2 - c^2) \sin \theta' \sin \theta''}, \\ \frac{1}{v} p = \frac{1}{\tau} \frac{1}{2V_m} \sqrt{(a^2 - c^2)^2 \sin^2 \theta' \sin^2 \theta'' + 4\mu^2 k^2}, \end{array} \right.$$

formules dans lesquelles V_m et v ont pour valeurs

$$\left\{ \begin{array}{l} V_m = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}, \\ v = 1 - \frac{3}{2} \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} \cos \theta' \cos \theta'' + \dots \end{array} \right.$$

k représente une forme quadratique des cosinus directeurs de la normale à l'onde.

CHAPITRE III.

RÉFLEXION ET RÉFRACTION A LA SURFACE DES MILIEUX GYROSTATIQUES.
CONTINUITÉ DES PRESSIONS. — ÉCHANGES D'ÉNERGIE. — VECTEUR RADIANT.
PRINCIPE DES FORCES VIVES. — HYPOTHÈSE DE MAC CULLAGH.

I. Équations de continuité. — Lois de la réfraction uniradiale.

46. *Principe de la couche de passage.* — *Équations de continuité.* -- Le passage d'un milieu gyrostatique au suivant s'effectue d'une manière continue par l'intermédiaire d'un milieu gyrostatique hétérogène vérifiant l'équation fondamentale de Green (milieu supposé indéfini) :

$$\int \rho \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \delta u + \frac{d^2 v}{dt^2} \delta v + \frac{d^2 w}{dt^2} \delta w \right) d\omega + \delta \int W d\omega = 0,$$

et dans lequel doivent rester *finis* les trois vecteurs

vibration (u, v, w) ,
vortex (p, q, r) ou rotation $\times 2$,
potentiel-vecteur (P, Q, R) ou couple $\times \frac{1}{2}$.

Cet énoncé entraîne les équations indéfinies relatives à la couche de passage (n° 14)

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d^2 u}{dt^2} = - \left[\frac{d}{dx} \cdot P \right], \\ P = \sum (-1)^n D^n \frac{dW}{d D^n p}, \\ p = \left[\frac{d}{dx} \cdot u \right]. \end{array} \right.$$

W, qui contient explicitement x, y, z , doit prendre au contact des deux milieux 1 et 2 les valeurs correspondantes W_1 et W_2

Choisissons comme surface de séparation des deux milieux 1 et 2 le plan $z = 0$, et cherchons les équations de continuité qu'on obtient dans l'hypothèse d'une couche de passage infiniment mince par rapport à la longueur d'onde.

Les dérivées de u , v , w , P , Q , R par rapport à x et y sont évidemment finies; il en est de même des $\frac{d^2}{dt^2}(u, v, w)$ si les perturbations sont périodiques.

Donc :

En vertu du premier groupe des équations (1), $\frac{dP}{dz}$ et $\frac{dQ}{dz}$ sont finis;

Et en vertu du troisième groupe (1) $\frac{du}{dz}$ et $\frac{dv}{dz}$ sont finis.

Par conséquent, la vibration et le potentiel-vecteur ont leurs composantes tangentielles continues à la surface de séparation des deux milieux.

Telles sont les quatre équations fondamentales nécessaires et suffisantes pour la mise en équation du problème de la réflexion et de la réfraction; elles n'impliquent aucune hypothèse sur la nature des deux milieux 1 et 2 (homogènes ou hétérogènes).

47. On peut compléter chaque groupe de deux équations par une troisième qui est la conséquence des deux premières :

Du premier groupe

$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} = - \left[\frac{d}{dx} \cdot P \right]$$

on a déduit que $\frac{dP}{dz}$ et $\frac{dQ}{dz}$ sont finis. Par conséquent, les opérations $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\frac{d}{dz}$ effectuées respectivement sur $\left[\frac{d}{dx} \cdot P \right]$, $\left[\frac{d}{dy} \cdot Q \right]$, $\left[\frac{d}{dz} \cdot R \right]$ ont un sens, et l'on obtient la relation

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{d(\rho u)}{dx} + \frac{d(\rho v)}{dy} + \frac{d(\rho w)}{dz} \right] = 0,$$

d'où l'on conclut que $\frac{d}{dz}(\rho w)$ reste fini dans la couche de passage. Donc, au système des deux équations de continuité

$$\begin{cases} \Sigma P_1 = \Sigma P_2, \\ \Sigma Q_1 = \Sigma Q_2, \end{cases}$$

on peut substituer le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma P_1 = \Sigma P_2, \\ \Sigma Q_1 = \Sigma Q_2, \\ \Sigma \rho_1 \omega_1 = \Sigma \rho_2 \omega_2, \end{array} \right.$$

qui se réduit à deux relations indépendantes.

Le même raisonnement, appliqué au troisième groupe $p = \left[\frac{d}{dx} \cdot u \right]$, nous montre qu'au système des deux équations de continuité

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma u_1 = \Sigma u_2, \\ \Sigma v_1 = \Sigma v_2 \end{array} \right.$$

on peut substituer le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma u_1 = \Sigma u_2, \\ \Sigma v_1 = \Sigma v_2, \\ \Sigma r_1 = \Sigma r_2, \end{array} \right.$$

qui se réduit à deux relations indépendantes.

48. Il reste à vérifier que les valeurs obtenues sont compatibles avec le deuxième groupe d'équations (1) dont on n'a pas tenu compte jusqu'à présent. C'est en effet ce qui a lieu, et ces équations nous apprennent que R est discontinu, et que p , q , $\frac{dr}{dz}$ ainsi que leurs dérivées de tous ordres sont discontinus à la surface de séparation.

49. *Remarque I.* — Les équations indéfinies des milieux homogènes, étudiées au Chapitre II, sont de la forme

$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} = \sum (A D^n u + B D^n v + C D^n w),$$

les A , B , C désignant des constantes.

Pour définir les milieux hétérogènes, on se contente parfois de remplacer dans les équations précédentes les A , B , C par des fonctions arbitraires de x , y , z . Cette définition est en contradiction avec les principes de la Mécanique des milieux continus; car le potentiel W des milieux hétérogènes étant fonction explicite de

x, y, z , les équations indéfinies contiennent les fonctions arbitraires A, B, C et leurs dérivées.

Par exemple, les équations des milieux isotropes hétérogènes seront, au degré d'approximation $W = W_2$,

$$\left\{ \begin{array}{l} 2W = A(p^2 + q^2 + r^2), \\ P = Ap, \\ \rho \frac{d^2 u}{dt^2} = - \left[\frac{d}{dx} \cdot Ap \right] = -A \left[\frac{d}{dx} \cdot \frac{d}{dx} \cdot u \right] + r \frac{d\Lambda}{dy} - q \frac{d\Lambda}{dz}, \end{array} \right.$$

ce qui explique les contradictions apparentes qu'on a cru tirer du principe de la couche de passage contre certaines théories.

Remarque II. — Pour obtenir les équations de continuité, il n'est pas nécessaire de supposer finies toutes les composantes de la vibration, du vortex et du potentiel-vecteur.

Ainsi la continuité de P et Q est la conséquence des valeurs finies de u, v, R , et elle entraîne la valeur finie de P et Q dans la couche de passage. De même, la continuité de u et v est la conséquence des valeurs finies de p, q et w . Il suffit donc de supposer finies les composantes w, p, q, R .

50. Le principe de la couche de passage est dû à M. Potier qui l'a utilisé dans le cas de milieux isotropes séparés par une couche d'épaisseur non négligeable (*Association française pour l'avancement des Sciences*, 1872; *Comptes rendus*, 1889). Pour appliquer son analyse à la théorie gyrostatique développée dans ce Mémoire, il suffit d'intervertir les vecteurs vibration et rotation.

Le cas des milieux anisotropes séparés par une couche d'épaisseur infiniment mince a été étudié en particulier par Gibbs (*American Journal of Science*, 1889), et par M. Poincaré (*Théorie de la Lumière*, t. I; *Comptes rendus*, 1891).

51. *Addition au principe de continuité.* — *Fait expérimental*: Le coefficient d'isotropie ρ a même valeur dans tous les milieux gyrostatiques. *Loi de transversalité dans les milieux gyrostatiques hétérogènes.* — La résolution des quatre équations de continuité fournit des formules contenant les deux paramètres ρ_1, ρ_2 , et la comparaison de ces formules avec l'expérience donnera les valeurs du rapport $\frac{\rho_1}{\rho_2}$. Or, quels que soient les mi-

licieux homogènes en présence, le rapport $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ déduit de ces formules est constamment égal à l'unité. Ainsi donc l'équation de continuité

$$\Sigma \rho_1 \omega_1 = \Sigma \rho_2 \omega_2$$

se réduit à

$$\Sigma \omega_1 = \Sigma \omega_2,$$

et, par suite, les trois composantes de la vibration restent continues. On a évidemment

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{d\rho}{dy} = 0$$

en tout point du milieu hétérogène qui constitue la couche de passage, et la condition $\rho_1 = \rho_2$ conduit à $\frac{d\rho}{dz} = 0$, c'est-à-dire à $\rho = \text{constante}$. Autrement dit l'équation

$$\Sigma \frac{d}{dx} \left(\rho \frac{d^2 u}{dt^2} \right) = 0$$

se réduit à

$$\frac{d^2}{dt^2} \Sigma \frac{du}{dx} = 0,$$

et, en se bornant aux perturbations périodiques, à

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

équation qui exprime la transversalité dans le milieu hétérogène.

Cette équation de transversalité fournit une nouvelle équation de continuité qu'on a avantage à substituer à l'équation additionnelle $\Sigma r_1 = \Sigma r_2$: c'est la continuité de $\frac{dw}{dz}$ dans la couche de passage.

En définitive, en tenant compte de la relation expérimentale $\rho = \text{constante}$, les deux groupes d'équations de continuité peuvent s'écrire

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma u_1 = \Sigma u_2, \\ \Sigma v_1 = \Sigma v_2, \\ \Sigma \left(\frac{dw}{dz} \right)_1 = \Sigma \left(\frac{dw}{dz} \right)_2, \end{array} \right.$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma P_1 = \Sigma P_2, \\ \Sigma Q_1 = \Sigma Q_2, \\ \Sigma \omega_1 = \Sigma \omega_2, \end{array} \right.$$

chaque groupe ne renfermant que deux relations indépendantes.

52. *Définition du rayon conjugué.* — Les équations de la propagation dans un milieu homogène indéfini admettent pour solutions les parties réelles des imaginaires u, v, w, P, Q, R, \dots définies par les formules

$$\frac{u}{u_0 + iu_1} = \frac{v}{v_0 + iv_1} = \frac{w}{w_0 + iw_1} = \frac{P}{P_0 + iP_1} = \dots = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z - vt)}$$

En un point (x, y, z) du milieu, la vibration et le potentiel-vecteur décrivent des ellipses dont la correspondance est donnée par les équations indéfinies

$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} = - \left[\frac{d}{dx} \cdot P \right],$$

c'est-à-dire

$$\rho \mu V^2 u = i[\alpha \cdot P] = e^{i\frac{\pi}{2}}[\alpha \cdot P],$$

et ces équations expriment les relations suivantes :

PREMIER CAS : *Onde non évanescence.* — α, β, γ sont réels, et, par suite, la vibration au temps t est l'axe de deux vecteurs qui sont :

- { Le vecteur $\frac{1}{\rho \mu V^2}$ dirigé suivant la normale α, β, γ à l'onde,
- { Le potentiel-vecteur au temps $t - \frac{\tau}{4}$.

DEUXIÈME CAS : *Onde évanescence.* — α, β, γ sont imaginaires. Soit $\alpha = \alpha' + i\alpha''$; l'équation indéfinie devient

$$\rho \mu V^2 u = e^{i\frac{\pi}{2}}[\alpha' \cdot P] + e^{i\pi}[\alpha'' \cdot P],$$

par suite, la vibration au temps t est la résultante de deux vecteurs qui sont respectivement

- { L'axe du vecteur $\frac{1}{\rho \mu V^2}(\alpha', \beta', \gamma')$ et du potentiel-vecteur au temps $t - \frac{\tau}{4}$,
- { L'axe du vecteur $\frac{1}{\rho \mu V^2}(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ et du potentiel-vecteur au temps $t - \frac{\tau}{2}$.

Réciproquement, cherchons la valeur de P, Q, R correspondant à chaque valeur de u, v, w .

Soient l, m, n les cosinus directeurs de la normale au plan décrit par le potentiel-vecteur.

Des équations indéfinies

$$\rho\mu V^2 u = i[x.P],$$

on déduit, en tenant compte de la relation $lP + mQ + nR = 0$,

$$\rho\mu V^2 [l.u] = i[l.x.P] = -iP(l\alpha + m\beta + n\gamma),$$

ce qu'on peut encore écrire

$$(4) \quad P = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} \rho\mu V [X.u],$$

en désignant par θ , X , Y , Z les grandeurs réelles définies par les équations (5),

$$(5) \quad \begin{cases} l\alpha + m\beta + n\gamma = de^{-i\theta}, \\ \frac{X}{l} = \frac{Y}{m} = \frac{Z}{n} = \frac{V}{d}. \end{cases}$$

Les équations (4) et (5) se traduisent par l'énoncé géométrique ci-dessous :

§3. THÉORÈME. — *Le potentiel-vecteur, au temps t , est (au coefficient près $\rho\mu V$) l'axe de deux vecteurs qui sont :*

Le vecteur X , Y , Z de longueur $\frac{V}{d}$ dirigé suivant l , m , n ;

La vibration au temps $t - \frac{\tau}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$.

Lorsque l'onde n'est pas évanescence, la constante de temps θ est égale à zéro, et le vecteur X , Y , Z a son extrémité dans le plan de l'onde $\alpha x + \beta y + \gamma z - V = 0$.

Dans ce qui va suivre, nous donnerons le nom de *rayon conjugué* au vecteur X , Y , Z qui joue un rôle essentiel dans l'étude de la réflexion et de la réfraction.

Remarque I. — On a

$$\rho\mu V = \frac{2\pi\rho}{\tau},$$

le coefficient d'isotropie ρ est le même pour tous les milieux. τ n'est pas modifié par la réflexion et la réfraction (*voir* n° 55).

Donc le facteur de proportionnalité $\rho\mu V$ est indépendant de la direction de l'onde et de la nature des milieux en présence.

Remarque II. — Lorsque le milieu est dénué de pouvoir rotatoire, le vecteur X, Y, Z est indéterminé dans un plan perpendiculaire au potentiel-vecteur, et l'on définira dans chaque cas (nos 68, 72) la direction à laquelle on réservera le nom de *rayon conjugué*.

§4. *Réflexion et réfraction à la surface de séparation de deux milieux homogènes.*

Équations. — Une onde qui se propage dans un milieu anisotrope et qui rencontre sa surface de séparation avec un second milieu anisotrope donnera naissance à deux ondes réfléchies et à deux ondes réfractées.

Soient

$z = 0$ la surface de séparation des deux milieux ;

$(u_1, v_1, w_1), (p_1, q_1, r_1), (P_1, Q_1, R_1)$ les imaginaires qui définissent la vibration, le vortex et le potentiel-vecteur de l'onde incidente ;

$u'_1, v'_1, w'_1), \dots, (u_2, v_2, w_2), \dots$ les grandeurs analogues pour une onde réfléchie et une onde réfractée,

$$e^{i \frac{2\pi}{\lambda_1} (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z - v_1 t)}, \quad e^{i \frac{2\pi}{\lambda'_1} (\alpha'_1 x + \beta'_1 y + \gamma'_1 z - v'_1 t)}, \quad e^{i \frac{2\pi}{\lambda_2} (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z - v_2 t)}$$

leurs facteurs exponentiels.

Les vitesses de propagation V_1, V'_1, V_2 sont toujours réelles, et il en sera de même de $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, si l'onde incidente a parcouru un chemin fini dans le milieu 1.

Les α, β, γ satisfont d'ailleurs aux relations

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = \alpha_1'^2 + \beta_1'^2 + \gamma_1'^2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1.$$

Résoudre le problème de la réflexion et de la réfraction consiste à résoudre les équations de continuité du n° 51 :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 + \Sigma u'_1 = \Sigma u_2, \\ v_1 + \Sigma v'_1 = \Sigma v_2, \\ \left(\frac{dw}{dz} \right)_1 + \Sigma \left(\frac{dw'}{dz} \right)_1 = \Sigma \left(\frac{dw}{dz} \right)_2, \end{array} \right.$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_1 + \Sigma P'_1 = \Sigma P_2, \\ Q_1 + \Sigma Q'_1 = \Sigma Q_2, \\ w_1 + \Sigma w'_1 = \Sigma w_2, \end{array} \right.$$

chacun des deux groupes (2) et (3) se réduisant, comme on l'a vu plus haut, à deux relations indépendantes.

Ces relations, qui doivent être vérifiées à tout instant, en tout point de la surface de séparation, sont donc des identités en x, y, t . Or l'identité

$$A e^{ax+by+ct} + A' e^{a'x+b'y+c't} + \dots \equiv 0$$

entraîne

$$a = a' = \dots, \quad b = b' = \dots, \quad c = c' = \dots, \\ A + A' + \dots = 0.$$

55. Ce résultat appliqué aux équations (2) et (3) nous donnera les équations de la réflexion et de la réfraction.

En particulier, en utilisant l'une quelconque des équations de continuité de la vibration, on aura les relations

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{V_1}{\lambda_1} = \frac{V'_1}{\lambda'_1} = \frac{V_2}{\lambda_2} = \dots, \\ \frac{\alpha_1}{\lambda_1} = \frac{\alpha'_1}{\lambda'_1} = \frac{\alpha_2}{\lambda_2} = \dots, \\ \frac{\beta_1}{\lambda_1} = \frac{\beta'_1}{\lambda'_1} = \frac{\beta_2}{\lambda_2} = \dots \end{cases}$$

Le premier groupe de (6) exprime que les périodes $\tau_1, \tau'_1, \tau_2, \dots$ sont égales. Les deux autres expriment, dans le cas particulier où les α, β, γ sont réels, les lois de la réflexion et de la réfraction fournies par le principe d'Huygens, c'est-à-dire : les plans des ondes incidentes, réfléchies et réfractées ont même trace sur la surface de séparation des milieux et font avec cette surface des angles i_1, i'_1, i_2, \dots qui vérifient la proportion des sinus

$$\frac{\sin i_1}{\lambda_1} = \frac{\sin i'_1}{\lambda'_1} = \frac{\sin i_2}{\lambda_2} = \dots$$

Choisissons pour plan des $y = 0$ le plan d'incidence; les imaginaires u_1, v_1, w_1 ont alors pour valeurs

$$\frac{u_1}{\cos i_1} = \frac{v_1}{B_1} = \frac{w_1}{\sin i_1} = s_1 e^{2\pi i \frac{t}{\tau_1}}$$

L'imaginaire B_1 définit la forme et l'orientation de la vibration elliptique, l'imaginaire $s_1 = r_1 e^{-2\pi i \varphi_1}$ définit le rapport de similitude et la phase (*voir* n° 35). On connaît les imaginaires B et l'on déduira, des quatre équations de continuité indépendantes, les

C.

6

imaginaires s qui définissent les deux ondes réfléchies et les deux ondes réfractées.

En général, l'onde incidente n'est pas évanescence; par suite, les $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sont réels, et, en vertu de la relation des sinus, il en est de même de $\alpha'_1, \beta'_1, \alpha_2, \beta_2$. Au contraire, les γ'_1 et γ'_2 sont donnés par les relations

$$\frac{1 - \gamma_1^2}{V_1^2} = \frac{1 - \gamma_1'^2}{V_1'^2} = \frac{1 - \gamma_2^2}{V_2^2},$$

et peuvent, suivant les valeurs de $\frac{V_1'}{V_1}$ et $\frac{V_2'}{V_2}$, être réels ou imaginaires pures; mais il convient de distinguer entre les ondes réfléchies et réfractées: la construction d'Huygens montre, en effet, qu'une au moins des ondes réfléchies n'est jamais évanescence, et, si l'on tient compte de la valeur minime de la biréfringence, on en conclut que:

- 1° L'évanescence d'une onde réfléchie ne peut se produire qu'au voisinage de l'incidence rasante;
- 2° Quand le second milieu est biréfringent, il y a le plus souvent 0 ou 2 ondes réfractées évanescences.

56. Lorsque aucune des ondes n'est évanescence, et que les imaginaires B_1, B'_1, B_2, \dots ont même argument, la réflexion et la réfraction n'introduisent aucune différence de phase; car les équations (2) et (3), linéaires en s , seront à coefficients réels, et, par conséquent, les différences de phase $\varphi_1 - \varphi'_1, \dots$ seront nulles ou égales à un multiple de π .

Cette dernière condition est, en particulier, remplie quand les deux milieux sont holoédres (hypothèse de Fresnel) et l'on passe évidemment du cas des ondes non évanescences au cas des ondes évanescences en remplaçant, dans les formules, les grandeurs réelles s par leur expression générale $re^{-2\pi i\varphi'}$, ce qui justifie la méthode imaginée par Fresnel pour résoudre le problème de la réflexion totale.

57. *Réfraction uniradiale à la surface de séparation d'un milieu isotrope holoédre et d'un milieu anisotrope hémédre.* — Un rayon polarisé elliptiquement, qui rencontre la surface de séparation d'un milieu isotrope holoédre et d'un milieu anisotrope

hémicdre, donnera naissance à un rayon réfléchi et à deux rayons réfractés, tous trois polarisés elliptiquement. Comme le premier milieu propage indifféremment des vibrations de toute forme, on pourra décomposer la vibration elliptique incidente en deux vibrations elliptiques arbitraires situées dans son plan, problème résolu géométriquement au n° 36.

Une vibration elliptique arbitraire de forme et de position est définie par l'imaginaire B , et l'on pourra déterminer B par la condition d'annuler l'imaginaire $s_2 = r_2 e^{-2\pi i \varphi_2}$, qui définit la grandeur et la phase d'une des deux vibrations réfractées. C'est cette recherche qui constitue le problème des vibrations incidentes unirationnelles.

On connaît la solution géométrique donnée par Mac Cullagh dans le cas particulier des vibrations rectilignes (milieux holoédres) et pour la première approximation $W = W_2$. Nous allons montrer que la solution de Mac Cullagh s'étend au cas général

$$W = W_2 + W_3 + \dots + W_n + \dots$$

Traisons d'abord le cas où il n'y a pas d'ondes évanescentes. Les équations du problème sont

$$\begin{aligned} \text{Lois d'Huygens} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{V_1}{V_2}, \\ \frac{\alpha'_1}{\alpha_1} = \frac{\beta'_1}{\beta_1} = -\frac{\gamma'_1}{\gamma_1} = 1, \end{array} \right. \\ (2') \quad & \left\{ \begin{array}{l} u_1 + u'_1 = u_2, \\ v_1 + v'_1 = v_2, \\ \frac{\gamma_1}{V_1} (\omega_1 - \omega'_1) = \frac{\gamma_2}{V_2} \omega_2, \end{array} \right. \\ (3') \quad & \left\{ \begin{array}{l} P_1 + P'_1 = P_2, \\ Q_1 + Q'_1 = Q_2, \\ \omega_1 + \omega'_1 = \omega_2. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Remplaçons les P , Q par leurs valeurs fournies par les équations (4), permutons les troisièmes équations des deux groupes (2'), (3') et nous aurons les systèmes

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 + u'_1 = u_2, \\ v_1 + v'_1 = v_2, \\ \omega_1 + \omega'_1 = \omega_2 \end{array} \right.$$

et

$$(7') \quad \begin{cases} V_1(\gamma_1 u_1 - \alpha_1 \omega_1) - V_1(\gamma_1 u'_1 + \alpha_1 \omega'_1) = Z_2 u_2 - X_2 \omega_2, \\ V_1(\gamma_1 v_1 - \beta_1 \omega_1) - V_1(\gamma_1 v'_1 + \beta_1 \omega'_1) = Z_2 v_2 - Y_2 \omega_2, \\ \frac{\gamma_1}{V_1}(\omega_1 - \omega'_1) = \frac{\gamma_2}{V_2} \omega_2. \end{cases}$$

Le système (7) signifie que le vecteur qui décrit la vibration réfractée est, à chaque instant, la résultante des vecteurs correspondants des vibrations incidente et réfléchie. (Les vecteurs correspondants sont, par définition, les valeurs simultanées au temps t , des vecteurs qui décrivent les vibrations incidente, réfléchie et réfractée en un même point de la surface de séparation.)

Le système (7') donne lieu à une interprétation géométrique remarquable : remplaçons en effet dans les deux premières équations de (7') $\omega_1 + \omega'_1$ par ω_2 , et exprimons les α_1, β_1 en fonction des α_2, β_2 par les lois d'Huygens, et nous aurons

$$(7'') \quad \begin{cases} V_1 \gamma_1 (u_1 - u'_1) - Z_2 u_2 = \left(\frac{V_1^2}{V_2} \alpha_2 - X_2 \right) \omega_2, \\ V_1 \gamma_1 (v_1 - v'_1) - Z_2 v_2 = \left(\frac{V_1^2}{V_2} \beta_2 - Y_2 \right) \omega_2, \\ V_1 \gamma_1 (\omega_1 - \omega'_1) - Z_2 \omega_2 = \left(\frac{V_1^2}{V_2} \gamma_2 - Z_2 \right) \omega_2, \end{cases}$$

et, en définitive, les systèmes (7) et (7'') donnent cet énoncé géométrique :

58. THÉORÈME. — *Dans la réfraction uniradiale, le vecteur de la vibration réfractée est, à chaque instant, la résultante des vecteurs correspondants des vibrations incidente et réfléchie; et le plan de ces trois vecteurs pivote autour d'une droite fixe qui est la résultante des deux vecteurs :*

1° $\frac{V_1^2}{V_2} (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ dirigé suivant la normale à l'onde réfractée;

2° $-(X_2, Y_2, Z_2)$, c'est-à-dire le rayon conjugué changé de signe.

59. Cas où l'onde réfractée est évanescence. — En vertu des équations (4), il faut remplacer, dans les équations (7'), (7''),

X_2, Y_2, Z_2 par $X_2 e^{i\theta}, Y_2 e^{i\theta}, Z_2 e^{i\theta}$, d'où l'énoncé géométrique plus général qui doit être substitué au précédent. L'onde réfractée évanescence doit d'abord se calculer en donnant à α, β, γ des valeurs imaginaires dans les équations indéfinies (4) et (5) du Chapitre II (nos 18 et 19).

60. *Construction géométrique.* — Les exponentielles figurent en facteur commun dans les équations de continuité; donc, à un couple de diamètres conjugués de la vibration uniradiale incidente correspondent des couples de diamètres conjugués pour la vibration réfléchie et pour la vibration réfractée. Cette remarque permet de simplifier la construction géométrique fournie par le théorème précédent (n° 58) qui donne, point par point, l'uniradiale incidente et sa vibration réfléchie.

On décomposera une vibration incidente quelconque en deux vibrations uniradiales en appliquant la méthode géométrique donnée au n° 36. A cet effet, on figurera sur une sphère les points représentatifs $m(2\omega, 2\alpha)$ et $m'(2\omega', 2\alpha')$ des deux uniradiales et l'on opérera une transformation par rayons vecteurs réciproques qui amènera les transformés m_1, m'_1 aux deux extrémités d'un même diamètre. Dans ces conditions il est facile d'écrire les formules de trigonométrie sphérique qui donnent la décomposition cherchée. La même méthode s'appliquera aux vibrations réfléchies.

II. — Le rayon lumineux et sa comparaison avec le rayon conjugué.

61. *Définition et calcul du rayon lumineux.* — Supposons que le mouvement vibratoire, au lieu d'être identique à lui-même sur toute l'étendue d'une onde lumineuse initiale, soit concentré à l'intérieur d'un contour, de dimensions petites par rapport aux unités habituelles, mais grandes par rapport à la longueur d'onde; les équations indéfinies apprennent (théorie de la diffraction) que le mouvement propagé n'est sensible qu'à l'intérieur d'un cylindre passant par le contour considéré et dont les génératrices sont parallèles à la droite qui joint l'origine au point où l'onde plane touche son enveloppe. On donne à cette direction le nom de *rayon lumineux*.

Pour traiter ce problème d'enveloppe dans le cas général, il y a avantage à choisir comme variable principale le vecteur de Fresnel, c'est-à-dire le vortex (p, q, r) .

Avec cette variable, l'équation $T_m = W_m$ s'écrit

$$\frac{1}{2} \rho V^2 (p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 + p_2^2 + q_2^2 + r_2^2) = F(p_1, q_1, r_1) + F(p_2, q_2, r_2) + 2\mu k \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix},$$

et l'on obtient les équations du mouvement en écrivant que $\delta V = 0$ pour toute variation virtuelle des $p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2$ satisfaisant aux relations

$$\begin{cases} \alpha p_1 + \beta q_1 + \gamma r_1 = 0, \\ \alpha p_2 + \beta q_2 + \gamma r_2 = 0, \end{cases}$$

ce qui donne les deux équations

$$\begin{cases} \rho V^2 p_1 = \frac{dF}{dp_1} - 2\mu k [\alpha.p_2] + 2g_1 \alpha, \\ \rho V^2 p_2 = \frac{dF}{dp_2} + 2\mu k [\alpha.p_1] + 2g_2 \alpha, \end{cases}$$

qui se résument dans l'équation unique

$$\rho V^2 p = \frac{dF}{dp} + 2i\mu k [\alpha.p] + 2g\alpha.$$

Dans cette équation, F et k sont des fonctions à coefficients réels, p, q, r, g sont imaginaires, et la détermination du rayon lumineux se ramène au problème suivant :

62. *Trouver le point de contact de l'enveloppe du plan*

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - V = 0,$$

sachant que $\alpha, \beta, \gamma, V, p, q, r, g$ satisfont aux relations ($\rho = 2$)

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{dF}{dp} + i\mu k [\alpha.p] + g\alpha = V^2 p, \\ \frac{1}{2} \frac{dF}{dq} + i\mu k [\beta.q] + g\beta = V^2 q, \\ \frac{1}{2} \frac{dF}{dr} + i\mu k [\gamma.r] + g\gamma = V^2 r, \\ \alpha p + \beta q + \gamma r = 0. \end{cases}$$

A cet effet, on formera la fonction

$$\Phi = (\alpha x + \beta y + \gamma z - V) - \frac{1}{2} v_0 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1) \\ + \left\{ \begin{array}{l} v_1 \left(\frac{1}{2} \frac{dF}{dp} + i\mu k [\alpha \cdot p] + g\alpha - V^2 p \right) \\ + v_2 \left(\frac{1}{2} \frac{dF}{dq} + i\mu k [\beta \cdot q] + g\beta - V^2 q \right) \\ + v_3 \left(\frac{1}{2} \frac{dF}{dr} + i\mu k [\gamma \cdot r] + g\gamma - V^2 r \right) \end{array} \right\} + v_4 (\alpha p + \beta q + \gamma r),$$

et l'on écrira que $d\Phi = 0$, quels que soient les $d(\alpha, \beta, \gamma, p, q, V, g)$, ce qui fournira huit équations de condition

$$\frac{d\Phi}{dx} = \dots = \frac{d\Phi}{dp} = \dots = \frac{d\Phi}{dV} = \frac{d\Phi}{dg} = 0$$

contenant les cinq nouveaux coefficients v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 .

