

**ZEITSCHRIFT  
FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.**

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE,  
H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON

**R. MEHMKE**  
IN STUTTGART

UND

**C. RUNGE**  
IN GÖTTINGEN

59. BAND.

MIT 112 FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,  
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.  
1911.

**ALLE RECHTE, EINSCHLIESZLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN**

# Inhalt.

	Seite
<b>Behrens, W.</b> Ein mechanisches Problem aus der Theorie der Laval-Turbine, behandelt mit Methoden der Himmelsmechanik . . . . .	337
<b>Blasius, H.</b> Mitteilung zu meiner Abhandlung über: Funktionentheoretische Methoden in der Hydromechanik. . . . .	43
— Stromfunktionen symmetrischer und unsymmetrischer Flügel in zweidimensionaler Strömung. . . . .	225
<b>Cisotti, Umberto.</b> Sopra la derivazione dei canali. . . . .	137
<b>Disteli, Martin.</b> Über die Verzahnung der Hyperboloidräder mit geradlinigem Eingriff. . . . .	244
<b>Fillunger, Paul.</b> Die Spannungsverteilung in keilförmigen Körpern, auf welche eine Einzelkraft einwirkt, unter Beschränkung auf das ebene Problem. . . . .	44
— Die Spannungsverteilung im geraden Kreiskegel, hervorgerufen durch eine Einzelkraft von beliebiger Richtung und Lage . . . . .	391
<b>Francke, Adolf.</b> Der hyperbolische Kosinusbogenträger (Kettenlinienträger)	113
<b>Goldziher, Karl.</b> Beiträge zur Praxis der für die Berechnung des Rentenzinsfußes verwendbaren speziellen trinomischen Gleichung . . . . .	410
<b>Kimmel, Herm.</b> Konstruktion der Strömungsbilder eines stromdurchflossenen Kreisringes, eines zylindrischen Solenoids und einer gleichmäßig mit Masse belegten Kreisfläche. . . . .	20
<b>Mattausch, G.</b> Zur Ermittlung der Stromverteilung in Leitungsnetzen . .	73
<b>Mehmke, R.</b> Beiträge zur Kinematik starrer und affin-veränderlicher Systeme, insonderheit über die Windung der Bahnen der Systempunkte . 90, 204,	440
<b>Mohr, O.</b> Graphische Zusammensetzung und Zerlegung von Kräftegruppen .	431
<b>Reismann, Bernh.</b> Ortsbestimmung auf photographischem Wege aus Aufnahmen mit Zenitmarke. . . . .	1
<b>Sanden, Horst von.</b> Zur Konstruktion der Ellipse aus den Achsen . . . .	10
— Gegenseitige Orientierung von nahezu parallelen Aufnahmen in der Photogrammetrie . . . . .	12
— Über eine zweckmäßige Konstruktion des Stangenplanimeters . . . .	314
<b>Schrutka, Lothar von.</b> Eine Methode zur Auflösung quadratischer und kubischer Gleichungen mit der Rechenmaschine. . . . .	56
<b>Schulze, Artur.</b> Über trimetrische Liniennetze . . . . .	70
<b>Schulze, Paul.</b> Allgemeine Theorie unsymmetrischer Ablenkungen bei Systemen mit einem Freiheitsgrad und deren Zusammenhang mit der allgemeinen Theorie unsymmetrischer Schwingungen gleicher Systeme, nebst Anwendungen auf besondere Fälle . . . . .	298
<b>Timoschenko, Steph.</b> Erzwungene Schwingungen prismatischer Stäbe . . .	163
<b>Waelsch, Emil.</b> Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes bei polytropischen Kurven . . . . .	34

B\*

	Seite
<b>Weber, Anton.</b> Geschwindigkeitsänderung eines bewegten Hohlraums in- folge von Kompression . . . . .	311
-- Die Transformation von Energie und Bewegungsgröße . . . . .	313
<b>Werkmeister, P.</b> Über graphische Tafeln für Funktionen einer Veränder- lichen, insbesondere über graphische Logarithmentafeln . . . . .	151
<b>Willers, Fr. A.</b> Zum Integrator von E. Pascal. . . . .	36

---

### Bücherschau.

Emil Müller. Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hoch- schulen. Von <b>K. Döhlemann</b> . . . . .	95
W. Jordan. Hilfstafeln für Tachymetrie. Von <b>P. Werkmeister</b> . . . . .	97
E. Hammer. Prof. N. Jadanzas Tachymeter-Tafeln für zentesimale Winkel- teilung. Von <b>P. Werkmeister</b> . . . . .	97
O. Seeliger. Dr. A. L. Crelle's Rechentafeln. Von <b>P. Werkmeister</b> . . . . .	221
J. Bojko. Neue Tafel der Viertelquadrate aller natürlichen Zahlen von 1 bis 20000 zur Bildung aller möglichen Produkte im Bereiche 1 mal 1 bis 10000 mal 10000. Von <b>P. Werkmeister</b> . . . . .	222
A. Adler. Fünfstellige Logarithmen mit mehreren graphischen Tafeln und häufig vorkommenden Zahlenwerten. Von <b>P. Werkmeister</b> . . . . .	223
G. Bauer. Vorlesungen über Algebra. Von <b>H. Wieleitner</b> . . . . .	223
M. Lindow. Die Anwendung der Differentialrechnung auf das technische Zeichnen. Von <b>H. Wieleitner</b> . . . . .	224
J. Perry. Höhere Analysis für Ingenieure. Von <b>H. Wieleitner</b> . . . . .	319
A. Brill. Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik raumerfüllender Massen. Von <b>H. E. Timerding</b> . . . . .	320
A. Peltzer. Albrecht Dürers Unterweisung der Messung. Von <b>K. Döhlemann</b>	443
A. Christmann und H. Baer. Grundzüge der Kinematik. Von <b>H. Wieleitner</b>	443
L. Crelier. Géométrie cinématique plane. Von <b>H. Wieleitner</b> . . . . .	444
— Systèmes cinématiques. Von <b>H. Wieleitner</b> . . . . .	444

Neue Bücher . . . . .	98, 322
Eingelaufene Schriften . . . . .	102, 330
Technisches Abhandlungsregister 1906—1907 (Schluß). Von Ernst Wölfling.	107

## Ortsbestimmung auf photographischem Wege aus Aufnahmen mit Zenitmarke.

Von BERNH. REISMANN in Münster i. W.

Es sind in den letzten Jahren verschiedentlich Vorschläge gemacht worden, die Photographie auch für astronomische Orts- und Zeitbestimmung in Verwendung zu bringen und zwar unter möglichster Beschränkung hinsichtlich der instrumentellen Hilfsmittel, ohne daß man sich jedoch genötigt sähe, in den Anforderungen an die Genauigkeit der Beobachtungsergebnisse zu weit zurückzugehen. Das Ziel dieser Bestrebungen dürfte wohl das gewesen sein, einmal die dem Beobachter zufallende Arbeit zu vereinfachen, indem die Registrierung der erforderlichen Daten der photographischen Platte überlassen wird, ein zweites Mal aber ein bequemes Beobachtungsinstrument zu schaffen, das namentlich auf Reisen leicht zu handhaben ist. Schnauder, Runge und Schwarzschild haben derartige Methoden angegeben.

Prinzipiell stimmen die Methoden der drei Autoren dahin überein, daß auf der Platte die Lage des Zenitpunktes angegeben werden muß, so daß man aus seiner Lage zu den umliegenden Sternen Breite und Zeit bestimmen kann; verschieden sind sie, hinsichtlich der Art und Weise, wie diese Markierung des Zenits geschieht. Prof. Schwarzschild, auf dessen Veranlassung hin ich die Bearbeitung einer derartigen Aufnahme übernahm, verwendet hierzu den sog. Zenitkollimator.<sup>1)</sup>

Dieser besteht aus einem kleinen Fernrohr, in dessen Brennebene ein versilbertes Glasplättchen befestigt ist; in die Silberschicht ist eine feine Marke eingeritzt, die das Fadenkreuz vertritt. Das Fernrohr ist durch eine Öffnung in einer dicken, horizontalen Metallplatte mit dem Objektiv senkrecht nach unten gerichtet durchgeführt, aber so, daß es noch um eine vertikale Achse, die nahe mit der optischen zusammenfällt, drehbar ist. Die Platte selbst ist mit drei Fußschrauben versehen. Am Fernrohr sitzen außerdem zwei feine Libellen von wenigen Sekunden Parswert, die der optischen Achse desselben eine kleine, konstante

1) Jahrbuch für Phot. u. Reproduktionstechnik. Halle 1903.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 59. Band. 1911. Heft 1.

## 2 Ortsbestimmung auf photographischem Wege aus Aufnahmen mit Zenitmarke.

Neigung gegen die Vertikale in allen Azimuten sichern. Das Ganze ruht mit den drei Fußschrauben auf einem festen, niedrigen nach Art der Theodolithstative gebauten Gestell.

Will man nun eine Beobachtung anstellen, so stellt man die photographische Kamera mit dem Objektiv nach oben gerichtet unmittelbar unter dem Kollimatorstativ auf dem Erdboden fest auf, dabei darauf achtend, daß die photographische Platte nach Augenmaß gut horizontal liegt und auch das Kameraobjektiv senkrecht unter dem Kollimatorobjektiv ist. Dann nivelliert man die zwei Libellen sorgfältig ein, öffnet die photographische Kamera und beleuchtet kurze Zeit die Marke in der Brennebene des Zenitkollimators. Diese bildet sich in der auf Unendlich eingestellten Kamera scharf ab und erscheint nach dem Entwickeln schwarz auf hellem Grunde. Darauf dreht man den Kollimator im Azimut um  $180^\circ$ , bringt wieder die Libellen zum Einspielen und beleuchtet die Marke zum zweitenmale. Diese doppelte Einstellung eliminiert die unbekannte Neigung der optischen Achse des Fernrohres gegen die Vertikale; der Zenitpunkt ist der Mittelpunkt zwischen den zwei schwarzen Kreuzen auf der Platte.

Jetzt hebt man den Kollimator mit seinem Stativ vorsichtig ab, dabei sorgfältigst jede Erschütterung der Kamera vermeidend und läßt die Sterne einige Zeit lang auf der Platte ihre Spuren beschreiben. In einem passenden Momente, den man sich an der Uhr merkt, deckt man das Kameraobjektiv mit der Hand für fünf Sekunden zu, wodurch eine Unterbrechung in der Sternspur entsteht. Diese Manipulation wiederholt man noch einmal und schließt dann endlich den Objektivverschluß; die „Beobachtung“ ist zu Ende. Für den Erfolg ist wesentlich eine scharfe Einstellung der Libellen, da ja ein Fehler hierin ganz in das Resultat übergeht.

Für die Vermessung der Aufnahme ist es empfehlenswert, eine photographische Kopie eines Gautierschen Gitters an die Platte zu drücken, und die Unterbrechungsstellen in den Sternspuren auf die Gitterstriche als rechtwinkliges Koordinatensystem zu reduzieren. Bei der Genauigkeit der Gautierschen Gitter ist eine Koordinatenbestimmung bis auf wenige Tausendstel eines Millimeters ganz gut zu erreichen.

Zur Berechnung liefert uns die Platte eine große Anzahl von Bestimmungsstücken. Im vorliegenden Problem wird es sich empfehlen, die Azimutdifferenzen dreier Sterne als zwei erste Koordinaten zu wählen, und zwar deshalb, weil Fehler, die an ihnen durch eine geneigte Stellung der Platte während der Aufnahme hervorgebracht werden, als Größen zweiter Ordnung in bezug auf den Neigungswinkel zu vernachlässigen sind. So wird es uns ermöglicht, in einer ersten Näherung

von der Neigung gänzlich abzusehen, zumal noch bei den meist kleinen Zenitdistanzen der Einfluß von Änderungen in den Azimutdifferenzen auf jene wiederum ganz erheblich gemindert wird.

