Ecole
Polytechnique.

2e Division.

1888-89.

Cours de Mécanique et Machines.

M. Sarrau Professeur.

Introduction.

1. La Mécanique est la science du mouvement et des forces.

Un corps est dit en mouvement lorsqu'il occupe successivement différentes positions dans l'espace.

Un corps en repos ne passe pas de lui même à l'état de mouvement, une fois en mouvement, il continue de lui même à se mouvoir suivant certaines lois. Lorsqu'un corps passe de l'état de repos à l'état de mouvement ou lorsque, en mouvement, il se meut suivant des lois différentes de celles dont nous venons de parler, il est nécessairement soumis à l'action des causes extérieures. Ces causes s'appellent forces.

2. — Pendant longtemps, l'enseignement de la Mécanique s'est fait en divisant cette science en deux branches distinctes : la Statique et la Dynamique.

La Statique est la science de l'équilibre résultant de la destruction de plusieurs forces anéantissant mutuellement les actions qu'elles exercent sur un même corps.

La Dynamique est la science du mouvement des corps soumis à l'action des forces.

L'étude de l'équilibre précédait celle du mouvement et cette subordination de la Dynamique à la Statique était de l'avis de savants éminents, conforme au fond même des choses.

Elle tenait compte d'abord de l'ordre chronologique des découvertes puisque dix-huit siècles séparent l'origine de la statique de l'origine de la Dynamique, c'est à dire Archimède de Galilée. « Mais une considération plus puissante était celle des principes sur lesquels ces deux sciences étaient fondées. Elles dépendent l'une et l'autre à des degrés différents des lois assignées au monde matériel. Leurs bases doivent donc être des résultats de l'observation ou des hypothèses. Or, la science du mouvement en exige un plus grand nombre que celle de l'équilibre, et si certaines lois de la nature étaient modifiées, la Dynamique serait entièrement changée tandis que la statique resterait encore ce qu'elle est. » (Duhamel.)

3. – En 1851, à la suite d'une réforme dont l'initiative est principalement due à Poncelet, l'enseignement de la Mécanique a subi des modifications qui, appliquées d'abord à l'Ecole Polytechnique se sont ensuite généralisées. Suivant le mode d'enseignement rigoureusement conforme à l'esprit de cette méthode, la Mécanique se divise en deux branches distinctes : la Cinématique et la Dynamique.

On peut étudier d'abord le mouvement des corps sans avoir égard aux causes qui produisent ou modifient ce mouvement, c'est à dire sans s'occuper des forces. Cette étude, dans laquelle on peut considérer les corps comme des systèmes purement géométriques en faisant abstraction de la matière dont ils sont formés, constitue une branche particulière de la science à laquelle Ampère a donné le nom de Cinématique.

On considère déja des mouvements en géométrie ; c'est, par exemple, en faisant mouvoir des lignes que l'on engendre des surfaces ; mais en Géométrie, on ne s'occupe que des positions successives des figures et non du temps que ces figures mettent à changer de position. Dans la Cinématique, l'idée de temps se joint à celle de déplacement.

Quand aux idées de déplacement et de temps, on joint celle de force, on entre dans la Dynamique, et les notions fondamentales sur les forces s'établissent par la considération simultanée des forces et des mouvements qu'elles produisent. L'équilibre n'est qu'un cas particulier dont les conditions résultent des lois générales suivant lesquelles s'exercent les effets des forces ; ces conditions se déduisent alors d'un principe célèbre dû à Lagrange, fondé sur la considération d'un élément dont la notion dérive essentiellement de celle du mouvement. (Principe des vitesses virtuelles ou du travail virtuel).

4. – Chacune de ces méthodes d'enseignement offre des avantages et des inconvénients.

Ainsi que l'avait remarqué Lagrange, il est singulier qu'ayant défini la force une cause de mouvement, on puisse établir toute une partie de la science des forces sans s'appuyer sur la considération du mouvement ; et cette anomalie peut faire craindre qu'il n'y ait dans l'ancien mode d'exposition débutant par la Statique, quelque procédé déductif qui ne soit réellement pas dans la nature des choses.

D'autre part, dans la nouvelle théorie, l'application du principe du travail virtuel ne constitue qu'une méthode artificielle qui, tout en établissant avec une véritable élégance géométrique, les conditions générales de l'équilibre des systèmes matériels, dissimule l'essence même du sujet et convainc plutôt qu'elle n'éclaire l'esprit sur le fond même de la question.

5. – Les évolutions scientifiques sont quelquefois excessives et l'œuvre du temps est souvent nécessaire pour y apporter la mesure. Le moment paraît venu d'emprunter des éléments à l'une et à l'autre des deux méthodes et d'exposer l'enchaînement des idées que comporte l'étude de la Mécanique en faisant concourir celle des données des deux systèmes qui paraissent constituer le développement logique de la théorie.

Dans cet ordre d'idées, nous exposerons d'abord la Cinématique, puis les notions sur les forces et leur mode d'action basées sur les lois qui, d'après l'observation, paraissent régir le mouvement de la matière. Suivront enfin sans distinction essentielle l'étude de l'équilibre et l'étude du mouvement; mais dans l'étude de l'équilibre, nous reviendrons fréquemment à l'ancien mode d'exposition qui, en cet objet spécial, offre l'avantage d'une plus grande lucidité.

En résumé, l'exposé de la Mécanique rationnelle ordonné comme il vient d'être dit, comprendra quatre parties principales réparties dans les deux années d'études:

1ère partie. – Cinématique.
2e partie. – Equilibre et mouvement d'un point matériel.
3e partie. – Equilibre des systèmes matériels.
4e partie. – Mouvement des systèmes matériels.

6. – Trois chapitres spéciaux, relatifs à la gravitation universelle, à l'élasticité des corps solides et à la théorie mécanique de la chaleur donneront des exemples de la corrélation qui unit la Mécanique à la Physique. La connexion de ces deux sciences est rendue chaque jour plus manifeste par le progrès incessant des connaissances humaines; la question est de savoir si l'unité des théories physiques viendra se réaliser dans les principes qui servent aujourd'hui de base à la Mécanique rationnelle ou si, au contraire, ces principes ne devront pas être modifiés en quelques points par la connaissance plus profonde que la Physique pourra un jour nous donner de la nature des choses.

7. – Presque toutes les déductions de la Mécanique peuvent se présenter soit sous la forme synthétique ou géométrique, soit sous la forme analytique.

Fondée par Galilée et Huyghens, et surtout par Newton, pour qui elle fut l'occasion de la découverte du Calcul infinitésimal, cette doctrine s'est élevée, se perfectionnant avec les procédés analytiques, grandissant à chaque progrès des théories géométriques ; elle s'est résumée enfin sous une forme qui paraît définitive et à laquelle les découvertes ultérieures n'apportent sans doute rien de capital, dans la Mécanique analytique, œuvre admirable de Lagrange.

« Dans cette œuvre, dit Lagrange, on ne trouvera point de figures. Les méthodes que j'y expose, ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques assujetties à une marche régulière et uniforme. »

Mais si belle qu'elle soit, l'œuvre de Lagrange a pu être considérée comme le développement excessif d'un système et il n'est pas étonnant qu'elle ait amené dans les méthodes d'enseignement une réaction également excessive qui a voulu faire des méthodes géométriques, l'outil exclusif de la Mécanique.

Dans ce Cours, on emploiera soit la méthode synthétique, soit la méthode analytique, quelquefois les deux méthodes. La méthode synthétique d'un usage généralement plus difficile, oblige l'esprit par cette difficulté même, à pénétrer plus avant dans la substance du sujet ; la méthode analytique a, dans tous les cas l'avantage de donner un procédé uniforme d'investigation ; elle seule d'ailleurs fournit, en général, la solution complète des questions, en amenant naturellement cette solution au point précis où peuvent commencer les applications numériques.

8. – La Mécanique appliquée est la base de la science de l'Ingénieur. Ses progrès qui ont été considérables dans ces dernières années, sont solidaires de ceux de la Mécanique rationnelle, de sorte que les recherches faites en vue d'applications, ont été fréquemment l'origine de découvertes théoriques importantes. Ce Cours ne comporte pas la description détaillée des Machines si variées que l'on emploie dans l'Industrie ; on se bornera à exposer des notions générales qui seront la transition entre le cours de l'Ecole Polytechnique et les cours des Ecoles d'application.

Préliminaires.

Notions géométriques.

Chapitre 1er

Directions et vecteurs.

a. - Directions.

1 - Définition - Une droite quelconque présente deux directions correspondant aux deux sens dans lesquels un point mobile peut décrire cette droite à partir d'un de ses points.

Pour déterminer une direction issue d'un point quelconque de l'espace, il suffit de lui mener, dans le même sens, une parallèle OA par l'origine O d'un système d'axes coordonnés rectangulaires et de donner les angles (α, β, γ) de OA avec les directions positives OX, OY, OZ de ces axes.

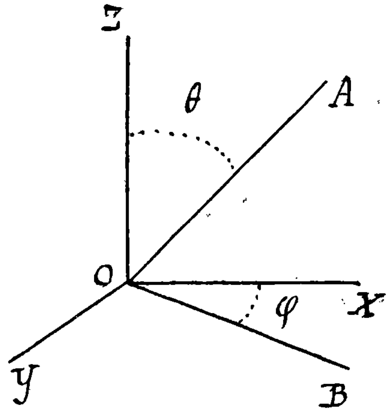
Pour représenter toutes les directions possibles autour du point O, il faut et il suffit que les angles (α, β, γ) s'étendent depuis zéro jusqu'à π.

Au lieu des angles (α, β, γ) on peut prendre leurs cosinus (a, b, c), puisque de 0 à π il n'y a qu'un seul angle ayant un cosinus donné.

La direction <u>opposée</u> est caractérisée par des <u>cosinus directeurs</u> égaux aux précédents et de signe contraire.

Entre les cosinus (a, b, c) existe la relation $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

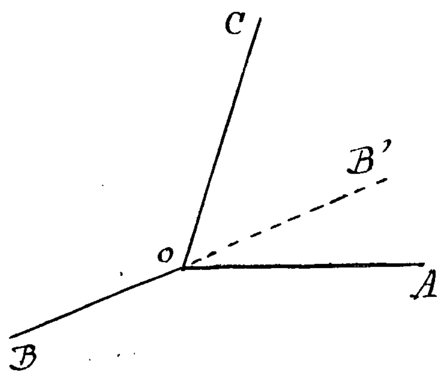
2. - Au lieu des trois angles (α, β, γ) liés entre eux par la relation précédente, on peut déterminer une direction OA, avec deux angles indépendants l'un de l'autre, en donnant:



1° l'angle θ que OA fait avec OZ,
2° l'angle φ que fait, avec OX, la trace OB, sur le plan XOY, du plan déterminé par OA et OZ.
Les angles (θ, φ) et les cosinus directeurs (a, b, c) sont liés par les relations :

$$a = \sin\theta\cos\varphi$$
$$b = \sin\theta\sin\varphi$$
$$c = \cos\theta.$$

3.– Trièdres directs et inverses.– Soit un trièdre OABC formé par trois directions issues d'un point O ; supposons qu'un observateur se place le long de OA, les pieds en O, et que, pour cet observateur, la rotation qui amènerait OB sur OC s'effectue de gauche à droite ; il en sera de même si l'observateur se place sur OB pour voir tourner OC vers OA, et enfin sur OC pour voir tourner OA vers OB. On dit alors que le trièdre est <u>direct</u> ; dans le cas contraire, le trièdre est <u>inverse</u>.

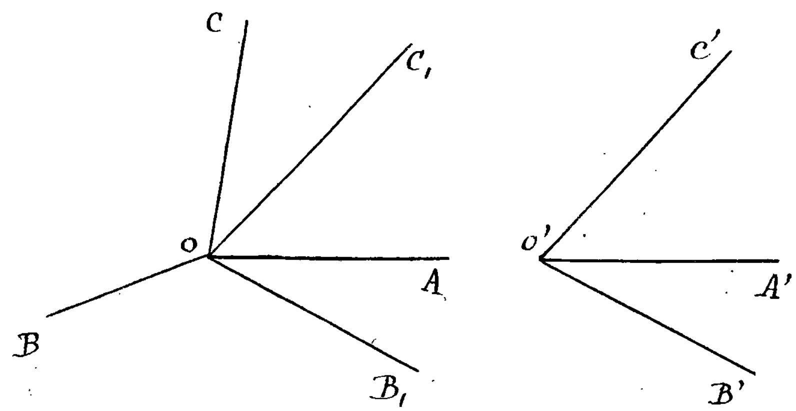


Par exemple, le trièdre OAB'C, obtenu en substituant à OB la direction opposée OB', est inverse, car OA voit s'effectuer de droite à gauche la rotation qui amènerait OB' sur OC.

Dans la disposition la plus ordinaire, les directions positives des axes d'un système de coordonnées rectilignes forment un trièdre direct OXYZ.

4.– Nous dirons que des trièdres, tous directs, ou tous inverses, ont le même <u>sens de rotation</u>.

Lorsque deux trièdres OABC, O'A'B'C' ont le même sens de rotation, on peut amener l'un d'eux à coïncider avec l'autre, en le déplaçant et en le déformant d'une manière continue, sans que, par suite de la déformation, ses <u>arêtes soient jamais dans un même plan</u>.



En effet, déplaçons le trièdre $O'A'B'C'$ de manière que O' vienne en O, $O'A'$ en OA, le plan $A'O'B'$ sur le plan AOB, et de telle sorte que OC et $O'C'$ soient du même côté de ce plan.

Soit OAB_1C_1 le trièdre ainsi transporté ; OB_1 sera du même côté de OA que OB ; par suite, en déformant ce trièdre de manière que OB_1 vienne d'abord sur OB, puis OC_1 sur OC, la coïncidence se fera sans que, dans ces déformations, le trièdre ait jamais eu ses arêtes dans un même plan.

5.– Caractère analytique du sens de la rotation d'un trièdre.– On peut reconnaître le sens de la rotation d'un trièdre $OABC$ en le comparant au trièdre direct $OXYZ$ d'un système de coordonnées rectangulaires.

Désignons par les lettres (a, b, c) successivement affectées des indices 1, 2, 3, les cosinus directeurs des directions OA, OB, OC et considérons le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Supposons que le trièdre $OABC$ soit direct ; si nous le déformons de manière à établir la coïncidence avec $OXYZ$, Δ variera d'une manière continue, mais sans jamais devenir nul, car $\Delta = 0$ indiquerait que les trois arêtes sont dans un même plan ; donc le déterminant Δ gardera un signe constant et ce signe est +, car, quand la coïncidence est obtenue, on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{vmatrix} = +1.$$

Supposons que le trièdre $OABC$ soit inverse ; en substituant à l'une de ses arêtes la direction opposée, on a un trièdre direct dont le déterminant Δ' est positif ; mais Δ' est égal à $-\Delta$, donc Δ est négatif.

D'où cette règle : "<u>suivant qu'un trièdre est direct ou inverse, son déterminant est positif ou négatif.</u>"

6.- Perpendiculaire commune à deux directions.- Considérons deux directions OA, OA' dont les cosinus directeurs sont (a, b, c) et (a', b', c'). Soient (l, m, n) les cosinus directeurs de la perpendiculaire commune à ces deux directions ; on a les équations

$$\begin{aligned} al + bm + cn &= 0 \\ a'l + b'm + c'n &= 0 \\ l^2 + m^2 + n^2 &= 1 \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\frac{l}{bc' - cb'} = \frac{m}{ca' - ac'} = \frac{n}{ab' - ba'} = \pm \frac{1}{D}$$

en posant

$$D^2 = (bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2$$

la valeur de D^2 pouvant être mise sous la forme

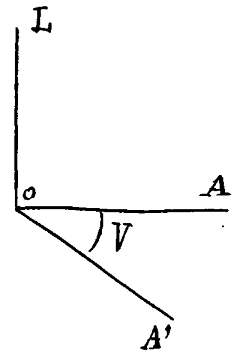
$$(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2$$

on voit qu'elle est égale à $1 - \cos^2 V = \sin^2 V$, en désignant par V l'angle des deux directions. On a donc les formules

$$(1) \qquad \frac{l}{bc' - cb'} = \frac{m}{ca' - ac'} = \frac{n}{ab' - ba'} = \pm \frac{1}{\sin V}.$$

Le double signe correspond aux directions opposées que présente, à partir de l'un de ses points, la perpendiculaire commune aux directions OA, OA' ; on détermine ce signe en définissant, comme il suit, <u>l'axe de deux directions</u>

7.- Axe de deux directions.- On appelle axe de deux directions (OA, OA') celle des deux directions perpendiculaires au plan AOA' suivant laquelle un observateur ayant les pieds en O, doit se placer pour voir s'effectuer de gauche à droite la rotation qui amènerait OA sur OA'. Soit OL cette direction ; il résulte de la définition que le trièdre OAA'L est direct et, par suite, le déterminant



$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ l & m & n \end{vmatrix}$$

doit être positif. Or, d'après les relations (1), on trouve

$$\Delta = \pm \sin V$$

et de plus l'angle V variant de 0 à π, sin V est positif ; on doit donc prendre le signe +.

On voit donc que les cosinus directeurs (l, m, n) de l'axe de deux directions (a, b, c), (a', b', c') sont donnés par les relations

$$(2) \qquad \frac{l}{bc' - cb'} = \frac{m}{ca' - ac'} = \frac{n}{ab' - ba'} = \frac{1}{\sin V}.$$

où l'on désigne par V l'angle des deux directions.

b - Vecteurs.

8. - Définition. - On appelle vecteur le segment de droite joignant deux points A, B de l'espace.

Un vecteur présente naturellement une grandeur qui est la longueur AB ; on lui attribue de plus une direction que l'on détermine en concevant le segment AB comme décrit par un point mobile allant, soit de A vers B, soit de B vers A.

On convient de désigner un vecteur par l'ensemble des deux lettres qui désignent ses extrémités et on fixe la direction qu'on lui assigne en énonçant d'abord celle de ces deux lettres qui se rapporte au point choisi comme point de départ. Ainsi le vecteur AB est décrit par un mobile allant de A vers B et le vecteur BA de même grandeur que le précédent et de direction opposée, est décrit par un mobile allant de B vers A.

On peut représenter par un vecteur toute quantité géométrique, mécanique ou physique, présentant à la fois une grandeur et une direction.

9. – On détermine un vecteur AB, dans un système de coordonnées rectilignes, en donnant les coordonnées (x, y, z) de A, qui est <u>l'origine</u> du vecteur, et les excès (X, Y, Z) des coordonnées de B sur les coordonnées de A.

Les <u>paramètres</u> (X, Y, Z) déterminent la grandeur et la direction du vecteur; les coordonnées (x, y, z) fixent sa position dans l'espace.

10. – Deux vecteurs ayant la même grandeur et la même direction sont dits <u>identiques</u>.

Si deux vecteurs ont des grandeurs égales et sont parallèles avec des directions opposées, on dit qu'ils forment un <u>couple</u>; leurs paramètres (X, Y, Z) sont alors égaux et de signe contraire.

Si deux vecteurs ont des directions opposées et sont en ligne droite, on dit qu'ils sont <u>directement opposés</u>.

11. – Vecteur résultant d'un système de vecteurs. – Soient A_1B_1, A_2B_2, ... A_nB_n, des vecteurs en nombre quelconque. Concevons que l'on mène, à partir d'une origine O, une droite OI_1 ayant la même direction et la même grandeur que A_1B_1; à partir de I_1, une droite I_1I_2 ayant la même direction et la même grandeur que A_2B_2; et ainsi de suite, de manière à placer bout à bout les vecteurs considérés, en les transportant parallèlement à eux mêmes; joignons enfin le point O à l'extrémité I_n de la dernière droite. Le vecteur OI_n est ce que l'on appelle le <u>vecteur résultant</u> des vecteurs AB, lesquels sont dits vecteurs <u>composants</u>. (1)

Le vecteur résultant de deux vecteurs est évidemment la diagonale du parallélogramme construit sur ces vecteurs.

De même, le vecteur résultant de trois vecteurs est la diagonale du parallélipipède construit sur ces vecteurs.

Les paramètres (X, Y, Z) d'un vecteur sont souvent désignés sous le nom de <u>composantes de ce vecteur suivant les axes</u>.

---

(1) On dit souvent <u>résultante</u> et <u>composantes</u> en sous-entendant le mot droite substitué au mot vecteur.

12. – *Théorème* – Si l'on projette sur un plan plusieurs vecteurs et leur vecteur résultant, la projection de celui-ci est la résultante des projections des vecteurs. – On le voit immédiatement en projetant le polygone de composition sur le plan.

13. – *Théorème* – La projection du vecteur résultant sur un axe est égale à la somme algébrique des projections des vecteurs composants.

Ce théorème, dont on se borne à donner ici l'énoncé, est démontré en géométrie analytique. La propriété qu'il établit n'appartient qu'au vecteur résultant, deux droites ne pouvant avoir constamment leurs projections égales sans être identiques en grandeur et en direction.

14. – Expressions analytiques. – Considérons n vecteurs ; soient

$$(X_1, Y_1, Z_1)\ ,\ (X_2, Y_2, Z_2), \dots\dots\dots (X_n, Y_n, Z_n).$$

leurs paramètres et désignons par (P, Q, R) les paramètres du vecteur résultant. On a, d'après le théorème précédent.

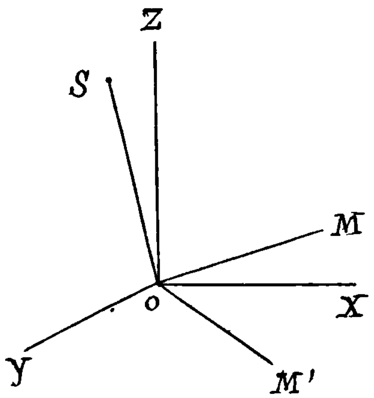
$$P = X_1 + X_2 + \dots\dots\dots + X_n$$
$$Q = Y_1 + Y_2 + \dots\dots\dots + Y_n$$
$$R = Z_1 + Z_2 + \dots\dots\dots + Z_n$$

En désignant par (X, Y, Z) les paramètres de l'un quelconque des vecteurs et par Σ une somme de termes semblables s'étendant à tous ces vecteurs, on a les relations

$$(3)\qquad \begin{aligned} P &= \Sigma X \\ Q &= \Sigma Y \\ R &= \Sigma Z \end{aligned}$$

et, inversement, si ces trois relations ont lieu, on en conclut que le vecteur (P, Q, R) est le résultant des vecteurs (X, Y, Z)

15. – Problème – Etant donnés deux vecteurs (OM, OM') exprimer les composantes, suivant trois axes rectangulaires, du vecteur OS obtenu en portant sur l'axe des directions de ces vecteurs une longueur numériquement égale à l'aire du parallélogramme construit sur leurs longueurs.



Soient (X, Y, Z), (X', Y', Z') et (A, B, C) les composantes suivant les axes des vecteurs OM, OM' et OS; désignons par R, R' les longueurs des vecteurs OM, OM' et par V l'angle MOM', de sorte que le produit $RR' \sin V$ mesure l'aire du parallélogramme construit sur ces vecteurs.

Les cosinus directeurs des directions OM, OM' sont

$$\frac{X}{R}, \frac{Y}{R}, \frac{Z}{R} \quad \text{et} \quad \frac{X'}{R'}, \frac{Y'}{R'}, \frac{Z'}{R'}$$

et, par suite, en appelant (l, m, n) les cosinus directeurs de l'axe des directions (OM, OM'), on a, d'après les formules (2)

$$\frac{l}{YZ' - ZY'} = \frac{m}{ZX' - XZ'} = \frac{n}{XY' - YX'} = \frac{1}{RR' \sin V}.$$

D'ailleurs, les composantes (A, B, C) sont respectivement égales aux produits de (l, m, n) par l'aire $RR' \sin V$; on a donc

$$(4) \qquad \begin{aligned} A &= YZ' - ZY' \\ B &= ZX' - XZ' \\ C &= XY' - YX' \end{aligned}$$

Ces expressions seront fréquemment utilisées; pour les retrouver, il suffit d'écrire sur deux lignes horizontales:

1° les composantes (X, Y, Z) du premier vecteur,

2° les composantes (X', Y', Z') du second vecteur,

et de former circulairement les trois déterminants

$$\begin{vmatrix} Y & Z \\ Y' & Z' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} Z & X \\ Z' & X' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} X & Y \\ X' & Y' \end{vmatrix}$$

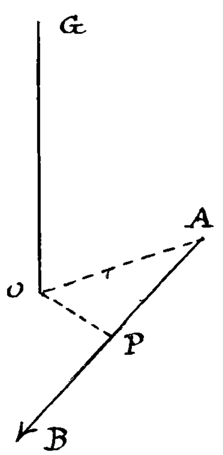
16.— La résultante d'un système de vecteurs porte aussi le nom de somme géométrique. Le nom se justifie par ce fait que l'opération qui constitue la somme algébrique peut être considérée comme un cas particulier de celle qui sert à construire le vecteur résultant, ce cas se présentant lorsque tous les vecteurs sont en ligne droite.

Chapitre II.

Théorie des Moments.

a – Moments par rapport à un point.

17 – Définition – Etant donnés un vecteur AB et un point O, on appelle moment de ce vecteur par rapport à ce point un vecteur OG dont on définit comme il suit la grandeur et la direction :



1° la grandeur du moment est égale à celle du vecteur AB multipliée par la distance OP de ce vecteur au point O ;

2° la direction est perpendiculaire au plan déterminé par le vecteur AB et le point O, et telle qu'un observateur, ayant les pieds en O et la tête en G, voit le vecteur AB dirigé de gauche à droite.

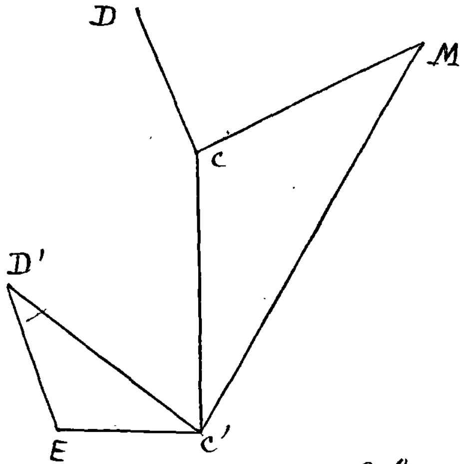
Le point O est le <u>centre</u> du moment et le vecteur OA, joignant le centre à l'origine du moment, est son <u>rayon</u>.

18 – Remarques. – 1° la grandeur du moment est égale à l'aire du parallélogramme construit sur le vecteur considéré et sur son rayon.

2° Pour qu'un moment soit nul, il faut et il suffit que la direction du vecteur passe par le centre.

3° Il est évident que le moment d'un vecteur par rapport à un point ne change pas lorsque l'on transporte l'origine de ce vecteur d'un point à un autre de sa direction, ou bien lorsque l'on transporte le centre du moment d'un point à un autre d'une parallèle à ce vecteur.

19. – Relation entre les moments d'un vecteur par rapport aux divers points de l'espace. – Connaissant le moment d'un vecteur AB par rapport à un point O, cherchons le moment de ce vecteur par rapport à un autre point quelconque O'.



Prenons le plan de la figure perpendiculaire au vecteur, de manière qu'il se projette en un seul point M; soient O.O' les projections de C.C' sur ce plan. Les distances des deux centres au vecteur se projetant en vraie grandeur suivant CM et C'M, les moments correspondants sont des droites CD, C'D' perpendiculaires à MC, MC' et respectivement égales aux produits MC * AB, MC' + AB.

Cela posé, menons par D' un vecteur D'E identique à DC et joignons C'E; on voit que C'E est perpendiculaire à CC' et est égal à C'C × AB. Donc C'E représente le moment, par rapport à O' d'un vecteur identique à AB mené par le point O; d'ailleurs, C'D' est la résultante de C'E et de ED'. On en conclut ce théorème:

Le moment d'un vecteur par rapport à un point quelconque O' de l'espace est égal à la résultante du moment de ce vecteur par rapport à un point déterminé O et du moment, par rapport à O', d'un vecteur, identique au vecteur donné, mené par le point O.

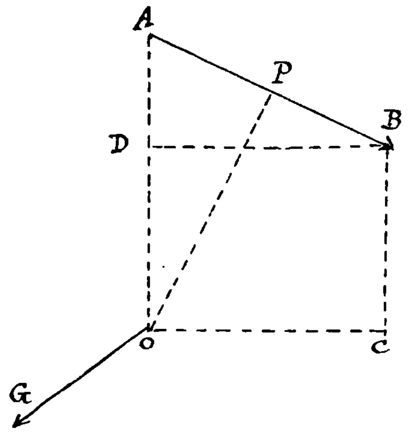
20. – Moment résultant d'un système de vecteurs. – Considérons un système de vecteurs distribués d'une manière quelconque dans l'espace; supposons que l'on prenne les moments de ces vecteurs par rapport à un même point. Ces moments étant représentés par des vecteurs, on peut les composer suivant la règle du n° 11. le vecteur résultant ainsi obtenu est ce que l'on appelle le moment résultant du système de vecteurs considéré.

Si les vecteurs sont dans un même plan et que le centre commun des moments soit pris dans ce plan, tous les moments sont portés sur une même perpendiculaire au plan et leur résultante devient la somme algébrique de tous ces moments.

21. – Moment résultant d'un système de vecteurs concourants. – Les propositions suivantes se rapportent au cas particulier où tous les vecteurs du système ont une origine commune A.

Lemme : Le moment d'un vecteur AB par rapport à un point O s'obtient en projetant AB sur un plan perpendiculaire à OA, multipliant cette projection par OA et la faisant tourner d'un angle droit, autour de OA, de gauche à droite pour un observateur ayant les pieds en O et la tête en A.

Soit, en effet, OC la projection de AB sur le plan mené par le point O perpendiculairement à OA ; faisons tourner OC d'un angle droit, de gauche à droite, autour de OA et, sur la direction ainsi obtenue, prenons une longueur OG égale au produit de OC par OA ; je dis que OG représente, en grandeur et en direction, le moment de AB par rapport au point O.



En effet, menant BD perpendiculaire à OC et OP perpendiculaire à AB, on a

$$OC \times OA = BD \times OA = AB \times OP.$$

De plus, la direction OG est perpendiculaire au plan déterminé par le vecteur AB et le point O, et elle est telle qu'un observateur placé suivant OG voit AB dirigé de gauche à droite.

Théorème : Le moment résultant d'un système de vecteurs concourants est égal au moment du vecteur résultant de ce système.

Soient en effet

O le centre des moments,

AB_1, AB_2, ... AB_n des vecteurs issus d'un même point A,

OC_1, OC_2, ... OC_n les projections de ces vecteurs sur un plan P mené par le point O perpendiculairement à OA,

AH le vecteur résultant du système.

OH la projection de ce vecteur résultant sur le plan P, OK est la résultante de OC_1, OC_2, ... OC_n (n° 12) ; si donc l'on fait tourner toutes ces droites d'un angle droit, de gauche à droite, autour de OA, en les multipliant par la constante OA, on obtiendra des vecteurs OG et OG_1, OG_2, ... OG_n tels que OG est la résultante de OG_1, OG_2, ... OG_n. Mais d'après le lemme, OG est le moment de la résultante des vecteurs concourants et OG_1, OG_2 ...... OG_n sont les moments de ces vecteurs ; le théorème est donc démontré.

Corollaire. – Etant donnés des vecteurs concourants dans un plan et un centre des moments dans ce plan, le moment de la résultante est égal à la somme algébrique des moments des composantes. (Théorème de Varignon)

Remarque. – On ne change pas le moment résultant d'un système de vecteurs en remplaçant plusieurs vecteurs concourants par leur résultante, ou bien en remplaçant un vecteur par d'autres vecteurs ayant la même origine que lui et dont il soit la résultante.

En effet, d'après le théorème précédent, remplacer plusieurs vecteurs par leur résultante revient à remplacer les moments correspondants par leur résultante, ce qu'il faut faire pour obtenir le moment résultant.

22. Relation entre les moments résultants d'un système de vecteurs par rapport aux divers points de l'espace.

D'après le théorème n° 19, si l'on veut former le moment résultant d'un système de vecteurs par rapport à un point quelconque O', connaissant le moment résultant de ce système par rapport à O, on devra mener par le point O des vecteurs identiques aux vecteurs donnés et former leur moment résultant ; mais ce moment résultant est égal, puisque les vecteurs sont issus d'un même point O, au moment de leur résultante, laquelle est identique au vecteur résultant du système, d'où résulte ce théorème :

Le moment résultant d'un système de vecteurs par rapport à un point quelconque O' de l'espace est égal à la résultante du moment résultant de ce système par rapport à un point déterminé O et du moment, par rapport à O', d'un vecteur identique au vecteur résultant du système mené par le point O.

Corollaire I. – Le moment résultant d'un système de vecteurs dont le vecteur résultant est nul est le même pour tous les points de l'espace.

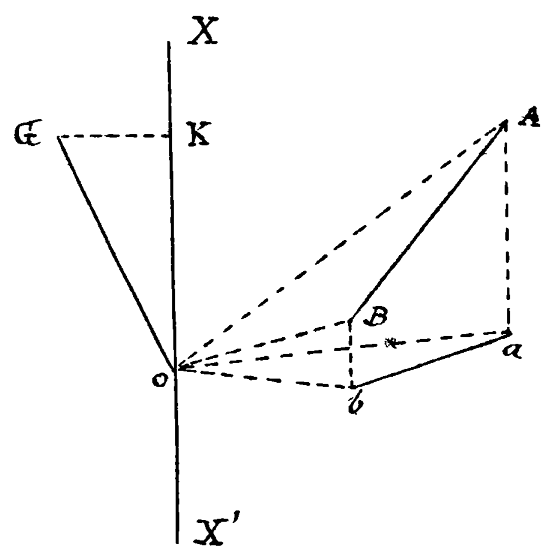
Corollaire II. – La projection du moment résultant sur la direction du vecteur résultant est la même pour tous les points de l'espace.

En effet, si l'on projette, sur la direction du vecteur résultant
1°. le moment résultant par rapport à O,
2°. le moment résultant par rapport à O',
3°. le moment, par rapport à O', du vecteur résultant mené par le point O,

la projection du premier de ces moments est, d'après le théorème, la somme des projections des deux autres; or, le troisième moment a une projection nulle, puisqu'il est perpendiculaire au vecteur résultant.

b – Moments par rapport à un axe.

23. – Définition. – Étant donnés un vecteur AB et un axe XX', on appelle <u>moment de ce vecteur par rapport à cet axe</u> le moment OK de la projection ab de ce vecteur sur un plan perpendiculaire à l'axe, par rapport à la trace o de l'axe sur ce plan.



Ce moment est indépendant de la position du plan perpendiculaire à l'axe; lorsque ce plan se meut parallèlement à lui même, le triangle aob reste constant et l'origine o du moment se déplace seulement le long de l'axe XX'.

Lorsqu'on prend les moments de plusieurs vecteurs par rapport à un même axe, celui ci prend le nom <u>d'axe des moments</u>.

24. – Remarques. – 1°. Il résulte immédiatement de la définition que la grandeur du moment d'un vecteur par rapport à un axe est égal au <u>produit de la projection du vecteur sur un plan perpendiculaire à l'axe par la plus courte distance entre le vecteur et l'axe</u>.

2° <u>pour que le vecteur soit nul</u>, il faut et il suffit qu'un des deux facteurs de ce moment soit nul, c'est à dire que la projection du vecteur soit nulle et ce vecteur est alors parallèle à l'axe, ou bien que la plus courte distance soit nulle et alors la direction du vecteur rencontre l'axe.

Ces deux cas sont compris dans l'énoncé suivant :
Le moment d'un vecteur par rapport à un axe est nul quand le vecteur et l'axe sont dans un même plan.

25 – Théorème : Le moment d'un vecteur par rapport à un axe est égal à la projection sur cet axe du moment du vecteur par rapport à un point quelconque de l'axe.

Soit OG le moment de AB par rapport à un point O de l'axe XX' (fig du n° 23) ; ce moment s'obtient en prenant sur une perpendiculaire au plan déterminé par le point O et le vecteur AB, dans une direction telle que OG voit AB dirigé de gauche à droite, une longueur égale au double de l'aire du triangle AOB.

Le moment OK de AB par rapport à l'axe s'obtient en portant sur cet axe, dans une direction telle que OK voit ab dirigé de gauche à droite, une longueur égale au double de l'aire du triangle aOb.

Mais le triangle aOb étant la projection du triangle AOB, l'aire du premier de ces triangles est égale à celle du second multipliée par le cosinus de l'angle compris entre leurs plans, c'est à dire de l'angle θ compris entre les perpendiculaires OG, OK aux plans de ces deux triangles. On a donc, conformément à l'énoncé,

$$OK = OG \times \cos\theta.$$

Corollaire I. – Lorsqu'on prend les moments de vecteurs concourants par rapport à un axe, le moment de la résultante est égal à la somme algébrique des moments de ces vecteurs. En effet, pour avoir les moments des vecteurs et de leur résultante, il suffit, d'après le théorème précédent, de prendre les moments par rapport à un point de l'axe et de les projeter sur l'axe. Mais le moment de la résultante par rapport à ce point est la résultante des moments des vecteurs (n° 21) ; donc la projection du moment de la résultante est la somme algébrique des moments des vecteurs ; ce qui est conforme à l'énoncé.

Corollaire II. – Moment maximum. – Si par un point O on mène plusieurs droites et qu'on veuille trouver les moments d'un même vecteur par rapport à ces droites, il suffira d'après le théorème, de prendre le moment de ce vecteur par rapport au point O et de le projeter sur les diverses droites : les projections ainsi obtenues seront les moments cherchés.

On voit ainsi que, parmi tous les moments d'un vecteur par rapport aux diverses droites que l'on peut mener par un même point, celui qui se rapporte à la perpendiculaire au plan déterminé par ce point et par la direction du vecteur est un maximum.

C. – Expressions analytiques des moments.

26. – Moments d'un vecteur par rapport à trois axes rectangulaires. – Un vecteur quelconque étant rapporté à trois axes coordonnés rectangulaires, désignons par

x, y, z les coordonnées de l'origine du vecteur,

X, Y, Z les composantes de ce vecteur suivant les axes.

Pour obtenir le moment par rapport à OX, il suffit de prendre la somme, par rapport au même axe, des trois composantes (X, Y, Z). Or le moment de X est nul, cette composante et l'axe étant parallèles. En ayant égard aux directions, le moment de Y est $-zY$ et celui de Z est $+yZ$; par suite, le moment du vecteur par rapport à OX est $yZ - zY$.

Les moments par rapport à OY et à OZ s'en déduisent en permutant circulairement les lettres.

Si donc on désigne par (A, B, C) les moments du vecteur par rapport aux axes OX, OY, OZ, on a

$$(5) \qquad \begin{aligned} A &= yZ - zY \\ B &= zX - xZ \\ C &= xY - yX \end{aligned}$$

Pour retrouver ces formules d'un usage très fréquent, il suffit d'écrire sur deux lignes horizontales :

1° les coordonnées (x, y, z),

2° les composantes (X, Y, Z),

et de former circulairement les trois déterminants

$$\begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}$$

27. – Composantes suivant trois axes rectangulaires du moment d'un vecteur par rapport à un point. Supposons d'abord que l'origine des coordonnées soit le centre du moment. Les projections du moment

par rapport au point sur les trois axes sont les moments du vecteur par rapport à ces axes (n° 25); par suite les expressions (5) qui représentent les moments du vecteur par rapport à OX, OY, OZ, sont les composantes, suivant les mêmes axes, du moment du vecteur par rapport au point O.

Supposons maintenant que le centre du moment soit un point quelconque (x', y', z'). Pour avoir les composantes du moment par rapport à ce point, il suffit de remplacer dans les formules (5), (x, y, z) par $(x-x', y-y', z-z')$; on obtient ainsi les valeurs

$$(6) \qquad \begin{aligned} A' &= (y-y')Z-(z-z')Y \\ B' &= (z-z')X-(x-x')Z \\ C' &= (x-x')Y-(y-y')X \end{aligned}$$

que l'on peut écrire, en tenant compte des formules (5),

$$(7) \qquad \begin{aligned} A' &= A - y'Z + z'Y \\ B' &= B - z'X + x'Z \\ C' &= C - x'Y + y'X \end{aligned}$$

Ces expressions correspondent au théorème du n° 19.

28.– Moment résultant d'un système de vecteurs.– Supposons d'abord que le centre des moments soit pris pour origine des coordonnées; désignons par

L, M, N les composantes du moment résultant,
A, B, C les composantes du moment de l'un quelconque des vecteurs du système;

on aura, d'après la définition (n° 20)

$$L = \Sigma A \qquad M = \Sigma B \qquad N = \Sigma C$$

ou, en ayant égard aux valeurs (5)

$$(8) \qquad \begin{aligned} L &= \Sigma (yZ - zY) \\ M &= \Sigma (zX - xZ) \\ N &= \Sigma (xY - yX) \end{aligned}$$

Supposons en second lieu que le centre des moments soit un point quelconque (x', y', z') ; soient L', M', N' les composantes du moment résultant par rapport à ce point, on aura

$$L' = \Sigma A' \qquad M' = \Sigma B' \qquad N' = \Sigma C'$$

ou bien, en remplaçant A', B', C' par leurs valeurs (7),

$$L' = \Sigma A - y' \Sigma Z + z' \Sigma Y$$
$$M' = \Sigma B - z' \Sigma X + x' \Sigma Z$$
$$N' = \Sigma C - x' \Sigma Y + y' \Sigma X$$

On peut donner à ces formules une autre forme. Supposons que l'on compose les vecteurs du système et soient (P, Q, R) les composantes du vecteur résultant, de sorte que

$$P = \Sigma X \qquad Q = \Sigma Y \qquad R = \Sigma Z$$

En ayant égard à ces valeurs et remarquant que l'on a

$$L = \Sigma A \qquad M = \Sigma B \qquad N = \Sigma C$$

il vient

$$(9) \qquad \begin{aligned} L' &= L - y' R + z' Q \\ M' &= M - z' P + x' R \\ N' &= N - x' Q + y' P \end{aligned}$$

Ces expressions correspondent au théorème du n° 22.

29. Conséquences des formules. — On déduit immédiatement de ces formules les propositions établies précédemment par une voie géométrique.

1° Supposons que les vecteurs d'un système soient issus d'un même point (x, y, z) ; en prenant pour origine des coordonnées le centre des moments, les formules (8) donnent

$$L = yR - zQ$$
$$M = zP - xR$$
$$N = xQ - yP$$

On en conclut que le moment résultant d'un système de vecteurs concourants est le moment de la résultante de ces vecteurs. (Théorème du n° 21).

2° Supposons que l'on ait $P=0$, $Q=0$, $R=0$; les formules (9) donnent

$$L' = L \qquad M' = M \qquad N' = N.$$

Donc le moment résultant d'un système de vecteurs dont le vecteur résultant est nul est le même pour tous les points de l'espace. (n° 22, Corollaire I.)

3° Désignons par
- G' la grandeur du moment résultant par rapport à un point quelconque,
- H la grandeur du vecteur résultant,
- i l'angle compris entre la direction du moment résultant et celle du vecteur résultant.

Les cosinus directeurs du moment résultant et du vecteur résultant étant respectivement

$$\frac{L'}{G'},\ \frac{M'}{G'},\ \frac{N'}{G'} \quad \text{et} \quad \frac{P}{H},\ \frac{Q}{H},\ \frac{R}{H}$$

on a

$$\cos i = \frac{L'P + M'Q + N'R}{G'H}$$

et, par suite,

$$G'\cos i = \frac{L'P + M'Q + N'R}{H}$$

Or, si l'on ajoute les équations (9) respectivement multipliées par P, Q, R, on trouve

$$G'\cos i = \frac{LP + MQ + NR}{H}$$

et le second membre ne dépend pas de x', y', z'.

Donc la projection du moment résultant sur le vecteur résultant est indépendante de la position du centre des moments. (n° 22. Corollaire II.)

30.– Moment résultant minimum.– La projection du moment résultant sur le vecteur résultant, étant invariable, représente la plus petite valeur que puisse admettre le moment résultant par suite du déplacement du centre des moments.

Pour obtenir ce minimum, il faut placer le centre des moments dans une position telle que la direction du moment résultant devienne parallèle à celle du vecteur résultant. Cette condition sera remplie si l'on a

$$\frac{L'}{P} = \frac{M'}{Q} = \frac{N'}{R}$$

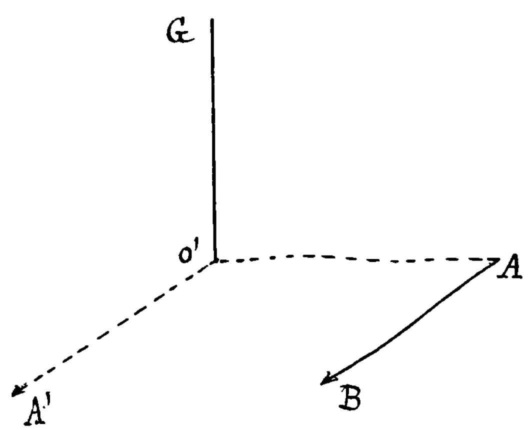
c'est à dire, d'après les formules (9)

$$\frac{L - y'R + z'Q}{P} = \frac{M - z'P + x'R}{Q} = \frac{N - x'Q + y'P}{R}$$

En y considérant x', y', z' comme des coordonnées courantes, ces équations sont celles d'une droite sur laquelle il suffira de placer le centre des moments pour que le moment résultant devienne un minimum.

Cette droite est désignée sous le nom d'axe principal.

31.– Remarque.– On peut obtenir directement les formules (6) qui, renfermant toutes les propositions précédentes, constituent la base d'une théorie purement analytique des moments par rapport à un point.



En effet, étant donnés un vecteur AB et un centre O' des moments, si par le point O' on mène un vecteur O'A' identique à AB, on voit que le moment O'G du vecteur par rapport à ce point s'obtient en prenant sur l'axe des directions (O'A, O'A') une longueur égale à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs O'A et O'A'.

Soient, par rapport à un système d'axes rectangulaires,
x, y, z les coordonnées du point A,
x', y', z' les coordonnées du point O'.

Les composantes du rayon $O'A$ sont $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$ et, en appliquant la règle du n° 15, on trouve immédiatement les formules (6).

32. – Expression du moment d'un vecteur par rapport à un axe. –
Supposons que l'axe passe par l'origine O d'un système de coordonnées rectangulaires ; désignons par

a, b, c les cosinus directeurs de l'axe,
A, B, C les composantes du moment du vecteur par rapport au point O,
K la longueur du moment par rapport à l'axe,
G la longueur du moment par rapport au point O,
θ l'angle compris entre les directions de ces vecteurs.

Les cosinus directeurs du moment par rapport au point O sont

$$\frac{A}{G}, \quad \frac{B}{G}, \quad \frac{C}{G}$$

et la relation $K = G \cos\theta$ (n° 25) donne

$$K = aA + bB + cC \tag{10}$$

A, B, C étant donnés par les formules (5) du n° 26.
En remplaçant A, B, C par leurs valeurs, il vient

$$K = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \tag{11}$$

Soient maintenant des vecteurs, en nombre quelconque, dont on prend les moments par rapport au même axe (a, b, c). On a, pour la somme de ces moments,

$$\Sigma K = a\,\Sigma A + b\,\Sigma B + c\,\Sigma C$$

c'est à dire

$$\Sigma K = aL + bM + cN \tag{12}$$

L, M, N désignant (n° 28) les composantes suivant les axes du moment résultant des vecteurs par rapport à l'origine.

Les quantités L, M, N, qui sont données par les formules (8) du n° 28, représentent aussi les sommes des moments des vecteurs par rapport aux axes OX, OY, OZ.

Chapitre III.

Déplacements des systèmes invariables.

I. Principes de Géométrie cinématique.

33. – Définition. – On appelle système invariable ou solide un système de points dont les distances mutuelles restent les mêmes quelle que soit la position que prenne le système dans l'espace.

On peut concevoir que la figure du système soit définie 1° par la connaissance des distances mutuelles de trois points A, B, C non en ligne droite ; 2° par la connaissance des distances de chacun des autres points du système aux points A, B, C.

Il suffit donc de connaître la position du triangle dont A, B, C sont les sommets, pour que la position du système tout entier soit connue.

34. – Déplacements et mouvements. – Quand un solide occupe deux positions successives dans l'espace, on peut considérer son déplacement indépendamment du temps que le système a mis à passer de l'une des positions à l'autre et n'envisager que les positions extrêmes sans avoir égard à la série des positions intermédiaires. L'étude des déplacements prend alors le nom de Géométrie cinématique et cette étude est comprise dans le cours de Géométrie descriptive.

« Il y a mouvement quand l'idée du temps pendant lequel a lieu le déplacement étant jointe à celle du déplacement lui même, il en résulte la notion de vitesse plus ou moins grande avec laquelle il s'opère. » (Ampère).

L'étude du mouvement des solides est comprise dans la Mécanique ; on se bornera à rappeler ici quelques notions relatives à leur déplacement.

35. – Translation et rotation. – On appelle translation un déplacement dans lequel les droites qui joignent les deux positions successives d'un point sont égales et parallèles

pour tous les points du système. On établit aisément que cette condition est réalisée pour tous les points d'un solide quand elle l'est pour trois points A.B.C, non en ligne droite invariablement liés au système.

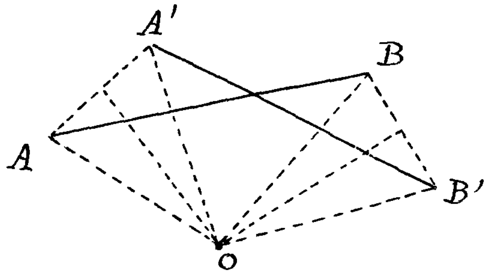
On appelle rotation un déplacement dans lequel deux points A, B, invariablement liés au système, restent immobiles. Dans une rotation, chaque point décrit un arc de cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite AB et dont le centre est sur cette droite; la longueur de cet arc est $r\theta$, en désignant par r la distance du point à la droite AB et par θ l'arc décrit par un point dont la distance à cette droite est égale à l'unité.

L'arc θ est l'angle de la rotation.

La droite AB présente, de part et d'autre d'un de ses points O, deux directions opposées; nous appellerons axe de la rotation celle de ces directions suivant laquelle un observateur, ayant les pieds en O, doit se placer pour voir la rotation s'effectuer de gauche à droite.

Une rotation est complètement définie quand on donne l'axe et l'angle de cette rotation.

36. – Déplacement d'une figure plane dans son plan. – Supposons qu'un plan mobile glisse sur un plan fixe; la position d'une figure située sur le plan mobile sera déterminée si l'on connait les positions de deux de ses points A, B.



Supposons que la droite AB vienne occuper la position A'B'; menons des perpendiculaires aux droites AA', BB' en leurs milieux. Ces perpendiculaires se coupent généralement en un point O. Les triangles AOB, A'OB' sont égaux et, par suite, la figure peut être amenée de sa première position à la deuxième par une rotation autour du point O. Donc

Théorème I. – Tout déplacement d'une figure plane dans son plan peut être produit par une rotation autour d'un point.

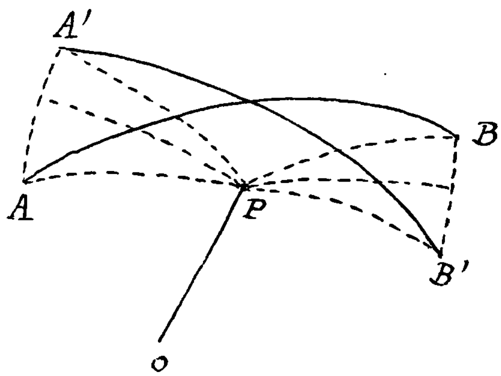
37. – Déplacement d'un solide parallèlement à un plan. – Supposons que tous les points d'un solide se déplacent parallèlement à

un plan fixe P ; considérons une figure invariablement liée au solide dans un plan P' parallèle à P. quand le solide se déplace, cette figure se déplace dans son plan et son déplacement peut être produit par une rotation autour d'un point O du plan P' ou, ce qui revient au même, par une rotation autour de la perpendiculaire au plan P', ou au plan P, menée par le point O ; le solide tout entier participe au même mouvement.

Donc

Théorème II. - Tout déplacement d'un solide parallèlement à un plan peut être produit par une rotation autour d'un axe perpendiculaire à ce plan.

38. - Déplacement d'un solide autour d'un point fixe. -



Imaginons une sphère, invariablement liée au solide, ayant pour centre le point fixe O et pour rayon une longueur quelconque.

Considérons deux points sur cette sphère ; ces points se déplacent avec le solide, soient A, B leurs positions initiales et A', B' leurs positions finales. Il suffit, pour amener le solide de la première à la seconde position, d'amener l'arc de grand cercle AB en coïncidence avec l'arc de grand cercle A'B' ; je dis que l'on peut amener AB sur A'B' par une rotation autour d'un rayon OP joignant le centre à un pôle P convenablement choisi sur la sphère.

En effet, soit P l'intersection des arcs de grand cercle menés perpendiculairement sur les milieux des arcs de grand cercle AA', BB'. Les deux triangles sphériques APB, A'PB' sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun et placés dans le même ordre. On peut donc les superposer par une rotation autour de P comme pôle, ou de OP comme axe. Donc

Théorème III. - Tout déplacement d'un solide autour d'un point peut être produit par une rotation. autour d'un axe passant par ce point.

39.— Déplacement général d'un solide — Soient $A, B, C\ldots$ les positions initiales de différents points d'un solide; $A', B', C'\ldots$ leurs positions finales. On peut amener le solide de la première position à la seconde en donnant à tous ses points une translation égale et parallèle à AA', puis en le faisant tourner autour de A' jusqu'à ce qu'il vienne prendre la position qu'il doit occuper; d'après le théorème précédent, le déplacement autour de A' peut être produit par une rotation. Donc

Théorème IV.— Tout déplacement d'un solide peut être produit par une translation et une rotation.

40.— Il y a une infinité de manières de produire le déplacement d'un solide par une translation et une rotation; car, au lieu de choisir le point A pour déterminer la translation, on pourrait choisir tout autre point du solide. Dans ces différents systèmes de deux déplacements, il y a trois éléments qui restent constants:

1° la direction de l'axe de la rotation.— Supposons qu'à la translation AA' et à la rotation autour d'un axe $A'M$ passant par le point A', on substitue la ~~rotation~~ translation BB' et une rotation autour d'un axe $B'N$ passant par le point B'; je dis que les axes $A'M$ et $B'N$ sont parallèles.

Considérons, en effet, un plan perpendiculaire à $A'M$ et invariablement lié au solide; la translation AA' et la rotation autour de $A'M$ ne changent pas la direction de ce plan. Quand on emploie une autre translation et une autre rotation, il faut toujours arriver à la même position du solide et, par conséquent, conserver la direction du plan P. Or cette direction est conservée par la translation BB'; mais elle serait changée par la rotation autour de $B'N$, si cet axe était oblique au plan P. Donc $B'N$ est perpendiculaire au plan P et, par suite, parallèle à $A'M$.

2° la projection de la translation sur l'axe de la rotation.

Donnons au solide la translation AA', puis la rotation autour de $A'M$; la translation amène B en B_1, la rotation amène B_1 en B'. Or, comme B_1B' est situé dans un plan perpendiculaire à l'axe, sa projection sur cet axe est nulle. La projection de BB' sur l'axe est donc égale à celle de BB_1, c'est à dire à celle de AA'.

3° l'angle de la rotation.— Considérons une droite I_1 dans un plan P perpendiculaire à la direction commune des axes; la translation AA' et la rotation autour de A'M l'amènent à une position I' dans un plan P' parallèle à P. Une autre translation BB' ne change pas la direction de cette droite et, comme la rotation autour de B'N doit l'amener en I', il faut que l'angle de cette rotation soit le même que celui de la première.

41. – Déplacement héliçoïdal. – Parmi les différents systèmes, composés d'une translation et d'une rotation, qui peuvent produire le même déplacement d'un solide, il en existe toujours un dans lequel <u>la translation est parallèle à l'axe de la rotation</u>.

En effet, soit un plan P invariablement lié au solide et perpendiculaire à la direction commune des axes; le déplacement du solide amène ce plan dans une position P' parallèle à P. Pour faire passer le solide de la première position à la deuxième, il suffit de lui donner une translation égale et parallèle à la distance des plans P, P', puis de le déplacer parallèlement à P jusqu'à sa position finale; or ce deuxième déplacement peut être produit par une rotation autour d'un axe déterminé perpendiculaire au plan P (nº 37); on voit que le déplacement est alors obtenu par un glissement le long d'un axe suivi d'une rotation autour de cet axe.

Lorsqu'une vis pénètre dans son écrou, chacun de ses points décrit une hélice et son déplacement peut être, par suite, désigné sous le nom de déplacement héliçoïdal. D'ailleurs la vis pourrait être amenée d'une position à une autre par une translation dans la direction de son axe suivie d'une rotation autour de cet axe et, inversement, un déplacement héliçoïdal peut être considéré comme pouvant remplacer une translation et une rotation autour d'un axe de même direction que la translation. Donc

Théorème V. – Tout déplacement d'un solide peut être produit par un déplacement héliçoïdal.

42. – Détermination du déplacement héliçoïdal. – Pour déterminer le déplacement héliçoïdal correspondant à un déplacement quelconque d'un solide, il faut connaître la position de l'axe, la grandeur du glissement et l'angle de la rotation. On y parvient, comme il suit, quand on connait les déplacements

de trois points A. B. C, non en ligne droite, invariablement liés au solide.

Soient A', B', C', les positions finales de A. B. C ; on sait (n° 40) que les droites AA', BB', CC' ont des projections égales sur l'axe.

Si donc, par un point quelconque m, on mène des vecteurs $\overline{ma}$, $\overline{mb}$, $\overline{mc}$ identiques à AA', BB', CC', le plan abc est perpendiculaire à l'axe. Par suite, on a la <u>direction de l'axe</u> en abaissant du point m une perpendiculaire sur ce plan ; de plus, en désignant par e le pied de cette perpendiculaire, la longueur me est la grandeur commune de tous les déplacements des points du solide en projection sur l'axe et, par conséquent, la grandeur du <u>glissement</u> suivant l'axe.

Il reste à trouver la <u>position</u> de l'axe, dont on a déjà la <u>direction</u>, ainsi que l'<u>angle de la rotation</u>. A cet effet, on donnera à AB une translation identique à $\overline{mc}$ et on déterminera la rotation capable de faire cette droite de la position intermédiaire ainsi obtenue à la position finale A'B'. Cette rotation constitue un déplacement parallèle à un plan abc, de sorte que l'on rentre dans un problème précédemment traité. On le résout en projetant AB et A'B' sur un plan parallèle à a.b.c et en opérant sur ces projections comme sur les droites AB et A'B' du n° 36. Le centre de rotation ainsi obtenu est un point de l'axe hélicoïdal et cet axe, dont la direction est déjà connue, se trouve ainsi complètement déterminé. Enfin, l'<u>angle de la rotation</u> est celui que font entre elles les projections de AB et de A'B'.

43. — Equivalence et composition des déplacements. — Deux déplacements sont dits <u>équivalents</u> quand ils amènent le solide de la même position initiale à la même position finale.

Cette disposition permet de résumer les propositions précédentes en cet énoncé : tout déplacement d'un solide est équivalent à un déplacement hélicoïdal qui peut se réduire, dans certains cas, à une rotation <u>ou</u> à une translation.

Une série de deux ou plusieurs déplacements successifs d'un solide équivaut à un déplacement unique, généralement hélicoïdal ; ce déplacement est dit <u>résultant</u> et on appelle <u>composants</u> les deplacements qui constituent la série équivalente.

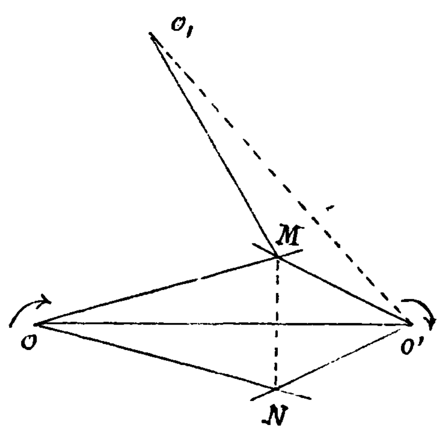
La réduction de plusieurs déplacements successifs à un seul s'appelle <u>composition</u> et l'opération inverse, substituant deux ou plusieurs déplacements successifs à un seul, s'appelle <u>décomposition</u>.

44.– Composition de translations.– Nous appellerons <u>vecteur d'une translation</u> une droite ayant la même grandeur et la même direction que celles qui, dans la translation, joignent la position initiale de chaque point à sa position finale.

On voit aisément <u>qu'une série de translations équivaut à une translation unique dont le vecteur est la résultante des vecteurs des translations composantes.</u>

La translation résultante n'est pas modifiée quand on change, d'une manière quelconque, l'ordre des translations composantes.

45.– Composition de deux rotations autour d'axes parallèles.– Prenons le plan de la figure perpendiculaire aux deux axes; soient O, O' les projections de ces axes sur ce plan et θ, θ' les angles des rotations. Supposons que les rotations aient lieu dans un même sens indiqué par les flèches et que la rotation autour de O s'effectue la première.



De part et d'autre de OO' menons OM et ON faisant avec OO' l'angle $\frac{\theta}{2}$ de sorte que l'angle MON, égal à θ soit tourné vers O'; menons de même $O'M$ et $O'N$ faisant avec $O'O$ l'angle $\frac{\theta'}{2}$ de sorte que l'angle $MO'N$, égal à θ', soit tourné vers O. La première rotation amène le point M en N et la seconde le ramène à sa position initiale. Il en est de même pour tous les points d'une parallèle aux axes menée par le point M, donc le déplacement résultant est une rotation autour de cette parallèle.

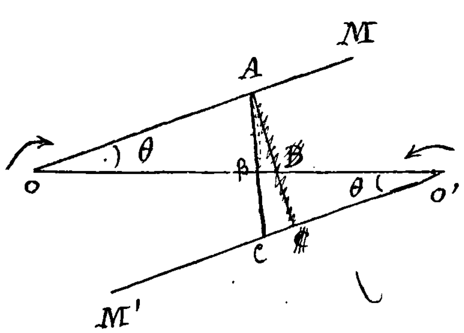
Pour avoir l'angle de la rotation résultante, considérons le déplacement du point O; dans la première rotation, ce point reste immobile et, dans la seconde, il vient en un point O, tel que l'angle $OO'O_1$ soit égal à θ'. L'angle de la rotation résultante est donc OMO_1 égal à $\theta + \theta'$; il est décrit dans le même sens, autour de M, que les angles θ et θ' autour de O et de O'. Donc deux rotations de même sens autour d'axes parallèles se composent en une rotation, de même sens, autour d'un axe parallèle aux axes des rotations composantes, dont l'angle est la somme des angles de ces rotations.

La position de l'axe de la rotation résultante dépend de l'ordre des rotations composantes car, si la rotation autour de O' précédait la rotation autour de O, ce serait le point N, au lieu de M, que la suite des deux rotations ramènerait à sa position initiale; le déplacement résultant serait donc une rotation autour d'un axe mené par le point N, symétrique de M par rapport à OO'.

46.– On établit de même que deux rotations de sens contraires autour d'axes parallèles se composent en une rotation, dans le sens de la plus grande des deux rotations composantes, autour d'un axe parallèle aux axes des rotations composantes, dont l'angle est la différence des angles de ces rotations.

47.– Couple de rotations.– On appelle couple de rotations l'ensemble de deux rotations s'effectuant successivement autour d'axes parallèles avec des angles égaux et en sens contraires.

Un couple de rotations est équivalent à une translation; en effet, menons des parallèles OM, $O'M'$ faisant avec OO' un angle égal à la valeur commune θ des deux angles de rotation. Il est aisé de voir que, par suite des deux rotations,



un point quelconque A de OM parcourt définitivement une droite $AC = AB + BC$ constante de grandeur et de direction pour tous les points de la droite.

L'ordre de succession des deux rotations n'est pas indifférent et il en est tenu compte dans cet énoncé : un couple de rotations est équivalent à une translation dont le vecteur est identique à la corde décrite par un point du premier axe dans son déplacement autour du second.

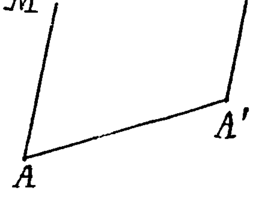
48. – Composition de deux rotations autour d'axes concourants –
Si par chacun des axes donnés on mène un plan qui fasse avec celui de ces deux axes un angle égal à la demi-rotation relative à cet axe, l'intersection de ces deux plans arrivera, par la première des rotations, à sa position symétrique par rapport au plan des deux axes et, par la seconde rotation, elle reviendra à sa position primitive ; cette droite est donc l'axe de la rotation résultante.

On voit en même temps que l'angle de ces deux plans mesurera la demi rotation composée puisque le premier axe, immobile dans la première rotation, ne se déplace que dans la seconde et décrit autour de l'axe résultant déterminé comme on vient de le dire par un angle double de celui des deux plans.

En traçant sur une sphère, ayant son centre au point de concours des deux axes, les traces de ces axes ainsi que les traces des plans de la construction précédente, on a une figure sphérique tout à fait analogue à la figure plane du n° 45, les lignes droites étant remplacées par des arcs de grand cercle.

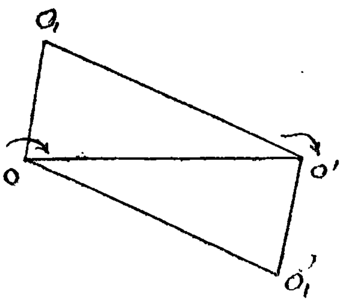
L'axe symétrique de celui qui vient d'être déterminé par rapport au plan des deux axes donnés, correspond au déplacement résultant des mêmes rotations accomplies dans un ordre inverse de celui qui avait été d'abord supposé ; d'où l'on voit que le vecteur de la rotation résultante ne dépend pas de l'ordre des deux rotations, mais que la position de l'axe résultant en dépend essentiellement, de sorte que dans la composition des rotations d'un solide, l'ordre de ces rotations ne peut être modifié sans altérer la position de l'axe résultant et la valeur même de la rotation résultante, s'il y a plus de deux rotations concourantes à composer.

49. – Composition des rotations autour d'axes non concourants. –
On s'appuiera sur les deux propositions suivantes :
1° On peut remplacer une translation suivie d'une rotation par une rotation égale autour d'un axe parallèle suivie de la même translation.



En effet, soit AA' une translation suivie d'une rotation θ autour de l'axe $A'M'$; le déplacement du solide est le même que celui qui résulte de la rotation θ, autour de AM parallèle à $A'M'$, suivie de la translation AA'.

2°. La rotation autour d'un axe équivaut à une rotation égale, autour d'un axe parallèle, suivie d'une translation dont le vecteur est identique à la corde de l'arc décrit par un point du second axe autour du premier. — Prenant le plan de la figure perpendiculaire aux deux axes, soient O, O' les projections de ces axes ; dans la rotation autour du premier axe le point O' du second décrit un arc dont la corde est $O'O'_1$. Je dis qu'une rotation θ autour de O' et la translation dont le vecteur est $O'O'_1$ se composent en une rotation θ autour de O. En effet,



par la rotation θ autour de O' le point O vient en O_1 tel que OO_1 soit égal et opposé à $O'O'_1$ et, par la translation, il revient à sa position initiale. De plus, le point O' reste immobile par la rotation et vient en O'_1 par la translation ; l'angle de la rotation résultante est donc $O'OO'_1$, c'est à dire θ.

50. — Cela posé, soient R, R' deux rotations autour d'axe non concourants. R peut être décomposé en une rotation R_0, égale autour d'un axe parallèle passant par un point O pris à volonté et une translation T, de sorte que l'on a à composer $R_0 T R'$. Mais on peut substituer à TR' une rotation égale à R', autour d'un axe parallèle, suivie de la translation T et à cette rotation une rotation R'_0, égale autour d'un axe parallèle passant par le point O, suivie d'une translation T'. On est donc amené à composer $R_0 R'_0 T T'$ ce qui se réduit à une rotation, par la composition de $R_0 R'_0$, et une translation par la composition de TT'.

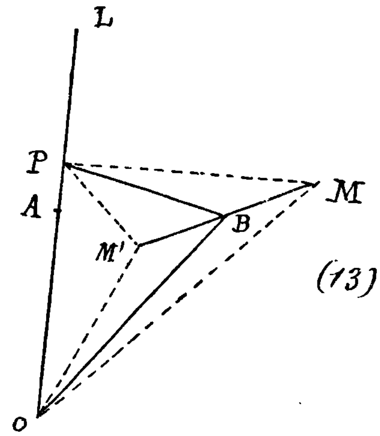
En opérant ainsi, on peut composer un nombre quelconque de rotation autour d'axes non concourants.

51. — Cas général. — Dans le cas le plus général, on a à composer une série de rotations et de translations successives. Ce cas se ramène au précédent, puisque chaque translation peut être remplacée par un couple de rotations.

II. — Expressions analytiques concernant la rotation d'un système invariable.

52. — **Problème.** — Un solide tournant d'un angle donné autour d'un axe donné, calculer les valeurs que prennent, après la rotation, les coordonnées de l'un quelconque de ses points.

Soit OL l'axe de la rotation ; par suite de cette rotation, un point M du solide vient en un point M' tel que, si l'on mène MP perpendiculaire sur OL et si l'on joint PM', l'angle MPM' est égal à l'angle θ de la rotation. Soit B le milieu de la corde MM' ; menant BP et BO, on a



(13)

$$MM' = 2\,BP \cdot tg\,\frac{\theta}{2}$$

ou bien, en prenant, sur OZ, une longueur $OA = 2\,tg\,\frac{\theta}{2}$ et en désignant par V l'angle des directions OA, OB,

$$MM' = OA \cdot OB \cdot \sin V$$

Cela posé, considérant un système d'axes rectangulaires ayant son origine au point O, désignons par

a, b, c les cosinus directeurs de OL,
x, y, z les coordonnées de M,
x', y', z' les coordonnées de M',
A, B, C les composantes du vecteur MM'.

On a, par le théorème des projections,

$$(14) \qquad x' = x + A \qquad y' = y + B \qquad z' = z + C.$$

et, en remplaçant A, B, C par leurs valeurs en $(x, y, z;\ x', y', z')$, on a trois équations qui donnent x', y', z' en fonction de x, y, z.

On trouve immédiatement A, B, C en remarquant que le vecteur MM' est dirigé suivant l'axe des deux directions (OA, OB) et que sa grandeur est, d'après la relation (13), numériquement égale à l'aire du parallélogramme construit sur les longueurs OA, OB ; on peut donc appliquer la règle générale du n° 15.

En posant

$$\lambda = a \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \qquad \mu = b \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \qquad \nu = c \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

les composantes du vecteur OA sont

$$2\lambda \quad , \quad 2\mu \quad , \quad 2\nu \quad ;$$

les composantes du vecteur OB sont

$$\frac{x+x'}{2} \quad , \quad \frac{y+y'}{2} \quad , \quad \frac{z+z'}{2} \; ;$$

et on a, par suite,

$$A = \mu(z+z') - \nu(y+y')$$
$$B = \nu(x+x') - \lambda(z+z')$$
$$C = \lambda(y+y') - \mu(x+x')$$

En portant ces valeurs dans les équations (14), il vient

$$x' + \nu y' - \mu z' = x - \nu y + \mu z$$
$$y' + \lambda z' - \nu x' = y - \lambda z + \nu x$$
$$z' + \mu x' - \lambda y' = z - \mu x + \lambda y$$

et on en tire les valeurs

(15)
$$h x' = (1 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2)\, x + 2(\lambda\mu - \nu)\, y + 2(\lambda\nu + \mu)\, z$$
$$h y' = 2(\mu\lambda + \nu)\, x + (1 - \lambda^2 + \mu^2 - \nu^2)\, y + 2(\mu\nu - \lambda)\, z$$
$$h z' = 2(\nu\lambda - \mu)\, x + 2(\nu\mu + \lambda)\, y + (1 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2)\, z$$

dans lesquelles on a posé

(16) $$h = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$$

Ces formules donnent la solution du problème.

53.– Rotation infiniment petite.– Supposons que l'angle θ soit infiniment petit ; en négligeant les infiniment petits du second ordre, le vecteur $OA = 2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ se réduit à θ et ses composantes se réduisent aux quantités

$$2\lambda = a\theta \qquad 2\mu = b\theta \qquad 2\nu = c\theta$$

que nous désignerons par α, β, γ. Le facteur h se réduit à l'unité de sorte que les formules (15) sont remplacées par les suivantes

$$(17) \qquad \begin{aligned} x' &= x + \beta z - \gamma y \\ y' &= y + \gamma x - \alpha z \\ z' &= z + \alpha y - \beta x \end{aligned}$$

que l'on peut écrire

$$(18) \qquad \begin{aligned} \delta x &= \beta z - \gamma y \\ \delta y &= \gamma x - \alpha z \\ \delta z &= \alpha y - \beta x \end{aligned}$$

en désignant par δ l'accroissement dû à la rotation.
Rappelons que l'on a, dans ces formules,

$$(19) \qquad \alpha = a\theta \qquad \beta = b\theta \qquad \gamma = c\theta$$

θ étant l'angle infiniment petit de la rotation et (a, b, c) désignant les cosinus directeurs de l'axe.

54 - Formules générales de la rotation. - Les formules (15) et (17) ont été établies en supposant que l'axe de rotation passe par l'origine des coordonnées ; il suffit évidemment d'y remplacer $(x', y', z'; x, y, z)$ par $(x'-x_0, y'-y_0, z'-z_0; x-x_0, y-y_0, z, z_0)$ pour avoir les formules qui se rapportent au cas général d'un axe de rotation passant par un point quelconque (x_0, y_0, z_0).

55. - Déplacement élémentaire d'un solide - Supposons qu'un solide se déplace infiniment peu dans l'espace ; cherchons les accroissements des coordonnées de l'un quelconque de ses points M (x, y, z)

Considérons un point A (x_0, y_0, z_0) invariablement lié au solide ; après le déplacement, ce point vient en A', désignons par $(\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0)$ les variations de ses coordonnées.

Le déplacement peut être produit par une rotation autour d'un axe passant par le point A suivie d'une translation AA'. Par suite de la rotation, la coordonnée x du point M éprouve un accroissement dont la valeur est, d'après ce qui précède, $\beta(z-z_0)-\gamma(y-y_0)$; par suite de la translation, la même coordonnée s'accroît de δx_0. L'accroissement total est donc

$$\delta x = \delta x_0 + \beta(z-z_0) - \gamma(y-y_0)$$

et l'on trouve des expressions analogues pour les accroissements des deux autres coordonnées de sorte que l'on a, pour les variations dues à un déplacement élémentaire quelconque,

$$(20)\qquad \begin{aligned} \delta x &= e + \beta z - \gamma y \\ \delta y &= f + \gamma x - \alpha z \\ \delta z &= g + \alpha y - \beta x \end{aligned}$$

les six quantités $(e, f, g\,;\ \alpha, \beta, \gamma)$ étant des paramètres infiniment petits dont les valeurs sont les mêmes quelque soit le point (x, y, z) que l'on considère.

56 – Déplacement fini d'un solide – On voit de même que les formules générales qui donnent les valeurs que prennent les coordonnées d'un point quelconque (x, y, z) d'un solide, après un déplacement quelconque de ce solide, s'obtiennent en ajoutant des constantes e, f, g aux valeurs de x', y', z' fournies par les équations (15).

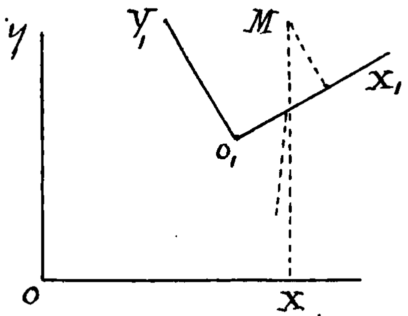
Les formules générales du déplacement d'un solide renferment donc <u>six paramètres</u>.

On peut reconnaître directement que six paramètres sont nécessaires et suffisants pour fixer la position d'un solide dans l'espace. Cette position est en effet complètement déterminée quand on connait celle de trois points du système ; or ces trois points sont définis par neuf coordonnées entre lesquelles existent trois relations exprimant que les distances des trois points sont invariables.

III. – Théorie analytique des déplacements d'un système invariable.

55 – Formule générale d'un déplacement plan – Une figure plane étant rapportée à des axes rectangulaires fixes OX, OY, concevons que des axes rectangulaires mobiles, coïncidant avec OX, OY avant

le déplacement du système, soient invariablement liés à ce système. Après le déplacement, les axes mobiles occupent la



position O_1X_1, O_1Y_1. Désignons par a, b les coordonnées de O_1, θ l'angle des directions (OX, O_1X_1). Considérons un point du système amené en M par le déplacement, soient, par rapport à OX, OY, (x, y) et (x', y') les coordonnées de ce point avant et après le déplacement. On a, par le théorème des projections,

$$(21) \qquad \begin{aligned} x' &= a + x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= b + x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}$$

Ces formules donnent x', y' en fonction de x, y pour un déplacement caractérisé par les paramètres $(a, b; \theta)$.

En supposant a et b égaux à zéro, ces formules sont celles d'une rotation θ autour de l'origine.

56. _ Centre de rotation _ En écrivant x, y au lieu de x', y' dans les équations (21), on a deux équations qui déterminent les coordonnées d'un point qui reste immobile dans le déplacement. On en conclut que tout déplacement plan peut être produit par une rotation.

57 _ Emploi des imaginaires _ Ajoutons membre à membre les équations (21) après avoir multiplié la seconde par i.

En posant

$$x' + y'i = u' \qquad x + yi = u \qquad a + bi = u_0$$

il vient

$$(22) \qquad u' = u_0 + u e^{\theta i}$$

On remplace ainsi par une équation unique très simple les deux équations (21).

Un déplacement plan est alors caractérisé par l'imaginaire u_0 et l'angle θ.

Pour le centre de rotation, on a $u' = u$, et la valeur de u

correspondant à ce point est, d'après l'équation (22), donnée par la formule

$$(23) \qquad u = \frac{u_0}{1 - e^{\theta i}}$$

La construction de ce vecteur se fait très simplement, en traçant sur OO_1 comme base un triangle isocèle dont l'angle au sommet est égal à θ.

58.– Composition des déplacements plans – Soient deux déplacements successifs dont les paramètres sont respectivement (u_0, θ) et (u'_0, θ'). Désignons par u l'imaginaire correspondant à la position initiale d'un point quelconque et par u', u'' les imaginaires se rapportant aux positions que ce point occupe après le premier déplacement et après le second. On a, d'après (22),

$$u' = u_0 + u e^{\theta i}$$

$$u'' = u'_0 + u' e^{\theta' i}$$

et en éliminant u' entre ces deux équations, on a, sous une forme très simple, l'équation du déplacement résultant. La même méthode s'applique à la composition de déplacements successifs en nombre quelconque.

59 – Déplacement d'un solide autour d'un point – Soit O le point fixe ; le solide étant rapporté à trois axes rectangulaires OX, OY, OZ passant par ce point, concevons que trois axes mobiles, coïncidant avec OX, OY, OZ avant le déplacement du système, soient invariablement liés à ce système. Après le déplacement, les axes mobiles occupent les positions OX_1, OY_1, OZ_1. Désignons par les lettres a, b, c affectées des indices 1, 2, 3 les cosinus des angles que OX_1, OY_1, OZ_1 font respectivement avec OX, OY, OZ, conformément au tableau suivant

	OX_1	OY_1	OZ_1
OX	a_1	a_2	a_3
OY	b_1	b_2	b_3
OZ	c_1	c_2	c_3

Considérons enfin un point quelconque du solide et soient, par rapport à OX, OY, OZ, (x, y, z) et (x', y', z') les coordonnées de ce point avant et après le déplacement ; on a les relations

$$(24)\qquad \begin{aligned} x' &= a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ y' &= b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ z' &= c_1 x + c_2 y + c_3 z \end{aligned}$$

et ces formules donnent x', y', z' en fonction de x, y, z pour un déplacement caractérisé par les neuf cosinus (a, b, c).

60 Relations entre les (a, b, c). — Les neuf cosinus (a, b, c) sont liés par six relations.

$$(25)\qquad \begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1 \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1 \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 &= 1 \end{aligned} \qquad\qquad (26)\qquad \begin{aligned} a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 &= 0 \\ a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1 &= 0 \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 &= 0 \end{aligned}$$

d'où l'on déduit les suivantes qui s'obtiennent d'ailleurs, directement et sans ambiguïté, en exprimant que l'une des trois directions OX_1, OY_1, OZ_1 est, circulairement, l'axe des deux autres

$$(27)\qquad \begin{aligned} a_1 &= b_2 c_3 - c_2 b_3 & a_2 &= b_3 c_1 - c_3 b_1 & a_3 &= b_1 c_2 - c_1 b_2 \\ b_1 &= c_2 a_3 - a_2 c_3 & b_2 &= c_3 a_1 - a_3 c_1 & b_3 &= c_1 a_2 - a_1 c_2 \\ c_1 &= a_2 b_3 - b_2 a_3 & c_2 &= a_3 b_1 - b_3 a_1 & c_3 &= a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{aligned}$$

Il résulte enfin de ces équations que le vecteur du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

est égale à l'unité $\Delta = 1$.

61.— Axe de rotation — Pour qu'un point (x, y, z) du solide soit immobile dans le déplacement, il faut et il suffit que ses coordonnées satisfassent aux trois équations que l'on obtient en substituant x, y, z à x', y', z' dans les relations (24); ces trois équations sont homogènes en x, y, z et la condition de compatibilité est

$$\begin{vmatrix} a_1 - 1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - 1 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

Par suite, l'équation

$$(28) \qquad \begin{vmatrix} a_1 - S & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - S & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - S \end{vmatrix} = 0.$$

doit admettre une racine $S = 1$. Or, en développant le déterminant et en ordonnant par rapport à S, l'équation (28) devient

$$S^3 - (a_1 + b_2 + c_3) S^2 + (b_2 c_3 - c_2 b_3 + c_3 a_1 - a_3 c_1 + a_1 b_2 - b_1 a_2) S - \Delta = 0.$$

c'est à dire, en tenant compte des équations (27) et de la valeur $\Delta = 1$,

$$(29) \qquad S^3 - (a_1 + b_2 + c_3) S^2 + (a_1 + b_2 + c_3) S - 1 = 0.$$

Sous cette forme, on voit immédiatement que $S = 1$ est une racine; il est ainsi établi, par l'analyse, qu'une droite reste immobile dans tout déplacement d'un solide autour d'un point; donc tout déplacement autour d'un point peut être produit par une rotation.

62.— Expression des neuf cosinus d'un système tri-rectangle en fonction de trois paramètres.— Tout déplacement autour d'un point étant équivalent à une rotation autour d'un axe, les formules (24) d'un déplacement quelconque peuvent s'identifier aux formules (15) d'une rotation avec des valeurs réelles de λ, μ, ν. On obtient ainsi les relations

$$(30)\qquad \begin{array}{lll} h a_1 = 1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2 & h a_2 = 2(\lambda\mu-\nu) & h a_3 = 2(\lambda\nu+\mu) \\ h b_1 = 2(\mu\lambda+\nu) & h b_2 = 1-\lambda^2+\mu^2-\nu^2 & h b_3 = 2(\mu\nu-\lambda) \\ h c_1 = 2(\nu\lambda-\mu) & h c_2 = 2(\nu\mu+\lambda) & h c_3 = 1-\lambda^2-\mu^2+\nu^2 \end{array}$$

qui expriment en fonction des trois paramètres λ, μ, ν les neuf cosinus des angles que deux systèmes d'axes rectangulaires font entre eux. Il est d'ailleurs aisé de vérifier que, par ces valeurs, les six relations (25) et (26) sont satisfaites, quelles que soient les valeurs de λ, μ, ν.

63._ Racines de l'équation (28). – L'équation (28) ou (29) admet une racine $S = 1$; les deux autres racines ont des valeurs remarquables qu'il est bon de signaler.

En divisant l'équation (29) par $S-1$, on a l'équation du second degré

$$(31)\qquad S^2-(a_1+b_2+c_3-1)\,S+1=0.$$

Or, en ayant égard aux formules (30) et en remplaçant h par sa valeur (13), $h = 1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2$, il vient

$$a_1+b_2+c_3-1 = 2\,\frac{1-\lambda^2-\mu^2-\nu^2}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}$$

de plus, en désignant par θ l'angle de la rotation équivalente au déplacement défini par les neuf cosinus et par a, b, c les cosinus directeurs de l'axe de cette rotation, on a (n° 52)

$$\lambda = a\,tg\frac{\theta}{2}\qquad \mu = b\,tg\frac{\theta}{2}\qquad \nu = c\,tg\frac{\theta}{2}$$

Il en résulte

$$a_1+b_2+c_3-1 = 2\,\frac{1-tg^2\frac{\theta}{2}}{1+tg^2\frac{\theta}{2}} = 2\cos\theta$$

et l'équation (31) devient

$$S^2-2\cos\theta\cdot S+1=0$$

On en tire $S = \cos\theta \pm i\sin\theta$, de sorte que les trois racines de l'équation (28), dans laquelle les neuf quantités (a, b, c) sont les cosinus des angles que deux systèmes d'axes rectangulaires font entre eux, ont pour valeurs $1, e^{\theta i}, e^{-\theta i}$.

Livre premier.

Cinématique.

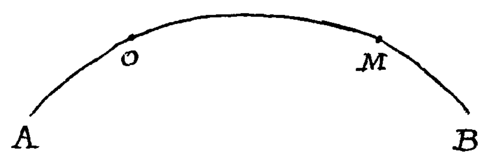
Chapitre premier.