La fonction Φ peut encore s'écrire :

$$\Phi = (\alpha x + \beta y + \gamma z - V) - \frac{1}{2} v_0 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1) \\ + \frac{1}{2} \left(p \frac{d}{dv_1} + q \frac{d}{dv_2} + r \frac{d}{dv_3} \right) F + i\mu k \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ p & q & r \end{vmatrix} \\ + g(\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3) - V^2(v_1 p + v_2 q + v_3 r) + v_4 (\alpha p + \beta q + \gamma r),$$

d'où

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Phi}{dp} = \frac{1}{2} \frac{dF}{dv_1} + i\mu k [v_1 \cdot \alpha] + v_4 \alpha - V^2 v_1, \\ \frac{d\Phi}{dV} = -1 - 2V(v_1 p + v_2 q + v_3 r), \\ \frac{d\Phi}{dg} = v_1 \alpha + v_2 \beta + v_3 \gamma, \\ \frac{d\Phi}{dx} = x - v_0 \alpha + \frac{1}{2} \left(v_1 \frac{d}{dp} + v_2 \frac{d}{dq} + v_3 \frac{d}{dr} \right) \frac{\partial F}{\partial \alpha} \\ \quad - i\mu k [v_1 \cdot p] + i\mu \frac{dk}{dx} \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ p & q & r \end{vmatrix} + g v_1 + p v_4. \end{array} \right.$$

63. *Calcul des v_1, v_2, v_3, v_4 .* — Les équations

$$\frac{d\Phi}{dp} = \frac{d\Phi}{dq} = \frac{d\Phi}{dr} = \frac{d\Phi}{dg} = 0$$

du groupe (9) deviennent identiques aux équations du groupe (8) quand on y remplace

$$\begin{array}{lll} p, q, r & \text{par} & v_1, v_2, v_3, \\ g & \text{par} & v_4, \\ k & \text{par} & -k, \end{array}$$

et, comme tous les coefficients des variables p, q, r, g sont réels, à l'exception du coefficient ik qui est une imaginaire pure, il en résulte les équations

$$\frac{v_1}{p'} = \frac{v_2}{q'} = \frac{v_3}{r'} = \frac{v_4}{g'} = -\sigma,$$

p', q', r', g' représentant les imaginaires conjuguées de p, q, r, g , et σ désignant un coefficient que l'on déterminera par l'équation

$$\frac{d\Phi}{dV} = 0$$

du groupe (9). On obtient ainsi :

$$\sigma = \frac{1}{2V(pp' + qq' + rr')}.$$

64. *Calcul des coordonnées x, y, z du point de contact.* — Elles sont définies par les équations

$$\begin{cases} \frac{d\Phi}{dx} = \frac{d\Phi}{d\beta} = \frac{d\Phi}{d\gamma} = 0, \\ \alpha x + \beta y + \gamma z - V = 0 \end{cases}$$

à quatre inconnues x, y, z, v_0 .

Si nous portons les valeurs de v_1, v_2, v_3, v_4 dans l'équation

$$\frac{d\Phi}{dx} = 0,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} x = v_0 x + \frac{1}{2} \sigma \left(p' \frac{d}{dp} + q' \frac{d}{dq} + r' \frac{d}{dr} \right) \frac{\partial F}{\partial x} \\ - i \mu \sigma k [p' \cdot p] + i \mu \sigma \frac{dk}{dx} \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ p & q & r \end{vmatrix} + \sigma (pg' + gp'); \end{aligned}$$

remplaçant $[p'.p]$ par sa valeur il vient

$$[p'.p] = i\mu [p'.\alpha.u] = i\mu\alpha(p'u + q'v + r'w),$$

$$\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ p & q & r \end{vmatrix} = -\Sigma\alpha [p'.p] = -i\mu(p'u + q'v + r'w),$$

d'où

$$x = v_0\alpha + \frac{1}{2}\sigma \left(p' \frac{d}{dp} + q' \frac{d}{dq} + r' \frac{d}{dr} \right) \frac{\partial F}{\partial \alpha}$$

$$+ \mu^2\sigma(p'u + q'v + r'w) \left(k\alpha + \frac{dk}{dz} \right) + \sigma(pg' + gp').$$

Portant ces valeurs dans l'équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - V = 0,$$

nous en déduisons la valeur de v_0 qui est donnée par

$$V = v_0 + \frac{1}{2}\sigma \left(p' \frac{d}{dp} + q' \frac{d}{dq} + r' \frac{d}{dr} \right) \Sigma\alpha \frac{\partial F}{\partial \alpha}$$

$$+ \mu^2\sigma(p'u + q'v + r'w) \left(k + \Sigma\alpha \frac{dk}{dz} \right),$$

et les coordonnées du point de contact sont données par les formules

$$(10) \quad x = V\alpha + \frac{1}{2}\sigma \left(p' \frac{d}{dp} + q' \frac{d}{dq} + r' \frac{d}{dr} \right) F_\alpha$$

$$+ \mu^2\sigma(p'u + q'v + r'w) k_\alpha + \sigma(pg' + gp'),$$

expressions dans lesquelles $F_\alpha, F_\beta, F_\gamma$ représente le vecteur lié à la forme $F(\alpha, \beta, \gamma)$ par les relations

$$(11) \quad F_\alpha = \frac{\partial F}{\partial \alpha} - \alpha \Sigma\alpha \frac{\partial F}{\partial \alpha};$$

la quantité g est donnée par les équations (8), et a pour valeur

$$(12) \quad g = -\frac{1}{2}\Sigma\alpha \frac{dF}{dp}.$$

65. *Calcul du potentiel-vecteur et du rayon conjugué quand α, β, γ sont réels (onde non évanescence).* — Le rayon conjugué est, par définition (n° 52), dirigé suivant la normale au plan décrit par le potentiel-vecteur et son extrémité est située

dans le plan de l'onde

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = V.$$

Pour calculer les composantes de P, Q, R et de X, Y, Z revenons aux équations indéfinies (n° 18)

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(i\mu)^2 V^2 u = -i\mu [x.P], \\ P = \frac{dV}{dp} + 2 [L_1.p], \\ p = i\mu [x.u], \end{array} \right.$$

le premier groupe d'équations donne

$$\rho i\mu V^2 [x.u] = - [x.x.P],$$

c'est-à-dire

$$P = \rho V^2 p + x(\alpha P + \beta Q + \gamma R),$$

et le second groupe donne

$$\alpha P + \beta Q + \gamma R = \left(\alpha \frac{d}{dp} + \beta \frac{d}{dq} + \gamma \frac{d}{dr} \right) F + 2 \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ p & q & r \end{vmatrix};$$

donc, en écrivant $\rho = 2$, $L_1 = i\mu l$, ..., on a, pour déterminer le potentiel-vecteur P, Q, R en fonction des composantes du vortex, le système (13)

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = 2V^2 p + \alpha h, \\ Q = 2V^2 q + \beta h, \\ R = 2V^2 r + \gamma h, \\ h = \left(\alpha \frac{d}{dp} + \beta \frac{d}{dq} + \gamma \frac{d}{dr} \right) F - 2\mu^2 (lu + mv + nw); \end{array} \right.$$

remplaçons u, v, w, p, q, r par leurs valeurs

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 a + i\alpha_2 b, & v &= \beta_1 a + i\beta_2 b, & w &= \gamma_1 a + i\gamma_2 b, \\ p &= i\mu [x.u] = i\mu [\alpha.\alpha_1] a + i^2 \mu [\alpha.\alpha_2] b = \mu (\alpha_1 b + i\alpha_2 a), \end{aligned}$$

et nous aurons les valeurs de P, Q, R

$$P = P_1 + iP_2,$$

$$Q = Q_1 + iQ_2,$$

$$R = R_1 + iR_2,$$

P_1, Q_1, R_1 et P_2, Q_2, R_2 désignant les quantités

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_1 = 2V^2 \mu b \alpha_1 + \mu b \alpha \left(\alpha \frac{d}{dx_1} + \beta \frac{d}{d\beta_1} + \gamma \frac{d}{d\gamma_1} \right) F \\ \quad - 2\mu^2 a \alpha (l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1), \\ P_2 = 2V^2 \mu a \alpha_2 + \mu a \alpha \left(\alpha \frac{d}{dx_2} + \beta \frac{d}{d\beta_2} + \gamma \frac{d}{d\gamma_2} \right) F \\ \quad - 2\mu^2 b \alpha (l\alpha_2 + m\beta_2 + n\gamma_2); \end{array} \right.$$

dans ces équations $\frac{dF}{dx_1}$ représente la dérivée $\frac{dF}{dp}$, dans laquelle on remplace p, q, r par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$.

66. Des valeurs du potentiel-vecteur P, Q, R nous déduisons celles du rayon conjugué X, Y, Z par les formules

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{X}{[P_1, P_2]} = \frac{Y}{[Q_1, Q_2]} = \frac{Z}{[R_1, R_2]}, \\ \alpha X + \beta Y + \gamma Z = V. \end{array} \right.$$

Si l'on écrit, pour abrégé,

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2F_1 = \left(\alpha \frac{d}{dx_1} + \beta \frac{d}{d\beta_1} + \gamma \frac{d}{d\gamma_1} \right) F, \\ 2F_2 = \left(\alpha \frac{d}{dx_2} + \beta \frac{d}{d\beta_2} + \gamma \frac{d}{d\gamma_2} \right) F, \\ \Psi_1 = l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1, \\ \Psi_2 = l\alpha_2 + m\beta_2 + n\gamma_2, \end{array} \right.$$

les formules (15) deviennent, après remplacement des $P_1, Q_1, R_1, P_2, Q_2, R_2$ par leurs valeurs,

$$(15') \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu X = V^2 ab \alpha - ab(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2) + \mu(a^2 \alpha_1 \Psi_1 + b^2 \alpha_2 \Psi_2), \\ \nu Y = V^2 ab \beta - ab(\beta_1 F_1 + \beta_2 F_2) + \mu(a^2 \beta_1 \Psi_1 + b^2 \beta_2 \Psi_2), \\ \nu Z = V^2 ab \gamma - ab(\gamma_1 F_1 + \gamma_2 F_2) + \mu(a^2 \gamma_1 \Psi_1 + b^2 \gamma_2 \Psi_2), \\ \alpha X + \beta Y + \gamma Z = V. \end{array} \right.$$

67. *Comparaison entre le rayon lumineux et le rayon conjugué.* — Pour faire cette comparaison nous prendrons comme axes de coordonnées Ox et Oy les deux axes a et b de la vibration elliptique, Oz sera dirigé dans le sens de la propagation. Nous aurons donc à appliquer les formules précédentes en y

faisant

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1, & \beta_1 = 0, & \gamma_1 = 0, \\ \alpha_2 = 0, & \beta_2 = 1, & \gamma_2 = 0, \\ \alpha = 0, & \beta = 0, & \gamma = 1. \end{cases}$$

1° *Rayon lumineux.* — Les expressions qui figurent dans la formule (10) ont pour valeurs

$$\begin{aligned} \left(p' \frac{d}{dp} + q' \frac{d}{dq} + r' \frac{d}{dr} \right) F_\alpha &= \mu^2 \left(b \frac{d}{dp} - ia \frac{d}{dq} \right) \left(b \frac{d}{dp} + ia \frac{d}{dq} \right) F_\alpha \\ &= \mu^2 \left(b^2 \frac{d^2}{dp^2} + a^2 \frac{d^2}{dq^2} \right) F_\alpha, \end{aligned}$$

$$p'u + q'v + z'w = 2\mu ab,$$

$$g = -\frac{1}{2} \frac{dF}{dr},$$

$$\begin{aligned} pg' + gp' &= \text{partie réelle de } -\mu^2 b \left(b \frac{d}{dp} + ia \frac{d}{dq} \right) \frac{dF}{dr} \\ &= -\mu^2 b^2 \frac{d^2 F}{dp dr}, \end{aligned}$$

$$qg' + gq' = -\mu^2 a^2 \frac{d^2 F}{dq dr},$$

$$rg' + gr' = 0,$$

$$\sigma = \frac{1}{2\mu^2 V(a^2 + b^2)},$$

$$F_\alpha = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_\beta = \frac{\partial F}{\partial \beta}, \quad F_\gamma = 0;$$

d'où les composantes x, y, z du *rayon lumineux*

$$(10') \quad \begin{cases} 2V(a^2 + b^2)x = \frac{1}{2} \left(b^2 \frac{d^2}{dp^2} + a^2 \frac{d^2}{dq^2} \right) \frac{\partial F}{\partial x} + 2\mu ab \frac{dK}{dx} - b^2 \frac{d^2 F}{dp dr}, \\ 2V(a^2 + b^2)y = \frac{1}{2} \left(b^2 \frac{d^2}{dp^2} + a^2 \frac{d^2}{dq^2} \right) \frac{\partial F}{\partial \beta} + 2\mu ab \frac{dK}{d\beta} - a^2 \frac{d^2 F}{dq dr}, \\ z = V. \end{cases}$$

2° *Rayon conjugué.* — Les composantes X, Y, Z du *rayon conjugué* sont, en vertu des équations (13'),

$$(15') \quad \begin{cases} 2VabX = -ab \frac{dF}{d\gamma_1} + 2\mu a^2 l = -ab \frac{d^2 F}{dp dr} + 2\mu a^2 l, \\ 2VabY = -ab \frac{dF}{d\gamma_2} + 2\mu b^2 m = -ab \frac{d^2 F}{dq dr} + 2\mu b^2 m, \\ Z = V. \end{cases}$$

68. *Conséquences des formules (10') et (15'') :*

1° *Quand le milieu est isotrope (holoèdre ou hémihèdre) le rayon conjugué coïncide avec le rayon lumineux.*

Car, dans ce cas, on a, par suite de l'isotropie,

$$F(p, q, r) = A_0 + \mu^2 A_2 + \mu^4 A_4 + \dots (p^2 + q^2 + r^2),$$

$$\frac{l}{\alpha} = \frac{m}{\beta} = \frac{n}{\gamma},$$

$$k(x, \beta, \gamma) = k_2 + \mu^2 k_4 + \dots,$$

$A_0, A_2, \dots, k_2, k_4, \dots$ désignant des constantes.

Les équations (10') et (15'') se réduisent donc à

$$x = y = 0, \quad z = V,$$

$$X = Y = 0, \quad Z = V.$$

Ce résultat pouvait être prévu. En vertu des équations (13), le potentiel-vecteur est dans le plan de l'onde quand le milieu est isotrope. Le rayon conjugué est donc normal à l'onde et coïncide avec le rayon lumineux, car la surface d'onde se compose de sphères (une ou deux, suivant que le milieu est holoèdre ou hémihèdre).

2° *Quand le milieu est anisotrope le rayon conjugué coïncide avec le rayon lumineux en première approximation ($W = W_2$).*

Dans ce cas, en effet, F est indépendant de $x, \beta, \gamma, k = 0, b = 0$, d'où les formules

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ y = -\frac{1}{2V} \frac{d^2 F}{dq dr}, \\ z = V, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X = 0 \quad (\text{voir n}^\circ 53), \\ Y = -\frac{1}{2V} \frac{d^2 F}{dq dr}, \\ Z = V. \end{array} \right.$$

On retrouve l'énoncé de Mac Cullagh relatif à la réfraction uniaxiale.

Ce résultat se déduit aisément de considérations géométriques.

Considérons l'un des deux axes $OA = a$ de la section de l'ellipsoïde optique par le plan de l'onde, et cherchons le rayon conjugué relatif à la vibration dirigée suivant le second axe OB .

Soit

$$ON = V = \frac{1}{a}$$

la vitesse de propagation de la vibration OB, comptée suivant la normale à l'onde.

On sait que le rayon lumineux OR est l'intersection du plan OA, ON et du plan mené par O parallèlement au plan tangent en A à l'ellipsoïde optique.

D'autre part, les composantes du potentiel-vecteur ont pour valeurs

$$P = \frac{dF}{dp}, \quad Q = \frac{dF}{dq}, \quad R = \frac{dF}{dr}$$

ou

$$i\mu \frac{dF}{dp'}, \quad i\mu \frac{dF}{dq'}, \quad i\mu \frac{dF}{dr'}$$

p', q', r' désignant la valeur OA. Par conséquent, le potentiel-vecteur au temps $t - \frac{\tau}{4}$ est perpendiculaire au plan tangent en A, et il a pour valeur

$$\mu \times \frac{2}{\delta},$$

δ désignant la distance de l'origine au plan tangent.

En tenant compte de la relation de similitude

$$\frac{\delta}{OA} = \frac{ON}{OA} = \frac{V}{OA}, \quad OA = \frac{1}{V},$$

cette valeur devient

$$\frac{2\mu}{\delta} = 2\mu \times OR = 2\mu V \times OA \times OR;$$

donc le potentiel-vecteur est l'axe du rayon lumineux et de la vibration.

3° Dans les milieux holoédres, quand on tient compte de la dispersion, le rayon conjugué ne coïncide plus avec le rayon lumineux. L'angle des deux rayons est de l'ordre de grandeur de μ^2 .

C'est ce qui résulte des formules (10') et (15'') où l'on fait

$$b = 0, \quad k = 0$$

et

$$F = F_0 + \mu^2 F_2 + \mu^4 F_4 + \dots,$$

d'où

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} (\mu^2 F_2 + \mu^4 F_4 + \dots);$$

de plus, la fonction F peut être entièrement déterminée par l'étude de la propagation dans le milieu indéfini. *Donc, quand le milieu est holoèdre, la détermination des coefficients numériques qui définissent la propagation de la vibration dans le milieu indéfini suffit pour faire connaître les coefficients de la réflexion et de la réfraction.*

4° *Quand on tient compte du pouvoir rotatoire dans les milieux anisotropes le rayon conjugué est complètement distinct du rayon lumineux.*

En deuxième approximation $W = W_2 + W_3$, les formules (10') et (15'') donnent, en effet, en mettant en évidence l'ellipticité φ ($\frac{b}{a} = \text{tang } \varphi$),

$$\begin{cases} \text{Rayon lumineux...} \\ \text{Rayon conjugué...} \end{cases} \begin{cases} 2Vx = -\frac{d^2 F}{dp dr} \sin^2 \varphi + \mu \frac{dK}{dx} \sin 2\varphi, \\ 2Vy = -\frac{d^2 F}{dq dr} \cos^2 \varphi + \mu \frac{dK}{d\beta} \sin 2\varphi, \\ z = V; \\ 2V \sin^2 \varphi X = -\frac{d^2 F}{dp dr} \sin^2 \varphi + \mu l \sin 2\varphi, \\ 2V \cos^2 \varphi Y = -\frac{d^2 F}{dq dr} \cos^2 \varphi + \mu m \sin 2\varphi, \\ Z = V. \end{cases}$$

En général, la vibration elliptique est très aplatie, φ est très petit et de l'ordre de μ , car

$$\text{tang } 2\varphi = \frac{2\mu k}{\sqrt{V_1^2 - V_2^2}},$$

et, par suite, le rapport des composantes x et X est un infiniment petit du second ordre. Le rayon conjugué a une composante notable suivant la direction du grand axe de la vibration elliptique, tandis que la composante du rayon lumineux, suivant la même direction, est sensiblement nulle.

Enfin, le rayon conjugué est déterminé par la connaissance du vecteur l, m, n , et l'on a

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = k(\alpha, \beta, \gamma).$$

Donc, la détermination des coefficients numériques qui définissent la propagation de la vibration dans un milieu indéfini doué de pouvoir rotatoire est insuffisante pour faire connaître les coefficients de la réflexion et de la réfraction.

Pour déterminer le vecteur l, m, n , qui est une fonction vectorielle linéaire de α, β, γ (au degré d'approximation $W = W_2 + W_3$), il faut déterminer :

- 1° La quadrique de gyration $k(\alpha, \beta, \gamma)$;
- 2° Un certain vecteur auxiliaire (l_0, m_0, n_0) ;

et l'on aura l, m, n par les formules

$$l = \frac{1}{2} \frac{dk}{d\alpha} + \frac{1}{2} [l_0, \alpha].$$

Le vecteur auxiliaire (l_0, m_0, n_0) est un vecteur direct; il n'existe donc que si le cristal est pyroélectrique (voir n° 114). En particulier, ce vecteur est nul quand le cristal possède plus d'un axe de symétrie, comme c'est le cas du quartz pour lequel la connaissance de l'ellipsoïde optique et de la quadrique de gyration entraîne, par suite, la connaissance des coefficients de la réflexion et de la réfraction.

III. — Continuité des pressions. — Échanges d'énergie.

Vecteur radiant.

Énoncé des forces vives. — Hypothèse de Mac Cullagh.

69. *Définition des tensions* — Soit un milieu indéfini (homogène ou hétérogène) vérifiant l'équation fondamentale de Green :

$$\int \rho \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \delta u + \frac{d^2 v}{dt^2} \delta v + \frac{d^2 w}{dt^2} \delta w \right) d\tau + \delta \int W d\tau = 0;$$

imaginons dans ce milieu un volume fini V limité par une surface fermée S .

L'équation précédente n'est plus vérifiée quand on limite le

champ d'intégration au volume V et qu'on remplace les $\rho \frac{d^2 u}{dt^2}, \dots$ par les valeurs satisfaisant aux équations indéfinies. On est donc conduit à considérer une grandeur $d\bar{c}$ définie par l'égalité (16')

$$(16') \quad d\bar{c} = \int_V \rho \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \delta u + \frac{d^2 v}{dt^2} \delta v + \frac{d^2 w}{dt^2} \delta w \right) d\tau + \delta \int_V W d\tau.$$

Cette intégrale de volume se ramène à une intégrale de surface. On a en effet

$$(17) \quad \delta \int_V W d\tau = \int_V \Sigma (-1)^n D^n \frac{dW}{dD^n u} \delta u d\tau + d\bar{c}_1 + d\bar{c}_2 + d\bar{c}_3 + \dots,$$

en écrivant

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\bar{c}_1 = \int_S (U \delta u + V \delta v + W \delta w) dS, \\ d\bar{c}_2 = \int_S (U_x \delta u'_x + U_y \delta u'_y + U_z \delta u'_z + V_x \delta v'_x + \dots) dS, \\ d\bar{c}_3 = \int_S (U_{xx} \delta u''_{xx} + \dots) dS, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

U, V, W, $U_x, U_y, \dots, U_{xx}, \dots$ désignant des formes bilinéaires par rapport aux cosinus directeurs l, m, n de la normale extérieure à S et par rapport aux dérivées de tous ordres en x, y, z des $\frac{dW}{dD^n u}, \dots$

D'autre part, les équations indéfinies nous apprennent que l'intégrale de volume qui figure au second membre de l'équation (17) est égale et de signe contraire à

$$\int_V \rho \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \delta u + \frac{d^2 v}{dt^2} \delta v + \frac{d^2 w}{dt^2} \delta w \right) d\tau$$

on a donc

$$d\bar{c} = d\bar{c}_1 + d\bar{c}_2 + d\bar{c}_3 + \dots$$

70. Dès qu'on dépasse le premier degré d'approximation $W = W_2$, l'expression de $d\bar{c}$ sous forme d'intégrales de surface est possible d'une infinité de manières. La solution particulière qui va être développée donnera $d\bar{c}$ en fonction de grandeurs

C.

7

dotées de signification géométrique et que nous appellerons les *paramètres de tension* :

On démontrera au n° 112 que les composantes du vecteur $\Delta_p u$, $\Delta_p v$, $\Delta_p w$,

$$\Delta_p u = \frac{1}{p!} \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} + l \frac{d}{dz} \right)^{(p)} u,$$

sont définies par les trois surfaces invariantes

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_{p+1}^{p+1} = \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} + l \frac{d}{dz} \right)^{(p)} (hu + kv + lw) \\ \quad = A_{p+1}^{p+1} h^{p+1} + A_{p+1}^{p+1} B_{p+1} h^p k + \dots, \\ J_{p+1}^p = \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} + l \frac{d}{dz} \right)^{(p-1)} \left\{ h \left[\frac{d}{dx} \cdot u \right] + \dots \right\} \\ \quad = a_{p+1}^p h^p + a_{p+1}^{p-1} b_{p+1} h^{p-1} k + \dots, \\ J_{p+1}^{p-1} = \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} + l \frac{d}{dz} \right)^{(p-2)} \left\{ h \left[\frac{d}{dx} \cdot \frac{d}{dx} \cdot u \right] + \dots \right\} \\ \quad = \alpha_{p+1}^{p-1} h^{p-1} + \alpha_{p+1}^{p-2} \beta_{p+1} h^{p-2} k + \dots \end{array} \right.$$

Dans le cas particulier de $p=1$, on a $J_2^0=0$ et les surfaces sont au nombre de 2. Ce sont la quadrique des dilatations $J_2^2=0$ et le plan $J_2^1=0$ perpendiculaire au vortex.

Soit p l'ordre le plus élevé des dérivées de u , v , w dans le potentiel interne. Exprimons ce potentiel en fonction des coefficients des surfaces J_2, J_3, \dots, J_p , ce qui n'est possible que d'une seule manière, et nous aurons

$$\delta \int_V W d\omega = \delta_1 + \delta'_1, \\ + \delta_2 + \delta'_2 + \delta''_2, \\ + \dots, \dots, \\ + \delta_p + \delta'_p + \delta''_p,$$

avec

$$\delta_p = \int_V \Sigma (A_{p+1}^{p+1}) \delta A_{p+1}^{p+1} d\omega,$$

$$\delta'_p = \int_V \Sigma (a_{p+1}^p) \delta a_{p+1}^p d\omega,$$

$$\delta''_p = \int_V \Sigma (a_{p+1}^{p-1}) \delta a_{p+1}^{p-1} d\omega,$$

(λ) désignant pour abrégier la dérivée $\frac{dW}{d\lambda}$.

Or, il résulte des formules (19) que les coefficients de $J_{\rho+1}^{p+1}$ se déduisent de ceux de J_{ρ}^p par les formules (20)

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{\rho+1}^{p+1} = \frac{d}{dx} \Lambda_{\rho}^p, \\ \Lambda_{\rho+1}^p B_{\rho+1} = \frac{d}{dy} \Lambda_{\rho}^p + \frac{d}{dx} \Lambda_{\rho}^{p-1} B_{\rho}, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

En intégrant par parties et utilisant les formules (20), on obtiendra par suite les formules (21)

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{\rho} = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{\rho-2} + \delta_{\rho-1} + \delta \bar{\mathcal{C}}_{\rho}, \\ \delta \bar{\mathcal{C}}_{\rho} = \int_S \Sigma |\Lambda_{\rho}^p| \delta \Lambda_{\rho}^p dS, \\ \delta_{\rho-1}^1 = \int_V \Sigma (\Lambda_{\rho}^p)_1 \delta \Lambda_{\rho}^p d\omega, \\ |\Lambda_{\rho}^p| = l(\Lambda_{\rho+1}^{p+1}) + m(\Lambda_{\rho+1}^p B_{\rho+1}) + n(\Lambda_{\rho+1}^{p-1} C_{\rho+1}), \\ (\Lambda_{\rho}^p)_1 = (\Lambda_{\rho}^p) - \left\{ \frac{d}{dx} (\Lambda_{\rho+1}^{p+1}) + \frac{d}{dy} (\Lambda_{\rho+1}^p B_{\rho+1}) + \frac{d}{dz} (\Lambda_{\rho+1}^{p-1} C_{\rho+1}) \right\}, \end{array} \right.$$

d'où l'on déduira les formules plus générales (22)

$$22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{\rho} = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{\rho-1}^{i+1} + d\bar{\mathcal{C}}_{\rho-i} + \dots + d\bar{\mathcal{C}}_{\rho}, \\ \delta \bar{\mathcal{C}}_{\rho-i} = \int_S \Sigma |\Lambda_{\rho-i}^{p-i}| \delta \Lambda_{\rho-i}^{p-i} dS, \\ \delta_{\rho-i-1}^{i+1} = \int_V \Sigma (\Lambda_{\rho-i}^{p-i})_{i+1} \delta \Lambda_{\rho-i}^{p-i} d\omega, \\ |\Lambda_{\rho-i}^{p-i}|_i = l(\Lambda_{\rho-i+1}^{p-i+1})_i + m(B_{\rho-i+1}^{p-i+1})_i + n(C_{\rho-i+1}^{p-i+1})_i, \\ (\Lambda_{\rho-i}^{p-i})_{i+1} = \Lambda_{\rho-i}^{p-i} - \left(\frac{d}{dx} \Lambda_{\rho-i+1} + \frac{d}{dy} B_{\rho-i+1} + \frac{d}{dz} C_{\rho-i+1} \right) \Lambda_{\rho-i+1}^{p-i} + \dots \\ \qquad \qquad \qquad + (-1)^{i+1} \left(\frac{d}{dx} \Lambda_{\rho+1} + \dots \right)^{i+1} \Lambda_{\rho+1}^{p-i}, \end{array} \right.$$

$\left(\frac{d}{dx} \Lambda_{\rho} + \dots \right)^i \Lambda_{\rho}^{p-i}$ désignant, pour abrégier, l'expression

$$\frac{d^i}{dx^i} (\Lambda_{\rho}^p) + i \frac{d^i}{dx^{i-1} dy} (\Lambda_{\rho}^{p-1} B_{\rho}) + \dots$$

obtenue en développant la puissance $i^{\text{ième}}$ du trinôme.

Les coefficients de dS dans chacune des intégrales de surface sont, en vertu du mode de calcul adopté, des grandeurs scalaires. Elles conservent la même expression analytique quand on effectue un changement d'axes orthogonaux, et l'on a

$$d\bar{c}_1 = \int_S (U \delta u + V \delta v + W \delta w) dS,$$

$$d\bar{c}_2 = \int_S \sum |A'_2| \delta A'_2 dS + \int_S \sum |a'_2| \delta a'_2 dS,$$

.....

Les coefficients $U, V, W, |A'_2|, \dots, |a'_2|, \dots$, qui sont fournis par les équations (23), (24), (25), s'appelleront les *paramètres de tension*, et l'on réservera plus particulièrement le nom de *tension* au vecteur U, V, W dont les trois composantes définissent l'élément $(U \delta u + V \delta v + W \delta w) dS$ de la première intégrale $d\bar{c}_1$. C'est, d'ailleurs, la seule intégrale qu'on obtient lorsqu'on limite l'approximation aux dérivées du premier ordre.

71. La conception des paramètres de tension est la conséquence naturelle de la localisation du potentiel interne d'après laquelle les actions intérieures ne sont sensibles qu'à une distance très petite. Si donc nous considérons les actions extérieures au volume V , celles qui sont dues au milieu lui-même proviennent uniquement d'une couche très mince répartie sur la surface S qui limite le volume V . Le travail virtuel de ces actions est donc égal à l'intégrale de surface $d\bar{c}$ relative à S .

72. Il est évident que la valeur de l'intégrale de volume $\int (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) d\omega$, qui intervient dans l'expression de $\delta \int_V W d\omega$,

$$\delta \int_V W d\omega = \int_V (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) d\omega + d\bar{c}_1 + d\bar{c}_2 + \dots + d\bar{c}_p,$$

est indépendante de la méthode suivie pour obtenir les $d\bar{c}_1, d\bar{c}_2, \dots, d\bar{c}_p$.

Cette remarque peut se généraliser : La valeur de l'intégrale de surface $d\bar{c}_q$ ($q < p$) est indépendante de la méthode adoptée pour le calcul des $d\bar{c}_{q+1}, d\bar{c}_{q+2}, \dots, d\bar{c}_p$.

En particulier, pour obtenir la première intégrale $d\tilde{e}_1$, il suffira de raisonner sur un potentiel interne fonction des dilatations, glissements, composantes de la rotation et de leurs dérivées de tous ordres en x, y, z . On obtiendra donc les composantes (U, V, W) de la tension en répétant le calcul qui a fourni les équations de Lagrange (deuxième forme), ce qui conduira à la formule

$$\delta \int_V W d\omega = \delta \int_V \sum \frac{dW}{d \cdot D^n p} \delta D^n p d\omega = d\tilde{e}_2 + d\tilde{e}_3 + \dots + \int_V \sum P \delta p d\omega,$$

et une nouvelle intégration par parties fournira la valeur cherchée de $d\tilde{e}_1$

$$(26) \quad d\tilde{e}_2 = \int_S \begin{vmatrix} P & Q & R \\ l & m & n \\ \delta u & \delta v & \delta w \end{vmatrix} dS + \int_S \{ (N_1 l + T_3 m + T_2 n) \delta n + \dots \} dS.$$

Par conséquent, les composantes de la tension s'obtiennent en remplaçant $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$ par l, m, n , dans les équations de Lagrange (deuxième forme).

73. THÉORÈME. — *Les équations de la réflexion et de la réfraction dans les milieux gyrostatiques sont compatibles avec le principe de continuité des tensions.*

En effet, ces équations sont déduites du principe de la couche de passage, et l'on a vu que la composante tangentielle du potentiel-vecteur était continue.

Or, en vertu de (26), la tension a pour composantes dans les milieux gyrostatiques

$$U = [P.l], \quad V = [Q.m], \quad W = [R.n];$$

elle est donc l'axe du potentiel-vecteur et de la normale à l'onde, et, par conséquent, ne dépend que de la composante tangentielle P, Q, R.

74. Échanges d'énergie dans le milieu. — *Théorème de Poynting.* — *L'accroissement par unité de temps de l'intégrale $\int_V (T + W) d\omega$, étendue à un volume V limité par une*

surface fermée S, est égal à une intégrale de surface étendue à S.

Car il suffit de remplacer dans la formule (16) les δu , δv , δw par $\frac{du}{dt} dt$, $\frac{dv}{dt} dt$, $\frac{dw}{dt} dt$ pour obtenir la formule

$$(27) \quad \frac{d}{dt} \int_v (T + W) d\omega = \frac{d\mathcal{E}}{dt},$$

et l'on a vu que \mathcal{E} représentait une intégrale de surface.