Die so gewonnene Problemstellung ist durchaus nicht einfach; es liegt nämlich der Fall des räumlichen Snelliusschen Problems vor, für das S. Günther in den Sitzungsber. d. Bayr. Akademie (II Cl. 1904) eine direkte Lösung gegeben hat; diese dürfte wohl wegen ihrer Umständlichkeit kaum in Frage kommen. Vielmehr werden wir zu Näherungsrechnungen greifen, zumal stets genäherte Werte der Ortskoordinaten bekannt sein werden, und damit wieder Näherungen für die Zenitdistanzen der in Frage kommenden Sterne aus Sternkarten zu entnehmen sind.

Das Verfahren ist das folgende:

Mit drei Näherungswerten der Zenitdistanzen unserer drei Sterne  $A, B, C$  (wir bezeichnen sie mit  $z_a, z_b, z_c$ ) gehen wir ein in die Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} \sin^2\left(\frac{ab}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{z_a - z_b}{2}\right) + \sin z_a \sin z_b \sin^2\left(\frac{azb}{2}\right) \\ \sin^2\left(\frac{ac}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{z_a - z_c}{2}\right) + \sin z_a \sin z_c \sin^2\left(\frac{azc}{2}\right) \\ \sin^2\left(\frac{bc}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{z_b - z_c}{2}\right) + \sin z_b \sin z_c \sin^2\left(\frac{bzc}{2}\right), \end{cases}$$

die abgeleitet sind aus:

$$(2) \quad \cos(ab) = \cos z_a \cos z_c + \sin z_a \sin z_b \cos(azb).$$

Hierin bedeuten:  $(ab), (ac), (bc)$  die sphärischen Distanzen der drei Sterne,  $(azb), (azc), (bzc)$ , die der Platte entnommenen Azimutdifferenzen.

Da wir für die Zenitdistanzen nur Näherungswerte eingesetzt haben, werden die aus (1) berechneten sphärischen Distanzen noch Abweichungen  $\Delta(ab), \Delta(ac), \Delta(bc)$  gegen die wahren, aus den Sternkoordinaten der astron. Jahrbücher berechneten zeigen; diese fortzuschaffen ist der Zweck der Differenzenrechnung.

Entwickelt man nämlich die Gleichung (1) nach Taylor, indem man  $(ab), z_a$  und  $z_b$  als Variable betrachtet, und die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt, so erhält man die Gleichung:

$$(3) \quad \begin{aligned} \sin(ab) \cdot \Delta(ab) &= \Delta z_a (\sin z_a \cos z_b - \cos z_a \sin z_b \cos(azb)) \\ &+ \Delta z_b (\sin z_b \cos z_a - \cos z_b \sin z_a \cos(azb)), \end{aligned}$$

die in  $\Delta z_a$  und  $\Delta z_b$  linear ist.

#### 4 Ortsbestimmung auf photographischem Wege aus Aufnahmen mit Zenitmarke.

Zwei ähnliche Gleichungen folgen durch zyklische Vertauschung der Buchstaben:

$$(3) \quad \begin{cases} \sin(ac) \Delta(ac) = \Delta z_a (\sin z_a \cos z_c - \cos z_a \sin z_c \cos(azc)) \\ \quad \quad \quad + \Delta z_c (\sin z_c \cos z_a - \cos z_c \sin z_a \cos(azc)) \\ \sin(bc) \Delta(bc) = \Delta z_b (\sin z_b \cos z_c - \cos z_b \sin z_c \cos(bzc)) \\ \quad \quad \quad + \Delta z_c (\sin z_c \cos z_b - \cos z_c \sin z_b \cos(bzc)). \end{cases}$$

Aus ihnen berechnen wir die Verbesserungen, die an den Zenitdistanzen anzubringen sind:  $\Delta z_a$ ,  $\Delta z_b$ ,  $\Delta z_c$ .

Ganz ähnlich verfahren wir zur Ermittlung der Breiten- und Zeitverbesserungen. Wir haben die Zenitdistanzen von drei gleichzeitig beobachteten Sternen; brauchen jedoch nur zwei von ihnen zur Lösung der Aufgabe. Deshalb wählen wir diese zwei so aus, daß der eine Stern nahe dem Meridian steht, der andere am ersten Vertikal, was für die Genauigkeit des Resultats besonders günstig ist. Unter Verwendung der rohen Zenitkoordinaten  $\varphi_0$ ,  $\alpha_0$  rechnen wir die Zenitdistanz der zwei Sterne nach:

$$(4) \quad \sin^2\left(\frac{z_a}{2}\right) = \sin \varphi_0 \sin \delta + \cos \varphi_0 \cos \delta \sin^2\left(\frac{\alpha_0 - \alpha}{2}\right)$$

und vergleichen diese Werte mit den oben erhaltenen.

Zur Beseitigung der vorhandenen Abweichungen  $\Delta z_a$ ,  $\Delta z_b$  dient die Differenzgleichung (5), die wie oben aus

$$\cos z_a = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos(\alpha_0 - \alpha)$$

durch Differentiation erhalten ist.

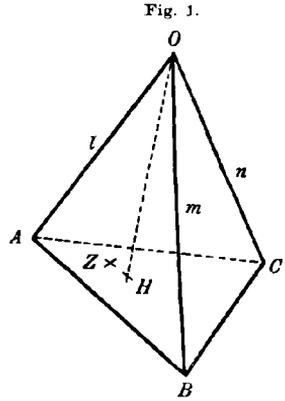
$$(5) \quad \begin{aligned} -\sin z_a \cdot \Delta z_a &= \Delta \varphi (\cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos(\alpha_0 - \alpha)) \\ &\quad - \Delta(\alpha_0 - \alpha) \sin \varphi \cdot \cos \delta \sin(\alpha_0 - \alpha). \end{aligned}$$

Die entsprechende Gleichung gilt für den anderen Stern, nur daß die Konstanten sich ändern. Nach Anbringung der aus der Auflösung der beiden Gleichungen hervorgehenden Verbesserungen  $\Delta \varphi$ ,  $\Delta(\alpha_0 - \alpha)$  an dem angenommenen Werte ist der erste Teil der Rechnung erledigt.

Bis jetzt haben wir immer unter der Voraussetzung gerechnet, daß die Platte während der Aufnahme horizontal gelegen habe, mithin die Azimutdifferenzen, die wir ihr entnommen hatten, mit der Wirklichkeit übereinstimmten; diese Übereinstimmung ist bei geneigter Platte natürlich nicht mehr vorhanden. Unser nächstes Ziel muß daher sein, die Neigung der Platte zu finden, ihren Einfluß auf die Azimutdifferenzen zu untersuchen und daraus schließlich die Änderungen der Zenitdistanzen der Sterne zu berechnen. Die ganze Neigungsrechnung läuft auf die Bestimmung des Tetraeders hinaus, das von dem Objektiv als Spitze und den drei Sternbildern als Ecken der Basis gebildet wird.

In der beistehenden Figur sei  $P$  die photographische Platte mit den drei Sternpunkten  $A, B, C, Z$  das Bild des Zenits,  $O$  das Objektiv und  $H$  der Fußpunkt des von  $O$  auf  $P$  herabgelassenen Lotes, den man in der Photogrammetrie als Hauptpunkt bezeichnet. Gegeben sind in dem Tetraeder die Kantenlängen  $AB, AC, BC$ , ferner die Winkel an der Spitze  $O$  als sphärische Distanzen der drei Sterne. Die Berechnung der Kantenlängen und damit der Lage des Hauptpunktes ist eine andere Form des obengenannten Problems des räumlichen Rückwärtseinschneidens, das auch jetzt mit Hilfe von Näherungsrechnungen gelöst werden soll. Sind  $l = OA, m = OB, n = OC$  die drei Kanten, so bestehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & (AC)^2 = l^2 + n^2 - 2ln \cos(ac) \\
 & (BC)^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos(bc) \\
 & (BA)^2 = l^2 + m^2 - 2lm \cos(ab).
 \end{aligned}$$



In diese setzen wir wie oben die Näherungen  $l_1, m_1, n_1$  ein und erhalten wieder Abweichungen gegen die aus der Platte berechneten linearen Entfernungen, die wir in die zugehörige Differenzgleichung einsetzen

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & (AC) \cdot \Delta(AC) = \Delta l (l - n \cos(ac)) + \Delta m (m - l \cos(ac)) \\
 & (BC) \cdot \Delta(BC) = \Delta m (m - n \cos(bc)) + \Delta n (n - m \cos(bc)) \\
 & (AB) \cdot \Delta(AB) = \Delta l (l - m \cos(ab)) + \Delta m (m - l \cos(ab)).
 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Verbesserungen  $\Delta l, \Delta m, \Delta n$ . Es empfiehlt sich auch hier die Gleichung 6 zu transformieren

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & (AC)^2 = (l - n)^2 + 4ln \sin^2\left(\frac{ac}{2}\right) \\
 & (BC)^2 = (m - n)^2 + 4mn \sin^2\left(\frac{bc}{2}\right) \\
 & (AB)^2 = (l - m)^2 + 4lm \sin^2\left(\frac{ab}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Nun denken wir uns das Tetraeder längs der in  $O$  endenden Kanten aufgeschnitten und die Seitenflächen um  $AB, AC$  und  $BC$  als Charniere umgeklappt, bis sie mit  $ABC$  in einer Ebene liegen. Die Punkte  $O$  beschreiben dabei Kreise, die sich in Vertikal-Projektion als die von den Punkten  $O$  auf die entsprechenden Kanten  $AB, AC, BC$  gefällten Senkrechten darstellen; ihr Schnittpunkt ist  $H$ .

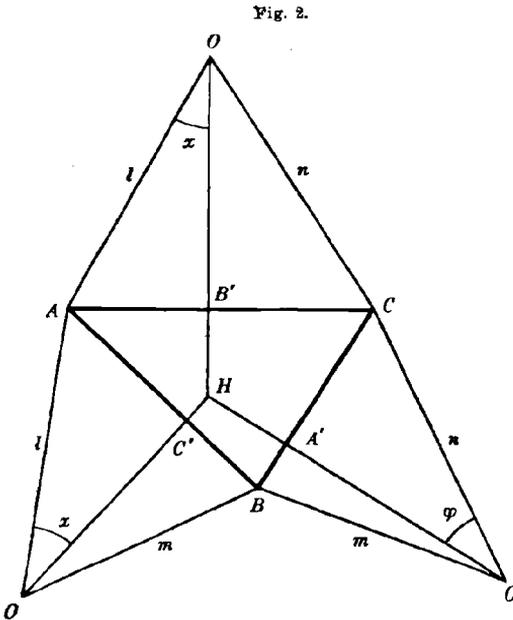
Zur Konstruktion von  $H$  zeichne man die vier Dreiecke der Figur etwa in vergrößertem Maßstabe auf Koordinatenpapier; die Koordinaten

6 Ortsbestimmung auf photographischem Wege aus Aufnahmen mit Zenitmarke.

von  $H$  lassen sich dann sofort aus der Zeichnung ablesen. Die Neigung der Platte (d. h. den Winkel zwischen der Richtung zum Zenit und der Plattennormalen) erhalten wir aus:

$$\text{tang } i = \frac{\overline{HZ}}{\text{Brennweite}}$$

Hierin geht bereits die Brennweite der Kamera ein. Zu deren Bestimmung greifen wir mit einem Zirkel die Distanzen  $S$  zwischen Hauptpunkt und Sternpunkten ab und ermitteln nach der Formel  $\frac{S_a}{l} = \sin h_a$  usw. die Winkel  $h_a, h_b, h_c$  zwischen den Tetraederkanten  $l, m, n$  und der Plattennormalen. Diese letztere fällt zusammen mit der optischen Achse, ihre Länge ist gleich der Brennweite des Objektivs und berechnet sich



als Projektion der Kanten  $l, m, n$  nach der Formel

$$f = l \cos h_a = m \cdot \cos h_b = n \cdot \cos h_c.$$

Die Übereinstimmung der drei Werte für  $f$  liefert ein gutes Kriterium für die Feinheit der Konstruktionen.