Mouvement d'un point.

I _ Définition d'un mouvement.

64. — Equation du mouvement sur la trajectoire — Le lieu des positions successives d'un point mobile dans l'espace s'appelle <u>trajectoire</u>.

Le mouvement d'un point est complètement déterminé quand on connaît sa trajectoire et la position qu'il occupe, à chaque instant, sur cette trajectoire. Soit AB la trajectoire d'un point mobile, O un point pris sur cette trajectoire. M la position du mobile après le temps t.



Désignons par s la distance OM comptée sur la trajectoire, distance qui sera considérée comme positive ou négative suivant que le point M sera d'un côté ou de l'autre du point fixe O.

Le mouvement du point sera connu si, à la connaissance de la trajectoire AB on joint celle de la relation $s = f(t)$ qui existe entre la distance s et le temps t.

65 _ Représentation graphique — On peut représenter les valeurs numériques de s et de t par des longueurs et construire une courbe dont chaque point aurait t pour abscisse et s pour ordonnée. Cette courbe, dont l'équation est $s = f(t)$, se nomme la <u>courbe des espaces</u>.

66 - Mouvement d'un point rapporté à un système de coordonnées rectilignes - On peut rapporter les positions successives d'un point mobile à un système de coordonnées rectilignes ; les coordonnées (x, y, z) de ce point varient alors avec le temps t, de sorte que l'on a

$$x = \varphi(t) \qquad y = \chi(t) \qquad z = \psi(t)$$

Ces trois équations, que l'on appelle les <u>équations du mouvement</u> déterminent le mouvement du point.

Si entre ces equations, on élimine t, on trouve deux relations

$$f(x, y, z) = 0 \qquad F(x, y, z) = 0$$

entre les coordonnées x, y, z. Ces nouvelles équations, auxquelles les coordonnées satisfont quel que soit t, sont celles d'une courbe sur laquelle le point reste constamment ; elles représentent donc la trajectoire.

II - Vitesse et accélération tangentielle.

67 - Mouvement uniforme - Considérons le mouvement représenté par l'équation

$$s = a + bt$$

a et b désignant des constantes.

Ce mouvement est tel que les accroissements de s sont porportionnels aux accroissements de t, de sorte que le point mobile parcourt des espaces égaux dans des temps égaux, quels que soient ces temps ; on l'appelle <u>uniforme</u>.

La constante a représente la distance du point mobile M au point fixe O, à l'instant à partir duquel on compte le temps t.

La distance s augmente ou diminue avec le temps et, par suite, le mouvement a lieu dans le sens des s positifs ou négatifs, suivant que la constante b est positive ou négative.

Il est naturel de prendre pour mesure de la rapidité d'un mouvement uniforme le chemin parcouru dans l'unité de temps ; c'est ce que l'on nomme la <u>vitesse</u> du mobile.

D'après la forme de l'équation du mouvement uniforme, la valeur absolue de b est la quantité dont la distance s varie pendant l'unité de temps ; cette valeur absolue est donc la vitesse. De plus, si l'on convient de regarder la vitesse comme positive lorsque le mouvement est dirigé dans le sens de s positifs et négative lorsque le mouvement est dirigé dans le sens opposé, on peut dire que, dans tous les cas, la vitesse est égale à b.

68 – Mouvement varié – Vitesse – Tout mouvement qui n'est pas uniforme est dit varié ; voici comment on définit la vitesse dans un mouvement varié.

Désignons par Δs l'accroissement de s, lorsque t croît de Δt ; le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ exprime la vitesse moyenne avec laquelle l'arc Δs est décrit par le mobile. Si l'on suppose que Δt diminue indéfiniment, la vitesse moyenne varie avec Δt et tend vers une limite déterminée qui est ce que l'on appelle la vitesse à l'instant t.

La vitesse, à un instant quelconque du mouvement, s'exprime donc par la dérivée première $\frac{ds}{dt}$ de la distance parcourue par rapport au temps.

69 – Mouvement uniformément varié – Considérons le mouvement représenté par l'équation

$$s = a + bt + \frac{1}{2} ct^2$$

a, b, c désignant des constantes. La vitesse v, à un instant quelconque, a pour valeur

$$v = b + ct$$

Par suite, dans ce mouvement, la variation de la vitesse est proportionnelle à la variation du temps ; on l'appelle uniformément varié.

Si b et c sont de même signe, la vitesse v conserve constamment le même signe que chacune de ces deux quantités ; le mouvement s'effectue donc toujours dans le même sens, qui est celui des s positifs ou le sens opposé, suivant que b et c sont positifs ou négatifs. La valeur absolue de la vitesse croissant alors de quantités égales en temps égaux, on dit que le mouvement est uniformément accéléré.

Si b et c sont de signes différents, v est d'abord de même signe que b ; mais, à mesure que t augmente, la valeur absolue de v diminue, elle devient nulle, puis elle prend et conserve indéfiniment un signe contraire à celui de b et sa valeur absolue va constamment en croissant, le mouvement a donc lieu d'abord dans le sens indiqué par le signe de b et il se ralentit de plus en plus ; il est uniformément retardé. Puis, il change de sens et s'accélère indéfiniment ; il devient uniformément accéléré.

70 – Dans l'équation du mouvement uniformément varié, la constante a représente la distance du mobile à l'origine O, à l'instant à partir duquel on compte le temps.
La constante b représente, à cet instant, la valeur de la vitesse.
Enfin, d'après l'expression de la vitesse, la valeur absolue de c est la quantité dont varie la vitesse pendant l'unité de temps ; on donne à cette quantité, considérée comme positive ou négative, le nom d'accélération tangentielle.

71 – Supposons que, dans la période du mouvement que l'on considère, la vitesse soit nulle à un instant. En choisissant cet instant pour origine des temps et la position correspondante du mobile pour origine des distances, les valeurs de a et b sont nulles et les expressions de s et v se réduisent aux suivantes

$$s = \frac{1}{2} c t^2 \qquad v = ct$$

De la première de ces relations, on tire $c = \frac{2s}{t^2}$; donc dans un mouvement uniformément varié sans vitesse initiale, l'accélération est égale au double de la distance parcourue pendant un temps quelconque divisée par le carré de ce temps.
Cet énoncé nous sera utile dans la suite.

72 – Mouvement varié – Accélération tangentielle – La notion d'accélération, donnée dans le mouvement uniformément varié, peut recevoir, dans un mouvement varié quelconque, une extension analogue à celle que nous avons donnée à la notion de vitesse.
Désignons par Δv l'accroissement de v, lorsque t croît de Δt. Le rapport $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ représente l'accélération tangentielle moyenne pendant le temps Δt ; si on suppose que Δt tende vers zéro, ce rapport varie avec Δt et tend vers une limite déterminée qui est ce que l'on appelle l'accélération tangentielle à l'instant t.

L'accélération tangentielle, à un instant quelconque du mouvement, s'exprime donc par la dérivée première $\frac{dv}{dt}$, de la vitesse, ou par la dérivée seconde $\frac{d^2s}{dt^2}$ de la distance, par rapport au temps.

73. — Les notions de vitesse et d'accélération tangentielle peuvent se résumer comme il suit.

Soient M la position d'un point mobile à un instant quelconque t et $s = f(t)$ la distance parcourue, à cet instant, par le point sur la trajectoire à partir d'une origine fixe. Si t s'accroît d'une quantité infiniment petite dt, le point vient en M' et la distance correspondante est $s' = f(t + dt)$. On a, par le théorème de Taylor,

$$s' = s + \frac{ds}{dt}dt + \frac{1}{2}\frac{d^2s}{dt^2}dt^2 + \ldots\ldots$$

Il en résulte que

1° si l'on néglige les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier, l'équation du mouvement réduite à la suivante

$$s' = s + \frac{ds}{dt}dt$$

est celle d'un mouvement uniforme s'effectuant avec la vitesse $\frac{ds}{dt}$;

2° si l'on néglige les infiniment petits d'un ordre supérieur au second, l'équation réduite à la suivante

$$s' = s + \frac{ds}{dt}dt + \frac{1}{2}\frac{d^2s}{dt^2}dt^2$$

est celle d'un mouvement uniformément varié s'effectuant avec une vitesse initiale $\frac{ds}{dt}$ et une accélération tangentielle $\frac{d^2s}{dt^2}$.

La ligne droite et la parabole, auxquelles se réduisent les courbes représentatives de ces deux mouvements, l'un uniforme, l'autre uniformément varié, ont respectivement des contacts, du premier et du second ordre, avec la courbe des espaces du mouvement considéré, au point correspondant à l'instant t.

Ces considérations justifient la signification attribuée aux dérivées $\frac{ds}{dt}$ et $\frac{d^2s}{dt^2}$ par les notions de vitesse et d'accélération tangentielle; elles montrent, de plus, comment on peut considérer de deux manières différentes, un mouvement varié quelconque comme limite de mouvements successifs de durées infiniment petites. Dans un cas, ces mouvements élémentaires sont uniformes; dans l'autre, ils sont uniformément variés. Il importe d'ailleurs de remarquer que l'on ne peut, même dans un temps infiniment petit, remplacer le mouvement considéré par les mouvements élémentaires du premier genre, que pour calculer les accroissements d'espace; tandis que l'on peut employer les autres pour le calcul de l'accroissement de la vitesse.

74. Représentation graphique de la vitesse et de l'accélération tangentielle. — La courbe des espaces (n° 65) donne la vitesse v à un instant quelconque; on a, en effet, $v = \frac{ds}{dt}$, d'où il résulte que la vitesse est le coefficient angulaire de la tangente à la courbe des espaces.

On peut aussi représenter par une courbe, en prenant le temps t comme abscisse et la vitesse v comme ordonnée, la loi suivant laquelle la vitesse d'un mouvement varie avec le temps. Le coefficient angulaire de la tangente à cette courbe, dite courbe des vitesses, donne alors l'accélération tangentielle et la quadrature de cette courbe, entre les ordonnées correspondant à deux instants déterminés, donne l'espace parcouru pendant le temps qui sépare ces deux instants.

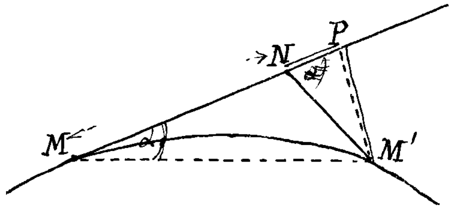
III – Accélération totale.

75. — La définition que nous avons donnée de la vitesse et de l'accélération tangentielle est indépendante de la forme de la trajectoire. Quand le mouvement n'est pas rectiligne, il y a d'autres considérations à introduire: celle de la direction du mouvement et celle de la modification qu'éprouve cette direction.

76. — Direction du mouvement — Dans le mouvement rectiligne, la droite qui joint une position du mobile avec une autre infiniment voisine a toujours une même direction, celle de la droite qu'il décrit et qu'on nomme la direction du mouvement.

Dans le mouvement curviligne, la droite qui joint la position occupée par le mobile à un instant déterminé à celle qu'il occupe après un temps infiniment petit, varie à mesure que l'intervalle diminue et tend vers une limite qui est la direction du mouvement à l'instant considéré et que nous nommerons spécialement direction de la vitesse à cet instant. Elle se confond évidemment avec la tangente à la trajectoire, au point que l'on considère, prise dans le sens du mouvement.

77– Déviation. – Considérons un mouvement quelconque, soit M la position du mobile à l'instant t, après un temps infiniment petit dt, ce mobile est venu de M en M'.



Menons la tangente à la trajectoire au point M et désignons par v la vitesse en ce point. Si pendant l'intervalle de temps dt, la vitesse était restée constante en grandeur et en direction, le mobile occuperait sur la tangente une position N telle que $MN = v\,dt$. La droite NM' indique donc de combien le mobile a été dérangé, pendant le temps dt, par suite de la variation de la direction du mouvement et de la grandeur de la vitesse ; nous donnerons à cette droite le nom de déviation.

78.– Pour déterminer la direction et la grandeur de la déviation, il suffit de calculer ses projections, NP et PM', sur la tangente et sur une perpendiculaire abaissée du point M' sur cette tangente.

Soit s la distance parcourue par le mobile sur sa trajectoire, à l'instant t, à partir d'une origine fixe ; désignons par σ l'accroissement de s pendant le temps dt, de sorte que la valeur absolue de σ représente l'arc MM'. On a

$$\sigma = \frac{ds}{dt}\,dt + \frac{1}{2}\,\frac{d^2s}{dt^2}\,dt^2 + \ldots\ldots$$

ou, puisque la vitesse v est égale à $\dfrac{ds}{dt}$,

$$\sigma = v\,dt + \frac{1}{2}\,\frac{dv}{dt}\,dt^2 + \ldots\ldots$$

Cela posé, on a d'abord $NP = MP - MN$; or, dans le triangle MPM', $MP = MM'\cos\alpha$, α désignant l'angle PMM' ; d'ailleurs la corde MM' ne diffère de l'arc σ que par le troisième ordre et le cosinus de l'angle infiniment petit α ne diffère de l'unité que par le second ordre. Par suite, en négligeant des quantités infiniment petites d'un ordre supérieur au second, on peut écrire $NP = \sigma - vdt$, ou bien en remplaçant σ par sa valeur et en réduisant NP à sa valeur principale

$$NP = \frac{1}{2}\,\frac{dv}{dt}\,dt^2$$

On sait ensuite que, si l'on désigne par ρ le rayon de courbure de la trajectoire en M, on a, en négligeant des quantités infiniment petites d'un ordre supérieur à celui de $M'P$, $M'P = \frac{\sigma^2}{2\rho}$. En remplaçant σ par sa valeur et réduisant $M'P$ à sa valeur principale, on trouve

$$M'P = \frac{1}{2}\,\frac{v^2}{\rho}\,dt^2.$$

79. - Accélération totale - En prenant dt comme infiniment petit principal, il résulte de ce qui précède que la déviation est un infiniment petit du second ordre ; par suite, en négligeant des quantités infiniment petites d'un ordre supérieur au second, sa valeur peut être mise sous la forme

$$NM' = \frac{1}{2}\,w\,dt^2.$$

w désignant une quantité finie.

La déviation varie donc comme l'espace parcouru par un mobile partant du repos, dans un mouvement uniformément varié, avec une accélération égale à w.

Cette quantité w, qui est la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{2NM'}{dt^2}$, lorsque dt tend vers zéro, est ce que l'on nomme l'accélération totale ou simplement l'accélération du mouvement au point M.

La direction de l'accélération au point M est la limite vers laquelle tend la direction de la déviation NM', lorsque M' tend vers M ; cette direction limite est évidemment dans le plan osculateur de la trajectoire au point M.

80 - Composantes tangentielle et normale de l'accélération totale - Pour déterminer la grandeur et la direction de l'accélération, il suffit de connaître ses projections, ou composantes, sur la tangente

au point M et sur la direction limite de PM' qui est celle de la normale principale, menée du point M au centre de courbure de la trajectoire.

Désignons par w_t et w_n les projections de w sur la tangente et sur la normale principale; ces quantités étant les limites des rapports $\frac{2NP}{dt^2}$, $\frac{2M'P}{dt^2}$, lorsque dt tend vers zéro, on trouve en remplaçant NP et M'P par leurs valeurs principales (n° 78)

$$w_t = \frac{dv}{dt} \qquad w_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

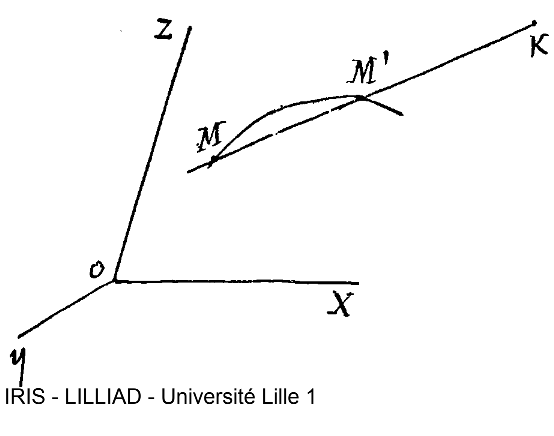
La première de ces composantes a déjà reçu le nom d'accélération tangentielle; on désigne la seconde sous le nom d'accélération normale ou accélération centripète.

On reconnait, d'après les expressions de ces deux composantes que, si le mouvement est uniforme, l'accélération est constamment normale à la trajectoire; et, s'il est rectiligne, le rayon de courbure ρ étant constamment infini, l'accélération est dans le sens de la tangente ou de la ligne du mouvement.

IV. Composantes de la vitesse et de l'accélération dans le mouvement d'un point rapporté à un système de coordonnées rectilignes.

81 – Représentation géométrique de la vitesse. On représente géométriquement la vitesse d'un point par un vecteur obtenu en portant, sur la direction de la tangente dans le sens du mouvement, une longueur numériquement égale à la vitesse.

82 – Composantes du vecteur de la vitesse. – Théorème: Les composantes de la vitesse suivant les axes sont les dérivées premières des coordonnées par rapport au temps. – En effet, soient M et M' les positions du mobile aux instants t et $t + dt$; désignons par $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ les accroissements que prennent les coordonnées du mobile quand il passe de M en M'.



Sur la direction de la corde MM' prenons une longueur MK égale à la vitesse v du mobile au point M; en appelant X, Y, Z les composantes du vecteur OK, on a

$$\frac{X}{\Delta x} = \frac{Y}{\Delta y} = \frac{Z}{\Delta z} = \frac{v}{MM'}.$$

On en déduit $X = \frac{\Delta x}{MM'} \cdot v$; si M' tend vers M, la limite de $\frac{\Delta x}{MM'}$ est égale à $\frac{dx}{ds}$; la limite de X est donc $\frac{dx}{ds} v$, ou bien $\frac{dx}{dt}$, puisque $v = \frac{ds}{dt}$. On trouve de même les limites de Y et de Z.

Les valeurs des trois composantes de la vitesse sont donc, conformément à l'énoncé,

$$\frac{dx}{dt} \qquad \frac{dy}{dt} \qquad \frac{dz}{dt}.$$

Corollaire – Si les coordonnées sont rectangulaires et si α, β, γ désignent les angles que la tangente à la trajectoire dirigée dans le sens du mouvement, fait avec les axes, on aura

$$v \cos\alpha = \frac{dx}{dt} \qquad v\cos\beta = \frac{dy}{dt} \qquad v\cos\gamma = \frac{dz}{dt}$$

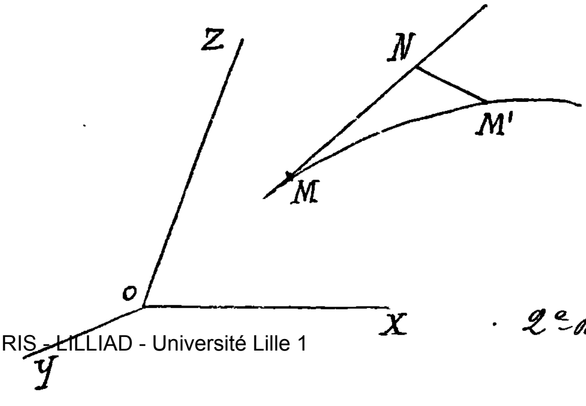
et, par suite,

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

83 – Représentation géométrique de l'accélération. — On représente géométriquement l'accélération d'un point par un vecteur obtenu en portant, sur la direction limite et dans le sens de la déviation, une longueur numériquement égale à l'accélération.

84 – Composantes du vecteur de l'accélération. –

Théorème : Les composantes de l'accélération suivant les axes sont les dérivées secondes des coordonnées par rapport au temps. – Soient M et M' les positions du mobile aux instants t et $t + dt$ et v la vitesse au point M. Sur la tangente à la trajectoire en M, prenons $MN = v\,dt$ et joignons NM'. La direction de l'accélération au point M est la limite de la direction NM', quand M' tend vers M, et sa grandeur est la limite du rapport $\frac{2\,NM'}{dt^2}$ quand dt tend vers zéro.



Supposons le mouvement rapporté à un système de coordonnées rectilignes, rectangulaires ou obliques ; soient x, y, z les coordonnées de M, celles de N, sur la tangente, sont

$$x + \frac{dx}{dt}dt \quad , \quad y + \frac{dy}{dt}dt \ , \quad z + \frac{dz}{dt}dt.$$

Celles du point M', sur la trajectoire, sont, en les développant par la série de Taylor et en négligeant les infiniments petits d'un ordre supérieur au second,

$$x + \frac{dx}{dt}dt + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}dt^2$$

$$y + \frac{dy}{dt}dt + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2}dt^2$$

$$z + \frac{dz}{dt}dt + \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}dt^2$$

En retranchant les coordonnées de N de celles de M', on a les composantes de la déviation NM' ; les valeur de ces composantes sont

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}dt^2 \ , \quad \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2}dt^2 \ , \quad \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}dt^2 ;$$

enfin, pour avoir les composantes de l'accélération w, il suffit de multiplier celles de la déviation par $\frac{2}{dt^2}$. Les valeurs des composantes de l'accélération sont donc, conformément à l'énoncé,

$$\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} \qquad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Corollaire – Si les coordonnées sont rectangulaires, la grandeur w de l'accélération est donnée par la formule

$$w^2 = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2$$

V. Résumé.

85.– On peut résumer comme il suit, les propositions qui précèdent.

Vitesse – 1° la vitesse d'un point mobile est donnée par la formule $v = \frac{ds}{dt}$, dans laquelle on désigne par s la distance parcourue sur la trajectoire et par t le temps.

2° Si x, y, z sont les coordonnées du mobile, les composantes de la vitesse sont $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

Accélération. — 1° les composantes de l'accélération, suivant la tangente et le rayon de courbure, sont respectivement $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{v^2}{\rho}$, ρ désignant le rayon de courbure de la trajectoire.

2° les composantes de l'accélération, suivant les axes d'un système de coordonnées rectilignes, sont $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$.

VI — Exemples de mouvement.

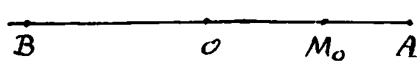
a — Mouvement vibratoire.

86. — Equation du mouvement — On appelle mouvement vibratoire simple un mouvement rectiligne dans lequel la distance du mobile à une origine fixe O est représentée par la formule

$$x = a\cos(\omega t + \alpha)$$

a, ω, α désignant des constantes.

Supposons, par exemple, les constantes a, ω positives.



Pour $t = 0$, le mobile est en M_0, à une distance $x_0 = a\cos\alpha$ de l'origine ; t croissant, x diminue, devient égal à zéro lorsque $\omega t + \alpha = \frac{\pi}{2}$, puis devient négatif, de sorte que le mobile s'éloigne jusqu'au point B, tel que $OB = a$, qui est atteint lorsque $\omega t + \alpha = \pi$. Le mobile rétrograde ensuite et atteint le point A, tel que $OA = a$, lorsque $\omega t + \alpha = 2\pi$. Il revient enfin en M_0, après un temps τ, tel que $\omega\tau = 2\pi$.

Au delà, le mouvement présente une série indéfinie de périodes identiques à celle que l'on vient de décrire.

87. — Durée de vibration — La durée $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ est telle que, lorsqu'elle sépare deux instants du mouvement, le mobile traverse à ces instants, dans le même sens, le même point de sa trajectoire ; on l'appelle durée de vibration. En remplaçant ω par $\frac{2\pi}{\tau}$, on peut écrire

$$x = a\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \alpha\right) \qquad (32)$$

La constante a dont la valeur mesure le maximum de l'excursion du mobile de part et d'autre de la position moyenne O, s'appelle l'<u>amplitude</u> du mouvement.

88. — Vitesse et accélération — La formule (31) donne

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \cos(\omega t + \alpha)$$

Cette dernière formule peut s'écrire

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Elle montre que l'accélération, en un point quelconque M de la trajectoire est proportionnelle à la distance OM et qu'elle est dirigée de M vers O.

89. — On peut simplifier l'équation d'un mouvement vibratoire simple par le choix de l'origine du temps.

1° Supposons que l'on prenne, pour cette origine, un instant où le mobile passe en A; on doit avoir $x = a$, pour $t = 0$; par suite $\alpha = 2K\pi$ et la formule devient $x = a\cos\omega t$.

2° Supposons que l'on prenne, pour origine du temps, un instant où le mobile passe en O, dans le sens OA. Pour $t = 0$, on doit avoir $x = 0$, donc $\alpha = \frac{\pi}{2} + K\pi$; de plus, la dérivée $-a\omega\sin\alpha$ doit être positive, donc K est un nombre impair. Il en résulte que l'équation du mouvement devient $x = a\sin\omega t$.

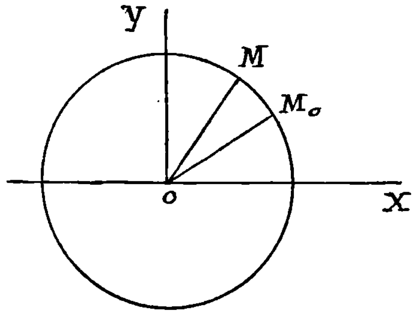
En remplaçant ω par $\frac{2\pi}{\tau}$, on voit que tout mouvement vibratoire peut être remplacé par l'une des deux équations

$$(33) \qquad x = a\cos\frac{2\pi t}{\tau} \qquad\qquad x = a\sin\frac{2\pi t}{\tau}$$

dans lesquelles a et τ représentent l'amplitude et la durée de la vibration.

b. — Mouvement circulaire uniforme.

90 — Equations du mouvement — Supposons qu'un point décrive, avec une vitesse constante, un cercle de rayon a dans le sens où croissent les angles polaires (sens direct).



Soient M_o et M les positions de ce point à l'origine du temps et à un instant quelconque t. Désignons par

α l'angle $M_o OX$
θ l'angle MOX
ω l'angle décrit par le rayon dans l'unité de temps.

Les coordonnées du point M ayant pour valeurs

$$x = a\cos\theta \qquad y = a\sin\theta$$

et l'angle θ étant égal à $\omega t + \alpha$; les équations du mouvement circulaire uniforme direct sont

$$(34) \qquad \begin{aligned} x &= a\cos(\omega t + \alpha) \\ y &= a\sin(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

Les équations du mouvement rétrograde s'obtiennent en changeant ω en $-\omega$; on peut les écrire

$$(35) \qquad \begin{aligned} x &= a\cos(\omega t - \alpha) \\ y &= -a\sin(\omega t - \alpha) \end{aligned}$$

Soit τ la durée d'une révolution complète du mobile ; cette durée est telle que $\omega\tau = 2\pi$. En remplaçant ω par $\frac{2\pi}{\tau}$, les équations (34) et (35) peuvent se mettre sous la forme :

$$(36) \qquad \begin{aligned} x &= a\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} \pm \alpha\right) \\ y &= \pm a\sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} \pm \alpha\right) \end{aligned}$$

et l'on doit prendre, ensemble, les signes + ou −, suivant que le mouvement est direct ou rétrograde.

91. Vitesse – On tire, des équations (34),

$$(37) \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -a\omega\sin(\omega t + \alpha) \\ \frac{dy}{dt} &= a\omega\cos(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

ou bien

(38) $$\frac{dx}{dt} = -\omega y \qquad \frac{dy}{dt} = \omega x$$

et il suffit de changer le signe de ω pour avoir les composantes de la vitesse dans le mouvement rétrograde.

En ajoutant les carrés des vitesses, on retrouve la valeur $v = a\omega$.

92. Accélération – Les composantes de l'accélération sont

(39) $$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \cos(\omega t + \alpha)$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -a\omega^2 \sin(\omega t + \alpha)$$

ou bien

(40) $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$$

Ces formules montrent que la direction de l'accélération passe par le centre du cercle et que sa valeur est $a\omega^2$, c'est à dire $\frac{v^2}{a}$, ainsi que cela devait être d'après la valeur générale de l'accélération normale.

C. Cas de mouvement elliptique.

93. – Equations du mouvement. Le mouvement que nous allons étudier se présente dans l'étude des phénomènes optiques. Ses équations sont :

(41) $$x = a\cos(\omega t + \alpha)$$
$$y = b\cos(\omega t + \beta)$$
$$z = c\cos(\omega t + \gamma)$$

a, b, c ; α, β, γ ; ω désignant des constantes.

94 – Equations de la trajectoire – Les équations (41) peuvent s'écrire

(42) $$\frac{x}{a} = \cos\alpha \cos\omega t - \sin\alpha \sin\omega t$$
$$\frac{y}{b} = \cos\beta \cos\omega t - \sin\beta \sin\omega t$$
$$\frac{z}{c} = \cos\gamma \cos\omega t - \sin\gamma \sin\omega t$$

En éliminant $\cos \omega t$ entre ces trois équations, on a l'équation

$$(43) \qquad \sin(\beta-\gamma)\frac{x}{a} + \sin(\gamma-\alpha)\frac{y}{b} + \sin(\alpha-\beta)\frac{z}{c} = 0$$

qui représente un plan

En éliminant $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ entre deux des equations (42) et l'équation $\cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$, on a l'équation

$$(44) \qquad \frac{x^2}{a^2} - 2\cos(\alpha-\beta)\frac{x}{a}\frac{y}{b} + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2(\alpha-\beta)$$

qui représente un cylindre elliptique.

La trajectoire est donc, en général, elliptique ; en particulier, elle peut être circulaire ou rectiligne.

95 – Axes principaux de la trajectoire. – Soit

$$A = ae^{\alpha i} \qquad B = be^{\beta i} \qquad C = ce^{\gamma i}$$

$$A_0 = ae^{-\alpha i} \qquad B_0 = be^{-\beta i} \qquad C_0 = ce^{-\gamma i}$$

Les équations (41) peuvent être mises sous la forme

$$(45) \qquad \begin{aligned} 2x &= Ae^{\omega t i} + A_0 e^{-\omega t i} \\ 2y &= Be^{\omega t i} + B_0 e^{-\omega t i} \\ 2z &= Ce^{\omega t i} + C_0 e^{-\omega t i} \end{aligned}$$

A l'aide de ces valeurs et en posant

$$A^2 + B^2 + C^2 = Me^{\varepsilon i}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = I$$

on trouve que la distance, à un instant quelconque, du mobile au centre de sa trajectoire est déterminée par la relation

$$2\delta^2 = I + M\cos(2\omega t + \varepsilon)$$

Par suite, le maximum et le minimum de δ s'obtiennent en posant $2\omega t + \varepsilon = 0$ et $2\omega t + \varepsilon = \pi$ et se déduisent de la formule

$$(46) \qquad 2\delta^2 = I \pm M$$

En remplaçant successivement ωt par $-\frac{\varepsilon}{2}$ et $\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}$, dans les équations (41), on a les projections sur les axes coordonnés du demi-grand axe et du demi-petit axe de la trajectoire.

La détermination des axes principaux, en grandeur et en direction, revient donc au calcul du module M et de l'argument ε de la quantité imaginaire $A^2+B^2+C^2$.

Pour que la trajectoire soit un cercle, il faut et il suffit que les deux valeurs (46) soient égales et, par suite, que M soit égal à zéro. On doit donc avoir $A^2+B^2+C^2=0$.

96 — Période du mouvement — Les équations (41) montrent que x, y, z passent par les mêmes valeurs lorsque le temps s'accroit d'une quantité τ telle que l'on ait $\omega\tau = 2\pi$; cette quantité, égale à $\frac{2\pi}{\omega}$, est ce que l'on appelle la *période du mouvement*.

En remplaçant ω par $\frac{2\pi}{\tau}$, les équations du mouvement deviennent

$$(47)\qquad \begin{aligned} x &= a\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}+\alpha\right) \\ y &= b\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}+\beta\right) \\ z &= c\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}+\gamma\right) \end{aligned}$$

On les emploie fréquemment sous cette forme dans les théories du son et de la lumière.

97 — Vitesse — En prenant les dérivées des valeurs (41), on a les composantes de la vitesse

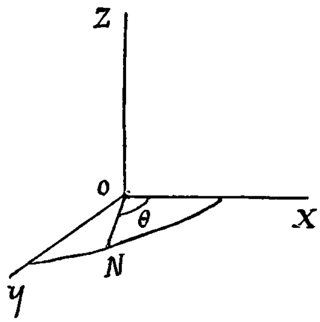
$$(48)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -a\omega\sin(\omega t+\alpha) \\ \frac{dy}{dt} &= -b\omega\sin(\omega t+\beta) \\ \frac{dz}{dt} &= -c\omega\sin(\omega t+\gamma) \end{aligned}$$

De ces valeurs résulte une propriété remarquable du mouvement, on tire en effet des relations (41) et (48)

$$(49)\qquad x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt} = ab\omega\sin(\alpha-\beta)$$

et cette équation peut s'interpréter géométriquement.

Considérons la projection de la trajectoire sur le plan XOY



Soit N, à un instant quelconque, la projection du mobile sur ce plan; désignons par r le rayon ON et par θ l'angle NOX considéré comme croissant de l'axe des x positifs vers l'axe des y positifs. De la relation

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

on en déduit, par différentiation,

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

et par conséquent

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{d\mathcal{A}}{dt}$$

en désignant par $\mathcal{A}$ l'aire décrite par la projection r du rayon vecteur du mobile.

La relation (49) donne donc

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2}ab\omega\sin(\alpha-\beta)$$

et on en déduit, par intégration, en supposant que l'aire $\mathcal{A}$ commence avec le temps t,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab\omega\sin(\alpha-\beta)\,t$$

Ce résultat montre que l'aire décrite par la projection du rayon vecteur du mobile croît proportionnellement au temps et, comme le mouvement du point s'effectue dans un plan, il s'en suit que <u>les aires décrites par le rayon vecteur dans ce plan sont aussi proportionnelles aux temps</u>.

98 - Accélération - Les dérivées secondes des expressions (41) donnent les composantes de l'accélération

$$(50)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -a\omega^2\cos(\omega t+\alpha) \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -b\omega^2\cos(\omega t+\beta) \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -c\omega^2\cos(\omega t+\gamma) \end{aligned}$$

et ces valeurs peuvent s'écrire

$$(51) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z.$$

On en conclut que l'accélération, en un point quelconque M, est dirigée suivant la droite qui joint ce point au centre de l'ellipse et que la valeur de cette accélération s'obtient en multipliant par ω^2 le rayon vecteur OM.

d - Mouvement circulaire varié.

99 - Vitesse et accélération angulaires dans le mouvement circulaire d'un point. - Un point décrit un cercle de rayon ρ; soit v sa vitesse à un instant quelconque. Tous les points du rayon décrivant des arcs semblables, leurs vitesses à un même instant sont proportionnelles à leurs distances au centre de sorte que, si ω est la vitesse du point situé à l'unité de distance du centre, on a $v = \omega\rho$.

La quantité ω est ce que l'on appelle la vitesse angulaire; la dérivée $\frac{d\omega}{dt}$ est l'accélération angulaire

100. - Equations du mouvement. - Rapportant le mouvement à trois axes rectangulaires et supposant que l'origine des coordonnées soit un point de l'axe de la rotation du mobile, désignons par

a, b, c les cosinus directeurs de cet axe.
x, y, z les coordonnées du mobile à l'instant t,
x_0, y_0, z_0 les coordonnées à l'origine du temps.

Soit, de plus, θ l'angle décrit par le rayon pendant le temps t; en posant

$$\lambda = a\,tg\frac{\theta}{2} \qquad \mu = b\,tg\frac{\theta}{2} \qquad \nu = c\,tg\frac{\theta}{2}$$

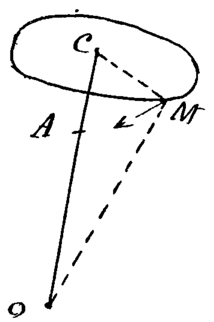
$$h = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$$

et en appliquant au mobile les formules établies pour le déplacement d'un point quelconque d'un solide, on aura les équations du mouvement.

$$(52) \qquad \begin{aligned} hx &= (1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2)x_0 + 2(\lambda\mu-\nu)y_0 + 2(\lambda\nu+\mu)z_0 \\ hy &= 2(\mu\lambda+\nu)x_0 + (1-\lambda^2+\mu^2-\nu^2)y_0 + 2(\mu\nu-\lambda)z_0 \\ hz &= 2(\nu\lambda-\mu)x_0 + 2(\nu\mu+\lambda)y_0 + (1-\lambda^2-\mu^2+\nu^2)z_0 \end{aligned}$$

l'angle θ devant être considéré, dans ces formules, comme une fonction donnée du temps t.

101 - Vitesse - On peut trouver directement les composantes de la vitesse ; en effet, elle a pour valeur $\rho\omega$, ρ étant le rayon du cercle et ω la vitesse angulaire égale à $\frac{d\theta}{dt}$; elle est, de plus, dirigée suivant la tangente au cercle dans le sens du mouvement. Si donc, M étant une position quelconque du mobile et O l'origine des coordonnées, on joint OM et si, sur l'axe OC de la rotation, on prend $OA = \omega$, la direction de la vitesse est l'axe des directions (OA, OM) et sa valeur est



$$v = OA \cdot OM \sin V$$

V étant l'angle compris entre les directions (OA, OM).

Par suite, en appliquant une règle connue, et remarquant que les composantes suivant les axes de OA et OM sont respectivement

$$\begin{array}{ccc} a\omega & b\omega & c\omega \\ x & y & z \end{array}$$

on a immédiatement, pour les composantes de la vitesse,

$$(53) \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \omega\,(bz - cy) \\ \frac{dy}{dt} &= \omega\,(cx - az) \\ \frac{dz}{dt} &= \omega\,(ay - bx) \end{aligned}$$

102 - Accélération - En prenant les dérivées des expressions (53) on a les composantes de l'accélération suivant les axes. On a, par exemple,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (bz - cy)\,\frac{d\omega}{dt} + \left(b\,\frac{dz}{dt} - c\,\frac{dy}{dt}\right)\omega$$

En remplaçant $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ par leurs valeurs (53), il vient

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (bz - cy)\frac{d\omega}{dt} + \left[a(by + cz) - (b^2 + c^2)x\right]\omega^2$$

On peut encore écrire

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (bz - cy)\frac{d\omega}{dt} + \left[a(ax + by + cz) - x\right]\omega^2$$

Or, la quantité $ax + by + cz$ est égale à la distance OC du plan du cercle à l'origine, de sorte que si l'on désigne par α, β, γ les coordonnées du centre du cercle, on a $a(ax + by + cz) = \alpha$. En calculant de même $\frac{d^2y}{dt^2}$ et $\frac{d^2z}{dt^2}$, on a pour les composantes de l'accélération

$$(54) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= (bz - cy)\frac{d\omega}{dt} + (\alpha - x)\omega^2 \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= (cx - az)\frac{d\omega}{dt} + (\beta - y)\omega^2 \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= (ay - bx)\frac{d\omega}{dt} + (\gamma - z)\omega^2 \end{aligned}$$

On peut trouver directement ces expressions en exprimant que, sur chaque axe, la projection de l'accélération est la somme des projections de l'accélération tangentielle et de l'accélération normale.

Chapitre II.

Composition des mouvements.

I. — Mouvements composants et résultants.

103. — Mouvements identiques. — On dit que deux points ont des mouvements identiques lorsque les vecteurs qui joignent les positions initiales de ces points aux positions où ils arrivent après un même temps t sont constamment identiques, c'est à dire ont la même grandeur et la même direction quel que soit t.

Lorsque le mouvement d'un point est connu, on peut toujours donner un mouvement identique à un autre point partant d'une position déterminée.

104. — Mouvements résultants. — Le mouvement d'un point est dit résultant de plusieurs autres mouvements, que l'on appelle composants, lorsque la position du mobile dans ce mouvement, après un temps quelconque t, est la même que si ce mobile avait possédé successivement, pendant le temps t, des mouvements identiques aux mouvements composants.

Il résulte immédiatement de cette définition que la position du mobile, à un instant quelconque, dans le mouvement composant, peut s'obtenir comme il suit

Supposons, par exemple, trois mouvements composants: soit O la position initiale du mobile. Par le point O, menons un vecteur OA_1 représentant en grandeur et en direction la corde qui sous-tend l'arc de trajectoire décrit, pendant le temps t, dans le premier mouvement composant; par le point A_1, un vecteur A_1A_2 représentant de même la corde du second mouvement résultant; enfin, par le point A_2, un vecteur A_2A_3 représentant la corde du troisième mouvement; A_3 est la position finale dans le mouvement résultant.

On a donc cette propriété qui est la traduction directe de la définition : la corde du mouvement résultant est la résultante des cordes des mouvements composants.

105. – Composition des mouvements. – Composer des mouvements, c'est trouver le mouvement résultant de ces mouvements.

Supposons les mouvements rapportés à un système de coordonnées rectilignes. Soient, dans le mouvement résultant,

a, b, c les coordonnées initiales du mobile,

x, y, z les coordonnées d'une position quelconque.

Désignons par les mêmes lettres, affectées d'un indice, les coordonnées analogues dans chacun des mouvements composants.

Les projections, orthogonales ou obliques, d'une corde étant représentées par les différences des coordonnées de ses extrémités, on a, d'après le numéro précédent,

$$(55)\qquad \begin{aligned} x - a &= x_1 - a_1 + x_2 - a_2 + \cdots\cdots \\ y - b &= y_1 - b_1 + y_2 - b_2 + \cdots\cdots \\ z - c &= z_1 - c_1 + z_2 - c_2 + \cdots\cdots \end{aligned}$$

et ces formules donnent les équations du mouvement résultant quand on connaît celles des mouvements résultants.

Elles deviennent

$$(56)\qquad \begin{aligned} x &= x_1 + x_2 + \cdots\cdots \\ y &= y_1 + y_2 + \cdots\cdots \\ z &= z_1 + z_2 + \cdots\cdots \end{aligned}$$

lorsque les positions initiales satisfont aux conditions

$$(57)\qquad \begin{aligned} a &= a_1 + a_2 + \cdots\cdots \\ b &= b_1 + b_2 + \cdots\cdots \\ c &= c_1 + c_2 + \cdots\cdots \end{aligned}$$

Supposons que l'on détermine un mouvement par le vecteur qui joint l'origine à une position quelconque du mobile dans ce mouvement. Les équations (56) et (57) expriment que le vecteur du mouvement résultant est, à chaque instant, le résultant des vecteurs des mouvements composants lorsque cette condition est réalisée à l'origine du temps.

106. — Composition des vitesses. — Des équations (55), on déduit par différentiation,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} + \ldots\ldots$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt} + \ldots\ldots$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz_1}{dt} + \frac{dz_2}{dt} + \ldots\ldots$$

et on en conclut de ces relations le théorème fondamental suivant: la vitesse du mouvement résultant de plusieurs mouvements est la résultante des vitesses des mouvements composants.

107 — Composition des accélérations. — On a de même, pour les dérivées secondes,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2} + \ldots\ldots$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{d^2y_2}{dt^2} + \ldots\ldots$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z_1}{dt^2} + \frac{d^2z_2}{dt^2} + \ldots\ldots$$

d'où cet autre théorème : l'accélération du mouvement résultant de plusieurs mouvements est la résultante des accélérations des mouvements composants.

108. — Nouvelle théorie de la vitesse et de l'accélération. — La théorie de la composition des mouvements d'un point permet de présenter, sous un nouveau point de vue, les notions fondamentales du chapitre précédent.

Soient x. y. z les coordonnées d'un point à l'époque t; après un temps infiniment petit dt, les coordonnées reçoivent les accroissements :

$$\Delta x = \frac{dx}{dt} dt + \frac{1}{2} \frac{d^2x}{dt^2} dt^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3x}{dt^3} dt^3 + \ldots\ldots,$$

$$\Delta y = \frac{dy}{dt} dt + \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dt^2} dt^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3y}{dt^3} dt^3 + \ldots\ldots$$

$$\Delta z = \frac{dz}{dt} dt + \frac{1}{2} \frac{d^2z}{dt^2} dt^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3z}{dt^3} dt^3 + \ldots\ldots$$

Par suite, le mouvement postérieur à l'époque t est le mouvement résultant

1° d'un mouvement infiniment petit du premier ordre dont les équations sont

$$x_1 = \frac{dx}{dt} dt \qquad y_1 = \frac{dy}{dt} dt \qquad z_1 = \frac{dz}{dt} dt$$

2° d'un mouvement infiniment petit du second ordre dont les équations sont

$$x_2 = \frac{1}{2} \frac{d^2x}{dt^2} dt^2 \qquad y_2 = \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dt^2} dt^2 \qquad z_2 = \frac{1}{2} \frac{d^2z}{dt^2} dt^2$$

3° d'un mouvement infiniment petit du troisième ordre...... et ainsi de suite.

Ces divers mouvements composants sont rectilignes, car, dans chacun d'eux, les coordonnées sont proportionnelles à des quantités indépendantes du temps dt.

Considérons spécialement le premier et le second de ces mouvements.

Le premier est un mouvement uniforme et l'espace parcouru est de la forme $S_1 = v\,dt$, la vitesse v ayant pour projections sur les axes $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$.

Le second est un mouvement uniformément varié, sans vitesse initiale ; l'espace parcouru est de la forme $S_2 = \frac{1}{2} w\, dt^2$, l'accélération w ayant pour projections sur les axes $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$.

La vitesse et l'accélération de ces deux mouvements élémentaires représentent, en grandeur et en direction, ce que nous avons appelé la vitesse et l'accélération du mouvement considéré à l'instant t.

On pourrait considérer de même des vecteurs ayant pour composantes suivant les axes les dérivées troisième, quatrième, ... des coordonnées. Ces vecteurs ont été effectivement introduits, dans quelques travaux récents, sous les noms d'accélérations du second ordre, du troisième ordre ...

109. — Nouvelle évaluation des composantes tangentielle et normale de l'accélération. — On peut retrouver, par l'analyse, les composantes <u>tangentielle</u> et <u>normale</u> de l'accélération.

On a, en désignant par v la vitesse,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\,\frac{ds}{dt} = v\,\frac{dx}{ds}$$

on en déduit

$$+\, v\,\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\,\frac{dx}{ds} + v^2\,\frac{d^2x}{ds^2}$$

Or, en désignant par

a, b, c les cosinus directeurs de la tangente,

l, m, n les cosinus directeurs du rayon de courbure,

ρ le rayon de courbure,

on a, suivant des relations établies en Analyse,

$$a = \frac{dx}{ds} \qquad b = \frac{dy}{ds} \qquad c = \frac{dz}{ds}$$

$$l = \rho\,\frac{d^2x}{ds^2} \qquad m = \rho\,\frac{d^2y}{ds^2} \qquad n = \rho\,\frac{d^2z}{ds^2}$$

On peut transformer $\frac{d^2x}{dt^2}$ à l'aide de ces relations et, en opérant de même pour $\frac{d^2y}{dt^2}$ et $\frac{d^2z}{dt^2}$, on trouve

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\,\frac{dv}{dt} + l\,\frac{v^2}{\rho}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = b\,\frac{dv}{dt} + m\,\frac{v^2}{\rho}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\,\frac{dv}{dt} + n\,\frac{v^2}{\rho}$$

Ces trois équations expriment que l'accélération est la résultante de deux droites, l'une $\frac{dv}{dt}$ dont la direction est celle de la tangente, l'autre $\frac{v^2}{\rho}$ dont la direction est celle du rayon de courbure.

II. — Exercices & applications.

a — Exemples de composition de mouvements.

110. — Composition de mouvements vibratoires — Soient les deux équations

$$x_1 = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1) \qquad x_2 = a_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$

qui représentent des mouvements vibratoires simples, ayant la même direction et la même période. Le mouvement résultant représenté par l'équation

$$x = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + a_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$

est aussi un mouvement vibratoire simple, car on peut écrire

$$x = a \cos(\omega t + \alpha)$$

a et α étant déterminés par les deux équations

$$a \cos\alpha = a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2$$
$$a \sin\alpha = a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2 .$$

Il résulte d'ailleurs de ce qui a été établi précédemment que le mouvement résultant de trois mouvements vibratoires simples, ayant la même période et des directions différentes, est un mouvement elliptique.

111. — Composition de mouvements circulaires uniformes. — Considérons les deux systèmes d'équations

$$\begin{cases} x_1 = a \cos(\omega t + \alpha) \\ y_1 = a \cos(\omega t + \alpha) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = a \cos(\omega t - \alpha) \\ y_2 = -a \sin(\omega t - \alpha) \end{cases}$$

qui représentent deux mouvements circulaires de même rayon, de même période et de sens opposés. Si l'on considère le mouvement résultant représenté par les deux équations $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, on voit que ce mouvement dont les équations se réduisent aux suivantes :

$$x = 2a \cos\alpha \cos\omega t$$
$$y = 2a \sin\alpha \cos\omega t$$

est un <u>mouvement vibratoire simple</u> dans la direction α ;

l'amplitude est $2a$ et la durée de la vibration est $\frac{2\pi}{\omega}$. Ce cas particulier, où le mouvement résultant de deux mouvements circulaires est rectiligne, se rapporte à un point important de la théorie mathématique de la lumière.

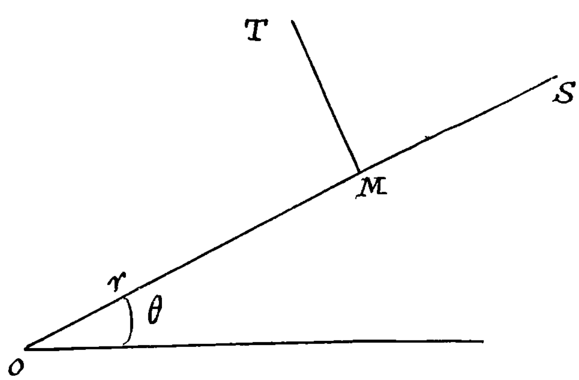
6. Mouvement d'un point rapporté à un système de coordonnées polaires.

112. – Coordonnées polaires dans un plan. – Supposons qu'un point se meuve dans un plan. Soient r et θ le rayon vecteur et l'angle polaire d'une position quelconque du mobile. Les quantités r et θ sont des fonctions du temps

$$r = \varphi(t) \qquad \theta = \psi(t)$$

et il suffit de connaître ces deux fonctions pour que le mouvement du point soit complètement déterminé.

113. – Mouvement de glissement. – Soit M la position du mobile à un instant déterminé. Imaginons qu'à partir de cet instant, l'angle polaire reste constant et que le rayon vecteur varie avec le temps de manière à satisfaire à l'équation $r = \varphi(t)$.



Le mouvement rectiligne que possède alors l'extrémité du rayon vecteur s'appelle mouvement de glissement.

La vitesse et l'accélération de ce mouvement dirigés suivant le prolongement MS du rayon vecteur sont respectivement $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{d^2r}{dt^2}$.

114 – Mouvement de circulation. – Imaginons en second lieu qu'à partir de l'instant considéré, le rayon vecteur reste constant et que l'angle polaire varie de manière à satisfaire à l'équation $\theta = \psi(t)$. Le mouvement circulaire que possède alors l'extrémité du rayon vecteur s'appelle mouvement de circulation.

Soit MT la perpendiculaire au rayon vecteur dirigée du côté où croît l'angle polaire.

La vitesse au point M, dans le mouvement de circulation, dirigée suivant MT, est égale à $r\,\frac{d\theta}{dt}$.

L'accélération est la résultante

1° d'une composante tangentielle, suivant MT, égale à la dérivée de la vitesse, c'est à dire

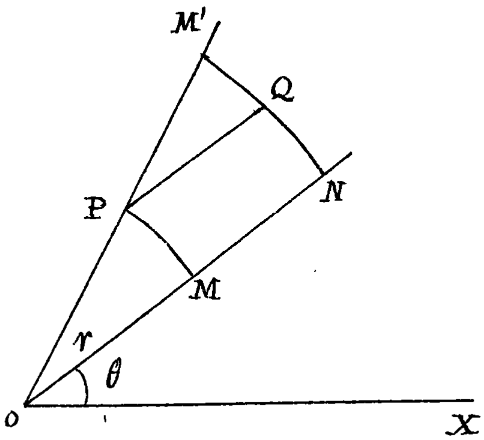
$$r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

2° d'une composante normale, suivant MO, égale au carré de la vitesse divisé par le rayon; c'est à dire

$$r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

Voici maintenant comment on détermine la vitesse et l'accélération dans le mouvement dont les équations sont $r=\varphi(t)$ $\theta=\psi(t)$.

115. – Décomposition du mouvement. – Soient M la position du mobile à un instant quelconque t et M' sa position après un temps infiniment petit dt. Du point O comme centre décrivons les arcs de cercle MP, NM'; soit enfin PQ égal et parallèle à MN.



Le mobile peut aller de M en M' en allant successivement de M en P, de P en Q, de Q en M'. Donc le mouvement considéré est le mouvement résultant

1° du mouvement de circulation,
2° du mouvement de glissement,
3° d'un mouvement complémentaire sur un cercle de rayon PQ.

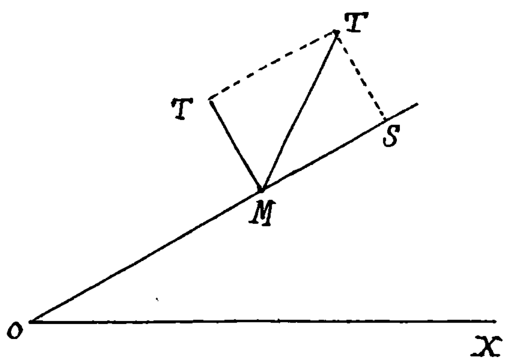
Dans le mouvement complémentaire, l'espace parcouru, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au second, est

$$QM'=d\theta\,dr=\frac{d\theta}{dt}\,\frac{dr}{dt}\cdot dt^2$$

La vitesse est infiniment petite. L'accélération, réduite à l'accélération tangentielle, suivant une perpendiculaire à OM, est égale au double de l'espace divisé par le carré du temps, c'est à dire à

$$2\,\frac{d\theta}{dt}\,\frac{dr}{dt}.$$

116. — Composantes de la vitesse. — D'après la règle de la composition des vitesses, la vitesse du mouvement complémentaire étant nulle à la limite, la vitesse du mouvement est la résultante de la vitesse de glissement et de la vitesse de circulation.



Si donc on porte une longueur MS égale à $\frac{dr}{dt}$ sur le prolongement du rayon vecteur OM et une longueur MT égale à $r\frac{d\theta}{dt}$ sur une perpendiculaire au rayon vecteur, on trouvera la vitesse au point M en construisant la diagonale MT'

117. — Composantes de l'accélération. — D'après la règle de la composition des accélérations, l'accélération du mouvement est la résultante de l'accélération de glissement, de l'accélération de circulation et d'une accélération complémentaire.

Ces trois accélérations ont été déterminées précédemment en grandeur et en direction. Le tableau suivant résume les composantes de chacune d'elles suivant le rayon vecteur OM et suivant une direction MT, perpendiculaire au rayon vecteur dans le sens de l'accroissement positif de l'angle polaire.

Mouvements	Composantes de l'accélération suivant OM	Composantes de l'accélération suivant MT
de glissement	$\frac{d^2r}{dt^2}$	0
de circulation	$-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$	$r\frac{d^2\theta}{dt^2}$
complémentaire.	0	$2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}$.

En résumé, l'accélération est la résultante

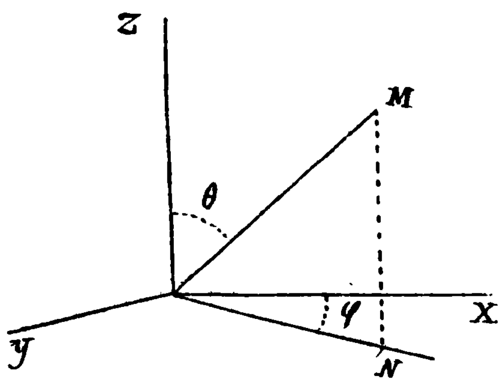
1° d'une composante suivant le rayon vecteur, égale à

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

2°. d'une composante, perpendiculaire au rayon vecteur égale à

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}.$$

118.– Coordonnées polaires dans l'espace.– Lorsqu'un point se meut d'une manière quelconque dans l'espace, on peut définir sa position à chaque instant, en donnant :



1°. sa distance à un point fixe O.

2°. Le complément θ de l'angle que le rayon vecteur fait avec sa projection ON sur un plan fixe XOY.

3°. Enfin l'angle φ que la projection ON fait avec une ligne fixe OX tracée dans ce plan.

Les trois coordonnées r, θ, φ varient avec le temps t. Les relations qui les lient à cette dernière variable constituent les équations du mouvement du point M.

119.– La vitesse et l'accélération peuvent se déduire de considérations analogues à celles qui ont servi au même objet quand le point se meut dans un plan. On les obtient aussi en cherchant leurs composantes suivant trois axes auxiliaires de coordonnées rectilignes. Il suffit pour cela de prendre, par rapport à t, les dérivées premières et secondes des coordonnées rectangulaires $x. y. z$ du point M considérées comme des fonctions composées définies par les formules de transformation.

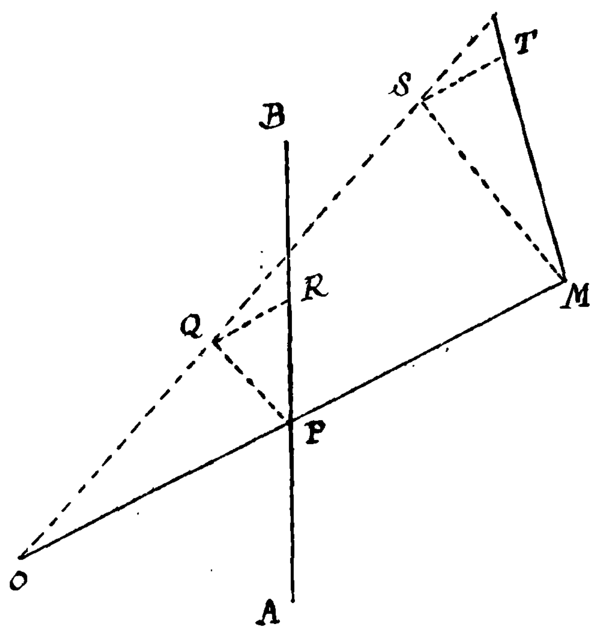
$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

On se dispensera d'écrire ces valeurs qui sont assez complexes et ne seraient pour le moment, d'aucune utilité.

c – Méthode de Roberval pour le tracé des tangentes aux courbes.

120.– Principe de la méthode.– La vitesse d'un point mobile est, à chaque instant, dirigée suivant la tangente à la courbe qu'il décrit. Il en résulte que la connaissance de cette vitesse entraîne celle de la tangente. Concevons que le mouvement du mobile soit décomposé en plusieurs mouvements composants; si l'on peut trouver les vitesses dans ces mouvements composants, ou simplement les rapports qui existent entre elles, on en déduira la direction de la vitesse du mobile, et par suite, la direction de la tangente à la trajectoire. Telle est la méthode de Roberval pour le tracé des tangentes aux courbes. Nous allons donner quelques exemples de son application.

121.- Tangente à la conchoïde. — Soient O un point fixe et AB une droite fixe; on mène par le point O une droite quelconque et à partir du point P où elle coupe AB, on porte une longueur constante PM. La conchoïde est le lieu des points M.



Considérons les mouvements simultanés des points P et M lorsque la droite mobile tourne autour du pôle fixe. Les vitesses de glissement de ces deux points sont égales puisque leur distance ne change pas, et leurs vitesses de circulation sont proportionnelles à leurs distances au pôle OP, OM.

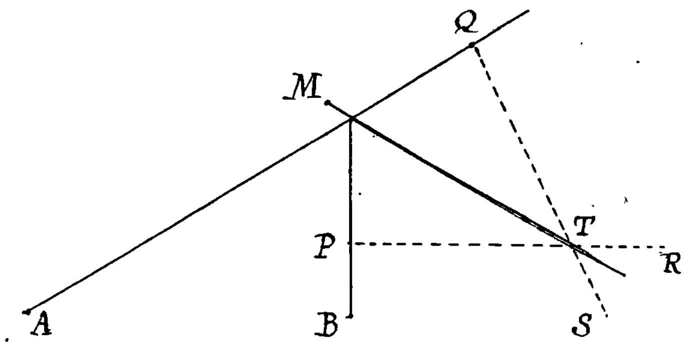
Cela posé, soit PR la vitesse du point P; menons PQ perpendiculaire à OP et RQ perpendiculaire à PQ.

D'après le n° 116, RQ et PQ sont les vitesses de glissement et de circulation. Si maintenant on mène MS perpendiculaire à OM jusqu'à la rencontre du prolongement de OQ et si l'on prend ST perpendiculaire à MS et égal à QR, la résultante MT donne la direction de la tangente à la conchoïde.

122.— Tangente à l'ellipse.— L'ellipse est le lieu des points M tels que la somme de leurs distances AM, BM, à deux points fixes A, B, est constante.

Si nous regardons le point M comme appartenant au rayon vecteur AM mobile autour du point A, sa vitesse pourra être décomposée en une vitesse de circulation et une vitesse de glissement. Il en sera de même si nous considérons ce point M comme appartenant au rayon vecteur BM mobile autour du point B.

La somme MA + MB restant constante, il en résulte que les deux vitesses de glissement du point M sont égales et que, si l'une des deux est dirigée suivant le prolongement de AM, l'autre est dirigée de M vers B.



Soit MQ la vitesse de glissement du point M sur le rayon vecteur AM, si l'on connaissait la vitesse de circulation correspondante, il suffirait de la porter sur la perpendiculaire QS au rayon vecteur AM, puis de joindre son extrémité au point M ; la ligne ainsi obtenue serait la vitesse du point M.

Soit de même MP la vitesse de glissement du point M sur le rayon vecteur BM ; en portant la vitesse de circulation correspondante sur la perpendiculaire PR au rayon vecteur BM et joignant son extrémité au point M, nous aurions encore la vitesse de ce point.

L'extrémité de la ligne qui représente la vitesse du point M devant se trouver à la fois sur PR et sur QS sera donc le point T d'intersection de ces deux lignes. L'égalité des signes QT, PT montre que la ligne MT qui est la tangente à l'ellipse en A, est la bissectrice de l'angle QMP.

Chapitre III.

Mouvement d'un solide invariable.

I. – Préliminaires.

123. – Nous avons déjà considéré certains déplacements particuliers des solides invariables appelés translations et rotations.

Les mêmes désignations s'étendent aux mouvements lorsqu'elles s'appliquent aux déplacements successifs dont ces mouvements se composent.

Dans un mouvement de translation, tous les points du solide ont des mouvements identiques. Ils ont donc, au même instant, la même vitesse et la même accélération donnant ce que l'on appelle la vitesse et l'accélération de translation.

Dans un mouvement de rotation autour d'un axe, chaque point du solide décrit un arc de cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe et dont le centre est sur cet axe. Pour déterminer le mouvement du solide, il suffit alors de connaître le mouvement d'un de ses points.

Considérons, par exemple, un point dont la distance à l'axe soit égale à l'unité. Soit θ l'arc parcouru par ce point à partir d'une origine fixe après un temps quelconque t; sa vitesse est

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

et son accélération tangentielle est

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Les quantités ω et $\frac{d\omega}{dt}$ sont la vitesse angulaire et l'accélération angulaire du solide.

Si l'on considère un point dont la distance à l'axe soit r, l'espace parcouru par ce point à l'instant t, sa vitesse et son accélération tangentielle ont respectivement pour valeurs:

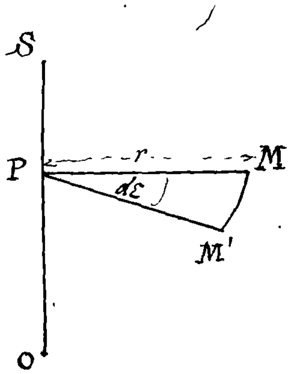
$$r\theta, \qquad r\omega, \qquad r\frac{d\omega}{dt}.$$

124. — Représentation géométrique d'une rotation — Une rotation se représente souvent par un vecteur. Sur la direction de l'axe et à partir d'un point O de cet axe, on porte une longueur OA égale à la vitesse angulaire ω, dans un sens tel que OA voit la rotation s'effectuer de gauche à droite.

Nous appellerons vecteur de la rotation le vecteur que l'on obtient ainsi.

II. — Mouvement d'un solide autour d'un point.

125. — Rotation instantanée. — Soient O le point fixe, M la position d'un point du solide à l'instant t, M' la position du même point après un temps infiniment petit dt



Le déplacement du solide, pendant le temps dt, peut être produit par une rotation autour d'un axe OS passant par le point O. Menons MP perpendiculaire à OS et désignons par $d\varepsilon$ l'angle MPM' de la rotation.

Dans cette rotation, le point M décrirait un arc de cercle dont la longueur $PM \cdot d\varepsilon$ ne diffère de l'élément MM' de la trajectoire effective que d'une quantité infiniment petite par rapport à cette longueur elle-même.

Cela posé, supposons que dt tende vers zéro.

1° l'axe OS tend vers une direction limite que l'on appelle l'axe instantané de rotation à l'époque t,

2° la corde MM', dont la direction limite est celle de la vitesse du point M, devient perpendiculaire au plan déterminé par le point M et par l'axe instantané de rotation.

3° la limite du rapport $\frac{\text{arc } MM'}{dt}$, qui donne la vitesse du point M, est égale à la limite du rapport $\frac{PM \cdot d\varepsilon}{dt}$, c'est à dire à $r\omega$, en désignant par r la distance du point M à l'axe instantané de rotation et par ω la limite de $\frac{d\varepsilon}{dt}$, lorsque dt tend vers zéro. La vitesse du point M est donc la même que si le solide tournait autour de l'axe instantané avec une vitesse angulaire ω indépendante du point considéré. Donc : Quand un solide se meut d'une manière quelconque autour d'un point fixe, les vitesses de tous les points de ce solide sont à chaque instant les mêmes que si le système tournait à cet instant autour d'un certain axe avec une vitesse angulaire déterminée. (d'Alembert.)

126. – Mouvement élémentaire d'un solide autour d'un point fixe.

Dans le langage du calcul infinitésimal, la propriété que l'on vient d'établir, s'énonce comme il suit :

Tout mouvement infiniment petit d'un solide, dont un point reste immobile est une rotation autour d'un axe passant par ce point.

Mais il ne faut pas perdre de vue que cet énoncé que les infiniment petits soient réduits à leurs valeurs principales ; par exemple, il n'est pas rigoureusement exact que les points du solide qui, à l'instant t, sont sur l'axe instantané de rotation restent immobiles pendant un temps infiniment petit dt est compté à partir de cet instant. Il résulte seulement du théorème que les vitesses de ces points sont nulles, en sorte que le déplacement de chacun de ces points est un infiniment petit du second ordre, et ce n'est que dans les évaluations où l'on ne tient compte que des quantités de l'ordre de dt, que ces points peuvent être considérés comme immobiles.

127. – Mouvement continu d'un solide autour d'un point fixe. –

Un mouvement fini quelconque peut être décomposé en une infinité d'autres effectués dans des intervalles de temps infiniment petits et qui peuvent être considérés comme ayant lieu autour d'axes successifs infiniment voisins ; chacun de ces axes peut être considéré comme lié au solide dans la position où il est, relativement à lui, à l'instant où il devient un axe de rotation. On a ainsi deux systèmes de droites, l'un immobile dans l'espace, l'autre invariablement lié au solide mobile. Ce second système constitue un angle solide, à faces infiniment petites qui viennent successivement coïncider avec celles de l'angle solide fixe. Les deux systèmes forment à la limite deux cônes, l'un fixe, l'autre lié au solide et toujours tangents suivant une génératrice puisque les surfaces dont ces cônes sont les limites avaient toujours une face commune.

De plus, les faces des angles solides qui s'appliquent les unes sur les autres étant toujours égales, les aires des surfaces coniques qui, à la limite, s'enroulent les unes sur les autres sont elles-mêmes égales et, par suite, il n'y a pas glissement.

On peut donc représenter le mouvement d'un solide autour d'un point fixe comme déterminé par le roulement d'un cône lié à ce solide sur un cône immobile dans l'espace ayant, comme le premier, le point fixe pour sommet. « véritable solution du problème en ce « qu'elle fait image et qu'on y voit le mouvement du solide « avec autant de clarté que le mouvement d'un point. » (Poinsot)

128. – Remarque. – Lorsque l'axe instantané est fixe dans le solide, il est fixe dans l'espace. En effet, des points invariablement liés au solide ont alors des vitesses toujours nulles, c'est à dire sont en repos.

De même, si l'axe instantané est fixe dans l'espace, il doit être fixe dans le solide, car le solide tourne toujours autour de la même droite.

129. – Composantes de la vitesse d'un point dans le mouvement d'un solide rapporté à trois axes. – La vitesse d'un point du solide à un instant quelconque t est la même que si, à cet instant, ce point décrivait un cercle autour de l'axe instantané avec une vitesse angulaire déterminée. On peut donc appliquer à l'évaluation de cette vitesse les formules établies pour le mouvement circulaire d'un point.

Soient, à l'époque t,

x, y, z les coordonnées du point,

a, b, c les cosinus directeurs de l'axe instantané,

ω la vitesse angulaire instantanée,

p, q, r les composantes, ou projections sur les axes du vecteur de la rotation.

On a évidemment

$$p = a\omega \qquad q = b\omega \qquad r = c\omega.$$

et par suite, les composantes de la vitesse du point x, y, z suivant les axes, deviennent

$$(57) \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= qz - ry \\ \frac{dy}{dt} &= rx - pz \\ \frac{dz}{dt} &= py - qx \end{aligned}$$

Ces formules sont très-importantes ; pour les retrouver on écrit sur deux lignes horizontales :

1° les composantes de la rotation,

2° les coordonnées,

$$\begin{matrix} p & q & r \\ x & y & z \end{matrix}$$

et on forme circulairement les trois déterminants

$$\begin{vmatrix} q & r \\ y & z \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} r & p \\ z & x \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} p & q \\ x & y \end{vmatrix}$$

130. — Composantes de l'accélération. — On déduit des valeurs précédentes celles des composantes de l'accélération. On trouve en effet

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dq}{dt} z - \frac{dr}{dt} y + q(py - qx) - r(rx - pz).$$

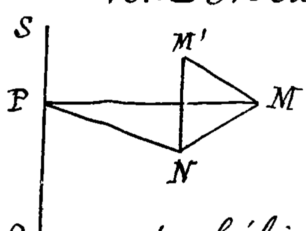
Ajoutant et retranchant p^2x dans le second membre et tenant compte de la relation $\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2$, on a la première des trois expressions qui suivent

$$(58) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= z\frac{dq}{dt} - y\frac{dr}{dt} - \omega^2 x + p(px + qy + rz) \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= x\frac{dr}{dt} - z\frac{dp}{dt} - \omega^2 y + q(px + qy + rz) \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= y\frac{dp}{dt} - x\frac{dq}{dt} - \omega^2 z + r(px + qy + rz) \end{aligned}$$

les deux autres se déduisant de la première en permutant circulairement les lettres.

III. — Mouvement général d'un solide.

131. — Mouvement hélicoïdal instantané. — Soient M et M' les positions d'un point du solide aux instants infiniment voisins t et $t + dt$. On sait que le solide peut être amené de l'une à l'autre des positions qu'il occupe à ces instants par un déplacement hélicoïdal dans lequel tous les points décrivent des hélices de même pas sur des cylindres ayant le même axe OS.



Dans ce déplacement, le point M décrirait un arc d'hélice dont la longueur ne diffère de celle de l'élément MM' de la trajectoire effective que d'une quantité infiniment petite par rapport à elle.

Supposant que dt tende vers zéro.

1° l'axe OS tend vers une direction limite que l'on appelle l'axe instantané de rotation et de glissement à l'époque t.

2° la corde MM', dont la direction limite est celle de la vitesse du point M se confond avec la tangente à l'hélice.

3° la vitesse du point M est la limite du rapport de l'arc d'hélice MM' à l'intervalle du temps dt lorsque dt tend vers zéro.

Si donc on désigne par $d\varepsilon$ l'angle MPN, par $d\alpha$ la longueur NM', enfin par r, ω, u les limites de la distance PM et des rapports $\frac{d\varepsilon}{dt}$, $\frac{d\alpha}{dt}$ lorsque dt tend vers zéro, la vitesse v est donnée par la relation

$$v^2 = u^2 + r^2\omega^2.$$

Par suite,

Théorème : Quand un solide se meut d'une manière quelconque dans l'espace, les vitesses de tous les points de ce solide sont à chaque instant les mêmes que si le système possédait à cet instant un mouvement héliçoïdal s'opérant autour d'un certain axe avec une vitesse angulaire de rotation et une vitesse de glissement déterminées.

132. – Mouvement élémentaire général d'un solide. – Sous les réserves faites dans un cas analogue (n° 126), on peut, à cet énoncé, substituer le suivant :

Tout mouvement infiniment petit d'un solide est un mouvement héliçoïdal.

133. – Mouvement continu en général. – Décomposons un mouvement fini quelconque en une infinité d'autres effectués en des temps infiniment petits. Chacun de ces mouvements élémentaires est un mouvement héliçoïdal se composant d'un glissement et d'une rotation par rapport à un axe instantané. L'ensemble de ces axes forme à la limite une surface réglée S. Soient A_1, A_2, A_3...... les génératrices successives de cette surface et considérons le solide au moment où vont s'effectuer les deux mouvements élémentaires par rapport à A_1.

On peut considérer comme invariablement liées au solide une série de droites que la suite des mouvements élémentaires amènera successivement à coïncider avec $A_2 A_3 \dots$; désignons les par $A'_2, A'_3 \dots\dots$, leur ensemble formera une seconde surface réglée S'. Il est aisé de voir que les deux surfaces S et S' ont non seulement une génératrice commune, mais encore qu'elles sont constamment tangentes le long de cette génératrice.

En effet, le glissement le long de A_1 n'empêche pas les deux surfaces d'avoir une génératrice commune, mais la rotation autour de A_1 amenant la génératrice A'_2 à coïncider avec A_2, on voit qu'à la fin de chaque série des deux mouvements simples constituant chaque mouvement hélicoïdal infiniment petit, les deux surfaces ont deux génératrices infiniment voisines, communes, autrement dit qu'elles sont tangentes le long d'une même génératrice.

On peut donc se représenter le mouvement général d'un solide <u>comme réalisé par le mouvement d'une surface réglée liée au solide sur une autre surface réglée fixe à laquelle la première surface est tangente suivant une génératrice et sur laquelle elle roule en glissant le long de cette génératrice.</u> (Poncelet.)

134 – Composantes de la vitesse d'un point dans le mouvement général d'un solide rapporté à trois axes. – Quel que soit le mouvement d'un solide, on peut l'amener d'une position déterminée à une position quelconque, en donnant d'abord à tout le solide une translation identique au mouvement d'un de ses points A, puis en laissant ce point fixe, et en faisant tourner le système autour de lui, jusqu'à ce que deux autres points viennent prendre la position qu'ils doivent occuper.

La vitesse d'un point quelconque M est la résultante des vitesses qu'il aurait dans ces deux mouvements successifs.

A un instant quelconque t, désignons par

x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A,

a, b, c les composantes de la vitesse du point A,

x, y, z les coordonnées du point M.

Les composantes de la vitesse du point M dans la translation sont a, b, c.

En supposant ensuite les axes transportés parallèlement au point A, les coordonnées de la position finale du point M sont $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ et les composantes de la vitesse de ce point dans le mouvement de rotation autour du point A, sont, d'après les formules du n° 129,

$$q(z-z_0)-r(y-y_0), \qquad r(x-x_0)-p(z-z_0), \qquad p(y-y_0)-q(x-x_0),$$

Donc, les composantes de la vitesse dans le mouvement résultant, qui est le mouvement effectif du point M, sont:

$$\frac{dx}{dt} = a + q(z-z_0) - r(y-y_0)$$

$$\frac{dy}{dt} = b + r(x-x_0) - p(z-z_0)$$

$$\frac{dz}{dt} = c + p(y-y_0) - q(x-x_0)$$

Et ces formules donnent par différentiation, les composantes de l'accélération. –

Chapitre IV.

Composition des mouvements d'un solide.

135. – Définitions. – Le mouvement d'un solide est dit <u>résultant</u> de plusieurs autres mouvements appelés <u>composants</u>, lorsque la position à laquelle il amène le solide, après un temps quelconque, est la même que celle où ce solide viendrait s'il possédait successivement pendant le même temps, les mouvements composants.

On appelle <u>composition</u> l'opération qui consiste à déterminer le mouvement résultant de plusieurs mouvements.

Nous considérerons spécialement la composition de mouvements infiniment petits; la recherche du mouvement résultant est alors simplifiée par suite de circonstances que nous allons faire connaître.

136. – Remarques préliminaires. – On peut dans la détermination du déplacement infiniment petit d'un solide, supposer que le système, au lieu de partir d'une position déterminée, parte d'une position infiniment voisine quelconque, car les déplacements infiniments petits de chacun des points du solide ne sont altérés ainsi que de quantités infiniment-petites par rapport à ces déplacements eux-mêmes.

Si donc on a à faire éprouver successivement à un solide un nombre quelconque de déplacements infiniment petits, on pourra supposer chacun d'eux effectué à partir de la position primitive du système et la somme totale correspondante des variations des coordonnées de chaque point pourra être considérée comme la variation résultante des mouvements opérés à la suite les uns des autres, et dans un ordre quelconque.

C'est à cause de ces avantages que l'on substitue aux mouvements effectués en temps finis les mouvements qui s'accomplissent pendant les intervalles infiniment petits en lesquels on peut décomposer ces temps.

Les propositions suivantes sont relatives à la composition et à la décomposition de ces mouvements <u>élémentaires</u>.

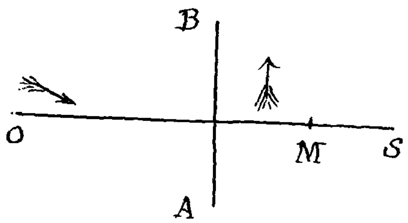
137. – Composition des translations. – Si un solide a successivement

un nombre quelconque de mouvements élémentaires de translation, chacun de ses points décrira, dans le mouvement résultant, la résultante des chemins infiniment petits parcourus dans chacun des mouvements composants. Mais tous les polygones construits ainsi, pour les divers points du solide, ont leurs côtés égaux et parallèles. Donc le mouvement résultant du solide est une translation.

On voit de plus que la vitesse de cette translation est représentée par la résultante du polygone formé avec les droites qui représentent les vitesses des mouvements composants.

138. — Composition d'une translation et d'une rotation. —

Supposons d'abord que l'axe de la rotation soit perpendiculaire à la direction de la translation.



Menons un plan perpendiculaire à l'axe de la rotation ; soient O la projection de l'axe de la rotation sur ce plan et AB la direction de la translation. Désignons par v la vitesse de la translation, par ω la vitesse angulaire de la rotation, et supposons que les mouvements aient lieu dans le sens indiqué par les flèches.

Considérons un point M sur la droite OS perpendiculaire à AB. Ce point a, dans la translation, un déplacement égal à $v\,dt$; le même point a, dans la rotation, un déplacement dans une direction opposée à celle du premier, égal à $OM \times \omega\,dt$. Le déplacement résultant du point M, dans la direction et dans le sens de la translation, est égal à $v\,dt - OM \times \omega\,dt$. Le déplacement est nul si le point M est tel que

$$OM = \frac{v}{\omega}$$

Tous les points d'une parallèle à l'axe mené par le point M sont également immobiles dans le mouvement résultant ; donc le mouvement résultant est une rotation autour d'un axe parallèle à l'axe de la rotation composante.

La vitesse angulaire de la rotation résultante s'obtient en divisant la vitesse d'un point quelconque du solide par la distance de ce point à l'axe. Considérons en particulier le point O ; sa vitesse, uniquement due à la translation est égale à v et sa distance à l'axe est $\frac{v}{\omega}$; donc la vitesse angulaire de la rotation résultante est égale à la vitesse angulaire de la rotation composante. De plus, les deux rotations ont lieu dans le même sens.

139. — Supposons en second lieu que la rotation composante ait lieu autour d'un axe non perpendiculaire à la direction de la translation. On décomposera la translation en deux composantes dont l'une soit parallèle à l'axe de rotation et l'autre lui soit perpendiculaire. On composera la seconde de ces translations composantes avec la rotation, ce qui donnera une rotation autour d'un axe parallèle au premier. Il restera alors une rotation et une translation dirigée suivant l'axe de cette rotation donnant, par leur composition, un mouvement héliçoïdal.

140. — Composition des rotations autour d'axes parallèles. — Soient deux rotations, aux vitesses angulaires ω et ω', s'effectuant dans le même sens autour des deux axes projetés en O et en O'. Considérons un point M sur la ligne OO'. Par la rotation $\omega\,dt$ autour de l'axe O, ce point s'élève au-dessus de OO' d'une quantité $OM \times \omega\,dt$; par la rotation $\omega'\,dt$, autour de l'axe O', le même point s'abaisse au dessous de OO' d'une quantité $O'M \times \omega'\,dt$.

Ces deux déplacements composants étant directement opposés, le déplacement résultant du point M est

$$OM \times \omega\,dt - O'M \times \omega'\,dt$$

Il s'en suit que si le point M est tel que l'on ait

$$OM \times \omega = O'M \times \omega'$$

ce point reste immobile.

Donc le mouvement résultant est une rotation autour d'un axe qui passe par ce point, et qui est parallèle aux axes des rotations composantes. Cet axe de la rotation résultante situé dans le plan des rotations composantes, et, entre ces deux axes, divise la distance qui les sépare en deux parties OM, $O'M$ inversement proportionnelles aux vitesses angulaires ω, ω'.

Pour déterminer la vitesse angulaire résultante, considérons le déplacement résultant du point O'. Ce déplacement, uniquement dû à la rotation autour de O, est $OO' \times \omega\,dt$. En le divisant par $O'M$, on a la vitesse angulaire cherchée.

$$\frac{OO'}{O'M} \times \omega.$$

Or, la relation

$$\frac{OM}{O'M} = \frac{\omega'}{\omega}$$

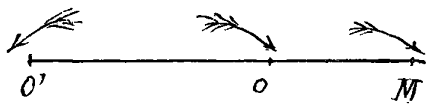
donne

$$\frac{OM + O'M}{O'M} = \frac{OO'}{O'M} = \frac{\omega + \omega'}{\omega}$$

Donc, la vitesse angulaire dans le mouvement résultant est $\omega + \omega'$, c'est à dire la somme des vitesses angulaires dans les mouvements composants.

La rotation résultante s'effectue d'ailleurs dans le même sens que chacune des rotations composantes.

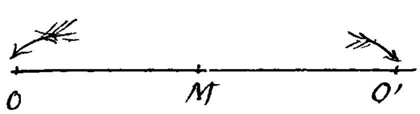
141.— Supposons maintenant deux rotations ω, ω' de sens contraire ; soit $\omega > \omega'$. On établit, comme dans le cas précédent, que ce mouvement résultant est une rotation autour d'un axe parallèle aux axes des rotations composantes, situé dans le plan de ces deux axes, en dehors de la portion du plan qu'ils comprennent entre eux et du côté de l'axe correspondant à la plus grande vitesse angulaire ; les distances de l'axe de la rotation résultante aux axes des rotations composantes sont inversement proportionnelles aux vitesses angulaires correspondantes.



La rotation résultante a lieu dans le sens de la rotation ω, et sa vitesse angulaire est $\omega - \omega'$.

142.— On appelle Couple de rotations l'ensemble de deux rotations s'effectuant autour d'axes parallèles avec des vitesses angulaires égales et en sens contraires.

Le mouvement résultant est alors une translation perpendiculaire au plan des axes.



En effet, soit ω la vitesse angulaire des deux rotations. Pendant le temps dt, un point quelconque M pris entre les deux axes et dans leur plan, décrit perpendiculairement à ce plan, un élément $OM \times \omega dt$ en vertu de la rotation autour de O : le même point décrit, dans la même direction et dans le même sens, un élément $O'M \times \omega' dt$ en vertu de la rotation autour de O'. Le déplacement résultant du point M est

$$OM \times \omega dt + O'M \times \omega dt = OO' \times \omega dt.$$

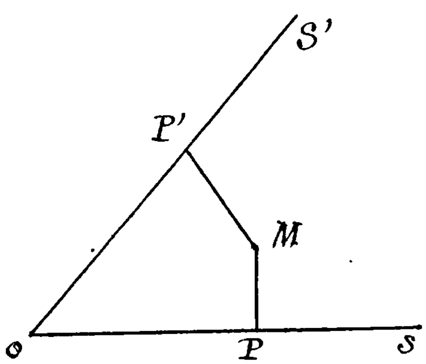
de sorte qu'il est indépendant de la position qu'a le point M sur le plan des axes.

Il suit de là qu'un couple de rotations équivaut à une translation dirigée perpendiculairement au plan des axes des deux rotations, et que la vitesse de cette translation $(OO' \times \omega)$ s'obtient en multipliant la vitesse angulaire commune des deux rotations par la distance des axes.

143. — Pour composer un nombre quelconque de rotations de même sens autour d'axes parallèles, on compose deux d'entre elles, puis la rotation résultante avec une troisième des rotations données, puis cette seconde rotation résultante avec une quatrième des rotations données ; et ainsi de suite. Le mouvement résultant définitif sera une rotation autour d'un axe parallèle aux axes des rotations composantes, de même sens que ces rotations ; et la vitesse angulaire résultante sera la somme des vitesses angulaires composantes.

Enfin, pour composer un nombre quelconque de rotations autour d'axes parallèles, les unes dans un sens, les autres dans le sens opposé, on compose d'abord en une seule les rotations qui ont lieu dans un sens, puis en une seule les rotations qui ont lieu en sens contraire. Le mouvement résultant s'obtient en composant ces deux résultantes partielles ce qui donne une translation ou une rotation suivant que les vitesses angulaires des résultantes partielles sont égales ou inégales.