Son premier terme $\frac{d\mathcal{E}_1}{dt}$ a pour valeur, dans les milieux gyrostatiques, en vertu de (26),

$$(27') \quad \frac{d\mathcal{E}_1}{dt} = - \int_s \begin{vmatrix} l & m & n \\ P & Q & R \\ \frac{du}{dt} & \frac{dv}{dt} & \frac{dw}{dt} \end{vmatrix} dS;$$

$\frac{d\mathcal{E}_1}{dt}$ est donc égal au flux du vecteur

$$\left[P. \frac{du}{dt} \right], \quad \left[Q. \frac{dv}{dt} \right], \quad \left[R. \frac{dw}{dt} \right],$$

entrant dans la surface S. C'est le *vecteur radiant* de Poynting, il est égal à l'axe du potentiel-vecteur et de la vitesse $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$.

75. Propriétés du vecteur radiant.

1° A la surface de séparation de deux milieux gyrostatiques le flux du vecteur radiant est continu.

En effet,

$$[P.l], \quad [Q.m], \quad [R.n]$$

et

$$\frac{du}{dt}, \quad \frac{dv}{dt}, \quad \frac{dw}{dt}$$

sont continus d'après les lois de la réflexion et de la réfraction.

2° Dans les milieux holoédres le vecteur radiant a pour composantes

$$\left[P. \frac{du}{dt} \right] = \rho X \left\{ \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \right\}$$

(on suppose que l'onde ne soit pas évanescence).

En effet, on a dans ce cas

$$\begin{aligned} uX + vY + wZ &= 0, \\ P &= \text{partie réelle de } i\rho\mu V [X, u_1], \\ u &= \text{partie réelle de } u_1, \\ \frac{du_1}{dt} &= -i\mu V u_1; \end{aligned}$$

on en conclut

$$P = \text{partie réelle de } \rho \left[\frac{du_1}{dt} \cdot X \right] = \rho \left[\frac{du}{dt} \cdot X \right];$$

d'où

$$\left[P, \frac{du}{dt} \right] = \rho \left[\frac{du}{dt} \cdot X, \frac{du}{dt} \right] = \rho X \left\{ \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \right\}.$$

COROLLAIRE. — *L'énoncé des forces vives est vrai en première approximation $W = W_2$. Dans le cas général il faut lui substituer le principe de continuité du flux du vecteur radiant.*

Soit en effet un faisceau lumineux cylindrique et soit S sa section par un plan quelconque II. Le volume de la tranche découpée dans ce faisceau par deux plans d'onde distants d'une longueur ε . V a pour valeur $\varepsilon \cdot S \cdot R_n$, en désignant par R_n la composante du rayon lumineux suivant la normale au plan II.

Si nous désignons par $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ les composantes de la vitesse d'un point quelconque de la tranche d'épaisseur infiniment petite ε : V, la force vive de ce volume, aura pour expression

$$\frac{1}{2} \rho \varepsilon \cdot S \cdot R_n \left\{ \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \right\},$$

ce qui démontre le corollaire énoncé.

76. Pour traiter le problème de la réflexion et de la réfraction, Young, Fresnel et Neumann avaient admis que cette force vive satisfait à la loi de continuité, autrement dit que la force vive du faisceau incident se retrouve intégralement dans les faisceaux réfléchis et réfractés.

Cet énoncé des forces vives ne présente qu'une analogie lointaine avec l'équation des forces vives de la Mécanique. Mac Cullagh l'avait d'abord mis en doute (1835), puis, après avoir constaté

que les résultats numériques fournis par l'expérience justifiaient l'énoncé des forces vives (1837), il a, en première approximation ($W = W_2$), déduit cet énoncé du principe de la continuité des pressions (1839) (1).

On vient de voir, en effet, que l'énoncé de la continuité du flux du vecteur radiant est, en première approximation ($W = W_2$), identique à l'énoncé des forces vives. Mais, dès qu'on dépasse la première approximation, l'énoncé des forces vives n'est plus vérifié, sauf dans le cas particulier des milieux isotropes.

77. *Hypothèse de Mac Cullagh.* — Dans tout ce qui précède, nous avons considéré le potentiel gyrostatique interne comme une fonction de la rotation et de ses dérivées de tous ordres, et nous avons développé toute la théorie sans autre hypothèse additionnelle.

Cette forme de potentiel gyrostatique a été énoncée dès 1842 par Mac Cullagh dans son Mémoire : *On the dispersion of the optic axes, and of the axes of elasticity in biaxial crystals* (2); mais, en même temps, Mac Cullagh a émis l'opinion que cette forme était trop générale et que l'étude des phénomènes lumineux devait se ramener à celle d'une fonction arbitraire de p, q, r et de ses vortex de tous ordres $p_1, q_1, r_1, p_2, \dots, p_3, \dots$

$$p_1 = \left[\frac{d}{dx} \cdot P \right],$$

$$p_2 = \left[\frac{d}{dx} \cdot p_1 \right] = \left[\frac{d}{dx} \cdot \frac{d}{dx} \cdot P \right] = -\Delta P, \quad \dots$$

A cette hypothèse peuvent se rattacher les considérations développées au n° 13, et d'après lesquelles les milieux gyrostatiques anisotropes sont formés par des particules matérielles dénuées de rigidité gyrostatique, avec remplissage de milieu gyrostatique isotrope.

Conséquences de l'hypothèse de Mac Cullagh.

1° *Dispersion normale. Généralisation de la loi de l'ellipsoïde optique.*

(1) MAC CULLAGH, *Collected Works*, p. 75, 83, 177.

(2) MAC CULLAGH, *Collected Works*, p. 221.

Étudions tout d'abord un potentiel gyrostatique fonction des trois premiers vortex (p, q, r) , (p_1, q_1, r_1) , (p_2, q_2, r_2) . Ce potentiel a pour valeur, si le milieu est holoèdre,

$$W = f(p, q, r) + f_1(p_1, q_1, r_1) + f_2(p_2, q_2, r_2) + \varphi(p, q, r, -p_2, q_2, r_2).$$

f, f_1, f_2 désignant des formes quadratiques;

φ désignant une forme linéaire en (p, q, r) et (p_2, q_2, r_2) .

L'équation qui exprime le principe d'Hamilton sera donc

$$\begin{aligned} V^2(p^2 + q^2 + r^2) = & f(p, q, r) + \mu^2 f_1([\alpha.p], [\beta.q], [\gamma.r]) \\ & + \mu^4 f_2(p, q, r) - \mu^2 \varphi(p, q, r, -p_2, q_2, r_2); \end{aligned}$$

d'où la généralisation de l'énoncé de Fresnel.

On déterminera :

1° Les sections C, C_2, C' des quadriques

$$\begin{aligned} f(x, y, z) - 1 &= 0, \\ f_2(x, y, z) - 1 &= 0, \\ \varphi(x, y, z, -x, y, z) + 1 &= 0, \end{aligned}$$

par le plan de l'onde

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0;$$

2° La section de la quadrique

$$f_1(x, y, z) - 1 = 0$$

par le plan de l'onde, et on la fera tourner de 90° dans son plan. Soit C_1 la conique obtenue.

On construira la conique F , lieu des points N déterminés par la relation

$$\frac{1}{ON^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{\mu^2}{OM_1^2} + \frac{\mu^2}{OM'^2} + \frac{\mu^4}{OM_2^2},$$

OM, OM_1, OM_2, OM' désignant les demi-diamètres des coniques C, C_1, C_2, C' suivant la direction ON .

Pour obtenir les lois de la propagation, il suffira de substituer la conique F à la conique C dans l'énoncé de la double réfraction. Autrement dit, les vibrations propagées dans la direction α, β, γ sont orientées suivant les deux axes de la conique F et les vitesses de propagation sont égales aux inverses des axes perpendiculaires.

La stabilité exige que W soit une forme définie positive. Donc les coniques C, C_1, C_2, F sont des ellipses réelles. C' peut être une ellipse imaginaire ou une hyperbole.

Cet énoncé s'étend au cas général de la dispersion normale dans les milieux holoédres.

2° *Coïncidence du rayon conjugué et du rayon lumineux quand le milieu est holoédre.*

On a, en effet,

$$F(p, q, r) = \Sigma \mu^{2n} f(p, q, r) + \Sigma \mu^{2n} f_1([\alpha.p], [\beta.q], [\gamma.r]),$$

f et f_1 désignant des formes quadratiques à coefficients constants. On en déduit

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = \Sigma \mu^{2n} \left\{ r \frac{df_1}{d[\alpha.p]} - p \frac{df_1}{d[\gamma.r]} \right\},$$

d'où

$$\frac{d^2}{dq^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0,$$

et, par suite, en se reportant aux équations (10') et (15'') du Chapitre III,

$$y = -\frac{1}{2V} \cdot \frac{d^2 F}{dq dr} = Y.$$

3° *Énoncé des forces vives.*

Il résulte du 2° que l'énoncé des forces vives reste vrai pour les milieux holoédres.

78. *Vérifications de l'hypothèse de Mac Cullagh.* — Fresnel considérait la loi de l'ellipsoïde optique comme une première approximation destinée à être complétée par l'étude de la dispersion.

Cherchons quelles conséquences entraîne l'hypothèse de Mac Cullagh quand on l'applique aux cristaux à axe principal et aux cristaux cubiques.

Soit Oz l'axe principal du cristal. Les quadriques $f, f_1, \dots, \varphi, \varphi_1, \dots$ seront de révolution autour de Oz et auront des équations

tions de la forme

$$\begin{aligned} f &= a_n^2(x^2 + y^2) + c_n^2 z^2 - 1 = 0 & (n = 0, 1, 2, \dots), \\ f_1 &= a_n'^2(x^2 + y^2) + c_n'^2 z^2 - 1 = 0 & (n = 1, 2, \dots), \\ \varphi &= \Lambda_n(x^2 + y^2) + C_n z^2 - 1 = 0 & (n = 1, 2, \dots), \\ \varphi_1 &= \Lambda_n'(x^2 + y^2) + C_n z^2 - 1 = 0 & (n = 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

On en conclut que la surface d'onde se compose de deux ellipsoïdes de révolution autour de Oz , ayant pour équations

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{a^2 + \mu^2 c'^2} + \frac{z^2}{a^2 + \mu^2 a'^2} = 1, \\ \frac{x^2 + y^2}{c^2 + \mu^2 a'^2} + \frac{z^2}{a^2 + \mu^2 a'^2} = 1, \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} a^2 = a_0^2 + \mu^2(a_1^2 + \Lambda_1) + \mu^4(a_2^2 + \Lambda_2) + \dots, \\ c^2 = c_0^2 + \mu^2(c_1^2 + \Lambda_1) + \mu^4(c_2^2 + \Lambda_2) + \dots, \\ a'^2 = a_1'^2 + \mu^2(a_2'^2 + \Lambda_1) + \dots, \\ c'^2 = c_1'^2 + \mu^2(c_2'^2 + C_1) + \dots \end{cases}$$

Ce sont deux ellipsoïdes tangents à leurs points de rencontre avec l'axe principal. Le premier se réduit à une sphère et définit l'onde ordinaire quand on néglige les termes de dispersion.

Si le cristal appartient au système cubique, il possède plusieurs axes principaux, les quadriques $f, f_1, \varphi, \varphi_1$, et, par suite, la surface d'onde se réduit à des sphères. Donc, dans l'hypothèse de Mac Cullagh, tous les cristaux cubiques seraient optiquement isotropes.

Cette conséquence ne se retrouve pas quand on ne fait aucune hypothèse sur la forme du potentiel gyrostatique. Comme on le verra au Chapitre V, n° 148, les cristaux cubiques seraient, au degré d'approximation $W = W_2 + W_4$, biréfringents pour toute direction de propagation différant d'un axe principal. En outre, pour une longueur d'onde déterminée, la loi de variation de cette biréfringence serait définie en fonction de deux constantes. La loi de l'isotropie optique des cristaux cubiques paraît donc nécessiter une discussion expérimentale approfondie



CHAPITRE IV.

ÉTUDE DE LA FORME GÉNÉRALE DU POTENTIEL INTERNE. — TRIPLE RÉFRACTION.
POLARISATION ROTATOIRE. — CONDITION DE TRANSVERSALITÉ.
MILIEUX ÉLASTIQUES. — QUARTIQUE DE HAUGHTON — QUADRIQUE DE RANKINE.
CONTINUITÉ DES PRESSIONS — STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE.

I. — Étude de la forme générale du potentiel interne. — Triple réfraction. — Polarisation rotatoire. — Condition de transversalité.

79. *Équations du mouvement.* — Les équations que nous nous proposons d'étudier sont les équations générales des milieux continus, obtenues au n° 17, et que nous écrirons

$$(1) \quad \rho \nabla^2 u = \frac{d\Phi}{du} + 2i\mu [L.u]$$

avec

$$\begin{cases} \mu^2 \Phi = W'^2 - W''^2, \\ i\mu^3 L = [A'.A'']; \end{cases}$$

$A', A'', \dots, W', W'', \dots$ ont la même signification qu'au n° 17, mais on y remplace Φ et L , ... par $\mu^2 \Phi$ et $\mu^3 L$, ...

Φ et L ont donc pour expressions

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_2 + \mu^2 \Phi_4 + \dots + \mu^{2n-2} \Phi_{2n} + \dots, \\ L &= L_3 + \mu^2 L_5 + \dots + \mu^{2n-1} L_{2n+1} + \dots, \end{aligned}$$

Φ_{2n} désignant une forme quadratique et homogène en u, v, w , et homogène de degré $2n$ en α, β, γ ;

L_{2n+1} désignant une forme homogène de degré $2n+1$ en α, β, γ .

Nous choisirons des unités pour lesquelles $\rho = 2$.

80. *Triple réfraction.* — Si le milieu possède un centre de symétrie, les termes d'indice impair sont nuls; on a

$$W = W_2 + W_4 + \dots + W_{2n} + \dots,$$

et les équations (1) se réduisent à

$$(2) \quad \nabla^2 u = \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{du}.$$

Ce sont les équations en S de la quadrique $\Phi(u, v, w) - 1 = 0$.

Donc, les milieux holoèdres propagent, suivant chaque direction α, β, γ , trois vibrations rectilignes rectangulaires et orientées suivant les trois axes de la quadrique $\Phi(u, v, w) - 1 = 0$ qui varie de forme et d'orientation avec la direction α, β, γ de propagation.

Pour qu'il y ait stabilité il faut que $\Phi(u, v, w)$, qui représente la valeur moyenne du potentiel interne, soit une forme définie positive en u, v, w et α, β, γ . C'est l'*ellipsoïde de polarisation* de Cauchy.

81. *Polarisation rotatoire.* — Dans le cas général d'un milieu hémicêtre, les équations indéfinies (1')

$$(1') \quad \nabla^2 u = \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{du} + i\mu [L.u]$$

.....

admettent pour solutions les parties réelles des imaginaires u, v, w :

$$\frac{u}{\alpha_1 a + i\alpha_2 b} = \frac{v}{\beta_1 a + i\beta_2 b} = \frac{w}{\gamma_1 a + i\gamma_2 b} = e^{i\mu(\alpha x + \beta y + \gamma z - Vt)}$$

$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ sont, par définition, les cosinus directeurs de deux directions rectangulaires. Ces équations représentent donc deux vibrations elliptiques rapportées à leurs axes a et b .

Portons ces valeurs dans les équations (1') et nous obtenons le système (3)

$$(3) \quad \begin{cases} \left(\nabla^2 a_1 - \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{da_1} \right) a = -\mu b [L.a_2], \\ \left(\nabla^2 a_2 - \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{da_2} \right) b = \mu a [L.a_1], \end{cases}$$

qui détermine les éléments des trois vibrations propagées :

1° *Plan de la vibration.* — Multiplions par L, M, N, les trois équations (1') et faisons la somme, nous aurons

$$L \left(V^2 u - \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{du} \right) + M \left(V^2 v - \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dv} \right) + N \left(V^2 w - \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dw} \right) = 0,$$

c'est l'équation du plan de la vibration; il passe par l'intersection des deux plans

$$\begin{cases} Lu + Mv + Nw = 0, \\ u \frac{d\Phi}{dL} + v \frac{d\Phi}{dM} + w \frac{d\Phi}{dN} = 0; \end{cases}$$

donc : *les plans des trois vibrations elliptiques passent par une même droite qui se trouve à l'intersection du plan normal au vecteur L, M, N, et du plan diamétral conjugué de L, M, N, par rapport à l'ellipsoïde de polarisation.*

2° *Direction des axes de la vibration.* — Multiplions par $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, les trois équations du système (3), premier groupe, et faisons la somme, nous aurons, en tenant compte de la relation de perpendicularité $\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0$,

$$\alpha_2 \frac{d\Phi}{d\alpha_1} + \beta_2 \frac{d\Phi}{d\beta_1} + \gamma_2 \frac{d\Phi}{d\gamma_1} = 0;$$

donc : *les axes de la vibration elliptique coïncident en direction avec les axes de la section plane de l'ellipsoïde de polarisation.*

3° *Rapport des axes.* — Multiplions par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, les trois équations du système (3), premier groupe, et faisons la somme, nous aurons

$$\alpha \left\{ V^2 - \Phi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \right\} = \mu b \begin{vmatrix} L & M & N \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix},$$

et une équation analogue fournie par le deuxième groupe.

Si nous désignons par :

r'_1, r'_2 , les longueurs des rayons vecteurs de l'ellipsoïde de polarisation suivant les directions $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$;

K le déterminant

$$\begin{vmatrix} L & M & N \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix},$$

ces deux équations s'écriront

$$\begin{aligned} \left(V^2 - \frac{1}{r_1'^2}\right) a &= \mu K b, \\ \left(V^2 - \frac{1}{r_2'^2}\right) b &= \mu K a, \end{aligned}$$

sous cette forme, elles sont analogues à celles des milieux gyrostatiques, et donnent, en particulier,

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{V^2 - \frac{1}{r_1'^2}}{V^2 - \frac{1}{r_2'^2}}.$$

4^o *Vitesses de propagation.* — L'équation en V^2 s'obtiendra par élimination de u, v, w entre les équations (1').

Si nous écrivons

$$\Phi(u, v, w) = \Lambda u^2 + \Lambda' v^2 + \Lambda'' w^2 + 2B uv + 2B' vw + 2B'' uw,$$

cette équation sera

$$(4) \quad \Pi(V^2) = \begin{vmatrix} \Lambda - V^2 & B'' - i\mu N & B' + i\mu M \\ B'' + i\mu N & \Lambda' - V^2 & B - i\mu L \\ B' - i\mu M & B + i\mu L & \Lambda'' - V^2 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est un déterminant formé en ajoutant aux éléments d'un déterminant symétrique les éléments correspondants d'un déterminant symétrique gauche multipliés par $i\mu$. L'équation en V^2 ne change donc pas quand on change i en $-i$, et elle a, par suite, ses coefficients réels.

On sait d'ailleurs que ce déterminant a pour valeur

$$(4') \quad \Pi(V^2) = (i\mu)^2 \left\{ \begin{matrix} \Phi(L, M, N) \\ -V^2(L^2 + M^2 + N^2) \end{matrix} \right\} + \begin{vmatrix} \Lambda - V^2 & B'' & B' \\ B'' & \Lambda' - V^2 & B \\ B' & B & \Lambda'' - V^2 \end{vmatrix}.$$

Soient

r_1, r_2, r_3 les longueurs des trois demi-axes de l'ellipsoïde de polarisation;

r la longueur du rayon vecteur de cet ellipsoïde, parallèle à la direction L, M, N .

L'équation (4) peut s'écrire (4'')

$$(4'') \quad \left(V^2 - \frac{1}{r_1^2}\right) \left(V^2 - \frac{1}{r_2^2}\right) \left(V^2 - \frac{1}{r_3^2}\right) = \mu^2 (L^2 + M^2 + N^2) \left(V^2 - \frac{1}{r^2}\right).$$

82. *Condition de transversalité.* — Comme nous l'avons vu au Chapitre II, les milieux gyrostatiques jouissent des deux propriétés suivantes :

- 1° Deux des vibrations sont situées dans le plan de l'onde;
- 2° La troisième a une vitesse de propagation nulle.

Nous nous proposons de montrer que tout potentiel W satisfaisant à ces deux conditions conduit aux lois de propagation des milieux gyrostatiques.

1° *Condition pour que les plans de deux vibrations elliptiques soient confondus.* — Le plan de la vibration qui se propage avec la vitesse V a pour équation

$$\sum u \left(V^2 L - \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dL} \right) = 0.$$

Considérons deux vibrations se propageant avec des vitesses différentes V_1, V_2 , et écrivons que leurs plans coïncident, nous obtenons

$$\frac{V_1^2 L - \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dL}}{V_2^2 L - \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dL}} = \frac{V_1^2 M - \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dM}}{V_2^2 M - \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dM}} = \frac{V_1^2 N - \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dN}}{V_2^2 N - \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dN}} = -\nu,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dL} - V_3^2 L = 0, \quad \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dM} - V_3^2 M = 0, \quad \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dN} - V_3^2 N = 0,$$

V_3 étant défini par l'égalité

$$(1 + \nu) V_3^2 = V_1^2 + \nu V_2^2;$$

donc :

a. *Pour que deux vibrations elliptiques soient dans le même plan, il faut et il suffit que le vecteur L, M, N soit dirigé suivant un axe de l'ellipsoïde de polarisation.*

b. *Ce plan de vibration commun est perpendiculaire au vecteur L, M, N , c'est-à-dire est un plan principal de l'ellipsoïde*

de polarisation; par suite, les axes des deux vibrations sont orientés suivant les deux axes principaux de cet ellipsoïde.

c. La troisième vibration est rectiligne et dirigée suivant le vecteur L, M, N; sa vitesse de propagation est égale à l'inverse de l'axe principal correspondant de l'ellipsoïde de polarisation.

Soit $V_3 = \frac{1}{r_3}$ la vitesse de propagation de la vibration rectiligne. Supprimons le facteur $\left(V - \frac{1}{r_3}\right)$ dans l'équation (4'') et nous obtenons, pour déterminer les deux autres vitesses, l'équation du second degré en V^2

$$\left(V^2 - \frac{1}{r_1^2}\right) \left(V^2 - \frac{1}{r_2^2}\right) = \mu^2(L^2 + M^2 + N^2).$$

2° Condition pour que deux vibrations elliptiques soient dans le plan de l'onde. — Le plan commun aux deux vibrations est

$$Lu + Mv + Nw = 0,$$

pour que ce plan coïncide avec le plan $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$; il faut et il suffit que L, M, N soient proportionnels à α, β, γ .

3° Condition pour que la vitesse de propagation de la vibration longitudinale soit nulle. — Cette vitesse est $V_3 = \frac{1}{r_3}$. Donc, il faut et il suffit que l'ellipsoïde de polarisation se réduise à un cylindre.

83. *Résumé et conclusions.* — La condition nécessaire et suffisante pour qu'un potentiel interne W satisfasse à la condition de transversalité est que la forme quadratique $\Phi(u, v, w)$ représente un cylindre d'axe (α, β, γ) et que le vecteur (L, M, N) soit dirigé suivant (α, β, γ) . Autrement dit, il faut et il suffit que la valeur moyenne W_m soit identique à celle d'un milieu gyrostatique. Les lois de la propagation dans les milieux gyrostatiques sont donc les lois les plus générales qui satisfassent à la condition de transversalité, et les milieux à propagation transversale ont un potentiel de la forme

$$W + W_g + W_n,$$

W_g désignant un potentiel gyrostatique;

W_n désignant un potentiel dont la valeur moyenne, pendant une période, est nulle.

D'autre part, toute forme quadratique W_n des dérivées de tous ordres de u, v, w , dont la valeur moyenne, pendant une période, est nulle, est telle que l'intégrale de volume $\int W_n d\omega$ se ramène à une intégrale de surface. La condition de transversalité peut donc s'énoncer comme suit: Lorsqu'un milieu ne propage que des vibrations transversales, son potentiel total $\int W d\omega$ est égal à un potentiel gyrostatique $\int W_g d\omega$ augmenté d'une intégrale de surface.

84. *Remarque.* — On peut traiter la même question par la méthode géométrique en partant de l'équation $T_m = W_m$, qui s'écrit

$$V^2(a^2 + b^2) = \frac{a^2}{r_1'^2} + \frac{b^2}{r_2'^2} + 2\mu abK,$$

K représentant le volume du parallélépipède construit sur

$$(I, M, N), \quad (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \quad (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2).$$

II. — Milieux élastiques. — Milieux à forces centrales.
Termes additionnels de polarisation rotatoire.

85. Nous venons de voir que tout potentiel interne vérifiant la condition de transversalité est de la forme $W = W_g + W_n$, W_g désignant un potentiel gyrostatique, et W_n un potentiel à valeur moyenne nulle.

Rechercher si une théorie peut conduire aux lois de propagation par ondes transversales revient donc à rechercher si le potentiel interne correspondant peut être mis sous la forme $W = W_g + W_n$.

Nous allons montrer que cette identification est toujours possible dans la théorie élastique.

86. *Milieux élastiques. — Double réfraction.* — Sous sa forme la plus générale le potentiel W_2 est une fonction homogène du second degré des 9 dérivées premières de u, v, w , et renferme

par suite 45 coefficients. D'autre part, la valeur moyenne de W_2 , pendant une période, est une forme biquadratique en (u, v, w) et (α, β, γ) , c'est-à-dire à 36 coefficients. On en conclut qu'il existe 9 fonctions W_n indépendantes; et il suffit, en effet, de choisir les 9 mineurs $\frac{dJ}{du'_x}, \frac{dJ}{du'_y}, \dots$ du jacobien de u, v, w

$$J = \begin{vmatrix} \frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} & \frac{du}{dz} \\ \frac{dv}{dx} & \frac{dv}{dy} & \frac{dv}{dz} \\ \frac{dw}{dx} & \frac{dw}{dy} & \frac{dw}{dz} \end{vmatrix}.$$

Pour transformer cet énoncé, substituons aux 9 dérivées u'_x, u'_y, \dots les 9 combinaisons linéaires $a'_1, \dots, b'_1, \dots, p', \dots$ définies par les identités en h, k, l

$$\Delta u = h \frac{du}{dx} + k \frac{du}{dy} + l \frac{du}{dz} = \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dh} + [p' \cdot h]$$

avec

$$\varphi = a'_1 h^2 + a'_2 k^2 + a'_3 l^2 + 2b'_1 kl + 2b'_2 lh + 2b'_3 hk :$$

c'est la transformation employée dans l'étude des déformations (n° 10), avec cette différence que les b_1, \dots, p, \dots sont remplacés par $2b'_1, \dots; 2p', \dots$

Nous allons choisir pour fonctions W_n indépendantes les 9 dérivées du jacobien par rapport à ces nouvelles variables.

Le jacobien a pour expression

$$(5) \quad J = \begin{vmatrix} a'_1 & b'_3 - r' & b'_2 + q' \\ b'_3 + r' & a'_2 & b'_1 - p' \\ b'_2 - q' & b'_1 + p' & a'_3 \end{vmatrix} = \varphi(p', q', r') + D,$$

D désignant le discriminant de la forme quadratique

$$\varphi(p', q', r') = a'_1 p'^2 + \dots + 2b'_1 q' r' + \dots$$

Les 9 fonctions W_n ont donc pour valeurs

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{da'_1} &= \frac{d\varphi}{da'_1} + \frac{dD}{da'_1} = p'^2 + \begin{vmatrix} a'_2 & b'_1 \\ b'_1 & a'_3 \end{vmatrix}, \\ \frac{dJ}{db'_1} &= \frac{d\varphi}{db'_1} + \frac{dD}{db'_1} = 2q' r' + 2 \begin{vmatrix} b'_2 & b'_1 \\ a'_1 & b'_3 \end{vmatrix}, \\ \frac{dJ}{dp'} &= \frac{d\varphi}{dp'} = 2(a'_1 p' + b'_3 q' + b'_2 r'). \end{aligned}$$

87. CONSÉQUENCES : *La théorie élastique peut rendre compte des lois de la double réfraction.* — En effet, tout potentiel transversal est de la forme

$$W = F(p', q', r') - \left(A_1 \frac{d}{da'_1} + \dots + B_1 \frac{d}{db'_1} + \dots + P' \frac{d}{dp'} + \dots \right) J,$$

c'est-à-dire

$$W = F(p', q', r') - (A_1 p'^2 + \dots + 2 B' q' r' + \dots) - \left(P' \frac{d}{dp'} + \dots \right) \varphi - \left(A_1 \frac{d}{da'_1} + \dots + B_1 \frac{d}{db'_1} + \dots \right) D.$$

Pour que W représente un potentiel élastique, il faut et il suffit que

$$(6) \quad \begin{cases} F(p', q', r') - (A_1 p'^2 + \dots + 2 B' q' r' + \dots) \equiv 0, \\ \left(P' \frac{d}{dp'} + \dots \right) \varphi \equiv 0. \end{cases}$$

Ces conditions définissent donc, et d'une seule manière, un potentiel élastique transversal qui a pour expression

$$(7) \quad W = - \left(A_1 \frac{d}{da'_1} + \dots + B_1 \frac{d}{db'_1} + \dots \right) D,$$

les A_1, \dots, B_1, \dots étant respectivement égaux aux coefficients de l'ellipsoïde optique (multipliés par 4) et D représentant le discriminant de la quadrique des dilatations.

En résumé, les lois de la double réfraction sont contenues dans la théorie élastique, et la condition de transversalité détermine, et d'une seule manière, les coefficients de W. L'identification d'une forme quadratique arbitraire des a'_1, \dots, b'_1, \dots avec le potentiel W

$$W = - \sum A_1 \frac{dD}{da'_1}$$

fournirait les $21 - 6 = 15$ conditions obtenues par Green. Nous montrerons plus loin que ces conditions expriment que la quadrique de Haughton est identiquement nulle.

88. Le résultat précédent s'étend aux termes de dispersion dans les milieux holoèdres. Il suffit de remarquer que la valeur moyenne d'un potentiel W_{2p+2} est de la forme $W_2 \Psi_{2p}(\alpha, \beta, \gamma)$; W_2 désignant un potentiel dont les coefficients sont des grandeurs

ombrales et Ψ_{2p} une forme ombrale, homogène de degré $2p$ en α, β, γ ; les diverses grandeurs ombrales qui définissent W_2 et Ψ_{2p} étant, de plus, arbitraires.

89. *Milieux élastiques. — Pouvoir rotatoire.* — Nous nous proposons de prouver que les termes impairs W_3, W_5, \dots d'un potentiel élastique ont même valeur moyenne que ceux d'un potentiel arbitraire; autrement dit, que l'hypothèse des milieux élastiques n'apporte aucune restriction aux valeurs moyennes des termes impairs.

Étudions d'abord le premier terme W_3 . En notation ombrale il a pour expression

$$W_3 = 2W'W'',$$

W' et W'' désignant deux polynomes ombraux, homogènes et linéaires, le premier par rapport aux $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, le second par rapport à leurs 18 dérivées premières.

On a vu (n° 26) que la valeur moyenne de W_3 est donnée par la formule

$$(W_3)_m = i \begin{vmatrix} A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} u_2 & v_2 & w_2 \\ u_1 & v_1 & w_1 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} L & M & N \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_1 & v_1 & w_1 \end{vmatrix},$$

$A'u + B'v + C'w$ et $A''u + B''v + C''w$ désignant les valeurs de W' et W'' quand on y remplace $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$ par $i\mu x, i\mu\beta, i\mu\gamma$.

Dans le cas des milieux élastiques, cette dernière substitution donne

$$A'u + B'v + C'w = i\mu \left(\alpha \frac{d}{du} + \beta \frac{d}{dv} + \gamma \frac{d}{dw} \right) \Psi',$$

$$A''u + B''v + C''w = (i\mu)^2 \left(\alpha \frac{d}{du} + \beta \frac{d}{dv} + \gamma \frac{d}{dw} \right) \Psi'',$$

Ψ' et Ψ'' représentant les deux formes quadratiques obtenues en remplaçant dans W' et W'' les a_1, \dots, b_1, \dots par $u^2, \dots, 2v\omega, \dots$.