Hiermit wären nun die Vorarbeiten beendet, die zur Untersuchung des Einflusses der Neigung auf die Azimutdifferenzen erforderlich sind.

Für das Folgende diene die beistehende Figur.

Es bezeichne  $P_1$  eine horizontal liegende photographische Platte,  $O$  das zugehörige Kameraobjektiv,  $H_1$  den Hauptpunkt, der mit dem Zenit  $Z_1$  zusammenfällt; diese Platte denken wir uns nun unter Festhaltung des Objektivs  $O$  und der Brennweite  $f$  um eine durch  $O$  gehende Achse in eine andere geneigte Lage  $P_2$  hinein gedreht. Zenit und Hauptpunkt fallen in dieser Platte nicht mehr zusammen, sondern sind getrennt in die Punkte  $Z_2$  und  $H_2$ . Die zur Richtung  $Z_2H_2$  senkrecht verlaufende Schnittlinie beider Platten ist mit  $XX$  bezeichnet.

Weiter denken wir uns die Platte  $P_2$  parallel mit sich senkrecht in die Höhe gehoben, bis der Punkt  $Z_2$  mit  $Z_1$  zusammenfällt. Daß

hierbei die linearen Maße auf  $P_2$  geändert werden, ist für das Folgende ohne Belang. Wesentlich ist nur, daß bei der Parallelverschiebung die Azimutdifferenzen nicht geändert werden. Nun beschreiben wir um  $Z_1$  als Anfangspunkt eine Kugel vom Einheitsradius, die von den Strahlen  $OX$ ,  $OA_2$ ,  $OA_1$  in den Ecken eines in  $A_1$  rechtwinkligen sphärischen Dreiecks durchstoßen wird. Aus der Zeichnung, die zur Konstruktion von  $H$  diente, kann man nun den Winkel  $A_2 Z_1 X$  ablesen, indem man die zu  $ZH$  senkrecht liegende Gerade  $XHX$  dort einzeichnet. Der Winkel  $A_1 Z_1 X$  findet sich dann nach der Formel der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke

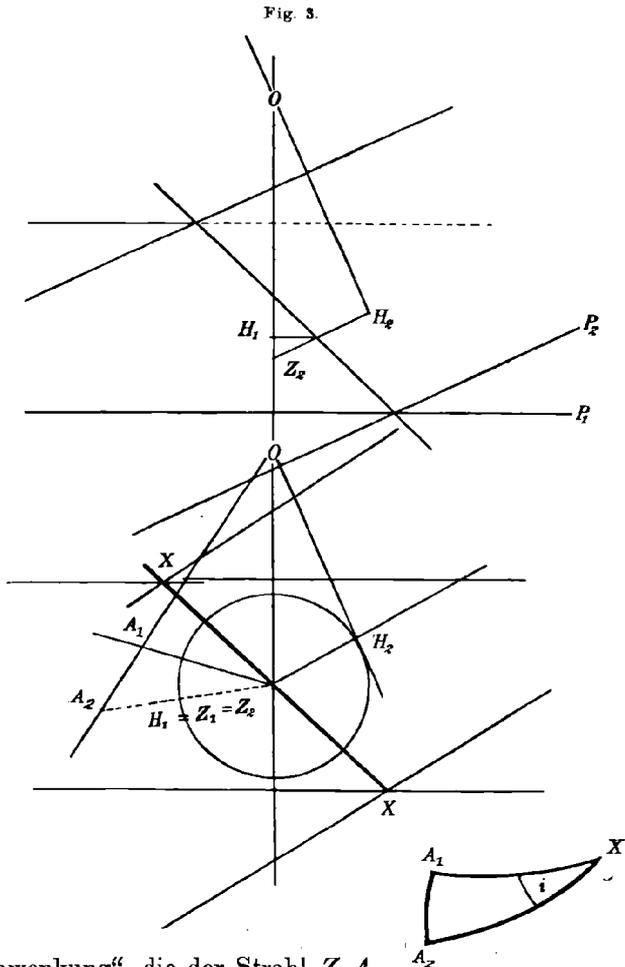
$$(9) \quad \begin{aligned} &\tan(A_1 Z_1 X) \\ &= \tan(A_2 Z_1 X) \cdot \cos i. \end{aligned}$$

$$(A_1 Z_1 X) - (A_2 Z_1 X)$$

ist die Größe der „Schwenkung“, die der Strahl  $Z_1 A_2$  auszuführen hatte, als die Platte aus ihrer geneigten Lage in die horizontale gebracht wurde.

Ebenso berechnet man die Größe der Schwenkung, die die anderen Strahlen  $Z_1 B_2$ ,  $Z_1 C_2$  zu machen haben. Die Differenz dieser Werte, je zu Paaren zusammengenommen, gibt die Änderung der Azimutdifferenzen durch Neigung.

Aus diesen werden die entsprechenden Variationen der Zenitdistanzen durch drei Differenzgleichungen nach bekanntem Muster berechnet; die Differenzgleichungen werden erhalten durch Differen-



8 Ortsbestimmung auf photographischem Wege aus Aufnahmen mit Zenitmarke.

tiation der Formeln (2), wobei aber dieses Mal  $z_a z_b z_c$  und  $(azb), (azc)(bzc)$  als variabel angenommen werden: sie lauten

$$(10) \quad \begin{aligned} 0 &= \Delta z_a (-\sin z_a \cos z_b + \cos z_a \sin z_b \cos(azb)) \\ &+ \Delta z_b (-\sin z_b \cos z_a + \cos z_b \sin z_a \cos(azb)) \\ &- \Delta_{(azb)} \cdot \sin z_a \sin z_b \cos(azb). \end{aligned}$$

Die zwei anderen ergeben sich durch Permutation der Buchstaben  $a, b, c$ .

Endlich sei noch kurz das Schema der Rechnung übersichtlich dargestellt:

1. Berechnung der Azimutdifferenzen, Zenitdistanzen nach den Gl. (1)—(3).
2. Berechnung der Breiten und Zeitkorrekturen für die angenommenen Zenitkoordinaten  $\varphi_0 \alpha_0$ . Gl. (4) und (5).
3. Berechnung der Kantenlängen  $l, m, n$ , Gl. (7) und (8), und der Strecken  $AC', BA', CB'$  nach Fig. 2.
4. Konstruktion des Hauptpunktes, Berechnung der Brennweite, der Neigung.
5. Berechnung der Änderungen der Azimutdifferenzen (9) und der Zenitdistanzen (10).

Zur Erläuterung des Verfahrens diene zum Schluß die Durchführung der Rechenoperationen an einer Platte, die vom Hauptmann Glaning in Kamerun am 25. Jan. 1908 aufgenommen ist, und die mir von Herrn Prof. Schwarzschild freundlichst überlassen war. Die Vermessung der Platte geschah unter dem Meßapparat der Göttinger Sternwarte, an dem die Tausendstel-Millimeter noch abzulesen sind.

Es ergaben sich die folgenden Koordinaten, reduziert auf den Zenit als Nullpunkt.

$$\begin{aligned} \alpha \text{ tauri} &\left\{ \begin{array}{l} x = -16.799 \\ y = +14.527 \end{array} \right. & \lambda \text{ tauri} &\left\{ \begin{array}{l} x = -15.701 \\ y = -5.717 \end{array} \right. \\ \pi_4 \text{ Orionis} &\left\{ \begin{array}{l} x = +7.956 \\ y = +13.293 \end{array} \right. \end{aligned}$$

1. Azimutdifferenzen:

$$(\alpha z \lambda) = 60^\circ 51' 24'' \quad (\alpha z \pi) = 80^\circ 3' 24''$$

$$(\lambda z \pi) = 140^\circ 54' 48''.$$

Angenommene Zenitdistanzen:

$$z_\alpha = 10^\circ 20' \quad z_\lambda = 7^\circ 51' \quad z_\pi = 7^\circ 15'.$$

Korrekturen:

$$-5'' \quad +5'' \quad +51''$$

$$z_\alpha = 10^\circ 19' 55'' \quad z_\lambda = 7^\circ 51' 5'' \quad z_\pi = 7^\circ 15' 51''.$$

2. Angenommene Zenitkoordinaten:

$$\varphi_0 = 6^\circ 30' \quad \alpha_0 = 4^h 17^m 25^s.$$

Differenzgleichungen:

$$\alpha \text{ tauri} - 0.95\varphi + 0.15\alpha = -0'.665$$

$$\pi \text{ Orionis} + 0.14\varphi + 0.98\alpha = +0'.25,$$

daraus

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= +44'' & \Delta\alpha &= +0.6^{\text{sec.}} \\ \varphi &= 6^\circ 30' 44'' & \alpha &= 4^h 17^m 24'.4. \end{aligned}$$

3. Angenommene Kantenlängen:

$$O\alpha = l = 123.50 \text{ mm} \quad Ol = m = 122.66 \quad O\pi = n = 122.50.$$

Differenzgleichungen:

$$4.2\mu + 3.3\nu = 1.30$$

$$1.0\nu + 4.0\lambda = 0.80$$

$$2.7\lambda + 0.5\mu = 0.75.$$

Korrekturen:

$$\lambda = +0.286 \quad \mu = -0.044 \quad \nu = -0.338$$

$$l = 123.786 \quad m = 122.616 \quad n = 122.162,$$

daraus (Fig. 2)

$$CA' = 13.34 \text{ mm} \quad AC' = 17.21 \text{ mm} \quad AB' = 20.45 \text{ mm}.$$

4. Die Zeichnung in dreifachem Maßstabe gab die Hauptpunkts-Koordinaten:

$$x_h = +2.83 \text{ mm} \quad y_h = -1.66 \text{ mm}.$$

Gemessen wurden die Längen

$$(H\alpha) = 25.4 \text{ mm} \quad (H\lambda) = 19.0 \text{ mm} \quad (H\pi) = 15.8 \text{ mm}$$

und berechnet:

$$(f_\alpha) = 121.153 \text{ mm} \quad f_\lambda = 121.136 \text{ mm} \quad f_\pi = 121.133.$$

Also

$$\begin{aligned} f &= 121.14 \text{ mm}, \\ i &= 1^\circ 32' \quad \log \cos i = 9.99984. \end{aligned}$$

5. Aus den Koordinaten der Sterne und von  $H$  berechnete ich die Azimutdifferenzen der Sterne gegen die Richtung  $ZH$ .

$$A_{(\pi H)} = 89^\circ 29' \quad \Delta(\log \text{tang}) \text{ für } 60'' = 0.01424$$

$$A_{(\lambda H)} = 129^\circ 41' \quad \Delta(\log \text{tang}) \text{ für } 60'' = 0.00025$$

$$A_{(\alpha H)} = 190^\circ 28' \quad \Delta(\log \text{tang}) \text{ für } 60'' = 0.00071$$

$$\Delta(\log \cos i) = 0,00016.$$

Also

Schwenkung  $\pi = 0''.6$ „  $\lambda = 38''.5$ „  $\alpha = 13''.5$ .