144. — Composition des rotations autour d'axes concourants. —



Soient OS et OS' les axes de deux rotations ω et ω' leurs vitesses angulaires. D'un point M du plan SOS' abaissons MP et MP' perpendiculaires sur les directions des axes. Par la rotation autour de OS, le point M s'abaisse au-dessous du plan des axes et perpendiculairement à ce plan d'une quantité $MP \times \omega dt$; par la rotation autour de OS' le même point s'élève au-dessus du plan des axes et perpendiculairement à ce plan d'une quantité $MP' \times \omega' dt$.

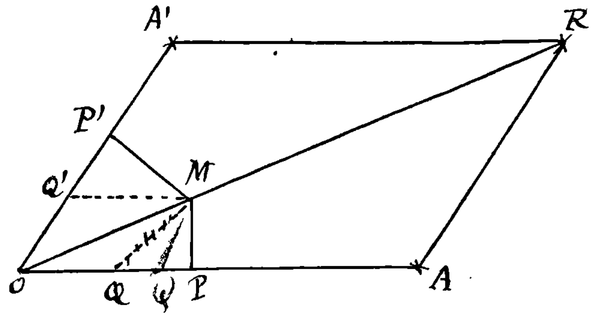
Donc le déplacement du point M est

$$MP' \times \omega' dt - MP \times \omega dt$$

de sorte que ce point est immobile s'il est tel que l'on ait

$$MP' \times \omega' = MP \times \omega$$

Or, le lieu des points satisfaisant à cette condition est la diagonale du parallélogramme construit sur les vecteurs des deux rotations.

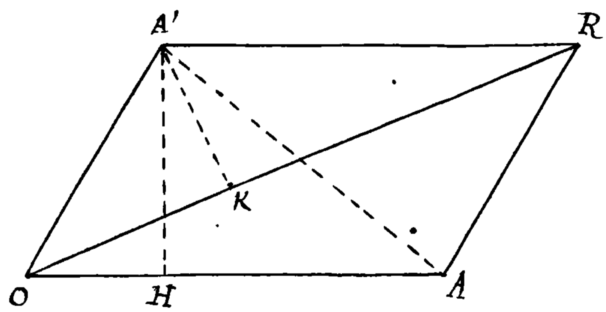


En effet, soient OA et OA' ces vecteurs et M un point quelconque de la diagonale OR. Menons MQ et MQ' parallèles aux côtés du parallélogramme. Les triangles PMQ, P'MQ' sont semblables, et on a par suite

$$\frac{MP'}{MP} = \frac{MQ'}{MQ} = \frac{\omega}{\omega'}$$

d'où résulte la relation à établir.

Le mouvement résultant est donc une rotation autour de la diagonale OR. Pour trouver la vitesse angulaire de cette rotation, considérons la vitesse du point A'.



Cette vitesse, uniquement due à la rotation autour de OA est égale à $A'H \times \omega$, c'est à dire $OA \times A'H$. En la divisant pour la distance A'K du point A' à l'axe de la rotation résultante, on a pour la vitesse angulaire cherchée.

$$\frac{OA \times A'H}{A'K}$$

Or $OA \times A'H$ mesure le double de la surface du triangle OA'A; et $OR \times A'K$ mesure le double de la surface du triangle OA'R; ces deux triangles sont équivalents, on a

$$OA \times A'H = OR \times A'K$$

c'est à dire

$$\frac{OA \times A'H}{A'K} = OR$$

Donc la vitesse angulaire de la rotation résultante est représentée en grandeur par la diagonale OR.

Enfin le point A' s'abaissant au dessous du plan AOA' tourne de gauche à droite pour un observateur ayant les pieds en O et la tête en R; par conséquent, la diagonale OR représentant en grandeur, direction et sens la rotation résultante est le vecteur de cette rotation.

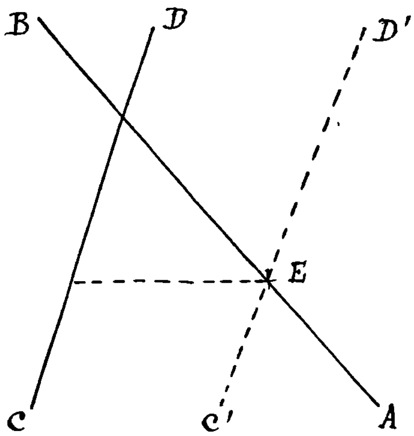
On a donc ce théorème remarquable :

Le vecteur du mouvement résultant est la diagonale du parallélogramme construit sur les vecteurs des mouvements composants. (Poinsot).

145. – Pour composer un nombre quelconque de rotations concourantes, on composera d'abord la première avec la seconde, puis la troisième avec la résultante des deux premières, et ainsi de suite ; si l'on observe d'ailleurs que la diagonale du parallélogramme construit sur deux vecteurs est la résultante de ces deux vecteurs, on pourra énoncer le théorème suivant :

Le mouvement résultant d'un nombre quelconque de rotations concourantes est une rotation dont le vecteur est le résultant des vecteurs des rotations composantes.

146. – Composition de deux rotations autour d'axes non situés dans un même plan. – Soient AB, CD les directions de deux axes de rotations, que nous supposons non situés dans un même plan. Par un point E de AB, menons C'D' parallèle à CD ; nous pouvons, d'après ce que nous avons vu (n° 138) décomposer la relation autour de CD en une rotation égale et de même sens autour de C'D' et une translation perpendiculaire au plan CD C'D'. La rotation autour de C'D' se composera avec la rotation autour de AB (n° 144) en donnant un rotation. Enfin, en composant celle ci avec la translation, on aura un mouvement hélicoïdal. (N° 139).



147. – Composition des mouvements quelconques. – Tout mouvement élémentaire d'un solide est un mouvement hélicoïdal résultant d'une translation et d'une rotation. La composition de deux mouvements élémentaires revient donc à la composition de deux translations et de deux rotations. Les deux rotations se composent en une translation et une rotation (n° 146) on a donc trois translations et une rotation, ou bien, en composant les trois translations, une translation et une rotation, ce qui donnera en général un mouvement hélicoïdal.

Pour composer un nombre quelconque de mouvements élémentaires, on composera d'abord deux de ces mouvements et l'on obtiendra ainsi un mouvement résultant partiel de même nature que chacun des mouvements composants ; on composera ensuite ce mouvement résultant partiel avec un troisième des mouvements composants et ainsi de suite. Le résultat définitif sera en général un mouvement hélicoïdal, ce qui devait être nécessairement, puisque le mouvement hélicoïdal est le mouvement élémentaire le plus général d'un solide.

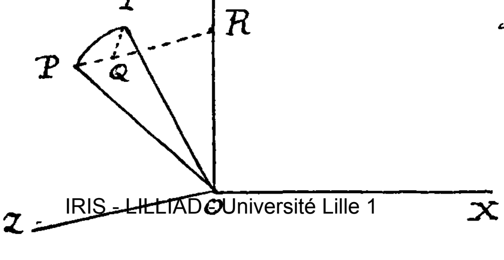
148.– Décomposition d'un mouvement élémentaire d'un solide en trois translations parallèles à trois axes coordonnés et en trois rotations autour de ces axes.– Supposons qu'un solide mobile soit rapporté à trois axes coordonnés et considérons un point, faisant partie du solide ou lié invariablement à lui, qui coïncide avec l'origine au commencement d'un mouvement élémentaire du système. Nous pouvons décomposer ce mouvement élémentaire en une translation égale et parallèle au mouvement du point considéré, et une rotation autour d'un axe passant par ce point. La translation peut se décomposer en trois translations suivant les axes ; la rotation s'effectuant autour d'un axe passant par l'origine peut également se décomposer en trois rotations autour des mêmes axes. Donc tout mouvement élémentaire d'un solide peut se décomposer en trois translations parallèles à trois axes quelconques et en trois rotations autour de ces axes.

149.– Composantes de la vitesse d'un point quelconque du solide.– Supposons que l'on effectue la décomposition en adoptant trois axes rectangulaires. Soient a, b, c les composantes de la vitesse de translation et p, q, r les composantes de la vitesse angulaire de la rotation.

Dans un temps infiniment petit dt, les translations produiraient sur un point M quelconque, ayant pour coordonnées x, y, z les déplacements

$$a\,dt \qquad b\,dt \qquad c\,dt$$

respectivement parallèles à OX, OY, OZ.



Évaluons maintenant les déplacements dus à chacune des rotations p, q, r considérée isolément.

La rotation p, autour de l'axe OX, donne au point M un déplacement identique à celui de sa projection P sur le plan YOZ ; cette projection décrit un arc PP' autour de O comme centre, avec OP pour rayon et $p\,dt$ pour angle au centre. La projection de PP' sur OX est nulle; les projections sur sur OY et OZ sont les côtés PQ et P'Q du triangle PQP' formé en menant par P une parallèle à OY et par P' une parallèle à OZ. Les triangles PQP' et POR sont semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires; donc

$$\frac{PQ}{OR} = \frac{P'Q}{PR} = \frac{PP'}{OP} = p\,dt$$

ou bien

$$\frac{PQ}{z} = \frac{P'Q}{y} = p\,dt.$$

La variation de la coordonnée y, ou le déplacement de M en projection sur OY, est $-PQ$ c'est à dire $-pz\,dt$; de même le déplacement suivant OZ sera $P'Q$ ou $py\,dt$.

On obtient de la même manière les projections sur les trois axes des déplacements produits par la rotation q autour de OY et par la rotation r autour de OZ.

Le tableau suivant résume les déplacements suivant les trois axes dus aux trois rotations.

	OX	OY	OZ
p	0	$-pz\,dt$	$py\,dt$
q	$qz\,dt$	0	$-qx\,dt$
r	$-ry\,dt$	$rx\,dt$	0

Le déplacement du point M étant la résultante des déplacements produits par chacun des mouvements composants, sa projection sur chaque axe est la somme des projections que l'on vient de calculer. Donc on a, en divisant tous les déplacements par dt,

$$\frac{dx}{dt} = a + qz - ry$$

$$\frac{dy}{dt} = b + rx - pz$$

$$\frac{dz}{dt} = c + py - qx$$

La théorie de la composition des mouvements élémentaires donne donc, par un procédé purement géométrique, les expressions des composantes de la vitesse d'un point quelconque d'un solide en mouvement que l'on avait précédemment obtenus par l'analyse.

Chapitre V.

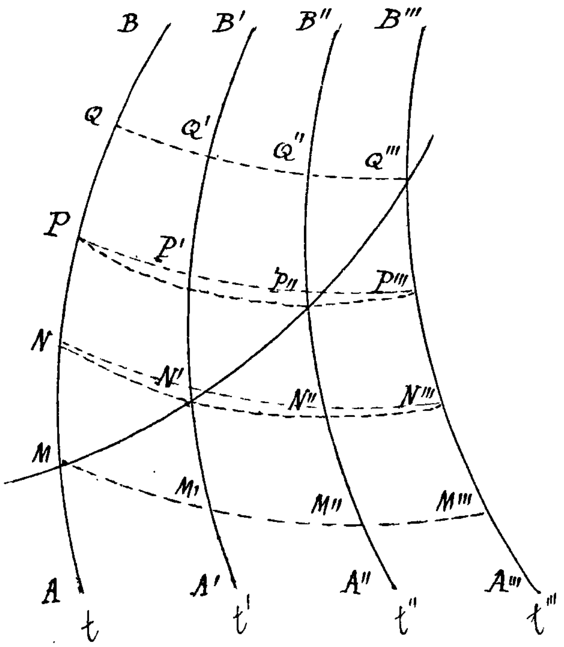
Théorie des mouvements relatifs.

150. Définitions. — Pour étudier le mouvement d'un point, on rapporte sa position à un système invariable, ou système de comparaison, formé par exemple de trois axes coordonnés. Si le système de comparaison est fixe, le mouvement du point est dit absolu; si le système de comparaison est mobile, le mouvement est dit apparent ou relatif.

Les mouvements observés à la surface de la Terre sont des mouvements relatifs, puisque la Terre se meut dans l'espace.

Le problème que nous allons résoudre consiste à chercher le mouvement absolu d'un point, connaissant le mouvement relatif de ce point et le mouvement du système de comparaison.

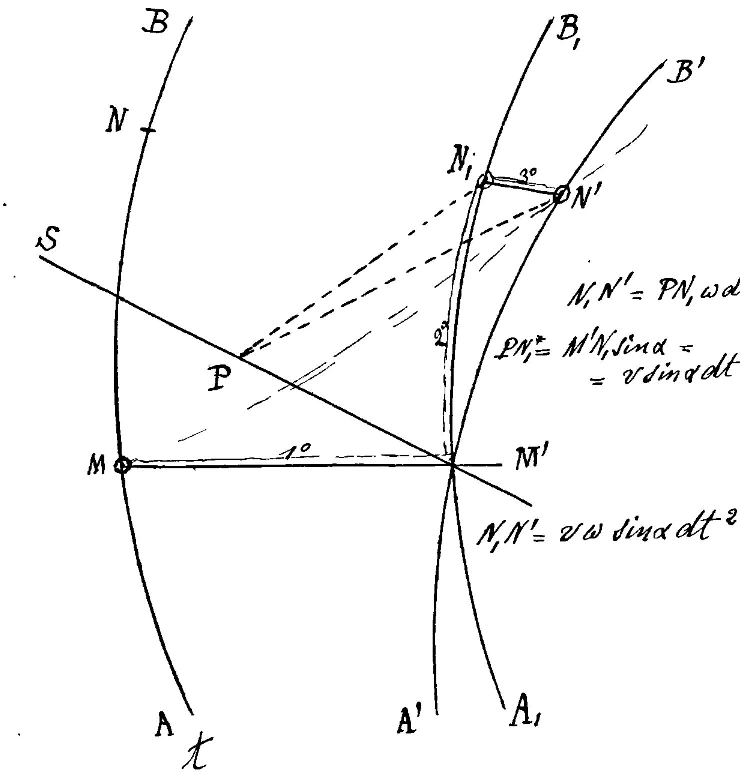
151. — Détermination de la trajectoire du mouvement absolu. —



Concevons qu'un point rapporté à un système de comparaison mobile décrive par rapport à ce système une ligne quelconque AB; et que, par suite du mouvement du système de comparaison, cette ligne AB prenne successivement dans l'espace les positions A'B', A''B'', A'''B''',... Le point mobile aura dans l'espace un mouvement absolu que nous pourrons facilement déterminer, d'après la connaissance de son mouvement relatif suivant la ligne AB et du mouvement que possède le système de comparaison.

Supposons que les positions AB, A'B', A''B''... de la trajectoire relative correspondent aux valeurs t, t', t''... du temps; supposons en outre qu'à ces diverses époques, le mobile se trouve aux points M, N, P... de la courbe mobile AB. A la fin du temps t, le mobile est en M. A la fin du temps t' il est au point N de la courbe AB; mais cette courbe se trouve alors dans la position A'B' et le point N a été transporté en N'; donc, à la fin du temps t' le mobile est en N'. De même, à la fin du temps t'', il se trouve en P'', et ainsi de suite. Le point mobile décrit donc dans l'espace la trajectoire M N' P'' Q'''.....

152. – Décomposition du mouvement absolu. – A une époque quelconque t, soient AB la position de la trajectoire relative et M la position du mobile sur cette trajectoire. Après un temps infiniment petit dt, le mobile vient en N sur la courbe AB; mais par suite du mouvement du système de comparaison, cette courbe se trouve alors dans la position A'B' et le point N s'est transporté en N', de sorte que MN' est le déplacement élémentaire du mobile dans le mouvement absolu.



Cela posé, si l'on considère la trajectoire relative comme invariablement liée au système mobile de comparaison, son mouvement dû à un mouvement élémentaire de ce système peut être considéré comme résultant d'une translation identique au mouvement du point M de la courbe AB et d'un mouvement autour du point M'.

La translation amène la trajectoire relative en A,B, et le point N en N, ; le second mouvement composant amène la trajectoire en A'B' et le point N, en N'.

Le mobile peut ainsi aller de M en N' en allant successivement de M en M', de M' en N, , de N, en N'. Donc le mouvement absolu est le mouvement résultant :

1° du mouvement d'entraînement (1) du mobile.

2° du mouvement relatif du mobile.

3° d'un mouvement complémentaire.

---

(1) Le mouvement d'entraînement du mobile à un instant quelconque, est le mouvement que prendrait ce mobile, à partir de cet instant, s'il devenait invariablement lié au système de comparaison.

153. — Cherchons la partie principale de l'espace parcouru dans le mouvement complémentaire. Remarquons à cet effet que le mouvement élémentaire, qui amène la trajectoire relative de A_1B_1 en $A'B'$, peut être considéré comme une rotation instantanée autour d'un axe $M'S$ passant par le point M'. Désignons par

v la vitesse relative,

ω la vitesse angulaire de la rotation,

α l'angle que l'axe de cette rotation fait avec la direction de cette vitesse relative.

En menant N_1P perpendiculaire à $M'S$, on a

$$N_1N' = PN_1 \cdot \omega dt$$

D'ailleurs

$$PN_1 = M'N_1 \sin\alpha = v \sin\alpha\, dt;$$

par suite

$$N_1N' = v\,\omega \sin\alpha\, dt^2.$$

Donc, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au second, le mouvement complémentaire est uniformément varié.

154. — Vitesse et accélération complémentaires. — La vitesse du mouvement complémentaire est infiniment petite.

Son accélération, réduite à l'accélération tangentielle est égale au double de l'espace divisé par le carré du temps, c'est à dire à

$$2\,\omega v \sin\alpha$$

Cette accélération est dirigée suivant N_1N'; elle est donc perpendiculaire à la fois à l'axe $M'S$ de la rotation instantanée et à la direction $M'N_1$ de la vitesse relative.

De plus, un observateur ayant les pieds en N_1 et la tête en N' verrait s'effectuer de gauche à droite la rotation qui amènerait la direction $M'S$ sur la direction $M'N_1$.

Il en résulte que si, à partir d'une origine quelconque O, on mène un vecteur $OA = \omega$ identique au vecteur de la rotation instantanée et un vecteur $OB = v$ identique au vecteur de la vitesse relative, le vecteur de l'accélération complémentaire s'obtient en portant sur l'axe des directions des vecteurs (OA, OB) une longueur numériquement égale au double de l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs.

155.– Vitesse du mouvement absolu – D'après la règle de la composition des vitesses, la vitesse du mouvement complémentaire étant nulle à la limite, la vitesse du mouvement absolu est la résultante de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative.

156.– Accélération du mouvement absolu – D'après la règle de la composition des accélérations, l'accélération du mouvement absolu est la résultante de l'accélération d'entraînement, de l'accélération relative et de l'accélération complémentaire (Coriolis)

157.– Composantes de l'accélération complémentaire.– Le mouvement relatif d'un point étant en général rapporté à un système d'axes mobiles, il est utile de connaître les composantes, suivant ces trois axes, de l'accélération complémentaire. On y parvient en faisant une nouvelle application des formules (4) du n° 15.

Soient, par rapport aux axes mobiles,

p, q, r les composantes du vecteur de la rotation instantanée,
x, y, z les coordonnées du point mobile.

Les composantes de la vitesse relative sont $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ et on a, par suite, pour les composantes de l'accélération complémentaire

$$X = 2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right)$$

$$Y = 2\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right)$$

$$Z = 2\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right)$$

158.– Cas particuliers.– 1° Si le mouvement du système de comparaison se réduit à une translation, la vitesse angulaire ω devient nulle et l'accélération complémentaire disparaît. Dans ce cas, l'accélération absolue est la résultante de l'accélération d'entraînement et de l'accélération relative.

2° Si de plus, la translation a lieu dans une direction constante avec une vitesse constante, l'accélération d'entraînement est nulle et l'accélération absolue se confond avec l'accélération relative.

159.– Etude analytique des mouvements absolu et relatif.–
Soit M un point mobile, désignons par

x', y', z' ses coordonnées par rapport à un système d'axes fixes $O'X', O'Y', O'Z'$,
x, y, z ses coordonnées par rapport à un système d'axes mobiles OX, OY, OZ;

x_0, y_0, z_0 les coordonnées de l'origine mobile O.

Les formules qui servent à exprimer x', y', z' en fonction de x, y, z sont

$$x' = x_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z$$

$$y' = y_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z$$

$$z' = z_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z$$

les (a, b, c) désignant, suivant la règle connue, les cosinus des angles que les axes mobiles font avec les axes fixes.

En supposant connu le mouvement des axes mobiles, les coordonnées (x_0, y_0, z_0), ainsi que les neuf cosinus (a, b, c) sont des fonctions connues du temps. Les formules précédentes permettent alors de déterminer le mouvement absolu du point M, quand on connait son mouvement relatif. En effet, les coordonnées relatives (x, y, z) sont des fonctions connues du temps et les formules, donnant (x', y', z'), sont les équations du mouvement absolu.

On en déduit, par différentiation, les composantes de la vitesse et de l'accélération dans ce mouvement(1)

160. — Si, au contraire, connaissant le mouvement absolu, on veut trouver le mouvement relatif, il suffit de résoudre les équations par rapport à (x, y, z). Les équations que l'on obtient ainsi

$$x = a_1(x' - x_0) + b_1(y' - y_0) + c_1(z' - z_0)$$

$$y = a_2(x' - x_0) + b_2(y' - y_0) + c_2(z' - z_0)$$

$$z = a_3(x' - x_0) + b_3(y' - y_0) + c_3(z' - z_0)$$

sont les équations du mouvement relatif.

Lorsque le mouvement des axes mobiles est une translation, on peut prendre les trois axes fixes respectivement parallèles aux trois axes mobiles ; les équations du mouvement relatif se réduisent alors aux suivantes

$$x = x' - x_0 \qquad y = y' - y_0 \qquad z = z' - z_0$$

---

(1). C'est par cette méthode que Coriolis a établi le théorème du n° 156. (Journal de l'École Polytechnique — 24e Cahier, p. 142).

Considérons spécialement le cas où le point dont on cherche le mouvement relatif est en repos absolu.

Ses coordonnées, rapportées aux axes fixes $O'X', O'Y', O'Z'$, sont alors des constantes (a, b, c) et, par suite, les équations de son mouvement relatif deviennent

$$x = a - x_0 \qquad y = b - y_0 \qquad z = c - z_0$$

On en conclut que la trajectoire relative, ou apparente, du point M est symétrique de la trajectoire réelle du point O.

Dans le cas particulier où le point O décrit une trajectoire plane, la trajectoire relative du point M est aussi plane et, comme deux figures planes symétriques sont en même temps égales, on conclut que, dans ce cas, la trajectoire relative du point M est la même que la trajectoire absolue du point O; ces deux trajectoires ne diffèrent que par la position qu'elles occupent.

Exemple : dans son mouvement annuel, la Terre décrit une ellipse dont le soleil occupe un des foyers; il en résulte que, pour un observateur placé sur la Terre, le soleil semble décrire annuellement une ellipse, égale à la précédente, dont la Terre occupe un des foyers.

Livre II.

Equilibre et mouvement d'un point matériel.

Chapitre 1er

Notions sur les forces et leur mode d'action.

I. — Préliminaires.

161. — Principes fondamentaux. — L'étude du mouvement des corps eu égard aux causes qui produisent ce mouvement constitue la Dynamique.

Les lois de la Dynamique n'ont pu être établies qu'en partant de principes dont la connaissance a été puisée dans l'observation des faits.

Ces principes ne sont pas des axiomes évidents à priori et ils ne se prêtent pas à une vérification expérimentale immédiate, mais ils se justifient par l'exactitude des conséquences que l'on en déduit par une suite de raisonnements rigoureux.

162. — Définition du point matériel — On donne le nom de point matériel à un point géométrique auquel on attribue certaines propriétés que l'observation du monde physique conduit à attribuer à la matière.

La détermination du mouvement que les corps matériels prennent sous l'action de causes données est un problème complexe que l'on simplifie en faisant d'abord abstraction des dimensions de ces corps, c'est à dire en les supposant réduits à de simples points matériels. Après avoir acquis des notions nettes et précises sur la question du mouvement ainsi simplifiée : on revient à l'étude du mouvement des corps naturels en les considérant comme des systèmes de points matériels. —

II – Principes de l'inertie.

163. – Enoncé du principe. – Un point matériel ne peut passer de lui même de l'état de repos à l'état de mouvement. Une fois en mouvement, il ne peut modifier de lui même son état de mouvement; de sorte que, si aucune cause extérieure n'agit sur lui, sa vitesse conservera constamment la même grandeur et la même direction, c'est à dire que son mouvement sera rectiligne et uniforme.

164. – Forces. – On appelle force toute cause produisant ou modifiant le mouvement d'un point matériel.

« La notion des forces est une des plus simples et des plus incontestables; elle nous vient de l'expérience de tous les instants. Nous ne pouvons déranger un corps de la position qu'il occupe sans avoir le sentiment d'un effort; nous l'éprouvons de même pour soutenir un corps pesant, et nous avons l'idée d'un effort plus grand ou plus petit avant même d'avoir les moyens précis de comparaison. Il faut donc bien se garder de dire que la notion des forces ait rien d'hypothétique; elle est aussi certaine que tout ce qui nous vient de l'expérience. Quant à leur nature, elle ne sera pas plus l'objet de nos études que ne le sera l'essence de la matière elle-même. En cela comme en tout, ce qui dépend de notre système du monde, nous partirons de données bien constatées, et nous n'emploierons le raisonnement qu'à en développer les conséquences »
(Duhamel, cours de Mécanique.)

165. – Direction d'une force. – Lorsqu'une force agit sur un point matériel, on peut concevoir que l'on maintienne ce point en repos pendant quelque temps, puis qu'on l'abandonne en lui laissant la liberté de se mettre en mouvement sous l'action de la force; la direction suivant laquelle il commencera à se déplacer est ce qu'on nomme la direction de la force à laquelle il est soumis.

166. – Evaluation des forces en nombre. – L'évaluation des grandeurs d'une espèce quelconque est fondée sur deux notions nécessaires et suffisantes : celle de l'égalité et celle de l'addition.

De ces notions résulte immédiatement celle de la décomposition d'une grandeur en parties égales. Lorsqu'on les a acquises on peut comparer entre elles les grandeurs de cette espèce, et en en choisissant une pour terme de comparaison ou unité, on peut évaluer toutes les autres en nombres entiers, fractionnaires ou incommensurables.

En ce qui concerne les forces, on dit que les forces sont égales, lorsque, appliquées en sens contraire à un point matériel libre et en repos, elles ne lui font prendre aucun mouvement. La somme de plusieurs forces est la force qui peut remplacer l'ensemble des premières sollicitant le même point dans la même direction. Ces notions suffisent à l'évaluation des forces en nombre. Le nombre qui sert de mesure à une force s'appelle ordinairement son intensité.-

167.- Représentation géométrique d'une force.- On peut représenter une force par un vecteur. On porte, à cet effet, à partir de son point d'application, sur une droite ayant la même direction que la force, une longueur égale à son intensité.

168.- Forces constantes.- Nous dirons qu'une force est constante, lorsqu'elle conserve, à tous les instants, la même intensité et la même direction.

III.- Principe de l'indépendance du mouvement acquis et des effets simultanés des forces.

169- Énoncé du principe.- Lorsqu'une ou plusieurs forces agissent sur un point matériel, chacune d'elles agit comme si les autres n'existaient pas et comme si le point matériel partait du repos. Il est nécessaire d'ajouter quelques développements à cet énoncé, pour en préciser la signification

Soit v la vitesse d'un point matériel à un instant quelconque. Si, à partir de cet instant, le point était soustrait à toute action de force, il se mouvrait avec une vitesse toujours égale à v sur la tangente à la trajectoire. Ce point aurait aussi un mouvement rectiligne et uniforme que l'on appelle le mouvement acquis à l'instant considéré.

Supposons maintenant que des forces constantes en nombre quelconque soient appliquées à un point matériel. Le principe, signifie que le mouvement du point, pendant un temps quelconque est le résultant du mouvement acquis à l'origine de ce temps et des mouvements qui auraient lieu pendant le même temps, par l'action de chaque force appliquée seule au point pris au repos. de sorte que l'effet des causes qui déterminent simultanément le mouvement du mobile est identique à celui que produiraient ces causes agissant successivement.

170. – Corollaire I. – Une force constante agissant sur un point matériel libre en repos initial, produit un mouvement rectiligne et uniformément varié.

En effet, d'après le principe, l'accélération est, à chaque instant, la résultante de l'accélération initiale et de l'accélération du mouvement acquis qui est nulle, puisque ce mouvement est rectiligne et uniforme. Donc, l'accélération conserve à tous les instants, la même grandeur et la même direction que celle de la force.

171. – Corollaire II. – Des forces constantes, agissant isolément sur un même point matériel, produisent des mouvements dont les accélérations sont proportionnelles aux intensités des forces.

Soient F_1 et F_2 deux forces constantes, le rapport de ces forces, quelle que soit sa valeur, pourra toujours s'exprimer avec telle approximation que l'on voudra, par le rapport des deux nombres entiers n_1 et n_2,

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Soit f la valeur commune des rapports $\frac{F_1}{n_1}$, $\frac{F_2}{n_2}$, de sorte que

$$F_1 = n_1 f \qquad F_2 = n_2 f.$$

et désignant par w_1, w_2, u les accélérations des mouvements produits par les forces F_1, F_2, f agissant isolément sur le point matériel en repos initial.

La force F_1 peut être considérée comme formée par la réunion de n_1 forces égales à f agissant dans la même direction; l'accélération du mouvement qu'elle produit est donc égale à $n_1 u$, d'après le principe. De même, l'accélération due à la force F_2 est égale à $n_2 f$. On a donc

$$w_1 = n_1 u \qquad w_2 = n_2 u$$

et, par suite

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{F_1}{F_2}.$$

Le même raisonnement s'applique à un nombre quelconque de forces.

172. — Définition de la masse d'un point matériel. — D'après ce qu'on vient de voir, le rapport $\frac{F}{w}$ d'une force constante à l'accélération qu'elle produit reste constant lorsque l'action de cette force s'exerce sur un même point matériel; mais l'expérience a conduit à admettre que ce rapport varie lorsqu'on passe d'un point matériel à un autre. La valeur de ce rapport est donc, pour chaque point, un coëfficient spécifique correspondant à une qualité spéciale, inhérente à l'essence de la matière, en vertu de laquelle la même force agissant sur des points différents ne leur donne pas le même mouvement.

On donne à ce rapport le nom de masse; en désignant sa valeur par m, on a pour définition

$$\frac{F}{w} = m \quad \text{ou} \quad F = m w.$$

D'après cette relation, on voit que plus la masse est grande, plus est petite l'accélération produite par une force donnée; si F reste constant, m et w varient en raison inverse l'une de l'autre.

On peut présenter ce résultat sous une autre forme.

Soit v la vitesse acquise après un temps t, par un point matériel de masse égale à m en repos initial sous l'action de la force F. On a

$$\frac{dv}{dt} = w \qquad v = w t$$

Il en résulte

$$F = \frac{mv}{t}.$$

D'où l'on voit que, pour imprimer à différents points matériels, la même vitesse dans le même temps, il faut employer des forces proportionnelles aux masses de ces points.

Ces conclusions conduisent à considérer la masse comme le coefficient de la résistance de la matière au mouvement ou à la modification du mouvement. (Lamé).

IV. – Théorème fondamental de la Dynamique.

173. – Relation entre l'accélération du mouvement d'un point matériel et la résultante des forces appliquées à ce point.

Supposons qu'un point se meuve sous l'action de forces constantes $F_1, F_2, F_3 \ldots$; soient $w_1, w_2, w_3 \ldots$ les accélérations des mouvements que ces forces produiraient en agissant isolément sur le point en repos initial. Les directions des forces sont les mêmes que celles des accélérations correspondantes, et l'on a, en désignant par m la masse du point

$$F_1 = m\,w_1 \qquad F_2 = m\,w_2 \qquad F_3 = m\,w_3 \ldots$$

De plus, d'après le second principe, l'accélération w du mouvement du point sous l'action simultanée des forces est la résultante des accélérations $w_1, w_2, w_3 \ldots$; le mouvement acquis, étant rectiligne et uniforme n'intervient pas dans la détermination de cette accélération.

Supposons maintenant que, les forces étant représentées par des vecteurs, on cherche leur résultante par la construction ordinaire ; soit F la grandeur de cette résultante.

Considérons les contours polygonaux qui déterminent F et w. Les côtés homologues de ces contours ont mêmes directions ; et la longueur d'un côté du premier de ces contours s'obtient en multipliant par m la longueur du côté correspondant du second. Donc, la résultante des forces a la même direction que la résultante des accélérations, et les grandeurs de ces résultantes sont liées par la relation

$$F = m\,w.$$

174. – Ces résultats subsistent lorsque le point matériel se meut sous l'action de forces variables. En effet, l'accélération, à un instant quelconque du mouvement, dépend uniquement des déplacements qu'éprouve le mobile, pendant un intervalle de temps infiniment petit, à partir de l'instant que l'on considère ; et les déplacements que le point éprouve, pendant cet intervalle de temps, sous l'action de forces variables ne diffèrent que par des quantités infiniment petites par rapport à eux mêmes des déplacements que produiraient les forces si elles conservaient, pendant

le même temps, leurs intensités et leurs directions initiales. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème. — Lorsque des forces quelconques agissent sur un point matériel, l'accélération du mouvement de ce point coïncide à chaque instant avec la direction de la résultante des forces, et la grandeur de cette accélération s'obtient en divisant l'intensité de la résultante des forces par la masse du point matériel.

Ce théorème peut être considéré comme la véritable et unique base de la Dynamique tout entière.

175. — Composition et décomposition des forces appliquées à un point matériel. — Il résulte du théorème précédent que les forces agissant sur un point peuvent à chaque instant se remplacer par leur résultante sans que le mouvement soit modifié ; inversement une force peut se remplacer par plusieurs autres dont elle soit la résultante.

Les forces remplacées par une résultante se nomment composantes.

L'opération qui détermine la résultante d'un système de forces s'appelle composition ; inversement on nomme décomposition l'opération évidemment indéterminée, par laquelle on remplace une force par plusieurs autres dont elle soit la résultante.

Lorsque les forces composantes sont au nombre de deux, leur résultante est la diagonale du parallélogramme construit sur les vecteurs qui représentent ces forces. S'il y a trois composantes, il faut de même construire la diagonale d'un parallélipipède dont elles seraient les trois arêtes concourantes.

V. Travail des forces.

176. — Travail élémentaire. — On appelle travail élémentaire d'une force le produit de l'intensité de cette force par le déplacement infiniment petit de son point d'application et par le cosinus de l'angle compris entre la direction de la force et celle du déplacement. Le travail ainsi défini est une grandeur susceptible d'un signe qui sera + ou − suivant que la force et le déplacement feront ensemble un angle aigu ou obtus.

Désignons par

F l'intensité de la force,

ds le déplacement infiniment petit du point d'application,

α l'angle compris entre la direction de la force et la direction du déplacement, le travail élémentaire de la force est par définition,

$$F \cos \alpha \, ds.$$

En écrivant cette expression $F \times \cos \alpha \, ds$ ou bien $ds \times \cos \alpha \, F$, on voit que l'on peut définir le travail élémentaire comme le produit de la force par la projection du déplacement sur la direction de la force ou bien comme le produit du déplacement par la projection de la force sur la direction du déplacement.

Le travail élémentaire est nul lorsque la direction de la force est perpendiculaire à celle du déplacement.

177 - Travail total. — Considérons un déplacement fini du point d'application d'une force et divisons l'arc parcouru en éléments infiniment petits. La somme des travaux élémentaires correspondants à ces déplacements infiniment petits est ce que l'on appelle le travail total de la force.

Soit S la distance, comptée sur la trajectoire, du point mobile à un point fixe de cette trajectoire. Le travail total de la force F, entre les positions correspondant aux valeurs S_0 et S_1 de la variable S, est représentée par l'intégrale définie

$$\int_{S_0}^{S_1} F \cos \alpha \, ds.$$

L'intégration est immédiate lorsque la force est constante. En faisant sortir le facteur F du signe d'intégration on voit que le travail total d'une force constante est égal au produit de l'intensité de la force par la projection, sur la direction de la force du chemin parcouru.

Le travail des forces est une grandeur qui joue un rôle d'une importance capitale dans les théories de la Mécanique rationnelle et de la Mécanique appliquée à la Physique.

178. — Théorème. — Le travail d'une force, pour un déplacement quelconque est égal à la somme des travaux de ses composantes pour le même déplacement.

Soient F une force, $F_1, F_2, F_3 \ldots\ldots$ ses composantes, ds un déplacement élémentaire du point d'application. La projection de la résultante sur la direction du déplacement étant égale à la somme des projections des composantes, on a

$$F \cos(F, ds) = F_1 \cos(F_1, ds) + F_2 \cos(F_2, ds) + \ldots\ldots$$

et, en multipliant les deux membres par ds;

$$F \cos(F, ds)\, ds = F_1 \cos(F_1, ds)\, ds + F_2 \cos(F_2, ds) + \ldots\ldots$$

Cette relation donne la démonstration du théorème pour le travail élémentaire, il suffit de prendre l'intégrale pour passer au travail total.

179. – Théorème II. – Le travail d'une force dans un déplacement quelconque, est égal à la somme des travaux de cette force dans les déplacements composants.

Soit F une force, ds un déplacement infiniment petit du point d'application, ds_1, ds_2, ds_3 ..... divers déplacements ayant ds pour résultante. En projetant ds, ds_1, ds_2, ... sur F, on a :

$$\cos(F, ds)\, ds = \cos(F, ds_1)\, ds_1 + \cos(F, ds_2)\, ds_2 + \ldots\ldots\ldots$$

et en multipliant les deux membres par F, on a la traduction algébrique du théorème.

180. – Corollaire. – Expression du travail élémentaire d'une force en coordonnées rectangulaires. – Soient X, Y, Z les projections ou composantes d'une force F sur trois axes rectangulaires, soient dx, dy, dz les projections du déplacement ds de son point d'application. Désignons par le signe $\mathcal{C}$ le travail d'une force; on aura d'après le théorème I,

$$\mathcal{C} F = \mathcal{C} X + \mathcal{C} Y + \mathcal{C} Z.$$

mais le travail de X est égal à la somme des travaux de cette force dans les déplacements dx, dy, dz. Le premier de ces travaux est $X\,dx$, car $\cos(X, dx) = 1$; les deux autres sont nuls, car $\cos(X, dy) = 0$ et $\cos(X, dz) = 0$. En opérant sur Y, Z comme sur X, on a

$$\mathcal{C} F = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

181. – Cette formule, très-importante, se déduit aussi directement de l'expression même du travail élémentaire

$$\mathcal{C} F = F \cos(F, ds)\, ds$$

En effet, les cosinus directeurs de F et ds sont respectivement

$$\frac{X}{F}, \frac{Y}{F}, \frac{Z}{F} \text{ et } \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}.$$

On a donc

$$\cos(F, ds) = \frac{X}{F}\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{F}\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{F}\frac{dz}{ds}.$$

et, en multipliant par $F\,ds$, on retrouve la valeur de $\mathcal{T}F$ précédemment obtenue.

182. – Travail total d'une force dans le mouvement d'un point rapporté à des coordonnées rectangulaires. – L'expression du travail élémentaire de la force F pouvant s'écrire

$$\left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right)dt$$

le travail total, depuis l'instant t_0 jusqu'à l'instant t_1, est donné par l'intégrale

$$\mathcal{T}F = \int_{t_0}^{t_1}\left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right)dt$$

183. – Quelques développements sont nécessaires pour préciser ce qu'il faut connaître pour calculer le travail d'une force.

Lorsqu'une force agit sur un point matériel en mouvement, ses composantes X, Y, Z dépendent en général de la position actuelle du point, c'est à dire de ses coordonnées x, y, z. En outre, elles peuvent dépendre directement du temps t, puisque les forces qui agissent en un point de l'espace peuvent varier avec le temps. Enfin elles peuvent dépendre de l'état de mouvement actuel du point, ce qui a lieu pour certaines résistances fonctions de la vitesse.

En résumé, on peut considérer les composantes d'une force comme étant, en général, des fonctions des coordonnées, du temps et des composantes de la vitesse.

$$X = F_1\left(x, y, z;\ t;\ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

$$Y = F_2\left(x, y, z;\ t;\ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

$$Z = F_3\left(x, y, z;\ t;\ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

Si l'on connait toutes les circonstances du mouvement du point d'application, les coordonnées x, y, z de ce point, ainsi que les composantes $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ de sa vitesse, sont des fonctions connues du temps ; et il en est de même pour les composantes X, Y, Z de la force, de sorte que l'expression à intégrer se réduit à une fonction du temps seul. Il ne s'agit plus alors que d'intégrer une fonction d'une seule variable par rapport à cette variable ; mais il est un cas particulièrement important, où cette intégration s'effectue directement sans qu'il soit nécessaire de connaître toutes les circonstances du mouvement.

184. – Cas d'intégration immédiate. – Supposons que les composantes de la force ne dépendent que des coordonnées x, y, z du point d'application et soient, en outre, les dérivées partielles (1) par rapport à x, y, z d'une fonction $f(x, y, z)$ de ces coordonnées considérées comme des variables indépendantes :

$$X = \frac{df}{dx} \qquad Y = \frac{df}{dy} \qquad Z = \frac{df}{dz}$$

Dans ce cas, le travail élémentaire de la force a pour expression

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz$$

Il est la différentielle totale df de la fonction f et, lorsque le point d'application passe de la position (x_0, y_0, z_0) à la position (x_1, y_1, z_1) on a, pour le travail total de la force,

$$f(x_1, y_1, z_1) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Lorsque la fonction $f(x, y, z)$ n'a qu'une valeur pour chaque système de valeurs des variables x, y, z, les valeurs f_0 et f_1 de cette

---

(1) On voit immédiatement que pour que trois fonctions X, Y, Z des variables x, y, z soient les dérivées partielles d'une fonction de ces variables, il est nécessaire qu'elles satisfassent aux trois conditions

$$\frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy} \qquad \frac{dZ}{dx} = \frac{dX}{dz} \qquad \frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}.$$

On démontrera dans le cours d'Analyse (2e année) que ces conditions sont suffisantes et que, lorsqu'elles sont remplies, on peut toujours trouver par des quadratures une fonction $f(x, y, z)$ dont X, Y, Z soient les dérivées partielles.

fonction, correspondant à deux positions successives du point, sont bien déterminées et le travail de la force, lorsque le point passe de l'une à l'autre de ces positions, égal à f_1, f_0 est lui-même bien déterminé. Par suite, le travail de la force ne dépend que des positions extrêmes de son point d'application et ce travail reste le même quelle que soit la série des positions intermédiaires.

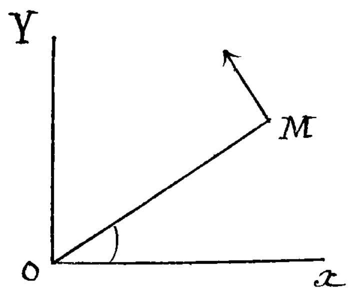
Si, en particulier, le point d'application décrit un contour fermé, on a $f_1 = f_0$ et le travail est nul.

Il est essentiel pour que cette propriété ait toujours lieu, que la fonction f n'ait qu'une valeur, c'est à dire soit uniforme. Dans le cas contraire, le travail peut ne pas être nul lorsque le point d'application repasse par la même position.

Soit, par exemple, la fonction $f = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ qui, pour chaque système de valeurs de x, y, admet une infinité de valeurs. Si l'on considère cette fonction comme déterminant, par ses dérivées partielles, une force dirigée dans un plan XOY et appliquée au point x, y de ce plan, on voit que les composantes de cette force sont

$$X = -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad Y = \frac{x}{x^2+y^2}$$

de sorte que cette force qui sollicite le point est, dans chacune de ses positions, perpendiculaire à la droite qui joint le point à l'origine et en raison inverse de la distance à cette origine. D'ailleurs, la fonction f est, dans le cas actuel, l'angle polaire MOX.



Si donc le point M décrit un contour fermé ne renfermant pas l'origine, le travail de la force est nul; mais si le point M décrit un contour fermé autour de l'origine, l'accroissement de la fonction et par suite le travail sont égaux à 2π.

185. — Surfaces de niveau. — En égalant la fonction $f(x, y, z)$ à une constante arbitraire, on a une équation

$$f(x, y, z) = c$$

qui, lorsque l'on attribue successivement à c toutes les valeurs possibles, représente une série continue de surfaces.

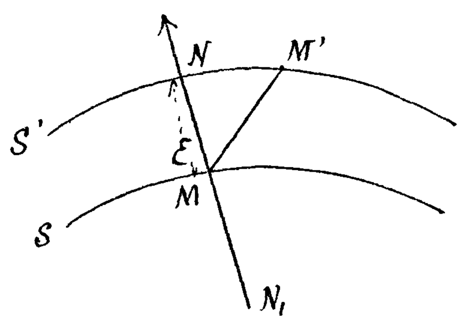
Ces surfaces, que l'on appelle surfaces de niveau jouissent de propriétés importantes. Elles déterminent d'abord très simplement la direction et la grandeur de la force.

1° La force est, dans l'une quelconque des positions de son point d'application, normale à la surface de niveau qui passe par ce point.

En effet, les cosinus directeurs de la force sont proportionnels à X, Y, Z et, par conséquent, aux dérivées partielles $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}$ qui sont elles-mêmes proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale à la surface de niveau.

2° En un point d'une surface de niveau, la force est dirigée par rapport à cette surface, dans la région de l'espace où la fonction $f(x, y, z)$ est croissante.

Soient S et S' deux surfaces de niveau infiniment voisines correspondant aux valeurs C et $C + dc$ de la constante; supposons que dc soit positif, de sorte que la valeur de la fonction $f(x, y, z)$ soit croissante lorsque l'on passe de la surface S à la surface S'.



Concevons que le point d'application de la force passe d'un point M de la première surface à un point M' de la seconde. Le travail élémentaire correspondant au déplacement MM' est $\pm F\varepsilon$, produit de F par la projection $MN = \varepsilon$ de MM' sur la direction de la force : le signe est + ou − selon que la force a le sens MN ou le sens opposé. Mais le travail est égal à l'accroissement de f c'est à dire à dc que nous supposons positif. Donc, il faut prendre le signe + et, par suite, la force est dirigée de M vers N, conformément à l'énoncé.

3° L'intensité de la force en un point est inversement proportionnelle à la distance de ce point à une surface de niveau infiniment voisine.

On a, en effet, d'après ce qui précède,

$$F\varepsilon = dc$$

de sorte que les quantités F et ε varient en raison inverse l'une de l'autre.

186. – Travail total. – Le travail élémentaire, lorsque le point d'application de la force passe d'une surface de niveau à une surface infiniment voisine, étant indépendant du point où ce passage a lieu et de la direction du déplacement, il est évident que le travail total sera le même pour des trajets différents qui auront traversé les mêmes surfaces en les rencontrant dans le même ordre.

Si donc les surfaces de niveau s'enveloppent les unes les autres toutes les fois que l'on passera de l'une d'elles à une autre, il faudra nécessairement traverser les mêmes surfaces intermédiaires en les rencontrant dans le même ordre et le travail total sera indépendant du chemin suivi par le mobile entre les deux surfaces extrêmes.

Mais cette conclusion cessera d'être vraie si les surfaces de niveau se coupent les unes les autres, car alors il devient possible de faire passer le point de l'une d'elles à une autre sans qu'il traverse chaque fois, dans le même ordre, les mêmes surfaces intermédiaires.

187.— On voit aussi que si le point d'application part d'une surface de niveau pour y revenir, le travail total de la force sera égal à zéro, s'il arrive que, pendant son trajet, le point ait traversé deux fois chacune des surfaces sur lesquelles il s'est trouvé ; car alors le travail élémentaire correspondant au premier passage sera égal et de signe contraire à celui qui correspond au second, pourvu que, dans ces deux passages, le mobile marche dans deux sens différents.

C'est ce qui aura lieu si les surfaces de niveau s'enveloppent les unes les autres ; mais si elles se coupent, on peut faire en sorte que le mobile revienne à la surface dont il est parti sans traverser pendant qu'il revient, en marchant dans un autre sens, toutes les surfaces par lesquelles il avait passé, et alors il pourra arriver, et il arrivera même ordinairement que le travail total ne sera pas égal à zéro.

188.— Ces considérations dues à M. Bertrand, (Journal de l'Ecole Polytechnique, 28e cahier, p. 272) mettent en lumière l'origine des particularités que présente, comme on l'a signalé précédemment, l'évaluation du travail total d'une force dont les composantes sont des dérivées partielles.

A la fonction $f = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$, citée comme exemple, correspond dans l'espace, une série de surfaces de niveau représentée par l'équation

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = c \quad \text{ou} \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} c$$

c'est à dire une infinité de plans se coupant tous suivant l'axe Oz. C'est par suite de cette circonstance, que le travail peut ne pas être nul lorsque le point revient sur la même surface de niveau.

Ajoutons que la relation précédemment démontrée $F\mathcal{E} = dc$, montre que si la force ne devient pas infinie sur une surface de niveau, les distances $\mathcal{E}$ relatives aux différents points de cette surface sont toujours du même ordre de grandeur, de sorte que cette surface ne coupe pas une surface infiniment voisine.

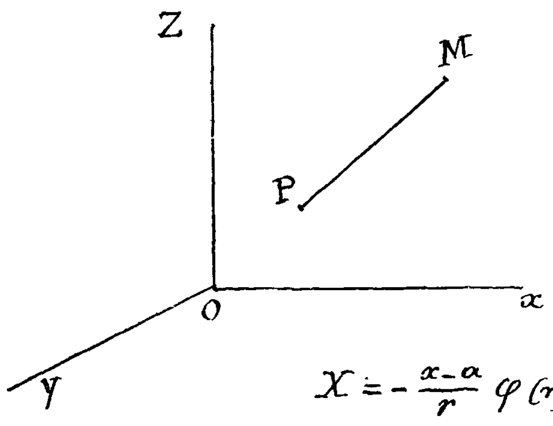
189. – Potentiel. – On a souvent à considérer, dans les recherches d'électricité et de Magnétisme, des forces dont les composantes sont des dérivées partielles. L'usage a prévalu, dans ces théories, d'affecter du signe – la fonction dont les dérivées représentent la force et de poser

$$X = -\frac{dV}{dx} \qquad Y = -\frac{dV}{dy} \qquad Z = -\frac{dV}{dz}$$

de sorte que le sens de la force soit vers la région où la fonction V est décroissante (N° 185.)

La fonction V prend alors le nom de potentiel et les surfaces de niveau s'appellent surfaces équipotentielles.

190. – Exemples de forces admettant un potentiel. – Supposons qu'en un point M de l'espace agisse une force dirigée suivant la droite qui joint ce point à un centre fixe P et dont l'intensité soit une fonction $\varphi(r)$ de la distance $MP = r$.



Désignons par x, y, z les coordonnées de M, a, b, c les coordonnées de P.

Si la force est attractive, c'est à dire dirigée de M vers P, ses composantes suivant les axes sont

$$X = -\frac{x-a}{r}\varphi(r) \quad Y = -\frac{y-b}{r}\varphi(r) \quad Z = -\frac{z-c}{r}\varphi(r)$$

c'est à dire

$$X = -\frac{d\psi}{dx} \qquad Y = -\frac{d\psi}{dy} \qquad Z = -\frac{d\psi}{dz}$$

en posant

$$\psi(r) = \int \varphi(r)\, dr.$$

Si la force est répulsive, c'est à dire dirigée suivant le prolongement de PM, ses composantes changent de signe. Les formules sont donc générales si l'on convient de considérer la fonction $\varphi(r)$ comme positive ou négative suivant que la force est attractive ou répulsive.

191. — On peut généraliser ce résultat. Supposons qu'au point M soient appliquées des forces en nombre quelconque, dirigées suivant les droites qui joignent ce point à des centres fixes P_1, P_2, P_3 ....., et dont les intensités soient des fonctions

$$\varphi_1(r_1), \qquad \varphi_2(r_2), \qquad \varphi_3(r_3) \ldots\ldots$$

des distances r_1, r_2, r_3 ..... du point M aux centres fixes. Désignons par $\psi_1(r_1)$, $\psi_2(r_2)$, $\psi_3(r_3)$ ..... des fonctions dont $\varphi_1(r_1), \varphi_2(r_2), \varphi_3(r_3)$.... soient respectivement les dérivées, c'est à dire telles que l'on ait

$$\psi_1(r_1) = \int \varphi_1(r_1)\, dr_1 \qquad \psi_2(r_2) = \int \varphi_2(r_2)\, dr_2 \ldots\ldots$$

On voit immédiatement que les composantes suivant les axes de la résultante des forces appliquées au point M sont

$$X = -\left[\frac{d\psi_1}{dx} + \frac{d\psi_2}{dx} + \frac{d\psi_3}{dx} + \ldots\ldots\right]$$

$$Y = -\left[\frac{d\psi_1}{dy} + \frac{d\psi_2}{dy} + \frac{d\psi_3}{dy} + \ldots\ldots\right]$$

$$Z = -\left[\frac{d\psi_1}{dz} + \frac{d\psi_2}{dz} + \frac{d\psi_3}{dz} + \ldots\ldots\right]$$

de sorte que si l'on pose

$$V = \psi_1(r_1) + \psi_2(r_2) + \psi_3(r_3) + \ldots\ldots$$

ou simplement

$$V = \Sigma\, \psi(r)$$

les composantes deviennent

$$X = -\frac{dV}{dx} \qquad Y = -\frac{dV}{dy} \qquad Z = -\frac{dV}{dz}.$$

Le système des forces appliquées au point M admet donc la fonction V de x, y, z comme potentiel.

192. — Soit par exemple, $\varphi(r) = \dfrac{K}{r^2}$, d'où

$$\psi(r) = K\int\frac{dr}{r^2} = -\frac{K}{r}.$$

le potentiel des forces sur le point M est

$$V = -\sum\frac{K}{r}$$

et la fonction des forces égale au potentiel pris en sens contraire, a pour expression

$$f = \sum\frac{K}{r}.$$

V – Mesure des grandeurs et choix des unités.

193. – Grandeurs fondamentales. – Toute science mécanique repose sur la notion de trois grandeurs fondamentales : les longueurs, les durées, les forces. Ces grandeurs correspondent aux trois éléments qui interviennent dans tout phénomène physique : l'espace, le temps, la matière.

L'évaluation d'une grandeur quelconque se fait en déterminant le rapport de cette grandeur à une grandeur de même espèce prise arbitrairement comme unité. Nous allons faire connaître les unités de longueur, de temps et de force.

194. – Unité de longueur. – L'unité de longueur usuelle est celle qui a été adoptée par la commission spéciale instituée le 8 Mai 1790.

Cette commission chargée d'établir un nouveau système de poids et mesures, eut l'idée de lier l'unité de longueur à la grandeur de la Terre. En mesurant un arc de méridien, Delambre et Méchain trouvèrent que la longueur du quart du méridien passant par l'Observatoire de Paris était de 5.130.740 toises. On divisa ce nombre par dix millions et la fraction de toise correspondante, désignée sous le nom de mètre fut adoptée comme unité de longueur.

Plus tard, on fut conduit à modifier l'évaluation de la longueur du méridien de Paris, mais cette correction n'a rien changé à l'unité adoptée qui est toujours la longueur à la température de la glace fondante, du mètre étalon en platine construit par Borda et déposé aux archives nationales. Seulement on ne peut plus considérer le mètre comme la dix-millionième partie du quart de la circonférence terrestre

195. – Unité de temps. – Pour déterminer l'unité de temps, on suppose le jour moyen partagé en 24 heures, l'heure en 60 minutes la minute en 60 secondes, et on prend pour unité la seconde, ou la 86400^e partie du jour moyen.

Cette unité dépend à la fois de la durée de la révolution de la Terre autour de son axe et du temps employée par la Terre à parcourir son orbite autour du Soleil entre deux passages successifs à l'équinoxe du printemps, ou, en d'autres termes, elle dépend de la durée du jour sidéral et de la durée de l'année tropique.

196. Unité de force. – En France, on a basé le choix de l'unité de force sur la considération de la pesanteur, ou force qui sollicite tous les corps à la surface de la Terre.

L'expérience a appris qu'un corps abandonné à lui même dans le vide prend un mouvement vertical uniformément accéléré et que l'accélération de ce mouvement est la même, quel que soit le corps, en un même lieu de la Terre.

On en conclut que tout point matériel est, par suite des circonstances où il se trouve placé à la surface de la Terre, nécessairement soumis à l'action d'une force constante. L'intensité de cette force se nomme le poids; et son accélération, souvent appelée gravité, est généralement représentée par la lettre g.

La valeur de g varie d'un lieu à un autre. A Paris et au niveau de la mer, cette valeur est

$$g = 9.809$$

(Unités: mètre, seconde.)

La différence entre le maximum et le minimum de g à la surface de la Terre, est d'environ $\frac{1}{196}$ de la valeur moyenne.

On sait d'ailleurs que lorsqu'une force quelconque est appliquée à un point matériel, le rapport de cette force à l'accélération qu'elle produit est un nombre ne dépendant que de la nature du point sur lequel la force agit et que l'on appelle la masse de ce point. Si donc on désigne par p le poids d'un point matériel dont la masse est m, on a

$$\frac{p}{g} = m \qquad \text{ou} \qquad p = m\,g.$$

En France, on prend ordinairement pour unité de force le Kilogramme, c'est à dire le poids à Paris d'un étalon déposé aux Archives, correspondant avec une très-grande approximation au poids d'un litre d'eau placé à Paris, dans le vide à la température de 4°,1.

197.– Distinction du poids théorique et du poids métrique.– Le poids théorique p dont on vient de donner la définition, ne doit pas être confondu avec le poids usuel ou métrique que l'on détermine à l'aide de la balance. Le premier varie d'un lieu à un autre; le second est le même, quel que soit le lieu où l'on opère la pesée. A Paris, leur inégalité disparaît.

Soit p_m le poids métrique d'un corps, p le poids théorique du même corps en un lieu où la gravité est g; on a

$$\frac{p}{g} = \frac{p_m}{9{,}809} = m$$

Il résulte de ces relations que la masse d'un corps s'obtient en divisant son poids métrique par la valeur de la gravité à Paris et que le poids théorique d'un corps en un lieu déterminé est au poids métrique comme la gravité du lieu est à la gravité de Paris.

198.– Grandeurs dérivées.– En outre des grandeurs fondamentales on a à considérer d'autres grandeurs secondaires que l'on appelle dérivées : par exemple, les surfaces et les volumes en Géométrie les vitesses et les accélérations en Cinématique, les masses et les travaux des forces en Dynamique.

Les quantités qui expriment la mesure des grandeurs dérivées sont en général liées à certaines quantités représentant des grandeurs fondamentales par des relations théoriques telles que les valeurs numériques des quantités dérivées sont complètement déterminées dès que l'on a choisi les unités fondamentales de longueur, de temps et de force. Or, il peut arriver que l'on change les unités fondamentales et il importe de fix – les règles qui permettent de transformer en conséquence les valeurs numériques des quantités dérivées. On y parvient en donnant les dimensions des quantités dérivées.

199.– Dimensions des quantités dérivées.– Supposons que la quantité qui représente une grandeur dérivée quelconque soit proportionnelle

1° Aux puissances $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ de quantités $l_1, l_2, l_3 \ldots$ représentant des longueurs,

2° Aux puissances $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots$ de quantités $t_1, t_2, t_3 \ldots$ représentant des temps,

3° Aux puissances $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots$ de quantités $f_1, f_2, f_3 \ldots$ représentant des forces,

de sorte que la quantités dont il s'agit puisse se mettre sous la forme

$$Q = K\, l_1^{\alpha_1}\, l_2^{\alpha_2} \ldots\ldots\ t_1^{\beta_1}\, t_2^{\beta_2} \ldots\ldots\ f_1^{\gamma_1}\, f_2^{\gamma_2} \ldots\ldots$$

Si l'on prend de nouvelles unités dont les rapports aux anciennes soient respectivement $\frac{1}{a}\ \frac{1}{b}\ \frac{1}{c}$, les nombres qui mesurent avec les anciennes unités des longueurs, des durées et des forces seront multipliés par a, b, c, de sorte que si l'on pose

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots$$
$$\beta = \beta_1 + \beta_2 + \ldots\ldots$$
$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots\ldots$$

la mesure de Q sera multipliée par $a^\alpha b^\alpha c^\alpha$. On dit alors que la quantité Q est de degré α en longueur, de degré β en temps et de degré γ en force, ou bien que les dimensions de Q sont α, β, γ.

On emploie le symbole

$$Q = L^\alpha T^\beta F^\gamma$$

pour exprimer que les dimensions de Q sont α, β, γ en longueur, temps et force.

200. – Dimensions des principales quantités géométriques, cinématiques et dynamiques. – Le tableau suivant fait connaître dans cette notation, les dimensions des quantités qui se présentent le plus souvent en Mécanique

Surface	L^2
Volume	L^3
Vitesse	LT^{-1}
accélération	LT^{-2}
Masse	$L^{-1}T^2F$
Travail	LF.

201. – La masse considérée comme grandeur fondamentale. – Gauss a remarqué que le choix du Kilogramme comme unité de force offre un inconvénient. Par suite de la variation de la pesanteur, le poids du Kilogramme – étalon de Paris, transporté à un autre lieu de la Terre, serait altéré ; de sorte que, pour rapporter les forces à une unité invariable, il faudrait un étalon spécial en chaque lieu du globe. Au contraire la masse d'un corps est un élément immuable.

Cette remarque, particulièrement importante au point de vue des recherches et déterminations relatives au magnétisme et à l'électricité, a déterminé l'Association britannique à considérer la masse comme une grandeur fondamentale et la force comme une grandeur dérivée.

On dira, à ce point de vue, non pas que le poids de notre Kilogramme – étalon servira d'unité de force, ce qui ne serait vrai que pour Paris ; mais que la masse de cet étalon sera prise pour l'unité de masse à laquelle on rapportera les masses des autres corps, ce qui serait vrai partout.

L'unité de masse étant ainsi définie, l'unité de force en résulte. En effet, si dans la relation

$$p = m g$$

on fait $p = 1$, on voit que $m = \frac{1}{g}$. Donc, l'unité de force est le poids de la fraction $\frac{1}{g}$ de la masse – étalon.

Si, dans ce système, on désigne par M le symbole des masses, les dimensions de la force et du travail sont données par les formules :

Force	$LT^{-2}M$.
Travail	$L^2T^{-2}M$.

202. – Unités C. G. S. – C'est conformément à ces vues que l'Association britannique a adopté le système dit C, G, S. (Centimètre – Gramme – Seconde) comprenant comme fondamentales les unités suivantes :

Unité de longueur : <u>le centimètre</u>.

Unité de temps : la <u>seconde sexagésimale de temps moyen</u>.

Unité de masse : la masse d'un centimètre cube d'eau à 4°,1, que l'on appelle le <u>gramme – masse</u>.

L'unité C. G. S de la force se nomme la dyne. C'est, d'après la règle donnée précédemment la fraction $\frac{1}{g}$ du poids de 1 centimètre cube d'eau distillée à 4°,1.

A Paris, le poids du centimètre cube d'eau est ce que nous appelons le gramme-poids. D'ailleurs la gravité à Paris, est en centimètres-secondes 980,9 : donc la dyne est représentée par

$$\frac{\text{gramme}}{980,9}$$

ce qui donne un peu plus d'un milligramme.

L'unité C, G, S de travail se nomme l'erg. C'est le travail de l'unité de force (dyne) lorsque le point d'application parcourt, dans la direction de la force, l'unité de longueur (centimètre)

Jusqu'à présent ce système n'a pas été adopté en France, dans les applications mécaniques.

203. – Remarque. – L'adoption d'unités fondamentales communes pour toutes les quantités entraîne l'usage fréquent de nombres très grands et très-petits.

Cette circonstance ne présente aucun inconvénient dans l'écriture si l'on a le soin d'exprimer chaque nombre comme un produit de deux facteurs dont l'un est une puissance de 10 ; il y a alors avantage à effectuer la décomposition de telle sorte que l'exposant de la puissance de 10 soit la caractéristique du logarithme du nombre.

Ainsi 3 240 000 000 s'écrira $3,24 \times 10^{9}$ et 0,000 000 324 s'écrira $3,24 \times 10^{-7}$.

VII. – Homogénéité et similitude mécaniques.

204. – Principe de l'homogénéité. – On remarque en Géométrie analytique que toute équation existant entre les diverses longueurs d'une figure est homogène ; cette propriété résulte de ce fait évident que cette équation, comme les raisonnements et les calculs que l'on fait pour y arriver, doit être indépendante du choix de l'unité de longueur.

Les relations établies en Mécanique satisfont à des conditions analogues ; leur forme doit être telle qu'elles subsistent quelles que soient les unités qui servent à évaluer les quantités qu'elles renferment.

Soient Q, Q', Q''.... diverses quantités dont les dimensions en longueur, temps et force sont respectivement

$$\alpha, \beta, \gamma; \qquad \alpha', \beta', \gamma'; \qquad \alpha'', \beta'', \gamma'' \ldots\ldots$$

Si l'on prend de nouvelles unités dont les rapports aux anciennes soient $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ les valeurs de ces quantités seront multipliées par

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma, \qquad a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'}, \qquad a^{\alpha''} b^{\beta''} c^{\gamma''}$$

Par suite une relation

$$f(Q, Q', Q'' \ldots) = 0$$

entre les quantités $Q, Q', Q'' \ldots$ devient par le changement des unités fondamentales,

$$f(a^\alpha b^\beta c^\gamma Q, \quad a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} Q', \quad a^{\alpha''} b^{\beta''} c^{\gamma''} Q'' \ldots) = 0$$

et la forme de la fonction f doit être telle que cette dernière équation ait lieu quelles que soient les valeurs attribuées à a, b, c.

205. — On peut fonder sur ce principe ainsi que l'a fait Newton (Principes, liv. II, prop. 32) une théorie complète de la similitude mécanique laquelle, comme l'on voit, résulte de l'homogénéité des équations par rapport aux trois espèces de quantités fondamentales et indépendantes qui y figurent. Un exemple fera comprendre l'importance de ce principe. (Voir à ce sujet une note de M. Bertrand — Journal de l'École Polytechnique XXXII^e cahier ; p. 189)

206. Exemple : durée de l'oscillation d'un pendule simple. — Cherchons à déterminer, d'après ce principe, la forme de la relation

$$f(\tau, m, p, l, \alpha) = 0$$

qui existe entre

la durée d'oscillation d'un point pesant mobile sur un cercle . . . . τ.
la masse de ce point . . . . m.
le poids de ce point . . . . p.
le rayon du cercle ou longueur du pendule . . . . l.
l'angle initial d'écart . . . . α.

Le tableau suivant résume les dimensions de ces quantités.

	L	T	F
τ	0	1	0
m	-1	2	1
p	0	0	1
l	1	0	0
α	0	0	0

1° pour que la relation dont il s'agit soit indépendante de l'unité de longueur, il faut qu'elle ne dépende que du produit ml et soit, par suite, de la forme

$$f(\tau, ml, p, \alpha) = 0.$$

2° exprimons maintenant que la relation précédente est indépendante de l'unité de temps ; il faut, pour cela, qu'elle ne dépende que du rapport $\frac{\tau}{\sqrt{ml}}$ et soit, par conséquent, réductible à la forme

$$f\left(\frac{\tau}{\sqrt{ml}}, p, \alpha\right) = 0$$

3° enfin, pour que la relation soit indépendante de l'unité de force, il est nécessaire qu'elle ne dépende que du rapport $\frac{m}{p} = \frac{1}{g}$. On peut donc écrire

$$f\left(\frac{\tau}{\sqrt{\frac{l}{g}}}, \alpha\right) = 0$$

et de cette dernière équation, on tire :

$$\tau = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\varphi(\alpha)$$

Le principe de l'homogénéité nous apprend donc, indépendamment de toute théorie dynamique, que la durée d'oscillation est nécessairement égale au produit de $\sqrt{\frac{l}{g}}$ par une fonction numérique de l'angle d'écart.

Chapitre II.

Théorèmes généraux.

I. Préliminaires.

207. — Equations différentielles simultanées. — Les questions de Mécanique rationnelle se réduisent en général à un problème d'Analyse dont on peut formuler comme il suit l'énoncé :

Etant données n équations entre n fonctions d'une variable, cette variable et les dérivées des fonctions par rapport à la variable, déterminer les fonctions.

Les équations forment ce que l'on appelle un système d'équations différentielles simultanées et l'opération qui a pour objet de trouver les fonctions qui satisfont à ces équations se nomme l'intégration des équations différentielles simultanées.

Il est indispensable de donner quelques indications sur la nature d'un problème dont l'étude ne sera abordée que dans le Cours d'Analyse de la deuxième année.

208. — Equations différentielles simultanées de premier ordre. — On dit que les équations différentielles simultanées sont du premier ordre lorsque avec la variable et les fonctions, elles ne renferment que les dérivées premières des fonctions par rapport à la variable. On pourra alors, en général, résoudre les équations par rapport aux dérivées, de sorte que, si l'on désigne par $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ des fonctions en nombre quelconque d'une variable t, un système d'équations différentielles simultanées du premier ordre se présente sous la forme générale

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n\,;\, t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n\,;\, t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n\,;\, t) \end{cases}$$

Dans le cas où les équations considérées renferment les dérivées d'un ordre supérieur au premier, on peut représenter par une lettre chacune de ces dérivées, excepté celles de l'ordre le plus élevé et l'on n'a plus à considérer ainsi qu'un système d'équations simultanées du premier ordre.

Soit, par exemple, l'équation du troisième ordre,

$$\frac{d^3x}{dt^3} = f\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{dx}{dt}, x, t\right)$$

Il est évident que l'on peut la remplacer par le système suivant :

$$\frac{dx}{dt} = x' \quad \frac{dx'}{dt} = x'' \quad \frac{dx''}{dt} = f(x'', x', x, t).$$

209. – Propriété fondamentale des équations intégrales. –

L'intégration des équations (1) revient à établir entre $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ et t des relations, ou équations intégrales, telles que les valeurs qui en résultent pour $\frac{dx_1}{dt}$ $\frac{dx_2}{dt}$ ..... soient des fonctions données de $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, t$.

Sans entrer dans des développements qui appartiennent au cours d'analyse, nous signalerons le caractère essentiel du système des équations intégrales. De quelque manière que l'on obtienne ce système, il doit, pour avoir le même degré de généralité que le système des équations différentielles renfermer n constantes arbitraires. (1)

Il se présentera donc généralement sous la forme :

$$(2) \quad \begin{aligned} &F_1(x_1 x_2, \ldots\ldots x_n;\ t;\ c_1, c_2, \ldots\ldots c_n) = 0 \\ &F_2(x_1 x_2, \ldots\ldots x_n;\ t;\ c_1, c_2, \ldots\ldots c_n) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_n(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n;\ t;\ c_1, c_2, \ldots\ldots c_n) = 0 \end{aligned}$$

(1) Pour concevoir la raison de cette propriété fondamentale, il suffit de remarquer que les équations différentielles déterminent seulement les accroissements infiniment petits des fonctions $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n$ pour un accroissement dt de la variable t, de sorte que l'on peut prendre arbitrairement les valeurs de ces fonctions pour une valeur particulière de la variable.

et permettra d'obtenir les quantités $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ en fonction de t et des constantes arbitraires.

210. – Intégrales d'un système d'équations différentielles. – Les n constantes arbitraires doivent être distinctes ; cela veut dire qu'il est possible de résoudre les équations (2) par rapport à $c_1, c_2, \ldots\ldots c_n$. On obtient ainsi de nouvelles équations :

$$(3)\qquad \begin{aligned} c_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n ; t) \\ c_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n ; t) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n &= \varphi_n(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n ; t) \end{aligned}$$

qui peuvent remplacer celles dont on les a déduites. Elles signifient qu'il est possible de composer certaines fonctions de $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n ; t$ telles qu'elles conservent une valeur constante quel que soit t.

Toute fonction possédant cette propriété est ce que l'on appelle spécialement une intégrale du système d'équations différentielles.

Il est évident que si des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots$ sont des intégrales, une fonction arbitraire de φ_1, φ_2, est aussi une intégrale ; mais cette intégrale n'est pas distincte des premières.

C'est en cherchant des intégrales que l'on procède ordinairement à l'intégration des équations différentielles simultanées ; cette intégration est complète lorsqu'on connaît des intégrales distinctes en nombre égal à celui des équations.

II. – Equations du mouvement d'un point matériel.

211. – Equations différentielles du mouvement d'un point rapporté à un système de coordonnées rectilignes. – Supposons, que des forces quelconques $F_1, F_2, F_3, \ldots\ldots$ soient appliquées à un point matériel en mouvement. D'après le théorème fondamental de la Dynamique la direction de la résultante F des forces appliquées se confond, à chaque instant, avec la direction de l'accélération et l'intensité de cette résultante est égale au produit de l'accélération par la masse du point. Donc le produit de la masse par l'accélération projetée sur un axe est égal à la projection de F sur le même axe.

Le mouvement étant rapporté à des coordonnées rectilignes désignons par

m la masse du point matériel,

x, y, z les coordonnées de ce point à un instant quelconque t,

X_n, Y_n, Z_n les composantes de la force F_n suivant les axes,

X, Y, Z les composantes suivant les axes de la résultante F. de sorte que

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots\ldots$$
$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots\ldots$$

En projetant l'accélération et les forces successivement sur chacun des trois axes OX, OY, OZ, on aura, d'après le théorème, les trois équations fondamentales :

$$(4) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

212. — Ces équations sont celles qui servent à résoudre les deux questions principales de la Dynamique.

1° Un mouvement étant observé, trouver la force qui le produit.

2° Etant données les forces qui agissent sur un mobile, déterminer son mouvement.

213. — Si l'on se donne le mouvement du point m, les composantes $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ sont connues, et les formules (4) serviront à calculer X, Y, Z et par suite la résultante des forces qui sollicitent le point m.

214. — Si l'on cherche, au contraire, le mouvement, les équations ramènent le problème à l'intégration d'un système d'équations différentielles simultanées. En effet, suivant une remarque déjà faite, les composantes X, Y, Z sont en général des fonctions données des coordonnées, du temps et des composantes de la vitesse ; de sorte que

les équations (4) se présentent sous la forme

$$
(5) \qquad
\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_1\left(x, y, z; t; \frac{dx}{dt}\,\frac{dy}{dt}\,\frac{dz}{dt}\right)\\
m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_2\left(x, y, z; t; \frac{dx}{dt}\,\frac{dy}{dt}\,\frac{dz}{dt}\right)\\
m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_3\left(x, y, z; t; \frac{dx}{dt}\,\frac{dy}{dt}\,\frac{dz}{dt}\right)
\end{aligned}
$$

On a donc à intégrer trois équations différentielles du second ordre. On peut aisement ramener le problème à l'intégration de 6 équations du premier ordre ; en prenant en effet pour inconnues auxiliaires, les composantes de la vitesse, le système des équations (5) peut être remplacé par le suivant :

$$
\frac{dx}{dt} = x' \qquad \frac{dy}{dt} = y' \qquad \frac{dz}{dt} = z'
$$

$$
(6) \qquad
\begin{aligned}
m\frac{dx'}{dt} &= F_1\,(x, y, z; t; x', y', z')\\
m\frac{dy'}{dt} &= F_2\,(x, y, z; t; x', y', z')\\
m\frac{dz'}{dt} &= F_3\,(x, y, z; t; x', y', z')
\end{aligned}
$$

Les 6 inconnues, déduites de ces équations, sont des fonctions du temps et de 6 constantes arbitraires, de sorte que l'on peut écrire

$$
\begin{aligned}
x &= f_1(t, c_1, c_2, \ldots\ldots c_6)\\
y &= f_2(t, c_1, c_2, \ldots\ldots c_6)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Par suite de la présence des constantes arbitraires, les équations précédentes représentent une infinité de mouvements différents qui satisfont tous au système d'équations différentielles. Le problème est pourtant bien déterminé ; et la présence des arbitraires tient à ce que l'on a pas égard, en écrivant les equations différentielles aux conditions dans lesquelles le point se trouve placé à l'instant où les forces X, Y, Z agissent sur lui. L'intégration doit donc donner, du même coup, la solution de tous les problèmes qui diffèrent du problème proposé par la position initiale du point mobile, ainsi que par la grandeur et la direction de la vitesse que possède ce point, à l'instant pris pour origine du temps.

L'intégration générale des équations (5) ou (6) constitue donc seulement la première partie de la solution de la question proposée et l'on doit achever cette solution de la manière suivante.

215. — Soient

$$(7)\qquad \begin{aligned} x &= f_1(t, c_1, c_2 \ldots\ldots\ldots c_6) \\ y &= f_2(t, c_1, c_2 \ldots\ldots\ldots c_6) \\ z &= f_3(t, c_1, c_2 \ldots\ldots\ldots c_6) \\ x' &= f_1'(t, c_1, c_2 \ldots\ldots\ldots c_6) \\ y' &= f_2'(t, c_1, c_2 \ldots\ldots\ldots c_6) \\ z' &= f_3'(t, c_1, c_2 \ldots\ldots\ldots c_6) \end{aligned}$$

les valeurs générales trouvées par les coordonnées et les composantes de la vitesse.

Pour que le problème soit complètement défini, il faut comme nous l'avons dit, que l'on connaisse à l'instant où l'on commence à étudier le mouvement, la position du mobile ainsi que la vitesse dont il est animé. On connait ainsi pour $t = 0$, les coordonnées x_0, y_0, z_0 du mobile et les composantes $x_0'\ y_0'\ z_0'$ de sa vitesse. En mettant ces valeurs particulières dans les équations (7), nous aurons six équations qui serviront à déterminer les arbitraires.

Les six constantes devant être distinctes, les équations qui doivent en donner les valeurs ne peuvent être ni incompatibles, ni indéterminées. Si l'un des deux cas se présentait, c'est que l'on n'aurait pas la solution générale du système d'équations différentielles.

216. — Intégrales d'un problème de dynamique. — L'intégration des équations du mouvement d'un point est un problème difficile pour lequel il ne peut être donné, dans l'état actuel de l'analyse, aucune règle générale. On procède souvent à cette intégration en cherchant des intégrales du système d'équations différentielles, c'est à dire des fonctions des coordonnées et des composantes des vitesses dont la valeur reste constante pendant toute la durée du mouvement (n° 210). Alors même qu'on n'arrive pas à la connaissance complète du mouvement,

chaque intégrale trouvée, apprend indépendamment des autres, une propriété de ce mouvement. Nous établirons plus loin deux théorèmes qui, dans certains cas, donnent des intégrales.

217. _ Mouvement dans un plan. _ Lorsque la force qui sollicite le point matériel se trouve constamment contenue dans un plan, lequel renferme aussi la vitesse initiale, le mobile ne sort pas de ce plan.

On aura seulement les deux équations différentielles.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

dont la solution générale contiendra quatre constantes arbitraires.

218. _ Mouvement sur une droite. _ Lorsque la force qui sollicite le point a une direction constante et que cette direction est celle de la vitesse initiale, le point se meut en ligne droite. On a alors une seule équation différentielle

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X$$

dont la solution générale contient deux constantes arbitraires.

219. _ Force tangentielle, force normale ou centripète. _ On a vu que les projections de l'accélération sur la tangente et la normale principale de la trajectoire avaient respectivement pour valeurs

$$w_t = \frac{dv}{dt} \qquad w_n = \frac{v^2}{\rho}$$

v étant la vitesse et ρ le rayon de courbure.

De même, la résultante des forces qui agissent sur un point en mouvement se décompose en une force tangentielle dirigée suivant la tangente et une force normale ou centripète dirigée suivant la normale principale au rayon de courbure.

La force tangentielle et la force normale sont égales aux accélérations de même nom multipliées par la masse; si donc on les désigne par F_t et F_n, on a les équations

$$(8) \qquad m\,\frac{dv}{dt} = F_t \qquad m\,\frac{v^2}{\rho} = F_n$$

ou bien, si l'on désigne par α l'angle que la résultante F fait avec la tangente à la trajectoire

$$(9) \qquad m\,\frac{dv}{dt} = F\cos\alpha \qquad m\,\frac{v^2}{\rho} = F\sin\alpha$$

Ces formules mettent en évidence le mode suivant lequel la résultante des forces produit à la fois la variation de vitesse du mobile et la courbure de la trajectoire. Le changement de grandeur que la vitesse du mobile éprouve dans le mouvement est uniquement dû à la force tangentielle ; en sorte que si cette force tangentielle était constamment nulle ; c'est à dire si la force était constamment normale à la trajectoire, la vitesse ne varierait pas et le mouvement serait uniforme. De même la courbure $\frac{1}{\rho}$ dépend uniquement de la force centripète ; si cette force était constamment nulle, la courbure le serait aussi, et le mouvement serait rectiligne.

220. — On s'est servi bien longtemps de ces formules relatives aux forces tangentielle et normale pour résoudre les problèmes du mouvement ; c'est ainsi que procédait Newton, en employant exclusivement les considérations géométriques.

Le traité de Mécanique d'Euler, qui a paru en 1736 et qu'on doit regarder comme le premier grand ouvrage où l'analyse ait été appliquée à la science du mouvement, est encore entièrement fondé sur ces formules.

La méthode qui consiste à décomposer les accélérations et les forces suivant trois axes fixes a été employée pour la première fois par Maclaurin en 1742.

Nous emploierons, suivant les cas, l'une ou l'autre des deux méthodes, chacune d'elles ayant ses avantages particuliers.

Nous allons maintenant établir deux théorèmes qui donnent, dans certains cas, des intégrales du mouvement.

III. – Théorème des aires.

221. – Cas où la direction de la force rencontre une droite fixe. – Lorsque la résultante des forces appliquées à un point matériel rencontre constamment une droite fixe, on peut toujours trouver une intégrale du mouvement.

En effet, en prenant la droite fixe pour l'axe OZ d'un système de coordonnées rectangulaires, on a évidemment

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{y}$$

c'est à dire

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

ou bien

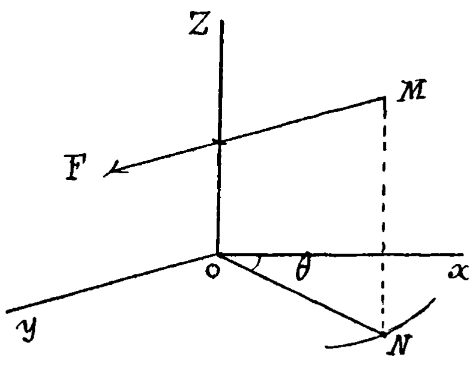
$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0$$

d'où en intégrant et désignant par C une constante

$$(10) \qquad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C$$

On a donc une intégrale. (n° 216)

222. – Cette intégrale correspond à une propriété géométrique que nous avons déjà signalée.



Soit N la projection du mobile sur le plan XOY à un instant quelconque du mouvement. Désignons par r le rayon vecteur ON et par θ l'angle NOX.

De la relation

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

on en déduit, par différentiation,

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

et, par conséquent,

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dA}{dt}$$

en désignant par $\mathcal{A}$ l'aire décrite par le rayon vecteur ON. La relation (10) donne donc

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} c t$$

en supposant que l'aire commence avec le temps.

On en conclut la proposition suivante :

Théorème : Lorsque la direction de la force qui agit sur un point matériel rencontre constamment une droite fixe, si par un point O de cette droite, on mène un plan P qui lui soit perpendiculaire, le rayon vecteur qui joint à un instant quelconque le point O à la projection du mobile sur le plan P décrit une aire dont la variation est proportionnelle à celle du temps.

Inversement. — S'il existe un plan P et un point O de ce plan tels que le rayon vecteur qui joint le point O à la projection du mobile sur le plan P décrive une aire dont la variation soit proportionnelle à celle du temps, la direction de la force rencontre constamment la droite menée par le point O perpendiculairement au plan P.

En effet, de l'intégrale (10), on déduit par différentiation

$$x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

c'est à dire

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{y}$$

ou, ce qui revient au même :

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y}.$$

223. — Cas où la direction de la force passe par un point fixe. —

Lorsqu'un point matériel est sollicité par une force dont la direction passe par un point fixe, le théorème des aires a lieu pour la projection du mouvement sur un plan quelconque passant par ce point pris comme pôle.

Si donc on place au point fixe l'origine des coordonnées, on a les trois intégrales

$$(11) \qquad \begin{aligned} y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} &= c \\ z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} &= c' \\ x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} &= c'' \end{aligned}$$

Si l'on ajoute ces trois équations respectivement multipliées par x, y, z, on trouve l'équation suivante entre les coordonnées du point à un instant quelconque

$$cx + c'y + c''z = 0$$

Le point ne sort donc pas d'un plan passant par l'origine comme on pouvait le reconnaître à priori en observant qu'aucune cause ne tend à faire sortir le point du plan mené par le centre fixe et la direction de la vitesse initiale.

Si l'on désigne par $\lambda, \lambda', \lambda''$ les aires décrites par les projections du rayon vecteur sur les plans YOZ, ZOX, XOY, les équations (11) donneront :

$$\lambda = \frac{1}{2}ct \qquad \lambda'' = \frac{1}{2}c't \qquad \lambda'' = \frac{1}{2}c''t$$

en supposant que les aires commencent avec le temps t.

Ces équations montrent que les aires décrites par les projections du rayon vecteur croissent proportionnellement au temps. Et comme le mouvement du point s'effectue dans un plan, il s'en suit que l'aire décrite par le rayon vecteur du mobile dans ce plan à partir de sa position initiale est aussi proportionnelle au temps.

La valeur de cette aire peut s'exprimer facilement en observant que toute aire plane est égale à la racine carrée de la somme des carrés de ses projections sur trois plans rectangulaires. On aura donc pour l'aire décrite dans le plan de la trajectoire

$$\frac{1}{2}\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}\,t$$

De ce qui précède, on conclut le théorème :

Lorsqu'un point matériel est sollicité par une force constamment dirigée vers un centre fixe, ce point décrit une courbe plane dont le plan passe par le centre fixe et l'aire décrite par le rayon vecteur mené du centre au mobile croît proportionnellement au temps.