Exprimons Ψ' et Ψ'' en notation ombrale. Soit

$$2\Psi' = (a'u + b'v + c'w)^2,$$

$$2\Psi'' = (a''u + b''v + c''w)^2,$$

la valeur de L sera donnée par la formule

$$\frac{i}{\mu^3} L = \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} (a'\alpha + b'\beta + c'\gamma)(a''\alpha + b''\beta + c''\gamma),$$

ce que nous pourrions écrire sous forme abrégée

$$(8) \quad \frac{i}{\mu^3} L = |bc|(a\alpha + b\beta + c\gamma)^2$$

en convenant de transformer cette expression à l'aide des deux formules

$$(8') \quad \begin{cases} 2|bc|fg = \frac{fg}{bc} + \frac{gf}{bc}, \\ \frac{fg}{bc} = - \begin{vmatrix} f' b' & g' c' \\ f'' b'' & g'' c'' \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Le symbole $\frac{fg}{bc}$ jouit des propriétés suivantes :

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{fg}{bc} = \frac{bg}{fc} = \frac{fc}{bg} = \frac{bc}{fg}, \\ \frac{fg}{bc} = - \frac{gf}{cb}, \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \frac{ca}{bc} = \frac{cc}{ba}, \\ 0 = \frac{cc}{aa} = \frac{ac}{ca}. \end{cases}$$

Deux symboles qu'on ne peut ramener l'un à l'autre par les formules (9) sont indépendants.

En appliquant ces relations, la valeur de L donnée par la formule (8'')

$$(8'') \quad \frac{i}{\mu^3} L = |bc|(a\alpha + b\beta + c\gamma)^2 = \frac{aa}{bc}\alpha^2 + \frac{bb}{bc}\beta^2 + \frac{cc}{bc}\gamma^2 + \left(\frac{bc}{bc} + \frac{cb}{bc}\right)\beta\gamma + \left(\frac{ca}{bc} + \frac{ac}{bc}\right)\gamma\alpha + \left(\frac{ab}{bc} + \frac{ba}{bc}\right)\alpha\beta,$$

devient

$$\frac{i}{\mu^3} L = \frac{aa}{bc}\alpha^2 + \frac{bb}{bc}\beta^2 + \frac{cc}{bc}\gamma^2 + \frac{bc}{bc}\beta\gamma + \left(\frac{cc}{ba} + \frac{ac}{bc}\right)\gamma\alpha + \left(\frac{bb}{ac} + \frac{ba}{bc}\right)\alpha\beta;$$

les expressions de M et de N se déduiront de celles de L par permutation circulaire des

$$\begin{cases} L, & M, & N, \\ a, & b, & c, \\ \alpha, & \beta, & \gamma; \end{cases}$$

on a donc les formules

$$10) \left\{ \begin{array}{l} L = \{ A_l \alpha^2 + B_l \beta^2 + C_l \gamma^2 \} + \{ A \quad \beta\gamma + (B' - r) \gamma\alpha + (B' + q) \alpha\beta \}, \\ M = \{ A_m \alpha^2 + B_m \beta^2 + C_m \gamma^2 \} + \{ (B'' + r) \beta\gamma + A' \quad \gamma\alpha + (B'' - p) \alpha\beta \}, \\ N = \{ A_n \alpha^2 + B_n \beta^2 + C_n \gamma^2 \} + \{ (B' + q) \beta\gamma + (B'' + p) \gamma\alpha + A'' \quad \alpha\beta \}. \end{array} \right.$$

Les 15 quantités $A_l, B_l, C_l, A_m, B_m, C_m, A_n, B_n, C_n, A, A', A'', p, q, r$ représentent 15 fonctions linéaires et homogènes de α, β, γ à coefficients arbitraires. Quant aux trois quantités B, B', B'' , elles sont données par les équations

$$B + A_l = B' + B_m = B'' + C_n = 0.$$

En annulant certains coefficients arbitraires nous pourrions réduire les $A_l, B_m, C_n, B, B', B'', A, A', A'', p, q, r$ aux valeurs suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} -B = A_l = a_l \alpha, \\ -B' = B_m = b_m \beta, \\ -B'' = C_n = c_n \gamma, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \Lambda = k \alpha, \\ A' = k' \beta, \\ \Lambda'' = k'' \gamma, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} p = p_2 \beta + p_3 \gamma, \\ q = q_3 \gamma + q_1 \alpha, \\ r = r_1 \alpha + r_2 \beta, \end{array} \right.$$

dans cette hypothèse, les valeurs de L, M, N se réduisent à (11)

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} L = a_l \alpha^3 + B'_l \beta^2 + C'_l \gamma^2 + l \alpha \beta \gamma + \alpha^2 (q_1 \beta - r_1 \gamma), \\ M = A'_m \alpha^2 + b_m \beta^3 + C'_m \gamma^2 + l' \alpha \beta \gamma + \beta^2 (r_2 \gamma - p_2 \alpha), \\ N = A''_n \alpha^2 + B'_n \beta^2 + c_n \gamma^3 + l'' \alpha \beta \gamma + \gamma^2 (p_3 \alpha - q_3 \beta), \end{array} \right.$$

avec les formules

$$(11') \left\{ \begin{array}{l} B'_l = B_l - b_m \alpha, \\ C'_l = C_l - c_n \alpha, \\ l = k + q_3 - r_2. \end{array} \right.$$

Comme les B_l, C_l, k, \dots sont arbitraires, il en sera de même des B'_l, C'_l, l, \dots , et, par suite, les 30 coefficients de $\alpha^3, \alpha^2 \beta, \dots$ figurant dans les formules (11) sont tous distincts. Donc les valeurs réduites (11) des L, M, N et, par suite, leurs valeurs primitives (10) sont trois fonctions à coefficients arbitraires.

En définitive, la théorie élastique ne particularise pas la valeur moyenne de W_3 , et ce résultat s'étend à l'un quelconque des termes impairs; il suffit de remarquer que la valeur moyenne d'un potentiel W_{2p+3} est de la forme $W_3 \Psi_{2p}(\alpha, \beta, \gamma)$; W_3 désignant un potentiel dont les coefficients sont des grandeurs ombrales et

Ψ_{2p} une forme ombrale homogène de degré $2p$ en α, β, γ ; les grandeurs qui définissent W_3 et Ψ_{2p} étant, de plus, arbitraires.

90. *Conclusions.* — En résumé :

1° La théorie élastique particularise la valeur moyenne du potentiel W_2 ; mais cette restriction n'est pas incompatible avec la condition de transversalité;

2° La théorie élastique ne particularise pas la valeur moyenne de W_3 .

Par conséquent, le développement de la théorie élastique conduit logiquement aux lois de la double réfraction et de la polarisation rotatoire qu'on a obtenues pour les milieux gyrostatiques; et cette conclusion s'étend aux termes de degré supérieur.

91. *Milieux à forces centrales.* — Dans l'hypothèse des forces centrales, le potentiel élastique ne dépend que des distances des molécules.

Soit donc

$$R = h^2 + k^2 + l^2$$

le carré de la distance de 2 molécules avant la déformation.

Par suite de la déformation, R se change en $R + \rho$, et l'on a

$$R + \rho = (h + \Delta u)^2 + (k + \Delta v)^2 + (l + \Delta w)^2,$$

$$(12) \quad W = \sum F(R + \rho) = \sum F(R) + \sum \rho \frac{dF}{dR} + \frac{1}{2} \sum \rho^2 \frac{d^2 F}{dR^2} + \dots;$$

l'accroissement ρ a pour valeur

$$\rho = \rho_1 + \rho_2, \quad \begin{cases} \rho_1 = 2(h \Delta u + k \Delta v + l \Delta w), \\ \rho_2 = \Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2, \end{cases}$$

et, comme on se limite à l'étude des mouvements infiniment petits (*voir* Chap. II, n° 16), l'approximation doit s'arrêter aux doubles produits des dérivées partielles. Donc, dans le développement (12) de W , il faut s'en tenir aux trois premiers termes

$$(12') \quad W = W^0 + W^1 + W^2,$$

W^0, W^1, W^2 représentant des fonctions de degré 0, 1, 2 par

rapport aux dérivées et dont les expressions sont

$$\left\{ \begin{array}{l} W^0 = \sum F(R), \\ W^1 = \sum \rho_1 \frac{dF}{dR}, \\ W^2 = \sum \rho_1^2 \frac{d^2 F}{dR^2} + \frac{1}{2} \sum \rho_2 \frac{dF}{dR}. \end{array} \right.$$

Si, comme nous l'avons admis jusqu'ici, les pressions sont nulles à l'infini, on a identiquement

$$W^1 = 0$$

et nous allons voir que cette condition entraîne

$$\sum \rho_2 \frac{dF}{dR} = 0.$$

Pour le démontrer, remplaçons dans ρ_1 et ρ_2 les Δu , Δv , Δw par leurs développements en série

$$\Delta u = du + \frac{1}{2!} d^2 u + \dots, \quad d^p u = \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} + l \frac{d}{dz} \right)^{(p)} u,$$

et nous en concluons que ρ_1 et ρ_2 ont pour valeurs

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \varphi_2(h, k, l) + \varphi_3(h, k, l) + \dots, \\ \rho_2 &= \psi_2(h, k, l) + \psi_3(h, k, l) + \dots, \end{aligned}$$

les φ_n , ψ_n désignant des fonctions de degré n en h, k, l .

De plus la fonction

$$\varphi_n = \frac{2}{(n+1)!} (h d^{n-1} u + k d^{n-1} v + l d^{n-1} w)$$

a tous ses coefficients indépendants; par conséquent, la condition

$$\sum \varphi_n \frac{dF}{dR} = 0 \quad \text{entraîne} \quad \sum \psi_n \frac{dF}{dR} = 0,$$

autrement dit,

$$\sum \rho_1 \frac{dF}{dR} = 0 \quad \text{entraîne} \quad \sum \rho_2 \frac{dF}{dR} = 0.$$

En résumé, les milieux à forces centrales et sans pressions exté-

rieures ont pour potentiel interne la forme quadratique

$$W = \sum \rho_i^2 \frac{d^2 F}{dR^2} = \sum (\varphi_2 + \varphi_3 + \dots)^2 \frac{d^2 F}{dR^2} = W_2 + W_3 + \dots + W_n + \dots,$$

les termes successifs du développement étant donnés par les formules

$$W_2 = \sum \varphi_2^2 \frac{d^2 F}{dR^2}, \quad W_3 = \sum 2\varphi_2 \varphi_3 \frac{d^2 F}{dR^2}, \quad W_n = \sum \frac{2!}{a! b!} \sum \varphi_p^a \varphi_b^b \frac{d^2 F}{dR^2}$$

($a + b = 2, \quad pa + qb = n + 2$).

Conséquences :

92. 1° *La théorie des forces centrales est incompatible avec le principe de transversalité.* — On a, en effet,

$$\frac{1}{2} \varphi_2 = h du + k dv + l dw = \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} + l \frac{d}{dz} \right) (hu + hv + lw),$$

$\frac{1}{2} \varphi_2$ représente la quadrique des dilatations et, par conséquent,

$$4 W_2 = \Sigma (a_1 h^2 + \dots + b_1 kl + \dots)^2 \frac{d^2 F}{dR^2};$$

le résultat de la sommation s'obtiendra en supprimant le signe Σ , le facteur $\frac{d^2 F}{dR^2}$, et regardant les $h^2, h^2 k, \dots$ comme les notations ombrales de coefficients indépendants, ce qui donne pour le potentiel W_2 des milieux à forces centrales, la valeur, en notation ombrale,

$$W_2 = (a_1 h^2 + \dots + b_1 kl + \dots)^2,$$

c'est-à-dire

$$(13) \quad W_2 = \Sigma h^4 a_1^2 + \Sigma k^2 l^2 (b_1^2 + 2 a_2 a_3) + 2 \Sigma h^2 kl (a_1 b_1 + b_2 b_3) + 2 \Sigma h^3 k a_1 b_3.$$

Il résulte de la formule (13) que la théorie des forces centrales est incompatible avec le principe de transversalité. En effet, la condition nécessaire et suffisante de transversalité est (n° 87) que l'on puisse effectuer l'identification

$$W_2 = - \left(A_1 \frac{d}{da_1} + \dots + B_1 \frac{d}{db_1} + \dots \right) D,$$

D désignant le discriminant de la quadrique des dilatations, c'est-à-dire

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & \frac{1}{2}b_3 & \frac{1}{2}b_2 \\ \frac{1}{2}b_3 & a_2 & \frac{1}{2}b_1 \\ \frac{1}{2}b_2 & \frac{1}{2}b_1 & a_3 \end{vmatrix},$$

et la comparaison des termes en $k^2 l^2$ et $h^2 kl$ avec $\frac{dD}{da_1}$ et $\frac{dD}{db_1}$ apprend que l'identification est impossible. W_2 devrait être identiquement nul.

93. 2^o *La théorie des forces centrales est incompatible avec le phénomène de la polarisation rotatoire. Les vibrations transmises sont nécessairement rectilignes.* — En effet, W_3 a pour expression

$$\begin{aligned} (13') W_3 &= 2 \sum \varphi_2 \varphi_3 \frac{d^2 F}{dR^2} \\ &= 2 \sum \left\{ \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} + l \frac{d}{dz} \right) (hu + kv + lw) \right\} \\ &\quad \times \left\{ \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} + l \frac{d}{dz} \right)^{(2)} (hu + kv + lw) \right\} \frac{d^2 F}{dR^2}; \end{aligned}$$

le résultat de la sommation s'obtiendra en supprimant le signe Σ , le facteur $\frac{d^2 F}{dR^2}$, et regardant les $h^5, h^4 k, \dots$ comme les notations ombrales de coefficients indépendants.

On peut donc choisir comme facteurs W' et W'' de l'expression ombrale $W_3 = 2 W' W''$ les deux formes

$$\begin{aligned} W' &= \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} + l \frac{d}{dz} \right) (hu + kv + lw), \\ W'' &= \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} + l \frac{d}{dz} \right)^{(2)} (hu + kv + lw). \end{aligned}$$

Or la valeur moyenne de W_3 a pour expression (n^o 26)

$$(W_3)_m = V'_1 V''_2 - V''_1 V'_2,$$

avec

$$\begin{cases} V' = \mu (hx + k\beta + l\gamma) (hu + kv + lw), \\ V'' = -\mu^2 (hx + k\beta + l\gamma)^2 (hu + kv + lw). \end{cases}$$

On a par conséquent

$$(W_3)_m = V'_1 V''_2 - V''_1 V'_2 = 0.$$

Ce résultat s'étend à un terme quelconque de degré impair, car W_n est égal à une somme de produits

$$\left\{ \left(h \frac{d}{dx} + \dots \right)^{(p)} (hu + kv + lw) \right\} \left\{ \left(h \frac{d}{dx} + \dots \right)^{(n-p)} (hu + kv + lw) \right\}$$

dont la valeur moyenne est nulle d'après le raisonnement précédent.

94. *Termes complémentaires de polarisation rotatoire. Théorie de Cauchy.* — Nous venons de voir que la théorie des forces centrales ne peut rendre compte de la polarisation elliptique et qu'elle est incompatible avec le principe de transversalité.

Cette dernière difficulté subsiste, même si l'on restreint l'énoncé de la transversalité et qu'on admette l'existence d'une troisième vibration qui, d'ailleurs (n° 82), est nécessairement perpendiculaire au plan de l'onde.

La méthode donnée au n° 82 permet d'établir que l'expression générale du potentiel vérifiant la condition de transversalité ainsi restreinte est

$$W = W_g = W_n + (S_0 + S_1 \Delta + S_2 \Delta^2 + \dots)(a_1 + a_2 + a_3),$$

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}.$$

Par conséquent, tout potentiel statique W_2 vérifiant la condition restreinte de transversalité aura pour valeur

$$(14) \quad W = - \left(A_1 \frac{d}{du_1} + \dots + B_1 \frac{d}{dv_1} + \dots \right) D + S_0 (a_1 + a_2 + a_3)^2.$$

Appliquons cette identification à la théorie des forces centrales, nous obtiendrons

$$\begin{cases} B_1 = B_2 = B_3 = 0, \\ A_1 = A_2 = A_3 = \frac{4}{3} S_0, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(14') \quad W_2 = - \frac{4}{3} S_0 \left(\frac{dD}{da_1} + \frac{dD}{da_2} + \frac{dD}{da_3} \right) + S_0 (a_1 + a_2 + a_3)^2;$$

$a_1 + a_2 + a_3$ et $\frac{dD}{da_1} + \frac{dD}{da_2} + \frac{dD}{da_3}$, qui sont deux coefficients de l'équation en S de la quadrique des dilatations, sont donc deux

polynômes isotropes et, par suite, l'expression trouvée pour W_2 ne s'applique qu'aux milieux isotropes.

Pour lever cette difficulté, Cauchy a supposé que le principe de transversalité n'était pas rigoureusement vérifié et a tenté de rendre compte des lois de la double réfraction, en assujettissant l'ellipsoïde de polarisation à contenir l'intersection de l'ellipsoïde optique par le plan de l'onde. Mais, en ce qui concerne la polarisation rotatoire, la difficulté reste entière et, à la suite de diverses tentatives (1), Cauchy a proposé en 1847 (2) de compléter les équations du mouvement

$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} = X$$

par des termes additionnels

$$(15) \quad X' = \Sigma \{ m(l \Delta v - k \Delta w) f(R) \} = \Sigma m \Delta u . h [f(R)].$$

Développons les conséquences de cette hypothèse :

Δu a pour valeur

$$\Delta u = \Delta_1 u + \Delta_2 u + \dots + \Delta_n u + \dots, \quad \Delta_n u = \frac{1}{n!} \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} + l \frac{d}{dz} \right)^{(n)} u,$$

d'où

$$X' = X'_1 + X'_2 + \dots + X'_n + \dots$$

avec

$$X'_n = \Sigma m [\Delta_n u . h] f(R) = \frac{1}{n!} \Sigma \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} + l \frac{d}{dz} \right)^{(n)} [u . h] m f(R);$$

le résultat de la sommation s'obtiendra en supprimant le signe Σ , le facteur $m f(R)$, et regardant les h^{n+1} , $h^n k$, ... comme les notations ombrales de coefficients distincts.

Les X'_n , Y'_n , Z'_n auront donc pour expressions ombrales

$$(15') \quad X'_n = \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} + l \frac{d}{dz} \right)^{(n)} [u . h].$$

Pour obtenir les équations linéaires qui sont le résultat de la substitution des solutions particulières $e^{i\mu(\alpha x + \beta y + \gamma z - vt)}$ dans les

(1) CAUCHY, *Comptes rendus*, t. II, 1836, p. 181 et t. XV, 1842, p. 910. Voir à ce sujet la critique faite par Mac Cullagh (*Collected Works*, p. 194).

(2) CAUCHY, *Comptes rendus*, 30 août 1847.

équations du mouvement, on remplacera les $\frac{d}{dx}$, ... par $i\mu x$, ..., ce qui donnera à X'_n la valeur (notation ombrale)

$$X'_n = (i\mu)^n (hx + k\beta + l\gamma)^n [u.h],$$

c'est-à-dire

$$(15'') \quad X'_n = (i\mu)^n \left\{ v \frac{d\varphi_{n+1}}{d\gamma} - w \frac{d\varphi_{n+1}}{d\beta} \right\},$$

avec

$$(hx + k\beta + l\gamma)^{n+1} = (n+1)\varphi_{n+1}(x, \beta, \gamma).$$

Les termes additionnels d'ordre n sont donc définis par une surface invariante $(hx + ky + lz)^{n+1} = 1$ d'ordre $n+1$, et comme X'_1, Y'_1, Z'_1 est un vecteur direct, φ_{n+1} est une surface à symétrie inverse.

Appliquons ces résultats au premier terme X'_1, Y'_1, Z'_1 : la présence de l'imaginaire i apprend qu'il y a polarisation rotatoire, et ce phénomène est défini par une quadrique φ_2 à symétrie inverse. On retrouve donc qualitativement les résultats de la théorie gyrostatique, à savoir :

1° Parmi les 32 types de symétrie cristalline, 15 possèdent le pouvoir rotatoire, les 17 autres sont inactifs;

2° Les vibrations transmises par les milieux isotropes hémihédres sont circulaires. Il en est de même des vibrations transmises suivant la direction de l'axe des cristaux uniaxes hémihédres;

3° La vibration est rectiligne quand la direction α, β, γ se trouve dans un plan de symétrie.

A l'époque où elle a été publiée, la théorie de Cauchy permettait donc de rendre compte de l'influence de la symétrie cristalline sur le phénomène de la polarisation rotatoire, mise en évidence par les recherches de Herschel et Delafosse sur les cristaux uniaxes, et que Pasteur devait ensuite étendre aux dissolutions de cristaux biaxes (*voir* n° 31). Mais il ne faut pas se dissimuler que cette théorie se heurtait à des objections graves : les termes en X'_1, \dots ne contiennent que les dérivées premières du déplacement et conduisent à une formule erronée de la différence de marche en fonction de la longueur d'onde. On rendrait approximativement compte des phénomènes en substituant à

l'hypothèse de Cauchy

$$X' = \Sigma m [\Delta u, h] f(R),$$

l'hypothèse

$$X' = \Sigma m \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) [\Delta u, h] f(R).$$

III. — Discussion des théories de la lumière. Le potentiel élastique sous forme d'une somme de deux covariants : Quartique de Haughton; quadrique de Rankine. Continuité des pressions. Stabilité de l'équilibre.

95. *Le potentiel élastique exprimé sous forme d'une somme de deux covariants : quartique de Haughton, quadrique de Rankine.* — Dans la discussion qui va suivre on se limitera à l'étude du premier terme W_2 .

Quand le milieu est à forces centrales, le potentiel W_2 qui dépend de 15 coefficients est, comme l'a montré Haughton, défini par une surface invariante du quatrième ordre.

En effet, dans ce cas, W_2 a pour valeur

$$W_2 = \frac{1}{4} \Sigma (a_1 h^2 + \dots + b_1 kl + \dots)^2 \frac{d^2 F}{dR^2},$$

ce qu'on peut écrire, en notation ombrale,

$$W_2 = (a_i h_2 + \dots + b_1 kl + \dots)^2,$$

$h^4, h^3 k, \dots$ désignant les notations de coefficients indépendants.

D'ailleurs la quadrique des tensions

$$a_1 x^2 + \dots + b_1 yz + \dots = 1,$$

a pour notation ombrale

$$(x_1 x + y_1 y + z_1 z)^2 = 1,$$

ce qui donne les formules de changement de coordonnées

$$a_1 = x_1^2, \quad b_1 = 2 y_1 z_1,$$

x_1, y_1, z_1 désignant un vecteur ombrale.

On en conclut que la surface du quatrième ordre

$$(x^2 h^2 + \dots + 2 yzkl + \dots)^2 = 2,$$

dont les coefficients définissent ceux de W_2 , reste fixe dans l'espace quand on effectue un changement de coordonnées. Cette surface invariante est la quartique de Haughton : on l'obtient en remplaçant dans l'expression du potentiel W_2 les a_1, b_1, \dots par $x^2, 2yz, \dots$.

96. Étudions maintenant le potentiel élastique le plus général : c'est une forme quadratique en $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, à 21 coefficients, qui, en notation ombrale, peut s'écrire indifféremment

$$(16) \quad \begin{cases} W'_2 = (A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1)^2 (A_2 x_2 + B_2 y_2 + C_2 z_2)^2, \\ W''_2 = (A_2 x_1 + B_2 y_1 + C_2 z_1)^2 (A_1 x_2 + B_1 y_2 + C_1 z_2)^2. \end{cases}$$

Les $(A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ représentent des vecteurs ombraux qui définissent les coefficients de W_2 et les dilatations et glissements.

On a les formules

$$(17) \quad \begin{cases} x_1^2 = x_2^2 = a_1, \\ 2y_1 z_1 = 2y_2 z_2 = b_1, \end{cases}$$

et l'on peut écrire

$$(18) \quad \begin{cases} A_1^2 = A_2^2 = A^2, \\ B_1 C_1 = B_2 C_2 = BC. \end{cases}$$

Posons

$$u_{\alpha\beta} = A_\alpha x_\beta + B_\alpha y_\beta + C_\alpha z_\beta,$$

nous obtiendrons

$$(19) \quad W_2 = W'_2 = W''_2 = \frac{1}{2}(W'_2 + W''_2) = \frac{1}{2}(u_{11} u_{11} u_{22} u_{22} + u_{12} u_{12} u_{21} u_{21}) \\ = u_{12} u_{12} u_{21} u_{22} + \frac{1}{2}(u_{11} u_{22} - u_{12} u_{21})^2,$$

et l'on voit que la formule (19) donne W_2 sous forme d'une somme de deux covariants.

Pour expliciter la valeur du premier covariant

$$(20) \quad u_{11} u_{12} u_{21} u_{22} = (A_1 x_1 + \dots)(A_1 x_2 + \dots)(A_2 x_1 + \dots)(A_2 x_2 + \dots),$$

nous remarquerons qu'il est de la forme

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) \times \varphi(x_2, y_2, z_2)$$

et que, par suite, on ne restreint pas la généralité de l'expression (20) si l'on écrit

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 = A, \\ B_1 &= B_2 = B, \\ C_1 &= C_2 = C, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(20') \quad u_{11}u_{12}u_{21}u_{22} = (Ax_1 + By_1 + Cz_1)^2(Ax_2 + By_2 + Cz_2)^2 \\ = \frac{1}{4!} \left(x_1 \frac{d}{dx} + \dots \right)^2 \left(x_2 \frac{d}{dx} + \dots \right)^2 (Ax + By + Cz)^4.$$

Le deuxième covariant est égal à la moitié du carré du polynome ombral

$$(21) \quad u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21} = \begin{vmatrix} A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 & A_1x_2 + B_1y_2 + C_1z_2 \\ A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 & A_2x_2 + B_2y_2 + C_2z_2 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_1 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire à

$$(21') \quad u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21} = A_3x_3 + B_3y_3 + C_3z_3.$$

en désignant par (A_3, B_3, C_3) et (x_3, y_3, z_3) les vecteurs ombraux

$$(22) \quad \begin{cases} A_3 = [A_1, A_2], & B_3 = [B_1, B_2], & C_3 = [C_1, C_2], \\ x_3 = [x_1, x_2], & y_3 = [y_1, y_2], & z_3 = [z_1, z_2], \end{cases}$$

et l'on a, en définitive, la formule de décomposition de W_2

$$(23) \quad 2W_2 = \frac{1}{4!} \left(x_1 \frac{d}{dx} + y_1 \frac{d}{dy} + z_1 \frac{d}{dz} \right)^2 \left(x_2 \frac{d}{dx} + y_2 \frac{d}{dy} + z_2 \frac{d}{dz} \right)^2 H_4 \\ + \frac{1}{2!} \left(x_3 \frac{d}{dx} + y_3 \frac{d}{dy} + z_3 \frac{d}{dz} \right)^2 R_2,$$

H_4 et R_2 désignant les deux surfaces invariantes directes ayant pour notations ombrales

$$(23') \quad \begin{cases} \frac{1}{2}H_4 = (A_1x + B_1y + C_1z)^2(A_2x + B_2y + C_2z)^2, \\ R_2 = (A_3x + B_3y + C_3z)^2, & A_3 = [A_1, A_2]. \end{cases}$$

H_4 est la quartique de Haughton, R_2 est la quadrique de Rankine.

Dans le développement de la formule (23), on écrira

$$(23'') \quad \begin{cases} x_1^2 = x_2^2 = a_1 = a_1', \\ 2y_1z_1 = 2y_2z_2 = b_1 = 2b_1', \\ x_3 = [x_1, x_2]; \end{cases}$$

d'où

$$(23''') \quad \begin{cases} x_3^2 = (y_1z_2 - y_2z_1)^2 = y_1^2z_1^2 + y_2^2z_2^2 - 2y_1y_2z_1z_2 \\ = 2(a_2'a_3' - b_1'^2) = 2 \frac{dD}{da_1'}, \\ y_3z_3 = 2(b_2'b_3' - a_1'b_1') = 2 \frac{dD}{db_1'}. \end{cases}$$

97. *Expressions de H_4 et R_2 sous forme de covariants du potentiel élastique W_2 .*

1° *Quartique de Haughton* : $\frac{1}{2} H_4$ s'obtient en remplaçant a_1, \dots, b_1, \dots , par $x^2, \dots, 2yz, \dots$ dans W_2 , et comme W_2 est une forme quadratique en a_1, \dots, b_1, \dots , on a

$$(24) \quad H_4 = \left(x^2 \frac{dW}{da_1} + y^2 \frac{dW}{da_2} + z^2 \frac{dW}{da_3} + 2yz \frac{dW}{db_1} + 2zx \frac{dW}{db_2} + 2xy \frac{dW}{db_3} \right)^{(2)} = x^4 \frac{d^2 W}{da_1^2} + \dots$$

Rankine a démontré que la surface H_4 définit les coefficients d'élasticité longitudinale.

On a, en effet, en notation ombrale,

$$x^4 \frac{d^2 W_2}{da_1^2} + \dots = (\Lambda' x + B' y + C' z)^{(4)},$$

autrement dit, les 21 coefficients de W_2 ,

$$\frac{d^2 W_2}{da_1^2}, \quad \frac{d^2 W_2}{da_1 db_1}, \quad \dots,$$

ont mêmes formules de transformation de coordonnées que les $A'^4, A'^2 B'^2, \dots$

Or le coefficient d'élasticité suivant Ox est

$$\frac{N_1}{a_1} = \frac{r}{a_1} \cdot \frac{dW}{da_1} = \frac{d^2 W}{da_1^2} = \Lambda'^4;$$

donc le coefficient d'élasticité suivant $Ox_1(\alpha, \beta, \gamma)$ est donné par la formule

$$\Lambda_1'^4 = (\Lambda' \alpha + B' \beta + C' \gamma)^4 = H_4(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{r^4}{r_1^4},$$

r désignant le rayon vecteur de la quadrique de Haughton suivant la direction α, β, γ .

2° *Quadrique de Rankine* : La quadrique de Rankine a pour notation ombrale

$$R_2 = (A_3 x + B_3 y + C_3 z)^2, \quad A_3 = [A_1, A_2],$$

et W_2 a pour expression

$$W_2 = u_{11}^2 u_{22}^2,$$

d'où nous déduisons

$$\begin{aligned} \frac{dW}{da_1} &= \frac{dW}{dx_1^2} + \frac{dW}{dx_2^2} = A_1^2 u_{22}^2 + A_2^2 u_{11}^2, \\ 2 \frac{dW}{db_1} &= \frac{dW}{d.y_1 z_1} + \frac{dW}{d.y_2 z_2} = B_1 C_1 u_{22}^2 + B_2 C_2 u_{11}^2, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 W_2}{da_2 da_3} - \frac{d^2 W_2}{db_1^2} &= B_1^2 C_2^2 + B_2^2 C_1^2 - 2 B_1 C_1 B_2 C_2 \\ &= (B_1 C_2 - B_2 C_1)^2 = A_3^2, \\ \frac{d^2 W_2}{db_2 db_3} - \frac{d^2 W_2}{da_1 db_1} &= (A_1 B_2 - A_2 B_1)(A_2 C_1 - A_1 C_2) = B_3 C_3. \end{aligned} \right.$$

Pour obtenir la valeur de R on écrira donc les formules symboliques

$$\left\{ \begin{aligned} A_3 &= [A_1 \cdot A_2], & B_3 &= [B_1 \cdot B_2], & C_3 &= [C_1 \cdot C_2], \\ A_1^2 &= A_2^2 = \frac{d}{da_1}, & B_1^2 &= B_2^2 = \frac{d}{da_2}, & C_1^2 &= C_2^2 = \frac{d}{da_3}, \\ B_1 C_1 &= B_2 C_2 = \frac{d}{db_1}, & C_1 A_1 &= C_2 A_2 = \frac{d}{db_2}, & A_1 B_1 &= A_2 B_2 = \frac{d}{db_3}, \end{aligned} \right.$$

et l'on fera porter les opérations de dérivation sur $\frac{1}{2} W_2$; d'où

$$\begin{aligned} R_2 &= x^2 \left(\frac{d^2}{da_2 da_3} - \frac{d^2}{db_1^2} \right) W_2 + y^2 \left(\frac{d^2}{da_3 da_1} - \frac{d^2}{db_2^2} \right) W_2 + \dots \\ &\quad + 2yz \left(\frac{d^2}{db_2 db_3} - \frac{d^2}{da_1 db_1} \right) W_2 + \dots \end{aligned}$$

98. *Application de la formule de décomposition de W_2 . Propriétés élastiques des trente-deux types de symétrie cristalline.* — La quartique de Haughton et la quadrique de Rankine, qui sont des surfaces invariantes directes, doivent participer à la symétrie du milieu. La recherche de l'influence de la symétrie sur les propriétés élastiques d'un cristal est donc ramenée à la recherche des surfaces du quatrième et du deuxième ordre possédant la même symétrie que le cristal. C'est un problème connu, car l'on sait écrire les équations générales des surfaces d'ordre n pour chacun des trente-deux types de symétrie cristalline.