Somit:

$$\Delta(\alpha z \lambda) = + 51'' \quad \Delta(\alpha z \pi) = - 13'' \quad \Delta(\alpha z \pi) = + 38''.$$

Differenzgleichung für die Zenitdistanzen (nach 11):

$$0.94\pi + 0.94\lambda = + 0.4$$

$$0.71\alpha + 0.29\lambda = + 1.3''$$

$$0.47\pi + 0.80\alpha = - 0''.3$$

$$\Delta z_\alpha = - 0''.7 \quad \Delta z_\pi = + 1''.8 \quad \Delta z_\lambda = - 2''.2.$$

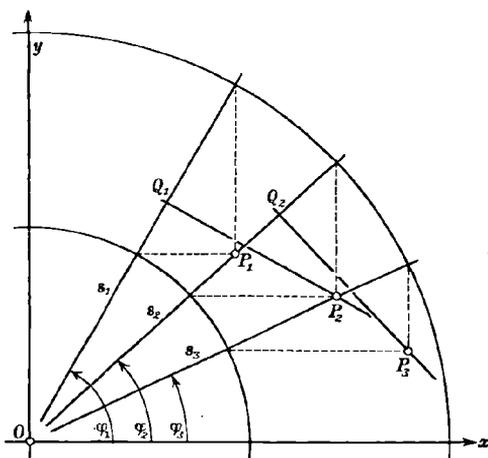
Die Korrekturen liegen unterhalb der Genauigkeitsgrenze.

Göttingen, Sept. 1909.

## Zur Konstruktion der Ellipse aus den Achsen.

Von HORST v. SANDEN in Göttingen.

Bekannt ist jene Konstruktion, bei der man mit den gegebenen Halbachsen als Radien zwei konzentrische Kreise schlägt, durch den Mittelpunkt Strahlen zieht und durch deren Schnittpunkte mit den Kreisen Parallele zu den Achsen. Zwei entsprechende Parallelen schneiden sich dann in einem Ellipsenpunkt.



Die Konstruktion ist besonders beim Zeichnen auf Millimeterpapier vorteilhaft, da die Parallelen dann nach Augenmaß genügend genau werden.

Im folgenden wird gezeigt, wie man bei geeigneter Wahl der Strahlen ohne Ziehen von Geraden in dem Ellipsenpunkte auch die Tangente erhält.

Man zeichnet den ersten Strahl  $s_1$  (s. Fig.) in der Nähe der kleinen Achse und erhält in bekannter Weise den ersten Kurvenpunkt  $P_1$ .

Der zweite Strahl wird nun *nicht willkürlich gezogen, sondern durch*  $P_1$ . Durch ihn erhält man  $P_2$ . Trägt man nun auf  $s_1$  von  $O$  aus bis  $Q_1$  die Strecke  $\overline{OQ_1} = \overline{OP_1}$  ab, so ist die Gerade  $\overline{Q_1P_2}$  die Tangente in  $P_2$ . In dieser Weise fortfahrend zieht man  $s_3$  durch  $P_2$ , macht auf  $s_2$   $\overline{OQ_2} = \overline{OP_2}$ ; dann ist  $\overline{Q_2P_3}$  die Tangente in  $P_3$  usf.

Zu beweisen ist, daß  $\overline{Q_1P_2}$  Tangente in  $P_2$  ist. Der erste Strahl  $s_1$  bilde mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\varphi_1$ . Sind  $a$  und  $b$  die Halbachsen, so ist

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1 &= a \cdot \cos \varphi_1 \\ y_1 &= b \cdot \sin \varphi_1. \end{aligned}$$

Aus der Konstruktion folgt für den Winkel  $\varphi_2$  des zweiten Strahles:

$$(2) \quad \tan \varphi_2 = \frac{y_1}{x_1} = \frac{b}{a} \cdot \tan \varphi_1$$

Unter Einführung eines Proportionalitätsfaktors  $\frac{1}{p}$  wird:

$$(3) \quad \begin{aligned} \sin \varphi_2 &= \frac{b \cdot \sin \varphi_1}{p} \\ \cos \varphi_2 &= \frac{a \cdot \cos \varphi_1}{p} \end{aligned}$$

endlich

$$(4) \quad p = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi_1 + b^2 \sin^2 \varphi_1} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = OQ_1.$$

Die Gleichung der Tangente in  $P_2$  wird, sofern  $x$  und  $y$  laufende Koordinaten sind:

$$(5) \quad \frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} = 1.$$

Nun ist  $x_2 = a \cdot \cos \varphi_2$  und  $y_2 = b \cdot \sin \varphi_2$ , und unter Benutzung der Gleichungen (3) und (4) wird die Tangentengleichung (5) in der Normalform erhalten:

$$x \cdot \cos \varphi_1 + y \cdot \sin \varphi_1 - p = 0.$$

Gleichung (4) lehrt dann, daß  $Q_1$  der Fußpunkt des Lotes von  $O$  auf die Tangente in  $P_2$  ist.

## Gegenseitige Orientierung von nahezu parallelen Aufnahmen in der Photogrammetrie.

Von HORST v. SANDEN in Göttingen.

Bei photographischen Aufnahmen, die für photogrammetrische Zwecke vom Ballon aus gemacht werden, hat man in den meisten Fällen das Bestreben, die optischen Achsen der Apparate vertikal zu stellen, was naturgemäß nur mehr oder weniger genau möglich ist.

Wie bei allen Aufnahmen, die nicht von bereits vermessenen Geländepunkten aus gemacht werden oder deren äußere Orientierung aus solchen nicht zu ermitteln ist, entsteht auch hier das Problem der gegenseitigen Orientierung von zwei Aufnahmen.

Während diese im allgemeinen auf der Ermittlung der „Kernpunkte“ beruht<sup>1)</sup>, ist diese Methode im vorliegenden Fall unzweckmäßig, da die Bestimmung der Kernpunkte bei parallelen Platten, zumal bei kleinen Höhendifferenzen der Aufnahmestandorte, recht ungenau wird.

Es wird daher im folgenden von einem neuen Prinzip Gebrauch gemacht. Dabei werden die Abweichungen von der Parallelität zweier Aufnahmen als klein angenommen und zwar im § 1 so, daß sie ganz vernachlässigt werden. Im § 2 werden ihre Quadrate vernachlässigt und im § 3 erst die Glieder der dritten Ordnung, wobei das allgemeine Verfahren angedeutet wird.

### § 1.

Um einen wichtigen Punkt der Methode hervortreten zu lassen, behandeln wir zunächst den Fall, daß, etwa von einem Ballon, zwei Aufnahmen eines Landstriches mit *genau* parallelen Platten gemacht seien. D. h.: Wir vernachlässigen etwaige Abweichungen von der Parallelität.

Um die relative Lage der photographischen Kammern im Raume zu fixieren, legen wir in dieselben je ein rechtwinkeliges räumliches Achsenkreuz und zwar so, daß der Koordinatenanfangspunkt in das Projektionszentrum  $O$  bzw.  $O'$  fällt und die  $z$ - bzw.  $z'$ -Achse in die optische Achse. Sie werde positiv gerechnet in der Richtung vom Projektionszentrum nach dem Objekte hin (also nach unten).

Bei beliebiger Wahl der  $x$ - und  $y$ - bzw.  $x'$ - und  $y'$ -Achsen wird die relative Lage der zweiten Kamera (deren Buchstaben mit einem Strich versehen sind) durch die Koordinaten  $XYZ$  von  $O'$  im ersten

1) Vgl. meine Dissertation: Die Bestimmung der Kernpunkte in der Photogrammetrie. Göttingen 1908.

System und den Winkel  $\alpha$  zwischen der  $x$ - und  $x'$ -Achse gegeben. Naturgemäß sind nicht  $XYZ$  selbst, sondern nur ihre Verhältnisse  $X:Y:Z$  bestimmbar.

Nun können wir die  $xy$ - bzw.  $x'y'$ -Achsen so wählen, daß sowohl  $\alpha$  wie  $Y$  Null wird: Wir denken uns durch die  $z$ -Achse eine Ebene gelegt, die auch die  $z'$ -Achse enthält und diese Ebene als  $zx$ - bzw.  $z'x'$ -Ebene definiert, woraus dann  $\alpha = Y = 0$  folgt. Aus den Platten läßt sich diese Ebene nun wie folgt bestimmen:

Die  $z$ -Achse treffe das Objekt in einem Punkte  $\mathfrak{A}$ , der sich auf der ersten Platte in ihrem Hauptpunkt  $H$  (Durchstoßpunkt der  $z$ -Achse durch die Platte) abbildet. Auf der zweiten Platte habe  $\mathfrak{A}$  den Bildpunkt  $A'$ .

Ebenso bildet sich ein Objektpunkt  $\mathfrak{B}$ , der von der  $z'$ -Achse getroffen wird, auf der zweiten Platte in deren Hauptpunkt  $H'$ , auf der ersten Platte dagegen in einem Punkte  $B$  ab.

Da nun die Projektionsstrahlen  $O\mathfrak{A}$ ,  $O\mathfrak{B}$ ,  $O'A'$ ,  $O'B'$  in einer Ebene liegen und zwar der obenerwähnten, so erhalten wir die Orientierung der  $xy$ - bzw.  $x'y'$ -Systeme, indem wir auf jeder Platte den Hauptpunkt mit dem dem Hauptpunkte der anderen Platte entsprechenden Punkte durch eine Gerade verbinden. Nennen wir diese Geraden  $\xi$ - bzw.  $\xi'$ -Achsen und ihre Lote in den Hauptpunkten  $\eta$ - bzw.  $\eta'$ -Achsen, so haben wir auf den Platten ein  $\xi\eta$ - bzw.  $\xi'\eta'$ -System festgelegt und haben nur die  $x$ - und  $y$ -Achsen den  $\xi$ - und  $\eta$ -Achsen parallel zu wählen, um die gewünschte Orientierung herzustellen.

Die einzige Unbekannte, die zu berechnen bleibt, ist  $\frac{Z}{X} = v$ , das Verhältnis der Differenz der Ballonhöhen zum Horizontalabstand der Aufnahmen.<sup>1)</sup>

Wir leiten die Berechnung aus einem allgemeinen Prinzip ab, das auch bei nicht parallelen Platten Gültigkeit behält.

Die Punkte  $\xi\eta$  und  $\xi'\eta'$  auf den beiden Platten sind in der Weise einander zugeordnet, daß  $\xi_i\eta_i$  und  $\xi'_i\eta'_i$  zusammengehören, sobald sie Bilder ein und desselben Objektpunktes sind. Bei bekannter Brennweite  $f$  der Objektivs geben die beiden Aufnahmen also zwei Strahlenbündel, deren Strahlen in bestimmter Weise einander zugeordnet sind. Es entsprechen sich nämlich Strahlen nach dem gleichen Objektpunkte.

Jeder Strahl ist gegeben durch die Plattenkoordinaten  $\xi\eta$  bzw.  $\xi'\eta'$  seines Durchstoßpunktes durch die Platte. Wir setzen nun ganz allgemein die *Bedingung dafür an, die Strahlenbündel  $O$  und  $O'$  so gegeneinander zu orientieren, daß sich entsprechende Strahlen im Raume*

1) Ist  $Z$  gemessen, so gibt obige Rechnung  $X$  und damit den Maßstab.