224. – Inversement – : Si la trajectoire plane et si le rayon vecteur mené du point fixe du plan au mobile décrit une aire variant proportionnellement au temps, la force est constamment dirigée vers le point fixe.

En effet, si l'aire décrite par le rayon vecteur dans le plan de la trajectoire varie proportionnellement au temps, les équations (11) auront lieu. De ces équations on déduit par différentiation les suivantes

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

$$z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

et ces relations que l'on peut écrire

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{y} = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{z}$$

ou bien

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}$$

expriment que la direction de la force passe par l'origine.

IV. – Théorème des forces vives.

225. – Définition. – On appelle force vive d'un point matériel la moitié du produit de sa masse par le carré de sa vitesse.

Si donc on désigne par m la masse d'un point et par v sa vitesse, la force vive de ce point est par définition, $\frac{1}{2}mv^2$.

Les dimensions d'une masse et d'une vitesse étant respectivement données par les formules $L^{-1}T^2F$ et LT^{-1}, on voit que les dimensions d'une force vive résultent de la formule

$$L^{-1}T^2F \times L^2T^{-2} = LF.$$

La force vive est donc une grandeur de même nature que le travail des forces.

226. Théorème : La variation de la force vive d'un point matériel pendant un temps quelconque est égale à la somme des travaux des forces qui agissent sur ce point pendant le même temps.

Désignons par
- m la masse d'un point matériel,
- v sa vitesse à un instant quelconque,
- F la résultante des forces qui lui sont appliquées,
- α l'angle compris entre la direction de la résultante et la direction de la vitesse.

on a
$$m\frac{dv}{dt} = F\cos\alpha$$

Soit ds le chemin parcouru pendant le temps dt, de sorte que $v = \frac{ds}{dt}$. En multipliant les deux membres de la relation précédente par $ds = v\,dt$, il vient
$$m\,v\,dv = F\cos\alpha\,ds$$
c'est à dire
$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = F\cos\alpha\,ds.$$

Donc, pendant un temps infiniment petit, la variation de la force vive est égale au travail élémentaire de la résultante c'est à dire à la somme des travaux élémentaires des forces appliquées.

Considérons le mouvement pendant un temps fini, de l'instant t_0 à l'instant t_1. Soient, à ces instants,

v_0, v les vitesses du mobile,

S_0, S les distances parcourues sur la trajectoire.

Il vient, en intégrant,
$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{S_0}^{S} F\cos\alpha\,ds.$$

Cette équation est la traduction du théorème.

227. – Intégrale des forces vives. – En général, les forces dépendent de la position du mobile, de sa vitesse et du temps. Le théorème des forces vives n'est alors d'aucune utilité pour la détermination du mouvement puisque, pour évaluer le travail, il faut connaître toutes les circonstances de ce mouvement, ce qui exige la solution complète du problème que l'on a en vue.

Au contraire, le théorème est d'une importance capitale dans le cas spécial où les composantes suivant les axes de la résultante sont les dérivées partielles d'une fonction $f(x, y, z)$ des coordonnées ; il donne alors une intégrale du mouvement.

En effet, le travail total étant égal à la variation de la fonction des forces, on a
$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)$$
ou bien
$$\frac{1}{2}mv^2 - f(x, y, z) = \frac{1}{2}mv_0^2 - f(x_0, y_0, z_0)$$

Donc, la fonction $\frac{1}{2}mv^2 - f(x,y,z)$ reste constante pendant toute la durée du mouvement et cette fonction est une intégrale du problème.

Soit V le potentiel des forces sur le mobile, on a $V = -f$ et l'équation peut s'écrire

$$\frac{1}{2}mv^2 + V = c'$$

c' désignant une constante.

Donc, lorsque les forces qui agissent sur un point admettent un potentiel, la somme de la force vive et du potentiel reste constante pendant le mouvement.

228. — Conservation de la force vive. — Lorsqu'un point soumis à des forces admettant un potentiel part d'une surface de niveau et y revient, le travail des forces est nul en général et, par suite, la variation de la force vive est égale à zéro. On en conclut ce théorème

La vitesse redevient la même toutes les fois que le mobile traverse une même surface de niveau.

C'est en cela que consiste le principe de la conservation de la force vive.

Il est nécessaire pour que cette propriété ait toujours lieu, que les surfaces de niveau ne se coupent pas.

Chapitre III.

Equilibre et mouvement d'un point matériel libre.

I.– Equilibre d'un point matériel libre.

229 – Conditions de l'Equilibre.– Lorsqu'un point matériel, primitivement en repos, vient à être soumis à l'action simultanée de plusieurs forces, il peut arriver que ces forces se contrebalancent mutuellement de telle sorte que le point reste en repos. Dans ce cas, on dit que le point matériel est en équilibre ; on dit aussi que les forces se font équilibre sur le point matériel

Les forces peuvent être remplacées par leur résultante ; donc le point soumis à l'action de cette résultante seule doit rester en repos et par suite, pour l'équilibre, il faut et il suffit que la résultante des forces soit nulle.

Si plusieurs forces agissant sur un point matériel en mouvement ont une résultante nulle, on dit encore qu'elles se font équilibre. Dans le cas où le point matériel serait soumis à ces forces seules, il se trouverait dans les mêmes conditions que si aucune force ne lui était appliquée, et par suite son mouvement serait rectiligne et uniforme.

Lorsque plusieurs forces appliquées à un point matériel se font équilibre, il est clair que l'une quelconque d'entre elles est égale et opposée à la résultante de toutes les autres.

230.– Soient F_1, F_2, F_3 ...... diverses forces agissant sur un point. Menons par un point quelconque de l'espace trois axes coordonnés et décomposons chacune des forces en trois composantes dirigées parallèlement à ces axes.

Désignons par X_n, Y_n, Z_n les composantes de la force F_n et par X, Y, Z les composantes de la résultante F de toutes les forces. On a

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots\dots$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots\dots$$
$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots\dots$$

Il est clair que pour les forces $F_1, F_2, F_3 \ldots\ldots$ se fassent équilibre, c'est à dire que leur résultante soit nulle, il est nécessaire et suffisant que les composantes de cette résultante suivant les trois axes soient nulles. L'équilibre des forces est donc exprimé par les trois équations

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots = 0$$

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots\ldots = 0$$

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots\ldots = 0.$$

231. – Théorème sur la stabilité de l'équilibre. – Le théorème que nous allons établir est relatif au cas où le système des forces appliquées admet une fonction de sorte que, lorsque le point occupe une position quelconque dans l'espace, les composantes de la résultante des forces suivant trois axes sont des dérivées partielles.

$$X = \frac{df}{dx} \qquad Y = \frac{df}{dy} \qquad Z = \frac{df}{dz}$$

On peut alors établir la propriété suivante de la fonction des forces $f(x, y, z)$:

Toute position correspondant à un maximum de la fonction des forces est une position d'équilibre stable. (Dirichlet)

On voit d'abord que si la fonction des forces est un maximum il y a équilibre. En effet les valeurs correspondantes des dérivées partielles sont nulles. Par suite, la résultante des forces appliquées au point matériel est nulle et ce point est en équilibre.

Pour démontrer que l'équilibre est stable, il faut établir que, si l'on abandonne le point à l'action des forces après l'avoir écarté infiniment peu de sa position d'équilibre et lui avoir donné une vitesse infiniment petite, le déplacement du point restera toujours infiniment petit.

Désignons par a la valeur de la fonction des forces dans la position d'équilibre.

Si l'on déplace infiniment peu le point, cette valeur devient $a - \varepsilon$, ε étant infiniment petit et positif puisque a est un maximum.

Si l'on abandonne ensuite le point à l'action des forces après lui avoir donné une vitesse infiniment petite, il se met en mouvement et, après un certain temps, la fonction des forces est devenue $a - \omega$. La variation de force vive est égale à l'accroissement de la fonction des forces; si donc on désigne par $\frac{1}{2}mv^2$ et $\frac{1}{2}mv_0^2$ les forces vives actuelle et initiale, on a:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = a - \omega - (a - \varepsilon)$$

et, par suite,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \varepsilon - \omega$$

Mais $\frac{1}{2}mv^2$ est positif; donc ω ne peut pas dépasser $\frac{1}{2}mv_0^2 + \varepsilon$ et reste infiniment petit. Il en résulte que les coordonnées diffèrent infiniment peu de celles qui correspondent à la position d'équilibre, et cet équilibre est stable.

232.– Le potentiel étant égal à la fonction des forces prise avec le signe –, un maximum de la fonction des forces correspond à un minimum du potentiel. On peut donc énoncer comme il suit le théorème qui précède:

Lorsque les forces appliquées à un point matériel libre, admettent un potentiel, toute position du point correspondant à un minimum du potentiel est une position d'équilibre stable.–

II.– Mouvement rectiligne.

233.– Equation générale du mouvement.– Lorsque la direction de la force est constante et lorsque cette direction coïncide avec celle de la vitesse initiale, le mouvement est évidemment rectiligne et l'équation différentielle de ce mouvement se réduit à la forme:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X$$

x étant la distance parcourue sur la trajectoire à l'instant t et X désignant la force.

Dans le cas général, X dépendra de la position du mobile du temps et de la vitesse, de sorte que

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, t, \frac{dx}{dt}\right).$$

L'équation sera donc une équation différentielle du second ordre et son intégrale renfermera deux constantes arbitraires que l'on déterminera en donnant la position et la vitesse initiales du mobile.

234. — Mouvement vertical des corps pesants dans le vide. — Le cas le plus simple est celui où la force est constante; ce cas se présente dans le mouvement vertical d'un point pesant se mouvant dans un espace assez restreint pour que la variation de la pesanteur soit négligeable, et dans le vide, pour n'avoir pas à tenir compte de la résistance de l'air.

235. — 1° Mouvement descendant. — Supposons l'axe des x vertical et dirigé de haut en bas; prenons le point de départ O pour origine et désignons par v_0 la vitesse initiale, de sorte que l'on ait, pour $t=0$,

$$x=0 \qquad \frac{dx}{dt}=v_0$$

Soit m la masse du point et mg son poids; l'équation du mouvement est

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg$$

et on en déduit successivement

$$\frac{dx}{dt}=v_0+gt=v$$

$$x=v_0t+\frac{1}{2}gt^2$$

En éliminant t, on aurait entre v et x une relation qui résulte directement du théorème des forces vives. En effet, le travail de la pesanteur pour le déplacement OM, étant mgx, le théorème des forces vives donne l'équation

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=mgx.$$

ou bien

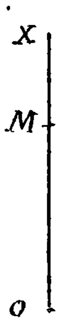
$$v^2=v_0^2+2gx$$

En supposant $v_0=0$, on a la formule usuelle

$$v=\sqrt{2gx}$$

qui donne la vitesse due à la hauteur x.

236. — 2° Mouvement ascendant. — Supposons l'axe des x vertical et dirigé de bas en haut ; prenons le point de départ O pour origine, et désignons par v_0 la vitesse initiale de sorte que, pour $t = 0$,



$$x = 0 \quad \frac{dx}{dt} = v_0 .$$

L'équation du mouvement est, dans le cas actuel,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg$$

et on en déduit :

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - gt = v$$

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

L'équation des forces vives devient

$$v^2 = v_0^2 - 2gx$$

Le corps monte jusqu'à ce que sa vitesse soit nulle, c'est à dire jusqu'à l'instant $t = \frac{v_0}{g}$. On a alors $x = \frac{v_0^2}{2g}$. Le mobile redescend ensuite et il est facile de voir que, revenu au point de départ, il a précisément la vitesse avec laquelle il avait été lancé, seulement cette vitesse est dirigée en sens contraire.

237. — On ne sait pas en général intégrer l'équation

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, t, \frac{dx}{dt}\right)$$

Nous considérerons trois cas où cette équation s'intègre ; ces cas se présentent lorsque la fonction F ne dépend que d'une seule des trois quantités, $t, x, \frac{dx}{dt}$.

a) Force fonction du temps

238. Intégration — Soit $X = F(t)$; de l'équation

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(t).$$

on tire, par intégration,

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m} \int_0^t F(t)\, dt$$

v_0 étant la vitesse du mobile correspondant à $t=0$. Représentons par $\varphi(t)$ cette valeur de $\frac{dx}{dt}$, en sorte que nous aurons

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t)$$

En multipliant les deux membres par dt, et intégrant de nouveau, on aura définitivement

$$x = x_0 + \int_0^t \varphi(t)\,dt$$

pour l'équation du mouvement ; x_0 désigne la valeur de x correspondant à $t=0$.

239. – Théorème des quantités de mouvement. – La relation qui résulte de l'intégration de l'équation différentielle peut s'écrire.

$$m v - m v_0 = \int_0^t F(t)\,dt.$$

Le produit $m v$ se nomme la quantité de mouvement du mobile. L'intégrale $\int_0^t F(t)\,dt$ se nomme l'impulsion totale de la force F et $F(t)\,dt$ est l'impulsion élémentaire.

La dernière équation exprime que l'accroissement de la quantité de mouvement pendant un temps quelconque est égal à l'impulsion de la force pendant ce temps.

Ce résultat est, dans la plupart des traités, qualifié théorème. En fait, il est fort rare que la force soit une fonction du temps, il est par suite, généralement impossible de calculer directement l'impulsion en sorte que le théorème n'est d'aucune utilité.

b) Force fonction de l'espace.

240. – Intégration. – Soit $X = F(x)$. L'équation différentielle devient

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$$

c'est à dire

$$m \frac{dv}{dt} = F(x)$$

On a d'ailleurs

$$v\,dt = dx$$

En multipliant membre à membre ces deux dernières équations, il vient

$$m v\, dv = F(x)\, dx$$

et, en intégrant

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_{x_0}^{x} F(x)\, dx$$

De cette relation, qui correspond au théorème des forces vives, on tire

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2}{m} \int_{x_0}^{x} F(x)\, dx$$

et, par conséquent,

$$v = \varphi(x)$$

En y remplaçant v par $\frac{dx}{dt}$, puis résolvant par rapport à dt, on trouve

$$dt = \frac{dx}{\varphi(x)};$$

On a donc, en intégrant encore une fois,

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\varphi(x)}.$$

241. — Attraction proportionnelle à la distance du mobile à un centre fixe. — Soient O un centre fixe et M un point mobile soumis à une force proportionnelle à la distance OM et dirigée de M vers O. A

l'origine du temps, le mobile est en M_0 à une distance x_0 du centre fixe et sa vitesse est en v_0; il s'agit de déterminer les circonstances du mouvement.

En désignant par K une constante, l'intensité de la force agissant en M est Kx, et on a, pour l'équation différentielle du mouvement

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx.$$

Soit $\frac{K}{m} = \omega^2$; on a

$$\frac{dv}{dt} = -\omega^2 x$$

$$v\, dt = dx$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$v\,dv = -\omega^2 x\,dx$$

En intégrant, et désignant par a une constante arbitraire on trouve,

$$v^2 = \omega^2(a^2 - x^2)$$

c'est à dire,

$$\frac{dx}{dt} = \pm\,\omega\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Supposons que, ω étant positif, la vitesse du mobile soit négative à l'instant considéré, on aura

$$\omega\,dt = -\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

et, en intégrant et désignant par α une constante arbitraire,

$$\omega t + \alpha = \arccos\frac{x}{a}.$$

De cette relation, on déduit l'équation du mouvement

$$x = a\cos(\omega t + \alpha)$$

Cette équation représente un mouvement vibratoire simple.

242. — Il résulte de ce qui précède que la solution générale de l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

est

$$x = a\cos(\omega t + \alpha)$$

a et α désignant encore des constantes arbitraires. Il importe de remarquer ce résultat qui sera souvent utile. On peut encore écrire, en développant le cosinus,

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

A et B désignant encore des constantes arbitraires.

243. — Pour déterminer les constantes dans le cas particulier du problème de dynamique, adoptons cette dernière forme de x et exprimons que pour $t = 0$, on a $x' = x_0$ et $\frac{dx}{dt} = v_0$; il en résulte,

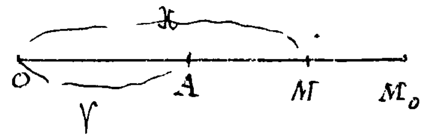
$$A = x_0 \qquad B = \frac{v_0}{\omega},$$

de sorte que l'équation qui représente le mouvement en tenant compte de l'état initial, est

$$x = x \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

Nous rappelons que, dans cette équation, on a : $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$.

244.- Attraction en raison inverse du carré de la distance du mobile à un centre fixe.- Considérons le mouvement d'un point



matériel qui part du point M_0, sans vitesse initiale, sous l'action d'une force dirigée suivant la ligne M_0 et variant en raison inverse du carré de la distance du point mobile au point O de cette ligne.

Nous verrons plus tard que le poids d'un corps placé successivement à différentes hauteurs au-dessus de la surface de la Terre, varie sensiblement en raison inverse du carré de la distance qui le sépare du centre du globe terrestre ; en sorte que l'exemple que nous allons traiter peut être regardé comme se rapportant au mouvement d'un corps pesant qui tomberait dans le vide, d'une grande hauteur au-dessus de la surface de la Terre.

Nous supposerons donc que O est le centre de la Terre et que la force qui agit sur le point mobile n'est autre chose que son poids. Soit A le point où la ligne OM_0 traverse la surface de la Terre ; lorsque le mobile est en ce point, son poids est égal à Mg. Le poids du mobile, en un point quelconque M de la droite sur laquelle il se meut, aura pour expression

$$\frac{mgr^2}{x^2}$$

en désignant par x la distance OM et par r le rayon OA de la Terre. D'après cela, l'équation différentielle du mouvement sera

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mgr^2}{x^2}$$

En opérant comme nous l'avons dit, et observant que la vitesse initiale v_0 est nulle par hypothèse, nous trouverons d'abord

$$v^2 = \frac{2gr^2}{x_0} \cdot \frac{x_0 - x}{x}$$

En y remplaçant v par $\frac{dx}{dt}$, puis résolvant par rapport à dt et remarquant que dx et dt sont de signes contraires, nous aurons :

$$dt = -\frac{dx}{r}\sqrt{\frac{x_0}{2g}}\sqrt{\frac{x}{x_0-x}}$$

ou bien

$$dt = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{x_0}{2g}}\left[\frac{1}{2}\frac{x_0-2x}{\sqrt{x_0x-x^2}}\,dx - \frac{1}{2}\frac{x_0}{\sqrt{x_0x-x_2}}\,dx\right]$$

En intégrant, et tenant compte de ce que x est égal à x_0 lorsque t est nul, nous obtiendrons enfin l'équation finie du mouvement qui est

$$t = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{x_0}{2g}}\left[\sqrt{x_0x-x^2} + \frac{x_0}{2}\,\text{arc cos}\,\frac{2x-x_0}{x_0}\right].$$

c)- Force fonction de la vitesse.

245.- Intégration.- Soit $X = F(v)$. L'équation différentielle du mouvement est dans ce cas

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(v)$$

ou bien

$$m\frac{dv}{dt} = F(v)$$

On en tire

$$dt = m\frac{dv}{F(v)}$$

d'où en intégrant

$$t = \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{F(v)}.$$

Si l'on résout cette équation par rapport à v, ce qui donnera

$$v = \varphi(t)$$

et si l'on observe que l'on a $v = \frac{dx}{dt}$, on en déduira

$$x = x_0 + \int_0^t \varphi(t)\,dt$$

Mais on peut aussi remplacer cette dernière opération par la suivante : la relation $dx = v\,dt$ donne

$$dx = m \frac{v\,dv}{F(v)}$$

d'où l'on tire en intégrant

$$x = x_0 + m \int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{F(v)}$$

Il suffit alors d'éliminer v entre cette dernière équation et la relation entre v et t qui résulte de la première intégration, pour avoir la relation cherchée entre x et t.

246.– Mouvement vertical d'un point pesant dans un milieu résistant. – Nous supposerons la résistance du milieu proportionnelle à une puissance de la vitesse et nous mettrons son expression sous la forme (1)

$$mg \frac{v^n}{K^n}$$

Le coëfficient K représente la vitesse qui rend la résistance égale au poids du mobile.

L'intégration est toujours possible quand n est entier ; nous nous bornerons à examiner le cas où $n = 2$.

247.– 1° Mouvement descendant. – Soit l'axe des x vertical et dirigé de haut en bas. Le point pesant part de l'origine O, sans vitesse initiale, de sorte que l'on a $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$, pour $t = 0$. L'équation différentielle du mouvement est

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - mg \frac{v^2}{K^2}$$

(1) Lorsque la vitesse est très-petite, on peut supposer $n = 1$. En ce qui concerne les grandes vitesses, il résulte de l'expérience que la résistance de l'air au mouvement des projectiles de l'artillerie peut être regardée comme proportionnelle au carré de la vitesse tant que cette dernière ne dépasse pas 230^m, et que la même loi peut encore être admise quand la vitesse surpasse 400^m. Entre 230 et 400^m, il semble que la résistance ne puisse pas être représentée par une puissance de la vitesse ; cependant entre 200 et 300 mètres, on peut, sans grande erreur, la supposer proportionnelle au cube de la vitesse.

ou bien
$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{K^2}\left(K^2 - v^2\right)$$

On en tire

(1)
$$dt = \frac{K^2}{g} \cdot \frac{dv}{K^2 - v^2}$$

et en intégrant
$$t = \frac{K}{2g}\, l\left(\frac{K+v}{K-v}\right)$$

Nous n'ajoutons pas de constante, parceque la vitesse est nulle au point de départ. On tire de cette équation

(2)
$$v = K\, \frac{e^{\frac{gt}{K}} - e^{-\frac{gt}{K}}}{e^{\frac{gt}{K}} + e^{-\frac{gt}{K}}}$$

On a d'ailleurs $x = \int v\, dt$; remplaçant v par sa valeur, intégrant et déterminant la constante par la condition que x s'annule avec t, on trouve

(3)
$$x = \frac{K^2}{g}\, l\left[\frac{e^{\frac{gt}{K}} + e^{-\frac{gt}{K}}}{2}\right]$$

248.– Les formules (2) et (3) donnent v et x en fonction de t. on peut trouver directement la relation entre v et x. En effet, puisque $v = \frac{dx}{dt}$, l'équation (1) peut s'écrire
$$dx = \frac{K^2}{g} \cdot \frac{v\, dv}{K^2 - v^2}$$

d'où en intégrant et déterminant la constante de manière que v et x s'annulent ensemble,

(4)
$$x = \frac{K^2}{2g}\, l\left[\frac{K^2}{K^2 - v^2}\right]$$

Les formules (2) (3) et (4) donnent la solution complète du problème.

L'expression de v en fonction de t montre que la vitesse tend vers K lorsque t augmente; par suite le mouvement tend à devenir uniforme.

249. — 2° Mouvement ascendant. — Soit l'axe des x vertical et dirigé de bas en haut. Le point part de l'origine o avec une vitesse initiale v_0, de sorte que l'on a $x=0$, $\frac{dx}{dt} = v_0$, pour $t=0$.

L'équation différentielle du mouvement est

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg - mg\frac{v^2}{K^2}$$

ou bien

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{K^2}\left(K^2 + v^2\right)$$

on en tire

$$(5) \qquad dt = -\frac{K^2}{g} \cdot \frac{dv}{K^2+v^2}$$

En intégrant et déterminant la constante de manière que $v = v_0$ pour $t=0$, il vient

$$-\frac{gt}{K} = \text{arc tg}\frac{v}{K} - \text{arc tg}\frac{v_0}{K}$$

d'où

$$\frac{Kv_0 - Kv}{K^2 + v_0 v} = \text{tg}\frac{gt}{K}$$

et par suite

$$(6) \qquad v = K\,\frac{v_0 \cos\frac{gt}{K} - K\sin\frac{gt}{K}}{v_0 \sin\frac{gt}{K} + K\cos\frac{gt}{K}}$$

En intégrant $v\,dt$ et déterminant la constante de manière que x et t s'annulent ensemble, on trouve

$$(7) \qquad x = \frac{K^2}{g}\, l\left[\frac{v_0 \sin\frac{gt}{K} + K\cos\frac{gt}{K}}{K}\right]$$

Cherchons maintenant la relation entre x et v : L'équation (5) peut s'écrire

$$dx = -\frac{K^2}{g} \cdot \frac{v\,dv}{K^2+v^2}$$

En intégrant et déterminant la constante par la condition $v = v_0$ pour $x=0$, on en déduit

$$(8) \qquad x = \frac{K^2}{2g}\, l\left[\frac{K^2+v_0^2}{K^2+v^2}\right]$$

250. — Le mobile cesse de monter lorsque la vitesse v devient nulle. Les formules (6) et (8) montrent que la valeur τ du temps correspondant à cet instant et la hauteur h à laquelle le mobile s'est élevé ont respectivement pour expressions

$$\tau = \frac{K}{g} \quad \operatorname{arctg} \frac{v_0}{K}$$

$$h = \frac{K^2}{2g}\, l \left[\frac{K^2 + v_0^2}{K^2} \right]$$

Le mobile descend ensuite et les formules (2) (3) et (4) représentent alors son mouvement.

Cherchons quelle vitesse aura le mobile quand il reviendra à son point de départ et quel temps il mettra à y revenir.

Egalons pour cela la valeur de h que nous venons de déterminer à la valeur de x donnée par la formule (4), il en résultera

$$\frac{K^2}{K^2 - v^2} = \frac{K^2 + v_0^2}{K^2}$$

d'où

$$v^2 = v_0^2 \quad \frac{K^2}{K^2 + v_0^2} \; .$$

Le mobile revient donc au point de départ avec une vitesse moindre que celle qu'il avait au moment du départ et d'autant moindre que K est plus petit.

Pour connaître la valeur τ' de t relative à cet instant, il faut dans la valeur précédemment trouvée (n° 247)

$$t = \frac{K}{2g}\, l \left(\frac{K+v}{K-v} \right)$$

remplacer v par $\frac{K v_0}{\sqrt{K^2 + v_0^2}}$; on trouve ainsi

$$\tau' = \frac{K}{g}\, l \left(\frac{v_0 + \sqrt{K^2 + v_0^2}}{K} \right)$$

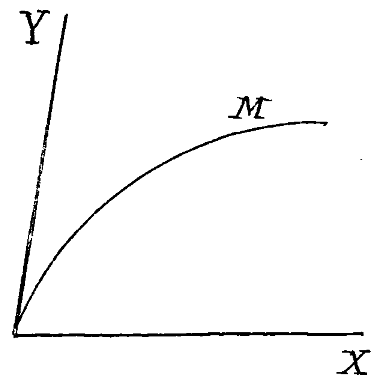
de sorte que le temps total écoulé entre le départ et le retour aura pour valeur

$$\tau + \tau' = \frac{K}{g} \left[\operatorname{arctg} \frac{v_0}{K} + l \left(\frac{v_0 + \sqrt{K^2 + v_0^2}}{K} \right) \right]$$

III. – Mouvement curviligne.

a) Mouvement produit par des forces constantes.

251. – Théorème. – Lorsque toutes les forces qui agissent sur un point matériel sont constantes, ce point décrit en général une parabole –



Soient :
O la position du point matériel à l'origine du temps,
OX la direction de la résultante des forces,
OY la direction de la vitesse initiale.

Désignons par F l'intensité de la résultante des forces et par v_0 la grandeur de la vitesse initiale.

En prenant OX et OY comme axes coordonnés, les équations différentielles du mouvement sont

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

On en déduit les valeurs

$$x = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 \qquad y = v_0 t$$

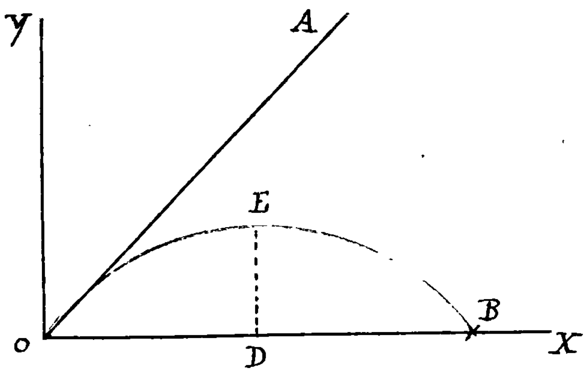
et, en éliminant t, on trouve pour l'équation de la trajectoire

$$y^2 = \frac{2mv_0^2}{F}x.$$

252. – Mouvement des projectiles dans le vide – Prenons comme exemple le mouvement d'un point matériel qu'on a lancé suivant une direction quelconque, et qui se meut ensuite sous la seule action de la pesanteur supposée constante. Nous venons d'établir que, dans ces circonstances, le mobile décrit une parabole ; mais nous allons étudier ce mouvement plus en détail.

Le mouvement s'effectue évidemment dans un plan vertical passant par la direction de la vitesse initiale du mobile ; nous pouvons le rapporter à deux axes tracés dans ce plan.

Nous prendrons le point de départ du mobile pour origine, la verticale OY menée par ce point pour axe des y ; l'horizontale OX pour axe des x.



Nous supposerons en outre que les y positifs se comptent en sens contraire du sens dans lequel agit la pesanteur.

La force qui agit sur le mobile est constamment égale à mg ; cette force est toujours dirigée parallèlement à l'axe OY, et en sens contraire du sens dans lequel se comptent les y positifs. D'après cela, les équations différentielles du mouvement seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

Désignons par v_0 la vitesse initiale du mobile et par α l'angle que la direction OA de cette vitesse fait avec l'axe des x. Nous devons donner aux constantes qui seront introduites par l'intégration des équations précédentes, des valeurs telles que l'on ait, pour $t = 0$,

$$x = 0 \qquad y = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha \qquad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt$$

Les équations intégrales sont donc

$$x = v_0 \cos\alpha\, t$$

$$y = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

En éliminant t entre ces deux équations, on trouve l'équation de la trajectoire

$$y = \operatorname{tg}\alpha\, x - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}$$

Cette équation représente une parabole dont l'axe est vertical.

253 – L'amplitude du jeu ou portée, s'obtient en faisant $y = 0$ dans l'équation de la trajectoire ; on trouve ainsi

$$OB = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

Cette valeur est un maximum, pour une même vitesse initiale v_0, lorsque l'angle α est de 45 degrés.

254. — La hauteur du jet ou ordonnée du sommet de la parabole s'obtient en remplaçant x par $\frac{1}{2}$ OB dans l'équation de la courbe. On trouve ainsi

$$dE = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha.$$

Cette valeur est un maximum, pour une même vitesse initiale v_0, lorsque l'angle α est de 90 degrés. Cette hauteur maximum du jet est égale à $\frac{v_0^2}{2g}$, elle est la moitié de la portée maximum.

255. — Cherchons quelle doit être la direction de la vitesse initiale v_0 pour atteindre un point donné x', y'.

L'équation de la trajectoire donne, en y remplaçant x, y par $x' y'$:

$$y' = tg\,\alpha\, x' - \frac{g x'^2}{2 v_0^2}\left(1 + tg^2\alpha\right).$$

On en tire :

$$tg^2\alpha - \frac{2v_0^2}{gx'}\; tg\,\alpha + \frac{2v_0^2 y'}{g x'^2} + 1 = 0.$$

équation dans laquelle l'inconnue est $tg\,\alpha$.

Pour que le problème soit possible, il faut que cette équation ait ses racines réelles ; d'où la condition

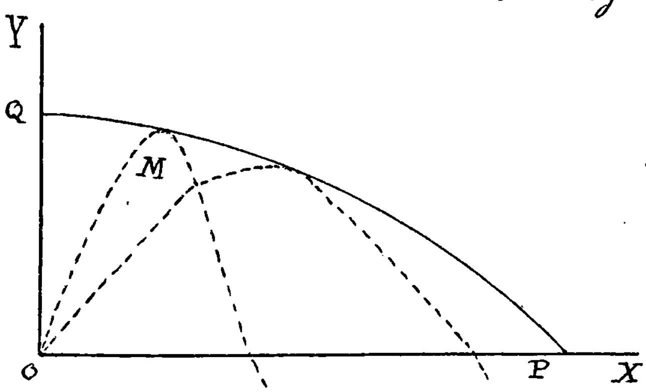
$$\frac{v_0^4}{g^2 x'^2} - \frac{2v_0^2 y'}{g x'^2} - 1 > 0.$$

On en déduit

$$y' < \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g x'^2}{2v_0^2}$$

Considérons la courbe qui a pour équation

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g x^2}{2 v_0^2}.$$



Cette courbe est une parabole dont le sommet Q est sur l'axe OY à une distance OQ égale à $\frac{v_0^2}{2g}$, le foyer en O et le paramètre OP égal à $\frac{v_0^2}{g}$. La condition de possibilité signifie que le point M à atteindre doit être intérieur à cette parabole. Quand cette condition est remplie on a deux trajectoires passant par le point M. Lorsque le point est situé sur la parabole limite, les deux racines de l'équation en $tg\,\alpha$ sont égales ; on n'a qu'une valeur donnée par la formule :

$$tg\,\alpha = \frac{v_0^2}{gx'}$$

Il n'existe alors qu'une trajectoire passant par le point.

La parabole que nous venons de définir porte le nom de parabole de sureté ; il est aisé de s'assurer qu'elle est l'enveloppe des trajectoires quand on fait varier α, en laissant v_0 constant.

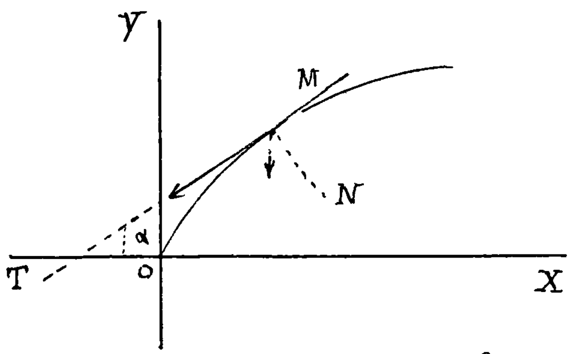
b) - Courbe balistique.

256. - Mouvement des projectiles dans un milieu résistant. -

La trajectoire du mobile dans un milieu résistant est comprise dans le plan vertical qui passe par la direction de la vitesse initiale.

Les forces qui sollicitent le mobile sont la pesanteur et la résistance du milieu, dirigées suivant la tangente en sens inverse du mouvement, que nous supposerons représentées par $m\,g\,R$, R étant une fonction de la vitesse v.

Nous prendrons le point de départ pour origine : l'horizontale OX menée par ce point pour axe des x, la verticale OY pour axe des y.



Soit α l'angle que la tangente en un point quelconque de la trajectoire fait avec l'axe des x.

On aura, pour déterminer le mouvement les deux équations différentielles

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\,m\,g\,R\cos\alpha$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\,m\,g\,R\sin\alpha - m\,g$$

auxquelles on peut substituer un système de quatre équations simultanées du premier ordre :

(1) $\qquad \dfrac{dx}{dt} = v\cos\alpha \qquad \dfrac{dy}{dt} = v\sin\alpha$

(2) $\qquad \dfrac{d(v\cos\alpha)}{dt} = -\,g\,R\cos\alpha$

(3) $\qquad \dfrac{d(v\sin\alpha)}{dt} = -\,g\,R\sin\alpha - g$

qui déterminent x, y, v, α en fonction de t, avec les conditions initiales :

$$(4) \qquad \begin{array}{ll} x = 0 & y = 0 \\ v = v_0 & \alpha = \alpha_0 \end{array}$$

On peut remplacer l'équation (3) par la suivante que l'on trouve, après réduction, en retranchant de l'équation (3) multipliée par $\cos\alpha$ l'équation (2) multipliée par $\sin\alpha$:

$$(5) \qquad v \frac{d\alpha}{dt} = -g \cos\alpha$$

D'ailleurs cette dernière équation s'obtient directement en écrivant l'équation du mouvement projeté sur la normale MN, c'est à dire

$$(6) \qquad m \frac{v^2}{\rho} = mg \cos\alpha$$

En effet, le rayon de courbure a pour expression $\rho = -\frac{ds}{d\alpha}$; et on a $v = \frac{ds}{dt}$. Donc l'équation (6) peut s'écrire en divisant par m,

$$-\frac{d\alpha}{ds} v \frac{ds}{dt} = g \cos\alpha$$

ce qui donne bien la relation (5).

257. — On ne peut pas aller plus loin sans particulariser la forme de la fonction R ; mais nous allons montrer que, lorsqu'on suppose cette fonction proportionnelle à une puissance de la variable, on peut, en prenant pour variable l'inclinaison α de la tangente à la trajectoire, ramener le problème à des quadratures.

258. — Résistance du milieu proportionnelle à une puissance de la vitesse.

Soit en effet, suivant une notation déjà employée,

$$R = \frac{v^n}{K^n}$$

En éliminant dt entre (2) et (5), on trouve

$$\frac{d(v\cos\alpha)}{v\, d\alpha} = \frac{v^n}{K^n}$$

ou bien

$$\frac{d(v\cos\alpha)}{(v\cos\alpha)^{n+1}} = \frac{1}{K^n} \frac{d\alpha}{\cos^{n+1}\alpha}$$

Intégrant entre les limites α_0 et α, et remarquant que pour $\alpha = \alpha_0$, $v = v_0$; il vient

$$\frac{1}{(v\cos\alpha)^n} - \frac{1}{(v_0\cos\alpha_0)^n} = -\frac{n}{K^n}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\cos^{n+1}\alpha}.$$

d'où

$$(7) \qquad v = v_0\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha}\left[1 - n\left(\frac{v_0\cos\alpha_0}{K}\right)^n\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\cos^{n+1}\alpha}\right]^{-\frac{1}{n}}$$

La valeur de v est ainsi ramenée à une quadrature. On calculera t en remarquant que l'on a, d'après (5),

$$dt = -\frac{1}{g}\frac{v\,d\alpha}{\cos\alpha}$$

d'où

$$(8) \qquad t = -\frac{1}{g}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{v\,d\alpha}{\cos\alpha}$$

On a ensuite d'après les relations (1)

$$dx = v\cos\alpha\,dt = -\frac{1}{g}v^2 d\alpha$$

$$dy = v\sin\alpha\,dt = -\frac{1}{g}v^2\,tg\,\alpha\,d\alpha$$

et par suite

$$(9) \qquad x = -\frac{1}{g}\int_{\alpha_0}^{\alpha}v^2\,d\alpha$$

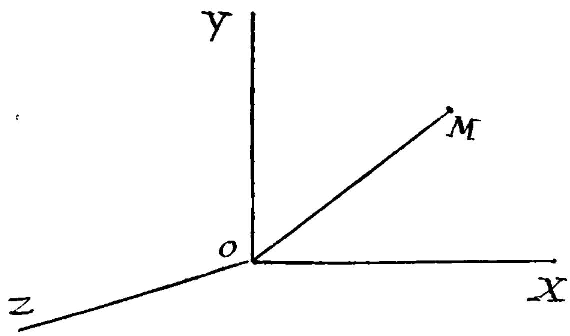
$$(10) \qquad y = -\frac{1}{g}\int_{\alpha_0}^{\alpha}v^2\,tg\,\alpha\,d\alpha$$

Le problème peut donc être entièrement résolu par des quadratures. [formules (7) (8) (9) et (10).]

c) – Cas de mouvement elliptique.

259. – Attraction proportionnelle à la distance du mobile à un centre fixe. – Supposons que la direction de la force appliquée à un point mobile M passe constamment par un centre fixe O dans le sens MO, et que son intensité soit représentée par Kr en désignant par K une constante et par r le rayon vecteur OM. Nous avons déjà étudié le mouvement produit par une telle force dans le cas

particulier où, la direction de la vitesse initiale passant par le centre fixe, ce mouvement est rectiligne. Nous supposons actuellement que la vitesse initiale a une direction quelconque.



Rapportons le mouvement à un système de trois axes rectangulaires, en plaçant l'origine au centre fixe. Les cosinus des angles que la direction de la force fait avec les trois axes sont $-\frac{x}{r}, -\frac{y}{r}, -\frac{z}{r}$ et par suite les équations différentielles du mouvement sont

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kr.\frac{x}{r}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -Kr.\frac{y}{r}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -Kr.\frac{z}{r}$$

ou bien, en posant

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 z = 0$$

Chacune des ces équations différentielles peut s'intégrer indépendamment des autres et d'après ce qui a été établi précédemment la solution générale de ces équations est donnée par les formules

$$x = a\cos(\omega t + \alpha)$$

$$y = b\cos(\omega t + \beta)$$

$$z = c\cos(\omega t + \gamma)$$

a, b, c ; α, β, γ désignant des constantes que l'on déterminera d'après les circonstances initiales du mouvement.

Le mouvement représenté par ces équations est celui que nous avons étudié en Cinématique. La trajectoire est elliptique ; et la propriété relative aux aires signalée dans ce mouvement est due à cette circonstance que la direction de la force passe par un point fixe.

IV. – Théorie des forces centrales.

260. – Définitions et équations différentielles. – Nous appellerons centrale une force dont la direction passe constamment par un centre fixe.

Lorsqu'un point est sollicité par une force centrale, son mouvement s'effectue dans le plan déterminé par la direction de la vitesse initiale et le centre fixe.

Prenons ce centre pour origine d'un système de coordonnées rectangulaires dans le plan de la trajectoire; désignons par

r la distance du mobile à l'origine,

F l'intensité de la force.

Le cosinus des angles que la direction de la force fait avec les axes sont $-\frac{x}{r}$, $-\frac{y}{r}$ si la force est attractive, c'est à dire dirigée du mobile vers le centre fixe, de sorte que les équations du mouvement sont

$$(1) \qquad \begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -F\frac{x}{r} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -F\frac{y}{r} \end{aligned}$$

et il suffirait de changer le signe de F si la force était répulsive.

261. – Supposons maintenant que l'on rapporte le mouvement à un système de coordonnées polaires (r, θ) ayant pour pôle le centre fixe.

Les composantes de la vitesse suivant la direction du rayon vecteur et suivant une direction perpendiculaire sont respectivement

$$\frac{dr}{dt}, \quad r\frac{d\theta}{dt}$$

et les composantes de l'accélération sont

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \quad r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}.$$

Par suite, les équations différentielles du mouvement peuvent s'écrire dans le cas où l'on considère la force F comme attractive.

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= -\frac{F}{m} \\ r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

D'une manière générale, la force F est une fonction des coordonnées, du temps et des composantes de la vitesse.

$$F = \varphi\left(r, \theta;\ t;\ \frac{dr}{dt}, r\frac{d\theta}{dt}\right)$$

Par suite, le système (2) est formé de deux équations différentielles simultanées du second ordre donnant r et θ en fonction de t et de quatre constantes arbitraires à déterminer par l'état initial.

262. — La deuxième des équations (2) peut s'écrire

$$\frac{1}{r}\ \frac{d\left(r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)\right)}{dt} = 0$$

Il s'en suit que $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ a une valeur constante c, de sorte que

$$r^2 d\theta = c\, dt \qquad (3)$$

On retrouve ainsi l'intégrale des aires ; on va voir de quelle utilité est cette intégrale dans l'étude du mouvement.

263. — Expression de la vitesse. — Désignons par ε l'angle compris entre la direction de la vitesse v et celle du rayon r ; on a

$$v \cos \varepsilon = \frac{dr}{dt}$$

$$v \sin \varepsilon = r\frac{d\theta}{dt}$$

et, en éliminant dt à l'aide de l'équation (3)

$$(4) \qquad \begin{aligned} v \cos \varepsilon &= -c\,\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \\ v \sin \varepsilon &= c\ \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

On déduit de ces équations :

$$v^2 = c^2\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\cdot\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right] \qquad (5)$$

264. — Expression de la force. — Appliquons au mouvement le théorème des forces vives pendant un temps infiniment petit.

Les composantes de la force F suivant deux axes rectangulaires sont

$$X = -F\frac{x}{r} \qquad Y = -F\frac{y}{r}$$

et le travail élémentaire a pour expression

$$X\,dx + Y\,dy = -F\,\frac{x\,dx + y\,dy}{r}.$$

ou bien $-F\,dr$; puisque de la relation $x^2+y^2=r^2$ on tire $x\,dx+y\,dy=r\,dr$

Le théorème des forces vives donne donc la relation

$$d\left(\tfrac{1}{2} m v^2\right) = -F\,dr$$

que l'on peut écrire

$$(6)\qquad F = -\frac{d\left(\frac{1}{2} m v^2\right)}{dr}.$$

On en conclut ce théorème: dans le mouvement produit par une force centrale, la dérivée de la force vive par rapport au rayon vecteur prise en signe contraire est égale à l'intensité de la force (1).

La formule (5) donne pour l'expression de la force vive

$$(7)\qquad \frac{1}{2} m v^2 = \frac{mc^2}{2}\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right]$$

et en supposant que, dans cette expression, θ soit remplacé par sa valeur en fonction de r, tirée de l'équation de la trajectoire, il suffira de prendre la dérivée de cette expression par rapport à r et de changer le signe de cette dérivée pour avoir la valeur de F. On trouve ainsi en effectuant généralement cette différentiation

$$(8)\qquad F = \frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right]$$

265. — Détermination du mouvement dans le cas où la force ne dépend que de la position du point. — Soit $F = \varphi(r, \theta)$; en remplaçant F par sa valeur, l'équation (8) est une équation différentielle du second ordre entre r et θ. L'intégration donne la relation qui existe entre ces deux variables, c'est à dire l'équation de la

---

(1) On obtient la relation (6) sous la forme $\dfrac{d\left(\frac{1}{2} m v^2\right)}{dt} = -F\,\dfrac{dr}{dt}$ en ajoutant les équations (2) respectivement multipliées par $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dt}$ et remarquant que, dans le mouvement d'un point rapporté à des coordonnées polaires, la vitesse v est donnée par la formule

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

trajectoire. Cette dernière équation renfermera trois constantes arbitraires : c et les deux constantes introduites par l'intégration.

L'équation de la trajectoire étant connue, on en tirera l'une des deux coordonnées en fonction de l'autre et, par suite l'équation $r^2 d\theta = c\,dt$ fera connaître t en fonction de r ou de θ, et réciproquement. Cette dernière intégration introduira la quatrième constante arbitraire.

266.– Cas particulier où la force ne dépend que de la distance du mobile au centre fixe.– Supposons $F = \varphi(r)$; la force admet alors un potentiel et le théorème des forces vives donne une intégrale du mouvement. La somme de la force vive et du potentiel étant constante, on a l'équation

$$\frac{1}{2} m v^2 + \int \varphi(r)\, dr = \text{constante}$$

En désignant la constante par $m h$ et posant

$$(9) \qquad u = -\frac{1}{m} \int \varphi(r)\, dr$$

l'équation des forces vives peut s'écrire

$$(10) \qquad v^2 = 2(u+h)$$

et y remplaçant v^2 par la valeur (5), on a l'équation

$$c^2 \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 \right] = 2(u+h)$$

d'où l'on tire

$$(11) \qquad d\theta = \frac{c\,dr}{r\sqrt{2r^2(u+h) - c^2}}$$

Enfin en éliminant $d\theta$ entre cette équation et l'équation (3) des aires, on trouve

$$(12) \qquad dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{2r^2(u+h) - c^2}}$$

L'intégration des équations (11) et (12) conduit aux relations

$$(13) \qquad \theta - \theta_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{c\,dr}{r\sqrt{2r^2(u+h) - c^2}}$$

$$(14) \qquad t = \int_{r_0}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{2r^2(u+h) - c^2}}$$

La première de ces relations donne l'équation de la trajectoire ; la seconde fait connaître t en fonction de r et réciproquement. Les 4 constantes arbitraires sont c, h, r_0, θ_0.

On voit que, dans le cas actuel, l'emploi du théorème des aires et du théorème des forces vives réduit le problème à des quadratures.

267.– Il est aisé de déterminer, d'après l'état initial, les valeurs des constantes c, h. En effet, en supposant $t = 0$, on tire des relations (4) et (10)

$$(15)\qquad \begin{cases} c = r_0\, v_0 \sin \varepsilon_0 \\ h = \frac{1}{2} v_0^2 - u_0 . \end{cases}$$

V– Application de la théorie des forces centrales.

a)– Un point décrivant une ellipse par l'action d'une force dirigée vers son centre, trouver l'expression de cette force.

268.– Soient a, b les demi-axes de l'ellipse ($a > b$). Prenons le centre de l'ellipse comme pôle et comptons les angles θ à partir du grand axe ; l'équation de cette courbe sera

$$(16)\qquad \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}$$

d'où en différentiant

$$(17)\qquad \frac{1}{r}\,\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \sin\theta \cos\theta$$

Si nous exprimons le second membre en fonction de r au moyen de l'équation (16), nous tirerons de l'équation (17) $\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}$ en fonction de r ; et en reportant cette valeur dans la formule générale (7) nous aurons la force vive et, par suite, la force en prenant la dérivée de la force vive par rapport à r et changeant le signe du résultat. (n° 264)

Or, l'équation (16) donne

$$\sin^2\theta = \frac{b^2(a^2 - r^2)}{r^2(a^2 - b^2)} \qquad \cos^2\theta = \frac{a^2(r^2 - b^2)}{r^2(a^2 - b^2)}$$

L'équation (17) donne, en substituant ces valeurs

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 = \frac{(a^2-r^2)(r^2-b^2)}{a^2b^2r^2}.$$

En reportant cette expression dans la formule (7), on trouve

$$\frac{1}{2}\,mv^2 = \frac{mc^2}{2}\left[\frac{a^2+b^2}{a^2b^2} - \frac{r^2}{a^2b^2}\right]$$

et en différentiant par rapport à r et changeant le signe

$$F = \frac{mc^2}{a^2b^2}\,r$$

Ainsi, dans ce mouvement, la force sera proportionnelle à la distance au centre, et elle sera attractive, puisque la valeur trouvée pour F est positive.

D'après le principe des aires, le point mettra toujours le même temps à parcourir l'ellipse entière à partir de l'une quelconque de ses positions. Désignons ce temps par τ. Comme la constante c représente le double de l'aire décrite par le rayon vecteur dans l'unité de temps, $\frac{1}{2}c\tau$ sera l'aire totale de l'ellipse et l'on aura

$$\frac{1}{2}c\tau = \pi ab \qquad d'où \qquad \tau = \frac{2\pi ab}{c}$$

Si l'on veut introduire la durée de la révolution dans l'expression de la force, on obtiendra

$$F = \frac{4\pi m}{\tau^2}\,r.$$

Si au lieu d'une ellipse, on avait considéré une hyperbole, on aurait trouvé une force répulsive agissant suivant la même loi.

b) — Mouvement d'un point soumis à une force centrale agissant en raison inverse du carré de la distance du mobile au centre fixe.

269. — Nous prendrons l'expression de la force sous la forme $F = \frac{mK}{r^2}$, m désignant la masse du point mobile et K une constante qui sera positive ou négative suivant que la force sera attractive ou répulsive.

On a alors

$$\int \varphi(r)\,dr = mK \cdot \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{mK}{r}$$

et la fonction u de l'équation des forces vives [n° 266 (9)] est

$$u = \frac{K}{r}$$

On pourrait donc se servir des formules (13) et (14) pour déterminer le mouvement, mais il est plus simple d'opérer comme il suit.

270.— Détermination de la trajectoire.— En remplaçant F par sa valeur, l'équation (8) devient :

$$\frac{K}{c^2} = \frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2}$$

En l'écrivant

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r} - \frac{K}{c^2}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} - \frac{K}{c^2} = 0$$

on voit immédiatement que la solution générale est

$$(19) \qquad \frac{1}{r} - \frac{K}{c^2} = \frac{K}{c^2}\, e \cos(\theta - \alpha)$$

e, α désignant deux constantes arbitraires. On tire de cette équation

$$(20) \qquad r = \frac{\frac{c^2}{K}}{1 + e\cos(\theta - \alpha)}$$

et on conclut que la trajectoire est une section conique ayant pour foyer le centre fixe.

271.— Dans l'équation (20) on peut toujours supposer $e > 0$ en augmentant au besoin α de $180°$. Voici quelle est alors la signification géométrique des coëfficients

e excentricité ou rapport de la distance des foyers au grand axe $2a$.

α angle compris entre la direction du grand axe et la direction de l'axe polaire.

$\frac{c^2}{K}$ paramètre égal à $a(1-e^2)$.

272.— Détermination des constantes arbitraires.— L'équation de la trajectoire renferme trois constantes arbitraires c, e, α que l'on détermine d'après l'état initial. Désignons par $r_0, \theta_0, v_0, \varepsilon_0$ les valeurs initiales du rayon vecteur, de l'angle polaire, de la vitesse et de l'angle compris entre les directions du rayon vecteur et de la vitesse. Considérons à l'instant initial l'équation (19) et les deux relations (4). En remarquant que l'équation (19) donne

$$-\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}=\frac{Ke}{C^2}\sin(\theta-\alpha)$$

nous aurons les trois équations

$$\frac{1}{r_0}-\frac{K}{C^2}=\frac{Ke}{C^2}\cos(\theta_0-\alpha)$$

$$v_0\cos\mathcal{E}_0=\frac{Ke}{C}\sin(\theta_0-\alpha)$$

$$v_0\sin\mathcal{E}_0=\frac{C}{r_0}$$

d'où l'on tire

$$c=r_0 v_0\sin\mathcal{E}_0$$

(21) $$e\cos(\theta_0-\alpha)=\frac{v_0^2 r_0\sin^2\mathcal{E}_0}{K}-1$$

$$e\sin(\theta_0-\alpha)=\frac{v_0^2 r_0\sin\mathcal{E}_0\cos\mathcal{E}_0}{K}$$

La première de ces formules donne c ; les deux autres déterminent sans ambiguïté e et α. On en déduit

(22) $$1-e^2=\frac{v_0^2 r_0^2\sin^2\mathcal{E}_0}{K^2}\left(\frac{2K}{r_0}-v_0^2\right)$$

ce qui montre que la trajectoire sera une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant que la quantité $\left(\frac{2K}{r_0}-v_0^2\right)$ sera positive, nulle ou négative.

Il est remarquable que la nature de la section conique qui sera décrite par le mobile ne dépende que de sa distance initiale au centre fixe et de sa vitesse initiale et nullement de la direction de cette vitesse.

273. — La relation $a(1-e^2)=\frac{c^2}{K}$ détermine le grand axe ; on en déduit

$$\frac{1}{a}=\frac{K(1-e^2)}{c^2}$$

ou en remplaçant c^2 et $1-e^2$ par leurs valeurs

$$\frac{1}{a}=\frac{2}{r_0}-\frac{v_0^2}{K}$$

Cette expression est indépendante de $\mathcal{E}_0$; de sorte que si divers points matériels partent d'une même position initiale avec la même vitesse, dans diverses directions, ces points décrivent tous des coniques ayant le même grand axe.

274. – Expression des coordonnées en fonction du temps. — L'équation de la trajectoire et l'équation des aires déterminent r et θ en fonction du temps. En astronomie, on fait cette détermination en exprimant r et θ en fonction d'une variable auxiliaire dont on cherche la valeur en fonction du temps.

Supposons que la trajectoire soit une ellipse; en comptant l'angle θ à partir du grand axe, l'équation de cette trajectoire devient

$$(23) \qquad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

Si l'on observe que le rayon vecteur est compris entre $a(1+e)$ et $a(1-e)$, on pourra poser (1)

$$(24) \qquad r = a(1-e\cos u)$$

d'où, résultent, d'après (23), les valeurs

$$(25) \qquad \cos\theta = \frac{\cos u - e}{1-e\cos u}$$

$$(26) \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{1-e\cos u}$$

En différentiant (25) et tenant compte de (26) on trouve

$$d\theta = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u}\, du$$

et par suite

$$r^2\, d\theta = a^2\sqrt{1-e^2}\,(1-e\cos u)\, du$$

Il en résulte que l'équation des aires $r^2 d\theta = c\,dt$ devient:

$$(27) \qquad (1-e\cos u)\, du = n\, dt$$

(1) L'angle u, qui passe en même temps que l'anomalie vraie θ par les valeurs $0, \pi, 2\pi$, a reçu le nom d'anomalie excentrique.

en posant, pour abréger

$$(28) \qquad n = \frac{c}{a^2\sqrt{1-e^2}}$$

En intégrant enfin l'équation (27) il vient

$$(29) \qquad u - e \sin u = nt + \varepsilon$$

ε désignant une constante arbitraire.

275. — Les équations (24) (25) et (29) donnent la solution complète du problème. En effet la relation (29) exprime u en fonction de t, et les relations (24) et (25) expriment r et θ en fonction de u.

A la relation (26) on substitue ordinairement une formule plus commode. On calcule à cet effet, à l'aide de (25),

$$tg^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

et l'on trouve la formule

$$tg\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\, tg\frac{u}{2}.$$

En résumé, la solution du problème est fournie par le système

$$(30) \qquad \left\{ \begin{aligned} & r = a(1 - e\cos u) \\ & tg\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\, tg\frac{u}{2} \\ & u - e\sin u = nt + \varepsilon \end{aligned} \right.$$

276. — On peut donner une forme très simple à la valeur de la constante n qui entre dans ces formules.

Remarquons que la constante c s'obtient en divisant le double de l'aire décrite par le rayon vecteur pendant un temps quelconque par ce temps. Si l'on suppose que le rayon vecteur décrive l'ellipse tout entière, le double de l'aire sera

$$2\pi ab = 2\pi a^2\sqrt{1-e^2}.$$

et en désignant par τ la durée de la révolution du point sur son orbite, on aura

$$c = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{\tau}$$

Par suite, la relation (28) donnera

$$(31) \qquad n = \frac{2\pi}{\tau}.$$

La quantité n est ce que l'on appelle la moyenne vitesse angulaire et nt est le mouvement moyen du point mobile.

Chapitre IV.

Equilibre et mouvement d'un point matériel qui n'est pas libre.

I. – Définitions et principes généraux.

277. – Ce qu'on entend par un point matériel qui n'est pas libre.

Il peut arriver qu'un corps mobile soit dans des circonstances telles que son mouvement satisfasse à certaines conditions, quelles que soient les forces qui agissent sur lui. – Une balle de plomb suspendue à l'extrémité d'un fil inextensible dont l'autre extrémité est fixe, se mouvra toujours de telle manière que son centre de figure reste sur la surface d'une sphère ayant le point d'attache du fil pour centre, quelles que soient les forces qui agissent sur elle, pourvu que ces forces ne tendent pas à la rapprocher du point d'attache du fil. – Un wagon placé sur une voie de fer se mouvra toujours le long de cette voie, quelles que soient les grandeurs et les directions des forces qu'on lui appliquera ; pourvu qu'on ne dépasse pas certaines limites.

278. – La considération de corps naturels se mouvant dans de telles circonstances a conduit à la conception abstraite de points matériels assujettis à se mouvoir sur une surface ou sur une ligne géométriques que l'on considère comme rigides et impénétrables. C'est par opposition avec cette manière de considérer le mouvement d'un point matériel que nous avons caractérisé l'objet du chapitre précédent en spécifiant dans le titre de ce chapitre qu'il s'agissait d'un point matériel libre.

279. – Lorsqu'un point n'est pas libre on est, suivant l'expression consacrée, soumis à des liaisons, il est une distinction essentielle à faire relativement aux conditions auxquelles il se trouve assujetti.

Si le point est astreint à rester sur une surface rigide, il peut arriver qu'il ne puisse se mouvoir normalement à cette surface, ni dans un sens, ni dans l'autre. Pour concevoir qu'il en soit ainsi, il suffit d'imaginer le point comme la limite d'une sphère infiniment petite comprise entre la surface et une surface parallèle infiniment voisine, de façon que ces deux surfaces puissent s'opposer au mouvement normal dans les deux sens.

Mais si l'on conçoit le point comme se trouvant à la surface d'un corps rigide et impénétrable, il ne pourra pas se mouvoir dans la direction de la normale vers l'intérieur du solide, tandis que son mouvement est libre vers l'extérieur.

Clausius a proposé de donner à ces obstacles qui s'opposent au mouvement dans un sens, mais le laissent libre en sens contraire, le nom d'obstacles à résistance unilatérale; à ceux qui s'opposent au mouvement dans deux sens opposés, on donne, dans les cas où la distinction est nécessaire, le nom d'obstacles à résistance bilatérale.

280. – De même, quand un point est assujetti à décrire une ligne, on peut l'imaginer comme la limite d'une sphère infiniment petite engagée dans l'intérieur d'une surface canal de diamètre infiniment petit ayant pour axe la ligne considérée; de telle sorte que le point ne peut subir aucun déplacement normal à cette ligne.

281. – Action des obstacles sur un point qui n'est pas libre. –

Lorsqu'un point est assujetti à se mouvoir soit sur une surface, soit sur une ligne, il est en présence d'obstacles dont l'existence équivaut à une force puisque le mouvement du point est différent de celui qu'il prendrait s'il était libre, sous l'influence des forces qui agissent sur lui.

Cette force particulière est ce que l'on appelle l'action de la surface ou de la courbe sur le point matériel.

282. – Egalité de l'action et de la réaction. – Supposons qu'un point se meuve sur une surface et considérons chaque point de cette surface comme un point matériel. Soit M une des positions du point mobile; on admet qu'au point M de la surface est appliquée une force que l'on appelle la réaction du mobile sur la surface, et que cette force est égale et opposée à l'action de la surface sur le mobile.

De même, lorsqu'un point est assujetti à se mouvoir sur une ligne, on admet que la réaction du point sur la ligne est égale et opposée à l'action de la ligne sur le point.

Le principe, énoncé par Newton, suivant lequel l'action est égale et contraire à la réaction est le dernier de ceux dont nous ferons usage sans en donner de démonstration. Ce principe n'est pas un axiome; il n'est pas susceptible d'un contrôle expérimental immédiat. Il est vérifié, comme les deux autres principes de la Dynamique, par l'exactitude des conséquences que l'on en déduit par des méthodes rigoureuses.

La réaction d'un point sur une surface ou sur une ligne mesure la pression exercée par ce point sur cette surface ou sur cette ligne.

283. — Hypothèse sur l'action des surfaces et des courbes — Nous admettrons dans ce chapitre, que l'action d'une surface ou d'une courbe sur un point matériel se réduit à une force normale; nous dirons dans ce cas, qu'il n'y a pas de frottement.

Les forces, autres que l'action, qui agissent sur un point matériel assujetti à se mouvoir sur une surface ou sur une courbe, se nomment les forces directement appliquées.

284. — Théorème des forces vives dans le mouvement d'un point qui n'est pas libre. — Tous les théorèmes qui ont été établis sur le mouvement d'un point matériel libre, sont applicables au mouvement d'un point matériel assujetti à rester sur une surface ou sur une courbe, à la condition de joindre à la résultante F des forces directement appliquées à ce point l'action N qu'il éprouve de la part de la surface ou de la ligne, et de considérer le mouvement comme s'effectuant librement sous l'action de la résultante des forces F et N. Mais comme la force N n'est pas connue à priori, on doit naturellement attacher plus d'importance à ceux de ces théorèmes qui ne dépendent pas de cette force. Tel est le théorème des forces vives.

En effet, si l'on fait abstraction du frottement, la force N est normale au chemin décrit par le mobile et, par suite son travail est nul. On a donc ce théorème:

Lorsqu'un point est assujetti à se mouvoir sur une surface ou sur une courbe, la variation de sa force vive pendant un temps quelconque est égal à la somme des travaux des forces directement appliquées pendant le même temps.

285.— Intégrale des forces vives.— En particulier, si les forces directement appliquées admettent une fonction, le théorème des forces vives fournit une intégrale du mouvement, comme si le point était libre.

II.— Equilibre d'un point matériel qui n'est pas libre.

a) - Equilibre sur une surface.

286.— Conditions de l'équilibre.— Lorsque la résistance de la surface est bilatérale, il est évident que la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre est que la résultante des forces directement appliquées soit normale à la surface.

Exprimons cette condition analytiquement. Soit

$$(1) \qquad F(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface. Désignons par F la résultante des forces directement appliquées et par X, Y, Z les composantes de F suivant les trois axes. Les conditions d'équilibre sont exprimées par les deux équations

$$(2) \qquad \frac{X}{\frac{dF}{dx}} = \frac{Y}{\frac{dF}{dy}} = \frac{Z}{\frac{dF}{dz}}$$

Si les valeurs de X, Y, Z sont des fonctions de x, y, z ; en résolvant (1) et (2) par rapport à x, y, z on trouvera les point où il faudra placer le point matériel pour qu'il y ait équilibre.

Si la résistance de la surface était unilatérale, il faudrait non seulement exprimer que la résultante est normale à la surface, mais encore qu'elle est dirigée vers la région où le point ne peut pas pénétrer, ou qu'elle est nulle.

287— Cas où les forces directement appliquées admettent une fonction.— Supposons que l'on ait

$$X = \frac{df}{dx} \qquad Y = \frac{df}{dy} \qquad Z = \frac{df}{dz}$$

Les équations (2) deviennent

$$(3) \qquad \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{dF}{dx}} = \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{dF}{dy}} = \frac{\frac{df}{dz}}{\frac{dF}{dz}}$$

Elles expriment que la surface de niveau qui passe par une position d'équilibre est tangente en ce point à la surface représentée par l'équation (1).

Il suffit donc de mener les surfaces de niveau tangentes à la surface donnée; les points de contact sont les positions d'équilibre.

288. — Un point de la surface correspondant à un maximum ou un minimum de la fonction des forces est une position d'équilibre.

En remplaçant z par sa valeur tirée de l'équation $F(x.y.z)=0$, la fonction des forces $f(x.y.z)$ est une fonction de $x.y$. Pour trouver les valeurs de ces variables qui donnent un maximum ou un minimum de la fonction il faut, d'après une théorie connue, éliminer dz entre les deux équations

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0$$

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = 0$$

et après l'élimination, égaler à zéro les coëfficients de dx, dy. On retrouve ainsi les équations (3).

289. — Un point de la surface correspondant à un maximum de la fonction des forces est une position d'équilibre stable. —

La démonstration fondée sur le principe des forces vives que nous avons donnée de ce théorème dans le cas d'un point matériel libre subsiste lorsque le point matériel est assujetti à rester sur une surface puisque le théorème des forces vives s'applique au mouvement du point sur cette surface, en ne tenant compte que des forces directement appliquées.

290. — En particulier, supposons qu'un point assujetti à rester sur une surface ne soit soumis qu'à l'action de la pesanteur. En prenant l'axe OZ vertical et dirigé vers le zénith, la fonction f se réduit à $-mgz$. Les surfaces de niveau sont des plans horizontaux et les positions d'équilibre s'obtiennent en menant à la surface les plans tangents horizontaux.

Si en un des points de contact, z est un minimum, la fonction des forces est un maximum et l'équilibre est stable

b). – Equilibre sur une courbe.

291. – Conditions de l'équilibre. – Supposons qu'un point, assujetti à se mouvoir sur une courbe donnée, ne puisse prendre aucun déplacement normal à cette courbe. La condition nécessaire et suffisante pour que ce point soit en équilibre est que la résultante des forces directement appliquées soit normale à la courbe. Cette condition s'exprime analytiquement de la manière suivante.

292. – 1° Supposons que les coordonnées d'un point de la courbe soient exprimées en fonction d'un paramètre variable α par les formules

$$x = \varphi_1(\alpha) \qquad y = \varphi_2(\alpha) \qquad z = \varphi_3(\alpha)$$

Pour que la résultante (X, Y, Z) des forces directement appliquées soit normale à la courbe, on doit avoir la relation

$$X\varphi_1'(\alpha) + Y\varphi_2'(\alpha) + Z\varphi_3'(\alpha) = 0.$$

et en supposant que X, Y, Z soient des fonctions de x, y, z, cette relation se réduit à une équation $\psi(\alpha) = 0$, dont les racines donnent les positions d'équilibre.

293. – 2° Supposons que, la courbe étant considérée comme l'intersection de deux surfaces, ses équations soient données sous la forme

$$(4) \qquad \begin{aligned} F_1(x, y, z) &= 0 \\ F_2(x, y, z) &= 0 \end{aligned}$$

Soient dx, dy, dz les projections sur les axes d'un déplacement élémentaire sur la courbe; on devra avoir les trois équations

$$\begin{aligned} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz &= 0 \\ \frac{dF_1}{dx}dx + \frac{dF_1}{dy}dy + \frac{dF_1}{dz}dz &= 0 \\ \frac{dF_2}{dx}dx + \frac{dF_2}{dy}dy + \frac{dF_2}{dz}dz &= 0 \end{aligned}$$

et en éliminant dx, dy, dz on a la condition:

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{dF_1}{dx} & \frac{dF_1}{dy} & \frac{dF_1}{dz} \\ \frac{dF_2}{dx} & \frac{dF_2}{dy} & \frac{dF_2}{dz} \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est la condition d'équilibre. Si X, Y, Z sont des fonctions données de x, y, z, les équations (4) et (5) feront connaître les points de la courbe pour lesquels l'équilibre a lieu.

294. – Lorsque les forces directement appliquées admettent une fonction, on a relativement à l'équilibre d'un point assujetti à se mouvoir sur une courbe des théorèmes analogues à ceux que nous avons établis relativement à l'équilibre d'un point assujetti à se mouvoir sur une surface. On se dispensera d'en donner la démonstration.

III. – Mouvement d'un point qui n'est pas libre.

a) – Mouvement sur une surface.

295. – Équations différentielles du mouvement. – Rapportons la position du point à un système de coordonnées rectangulaires. Soit

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface sur laquelle il est assujetti à se mouvoir. Désignons par

N l'action de la surface sur le point.

X, Y, Z les composantes suivant les axes de la résultante des forces directement appliquées au mobile.

La force N est supposée normale à la surface et ses cosinus directeurs sont

$$\frac{1}{\Delta}\frac{dF}{dx} \qquad \frac{1}{\Delta}\frac{dF}{dy} \qquad \frac{1}{\Delta}\frac{dF}{dz}.$$

en posant, pour abréger

$$\Delta = \pm \sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}$$

Nous mettons le double signe devant le radical parce que l'action de la surface peut s'exercer dans deux directions opposées; mais on saura, dans chaque cas particulier quel signe on doit prendre.

Par suite, en tenant compte de toutes les forces qui sollicitent le point, les équations différentielles du mouvement sont

$$(6) \qquad \begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + \frac{N}{\Delta}\frac{dF}{dx} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \frac{N}{\Delta}\frac{dF}{dy} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \frac{N}{\Delta}\frac{dF}{dz} \end{aligned}$$

auxquelles il faut joindre

$$(7) \qquad F(x, y, z) = 0.$$

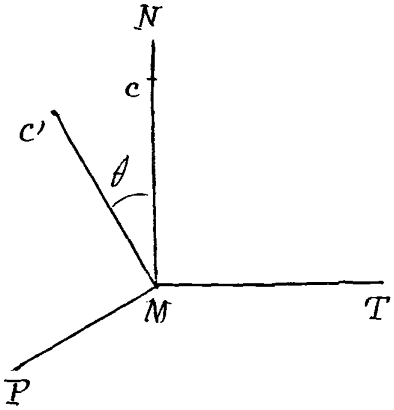
On a ainsi quatre équations pour déterminer $x, y, z; N$.

296.– Assez souvent on profite de l'équation de la surface pour exprimer les trois coordonnées du point mobile en fonction de deux variables indépendantes. On a ainsi

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(\alpha, \beta) \\ y &= \varphi_2(\alpha, \beta) \\ z &= \varphi_3(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

Exprimons les dérivées secondes de x, y, z par rapport à t en fonction des dérivées de α et de β par rapport à la même variable. En remplaçant dans les équations (6) $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ par leurs valeurs, on aura trois équations qui, réduites à deux par l'élimination de N, donnent les équations du mouvement en fonction de α et de β.

297.– Pression sur la surface.– Soient M une position quelconque du mobile, MT la direction de la vitesse en ce point; C le centre de courbure de la section normale de la tangente à MT, C' le le centre de courbure de la trajectoire



En désignant par

R le rayon de courbure MC de la section normale,

ρ le rayon de courbure MC' de la trajectoire,

θ l'angle du plan osculateur TMC' à la trajectoire avec la normale MN à la surface,

on a, d'après le théorème de Meusnier,

$$\rho = R \cos\theta$$

En projetant enfin MC' sur le plan tangent, nous obtenons une direction MP formant avec MT et MN un système orthogonal.

Cela posé, désignons par F la résultante des forces directement appliquées au mobile et par N l'action de la surface sur ce point, cette action étant considérée comme positive ou négative suivant qu'elle agit dans la direction MN ou dans la direction opposée. Le mobile peut être considéré comme libre sous l'action des forces F et N; si donc on appelle F_t, F_p, F_n les composantes de la force F suivant les directions MT, MP, MN et si l'on remarque que les composantes de l'accélération, suivant les mêmes directions sont respectivement

$$\frac{dv}{dt}, \qquad \frac{v^2}{\rho}\sin\theta, \qquad \frac{v^2}{\rho}\cos\theta$$

on aura les trois équations

$$m\frac{dv}{dt} = F_t \qquad \frac{mv^2}{\rho}\sin\theta = F_p \qquad \frac{mv^2}{\rho}\cos\theta = F_n + N.$$

La troisième de ces équations donne la valeur de N; la réaction du point, ou pression, sur la surface étant égale et directement opposée à N est donnée par la formule

$$P = F_n - \frac{mv^2}{\rho}\cos\theta$$

Si l'on appelle <u>force centrifuge</u> une force égale et opposée à la force centripète, ce résultat s'énonce comme il suit :

La pression exercée par un point matériel mobile sur une surface fixe est la somme des composantes des forces directement appliquées et de la force centrifuge suivant la normale à la surface.

C'est la présence de la force centrifuge agissant sur la surface qui distingue la pression dynamique de la pression statique.

298. — On peut présenter sous une autre forme les trois équations précédentes ; désignons par ρ_g le rayon de courbure géodésique égal à $\frac{\rho}{\sin\theta}$; en tenant compte du théorème de Meusnier, on peut écrire

$$m\frac{dv}{dt} = F_t \qquad \frac{mv^2}{\rho_g} = F_p \qquad \frac{mv^2}{R} = F_n + N$$

s'il y a une fonction des forces directement appliquées, en la désignant par $m\,u$, l'intégrale des forces vives donne

$$v^2 = 2(u+h)$$

et la troisième des équations qui précèdent permet de calculer l'action normale et par suite la pression, sans qu'il soit nécessaire de connaître toutes les circonstances du mouvement.

299. — Supposons que le mobile soit seulement posé sur la surface, c'est à dire qu'il puisse la quitter d'un certain côté. Pour que le point reste sur la surface, il faut que l'action N soit dirigée du côté où le point peut s'éloigner ; si N s'annule à un certain moment, le point quitte la surface et l'on est ramené au cas d'un point libre.

300. — Cas particulier. — Supposons qu'aucune force ne soit directement appliquée au mobile ; les trois équations du n° 297 deviennent

$$\frac{dv}{dt} = 0 \qquad \sin\theta = 0 \qquad N = \frac{mv^2}{\rho}.$$

Donc : 1° le mouvement est uniforme ; 2° la normale principale de la trajectoire se confond avec la normale à la surface et, par suite, la trajectoire est une ligne géodésique de la surface ;(1) 3° la pression sur la surface est égale à $\frac{mv^2}{\rho}$.

---

(1) - Les lignes géodésiques, définies par la condition d'avoir en chaque point leur plan osculateur normal à la surface, jouissent de la propriété géométrique suivante : la ligne géodésique est la plus courte que l'on puisse tracer entre deux points donnés sur la surface.

b) – Mouvement sur une courbe.

301 – Equations différentielles du mouvement. – Considérons maintenant un point qui soit assujetti à rester sur la courbe fixe dont les équations sont

$$x = \varphi_1(\alpha) \qquad y = \varphi_2(\alpha) \qquad z = \varphi_3(\alpha)$$

En désignant par (a, b, c) les cosinus directeurs de l'action N de la courbe sur le point et par X, Y, Z les composantes de la force directement appliquée, les équations différentielles du mouvement sont

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + aN$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + bN$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + cN.$$

A ces équations il faut joindre les suivantes

$$a\varphi_1'(\alpha) + b\varphi_2'(\alpha) + c\varphi_3'(\alpha) = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

dont la première exprime que l'action N est normale à la courbe. On a ainsi un système de huit équations pour déterminer les huit inconnues α ; x, y, z ; N ; a, b, c.

302. – Cas où les forces directement appliquées admettent une fonction.
En désignant par mu la fonction dont les dérivées représentent les composantes suivant les axes de la résultante des forces directement appliquées, on a, en désignant par h une constante arbitraire

$$v^2 = 2(u + h)$$

Cette équation peut s'écrire

$$(8) \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2(u + h)$$

Supposons maintenant que les équations de la courbe soient données sous la forme

$$(9) \qquad x = \varphi_1(\alpha) \qquad y = \varphi_2(\alpha) \qquad z = \varphi_3'(\alpha)$$

En remplaçant, dans l'équation (8), (x, y, z) par leurs valeurs (9), on trouve la relation

$$\left[\varphi_1'(\alpha)^2 + \varphi_2'(\alpha)^2 + \varphi_3'(\alpha)^2\right]\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = 2(u+h)$$

d'où l'on déduit pour $\frac{d\alpha}{dt}$ une valeur de la forme

$$\frac{d\alpha}{dt} = \psi(\alpha)$$

et, par suite,

$$t = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\psi(\alpha)}.$$

Cette dernière équation donne t en fonction de α et, inversement, α en fonction de t; les relations (9) donnent ensuite x, y, z en fonction de t.

303 – Pression sur la courbe. – Décomposons la résultante F des forces directement appliquées en deux : l'une F_1, suivant la tangente dans la direction du mouvement, l'autre F_2 dans le plan normal de la courbe. Soit N l'action de la courbe sur le point. Ce point peut être considéré comme libre sous l'action des trois forces F_1, F_2, N. On a d'abord $F_1 = m\frac{dv}{dt}$; ensuite, les forces F_2 et N ont pour résultante la force centripète, dirigée suivant le rayon de courbure de la trajectoire et égale à $\frac{mv^2}{\rho}$. On en conclut le théorème suivant :

La pression exercée par un point matériel sur une courbe fixe est la résultante de la composante normale à la courbe de la force appliquée et de la force centrifuge.

La force centrifuge qui figure dans cet énoncé est, par définition une force égale et opposée à la force centripète. Cette force, qui est appliquée à la courbe, est dirigée suivant la normale principale de la courbe, en sens inverse du rayon de courbure, et son intensité est égale à $\frac{mv^2}{\rho}$.

304. – Lorsque les forces directement appliquées admettent une fonction, la connaissance de cette fonction et de la trajectoire permet de calculer la composante normale de la force F. De plus, le théorème des forces vives donne v^2; on peut donc calculer immédiatement et sans intégration, la pression du point sur la courbe.

IV. – Exemple du mouvement d'un point matériel qui n'est pas libre.

a) – Mouvement sur une surface.

305 – Pendule conique. – Supposons qu'un point matériel pesant soit attaché à l'extrémité d'un fil inextensible et sans masse et que l'autre extrémité de ce fil soit fixe. Le point est en équilibre lorsque le fil est dirigé suivant la verticale; le poids de ce point est alors détruit par la résistance qu'il éprouve de la part du fil. Si l'on écarte le point de sa position d'équilibre en donnant au fil une position oblique et qu'on l'abandonne ensuite à l'action de la pesanteur après lui avoir imprimé une vitesse initiale, il se meut de manière que sa distance à l'extrémité fixe du fil reste constante. Par suite, ce point matériel peut être considéré comme étant assujetti à rester sur la surface d'une sphère ayant pour rayon la longueur du pendule et pour centre son point de suspension. La pression normale du point sur la sphère est alors remplacée par la tension du fil.

306. – Equations différentielles du mouvement. – Rapportons la position du mobile à trois axes rectangulaires passant par le point de suspension et supposons que l'axe des z soit dirigé verticalement dans le sens de la pesanteur. En désignant par N la tension du fil et par l sa longueur, nous aurons les équations

$$(1)\qquad \begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -N\frac{x}{l} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -N\frac{y}{l} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= -N\frac{z}{l} \\ x^2+y^2+z^2 &= l \end{aligned}$$

Ces quatre équations déterminent en fonction de t, les quatre fonctions inconnues x, y, z et N. On peut, en se servant du théorème des aires et du théorème des forces vives, les remplacer par d'autres réduisant le problème à des quadratures.

307.– Intégrale des aires.– La force N est dirigée suivant le rayon et le poids m g du mobile est dirigé suivant la verticale ; la direction de la résultante de ces deux forces rencontre donc constamment l'axe OZ et le théorème des aires a lieu pour le mouvement projeté sur le plan XOY. On a donc l'équation

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c \qquad (2)$$

c désignant une constante arbitraire.

308.– Intégrale des forces vives.– Le travail élémentaire du poids égal à m g dz, est la différentielle de la fonction m g z. Par suite, l'intégrale des forces vives, qui existe comme si le point était libre, donne la relation

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2gz + h \qquad (3)$$

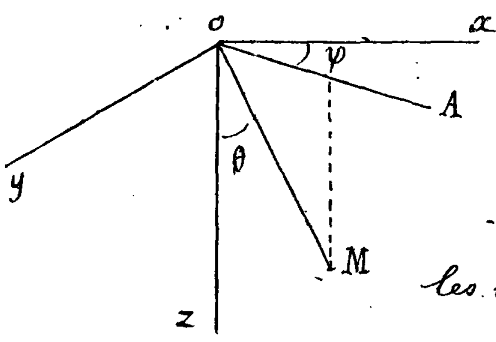
h désignant une constante arbitraire.

309.– Emploi des coordonnées sphériques.– Remplaçons les coordonnées rectangulaires par les coordonnées polaires. Les formules de transformation ont été rappelées précédemment et l'on exprime que le point est assujetti à se mouvoir sur une sphère en attribuant la valeur constante l au rayon vecteur r. On a ainsi

$$(4) \qquad \begin{aligned} x &= l \sin\theta \cos\psi \\ y &= l \sin\theta \sin\psi \\ z &= l \cos\theta \end{aligned}$$

et les variables θ, ψ qui fixent la position du point sur la sphère, s'appellent les coordonnées sphériques de ce point.

En différentiant les formules (4) et portant les valeurs de dx, dy, dz dans les équations (2) et (3) celles-ci deviennent



$$(5) \qquad \begin{aligned} & l^2 \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = c \\ & l^2\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right] = 2gl\cos\theta + C \end{aligned}$$

On peut les écrire en désignant par $\theta_0, \theta_0', \psi_0'$ les valeurs initiales de θ, $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$

$$(6) \qquad \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = \sin^2\theta_0 \psi'_0$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0) + \sin^2\theta_0 \psi_0'^2 + \theta_0'^2$$

et, en éliminant $\frac{d\psi}{dt}$, entre ces deux équations, il vient

$$(6^{bis}) \quad \sin^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)(1-\cos^2\theta) + \sin^2\theta_0 \psi_0'^2(\cos^2\theta_0 - \cos^2\theta) + \theta_0'^2(1-\cos^2\theta)$$

Le second membre est un polynôme du troisième degré en $\cos\theta$ dont les trois racines sont toujours réelles. En effet, si dans ce polynôme, on remplace successivement $\cos\theta$ par

$$-\infty, \quad -1 \quad \cos\theta \quad +1$$

on trouve des résultats dont les signes sont respectivement

$$+ \quad - \quad + \quad -$$

On en conclut l'existence d'une racine négative à valeur absolue plus grande que l'unité, et deux racines comprises entre -1 et $+1$.

$$-K, \quad \cos\theta_1, \quad \cos\theta_2$$

le polynôme peut s'écrire sous la forme

$$\frac{2g}{l}(K+\cos\theta)(\cos\theta - \cos\theta_1)(\cos\theta_2 - \cos\theta).$$

310. – Réduction du problème aux quadratures. – On a par conséquent

$$(7) \qquad dt = \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}(K+\cos\theta)(\cos\theta-\cos\theta_1)(\cos\theta_2-\cos\theta)}}$$

et la première des équations (6) donne ensuite

$$(8) \qquad d\psi = \sin^2\theta_0 \psi'_0 \frac{d\theta}{\sin\theta\sqrt{\frac{2g}{l}(K+\cos\theta)(\cos\theta-\cos\theta_1)(\cos\theta_2-\cos\theta)}}$$

et en intégrant, à partir de l'instant initial

$$(9) \qquad \begin{aligned} t &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}(K+\cos\theta)(\cos\theta-\cos\theta_1)(\cos\theta_2-\cos\theta)}} \\ \psi - \psi_0 &= \sin^2\theta_0\, \psi'_0 \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin\theta\sqrt{\frac{2g}{l}(K+\cos\theta)(\cos\theta-\cos\theta_1)(\cos\theta_2-\cos\theta)}} \end{aligned}$$

Le problème est donc ramené aux quadratures. La relation entre θ et t s'exprime au moyen des fonctions dites elliptiques, dont l'étude est comprise dans le Cours d'Analyse (2e année.)

311. – Il résulte de la première des relations (9) que pour que t soit réel, l'angle θ doit rester compris entre les deux angles θ_1 et θ_2 ; l'extrémité du pendule ne sort pas de la zone horizontale limitée par les deux petits cercles qui répondent à ces deux limites de l'angle θ.

312. – Cas particulier. – Supposons $\theta_2 = \theta_1$; dans ce cas, la valeur commune de ces deux quantités ne peut être que θ_0. On a alors $\theta = \theta_0$ et le polynome doit admettre $\cos\theta_0$ comme racine double ; ce qui exige que l'on ait

$$\theta_0' = 0 \qquad \frac{g}{l} = \psi_0'^2 \cos\theta_0$$

Alors le pendule décrit un cercle horizontal avec une vitesse angulaire constante et égale à la vitesse angulaire initiale ψ_0'.