Prenons comme exemple le cas du sel gemme. Le type de symétrie est (holoédrie du système cubique)

$$3A^4, \quad 4L^3, \quad 6L^2, \quad C, \quad 3\Pi, \quad 6P^2$$

or on sait que toute fonction uniforme de x, y, z , qui satisfait à la symétrie du cube est une fonction uniforme des trois polynomes

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2, \\ x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2, \\ x^2 y^2 z^2. \end{aligned}$$

Les surfaces qui définissent les propriétés élastiques du sel gemme sont donc

$$\begin{cases} H_4 = A(x^2 + y^2 + z^2)^2 + B(x^4 + y^4 + z^4), \\ K_2 = C(x^2 + y^2 + z^2), \end{cases}$$

et par conséquent les 21 coefficients d'élasticité se réduisent à 3.

Le coefficient d'élasticité longitudinale suivant la direction α, β, γ est donné par la formule

$$E = H_4(\alpha, \beta, \gamma) = A + B(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4),$$

et il existe par suite une relation entre les coefficients d'élasticité longitudinale suivant trois directions.

On aura par exemple :

axe quaternaire Λ^4 ,

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad E_4 = A + B;$$

axe ternaire L^3 ,

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad E_3 = A + \frac{B}{3};$$

axe binaire L^2 ,

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \gamma = 0, \quad E_2 = A + \frac{B}{2};$$

d'où la relation

$$E_4 + 3E_3 - 4E_2 = 0,$$

que l'expérience a vérifiée.

En résumé, la considération de la quartique de Haughton et de la quadrique de Rankine fournit une méthode directe de discussion des 32 types de symétrie.

En suivant la marche qui vient d'être indiquée, on démontre

que les cristaux se classent, au point de vue des propriétés élastiques, en 11 classes distinctes (1).

99. *De la condition de transversalité dans les milieux élastiques.* — Les 21 coefficients du potentiel élastique sont définis par les 21 coefficients des surfaces H_4 et R_2 . La décomposition de W_2 dans les 21 formes quadratiques en $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, qui figurent dans la formule (23) n'est donc possible que d'une seule manière.

Quand le milieu est à forces centrales, on peut écrire l'égalité des vecteurs ombraux (A_1, B_1, C_1) et (A_2, C_2, B_2) , ce qui annule (A_3, B_3, C_3) . Donc l'hypothèse des forces centrales signifie que les coefficients de la quadrique de Rankine sont nuls.

Au contraire, l'annulation de la surface de Haughton représente la condition nécessaire et suffisante pour que le milieu élastique ne propage que des vibrations transversales. En effet, le potentiel transversal le plus général a pour expression (n° 87)

$$W_2 = - \left(A_1 \frac{d}{da_1} + \dots + B_1 \frac{d}{db_1} + \dots \right) D,$$

c'est-à-dire, d'après les formules (23'''), la même expression que le covariant de la quadrique de Rankine. Et, comme l'identification n'est possible que d'une seule manière, la transversalité entraîne nécessairement l'annulation de la surface de Haughton, et se trouve par suite incompatible avec l'hypothèse des forces centrales. C'est le résultat obtenu par une autre méthode au n° 92.

100. *Principe de continuité des pressions.* — Nous avons démontré au n° 73 que les milieux gyrostatiques satisfont au principe de continuité des pressions.

Cherchons quelles sont les conditions imposées aux milieux qui propagent exclusivement des ondes transversales.

Leur potentiel interne a pour expression

$$W_2 = F(p, q, r) - \left(U_x \frac{dJ}{du_x} + U_y \frac{dJ}{du_y} + U_z \frac{dJ}{du_z} + V_x \frac{dJ}{dv_x} + \dots + W_x \frac{dJ}{dw_x} + \dots \right),$$

(1) Comparer avec VOIGT, *Rapports présentés au Congrès international de Physique de 1900*, t. I, p. 277.

U_x, U_y, \dots désignant neuf constantes arbitraires et J représentant le jacobien de u, v, w .

Les tensions exercées sur l'élément de surface dont la normale a pour cosinus directeurs l, m, n , ont pour composantes

$$p_x = l \frac{dW_2}{du'_x} + m \frac{dW_2}{du'_y} + n \frac{dW_2}{du'_z}, \dots$$

Remplaçons W_2 par sa valeur

$$W_2 = F(p, q, r) - W'',$$

et les formules deviendront

$$p_x = p'_x - p''_x, \dots,$$

p''_x, p''_y, p''_z désignant les composantes de la tension due au potentiel interne $W' = F(p, q, r)$; et p''_x, p''_y, p''_z se rapportant au potentiel additionnel W'' à 9 constantes :

$$W'' = \begin{vmatrix} U_x & U_y & U_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ V_x & V_y & V_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix},$$

d'où la valeur de p''_x

$$p''_x = \left(l \frac{d}{du'_x} + m \frac{d}{du'_y} + n \frac{d}{du'_z} \right) W'' = \begin{vmatrix} l & m & n \\ V_x & V_y & V_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l & m & n \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix}.$$

Comme le principe de continuité des pressions est vérifié pour les composantes p'_x, p'_y, p'_z (n° 73), la condition de continuité du vecteur p_x, p_y, p_z se ramène à celle du vecteur p''_x, p''_y, p''_z .

Choisissons comme surface de séparation des deux milieux le plan $z = 0$; on aura $l = m = 0, n = 1$. D'après les lois de la réflexion et de la réfraction, u, v, w et leurs dérivées par rapport à x et y sont continues, on a donc

$$p''_{1x} - p''_{2x} = \begin{vmatrix} V_{1x} - V_{2x} & V_{1y} - V_{2y} \\ w'_x & w'_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v'_x & v'_y \\ W_{1x} - W_{2x} & W_{1y} - W_{2y} \end{vmatrix}.$$

Je dis que la condition de continuité $p''_{1x} = p''_{2x}$ entraîne les équations (26)

$$(26) \quad V_{1x} = V_{2x}, \quad V_{1y} = V_{2y}, \quad W_{1x} = W_{2x}, \quad W_{1y} = W_{2y}.$$

En effet, l'intégrale de volume $\int_V W'' d\omega$ est réductible à une intégrale de surface, et, par suite, sans influence sur les équations indéfinies. Les valeurs de $\nu'_x, \nu'_y, \omega'_x, \omega'_y$ sont donc indépendantes de la fonction W'' et l'identité $p''_{1x} = p''_{2x}$ doit être vérifiée quels que soient $\nu'_x, \nu'_y, \omega'_x, \omega'_y$ qui peuvent être arbitrairement choisis, comme on le déduit aisément de l'étude de la réflexion et de la réfraction (n° 54 à 60).

En étendant ce raisonnement à p''_y, p''_z , et ensuite aux surfaces de séparation $x=0, y=0$ on en conclura que les coefficients du potentiel additionnel W'' doivent être identiques pour tous les milieux.

Appliquons ce résultat au cas particulier où l'un des deux milieux est isotrope. On a

$$\begin{aligned} U_x \frac{dJ}{du_x} + V_y \frac{dJ}{du_y} + \dots &= \left(A_1 \frac{d}{da'_1} + \dots + B_1 \frac{d}{db'_1} + \dots + P' \frac{d}{dp'} + \dots \right) J \\ &= (A_1 p'^2 + \dots + 2B_1 q' r' + \dots) + \left(P' \frac{d}{dp'} + \dots \right) J \\ &\quad + \left(A_1 \frac{d}{da'_1} + \dots + B_1 \frac{d}{db'_1} + \dots \right) D, \end{aligned}$$

d'où il résulte que, dans toute transformation de coordonnées, les 6 coefficients A_1, \dots, B_1, \dots se comportent comme les coefficients d'une quadrique, et les 3 coefficients P', \dots comme les composantes d'un vecteur.

Donc, en raisonnant sur un milieu déterminé en contact avec un milieu isotrope, on en conclura que la quadrique

$$A_1 x^2 + \dots + 2B_1 yz + \dots = 1$$

se réduit à une sphère

$$A(x^2 + y^2 + z^2) = 1$$

et que le vecteur P', Q', R' est nul.

En résumé, la conséquence du principe de continuité des pressions est que les 9 constantes arbitraires se réduisent à une seule, la même pour tous les milieux, et l'on a

$$U_x \frac{dJ}{du_x} + \dots = A \left(\frac{d}{da_1} + \frac{d}{da_2} + \frac{d}{da_3} \right) J.$$

101. COROLLAIRE. — *La théorie élastique est, dans l'hypothèse de la transversalité, incompatible avec le principe de continuité des pressions.*

En effet, le potentiel élastique transversal a pour valeur

$$W_2 = - \left(A_1 \frac{d}{da_1} + \dots + B_1 \frac{d}{db_1} + \dots \right) D,$$

et l'on vient de démontrer que

$$A_1 = A_2 = A_3, \quad B_1 = B_2 = B_3 = 0;$$

donc, le principe de continuité des pressions, appliqué aux milieux élastiques, entraîne dans l'hypothèse de la transversalité cette conclusion manifestement absurde que ces milieux seraient isotropes et identiques entre eux.

102. *Forces de Kirchhoff.* — La valeur moyenne du potentiel additionnel W'' pendant une période étant nulle, il en résulte que l'intégrale de volume $\int W'' d\omega$ est réductible à une intégrale de surface.

On a, par exemple,

$$\int_V \begin{vmatrix} U_x & U_y & U_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix} d\omega = \int_S \begin{vmatrix} U_x & U_y & U_z \\ l & m & n \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix} v dS = \int_S \begin{vmatrix} U_x & U_y & U_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ l & m & n \end{vmatrix} dS,$$

et, par conséquent, W'' ne fournit aucun terme dans les équations indéfinies.

Cette forme d'intégrale de surface suggère un artifice destiné à rendre, en apparence, compatible, avec le principe de la continuité des pressions, toute théorie vérifiant la loi de transversalité.

On a

$$\int_V W d\omega = \int_V F(p, q, r) d\omega - \int_V W'' d\omega = \int_V F(p, q, r) d\omega - \int_S \Phi dS.$$

Il suffira donc d'admettre qu'au potentiel $\int W d\omega$ ne correspond pas la totalité du travail des actions internes, mais qu'il faut tenir compte de certaines actions superficielles dont le tra-

vail aurait précisément pour valeur la variation de l'intégrale de surface $\int_s \Phi dS$.

Dans ces conditions, le potentiel total sera

$$\int_v W d\omega + \int_s \Phi dS,$$

et l'on satisfera au principe de continuité des pressions, puisque l'on aura par suite constitué, sous forme détournée, un potentiel gyrostatique $\int_v F(p, q, r) d\omega$.

Cette hypothèse, dont le caractère artificiel est manifeste, a été adaptée par Kirchhoff aux milieux élastiques. Le terme complémentaire de Kirchhoff a donc pour expression

$$\int_s \Phi dS = \int_v W'' d\omega = \int \left(A_1 \frac{d}{da_1} + \dots + B_1 \frac{d}{db_1} + \dots \right) J d\omega.$$

103. *Principe de stabilité.* — Pour la stabilité de l'équilibre, il faut et il suffit, d'après Lagrange, que le potentiel interne W soit un minimum, c'est-à-dire soit une forme définie positive.

Or, toute forme quadratique homogène qui ne renferme pas le carré d'une variable x , doit, pour garder un signe constant, être indépendante de x .

Appliquons ce résultat au potentiel transversal le plus général, dont l'expression est

$$W = W_g - W'' = W_g - \left(A_1 \frac{d}{da_1} + \dots + B_1 \frac{d}{db_1} + \dots + P' \frac{d}{dp'} + \dots \right) J.$$

On a

$$J = \varphi(p', q', r') + \begin{vmatrix} a'_1 & b'_3 & b'_2 \\ b'_1 & a'_2 & b'_1 \\ b'_2 & b'_1 & a'_3 \end{vmatrix},$$

donc W ne renferme pas les carrés de a'_1, a'_2, a'_3 , et, par suite, la condition nécessaire de stabilité est que W soit indépendant de a'_1, a'_2, a'_3 .

Or les produits

$$a'_2 a'_3, \dots, a'_1 b'_1, \dots, a'_1 p', \dots$$

figurent séparément dans

$$A_1 \frac{dJ}{d\alpha'_2}, \dots, B_1 \frac{dJ}{db'_1}, \dots, P' \frac{dJ}{dp'}, \dots,$$

donc, la condition nécessaire de stabilité est que le potentiel additionnel W'' soit identiquement nul.

En résumé, il n'existe qu'un seul potentiel transversal vérifiant la condition de stabilité, c'est le potentiel gyrostatique. Ce potentiel doit être une forme définie positive, autrement dit $F(x, y, z) - 1 = 0$ doit représenter un ellipsoïde réel; c'est l'ellipsoïde optique de Fresnel.

En particulier, la théorie élastique de la lumière est en contradiction avec le principe de stabilité.

CHAPITRE V.

LA NOTION DE SURFACE INVARIANTE DANS LES PHÉNOMÈNES PHYSIQUES.

104. Les équations étudiées dans les Chapitres précédents nous ont offert de nombreux exemples de représentations géométriques des propriétés physiques des cristaux : la double réfraction a été définie par l'ellipsoïde optique de Fresnel, le pouvoir rotatoire par la quadrique de gyration, la dispersion rotatoire d'ordre n par une surface invariante inverse d'ordre $2(n + 1)$, le potentiel élastique par la quartique de Haughton et la quadrique de Rankine, etc.

Il faut voir dans ces résultats l'indication d'une loi qui régit toutes les propriétés de la matière cristallisée, et qu'on peut énoncer ainsi :

Toute propriété physique des cristaux est définie par un ensemble de surfaces invariantes.

C'est ce principe qui paraît avoir guidé Fresnel dans sa découverte des lois de la double réfraction en l'amenant à rechercher une surface invariante capable de définir les lois de la propagation de la lumière dans les cristaux biaxes. A cet effet, substituant à la considération de l'onde entière celle de ses plans tangents, il reconnut que « toutes les propriétés des cristaux à un axe, qu'on a l'habitude d'exprimer par la construction d'Huygens et par les lois de polarisation du rayon ordinaire et du rayon extraordinaire, peuvent se représenter au moyen d'une surface unique, et, comme cette surface est un ellipsoïde de révolution autour d'un axe optique, il est bien naturel de supposer que, en lui substituant un ellipsoïde à trois axes inégaux, on obtiendra la représentation de toutes les propriétés optiques des cristaux à deux axes » (VERDET, Introduction aux *Œuvres d'Augustin Fresnel*).

Le plus souvent la représentation géométrique d'un phénomène ne peut être immédiatement déduite des équations qui le représentent. C'est ainsi que la dispersion normale dans les milieux gyrostatiques est, en dehors de toute hypothèse additionnelle, définie par une forme à deux groupes de variables (p, q, r) et (α, β, γ) homogène et quadratique par rapport au premier groupe, et homogène de degré $2n$ par rapport au second. La même difficulté se présente dans l'interprétation du rayon conjugué qui définit la réflexion et la réfraction cristallines.

D'une manière générale on peut ramener, en première analyse, à l'étude d'une forme ternaire multilinéaire toute propriété des milieux continus, car elle sera définie par les dérivées en $\left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}\right)$ de grandeurs scalaires et vectorielles, réelles ou ombrales (*exemple* : cas des pressions) et l'on sait que les symboles $\left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}\right)$ se transforment à la manière des composantes (x, y, z) d'un vecteur lorsqu'on effectue une substitution orthogonale.

En définitive, la loi formulée plus haut peut se ramener à l'énoncé suivant :

Toute forme multilinéaire est définie par un ensemble de surfaces invariantes.

Dans ce dernier Chapitre nous allons étudier successivement :

- I. La forme $U_1 U^n$;
- II. Ses applications à la théorie cinématique des déformations, au calcul du potentiel interne à 45 coefficients, à la pyroélectricité, piézoélectricité, etc.;
- III. L'identité arithmétique à laquelle se ramène la formule de récurrence des formes multilinéaires;
- IV. La forme $U_1^2 U^n$;
- V. Ses applications à l'étude de la dureté, la dispersion normale, la piézo-optique, le phénomène de Kerr.

et nous multiplierons ces scalaires ombraux en les combinant de telle sorte que leur produit renferme (a_1, b_1, c_1) à la première puissance et (a, b, c) à la puissance n . Nous obtiendrons ainsi une fonction homogène en x, y, z , dont les coefficients seront des fonctions linéaires de ceux de U, U^n et qui représentera une surface invariante.

Nous avons donc une méthode qui permet de construire des surfaces invariantes associées à une forme multilinéaire. En particulier, la forme U, U^n définit les $(n + 1)$ surfaces invariantes

$$J_{n+1} = V_1 V^n, \quad J_n = V_2 V^{n-1}, \quad \dots, \quad J_{n-p+1} = V_{p+1} J^{n-p}, \quad \dots, \quad J_1 = V_{n+1}.$$

106. Réciproquement, je dis que les surfaces J_{n+1}, J_n, \dots, J_1 définissent la forme U, U^n :

Pour le démontrer, faisons usage du mode de décomposition donné par Cauchy dans la théorie des déformations, c'est-à-dire comparons la forme Φ_{n+1} au covariant $\left(x_1 \frac{d}{dx} + y_1 \frac{d}{dy} + z_1 \frac{d}{dz}\right) J_{n+1}$.

Nous avons les égalités

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1} &= (a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1) (ax + by + cz)^n, \\ \left(x_1 \frac{d}{dx} + y_1 \frac{d}{dy} + z_1 \frac{d}{dz}\right) J_{n+1} &= (a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1) (ax + by + cz)^n \\ &\quad + n(ax_1 + by_1 + cz_1) (a_1 x + b_1 y + c_1 z) (ax + by + cz)^{n-1}; \end{aligned}$$

d'où nous déduisons

$$\begin{aligned} (n+1)\Phi_{n+1} &= \left(x_1 \frac{d}{dx} + y_1 \frac{d}{dy} + z_1 \frac{d}{dz}\right) J_{n+1} \\ &\quad + n \begin{vmatrix} ax + by + cz & ax_1 + by_1 + cz_1 \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z & a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 \end{vmatrix} (ax + by + cz)^{n-1}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(n+1)\Phi_{n+1} = \left(x_1 \frac{d}{dx} + y_1 \frac{d}{dy} + z_1 \frac{d}{dz}\right) J_{n+1} + n\Phi_n,$$

en écrivant

$$\Phi_n = (a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 z_2) (ax + by + cz)^{n-1} = U_2 U^{n-1}, \quad x_2 = [x x_1],$$

et, en général,

$$\begin{aligned} \Phi_{n-p+1} &= U_{p+1} U^{n-p}, \quad U_{p+1} = a_{p+1} x_{p+1} + b_{p+1} y_{p+1} + c_{p+1} z_{p+1}, \\ &\quad x_{p+1} = [x^p x_1]. \end{aligned}$$

Par applications répétées de la formule de récurrence, nous obtiendrons l'expression cherchée de $U_1 U^n$ en fonction de covariants des surfaces J_{n+1}, J_n, \dots, J_1 :

$$(2) \quad (n+1)\Phi_{n+1} = \left(x_1 \frac{d}{dx} + y_1 \frac{d}{dy} + z_1 \frac{d}{dz}\right) J_{n+1} \\ + \left(x_2 \frac{d}{dx} + \dots\right) J_n + \dots + \left(x_{n+1} \frac{d}{dx} + \dots\right) J_1.$$

En résumé :

Toute forme $\Phi_{n+1} = U_1 U^n$ est une somme de covariants des surfaces J_{n+1}, J_n, \dots, J_1 ;

Les surfaces $J_{n+1}, J_{n-1}, J_{n-3}, \dots$ sont invariantes directes ;

Les surfaces $J_n, J_{n-2}, J_{n-4}, \dots$ sont invariantes inverses.

107. *Relations d'invariance.* — Les surfaces J_{n+1}, J_n, \dots ont un nombre total de coefficients égal à

$$\sum_0^n C_3^{n+1} = \sum_0^n (C_4^{n+1} - C_4^n) = C_4^{n+1} - 1$$

et dépasse le nombre $3C_3^n$ des coefficients de la forme $U_1 U^n$, dès que n surpasse l'unité. Ces surfaces ne peuvent donc être indépendantes et il existe entre elles des relations qui, étant nécessairement linéaires par rapport aux coefficients, sont, par suite, de la forme

$$\Sigma M(x^2 + y^2 + z^2)^r \Delta^p J_q = 0, \quad \Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}.$$

Calculons

$$\Delta J_{n-p+1} = \Delta V_{p+1} V^{n-p},$$

nous aurons

$$\Delta J_{n-p+1} = 2A_{n-p}^1 (a \cdot a_{p+1} + b \cdot b_{p+1} + c \cdot c_{p+1}) V^{n-p-1} \\ + A_{n-p}^2 (\alpha^2 + b^2 + c^2) V_{p+1} V^{n-p-2},$$

A_m^p désignant le nombre d'arrangements de m lettres p à p .

D'ailleurs, par application de la formule

$$[\alpha^2 \cdot a_{p+1}] = a \Sigma a \cdot a_{p+1} - a_{p+1} \Sigma \alpha^2,$$

J_{n-p-1} a pour valeur

$$J_{n-p-1} = [V^2 V_{p+1}] V^{n-p-2} \\ = (a \cdot a_{p+1} + b \cdot b_{p+1} + c \cdot c_{p+1}) V^{n-p-1} - (\alpha^2 + b^2 + c^2) V_{p+1} V^{n-p-2},$$

d'où l'on déduit la relation générale

$$\Delta J_{n-p+1} + \Lambda_{n-p}^2 J_{n-p-1} = \Lambda_{n-p+1}^2 (\alpha \cdot a_{p+1} + b \cdot b_{p+1} + c \cdot c_{p+1}) V^{n-p-1}.$$

Or, pour toute valeur de $p > 0$, on a

$$\Sigma \alpha \cdot a_{p+1} = \Sigma \alpha [a \alpha_p] = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ \alpha_p & b_p & c_p \end{vmatrix} = 0;$$

par suite, le second membre de la relation est nul pour $p > 0$ et il existe entre les surfaces J_n, J_{n-1}, \dots, J_1 , les $(n-1)$ relations d'invariance

$$(3) \quad \Delta J_{n-p+1} + \Lambda_{n-p}^2 J_{n-p-1} = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, n-1).$$

En résumé :

1° La suite des $(n+1)$ surfaces J_{n+1}, J_n, \dots, J_1 est définie par les trois surfaces J_{n+1}, J_n, J_{n-1} , d'après les formules

$$J_{n-2k} = \frac{(-1)^k}{\Lambda_{n-1}^{2k}} \Delta^k J_n, \quad J_{n-2k-1} = \frac{(-1)^k}{\Lambda_{n-2}^{2k}} \Delta^k J_{n-1} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

2° Si $2n'$ représente celui des deux nombres $n, n-1$, qui est pair, la surface $J_{2n'}$ satisfait à la relation d'invariance

$$\Delta^{n'} J_{2n'} = 0.$$

3° Il n'existe pas, entre les surfaces J_{n+1}, J_n, \dots, J_1 , d'autre relation d'invariance indépendante des précédentes, car le nombre total des coefficients distincts est, en vertu de 1° et 2°, :

$$C_3^{n+1} + C_3^n + C_3^{n-1} - 1 = 3C_3^{n'},$$

et, par conséquent, est égal au nombre des coefficients de U, U^n .

108. Les surfaces J_{n+1}, J_n, \dots, J_1 exprimées sous forme de covariants de Φ_{n+1} . — Soient

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1} &= U_1 U^n, \\ U_1 &= a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1, \\ U &= ax + by + cz; \end{aligned}$$

C.

10

on a

$$\begin{aligned} & \left(x_1 \frac{d}{dx} + y_1 \frac{d}{dy} + z_1 \frac{d}{dz} \right) \Phi_{n+1} \\ & = (a_1 x + b_1 y + c_1 z) (ax + by + cz)^n = V_1 V^n = J_{n+1}, \\ \sum x \left[\frac{d}{dx} \cdot \frac{d}{dx_1} \right] \Phi_{n+1} & = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{dU^n}{dx} & \frac{dU^n}{dy} & \frac{dU^n}{dz} \\ \frac{dU_1}{dx_1} & \frac{dU_1}{dy_1} & \frac{dU_1}{dz_1} \end{vmatrix} \\ & = n \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} U^{n-1} = n [V \cdot V_1] V^{n-1} = n J_n. \end{aligned}$$

En général, représentons pour abrégé par

$$\left[\left(\frac{d}{dx} \right)^p \frac{d}{dx} \right],$$

l'opération

$$\underbrace{\left[\frac{d}{dx} \cdot \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} \cdot \frac{d}{dx_1} \right]}_p,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^p \frac{d}{dx_1} \right] U_1 U^n & = \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^p a_1 \right] U^n = \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^{p-1} \frac{d}{dx} a_1 \right] U^n \\ & = n \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^{p-1} a a_1 \right] U^{n-1} = \dots = \Lambda_n^p [a^p a_1] U^{n-p}, \end{aligned}$$

d'où la formule

$$(5) \quad \sum x \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^p \frac{d}{dx_1} \right] \Phi_{n+1} = \Lambda_n^p J_{n-p+1}.$$

109. La forme Φ_{n+1} exprimée en fonction de covariants de J_{n+1} , J_n , J_{n-1} . — On a la formule de décomposition (2),

$$(n+1) \Phi_{n+1} = \sum [x^p x_1] \frac{d}{dx} J_{n-p+1} \quad (p = 0, 1, 2, \dots, n);$$

de la formule

$$[x_1 \cdot x_2 \cdot x_3] = x_2 \sum x_1 x_3 - x_3 \sum x_1 x_2$$

on déduit

$$\begin{aligned} [x^{2k+1} x_1] & = (-1)^k (x^2 + y^2 + z^2)^k [x x_1], \\ [x^{2k+2} x_1] & = (-1)^k (x^2 + y^2 + z^2)^k [x^2 x_1], \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 (z') \quad (n+1) \Phi_{n+1} &= \left(x_1 \frac{d}{dx} + y_1 \frac{d}{dy} + z_1 \frac{d}{dz} \right) J_{n+1} \\
 &+ \sum \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^k}{A_{n-1}^{2k}} \left\{ [x x_1] \frac{d}{dx} + [y y_1] \frac{d}{dy} + [z z_1] \frac{d}{dz} \right\} J_n \\
 &+ \sum \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^k}{A_{n-2}^{2k}} \left\{ [x^2 x_1] \frac{d}{dx} + [y^2 y_1] \frac{d}{dy} + [z^2 z_1] \frac{d}{dz} \right\} J_{n-1}.
 \end{aligned}$$

110. *La fonction vectorielle homogène.* — Les applications des formules précédentes sont fréquentes en Physique mathématique, car l'étude de la forme U, U^n est identique à celle de la fonction vectorielle homogène de degré n par rapport aux variables x, y, z .

Les composantes de la fonction vectorielle homogène sont, en notation ombrale,

$$\begin{cases}
 X = a_1(ax + by + cz)^n, \\
 Y = b_1(ax + by + cz)^n, \\
 Z = c_1(ax + by + cz)^n.
 \end{cases}$$

On voit que X, Y, Z sont les coefficients de x_1, y_1, z_1 dans la forme U, U^n . Un tel vecteur est, par conséquent, défini par les $(n+1)$ surfaces J_{n+1}, J_n, \dots, J_1 précédemment étudiées, et l'on aura la formule de décomposition

$$(6) \quad (n+1) X = X_{n+1} + X_n + \dots + X_{n-p+1} + \dots + X_1,$$

X_{n-p+1} représentant le coefficient de x_1 dans le covariant

$$\left\{ [x^p x_1] \frac{d}{dx} + [y^p y_1] \frac{d}{dy} + [z^p z_1] \frac{d}{dz} \right\} J_{n-p+1}.$$

On obtiendra le coefficient de x_1 par applications répétées de la formule

$$\Sigma a_1 [a_2 . a_3] = \Sigma [a_1 . a_2] a_3 = - \Sigma [a_2 . a_1] a_3,$$

d'où

$$\begin{aligned}
 \Sigma [x^p x_1] \frac{d}{dx} &= - \Sigma \left[x \frac{d}{dx} \right] [x^{p-1} . x_1] \\
 &= \Sigma \left[x^2 \frac{d}{dx} \right] [x^{p-2} x_1] = \dots = (-1)^p \Sigma \left[x^p \frac{d}{dx} \right] x_1,
 \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(7) \quad X_{n-p+1} = (-1)^p \left[x^p \frac{d}{dx} \right] J_{n-p+1}.$$

111. *Signification géométrique du vecteur* $X_{n-p+1}, Y_{n-p+1}, Z_{n-p+1}$:

1° Pour $p = 0$, on a

$$(7') \quad X_{n+1} = \frac{dJ_{n+1}}{dx};$$

désignons par $M'(x', y', z')$ le point où la droite OM ($M = x, y, z$) rencontre la surface $J_{n+1} = 1$. La formule (7') exprime que le vecteur $(X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1})$ est dirigé suivant la normale en M' à la surface $J_{n+1} - 1 = 0$.

Comparons la longueur R de $(X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1})$ à la distance d de l'origine au plan tangent en x', y', z' .

On a

$$R = \sqrt{\sum \left(\frac{dJ_{n+1}}{dx'} \right)^2} = \delta^n \sqrt{\sum \left(\frac{dJ_{n+1}}{dx'} \right)^2},$$

δ désignant le rapport $\frac{OM}{OM'}$,

$$d = \frac{\sum x' \frac{dJ_{n+1}}{dx'}}{\sqrt{\sum \left(\frac{dJ_{n+1}}{dx'} \right)^2}} = \frac{n+1}{\sqrt{\sum \left(\frac{dJ_{n+1}}{dx'} \right)^2}},$$

d'où

$$R = \frac{(n+1)\delta^n}{d};$$

le vecteur $(X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1})$, ainsi défini, s'appellera l'*axe d'ordre 0* relatif au vecteur x, y, z et à la surface J_{n+1} , ou, plus brièvement, l'*axe d'ordre 0* pour la surface J_{n+1} .

2° Pour $p = 1$, on a

$$(7'') \quad X_n = - \left[x \cdot \frac{d}{dx} \right] J_n = \left[\frac{d}{dx} \cdot x \right] J_n;$$

(X_n, Y_n, Z_n) est donc l'axe de deux vecteurs qui sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{L'axe d'ordre 0 pour la surface } J_n, \\ \text{Le vecteur } x, y, z. \end{array} \right.$$

On l'appellera l'*axe d'ordre 1* pour la surface J_n .

3° D'une manière générale, on appellera *axe d'ordre p* pour

la surface J_{n-p+1} le vecteur

$$X_{n-p+1} = (-1)^p \left[x^p \cdot \frac{d}{dx} \right] J_{n-p+1}.$$

C'est l'axe de deux vecteurs qui sont

- { L'axe d'ordre $p-1$ pour la surface J_{n-p+1} ,
- { Le vecteur x, y, z .

Avec les définitions précédentes, la formule (6) s'énonce comme suit :

Toute fonction vectorielle homogène de degré n est la résultante de $(n+1)$ vecteurs, qui sont :

L'axe d'ordre 0 pour la surface J_{p+1} ,			
»	1	»	J_n ,
.
»	p	»	J_{n-p+1} ,
.,
»	n	»	J_1 .

Les formules

$$\left[x^{2k+1} \frac{d}{dx} \right] = (-1)^k (x^2 + y^2 + z^2)^k \left[x \frac{d}{dx} \right],$$

$$\left[x^{2k+2} \frac{d}{dx} \right] = (-1)^k (x^2 + y^2 + z^2)^k \left[x^2 \frac{d}{dx} \right].$$

montrent que les axes d'ordre > 2 s'expriment en fonction des axes d'ordre 1 ou 2.

II. — Applications de la formule de décomposition de $\Phi_{n+1} = U_1 U^n$.

1° ÉTUDE CINÉMATIQUE DES DÉFORMATIONS.