*schneiden.* Dazu ist notwendig und hinreichend, daß zwei entsprechende Strahlen in einer Ebene liegen. Diese Ebene enthält die Projektionszentren  $O$  und  $O'$ , sowie auch die Bildpunkte  $\xi\eta$  und  $\xi'\eta'$ . Die Koordinaten der Punkte  $O, O'$  und  $(\xi\eta)$  im System  $XYZ$  sind ganz allgemein

$$\begin{aligned} \text{von } O & \dots O, O, O \\ \text{,, } O' & \dots X, Y, Z \\ \text{,, } (\xi, \eta) & \dots \xi, \eta, f. \end{aligned}$$

Die Koordinaten  $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$ , die ein Bildpunkt  $\xi'_i, \eta'_i$  auf der zweiten Platte im ersten System hat, müssen berechnet werden aus den Daten, welche die gegenseitige Lage der Achsenkreuze zueinander festlegen. Als Bedingung des Schneidens entsprechender Strahlen hat man dann:

$$\begin{vmatrix} 1 & O & O & O \\ 1 & X & Y & Z \\ 1 & \xi_i & \eta_i & f \\ 1 & \bar{x}_i & \bar{y}_i & \bar{z}_i \end{vmatrix} = 0.$$

Dies gibt für  $i = 1, 2 \dots$  so viele Gleichungen für die Unbekannten, als Punkte auf den Platten identifizierbar sind.

In unserem Falle wird  $Y = 0$ ;  $\bar{x}_i = \xi'_i + X$ ;  $\bar{y}_i = \eta'_i$ ;  $\bar{z}_i = f + Z$  und somit:

$$\begin{vmatrix} 1 & O & O & O \\ 1 & X & 0 & Z \\ 1 & \xi_i & \eta_i & f \\ 1 & (\xi'_i + X) & \eta'_i & (f + Z) \end{vmatrix} = 0,$$

ausgerechnet:

$$\frac{Z}{X} = v = f \cdot \frac{\eta'_i - \eta_i}{\xi_i \eta'_i - \xi'_i \eta_i}.$$

Hat man  $n$  Punkte vermessen, so wird im Mittel:

$$v = \frac{f}{n} \sum_1^n \frac{\eta'_i - \eta_i}{\xi_i \eta'_i - \xi'_i \eta_i}.$$

Damit ist die einzige Unbekannte unseres Systems bestimmt.

## § 2.

Wir wollen die Ausführungen des ersten Paragraphen jetzt für den in der Praxis viel wichtigeren Fall erweitern, daß die optischen Achsen der beiden Aufnahmen nicht genau parallel sind, sondern miteinander einen kleinen Winkel  $\alpha$  bilden.

Wir setzen  $\alpha$  als so klein voraus, daß wir in den folgenden Betrachtungen die Quadrate dieser Größenordnung vernachlässigen.

Wir behalten nun das im ersten Paragraphen geschilderte Verfahren bei und ziehen auf der ersten Platte die  $\xi$ -Achse durch den Punkt, der dem Hauptpunkte der zweiten Platte entspricht, und analog die  $\xi'$ -Achse auf dieser. Die räumlichen Systeme  $xyz$  und  $x'y'z'$  orientieren wir wie vorher, indem wir die  $x$ -Achsen den  $\xi$ -Achsen parallel ziehen. Das Projektionszentrum  $O'$  der zweiten Aufnahme habe im System  $xyz$  wieder die Koordinaten  $XYZ$ .

Wir behaupten nun, daß bei obiger Wahl der  $xy$ - bzw.  $x'y'$ -Achsen die Größe  $u = \frac{Y}{X}$  klein ist und zwar von derselben Größenordnung wie  $\alpha$ .

Zum Beweise ziehen wir durch  $O'$  eine Gerade  $g$  parallel der  $z$ -Achse. Diese Gerade  $g$  durchstößt die  $xy$ -Ebene in einem Punkte mit den Koordinaten  $XY(Z=0)$ .

Ferner legen wir eine Ebene durch  $g$  und  $z'$  (die optische Achse der zweiten Aufnahme). Diese Ebene bilde mit der  $xz$ -Ebene einen Winkel  $\delta$ . Die  $xz$ -Ebene hat mit der  $z'$ -Achse einen Punkt  $\mathfrak{A}$  gemeinsam. Dies ist derjenige Objektpunkt, welcher sich auf der zweiten Platte in ihrem Hauptpunkte abbildet und durch dessen Bildpunkt auf der ersten Platte die  $\xi$ -Achse gezogen wurde. Das Lot von  $\mathfrak{A}$  auf die  $x$ -Achse treffe diese in  $a$  und wenn  $d$  die Entfernung  $\overline{O'\mathfrak{A}}$  bedeutet, so hat die Strecke von  $a$  bis zum Punkte  $(XY)$  die Länge  $d \cdot \sin \alpha$  und  $Y$  ist gleich  $d \cdot \sin \alpha \cdot \sin \delta$ . Es wird also:

$$u = \frac{Y}{X} = \frac{d}{X} \cdot \sin \alpha \cdot \sin \delta,$$

also für kleine Winkel  $\alpha$  nicht größer als von derselben Größenordnung wie diese.

Ferner ist leicht einzusehen, daß die  $x$ -Achse mit der  $x'$ -Achse einen Winkel einschließt, der von derselben Größenordnung ist wie  $\alpha$ .

Wodurch ist nämlich die  $x'$ -Achse bestimmt? Sie ist parallel der  $\xi'$ -Achse auf der zweiten Platte, die durch deren Hauptpunkt  $H'$  und einen Punkt  $b'$  geht, der das Bild desjenigen Objektpunktes ist, der sich auf der ersten Platte im Hauptpunkte  $H$  abbildet. Diese  $\xi'$ -Achse haben wir nun zu bestimmen. Die  $z$ -Achse treffe das Objekt in einem Punkte  $\mathfrak{B}$ , wir ziehen den Strahl  $\overline{O'\mathfrak{B}}$  und suchen den Durchstoßpunkt dieses Strahles durch die zweite Platte. Diese steht senkrecht auf  $\overline{O'\mathfrak{A}}$  im Punkte  $H$  und wir erhalten die  $\xi'$ -Achse als Schnitt der Ebenen  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}O'$  und der zweiten Platte. Bedenken wir, daß der Winkel zwischen der  $zx$ -Ebene und der Ebene  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}O'$  klein von der Ordnung  $\alpha$  ist und die Platte nahezu senkrecht auf der  $zx$ -Ebene steht, so ist klar, daß die Richtung der  $\xi'$ -Achse nur um Größen der Ordnung  $\alpha$  von der Richtung der  $x$ -Achse abweicht.

Wir wissen jetzt also: Bei der oben festgelegten Annahme der Achsenrichtungen sind die Winkel zwischen entsprechenden Achsen der Systeme  $xyz$  und  $x'y'z'$  klein von der Größenordnung des Winkels zwischen den  $z$ -Achsen.

Ein Bildpunkt auf der Platte  $\xi'\eta'$  hat im System  $x'y'z'$  die Koordinaten  $\xi'\eta'f$ . Die gegenseitige Lage der Systeme  $(xyz)$  und  $(x'y'z')$  legen wir fest durch  $XYZ$ , die Koordinaten von  $O'$  im System  $(xyz)$  und durch drei Winkel  $\psi, \varphi, \chi$ .

Es bezeichne  $\psi$  die Drehung um die  $z$ -Achse die wir uns zuerst ausgeführt denken, wobei  $x$  und  $y$  nach  $x''y''$  kommen;  $\varphi$  sei die dann ausgeführte Drehung um die in  $y''$  liegende  $y$ -Achse, wobei  $x$  nach  $x'$ ,  $z$  nach  $z''$  gedreht wird;  $\chi$  ist die letzte Drehung um die  $x'$ -Achse, wobei  $z''$  nach  $z'$  und  $y''$  nach  $y'$  gelangen.

Nach Elimination der Zwischenlagen erhalten wir:

$$\begin{aligned} x &= X + x' \cos \varphi \cos \psi + y' (\sin \varphi \cos \psi \sin \chi - \sin \psi \cos \chi) \\ &\quad + z' (\sin \psi \sin \chi + \sin \varphi \cos \psi \cos \chi), \\ y &= Y + x' \cos \varphi \sin \psi + y' (\cos \psi \cos \chi + \sin \varphi \sin \psi \sin \chi) \\ &\quad + z' (\sin \varphi \sin \psi \cos \chi - \cos \psi \sin \chi), \\ z &= Z - x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \sin \chi + z' \cos \varphi \cos \chi. \end{aligned}$$

Sind die Achsenrichtungen der Systeme  $(xyz)$  und  $(x'y'z')$  nur wenig verschieden, so sind auch  $\varphi, \psi$  und  $\chi$  klein und die Transformationsformeln zwischen dem  $xyz$ - und dem  $x'y'z'$ -System werden:

$$\begin{aligned} x &= X + \xi' + f \cdot \varphi - \eta' \psi \\ y &= Y + \eta' + \xi' \psi - f \cdot \chi \\ z &= Z + f + \eta' \chi - \xi' \cdot \varphi, \end{aligned}$$

wenn man sich auf die Glieder erster Ordnung beschränkt.

Jetzt wollen wir die auf S. 14 abgeleitete Determinante hinschreiben:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & X & Y & Z \\ 1 & \xi_i & \eta_i & f \\ 1 & x_i & y_i & z \end{vmatrix} = 0.$$

Multipliziert man aus und setzt die transformierten Werte für  $xyz$  ein und  $u = \frac{Y}{X}; v = \frac{Z}{X}$ , so kommt:

$$\begin{aligned} v \cdot \psi (\xi_i \xi_i' + \eta_i \eta_i') - v \cdot \varphi \eta_i \cdot f - v \cdot \chi \xi_i \cdot f - u \cdot (\xi_i - \xi_i') \cdot f + v \cdot (\xi_i \eta_i' - \xi_i' \eta_i) \\ - \varphi \cdot \eta_i \xi_i' - \psi \cdot \xi_i' \cdot f + \chi \cdot (\eta_i \eta_i' + f^2) + (\eta_i - \eta_i') \cdot f = 0. \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen wollen wir in zwei Schritte zerlegen. Wir berechnen zuerst einen Näherungswert für  $v$ , den wir  $v_0$  nennen wollen, aus der schon früher abgeleiteten Gleichung:

$$v = f \cdot \frac{\eta' - \eta}{\xi \eta' - \xi' \eta},$$

die aus der obigen Gleichung durch Nullsetzen der kleinen Größen  $\varphi$ ,  $\chi$ ,  $\psi$  und  $u$  hervorgeht.

Dem Werte  $v_0$  fügen wir eine Korrektur  $v'$  hinzu, entwickeln obige Gleichung nach Potenzen von  $v'$ , beschränken uns auf Glieder der ersten Ordnung in  $v'$  und vernachlässigen auch  $v' \cdot \varphi$  und  $v' \cdot \psi$ . Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \psi \cdot \{v_0 \cdot (\xi_i \xi_i' + \eta_i \eta_i') - \xi_i' f\} - \varphi \cdot \{v_0 \eta_i f + \xi_i' \eta_i\} \\ & + \chi \cdot (\eta_i \eta_i' - v_0 \xi_i f + f^2) - u (\xi_i - \xi_i') \cdot f + v' \cdot (\xi_i \eta_i' - \xi_i' \eta_i) \\ & + f \cdot (\eta_i - \eta_i') + v_0 (\xi_i \eta_i' - \xi_i' \eta_i) = 0. \end{aligned}$$

Für  $i = 1, 2 \dots n$  sind dies  $n$  Gleichungen für die fünf Unbekannten  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$ ,  $u$ ,  $v'$ , die zweckmäßig nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt werden und zwar in folgender Weise: Man nimmt  $\psi = \varphi = \chi = v' = 0$  als erste Näherungen. Dadurch erhalten die linken Seiten der Gleichungen nicht die Werte Null, sondern sie werden kleinen Größen  $\varepsilon_i$  gleich.