313. – Il résulte de la première des équations (6) que, si l'on a $\psi_0' = 0$, c'est-à-dire si la vitesse horizontale $\frac{d\psi}{dt}$ est nulle à l'instant initial elle reste nulle pendant tout le mouvement lequel s'effectue alors dans un plan vertical. La formule (6 bis) réduite alors à la suivante

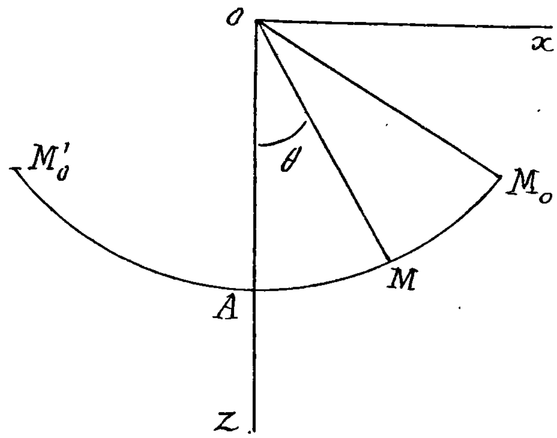
$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0) + \theta_0'^2}}$$

donne les lois du pendule circulaire que nous allons étudier comme exemple de mouvements d'un point assujetti à se mouvoir sur une courbe fixe.

b) Mouvement sur une courbe.

314. – Pendule circulaire dans le vide. – Considérons le pendule simple que nous avons défini. Si l'on écarte le point pesant de sa position d'équilibre A et qu'on l'amène en M_0 et qu'on l'abandonne ensuite à l'action de la pesanteur sans lui

communiquer de vitesse initiale, il se mouvra dans le plan vertical M_0A, sur un arc de cercle ayant le point O pour centre; on peut donc regarder le point matériel M comme étant dans les mêmes conditions que s'il était assujetti à se mouvoir sur un arc de cercle sous l'action d'une force égale à son poids; la pression exercée par le mobile sur la courbe se trouve remplacée par la tension du fil OM.



315. – Intégrale des forces vives. – Rapportons la position du point à deux axes rectangulaires OX, OZ, l'axe OZ étant vertical dans le sens de la pesanteur. Soient z et z_0 les ordonnées des points M et M_0; le théorème des forces vives donne la relation

$$(1) \qquad v^2 = 2g(z - z_0)$$

Cette relation montre que la vitesse, nulle en M_0, redevient nulle au point M'_0 symétrique de M_0 par rapport à OZ. On voit ainsi que le point doit osciller indéfiniment de M_0 en M'_0, de M'_0 en M_0 et ainsi de suite

Toutes ces oscillations sont identiques, il suffit d'étudier l'une d'elles, ou même simplement le mouvement de M_0 en A.

316. – Réduction du problème à une quadrature. – Suivant la théorie générale, l'intégrale des forces vives réduit la détermination du mouvement à une quadrature. Voici comment s'opère cette réduction dans le cas actuel. Soient θ et θ_0 les valeurs de l'angle d'écart à un instant quelconque et à l'instant initial; désignons par l la longueur du pendule et par s l'arc M_0M. On a évidemment.

$$z = l\cos\theta \qquad z_0 = l\cos\theta_0$$

$$s = l(\theta_0 - \theta) \qquad v = \frac{ds}{dt} = -l\frac{d\theta}{dt}$$

Par suite, l'équation (1) devient

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

En extrayant la racine carrée et remarquant que le radical doit être précédé du signe $-$, attendu que θ diminue lorsque t augmente, on trouve

$$(2) \qquad dt = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

et, en intégrant à partir de l'instant initial,

$$t = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

t s'exprime en fonction de θ par une intégrale elliptique.

317 - Cas des petites oscillations. — Supposons θ_0 très petit ; il en résulte que θ est aussi très petit et l'on a sensiblement

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} \qquad \cos\theta_0 = 1 - \frac{\theta_0^2}{2}$$

$$\cos\theta - \cos\theta_0 = \frac{1}{2}(\theta_0^2 - \theta^2).$$

La formule (3) devient alors

$$t = -\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}}$$

et en intégrant,

$$(4) \qquad t = \sqrt{\frac{l}{g}} \arccos\frac{\theta}{\theta_0}.$$

On en déduit

$$(5) \qquad \theta = \theta_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{l}{g}}\right)$$

En supposant $\theta = 0$, l'équation (4) donne $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$ pour la valeur du temps nécessaire pour que le mobile passe de sa position initiale au point A. Donc, la durée de l'oscillation de M_0 en M_0' sera

$$(6) \qquad \tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Cette durée est donc indépendante de l'angle initial d'écart dans l'ordre d'approximation que nous avons admis.

318. — Cas des oscillations quelconques. — Calculons maintenant la durée de l'oscillation quelle que soit la valeur de θ_0. Pour cela dans la formule (3), remplaçons t par $\frac{\tau}{2}$ et θ par zéro, ce qui nous donnera

$$\tau = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

D'après les relations

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} \qquad \sin^2\frac{\theta_0}{2} = \frac{1-\cos\theta_0}{2}$$

cette expression peut s'écrire

$$(7) \qquad \tau = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

$\sin\frac{\theta}{2}$ étant toujours plus petit que $\sin\frac{\theta_0}{2}$, on peut poser

$$(8) \qquad \sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta_0}{2}\sin\varphi$$

φ étant un angle qui a les valeurs $0, \frac{\pi}{2}$ lorsque θ a les valeurs $0, \theta_0$.

En différentiant la relation (8), on trouve

$$d\theta = \frac{2\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\varphi}{\cos\frac{\theta}{2}}\, d\varphi$$

et par suite

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{2\,d\varphi}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2\,d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}}$$

La formule (7) devient ainsi

$$(9) \qquad \tau = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}}$$

319. — On peut représenter cette valeur de τ par une série ; on a en effet en série convergente

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}} = \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi + \frac{1.3}{2.4}\sin^4\frac{\theta_0}{2}\sin^4\varphi + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + \frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n}\sin^{2n}\frac{\theta_0}{2}\sin^{2n}\varphi + \ldots\ldots \end{array} \right\}$$

Si donc on pose pour abréger

$$u_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi . \, d\varphi$$

il viendra

$$\tau = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ \begin{array}{l} u_0 + \frac{1}{2} u_2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{1.3}{2.4} u_4 \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots + \frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n} u_{2n} \sin^{2n} \frac{\theta_0}{2} + \cdots\cdots \end{array} \right\}$$

On a trouvé dans le cours d'Analyse, la formule de récurrence

$$u_{2n} = \frac{2n-1}{2n} u_{2n-2}$$

et, en remarquant que

$$u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

On déduit de cette formule

$$u_{2n} = \frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n} \frac{\pi}{2}$$

Il en résulte pour τ le développement suivant

$$(10) \qquad \tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots + \left(\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n}\right)^2 \sin^{2n} \frac{\theta_0}{2} + \cdots\cdots \end{array} \right\}$$

Lorsque l'angle θ_0 est très petit, on peut réduire la parenthèse à son premier terme, ce qui donne la valeur trouvée précédemment

$$(11) \qquad \tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

On aura une valeur plus approchée en prenant les deux premiers termes, ce qui donne en remplaçant $\sin^2 \frac{\theta_0}{2}$ par $\frac{1}{4}\theta_0^2$,

$$(12) \qquad \tau = \sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

On voit que la durée d'une oscillation entière est un peu augmentée par la grandeur de l'amplitude.

320. Remarque. — On peut étudier le mouvement du pendule simple sans recourir au théorème des forces vives par la considération de la force tangentielle F_1. On a en effet, en général,

$$(13) \qquad m\frac{dv}{dt} = F_1$$

Dans le cas du pendule on a, en conservant les notations du n° 316

$$F_1 = mg\sin\theta \qquad v = -l\frac{d\theta}{dt}$$

L'équation (13) devient donc

$$(14) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

On a ainsi une équation différentielle du second ordre qui se réduit à la suivante

$$(15) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

lorsque l'angle est très petit.

La solution générale de l'équation (15) est

$$\theta = a\cos\left(t\sqrt{\frac{l}{g}} + \alpha\right)$$

a et α étant des constantes arbitraires. Les conditions

$$\theta = \theta_0 \qquad \frac{d\theta}{dt} = 0, \text{ pour } t = 0,$$

donnent $\alpha = 0$ $a = \theta_0$. On retrouve ainsi la solution

$$(16) \qquad \theta = \theta_0\cos\left(t\sqrt{\frac{l}{g}}\right).$$

321. — Mouvement d'un pendule simple dans un milieu résistant.

Supposons la résistance du milieu proportionnelle à la vitesse et représentons son intensité par $2mkv$. Cette force est dirigée suivant la tangente à la trajectoire, en sens inverse du mouvement. On a donc, pour la force tangentielle.

$$F_1 = mg\sin\theta - 2mkv$$

et en ayant égard à la relation $v = -l\frac{d\theta}{dt}$, l'équation du mouvement sera

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2k\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

ou approximativement, si l'angle θ est très petit,

(17) $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2b\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

La solution générale de cette équation est

(18) $$\theta = Pe^{\alpha t} + Qe^{\beta t}$$

P et Q étant deux constantes arbitraires et α, β les racines de l'équation

(19) $$z^2 + 2bz + \frac{g}{l} = 0$$

En effet, on vérifie que chacun des termes $Pe^{\alpha t}$, $Qe^{\beta t}$ est une solution de l'équation (17) et que, cette équation étant linéaire, la somme de ces termes est aussi une solution. Enfin cette dernière solution, renfermant deux arbitraires, est la solution générale.

En résolvant l'équation (19), on a

$$z = -b \pm \sqrt{b^2 - \frac{g}{l}}$$

Supposons la résistance du milieu assez faible, pour que l'on ait $b^2 - \frac{g}{l} < 0$, les racines sont imaginaires et en posant

(20) $$\frac{g}{l} - b^2 = a^2$$

on peut écrire

$$\alpha = -b + ai \qquad \beta = -b - ai$$

En substituant ces valeurs dans l'expression (18), elle devient

(21) $$\theta = e^{-bt}(A\cos at + B\sin at)$$

A et B désignant des constantes arbitraires.

On tire de (21)

(22) $$\frac{d\theta}{dt} = e^{-bt}\left[(aB - bA)\cos at - (bB + aA)\sin at\right]$$

et, des conditions initiales

$$t = 0 \qquad \theta = \theta_0 \qquad \frac{d\theta}{dt} = 0$$

résultent d'après (21) et (22), les valeurs

$$A = \theta_0 \qquad B = \frac{b}{a}\theta_0$$

En portant ces valeurs dans les formules (21) et (22) et en tenant compte de la relation (20), on trouve

(23) $$\theta = \theta_0 e^{-bt} \left[\cos at + \frac{b}{a} \sin at \right]$$

(24) $$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\theta_0 g}{al} e^{-bt} \sin at$$

et ces équations font connaître à un instant quelconque, la position du pendule et sa vitesse angulaire.

322. — A la fin de chaque oscillation on a $\frac{d\theta}{dt} = 0$, ce qui a lieu pour

$$at = n\pi$$

Donc les oscillations sont isochrones comme dans le vide et la durée d'une oscillation entière est

(25) $$\tau = \frac{\pi}{a} \quad \frac{\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} - b^2}}$$

en sorte que cette durée, qui croît avec b, est augmentée par la résistance du milieu.

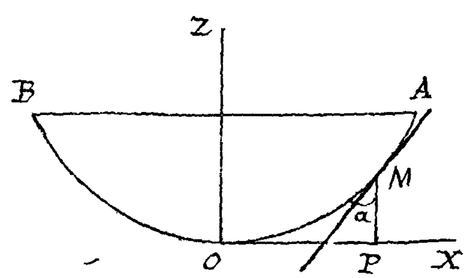
323. — L'amplitude d'une oscillation diminue constamment. Soit α_n l'amplitude de la n^e oscillation à la fin de laquelle on a $at = n\pi$. On aura d'après la formule (24).

(26) $$\alpha_n = \theta_0 e^{-\frac{nb\pi}{a}}$$

ce qui montre que les amplitudes forment une progression géométrique décroissante, dont la raison est

$$e^{-\frac{b\pi}{a}}$$

324. — Mouvement d'un point pesant sur une cycloïde. Rappelons d'abord une propriété géométrique de la cycloïde qu'il est aisé d'établir à l'aide des équations de cette courbe données dans les cours d'Analyse.



Soient OZ l'axe de la cycloïde et OX la tangente au point O.

Si l'on désigne par S l'arc compris entre le point O et un point M quelconque de la courbe,

z l'ordonnée MP du point M,
a le rayon du cercle générateur,
On a la relation

(27) $$S^2 = 8az$$

325. — Cela posé, la cycloïde étant placée comme l'indique la figure, l'axe Cz étant vertical, considérons le mouvement d'un point pesant sur cette courbe. Comptons à partir du point O le chemin S parcouru sur la trajectoire ; en désignant par F_1 la force tangentielle, on a l'équation différentielle

$$m \frac{d^2S}{dt^2} = F_1.$$

Or si l'on appelle α l'angle que la tangente en M fait avec Oz, la projection du poids sur la tangente sera $mg\cos\alpha$ et comme cette projection est en sens inverse des S positifs, on aura

$$F_1 = -mg\cos\alpha = -mg\frac{dz}{ds}$$

et, d'après la relation (27),

$$F_1 = -\frac{mgs}{4a}.$$

Donc l'équation différentielle du mouvement devient

(28) $$\frac{d^2S}{dt^2} + \frac{g}{4a}S = 0$$

Par suite, en posant $l = 4a$, l'équation qui détermine S en fonction de t est exactement la même que celle qui détermine approximativement l'angle d'écart θ d'un pendule circulaire dans le cas des petites oscillations.

Supposons en particulier que le point matériel soit abandonné, sans vitesse initiale, à partir d'une position déterminée, à l'action de la pesanteur, son mouvement se composera d'une série indéfinie d'oscillations et la durée τ d'une de ces oscillations, donnée par la formule

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{4a}{g}}$$

sera rigoureusement indépendante de l'amplitude.

En d'autres termes, quel que soit le point de départ du point pesant qui se meut sur la cycloïde, ce point emploie le même temps pour arriver au point le plus bas ; c'est ce qui a fait donner à la cycloïde le nom de tautochrone.

On voit de plus que la durée des oscillations du pendule cycloïdal est la même que celle des petites oscillations d'un pendule circulaire dont la longueur serait $4a$, longueur qui est précisément celle du rayon de courbure de la cycloïde en son sommet o.

326. — Dans un milieu dont la résistance serait $2mbv$ l'équation du mouvement d'un point pesant assujetti à se mouvoir sur une cycloïde deviendrait

$$(29). \qquad \frac{d^2s}{dt^2} + 2b\frac{ds}{dt} + \frac{g}{4}s = 0.$$

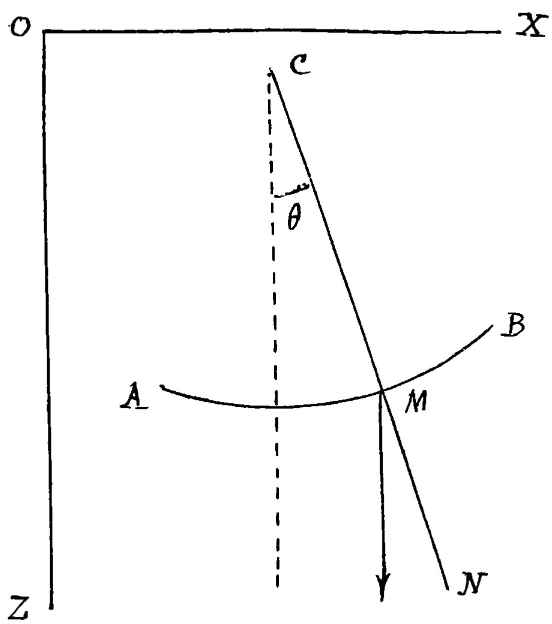
Cette équation a la même forme que celle que nous avons trouvée pour représenter les petites oscillations d'un pendule circulaire dans un milieu résistant. On en conclut que les oscillations d'amplitudes décroissantes restent isochrones comme dans le vide.

327. — Le tautochronisme de la cycloïde dans le vide a été découvert par Huyghens ; Newton a étendu cette propriété au cas du mouvement dans un milieu dont la résistance est proportionnelle à la vitesse.

La cycloïde étant une courbe plane tautochrone, si on enroule son plan sur un cylindre vertical quelconque, de manière que la base de la cycloïde coïncide avec une partie du périmètre de la section droite de ce cylindre, le mouvement d'un point pesant sur la nouvelle courbe sera le même que sur la cycloïde ; la transformée de la cycloïde est donc encore tautochrone et il existe par suite une infinité de courbes à double courbure qui jouissent de la propriété du tautochronisme ; mais Puiseux a démontré que la cycloïde est la seule courbe tautochrone plane.

c) — Exemples du calcul de la pression exercée par un point sur une courbe.

328. — Problème. — Un point pesant est assujetti à se mouvoir sur une courbe dans un plan vertical ; calculer la pression du point sur la courbe.



Soit une courbe AB dans un plan vertical XOZ ; prenons l'axe des z vertical dans le sens de la pesanteur. Un point matériel pesant est assujetti à se mouvoir sur cette courbe ; soit C le centre de courbure de la courbe correspondant à une position quelconque M du mobile.

Désignons par

θ l'angle que la direction CM de la normale à la courbe fait avec OZ,

ρ le rayon de courbure au point M.

Nous savons que la pression sur la courbe est la résultante de la composante normale du poids et de la force centrifuge qui dirigée suivant MN, est égale à $\frac{mv^2}{\rho}$.

Par suite, la pression a pour valeur

$$(1) \qquad P = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{\rho}$$

et elle sera dirigée de M vers N ou de M vers C suivant que l'expression (1) sera positive ou négative.

329.— Soient v_0, z_0 les valeurs initiales de v, z. On a par le théorème des forces vives

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mg(z - z_0)$$

ou bien

$$(2) \qquad v^2 = 2g(b + z)$$

en posant pour abréger,

$$(3) \qquad v_0^2 - 2gz_0 = 2gb.$$

et en portant la valeur (2) de v^2 dans la formule (1) il vient

$$(4) \qquad P = mg\left[\cos\theta + \frac{2(z+b)}{\rho}\right]$$

330.— Si au lieu d'être <u>complètement lié</u> à la courbe le point est <u>seulement posé</u> sur elle, une condition doit être remplie pour que le point ne quitte pas la courbe.

Si le point est placé sur la concavité, il faut que la pression soit dirigée dans le sens MN et l'on doit avoir —

$$\cos\theta + \frac{2(z+h)}{\rho} > 0.$$

Si le point est placé sur la convexité, il faut que la pression soit dirigée dans le sens MN et l'on doit avoir

$$\cos\theta + \frac{2(z+h)}{\rho} < 0.$$

Les points où la pression est nulle sont par suite importants à connaître ; en effet, c'est en ces points que la pression change de sens et que par conséquent le mobile quitte la courbe. Les points dont il s'agit satisfont à la condition

$$\cos\theta + \frac{2(z+h)}{\rho} = 0.$$

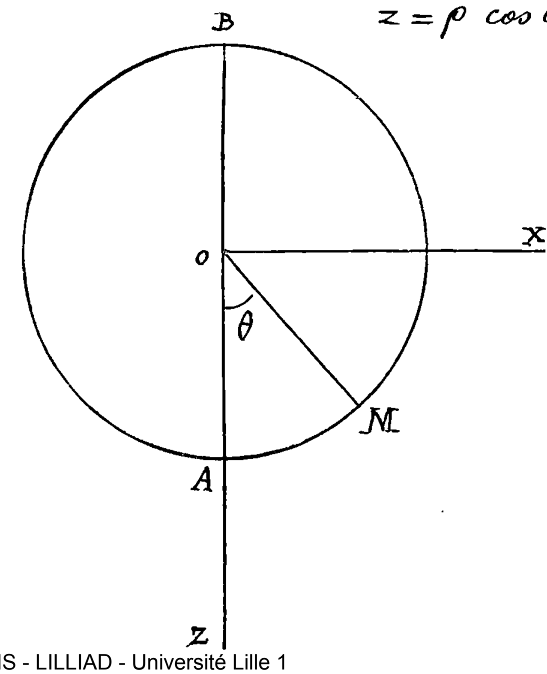
qui exprime l'égalité en grandeur et en direction de la force centripète et de la composante normale du point.

Lorsque le point quitte la courbe, il décrit une parabole qui a avec la courbe un contact du second ordre parcequ'en ce point les deux courbes ont la même tangente et le même rayon de courbure. En effet $\frac{mv^2}{\rho}$, a en ce point la même valeur pour les deux courbes.

Et, comme la valeur de v est la même, celle de ρ doit l'être aussi.

331. Exemple. – Un point matériel pesant placé dans la concavité d'un cercle vertical part d'un point donné avec une vitesse donnée ; trouver les conditions qui doivent être remplies pour que le mobile reste toujours sur la circonférence ou la quitte à un certain moment.

Plaçons l'origine au centre du cercle. En conservant les notations du numéro précédent, on aura



$$z = \rho\cos\theta, \qquad \cos\theta = \frac{z}{\rho}$$

Et, par suite d'après (4)

$$(5) \qquad P = \frac{mg}{\rho}(3z + 2h)$$

On a, de plus, d'après (2)

$$(6) \qquad v^2 = 2g(z+h)$$

Deux cas sont à considérer :

1° $h < 0$. Soit $h = -h'$; les formules (5) et (6) deviennent

$$P = \frac{mg}{\rho}(3z - 2h')$$

$$v^2 = 2g(z - h').$$

Pour que v soit réel, on doit avoir $z > b'$ et on a alors $P > 0$. Donc le mobile ne quitte pas la circonférence et, sa vitesse devenant nulle pour $z = b'$, le mouvement est oscillatoire.

2° $b > 0$. P et v ne peuvent s'annuler que si z est négatif. Soit $z = -z'$; les formules deviennent

$$P = \frac{mg}{\rho}(2b - 3z')$$

$$v^2 = 2g(b - z').$$

Pour que la valeur de P soit positive, on doit avoir $z' < \frac{2}{3} b$ et v^2 est alors positif. Si z' devient égal à $\frac{2}{3} b$, la pression s'annule et le point quitte la circonférence. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'on ait

$$\frac{2}{3} b < \rho \quad \text{ou} \quad b < \frac{3}{2} \rho$$

Si l'on avait au contraire $b > \frac{3}{2} \rho$, P et v ne s'annulent jamais; le mobile ne quitte pas la courbe et parcourt un nombre indéfini de fois la circonférence.

332. — En résumé, on a trois conditions distinctes :

1° $b < 0$ — mouvement oscillatoire indéfini.

2° $0 < b < \frac{3}{2} \rho$ — le point quitte la courbe.

3° $b > \frac{3}{2} \rho$ — mouvement rotatoire indéfini.

La quantité b dont la valeur détermine les particularités du mouvement est, d'après la relation (4) donnée par la formule

$$b = \frac{v_0^2}{2g} - z_0$$

Si l'on suppose, en particulier, que le mobile parte du point le plus bas A, on aura $z_0 = \rho$ et chacun des trois modes de mouvement se présentera, suivant que la valeur de $\frac{v_0^2}{2g}$ sera :

1° inférieure à ρ,

2° comprise entre ρ et $\frac{5}{2} \rho$,

3° supérieure à $\frac{5}{2} \rho$.

V. Force d'inertie.

333. – Définition. – Dans ce qui précède, nous avons considéré le mouvement d'un point matériel comme assujetti à certaines conditions, nous avons supposé, ou bien que sa trajectoire était nécessairement sur une surface donnée, ou bien que cette trajectoire était une courbe donnée.

Allons plus loin et supposons qu'un point A soit obligé par sa liaison avec un corps B de suivre une trajectoire donnée avec des circonstances de mouvement tout à fait indéterminées. Pour fixer les idées, nous pouvons imaginer qu'il s'agisse, par exemple, d'un corps que l'on tient dans la main et auquel on communique, sans l'abandonner, un mouvement arbitraire.

Le corps B, c'est à dire la main dans le cas de l'exemple qui vient d'être indiqué, développe à chaque instant sur le point A une certaine force ou action; d'après la loi de Newton le point A oppose au corps B une réaction égale et contraire à l'action; c'est cette réaction que l'on appelle la force d'inertie.

334. – « Le terme de force d'inertie est d'ailleurs heureusement choisi, car la réaction à laquelle nous donnons ce nom est bien la force qu'un corps exerce sur nous, en vertu de son inertie quand nous cherchons à le faire sortir des lois naturelles qui régissent la matière, c'est à dire quand nous le forçons à suivre une trajectoire courbe ou bien que nous accélérons ou retardons son mouvement rectiligne. »

« Ce sont les réactions de ce genre qui constatent pour nous l'inertie de la matière en mouvement, c'est à dire sa tendance au mouvement rectiligne et uniforme, de même que l'effet exercé sur nos organes par un corps que nous empêchons de tomber nous donne la notion de la pesanteur et de la matière. »
(Bour – Cours de Mécanique)

Détermination de la force d'inertie. – Pour déterminer, à un instant donné, la force d'inertie, nous remarquerons que la force qui agit sur le point A est dirigée suivant la même droite que l'accélération w du mouvement et qu'elle est égale au produit mw de la masse par l'accélération. Cette force représente précisément l'action du corps B qui donne au point A le mouvement obligatoire. Donc la force d'inertie du point A est égale au produit de la masse de ce point par l'accélération de son mouvement, et elle est dirigée en sens contraire de cette accélération.

335. — Si l'on décompose la force d'inertie suivant les trois axes, les composantes seront

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2z}{dt^2}$$

De même, en considérant les deux composantes de l'accélération totale suivant la tangente à la trajectoire et la normale principale, nous pouvons décomposer la force d'inertie en deux :

1° la force d'inertie tangentielle $-m\frac{dv}{dt}$, dirigée en sens inverse du mouvement ou dans le même sens selon que $\frac{dv}{dt}$ est positif ou négatif.

2° la force d'inertie centrifuge $m\frac{v^2}{\rho}$, ainsi nommée parce qu'elle est toujours dirigée en sens inverse de l'accélération centripète ; cette force centrifuge est celle que nous avons déjà trouvée dans le cas d'un point matériel assujetti à se mouvoir sur une surface ou sur une courbe données.

336. — Remarque essentielle. — On ne doit pas oublier que la force d'inertie est une réaction exercée par le mobile sur le corps qui l'oblige à prendre un mouvement déterminé, et qu'en conséquence cette force n'agit pas sur le mobile lui même.

Chapitre V.

Equilibre et mouvement relatifs d'un point matériel.

I – Théorème fondamental.

337. – Nous avons supposé jusqu'à présent, dans la solution des problèmes de Dynamique que le mouvement était rapporté à un système fixe de comparaison. L'obligation qui nous est imposée par suite du mouvement de la Terre dans l'espace, de n'observer que des mouvements relatifs conduit naturellement à étudier les questions à un autre point de vue et à examiner comment se modifie la solution des problèmes de Dynamique quand on rapporte le mouvement à un système mobile de comparaison. Nous supposerons donc que la position d'un point mobile soit rapportée à un système d'axes mobiles OX, OY, OZ dont on connait le mouvement par rapport à un système d'axes fixes $O'X', O'Y', O'Z'$.

338. – Accélération dans le mouvement relatif. – Nous avons vu (n° 156) que l'accélération dans le mouvement absolu s'obtient par la composition de trois accélérations :

1° l'accélération dans le mouvement d'entraînement du mobile, c'est à dire dans le mouvement dont serait animé ce point s'il restait en repos relatif dans la position où il se trouve.

2° l'accélération dans le mouvement du point par rapport aux axes mobiles.

3° une accélération égale à $2\omega v \sin(\omega, v)$ dirigée suivant l'axe des deux directions correspondant à l'axe de la rotation instantanée et à la vitesse relative.

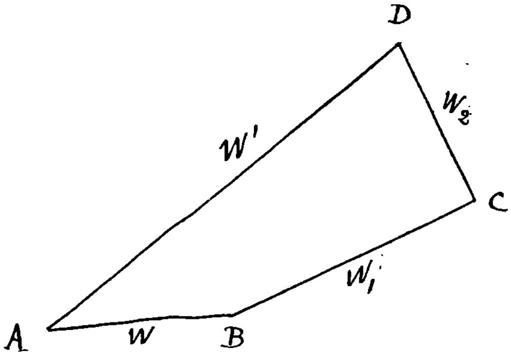
Plus brièvement, l'accélération absolue w' est la résultante :

1° de l'accélération relative w,

2° de l'accélération d'entraînement w_1,

3° de l'accélération complémentaire w_2.

339. — Pour composer ces trois accélérations, menons par un point quelconque A une droite AB égale et parallèle à l'accélération w; par le point B une droite BC égale et parallèle à w_1; enfin par le point C une droite CD égale et parallèle à w_2. La droite AD représente l'accélération w' dans le mouvement absolu.



On voit sur la figure que la droite AB est la résultante des droites AD, DC, CB.

Donc, l'accélération relative w est la résultante
1° de l'accélération absolue w',
2° d'une accélération égale et opposée à l'accélération d'entraînement w_1,
3° d'une accélération égale et opposée à l'accélération complémentaire w_2.

340. — Forces apparentes dans le mouvement relatif. — Supposons que le point dont nous nous occupons soit un point matériel de masse m. La résultante F des forces qui agissent sur lui détermine l'accélération w' de son mouvement absolu; elle a la même direction et le même sens que cette accélération et son intensité est égale à $m w'$.

L'accélération w dans le mouvement relatif étant différente de l'accélération w' dans le mouvement absolu, un observateur qui participe au mouvement des axes mobiles doit voir le point matériel se déplacer comme s'il était soumis à l'action d'une force différente de celle qui agit réellement sur lui; il doit lui sembler que ce point matériel est soumis à l'action d'une force égale à $m w$, ayant la même direction que l'accélération w dans le mouvement relatif.

Mais cette accélération w étant la résultante de w' et de deux accélérations égales et opposées à w_1, w_2, la force $m w$ se trouvera en composant la force $m w'$ dirigée dans le sens de l'accélération w' avec deux forces $m w_1$ et $m w_2$ dirigées en sens inverse des accélérations w_1 et w_2.

Il s'en suit que, pour l'observateur qui ne voit que le mouvement relatif du point matériel, les choses se passent comme si ce point était soumis, non-seulement aux forces qui lui sont réellement appliquées, mais encore aux deux autres forces $m\,w_1$ et $m\,w_2$ dirigées en sens inverse de l'accélération d'entraînement et de l'accélération complémentaire.

Ces deux forces sont ce que l'on appelle les forces apparentes dans le mouvement relatif.

341. — La première des forces apparentes, celle qui a pour valeur $m\,w_1$ et qui est dirigée en sens contraire de l'accélération w_1, est égale et opposée à la force qui serait capable de donner au point matériel un mouvement tel qu'il reste en repos par rapport aux axes mobiles. En se reportant à la définition de la force d'inertie, on voit que la première force apparente est précisément la force d'inertie du point matériel dans son mouvement d'entraînement, c'est à dire dans le mouvement qu'il aurait s'il était invariablement lié aux axes mobiles et entraîné par eux dans le mouvement. Nous l'appellerons force d'inertie d'entraînement.

La seconde des forces apparentes a reçu le nom de force centrifuge composée.

On en conclut ce théorème :

On peut traiter le mouvement relatif d'un point comme un mouvement absolu pourvu que l'on adjoigne aux forces qui le sollicitent réellement la force d'inertie d'entraînement et la force centrifuge composée. (Coriolis)

Le mouvement relatif avait été considéré par Newton dans le cas des planètes, en supposant aux axes mobiles un simple mouvement de translation. Clairaut avait examiné plus tard le mouvement dans un plan, en supposant aux axes mobiles un mouvement quelconque dans ce plan. Mais il avait fait une omission qui a été corrigée par M. Bertrand. Coriolis est le premier qui ait donné l'expression des forces fictives dont l'introduction ramène le mouvement relatif à un mouvement absolu.

342. — Equilibre relatif d'un point matériel. — La théorie des forces apparentes convient en particulier au cas où le point matériel que l'on considère se meut de manière à conserver constamment la même position par rapport aux axes mobiles, c'est à dire au cas où il est en équilibre relatif. Dans ce cas la vitesse relative v étant nulle, la force centrifuge composée $2m\omega v \sin(\omega, v)$ est aussi nulle ; et la force d'inertie d'entraînement est la seule force

apparente qu'on doive joindre aux forces réellement appliquées pour qu'on puisse assimiler l'équilibre relatif à un équilibre absolu.

343. – Cas où le mouvement des axes est une translation. – Considérons en particulier le mouvement d'un point matériel par rapport à des axes animés d'un mouvement de translation dans l'espace. La vitesse angulaire ω qui entre dans l'expression de la force centrifuge composée est égale à zéro ; cette force centrifuge composée est donc nulle et des deux forces apparentes, qu'on doit joindre aux forces réelles pour pouvoir traiter le mouvement relatif comme un mouvement absolu, il ne reste que la force d'inertie d'entraînement.

344. – Théorème des forces vives dans le mouvement relatif. – Tous les théorèmes qui ont été établis pour le mouvement absolu d'un point matériel libre sont applicables au mouvement relatif en tenant compte des deux forces apparentes. Dans le cas du théorème des forces vives, la force centrifuge composée disparaîtra toujours d'elle-même parce que cette force étant toujours dirigée perpendiculairement à la direction de la vitesse relative du mobile, son travail sera toujours nul.

345. – Mouvement relatif d'un point matériel qui n'est pas libre. – Les théorèmes établis pour le mouvement absolu d'un point assujetti à rester sur une surface ou sur une courbe fixe sont également applicables au mouvement relatif d'un point matériel assujetti à rester sur une surface ou sur une courbe à la condition de joindre les forces apparentes aux forces réelles ; mais il faut pour cela que la surface ou la courbe soient fixes relativement aux axes mobiles, c'est à dire qu'elles participent au mouvement de ces axes.

II. – Equations du mouvement et de l'équilibre relatifs d'un point matériel.

346. – Equations du mouvement relatif. – Supposons que le mouvement d'un point matériel dont la masse est m soit

rapporté à un système d'axes rectangulaires OX, OY, OZ mobile dans l'espace. Soient, par rapport à ces axes,

x, y, z les coordonnées du mobile,

X, Y, Z les composantes de la force qui lui est réellement appliquée,

X_1, Y_1, Z_1 les composantes de la force d'inertie d'entrainement,

X_2, Y_2, Z_2 les composantes de la force centrifuge composée.

Les équations du mouvement relatif traité, d'après le théorème de Coriolis, comme un mouvement absolu sont

$$(1) \qquad \begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + X_1 + X_2 \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + Y_1 + Y_2 \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + Z_1 + Z_2 \end{aligned}$$

et pour déterminer le mouvement, il faut intégrer ces équations de manière qu'à l'instant initial les coordonnées x, y, z et les composantes $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ de la vitesse relative aient des valeurs données.

Equations de l'équilibre relatif. – Si le point est en repos relatif, les composantes X_2, Y_2, Z_2 de la force centrifuge composée sont égales à zéro et l'on a les conditions

$$(2) \qquad X + X_1 = 0 \qquad Y + Y_1 = 0 \qquad Z + Z_1 = 0.$$

347. – Composantes de la force d'inertie d'entrainement. – La force d'inertie d'entrainement est égale et opposée à la force qui serait capable de donner au mobile le mouvement qu'il prendrait si, dans la position où il se trouve, il devenait invariablement lié aux axes mobiles. Pour évaluer ses composantes, trois cas sont à considérer.

1° Le mouvement des axes est une translation. – Supposons les axes fixes parallèles aux axes mobiles et désignons par x_0, y_0, z_0 les coordonnées de l'origine mobile par rapport aux axes fixes. L'accélération totale dans le mouvement d'entrainement, a évidemment pour composantes parallèles aux axes.

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}$$

en sorte que les composantes de la force d'inertie du point matériel de masse m, dans ce mouvement d'entraînement sont

$$(3) \qquad X_1 = -m\frac{d^2x_0}{dt^2} \qquad Y_1 = -m\frac{d^2y_0}{dt^2} \qquad Z_1 = -m\frac{d^2z_0}{dt^2}.$$

2° Le mouvement des axes est une rotation autour d'un point fixe.

Nous avons donné en cinématique (n°130) les expressions des composantes de l'accélération d'un point quelconque invariablement lié à un solide tournant autour d'un point fixe. Ces composantes sont estimées suivant trois axes quelconques que nous pouvons faire coïncider avec les axes mobiles OX, OY, OZ à l'instant particulier que l'on considère. Il en résulte que les composantes X_1, Y_1, Z_1 s'obtiendront en multipliant par m les expressions du n°130 prises avec le signe −. Nous aurons ainsi

$$(4) \qquad \begin{aligned} X_1 &= m\omega^2 x - mp(px+qy+rz) - m\left(z\frac{dq}{dt} - y\frac{dr}{dt}\right) \\ Y_1 &= m\omega^2 y - mq(px+qy+rz) - m\left(x\frac{dr}{dt} - z\frac{dp}{dt}\right) \\ Z_1 &= m\omega^2 z - mr(px+qy+rz) - m\left(y\frac{dp}{dt} - x\frac{dq}{dt}\right) \end{aligned}$$

ω désignant la vitesse angulaire instantanée du système des axes mobiles et p, q, r les composantes de cette vitesse suivant ces axes mobiles.

3° Le mouvement des axes est quelconque. — Quel que soit le mouvement du système des axes mobiles, on peut l'amener d'une position déterminée à une position quelconque en donnant d'abord à tout le système une translation identique au mouvement de l'origine O, puis en laissant ce point fixe, et en faisant tourner le système autour de lui jusqu'à ce que ce système vienne dans la position qu'il doit occuper.

L'accélération d'un point quelconque entraîné par le système des axes mobiles est la résultante des accélérations qu'il aurait dans ces deux mouvements successifs.

D'après cela, désignons comme précédemment par $x_0\, y_0\, z_0$ les coordonnées de l'origine mobile ; l'accélération de la translation est le vecteur dont les composantes sur les axes fixes sont $\frac{d^2x_0}{dt^2}, \frac{d^2y_0}{dt^2}, \frac{d^2z_0}{dt^2}$. Si l'on projette ce vecteur sur les axes mobiles, on a trois composantes α, β, γ qu'il suffit d'ajouter à celles de l'accélération dans le mouvement de rotation pour avoir les composantes de l'accélération totale dans le mouvement d'entraînement.

En prenant celles-ci avec le signe $-$ et en les multipliant par m, on a les expressions générales des composantes de la force d'inertie d'entraînement.

$$(5)\quad \begin{aligned} X_1 &= -m\alpha + m\omega^2 x - mp(px+qy+rz) - m\left(z\frac{dq}{dt} - y\frac{dr}{dt}\right) \\ Y_1 &= -m\beta + m\omega^2 y - mq(px+qy+rz) - m\left(x\frac{dr}{dt} - z\frac{dq}{dt}\right) \\ Z_1 &= -m\gamma + m\omega^2 z - mr(px+qy+rz) - m\left(y\frac{dp}{dt} - x\frac{dq}{dt}\right) \end{aligned}$$

348. — Supposons, en particulier, que le mouvement des axes soit une rotation s'effectuant avec une vitesse angulaire constante autour de OZ qui reste fixe. Les formules (4) donnent en y faisant

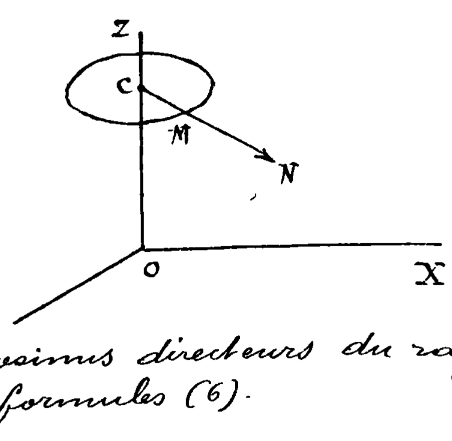
$$p = 0 \quad q = 0 \quad r = \omega$$

les valeurs très simples

$$(6)\qquad X_1 = m\omega^2 x, \quad Y_1 = m\omega^2 y, \quad Z_1 = 0$$

qu'il est aisé d'établir directement.

En effet, le mouvement d'entraînement du point M est alors circulaire et uniforme. La force d'inertie d'entraînement réduite à sa composante normale se confond avec la force centrifuge dirigée suivant le rayon dans le sens MN.



En désignant par v la vitesse et par ρ le rayon, l'intensité de cette force est $\frac{mv^2}{\rho}$, ou bien $m\rho\omega^2$, puisque $v = \rho\omega$.

Pour avoir ses composantes, il suffit de multiplier sa valeur par les cosinus directeurs du rayon qui sont $\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, 0$; on retrouve ainsi les formules (6).

349. — Composantes de la force centrifuge composée. — La force centrifuge composée est égale au produit de la masse m par

l'accélération complémentaire w_2 et la direction est opposée à celle de cette accélération. Or, nous avons évalué (n°15,*) les composantes de l'accélération complémentaire suivant les axes mobiles et en changeant le signe des expressions que nous avons obtenues et en les multipliant par m, nous trouvons pour les composantes de la force centrifuge composée

$$(7) \qquad \begin{aligned} X_2 &= -2m\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right) \\ Y_2 &= -2m\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right) \\ Z_2 &= -2m\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right) \end{aligned}$$

350.– En remplaçant dans les équations (1) :

1° X_1, Y_1, Z_1 pour les valeurs (5)

2° X_2, Y_2, Z_2 pour les valeurs (7)

on a, sous leur forme la plus générale, les équations différentielles du mouvement relatif.

III.– Equilibre et mouvement d'un point à la surface de la Terre.

351.– Un corps qui nous paraît en repos à la surface de la Terre n'est qu'en équilibre relatif puisque la Terre se meut dans l'espace. De même, lorsqu'un corps nous paraît en mouvement, ce mouvement tel que nous le voyons n'est qu'un mouvement relatif. Cherchons les forces apparentes que l'on doit joindre dans ce cas aux forces réelles pour que l'équilibre et le mouvement relatifs dont il s'agit puissent être traités comme un équilibre et un mouvement relatifs.

Le mouvement de la Terre se compose d'une translation autour du Soleil (mouvement annuel) et d'une rotation uniforme autour d'un axe de direction fixe (mouvement diurne).

Nous supposerons d'abord que la Terre n'ait que son mouvement de rotation autour de la ligne des pôles ; nous verrons ultérieurement comment les résultats obtenus dans cette hypothèse doivent être modifiés pour tenir compte du déplacement du centre de la Terre dans l'espace.

352.– La vitesse angulaire de la rotation diurne autour de la Terre figure dans toutes les formules qui suivent. On l'obtient en remarquant que la Terre emploie 86164 secondes (durée du jour sidéral) à faire un tour entier autour de son axe; on a par suite

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 7,29 \times 10^{-5},$$

ce nombre est très-petit et son carré

$$\omega^2 = 5,31 \times 10^{-9}$$

est tel que son produit par une quantité de l'ordre de celles que l'on rencontre dans les problèmes terrestres est toujours une quantité assez petite dont on peut, en général, négliger le carré.

Par exemple, le produit de ω^2 par le rayon terrestre est

$$\omega^2 R = 3.385 \times 10^{-2}$$

et le carré de ce nombre

$$\omega^4 R^2 = 1.146 \times 10^{-3}$$

sera, en général, négligeable.

353.– Définition de la pesanteur.– Tout point matériel, à la surface de la Terre est sollicité par une force appelée pesanteur.

La direction de la pesanteur, en un lieu déterminé est ce que l'on appelle la verticale de ce lieu et un plan est dit horizontal quand il est perpendiculaire à la verticale.

La direction d'un pendule simple en équilibre donne la verticale et le poids d'un point matériel est la pression que ce point exerce sur un plan horizontal où il est en équilibre.

354.– La cause principale de la pesanteur est l'attraction que la matière éprouve de la part de la Terre en vertu de la gravitation universelle. Si la Terre était immobile, la force de la pesanteur se confondrait avec cette attraction et par suite, en considérant la Terre comme sphérique et homogène, le poids d'un point matériel de masse m aurait une même valeur $m\alpha$ en tous les points de la surface terrestre et sa direction coïnciderait, en un point quelconque, avec celle du rayon terrestre qui aboutit à ce point. Mais il cessera d'en être ainsi si la Terre est animée d'un mouvement de rotation autour de la ligne des pôles.

En effet, lorsqu'un point est en repos sur un plan horizontal, il y a équilibre entre

1° l'attraction terrestre,

2° l'action du plan sur le point,

3° la force d'inertie d'entraînement qui, dans le cas d'une rotation uniforme se réduit à la force centrifuge.

Donc la réaction du point sur le plan, c'est à dire le poids de ce point est la résultante de l'attraction terrestre de la force centrifuge.

355. — Intensité et direction de la pesanteur. — Considérons la Terre comme sphérique et homogène; soient

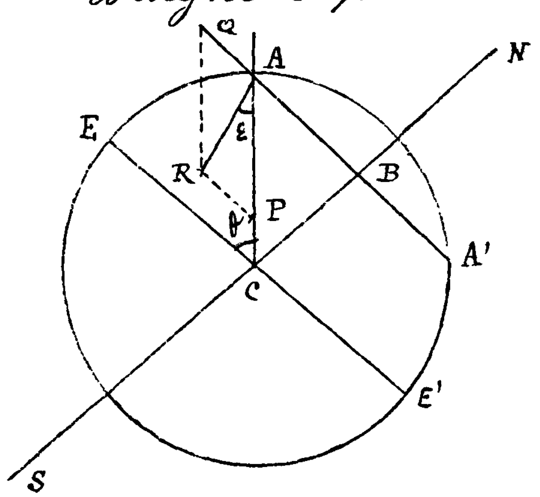
C le centre de la Terre,

A un point quelconque de sa surface,

SN la ligne des pôles,

EE' l'équateur

Désignons par



R le rayon terrestre,

θ l'angle que le rayon mené du centre au point A fait avec l'équateur

Représentons par AP et AQ l'attraction terrestre et la force centrifuge.

L'attraction terrestre est dirigée dans le sens AC, suivant le rayon de la sphère terrestre; soit mG son intensité. La force centrifuge est dirigée dans le sens AQ, suivant le rayon AB du petit cercle décrit par le point A dans la rotation diurne de la Terre, son intensité est $m\omega^2 R\cos\theta$.

La pesanteur est représentée par la résultante AR de AP et de AQ; soit mg son intensité.

Dans le triangle APR, on connait deux côtés $PA = mG$, $PR = m\omega^2 R\cos\theta$ et l'angle compris entre ces deux côtés $APR = \theta$. On peut donc calculer le côté AR et l'angle RAP, c'est à dire l'intensité mg de la pesanteur et l'angle ε compris entre la direction de la pesanteur et la direction du rayon mené du centre de la Terre au point A.

On trouve ainsi

$$(8)\qquad g = \sqrt{G^2 - 2\,G\,\omega^2 R \cos^2\theta + \omega^4 R^2 \cos^2\theta}$$

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin\theta} = \frac{\omega^2 R \cos\theta}{g}.$$

En négligeant le carré et les puissances supérieures de $\omega^2 R$, ces formules se réduisent aux suivantes :

$$(9)\qquad g = G - \omega^2 R \cos^2\theta$$

$$\sin \varepsilon = \frac{\omega^2 R \sin 2\theta}{2g}$$

356. — A l'équateur, la force centrifuge est directement opposée à l'attraction du globe terrestre et on a rigoureusement

$$(10)\qquad g = G - \omega^2 R$$

D'ailleurs, l'observation du pendule donne à l'équateur

$$g = 9^{m},7807$$

On a enfin :

$$\omega^2 R = 0,0338$$

Par suite la relation (10) donne

$$G = 9,8145$$

et comme on a, à très peu près, $\frac{\omega^2 R}{G} = \frac{1}{289} = \frac{1}{17^2}$, on peut écrire

$$g = G\left(1 - \frac{1}{17^2}\right).$$

On en conclut que si la Terre tournait dix sept fois plus vite, la pesanteur serait nulle à l'équateur. Pour une vitesse plus grande, la force centrifuge l'emporterait sur l'attraction terrestre, les corps situés à l'équateur seraient lancés hors de la Terre.

L'influence de la force centrifuge, signalée pour la première fois par Huyghens, est la cause la plus importante de la variation que la pesanteur éprouve à la surface de la Terre.

Une autre cause, dont Clairaut a calculé exactement l'effet, est l'aplatissement de la Terre aux pôles.

b). Mouvement apparent d'un point matériel libre.

357. – Equations différentielles du mouvement. Considérons le mouvement d'un point rapporté à un système d'axes entraîné par la rotation de la Terre.

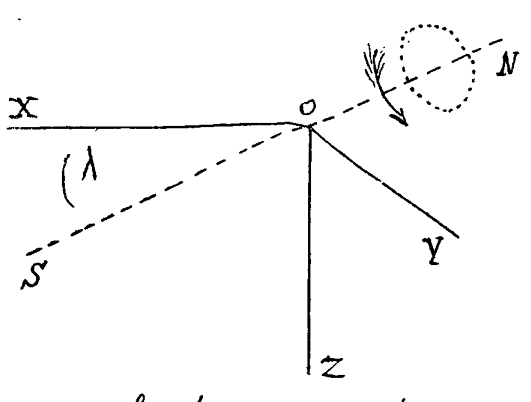
Ce mouvement peut être traité comme absolu à la condition d'adjoindre aux forces réelles les forces apparentes ; on aura donc à composer

1° les forces, autres que l'attraction terrestre, qui agissent réellement sur le point ; soit F leur résultante,
2° l'attraction terrestre,
3° la force centrifuge,
4° la force centrifuge composée.

Mais l'attraction terrestre et la force centrifuge ont pour résultante la pesanteur ; donc le mouvement apparent du point est dû à la résultante de la force F, de la pesanteur et de la force centrifuge composée.

358. – En un lieu de la Terre situé, pour fixer les idées, dans l'hémisphère boréal, soit O l'origine, fixe par rapport au globe, d'un système de coordonnées rectangulaires. Prenons

OZ dirigé suivant la verticale du point O, dans le sens de la pesanteur,
OX horizontal dans le plan méridien vers le sud,
OY horizontal perpendiculaire au plan méridien vers l'Est.



Soit NOS la parallèle menée par O à l'axe de rotation de la Terre. Cette rotation ayant lieu de l'ouest à l'Est, c'est à dire de droite à gauche pour un observateur ayant les pieds en O et la tête en N, c'est dans le sens OS opposé à N que devra être porté, suivant la convention habituelle, l'axe représentatif de la rotation.

Si donc on désigne par λ la latitude du point O ou complément de l'angle ZOS que fait l'axe de la rotation terrestre avec la verticale de ce point, on aura pour les composantes de la rotation suivant les trois axes

$$p = \omega \cos \lambda \qquad q = 0 \qquad r = \omega \sin \lambda$$

Le point mobile étant supposé ne jamais s'écarter beaucoup de l'origine o, il sera permis de regarder la pesanteur comme constante d'intensité et parallèle à oz dans toute l'étendue de la trajectoire. Les composantes de la pesanteur seront donc o, o, mg.

Enfin, en remplaçant dans les formules (7) (n° 349) $p\ q.\ r$ par leurs valeurs, on a, pour les composantes de la force centrifuge composée

$$X_2 = 2m\,\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt}$$

$$Y_2 = 2m\,\omega\left(\cos\lambda \frac{dz}{dt} - \sin\lambda \frac{dx}{dt}\right)$$

$$Z_2 = -2m\,\omega \cos\lambda \frac{dy}{dt}.$$

Par suite, si l'on appelle X, Y, Z les composantes de la force F, les équations différentielles du mouvement seront

$$(10)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{X}{m} + 2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{Y}{m} + 2\omega\left(\cos\lambda \frac{dz}{dt} - \sin\lambda \frac{dx}{dt}\right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{Z}{m} + g - 2\omega \cos\lambda \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

et le problème est ramené à trouver des solutions de ces équations telles que, pour $t=0$, les coordonnées x, y, z et les composantes $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ de la vitesse relative aient des valeurs données.

359. — Mouvement apparent des projectiles dans le vide. — Supposons que, la pesanteur agissant seule sur le point, les forces X, Y, Z se réduisent à zéro. Plaçons l'origine à la position initiale du mobile, de telle manière que $x\ y, z$ soient nuls pour $t=0$, et désignons par a, b, c les composantes initiales de la vitesse relative. Les équations (10) se réduisent aux suivantes (1)

$$(11)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= 2\omega\left(\cos\lambda \frac{dz}{dt} - \sin\lambda \frac{dx}{dt}\right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -2\omega \cos\lambda \frac{dy}{dt} + g \end{aligned}$$

---

(1) Ces équations ont été données par Poisson (Journal de l'École Polytechnique XXVI^e cahier, page 21).

et on en déduit pour une première intégration

$$(12)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2\omega \sin\lambda . y + a \\ \frac{dy}{dt} &= 2\omega (\cos\lambda . z - \sin\lambda . x) + b \\ \frac{dz}{dt} &= -2\omega \cos\lambda . y + gt + c \end{aligned}$$

Les équations (11) sont du premier ordre et il serait facile de les intégrer rigoureusement ; mais le calcul suivant donne une approximation suffisante.

Dans les seconds membres des équations (11) remplaçons $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ par leurs valeurs (12) en négligeant les termes en ω^2; il vient :

$$(13)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 2\omega b \sin\lambda \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= 2\omega (c\cos\lambda - a\sin\lambda) + 2\omega\cos\lambda . gt \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -2\omega b\cos\lambda + g \end{aligned}$$

et on tire de ces relations en intégrant deux fois

$$(14)\qquad \begin{aligned} x &= at + \omega \sin\lambda . bt^2 \\ y &= bt + \omega(c\cos\lambda - a\sin\lambda)\, t^2 + \frac{1}{3}\omega\cos\lambda . gt^3 \\ z &= ct - \omega\cos\lambda . bt^2 + \frac{gt^2}{2} . \end{aligned}$$

360. — Ces équations conduisent à des conséquences fort intéressantes que nous n'indiquerons pas ici, nous bornant à examiner le cas où le point est abandonné sans vitesse initiale à l'action de la pesanteur. Les composantes a. b. c se réduisent alors à zéro et les formules (14) deviennent

$$(15)\qquad x = 0 \qquad y = \frac{1}{3}\omega\cos\lambda . gt^3 \qquad z = \frac{1}{2}gt^2$$

Ces équations montrent que si l'on abandonne un point matériel sans vitesse initiale à l'action de la pesanteur, le mobile restera dans un plan perpendiculaire au méridien, en déviant de la verticale vers l'Est d'une petite quantité ; sa projection sur la verticale aura le même mouvement que si la Terre était immobile.

La trajectoire du mobile dans le plan YOZ est une parabole cubique ayant pour équation

$$y = \frac{2\sqrt{2}\,\omega \cos\lambda}{3\sqrt{g}} \cdot z^{\frac{3}{2}}.$$

elle est tangente à la verticale au point de départ.

361. — Cette expression de y permet de calculer la déviation correspondant à une hauteur de chute donnée. Dans une expérience faite par M. Reich dans un puits de mine à Freiberg, la hauteur de chute étant de 158^m5 et la latitude de 51°. En introduisant ces données dans la formule ainsi que les valeurs de g et ω, on trouve $0^m{,}0276$ pour la déviation; l'expérience repétée un grand nombre de fois, a donné pour cette déviation, en moyenne, $0^m{,}0283$ qui diffère à peine du résultat fourni par la théorie.

c) — Pendule Foucault

362. — Equations différentielles du mouvement apparent d'un pendule simple. — Comme deuxième exemple, étudions le mouvement apparent d'un pendule simple ou, ce qui revient au même, le mouvement d'un point pesant sur une surface sphérique de rayon l invariablement liée à la Terre.

Soit N la tension du fil ou l'action normale de la surface sphérique sur le point ; le point mobile n'étant soumis qu'à l'action de la pesanteur et de la force N, il suffira d'ajouter aux composantes de la pesanteur, dans les équations du problème précédent, les composantes de la force N. L'origine O étant au point de suspension du fil et les directions des axes étant choisies comme précédemment, les composantes de l'action du fil divisées par la masse du mobile sont

$$-\frac{N}{m}\frac{x}{l}, \quad -\frac{N}{m}\frac{y}{l}, \quad -\frac{N}{m}\frac{z}{l}.$$

et en introduisant ces valeurs dans les seconds membres des équations (11), il vient

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{N}{m}\frac{x}{l} + 2\omega\sin\lambda\,\frac{dy}{dt}\\
(17)\qquad &\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{N}{m}\frac{y}{l} + 2\omega\left(\cos\lambda\,\frac{dz}{dt} - \sin\lambda\,\frac{dx}{dt}\right)\\
&\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{N}{m}\frac{z}{l} + g - 2\omega\cos\lambda\,\frac{dy}{dt}
\end{aligned}$$

Ces équations jointes à la relation

$$(18) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2$$

déterminent x, y, z en fonction de t et font connaître le mouvement du pendule.

363. — Petites oscillations. — Nous nous bornerons ici au cas où le pendule s'écartant toujours très-peu de la verticale, on regarde les rapports $\frac{x}{\ell}$, $\frac{y}{\ell}$, comme des quantités du premier ordre dont on néglige les carrés et les produits par ω. Nous aurons dans cet ordre d'approximation

$$\frac{z}{\ell} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{\ell^2} - \frac{y^2}{\ell^2}} = 1, \quad z = \ell, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

la troisième équation (17) donne alors

$$-\frac{N}{m} = 2\,\omega \cos\lambda \,\frac{dy}{dt} - g$$

et en substituant dans la première et la seconde des équations (17) toujours dans le même ordre d'approximation,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\,x + 2\,\omega \sin\lambda \,\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\,y + 2\,\omega \sin\lambda \,\frac{dx}{dt}$$

Si donc on pose

$$(19) \qquad \omega \sin\lambda = r \qquad \frac{g}{\ell} = a^2$$

On a les deux équations

$$(20) \qquad \begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} - 2r\,\frac{dy}{dt} + a^2x = 0 \\ &\frac{d^2y}{dt^2} + 2r\,\frac{dx}{dt} + a^2y = 0 \end{aligned}$$

Ces équations suffisent pour déterminer le mouvement de la projection M' du point M sur le plan horizontal XOY.

364. — Intégration. — (1) Pour intégrer les équations (20), nous les ajouterons après avoir multiplié la seconde par $i = \sqrt{-1}$ et

(1) P. Gilbert. — Cours de Mécanique analytique — partie élémentaire, p. 342.

en posant $u = x + yi$, nous aurons pour déterminer u l'équation différentielle du second ordre

$$(21) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} + 2ri\frac{du}{dt} + a^2u = 0$$

Cette équation est analogue à celle qui s'est présentée dans l'étude du mouvement d'un pendule simple dans un milieu résistant ; sa solution générale est

$$(22) \qquad u = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}$$

A et B étant des constantes et α, β les racines de l'équation

$$(23) \qquad X^2 + 2riX + a^2 = 0$$

On tire de l'équation (23)

$$X = ri \pm \sqrt{-r^2 - a^2}$$

et, en négligeant r^2 par rapport à a^2, les deux racines sont

$$\alpha = (a-r)i \qquad \beta = -(a+r)i$$

On a par suite

$$u = Ae^{(a-r)ti} + Be^{-(a+r)ti}$$

Les constantes A et B se déterminent par les données initiales ; soit $u_0 = x_0 + y_0 i$ la valeur initiale de u et supposons que la vitesse initiale soit nulle ; on a les deux équations

$$A + B = u_0$$

$$A(a-r) - B(a+r) = 0$$

que l'on peut écrire :

$$(23 \text{ bis}) \qquad \frac{A}{a+r} = \frac{B}{a-r} = \frac{u_0}{2a}$$

On en déduit les valeurs de A, B et en posant

$$u_0 = x_0 + y_0 i = \rho_0 e^{\varphi_0 i}$$

l'expression (22) donne

$$(24) \qquad x + yi = \rho_0 e^{(\varphi_0 - rt)i}\left(\cos at + \frac{ri}{a}\sin at\right)$$

En séparant, dans cette relation, les parties réelles et imaginaires, on obtient x et y en fonction de t : la solution du problème est donc complète. On peut donner à cette solution une interprétation remarquable

365.— Posons encore

$$(25) \qquad \psi_0 - rt = \alpha$$

$$(26) \qquad x' = \rho_0 \cos at \qquad y' = \rho_0 \frac{r}{a} \sin at$$

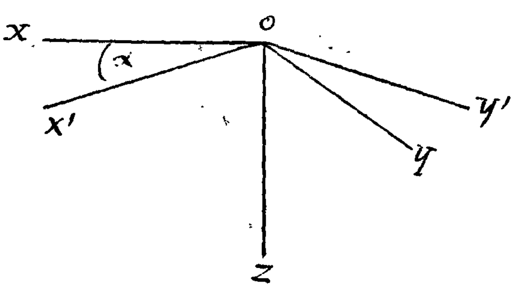
la relation (24) devient

$$x + yi = e^{\alpha i}(x' + y'i)$$

d'où

$$(27) \qquad \begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned}$$

Ces équations montrent que x', y' sont les coordonnées du point M' par rapport à un système d'axes $X'OY'$ faisant avec le système primitif XOY un angle α dans le sens de OX vers OY. La relation $\alpha = \psi_0 - rt$ montre que ce système $X'OY'$ tourne autour de la verticale OZ avec une vitesse angulaire $r = \omega \sin\lambda$, dans le sens de OY vers OX, c'est à dire en allant de l'Est vers le sud.



Les valeurs (26) de x' y' en fonction de t déterminent le mouvement de la projection M' par rapport au système de comparaison $X'OY'$. Ce mouvement est périodique, la durée de la période étant

$$\tau = \frac{2\pi}{a} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

est précisément la même que celle de l'oscillation complète du pendule simple de longueur l dans le plan vertical.

L'équation de la trajectoire du point M' par rapport à $X'OY'$ s'obtient par l'élimination de t entre les équations (26) ; cette trajectoire est une ellipse dont les demi axes, dirigés suivant OX' et OY' sont respectivement égaux à ρ_0, $\rho_0 \frac{r}{a}$. Le second est très petit par rapport au premier à cause de la petitesse du rapport $\frac{r}{a}$.

306. — En résumé, on conclut de ce qui précède que dans le mouvement apparent du pendule à la surface de la Terre, la projection horizontale du point pesant décrit une ellipse mobile très allongée dont le grand axe tourne autour de la verticale du point de suspension, en allant de l'Est vers le Sud dans l'hémisphère boréal, avec une vitesse angulaire constante, égale à celle de la rotation terrestre multipliée par le sinus de la latitude du lieu d'observation.

L'ellipse que décrit le point M' étant très allongée dans le sens de l'axe OX', ce point ne semble guère s'écarter de l'axe et le pendule paraît décrire un plan mobile qui tourne autour de la verticale du point de suspension avec la vitesse angulaire $\omega \sin \lambda$.

C'est ce phénomène de la déviation continue du plan d'oscillation du pendule libre que Foucault a mise en évidence au Panthéon.

« Un fil d'acier d'environ 64 mètres de longueur, était solidement encastré par son extrémité supérieure, dans une plaque métallique fixée au centre de la coupole du Panthéon et supportait une boule de cuivre d'un poids assez fort, attaché à son extrémité inférieure. Lorsque le pendule ainsi formé était mis en mouvement, il effectuait ses oscillations avec beaucoup de lenteur; la durée de chacune d'elles était d'environ 8 secondes. Afin de rendre plus sensible le mouvement de rotation du plan d'oscillation autour de la verticale, on disposait deux petits monticules de sable fin allongés chacun suivant une direction perpendiculaire au plan vertical dans lequel le pendule commençait à osciller, et situés l'un d'un côté, l'autre de l'autre côté de ce plan. Une pointe fixée au dessous de la boule du pendule, venait à chaque oscillation rencontrer ces deux monticules de sable, et les entamait ainsi peu à peu, à mesure que le plan d'oscillation tournait. »

« Il était important que le pendule fût mis en mouvement avec toutes les précautions possibles, pour qu'il commençât sa première oscillation sans avoir la moindre vitesse initiale; pour cela on dérangeait le pendule de sa position naturelle d'équilibre, et après lui avoir donné l'écartement nécessaire, en raison de l'amplitude que l'on voulait avoir pour les oscillations, on le maintenait immobile dans cette position au moyen d'un fil attaché à quelque objet fixe; puis lorsqu'on voyait que la boule était bien en repos dans cette position particulière, on brulait le fil et le fil partait aussitôt en laissant tomber immédiatement la portion du fil qui entourait la boucle. »

« L'expérience de M. Foucault a été repétée dans un grand nombre de lieux, et partout elle a bien réussi. Les oscillations ne se conservaient pas assez longtemps pour que le plan d'oscillation pût faire un tour entier autour de la verticale menée par le point de suspension du pendule ; mais il suffisait de mesurer l'angle dont ce plan tournait dans un temps quelconque, pour reconnaître que la vitesse de ce mouvement de rotation, vitesse qui varie d'un lieu à un autre, était bien d'accord avec les considérations théoriques que nous venons de développer. » (Delaunay. Cours élémentaire d'astronomie. —

Livre III.

Equilibre des systèmes matériels.

Chapitre Ier.

Théorie des centres de gravité.

I. _ Définition du centre de gravité d'un système de points matériels.

367. _ Moment d'inertie polaire. _ On appelle moment d'inertie polaire d'un système de points matériels par rapport à un centre fixe ou pôle la somme des produits obtenus en multipliant la masse de chaque point par le carré de sa distance au pôle.

Ainsi, m désignant la masse d'un point m du système et r sa distance au pôle P, $\Sigma m r^2$ sera le moment d'inertie polaire du système par rapport au point P.

368. _ Moment minimum. _ Etant donné un système de points matériels, il existe un pôle par rapport auquel le moment d'inertie du système est un minimum.

Soient en effet

x, y, z les coordonnées angulaires d'un point quelconque du système,

a, b, c les coordonnées du pôle P.

Le moment d'inertie du système par rapport au point P a pour expression

$$u = \Sigma m\left[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2\right].$$

Si a, b, c reçoivent les accroissements h, K, l, on a pour l'accroissement correspondant de u

$$\Delta u = 2h\Sigma m(a-x)+2K\Sigma m(b-y)+2l\Sigma m(c-z)+\Sigma m(h^2+K^2+l^2).$$

et cet accroissement est positif quels que soient h, k, l si l'on détermine a, b, c par les conditions

$$(1) \qquad \Sigma m(a-x)=0 \quad \Sigma m(b-y)=0 \quad \Sigma m(c-z)=0$$

Le moment d'inertie relatif au pôle que déterminent ces conditions est donc un minimum.

369. – Centre de gravité. – Le pôle du moment d'inertie minimum s'appelle centre de gravité. D'après les relations (1) les coordonnées a, b, c de ce point sont données, en fonction des masses et des coordonnées des points du système, par les formules

$$(2) \qquad a = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m} \quad b = \frac{\Sigma my}{\Sigma m} \quad c = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m}$$

En désignant par M la masse du système, ou somme des masses des points qui composent ce système, les formules précédentes peuvent aussi s'écrire

$$(3) \qquad Ma = \Sigma mx \quad Mb = \Sigma my \quad Mc = \Sigma mz.$$

370. – Centres de gravité de deux systèmes dont on connait les centres de gravité respectifs. – Supposons que l'on connaisse les centres de gravité G_1, G_2 de deux systèmes matériels dont les masses sont M_1 et M_2 et que l'on veuille déterminer le centre de gravité G de la masse totale $M = M_1 + M_2$.

Désignons par les indices 1 et 2 les lettres se rapportant à un point du premier ou du second système; les coordonnées de G_1, G_2 sont données par les relations

$$M_1 a_1 = \Sigma m_1 x_1 \qquad M_1 b_1 = \Sigma m_1 y_1 \qquad M_1 c_1 = \Sigma m_1 z_1$$
$$M_2 a_2 = \Sigma m_2 x_2 \qquad M_2 b_2 = \Sigma m_2 y_2 \qquad M_2 c_2 = \Sigma m_2 z_2$$

et les relations (3) relatives au centre de gravité G du système tout entier peuvent s'écrire

$$(4) \qquad \begin{aligned} (M_1+M_2)\, a &= M_1 a_1 + M_2 a_2 \\ (M_1+M_2)\, b &= M_1 b_1 + M_2 b_2 \\ (M_1+M_2)\, c &= M_1 c_1 + M_2 c_2 \end{aligned}$$

Si l'on prend la droite $G_1 G_2$ pour axe des x, on a

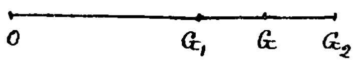
$$b_1 = 0, \quad c_1 = 0 \; ; \quad b_2 = 0, \quad c_2 = 0$$

Les équations (4) donnent alors

$$b = 0 \qquad c = 0$$

$$(a_2 - a) M_2 = (a - a_1) M_1$$

On en conclut que le centre de gravité G du système total est sur la droite $G_1 G_2$ joignant les centres de gravité des systèmes partiels, et que ses distances aux centres de gravité $G_1 G_2$ sont en raison inverse des masses $M_1 M_2$ des systèmes matériels correspondants.



II. – Détermination du centre de gravité d'un système continu de points matériels.

371. – Considérons un système de points matériels infiniment rapprochés, ce système formera un espace matériel, une surface matérielle ou une ligne matérielle suivant qu'il présentera trois, deux ou une dimensions. La recherche du centre de gravité d'un tel système se ramène, comme on va le voir à des quadratures.

2) Espaces matériels.

372. – Densité ou masse spécifique. – Soit un espace matériel dont le volume est v et dont la masse est M. Considérons un point P de cet espace ; soient dv un volume infiniment petit renfermant le point P et dM la masse comprise dans ce volume.

Le rapport

$$\frac{dM}{dv}$$

est la densité moyenne relative au volume dv et si l'on fait decroître indefiniment ce volume sans qu'il cesse de renfermer le point P, ce rapport convergera vers une limite fixe. Cette limite est ce que l'on appelle la densité ou masse spécifique du point P.

En désignant la densité par ρ on peut écrire pour un élément infiniment petit du système, suivant les règles ordinaires du calcul infinitésimal,

$$(5) \qquad \frac{dM}{dv} = \rho \quad \text{ou} \quad dM = \rho \, dv.$$

373.– Dimensions de la densité. – La densité, telle qu'on vient de la définir, est une nouvelle quantité dérivée; c'est le rapport d'une masse à un volume. En remarquant que les dimensions de la masse et du volume sont respectivement données par les symboles

$$L^{-1}T^2F \text{ et } L^3$$

on voit immédiatement que les dimensions de la densité ou masse spécifique relative à un espace matériel répondent à la formule

$$L^{-4}T^2F.$$

374.– Systèmes homogènes et hétérogènes. – Un espace matériel est dit homogène lorsque la densité relative à un point quelconque de cet espace est la même quel que soit le point; lorsque la densité varie d'un point à un autre de l'espace, le système est dit hétérogène.

375.– Coordonnées du centre de gravité. – Décomposons en éléments infiniment petits l'espace matériel considéré. Désignons par

x, y, z les coordonnées d'un point du système,

ρ la densité en ce point,

dv, dM le volume et la masse d'un élément renfermant le point P.

Les coordonnées du centre de gravité sont données par les formules (2) du n° 369 lesquelles peuvent s'écrire dans le cas actuel

$$a = \frac{\int x\,dM}{\int dM} \qquad b = \frac{\int y\,dM}{\int dM} \qquad c = \frac{\int z\,dM}{\int dM}$$

ou bien, puisque $dM = \rho\,dv$

$$(6) \qquad a = \frac{\int \rho x\,dv}{\int \rho\,dv} \qquad b = \frac{\int \rho y\,dv}{\int \rho\,dv} \qquad c = \frac{\int \rho z\,dv}{\int \rho\,dv}$$

376.– Si le système est rapporté à un système de coordonnées rectilignes ou curvilignes, on prendra pour dv le volume infiniment petit compris entre 6 surfaces coordonnées infiniment voisines deux à deux et le calcul de coordonnées se ramènera à des intégrales triples.

En particulier, dans un système de coordonnées rectangulaires, le volume dv sera le parallélipipède $dx\,dy\,dz$ et la masse M se calculant par la formule

$$(7) \qquad M = \iiint \rho\, dx\, dy\, dz$$

on aura, pour déterminer les coordonnées du centre de gravité, les trois relations

$$(8) \qquad \begin{aligned} Ma &= \iiint \rho x\, dx\, dy\, dz \\ Mb &= \iiint \rho y\, dx\, dy\, dz \\ Mc &= \iiint \rho z\, dx\, dy\, dz \end{aligned}$$

377.– Centre de gravité d'un volume.– Lorsque le système matériel est homogène, ρ est constant et disparaît dans les formules (6). Ces formules réduites alors aux suivantes

$$(9) \qquad a = \frac{\int x\, dv}{v} \qquad b = \frac{\int y\, dv}{v} \qquad c = \frac{\int z\, dv}{v}$$

donnent ce que l'on appelle le centre de gravité du volume v.

b) – Surfaces matérielles.

378.– Densité superficielle.– On considère fréquemment le centre de gravité d'une surface; pour cela, on conçoit que l'on ait distribué une certaine masse sur toute la surface dont il s'agit. La densité superficielle en un point M de la surface est le rapport de la masse d'un élément superficiel infiniment petit à l'aire de cet élément.

379.– Coordonnées du centre de gravité.– Désignons par

x, y, z les coordonnées d'un point P de la surface,

σ la densité en ce point,

$d\omega$ l'aire d'un élément superficiel renfermant le point P.

Les coordonnées du centre de gravité sont données par les formules

$$(9) \qquad a = \frac{\int \sigma x \, d\omega}{\int \sigma \, d\omega} \qquad b = \frac{\int \sigma y \, d\omega}{\int \sigma \, d\omega} \qquad c = \frac{\int \sigma z \, d\omega}{\int \sigma \, d\omega}$$

380.— Si la surface est rapportée à un système de coordonnées rectangulaires on peut prendre comme élément $d\omega$ l'aire qui a pour projection le rectangle $dx\,dy$ sur le plan XOY, c'est à dire

$$\sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy$$

Les quantités p, q qui entrent dans ces formules, représentent les dérivées partielles de z par rapport à x et à y, déduites de l'équation de la surface. En posant alors

$$M = \iint \sigma \sqrt{1+p^2+q^2}.\, dx\, dy$$

on a les trois relations

$$(10) \qquad \begin{aligned} Ma &= \iint \sigma x \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy \\ Mb &= \iint \sigma y \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy \\ Mc &= \iint \sigma z \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy \end{aligned}$$

dans lesquelles les intégrales doubles s'étendent à toute la partie du plan des xy sur laquelle la surface se projette.

381.— Quand la surface est homogène, les formules (9) deviennent

$$a = \frac{\int x \, d\omega}{\omega} \qquad b = \frac{\int y \, d\omega}{\omega} \qquad c = \frac{\int z \, d\omega}{\omega}$$

ω étant l'aire totale de la surface considérée.

c) — Lignes matérielles.

382.— Densité linéaire — Coordonnées du centre de gravité.— On peut définir ainsi qu'on l'a fait pour un espace ou une surface la densité linéaire λ en un point d'une ligne. En désignant par S la longueur totale de cette ligne et par ds un élément de cette longueur, on a les formules

$$(11) \qquad a = \frac{\int \lambda x\, ds}{\int \lambda\, ds} \qquad b = \frac{\int \lambda y\, ds}{\int \lambda\, ds} \qquad c = \frac{\int \lambda z\, ds}{\int \lambda\, ds}$$

Si la ligne dont on veut trouver le centre de gravité est rapportée à un système de trois axes rectangulaires, les coordonnées de x, y, z sont des fonctions d'un paramètre α et on a :

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\alpha}\right)^2}\, dz$$

et en remplaçant ds par cette valeur, les formules (11) réduisent le problème aux quadratures.

III. – Théorèmes facilitant la recherche du centre de gravité.

383. – Nous supposerons que le système soit homogène ; c'est à dire qu'il soit composé de points ayant la même masse, s'il est discontinu, ou qu'il présente la même densité dans toute son étendue, s'il est continu. Dans ce cas, les formules (2) deviennent

$$(12) \qquad a = \frac{\Sigma x}{N} \qquad b = \frac{\Sigma y}{N} \qquad c = \frac{\Sigma z}{N}$$

N désignant le nombre des points, de telle sorte que le centre de gravité se confond avec le centre des moyennes distances du système de points.

On obtient alors les théorèmes suivants qui s'étendent évidemment aux systèmes continus.

384. – Théorème I – Lorsqu'un système a un centre de symétrie, ce centre de symétrie est le centre de gravité du système.

En prenant en effet le centre de symétrie pour origine, à un point (x, y, z) du système correspondant un point $(-x, -y, -z)$ symétrique du premier par rapport à l'origine. Donc les Σ des formules (12) sont égaux à zéro et le centre de gravité se confond avec l'origine.

385 – Théorème II. – Lorsqu'un système a un plan de symétrie, le centre de gravité est dans ce plan.

Si l'on prend en effet le plan de symétrie pour plan XOY, à un point (x, y, z) correspond un point $(x, y, -z)$; par suite c'est égal à zéro.

386. — Théorème III. — Lorsqu'un système a un axe de symétrie le centre de gravité est sur cet axe.

IV. — Théorèmes de Guldin.

387. — Théorème I. — L'aire engendrée par une ligne plane qui tourne autour d'un axe situé dans son plan est égale à la longueur de cette ligne multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité.

En effet, si l'on prend l'axe de révolution pour l'axe des x, l'expression de la surface engendrée par la courbe sera

$$\int 2\pi y\,ds$$

ds désignant un élément de l'arc de courbe et y la distance de cet élément à l'axe de révolution ; mais si b désigne l'ordonnée du centre de gravité de la courbe, on a (n° 382)

$$bs = \int y\,ds$$

Donc l'aire engendrée par la courbe est égale à

$$2\pi b \times s$$

et le théorème est démontré.

388. — Théorème II. — Le volume engendré par une aire plane qui tourne autour d'un axe situé dans son plan est égal à la surface de cette aire multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité.

En effet, prenant l'axe de rotation pour l'axe des x et une perpendiculaire à cet axe menée dans le plan de l'aire plane pour axe des y, l'expression du volume engendré est

$$\iint \pi\left[(y+dy)^2 - y^2\right]dx$$

ou bien

$$2\iint y\,dx\,dy.$$

Or, en désignant par ω l'aire plane et par b l'ordonnée de son centre de gravité, on a

$$b\omega = \iint y\,dx\,dy$$

Donc le volume engendré par l'aire plane est égal à

$$2\pi b \times \omega$$

conformément à l'énoncé.

Chapitre II.

Equilibre des solides invariables.

I.– Réduction des forces appliquées à un solide invariable.

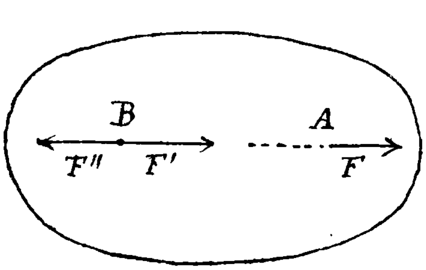
389.– Principe.– Pour que deux forces appliquées à un solide se fassent équilibre, il faut et il suffit qu'elles soient égales et directement opposées.

De ce principe, considéré comme un axiome, résulte la proposition suivante.

390.– Corollaire.– On peut sans changer l'effet d'une force sur un solide, transporter son point d'application en un point quelconque de sa direction.

Soit en effet, un solide soumis à l'action de diverses forces. Considérons en particulier une de ces forces F appliquées au point A.

Prenons un point B sur la direction de cette force et appliquons-y deux forces F', F'' égales à F et agissant en sens contraire l'une de l'autre suivant la droite AB ; ces deux forces se font équilibre et l'état du solide n'est pas modifié.



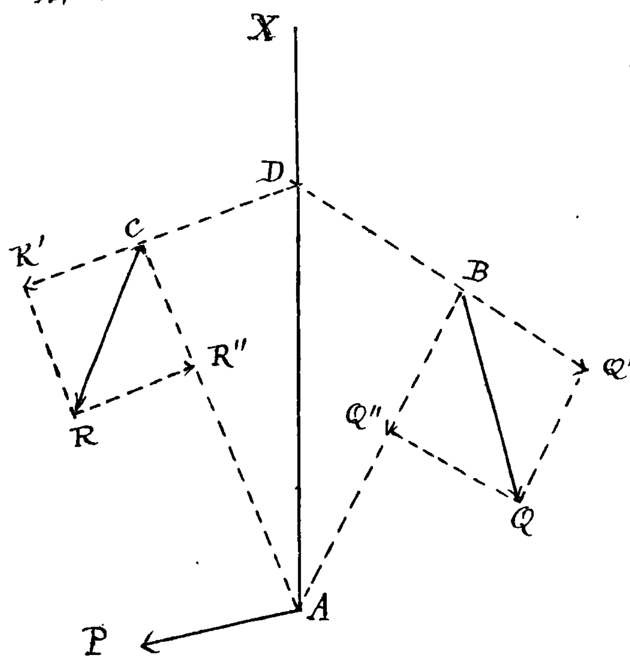
Mais les deux forces F, F'' qui sont égales et directement opposées se font équilibre, d'après le principe, et on peut les supprimer.

Il ne reste plus alors que la force F' qui se trouve ainsi substituée à la force F et appliquée à un point quelconque de sa direction pourvu que ce point soit invariablement lié au solide.

391.– Théorème I.– Un système quelconque de forces appliquées à un solide peut être remplacé par deux forces dont une agit sur un point arbitraire.

Soient A, B, C trois points invariablement liés au solide ; désignons par F l'une des forces, soit M son point d'application.

On peut joindre le point M aux points A. B. C décomposer la force F en trois autres dirigées suivant MA, MB, MC et transporter en A. B. C sur leurs directions respectives les points d'application de ces trois composantes. En opérant ainsi sur chaque force du système, on obtient trois groupes de forces appliquées en A. B. C. Chacun d'eux peut se réduire à une force unique et le système est ainsi remplacé par trois forces P. Q. R respectivement appliquées en A. B. C.



Cela posé, considérons les deux plans déterminés par le point A et les deux forces Q et R. Sur la ligne d'intersection AX de ces deux plans, prenons un point arbitraire D. Joignons les points B et C aux point A et D.

On peut décomposer la force Q en deux autres Q' et Q" suivant DB et BA; et de même la force R en deux autres R' et R" suivant D et CA. Enfin, si l'on applique Q' et R' au point D de leurs directions, on a deux groupes de forces appliquées en A et D et en réduisant chacun d'eux à une force unique, le système des forces appliquées au solide est définitivement remplacé par deux forces S et T agissant en A et D.

392. Remarques. — Le point A est arbitraire. Ce point étant choisi, la droite AX variera avec le choix des points B et C, mais sera toujours assujettie à passer par le point A; le point D est arbitraire sur cette droite. Ce point fixé, les forces S et T sont déterminées. On voit qu'il y a une infinité de manières de réduire à deux les forces appliquées à un solide.

La première partie de la démonstration prouve que les forces appliquées à un solide peuvent se réduire à trois appliquées en des points arbitraires.

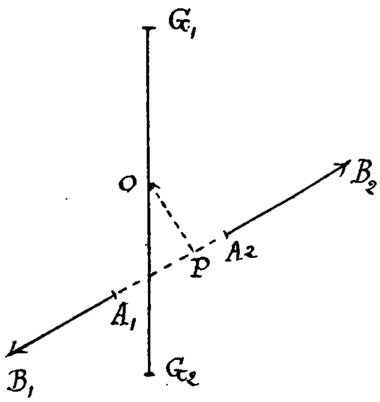
393. — Théorème II. — Le moment résultant des forces appliquées à un solide est le même, par rapport à tout point de l'espace, que celui des deux forces auxquelles on peut réduire le système.

En effet, on peut, sans altérer le moment résultant, transporter le point d'application d'une force sur sa direction, remplacer plusieurs forces concourantes par leur résultante et décomposer une force en plusieurs autres. Comme on n'a employé que ces modes de transformation, le moment résultant n'est pas altéré quand on remplace les forces F_1, F_2, F_3 .... qui agissent sur le solide par les deux forces S et T.

II.- Equilibre d'un solide invariable libre.

394.- Lemme.- Pour que deux vecteurs soient égaux et directement opposés, il faut et il suffit que leur moment résultant soit nul par rapport à tout point de l'espace.

1° La condition est nécessaire.- En effet si les deux vecteurs $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ sont égaux et directement opposés, les plans déterminés par le centre O des moments et les deux vecteurs coïncident.



Les deux moments sont donc portés sur une même perpendiculaire à ce plan. Les grandeurs de ces moments sont égales puisque les deux vecteurs sont égaux et que leurs distances au point O sont les mêmes. Enfin les deux vecteurs étant de sens contraire, les moments sont sont de sens contraire.

Ils sont donc égaux et directement opposés et leur résultante est nulle.

2° La condition est suffisante.- En effet, le moment résultant par rapport à un point quelconque O étant nul par hypothèse les moments OG_1, OG_2 des deux vecteurs $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ sont égaux et directement opposés. Donc ces moments sont portés suivant une même droite, par suite les plans $(O, A_1 B_1)$ $(O, A_2 B_2)$ perpendiculaires à cette direction coïncident.

Ainsi par les deux vecteurs $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ et un point O quelconque de l'espace, on peut faire passer un plan; donc les directions des deux vecteurs sont en ligne droite, car autrement leur plan serait déterminé et ne passerait pas par un point quelconque de l'espace.