112. Le vecteur $(\Delta u, \Delta v, \Delta w)$ qui représente l'accroissement géométrique du déplacement (u, v, w) quand on passe du point (x, y, z) au point $(x+h, y+k, z+l)$ est la résultante des vec-

teurs $\Delta_1(u, v, w)$, $\Delta_2(u, v, w)$, ..., $\Delta_n(u, v, w)$ donnés par les formules

$$\Delta_n u = \frac{1}{n!} d^n u = \frac{1}{n!} \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} + l \frac{d}{dz} \right)^{(n)} u.$$

le vecteur $d^n u$, $d^n v$, $d^n w$ représente donc une fonction vectorielle homogène de degré n , en k, k, l , et il sera défini par les surfaces invariantes J_{n+1} , J_n , J_{n-1} , ... associées à la forme U, U^n qui a pour expression

$$U_1 U^n = \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} + l \frac{d}{dz} \right)^{(n)} (h u + k v + l w);$$

on a donc

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} + l \frac{d}{dz} \right)^{(n)} (h u + k v + l w), \\ J_n &= \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} + l \frac{d}{dz} \right)^{(n-1)} (h p + k q + l r), \quad p = \left[\frac{d}{dx} u \right], \\ &\dots\dots\dots, \\ J_{n-s+1} &= \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} + l \frac{d}{dz} \right)^{(n-s)} (h p_{s-1} + k q_{s-1} + l r_{s-1}), \quad p_s = \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^s p \right] \end{aligned}$$

et $\Delta_n u$ est donné par la formule

$$(n+1)! \Delta_n u = (n+1) d^n u = \frac{d}{dh} J_{n+1} - \left[h \frac{d}{dh} \right] J_n + \left[h^2 \frac{d}{dh} \right] J_{n-1} - \dots$$

Dans le cas particulier $n = 1$, ces formules deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} J_2 = \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} + l \frac{d}{dz} \right) (h u + k v + l w), \\ J_1 = h p + k q + l r, \\ 2 \Delta u = 2 du = \frac{dJ_2}{dh} - \left[h \frac{d}{dh} \right] J_1 = \frac{dJ_2}{dh} + [p \cdot h]: \end{array} \right.$$

ce sont les formules données au Chapitre I : J_2 est la quadrique des dilatations, p, q, r représente le vortex:

Dans le cas général, les surfaces indépendantes sont au nombre de trois, J_{n+1} , J_n , J_{n-1} et l'on a

$$\Delta^{n'} J_{2n'} = 0,$$

$2n'$ désignant celui des deux nombres $n, n - 1$ qui est pair.

2° EXPRESSION DU POTENTIEL INTERNE W_2 A 45 COEFFICIENTS.

113. Sous sa forme la plus générale, le potentiel interne W_2 est une fonction homogène du second degré des neuf dérivées premières de u, v, w , par rapport à x, y, z , et contient 45 coefficients. Je dis qu'un tel potentiel est défini par six surfaces invariantes.

Choisissons en effet comme variables les dilatations, glissements et composantes de la rotation, W_2 peut s'écrire

$$W_2 = W_e + W_g + W_{eg},$$

en désignant par :

W_e un potentiel élastique;

W_g un potentiel gyrostatique;

W_{eg} une forme bilinéaire par rapport aux deux groupes (p, q, r) et $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$.

Or la notation ombrale de la quadrique des dilatations

$$1 = a_1 h^2 + a_2 k^2 + a_3 l^2 + b_1 kl + b_2 lh + b_3 hk = (hx + ky + lz)^2$$

apprend que $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ sont définis, en fonction du vecteur ombral x, y, z , par les formules

$$(8) \quad \begin{cases} a_1 = x^2, & a_2 = y^2, & a_3 = z^2, \\ b_1 = 2yz, & b_2 = 2zx, & b_3 = 2xy; \end{cases}$$

on a donc

$$W_{eg} = U_1 U^2,$$

et cette forme est définie par trois surfaces invariantes J_3, J_2, J_1 ($\Delta J_2 = 0$) conformément à la formule

$$3W_{eg} = \left\{ p \frac{d}{dx} + q \frac{d}{dy} + r \frac{d}{dz} \right\} J_3 \\ + \left\{ [xp] \frac{d}{dx} + \dots \right\} J_2 + \left\{ [x^2 p] \frac{d}{dx} + \dots \right\} J_1,$$

dans laquelle on remplacera $x^2, y^2, z^2, 2yz, \dots$ par leurs valeurs données par les formules (8).

Ce résultat, rapproché de celui obtenu au n° 96, conduit à l'énoncé suivant :

Le potentiel W_2 à 45 coefficients est défini par six surfaces

invariantes qui sont

$$\begin{array}{l} \text{H}_4 \text{ quartique de Haughton} \\ \text{R}_2 \text{ quadrique de Rankine} \\ \text{F}(\rho, q, r) \text{ ellipsoïde de Fresnel} \\ \text{J}_3 \\ \text{J}_2 (\Delta \text{J}_2 = 0) \\ \text{J}_1 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{W}_e \\ \\ \text{W}_g \\ \\ \end{array}$$

3° PYROÉLECTRICITÉ ET PIÉZOÉLECTRICITÉ.

114. *Cristaux pyroélectriques. Hypothèse de lord Kelvin.*

— On sait que certains cristaux, tels que la tourmaline, la topaze, la calamine, etc., possèdent la propriété de développer des charges électriques quand on fait varier leur température. Ce phénomène, soigneusement observé par Canton en 1759, a été expliqué en 1878 par lord Kelvin : un cristal homogène présente, dans toute son étendue, une polarisation diélectrique uniforme qui dépend en particulier de la température. Lorsque le cristal a été maintenu longtemps à une température fixe, la conductibilité plus ou moins parfaite de la substance a pour effet de masquer la polarisation, mais cette dernière réapparaît dès qu'une variation de température se produit et entraîne, par suite, une variation dans la polarisation diélectrique. Les théories classiques de l'électricité apprennent que la variation de densité électrique superficielle observée est proportionnelle à l'épaisseur d'une couche obtenue en donnant au cristal une translation infiniment petite suivant la direction du vecteur (A, B, C) qui représente l'accroissement géométrique de la polarisation.

La pyroélectricité est, comme on le voit, le plus simple de tous les phénomènes physiques qui se présentent dans l'étude des cristaux ; car les propriétés pyroélectriques sont définies par un vecteur direct (A, B, C) qui participe de la symétrie du cristal. D'où les lois de la pyroélectricité :

1° Le vecteur (A, B, C) doit coïncider avec son symétrique par rapport à un centre ; ce qui nécessite $A = B = C = 0$. Donc les cristaux à centre ne sont pas pyroélectriques.

2° Le vecteur (A, B, C) doit coïncider avec son symétrique par

rapport à tout axe de symétrie et, par suite, doit coïncider avec tout axe de symétrie.

Donc, les cristaux possédant plus d'un axe de symétrie ne sont pas pyroélectriques.

3° Le vecteur (A, B, C) doit coïncider avec son symétrique par rapport à tout plan de symétrie, c'est-à-dire doit être contenu dans tout plan de symétrie. Donc les cristaux possédant un axe en dehors d'un plan de symétrie ne sont pas pyroélectriques.

4° L'axe quaternaire inverse $\begin{pmatrix} x & y & z \\ -y & x & -z \end{pmatrix}$ est incompatible avec la pyroélectricité.

On déduit immédiatement de ce qui précède que 10 des 32 types de symétrie possèdent la pyroélectricité, savoir :

2 pour chacun des systèmes clinorhombique, quadratique, rhomboédrique, hexagonal;

1 pour chacun des systèmes triclinique, orthorhombique;

0 pour le système cubique.

115. La pyroélectricité fournit des indications précieuses sur la nature de la symétrie cristalline. C'est ainsi que la boracite, dont la forme cristalline indique le système cubique, est, aux températures ordinaires, pyroélectrique. On doit en conclure que la symétrie cubique n'est qu'apparente et que la boracite se compose en réalité d'un assemblage de cristaux à symétrie moins élevée et correspondant à chacun des pôles pyroélectriques. Et, en effet, l'étude optique faite par Mallard a montré que la boracite est, aux températures ordinaires, un assemblage de cristaux biaxes du système orthorhombique.

La pyroélectricité permet de préciser cette première donnée, car un seul des trois types de symétrie appartenant au système orthorhombique est pyroélectrique; et, par suite, la boracite est un assemblage de cristaux du type L^2 , P' , P'' , c'est-à-dire analogues à la calamine et à la topaze. La démonstration du même résultat par les méthodes optiques nécessiterait une étude très délicate des phénomènes de polarisation rotatoire.

116. *Piézoélectricité. Généralisation de l'hypothèse de lord Kelvin.* — Le dégagement de l'électricité sous l'influence des

variations de pression, autrement dit la *piézoélectricité* découverte en 1880 par M. M. Curie, a trouvé une explication toute naturelle dans l'extension de l'hypothèse de lord Kelvin. Il a suffi de supposer, avec Voigt, que la polarisation diélectrique était, d'une manière générale, fonction de toutes les variables qui définissent l'état du cristal et, en particulier, des tensions $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$.

117. THÉORÈME. — *En première approximation, la piézoélectricité se résume dans l'étude de la forme U, U^2 .*

En effet, d'après l'hypothèse précédente, la polarisation est, en première approximation, une fonction vectorielle linéaire des six tensions $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$. Or ces quantités sont les coefficients de la quadrique des tensions

$$N_1 x^2 + N_2 y^2 + N_3 z^2 + 2T_1 yz + 2T_2 zx + 2T_3 xy = 1,$$

dont la notation ombrale est

$$(ax + by + cz)^2 = 1.$$

Ceci nous apprend que les N_1, \dots, T_1, \dots se comportent, dans une substitution orthogonale, comme les carrés et les doubles produits d'un vecteur ombral a, b, c , conformément aux formules

$$N_1 = a^2, \quad \dots, \quad T_1 = bc, \quad \dots$$

Donc, en notation ombrale, la polarisation est une fonction vectorielle homogène du second degré d'un vecteur ombral (a, b, c) , autrement dit la piézoélectricité se résume dans l'étude de la forme $\Phi_3 = U, U^2$ et l'on a ce premier énoncé :

Les propriétés piézoélectriques sont définies par trois surfaces invariantes J_3, J_2, J_1 .

J_3 et J_1 sont des surfaces directes.

J_2 est une surface inverse et son invariant ΔJ_2 est nul.

118. CONDITIONS EXPÉRIMENTALES. — *On découpe dans le cristal un cylindre terminé par deux sections droites et on le soumet à une tension ou à une compression parallèle à son axe.*

Pour calculer la polarisation produite, rapportons provisoire-

ment le cristal à trois axes Ox' , Oy' , Oz' ; Oz' étant dirigé suivant l'axe du cylindre.

Les équations aux limites

$$\begin{cases} p'_{x'} = 0, & p'_{y'} = 0, & p'_{z'} = 0 & \text{sur les sections droites,} \\ p'_{x'} = 0, & p'_{y'} = 0, & p'_{z'} = 0 & \text{sur la surface latérale} \end{cases}$$

sont vérifiées par les valeurs

$$\begin{cases} N'_1 = 0, & N'_2 = 0, & N'_3 = p, \\ T'_1 = 0, & T'_2 = 0, & T'_3 = 0, \end{cases}$$

et ces valeurs, étant constantes, vérifient les équations indéfinies.

Revenons au système d'axes primitifs, et soient α , β , γ les cosinus directeurs de Oz' . Le vecteur ombral (a', b', c') qui définit les N'_1, N'_2, N'_3, \dots vérifie les relations

$$\begin{aligned} a'^2 = b'^2 = 0, & \quad c'^2 = p, \\ b'c' = c'a' = a'b' = 0, \end{aligned}$$

et, dans ce cas particulier, tout se passe comme si l'on avait affaire au vecteur concret

$$a' = 0, \quad b' = 0, \quad c' = \sqrt{p},$$

dirigé suivant Oz' .

Donc les composantes (a, b, c) par rapport aux axes primitifs sont

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma} = \sqrt{p},$$

et, par conséquent, dans les conditions expérimentales admises, on obtient le vecteur (A, B, C) en remplaçant, dans les trois formes quadratiques en a, b, c , qui sont les notations ombrales de A, B, C , le vecteur ombral a, b, c par le vecteur concret $\alpha\sqrt{p}, \beta\sqrt{p}, \gamma\sqrt{p}$.

En résumé, on a ce théorème :

119. THÉORÈME. — *Quand un cylindre d'axe α, β, γ est découpé dans un cristal et soumis à une pression p par unité de surface, la polarisation diélectrique développée est, au fac-*

teur près p , la résultante de trois vecteurs qui sont :

- 1° L'axe d'ordre 0 pour la surface $J_3 - 1 = 0$ et le vecteur α, β, γ ;
 2° » 1 » $J_2 - 1 = 0$ »
 3° » 2 » $J_1 - 1 = 0$ »

Ce théorème fournit une construction géométrique de la polarisation et ramène l'étude de l'influence de la symétrie sur les propriétés piézoélectriques à la recherche des réductions imposées par la symétrie aux surfaces invariantes J_3, J_2, J_1 .

Il est aisé d'obtenir, dans le cas général, l'expression analytique de la surface J_n , directe ou inverse, correspondant à chacun des 32 types de symétrie cristalline; mais pour l'étude des cas que nous allons considérer il suffira de faire usage du lemme suivant :

Toute fonction uniforme des variables x, y, z qui admet Oz comme axe de symétrie directe d'ordre p est une fonction uniforme des quantités

$$z, \rho^2, \rho^p \cos p\omega, \rho^p \sin p\omega,$$

ρ, ω, z désignant les coordonnées semi-polaires du point x, y, z .

120. APPLICATIONS. — Quartz, sel de Seignette, chlorate de soude, calamine, topaze, tourmaline.

Piézoélectricité du quartz. — Le type de symétrie est $\Lambda^3, 3L^2$. Dirigeons Oz suivant l'axe ternaire Λ^3 et Ox suivant l'un des axes binaires. Nous obtenons les réductions suivantes :

1° *Surface J_1 .* — La normale au plan $J_1 - 1 = 0$ doit être orientée suivant l'un quelconque des 4 axes $\Lambda^3, 3L^2$, donc elle est identiquement nulle. $J_1 \equiv 0$.

2° *Surface J_2 .* — En vertu de la symétrie Λ^3 , la quadric J_2 est de révolution autour de Oz . De plus, on a

$$\Delta J_2 = 0,$$

donc

$$J_2 = \Lambda(x^2 + y^2 - 2z^2).$$

3° *Surface J_3 .* — Oz est axe ternaire; donc, en coordonnées semi-polaires, J_3 est une fonction de

$$z, \rho^2, \rho^3 \cos 3\omega, \rho^3 \sin 3\omega,$$

En outre, Ox est axe binaire, donc

$$J_3(z, \rho, \omega) \equiv J_3(-z, \rho, -\omega).$$

On en conclut

$$J_3 = B\rho^3 \cos 3\omega.$$

En définitive, les 18 constantes piézoélectriques se réduisent à deux dans le cas du quartz, et l'on a

$$\begin{cases} J_1 = 0, \\ J_2 = A(x^2 + y^2 - 2z^2), \\ J_3 = B\rho^3 \cos 3\omega. \end{cases}$$

L'interprétation géométrique de ce résultat est remarquable :
La normale à la courbe

$$B\rho^n \cos n\omega = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{d\rho}{\rho} - \operatorname{tang} n\omega \, d\omega = 0,$$

fait avec l'axe des x ($\omega = 0$) un angle $-(n-1)\omega$.

Soient r, ω, θ les coordonnées sphériques du point de rencontre de la pression avec le cylindre $B\rho^n \cos n\omega = 1$.

D'après la formule (8) (n° 111) l'axe d'ordre 0 a pour longueur

$$\frac{n}{r^{n-1}d} = \frac{n}{r^{n-1}\rho \cos n\omega} = \frac{n \cos^{n-1}\theta}{\rho^n \cos n\omega} = nB \cos^{n-1}\theta.$$

Appliquons ce résultat aux pressions situées dans le plan $z = 0$.

On a $\theta = 0$, et, de plus, J_2 étant de révolution autour de Oz , son axe d'ordre 1 est nul pour tout point du plan $z = 0$; d'où cet énoncé :

Lorsque la pression est normale à l'axe ternaire du quartz, il en est de même de la polarisation diélectrique. Cette polarisation garde une grandeur constante, tourne en sens inverse de la pression avec une vitesse double, et vient coïncider avec elle sur chaque axe binaire.

C'est le résultat que faisaient prévoir les recherches expérimentales de Curie et Röntgen et que Voigt a le premier démontré.

Dans le cas général où θ est différent de 0, J_2 fournit une composante perpendiculaire au plan de la pression et qui a pour valeur $\frac{3}{2}A \sin 2\theta$.

121. *Sel de Seignette, chlorate de soude, etc.* — Pour ces cristaux, les équations des surfaces J_1, J_2, J_3 sont les suivantes :

1° *Sel de Seignette.* — Orthorhombique. Type de symétrie : $L^2(Ox), L'^2(Oy), L''^2(Oz)$.

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1 = 0, \\ J_2 = ax^2 + by^2 + cz^2 \quad (a + b + c = 0), \\ J_3 = \Lambda xyz, \end{array} \right\} 3 \text{ coefficients.}$$

2° *Chlorate de soude.* — Cubique. Type de symétrie : $3\Lambda^2(Ox, Oy, Oz), 4L^3$,

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1 = 0, \\ J_2 = 0, \\ J_3 = \Lambda xyz, \end{array} \right\} 1 \text{ coefficient.}$$

3° *Calamine, topaze.* — Orthorhombique. Type de symétrie : $L^2(Oz), 2P'(x = 0, y = 0)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1 = \Lambda z, \\ J_2 = Bxy, \\ J_3 = z(ax^2 - by^2 + cz^2), \end{array} \right\} 5 \text{ coefficients.}$$

Une compression dirigée suivant Oz produit une polarisation dirigée suivant Oz . Il en est de même quand la compression est normale à Oz , et, dans ce cas, la grandeur de la polarisation varie comme l'inverse du carré du rayon vecteur d'une conique.

4° *Tourmaline.* — Rhomboédrique. Type de symétrie : $\Lambda^3(Oz), 3P(x = 0, \dots)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1 = \Lambda z, \\ J_2 = 0, \\ J_3 = az^3 + bz\rho^2 + B\rho^3 \cos 3\omega, \end{array} \right\} 4 \text{ coefficients.}$$

Une compression suivant l'axe ternaire produit une polarisation suivant la même direction. Dans les mêmes conditions, le quartz ne donne lieu à aucun dégagement d'électricité.

4° POLARISATION ROTATOIRE MAGNÉTIQUE.

122. *Découverte de Faraday. — Hypothèse de Maxwell.* — Faraday a découvert en 1849 qu'un milieu holoèdre acquiert le pouvoir rotatoire quand on le place dans un champ magnétique.

Maxwell a eu l'idée de rechercher l'explication de ce phénomène dans une modification de la force vive du milieu, et a montré qu'on pouvait expliquer les faits observés en ajoutant à la force vive par unité de volume

$$\frac{1}{2} \rho \left\{ \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \right\}$$

le terme complémentaire

$$(9) \quad G \left\{ L_1 \frac{dp}{dt} + M_1 \frac{dq}{dt} + N_1 \frac{dr}{dt} \right\},$$

p, q, r désignant les composantes du vortex, et L_1, M_1, N_1 le vecteur .

$$(9') \quad \begin{cases} L_1 = L + L' = L + \left(L \frac{du}{dx} + M \frac{du}{dy} + N \frac{du}{dz} \right), \\ M_1 = M + M' = M + \left(L \frac{dv}{dx} + M \frac{dv}{dy} + N \frac{dv}{dz} \right), \\ N_1 = N + N' = N + \left(L \frac{dw}{dx} + M \frac{dw}{dy} + N \frac{dw}{dz} \right); \end{cases}$$

dans le cas des milieux isotropes, (L, M, N) représente, d'après Maxwell, le champ magnétique.

123. *Équations indéfinies.* — On obtiendra les équations indéfinies en appliquant le principe d'Hamilton.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - W) d\omega dt = 0,$$

pour toute variation virtuelle des trajectoires, $(\delta u, \delta v, \delta w)$ s'annulant aux instants t_0 et t_1 .

Le calcul de la variation de cette intégrale est identique à celui qui a servi à résoudre l'équation des travaux virtuels (nos 12 et 13). L'intégrale triple de cette équation est remplacée par une intégrale

quadruple, mais, comme les δu , δv , δw sont assujettis à s'annuler aux limites t_0 , t_1 et que l'ordre de dérivation par rapport à t ne dépasse pas l'unité, l'intégration par parties pourra s'effectuer de la même manière et conduira au même résultat

$$\int A D^n B d\omega dt = (-1)^n \int B D^n A d\omega dt,$$

D^n désignant une dérivée d'ordre n en x, y, z, t .

Si donc T est de la forme

$$T = \Phi(D^n u, D^n v, D^n w, D^n p_1, \dots, D^n a_1, \dots, D^n b_1, \dots),$$

on aura, par application des équations de Lagrange (Chapitre I, équations 18, 19, 20),

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt d\omega = \int_{t_0}^{t_1} (U \delta u + V \delta v + W \delta w) dt d\omega,$$

avec

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} U = \Sigma (-1)^n D^n \frac{d\Phi}{d.D^n u} + \left[\frac{d}{dx} \cdot \mathcal{P} \right] - \left(\frac{d\mathcal{U}_1}{dx} + \frac{d\mathcal{C}_3}{dy} + \frac{d\mathcal{C}_2}{dz} \right), \\ \mathcal{P} = \Sigma (-1)^n D^n \frac{d\Phi}{d.D^n p}, \\ \mathcal{U}_1 = \Sigma (-1)^n D^n \frac{d\Phi}{d.D^n a_1}, \\ \mathcal{C}_1 = \Sigma (-1)^n D^n \frac{d\Phi}{d.D^n b_1}. \end{array} \right.$$

Appliquons ces formules à la force vive T sous la forme donnée par Maxwell

$$T = \frac{1}{2} \rho \left\{ \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \right\} + C \left\{ L_1 \frac{dp}{dt} + M_1 \frac{dq}{dt} + N_1 \frac{dr}{dt} \right\},$$

nous obtenons

$$(10') \left\{ \begin{array}{l} \Sigma (-1)^n D^n \frac{dT}{d.D^n u} = -\rho \frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dx} (CLp) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{d}{dy} (CMp) + \frac{d}{dz} (CNp) \right), \\ \mathcal{P} = \Sigma (-1)^n D^n \frac{dT}{d.D^n p} = -C \frac{dL_1}{dt} = -C \frac{d}{dt} \left(L \frac{d}{dx} + M \frac{d}{dy} + N \frac{d}{dz} \right) u, \\ \mathcal{U}_1 = \mathcal{C}_1 = 0, \end{array} \right.$$

les équations indéfinies, dans les milieux homogènes, sont donc

$$(11) \quad \rho \frac{d^2 u}{dt^2} - 2 \left[\frac{d}{dx} \cdot \mathcal{P} \right] = - \left[\frac{d}{dx} \cdot P \right],$$

elles montrent que la loi de transversalité subsiste dans les milieux gyrostatiques quand on admet l'hypothèse de Maxwell.

124. *Propagation d'une onde plane. — Généralisation de la loi de Verdet.*

1° *Méthode analytique.* — La substitution des solutions exponentielles (n° 16) dans les équations (10') et (11) donne

$$\left[\frac{d}{dx} \cdot \mathcal{P} \right] = i\mu [\alpha \cdot \mathcal{P}],$$

$$\mathcal{P} = \mu^2 CV(L\alpha + M\beta + N\gamma)u,$$

donc

$$\left[\frac{d}{dx} \cdot \mathcal{P} \right] = i\mu^3 CV(L\alpha + M\beta + N\gamma) [\alpha \cdot u],$$

et aux équations (6) du Chapitre II il suffit de substituer les équations

$$V^2 u = \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{du} + i\mu(k + k') [\alpha \cdot u],$$

avec

$$k' = -2 CV(L\alpha + M\beta + N\gamma).$$

On retrouve les équations des milieux gyrostatiques doués de pouvoir rotatoire, et, par conséquent, le milieu propage deux vibrations elliptiques semblables, décrites en sens inverse, et dont les grands axes sont perpendiculaires. Il faut remarquer que k' est, à une constante près, la projection du vecteur (L, M, N) sur la normale à l'onde (*loi de Verdet*) et change par suite de signe quand on change le sens de la propagation, contrairement à ce qui se passe dans le phénomène de la polarisation rotatoire cristalline.

2° *Méthode géométrique.* — On a

$$\begin{aligned} T_m = & \frac{1}{2} \rho \mu^2 V^2 (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + u_2^2 + v_2^2 + w_2^2) \\ & + 2\mu^3 CV(L\alpha + M\beta + N\gamma) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

on retrouve la forme d'équation étudiée au n° 28, équation (12).

Vérifications expérimentales. — Le pouvoir rotatoire magnétique a été constaté dans les milieux isotropes, ainsi que dans le quartz, l'émeraude, la tourmaline.

D'anciennes expériences de Wertheim avaient cru établir que cet effet est nul dans le spath d'Islande. Si l'on se reporte à la solution géométrique du n° 37, on voit que, par suite de la biréfringence, les rotations des points figuratifs, qui représentent l'effet de la traversée de la lame, s'effectuent sur des cercles dont le rayon décroît très rapidement dès que la direction de propagation s'écarte sensiblement de la direction de l'axe optique. C'est le résultat qui a été d'ailleurs établi par les expériences de Chauvin sur le spath d'Islande (1890) et qui explique l'insuccès des observations antérieures.

Quand le milieu est isotrope le vecteur L, M, N est égal au champ magnétique. Il est difficile de décider expérimentalement s'il en est de même pour les milieux anisotropes ou s'il convient de substituer à l'induction magnétique une autre fonction vectorielle du champ, car l'effet de la biréfringence ne permet pas d'étudier avec précision la propagation suivant des directions s'écartant notablement de l'axe optique.

5° AUTRES PHÉNOMÈNES DONT L'ÉTUDE SE RATTACHE A CELLE DE LA FORME U, U^2 .

123. *Aimantation. — Polarisation diélectrique. — Conductibilité.* — On sait depuis longtemps que l'aimantation, la polarisation diélectrique et la conductibilité se ramènent à l'étude de fonctions vectorielles, et qu'une généralisation hâtive de ces résultats avait conduit certains auteurs à ramener tous les phénomènes physiques à la loi de l'ellipsoïde.

Lord Kelvin a d'ailleurs démontré que les composantes de l'aimantation sont les dérivées d'une fonction du champ, et Maxwell a étendu ce résultat à la polarisation diélectrique. L'étude de ces deux phénomènes est donc ramenée à celle d'une surface unique, à symétrie directe, et n'a pas à utiliser les résultats démontrés plus haut.

126. *Modification des propriétés optiques produites par un champ électrique.* — Dans la théorie gyrostatique que nous développons ici, on est conduit à admettre qu'à l'opposé de ce qu'on vient de voir pour le champ magnétique (théorie de Maxwell), le champ électrique est sans influence sur la force vive du milieu et modifie au contraire son potentiel gyrostatique. Dans ces conditions, le potentiel gyrostatique des cristaux soumis à un champ électrique aura pour valeur, en première approximation,

$$W = F(p, q, r) + \Phi(p, q, r, P', Q', R'),$$

Φ désignant une forme quadratique en p, q, r et linéaire en P', Q', R' (composantes du champ électrique).

On est donc ramené à l'étude de la forme $U_1 U^2$, c'est-à-dire à l'étude de la piézoélectricité. Donc, en première approximation, le champ électrique n'a d'influence que sur les cristaux piézoélectriques et son étude conduit aux mêmes formules.

La deuxième approximation donne l'explication du phénomène de Kerr et sera étudiée au n° 130.

127. *Déformations produites par un champ électrique. (Première approximation.)* — Un corps placé dans un champ électrique subit une déformation qu'on étudiera en première approximation en regardant les $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ comme des fonctions linéaires des composantes du champ électrique (P', Q', R').

Portons ces valeurs dans l'équation de la quadrique des dilatactions

$$\varphi(x, y, z) = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + b_1 yz + b_2 zx + b_3 xy = 1,$$

on obtiendra une forme quadratique en x, y, z et linéaire en P', Q', R' , et l'on est ramené à l'étude de la forme $U_1 U^2$. Donc, en première approximation, un champ électrique ne produit de déformations que dans les cristaux piézoélectriques.

On peut se proposer de rechercher une fonction vectorielle u, v, w de P', Q', R' , qui définit les $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ par des formules (12) analogues à celles de la théorie des déformations

$$(12) \quad \begin{cases} a_1 = \frac{du}{dP'}, & a_2 = \frac{dv}{dQ'}, & a_3 = \frac{dw}{dR'}, \\ b_1 = \left(\frac{dv}{dR'} + \frac{dw}{dQ'} \right), & \dots \end{cases}$$

Ce problème est un cas particulier du suivant :

Étant données C_3^n grandeurs indépendantes X^n, X^{n-1}, Y, \dots qui se transforment comme les coefficients d'une surface d'ordre n , et qui sont des fonctions linéaires et homogènes des variables x, y, z , rechercher un vecteur u, v, w , dont on déduira les valeurs des C_3^n grandeurs X^n, X^{n-1}, Y, \dots au moyen des opérations de dérivation définies par l'identité (13) en λ, μ, ν :

$$(13) \quad (\lambda X + \mu Y + \nu Z)^n \equiv \left(\lambda \frac{d}{dx} + \mu \frac{d}{dy} + \nu \frac{d}{dz} \right)^{(n-1)} (\lambda u + \mu v + \nu w).$$

On obtient la solution de ce problème en appliquant les méthodes développées au commencement de ce Chapitre et qui donnent cet énoncé :

Soit

$$UU_1^n = \frac{1}{n!} (x_1 X + y_1 Y + z_1 Z)^n$$

une forme linéaire en x, y, z et homogène de degré n en x_1, y_1, z_1 , et soient $J_{n+1}, J_n, J_{n-1}, \dots$ les surfaces associées à la forme UU_1^n .

Le vecteur cherché u, v, w est une fonction vectorielle de degré n en x, y, z , dont les surfaces invariantes $K_{n+1}, K_n, K_{n-1}, \dots$ sont données par les formules

$$K_{n+1} = J_{n+1}, \\ \frac{K_n}{J_n} = \frac{K_{n-1}}{J_{n-1}} = \dots = \frac{K_{n-p}}{J_{n-p}} = \dots = -n.$$

III. — La formule de récurrence des fonctions multilinéaires ramenée à une identité arithmétique.

128. Revenons à la formule de décomposition utilisée par Cauchy dans la théorie des déformations

$$\left(x_1 \frac{d}{dx} + y_1 \frac{d}{dy} + z_1 \frac{d}{dz} \right) J_2 = 2 \Phi_2 - \Phi_1.$$

Cette formule est la conséquence de l'identité

$$\left\| \begin{array}{cc} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{array} \right\| = 2 u_{11} u_{22} - \left| \begin{array}{cc} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{array} \right|,$$

dans laquelle le premier membre désigne la somme

$$(u_{11}u_{22} + u_{21}u_{12})$$

de tous les termes du déterminant correspondant affectés du signe +. C'est ce qu'on appelle le *déterminant positif*.

La somme précédente est donc définie quand on connaît le déterminant et les éléments situés sur sa diagonale principale.

En général, le déterminant positif

$$\left\| \begin{matrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{matrix} \right\| = \Sigma u_{1\beta_1} u_{2\beta_2} \dots u_{n\beta_n}$$

sera défini quand on connaîtra tous les déterminants obtenus par suppression de p lignes et de p colonnes ($p = 0, 1, 2, \dots, n-1$) se croisant sur la diagonale principale du déterminant correspondant.