Damit werden dann die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} & \sum_1^n \{v_0 \cdot (\xi_i \xi_i' + \eta_i \eta_i') - \xi_i' f\} \cdot \varepsilon_i = 0, \\ & \sum_1^n \{v_0 \eta_i f + \xi_i' \eta_i\} \cdot \varepsilon_i = 0, \\ & \sum_1^n \{\eta_i \eta_i' - v_0 \xi_i f + f^2\} \cdot \varepsilon_i = 0, \\ & \sum_1^n f \cdot (\xi_i' - \xi_i) \cdot \varepsilon_i = 0, \\ & \sum_1^n (\xi_i \eta_i' - \xi_i' \eta_i) \cdot \varepsilon_i = 0, \end{aligned}$$

die in bekannter Weise aufzulösen sind.

Bei der Prüfung der Genauigkeit der Berechnung ist zu beachten, daß die Quadrate der Größen  $\varphi \dots v'$  bei der Aufstellung der Formeln bereits vernachlässigt sind.

Wir wollen hier noch bemerken, daß der Fall denkbar ist, daß eine Identifizierung gerade des dem Hauptpunkte der gegnerischen Platte entsprechenden Punktes schwierig ist. Zunächst kann man sich, sofern das Objekt in der Umgebung des betreffenden Punktes eben ist, durch lineare Konstruktionen helfen und ferner ist zu bedenken, daß die oben auseinandergesetzte Methode ja die Drehung um die *wirklich angenommenen*  $\xi$ -Achsen bzw.  $x$ -Achsen liefert, da ja die Koordinaten  $\xi\eta$  darauf bezogen sind. Die spezielle Annahme der  $\xi$ -Achsen hatte ja nur den Zweck, eine erste Näherung der Orientierung zu liefern. Zieht man also etwa die  $\xi$ -Achse durch einen Punkt, der dem wahren Bildpunkte des gegnerischen Hauptpunktes nur nahe genug benachbart ist, so ist die Rechnung trotzdem mit demselben Erfolg durchführbar.

### § 3.

Wir gehen jetzt einen Schritt weiter, indem wir in unserer Rechnung auch die Glieder der zweiten Ordnung des Neigungswinkels der optischen Achsen zueinander berücksichtigen wollen.

Es kommt dies darauf hinaus, für die Transformationsformeln auf S. 16 solche aufzustellen, die noch die Glieder der zweiten Ordnung enthalten.

Läßt man überhaupt die Beschränkung auf kleine Winkel fallen und führt die vollständigen Transformationsformeln von S. 16 in die Determinante ein, so erhält man durch jedes Punktepaar  $\xi_i\eta_i$  und  $\xi_i'\eta_i'$  eine Gleichung, die wir nennen wollen:

$$\Phi_i(\varphi\psi\chi uv) = 0,$$

für die Unbekannten  $\varphi\psi\chi uv$ .

Setzen wir hierin ein aus den Gleichungen auf S. 17 erhaltenes Wertesystem  $\bar{\varphi}\bar{\psi}\bar{\chi}\bar{u}\bar{v}$  der Unbekannten als Näherungen ein, so würden die Gleichungen  $\Phi_i = 0$  nicht genau befriedigt, sondern wir erhielten,

$$\Phi_i = \varepsilon_i,$$

wo die  $\varepsilon_i$  kleine Größen sind, um so kleiner, je besser die ersten Näherungen waren.

Nun bringen wir an den ersten Näherungen Korrekturen  $\varphi_1\psi_1\chi_1 u_1 v_1$  an, die wir aus einem Gleichungssystem

$$\varphi_1 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \psi_1 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} + \chi_1 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} + u_1 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} + v_1 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \varepsilon_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots)$$

erhalten, worin in die partiellen Ableitungen die ersten Näherungen einzuführen sind.

Die korrigierten Werte  $\varphi + \varphi_1, \dots, \bar{v} + v_1$  können wir als zweite Näherungen ansehen und das Verfahren wiederholen, usf. Auf diese Weise läßt sich, auch bei ganz roher Orientierung der Apparate, ein beliebig genaues Resultat erreichen. Der Länge der Formeln wegen haben wir auf eine explizite Darstellung verzichtet.

Wir wollen uns auf Berücksichtigung der Glieder der zweiten Ordnung beschränken und setzen:  $\sin \varphi = \varphi$  und  $\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$  und ähnlich für  $\psi$  und  $\chi$ . Dann wird unter Beschränkung auf Glieder der zweiten Ordnung:

$$\begin{aligned} x &= \xi' \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{2} (\varphi^2 + \psi^2) \right\} + \eta' (\varphi \chi - \psi) + f \cdot (\psi \chi + \varphi) + X, \\ y &= \xi' \psi + \eta' \left\{ 1 - \frac{1}{2} (\psi^2 + \chi^2) \right\} + f \cdot (\varphi \psi - \chi) + Y, \\ z &= -\xi' \cdot \varphi + \eta' \cdot \chi + f \left( 1 - \frac{1}{2} (\varphi^2 + \chi^2) \right) + Z. \end{aligned}$$

Dies in die Determinante eingeführt, ergibt:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \cdot v \varphi^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \xi_i' \eta_i - \frac{1}{2} \cdot v \psi^2 \cdot \{ \xi_i \eta_i' - \xi_i' \eta_i \} - \frac{1}{2} \cdot v \chi^2 \cdot \xi_i \eta_i' + v \varphi \psi \cdot f \cdot \xi_i \\ &- v \varphi \chi \cdot \eta_i \eta_i' - v \psi \chi \cdot f \cdot \eta_i - v \varphi \cdot \eta_i \cdot f + v \psi \cdot (\eta_i \eta_i' + \xi_i \xi_i') - v \chi \cdot \xi_i f \\ &+ u \varphi \cdot \xi_i \xi_i' - u \chi \cdot \xi_i \eta_i' - u \psi \cdot \eta_i' \cdot f + v \cdot (\xi_i \eta_i' - \xi_i' \eta_i) + u \cdot (\xi_i' - \xi_i) \cdot f \\ &- \varphi \cdot \xi_i' \eta_i - \psi \cdot \xi_i' f + \chi \cdot \eta_i \eta_i' + \frac{1}{2} \varphi^2 \cdot f \eta_i + \frac{1}{2} \psi^2 \cdot \eta_i' f - \frac{1}{2} \chi^2 \cdot (\eta_i - \eta_i') f - \varphi \psi \cdot f^2 \\ &+ \chi \cdot f^2 + u \varphi \cdot f^2 - f (\eta_i' - \eta_i) = 0. \end{aligned}$$

Die weitere Behandlung dieser Gleichungen wäre nun folgende. Aus fünf Gleichungen der früheren Art berechnen wir erste Näherungen der Unbekannten,  $\varphi_1 \psi_1 \chi_1 u_1 v_1$ , führen diese in die zuletzt abgeleiteten Gleichungen ein und bestimmen die Abweichungen der linken Seiten der Gleichungen von Null. Diese seien  $\epsilon_i$ .

Dann sind die Ausdrücke  $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \varphi} \dots \frac{\partial \Phi_i}{\partial v}$  zu bilden, worin  $\Phi_i = 0$  die  $i$ -te Gleichung bedeutet.

Es wird z. B.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \varphi} &= v \varphi \cdot \xi_i' \eta_i + v \psi \cdot f \cdot \xi_i - v \chi \cdot \eta_i \eta_i' - v \cdot \eta_i f + u \cdot \xi_i \xi_i' - \xi_i' \eta_i + \varphi \cdot f \eta_i \\ &- f^2 \cdot (\psi - u). \end{aligned}$$

Analoge Ausdrücke erhält man für die partiellen Ableitungen nach den anderen Unbekannten.

Man erhält jetzt das Gleichungssystem:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \varphi} \cdot \varphi' \dots \frac{\partial \Phi_i}{\partial v} \cdot v' + \epsilon_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots),$$

wo in den Ableitungen die Näherungswerte der Unbekannten einzusetzen sind.

Dessen Ausgleichung mittels der Methode der kleinsten Quadrate führt dann auf Werte der Unbekannten, die bis auf Größen dritter Ordnung genau sind.

Um einen Anhalt für die erreichbare und erforderliche Genauigkeit zu haben, nehmen wir an, daß wir auf der Platte noch 0,01 mm genau messen können. Bei einer Brennweite von 150 mm ist ein Projektionsstrahl bis auf einen Fehler  $\beta$  bestimmt, so daß

$$\beta < \frac{0,01}{150} = \text{rund } 10^{-4},$$

das sind rund 20 Sekunden. Nehmen wir diesen Fehler als einen zweiter Ordnung, so hat ein Fehler erster Ordnung die Größenordnung  $10^{-2}$ , das ist etwa  $\frac{1}{2}^\circ$ . Können wir also annehmen, daß die Abweichung von der Parallelität nicht mehr als  $1^\circ$  beträgt, so gestattet das zweite Verfahren (das die Glieder der zweiten Ordnung berücksichtigt), eine volle Ausnutzung der Genauigkeit der Aufnahme.

Mit welcher Genauigkeit die Vertikaljustierung einer Ballonaufnahme möglich ist, bleibt Sache der Erfahrung.

Über Versuche darüber und die Verwertung obiger Resultate soll später berichtet werden.

Göttingen, Jan. 1910.

## Konstruktion der Strömungsbilder eines stromdurchflossenen Kreisringes, eines zylindrischen Solenoids und einer gleichmäßig mit Masse belegten Kreisfläche.

Von HERM. KIMMEL,

Assistent an der technischen Hochschule in München.

Der Verlauf der Äquipotentialflächen und Stromlinien in der Umgebung eines Solenoids scheint bis jetzt noch nicht genügend geklärt zu sein; in den gebräuchlichen Physikbüchern findet sich meist eine nur näherungsweise und nicht immer ganz richtige Darstellung dieser Strömungsbilder. Im folgenden ist daher versucht worden, die Potentialverteilung und Strömung für ein zylindrisches Solenoid sowohl von unendlich großer als endlicher Länge genau zu berechnen und zu konstruieren. Der Vollständigkeit halber wurde noch das Strömungsbild für einen stromdurchflossenen Kreisring (Solenoid von der Länge Null) angefügt, während die Figur für das unendlich lange Solenoid ohne weiteres auch das Bild für die gleichmäßig mit Masse belegte Kreisfläche lieferte. Die Berechnung und Konstruktion der Strömungsbilder erfolgte nach Angaben des Herrn Prof. Dr. Emden, durch dessen Vermittlung auch die Fig. 3 bereits in dem Artikel des Herrn Dr. Debye

über „Stationäre und quasistationäre Felder“ in der Encyclopädie der math. Wissenschaften Band V, 2, Heft 3, S. 440 Aufnahme gefunden hat.

**A. Stromdurchflossener Kreisring.<sup>1)</sup>**

Wir können uns den Kreisring vom Radius  $c$  ersetzt denken durch eine magnetische Doppelschicht. Sei das magnetische Moment derselben gleich 1, so ist das Potential der Doppelschicht in bezug auf einen senkrecht über dem Mittelpunkt im Abstand  $z$  gelegenen Punkt  $P'$

$$(1) V = 2\pi \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{c^2 + z^2}} \right],$$

gleich dem körperlichen Winkel, unter dem die Kreisfläche von dem betreffenden Punkte aus erscheint.