Dès lors, si l'on abaisse du point O la perpendiculaire OP sur la direction commune de ces deux vecteurs, les produits $A_1B_1 \times OP$, $A_2B_2 \times OP$ étant égaux, les vecteurs A_1B_1, A_2B_2 sont égaux; enfin comme les moments sont de sens contraire, les vecteurs le sont aussi. Donc les vecteurs sont égaux et directement opposés.

395. — Condition de l'équilibre. — Pour qu'un solide soit en équilibre il faut et il suffit que le moment résultant des forces par rapport à tout point de l'espace soit nul.

En effet, pour que le solide soit en équilibre, il faut et il suffit que les deux forces S, T qui peuvent remplacer le système des forces appliquées, soient égales et directement opposées (n° 389). Donc, il faut et il suffit que le moment résultant de ces deux forces soit nul par rapport à tout point de l'espace. (n° 394).

Ce moment résultant étant égal à celui des forces appliquées (n° 393) le théorème est démontré.

396. — Équations qui expriment l'équilibre d'un solide. — Soient, par rapport à trois axes coordonnés,
X, Y, Z les composantes de l'une des forces,
x, y, z les coordonnées de son point d'application.
En posant

$$P = \Sigma X \qquad Q = \Sigma Y \qquad R = \Sigma Z$$

$$L = \Sigma\,(yZ - zY) \qquad M = \Sigma(zX - xZ) \qquad N = \Sigma(xY - yX)$$

les composantes du moment résultant des forces par rapport à un point (x', y', z') sont données par les formules (9) du n° 28.

Pour que ce moment résultant soit nul par rapport à tout point de l'espace, il faut et il suffit que ses composantes L', M', N' suivant les trois axes soit nulles quelles que soient les coordonnées x', y', z' du centre des moments; par suite, les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre s'obtiennent en égalant à zéro les six quantités $P, Q, R;\ L, M, N$; ce qui donne les six équations

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\Sigma X = 0 \qquad \Sigma Y = 0 \qquad \Sigma Z = 0 \\ &\Sigma\,(yZ - zY) = 0 \quad \Sigma(zX - xZ) = 0 \quad \Sigma(xY - yX) = 0. \end{aligned}$$

D'après la signification de ces équations, on peut dire que pour qu'un solide invariable soit en équilibre sous l'action d'un système de forces, il est nécessaire et suffisant

1° que la somme des projections de ces forces sur trois axes soit nulle pour chaque axe,

2° que la somme des moments de ces forces par rapport à trois axes soit nulle pour chaque axe.

397.— Dans ce qui précède, nous avons supposé que les forces étaient appliquées à un solide en repos et nous avons cherché les conditions auxquelles ces forces doivent satisfaire pour que le solide restât en repos malgré leur action. Nous avons vu que ces conditions d'équilibre sont complètement exprimées par six équations. Il peut arriver qu'un solide en mouvement soit soumis à des forces qui satisfassent à ces six équations. Dans ce cas, le solide n'est pas en équilibre; mais on dit toujours que les forces se font équilibre sur le solide.

Le système des six équations précédentes se simplifie dans diverses circonstances ainsi que nous allons le voir.

398.— Equilibre des forces dirigées dans un même plan.—

Lorsque les forces qui sollicitent un solide ont leurs directions dans un même plan, on peut choisir ce plan pour plan XOY; on a, pour chaque force, $z=0$, $Z=0$ et les six équations se réduisent à trois

$$\Sigma X = 0 \quad \Sigma Y = 0$$

$$(2) \qquad \Sigma(xY - yX) = 0$$

Les deux premières expriment que les forces données transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point s'y font équilibre.

Dans la troisième, $xY - yX$ représente le moment de l'une des forces par rapport à l'origine.

On peut donc dire que, pour qu'un solide soit en équilibre, sous l'action d'un système de forces dirigées dans un même plan, il est nécessaire et suffisant

1° que la somme des projections des forces sur deux axes situés dans le plan de ces forces soit nulle pour chaque axe.

2° que la somme des moments de ces forces par rapport à un point quelconque du plan soit aussi nulle.

399. — Équilibre des forces concourantes. — Supposons que les points d'application de diverses forces coïncident, les coordonnées x, y, z étant les mêmes pour tous ces points pourront sortir des signes Σ dans les trois dernières équations de l'équilibre; dès lors, ces trois dernières équations ne sont que des conséquences des trois premières, en sorte que les conditions de l'équilibre étant réduites à

$$(3) \qquad \Sigma X = 0 \quad \Sigma Y = 0 \quad \Sigma Z = 0$$

sont les mêmes que celles que nous avons trouvées pour exprimer l'équilibre d'un point; et c'est ce qui doit évidemment avoir lieu.

400. — Équilibre d'un système de forces parallèles. — Si les forces appliquées au solide libre sont parallèles, agissant les unes dans un sens, les autres en sens contraire, désignons par α, β, γ les cosinus directeurs d'une force F: ses composantes seront

$$X = \alpha F \qquad Y = \beta F \qquad Z = \gamma F.$$

Nous pouvons regarder α, β, γ comme ayant les mêmes valeurs pour toutes les forces, car s'il y en a qui agissent en sens contraire de F, on devrait pour celles là changer les signes des cosinus directeurs, ce qui revient évidemment à affecter du signe — les forces qui seraient dans ce cas et à laisser les cosinus directeurs invariables. Cette convention admise, les six équations d'équilibre deviennent

$$\alpha \Sigma F = 0 \qquad \beta \Sigma F = 0 \qquad \gamma \Sigma F = 0$$

$$\gamma \Sigma Fy - \beta \Sigma Fz = 0 \qquad \alpha \Sigma Fz - \gamma \Sigma Fx = 0 \qquad \beta \Sigma Fx - \alpha \Sigma Fy = 0$$

Les trois premières se réduisent à

$$(4) \qquad \Sigma F = 0$$

Les trois autres se réduisent à deux, savoir

$$(5) \qquad \frac{\Sigma Fx}{\alpha} = \frac{\Sigma Fy}{\beta} = \frac{\Sigma Fz}{\gamma}$$

Pour les énoncer commodément, appelons moment d'une force F par rapport à un plan, le produit de la force par la distance de son point d'application à ce plan, distance qui sera comptée positivement d'un côté du plan, négativement de l'autre.

En vertu de cette définition, Fx est le moment de la force F par rapport au plan YOZ, ... etc.

Les conditions d'équilibre d'un système de forces parallèles appliquées à un solide libre sont donc celles-ci ; -il faut et il suffit : que la somme algébrique des forces soit égale à zéro, et que les sommes des moments de ces forces, par rapport à trois plans rectangulaires soient proportionnelles aux cosinus des angles que la direction des forces fait avec les axes respectivement normaux à ces plans.

III.- Systèmes de forces équivalents.

401.- Définition.- Deux systèmes de forces sont dits équivalents quand on peut remplacer l'un par l'autre sur un solide.

Théorème I.- Si deux systèmes de forces S_1 et S_2 sont équilibrés par un même troisième S_3, ils sont équivalents.

En effet, au système S_1 on peut ajouter les deux systèmes S_2 et S_3 qui se font équilibre. Mais dans le système (S_1, S_2, S_3) on peut supprimer les systèmes S_1 et S_3 qui se font équilibre ; Donc le système S_1 peut être remplacé par le système S_2.

402.- Condition de l'équivalence de deux systèmes de forces.- Pour que les systèmes S_1 et S_2 se fassent équilibre, il faut et il suffit que les moments résultants de ces deux systèmes par rapport à tout point de l'espace, soient égaux et directement opposés (n°395).

La même condition devant être remplie pour que les systèmes S_2 et S_3 se fassent équilibre, on en conclut que les moments résultants de S_1 et S_2 sont égaux en grandeur et direction.

Donc, pour que deux systèmes de forces soient équivalents, il faut et il suffit qu'ils aient le même moment résultant par rapport à un point quelconque de l'espace.

403.- Par suite, on obtient les équations qui expriment l'équivalence de deux systèmes de forces en écrivant que les six quantités

$$P, Q, R \; ; \; L, M, N$$

ont les mêmes valeurs pour les deux systèmes ; c'est à dire qu'il y a, pour ces deux systèmes, égalité des sommes des projections des forces sur trois axes et égalité des sommes des moments des forces par rapport à trois axes.

404. — Condition de la réduction d'un système de forces à une force unique. — Un système de forces appliquées à un solide est en général réductible à deux forces : exceptionnellement un système peut se réduire à une force unique ; cherchons la condition de cette réduction.

Désignons par

P, Q, R les composantes de la résultante du système.

L, M, N les composantes de son moment résultant par rapport à l'origine.

Pour qu'une force (X_0, Y_0, Z_0) appliquée au point (x_0, y_0, z_0) soit équivalente à ce système, il faut et il suffit que l'on ait

$$(6) \qquad \begin{array}{lll} X_0 = P & Y_0 = Q & Z_0 = R \\ y_0 Z_0 - z_0 Y_0 = L & z_0 X_0 - x_0 Z_0 = M & x_0 Y_0 - y_0 X_0 = N. \end{array}$$

Les trois premières de ces équations déterminent X_0, Y_0, Z_0 ; les trois autres peuvent s'écrire en y remplaçant X_0, Y_0, Z_0 par P, Q, R.

$$(7) \qquad \begin{aligned} y_0 R - z_0 Q &= L \\ z_0 P - x_0 R &= M \\ x_0 Q - y_0 P &= N \end{aligned}$$

Si l'on ajoute ces équations respectivement multipliées par P, Q, R, on trouve l'équation

$$(8) \qquad PL + QM + RN = 0$$

qui, ne renfermant pas x_0, y_0, z_0 exprime une condition à laquelle doivent satisfaire les forces du système pour que le problème admette une solution.

Cette condition est d'ailleurs suffisante ; car si l'équation (8) est vérifiée, les équations (7) se réduisent à deux et représentent (x_0, y_0, z_0 étant pris pour coordonnées courantes) une droite dont la direction se confond avec celle de la résultante. Chaque point de cette droite peut être pris pour le point d'application de cette résultante, et toutes les conditions (6) étant ainsi remplies, il est clair que le système peut être remplacé par la force que nous venons de déterminer.

405. — Le premier membre de l'équation (8) étant proportionnel au cosinus de l'angle compris entre la direction du système des forces et la direction de son moment résultant on peut énoncer la proposition suivante :

Pour que les forces appliquées à un solide soient réductibles à une force unique, il faut et il suffit que la résultante du système et son moment résultant soient perpendiculaires l'un à l'autre.

406. — Réduction d'un système de forces parallèles. — Un système de forces parallèles est en général réductible à une force unique. En effet, soient α, β, γ les cosinus directeurs d'une droite parallèle aux forces et F l'une quelconque de ces forces considérée comme positive ou négative suivant qu'elle est dirigée dans le sens (α, β, γ) ou dans le sens opposé. Les composantes de la force F sont

$$X = \alpha F \qquad Y = \beta F \qquad Z = \gamma F$$

de sorte que l'on a, pour les composantes de la force résultante du système

$$P = \alpha \Sigma F \qquad Q = \beta \Sigma F \qquad R = \gamma \Sigma F. \tag{9}$$

et pour les composantes du moment résultant relatif à l'origine ;

$$\begin{aligned} L &= \gamma \Sigma F y - \beta \Sigma F z \\ M &= \alpha \Sigma F z - \gamma \Sigma F x \\ N &= \beta \Sigma F x - \alpha \Sigma F y \end{aligned} \tag{10}$$

Les valeurs (9) et (10) sont telles que l'on a

$$PL + QM + RN = 0$$

et par suite le système peut être remplacé par une force unique S.

Cette force, équivalente au système des forces données, se nomme par extension la résultante de ces forces.

407. — Voici maintenant comment on détermine la force S en grandeur et en direction.

Les composantes X_0, Y_0, Z_0 suivant les axes étant égales à P, Q, R (n° 404), on a en remplaçant P, Q, R par leurs valeurs (9)

$$(11) \qquad X_0 = \alpha \Sigma F \qquad Y_0 = \beta \Sigma F \qquad Z_0 = \gamma \Sigma F.$$

par suite, la force S aura pour cosinus directeurs (α, β, γ) et pour intensité ΣF, c'est à dire qu'elle sera parallèle aux forces du système et égale à la somme algébrique de ces forces, le signe dont ΣF est affecté indiquant si cette force S agit dans le sens (α, β, γ) ou en sens contraire.

Ensuite, les équations (7) deviennent en y remplaçant P, Q, R; L, M, N par leurs valeurs (9) et (10)

$$(12) \qquad \begin{aligned} \gamma y_0 - \beta z_0 &= \frac{\gamma \Sigma F y - \beta \Sigma F z}{\Sigma F} \\ \alpha z_0 - \gamma x_0 &= \frac{\alpha \Sigma F z - \gamma \Sigma F x}{\Sigma F} \\ \beta x_0 - \alpha y_0 &= \frac{\beta \Sigma F x - \alpha \Sigma F y}{\Sigma F} \end{aligned}$$

En posant

$$(13) \qquad a = \frac{\Sigma F x}{\Sigma F} \qquad b = \frac{\Sigma F y}{\Sigma F} \qquad c = \frac{\Sigma F z}{\Sigma F}$$

ces équations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \gamma (y_0 - b) &= \beta (z_0 - c) \\ \alpha (z_0 - c) &= \gamma (x_0 - a) \\ \beta (x_0 - a) &= \alpha (y_0 - b) \end{aligned}$$

c'est à dire

$$(14) \qquad \frac{x_0 - a}{\alpha} = \frac{y_0 - b}{\beta} = \frac{z_0 - c}{\gamma}$$

Ces deux équations auxquelles doivent satisfaire les coordonnées du point d'application de la force S représentent, en considérant x_0, y_0, z_0 comme des coordonnées courantes, une droite parallèle à la direction commune des forces. La force S dont la direction, l'intensité et le sens sont déja déterminés peut donc être appliquée en un point quelconque de cette droite sans cesser d'être équivalente au système, ce qui s'accorde avec le principe du transport du point d'application. D'ailleurs la droite représentée par les équations (14) passe par le point (a, b, c) dont les coordonnées sont déterminées par les formules (13).

En résumé : Quand des forces parallèles dont les intensités et les points d'application sont déterminés, agissent sur un solide elles peuvent être remplacées en général par une force unique parallèle aux forces données, égale à leur somme algébrique et passant par un point déterminé du solide.

408. — Centre des forces parallèles. — Le point dont les coordonnées a. b. c sont définies par les équations (13) est tel que, si la direction de la force F par rapport au solide varie d'une manière quelconque les points d'application de ces forces, leurs intensités et le sens relatif de leur action ne changeant pas, la résultante S passe toujours par ce point. Il se nomme le centre des forces parallèles.

Si, comme il est naturel, on choisit le centre des forces parallèles comme point d'application de leur résultante, les équations (13) mises sous la forme

$$a \Sigma F = \Sigma F x \qquad b \Sigma F = \Sigma F y \qquad c \Sigma F = \Sigma F z$$

conduisent au théorème suivant :

Les moments de la résultante d'un système de forces parallèles, par rapport à trois plans rectangulaires, sont respectivement égaux aux sommes des moments des composantes par rapport aux mêmes plans.

409. — Application à la pesanteur. — Considérons un système de points matériels placé à la surface de la Terre, et ayant des dimensions très petites relativement à celles du globe terrestre. Nous pourrons regarder les actions de la pesanteur sur les points du système comme étant parallèles entre elles et, si nous admettons que ce système puisse être traité comme un solide, il y aura lieu d'appliquer ce que nous venons de dire relativement au centre des forces parallèles.

Désignons par p le poids du point dont les coordonnées sont x. y. z et par P le poids total du système. Nous aurons pour déterminer les coordonnées a. b. c du centre des forces parallèles, les relations

$$a = \frac{\Sigma p x}{P} \qquad b = \frac{\Sigma p y}{P} \qquad c = \frac{\Sigma p z}{P}.$$

Mais, si nous représentons par m la masse du point dont le poids est p et par M la masse totale, nous pourrons remplacer p par mg et P par Mg : en supprimant alors le facteur g commun aux deux termes de chacune des fractions précédentes, nous arriverons aux formules

$$a = \frac{\Sigma M x}{M} \qquad b = \frac{\Sigma m y}{M} \qquad c = \frac{\Sigma m z}{M}$$

qui sont celles qui correspondent au centre de gravité du système.

410.– Cas particulier de la composition des forces parallèles.– Considérons deux forces F_1, F_2 parallèles et de même sens appliquées à deux points P_1, P_2 d'un solide invariable. Désignons par

x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point P_1,

x_2, y_2, z_2 les coordonnées du point P_2,

a, b, c les coordonnées du centre P des forces parallèles.

Les formules (13) donnent, dans ce cas particulier,

$$(15) \qquad \begin{aligned} a &= \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2} \\ b &= \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F_1 + F_2} \\ c &= \frac{F_1 z_1 + F_2 z_2}{F_1 + F_2} \end{aligned}$$

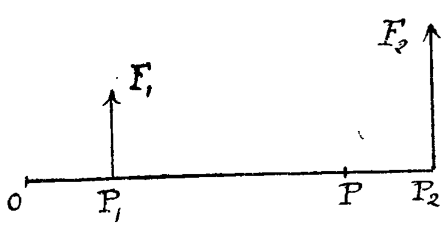
Si l'on prend la droite $P_1 P_2$ pour axe des x, on a

$$y_1 = 0 \,, \quad y_2 = 0 \,; \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 0 .$$

et les équations (15) donnent alors

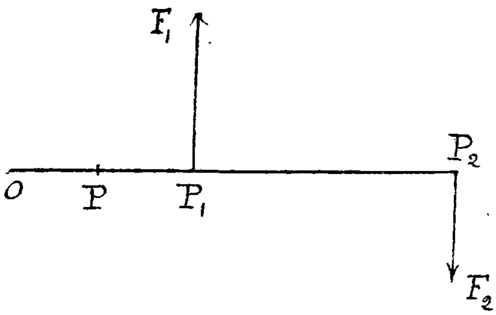
$$b = 0 \qquad c = 0$$

$$(x_2 - a) F_2 = (a - x_1) F_1 .$$



On en conclut que le centre des deux forces parallèles est sur la droite qui joint les points d'application de ces forces et que ses distances à ses points d'application sont en raison inverse des forces qui y sont appliquées.

411. — Soient, en second lieu deux forces parallèles et de sens contraires. On établit comme dans le cas précédent que le centre des deux forces parallèles est sur la droite qui joint les points d'application de ces forces, en dehors de la portion de cette droite qu'ils comprennent entre eux et du côté du point d'application de la plus grande force ; les distances du centre des deux forces parallèles aux points d'application sont en raison inverse des forces qui y sont appliquées.



Ces règles sont analogues à celles qui servent à composer des rotations autour d'axes parallèles. (Cinématique. n° 128).

IV. — Théorie des Couples.

412. — Définitions. — On appelle couple le système de deux forces égales, parallèles et de sens contraire.

La plus courte distance de deux forces porte le nom de bras de levier du couple.

Nous appellerons moment d'un couple, un vecteur défini comme il suit :

1° Sa grandeur est égale au produit du bras de levier du couple par l'une des forces de ce couple.

2° il est perpendiculaire au plan du couple.

3° Sa direction est telle qu'un observateur ayant ses pieds à l'origine du vecteur et sa tête à son extrémité, voit s'effectuer de gauche à droite la rotation que ce couple tend à produire.

413. — Théorème I. — Le moment résultant des deux forces d'un couple par rapport à un point quelconque est égal au moment de ce couple.

Le théorème est évident lorsque le centre des moments coïncide avec le point d'application de l'une des forces du couple ; soient alors L, M, N les composantes du moment résultant, ou du moment du couple, suivant trois axes. Si l'on transporte le centre des moments en un point quelconque x, y, z les composantes du moment résultant des deux forces du couple sont données par les formules (4) du n° 29.

$$L' = L - y'R + z'Q$$
$$M' = M - z'P + x'R$$
$$N' = N - x'Q + y'P$$

où P, Q, R désignent en général, les sommes des projections des forces du système sur les axes. Lorsque ce système est un couple, P, Q, R sont égaux à zéro, et on a

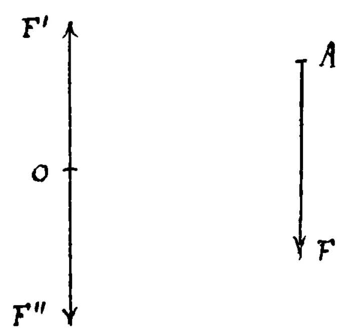
$$L' = L \qquad M' = M \qquad N' = N.$$

ce qui démontre le théorème.

414. – Théorème II. – On peut sans changer l'effet d'un couple, le déplacer dans son plan, transporter ce plan parallèlement à lui même, et modifier dans ce plan la force et le bras de levier de façon que le moment ne change pas.. Car, dans ces modifications, le moment du couple, et par suite le moment résultant par rapport à tout point restant le même, les différents couples obtenus sont équivalents. (n° 402)

415. – Théorème III. – Un système de couples ayant pour moments G_1, G_2, G_3 ..... est équivalent à un couple unique ayant pour moment la résultante des moments G_1, G_2, G_3...... Car le système et le couple unique ont le même moment résultant par rapport à tout point de l'espace.

416. – Usage de la théorie des couples pour la réduction des forces appliquées à un solide. – Soient O un point arbitraire et A le point d'application de l'une quelconque F des forces appliquées à un solide. Appliquons en O, en sens opposés, deux forces F', F'' égales et parallèles à la force F. On a ainsi un système équivalent à la force F, constitué par un couple (F, F') et la force F'' qui n'est autre que la force F transportée parallèlement à elle-même au point arbitraire O.



Chacune des forces appliquées au solide peut être de même transportée au point O pourvu qu'à la force ainsi transportée on adjoigne un couple. Donc tout système de forces peut être remplacé par un système de forces égales et parallèles aux premières transportées au point O et un système de couples.

En remplaçant le système des forces concourantes par une force unique et le système des couples par un couple résultant, on est conduit à la proposition suivante :

Un système de forces agissant sur un solide est réductible à une force agissant sur un point arbitraire de ce solide et à un couple. –

417. – Prenons ce point arbitraire pour origine d'un système de coordonnées rectangulaires et désignons, comme précédemment, par X, Y, Z les composantes de l'une quelconque des forces suivant les axes et par x, y, z les coordonnées de son point d'application. Le système des forces est réductible, d'après ce qui précède, à une force agissant en O dont les composantes sont

$$P = \Sigma X \qquad Q = \Sigma Y \qquad R = \Sigma Z$$

et à un couple dont le moment a pour composantes suivant les axes :

$$L = \Sigma(yZ - zY) \qquad M = \Sigma(zX - xZ) \qquad N = \Sigma(xY - yX).$$

Il faut et il suffit, pour l'équilibre du solide que la force et le couple soient nuls, ce qui donne les six conditions déjà obtenues.

418. – La théorie des couples peut s'établir directement et par voie synthétique en n'admettant à priori que le principe fondamental suivant lequel on peut, sans changer l'effet d'une force sur un solide, transporter son point d'application sur un point quelconque de sa direction. C'est suivant cette méthode aussi simple qu'élégante que Poinsot a traité toutes les questions relatives à l'équilibre des solides invariables. (Éléments de Statique publiés en 1803).

V. – Équilibre d'un solide qui n'est pas libre.

419. – Exposé de la méthode. – La méthode que nous emploierons pour établir les conditions d'équilibre d'un solide dont les mouvements sont limités par des obstacles fixes consiste à joindre aux

forces qui sont appliquées à ce solide, les actions généralement inconnues que les obstacles fixes exercent sur lui. On peut alors faire abstraction des conditions imposées au solide, le regarder comme entièrement libre, et faire usage des équations d'équilibre du n° 396.

Si l'on élimine entre ces équations les actions inconnues provenant des obstacles, on obtiendra des équations ne contenant plus que les données de la question, c'est à dire les composantes des forces directement appliquées et les coordonnées de leurs point d'application ; ces équations exprimeront les conditions d'équilibre. Si l'on suppose qu'elles soient vérifiées, les équations primitives qui ont servi à l'élimination fourniront ensuite les valeurs des actions inconnues, et par suite les pressions exercées par le solide sur les obstacles fixes, puisque ces pressions sont toujours égales et opposées aux actions des obstacles.

Nous appliquerons cette méthode à quelques cas particuliers.

420. – Equilibre d'un solide qui a un point fixe. – Prenons ce point fixe pour origine d'un système de coordonnées ; soient X, Y, Z les composantes d'une force quelconque appliquée au solide ; x, y, z les coordonnées de son point d'application ; X', Y', Z' les composantes de l'action inconnue que le point fixe exerce sur le solide. Nous pouvons faire abstraction du point fixe à la condition de joindre cette action aux forces directement appliquées ; et le système de toutes ces forces, agissant sur le solide rendu libre, doit vérifier les six équations d'équilibre du n° 396, d'où

$$(17) \qquad \Sigma X + X' = 0 \qquad \Sigma Y + Y' = 0 \qquad \Sigma Z + Z' = 0$$

$$(18) \qquad \Sigma(yZ - zY) = 0 \qquad \Sigma(zX - xZ) = 0 \qquad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

les moments des forces $X' Y' Z'$ étant nuls puisque ces forces sont appliquées au centre même des moments.

Les équations (18) ne renferment que les forces directement appliquées ; elles expriment donc la condition nécessaire pour que l'équilibre ait lieu, savoir, que la somme des moments des forces appliquées au solide, par rapport à trois axes se coupant au point fixe, soit nulle pour chaque axe.

Les équations (17) font connaître l'action du point fixe sur le solide ; elles donnent en effet

$$X' = -\Sigma X \qquad Y' = -\Sigma Y \qquad Z' = -\Sigma Z$$

et comme les composantes de la pression que le solide exerce sur le point fixe sont $-X'$ $-Y'$ $-Z'$, on en conclut que la charge du point fixe est égale, dans le cas d'équilibre, à la résultante des forces directement appliquées.

421.- Equilibre d'un solide qui a un axe fixe.- Quand un solide a deux points fixes O', O'', le solide ne peut que tourner autour de la droite $O'O''$ qui est un axe fixe. Prenons le point O' comme origine, l'axe des z positifs suivant $O'O''$. Soient $X'Y'Z'$ les composantes de l'action du point O', X'', Y'', Z'' celles de l'action du point O'', h la distance $O'O''$. Le solide étant regardé comme libre, nous aurons, pour l'équilibre les six équations

$$(19) \qquad \Sigma X + X' + X'' = 0 \qquad \Sigma Y + Y' + Y'' = 0 \qquad \Sigma Z + Z' + Z'' = 0.$$

$$(20) \qquad \Sigma(yZ - zY) - hY'' = 0 \qquad \Sigma(zX - xZ) + hX'' = 0 \qquad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

en observant que la force appliquée en O'' intervient seule dans les trois dernières équations et que, les coordonnées de son point d'application étant $0, 0, h$, les composantes de son moment par rapport à l'origine sont

$$-hY'', \quad hX'', \quad 0.$$

La troisième des équations (20) est la seule qui soit indépendante des équations inconnues ; elle exprime donc la condition d'équilibre. Cette condition est que la somme des moments, par rapport à l'axe fixe, des forces appliquées au solide, soit égale à zéro.

Les autres équations (20) donnent

$$Y'' = \frac{\Sigma(yZ - zY)}{h} \qquad X'' = -\frac{\Sigma(zX - xZ)}{h}$$

X'' Y'' étant connus, les deux premières équations (19) font connaître X' Y' ; enfin la troisième des équations (19) détermine la somme $Z' + Z''$. Les quantités Z', Z'' ne sont donc pas déterminées séparément ; ce résultat pouvait être prévu. Car, toute force appliquée à un solide invariable pouvant être transportée en un point de sa direction, il est clair que les deux forces Z', Z'' peuvent être distribuées à volonté sur chacun des deux points O', O'' pourvu que leur somme demeure invariable.

Quand, au lieu d'un système rigoureusement rigide, on considère un solide naturel susceptible de se déformer sous l'action des forces appliquées, les pressions exercées par le solide sur ses appuis sont réellement déterminées. Seulement les équations de l'équilibre du système, considéré comme un solide invariable sont impuissantes à faire connaître ces pressions et il faut recourir pour les trouver à des considérations tirées de la nature physique du solide et des petites déformations qu'il éprouve toujours sous l'influence des efforts qu'il supporte. C'est un problème d'un ordre tout différent, dont nous n'avons pas à nous occuper ici.

422.— Equilibre d'un solide qui s'appuie contre un plan fixe.

Soit un solide qui s'appuie par un certain nombre de points $A_1, A_2, A_3 \ldots$ contre un plan fixe. Prenons ce plan pour plan XOY, l'axe des z positifs dirigé du côté où se trouve le solide. Les actions du plan fixe étant normales à ce plan sont parallèles à OZ et appliquées aux points $A_1, A_2, A_3 \ldots$; elles donnent une résultante Z_0 rencontrant le plan XOY en un point dont les coordonnées sont x_0, y_0. Nous pourrons considérer le solide comme libre en joignant aux forces qui le sollicitent les actions du plan d'appui ou simplement leur résultante Z_0. Nous aurons donc, en appliquant les équations d'équilibre d'un solide libre et en remarquant que, pour la force $0, 0, Z_0$ appliquée au point x_0, y_0, z_0 les composantes du moment relatif à l'origine sont $y_0 Z_0, -x_0 Z_0, 0$,

$$(21) \qquad \Sigma X = 0 \qquad \Sigma Y = 0 \qquad \Sigma Z + Z_0 = 0$$

$$(22) \qquad \Sigma(yZ - zY) + y_0 Z_0 = 0 \qquad \Sigma(zX - xZ) - x_0 Z_0 = 0 \qquad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Les deux premières équations (21) et la troisième des équations (22) sont les seules qui ne renferment que les données. Elles expriment la condition d'équilibre : il faut que les sommes des composantes des forces appliquées au solide suivant deux axes situés dans le plan fixe, et la somme des moments des forces par rapport à un axe normal à ce plan, soient nulles séparément.

La troisième des équations (21) donne

$$Z_0 = -\Sigma Z.$$

Elle fait connaître la résultante des actions du plan sur le solide et par suite la pression totale du solide sur le plan qui est égale à la somme des composantes des forces appliquées suivant la normale au plan d'appui.

Mais comme le plan ne peut agir que vers l'extérieur puisque nous supposons le solide simplement appuyé contre lui, les réactions appliquées en $A_1, A_2 \ldots$ et par suite leur résultante Z_0 sont nécessairement dirigées dans le sens de l'axe des z positifs ; donc ΣZ doit être négatif, ce qui est une nouvelle condition pour l'équilibre.

423. — Enfin, la première et la seconde des équations (22) déterminent x_0, y_0 ; on a

$$(23) \qquad x_0 = \frac{\Sigma(zX - xZ)}{Z_0} \qquad y_0 = -\frac{\Sigma(yZ - zY)}{Z_0}$$

et il en résulte une nouvelle condition d'équilibre. Comme le point d'application de la résultante de deux forces parallèles de même sens est compris entre les points d'application de ces forces (n° 410), on voit facilement que si l'on compose successivement les réactions appliquées en $A_1, A_2 \ldots$, le point d'application de la résultante Z_0 sera nécessairement dans l'intérieur du polygone convexe comprenant tous les points d'appui. Il faut donc encore que les valeurs de x_0, y_0 correspondant à un point compris dans l'intérieur de ce polygone.

424. — Les équations ci-dessus ne font connaître que la pression totale $-Z_0$ exercée par le solide sur le plan : proposons nous de déterminer les pressions qui correspondent respectivement à chacun des points d'appui. Nommons ϖ_1 l'action du plan fixe en A_1 et x_1, y_1 les coordonnées de ce point ; soient ϖ_2, x_2, y_2 les mêmes quantités pour le point A_2 et ainsi de suite. L'action Z_0 étant la résultante des forces $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3 \ldots$, la théorie des forces parallèles fournit les équations

$$\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3 + \ldots\ldots = Z_0 = -\Sigma Z.$$

$$\varpi_1 x_1 + \varpi_2 x_2 + \varpi_3 x_3 + \ldots\ldots = Z_0 x_0 = \Sigma(zX - xZ)$$

$$\varpi_1 y_1 + \varpi_2 y_2 + \varpi_3 y_3 + \ldots\ldots = Z_0 y_0 = -\Sigma(yZ - zY)$$

Les seules inconnues sont $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3 \ldots$; on les déterminera donc en résolvant ce système d'équations du premier degré et l'on connaîtra ainsi les pressions que le solide exerce sur le plan aux points $A_1, A_2 \ldots$, puisque ces pressions sont égales et opposées à $\varpi_1, \varpi_2 \ldots$ comme nous n'avons que trois équations, si le nombre des points d'appui est plus grand que trois, les pressions sont indéterminées. En fait, ces pressions sont toujours déterminées lorsqu'un solide naturel s'appuie sur un plan fixe, mais le système est alors déformable et non rigide comme le suppose la théorie.

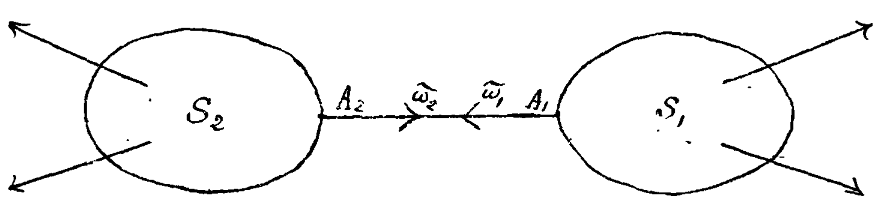
Chapitre III.

Equilibre des systèmes de figure variable composés de plusieurs solides invariables.

I. – Méthode des forces de liaison.

425. – Principe de la Méthode. – On a souvent à considérer des systèmes composés de solides invariables soumis à des liaisons mutuelles. Dans de tels systèmes, tous les points n'étant pas invariablement liés les uns aux autres, on ne peut plus faire les compositions et décompositions qui réduisent à deux toutes les forces appliquées au système. Le principe général d'après lequel on ramène le cas au précédent, consiste en ce qu'il est évidemment nécessaire et suffisant que chacun des systèmes rigides partiels soit en équilibre au moyen des forces qui agissent sur lui, et qui se composent tant de forces directement appliquées que de celles qui naissent de sa liaison avec les autres systèmes. Pour faire comprendre l'application de ce principe, considérons d'abord quelques cas simples de liaison.

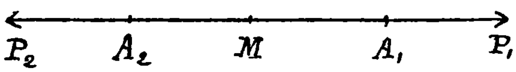
426. – Solides liés par une tige rigide articulée. – Deux solides S_1 S_2 sont liés entre eux par une tige ou droite rigide $A_1 A_2$, fixée par ses extrémités A_1 et A_2 à ces deux solides respectivement et pouvant tourner



librement autour de ces points d'attache sans aucun frottement. En supposant qu'aucune force n'agisse entre A_1 et A_2, il faut et il suffit pour l'équilibre de la tige $A_1 A_2$ que les forces qui agissent à ses extrémités soient égales et directement opposées suivant la ligne A_1, A_2. Ces forces sont les réactions des solides sur la tige, réactions qui sont respectivement contraires aux actions de la tige sur les deux solides. La tige $A_1 A_2$ produit donc en A_1 et A_2 sur les solides S_1 et S_2 qu'elle réunit des actions ϖ_1, ϖ_2 égales, dirigées suivant la droite $A_1 A_2$ et de sens contraire.

Ces actions peuvent être d'ailleurs des forces de traction tendant à rapprocher $S_1 S_2$ l'un de l'autre, ou des forces de pression tendant à les écarter. On joindra ces actions inconnues ϖ_1, ϖ_2 aux forces F qui sollicitent les solides et l'on écrira les équations d'équilibre de chacun d'eux.

427. — Solides liés par un fil flexible et inextensible. — Pour qu'un fil flexible et inextensible soit en équilibre, sous l'action de deux forces seulement P_1 et P_2 agissant à ses extrémités A_1 et A_2 ; il faut d'abord comme pour une tige rigide, que ces forces soient égales et directement opposées et il est évident que cette condition nécessaire est aussi suffisante si les forces sont dirigées de manière à maintenir le fil tendu.



Ces conditions étant remplies, soit M un point quelconque du fil $A_1 A_2$ en équilibre ; l'action que la portion $A_2 M$ du fil exerce sur la portion $M A_1$ doit être égale à P_1 et dirigée de M vers A_2 puisque le fil $M A_1$ est en équilibre. La réaction du brin $M A_1$ sur le brin $A_2 M$ étant égale et directement opposée à la précédente, est aussi égale à P_1 et dirigée de M vers A_1. Ces réactions qui s'exercent en chacun des points du fil en équilibre entre les deux brins du fil qui aboutissent en ce point, constituent ce que l'on nomme la tension du fil. La tension est donc constante dans toute la longueur du fil et égale à l'une des forces qui se font équilibre à ses extrémités.

Si donc deux solides S_1 et S_2 sont liés par un fil $A_1 A_2$, l'équilibre exigera que les efforts exercés par les solides en $A_1 A_2$ soient égaux, dirigés en sens contraire suivant la droite $A_1 A_2$, et de façon à tendre le fil ; donc réciproquement le fil produira sur les solides S_1, S_2 en A_1 et A_2 deux forces de traction dirigées suivant $A_1 A_2$ en sens contraire l'un de l'autre. En joignant ces actions inconnues aux autres forces qui sollicitent les solides S_1, S_2, on regardera ceux-ci comme libres et on leur appliquera la méthode exposée dans le chapitre précédent. Les équations qui déterminent les actions inconnues font connaître la tension du fil.

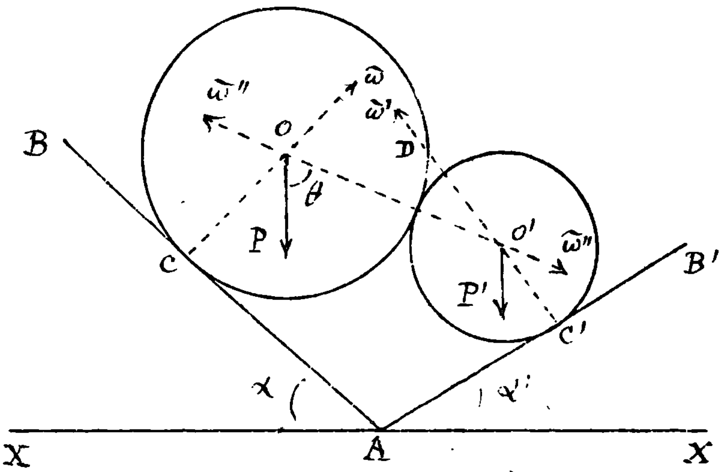
428. — *Solides en contact.* — On traite de même l'équilibre de deux solides dont les surfaces sont en contact l'une avec l'autre et qui se pressent mutuellement. On considère à cet effet chacun des solides comme libre en adjoignant aux forces qui le sollicitent l'action que l'autre solide exerce sur lui au point de contact. On suppose que, en ce point de contact, les actions réciproques des deux solides sont égales et dirigées, en sens contraire, suivant la normale commune.

429. — *Cas plus général.* — Plus généralement, on peut concevoir plusieurs solides $S_1 S_2 S_3$ ..... soumis à des liaisons mutuelles du genre de celles que l'on vient de définir et pouvant de plus être soumis à d'autres conditions ; celles, par exemple, d'avoir un point fixe ou deux points fixes, ou de s'appuyer sur un plan fixe. On considèrera chaque solide S isolément, comme étant en équilibre entre les forces appliquées et les actions inconnues qui naissent de ses liaisons avec les autres solides du système. On lui appliquera donc les équations d'équilibre dont le nombre pourra varier de un à six, suivant les conditions auxquelles le solide est assujetti. On exprimera ensuite que les liaisons elles-mêmes, chacune suivant sa nature, sont en équilibre. Eliminant entre toutes ces équations, les forces inconnues qui naissent des liaisons, on obtiendra entre les données de la question un certain nombre de relations qui exprimeront les conditions proprement dites de l'équilibre. Si ces conditions sont vérifiées, les équations primitivement posées feront connaître les forces de liaison.

430. — *Exemple* : Deux sphères solides s'appuient l'une contre l'autre et sur deux plans fixes qui se coupent suivant une ligne horizontale ; des forces verticales connues sont appliquées à leurs centres respectifs. Trouver les conditions d'équilibre et les pressions.

Désignons par
α, α' les inclinaisons des deux plans AB, AB' sur le plan horizontal,
P, P' les forces verticales appliquées aux centres OO' des deux sphères,
ϖ, ϖ' les actions respectives des plans AB, AB' sur les deux sphères,
ϖ'' la réaction mutuelle des deux sphères l'une sur l'autre.
Comme on fait abstraction des frottements, les forces

ϖ', ϖ'' sont normales aux surfaces en contact. Ainsi les forces ϖ, ϖ'' sont normales en C et D à la sphère O et on ne trouble pas l'équilibre en les transportant au centre O. De même les forces ϖ', ϖ'' sont normales en C' et D à la sphère O' et on peut les considérer comme agissant sur le centre O'.



Par suite, il faut et il suffit que les forces P, ϖ, ϖ'' se fassent équilibre sur le point O et que les forces P', ϖ', ϖ'' se fassent équilibre sur le point O'.

Pour cela, les trois premières forces doivent être dans un même plan; les trois dernières également, et comme les forces P P' sont parallèles et les réactions ϖ'' qui s'exercent en D sont opposées l'une à l'autre, il est clair que le plan vertical passant par OO' devra passer par les points C, D, C'; il sera normal aux plans d'appui et par suite, à leur intersection. De là cette première condition d'équilibre : les centres des deux sphères doivent se trouver dans un plan vertical normal à l'intersection des plans d'appui. La figure est alors une coupe faite par le plan vertical en question.

Soit θ l'angle que la ligne OO' fait avec la direction des forces PP' lorsque l'équilibre a lieu.

L'équilibre des forces P, ϖ, ϖ'' sur le point O donne les équations (1)

$$\frac{P}{\sin(\theta+\alpha)} = \frac{\varpi}{\sin\theta} = \frac{\varpi''}{\sin\alpha}.$$

L'équilibre du point O' donne de même

$$\frac{P'}{\sin(\theta-\alpha')} = \frac{\varpi'}{\sin\theta} = \frac{\varpi''}{\sin\alpha'}$$

De là

$$\varpi''\sin(\theta+\alpha) = P\sin\alpha, \quad \varpi''\sin(\theta-\alpha') = P'\sin\alpha'$$

(1) Lorsque trois forces se font équilibre sur un point, il y a proportionnalité entre chacune de ces forces et le sinus de l'angle compris entre les deux autres.

et par l'élimination de ϖ'',

$$P \sin\alpha \sin(\theta - \alpha') - P' \sin\alpha' \sin(\theta + \alpha) = 0$$

d'où

$$\tang \theta = \frac{P + P'}{P \cot g \alpha' - P' \cot g \alpha}$$

L'angle θ étant connu, on peut construire le polygone $ACOO'C'A$, dont on connait l'angle en A, les côtés CO, OO', $O'C'$ et les angles en O et O'. On a donc la figure d'équilibre du système.

Les pressions des sphères sur les plans et l'une contre l'autre sont ensuite données par les équations

$$\varpi = \frac{P \sin\theta}{\sin(\theta + \alpha)} \qquad \varpi' = \frac{P' \sin\theta}{\sin(\theta - \alpha')} \qquad \varpi'' = \frac{P \sin\alpha}{\sin(\theta + \alpha)}$$

II. – Polygone funiculaire.

431. – Définition. – Supposons qu'un fil flexible et inextensible soit sollicité par des forces appliquées à ses extrémités et à divers points de sa longueur ; ce fil étant en équilibre sous l'action des forces dont il s'agit aura la forme d'un polygone ayant pour sommets les divers points d'application des forces. On donne à un pareil fil le nom de polygone funiculaire.

Un polygone funiculaire peut être considéré comme la limite du système constitué par des solides réunis deux à deux par des fils flexibles et inextensibles lorsque ces solides se réduisent à de simples points matériels.

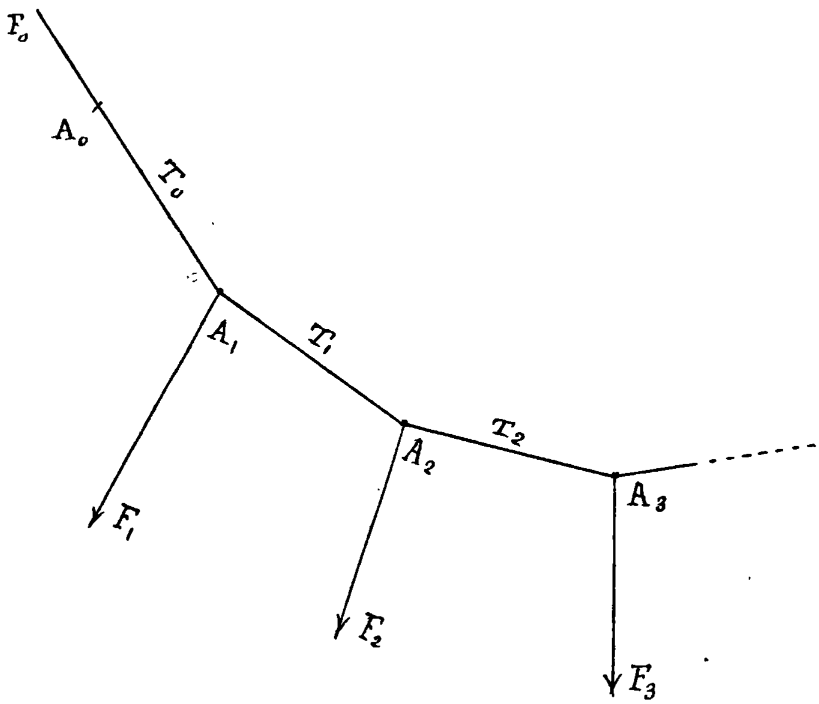
Nous allons voir en quoi consistent les conditions de l'équilibre d'un tel système.

432. – Equilibre d'un polygone funiculaire. – Désignons par $A_0, A_1, A_2, \ldots\ldots A_n, A_{n+1}$ les points d'application des forces $F_0, F_1, F_2, \ldots\ldots F_n, F_{n+1}$ qui agissent sur le fil, les indices 0 et $n+1$ correspondant aux extrémités de ce fil. Soient de plus $T_0, T_1, T_2 \ldots\ldots T_n$ les tensions des brins A_0A_1, A_1A_2, $A_2A_3 \ldots\ldots A_nA_{n+1}$.

Il est évident que, s'il y a équilibre, les directions des brins extrêmes A_0A_1, A_nA_{n+1} se confondent avec les directions des forces F_0, F_{n+1} appliquées aux extrémités et que les tensions de ces brins sont égales à ces forces de sorte que

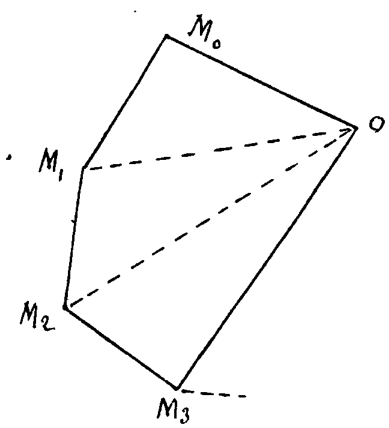
$$T_0 = F_0 \qquad T_n = F_{n+1}$$

Le point A_1 est en équilibre sous l'action des forces T_0, F_1, T_1 dont la première coïncide, en intensité et direction avec la force F_0 ; il en résulte que la tension T_1 est égale et opposée à la résultante de F_0 et F_1, de telle sorte que cette résultante détermine l'intensité de T_1 et sa direction qui est celle du côté $A_1 A_2$. De même, le point A_2 étant en équilibre sous l'action des forces T_1, F_2, T_2 la tension T_2 est égale et opposée à la résultante des forces T_1 et T_2. de telle sorte que cette résultante détermine l'intensité de T_2 et sa direction qui est celle du côté $A_2 A_3$



On détermine ainsi successivement les directions des brins du polygone funiculaire ainsi que les tensions et la force F_{n+1} appliquée à l'extrémité A_{n+1} devra, pour qu'il y ait équilibre, avoir la même intensité et la même direction que la résultante de T_{n+1} et de F_n.

433. – Polygone de Varignon. – Ces conditions d'équilibre du polygone funiculaire peuvent s'expliquer simplement à l'aide d'une construction graphique. Par un point quelconque O, menons une droite OM_0 représentant en grandeur et direction la force F_0 ; par le point M_0 une droite $M_0 M_1$ représentant de même la force F_1 ; la droite OM_1 étant la résultante de F_0, F_1 est d'après le numéro précédent, parallèle au côté $A_1 A_2$



et sa grandeur représente la tension de ce côté. On verra de même que, si par le point M_1 on mène la droite $M_1 M_2$ représentant la force F_2, la droite OM_2 sera parallèle au côté $A_2 A_3$

et que sa grandeur donnera la tension de ce côté.

En continuant à construire ainsi le polygone, on arrivera à un côté $M_{n-1} M_n$ représentant en intensité, direction et sens la force F_n, et la droite joignant le point M_n au point O étant la résultante de T_{n-1} et F_n coïncide avec T_n ou F_{n+1}; de sorte que, si par M_n on mène une droite représentant en grandeur et direction F_{n+1}, l'extrémité de cette droite doit se placer au point O.

Il suit de là que si à partir d'un point quelconque on place bout à bout des vecteurs représentant les forces F_0, F_1, F_n.... .... F_n, F_{n+1}; les conditions d'équilibre du polygone funiculaire consistent en ce que :

1° l'extrémité du polygone auxiliaire ainsi fermé doit coïncider avec son point de départ.

2° les brins intermédiaires du polygone funiculaire doivent être parallèles aux diagonales du polygone auxiliaire.

Quant aux tensions de ces brins intermédiaires; elles sont déterminées par les longueurs de ces diagonales.

Il est bon d'ajouter que, outre les conditions d'équilibre qui viennent d'être indiquées, il faut encore que les forces appliquées aux deux extrémités d'un brin tendent à éloigner ces deux extrémités, et non à les rapprocher. Si cette condition ne se trouvait pas remplie, l'équilibre ne pourrait pas avoir lieu, à moins que le cordon ne fût remplacé par une tige rigide.

434.- Cas particuliers.- Dans le cas où les diverses forces F_0, F_1, F_2... sont toutes parallèles à un même plan, le polygone auxiliaire est situé tout entier dans un plan parallèle au précédent; le polygone funiculaire dont les divers brins sont parallèles aux diagonales du polygone auxiliaire est donc également situé tout entier dans un plan qui contient en même temps les directions des forces F_0, F_1, F_2....

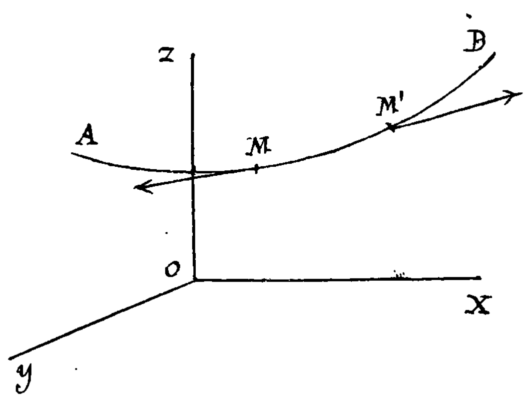
Il en est encore de même lorsque toutes les forces intermédiaires F_1, F_2..... F_n sont parallèles entre elles, quelles que soient les directions des forces extrêmes F_0, F_{n+1}; car alors les côtés intermédiaires du polygone auxiliaire sont dirigés suivant une même ligne droite, et par conséquent ce polygone auxiliaire devient un triangle; le polygone funiculaire, est donc nécessairement situé tout entier dans un plan parallèle à celui du triangle.

III. – Equilibre d'un fil flexible et inextensible dont tous les points sont soumis à l'action de forces quelconques.

435. – Définitions. – Supposons que, dans un polygone funiculaire, les côtés soient infiniment petits ainsi que les forces appliquées aux sommets. La figure du fil sera, à la limite, une courbe continue, la tension du fil en un point quelconque M sera dirigée suivant la tangente à la courbe en ce point. Enfin, si l'on considère un élément du fil dont le point M fasse partie et si l'on divise la résultante R des forces qui sollicitent cet élément par sa longueur ds, le rapport $\frac{R}{ds}$ ou plutôt la limite F vers laquelle tend ce rapport lorsque ds tend vers zéro, sera ce que l'on nomme la force motrice au point M rapportée à l'unité de longueur du fil.

Les extrémités du fil étant fixes ou sollicitées par des forces données, et la force F étant donnée en chaque point du fil, il s'agit de trouver les conditions d'équilibre du système.

436. – Equations de l'équilibre. – Rapportons les points du fil à trois axes rectangulaires, et considérons un élément $MM' = ds$ de ce fil supposé en équilibre. Désignons par



T la tension au point M,

x, y, z les coordonnées du point M,

X, Y, Z les composantes de la force motrice F relative au point M' de sorte que $X\,ds$, $Y\,ds$, $Z\,ds$, représentent les sommes des composantes suivant les axes des forces qui sollicitent l'élement MM' du fil.

Cet élément ne cessera pas d'être en équilibre si l'on rend la figure invariable ; donc la somme des projections sur chaque axe des forces qui le sollicitent doit être égale à zéro.

Or les forces qui le sollicitent sont les tensions exercées à ses extrémités, qui sont dirigées respectivement suivant les tangentes en ces points et en sens inverse, et de plus les forces $X\,ds$, $Y\,ds$, $Z\,ds$.

La tension T variant d'une manière continue en même temps que l'arc S de la courbe en est une fonction continue ainsi que les cosinus $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ des angles que fait la tangente avec les axes. Les composantes de la tension considérée dans le sens où S augmente sont donc, aux deux extrémités de l'arc ds

$$T\frac{dx}{ds}, \quad T\frac{dy}{ds}, \quad T\frac{dz}{ds}$$

et

$$T\frac{dx}{ds} + d\left(T\frac{dx}{ds}\right), \quad T\frac{dy}{ds} + d\left(T\frac{dy}{ds}\right), \quad T\frac{dz}{ds} + d\left(T\frac{dz}{ds}\right).$$

Par suite, si l'on égale à zéro la somme des composantes des forces appliquées suivant chacun des trois axes, en observant qu'au point M les composantes $T\frac{dx}{ds}$, $T\frac{dy}{ds}$, $T\frac{dz}{ds}$ doivent être changées de signe, il vient

$$(1) \qquad \begin{aligned} &d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X\,ds = 0 \\ &d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y\,ds = 0 \\ &d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z\,ds = 0. \end{aligned}$$

ou bien

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\frac{dT}{ds}\,\frac{dx}{ds} + T\,\frac{d^2x}{ds^2} + X = 0 \\ &\frac{dT}{ds}\,\frac{dy}{ds} + T\,\frac{d^2y}{ds^2} + Y = 0 \\ &\frac{dT}{ds}\,\frac{dz}{ds} + T\,\frac{d^2z}{ds^2} + Z = 0. \end{aligned}$$

437.– Cas particulier où la force motrice admet une fonction.– En ajoutant les équations (2) respectivement multipliées par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, et en observant que l'on a

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

$$\frac{dx}{ds}\,\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\,\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\,\frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

on trouve la relation

$$(3) \qquad dT + X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$$

Supposons que X, Y, Z soient les dérivées partielles d'une fonction $f(x, y, z)$ des coordonnées x, y, z.

$$X = \frac{df}{dx} \qquad Y = \frac{df}{dy} \qquad Z = \frac{df}{dz}$$

la relation (3) devient :

$$dT + df = 0$$

et en intégrant,

$$T + f(x, y, z) = T_0 + f(x_0, y_0, z_0).$$

x_0, y_0, z_0 désignant les valeurs de x, y, z; T en un point déterminé. On voit que T ne dépendra alors que de $f(x, y, z)$: T une fois connu, deux des équations (2) feront connaître la marque du fil.

438. — Conséquences des équations d'équilibre. — Désignons par α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente au fil au point M,

l, m, n les cosinus directeurs de la normale principale, menée du point M au centre de courbure.

ρ le rayon de courbure.

On sait que l'on a :

$$\alpha = \frac{dx}{ds} \qquad \beta = \frac{dy}{ds} \qquad \gamma = \frac{dz}{ds}$$

$$l = \rho\,\frac{d^2x}{ds^2} \qquad m = \rho\,\frac{d^2y}{ds^2} \qquad n = \rho\,\frac{d^2y}{ds^2}$$

Par suite les équations (2) peuvent s'écrire

$$\alpha\,\frac{dT}{ds} + l\,\frac{T}{\rho} + X = 0$$

$$\beta\,\frac{dT}{ds} + m\,\frac{T}{\rho} + Y = 0$$

$$\gamma\,\frac{dT}{ds} + n\,\frac{T}{\rho} + Z = 0.$$

Ces nouvelles relations montrent immédiatement, d'après les propriétés des résultantes, que la force motrice F prise en sens contraire est la résultante :

1° d'une force $\frac{dT}{ds}$ dirigée suivant la tangente au fil,

2° d'une force $\frac{T}{\rho}$ dirigée suivant le rayon de courbure.

D'où résultent les conséquences suivantes :

1° la direction de la force motrice F en chaque point du fil, est dans le plan déterminé par la tangente et la normale principale, c'est à dire dans le plan osculateur de la courbe affectée par le fil.

2° Si F_1 et F_2 désignant respectivement les composantes de F suivant la tangente et suivant le rayon de courbure du fil, on aura

$$(5) \qquad \frac{dT}{ds} = -F_1 \qquad \frac{T}{\rho} = -F_2 .$$

439. Equilibre d'un fil tendu sur une surface. — Considérons l'équilibre d'un fil tendu sur une surface par l'effet de forces appliquées à ses extrémités, la force F se réduit en chaque point à l'action normale de la surface. La composante tangentielle F_1 est égale à zéro ou par suit $\frac{dT}{ds} = 0$, ou $T =$ constante : la tension est donc la même sur toute la longueur du fil.

Ensuite, la direction de la force F, normale à la surface, étant comme on l'a vu, dans le plan osculateur du fil, il s'ensuit que le plan osculateur de la courbe formée par le fil, est en chaque point, normal à la surface sur laquelle ce fil est tendu, propriété qui caractérise une ligne géodésique ou ligne de longueur minimum sur la surface.

Enfin la relation $-F_2 = \frac{T}{\rho}$ dans laquelle T est une constante, montre que la pression exercée par la surface sur un point quelconque du fil est en raison inverse du rayon de courbure.

IV — Applications de la théorie de l'équilibre d'un fil flexible et inextensible

a) — Chaînette.

440. — Equations d'équilibre. — On appelle chaînette

la courbe formée par un fil dont deux points sont fixes et qui est soumise à l'action seule de la pesanteur. Toutes les forces étant parallèles, la courbe sera comprise dans le plan vertical passant par les deux points fixes A et B. Nous prendrons dans ce plan deux axes de coordonnées rectangulaires, dont l'un Ay vertical et en sens contraire de la pesanteur. Nous supposerons le fil homogène et nous désignerons par ε son poids pour l'unité de longueur, d'où il suit que εS sera le poids d'un arc de longueur S et que l'on aura

$$X = 0 \qquad Y = -\varepsilon.$$

Cela posé, les équations (1) se réduisent aux suivantes

$$d\left(T\frac{dx}{dS}\right) = 0$$

$$d\left(T\frac{dy}{dS}\right) = \varepsilon\, dS.$$

441. – Intégration. – On déduit immédiatement de ces équations

$$(1) \qquad T\frac{dx}{dS} = c\,, \quad T\frac{dy}{dS} = \varepsilon S + cc'\,, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\varepsilon S}{c} + c'$$

La première de ces relations montre que la composante horizontale de la pression est la même en tous les points.
En différentiant la dernière, on trouve

$$\frac{d^2x}{dx^2} = \frac{\varepsilon}{c}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ou

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\varepsilon}{c}\sqrt{1+p^2}$$

en posant

$$\frac{dy}{dx} = p.$$

On obtient, en intégrant cette équation,

$$l\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) = \frac{\varepsilon x}{c} + \alpha$$

d'où

$$p + \sqrt{1+p^2} = l^{\frac{\varepsilon x}{c}+\alpha}$$

Résolvant par rapport à p et remplaçant p par $\frac{dy}{dx}$, il vient

$$(2) \qquad \frac{dy}{dy} = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{\varepsilon x}{c}+\alpha} - e^{-\frac{\varepsilon x}{c}-\alpha}\right]$$

et la troisième des équations (1) donne par suite

$$(3) \qquad S = \frac{c}{2\varepsilon}\left[e^{\frac{\varepsilon x}{c}+\alpha} - e^{-\frac{\varepsilon x}{c}-\alpha}\right] - \frac{cc'}{\varepsilon}$$

De l'équation (2) on tire en intégrant

$$(4) \qquad y = \frac{c}{2\varepsilon}\left[e^{\frac{\varepsilon x}{c}+\alpha} + e^{-\frac{\varepsilon x}{c}-\alpha}\right] + c_1$$

c_1 étant une nouvelle constante arbitraire. Les quatre constantes c, c', c_1, α se détermineront en exprimant que la courbe passe par les deux points donnés, a une longueur donnée et que, de plus, les arcs S se comptent à partir du point A par exemple.

442. – Détermination des constantes arbitraires. – Nous prendrons l'origine des coordonnées en A, et nous désignerons par b et K les coordonnées de B et par l la longueur totale du fil.

Faisant successivement $x=0$, $y=0$, puis $x=b$, $y=K$ dans l'équation (4) de la courbe, on obtient

$$(5) \qquad \begin{cases} \frac{c}{2\varepsilon}\left(e^{\alpha} + e^{-\alpha}\right) + c_1 = 0 \\ K = \frac{c}{2\varepsilon}\left[e^{\frac{\varepsilon b}{c}+\alpha} + e^{-\frac{\varepsilon b}{c}-\alpha}\right] + c_1. \end{cases}$$

d'où, en éliminant c_1,

$$(6) \qquad K = \frac{c}{2\varepsilon}\left[e^{\frac{\varepsilon b}{c}+\alpha} + e^{-\frac{\varepsilon b}{c}-\alpha} - e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right].$$

En exprimant ensuite que la valeur (3) de S est égale à 0 pour $x=0$, et à l pour $x=b$, il vient

$$(7) \qquad \begin{cases} \frac{c}{2\varepsilon}\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right) - \frac{cc'}{\varepsilon} = 0 \\ l = \frac{c}{2\varepsilon}\left[e^{\frac{\varepsilon b}{c}+\alpha} - e^{-\frac{\varepsilon b}{c}-\alpha}\right] - \frac{cc'}{\varepsilon}. \end{cases}$$

d'où en éliminant $\frac{cc'}{\varepsilon}$,

$$(8) \qquad l = \frac{c}{2\varepsilon}\left[e^{\frac{\varepsilon b}{c}+\alpha} - e^{-\frac{\varepsilon b}{c}-\alpha} - e^{\alpha} + e^{-\alpha}\right]$$

On tire des équations (5) et (6)

$$(9) \qquad \begin{aligned} l + K &= \frac{c e^{\alpha}}{\varepsilon}\left(e^{\frac{\varepsilon b}{c}} - 1\right) \\ l - K &= \frac{c e^{-\alpha}}{\varepsilon}\left(1 - e^{-\frac{\varepsilon b}{c}}\right) \end{aligned}$$

En multipliant ces équations membre à membre, on élimine α et on obtient en prenant les racines carrées

$$(10) \qquad \sqrt{l^2 - K^2} = \frac{c}{\varepsilon}\left[e^{\frac{\varepsilon b}{2c}} - e^{-\frac{\varepsilon b}{2c}}\right]$$

ou, en posant $\frac{\varepsilon b}{2c} = z$,

$$\frac{e^{z} - e^{-z}}{z} = \frac{2\sqrt{l^2 - K^2}}{b}$$

La racine z de cette équation transcendante peut se déterminer par l'intersection de la courbe $y = e^{z} - e^{-z}$ avec une droite ayant pour équation

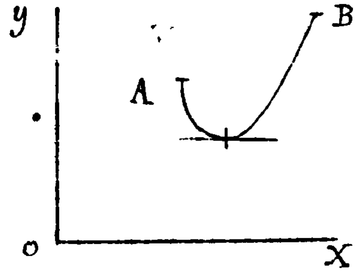
$$y = \frac{2\sqrt{l^2 - b^2}}{b}\, z$$

Connaissant z et par suite c, on connaîtra α au moyen de l'une des équations (9), ou mieux au moyen de l'équation

$$\text{lognép}\left(\frac{l+K}{l-K}\right) = 2\alpha + \frac{\varepsilon b}{c}$$

que l'on obtient en les divisant membre à membre. Connaissant α, l'équation (5) donnera C_1 ; enfin C' sera connu par l'équation (7).

443. – Simplification de l'équation de la chaînette. – Les constantes étant déterminées, il est aisé de connaître les coordonnées du point le plus bas.



En effet pour ce point on a $\frac{dy}{dx} = 0$, c'est à dire (2)

$$\frac{\varepsilon x}{c} + \alpha = -\frac{\varepsilon x}{c} - \alpha$$

d'où :

$$\frac{\varepsilon x}{c} + x = 0 \quad \text{et} \quad x = -\frac{c\lambda}{\varepsilon}$$

Si l'on prend pour axe des y la verticale qui passe par ce point, il suffira de changer x en $x - \frac{c\lambda}{\varepsilon}$, et deviendra

$$y = \frac{c}{2\varepsilon}\left(e^{\frac{\varepsilon x}{c}} + e^{-\frac{\varepsilon x}{c}}\right) + c_1$$

Le second membre ne changeant pas, quand on change le signe de x, il s'en suit que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des y, c'est à dire à la verticale qui passe par le point le plus bas.

Si l'on change y en $y + c_1$, c'est à dire si l'on prend pour origine le point de cette verticale qui est au dessous du point A de la quantité $-c_1$ et que l'on pose $\frac{c}{\varepsilon} = a$, l'équation de la courbe prend la forme simple

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

b) – Courbe des ponts suspendus.

444.– Equations de l'équilibre.– Examinons maintenant la courbe que forme un fil lorsque la force verticale qui sollicite un élément est proportionnelle, non à cet élément lui-même, mais à sa projection horizontale. Ce cas est à très peu près celui des câbles des ponts suspendus lorsque l'on considère comme infiniment voisines les tiges verticales qui supportent le tablier et lorsque l'on néglige le poids du câble.

Soit ε la force rapportée à une projection horizontale égale à l'unité ; $Y ds$ étant la composante de la force appliquée à l'arc ds dont la projection est dx, on aura

$$Y ds = -\varepsilon\, dx$$

et comme $X = 0$, les équations d'équilibre seront

$$d\left(T \frac{dx}{ds}\right) = 0$$

$$d\left(T \frac{dy}{ds}\right) = \varepsilon\, dx$$

445. – Intégration et détermination des constantes. – On déduit de ces équations

$$T\,\frac{dx}{ds} = c, \qquad T\,\frac{dy}{ds} = \varepsilon x + cc', \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\varepsilon x}{c} + c'$$

c et c' étant deux constantes arbitraires.

La première de ces relations montre encore que la composante horizontale de la tension est constante.

Intégrant la dernière et prenant pour origine l'un des points fixes, on aura

$$y = \frac{\varepsilon}{2c}\,x^2 + c'x$$

La courbe formée par le fil est donc une parabole dont l'axe est vertical.

Les constantes c. c' se déterminent en exprimant que la courbe passe par le second point, et que sa longueur est égale à une ligne donnée.

446. Dans tous les ponts suspendus, les forces ne sont pas réparties continûment sur toute l'étendue du câble, mais sont appliquées à un nombre fini de points dont les projections horizontales sont équidistantes. On a alors un polygone funiculaire et on démontre que les sommets de ce polygone jouissent de la propriété remarquable d'être situés sur une même parabole.

Chapitre IV.

Equilibre des systèmes matériels.

I. – Considérations générales.

447. – Après avoir considéré l'équilibre d'un point et l'équilibre des solides invariables, nous allons étudier l'équilibre d'un système de points matériels soumis à des forces quelconques.

448. – Systèmes libres. – Si tous les points sont libres, chacun d'eux devant être en équilibre, il suffira d'exprimer que la résultante des forces qui lui sont appliquées est égale à zéro. La question ne présente alors aucune difficulté spéciale; mais il peut arriver que les points du système soient assujettis à des liaisons.

449. – Systèmes à liaisons. – On entend par liaisons des conditions que le système doit nécessairement remplir. Il peut arriver par exemple,

1° que certains points du système restent à des distances invariables les uns des autres,

2° que certains points soient obligés de rester sur des courbes ou sur des surfaces données,

3° que certaines parties du système, considérées comme des solides invariables, soient assujetties à rester en contact les unes avec les autres.

On peut concevoir les liaisons au point de vue le plus général en imaginant que l'on donne à l'avance certaines relations entre les coordonnées des points du système.

Soit n le nombre des points; le système sera soumis à des liaisons si entre les $3n$ coordonnées, existent K équations

$$f_1 = 0 \qquad f_2 = 0 \, \ldots\ldots\ldots \, f_K = 0 .$$

450. – Paramètres arbitraires. – Le nombre K est nécessairement inférieur à $3n$, sans quoi les $3n$ coordonnées seraient fixées. Soit $K = 3n - r$; les K équations permettent d'exprimer K des $3n$ coordonnées en fonction des r autres, ou plus généralement, les $3n$ coordonnées en fonction de r paramètres $q_1, q_2 \ldots\ldots q_r$, sous la forme

$$x = \varphi(q_1, q_2, \ldots\ldots q_r)$$

$$y = \chi(q_1, q_2, \ldots\ldots q_r)$$

$$z = \psi(q_1, q_2, \ldots\ldots q_r)$$

en sorte que les équations $f_1 = 0$, $f_2 = 0 \ldots$ sont identiquement satisfaites lorsqu'on y remplace $x_1, y_1, \ldots$ par leurs valeurs en $q_1, q_2 \ldots q_r$.

451 – Systèmes à liaisons complètes. – Le nombre $r = 3n - K$ mesure le degré de liberté que les liaisons laissent au système. Le système est complètement libre lorsque r est égal à $3n$, et il est complètement fixe lorsque r est égal à zéro. Lorsque r est égal à 1, c'est à dire lorsqu'il y a $3n-1$ équations de liaison, on dit que le système est à liaisons complètes. Dans ce cas les $3n$ coordonnées s'expriment à l'aide d'un paramètre arbitraire et chacun des points du système est assujetti à décrire une courbe déterminée.

452. – Déplacements compatibles avec les liaisons. – Donner au point du système des déplacements compatibles avec les liaisons, c'est faire varier les $3n$ coordonnées de manière que les équations de liaison soient toujours satisfaites; on obtient évidemment les déplacements compatibles avec les liaisons en faisant varier les paramètres arbitraires q_1, $q_2, \ldots\ldots q_r$.

453. – Forces de liaisons. – Les liaisons imposées à un système équivalent à des forces; car si nous supprimons une liaison, l'état de repos ou de mouvement du système sera modifié, et il est évident que l'on ramènera le système à son état primitif en appliquant à ses divers points certaines forces.

Par exemple,

1° dans le cas où deux points doivent rester à une distance invariable l'un de l'autre, des forces égales et directement opposées, d'une intensité convenable, pourront maintenir l'invariabilité de la distance.

2° dans le cas où un point est obligé de rester sur une courbe ou sur une surface sans frottement, une force égale à la réaction normale de la courbe ou de la surface, pourra produire le même effet.

3° dans le cas où deux parties du système, considérées comme des solides invariables sont assujetties à rester en contact, sans qu'il y ait de frottement entre les surfaces, le même effet pourrait être produit en appliquant aux points qui sont en contact sur les deux surfaces, deux forces égales, d'une intensité convenablement choisie, agissant suivant la normale commune et en sens contraire.

Nous appellerons ces forces forces de liaison et les autres forces agissant sur les points du système seront désignées sous le nom de forces directement appliquées.

454. – Problème général de l'équilibre des systèmes. – Le problème que nous nous proposons de résoudre est le suivant :

Connaissant les liaisons d'un système et les forces directement appliquées, déterminer les conditions de l'équilibre du système.

Il importe de bien concevoir d'abord que, lorsque l'équilibre existe les forces directement appliquées ne se détruisent pas comme cela aurait lieu si le système était libre ; elles produisent les forces de liaison et leur font équilibre. Prenons, par exemple, un point assujetti à rester sur un plan ; ce point peut rester en repos sur ce plan sans qu'aucune force agisse sur lui. Si l'on fait agir sur ce point une force normale au plan, il restera en équilibre, l'action du plan sur le point, étant égale et directement opposée à la force directement appliquée. ainsi, les forces directement appliquées engendrent en général des forces de liaison variables avec les forces directement appliquées.

En substituant aux liaisons les forces qui peuvent en tenir lieu, on fait rentrer le système dans le cas général des systèmes libres, mais les forces de liaison sont inconnues à priori.

Lagrange a montré comment on pourrait à l'aide du principe du travail virtuel, déterminer les conditions d'équilibre d'un système, sans connaître les forces de liaison, et déterminer ensuite ces forces de liaison si on le juge convenable. (1)

L'avantage de ce principe est de pouvoir se traduire en une formule d'où se déduisent par des procédés réguliers de calcul, les équations particulières de l'équilibre de tout système, de sorte que l'on peut considérer la science de l'équilibre de tous les systèmes comme y étant renfermée toute entière.

II. – Principe du travail virtuel.

455. – Définitions. – Lorsqu'on considère un système quelconque de points dans une première position et que l'on suppose ensuite que chacun d'eux soit placé dans une position infiniment voisine de celle qu'il occupait, on nomme déplacement virtuel d'un quelconque de ces points la droite qui joint sa première position à la seconde. Le mot virtuel signifie que l'on considère le déplacement non comme s'effectuant en réalité, mais comme pouvant s'effectuer. Pour désigner un déplacement virtuel nous emploierons la caractéristique δ au lieu de d.

456. – Soit m un point auquel s'applique une force F; concevons un déplacement virtuel δs au point m. A ce déplacement correspond un travail élémentaire que l'on appelle travail virtuel de la force F et qui a pour expression

$$F\,\delta s \cos(F, \delta s)$$

Désignons par

X, Y, Z les composantes de la force F suivant trois axes coordonnées,

$\delta x, \delta y, \delta z$ les projections sur les mêmes axes du déplacement virtuel δs.

(1) Le principe du travail virtuel a été énoncé pour la première fois dans toute sa généralité par Jean Bernouilli (1717); mais c'est Lagrange qui en a développé toutes les conséquences en l'admettant comme base de la mécanique analytique (1788). La première démonstration rigoureuse du principe est due à Fourier (Journal de l'École Polytechnique) 5e cahier, p. 20, an VI) La première question a été l'objet des recherches de plusieurs géomètres, notamment Poinsot et Ampère. (Journal de l'École Polytechnique, 13e cahier, p. 206 et 247, 1806).

On a pour le travail virtuel de la force F,

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z.$$

Enfin, on sait que le travail de la résultante des forces appliquées à un point est égal à la somme des travaux des composantes.

457.— Postulatum.— Quand un point matériel assujetti à rester sur une courbe fixe, est en équilibre, la somme des travaux virtuels des forces directement appliquées à ce point est nulle pour tout déplacement virtuel pris le long de la courbe, c'est à dire compatible avec les liaisons.

Cette proposition devient évidente si l'on admet que l'action de la courbe fixe sur le point est normale à la courbe. Il faut en effet, pour l'équilibre que la résultante des forces appliquées soit égale et directement opposée à l'action de la courbe, c'est à dire normale à cette courbe et il est clair que le travail de cette résultante est nul pour tout déplacement pris le long de la courbe.

458.— Lorsqu'un système de points matériels soumis à des liaisons, est en équilibre, on peut évidemment sans troubler l'équilibre, introduire dans le système des liaisons nouvelles, pourvu que celles-ci soient compatibles entre elles et avec les anciennes.

459.— Théorème du travail virtuel.— La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de points matériels assujetti à des liaisons soit en équilibre est que la somme des travaux virtuels des forces directement appliquées soit nulle pour tous les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons.

Nous démontrerons d'abord que cette condition est nécessaire. Soient en effet $\underline{n}$ le nombre des points du système, K le nombre des équations de liaison.

$$(1) \qquad f_1 = 0 \quad , \quad f_2 = 0, \ldots\ldots \quad , \quad f_K = 0,$$

qui définissent K coordonnées des points en fonction de $3n - K = r$ d'entre elles. Posons arbitrairement r nouvelles équations

$$
(2) \quad \begin{aligned}
&F_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \ldots\ldots x_n, y_n, z_n) = q_1 \\
&F_2(x_1, y_1, z_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots z_n) = q_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&F_r(x_1, y_1, z_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots z_n) = q_r
\end{aligned}
$$

qui, jointes aux équations de liaison (1), permettront d'exprimer les $3n$ coordonnées en fonction de r paramètres $q_1, q_2, \ldots q_r$ sous la forme

$$
(3) \quad \begin{aligned}
x &= \varphi\,(q_1, q_2, \ldots\ldots q_r) \\
y &= \chi\,(q_1, q_2, \ldots\ldots q_r) \\
z &= \psi\,(q_1, q_2, \ldots\ldots q_r)
\end{aligned}
$$

La somme des travaux virtuels des forces appliquées est (331)

$$\Sigma\,(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)$$

Si l'on se borne à considérer les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons, les coordonnées $x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1$, etc doivent satisfaire aux équations de liaison (1), ou, ce qui revient au même (n° 341) aux équations (3). Ainsi

$$\delta x = \frac{d\varphi}{dq_1}\,\delta q_1 + \frac{d\varphi}{dq_2}\,\delta q_2 + \ldots\ldots + \frac{d\varphi}{dq_r}\,\delta q_r$$

$$\delta y = \frac{d\chi}{dq_1}\,\delta q_1 + \frac{d\chi}{dq_2}\,\delta q_2 + \ldots\ldots + \frac{d\chi}{dq_r}\,\delta q_r$$

$$\delta z = \frac{d\psi}{dq_1}\,\delta q_1 + \frac{d\psi}{dq_2}\,\delta q_2 + \ldots\ldots + \frac{d\psi}{dq_r}\,\delta q_r$$

etc. Pour les déplacements compatibles avec les liaisons, la somme des travaux virtuels est donc de la forme

$$Q_1\,\delta q_1 + Q_2\,dq_2 + \ldots\ldots + Q_r\,\delta q_r.$$

où $Q_1, Q_2, \ldots\ldots Q_r$ sont des fonctions de $q_1, q_2 \ldots\ldots q_r$; car les forces X, Y, Z sont regardées comme uniquement fonctions des coordonnées.

Les variations $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_r$ sont arbitraires; donc il faut démontrer que toutes les fonctions $Q_1, Q_2, \ldots Q_r$ sont identiquement nulles.

Or si l'on pose $\delta q_2 = \delta q_3 = \ldots\ldots = \delta q_r = 0$, l'expression se réduit à $Q_1 \delta q_1$. Il ne reste qu'un seul paramètre arbitraire, les autres conservant les valeurs qu'ils possèdent pour l'état considéré du système.

L'équilibre n'est d'ailleurs pas troublé car la fixation de $r-1$ paramètres revient à introduire des liaisons qui sont exprimées analytiquement par les $r-1$ dernière des équations (2) dont les seconds membres sont devenus constants. La valeur de Q_1 n'est pas modifiée.

Les coordonnées ne dépendent plus alors que d'un seul paramètre q_1, le système est à liaisons complètes ; chacun des points est assujetti à demeurer sur une courbe fixe, et se trouve du reste en équilibre. Le travail virtuel de la résultante des forces qui lui sont appliquées est donc nul pour tout déplacement pris le long de la courbe, c'est à dire compatible avec les liaisons nouvelles. Il en est de même pour tous les points ; donc $Q_1 \delta q$ s'annule et puisque δq_1 est arbitraire, on a $Q_1 = 0$.

On démontrerait de même que $Q_2 = \ldots\ldots = Q_r = 0$, et la proposition se trouve établie.

460. — Réciproquement. — Si la somme des travaux virtuels des forces appliquées est nulle pour tous les déplacements compatibles avec les liaisons, le système est en équilibre.

Représentons en effet par S l'ensemble des forces appliquées dont la somme des travaux virtuels est nulle par hypothèse pour les déplacements compatibles avec les liaisons et admettons pour un instant que le système ne soit pas en équilibre.

Supposons qu'il parte du repos ; certains de ses points vont se déplacer dans une direction déterminée. Il est clair qu'on pourra rétablir l'équilibre en appliquant à ces différents points des forces convenables dirigées en sens contraire du déplacement qu'ils tendent à prendre. Soit S_1 l'ensemble de ces nouvelles forces.

Le système étant maintenant en équilibre sous l'action des forces S et S_1 la somme des travaux virtuels de l'ensemble de ces deux systèmes de forces doit être nulle, d'après la proposition directe, pour tous les déplacements compatibles avec les liaisons

Or, parmi tous ces déplacements, considérons en particulier le déplacement effectif que le système aurait pris sous l'action des seules forces S. Par hypothèse, la somme des travaux virtuels des forces S est nulle ; il faut donc qu'il en soit de même de la somme des travaux virtuels des forces S_1. Or, le déplacement de chaque point étant dirigé en sens contraire de la force S_1 correspondante, tous les travaux virtuels des forces S_1 sont négatifs et leur somme ne pourrait être nulle. Il est donc absurde de supposer que le système n'est pas en équilibre

461.– Méthode analytique de Lagrange pour la recherche des conditions d'équilibre d'un système.– Le principe du travail virtuel donnant les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre d'un système permet de déterminer analytiquement la position d'équilibre d'un système soumis à des forces données. En outre Lagrange a montré comment on pouvait en déduire la valeur des forces de liaison.

Soient n le nombre des points d'un système, x, y, z les coordonnées de l'un d'entre eux, X, Y, Z les composantes parallèles aux axes de la résultante des forces qui lui sont appliquées,

$$(1) \qquad f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \quad \ldots\ldots \quad f_K = 0$$

les K équations de liaison. La condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre est

$$(2) \qquad \Sigma\,(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = 0,$$

les variations des coordonnées devant satisfaire aux K équations

$$(3) \qquad \begin{cases} \Sigma\left(\dfrac{df_1}{dx}\,\delta x + \dfrac{df_1}{dy}\,\delta y + \dfrac{df_1}{dz}\,\delta z\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma\left(\dfrac{df_K}{dx}\,\delta x + \dfrac{df_K}{dy}\,\delta y + \dfrac{df_K}{dz}\,\delta z\right) = 0 \end{cases}$$

Il est clair qu'on peut tirer de ces K équations K des coordonnées en fonction des autres. En substituant les valeurs obtenues dans l'expression du travail virtuel, celle-ci ne renfermera plus que $3n - K = r$ variations qui devront être regardées comme arbitraires, de sorte que leurs coefficients devront s'annuler séparément.

Égalant donc à zéro ces coefficients, on obtiendra $3n-K$ équations qui, jointes aux K équations de liaison détermineront les coordonnées des points, au nombre de $3n$, qui correspondent à la position d'équilibre.

462. — Méthode des multiplicateurs. — Les calculs deviennent plus symétriques par la méthode suivante, dite des multiplicateurs, due à Lagrange et dont, on reconnaîtra facilement l'analogie avec un procédé bien connu d'élimination.

Ajoutons à l'équation (2) du numéro précédent les K équations (3) multipliées respectivement par des facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_K$, nous aurons

$$\Sigma\left(X + \lambda_1 \frac{df_1}{dx} + \lambda_2 \frac{df_2}{dx} + \ldots\ldots + \lambda_K \frac{df_K}{dx}\right)\delta x$$

$$+ \Sigma\left(Y + \lambda_1 \frac{df_1}{dy} + \lambda_2 \frac{df_2}{dy} + \ldots\ldots + \lambda_K \frac{df_K}{dy}\right)\delta y$$

$$+ \Sigma\left(Z + \lambda_1 \frac{df_1}{dz} + \lambda_2 \frac{df_2}{dz} + \ldots\ldots + \lambda_K \frac{df_K}{dz}\right) dz$$

équation qui doit avoir lieu pour tous les déplacements compatibles avec les liaisons. Or on peut profiter de l'indétermination des coefficients λ pour annuler K, des coefficients des variations, ce qui revient précisément à exprimer au moyen des équations de liaison différentiées, K des variations en fonction des autres. Les $3n-K$ variations restantes deviennent alors complètement arbitraires, de sorte que, pour déterminer les conditions d'équilibre, il faut égaler à zéro leurs coefficients.

On est ainsi conduit à égaler à zéro les $3n$ coefficients des variations dans l'équation ci dessus ce qui fournit $3n$ équations qui, jointes aux équations de liaison (1) du numéro précédent, constituent un système de $3n+K$ équations pour déterminer les $3n$ coordonnées et les K coefficients λ.

463. — Détermination des forces dues aux liaisons. — Non seulement la méthode des multiplicateurs conduit aux conditions

d'équilibre, mais elle permet de déterminer les forces que l'on devrait appliquer aux différents points du système pour remplacer l'effet de chacune des liaisons, c'est à dire les forces de liaison.