C'est ainsi qu'on a les identités

$$\left\| \begin{matrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{matrix} \right\| = 3! u_{11}u_{22}u_{33} - 2!(u_{11}U_{11} + u_{22}U_{22} + u_{33}U_{33}) + \left| \begin{matrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{matrix} \right|,$$

U_{11}, U_{22}, U_{33} désignant les mineurs relatifs à u_{11}, u_{22}, u_{33} , et $p!$ la factorielle $1 \cdot 2 \dots p$.

$$\left\| \begin{matrix} u_{11} & \dots & u_{14} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{41} & \dots & u_{44} \end{matrix} \right\| = 4! u_{11}u_{22}u_{33}u_{44} - 3! \Sigma u_{ii}u_{jj} \left| \begin{matrix} u_{mm} & u_{mn} \\ u_{nm} & u_{nn} \end{matrix} \right| + 2! \Sigma u_{11}U_{11} \\ + 2! \Sigma \left| \begin{matrix} u_{ii} & u_{ij} \\ u_{ji} & u_{jj} \end{matrix} \right| \times \left| \begin{matrix} u_{mm} & u_{mn} \\ u_{nm} & u_{nn} \end{matrix} \right| - \left| \begin{matrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{41} & \dots & \dots & u_{44} \end{matrix} \right|.$$

Pour exprimer l'énoncé général, désignons par la notation

$$1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}$$

le produit de

- α_1 déterminants diagonaux à 1 ligne et à 1 colonne,
-
- α_p déterminants diagonaux à p lignes et à p colonnes,
-

Par définition, le déterminant diagonal à p lignes et à p colonnes est obtenu en supprimant, dans le déterminant primitif, $(n - p)$ lignes et colonnes se croisant sur la diagonale principale. De plus, le produit $1^{\alpha_1} \cdot 2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot n^{\alpha_n}$ utilise une seule fois chacune des lignes du déterminant et, par conséquent,

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n.$$

Désignons enfin par la notation

$$[1^{\alpha_1} \cdot 2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot n^{\alpha_n}]$$

la somme de tous les produits correspondant aux mêmes valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$,

Les résultats précédents conduisent à écrire l'identité

$$(14) \quad \left\| \begin{array}{ccc} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{array} \right\| = \Sigma |1^{\alpha_1} \cdot 2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot n^{\alpha_n}| [1^{\alpha_1} \cdot 2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot n^{\alpha_n}],$$

dans laquelle $|1^{\alpha_1} \cdot 2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot n^{\alpha_n}|$ désigne un coefficient numérique, fonction des $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; la sommation Σ s'étendant à toutes les valeurs entières, positives ou nulles, de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ vérifiant l'égalité

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n.$$

En appliquant l'identité (14), on obtiendra, par la méthode des grandeurs ombrales, l'expression d'une forme multilinéaire quelconque Φ_n en fonction d'un covariant de surface d'ordre n , et de formes multilinéaires d'ordre inférieur à n . Cette formule de récurrence permettra donc d'exprimer la forme Φ_n en fonction de covariants de surfaces d'ordre $n, n - 1, \dots, 1$ et démontrera, par suite, la proposition énoncée au début de ce Chapitre.

129. Nous nous proposons de montrer que l'identification admise par la formule (14) est toujours possible et ne comporte qu'un seul système de solutions données par la formule

$$|1^{\alpha_1} \cdot 2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot n^{\alpha_n}| = (-1)^{n+p} p!$$

p désignant la somme

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = p.$$

A cet effet reportons-nous au développement du déterminant positif : nous désignerons par la notation

$$\{n^1\}$$

un quelconque des termes formés par un cycle de n chiffres, c'est-à-dire un terme

$$u_{\beta_1\beta_2} \cdot u_{\beta_2\beta_3} \cdot u_{\beta_3\beta_4} \dots u_{\beta_n\beta_1},$$

par la notation $\{1^1(n-1)^1\}$ un terme formé par un cycle de 1 chiffre et un cycle de $(n-1)$ chiffres, c'est-à-dire

$$u_{\beta_1\beta_1} \cdot u_{\beta_2\beta_3} \cdot u_{\beta_3\beta_4} \dots u_{\beta_n\beta_2},$$

et, en général, par la notation

$$\{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}\},$$

un terme formé par

- α_1 cycles de 1 chiffre,
- α_2 cycles de 2 chiffres,
-
- α_n cycles de n chiffres,

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ satisfaisant d'ailleurs à la condition

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n.$$

Nous classerons les termes en espèces et les espèces en genres :

On appellera *termes de même espèce* les termes différents mais représentés par les mêmes valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, c'est-à-dire par la même notation $\{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}\}$.

On appellera *termes de genre p* les termes d'espèce différente, mais pour lesquels la somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ aura la même valeur p .

Les mêmes définitions s'appliqueront aux sommes partielles qui figurent dans l'identité (14), c'est-à-dire aux sommes $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}]$.

130. On déduit immédiatement des équations précédentes les résultats suivants :

1° Dans chaque somme partielle $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}]$, les termes de même espèce $\{1^{\beta_1} \beta_2 \dots n^{\beta_n}\}$ ont même coefficient (conséquence du mode symétrique de formation des sommes partielles);

2° Le coefficient d'un terme de genre p est nul dans toute somme partielle de genre $q > p$;

3° Le coefficient d'un terme de genre p et d'espèce $\{1^{\beta_1}, 2^{\beta_2}, \dots, n^{\beta_n}\}$ est nul dans toute somme partielle de genre p et d'espèce $[1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \dots, n^{\alpha_n}]$, sauf le cas particulier où $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$; c'est-à-dire sauf quand le terme et la somme partielle sont de même espèce. Dans ce cas particulier, le terme de genre p a pour coefficient, dans la somme de genre p , la quantité $(-1)^{n+p}$.

De ces trois premiers énoncés il résulte que l'identification (14) est possible et ne comporte qu'une solution :

En effet, en vertu de 1°, il suffit de faire porter l'identification sur un terme de chaque espèce; et, comme la notation de ces termes est identique à celle des coefficients numériques, le nombre des équations d'identification est égal au nombre des inconnues.

D'autre part, en vertu de 2° et de 3°, ces équations sont de la forme

$$(-1)^{n+p} |1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \dots, n^{\alpha_n}| + \dots = 1;$$

les termes représentés par des points étant de genre inférieur à celui du terme $|1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \dots, n^{\alpha_n}|$. Ces équations déterminent séparément chaque coefficient de genre p en fonction linéaire, à coefficients entiers, de coefficients de genre inférieur à p . Donc elles n'admettent qu'un système unique de solutions, et ces solutions sont entières.

131. Je dis de plus que tous les coefficients de même genre sont égaux :

Pour le démontrer, précisons la notation d'un terme

$$\{1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \dots, n^{\alpha_n}\}.$$

Représentons par la notation

$$v^r$$

un cycle à r chiffres

$$u_{\beta_1, \beta_2}, u_{\beta_2, \beta_3}, \dots, u_{\beta_r, \beta_1},$$

et désignons par les notations

$$v_1^r, v_2^r, \dots, v_{\alpha_r}^r$$

les α_r cycles différents.

Un terme quelconque $\{1^{\alpha_1} . 2^{\alpha_2} . . . n^{\alpha_n}\}$ aura pour notation

$$\{1^{\alpha_1} . 2^{\alpha_2} . . . n^{\alpha_n}\} = \{v_1^1 . v_2^1 . . . v_{\alpha_1}^1 . . . v_1^r . v_2^r . . . v_{\alpha_r}^r . . .\} = \{\Pi . v\};$$

représentons de même par ω^r le déterminant

$$\begin{vmatrix} u_{\beta_1 \beta_1} & \dots & u_{\beta_1 \beta_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{\beta_r \beta_1} & \dots & u_{\beta_r \beta_r} \end{vmatrix}$$

qui contient le cycle v^r .

Dans la somme partielle $[1^{\alpha_1} . 2^{\alpha_2} . . . n^{\alpha_n}]$ se trouve un produit de déterminants qui contient le terme $\{1^{\alpha_1} . 2^{\alpha_2} . . . n^{\alpha_n}\}$, c'est le produit

$$\omega_1^1 . \omega_2^1 . . . \omega_{\alpha_1}^1 . . . \omega_1^r . \omega_2^r . . . \omega_{\alpha_r}^r . . . = \Pi \omega.$$

Désignons enfin par

$$\omega^{i+j},$$

le déterminant diagonal à $i+j$ lignes et $i+j$ colonnes qui contient les déterminants diagonaux $\omega^i, \omega^j, \dots$.

On aperçoit aisément que les produits de déterminants qui contiennent le terme $\{\Pi v\}$ sont donnés par le lemme suivant :

4° LEMME. — *Le terme $\{\Pi v\}$ de genre p est contenu avec le coefficient $(-1)^{n+p}$:*

Dans le produit $\Pi \omega$ de genre p ;

Dans chacun des produits $\Pi \omega \frac{\omega^{i+j}}{\omega_i \omega_j}$ de genre $(p-1)$;

Et, d'une manière générale, dans chacun des produits

$$\Pi \omega \frac{\Sigma \omega^\alpha}{\Pi \omega^\alpha} . \frac{\Sigma \omega^\beta}{\Pi \omega^\beta} . . . \frac{\Sigma \omega^\lambda}{\Pi \omega^\lambda}$$

de genre $p' < p$, les opérations Σ pouvant porter sur toutes les combinaisons possibles que l'on peut former avec la suite des facteurs ω . Dans tout autre produit, le terme $\{\Pi v\}$ a pour coefficient zéro.

Du lemme précédent on déduit que *tous les coefficients de même genre sont égaux*. Si l'on admet, en effet, que cette égalité des coefficients ait été vérifiée pour tous les termes de genre $p' < p$, on en conclut qu'elle est vérifiée pour le genre p , car les

équations qui fournissent les coefficients C_p de genre p sont de la forme

$$(-1)^{n+p} C_p + \Sigma \gamma_{p-1} C_{p-1} + \Sigma \gamma_{p-2} C_{p-2} + \dots = 1,$$

par hypothèse

$$\Sigma \gamma_{p-1} C_{p-1} = C_{p-1} \Sigma \gamma_{p-1}, \quad \dots$$

et, en vertu de 4^o , $\Sigma \gamma_{p-k}$ est le même pour toutes les équations relatives aux c_p, c'_p, c''_p, \dots . D'où l'on déduit

$$c_p = c'_p = c''_p = \dots$$

132. Cette valeur commune des coefficients C_p est égale à $(-1)^{n+p} p!$. — Considérons à cet effet l'identité

$$(14') \quad \left\| \begin{array}{cccc} u_{11} & \dots & u_{1n} & u_{1,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} & u_{n,n+1} \\ u_{(n+1)1} & \dots & u_{n+1,n} & u_{n+1,n+1} \end{array} \right\| = \Sigma |1\beta_1 2\beta_2 \dots (n+1)\beta_{n+1}| \\ \times [1\beta_1 2\beta_2 \dots (n+1)\beta_{n+1}],$$

et annulons les termes de la dernière ligne et de la dernière colonne du déterminant positif, à l'exception du terme diagonal $u_{n+1,n+1}$ que nous ferons égal à 1. Le premier membre de l'identité (14') se réduit au déterminant positif de l'identité (14), et l'identification des termes $\{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}\}$ donne la formule de récurrence

$$(15) \quad |1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}| = |1^{\alpha_1+1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}| + \alpha_1 |1^{\alpha_1-1} 2^{\alpha_2+1} \dots n^{\alpha_n}| + \dots \\ + \alpha_n |1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n-1} (n+1)^1|.$$

Or, en vertu de 4^o , il suffit de vérifier la formule $C_p = (-1)^{n+p} p!$ pour un terme

$$C_p = |1^p (n-p)^1|,$$

remplaçons dans (15) tous les termes, sauf $|1^{\alpha_1+1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}|$ par leurs valeurs $c_p = (-1)^{n+p} p!$ et nous obtiendrons

$$|1^{\alpha_1+1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}| = (-1)^{n+\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n} (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + 1)! \\ = (-1)^{n+p+1} (p+1)!.$$

Par conséquent, la formule $c_p = (-1)^{n+p} p!$ supposée vraie pour le déterminant positif à n lignes et pour les coefficients

$$|n+1|, \quad |1^1 n^1|, \quad |1^2 (n-1)^1|, \quad \dots, \quad |1^p (n-p+1)^1|,$$

du déterminant positif à $(n + 1)$ lignes, s'étendra au coefficient

$$|1^{n+1}(n-p)!|.$$

Comme on obtient directement $|n + 1| = (-1)^{n+1}$, on en conclut que la formule est générale.

133. *Loi de réciprocité.* — Désignons par

$$|[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}]|;$$

l'expression obtenue en remplaçant dans $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}]$ chaque déterminant par le déterminant positif correspondant, nous aurons la formule

$$\begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma (-1)^{n+p} p! |[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}]|,$$

autrement dit, il y a réciprocité entre les déterminants et les déterminants positifs.

Pour le prouver il suffit de faire porter l'identification sur les termes

$$(-1)^q \{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}\},$$

$(-1)^q$ désignant le signe du terme dans le déterminant. Avec ce changement de signe on passe d'un énoncé à l'énoncé réciproque.

134. *Identités arithmétiques.* — En égalant le coefficient de $\{1^n\}$ dans les deux membres de la formule (14) on a deux identités arithmétiques connues.

La première s'obtient en classant par genres les produits de déterminants qui contiennent le terme $\{1^n\}$:

En vertu de 4°, $\{1^n\}$ a pour coefficient l'unité dans le produit du genre n , dans chacun des C_n^2 produits de genre $n - 1$, des C_n^3 produits de genre $n - 3$, ... qui le contiennent. D'où l'identité

$$n! - C_n^2(n-1)! + C_n^3(n-2)! - \dots = 1.$$

La seconde formule s'obtient en classant par espèces les sommes partielles qui contiennent le terme $\{1^n\}$.

Le coefficient de $\{1^n\}$ dans la somme partielle $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}]$

est égal à

$$\frac{n!}{(1!)^{\alpha_1} (2!)^{\alpha_2} \dots (n!)^{\alpha_n} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!}$$

On a donc l'identité

$$\sum \frac{(-1)^p p!}{(1!)^{\alpha_1} (2!)^{\alpha_2} \dots (n!)^{\alpha_n} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!} = \frac{(-1)^p}{n!},$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs entières, positives ou nulles, de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ vérifiant les relations

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = p. \end{cases}$$

L'identification du coefficient d'un terme quelconque

$$\{ 1^{\beta_1} . 2^{\beta_2} . \dots n^{\beta_n} \}$$

se ramène aux deux formules précédentes.

IV. — Applications de la formule de récurrence.

1° FORME TRILINÉAIRE.

135. La forme trilinéaire à pour notation ombrale

$$U_1 U_2 U_3 = (a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1)(a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 z_2)(a_3 x_3 + b_3 y_3 + c_3 z_3).$$

Posons

$$u_{ij} = a_i x_j + b_i y_j + c_i z_j, \quad V_i = a_i x + b_i y + c_i z,$$

$$[U_i U_j] = \Sigma [a_i a_j] [x_i x_j], \quad [V_i V_j] = \Sigma [a_i a_j] x,$$

$$[U_i U_j U_k] = \Sigma [a_i a_j a_k] [x_i x_j x_k], \quad [V_i V_j V_k] = \Sigma [a_i a_j a_k] x,$$

$$P. V_i V_j V_k = \left(x_i \frac{d}{dx} + \dots \right) \left(x_j \frac{d}{dx} + \dots \right) \left(x_k \frac{d}{dx} + \dots \right) V_i V_j V_k,$$

$$P. V_i [V_j V_k] = \left(x_j \frac{d}{dx} + \dots \right) \left([x_j x_k] \frac{d}{dx} + \dots \right) V_i [V_j V_k].$$

et appliquons la formule

$$\left\| \begin{matrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{matrix} \right\| = 3! u_{11} u_{22} u_{33} - 2! \Sigma u_j \left| \begin{matrix} u_{22} & u_{23} \\ u_{32} & u_{33} \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{matrix} \right|,$$

nous obtiendrons la formule de récurrence (16)

$$(16) \quad P.V_1 V_2 V_3 = 3! U_1 U_2 U_3 - 2! \left\{ U_1 [U_2 U_3] + U_2 [U_3 U_1] + U_3 [U_1 U_2] \right\} + D_a D_x$$

avec

$$D_a = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

on se trouve ramené au calcul de formes bilinéaires qu'on exprimera au moyen de la formule (2); d'où la formule définitive (17) qui donne $U_1 U_2 U_3$ sous forme d'une somme de covariants de surfaces

$$(17) \quad 3! U_1 U_2 U_3 = P.V_1 V_2 V_3 + P.V_1 [V_2 V_3] + P.V_2 [V_3 V_1] + P.V_3 [V_1 V_2] + P.[V_1 V_2 V_3] + P.[V_2 V_3 V_1] + P.[V_3 V_1 V_2] - D_a D_x.$$

136. *Retations d'invariance.* — La forme $U_1 U_2 U_3$ contient $3^3 = 27$ coefficients distincts. L'ensemble des surfaces $V_1 V_2 V_3$, $V_1 [V_2 V_3]$, ..., $[V_1 V_2 V_3]$, ... et de la constante D_a contient 38 coefficients.

Les relations d'invariance qui expriment les 11 coefficients additionnels sont les suivantes :

$$(18) \quad V_1 [V_2 V_3] + V_2 [V_3 V_1] + V_3 [V_1 V_2] = (x^2 + y^2 + z^2) D_a,$$

$$(19) \quad [V_1 V_2 V_3] + [V_2 V_3 V_1] + [V_3 V_1 V_2] = 0,$$

$$(20) \quad \Delta V_1 [V_2 V_3] = \Delta V_2 [V_3 V_1] = \Delta V_3 [V_1 V_2].$$

Ces relations indépendantes définissent 11 coefficients en fonction de 27 autres. Le problème est donc résolu, et il n'existe pas de relation d'invariance indépendante des précédentes.

2° FORME BIQUADRATIQUE.

137. La forme biquadratique a pour notation ombrale

$$U_1^2 U^2 = (a_1 x_2 + b_1 y_1 + c_1 z_1)^2 (ax + by + cz)^2,$$

adoptons les mêmes notations que précédemment et appliquons la

formule

$$\left\| \begin{array}{ccc} u_{11} & \dots & u_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{k1} & \dots & u_{kk} \end{array} \right\| = 4! [1^k] - 3! [1^2 2^1] + 2! [1^4 3^1] + 2! [2^2] - [4^1],$$

nous obtiendrons la formule de récurrence (21)

$$(21) \quad P \cdot V_1^2 V^2 = 4! U_1^2 U^2 - 4 \cdot 3! U U_1 [U U_1] + 2 \cdot 2! [U U_1] [U U_1],$$

et, par suite, en appliquant les formules (16) et (2),

$$(22) \quad 4! U_1^2 U^2 = P \cdot V_1^2 V^2 \\ + 4P \cdot VV_1 [VV_1] \\ + 2P \cdot [VV_1] [VV_1] + 4P \cdot V [V_1 VV_1] + 4P \cdot V_1 [VV_1 V] \\ + 8P \cdot [VV_1 VV_1] \\ - 4D_a D_x$$

avec

$$D_a = [aa_1]^2 + [bb_1]^2 + [cc_1]^2, \quad D_x = [xx_1]^2 + [yy_1]^2 + [zz_1]^2.$$

138. *Relations d'invariance.* — La forme $U_1^2 U^2$ contient $6^2 = 36$ coefficients distincts. L'ensemble des surfaces $V_1^2 V^2$, $VV_1 [V.V_1]$, ... et de la constante D_a contient 47 coefficients.

Les relations d'invariance qui expriment les 11 coefficients additionnels sont les suivantes :

$$(23) \quad \Delta VV_1 [VV_1] + 2 [VV_1 VV_1] = 0,$$

$$(24) \quad V [V_1 VV_1] + V_1 [VV_1 V] + [VV_1] [VV_1] = (x^2 + y^2 + z^2) D_a,$$

$$(25) \quad \Delta V [V_1 VV_1] = \Delta V_1 [VV_1 V] = \Delta [VV_1] [VV_1].$$

3° FORME $U_1^2 U^n$.

139. Étudions d'abord la forme

$$U_1 U_2 \dots U_m = u_{11} u_{22} \dots u_{mm};$$

on obtient la formule de récurrence générale en remplaçant dans la formule (14) les u_{ij} par leurs valeurs

$$u_{ij} = a_i x_j + b_i y_j + c_i z_j.$$

Chaque terme du développement (14) devient égal à une somme

de produits de facteurs et chaque facteur a pour expression

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{p1} & \dots & u_{pp} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 & \dots & a_1 x_p + b_1 y_p + c_1 z_p \\ \dots & \dots & \dots \\ a_p x_1 + b_p y_1 + c_p z_1 & \dots & a_p x_p + b_p y_p + c_p z_p \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_p & b_p & c_p \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Donc, après la substitution précédente, chaque somme partielle $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}]$ contenant un exposant x_p d'indice supérieur à 3 devient nulle, et, par conséquent, la formule (14) appliquée aux formes ternaires donne la formule de récurrence

$$(26) \quad P \cdot V_1 V_2 \dots V_m = \Sigma (-1)^{m+p} p! [1^{\alpha} 2^{\beta} 3^{\gamma}] \binom{\alpha + 2\beta + 3\gamma = m}{\alpha + \beta + \gamma = p}.$$

140. Appliquons cette formule dans le cas particulier où $V_3 = V_4 = \dots = V_m$. Dans cette hypothèse, tout produit $1^{\alpha} 2^{\beta} 3^{\gamma}$ de déterminants est nul si l'on a

$$\beta\gamma \neq 0, \quad \text{ou} \quad \beta > 2 \quad \text{ou} \quad \gamma > 1,$$

par conséquent, le développement (26) se réduit à

$$(27) \quad P \cdot V_1 V_2 V^n = (n+2)! [1^{n+2}] - (n+1)! [1^n 2^1] + n! [1^{n-2} 2^2] + n! [1^{n-3} 3^1]$$

et l'on a

$$(28) \quad [1^m] = U_1 U_2 \dots U_m, \\ [1^{m-2} 2^1] = U_1 U_2 \dots U_m \sum \frac{[U_i U_j]}{U_i U_j},$$

$$(29) \quad [1^{m-4} 2^2] = U_1 U_2 \dots U_m \sum \frac{[U_i U_j][U_k U_l]}{U_i U_j U_k U_l},$$

$$(30) \quad [1^{m-3} 3^1] = U_1 U_2 \dots U_m \sum \frac{D(U_i U_j U_k)}{U_i U_j U_k}.$$

$[U_i U_j]$ a la même signification qu'au n° 135.

$$D(U_i U_j U_k) = \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix};$$

on écrira de même

$$D(V_i V_j V_k) = \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{vmatrix},$$

la sommation Σ s'étend à toutes les combinaisons possibles d'indice.

141. *Application de la formule de récurrence (27). Calcul de $U_1^2 U^n$.* — Désignons par :

f_β l'opération qui transforme $[1^m]$ en $[1^{m-2\beta} 2^\beta]$;

φ_γ l'opération qui transforme $[1^m]$ en $[1^{m-3\gamma} 3^\gamma]$.

Avec ces notations, la formule de récurrence (27) s'écrit

$$(27') \quad P.V_1^2 V^n = (n+2)! U_1^2 U^n - (n+1)! f_1 . U_1^2 U^n \\ + n! f_2 . U_1^2 U^n + n! \varphi_1 . U_1^2 U^n.$$

Nous représenterons par $Q \dots R$ un produit d'opérations se succédant dans l'ordre $Q \dots R$. Les opérations f_β et φ_γ ne sont définies que pour des produits de facteurs. Par définition, nous écrirons

$$f_\beta(\Sigma . U_1 U_2 \dots U_m) = \Sigma f_\beta(U_1 U_2 \dots U_m), \\ \varphi_\gamma(\Sigma . U_1 U_2 \dots U_m) = \Sigma \varphi_\gamma(U_1 U_2 \dots U_m),$$

et cette définition de l'addition entraîne celle d'un produit d'opérations f et φ se succédant dans un ordre quelconque. Ce produit dépend d'ailleurs de l'ordre des facteurs.

Tout produit d'opérations formé avec les $(p+q)$ facteurs

$$f_{\beta_1}, f_{\beta_2}, \dots, f_{\beta_p}, \\ \varphi_{\gamma_1}, \varphi_{\gamma_2}, \dots, \varphi_{\gamma_q}$$

rangés dans un certain ordre et appliqué à $U_1 U_2 \dots U_m$ transformera $U_1 U_2 \dots U_m$ en une expression

$$\Sigma U_1' U_2' \dots U_s' . D_1 . D_2 \dots D_t,$$

dans laquelle les nombres s, t sont donnés par les formules

$$\begin{cases} t = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_q, \\ s + 3t = m - (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p). \end{cases}$$

Pour obtenir la valeur de $U_1^2 U^n$, nous utiliserons une opération Ψ_p qui soit un polynome entier des opérations f et φ et qui, appliquée au produit $U_1 U_2 \dots U_m$, le transforme en une somme

$$\Sigma U'_1 U'_2 \dots U'_{m-p} D_1 D_2 \dots D_t.$$

Opérons par Ψ_p sur la forme $U_1^2 U^n$. Appliquons ensuite à chaque terme de la somme obtenue la formule de récurrence (27') et ajoutons les résultats. Nous obtenons la formule nouvelle (27'')

$$(27'') \quad P \cdot \Psi_p \cdot V_1^2 V^n = (n+2-p)! \Psi_p \cdot U_1^2 U^n - (n+1-p)! f_1 \cdot \Psi_p \cdot U_1^2 U^n + (n-p)! f_2 \cdot \Psi_p \cdot U_1^2 U^n + (n-p)! \varphi_1 \cdot \Psi_p \cdot U_1^2 U^n,$$

d'où nous déduisons, par applications successives de la formule (27'') pour $p = 0, 1, 2, \dots$, la formule (31)

$$(31) \quad P \cdot (\Psi_0 + \Psi_1 + \dots + \Psi_p) \cdot V_1^2 V^n = (n+2)! U_1^2 U^n + \Sigma (n+2-p)! (\Psi_p - f_1 \cdot \Psi_{p-1} + f_2 \cdot \Psi_{p-2}) U_1^2 U^n + \varphi_1 \Sigma (n-p)! \Psi_p \cdot U_1^2 U^n + R,$$

avec $\Psi_1 = 0$, $\Psi_0 = 1$ et le reste R ayant pour valeur

$$R = (n-p)! f_2 \cdot \Psi_p \cdot U_1^2 U^n - (n-p+1)! (f_1 \cdot \Psi_p - f_2 \cdot \Psi_{p-1}) U_1^2 U^n.$$

De la formule (28), on tirera la valeur de l'inconnu $U_1^2 U^n$ à l'aide d'un choix convenable des opérations Ψ et du nombre p :

Il suffira de définir les opérations Ψ par la formule de récurrence

$$(28') \quad \Psi_p - f_1 \cdot \Psi_{p-1} + f_2 \cdot \Psi_{p-2} = 0$$

et de définir le nombre p par la condition d'annuler le reste R :

$$R = (n-p)! f_2 \cdot \Psi_p \cdot U_1^2 U^n - (n-p+1)! \Psi_{p+1} \cdot U_1^2 U^n,$$

ce qui aura lieu pour $p = n+1$.

En résumé, la forme $U_1^2 U^n$ peut être égale à une somme de covariants de surfaces conformément à la formule (32) :

$$(32) \quad (n+2)! U_1^2 U^n = P \cdot (\Psi_0 + \Psi_1 + \dots + \Psi_{n+1}) V_1^2 V^n - \varphi_1 \cdot \sum_{p=0}^{p=n+1} (n-p)! \Psi_p \cdot \Phi.$$

La méthode précédente s'étend d'elle-même à l'étude des formes $U_1^p U^n$, $U_1^p U_2^q U^n$, etc.

142. *Calcul des opérations* Ψ_p . — Les formules (28), (29), (30) donnent les expressions des opérations f_1, f_2, φ_1 quand on les applique à $V_1 V_2 V^n$. Ce sont :

$$\begin{aligned} (28'') & \left\{ f_1 \cdot V_1 V_2 V^n = [V_1 V_2] V^n + A_h^1 \{ [VV_1] V_2 + [VV_2] V_1 \} V^{n-1}, \right. \\ (29') & \left\{ f_2 \cdot V_1 V_2 V^n = A_h^2 [VV_1] [VV_2] V^{n-2}, \right. \\ (30') & \left\{ \varphi_1 \cdot V_1 V_2 V^n = A_h^3 V^{n-1} D(VV_1 V_2). \right. \end{aligned}$$

Ces valeurs, portées dans les formules de récurrence (28'), donnent la valeur de Ψ_p qui s'exprime par la formule (33)

$$(33) \quad \Psi_p = A_h^p F_p + 2 A_h^{p-1} G_p + A_h^{p-1} H_p,$$

F_p, G_p, H_p désignant les opérations définies par les formules (34)

$$(34) \left\{ \begin{aligned} F_p \cdot V_1^2 V^n &= \{ [V^p V_1] V_1 + [V^{p-1} V_1] [VV_1] + \dots + V_1 [V^{p-1} V_1] \} V^{n-p} \\ &= \Sigma [V^q V_1] [V^r V_1] V^{n-p} \quad (q+r=p, q=0, 1, 2, \dots, p), \\ G_p \cdot V_1^2 V^n &= \{ [V_1 V^{p-1} V_1] + [VV_1 V^{p-2} V_1] + \dots + [V^{p-2} V_1 VV_1] \} V^{n-p+1} \\ &= \Sigma [V^q V_1 V^r V_1] V^{n-p+1} \quad (q+r=p-1, q=0, 1, 2, \dots, p-2), \\ H_p \cdot V_1^2 V^n &= \{ [[V^{p-2} V_1] [VV_1]] + [[V^{p-3} V_1] [V^2 V_1]] + \dots \\ &\quad + [[VV_1] [V^{p-2} V_1]] \} V^{n-p+1} \\ &= \Sigma [[V^q V_1] [V^r V_1]] V^{n-p+1} \quad (q+r=p-1, q=1, 2, \dots, p-2) \end{aligned} \right.$$

Chaque opération F_p, G_p, H_p fournit donc une somme de surfaces invariantes et nous allons montrer d'abord que les formules donnant les axes successifs de deux vecteurs permettent de les ramener à neuf surfaces types.

143. *Relations d'invariance entre les surfaces qui définissent la forme* $U_1^2 U^n$. — La forme $U_1^2 U^n$ est définie par les surfaces

$$(35) \left\{ \begin{aligned} & V_1^2 V^n, \\ F(q, r) &= [V^q V_1] [V^r V_1] V^{n-p} & \left(\begin{array}{l} q+r=p \\ q=0, 1, \dots, p \end{array} \right), \\ G(q, r) &= [V^q V_1 V^r V_1] V^{n-p+1} & \left(\begin{array}{l} q+r=p-1 \\ q=0, 1, 2, \dots, p-2 \end{array} \right), \\ H(q, r) &= [[V^q V_1] [V^r V_1]] V^{n-p+1} & \left(\begin{array}{l} q+r=p-1 \\ q=1, 2, \dots, p-2 \end{array} \right). \end{aligned} \right.$$

Les surfaces d'ordre $n+2, n, n-2, \dots$ sont invariantes directes, les autres sont inverses.

Les formules qui donnent les axes successifs de deux vecteurs (a, b, c) et (a_1, b_1, c_1) sont :

1° Pour $2p' + 2$ facteurs

$$\begin{aligned} & [a_i a_{i'} \cdot a_j a_{j'} \dots a_k a_{k'} \cdot a_l a_{l'}] \\ & = (-1)^{p'} (a_i a_{i'} + b_j b_{j'} + c_k c_{k'}) \dots (a_k a_{k'} + b_l b_{l'} + c_l c_{l'}) [a_l a_{l'}]; \end{aligned}$$

2° Pour $2p' + 3$ facteurs

$$\begin{aligned} & [a_\alpha \cdot a_i a_{i'} \cdot a_j a_{j'} \dots a_k a_{k'} \cdot a_l a_{l'}] \\ & = (-1)^{p'} (a_i a_{i'} + b_j b_{j'} + c_k c_{k'}) \dots (a_k a_{k'} + b_l b_{l'} + c_l c_{l'}) [a_\alpha a_l a_{l'}]. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit les valeurs de F, G, H en valeur absolue (la détermination du signe est inutile, car l'opération P affecte le résultat final du signe +) :

1° SURFACES F(q, r).

$$(36) \quad \begin{cases} F(0, r) \begin{cases} F(0, 2r' + 1) = (a^2 + b^2 + c^2)^{r'} V_1 [VV_1] V^{n-p}, \\ F(0, 2r' + 2) = (a^2 + b^2 + c^2)^{r'} V_1 [VV_1 V] V^{n-p}, \end{cases} \\ F(q, r) \begin{cases} F(2q' + 1, 2r' + 1) = (a^2 + b^2 + c^2)^{q'+r'} [VV_1] [VV_1] V^{n-p}, \\ F(2q' + 1, 2r' + 2) = F(2q' + 2, 2r' + 1) \\ \quad = (a^2 + b^2 + c^2)^{q'+r'} \\ \quad \quad \times [VV_1] [VV_1 V] V^{n-p}, \\ F(2q' + 2, 2r' + 2) = (a^2 + b^2 + c^2)^{q'+r'} \\ \quad \quad \times [VV_1 V] [VV_1 V] V^{n-p}; \end{cases} \\ q \neq 0, \quad r \neq 0 \end{cases}$$

2° SURFACES G(q, r).

$$\begin{cases} G(0, r) \begin{cases} G(0, 2r' + 1) = (a^2 + b^2 + c^2)^{r'} [V_1 VV_1] V^{n-p+1}, \\ G(0, 2r' + 2) = (aa_1 + bb_1 + cc_1) \\ \quad \times (a^2 + b^2 + c^2)^{r'} [VV_1] V^{n-p+1}, \end{cases} \\ G(q, r) \begin{cases} G(2q' + 1, 2r' + 1) = G(0, 2q' + 2r' + 2), \\ G(2q' + 1, 2r' + 2) = G(2q' + 2, 2r' + 1) \\ \quad = (aa_1 + bb_1 + cc_1) (a^2 + b^2 + c^2)^{q'+r'} \\ \quad \quad \times [VV_1 V] V^{n-p+1}, \\ G(2q' + 1, 2r' + 2) = G(0, 2q' + 2r' + 4); \end{cases} \\ q \neq 0 \end{cases}$$

3° SURFACES $H(q, r)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} H(2q' + 1, 2r' + 2) = 0, \\ H(2q' + 1, 2r' + 2) = H(2q' + 2, 2r' + 1) \\ \quad = \{ [aa_1]^2 + [bb_1]^2 + [cc_1]^2 \} \\ \quad \quad \times (a^2 + b^2 + c^2)^{q'+r'} V^{n-p+2}, \\ H(2q' + 2, 2r' + 2) = 0. \end{array} \right.$$

[Pour $n = 2$, la formule $H(1, 2)$ est un défaut, car on a $H(1, 2) V_1^2 V^2 = 0$].