Entwickeln wir (1) in eine Potenzreihe, so wird

$$V = 2\pi \left[ 1 - \frac{z}{c} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^3}{c^3} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{z^5}{c^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{z^7}{c^7} - + \dots \right] \quad \text{für } z < c,$$

und

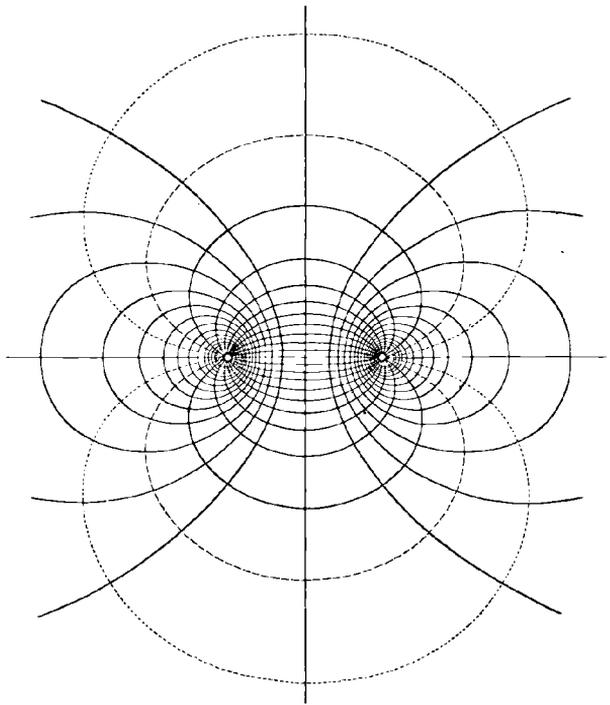
$$V = 2\pi \left[ \frac{1}{2} \frac{c^2}{z^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{c^4}{z^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{c^6}{z^6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{c^8}{z^8} + \dots \right] \quad \text{für } z > c.$$

Für einen außerhalb der  $Z$ -Achse gelegenen Punkt  $P$  mit den Polarkoordinaten  $r$  und  $\vartheta$  (Fig. 5) ergibt sich hieraus unter Berücksichtigung, daß  $V$  der auf Kugelkoordinaten transformierten Laplace'schen Differentialgleichung genügen muß, der zugehörige Potentialwert

$$(2) \quad V = 2\pi \left[ 1 - \frac{r}{c} P_1(\cos \vartheta) + \frac{1}{2} \frac{r^3}{c^3} \cdot P_3(\cos \vartheta) - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{r^5}{c^5} P_5(\cos \vartheta) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{r^7}{c^7} P_7(\cos \vartheta) - + \dots \right] \quad \text{für } r < c,$$

1) Vgl. Maxwell, Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, übersetzt von Weinstein, 2. Band, Art. 701.

Fig. 1.



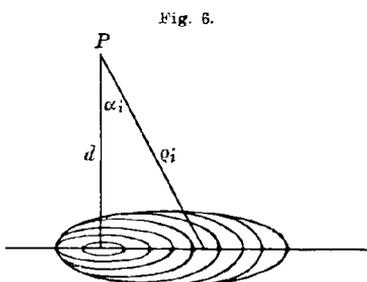
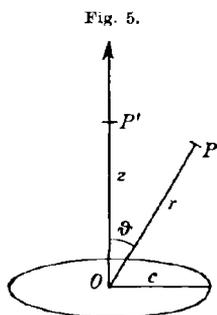
und

$$V = 2\pi \left[ \frac{1}{2} \frac{c^2}{r^2} P_1(\cos \vartheta) - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{c^4}{r^4} P_3(\cos \vartheta) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{c^6}{r^6} P_5(\cos \vartheta) - + \dots \right]$$

für  $r > c$ .

Dabei bedeutet  $P_n(\cos \vartheta)$  das  $n^{\text{te}}$  Legendresche Polynom des Argumentes  $\cos \vartheta$ .

Die Reihen (2) liefern für  $r = c$  keine brauchbaren Werte und sind für  $r$  nahe gleich  $c$  sehr langsam konvergent. Um auch für solche  $r$ -Werte genauere  $V$ -Werte zu bekommen, wurde hiefür der körperliche Winkel in entsprechenden Punkten direkt bestimmt. Hierzu wurde die Kreisfläche vom Fußpunkt des von dem



Aufpunkt  $P$  auf die Fläche gefällten Lotes als Mittelpunkt aus in eine genügende Anzahl konzentrischer Kreisringe bzw. Teile von solchen geteilt (Fig. 6), deren Flächeninhalte  $\Delta F_i$

mittels Planimeters ausgemessen und dann zu jedem solchen Ring der mittlere Abstand  $q_i$  von  $P$  aus der Zeichnung entnommen. Der Raumwinkel, unter dem ein Kreisring  $\Delta F_i$  von  $P$  aus erscheint, ist dann

$$\Delta \tau_i = \Delta F_i \cdot \frac{\cos \alpha_i}{q_i^2} = \Delta F_i \cdot \frac{d}{q_i^3}$$

und somit der Potentialwert in  $P$

$$V = \sum_i \Delta \tau_i = d \cdot \sum \frac{\Delta F_i}{q_i^3}$$

Bei der Ausführung nimmt man am besten immer gleich mehrere Punkte  $P$  zusammen, die senkrecht übereinanderliegen, da die  $\Delta F_i$  für diese dieselben sind und daher gemeinsam bestimmt werden können.

Trägt man die berechneten Potentialwerte auf, so lassen sich in einer beliebigen die  $Z$ -Achse enthaltenden Symmetrieebene die Kurven gleichen Potentials zeichnen, und zwar geschah dies für Potentialwerte, die in arithmetischer Reihe wachsen.

Die Stromlinien ergeben sich als Orthogonaltrajektorien der Äquipotentialkurven. Gezeichnet wurden jene Stromlinien, welche als Mantellinien Stromröhren begrenzen, für welche der hindurchgehende Kraftfluß in arithmetischer Reihe zunimmt. Dabei wurden für jede Stromkurve die Schnitte mit der Ebene der Kreisfläche in folgender Weise bestimmt:

Die Komponente der Geschwindigkeit parallel der  $Z$ -Achse ergibt sich für Punkte auf der  $Z$ -Achse zu

$$v = \frac{\partial V}{\partial z} = - \frac{2\pi c^2}{\sqrt{c^2 + z^2}^3}.$$

Entwickeln wir diesen Ausdruck je für  $z < c$  und  $z > c$  in eine Potenzreihe, so wird hieraus die axiale Geschwindigkeitskomponente in Punkten  $(r, \vartheta)$  außerhalb der Achse

$$(3) \quad v = - \frac{2\pi}{c} \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{r^2}{c^2} P_2(\cos \vartheta) + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \frac{r^4}{c^4} P_4(\cos \vartheta) - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{r^6}{c^6} P_6(\cos \vartheta) + \dots \right]$$

für  $r < c$

und

$$v = - \frac{2\pi}{c} \left[ \frac{c^3}{r^3} P_2(\cos \vartheta) - \frac{3}{2} \cdot \frac{c^5}{r^5} P_4(\cos \vartheta) + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \frac{c^7}{r^7} P_6(\cos \vartheta) - + \dots \right]$$

für  $r > c$ .

Der Ebene  $z = 0$  entspricht  $\vartheta = 90^\circ$ , also

$$(4) \quad v_i = - \frac{2\pi}{c} \left[ 1 + 0,750 \frac{r^2}{c^2} + 0,7035 \cdot \frac{r^4}{c^4} + 0,6840 \frac{r^6}{c^6} + 0,6732 \frac{r^8}{c^8} + \dots \right]$$

für  $r < c$

und

$$v_a = - \frac{2\pi}{c} \left[ - 0,5 \frac{c^3}{r^3} - 0,5625 \frac{c^5}{r^5} - 0,586 \frac{c^7}{r^7} - 0,5982 \frac{c^9}{r^9} - 0,6060 \frac{c^{11}}{r^{11}} - 0,6111 \frac{c^{13}}{r^{13}} - \dots \right] \text{ für } r > c.$$

In der Ebene der Kreisfläche wird daher der Kraftfluß durch das Innere der Kreisfläche

$$(5a) \quad F_i = \int_0^r v_i \cdot 2\pi r dr$$

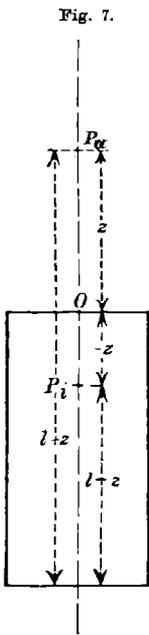
$$= - 4\pi^2 c \left[ 0,5 \frac{r^2}{c^2} + 0,1875 \frac{r^4}{c^4} + 0,1173 \frac{r^6}{c^6} + 0,0856 \frac{r^8}{c^8} + 0,0673 \frac{r^{10}}{c^{10}} + 0,0555 \frac{r^{12}}{c^{12}} + \dots \right]$$

und außerhalb der Kreisscheibe

$$(5b) \quad F_a = \int_\infty^r v_a \cdot 2\pi r dr$$

$$= - 4\pi^2 c \left[ 0,50 \frac{c}{r} + 0,1875 \frac{c^3}{r^3} + 0,1172 \frac{c^5}{r^5} + 0,0855 \frac{c^7}{r^7} + 0,0673 \frac{c^9}{r^9} + 0,0556 \frac{c^{11}}{r^{11}} + 0,0473 \frac{c^{13}}{r^{13}} + 0,0412 \frac{c^{15}}{r^{15}} + \dots \right].$$

Mit Hilfe der aus (5) berechneten Werte für  $F_i$  und  $F_a$  wird dann graphisch aus den aufgetragenen Kurven, welche die Abhängig-



keit des  $F_i$  und  $F_a$  von  $r$  zeigen, zu einem bestimmten  $F$  das zugehörige  $r_i$  bzw.  $r_a$  entnommen, wodurch die Schnittpunkte der zu dem betreffenden  $F$  gehörigen Stromlinie mit der Ebene der Kreisfläche bestimmt sind. Damit lassen sich die Stromlinien dann genügend genau zeichnen.

**B. Zylindrisches Solenoid.**

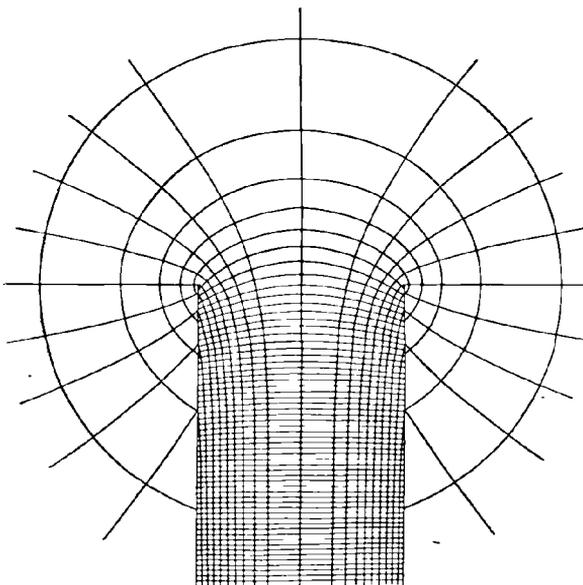
Wir denken uns das Solenoid vom Radius  $c$  und der Länge  $l$ , dessen Wicklung wir als unendlich dünn voraussetzen, zusammengesetzt aus unendlich vielen aneinandergelegten Kreisströmen. Dann wird das Potential des Solenoids in bezug auf einen auf der Solenoidachse im Abstand  $z$  von der einen Öffnung gelegenen Punkt  $P$  (Fig. 7)

$$(6a) \quad V_a = 2\pi \int_z^{l+z} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{c^2 + z'^2}}\right) dz' \\ = 2\pi [\sqrt{c^2 + z'^2} - \sqrt{c^2 + (l+z)^2} + l],$$

wenn  $P$  außerhalb des Solenoids, und

$$(6b) \quad V_i = 2\pi \int_{-z}^{l-z} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{c^2 + z'^2}}\right) dz' = 2\pi [\sqrt{c^2 + z'^2} - \sqrt{c^2 + (l-z)^2} + l],$$

Fig. 2.



wenn  $P$  innerhalb des Solenoids liegt. (Vgl. Gleichung 1.) Dabei ist zu beachten, daß  $z$  hierbei schon mit dem richtigen Vorzeichen genommen, für das Weitere daher stets absolut in Rechnung zu setzen ist. Betrachten wir zunächst