Considérons en effet les équations qui correspondent à l'un des points du système, savoir

$$X + \lambda_1 \frac{df_1}{dx} + \lambda_2 \frac{df_2}{dx} + \ldots\ldots + \lambda_K \frac{df_K}{dx} = 0,$$

$$Y + \lambda_1 \frac{df_1}{dy} + \lambda_2 \frac{df_2}{dy} + \ldots\ldots + \lambda_K \frac{df_K}{dy} = 0$$

$$Z + \lambda_1 \frac{df_1}{dz} + \lambda_2 \frac{df_2}{dz} + \ldots\ldots + \lambda_K \frac{df_K}{dz} = 0.$$

Elles expriment que ce point, regardé comme entièrement libre, serait en équilibre sous l'action des forces appliquées et d'une autre force dont les composantes X', Y' et Z' auraient pour valeurs

$$X' = \lambda_1 \frac{df_1}{dx} + \lambda_2 \frac{df_2}{dx} + \ldots\ldots + \lambda_K \frac{df_K}{dx}$$

$$Y' = \lambda_1 \frac{df_1}{dy} + \lambda_2 \frac{df_2}{dy} + \ldots\ldots + \lambda_K \frac{df_K}{dy}$$

$$Z' = \lambda_1 \frac{df_1}{dz} + \lambda_2 \frac{df_2}{dz} + \ldots\ldots + \lambda_K \frac{df_K}{dz}$$

Cette dernière n'est autre chose que l'action exercée par les liaisons sur le point considéré.

On peut remarquer en outre que si la liaison f_1 était supprimée et remplacée par des forces appliquées aux différents points et ayant des composantes représentées pour chacun d'eux par $\lambda_1 \frac{df_1}{dx}$, $\lambda_1 \frac{df_1}{dy}$, $\lambda_1 \frac{df_1}{dz}$, le système n'en serait pas moins en équilibre. Ces forces représentent donc l'action exercée sur les différents points par la liaison f_1.

III. – Applications du principe du travail virtuel.

464. – Equilibre d'un solide libre. – Dans un solide invariable les liaisons consistent en ce que les différents points sont à des distances invariables les uns des autres. Mais au lieu de faire

usage des équations qui s'obtiendraient en exprimant que la distance des points, considérés deux à deux est constante, il est plus simple de chercher directement l'expression générale des déplacements compatibles avec les liaisons.

On a établi, en Cinématique, que les composantes du déplacement le plus général d'un point (x, y, z) d'un solide invariable sont données par les formules

$$\delta x = f + \beta z - \gamma y$$
$$\delta y = g + \gamma x - \alpha z$$
$$\delta z = h + \alpha y - \beta x$$

f, g, h ; α, β, γ désignant six quantités infiniment petites qui ont les mêmes valeurs pour tous les points du solide.

L'expression du travail virtuel est donc, pour tous les déplacements compatibles avec les liaisons :

$$\Sigma \left[X(f+\beta z-\gamma y) + Y(g+\gamma x-\alpha z) + Z(h+\alpha y-\beta x) \right]$$

ou, en faisant usage des notations adoptées en statique et remarquant que f, g, h ; α, β, γ sortent des signes Σ,

$$fP + gQ + hR + \alpha L + \beta M + \gamma N$$

Quand le solide est entièrement libre, les six paramètres f, g, h ; α, β, γ sont arbitraires, et pour que la somme des travaux virtuels soit nulle dans tout déplacement compatible avec les liaisons, il faut et il suffit que l'on ait

$$P = 0 \qquad Q = 0 \qquad R = 0$$
$$L = 0 \qquad M = 0 \qquad N = 0$$

Ce sont les conditions d'équilibre qui ont été trouvées précédemment.

465. — Equilibre d'un solide qui a un point fixe. — Quand le solide a un point fixe, la translation de ce point est nulle. On peut donc prendre

$$f = 0 \qquad g = 0 \qquad h = 0$$

Les composantes α, β, γ de la rotation restent arbitraires. Les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre sont donc

$$L = 0 \quad M = 0 \quad N = 0$$

466.— Equilibre d'un solide qui a deux points fixes.— Le seul mouvement du solide compatible avec les liaisons est une rotation autour de la droite qui joint les deux points fixes. En prenant cette droite pour axe de z, on a

$$f = 0 \quad g = 0 \quad h = 0 \; ; \quad \alpha = 0 \, , \; \beta = 0 .$$

La condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre est donc

$$N = 0 .$$

On retrouve ainsi les résultats obtenus précédemment

467.— Equilibre de la vis.— La vis est un solide constitué par un noyau qui n'est autre chose qu'un cylindre de révolution et qui porte en saillie un filet. Celui ci est engendré par une figure plane affectant tantôt la forme d'un triangle tantôt celle d'un carré, dont le plan passe constamment par l'axe du cylindre et dont tous les points décrivent des hélices de même pas. L'écrou est un solide traversé par la vis et dans lequel on a pratiqué des vides correspondant aux saillies du filet. Tantôt la vis est fixe et l'écrou mobile, tantôt c'est l'inverse qui a lieu.

Nous supposerons la vis fixe et nous nous proposerons de trouver les conditions d'équilibre de l'écrou.

Prenant l'axe de la vis pour axe des z, le seul déplacement compatible avec les liaisons se compose d'une translation parallèle à OZ et d'une rotation autour de cet axe, ce qui réduit immédiatement la condition d'équilibre à

$$h R + \gamma N = 0$$

Mais le système est à liaisons complètes ; h et γ ne sont donc pas indépendants. Il est facile de voir que si l'on représente le pas H, on a en valeur absolue

$$\frac{h}{\gamma} = \frac{H}{2\pi}$$

Supposant, pour fixer les idées, que quand l'écrou monte, il tourne dans le sens direct, c'est à dire de gauche à droite, le signe de γ sera le même que celui de h et la condition d'équilibre sera

$$HR + 2\pi N = 0.$$

Les forces appliquées à l'écrou sont d'ordinaire une force P perpendiculaire au rayon du cylindre et dont on désignera par p la distance à l'axe, puis une force Q parallèle à l'axe. La valeur absolue de N est ainsi Pp et celle de R est $-Q$, la condition d'équilibre devient

$$\frac{P}{Q} = \frac{H}{2\pi p}$$

La force P est la puissance et la force Q est la résistance. Pour l'équilibre, il faut que la puissance soit à la résistance dans le rapport du pas à la circonférence décrite par le point d'application de la puissance. On peut donc, au moyen de la vis, faire équilibre à une résistance donnée au moyen d'une puissance très-faible. Il suffit pour cela de diminuer suffisamment le rapport $\frac{h}{p}$.

Chapitre V.

Equilibre des solides naturels.

I. Considérations générales.

468. — Les solides naturels diffèrent notablement des solides invariables qui ont été considérés jusqu'à présent sous l'influence des forces qui leur sont appliquées, ils éprouvent en général des déformations dont la grandeur varie avec la nature du solide. A la vérité ces déformations sont ordinairement très légères, et on peut, dans la plupart des cas, les négliger, de sorte que les conditions d'équilibre s'obtiennent comme pour les solides invariables.

D'autre part, quand l'équilibre d'un système matériel est établi, on peut, sans troubler l'équilibre, introduire des liaisons nouvelles. Les conditions d'équilibre obtenues pour les solides invariables peuvent donc être appliquées, sans aucune erreur, aux solides naturels, en leur attribuant la forme qu'ils prennent sous l'action des forces qui leur sont appliquées. Mais cette méthode exigerait que l'on connut à priori les déformations des solides, ce qui est extrêmement rare.

Quand on cherche à déterminer à la fois les déformations et les conditions d'équilibre d'un solide, on rencontre de grandes difficultés. On est conduit à des problèmes très complexes qui constituent la théorie de l'élasticité.

Les déformations des solides donnent naissance à des forces provenant de l'action mutuelle des molécules, et qu'il faudrait faire entrer dans les conditions d'équilibre si l'on voulait obtenir la solution rigoureuse de la question.

Dans ce qui va suivre, on négligera les déformations des solides, et, par suite, les forces qui en sont la conséquence. Il est toutefois un cas où il est impossible d'agir de cette manière, c'est celui où l'on considère les actions mutuelles de deux solides qui se trouvent en contact.

469. — Actions mutuelles de deux solides en contact. — Quand deux

solides naturels sont en contact par certaines portions de leurs surfaces et qu'ils se trouvent en équilibre, les surfaces de contact présentent toujours des déformations qui bien que très petites donnent cependant naissance à des forces d'intensité considérable et qu'il est impossible de négliger quand on recherche les conditions d'équilibre de l'un ou l'autre de ces corps.

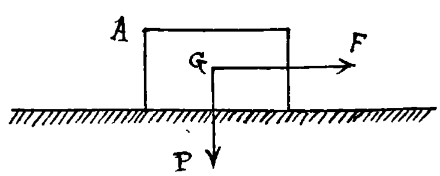
Soient A et B les deux solides, les actions exercées dans le voisinage de la surface de contact, par les molécules de B sur celles de A ne peuvent toutes être considérées isolément, pour les faire entrer avec toutes les forces appliquées dans les équations d'équilibre. On ne peut tenir compte de ces actions qu'en les considérant dans leur ensemble, et en leur substituant un petit nombre de forces capables de produire les mêmes effets.

Le contact des deux solides ne s'établit jamais en un point unique, en raison des déformations qu'ils éprouvent. C'est ainsi qu'un boulet en fonte posé sur une table horizontale ne la touche pas seulement en un point géométrique. Une petite portion de la surface du boulet s'aplatit légèrement et s'applique sur une portion correspondante de la surface de la table devenue elle même légèrement concave. On peut cependant sans inconvénient faire abstraction de l'étendue de cette surface, et parler du contact du boulet avec la table comme si c'était simplement le contact d'une sphère et d'un plan.

Dans le cas particulier que nous considérons, le boulet n'étant soumis qu'à son poids, les actions moléculaires que la table exerce sur lui peuvent être évidemment remplacées par une force unique, égale et contraire à ce poids. et, par conséquent, normale au plan tangent commun.

Mais dans la plupart des cas, l'action mutuelle de deux solides en contact n'est nullement dirigée suivant la normale commune et c'est ici qu'intervient une notion nouvelle celle du frottement.

470. – Du frottement. – Considérons un solide naturel dont la partie supérieure forme un plan horizontal et sur ce plan supposons placé un autre solide A de poids P qui touche le plan par un certain nombre de points.



Si le solide A est soumis uniquement

à son poids, la resultante des actions du plan sur ce solide est, comme on l'a fait observer au numéro précédent, égale et contraire au poids P; elle est donc normale et passe par le centre de gravité G.

Appliquons maintenant au solide parallèlement au plan une force F tendant à le faire glisser horizontalement. Si cette force F est très petite, l'expérience prouve qu'elle ne produit aucun effet, de sorte que l'équilibre n'en subsiste pas moins. Il faut donc qu'il se développe, entre les molécules du corps A et celles du plan, de nouvelles actions qui s'opposent à ce que la force produise son effet. En d'autres termes, l'action du plan sur le solide A doit être égale et opposée à la résultante du poids P et de la force F; elle n'est donc plus dirigée suivant la normale au plan.

Si l'on augmente progressivement l'intensité de la force F, il arrivera un moment où l'équilibre cessera d'exister et où le corps commencera à se mettre en mouvement.

On peut toujours décomposer l'action du plan sur le solide en deux forces, l'une normale, l'autre parallèle au plan. La première, dans l'hypothèse où nous sommes placés, est constante, mais la deuxième augmente progressivement, sans pouvoir toutefois dépasser une certaine limite.

Soit f, la valeur de F pour laquelle le corps A commence à se mouvoir; cette valeur est la limite de l'action tangentielle du plan; on lui donne le nom de frottement.

471.– Lois expérimentales du frottement.– L'étude du frottement a été faite expérimentalement en réalisant une disposition tout à fait analogue à celle que l'on vient de décrire. Les résultats auxquels on est parvenu sont les suivants :

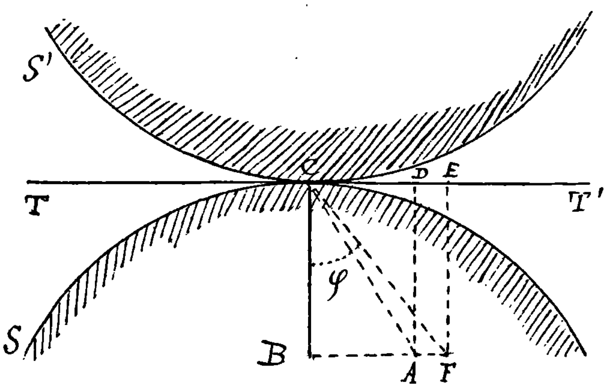
1°. Le frottement est proportionnel à la pression, c'est à dire à l'action normale.

2°. Le frottement est indépendant de l'étendue des surfaces en contact.

3°. Le frottement dépend de la nature et de l'état des surfaces en contact.

Il résulte de la première loi que si l'on considère deux solides en contact entre lesquels s'exerce une pression normale N, le frottement sera fN, f désignant une constante qui ne dépend que de la nature et de l'état des surfaces en contact. Cette constante f s'appelle coefficient de frottement.

472. – Actions mutuelles de deux solides en équilibre qui se touchent en un point. – Il est facile de se rendre compte de l'action qu'exercent l'un sur l'autre deux solides S et S' qui sont en équilibre et qui se touchent en un point C. En outre de l'action normale $CB = N$, le solide S' exerce sur le solide S une action tangentielle dont la grandeur et la direction sont inconnues à l'avance.



Tout ce que l'on sait, c'est que cette action tangentielle CD est contenue dans le plan tangent TT' commun aux deux surfaces et que sa grandeur est inférieure à fN, f désignant le coefficient de frottement.

Prenant $CE = fN$, et menant la diagonale CF du rectangle construit sur CB et CE, cette diagonale fait avec la normale commune un angle φ tel que

$$\tan g = \frac{fN}{N} = f$$

et qui ne dépend, par suite, que de la nature et de l'état des surfaces.

Cet angle s'appelle angle de frottement.

Si l'on fait tourner CF autour de CB, on obtient un cône de révolution ayant φ pour demi angle au sommet et il est clair que l'action totale CA exercée par S' sur S est dirigée à l'intérieur de ce cône. C'est tout ce que l'on peut dire à priori sur cette action.

Dans le tableau suivant on a reproduit quelques-unes des valeurs du coefficient de frottement f et de l'angle de frottement φ obtenues par l'expérience.

Nature des surfaces en contact		Coefficient f	Angle φ.
Bois sur bois	secs	0,50	26°.34'
	enduits gras	0,20	11°.19'
Métaux sur métaux	secs	0,19	10°.46'
	enduits gras	0,10	5°.41'
Bois sur métal	secs	0,60	30°.58'
	enduits gras	0,12	6°.51'

II. _ Equilibre des solides en ayant égard au frottement.

473. _ Deux solides déformables S et S' se touchent en un point C.

Leur action mutuelle est d'après le numéro précédent, dirigée, quand ils sont en équilibre, à l'intérieur d'un cône ayant pour axe la normale commune aux deux surfaces et pour demi angle au sommet l'angle de frottement φ. La grandeur de cette action est indéterminée. Si N désigne la composante normale de l'action, la composante tangentielle est inférieure à fN, et le mouvement se produira quand cette composante atteindra la valeur fN.

Il est facile de voir maintenant comment doivent être modifiées les conditions d'équilibre des deux solides en contact quand il s'agit des corps naturels.

Pour les solides invariables, la condition nécessaire et suffisante était que la résultante des forces directement appliquées à l'un des solides passât par le point de contact, fût normale à la surface et dirigée de manière à appliquer les solides l'un contre l'autre.

Pour les solides naturels, les conditions sont les suivantes :

1°. Les forces directement appliquées à l'un des solides doivent avoir une résultante unique ;

2°. Cette résultante doit passer par le point de contact,

3°. Elle doit faire avec la normale commune un angle inférieur à l'angle de frottement ;

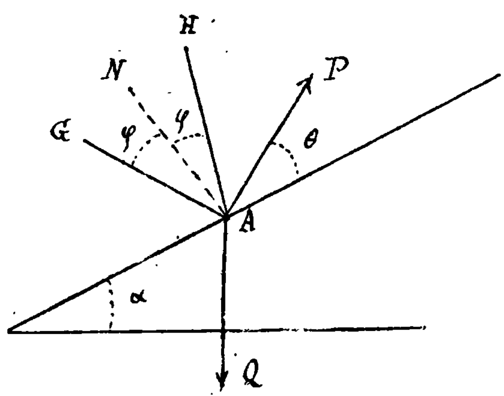
4°. Elle doit être dirigée de manière à appliquer les deux solides l'un contre l'autre.

Ces conditions suffisent pour assurer l'équilibre de l'un des solides quand l'autre est fixe. Mais si on les considère tous deux simultanément, il faut de plus que les résultantes des forces appliquées à chacun d'eux soient égales et directement opposées.

Quand il existe plusieurs points de contact, les actions réciproques en chacun de ces points sont encore généralement obliques aux surfaces. Lorsque l'équilibre existe, le système des forces appliquées à l'un des solides et celui des actions que ce solide exerce sur l'autre doivent constituer des systèmes de forces équivalents, car chacun d'eux fait équilibre aux actions du deuxième solide sur le premier.

Afin de préciser le problème, et pour ne pas rencontrer de conditions exprimées par des inégalités, on cherche d'ordinaire les conditions limites de l'équilibre, c'est à dire que l'on suppose l'action tangentielle égale à fN. La direction de cette action est en sens inverse du glissement qui tend à se produire. Examinons quelques cas particuliers.

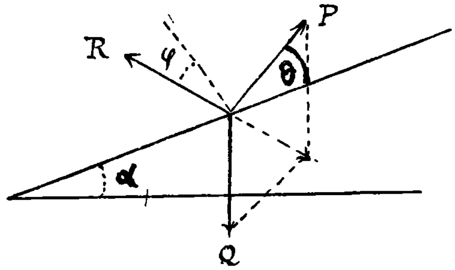
474.- Plan incliné. – Supposons que l'on pose sur un plan incliné formé par un solide déformable un solide déformable que nous considérerons pour plus de simplicité comme réduit à un point A. Cherchons les conditions d'équilibre de ce point en le supposant sollicité par son poids Q par une force P, faisant un angle θ avec le plan incliné et située dans un plan vertical passant par la ligne de plus grande pente du plan incliné dont nous désignerons par α l'inclinaison sur l'horizon.



Soit N la réaction normale du plan, nous considérerons uniquement le cas où la réaction tangentielle est égale à fN.

Dans ces conditions, l'action totale du plan sur le point, qui est évidemment dans le plan vertical considéré est dirigé suivant la droite AG si le mouvement qui tend à se produire est ascendant ou suivant AH si ce mouvement est descendant, les deux droites AG et AH faisant l'angle

φ avec la normale au point. Examinons séparément ces deux cas particuliers.



1°. Le mouvement qui tend à se produire est ascendant. Les trois forces P, Q, R appliquées au point devant se faire équilibre on a

$$\frac{P}{\sin(Q,R)} = \frac{Q}{\sin(R,P)} = \frac{R}{\sin(P,Q)}$$

or

$$(Q,R) = \frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2} - \varphi = \pi - (\alpha + \varphi)$$

$$(R,P) = \varphi + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi)$$

$$(P,Q) = \theta + \frac{\pi}{2} + \alpha = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \theta)$$

La condition d'équilibre est donc

$$\frac{P}{\sin(\alpha+\varphi)} = \frac{Q}{\cos(\theta-\varphi)} = \frac{R}{\cos(\alpha+\theta)}$$

d'où l'on tire

$$P = Q\,\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\theta-\varphi)}$$

Quand P dépassera la valeur donnée par cette équation, le mouvement ascendant se produira.

L'angle θ auquel correspond le minimum de P est évidemment égal à l'angle de frottement φ.

De plus, la valeur de R devant être positive, il faut que $\alpha + \theta$ soit inférieur à $\frac{\pi}{2}$.

2° Le mouvement qui tend à se produire est descendant. On obtient les conditions d'équilibre en remplaçant φ par $-\varphi$ dans les équations précédentes, ainsi qu'il est facile de le vérifier. On a donc

$$P = Q\,\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos(\theta+\varphi)}$$

$$R = Q\,\frac{\cos(\alpha+\theta)}{\cos(\theta+\varphi)}$$

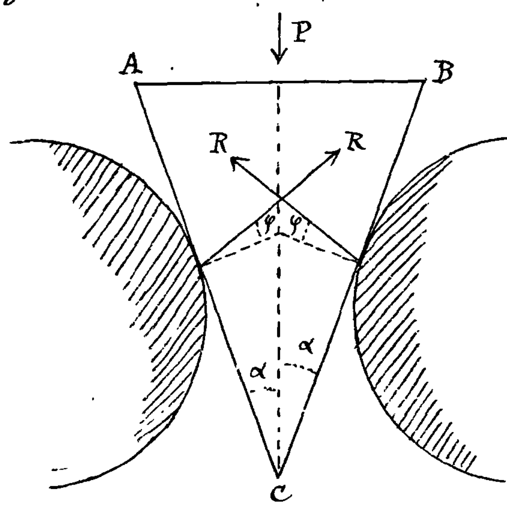
Il faut alors distinguer deux cas suivant que α est supérieur ou inférieur à φ.

Si α est supérieur à φ, la force P est bien dirigée comme l'indique la figure précédente, c'est à dire qu'elle tend à donner au point un mouvement ascendant, car $\cos(\theta+\varphi)$ doit être positif. La valeur de θ à laquelle correspond le minimum de P est évidemment égale à $-\varphi$.

Si α est inférieur à φ, ($\cos(\theta+\varphi)$ doit être négatif, ainsi que $\cos(\alpha+\theta)$. La force P tend à faire descendre le corps ; elle est dirigée de l'autre côté de la verticale.

Dans le cas particulier où α serait égal à φ, la force P serait nulle. De là un procédé pour déterminer directement l'angle φ. Il suffirait de faire croître progressivement l'inclinaison α du plan incliné jusqu'au moment où le corps, soumis uniquement à son poids, commencerait son mouvement de descente. L'angle α serait alors égal à l'angle φ.

475.- Equilibre du coin isocèle.- Le coin isocèle est un prisme en bois ou en métal ayant pour section droite un triangle isocèle ABC. Ce triangle est enfoncé à coups de maillet entre deux surfaces que l'on veut séparer. Nous supposerons le coin placé verticalement et les deux surfaces de même nature. Le coin est soumis à une force verticale P et aux actions RR des surfaces appliquées en deux points D et E placés symétriquement par rapport à la verticale.



Cherchons la condition d'équilibre du coin en le supposant sur le point de se mouvoir de haut en bas. Chacune des actions R fait alors avec la normale correspondante à la surface du coin un angle φ et est dirigée en dessus de cette normale.

Les deux actions R sont évidemment égales puisque la projection des forces appliquées au coin sur l'horizontale doit être nulle pour l'équilibre. Ces deux forces R se coupent du reste en un point de la verticale ; par conséquent les trois forces appliquées au coin se rencontrent en un même point, et il suffit d'exprimer que la somme des projections sur la verticale est nulle. De là on tire, en désignant par α le demi-angle au sommet du coin

$$P = 2R \sin(\alpha+\varphi)$$

Supposant, au contraire, le coin sur le point de se mouvoir de bas en haut, la condition d'équilibre s'obtient en changeant le signe de φ et l'on obtient

$$P = 2R \sin(\alpha-\varphi)$$

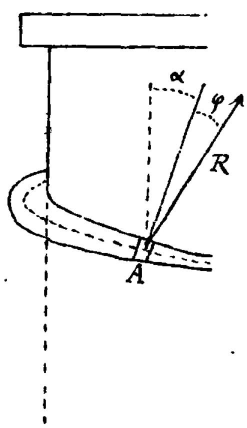
Si α est plus grand que φ, la valeur de P est positive, de sorte que le coin remonterait de lui-même si on n'appliquait pas la force P de haut en bas.

Si au contraire, α est inférieur à φ, P devient négatif, le coin reste en équilibre de lui même et ne peut remonter que si on lui applique une force verticale dirigée de bas en haut.

476.— Vis à filet carré.— Nous avons obtenu précédemment la condition d'équilibre de la vis en la regardant comme un solide invariable. Pour tenir compte du frottement, nous supposerons encore la vis fixe et l'écrou mobile, et nous admettrons que la vis soit rayée de telle façon que l'écrou monte en tournant dans le sens direct.

Les forces appliquées à l'écrou sont un couple P perpendiculaires à l'écrou et une force Q agissant dans le sens vertical. Cherchons les conditions d'équilibre en supposant le mouvement ascendant sur le point de se produire.

Considérons un élément de la surface hélicoïdale comprise entre deux génératrices infiniment voisines, on peut admettre que les réactions qui se produisent sur cet élément se réduisent à une force appliquée en son milieu, c'est à dire en un point de l'hélice moyenne et faisant un angle φ avec la normale. Soit r le rayon du cylindre sur lequel est tracée l'hélice moyenne. en chaque point de cette hélice est ainsi appliquée une force R, et si α désigne l'angle que forme la tangente à l'hélice avec le plan de la



section droite, ou l'angle de la normale avec l'axe, la force R fait avec cet axe un angle $\alpha+\varphi$ et est contenue dans le plan tangent au cylindre sur lequel est tracée l'hélice moyenne. Il suffit pour obtenir les conditions d'équilibre que la somme des projections des forces sur l'axe de la vis soit nulle ainsi que la somme de leurs moments par rapport au même axe. On trouve ainsi

$$Q = \Sigma R \cos(\alpha+\varphi) = \cos(\alpha+\varphi)\, \Sigma R\,,$$
$$Pp = \Sigma R r \sin(\alpha+\varphi) = r \sin(\alpha+\varphi)\, \Sigma R$$

et la condition d'équilibre est

$$Pp = Qr\, tg\,(\alpha+\varphi)$$

Quand il n'y a pas de frottement, φ s'annule et la condition d'équilibre se réduit à

$$Pp = Qr\, tg\,\alpha.$$

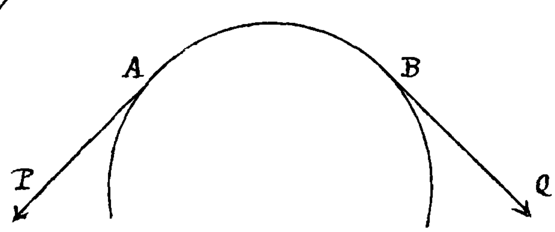
On vérifie sans difficulté qu'elle est identique à celle qui a été obtenue précédemment, savoir $2\pi\, Pp = Q\,h$.

L'angle $\alpha+\varphi$ doit être inférieur à $\frac{\pi}{2}$; en effet, pour $\alpha+\varphi=\frac{\pi}{2}$, le couple deviendrait infini ; au delà il faudrait pour produire le mouvement dans le sens opposé, changer le sens du couple Pp. Pour le cas où le mouvement descendant serait sur le point de se produire, la condition d'équilibre s'obtient en changeant le signe de φ ; on a

$$Pp = Qr\, tg\,(\alpha-\varphi)$$

Lorsque α est égal à φ, la force Q devient infinie, si φ est supérieur à α, on ne peut produire le mouvement descendant qu'en aidant à l'action du couple par une force tendant également à faire descendre la vis.

477. — Equilibre d'une corde enroulée sur un cylindre. — Considérons une corde enroulée sur un cylindre du point A jusqu'au point B, cette corde est sollicitée par une puissance P et une résistance Q.



Cherchons la condition d'équilibre en tenant compte du frottement au moment où le mouvement est sur le point de se produire dans le sens de la force Q.

En un point quelconque M du fil, il y a équilibre entre les forces appliquées et deux autres forces, l'une normale et égale à $\frac{T}{\rho}$, l'autre tangentielle et égale à $\frac{dT}{ds}$, T désignant la tension de la corde et ρ le rayon de courbure du cylindre.

La seule force appliquée au point M est la réaction du cylindre sur la corde, laquelle peut se décomposer en deux autres, l'une normale $N\,ds$, l'autre tangentielle $fN\,ds$. On a donc, en ayant égard aux signes,

$$\frac{dT}{ds} = fN,$$

$$\frac{T}{\rho} = N$$

d'où

$$\frac{dT}{T} = f\frac{ds}{\rho}$$

Si l'on compte les arcs à partir de A et si l'on remarque que, pour $S = 0$, $T = P$, on obtient en intégrant

$$T = Pe^{f\int_0^s \frac{ds}{\rho}}$$

La relation entre P et Q est donc, en appelant σ l'arc AB.

$$Q = Pe^{f\int_0^\sigma \frac{ds}{\rho}}$$

quand le cylindre est de révolution, cette relation devient

$$Q = Pe^{f\frac{\sigma}{\rho}},$$

ou, en désignant par α l'angle au centre correspondant AB,

$$Q = Pe^{f\alpha}$$

La force Q croît ainsi en progression géométrique quand l'angle α croît en progression arithmétique.

En supposant le coëfficient de frottement égal à 0.20, on trouve ainsi

angle α	Rapport $\frac{Q}{P}$
π	1.874
2π	3.514
4π	12.345
6π	48.316

On arrive ainsi à faire équilibre à une résistance considérable au moyen d'une puissance très-faible.

Livre IV.

Théorie de la gravitation.

478. La théorie de la gravitation, dont nous allons donner l'exposé très-succinct, offre un exemple simple de l'usage qui peut être fait de la Mécanique rationnelle dans l'étude des phénomènes naturels.

Ce qui caractérise la méthode des sciences physiques, c'est l'appui mutuel que s'y prêtent l'observation et le calcul; il importe de préciser les procédés distincts que les Physiciens et les Géomètres appliquent au développement de cette méthode.

Les Physiciens observent ou expérimentent les faits dans toutes les circonstances réalisables, ils découvrent les lois, c'est à dire les relations qui existent entre les éléments variables d'un phénomène; puis ils coordonnent les lois qui régissent une même classe de phénomènes en faisant voir qu'ils ne sont que les corollaires d'une loi plus générale dont l'énoncé constitue le principe partiel de la classe de phénomènes dont il s'agit.

L'ensemble des lois homologues qui dérivent de ce principe forme alors ce que l'on appelle une théorie physique.

Les Géomètres suivent une marche distincte de la précédente, ils posent à priori un principe hypothétique. De ce principe, que l'ensemble des phénomènes paraît indiquer, ils déduisent toutes les conséquences par l'emploi rigoureux des méthodes mathématiques. Il reste alors à comparer ces conséquences aux faits, pour juger de la valeur du principe.

L'emploi de ces deux procédés d'investigation a établi un certain nombre de principes partiels qui paraissent régir l'ensemble des phénomènes naturels; les efforts de la science contemporaine tendent à déterminer les relations réciproques de ces principes pour les fondre en un principe unique constituant la loi véritablement primordiale.

Nous allons faire connaître l'enchaînement d'idées qui a permis de déterminer, suivant cette marche, le principe et la théorie de la gravitation universelle.

Chapitre 1er

Principe de la Gravitation.

479. – Lois de Képler. – C'est en 1618 que Képler trouva les lois du mouvement des planètes. Ces lois, déduites des observations de Tycho-Brahé, sont au nombre de trois dont nous allons donner les énoncés, en considérant les planètes et le Soleil comme de simples points matériels.

1° les planètes se meuvent dans des plans passant par le Soleil ; et leurs rayons vecteurs, partant du Soleil, décrivent des aires proportionnelles au temps ;

2° les orbites des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers ;

3° les carrés des durées des révolutions des planètes autour du Soleil sont proportionnels au cube des grands axes de leurs orbites.

C'est en partant de ces lois que Newton est arrivé, en 1866, à la découverte de la gravitation universelle. (1)

480. – Dans le système de Copernic, que les lois de Képler n'ont fait que compléter, on regardait le soleil comme fixe. Le mouvement des planètes autour du Soleil, tel qu'il est défini par les lois de Képler était donc considéré comme un mouvement absolu. Plaçons-nous d'abord à ce point de vue, et voyons les conséquences que l'on peut en tirer.

481. – Conséquence de la première loi. – On a démontré (n° 224) le théorème suivant :

Lorsqu'un point se meut dans un plan, de telle sorte que le rayon vecteur qui joint le mobile à un point fixe de ce plan décrive une aire proportionnelle au temps, la force qui sollicite le mobile passe constamment par le point fixe.

Il résulte de ce théorème et de la première loi de Képler que la force qui sollicite une planète passe par le Soleil.

---

(1) Le livre des Principes qui renferme le développement de la théorie, n'a été publié qu'en 1685.

482. — Conséquence de la deuxième loi. — La deuxième loi de Kepler détermine la loi suivant laquelle la force qui agit sur une planète varie avec la position de cette planète sur son orbite.

On sait en effet que, dans le mouvement dû à une force centrale, la force est donnée par la formule

$$F = \frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right]$$

dans laquelle on désigne par

c la constante des aires,
m la masse du mobile,
r la distance du mobile au centre fixe,
θ l'angle compris entre le rayon vecteur r et une direction fixe passant par le centre fixe.

On considère r, dans cette formule, comme une fonction de θ déterminée par l'équation de la trajectoire.

Dans le cas d'une planète, cette équation peut, d'après la deuxième loi, être mise sous la forme

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\theta}{p}$$

en désignant par e et p l'excentricité et le paramètre de l'ellipse ; on en déduit la valeur

$$F = \frac{mc^2}{p}\frac{1}{r^2}$$

Cette valeur étant positive, la force est dirigée de la planète vers le Soleil ; elle est attractive. De plus, son intensité varie en raison inverse du carré de la distance de la planète au Soleil.

483. — Il ne faut pas se méprendre sur le sens rigoureux de ce résultat ; il prouve seulement que, dans le mouvement tel qu'il a lieu pour chaque planète, la force qui agit sur elle suit la loi que nous venons de déterminer. Mais il ne prouve pas que cette loi serait la même dans le mouvement de la même planète que détermineraient d'autres circonstances initiales ; il ne prouve pas, en particulier, que cette planète, placée sans vitesse à différentes distances du Soleil, serait attirée en raison inverse du carré de la distance. En effet, on aurait pu exprimer la force F en fonction de θ, ou même de t, et l'on en aurait conclu, avec autant de raison, d'autres lois pour la force.

484.— En général, quelle que soit la nature d'une force centrale F, les coordonnées r, θ du point sur lequel elle agit s'expriment, par l'intégration, en fonction du temps et de quatre constantes arbitraires (n° 261). La force F étant une fonction du temps peut donc, dans tous les cas, s'exprimer en fonction de r et des arbitraires; mais la loi qui en résulte n'est relative qu'au mouvement particulier que l'on obtient en attribuant des valeurs déterminées aux constantes et, pour que cette loi soit absolue, il est nécessaire que la valeur de F, donnée par l'élimination de t, ne renferme pas les constantes arbitraires.

485.— La deuxième loi de Kepler ne prouve pas que cette condition soit remplie dans la valeur de F correspondant à son mouvement planétaire; mais cela résulte de la troisième loi considérée, par induction, comme applicable à tout mouvement d'un point matériel autour du Soleil.

486.— Conséquences de la troisième loi.— La valeur trouvée pour F renferme un coefficient $\frac{c^2}{p}$ dont on peut, comme il suit, transformer la valeur

Le paramètre p est égal à $\frac{b^2}{a}$, a et b étant les demi-axes de l'ellipse.

La constante des aires c est le rapport du double de l'aire décrite par le rayon vecteur au temps correspondant; on a donc $c = \frac{2\pi ab}{\tau}$, en désignant par τ la durée de la révolution d'une planète autour du soleil.

Par suite

$$\frac{c^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2}$$

d'où

$$F = \frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2} \cdot \frac{m}{r^2}$$

Mais d'après la troisième loi érigée en principe général, le rapport $\frac{a^3}{\tau^2}$ conserve la même valeur dans un mouvement quelconque autour du Soleil; donc en désignant par K une constante absolue, on a

$$F = \frac{Km}{r^2}.$$

L'attraction exercée sur une planète est donc une force ne dépendant que de la distance de cette planète au Soleil, restant la même à une distance déterminée quel que soit l'état de mouvement de la planète.

De plus, il résulte de la troisième loi de Képler que cette attraction est proportionnelle à la masse de la planète.

487. – D'ailleurs, comme dans une planète considérée comme un point matériel ne réside aucune propriété qui n'appartienne à une particule matérielle quelconque, on peut dire que les lois de Képler, interprétées par Newton, conduisent à cette conséquence générale :

Le soleil attire une particule matérielle quelconque proportionnellement à la masse de cette particule et en raison inverse du carré de la distance de cette particule au Soleil.

488. – Conséquences tirées de l'observation des mouvements des satellites des planètes. – Il résulte de l'observation que les lois de Képler s'étendent approximativement aux mouvements des satellites autour des planètes.

Ces mouvements sont relatifs, mais on peut les traiter comme absolus si l'on considère le mouvement de la planète comme uniquement dû à l'attraction solaire.

Soient en effet A, A' une planète et l'un de ses satellites ; désignons par m, m' leurs masses respectives. Les rayons menés du soleil à ces astres étant sensiblement égaux et parallèles, on peut considérer les points AA' soumis à des forces de même direction, de même sens, ayant respectivement pour valeur

$$\frac{Km}{r^2} \cdot \frac{Km'}{r^2}.$$

Cela posé, si l'on rapporte le point A' à un système de comparaison animé d'une translation identique au mouvement de A, ce mouvement relatif pourra être traité comme absolu à la condition d'adjoindre aux forces réellement appliquées en A' la force d'inertie d'entraînement de ce point. La grandeur de cette force d'inertie s'obtient en multipliant par m' l'accélération de la translation et cette accélération qui est celle du point A, s'obtient en divisant par m la force qui produit le mouvement, laquelle est supposée réduite à l'attraction solaire, $\frac{Km}{r^2}$.

La force d'inertie d'entraînement est donc $\frac{Km}{r^2}$; elle est par suite égale à l'attraction solaire agissant sur A et comme elle lui est directement opposée, elle en détruit l'effet.

Les mouvements relatifs des satellites d'une même planète autour de cette planète, peuvent donc être traités comme des mouvements absolus ; et les lois de Képler s'étendent à ces mouvements, il s'en suit, par les raisons déjà données pour les planètes relativement au soleil que les satellites d'une même planète sont sollicités vers cette planète par des forces proportionnelles à leurs masses et en raison inverse du carré de la distance à la planète.

489. – Identité de la pesanteur et de la gravitation. – La Terre n'ayant qu'un satellite, ne pouvait pas donner une vérification semblable de la loi d'attraction ; mais elle en donnait une autre qui n'a pas échappé à Newton.

Quelques années avant la découverte de Képler, en 1609, Galilée avait trouvé expérimentalement les lois de la pesanteur. Newton conçut la pensée que la cause des mouvements célestes était identique à celle de la pesanteur et que la force qui fait tomber les corps à la surface de la Terre était la même que celle qui règle le mouvement de la Lune autour de la Terre.

L'attraction de la Terre sur la Lune, à la distance r, est

$$F = \frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2} \frac{m}{r^2}$$

ou approximativement, en négligeant l'excentricité de l'orbite lunaire,

$$F = \frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2} \cdot \frac{m}{a^2}$$

et on peut supposer que a représente, dans cette formule, la distance moyenne de la Lune à la Terre.

D'autre part, le poids à la surface de la Terre d'un point matériel ayant une masse m égale à celle de la Terre serait

$$F' = mg.$$

en désignant par g l'accélération de la pesanteur.

Si donc, conformément aux vues de Newton, la pesanteur et la force du mouvement lunaire sont dues à l'attraction terrestre modifiée en raison inverse du carré de la distance, les forces F et F' doivent être en raison inverse des carrés des distances a et R, en désignant par R le rayon terrestre.

On doit donc avoir

$$a^2 F = R^2 F'$$

et, en remplaçant F et F' par leurs valeurs

$$\frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2 R^2} = g$$

La vérification se fait effectivement lorsque l'on remplace les diverses quantités de cette relation par leurs valeurs données par l'observation. Ainsi, la loi de variation de l'attraction qui, dans le cas de planètes accompagnées de plusieurs satellites, était prouvée généralement par la troisième loi de Képler, est démontrée pour la Lune, par la comparaison de son mouvement avec celui des corps pesants à la surface de la Terre.

490.– Application du principe de l'action et de la réaction.– Les planètes attirant leurs satellites, chacune d'elles doit attirer le soleil et les autres astres; et si, par une généralisation naturelle, on attribue à deux points matériels quelconques cette faculté d'attraction réciproque que l'interprétation des lois de Képler conduit à attribuer à tous les éléments du système solaire, on en conclut une loi dont voici l'énoncé :

Soient A et A' deux points matériels quelconques; désignons par m, m' leurs masses respectives et par r leur distance. Ces points sont assujettis à une liaison naturelle dont l'effet est le même que si A exerçait sur A' une attraction égale à $\frac{Km'}{r^2}$ et si A' exerçait sur A une attraction égale à $\frac{K'm}{r^2}$,

Newton a admis que ces deux forces sont égales. Par suite de cette hypothèse, qui étend aux actions à distance le principe de l'égalité de l'action et de la réaction que nous avions admis jusqu'à présent que pour des actions au contact, on a la relation

$$\frac{Km'}{r^2} = \frac{K'm}{r^2}$$

d'où

$$\frac{K}{m} = \frac{K'}{m'}$$

Si l'on désigne par f la valeur commune de ces deux rapports, on a

$$K = fm \qquad K' = fm'$$

et l'action réciproque des deux points devient

$$f\,\frac{mm'}{r^2}$$

491. — Principe de la gravitation universelle. — Newton a enfin supposé que le coefficient f a la même valeur pour tout système de deux points matériels. L'ensemble de ces hypothèses conduit à cet énoncé :

Deux points matériels quelconques s'attirent proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance.

On appelle gravitation la cause de cette action mutuelle des particules matérielles et la gravitation est dite universelle parce que l'on suppose qu'elle s'exerce sur toutes les parties de l'univers.

Après Newton, les géomètres ont soumis le principe de la gravitation à une épreuve analytique décisive. En l'admettant à priori sous la forme que lui a assignée Newton, le problème du mouvement des corps célestes dont les lois de Képler ne donnaient qu'une première approximation, devient une question de Dynamique qui ne présente d'autres difficultés que celles qui sont inhérentes aux méthodes de calcul employées. Euler, d'Alembert, Clairaut se sont successivement occupés de ces importantes questions. Enfin Laplace a donné à la théorie sa forme définitive dans la Mécanique céleste où se trouve complètement renfermée l'explication de tous les phénomènes et celle de leurs moindres perturbations.

492. — Dimensions de la constante d'attraction f. — Soit F l'attraction mutuelle de deux points m, m' à la distance r ; on a, d'après ce qui précède,

$$F = f \cdot \frac{mm'}{r^2}$$

La constante f représente l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance ; sa valeur dépend évidemment du choix des unités fondamentales. Pour trouver les dimensions, il suffit de remarquer que l'on a

$$f = \frac{r^2 F}{mm'}$$

et si l'on observe que les dimensions d'une masse résultent de la formule $L^{-1}T^2F$, on voit que celles de f sont données par l'expression

$$\frac{L^2F}{L^{-2}T^4F^2} = L^4T^{-4}F^{-1}$$

Il est à remarquer que la constante f dont la valeur dépend du choix de trois unités fondamentales, n'est pas purement numérique, contrairement à ce qui a lieu pour les coefficients des relations résultant des théories mécaniques où l'on a tenu compte de toutes les variables du phénomène.

Chapitre II.

Théorèmes généraux sur les forces qui agissent en raison inverse du carré des distances.

I.– Formules préliminaires.

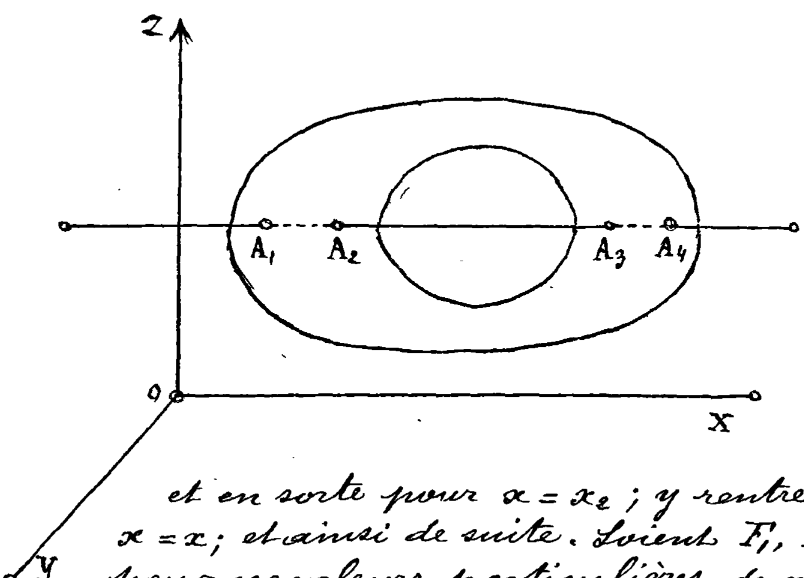
493.– Théorème I – Soit $F(x, y, z)$ une fonction des coordonnées x, y, z, finie, continue et bien déterminée dans l'étendue d'un volume v limité par une surface quelconque σ ; en désignant par

dv un élément du volume v,
$d\sigma$ un élément de la surface σ,
α le cosinus de l'angle que la normale à l'élément $d\sigma$, extérieure au volume v, fait avec l'axe des x, on a

$$(1) \qquad \int \frac{dF}{dx}\, dv = \int \alpha F\, d\sigma$$

l'intégrale du premier membre s'étendant à tous les points du volume v, et l'intégrale du second membre s'étendant à tous les points de la surface σ.

En effet, à un système de valeurs (y, z) correspondent, sur la surface σ, un certain nombre de valeurs de x, puisque une parallèle à l'axe des x, entrant dans le volume v un certain nombre de fois, en sort le même nombre de fois.



Supposons qu'un point, décrivant cette parallèle de $-\infty$ à $+\infty$, entre dans le volume v pour $x = x_1$, et en sorte pour $x = x_2$; y rentre pour $x = x_3$ et en sorte pour $x = x$; et ainsi de suite. Soient F_1, F_2, F_3, F_4 ..... les valeurs de F pour ces valeurs particulières de x.

En prenant pour l'élément dv le parallelipipède $dx, dy\, dz$ on a

$$\int \frac{dF}{dx}\, dv = \iiint \frac{dF}{dx}\, dx\, dy\, dz$$

et, en intégrant par rapport à la variable x

$$\iiint \frac{dF}{dx}\, dx\, dy\, dz = \iint \left[(F_2 - F_1) + (F_4 - F_3) + \ldots\ldots\right] dy\, dz.$$

Or en désignant par $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots\ldots$ les valeurs de a aux points dont les abscisses sont $x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots\ldots$ et par $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3, d\sigma_4 \ldots\ldots$ les éléments superficiels en ces points qui ont pour projection $dy\, dz$ sur le plan YOZ, on a évidemment

$$-a_1\, d\sigma_1 = a_2\, d\sigma_2 = -a_3\, d\sigma_3 = a_4\, d\sigma_4 \ldots\ldots = dy\, dz$$

On peut, par suite écrire

$$\iiint \frac{dF}{dx}\, dx\, dy\, dz = \int \left[a_2 F_2\, d\sigma_2 + a_1 F_1\, d\sigma_1 + a_4 F_4\, d\sigma_4 + \ldots\ldots\right]$$

c'est à dire conformément à l'énoncé

$$\iiint \frac{dF}{dx}\, dx\, dy\, dz = \int a F\, d\sigma.$$

494. – Corollaire I. – Faisant dans (1) $F = 1$, on trouve

$$(1) \qquad \int a\, d\sigma = 0.$$

Donc : l'intégrale $\int a\, d\sigma$ étendue à toute la surface d'un espace limité est égale à zéro.

495. – Corollaire II. – Faisant, en second lieu, $F = x$, il vient

$$(2) \qquad \int dv = \int a x\, d\sigma$$

Donc : l'intégrale $\int a x\, d\sigma$ étendue à toute la surface d'un espace limité est égale au volume de cet espace.

496. – Corollaire III. – Soient a, b, c les cosinus directeurs de la normale à l'élément $d\sigma$, extérieure au volume v, et F, G, H des fonctions de x, y, z finies, continues et bien déterminées dans l'étendue du volume v, on a les trois équations

$$\int \frac{dF}{dx}\, dv = \int a\, F\, d\sigma$$

$$\int \frac{dG}{dy}\, dv = \int b\, G\, d\sigma$$

$$\int \frac{dH}{dz}\, dv = \int c\, H\, d\sigma$$

et, par suite, en ajoutant membre à membre, (1)

$$\int \left(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} \right) dv = \int (aF + bG + cH)\, d\sigma$$

497. – Formule de Green. – Si l'on fait, dans l'équation précédente

$$F = \rho \frac{d\varphi}{dx} \qquad G = \rho \frac{d\varphi}{dy} \quad H = \rho \frac{d\varphi}{dz}$$

ρ et φ étant des fonctions de x, y, z, il vient

$$(4) \quad \left.\begin{aligned} &\int \rho \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} \right) dv \\ &+ \int \left(\frac{d\rho}{dx}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\rho}{dy}\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\rho}{dz}\frac{d\varphi}{dz} \right) dv \end{aligned} \right\} = \int \rho \left(a \frac{d\varphi}{dx} + b \frac{d\varphi}{dy} + c \frac{d\varphi}{dz} \right) d\sigma$$

L'expression

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}$$

a été appelée par Lamé paramètre différentiel du second ordre de la fonction φ nous la désignerons par $\Delta\varphi$, en posant symboliquement

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$$

Quant au trinôme qui figure dans l'intégrale du second membre, on peut lui assigner une signification très simple. En effet, on a en général

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx}\, dx + \frac{d\varphi}{dy}\, dy + \frac{d\varphi}{dz}\, dz$$

---

(1) Cette formule est fréquemment utilisée en Physique mathématique : Laplace s'en est servi le premier, dans la théorie de la Capillarité.

Supposons qu'à partir d'un point $x.y.z$ de la surface σ, et sur la normale extérieure au volume v, on porte une longueur infiniment petite dn; les projections de cette longueur sur les axes sont

$$dx = a\,dn \quad dy = b\,dn \quad dz = c\,dn$$

et la valeur correspondante de $d\varphi$ est

$$d\varphi = \left(a\frac{d\varphi}{dx} + b\frac{d\varphi}{dy} + c\frac{d\varphi}{dz}\right)dn$$

de sorte que l'on peut écrire

$$a\frac{d\varphi}{dx} + b\frac{d\varphi}{dy} + c\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{dn}$$

Par suite, si l'on pose

$$\Delta\varphi = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}$$

$$\lambda = \frac{d\rho}{dx}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\rho}{dy}\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\rho}{dz}\frac{d\varphi}{dz}$$

$$\frac{d\varphi}{dn} = a\frac{d\varphi}{dx} + b\frac{d\varphi}{dy} + c\frac{d\varphi}{dz}$$

l'équation (4) devient

$$(6) \qquad \int\rho\,\Delta\varphi\,dv + \int\lambda\,dv = \int\rho\frac{d\varphi}{dn}\,d\sigma$$

Telle est la formule de Green [1]. Elle exige que ρ, ainsi que les dérivées premières de φ soient finies, continues et bien déterminées dans le volume v.

498.– Modification des formules dans le cas où le volume v renferme des infinis.– Supposons que F. de la formule fondamentale (1),

---

(1). Essai d'application des mathématiques à l'électricité et au magnétisme (Nottingham, 1828). Cette formule avait été employée antérieurement par Fourier et Poisson. Duhamel et Lamé s'en sont également servi dans des recherches sur la propagation de la chaleur. (Journal de l'École Polytechnique; XXII^e cahier; 1883, p.69 et 204.

soit infinie en un point $P(\alpha, \beta, \gamma)$, dans l'intérieur du volume v. Concevons une sphère σ', de rayon infiniment petit r', décrite du point P comme centre. On peut appliquer la formule (1) au volume compris entre les surfaces σ et σ' en étendant à ces deux surfaces l'intégration du second membre.

Si donc on désigne par ω la valeur de l'intégrale

$$\int a F \, d\sigma'$$

relative à la sphère infiniment petite, c'est à dire la limite de cette intégrale lorsque r' décroit indéfiniment, la formule (1) est remplacée par la suivante

$$(7) \qquad \int \frac{dF}{dx} dv = \int a F \, d\sigma + \omega$$

et on aurait une somme de termes ω, si la fonction F admettait plusieurs infinis dans le volume v.

La formule (6) éprouve une modification analogue lorsque l'une des fonctions ρ, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ devient infinie

499 – 1er Exemple. – Désignant par r la distance du point (x, y, z) à un point $P(\alpha, \beta, \gamma)$, de sorte que

$$(8) \qquad r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2$$

et posant

$$(9) \qquad \varphi = \frac{1}{r}$$

faisons $F = \rho\varphi$ dans la formule (1), ρ étant une fonction finie dans le volume v.

Si le point P est hors du volume v, la formule (1) est immédiatement applicable; mais si ce point est dans ce volume, la formule peut se trouver modifiée. Considérons l'intégrale

$$\omega = \int a \rho \varphi \, d\sigma'$$

relative à la sphère σ', de rayon infiniment petit r'; soit K la valeur de ρ au point P'; on peut dans l'intégration, remplacer ρ par K et on a, sur la sphère, $\varphi = \frac{1}{r'}$. Par suite

$$\omega = \frac{K}{r'} \int a \, d\sigma'$$

et cette valeur se réduit à zéro (n° 494)

La formule (1) s'applique donc, quelle que soit la position du point P, de sorte que, lorsque la fonction φ est définie par les formules (8) et (9), on a dans tous les cas

$$\int \rho \frac{d\varphi}{dx} dv + \int \varphi \frac{d\rho}{dx} dv = \int a \rho \varphi \, d\sigma$$

500. – 2° Exemple. – Faisons maintenant $\varphi = \frac{1}{r}$ dans la formule (6). On a alors

$$(11) \qquad \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= -\frac{x-\alpha}{r^3} & \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-\alpha)^2}{r^5} \\ \frac{d\varphi}{dy} &= -\frac{y-\beta}{r^3} & \qquad \frac{d^2\varphi}{dy^2} &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y-\beta)^2}{r^5} \\ \frac{d\varphi}{dz} &= -\frac{z\ \gamma}{r^3} & \qquad \frac{d^2\varphi}{dz^2} &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z-\gamma)^2}{r^5} \end{aligned}$$

Les dérivées secondes satisfont à l'équation

$$(12) \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$$

et les dérivées premières donnent, en ayant égard à la troisième des formules (5)

$$\frac{d\varphi}{dn} = -\frac{1}{r^2}\left[a\,\frac{x-\alpha}{r} + b\,\frac{y-\beta}{r} + c\,\frac{z-\gamma}{r}\right]$$

ou, en désignant par ε l'angle que la normale extérieure à v fait avec le vecteur qui joint le point P à un point M de la surface σ,

$$(13) \qquad \frac{d\rho}{dn} = -\frac{\cos\varepsilon}{r^2}$$

Cela posé, deux cas se présentent

501. – 1° Si P est extérieur à v, r ne devient pas nul : les dérivées de φ restent finies dans le volume v et la formule (6) devient en y remplaçant d'après (12), $\Delta\varphi$ par zéro.

$$(14) \qquad \int \lambda \, dv = \int \rho \frac{d\varphi}{dn} d\sigma$$

502 — 2°. — Si P est intérieur à v, on doit ajouter au second membre de la relation (6) l'intégrale

$$\omega = \int \rho \frac{d\varphi}{dn} d\sigma'$$

étendue à la surface d'une sphère, décrite du point P comme centre, avec un rayon infiniment petit r'. On a, sur cette sphère

$$\mathcal{E} = \pi \qquad \cos \mathcal{E} = -1 \qquad r = r'$$

et par suite, d'après (13),

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{1}{r'^2}$$

On peut d'ailleurs, dans l'intégration, remplacer ρ par la valeur K de cette fonction au point P; il en résulte

$$\omega = \frac{K}{r'^2} \int d\sigma'$$

mais l'intégrale $\int d\sigma'$ représente la surface totale de la sphère σ' et cette surface est égale à $4\pi r'^2$; donc

$$\omega = 4\pi K$$

de sorte que l'équation (14) est remplacée par la suivante

$$(15) \qquad \int \Delta\, dv = \int \rho \frac{d\varphi}{dn} d\sigma + 4\pi K$$

503. — Supposons $\rho = 1$; la deuxième formule (5) donne $\Delta = 0$ et, en remplaçant $\frac{d\varphi}{dn}$ par sa valeur (16) dans les équations (14) et (15), on a ce théorème :

$$\int \frac{\cos \mathcal{E}}{r^2} d\sigma$$

étendue à la surface d'un espace limité est nulle, ou égale à 4π, suivant que l'origine du vecteur r est extérieure, ou intérieure à cet espace.

II. — Propriétés de la fonction potentielle.

504. — Composantes de l'attraction. — Imaginons un espace

rempli d'une matière continue et cherchons l'attraction qu'il exerce sur un point P. Soit M un point quelconque de l'espace considéré ; désignons par

α, β, γ les coordonnées du point P,
x, y, z les coordonnées du point M,
ρ la densité au point M,
dv un élément de volume renfermant le point M,
m la masse du point P,
r la distance du point P au point M ;

La masse de l'élément dv est $\rho\, dv$, et l'attraction que cet élément exerce sur le point P est, d'après la loi de Newton,

$$f\,\frac{m\rho\, dv}{r^2}$$

Les composantes de cette attraction sont

$$fm\,\frac{\rho(x-\alpha)\,dv}{r^3} \qquad fm\,\frac{\rho(y-\beta)\,dv}{r^3} \qquad fm\,\frac{\rho(z-\gamma)\,dv}{r^3}$$

et on a, pour les composantes de l'attraction totale exercée sur le point P,

$$fm\int\frac{\rho(x-\alpha)\,dv}{r^3} \qquad fm\int\frac{\rho(y-\beta)\,dv}{r^3} \qquad fm\int\frac{\rho(z-\gamma)\,dv}{r^3}$$

les sommations s'étendant à tous les éléments dv du volume attirant.

Dans ces sommations, la densité ρ est constante ou fonction de x, y, z suivant que la masse comprise dans ce volume est ou n'est pas homogène.

Les expressions de ces composantes s'écrivent

$$fmX, \qquad fmY, \qquad fmZ$$

en posant pour abréger,

$$(16)\qquad \begin{aligned} X &= \int\frac{\rho(x-\alpha)}{r^3}\,dv \\ Y &= \int\frac{\rho(y-\beta)}{r^3}\,dv \\ Z &= \int\frac{\rho(z-\gamma)}{r^3}\,dv \end{aligned}$$

505. — Fonction potentielle. — Le calcul de ces intégrales se simplifie par la considération de l'intégrale

$$(17) \qquad u = \int \frac{\rho}{r}\, dv$$

appelée par Green fonction potentielle

506. — Les fonctions u, X, Y, Z sont finies dans tout l'espace. — La fonction potentielle u et les composantes X, Y, Z variant avec le point P, sont des fonctions de α, β, γ. Les valeurs de ces fonctions sont toujours finies et déterminées ; car si l'on exprime l'élément de volume dv en coordonnées polaires (r, θ, ψ) ayant pour origine le point P, on a

$$dv = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi$$

et par suite

$$u = \iiint \rho r \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi$$

$$X = \iiint \rho \frac{x-\alpha}{r} \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi$$

$$Y = \iiint \rho \frac{y-\beta}{r} \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi$$

$$Z = \iiint \rho \frac{z-\gamma}{r} \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi$$

les quantités $\frac{x-\alpha}{r}$, $\frac{y-\beta}{r}$, $\frac{z-\gamma}{r}$, étant les cosinus directeurs du vecteur PM, ont une valeur numérique moindre que 1. Donc, les intégrales dont il s'agit n'ont pas d'éléments infinis et la valeur de chacune d'elles reste finie et déterminée.

507. — Dérivées premières de la fonction potentielle. — Prenons la dérivée de u par rapport à α ; la dérivée d'une somme étant égale à la somme des dérivées, on a

$$\frac{du}{d\alpha} = \int \rho \frac{d\frac{1}{r}}{d\alpha}\, dv = -\int \frac{\rho}{r^2} \frac{dr}{d\alpha}\, dv$$

mais, de la relation

$$r^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2$$

on tire

$$\frac{dr}{d\alpha}=-\frac{x-\alpha}{r}$$

Il en résulte

$$\frac{du}{d\alpha}=\int\frac{\rho(x-\alpha)}{r^3}\,dv=X$$

de sorte que l'on a

$$(18)\qquad \frac{du}{d\alpha}=X\qquad \frac{du}{d\beta}=Y\qquad \frac{du}{d\gamma}=Z$$

ce qui établit que X, Y, Z sont les dérivées partielles de la fonction potentielle.

508. – On en conclut, comme corollaire, que la fonction potentielle est continue; car, pour qu'une fonction soit continue, il suffit que ses dérivées soient finies. Or, les dérivées de u sont X, Y, Z dont les valeurs sont finies et déterminées dans tout l'espace. (n° 506)

509. – Les composantes de l'attraction sur le point P ont pour valeurs, d'après ce qui précède,

$$fm\frac{du}{d\alpha}\qquad fm\frac{du}{d\beta}\qquad fm\frac{du}{d\gamma}$$

de sorte que si l'on désigne par V le potentiel des forces attractives qui agissent sur le point P, on a

$$\frac{dV}{d\alpha}=-fm\frac{du}{d\alpha}.\qquad \frac{dV}{d\beta}=-fm\frac{du}{d\beta}\qquad \frac{dV}{d\gamma}=-fm\frac{du}{d\gamma}$$

c'est à dire

$$V=-fmu\ [1].$$

---

(1) – Gauss qui a fait après Green, l'étude de la fonction potentielle l'a nommée plus brièvement potentiel; il semble préférable de conserver l'ancienne dénomination parceque, d'après la définition admise dans ce Cours (n° 189) le mot potentiel désigne une quantité analogue à la fonction u, mais non identique.

510. – Dérivées secondes de la fonction potentielle. – Des relations (16) et (18) on tire, en prenant les dérivées sous le signe $\int$

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} = \int \rho \left[\frac{3(x-\alpha)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right] dv$$

$$\frac{d^2u}{d\beta^2} = \int \rho \left[\frac{3(y-\beta)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right] dv$$

$$\frac{d^2u}{d\gamma^2} = \int \rho \left[\frac{3(z-\gamma)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right] dv$$

Si le point P est extérieur à v, les éléments de ces intégrales ne deviennent pas infinis et elles ont, par conséquent, des valeurs finies et déterminées. En les ajoutant, il vient

$$(19) \qquad \frac{d^2u}{d\alpha^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0$$

Cette équation a été trouvée par Laplace.[1]

511. – Si le point P est intérieur à v, on voit que, malgré la transformation en coordonnées polaires, la fonction à intégrer, pour calculer l'une des dérivées secondes, devient encore infinie parceque r reste au dénominateur. Sans entrer dans des détails sur la nature de ces intégrales qui ont des éléments infinis, nous abandonnerons ces expressions comme impropres à la détermination des dérivées secondes de la fonction potentielle et nous opérerons cette détermination d'une autre manière.

512. – Remarquons d'abord que, la valeur de r étant déterminée par la relation,

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2$$

si l'on pose comme précédemment,

$$\varphi = \frac{1}{r}$$

les dérivées de φ par rapport à α, β, γ sont respectivement égales aux dérivées de la même fonction par rapport à x, y, z prises avec le signe contraire,

---

(1) – Théorie de la figure des Corps célestes (Mécanique celeste, liv. II § 11.)

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = -\frac{d\varphi}{dx} \qquad \frac{d\varphi}{d\beta} = -\frac{d\varphi}{dy} \qquad \frac{d\varphi}{d\gamma} = -\frac{d\varphi}{dz}$$

Cela posé, la fonction potentielle étant mise sous la forme

$$u = \int \rho \varphi \, dv$$

on a, en prenant sa dérivée par rapport à α,

$$\frac{du}{d\alpha} = \int \rho \frac{d\varphi}{d\alpha} dv = -\int \rho \frac{d\varphi}{dx} dv$$

mais, d'après la formule (10),

$$\int \rho \frac{d\varphi}{dx} dv + \int \varphi \frac{d\rho}{dx} dv = \int a \rho \varphi \, d\sigma$$

On peut donc écrire

$$\frac{du}{d\alpha} = \int \varphi \frac{d\rho}{dx} dv - \int a \rho \varphi \, d\sigma.$$

En prenant encore une fois la dérivée par rapport à α, il vient

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} = \int \frac{d\varphi}{d\alpha} \cdot \frac{d\rho}{dx} dv - \int a \rho \frac{d\varphi}{d\alpha} d\sigma$$

Enfin, en remplaçant $\frac{d\varphi}{d\alpha}$ par $-\frac{d\varphi}{dx}$, on obtient la première des expressions ci-dessous, les deux autres s'en déduisant par de simples permutations de lettres.

$$(20) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2u}{d\alpha^2} &= -\int \frac{d\rho}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dv + \int a \rho \frac{d\varphi}{dx} d\sigma \\ \frac{d^2u}{d\beta^2} &= -\int \frac{d\rho}{dy} \cdot \frac{d\varphi}{dy} dv + \int b \rho \frac{d\varphi}{dy} d\sigma \\ \frac{d^2u}{d\gamma^2} &= -\int \frac{d\rho}{dz} \frac{d\varphi}{dz} dv + \int c \rho \frac{d\varphi}{dz} d\sigma \end{aligned}$$

En ajoutant et en posant comme précédemment (n° 497)

$$\Lambda = \frac{d\rho}{dx}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\rho}{dy}\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\rho}{dz}\frac{d\varphi}{dz}$$

$$\frac{d\varphi}{dn} = a \frac{d\varphi}{dx} + b \frac{d\varphi}{dy} + c \frac{d\varphi}{dz}$$

Il vient :

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2} + \frac{d^2u}{d\gamma^2} = \int \lambda \, dv + \int \rho \frac{d\varphi}{dn} d\sigma$$

Or, d'après la formule (15) du n° 502, le second membre de cette équation est égal à $-4\pi K$, K désignant la valeur de ρ au point P dont les coordonnées sont (α, β, γ). Donc, lorsque ce point est dans le volume v, la fonction potentielle satisfait à l'équation

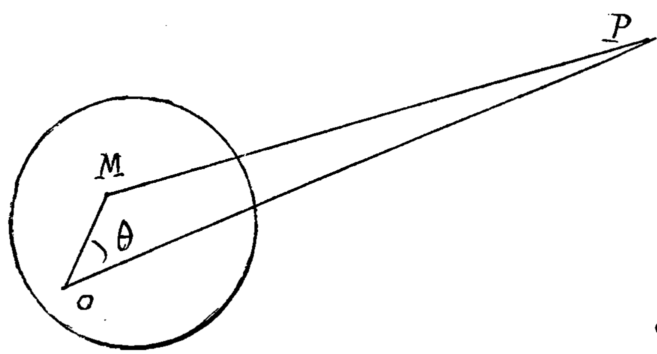
$$(21) \qquad \frac{d^2u}{d\alpha^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2} + \frac{d^2u}{d\gamma^2} = -4\pi K$$

Cette équation a été trouvée par Poisson [1] et Gauss est le premier qui ait eu égard dans la démonstration de ce théorème, à la variation de la densité ρ [2]

513. – Attraction sur un point très-éloigné. – Considérons un volume v attirant un point très éloigné P; la fonction potentielle correspondante est donnée par la formule

$$u = \int \frac{\rho}{r} dv$$

r désignant la distance du point P à un point quelconque M de la masse attirante et ρ étant la densité en ce point.



Soit O un point déterminé de la masse attirante ; Désignons par
R la distance OP
δ la distance OM
θ l'angle compris entre les vecteurs OP et OM.

On a

$$r^2 = R^2 - 2R\delta\cos\theta + \delta^2$$

Supposons que R soit très grand par rapport à toutes les valeurs de δ, nous aurons

---

(1) – Bulletin de la Société Philomathique, t. III ; p. 368.
(2) – Oeuvres de Gauss, t. V, p. 197.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\left[1 - 2\frac{\delta}{R}\cos\varepsilon + \frac{\delta^2}{R^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{R} + \frac{\mathcal{E}}{R^2}$$

$\mathcal{E}$ étant une quantité qui reste finie quand R grandit indéfiniment. Portant cette expression dans u, il vient

$$u = \frac{1}{R}\int \rho\, dv + \frac{1}{R^2}\int \rho\, \mathcal{E}\, dv$$

L'intégrale $\int \rho\, dv$ est égale à la masse attirante M et on a, par suite,

$$u = \frac{M}{R} + \frac{\eta}{R^2}$$

η restant fini pour $R = \infty$. Donc, quand R croît indéfiniment, on a

$$\lim (u R) = M$$

Quand R est très grand, on a sensiblement

$$u = \frac{M}{R}$$

de sorte que la fonction potentielle est sensiblement la même qui si toute la masse attirante était concentrée en un de ses points.

514.– Résumé des propriétés de la fonction potentielle.– En résumé, la fonction potentielle u d'une masse M renfermée dans un espace limité sur un point (α, β, γ), jouit des propriétés suivantes :

1° la fonction u est, dans tout l'espace, une fonction finie et continue de (α, β, γ),

2° Si l'on désigne par R, la distance du point α, β, γ à un point déterminé de l'espace attirant, la limite de $u R$, quand R croît indéfiniment, tend vers une constante déterminée qui est la masse M.

3° La fonction u satisfait, dans tout l'espace à l'équation

$$\Delta u = -4\pi K$$

K étant la densité de la masse au point (α, β, γ), laquelle se réduit à zéro quand ce point est situé hors de l'espace limité.

515. — Théorème de Gauss. — Nous établirons enfin ce théorème souvent utilisé dans la théorie de l'électricité :

Si u est la fonction potentielle de masses, les unes intérieures, les autres extérieures à une surface fermée σ, on a

$$\int \frac{du}{dn} d\sigma = -4\pi M$$

l'intégrale étant étendue à toute la surface σ, et M étant la somme des masses qui lui sont intérieures.

En effet, si dans la formule (6) du nº 497, on fait $\rho = 1$ et $\varphi = u$, il vient

$$\int \frac{du}{dn} d\sigma = -\int \Delta u . dv$$

Or on a, pour un point quelconque, en désignant par K la densité en ce point

$$\Delta u = -4\pi K$$

Il en résulte, conformément à l'énoncé,

$$\int \frac{du}{dn} d\sigma = -4\pi \int K\, dv = -4\pi M$$

III. — Attraction des Sphères.

516. — Attraction d'une sphère creuse formée de couches homogènes concentriques. — Considérons une couche sphérique limitée par deux sphères concentriques, elle peut n'être pas homogène, mais nous supposons que la densité en un point soit une fonction de la distance seulement de ce point au centre O de la couche. Cherchons l'attraction de cette couche sur un point quelconque P.

La position de ce point étant rapportée à un systèmes d'axes rectangulaires passant par le point O, désignons par

α, β, γ les coordonnées du point P,

r la distance OP,

R_0, R_1 les rayons intérieur et extérieur de la couche sphérique.

La fonction potentielle au point P doit être une fonction u de la distance r ; par suite, en remarquant que la relation

$$r^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

donne

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{\alpha}{r} \qquad \frac{dr}{d\beta} = \frac{\beta}{r} \qquad \frac{dr}{d\gamma} = \frac{\gamma}{r},$$

on trouvera aisément

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} = \frac{d^2u}{dr^2}\,\frac{\alpha^2}{r^2} + \frac{du}{dr}\,\frac{r^2-\alpha^2}{r^3}$$

$$\frac{d^2u}{d\beta^2} = \frac{d^2u}{dr^2}\,\frac{\beta^2}{r^2} + \frac{du}{dr}\,\frac{r^2-\beta^2}{r^3}$$

$$\frac{d^2u}{d\gamma^2} = \frac{d^2u}{dr^2}\,\frac{\gamma^2}{r^2} + \frac{du}{dr}\,\frac{r^2-\gamma^2}{r^3}$$

et on aura, par suite, en ajoutant ces trois expressions

$$\Delta u = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{du}{dr}$$

517.— Attraction sur un point extérieur.— Si le point P est extérieur à la couche sphérique, on a $\Delta u = 0$, ou bien, en multipliant par r^2 l'expression de Δu

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\,\frac{du}{dr}\right) = 0$$

Il en résulte

$$\frac{du}{dr} = -\frac{c}{r^2}$$

c désignant une constante arbitraire ; en intégrant encore une fois, il vient

$$u = \frac{c}{r} + c'$$

Il reste à déterminer les constantes c et c' ; pour cela il faut distinguer deux cas, selon que le point P est situé dans le creux de la couche sphérique, ou en dehors de sa surface extérieure.

518.— Dans le premier cas, on doit avoir c = 0 ; car autrement la fonction potentielle deviendrait infinie au centre O, tandis qu'elle doit rester finie (n° 506) Cette fonction se réduit donc à une constante c', d'où l'on conclut que l'attraction est nulle.

Donc : une sphère creuse formée de couches homogènes concentriques n'exerce aucune action sur un point situé dans sa cavité intérieure.

Ce résultat est encore vrai lorsque le point P est sur la surface intérieure de la couche.

519. — Dans le second cas, le produit $u\,r$ doit tendre, lorsque r croît indéfiniment, vers une limite déterminée égale à la masse M de la couche sphérique (n.º 513). On doit donc avoir $c' = 0$ et $c = M$; donc la fonction potentielle

$$u = \frac{M}{r}$$

est égale à celle d'un point, de masse M, agissant suivant la loi newtonienne, sur le point P placé à la distance r.

Donc : une sphère creuse formée de couches homogènes concentriques exerce, sur un point placé hors de sa surface extérieure, une attraction qui est la même qui si toute la masse était concentrée au centre.

Ce résultat est encore vrai lorsque le point P est sur la surface extérieure de la couche.

520. — Attraction sur un point intérieur. — Supposons maintenant que le point P soit intérieur à la couche sphérique, de sorte que l'on ait $R_0 < r < R_1$. Concevons une sphère décrite du point O comme centre, avec r comme rayon ; elle décompose la couche sphérique en deux parties concentriques. L'une, extérieure à la sphère de rayon r, n'exerce aucune action sur le point P. L'autre intérieure à la sphère de rayon r, exerce une action qui est la même que si toute sa masse M était concentrée au point O. Donc l'attraction sur le point est égale à $\frac{M_0}{r^2}$.

Pour évaluer la masse M_0, décomposons cette masse en couches homogènes concentriques, soit R le rayon d'une de ces couches, dR son épaisseur, K sa densité : sa masse est

$$4\pi K R^2 dR$$

et, en intégrant entre les limites R_0 et r, on trouve

$$M_0 = 4\pi \int_{R_0}^{r} K R^2 \, dR$$

K est une fonction de R ; si, en particulier, la couche sphérique est homogène, K devient une constante et on a

$$M_0 = \frac{4}{3} \pi K (r^3 - R_0^3)$$

Dans le cas d'une sphère pleine homogène, on a $R_0 = 0$ et l'attraction

$$\frac{M_0}{r^2} = \frac{4}{3} \pi K r$$

devient proportionnelle à la distance qui sépare le point P du centre de la sphère.

521. — Fonction potentielle d'une couche sphérique. — Cherchons l'expression de la fonction u, en attribuant au point P les diverses positions qu'il peut avoir dans l'espace ; trois cas sont à considérer.

1° $r < R_0$; la fonction u est constante (n° 518). Pour en déterminer la valeur, supposons que le point P soit au centre O. Décomposons la masse M en couches concentriques infiniment minces.

Soit, comme précédemment, R le rayon d'une de ces couches, dR son épaisseur, K sa densité. On obtient la fonction potentielle de cette couche sur le point O en divisant sa masse par R, ce qui donne

$$4\pi K R . dR$$

Donc le potentiel de la masse entière est

$$u = 4\pi \int_{R_0}^{R_1} K R \, dR. \tag{22}$$

2° $r > R_1$; la fonction u est égale à $\frac{M}{r}$ (n° 519) et en évaluant la masse M suivant le même mode de décomposition en couches infiniment minces, il vient

$$u = \frac{4\pi}{r} \int_{R_0}^{R_1} K R^2 \, dR \tag{23}$$

3°. $R_0 < r < R_1$; en décrivant du point o comme centre, une sphère de rayon r, on décompose la masse en deux parties ; l'une, extérieure à la sphère de rayon r, dont la fonction potentielle sur le point P est, d'après la formule (22),

$$u_1 = 4\pi \int_r^{R_1} KR\,dR$$

l'autre, intérieure à la sphère de rayon r, dont la fonction potentielle est d'après la formule (23),

$$u_0 = \frac{4\pi}{r} \int_{R_0}^{r} KR^2\,dR$$

par suite, la fonction potentielle de la couche tout entière est

$$(24) \qquad u = 4\pi \left[\int_r^{R_1} KR\,dR + \frac{1}{r} \int_{R_0}^{r} KR^2\,dR \right]$$

522. — Couche sphérique homogène. — Si la couche est homogène, K est une constante et, en effectuant les intégrations, les trois expressions de la fonction potentielle se réduisent aux suivantes :

$$(25) \qquad \begin{array}{ll} o < r < R_0 & u = 2\pi K (R_1^2 - R_0^2) \\ R_0 < r < R_1 & u = 2\pi K \left(R_1^2 - \frac{1}{3} r^2 - \frac{2}{3} \frac{R_0^3}{r}\right) \\ R_1 < r < \infty & u = \frac{4}{3} \pi K (R_1^3 - R_0^3) . \frac{1}{r} \end{array}$$

Enfin, si l'on considère une sphère pleine, homogène, de rayon R, ces formules, en y remplaçant R_1 par R et en y faisant $R_0 = o$, deviennent

$$(26) \qquad \begin{array}{ll} r < R & u = 2\pi K \left(R^2 - \frac{1}{3} r^2\right) \\ r > R & u = \frac{4}{3} \pi K R^3 . \frac{1}{r} \end{array}$$

Ces dernières équations mettent très nettement en évidence les propriétés caractéristiques de la fonction potentielle.

Dans l'espace intérieur, la courbe représentative de cette fonction est une parabole ; dans l'espace extérieur, c'est une hyperbole.

Si, dans ces deux expressions, on fait $r = R$, elles donnent la même valeur $\frac{4}{3}\pi K R^2$; ce qui devait avoir lieu, puisque la fonction potentielle est continue.

Prenons maintenant les dérivées du premier ordre ; nous trouvons les deux expressions

$$(27)\qquad \begin{array}{ll} r < R & \dfrac{du}{dr} = -\dfrac{4}{3}\pi K r \\[2ex] r > R & \dfrac{du}{dr} = -\dfrac{4}{3}\pi K R^3 \dfrac{1}{r^2} \end{array}$$

qui se confondent encore à la surface limite. Mais il en est autrement pour les dérivées secondes ; on a en effet

$$(28)\qquad \begin{array}{ll} r < R & \dfrac{d^2u}{dr^2} = -\dfrac{4}{3}\pi K \\[2ex] r > R & \dfrac{d^2u}{dr^2} = \dfrac{8}{3}\pi K R^3 \dfrac{1}{r^3} \end{array}$$

et les valeurs de ces expressions sont différentes, pour $r = R$.

Remarquons enfin que, si dans la formule du n° 516,

$$\Delta \cdot u = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr}$$

on substitue les valeurs

$$\frac{du}{dr} = -\frac{4}{3}\pi K r$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} = -\frac{4}{3}\pi K$$

lesquelles sont relatives à l'espace intérieur, on vérifie l'équation de Poisson,

$$\Delta u = 4\pi K$$

Cinématique appliquée.

Mécanismes.

1.– Les mouvements employés dans les Machines se ramènent généralement aux deux types suivants : mouvement circulaire, mouvement rectiligne.

Ces mouvements peuvent d'ailleurs être continus, c'est à dire toujours dans le même sens ou alternatifs.

Parmi les dix combinaisons auxquelles donnent lieu ces quatre mouvements pris deux à deux, avec répétition, nous étudierons les transformations suivantes qui sont les plus importantes :

1° transformation d'un mouvement circulaire continu en circulaire continu.

2° transformation d'un mouvement circulaire continu en rectiligne alternatif.

3° transformation d'un mouvement circulaire alternatif en rectiligne alternatif.

I.– Transformation d'un mouvement circulaire continu en circulaire continu.

A.– Engrenages.

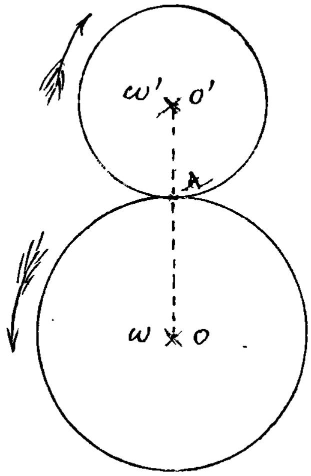
2.– Généralités.– Les engrenages sont des mécanismes servant à transformer une rotation autour d'un axe en une rotation autour d'un autre axe, avec cette condition que le rapport des vitesses angulaires soit constant.

Le problème consiste à armer deux axes fixes de surfaces destinées à se mener en restant constamment en contact.

Nous envisagerons d'abord la question dans un plan en cherchant simplement à armer deux centres donnés de rotation de courbes planes qui engrènent, c'est à dire qui se mènent en restant en contact. Revenant ensuite aux trois dimensions de l'espace, nous aurons à distinguer trois cas suivant que les axes sont parallèles, concourants ou non-concourants

a. Engrenages plans.

3.– Circonférences primitives.– Soient O et O' les deux centres de rotation, ω et ω' les vitesses angulaires correspondantes que nous supposerons d'abord de sens contraires, comme l'indiquent les flèches.



Le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ doit rester constant.

Divisons la distance OO' en deux parties par un point A tel que

$$OA \times \omega = O'A \times \omega'$$

puis décrivons les circonférences de rayons OA et OA'. Ces circonférences s'appellent circonférences primitives.

L'arc décrit pendant le temps dt par un point de la circonférence OA est $\omega\, dt \times OA$; l'arc décrit pendant le même temps par un point de la circonférence OA' est $\omega' dt \times O'A$. Ces deux arcs sont égaux par suite de l'égalité précédente

L'engrenage doit donc être construit de telle manière qu'il passe dans des temps égaux des arcs égaux des circonférences primitives à travers la ligne des centres. On en conclut que pendant le mouvement des deux courbes planes, les deux circonférences primitives roulent l'une sur l'autre.

Soient D et D' les deux courbes constituant l'engrenage, que nous appellerons courbes conjuguées. L'une d'elles D' par exemple peut être prise arbitrairement. Le problème à résoudre consiste à chercher une autre courbe D telle que le mouvement se transmettant par l'intermédiaire de ces deux courbes, les circonférences primitives roulent l'une sur l'autre.

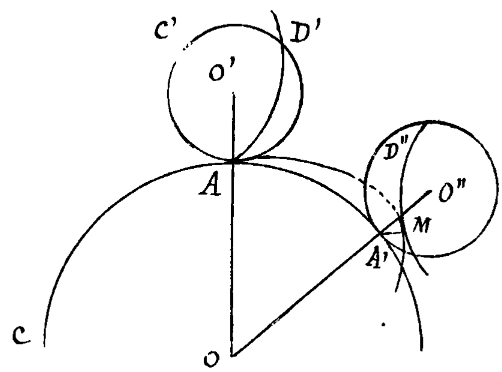
On a, pour résoudre ce problème, deux méthodes que nous examinerons successivement.

4.– Méthode des enveloppes. Les deux courbes conjuguées D et D' peuvent être regardées comme invariablement liées aux circonférences primitives correspondantes.

Elles restent constamment tangentes quand on fait tourner les deux circonférences primitives indépendamment l'une de l'autre, mais en maintenant constant le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ des vitesses angulaires. Il en sera encore de même si l'on donne à l'ensemble du système un mouvement commun quelconque. Prenons pour ce mouvement commun une rotation autour de O égale et contraire à celle de la circonférence primitive C. Celle-ci sera ramenée au repos et le mouvement de la circonférence C' sera le résultant de deux rotations de même sens, la première de vitesse angulaire ω autour de O, la deuxième de vitesse angulaire ω' autour du point O'.

Le mouvement résultant n'est autre qu'une rotation autour d'un point A de la ligne des centres, tel que l'on ait.

$$OA \times \omega = O'A \times \omega'$$



et la vitesse angulaire de la rotation résultante est $\omega + \omega'$. Le point A appartient ainsi à la circonférence primitive C et l'on voit que le mouvement de la circonférence C' est un roulement sur la circonférence primitive C supposée fixe.

La courbe cherchée D doit être tangente aux différentes positions D', D" etc, que la courbe D' prend dans ce roulement ; en d'autres termes la courbe D n'est autre que l'enveloppe des positions successives de D' lorsque celle ci est entraînée par le cercle C' roulant sur le cercle C.

L'application de cette méthode exige le tracé de l'enveloppe d'une courbe mobile, ce qui est graphiquement assez difficile à exécuter. Il faut remarquer cependant que l'on peut déterminer à l'avance le point de contact sur chaque enveloppée telle que D". Il suffit en effet d'abaisser du point A' centre instantané de rotation correspondant, la normale A'M à D". Le point M est le point cherché.

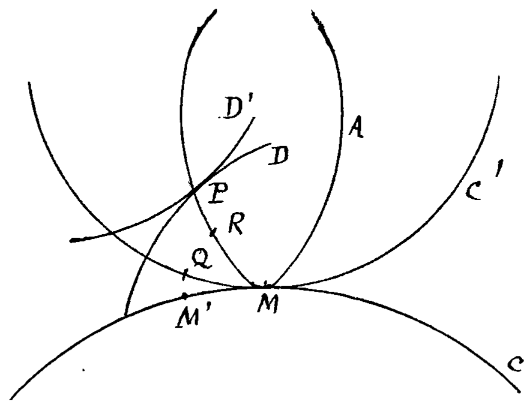
On en déduit un principe général et fondamental de la théorie des engrenages plans : La normale commune au point de contact des dents passe toujours par le point de contact des circonférences primitives.

5.– Méthode des roulettes.– Considérons, outre les circonférences primitives C et C' tangentes en M, une autre courbe arbitraire A tangente aux deux premières en M.