Un raisonnement analogue à celui donné au n° 107 permet de déduire des formules précédentes les relations d'invariance :

$$(37) \left\{ \begin{array}{l} \Delta F(0, 2r' + 1) = A_{n-p}^2 F(0, 2r' + 3) + 2A_{n-p}^1 G(0, 2r' + 2), \\ \Delta F(0, 2r' + 2) = A_{n-p}^2 F(0, 2r' + 4) \\ \quad + 2A_{n-p}^1 G(1, 2r' + 2) + 2H(1, 2r' + 2), \\ \Delta F(1, 2r' + 1) = A_{n-p}^2 F(1, 2r' + 3) + 2H(1, 2r' + 2), \\ \Delta F(1, 2r' + 2) = A_{n-p}^2 F(1, 2r' + 4), \\ \Delta F(2, 2r' + 2) = A_{n-p}^2 F(2, 2r' + 4) + 2H(1, 2r' + 4), \\ \Delta G(0, 2r' + 1) = A_{n-p+1}^2 G(0, 2r' + 3) + 2A_{n-p+1}^1 H(1, 2r' + 2), \\ \Delta G(0, 2r' + 2) = A_{n-p+1}^2 G(0, 2r' + 4), \\ \Delta G(1, 2r' + 2) = A_{n-p+1}^2 G(1, 2r' + 4), \\ \Delta H(1, 2r' + 2) = A_{n-p+1}^2 H(1, 2r' + 4), \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit que toutes les surfaces F, G, H sont des sommes de covariants des neuf surfaces suivantes :

$$(38) \left\{ \begin{array}{l} F(0, 1) = V_1 [VV_1]^{n-1}, \\ F(0, 2) = V_1 [VV_1 V] V^{n-2}, \\ F(1, 1) = [VV_1] [VV_1] V^{n-2}, \\ F(1, 2) = [VV_1] [VV_1 V] V^{n-3}, \\ F(2, 2) = [VV_1 V] [VV_1 V] V^{n-4}, \\ G(0, 1) = [VV_1 V] V^{n-1}, \\ G(0, 2) = (aa_1 + bb_1 + cc_1) [VV_1] V^{n-2}, \\ G(1, 2) = (aa_1 + bb_1 + cc_1) [VV_1 V] V^{n-3}, \\ H(1, 2) = \{ [aa_1]^2 + [bb_1]^2 + [cc_1]^2 \} V^{n-2}, \end{array} \right.$$

et, par conséquent, les surfaces qui définissent la forme $U_1^2 U^n$ se

trouvent d'abord ramenées à 10, à savoir la surface $V_1^2 V^n$ et les neuf surfaces énumérées aux formules (38).

444. Les neuf surfaces (38) peuvent se ramener à cinq. Un calcul analogue à celui du n° 436 fournit en effet les nouvelles relations d'invariance

$$(39) \left\{ \begin{aligned} F(0, 2) + F(1, 1) + G(0, 1) &= (x^2 + y^2 + z^2) H(1, 2), \\ \Delta F(0, 1) + \Lambda_{n-1}^2 F(1, 2) &= \Lambda_n^2 G(0, 2), \\ \Delta F(0, 2) &= \Lambda_{n-2}^2 F(2, 2) + \Lambda_{n-1}^2 G(1, 2) + 2H(1, 2), \\ \Lambda_{n-2}^2 F(2, 2) + \Delta F(0, 2) + \Delta G(0, 1) + (n^2 - n + 2) H(1, 2) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Ces relations définissent les quatre surfaces $F(0, 2)$, $F(1, 2)$, $F(2, 2)$, $G(1, 2)$ en fonction des cinq autres, d'où ce théorème :

THÉORÈME. — La forme $U_1^2 U^n$ est définie par les six surfaces invariantes

$$\begin{aligned} &V_1^2 V^n, \\ &V_1 [VV_1] V^{n-1}, \\ &[VV_1] [VV_1] V^{n-2}, \quad [V_1 VV_1] V^{n-1}, \\ &(aa_1 + bb_1 + cc_1) [VV_1] V^{n-2}, \\ &\{[aa_1]^2 + [bb_1]^2 + [cc_1]^2\} V^{n-2}, \end{aligned}$$

Relations d'invariance auxquelles satisfont les six surfaces qui définissent la forme $U_1^2 U^n$. — Pour $n \geq 2$, les six surfaces existent et la somme de leurs coefficients est égale à $6C_3^n + 5$, dépassant de cinq unités le nombre des coefficients de $U_1^2 U^n$. Il existe donc entre les six surfaces des relations d'invariance fournissant cinq coefficients en fonction des $6C_3^n$ autres. On les obtiendra en formant le tableau des Δ^i de ces diverses surfaces et en déterminant i par la condition d'obtenir pour Δ^i un covariant de degré 0 ou 1 en x, y, z .

Le tableau des Δ^i , qui s'obtient en appliquant les formules de récurrence (37), est le suivant :

$$(40) \left\{ \begin{aligned} \Delta^i F(0, 1) &= \Lambda_{n-1}^{2i} F(0, 2i + 1) + 2i \Lambda_{n-1}^{2i-1} G(0, 2i), \\ \Delta^i F(1, 1) &= \Lambda_{n-1}^{2i} F(1, 2i + 1) + 2i \Lambda_{n-2}^{2i-2} H(1, 2i), \\ \Delta^i G(0, 1) &= \Lambda_{n-2}^{2i} G(0, 2i + 1) + 2i \Lambda_{n-1}^{2i-1} H(2, 2i), \\ \Delta^i G(0, 2) &= \Lambda_{n-2}^{2i} G(0, 2i + 2), \\ \Delta^i H(1, 2) &= \Lambda_{n-2}^{2i} H(1, 2i + 2). \end{aligned} \right.$$

On en déduit les relations d'invariance

$$\begin{aligned} \text{Premier cas... } n = 2p & \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta^p F(0,1)}{2p(2p-1)} &= \Delta^{p-1} G(0,2), \\ \frac{\Delta^p F(1,1)}{2p} &= \frac{\Delta^p G(0,1)}{2p(2p-1)} = \Delta^{p+1} H(1,2). \end{aligned} \right. \\ \text{Deuxième cas... } n = 2p+1 & \left\{ \begin{aligned} \Delta^{p+1} F(0,1) &= \Delta^p G(0,2) = 0, \\ \frac{\Delta^p F(1,1)}{2p} &= \Delta^{p-1} H(1,2). \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

145. *Calcul de la somme* $\varphi_1 \Sigma(n-p)! \Psi_p U_1^2 U^n$. — Pour obtenir la valeur de $U_1^2 U^n$ fournie par la formule (32), il reste à calculer la somme

$$\varphi_1 \Sigma(n-p)! \Psi_p U_1^2 U^n = \Sigma \Lambda_p (p = 0, 1, 2, \dots, n+1).$$

On a

$$\begin{aligned} \Psi_p &= \Lambda_n^p F_p + 2 \Lambda_n^{p-1} G_p + \Lambda_n^{p-2} H_p, \\ \varphi_1 \cdot G_p \cdot U_1^2 U^n &= \varphi_1 \cdot H_p \cdot U_1^2 U^n = 0, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\Lambda = n! (n-p) \Sigma U^{n-p-1} D(U[U^q U_1][U^2 U_1]) \quad \left(\begin{array}{l} q+r=p \\ q=0, 1, 2, \dots, p \end{array} \right).$$

D'ailleurs, les formules qui donnent les axes successifs de deux vecteurs entraînent la formule de récurrence (41) valable pour $q \geq 2$, $r \geq 2$,

$$\begin{aligned} (41) \quad D(U[U^{2q+r} U_1][U^{2r+r} U_1]) \\ = (a^2 + b^2 + c^2)^{q+r'} (x^2 + y^2 + z^2)^{q'+r'} D(U[U^q U_1][U^r U_1]), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$(42) \quad D(U[U^q U_1][U^r U_1]) = \begin{cases} 0 & \text{si } p = 2p', \\ (a^2 + b^2 + c^2)^{p'} (x^2 + y^2 + z^2)^{p'} (\Sigma[aa_1]^2) (\Sigma[xx_1]^2) U^{n-2p'-2} & \\ & \text{si } p = 2p' + 1. \end{cases}$$

D'où la formule (43)

$$(43) \quad \Sigma \Lambda_p = n! \Sigma (n-2p'-1)(2p'+2)(x^2 + y^2 + z^2)^{p'} (\Sigma[xx_2]^2) H_{2p'+1} V_1^2 V^n,$$

en posant

$$H_{2p'+1} V_1^2 V^n = (a^2 + b^2 + c^2)^{p'} (\Sigma[aa_1]^2) V^{n-2p'-2}.$$

Il est facile de voir que, sauf le cas d'exception $n = 2$, l'opération $H_{2p'+1}$ est identique à l'opération $H(2p'+1, 2)$.

Si l'on se reporte, en effet, à la définition des surfaces $H(q, r)$ (n° 143), on voit que l'on a

$$\left\{ \begin{array}{ll} n = 2, & p' = 0, & H_{2p'+1} V_1^2 V^2 = [aa_1]^2 + [bb_1]^2 + [cc_1]^2, \\ & & H(2p'+1, 2) V_1^2 V^2 = 0, \\ n > 2, & & H_{2p'+1} V_1^2 V^n = H(2p'+1, 2) V_1^2 V^n. \end{array} \right.$$

V. — Applications de la formule de décomposition de $U_1^2 U^2$.

146. *Dureté.* — On convient d'adopter comme mesure de la dureté d'un corps la charge minima pour laquelle une pointe produit une rayure sur ce corps. La dureté dépend donc de la nature du corps utilisé pour produire la rayure. En outre, elle n'est pas la même pour toutes les faces d'un même cristal; pour une même face elle varie avec la direction.

Bien que les considérations qui se rapportent à un phénomène aussi incomplètement défini n'aient qu'un caractère purement empirique, nous les mentionnons afin de montrer comment les formes multilinéaires pourraient en représenter la loi de variation.

Soient

α, β, γ les cosinus directeurs de la face cristalline;
 α', β', γ' les cosinus directeurs de la direction suivant laquelle on mesure la dureté.

On a, entre ces composantes, la relation

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0.$$

La dureté D est une fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$, et, d'après la nature même de la question, on a

$$(44) \quad D = \Phi(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') = \Phi(-\alpha, -\beta, -\gamma, -\alpha', -\beta', -\gamma').$$

Admettons que la fonction qui représente D soit développable en série :

$$D = \sum D_{p,q}$$

$D_{p,q}$ désignant une forme homogène de degré p en α, β, γ , et q en α', β', γ' .

En vertu de (44) p et q sont de même parité, et l'on est conduit à essayer en première approximation la formule

$$D = D_{0,0} + D_{0,2} + D_{1,1} + D_{2,0} + D_{1,3} + D_{3,1} + D_{2,2},$$

qui fournit des résultats conformes à l'expérience (comparer avec les résultats des expériences sur la calcite, le sel gemme, etc.).

A ce degré d'approximation, le phénomène de la dureté est donc ramené à l'étude des formes $U_1 U^n$ et $U_1^2 U^n$.

147. *Calcul de la forme biquadratique $U_1^2 U^2$ satisfaisant à la symétrie du système cubique (holoédrie)*

$$3A^4, 4L^3, 6L^2, C, 3H, 6P^2.$$

Toute surface directe vérifiant cette symétrie est une fonction uniforme de

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2, \\ x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2, \\ x^2 y^2 z^2. \end{aligned}$$

Toute surface inverse, satisfaisant à la même symétrie, est le produit de la fonction précédente par le polynôme

$$xyz(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2).$$

Les surfaces qui définissent la forme biquadratique $U_1^2 U^2$ sont donc

$$\begin{aligned} V_1^2 V^2 &= A(x^2 + y^2 + z^2)^2 + B(x^4 + y^4 + z^4), \\ VV_1[VV_1] &= 0, \\ \frac{[VV_1][VV_1]}{C} &= \frac{V[V_1 VV_1]}{C'} = \frac{V_1[VV_1 V]}{C''} = x^2 + y^2 + z^2, \\ [VV_1 VV_1] &= 0, \\ D_a &= D; \end{aligned}$$

on a les relations d'invariance

$$C = C' = C'',$$

$$D = C + C' + C'' = 3C,$$

et, par conséquent, la forme biquadratique $U_1^2 U^2$ a ses 36 coefficients réduits, dans ce cas, à 3 coefficients distincts.

Les covariants des surfaces qui la définissent ont pour expres-

sion

$$\begin{aligned} P \cdot V_1^2 V^2 &= \left(x_1 \frac{d}{dx} + \dots\right)^2 \left(x \frac{d}{dx} + \dots\right)^2 V_1^2 V^2 \\ &= 8A(x^2 + y^2 + z^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + 16A(xx_1 + yy_1 + zz_1)^2 \\ &\quad + 24B(x^2 x_1^2 + y^2 y_1^2 + z^2 z_1^2), \\ P \cdot [VV_1][VV_1] &= P \cdot V[V_1 VV_1] = P \cdot V_1[VV_1 V] \\ &= 2C(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) \quad x_2 = [xx_1], \\ D_a D_x &= 3C(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2), \end{aligned}$$

et ces valeurs, portées dans la formule (21) donnent

$$(45) \quad 3U_1^2 U^2 = A(x^2 + y^2 + z^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + 2A(xx_1 + yy_1 + zz_1)^2 + 3B(x^2 x_1^2 + y^2 y_1^2 + z^2 z_1^2) + C(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2),$$

formule dans laquelle on remplacera $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$ par sa valeur

$$\begin{aligned} x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 &= [xx_1]^2 + [yy_1]^2 + [zz_1]^2 \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - (xx_1 + yy_1 + zz_1)^2. \end{aligned}$$

148. *Première application. Dispersion normale dans les cristaux cubiques.* — Supposons que l'hypothèse de Mac Cullagh, exposée au Chapitre III (nos 77 et 78) ne soit pas vérifiée et cherchons les conséquences qui en résulteront pour les propriétés optiques des cristaux appartenant au système cubique.

Au degré d'approximation qui fournit le premier le terme de dispersion normale, on a

$$W = W_2 + W_4,$$

et, par suite, le potentiel moyen pendant une période est, à une constante près,

$$W_m = F(p, q, r) + \mu^2 \Phi(p, q, r, \alpha, \beta, \gamma).$$

$F(p, q, r)$ est une forme quadratique en p, q, r à coefficients constants; c'est l'ellipsoïde optique de Fresnel.

$\Phi(p, q, r, \alpha, \beta, \gamma)$ est une forme biquadratique en (p, q, r) et (α, β, γ) . Dans l'hypothèse de Mac Cullagh, cette forme contient en facteur $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$ et la loi de l'ellipsoïde optique reste vérifiée. Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, les cristaux cubiques ne sont plus isotropes au point de vue optique, et l'on a, en tenant compte de la relation $\alpha p + \beta q + \gamma r = 0$,

$$\begin{aligned} \Phi(p, q, r, \alpha, \beta, \gamma) &= A(p^2 + q^2 + r^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\ &\quad + B(\alpha^2 p^2 + \beta^2 q^2 + \gamma^2 r^2), \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(46) \quad W_m = (a + \mu^2 A)(p^2 + q^2 + r^2) + \mu^2 B(\alpha^2 p^2 + \beta^2 q^2 + \gamma^2 r^2).$$

Les conséquences de la formule précédente sont les suivantes :

1° Quand la propagation se fait suivant un axe quaternaire ou un axe ternaire, l'ellipsoïde $W_m(x, y, z) - 1 = 0$ est de révolution autour de cet axe, et le milieu est, au point de vue optique, isotrope pour ces deux directions particulières de propagation; mais les vitesses correspondant aux axes ternaire et quaternaire sont différentes.

On a, en effet :

Axe quaternaire ($\alpha = \beta = 0, \gamma = 1$)

$$W_m = (a + \mu^2 A)(p^2 + q^2 + r^2) + \mu^2 B r^2, \quad V_2^2 = a + \mu^2 A.$$

Axe ternaire ($\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$)

$$W_m = (a + \mu^2 A + \frac{1}{3} \mu^2 B)(p^2 + q^2 + r^2), \quad V_3^2 = a + \mu^2 A + \frac{1}{3} \mu^2 B.$$

2° Quand la propagation se fait suivant un axe binaire, ou, en général, suivant une direction quelconque, l'ellipsoïde

$$W_m(x, y, z) - 1 = 0$$

n'est pas de révolution autour de la direction de propagation, et, par suite, le cristal est biréfringent pour cette direction.

On a, en particulier, pour l'axe binaire ($\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \gamma = 0$),

$$W_m = (a + \mu^2 A)(p^2 + q^2 + r^2) + \frac{1}{2} \mu^2 B(p^2 + q^2);$$

dans ce cas l'ellipsoïde $W_m - 1 = 0$ est de révolution autour de Oz , et, par conséquent, le plan de l'onde est un plan méridien; d'où les deux vitesses

$$\begin{cases} V_2^2 = a + \mu^2 A + \frac{1}{2} \mu^2 B, \\ V_3^2 = a + \mu^2 A. \end{cases}$$

149. *Deuxième application. Piézo-optique.* — Un milieu isotrope, soumis à l'action de pressions, devient biréfringent. L'effet de ces pressions peut s'interpréter par une hypothèse ana-

logue à celle qui a été énoncée au n° 126 : c'est le potentiel gyrostatique qui est modifié par les tensions intérieures. Par conséquent, en première approximation, ce potentiel aura pour valeur

$$W = F(p, q, r) + \Phi(p, q, r, N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3),$$

Φ désignant une forme quadratique en p, q, r , et linéaire en $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$.

Si l'on remarque que les six tensions sont définies en fonction du vecteur ombraire (a, b, c) par l'identité en x, y, z

$$N_1 x^2 + \dots + 2T_1 yz + \dots \equiv (ax + by + cz)^2,$$

on en conclut que la piézo-optique est ramenée à l'étude d'une forme biquadratique en (p, q, r) et (a, b, c) .

En particulier, la formule (45) résout la question pour les cristaux cubiques. Il est facile d'étendre ces résultats dans le cas général, en tenant compte du pouvoir rotatoire et de la dispersion.

150. *Troisième application. Phénomène de Kerr.* — Un diélectrique liquide placé dans un champ électrique laisse passer un rayon lumineux entre nicols croisés à angle droit : la sphère qui représente l'ellipsoïde optique, dans le milieu isotrope, se transforme en un ellipsoïde de révolution autour de la direction du champ électrique, et, d'après de récentes mesures de Kerr, cet ellipsoïde est de raccordement avec la sphère primitive tout le long de l'équateur; autrement dit, la vitesse de l'onde ordinaire n'est pas modifiée par la présence du champ.

Dans la théorie gyrostatique que nous développons ici, le phénomène de Kerr s'interprète en supposant que le potentiel gyrostatique est modifié par l'existence du champ électrique.

Au premier degré d'approximation, l'effet dû au champ électrique est nul pour les cristaux holoédres, comme on l'a vu au n° 126. Au degré suivant d'approximation le potentiel gyrostatique de ces cristaux aura pour valeur

$$(47) \quad W = F(p, q, r) + \Phi(p, q, r, P', Q', R') \\ = \frac{1}{2}(Pp + Qq + Rr) + \Phi(p, q, r, P', Q', R'),$$

$P = \frac{dF}{dp} \dots$ représentant le potentiel-vecteur quand le champ

électrique est nul. Φ est une forme biquadratique des composantes (p, q, r) , (P', Q', R') du vortex et du champ électrique.

Développons les conséquences de cette hypothèse dans les milieux isotropes : nous aurons à appliquer la formule (45) des cristaux cubiques en y annulant le coefficient du polynôme non isotrope $x^4 + y^4 + z^4$.

Donc, quand un milieu isotrope est placé dans un champ électrique, son ellipsoïde optique a pour équation

$$(48) \quad W = a(p^2 + q^2 + r^2) + A(pP' + qQ' + rR')^2 + B(p^2 + q^2 + r^2)(P'^2 + Q'^2 + R'^2) = 1;$$

cet ellipsoïde est de révolution autour de la direction (P', Q', R') du champ électrique, et de raccordement tout le long de son équateur, avec la sphère

$$(49) \quad a(p^2 + q^2 + r^2) + B(p^2 + q^2 + r^2)(P'^2 + Q'^2 + R'^2) = 1.$$

Utilisons le résultat de l'expérience de Kerr, c'est-à-dire écrivons que la vitesse de l'onde ordinaire reste invariable. La sphère de raccordement (49) devra se réduire à la sphère

$$a(p^2 + q^2 + r^2) = 1,$$

ce qui nécessite $B = 0$.

Ainsi, le potentiel gyrostatique d'un milieu isotrope soumis à l'influence d'un champ électrique (P', Q', R') a pour valeur

$$(50) \quad W = \frac{1}{2}(Pp + Qq + Rr) + A(P'p + Q'q + R'r)^2.$$

L'interprétation mécanique de cette équation (50) permet de préciser les rapports qu'on a déjà aperçus entre le potentiel-vecteur (P, Q, R) et le champ électrique (P', Q', R') ; mais cette étude, malgré l'importance qu'elle présente, ne saurait trouver place dans ce Mémoire réservé à l'étude de l'Optique.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.....	Pages. I
-------------------	-------------

CHAPITRE I.

SYMÉTRIE. MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS.

I. — Symétrie. — Grandeurs scalaires et vectorielles.

Numéros.		
1-3.	Milieus cristallisés. Symétries directe et inverse	10
4-8.	Grandeurs scalaires et vectorielles. Axe de plusieurs vecteurs. Vortex. Potentiel-vecteur	14
9.	Différences entre la symétrie directe et la symétrie inverse. Pou- voir rotatoire.....	19

II. — Mécanique des milieux continus.

10.	Étude cinématique des déformations	22
11.	Dynamique des milieux continus. Hypothèse fondamentale de Green.....	24
12-13.	Équations de Lagrange (première et deuxième forme)	25
14.	Milieus élastiques et milieux gyrostatiques	28
15.	Les deux classes de théories gyrostatiques	29

CHAPITRE II.

PROPAGATION DANS LES MILIEUX GYROSTATIQUES HOMOGÈNES.

I. — Méthode analytique.

16-17.	Onde monochromatique plane. Propagation des ondes planes. Grandeurs ombrales de Rankine	33
18-19.	Équations des milieux gyrostatiques.....	37
20.	Double réfraction : ellipsoïde optique	38
21.	Polarisation rotatoire cristalline : quadrique de gyration.....	40
22.	Dispersion normale : surfaces invariantes.....	44
23.	Travaux de Gibbs sur la double réfraction et la polarisation rotatoire.....	46

II. — Méthode géométrique.		
Numéros.	Pages.	
24-25.	Le principe d'Hamilton et son application aux équations linéaires : énoncé de lord Rayleigh.....	46
26-28.	Valeur moyenne du potentiel interne.....	50
29.	Recherche géométrique des lois de la propagation dans les milieux gyrostatiques : double réfraction, polarisation rotatoire cristalline, dispersion normale.....	52
30.	Comparaison avec les équations de Fresnel.....	55
 III. — Propriétés rotatoires des dissolutions.		
31-33.	57
 IV. — Empilages de lames hémihédres.		
34-42.	60
 V. — Formules donnant la différence de marche des deux vibrations elliptiques propagées par un cristal doué de pouvoir rotatoire.		
43-45.	69

CHAPITRE III.

RÉFLEXION ET RÉFRACTION A LA SURFACE DE SÉPARATION DE DEUX MILIEUX GYROSTATIQUES.

I. — Équations de continuité. — Lois de la réfraction uniradiale.		
46-50.	Principe de la couche de passage. Équations de continuité.....	73
51.	Le coefficient d'isotropie a même valeur dans tous les milieux gyrostatiques.....	76
52-53.	Rayon conjugué.....	78
54-56.	Réflexion et réfraction à la surface de séparation de deux milieux homogènes.....	80
57-60.	Réfraction uniradiale : généralisation du théorème de Mac Cullagh.....	82
 II. — Comparaison du rayon lumineux et du rayon conjugué.		
61-68.	85
 III. — Continuité des pressions. — Échanges d'énergie. — Vecteur radiant. — Énoncé des forces vives. — Hypothèse de Mac Cullagh.		
69-78.	96

CHAPITRE IV.

ÉTUDE DE LA FORME GÉNÉRALE DU POTENTIEL INTERNE.

I. — Triple réfraction. — Polarisation rotatoire. — Condition de transversalité.

Numéros.	Pages.
79-84.	109

II. — Milieux élastiques. — Milieux à forces centrales et termes additionnels de polarisation rotatoire (Cauchy).

85-94.	115
-------------	-----

III. — Discussion des théories de la lumière. — Le potentiel interne sous forme d'une somme de deux covariants : quartique de Haughton, quadrique de Rankine. Continuité des pressions. — Stabilité de l'équilibre.

95-103.	128
--------------	-----

CHAPITRE V.

DE LA NOTION DE SURFACE INVARIANTE DANS LES PHÉNOMÈNES PHYSIQUES.

104. Énoncé du principe.	140
-------------------------------	-----

I. — Étude de la forme $U_1 U^n$.

105. Les surfaces invariantes J_{n+1}, J_n, \dots, J_1 associées à la forme $U_1 U^n$.	142
106. Toute forme $U_1 U^n$ est une somme de covariants des surfaces J_{n+1}, J_n, \dots, J_1 .	143
107-109. Relations d'invariance	144
110-111. La fonction vectorielle homogène.	147

II. — Applications de la formule de décomposition de $U_1 U^n$.

112. Étude cinématique des déformations.	149
113. Le potentiel interne à 45 coefficients est défini par 6 surfaces.	151
114-115. Pyroélectricité. Hypothèse de lord Kelvin.	152
116-121. Piézoélectricité. Les trois surfaces invariantes J_3, J_2, J_1 . Applications : quartz, sel de Seignette, chlorate de soude, calamine, topaze, tourmaline.	153
122-124. Polarisation rotatoire magnétique. Hypothèse de Maxwell. Généralisation de la loi de Verdet.	159

Numéros.		Pages.
125-127.	Autres phénomènes dont l'étude se rattache à celle de la forme $U_1 U^n$	162
III. — La formule de récurrence des fonctions multilinéaires ramenée à une identité arithmétique.		
128-134.	164
IV. — Applications de la formule de récurrence.		
135-145.	Forme trilinéaire $U_1 U_2 U_3$. Forme biquadratique $U_1^2 U^2$. Forme $U_1^3 U^n$.	172
V. — Applications de la formule de décomposition de $U_1^2 U^2$.		
146-150.	Dureté. Dispersion normale. Piézo-optique. Phénomène de Kerr.	183

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Pages. Lignes.	<i>Au lieu de :</i>	<i>Lire :</i>
6 22	transversal	transversal
7 8	$\frac{dT_1}{dx}$	$\frac{dT_2}{dx}$
15 6	$x_1 \ z_1 \ y_1$	$x_1 \ y_1 \ z_1$
23 21	h	k
42 1,2	P'un des deux groupes d'équations (8') ou (8'')	le groupe d'équations (8'')
46 Note	Ajouter T. II, 6 ^e Série.	
47 21	$\int \left\{ \sum \rho \frac{du}{dt} \delta u \right\}_{t_0} d\omega$	$\int \left\{ \sum \rho \frac{du}{dt} \delta u \right\}_{t_0}^{t_1} d\omega$
47 21	\int_{t_0}	$\int_{t_0}^{t_1}$
49 20	$+ \delta \int W d\omega$	$+ \delta \int W d\omega = 0$
50 31	$(A'' u_1 + B'' v_1 + C'' w_1)$	$(A'' u_1 + B'' v_1 + C'' w_1)^2$
58 24	L'invariant $\frac{1}{6} \Delta F_1$	Le covariant $(x^2 + y^2 + z^2) \frac{1}{6} \Delta F_1$
62 16	M, M'	N, N'
62 18	$\frac{MM_1}{MM_2}$	$\frac{NM_1}{NM_2}$
64 13,14	$u' = \lambda'_1 u'_1 + \lambda'_2 u'_2 \dots$ etc.	$u' = \lambda'_1 u'_1 + \lambda'_2 u'_2 \left\{ \begin{array}{l} \lambda'_1 = \lambda_1 e^{i \frac{2\pi}{\tau} \frac{e}{V_1}} \\ \lambda'_2 = \lambda_2 e^{i \frac{2\pi}{\tau} \frac{e}{V_2}} \end{array} \right.$ de P, Q, R
102 26	P, Q, R	
108 5	C_n	C_n
108 12	A_1	C_1
108 12	A_2	C_2
108 13	A_1	A'_2
108 14	C_1	C'_2
113 18	$= -v$	$= -v$
120 4	$B' + q$	$B' - q$
142 26	$a_{n+1} [a^n a_1]$	$a_{n+1} = [a^n a_1]$
143 10	$J_{n-p+1} = V_{p+1} J^{n-p}$	$J_{n-p+1} = V_{p+1} V^{n-p}$
155 4	$p'_v = 0$	$p'_v = p$
158 16	σ	z
158 18	$-by^2$	$+by^2$
173 28	x_2	x_1

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

BOUSSINESQ (J.), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Théorie analytique de la Chaleur**, mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la Théorie mécanique de la Lumière. (COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.) Deux volumes grand in-8 se vendant séparément :

TOME I : *Problèmes généraux*. Volume de xxvii-333 pages avec 14 figures; 1901..... 10 fr.

TOME II : *Refroidissement et échauffement par rayonnement. Conductibilité des tiges, lames et masse cristalline. Courants de convection. Théorie mécanique de la lumière*. Volume de xxxii-625 pages; 1903..... 18 fr.

MASCART (E.), Membre de l'Institut, professeur au Collège de France, Directeur du Bureau central météorologique. — **Traité d'Optique**. 3 volumes grand in-8 avec Atlas, se vendant séparément.

TOME I : *Systèmes optiques. Interférences. Vibrations. Diffraction. Polarisation. Double réfraction*. Avec 199 fig. et 2 pl.; 1889... 20 fr.

TOME II et ATLAS : *Propriétés des cristaux. Polarisation rotatoire. Réflexion vitrée. Réflexion métallique. Réflexion cristalline. Polarisation chromatique*. Avec 113 figures et Atlas contenant 2 belles planches sur cuivre dont une en couleur (Propriétés des cristaux. Coloration des cristaux par les interférences); 1891..... 25 fr.

TOME III : *Polarisation par diffraction. Propagation de la lumière. Photométrie. Réfractions astronomiques*. Avec 83 figures; 1894. 20 fr.

LAURENT (H.), Examinateur d'admission à l'École Polytechnique. — **Traité d'Analyse**. 7 volumes in-8, avec figures.

TOME I : *Calcul différentiel. Applications analytiques*; 1885. 10 fr.

TOME II : *Applications géométriques*; 1887..... 12 fr.

TOME III : *Calcul intégral. Intégrales définies et indéfinies*; 1888..... 12 fr.

TOME IV : *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*; 1889..... 12 fr.

TOME V : *Équations différentielles ordinaires*; 1890..... 10 fr.

TOME VI : *Équations aux dérivées partielles*; 1890.... 8 fr. 50 c.

TOME VII ET DERNIER : *Applications géométriques de la théorie des équations différentielles*; 1891..... 8 fr. 50 c.

RAFFY (L.), Maître de Conférences à la Faculté des Sciences et à l'École Normale supérieure. — **Leçon sur les applications géométriques de l'Analyse. Éléments de la théorie des courbes et des surfaces**. Grand in-8, avec figures; 1897..... 7 fr. 50 c.