En faisant rouler successivement la courbe A sur C et C', un point P déterminé de A décrira dans ces deux mouvements deux courbes D et D'. Ces courbes D et D' sont des courbes conjuguées.

Pour le fair voir, il suffit de montrer que ces courbes D et D' restent constamment tangentes pendant le roulement de C' sur

Soit en effet P le point décrivant. Les courbes sont tangentes en P car la normale à chacune d'elles en P passe par le centre instantané de rotation qui est le même, savoir le point M.



Imaginons que l'on fasse rouler le cercle C' sur le cercle C et qu'en même temps on fasse rouler la courbe A sur C'. Prenons sur les trois courbes, à partir du point M des arcs égaux, MM', MQ et MR. Ces trois points viendront coïncider en même temps. Le point P se sera déplacé sur la courbe D car A roule sur C. Mais en même temps il se trouvera sur la courbe D' supposée entraînée avec C' car A roule aussi sur C'.

Ces deux courbes ont toujours quand C' roule sur C un point commun qui est le point décrivant. De plus la normale à chacune des courbes en ce point passe par le centre instantané de rotation lequel est le point M'; les deux normales sont donc les mêmes et les courbes sont tangentes.

On vérifie encore que la normale commune au point de contact des dents passe par le point de contact des circonférences primitives.

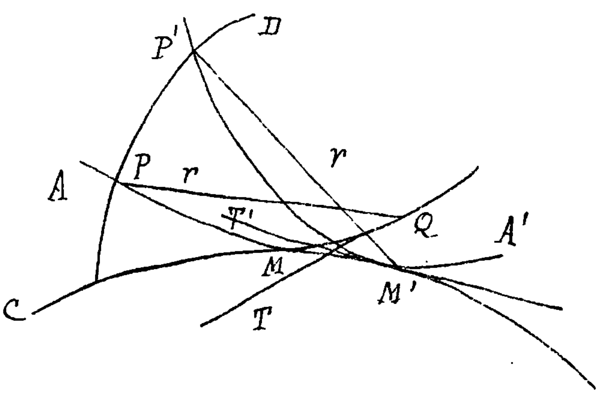
6.– La méthode des roulettes est plus simple que celle des enveloppes; mais elle est moins directe, puisque dans la dernière on se donne à priori le profil de l'une des dents, tandis que dans la première le choix arbitraire porte sur une courbe auxiliaire A.

On peut d'ailleurs montrer que la méthode des roulettes a exactement la même portée que celle des enveloppes, c'est à dire que les profils fournis par les deux méthodes sont les mêmes. Cela résulte du théorème suivant :

On peut toujours trouver une courbe A telle qu'en la faisant rouler sur une courbe donnée C, un de ses points engendre une autre ligne donnée D.

// Soit en effet P le point considéré sur la courbe A. Prenons ce point comme origine d'un système de coordonnées polaires.

Un point quelconque Q de la courbe inconnue A sera défini par sa distance r au point P et l'angle θ formé par PQ avec une direction fixe.



Par suite du roulement de A sur C, le point Q doit venir en M' tel que MM' = MQ. Le point P de A vient en P' sur la courbe donnée D et on a P'M' = r.

La droite P'M' est d'ailleurs normale en P' à la courbe D.

L'angle PQT de PQ avec la tangente en Q à la courbe A est égal à l'angle P'M'T' de P'M' avec la tangente en M' à la courbe donnée C. Or l'angle PQT a pour tangente trigonométrique $r\,\frac{d\theta}{dr}$; l'angle P'M'T' est connu en fonction de r puisque les courbes C et D sont données : sa tangente peut donc être représentée par $f(r)$ et on a

$$r\,\frac{d\theta}{dr} = f(r)$$

équation différentielle qui définit la courbe inconnue A.

7.– Cherchons, par exemple, une courbe telle que roulant sur une droite, l'un de ses points décrive une autre droite. La valeur de $f(r)$ est alors constante et peut être représentée par $\frac{1}{m}$; l'équation différentielle est alors

$$r\,\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{m}$$

ou

$$d\theta = \frac{1}{m}\,\frac{dr}{r}$$

d'où l'on tire, en intégrant

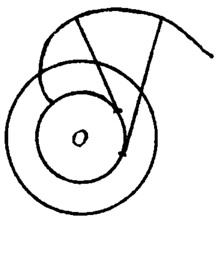
$$m\theta = Lr - Lc$$

$$r = Ce^{m\theta}$$

La courbe est donc une spirale logarithmique.

8.— Le problème précédent peut être généralisé de la manière suivante.

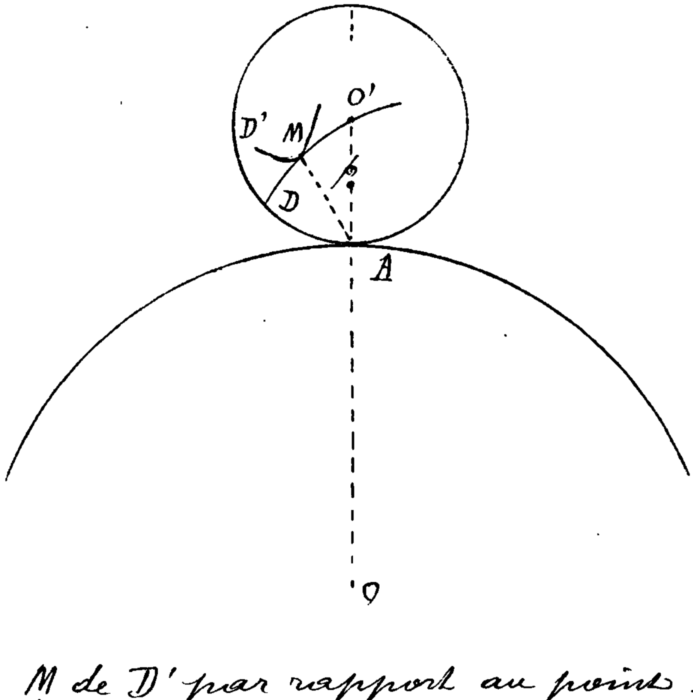
Etant donné un cercle, trouver une courbe telle qu'en roulant sur ce cercle, elle engendre la développante d'un cercle concentrique intérieur au premier.



La normale à la courbe D coupe encore le cercle donné sous un angle constant, donc $f(r)$ est une constante et la courbe cherchée est encore une spirale logarithmique.

9. Détermination du glissement élémentaire.

Dans le mouvement des engrenages, les circonférences primitives roulent l'une sur l'autre, mais les profils des dents glissent à leur point de contact. Nous allons calculer l'expression du glissement élémentaire.



Soient, à l'instant considéré M le point de contact des dents D et D', p la distance de M au point de contact des circonférences primitives.

Animons tout le système d'un mouvement de rotation autour du point O avec une vitesse angulaire égale et contraire à ω; le mouvement résultant pour la circonférence O' est une rotation instantanée autour de A avec une vitesse angulaire $\omega + \omega'$; la circonférence O devient immobile ainsi que le point M de la courbe D. Le mouvement relatif pendant le temps dt du point M de D' par rapport au point M de D est donc le glissement élémentaire; il a évidemment pour valeur

$$p\,(\omega + \omega')\,dt$$

On peut transformer cette expression en remarquant que si ds représente l'arc infiniment petit décrit sur chacune des circonférences pendant le temps dt, on a

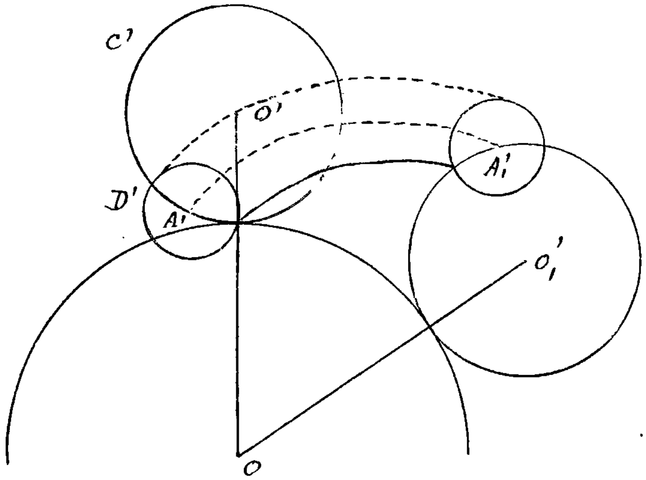
$$ds = \omega r \, dt = \omega' r' \, dt.$$

r et r' désignant les rayons de ces circonférences, et le glissement élémentaire a pour expression

$$p \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) ds$$

Nous allons examiner divers engrenages usités dans la pratique.

10.– Engrenage à lanterne.– Les cercles primitifs de la roue et du pignon étant C et C', on choisit pour la courbe invariablement liée à C' un petit cercle D' dont le centre appartient à la circonférence de C'.



L'enveloppe de D' se compose de deux courbes parallèles à l'épicycloïde décrite par son centre.

De ces deux courbes, l'une donnerait pour les dents un profil concave et par suite ne peut être acceptée.

Toutes deux d'ailleurs sont les développantes d'une même courbe, développée de l'épicycloïde $A'A'_1$, et comme la développée d'une épicycloïde est encore une épicycloïde, les deux enveloppes du cercle D' sont des développantes d'épicycloïde. Ainsi dans l'engrenage à lanterne, la dent conjuguée (alluchon), du fuseau, porté par le pignon a pour profil une développante d'épicycloïde.

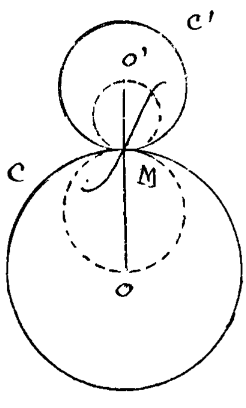
Cette ligne présente un rebroussement sur la ligne des centres; on n'en peut donc employer qu'une branche, de sorte que la conduite n'a lieu que d'un seul côté de la ligne des centres.

11.– Engrenage à flancs.– Nous emploierons ici la méthode des roulettes et nous prendrons pour courbe auxiliaire un cercle A. L'un des points de ce cercle décrira les deux profils conjugués, quand on le fera rouler sur C et sur C'. Ces profils seront évidemment des épicycloïdes.

Le plus souvent on choisit pour le diamètre de A précisément le rayon de C', ce qui simplifie un peu. Dans ce cas, l'épicycloïde D' engendrée par le roulement de A dans l'intérieur de C', dégénère, comme on le voit aisément, en un diamètre de ce cercle ; on donne à ce diamètre le nom de flanc.

Les profils conjugués sont alors un diamètre de C' et l'épicycloïde engendrée par le roulement sur le cercle C, d'un cercle ayant pour diamètre le rayon de C'.

Pour que chaque roue puisse mener l'autre indifféremment dans les deux sens, on double l'appareil et pour cela l'on fait usage d'un cercle auxiliaire A', moitié de C, qui remplisse les mêmes fonctions que A par rapport à C'. Le roulement de ce nouveau cercle donne lieu à deux profils conjugués, qui sont encore un flanc et une épicycloïde.



L'avantage de cette disposition est celui que nous avons indiqué et l'engrenage est alors dit réciproque.

L'inconvénient de l'engrenage à flancs consiste en ce que le tracé du profil des dents de l'une des roues dépend des dimensions de l'autre roue, de sorte qu'on ne peut faire engrener une même roue avec deux autres, de rayons différents.

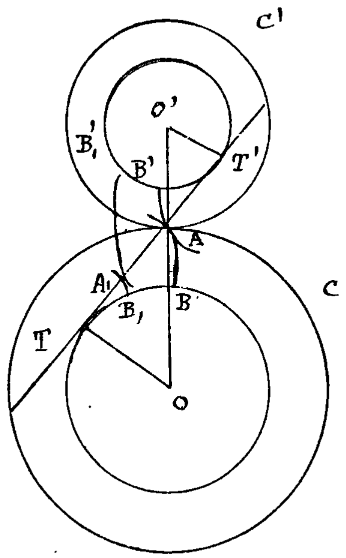
Cet inconvénient n'existe pas pour l'engrenage à développantes de cercle, dont nous allons parler.

12. – Engrenage à développantes de cercle. – Appliquons la méthode des roulettes et prenons pour courbe auxiliaire A, une spirale logarithmique : en roulant sur C et sur C' un point de cette spirale décrit des développantes de cercle D, D', qui peuvent servir de courbes conjuguées.

C'est ce qu'on peut aussi montrer directement. Par le point de contact A, de C et de C', menons en effet une sécante TT' et sur cette sécante abaissons des points O et O' les perpendiculaires OT et O'T', puis avec OT et O'T' pour rayons, O et O' pour centres, décrivons des cercles, dont TT' se trouve une tangente commune.

Les développantes des circonférences OT, O'T' menées par le point A, sont les profils conjuguées D, D' de l'engrenage; en effet si l'on fait tourner le cercle C', B'A' vient en $B'_1 A'_1$, parallèle à B'A, comme développantes d'un même cercle.

Si l'on fait tourner de même le cercle C jusqu'à ce que AB vienne passer au point A_1, BA et $B_1 A_1$ sont aussi des courbes parallèles, pour la raison indiquée plus haut. Par conséquent TT', normale à AB, AB' est aussi normale à $A_1 B_1$, $A_1 B'_1$; il en résulte que les deux développantes $A_1 B_1$, $A_1 B'_1$, sont tangentes au point A_1.



De plus les arcs BB_1, $B'B'_1$, tous deux égaux à la droite AA_1 sont égaux entre eux.

Or il en est de même des arcs décrits sur les deux cercles primitifs C et C' par le point de contact A, les rayons O'T', OT étant respectivement proportionnels aux rayons des cercles C' et C. Les deux circonférences C et C' roulent donc, sans glissement, l'une sur l'autre, pendant le mouvement des cercles OT, O'T', qui amène AB en $A_1 B_1$, AB' en $A_1 B'_1$ et laisse comme on l'a vu, les profils en contact. Ces profils sont donc conjugués, ce que nous voulions démontrer. —

Dans ce système, aucun point singulier ne se présente sur la ligne des centres, de sorte que la conduite a lieu de part et d'autre.

En outre tous les engrenages à développantes de cercle peuvent engrener ensemble; une même roue peut donc engrener à la fois d'un côté avec une roue, de l'autre côté avec une autre roue, quels que soient leurs diamètres, ce qui constitue un précieux avantage.

Enfin si pour une cause quelconque la distance des axes O et O' vient à changer légèrement, l'engrenage en vertu des propriétés bien connues de la développante de cercle, ne cesse pas d'avoir lieu; la durée seule du contact des deux dents en prise peut être modifiée.

13.– Crémaillère.– Quand le rayon de l'une des circonférences primitives tend vers l'infini, cette circonférence se rapproche indéfiniment d'une droite et à la limite on obtient une droite, dont le mouvement est une translation, limite de la rotation primitive. La vitesse de ce mouvement est toujours égale à la vitesse linéaire à la circonférence de la roue engrenante, c'est à dire égale à ωR. L'appareil porte alors le nom de crémaillère et sert à transformer une rotation en une translation ou inversement.

Les tracés que nous avons indiqués plus haut contiennent comme cas particuliers ceux dont on a besoin pour les crémaillères; il suffit, pour chacun d'eux, de faire grandir indéfiniment le rayon de l'un des cercles primitifs, l'autre restant invariable

Ainsi l'on aura:

2 sortes de crémaillères à lanterne:– Dans l'une les fuseaux sont portés par la roue, l'alluchon de la crémaillère est alors une développante de cycloïde; dans l'autre, au contraire, les fuseaux étant portés par la crémaillère, l'alluchon de la roue est une développante du cercle primitif.

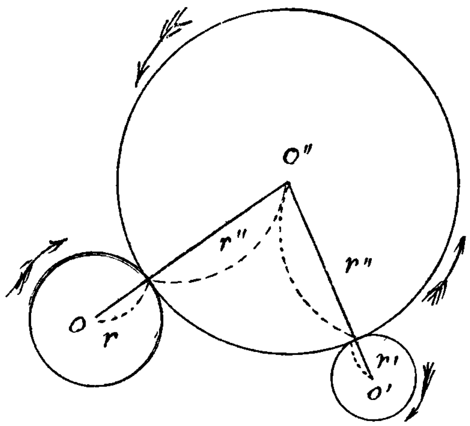
2 crémaillères à flancs: Le flanc étant porté par la crémaillère, le profil conjugué sur la roue est une développante du cercle primitif; si l'on fait porter le flanc par la roue, le profil conjugué sur la crémaillère est une cycloïde, car la développante d'une cycloïde est encore une cycloïde. La réunion des deux systèmes dont nous venons de parler conduit à la crémaillère à flancs réciproques.

Enfin, dans la crémaillère à développantes de cercles, on a pour le profil de la roue une développante de cercle et pour celui de la crémaillère une droite perpendiculaire à la sécante, menée à volonté, TT'.

14.– Engrenages intérieurs.– Dans les engrenages que nous avons étudiés jusqu'ici nous avons supposé que les rotations devaient avoir lieu autour des axes O et O' en sens inverse l'une de l'autre. Si elles devaient au contraire se produire dans le même sens, il faudrait placer le point A, par où passent les deux circonférences primitives, au delà du point O'

sur la ligne OO' qui est dirigée de O vers O', le cercle C étant supposé plus grand que C'. On verrait alors, comme précédemment, que les circonférences C et C' étant supposées tourner autour des axes O et O' avec des vitesses angulaires, dont le rapport est toujours égal à l'inverse de celui des rayons, ces deux circonférences roulent effectivement l'une sur l'autre, dans leur mouvement relatif; et réciproquement si l'on admet que ces circonférences soient astreintes à rouler l'une sur l'autre, elles tournent, pendant ce mouvement, autour des axes O et O' avec des vitesses dont le rapport invariable est inverse de celui des rayons. De plus, les rotations autour des axes O et O' sont de même sens.

En général on évite l'emploi des engrenages intérieurs et on le peut toujours, par l'adjonction d'un engrenage auxiliaire.



Soient en effet O et O' les centres autour desquels doivent s'effectuer des rotations de même sens. Armons les axes O et O' de deux circonférences primitives dont les rayons soient dans le rapport inverse de celui des vitesses angulaires qu'il s'agit d'obtenir et imaginons une troisième roue O'' engrenant avec les deux premières. Quelque soit le rayon du cercle primitif O'', il est clair que les vitesses ω, ω', ω'' autour des axes O, O', O'' satisfont aux relations suivantes:

$$\omega r = \omega'' r'' = \omega' r',$$

et l'on a donc:

$$\frac{\omega}{\omega} = \frac{r'}{r'}$$

En outre, les rotations autour des axes O et O' ont lieu en sens inverse de la rotation autour de O'' et, par conséquent, ces deux rotations, ω et ω', sont de même signe.

15. – Épures d'engrenages. – Pour produire la conduite d'une roue par une autre, une seule dent suffirait en général, au point de vue géométrique.

Mais il en est tout autrement, comme on le conçoit sans pine, lorsqu'on se place au point de vue pratique.

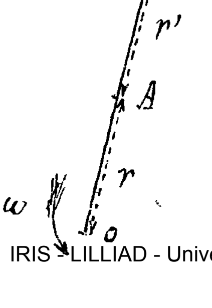
Pour constituer une roue dentée, en appliquant l'une des solutions précédentes, on est conduit à diviser le cercle primitif en un nombre entier de parties égales dont chacune est réservée à une dent. Ce nombre entier s'appelle le module et l'intervalle entre deux divisions s'appelle le pas de l'engrenage. Dans la pratique, on prélève $\frac{1}{12}$ ou $\frac{1}{16}$ du pas pour former ce que l'on nomme le jeu et l'on répartit le reste entre le plein et le vide, en raison inverse des résistances des matières formant la roue et sa conjuguée. Les points ainsi marqués servent d'origine aux faces de chaque dent. A l'extérieur, pour éviter les angles vifs on termine les dents par un arc de cercle ; c'est ce qui s'appelle l'échanfreinement. A l'intérieur, pour la même raison, on relie les dents l'une à l'autre par un cercle, dit cercle d'évidement. Les rayons de ces cercles sont déterminés ordinairement par la condition qu'il y ait toujours trois couples de dents en prise à la fois.

b. Axes parallèles.

16.– Deux solides étant astreints à tourner autour de deux axes O et O' avec des vitesses angulaires dont le rapport est invariable, nous nous proposons maintenant de rechercher par quelles surfaces il faut limiter ces solides pour qu'ils se conduisent et restent en contact.

17.– Engrenages cylindriques.– Nous procéderons comme dans le cas des engrenages plans et nous chercherons le mouvement relatif des deux solides en le ramenant à un mouvement absolu. Il faut pour cela, donner au système des deux corps un mouvement commun, de manière à ramener l'un d'eux au repos ; c'est à dire, donner à l'ensemble des deux corps un mouvement égal et contraire à celui de l'un d'entre eux.

Soient deux axes parallèles O et O', autour desquels s'effectuent des rotations inverses, de vitesses angulaires ω et ω'.



Le mouvement absolu, l'un des deux corps étant réduit au repos comme nous l'avons dit sera une rotation, $\omega + \omega'$, autour d'un axe instantané, A, parallèle aux axes O et O', tel que les trois points, O. A et O' soient en ligne droite et que les distances r et r' satisfassent à la relation

$$\omega r = \omega' r'$$

On a d'ailleurs $r + r' = \delta$, δ étant la distance des deux axes, de sorte que si $\frac{\omega}{\omega'}$ = constante, on a aussi $\frac{r'}{r}$ égal à une constante et r, r' égaux à des constantes déterminées. Le lieu des axes instantanés de rotation est donc, dans l'espace absolu, un cylindre de révolution de rayon r, quand on fixe le solide S, mobile autour de O; et c'est un cylindre de révolution, de rayon r', dans l'intérieur du solide S', mobile autour de O'. Ces deux cylindres, qui roulent l'un sur l'autre, sont dits cylindres primitifs.

La solution la plus évidente du problème que nous avons en vue consiste dès lors à adopter, pour surfaces des dents, d'autres cylindres, dont les génératrices soient parallèles à celles des précédents. Mais en coupant tout le système par un plan perpendiculaire à ces génératrices, on rentre dans le cas des engrenages plans dont chaque solution peut-être utilisée pour résoudre le problème des engrenages cylindriques. Dans ces engrenages, le contact a lieu, à chaque instant, tout le long de la génératrice.

18.– Solution générale.– Adaptons au cylindre primitif C' une surface quelconque D'; en faisant rouler C' sur C l'enveloppe D de toutes les positions de D' sera une surface constamment tangente à D', pendant le roulement de C' sur C et pourra par suite être prise pour surface conjuguée de D'. A chaque instant, le contact des surfaces D et D' a lieu le long d'une certaine ligne I; si par exemple D' est une surface plane D sera une surface développable et la ligne I, une ligne droite; si D' est une surface sphérique, D sera une surface canal et la ligne I sera circulaire. Le cas particulier déjà traité se retrouvera, si l'on prend pour D' un cylindre ayant ses génératrices parallèles aux axes de rotation; dans ce cas, D sera un autre cylindre ayant aussi ses génératrices parallèles aux axes O et O'.

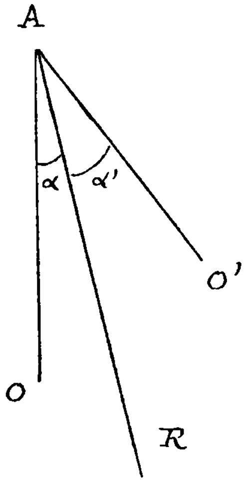
C.– Axes concourants.

19.– Engrenages coniques.– Soient OA et O'A les axes des deux rotations, leur plan étant celui de la figure, et soient $\omega = AO$ et $\omega' = O'A$, les sens de ces deux rotations sont supposés tels que deux observateurs ayant les pieds en A et la tête en O et O' voient les deux mouvements s'effectuer en sens contraire.

En répétant le raisonnement dont nous avons fait usage pour les engrenages cylindriques, on voit que la droite AR, partageant l'angle OAO' en deux parties α et α' qui satisfont à la relation

$$\omega \sin \alpha = \omega' \sin \alpha'$$

est l'axe instantané de la rotation relative de l'un des solides par rapport à l'autre, pourvu qu'on prenne pour la longueur AR celle de la diagonale du parallélogramme construit sur $AO = \omega$ et $AO' = \omega'$ et la position de AR est évidemment fixe.



Les cônes ayant pour axes AO et AO', pour sommet commun le point A et pour angle au sommet 2α et $2\alpha'$, sont ce que l'on appelle les cônes primitifs. Le mouvement relatif des deux solides est produit par le roulement de l'un de ces cônes sur le second.

La solution la plus naturelle du problème que nous nous sommes posés consiste à adopter pour surfaces des dents des cônes ayant tous pour sommet le point A et des directrices convenablement choisies. Les engrenages ainsi formés se nomment alors engrenages coniques.

Si l'on coupe tout l'ensemble du système par une sphère ayant son centre au point A, chaque cône y trace une courbe et l'on n'a plus à considérer que ces courbes sphériques pour la recherche des surfaces coniques conjuguées. On est ainsi conduit à entreprendre une théorie des engrenages sphériques, entièrement analogue à celle des engrenages plans.

Dans la pratique, on substitue au tracé des profils sur la sphère un tracé approximatif qui a été fait comme exercice de dessin et sur lequel nous n'avons pas à revenir.

d.– Axes non concourants.

20.– Solution générale.– Lorsque les deux axes de rotation ne sont pas situés dans un même plan, le mouvement relatif des deux solides peut être produit par le roulement et le glissement mutuel de deux surfaces réglées qui sont les lieux dans l'espace et dans l'un des solides de l'axe instantané, l'autre solide étant fixé.

Pour chacune de ces surfaces réglées, la génératrice conserve, par rapport à l'axe une distance et une inclinaison constantes, ces deux éléments ne dépendant que des positions relatives des deux axes et du rapport constant des vitesses angulaires. Il en résulte que ces surfaces sont des hyperboloïdes de révolution à une nappe.

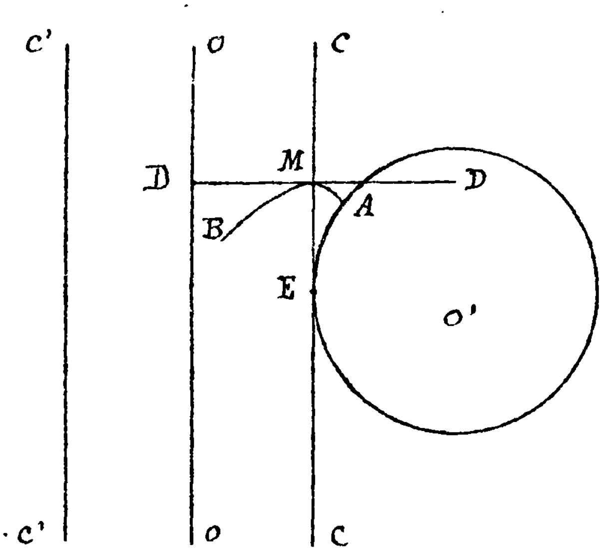
Nous leur donnerons le nom d'hyperboloïdes primitifs.

En raisonnant sur ces hyperboloïdes primitifs, comme nous l'avons fait plus haut sur les cylindres et les cônes, nous obtiendrons des surfaces conjuguées dont le contact a lieu à chaque instant soit sur une ligne soit en un point. Il est impossible d'obtenir alors des engrenages fonctionnant par simple roulement; il faudrait en effet que les points de contact eussent une vitesse nulle; or le mouvement est hélicoïdal et ne peut se réduire à une simple rotation. Par suite, les points qui ont une vitesse minimum sont les points de l'axe et ils possèdent un mouvement, qui est précisément le mouvement de translation le long de cet axe.

On peut toujours éviter les axes non concourants en introduisant un axe auxiliaire qui rencontre les deux axes donnés et c'est là la solution que l'on adopte en général, quand il se présente deux axes non concourants.

21.— Vis sans fin.— Lorsque les axes sans être concourants sont perpendiculaires entre eux, on peut employer l'engrenage de la vis sans fin.

Prenons pour plan de la figure un plan mené par l'un des axes OO perpendiculairement à l'autre O'. Imaginons un cylindre circulaire droit ayant OO pour axe et qui coupe le plan de la figure suivant les droites CC, C'C'; lions à ce cylindre une surface de vis à filet carré dont OO serait la directrice rectiligne, et dont l'autre directrice serait une hélice de pas b tracée sur le cylindre. Décrivons enfin de O' comme centre une circonférence O'E



tangente à la droite CC. Il s'agit d'armer cette circonférence de dents ayant une forme telle que, si le mouvement se transmet de O à O' ou inversement par la pression réciproque de la surface héliçoïdale et des dents, les vitesses angulaires conservent un rapport invariable.

Soit DD une génératrice de l'héliçoïde se trouvant actuellement dans le plan de figure. Si la vis tourne autour de OO avec une vitesse ω, la génératrice DD sera remplacée dans le plan de figure, au bout d'un temps dt, par une autre ayant même direction et située à une distance $\frac{h\omega dt}{2\pi}$ de la première. Après un second intervalle de temps, une troisième génératrice aura de même succédé à la seconde et ainsi de suite.

Toutes ces génératrices figureront les positions successives du flanc d'une crémaillère animée, parallèlement à OO, d'une vitesse $\frac{h\omega}{2\pi}$ qui doit se transformer en une vitesse angulaire ω' autour de O', en rapport constant avec ω. Si $\frac{\omega'}{\omega}$ est constant il en est de même de $\frac{h\omega}{2\pi\omega}$; on se trouve donc dans les conditions de l'engrenage d'une roue dentée avec une crémaillère à flancs droits. En supposant que le contact des dents doive toujours avoir lieu sur la droite CC, le profil conjugué du flanc DD sera une développante AMB du cercle O'E.

Cette définition de la figure des dents serait complète si la roue O' pouvait se réduire à un plan sans épaisseur; en fait, il reste à indiquer la surface qui doit les limiter, surface dont on ne connait jusqu'à présent que l'intersection AMB avec un plan déterminé.

Cette surface doit rester toujours en contact avec l'héliçoïde de la vis; ainsi, quand le contact se produit en M, le plan tangent commun passe par DD et fait avec le plan de figure un angle θ égal à celui sous lequel l'hélice directrice coupe les génératrices de son cylindre. La surface enveloppe de tous les plans tangents analogues menés par AMB pourra être adoptée pour surface des dents, car elle sera constamment tangente à l'héliçoïde, et attendu que le contact restera toujours sur la développante AMB, la transmission du mouvement se fera comme si cette développante existait seule, c'est à dire suivant la loi voulue.

L'enveloppe dont il s'agit est une surface réglée dont toutes les génératrices se projettent sur le plan de figure suivant des normales à la développante AMB, c'est à dire suivant des tangentes au cercle O'E, et font l'angle constant

θ avec leurs projections. On sait que la surface ainsi définie est un héliçoïde développable, lieu des tangentes à une hélice tracée sur le cylindre ayant le cercle $O'E$ pour section droite.

Soit $O'E = r'$; on a $\omega' r' = \frac{h\omega}{2\pi}$. D'où l'on tire pour le rapport des vitesses angulaires,

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{h}{2\pi r'}$$

II.– Trains d'engrenages.

22.– Définitions.– Considérons un engrenage cylindrique. Désignons par

ω, ω' les vitesses angulaires des deux roues.

r, r' les rayons des deux circonférences primitives,

n, n' les modules (nombres de dents) des deux roues.

σ le pas, ou intervalle de deux dents consécutives, compté sur chaque circonférence primitive.

On a

$$2\pi r = n\sigma \qquad 2\pi r' = n'\sigma$$

$$r\omega = r'\omega'$$

et par suite :

$$n\omega = n'\omega'.$$

Donc les vitesses angulaires sont en raison inverse des modules; il en est de même dans un engrenage conique.

En pratique, le nombre des dents d'une roue varie de 8 à 120; par suite le rapport de la plus petite à la plus grande des vitesses angulaires varie de 1 à $\frac{1}{15}$. Lorsqu'on veut réaliser un rapport notablement inférieur à $\frac{1}{15}$, on établit entre les arbres donnés d'autres arbres intermédiaires. L'un des arbres donnés reçoit directement une rotation et fait tourner au moyen d'un engrenage, le premier arbre intermédiaire; celui ci fait tourner de même un second arbre intermédiaire, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive au second arbre primitivement donné.

Le système constitue ce que l'on appelle un train d'engrenages.

a. – Trains ordinaires.

23. – Composition d'un train. Soient A, A' deux arbres donnés et $A_1, A_2, \ldots\ldots A_K$, K arbres intermédiaires formant ensemble la série

$$A, A_1, A_2, \ldots\ldots A_K, A'$$

dont nous désignerons par

$$\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots\ldots \omega_K, \omega'$$

les vitesses angulaires respectives

Supposons pour fixer les idées, $\omega > \omega'$ la composition la plus générale du train sera la suivante.

A portera un pignon et A' une roue. Chaque arbre intermédiaire portera une roue et un pignon engrenant respectivement avec le pignon de l'arbre précédent et la roue de l'arbre suivant. On désignera les modules des pignons et des roues par les deux séries de nombres:

$$n, n_1, n_2, \ldots\ldots n_K$$
$$n'_1, n'_2, \ldots\ldots n'_K, n'$$

24. – Raison d'un train d'engrenages. – On appelle raison le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ entre la plus petite et la plus grande des vitesses angulaires des deux arbres extrêmes.

Pour trouver sa valeur, remarquons que les vitesses angulaires de deux roues qui engrènent sont en raison inverse de leurs modules. On a, par conséquent, la suite d'égalités

$$n\omega = n'_1 \omega_1$$
$$n_1 \omega_1 = n'_2 \omega_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n_K \omega_K = n' \omega'$$

d'où, en multipliant membre à membre

$$n n_1 n_2 \ldots\ldots n_K \omega = n'_1 n'_2 \ldots\ldots n' \omega'$$

et, par suite,

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{n\, n_1\, n_2 \cdots\cdots n_K}{n'_1\, n'_2\, n'_3 \cdots\cdots n'.}.$$

Il en résulte que la raison du train est égale au produit des modules des pignons divisé par le produit des modules des roues.

Dans le cas d'axes tous parallèles entre eux, on peut convenir de donner le signe + ou le signe − aux rapports tels que $\frac{n}{n'_1}$, $\frac{n_1}{n'_2}$..... suivant que l'engrenage correspondant est intérieur ou extérieur. En passant d'un arbre au suivant, la vitesse conserve le même sens ou prend le sens contraire, suivant que l'on rencontre la première ou la seconde de ces alternatives. Il est facile d'en conclure que les vitesses ω et ω' seront de même sens, si la raison est positive, et qu'elles auront des sens opposés si la raison est négative.

25.– Dans le cas particulier où toutes les roues seraient identiques, ainsi que les pignons, la formule de la raison devient

$$\frac{\omega'}{\omega} = \left(\frac{n}{n'}\right)^{K+1}$$

En attribuant à $\frac{n}{n'}$ la valeur limite $\frac{1}{15}$, on voit comment on peut abaisser, autant qu'on le voudra, la raison au dessous de cette limite, en donnant à K des valeurs croissantes.

26.– Recherche d'un train dont la raison est donnée. Si la raison est une fraction commensurable, on décompose ses deux termes en facteurs premiers : on combine ensuite ces facteurs, en multipliant au besoin les deux termes par un même nombre, de manière à obtenir au numérateur et au dénominateur le produit d'un même nombre de facteurs convenables, c'est à dire compris (autant que possible) entre 8 et 120.

27.– Si les deux termes ont de trop grands facteurs premiers, la question peut se résoudre par approximation. A cet effet on développe la raison donnée en fraction continue ; on en calcule les réduites successives et l'on choisit parmi elles une fraction dont les deux termes puissent se décomposer en facteurs convenables (Huyghens)

28. — On peut aussi opérer comme il suit. Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux réduites consécutives ; désignons par l, m, deux nombres entiers positifs, la fraction

$$\frac{la + mc}{lb + md}$$

est comprise entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, et il pourra se faire qu'elle approche plus de la raison exacte que l'une ou l'autre de ces réduites et qu'en même temps ses termes soient décomposables en facteurs plus simples.

29. — Exemple : rouage lunaire. — Proposons nous de relier deux axes dont l'un effectue sa rotation en un demi jour, tandis que l'autre fait un tour pendant la durée d'une lunaison qui est 29,5306, le jour étant pris comme unité. La raison est ici.

$$\frac{0,5}{29\ 5306} = \frac{2.500}{147,653}$$

ou en décomposant les deux termes en facteurs premiers

$$\frac{2^2 . 5^4}{11. 31. 433}$$

comme il est impossible d'admettre une roue de 433 dents, on doit renoncer à réaliser rigoureusement la raison proposée.

En la développant en fraction continue, on a les réduites successives :

$$\frac{1}{59} = \frac{1}{59}$$

$$\frac{16}{945} = \frac{2^4}{3^3.5.7}$$

$$\frac{33}{1949} = \frac{3.11}{1949}$$

$$\frac{49}{2894} = \frac{7^2}{2\times 31.37}$$

$$\frac{817}{48253} = \frac{19.43}{73,661}$$

Le second rapport a été construit par Ferguson ; en écrivant

$$\frac{16}{945} = \frac{8 \times 2}{45 \times 21} = \frac{8.8}{45.84}$$

on voit qu'on peut le réaliser avec deux pignons de 8 dents chacun, menant des roues de 45 et 84 dents. Il est approché par défaut avec une erreur de 57 secondes environ par lunaison.

Parmi les autres réduites, la quatrième seule pourrait encore être employée.

En se servant de reduites intercalaires, ainsi qu'il a été dit précédemment, on obtient les valeurs suivantes qui ont été indiquées par Willis :

$$\frac{33 + 49.6}{1949 + 2894.6} = \frac{327}{19313} = \frac{3.109}{7.31.89} = \frac{8 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 109}{16 \cdot 31 \cdot 89 \cdot 112}$$

$$\frac{49 + 817.2}{2894 + 48253.2} = \frac{1683}{99.400} = \frac{3^2 . 11 . 17}{2^3 . 5^2 . 7 . 71} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 17}{16 \cdot 25 \cdot 28 \cdot 71}$$

La deuxième de ces solutions ne comporte qu'une erreur tout à fait négligeable. ($0^s,103$ par lunaison).

b.- Trains épicycloïdaux.

30 - Définition. - Un train d'engrenages est dit épicycloïdal quand il est porté par un solide invariable, appelé chassis, mobile autour d'un axe fixe. Les axes de rotation des roues décrivent alors des surfaces de révolution (cylindres, cônes ou hyperboloïdes) autour de l'axe fixe, ou bien ils se confondent avec lui.

On distingue dans le train trois pièces essentielles :

1° Le chassis,

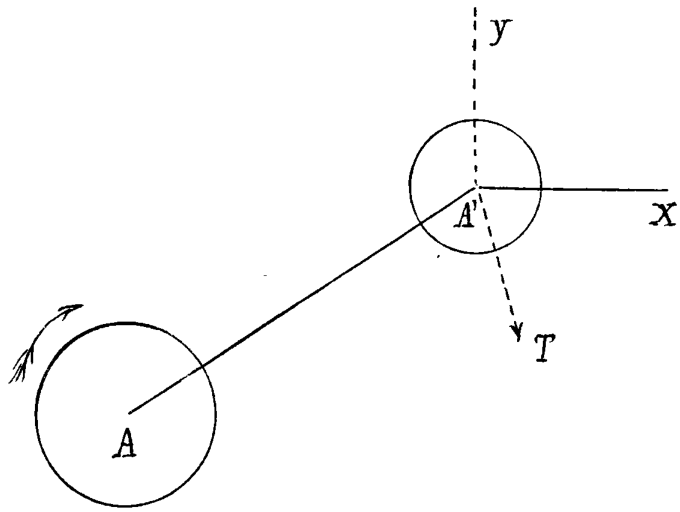
2° Une première roue dont l'axe coïncide toujours avec celui du chassis,

3° Une dernière roue dont l'axe coïncide avec celui du chassis ou lui est parallèle.

31. - On ramène aux trains épicycloïdaux de nombreux

dispositifs, usités dans l'horlogerie astronomique. Ces appareils sont fort compliqués et, en apparence, les plus divers. On peut cependant y discerner des traits communs qui permettent d'en établir une théorie générale qui a été formulée pour la première fois par Willis. On se propose, dans cette théorie, de calculer le rapport des vitesses angulaires des roues extrêmes, qui est constant comme dans les trains ordinaires.

§ 32. — Formule fondamentale de Willis. — Le plan de figure étant perpendiculaire à l'axe du chassis, soient A et A' les traces des axes de la première et de la dernière roue. AA' est une droite invariablement liée au chassis et tournant autour de A. On considérera comme positives les vitesses angulaires des rotations s'opérant dans le sens indiqué par la flèche.



Désignons par
λ la vitesse angulaire du chassis autour de A;
ω la vitesse angulaire de la première roue autour de A;
ω' la vitesse angulaire de la dernière roue dans son mouvement propre de rotation autour de A' c'est à dire évaluée relativement à des axes $A'X$ $A'Y$ menés par le point A' et se déplaçant parallèlement à eux mêmes.

Le mouvement absolu de la dernière roue se compose :
1° d'une rotation autour de A', dont la vitesse angulaire est ω'; 2° d'une translation dont la vitesse perpendiculaire à AA', dans le sens $A'T$, est égale à $AA' \times \lambda$.

33. — Cela posé, cherchons le mouvement relatif des roues A et A' par rapport au chassis. Il suffit, à cet effet, de donner à tout le système un mouvement égal et contraire à celui du chassis, c'est à dire une rotation autour de A, avec la vitesse angulaire $-\lambda$.

Le mouvement résultant, pour la première roue, est évidemment une rotation autour de A, avec la vitesse angulaire $\omega - \lambda$.

Pour trouver le mouvement relatif de la dernière roue remarquons que la rotation $-\lambda$ autour de A se décompose en une rotation $-\lambda$ autour de A' et une translation dont la vitesse, perpendiculaire à AA', en sens inverse de $A'T$, est égale à $AA' \times \lambda$. Par suite, le mouvement relatif de la dernière roue résulte en définitive de deux translations qui se détruisent et de deux rotations autour de A' qui se composent en une rotation unique dont la vitesse angulaire est $\omega - \lambda$

Le rapport des vitesses angulaires relatives de la dernière et de la première roue est donc

$$\frac{\omega' - \lambda}{\omega - \lambda}$$

mais le chassis étant induit au repos par suite du mouvement donné à tout l'ensemble du système, le mouvement relatif est devenu celui d'un train ordinaire dont la raison a une valeur $\mathcal{E}$ exprimable à l'aide des modules des roues. Cette valeur ne différant pas d'ailleurs du rapport des vitesses angulaires de la dernière et de la première roues, on aura la relation générale

$$\mathcal{E} = \frac{\omega' - \lambda}{\omega - \lambda}$$

Cette formule est générale, pourvu qu'on attribue les signes convenables aux vitesses angulaires ω, ω', λ et à la raison $\mathcal{E}$.

34. — Dans les questions de cette nature, il n'y a pas lieu de distinguer essentiellement les pignons et les roues, on emploie ordinairement les notations suivantes :

a module de la première roue,

a_1, a_2 modules des roues du premier axe intermédiaire,

a_3, a_4 modules des roues du second axe intermédiaire.

. . . .

a' module de la dernière roue

On a alors

$$\mathcal{E} = \frac{a \quad a_2 \quad a_4 \ldots\ldots\ldots\ldots a_{2K}}{a_1 \quad a_3 \quad a_5 \ldots\ldots\ldots\ldots a'}$$

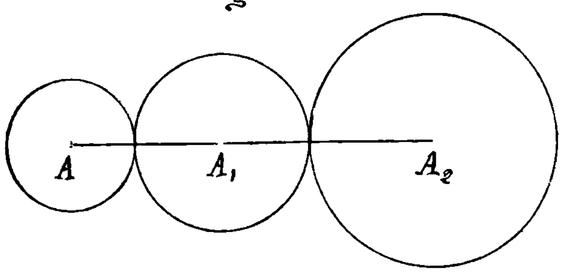
K étant le nombre des axes intermédiaires.

Les modules qui, dans l'expression de ε occupent un même rang au numérateur et au dénominateur appartiennent à des roues qui engrènent, et les rapports de ces modules correspondants $\frac{a}{a_1}$, $\frac{a_2}{a_3}$ .... $\frac{a_{2K}}{a'}$, doivent ainsi qu'il a été dit, être pris avec le signe + ou le signe −, selon que les deux roues auxquelles ces modules se rapportent sont intérieures ou extérieures.

Les deux roues d'un arbre peuvent être égales, ou se réduire à une seule ; deux modules consécutifs a_1, a_2 ; $a_3\, a_4$; .... deviennent alors égaux mais il ne faut faire la réduction qu'après avoir fixé les signes.

35. — Exemples : 1° Trois axes A, A_1, A' armés chacun d'une roue, et disposés conformément à la fig I. Les deux roues de l'arbre intermédiaire sont confondues en une seule. Les deux engrenages du train étant extérieurs, chacun des rapports $\frac{a}{a_1}$, $\frac{a_1}{a'}$ doit être pris avec le signe −.

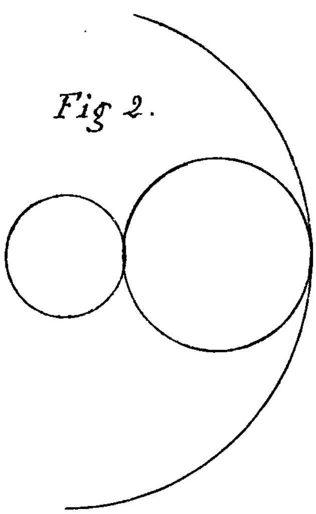
Fig. 1.



Par suite :

$$\varepsilon = + \frac{a}{a'}.$$

Fig 2.



2° supposons les trois axes disposés conformément à la fig. 2, l'axe A' étant concentrique de A. Le rapport $\frac{a}{a_1}$ doit être pris avec le signe − ; le rapport $\frac{a_1}{a'}$ avec le signe +. et on a :

$$\varepsilon = - \frac{a}{a'}$$

36. — Cas où la première roue est fixe. — Lorsque la première roue est fixe, on a $\omega = 0$; la formule de Willis devient :

$$\varepsilon = \frac{\omega' - \lambda}{-\lambda}$$

On en tire :

$$\omega' = \lambda\,(1 - \mathcal{E})$$

On utilise cette relation dans divers dispositifs : nous nous bornerons à en signaler une application.

37.– Paradoxe de Ferguson.– Supposons trois roues disposées comme dans le premier exemple du n°35. La première roue est fixe ; AA' est un levier tournant autour de A. On a alors

$$\mathcal{E} = \frac{a}{a'}$$

et en attribuant successivement à a' les valeurs

$$a+1\ ,\quad a,\quad a-1$$

on a, pour les valeurs correspondantes de ω';

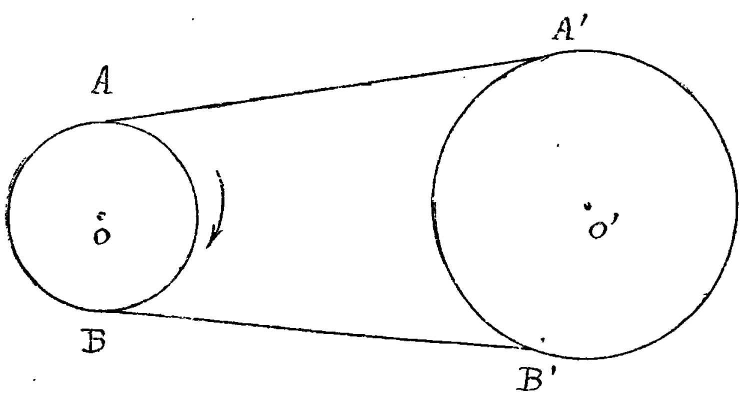
$$+\frac{\lambda}{a+1},\quad 0,\quad -\frac{\lambda}{a-1}$$

Par suite la dernière roue épicycloïdale prend, lorsqu'on fait tourner le levier, une rotation de même sens que le levier, une translation, ou une rotation de sens contraire..

Ferguson réunissait les trois cas dans un même dispositif; en prenant pour a un nombre assez grand, 20 par exemple pour que la différence des trois dernières roues fût peu sensible à l'œil, le paradoxe consistait à donner à ces roues, en apparence égales, des mouvements différents.

III.– Transmission par courroies.

38.– Courroies sans fin.– Considérons deux solides assujettis à tourner autour de deux axes fixes parallèles O, O'. On établit



sur les deux arbres des poulies ou tambours dont les sections moyennes sont dans un plan perpendiculaire à la direction des axes sur les jantes de ces deux poulies se place une courroie sans fin assez fortement tendue pour ne pas glisser sur elles. Si l'on admet alors que la courroie soit inextensible, tous ses points ont la même vitesse, et puisqu'il n'y a pas glissement, cette vitesse est égale à celle qui existe sur la circonférence des poulies. Donc en nommant :

ω, ω' les vitesses angulaires autour de O, O';

r, r' les rayons OA, OA'.

ces quantités satisfont à la relation

$$\omega r = \omega' r'$$

Le rapport des vitesses angulaires est donc bien constant; de plus il est égal au rapport inverse des rayons.

La démonstration de ce fait suppose les courroies inextensibles.

La disposition de la figure correspond à des rotations de même sens. Pour obtenir des sens contraires, on fait suivre à la courroie sans fin les tangentes intérieures communes aux cercles des poulies, celles qui se croisent dans l'intervalle des centres. On évite que les deux brins qui se croisent se gênent mutuellement, en tordant chacun d'eux de manière qu'ils se touchent par la face, et non par la tranche. De plus, on a soin qu'ils se touchent par celle des deux faces qui est lisse, tandis que la face rugueuse reste en contact avec les deux poulies.

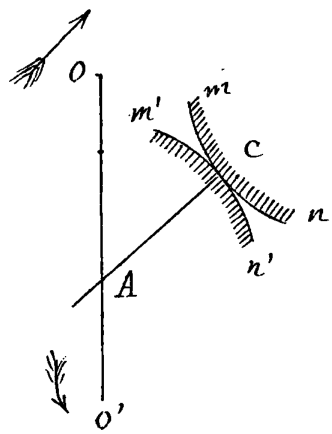
IV. – Cames cylindriques sur arbres parallèles.

39. – On peut transmettre le mouvement de rotation d'un arbre à un autre arbre parallèle en armant les deux axes de rotation de surfaces cylindriques, à génératrices parallèles aux axes, destinées à se mener mutuellement en restant en contact.

Les solides limités par ces surfaces portent le nom générique de cames.

Les engrenages réalisent le mode de transmission que nous considérons ici dans le cas particulier où le rapport des vitesses de rotation reste constant. Écartant maintenant cette condition restrictive, on se propose de trouver, pour une position quelconque du système le rapport des vitesses angulaires des deux arbres.

On peut, en coupant le système par un plan perpendiculaire aux axes, considérer simplement deux centres de rotation O, O' armés de deux profils $m\,n$, $m'n'$ qui se mènent en restant en contact.



Supposons les rotations de sens contraires et désignons les vitesses angulaires de ces rotations par ω, ω'.

Pour déterminer le rapport de ces vitesses cherchon le mouvement relatif de $m\,n$ par rapport à $m'n'$; ce sera une rotation, avec une vitesse $\omega + \omega'$, autour d'un centre A situé sur OO' de telle sorte que l'on ait :

$$OA \times \omega = O'A \times \omega'$$

et la ligne AC est normale aux deux profils.

Donc, pour avoir le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, on mène du point de contact des deux profils la normale commune et on détermine son point de rencontre A avec la ligne des centres; on a

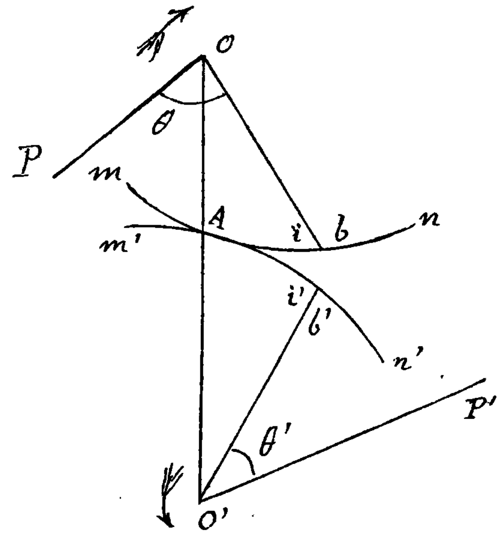
$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{OA}{O'A}.$$

En désignant par p la longueur CA, le glissement élémentaire du point C est $p\,(\omega + \omega')\,dt$. Ce glissement ne peut être nul qu'autant que le point de contact des deux profils est sur la ligne des centres OO'; alors le mouvement relatif de l'une des cames par rapport à l'autre est un mouvement de roulement sans glissement

40.– Courbes roulantes.– Un profil $m\,n$ étant donné, on peut toujours trouver un second profil $m'n'$ ait toujours lieu sur la ligne des centres, les deux profils sont alors des courbes roulantes, le problème a été résolu par Euler de la manière suivante :

Soit $f(r, \theta) = 0$ l'équation de $m\,n$ en prenant O pour pôle et une droite arbitraire OP pour axe polaire.

Cherchons l'équation de la courbe conjuguée $m'n'$ en prenant le pôle O' et l'axe polaire O'P'. Soient b b' deux points correspondants qui arrivent simultanément sur OO'; les rayons r, r' seront alors portés bout à bout suivant la même droite et l'on aura, en désignant par δ la distance OO'



$$(1) \qquad r + r' = \delta$$

Maintenant, si l'on considère les angles i, i' que les tangentes en b et b' font avec les rayons vecteurs O b et O'b', on voit qu'à l'instant où b et b' coïncident, ces angles deviennent opposés par le sommet, puisque les courbes sont en contact; par suite

$$\tang i = \tang i'.$$

c'est à dire

$$r \frac{d\theta}{dr} = r' \frac{d\theta'}{dr'}$$

ou bien encore, eu égard à l'équation (1)

$$(2) \qquad r\, d\theta = - r' d\theta'$$

L'élimination de r et θ entre les équations (1) (2) et l'équation

$$(3) \qquad f(r, \theta) = 0$$

conduit à l'équation différentielle du profil m'n'.

La condition nécessaire et suffisante pour que deux courbes puisse être prises pour courbes roulantes conjuguées, c'est que pour chaque point b de l'une, il y ait sur l'autre un point correspondant b', variant d'une manière continue avec b, et tel que l'on ait

$$r' = \delta - r \qquad i' = i$$

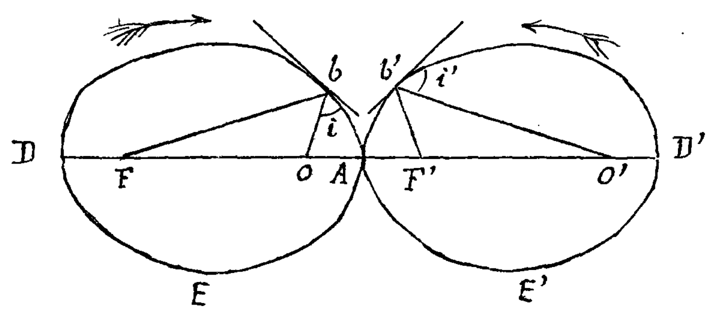
41 - Profils dérivés. — Quand on a deux courbes roulantes conjuguées, on peut en déduire une infinité d'autres qui sont dites dérivées des premières. Il suffit de conserver les mêmes

valeurs de r et r' et de réduire les angles θ, θ' dans un ~~même~~ rapport constant. En effet, les conditions (1) et (2) ~~nécessaires~~ et suffisantes, restent satisfaites après ce changement.

42.– Exemples de courbes roulantes.–

1° Ellipses.– On peut adopter pour courbes roulantes deux ellipses égales tournant autour de deux foyers fixes O. O' dont la distance égale le grand axe $2a$.

La figure représente les courbes à l'instant où leurs grands axes sont en prolongement l'un de l'autre; F F' sont les foyers mobiles.



Si nous prenons sur les deux ellipses deux points $b\,b'$ à égale distance de A, on aura en posant $Ob = r$, $O'b' = r'$ et en désignant par i, i' les angles des tangentes avec les rayons vecteurs

$$r + r' = 2a \qquad i = i'$$

les conditions nécessaires et suffisantes sont donc vérifiées.

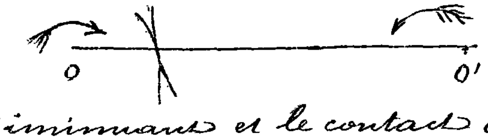
Dans la position figurée ci-dessus, on a:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{OA}{O'A} = \frac{a-c}{a+c}$$

en désignant par $2c$ la distances des deux foyers. Après une rotation de 180°, le rapport des vitesses est $\frac{a+c}{a-c}$.

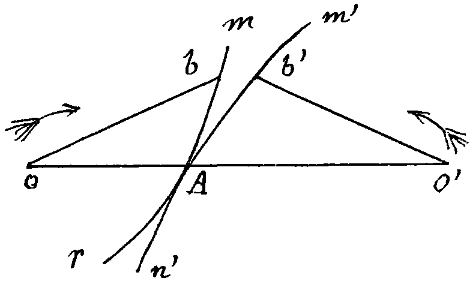
Il est à remarquer que, lorsque le point de contact parcourt l'arc A b D sur l'ellipse de gauche, le rayon vecteur va toujours en croissant et le contact des ellipses a lieu comme dans la figure ci-contre; si l'ellipse de gauche tourne dans le sens indiqué par la flèche, elle oblige par sa pression l'autre ellipse à tourner autour de O',

sans que les deux courbes puissent se séparer. Mais quand le point de contact a dépassé le sommet D et que la seconde moitié de la révolution a commencé, les rayons vecteurs de l'ellipse de gauche vont en



diminuant et le contact offre la disposition de la deuxième figure ci-contre. Le mouvement étant supposé devoir se continuer dans le même sens, on voit que l'ellipse de gauche n'entraînera plus l'ellipse de droite, car il faudrait que la première exerçât sur la seconde une traction et non une pression comme dans le premier cas. Pour rendre la transmission obligatoire on devra munir les demi-ellipses DEA, D'E'A de dents qui engrèneront les unes dans les autres. Après avoir choisi le profil (P) de ces dents sur l'ellipse O', en faisant rouler la première sur la seconde et prenant l'enveloppe des positions du profil (P).

43. – 2° Spirales logarithmiques. – Comme second exemple, considérons un arc de spirale logarithmique m n ayant O pour pôle et pour centre de rotation. Cherchons le profil conjugué m'n'.



En prenant pour axe polaire OO' l'équation de m n est

$$r = Ce^{m\theta}$$

Soient r', θ' les coordonnées d'un point du profil conjugué, en prenant OO' comme axe polaire.

En désignant par δ la distance OO', nous aurons :

$$r + r' = \delta$$
$$r\, d\theta = -\, r' d\theta$$

On a d'ailleurs

$$dr = Cme^{m\theta} d\theta = mr\, d\theta$$

On déduit de ces équations

$$dr' = mr'\, d\theta'$$

d'où, en intégrant

$$r' = c' e^{m\theta'}$$

Le profil conjugué est donc une spirale logarithmique et cette spirale est la même que la première. En effet, changeons d'axe polaire et prenons pour nouvel axe polaire une droite faisant avec O'O un angle α ; nous aurons $\theta' = \alpha + \theta$, et par suite

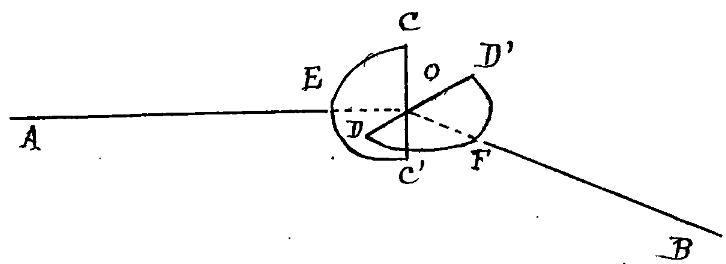
$$r' = C' e^{m\alpha}\, e^{m\theta},$$

Nous pourrons disposer de α de manière que $C'e^{m\alpha} = C$ et par suite le profil $m'n'$ n'est autre que le profil $m\,n$ que l'on a fait tourner d'un certain angle.

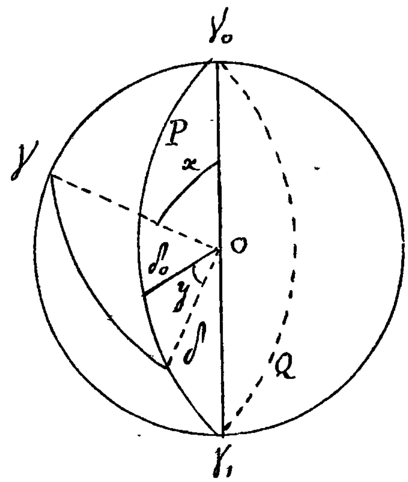
Il est à remarquer que les constantes C, C' sont représentées par les rayons recteurs $OA, O'A$.

V. Joint universel.

44. Deux arbres qui tournent autour d'axes concourants sont liés de la manière suivante. Soit O le point de rencontre des deux axes OA, OB; l'arbre tournant autour de OA se termine par une fourchette CEC' percée de deux œillets dont les centres CC' sont sur une même perpendiculaire menée à OA par le point O. Le second arbre, celui qui tourne autour de OB, se termine par une fourchette DFD' semblable à la première. Dans les quatre œillets $C, C', D\,D'$ passent les quatre tourillons qui terminent un corps solide nommé croisillon, formé de deux tiges rigides se coupant à angle droit. Ce mécanisme qui sert à transmettre la rotation d'un axe à un autre axe concourant par l'intermédiaire d'un lien rigide, s'appelle joint universel ou joint Hollandais.



45. – Afin de nous rendre compte de la relation des mouvements autour des deux axes, imaginons une sphère de rayon 1 ayant son centre en O; soient γ et δ l'intersection de cette sphère avec les deux bras OC et OD. Le point γ décrit sur cette sphère un grand cercle dont le plan est pris pour plan de figure; le point δ décrit un autre grand cercle PQ. Les plans de ces deux cercles sont respectivement perpendiculaires aux axes de rotation; ils se coupent donc suivant un



diamètre $\gamma_0 \gamma_1$ perpendiculaire au plan des deux axes et font entre eux un angle i égal à celui de ces axes. De plus les bras du croisillon étant à angle droit, l'arc de grand cercle $\gamma\delta$ doit être égal à un quadrant. On voit par là que les déplacements de γ et δ sont ceux des deux extrémités d'un axe de grand cercle de longueur constante qui s'appuie toujours sur deux grands cercles donnés ; l'une des extrémités ne peut se déplacer sans entraîner le déplacement de l'autre et par suite aussi le mouvement de rotation se transmet d'un axe à l'autre.

46. — Prenons maintenant pour position initiale du point γ le point γ_0 ; au même instant le point δ est sur le centre PQ en δ_0, sur la perpendiculaire $O\delta_0$ à γ_0. Considérons le passage à une autre position quelconque $\gamma\,\delta$, et soient x, y les angles décrits simultanément par les droites $O\gamma$, $O\delta$ dans ce passage, angles qui sont ceux dont les deux arbres ont tourné pendant le même temps. Le triangle sphérique $\gamma_0\,\gamma\,\delta$ a pour côtés

$$\overline{\gamma_0\gamma} = x \qquad \overline{\gamma_0\delta} = \frac{\pi}{2} + y \qquad \overline{\gamma\delta} = \frac{\pi}{2}$$

et i est l'angle opposé à $\gamma\delta$: la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique donne donc

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos x \cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right) + \sin x \sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right) \cos i$$

ou bien

$$0 = -\cos x \sin y + \sin x \cos y \cos i$$

d'où l'on déduit

$$(1) \qquad \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x \cos i$$

Cette relation, entre les angles simultanément décrits par les deux arbres à partir d'une position déterminée permet de trouver le rapport des vitesses angulaires ω, ω'. On a en effet, en prenant les dérivées des deux membres :

$$\frac{1}{\cos^2 y}\,\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\cos^2 x}\,\frac{dx}{dt}\,\cos i$$

on tire de là

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 x}\,\cos i = \frac{\cos i}{\cos^2 x\,(1 + \operatorname{tg}^2 y)}$$

ou, en substituant la valeur (1) de tg y :

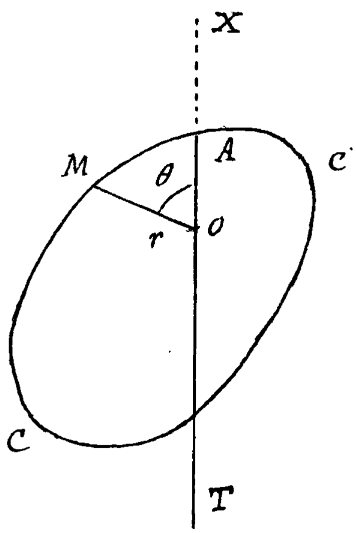
$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\cos i}{1 - \sin^2 x \sin^2 i}$$

Le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ varie avec x ; ses valeurs extrêmes répondent à $\sin x = 0$ qui donne le minimum et $\sin x = 1$ qui donne le maximum.

On remarquera que $tg\,x$ et $tg\,y$ deviennent nulles et infinies en même temps ; les deux arbres tournent donc simultanément d'un même nombre entier d'angles droits. Si les deux axes sont rectangulaires $\cos i = 0$; l'angle y reste toujours nul en vertu de l'équation (1) et par conséquent la transmission devient impossible.

B. – Transformation d'un mouvement circulaire continu en rectiligne alternatif. –

47. – Excentriques. – Concevons que le plan d'une courbe CC tourne autour du point O et qu'un point A d'une droite guidée dont la direction passe par le point O, soit assujetti à rester sur la courbe.



Pendant la rotation, les rayons vecteurs OM arrivent successivement en coïncidence avec la direction OX. Par suite, le point A devra se déplacer, en s'éloignant du point O tant que les rayons vecteurs iront en croissant. Après un tour complet si la courbe est fermée, le point A sera revenu à son point de départ et pendant les tours suivants, les mêmes alternatives se reproduiront. On aura donc bien produit un mouvement alternatif avec la rotation continue de la courbe.

48. – Supposons que l'équation polaire de la courbe soit

$$(1) \qquad f(r, \theta) = 0$$

en prenant O pour pôle et OA pour axe polaire ; supposons aussi que le mouvement de rotation soit défini par l'équation

$$(2) \qquad \theta = \varphi(t)$$

faisant connaître le temps après lequel un rayon vecteur quelconque OM vient se placer sur la ligne Ox. Prenons pour origine du temps l'époque où le rayon OA est placé sur cette ligne ; à l'époque t, la distance x du point A au point O sera égale à r et l'on aura

$$(3) \qquad x = r$$

l'élimination de r, θ entre les équations (1), (2), (3) donnera la relation entre x et t, c'est à dire l'équation de mouvement du point A de la droite guidée ; on peut l'écrire sous la forme

$$(4) \qquad f(x, \varphi(t)) = 0$$

Réciproquement, étant donnée la relation entre x et t

$$(5) \qquad F(x, t) = 0$$

ainsi que la loi du mouvement de rotation représentée par la relation (2) entre θ et t, on trouverait l'équation de la courbe par l'élimination de x et t entre les équations (2) (3) et (5).

Si la rotation est uniforme, en désignant par ω la vitesse angulaire, on a

$$\theta = \omega t$$

Par suite, l'équation (4) devient

$$(6) \qquad f(x, \omega t) = 0$$

et l'équation polaire de la courbe répondant au mouvement de translation défini par l'équation (5), serait

$$(7) \qquad F\left(r, \frac{\theta}{\omega}\right) = 0$$

49. – La courbe CC s'appelle excentrique ; on l'appelle ainsi parceque, dans le cas où cette courbe est circulaire, on la fait tourner autour d'un point qui n'est pas le centre du cercle.

Pour réaliser la transformation de mouvement que produisent les excentriques, on emploie divers dispositifs, notamment les excentriques à galets.

50. – Excentriques à galets. – Un cylindre tourne autour d'un axe O parallèle à ses génératrices ; sa section droite est une courbe CC. D'autre part, une tige guidée dont l'axe passe par O, et qui se trouve dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, porte, en un de ses points A, un galet cylindrique, de rayon très petit, qui s'appuie sur la surface du cylindre.

Par suite de la rotation, le point A de la tige sera obligé de se déplacer, pourvu que les rayons vecteurs du profil du cylindre aillent en croissant. Pour que la translation continue lorsque les rayons vecteurs vont en décroissant, on fixe un second galet en un autre point A' de l'axe de la tige et on prend pour profil du cylindre une courbe fermée telle que la somme de deux rayons vecteurs, issus du point O, dans les directions opposées, soit égale à AA', de sorte que

$$OM + OM' = AA'$$

Par suite de cette disposition, l'excentrique pousse l'un des galets à partir de la position où il cesse de pousser l'autre. Une oscillation complète, aller et retour, se compose ainsi de deux moitiés comprenant les mêmes chemins élémentaires, décrits dans le même ordre, mais en sens opposés.

Soient $OA = a$, $OA' = a'$; désignons par r et r' les rayons du profil dans les directions opposées θ et $-(\pi-\theta)$; pour que l'excentrique puisse fonctionner entre les deux galets, on doit avoir constamment

$$r + r' = a + a'.$$

1er Exemple. – On peut former le profil de deux moitiés, symétriques par rapport à AA', en prenant pour chacune de ces moitiés une spirale d'Archimède. On a alors

$$r = a + (a' - a)\frac{\theta}{\pi}$$

$$r' = a' - (a' - a)\frac{\theta}{\pi}$$

et, par suite, $r + r' = a + a'$. On voit que, si la rotation est uniforme, la translation l'est aussi.

2e Exemple. – On peut prendre :

$$r = a + a'\sin^2\frac{\theta}{2}$$

En remplaçant dans cette équation θ par $-(\pi-\theta)$, on a

$$r' = a + a' \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

et la condition est encore satisfaite.

En supposant $\theta = \omega t$, l'équation du mouvement alternatif est :

$$x = a + \frac{1}{2} a' (1 - \cos \omega t)$$

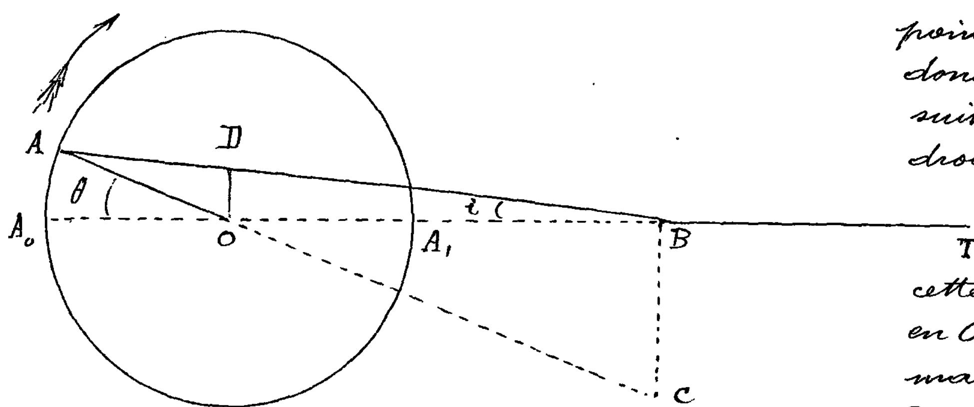
On a donc, pour la vitesse et l'accélération de la tige,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \omega a' \sin \omega t \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2} \omega^2 a' \cos \omega t$$

La tige arrive ainsi, avec une vitesse nulle, aux extrémités de sa course.

51.– Tige guidée et manivelle réunies par une bielle.–

La manivelle OA tourne autour d'un axe O perpendiculaire à sa direction ; en A elle s'articule avec une bielle AB articulée elle même en B avec une tige guidée BT.



Le mouvement du point B se fait donc nécessairement suivant une ligne droite, et l'on s'arrange pour que cette droite passe en O. Lorsque la manivelle tourne dans le sens indiqué par la flèche, le point A décrit un cercle et le point B prend un mouvement rectiligne alternatif.

Les points A_0, A_1, se nomment points morts, parceque, si la manivelle occupe les positions OA_0, OA_1 une force exercée dans la direction de la tige guidée ne pourrait faire sortir l'arbre O du repos et ne ferait que le presser contre ses appuis.

52.– Cherchons l'équation du mouvement du point B ; désignons par

x la distance OB,
a la longueur OA de la manivelle,
b la longueur AB de la bielle,
θ l'angle A_0OA
i l'angle A_0BA
$\mathcal{E}$ le rapport $\frac{a}{b}$.

On a :

$$x = b \cos i - a \cos\theta$$

Mais on a, dans le triangle AOB.

$$\frac{\sin i}{\sin\theta} = \frac{a}{b} = \mathcal{E}$$

il en résulte

$$\sin i = \mathcal{E}\sin\theta \qquad \cos i = \sqrt{1-\mathcal{E}^2\sin^2\theta}$$

et, par suite,

$$x = b\sqrt{1-\mathcal{E}^2\sin^2\theta} - a\cos\theta$$

En supposant que θ soit une fonction donnée du temps, cette relation donne l'équation du mouvement de la tige.

Dans les applications, $\mathcal{E}$ est généralement moindre que $\frac{1}{4}$; on a alors, avec une approximation suffisante

$$\sqrt{1-\mathcal{E}^2\sin^2\theta} = 1 - \frac{1}{2}\mathcal{E}^2\sin^2\theta$$

et, par conséquent

$$x = b - a\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\mathcal{E}\sin^2\theta\right)$$

La vitesse est donnée par la formule

$$\frac{dx}{dt} = a\omega\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\mathcal{E}\sin 2\theta\right)$$

ω désignant la vitesse angulaire de la manivelle. Si la rotation est uniforme, cette formule devient

$$\frac{dx}{dt} = a\omega\left(\sin\omega t - \frac{1}{2}\mathcal{E}\sin 2\omega t\right)$$

53.– On peut déterminer géométriquement la vitesse du point B. En effet le centre instantané de rotation de AB se trouve au point de rencontre C de OA prolongé avec la perpendiculaire élevée en B sur OB. La vitesse du point A étant $\omega \times OA$, celle du point B est

$$V = \omega \times OA \times \frac{BC}{AC}$$

Si D est le point de rencontre de AB avec la perpendiculaire en O sur OB, on a

$$\frac{OD}{OA} = \frac{BC}{AC}$$

et, par suite

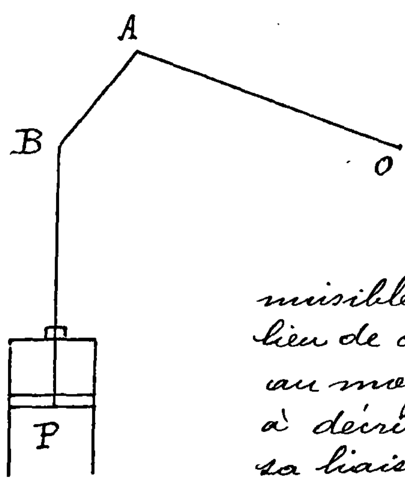
$$V = \omega \times OD$$

On voit que la vitesse V, nulle aux points morts, est égale à celle du bouton de la manivelle, lorsque cette manivelle est perpendiculaire à la direction de la tige

C. – Transformation d'un mouvement circulaire alternatif en rectiligne alternatif.

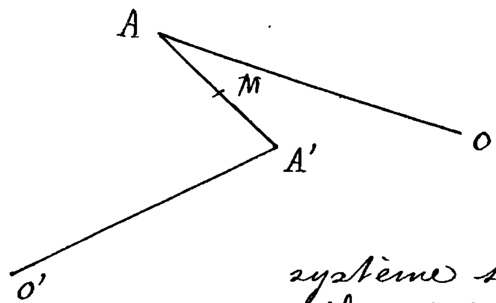
54. – Balancier à brides de Watt. – Ce mécanisme donne la solution approximative du problème consistant à transformer un mouvement de rotation alternatif en un mouvement rectiligne alternatif.

Watt voulait transmettre le mouvement rectiligne alternatif d'un piston P mobile verticalement dans un corps de pompe à un balancier OA oscillant autour d'un axe horizontal fixe



Pour cela, en supposant guidée la tige du piston, il suffirait d'employer un lien rigide articulé en A avec le balancier et en B avec la tige ; mais alors la tige éprouverait de la part du lien une action oblique qui tendrait à la fléchir, circonstance nuisible à la bonne marche de l'appareil. Au lieu de cela, Watt a cherché une combinaison au moyen de laquelle le point B fût assujetti à décrire une ligne droite indépendamment de sa liaison avec la tige du piston et seulement en vertu du mouvement du balancier. Cette combinaison qui constitue le balancier à bride, se compose de la manière suivante.

55. — Soit OA l'axe du balancier ; une pièce O'A' tourne autour d'un axe O' parallèle à l'axe du balancier ; cette pièce se nomme la bride ou le contrebalancier. Une troisième pièce AA', nommée lien, articulée avec les précédentes les réunit.

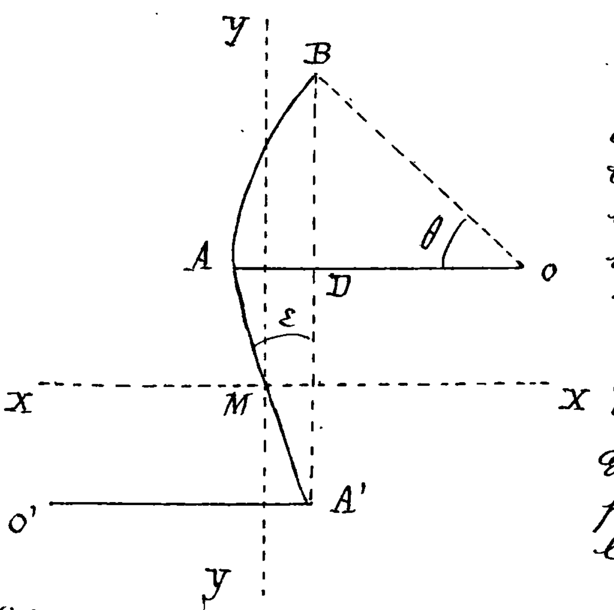


Lorsque les dimensions de ce système sont convenablement réglées, le milieu M du lien se meut à très peu près sur une droite.

56. — La solution de Watt se rattache à ce problème géométrique, que l'on rencontre fréquemment dans l'étude des mécanismes.

Déterminer le lieu d'un point invariablement lié à une droite de longueur constante se mouvant de manière que chacune de ses extrémités reste sur la circonférence d'un cercle.

On peut construire géométriquement la tangente en un point quelconque M du lieu. En effet, soient A et A' les extrémités de la droite mobile lesquelles se meuvent sur des circonférences dont O et O' sont les centres ; le centre instantané de rotation du système invariable formé par la droite AA' et le point M est au point de rencontre C des rayons OA et O'A' prolongés ; donc, en joignant le point C au point M on a la normale à la courbe en ce point.



57. — Supposons maintenant que l'on prenne égales les longueurs OA et O'A' du balancier et de la bride et que la longueur du lien soit telle que les droites OA et O'A' soient parallèles dans leur position moyenne, et cherchons, dans ces conditions particulières, le lieu géométrique du milieu de AA'.

Considérant le système articulé dans sa position moyenne ; nous prendrons pour axes coordonnés les droites XX, YY, passant par le point M, la première parallèle, la seconde perpendiculaire aux directions OA, O'A'.

Soient a, b les coordonnées du point O ; $-a$, $-b$ seront les coordonnées du point O'.

Soit $OA = O'A' = r$; $AA' = l$.

Du point A' abaissons une perpendiculaire sur OA ; soit B son intersection avec la circonférence décrite, de O comme centre avec OA comme rayon. Désignons par

θ l'angle AOB

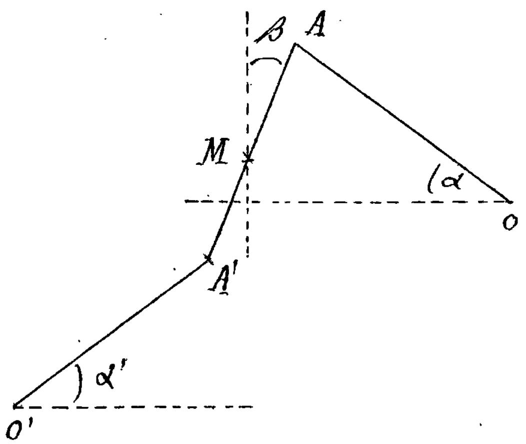
ε l'angle AA'B.

de sorte que l'on a la relation

$$(1) \qquad l \sin \varepsilon = r\,(1 - \cos \theta)$$

58. — Cela posé, amenons la figure articulée OA A'O' dans une position quelconque.

Désignons par α et α' les angles que OA et O'A' font avec la direction XX, et par β l'angle que A'A fait avec la direction YY.



En projetant le contour polygonal O'A'AO successivement sur la direction XX et sur la direction YY, on obtient, entre les angles α, α', β les deux relations suivantes :

$$r \cos \alpha' + r \cos \alpha + l \sin \beta = 2a$$
$$r \sin \alpha' - r \sin \alpha + l \cos \beta = 2b$$

et, attendu que les seconds membres doivent rester les mêmes dans la position moyenne pour laquelle on a :

$\alpha = \alpha' = 0$; $\beta = -\varepsilon$, il vient

$$(2) \qquad r\,(2 - \cos \alpha - \cos \alpha') = l\,(\sin \beta + \sin \varepsilon)$$

$$(3) \qquad r\,(\sin \alpha - \sin \alpha') = l\,(\cos \beta - \cos \varepsilon)$$

Si maintenant on appelle x, y les coordonnées du point M, on trouve aisément

$$(4) \qquad 2x = r\,(\cos \alpha' - \cos \alpha)$$

$$(5) \qquad 2y = r\,(\sin \alpha' + \sin \alpha)$$

On a l'équation du lieu en éliminant α, α', β entre les quatre équations (2) (3) (4) (5). Nous ferons cette élimination en supposant très-petits les angles α, α', β, ainsi que θ, ε, ce qui a lieu en effet, dans la pratique, avec les dimensions adoptées par Watt.

Remarquons d'abord que si l'on élimine l, à l'aide de la formule (1) les relations (2) et (3) deviennent

$$(6) \quad \sin\varepsilon\,(2-\cos\alpha-\cos\alpha') = (\sin\beta+\sin\varepsilon)(1-\cos\theta)$$

$$(7) \quad \sin\varepsilon\,(\sin\alpha-\sin\alpha') = (\cos\beta-\cos\varepsilon)(1-\cos\theta)$$

Il résulte de cette dernière équation que si l'on considère tous les angles comme des quantités très petites du premier ordre, la différence $\alpha-\alpha'$ est du deuxième ordre. Si l'on développe alors les équations suivant les puissances des variables, en réduisant les deux membres à leurs valeurs principales, on trouve toutes réductions faites,

$$(8) \qquad \varepsilon\alpha^2 = \frac{1}{2}(\beta+\varepsilon)\theta^2 \qquad \varepsilon(\alpha-\alpha') = \frac{1}{4}(\varepsilon^2-\beta^2)\theta^2$$

$$(9) \qquad x = \frac{1}{2}r'\alpha(\alpha-\alpha') \qquad y = r\alpha$$

De là résulte, par l'élimination de α' et de β

$$(10) \qquad x = \frac{1}{2}r\varepsilon\alpha^3\left(1-\frac{\alpha^2}{\theta^2}\right) \qquad y = r\alpha$$

La première de ces expressions fait connaître l'écart très-petit qui, pour un angle donné α, sépare un point de la combe de l'axe des y.

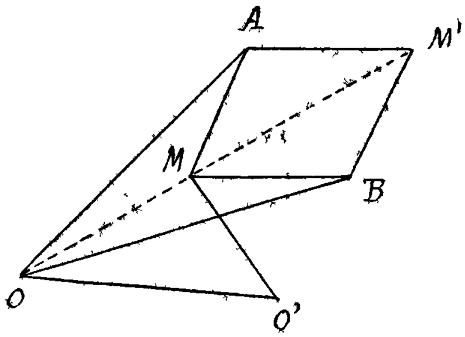
En éliminant enfin α entre les deux équations (10) on obtient l'équation de la courbe, dite à longue inflexion, sous la forme

$$(11) \qquad x = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon y^3}{r^2}\left(1-\frac{y^2}{\theta^2 r^2}\right)$$

La discussion de cette équation montre que le point décrivant s'écarte extrêmement peu de l'axe des y lorsque α varie de $-\theta$ à $+\theta$. La courbe présente trois inflexions dans l'étendue correspondante.

59.– Parallélogramme de Peaucellier.– M. le Général Peaucellier a imaginé un système articulé qui permet la transformation rigoureuse du mouvement circulaire en un mouvement rectiligne.

Lemme. — La transformée par rayons vecteurs réciproques d'une circonférence est une circonférence lorsque le pôle de la transformation est intérieur ou extérieur à la circonférence donnée; cette transformée est une droite lorsque le pôle est sur la circonférence.



Cela posé, O et O' sont deux centres fixes; OA, OB sont deux tiges rigides tournant librement et indépendamment l'une de l'autre autour de O; AMBM' est un losange articulé; MO' est une tige rigide tournant autour de O'.

Les trois points O, M, M' restent toujours en ligne droite, car chacun d'eux est à égale distance des points A et B.

Le produit OM × OM' est constant, car OM et OM' sont des segments d'une sécante au cercle décrit de A comme centre avec AM pour rayon.

Enfin MO' étant constant et O' fixe, M décrit une circonférence et M' décrit la transformée réciproque de cette circonférence par rapport au point O; donc M' décrit en général une circonférence. Si on prend O'M = OO' le lieu de M' se réduit à une droite.