**a) Das unendlich lange zylindrische Solenoid.**

Für dasselbe ist, da es sich von  $z = 0$  bis ins Unendliche erstrecken möge,  $l = \infty$  in (6) einzusetzen. Dann wird

$$(7a) \quad V_a = 2\pi [\sqrt{c^2 + z^{2n}} - z],$$

$$(7b) \quad V_i = 2\pi [\sqrt{c^2 + z^{2n}} + z] = V_a + 4\pi z.$$

Entwickeln wir  $V_a$  in eine Potenzreihe, so kommt

$$V_a = 2\pi c \left[ 1 - \frac{z}{c} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{c^2} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \frac{z^4}{c^4} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{z^6}{c^6} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{z^8}{c^8} + \dots \right] \text{ für } z < c$$

und

$$V_a = 2\pi c \left[ \frac{1}{2} \frac{c}{z} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \frac{c^3}{z^3} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{c^5}{z^5} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{c^7}{z^7} + \dots \right] \text{ für } z > c.$$

Für einen außerhalb der Achse gelegenen Punkt, dessen Polarkoordinaten in bezug auf den Mittelpunkt der im Endlichen gelegenen Solenoidöffnung als Anfangspunkt und die Solenoidachse als Polarachse  $r$  und  $\vartheta$  seien (wobei in  $V_i$   $\cos \vartheta$  stets absolut zu nehmen ist), ist dann analog (2)

$$(8) \quad V_a = 2\pi c \left[ 1 - \frac{r}{c} P_1(\cos \vartheta) + \frac{1}{2} \frac{r^2}{c^2} P_2(\cos \vartheta) - \frac{1}{2 \cdot 4} \frac{r^4}{c^4} P_4(\cos \vartheta) \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{r^6}{c^6} P_6(\cos \vartheta) - + \dots \right] \text{ für } r < c$$

und

$$V_a = 2\pi c \left[ \frac{1}{2} \frac{c}{r} P_0(\cos \vartheta) - \frac{1}{2 \cdot 4} \frac{c^3}{r^3} P_2(\cos \vartheta) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{c^5}{r^5} P_4(\cos \vartheta) \right. \\ \left. - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{c^7}{r^7} P_6(\cos \vartheta) + \dots \right] \text{ für } r > c,$$

worin  $P_n(\cos \vartheta)$  wieder das  $n^{\text{te}}$  Legendresche Polynom bedeutet. In der Entwicklung von  $V_a$  für  $r > c$  kommen nur gerade Kugelfunktionen vor, und da  $P_{2n}(\cos \vartheta) = P_{2n}(\cos(180^\circ - \vartheta))$ , so ist der Wert von  $V_a$  für Punkte, die symmetrisch zur Öffnungsebene ( $\vartheta = 90^\circ$ ) liegen, derselbe, d. h. außerhalb des Solenoids ist die Potentialverteilung und damit auch die Strömung symmetrisch zur Solenoidöffnungsebene. Während bei der kreisförmigen Doppelschicht alle Stromlinien die Kreisfläche schneiden, tritt beim unendlich langen Solenoid infolge dieser Symmetrie nur die Hälfte der Stromlinien durch die im Endlichen gelegene kreisförmige Öffnung nach außen. Mit andern Worten, beim unendlich langen Solenoid streuen 50% aller Stromlinien.

Die Potentialwerte im Innern des Solenoids ergeben sich am einfachsten nach (7b) aus denen außerhalb desselben, indem man, um  $V_i$  für einen Punkt im Innern zu erhalten, zu dem  $V_a$  des zur Öffnungsebene symmetrisch gelegenen Punktes  $4\pi r \cdot P_1(\cos \vartheta) = 4\pi r \cos \vartheta = 4\pi z$  addiert.

Die Reihen (8) konvergieren, abgesehen von Werten  $r$  nahe  $= c$ , verhältnismäßig rasch, so daß man mit der Berechnung der ersten 3—4 Glieder ausreicht.

Gezeichnet wurden wieder die Kurven gleichen Potentials für die in gleichen Intervallen aufeinanderfolgenden Werte  $\frac{V}{2\pi c} = 0,10, 0,20, 0,30, \dots$ , während die Stromlinien derart gezogen wurden, daß innerhalb der von ihnen begrenzten Stromröhren der Fluß nach arithmetischer Reihe wächst.

Außerhalb des Solenoids werden die Äquipotentialkurven für genügend großes  $r$  immer mehr konzentrische Kreise um den Mittelpunkt der im Endlichen gelegenen Solenoidöffnung. Die Stromkurven nähern sich daher asymptotisch den Radien dieser Kreise. Da infolgedessen die Flächen gleichen Potentials in genügender Entfernung von der Solenoidöffnung mit überall gleicher Geschwindigkeit durchströmte konzentrische Kugeln sind, ergeben sich durch Einteilung der Kugeln in Kugelhauben bzw. Zonen gleichen Flächeninhaltes, also gleicher Höhe, und (in der Zeichenebene) Verbindung der Teilpunkte mit der Mitte der Solenoidöffnung die Asymptoten der Stromkurven.

Die Komponente der Geschwindigkeit parallel der Solenoidachse ist für Punkte im Innern auf der Achse

$$\begin{aligned} v_i - \frac{\partial V_i}{\partial z} &= 2\pi \left[ \frac{z}{\sqrt{c^2 + z^2}} + 1 \right] \\ &= 2\pi \left[ 1 + \frac{z}{c} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{z^2}{c^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{z^4}{c^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{z^6}{c^6} + \dots \right) \right] \quad \text{für } z < c, \\ &= 2\pi \left[ 1 + 1 - \frac{1}{2} \frac{c^2}{z^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{c^4}{z^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{c^6}{z^6} + \dots \right] \quad \text{für } z > c, \end{aligned}$$

daher für Punkte außerhalb der Achse

$$\begin{aligned} v_i &= 2\pi + 2\pi \left[ \frac{r}{c} \cdot P_1 - \frac{1}{2} \frac{r^3}{c^3} P_3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{r^5}{c^5} P_5 - + \dots \right] \quad \text{für } r < c, \\ v_i &= 4\pi + 2\pi \left[ -\frac{1}{2} \frac{c^2}{r^2} P_1 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{c^4}{r^4} P_3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{c^6}{r^6} P_5 + \dots \right] \quad \text{für } r > c. \end{aligned}$$

Die axiale Geschwindigkeitskomponente ist also in der im Endlichen gelegenen Öffnung des Solenoids ( $\vartheta = 90^\circ$ ,  $r < c$ ) konstant und gleich  $2\pi$ , in der im Unendlichen gelegenen Öffnung ( $r = \infty$ ) ebenfalls konstant und gleich  $4\pi$ , da die allein vorkommenden ungeraden Kugelfunktionen für  $\vartheta = 90^\circ$  sämtlich Null sind. Der Fluß ist somit durch die endliche Öffnung  $F' = 2\pi \cdot \pi c^2 = 2\pi^2 c^2$ , durch die im Unendlichen gelegene dagegen  $F' = 4\pi^2 c^2$ , also doppelt so groß. Auch hierin zeigt sich wieder, daß nur die Hälfte aller aus dem Innern kommenden Stromlinien durch die im Endlichen liegende Solenoidöffnung geht, während die andere Hälfte längs des Zylindermantels austreten muß, also streut.

b) Das endliche Solenoid (Länge : Durchmesser = 2 : 1).

Die Werte des Potentials für ein Solenoid von endlicher Länge können in analoger, jedoch mehr Rechenarbeit erfordernder Weise wie die für das unendlich lange Solenoid berechnet werden, indem man von den Formeln (6) ausgeht. Sind aber wie in unserem Falle die Potentialkurven für das letztere bereits gezeichnet, so läßt sich die direkte Berechnung der Potentialwerte des endlichen Solenoids vermeiden. Denken wir uns dieses ersetzt durch eine große Anzahl aneinander gelagerter magnetischer Doppelblätter, so kommt

für die Wirkung nach außen nur die oberste (etwa positive) und die unterste entgegengesetzte Belegung in Betracht, da von den übrigen je zwei aneinanderliegende Belegungen sich gegenseitig binden. Die Wirkung einer einfachen magnetischen Belegung ist aber genau dieselbe wie die eines unendlich langen Solenoids, wenn wir nur das Äußere desselben betrachten, da die unendlich ferne Belegung im Endlichen keine Wirkung hat. Wir erhalten daher außerhalb des endlichen Solenoids die richtige Potentialverteilung, indem wir die von zwei gleichen unendlich langen Solenoiden herührenden außerhalb derselben erzeugten Felder (die wir, soweit nötig, auch in das Innere der Solenoide vollständig symmetrisch zu den beiden Öffnungsebenen ergänzt haben) so übereinanderlagern, daß das eine gegen das andere um die Länge des endlichen Solenoids längs der Achse verschoben ist. (Fig. 8.) Die Differenz der Potentialwerte im Schnittpunkt zweier Äquipotentialkurven der unendlich langen Solenoide gibt dann außerhalb des endlichen Solenoids

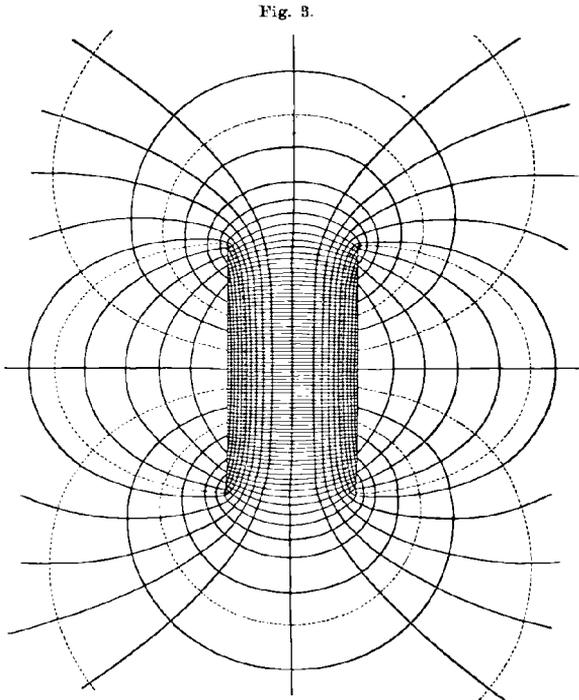


Fig. 3.

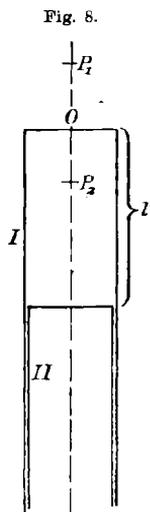


Fig. 8.

direkt den Wert des von diesem im betrachteten Punkt erzeugten Potentials.

Dies läßt sich auch mit Hilfe der von uns aufgestellten Formeln (6) und (7) bestätigen:

Seien die von dem unendlich langen Solenoid I erzeugten Potentiale mit einem Strich, die des unendlich langen Solenoides II mit zwei Strichen bezeichnet, so ist für einen außerhalb des endlichen Solenoids gelegenen Punkt  $P_1$ , der auch für I und II äußerer Punkt ist,

$$\begin{aligned}(V_a)_1 &= (V'_a - V''_a)_1 = 2\pi [\sqrt{c^2 + z^{2\lambda}} - z] - 2\pi [\sqrt{c^2 + (l+z)^{2\lambda}} - (l+z)] \\ &= 2\pi [\sqrt{c^2 + z^{2\lambda}} - \sqrt{c^2 + (l+z)^{2\lambda}} + l],\end{aligned}$$

wie es nach (6a) sein muß.

Die Ersetzung des endlichen Solenoids durch die beiden unendlich langen gilt aber auch für Punkte  $P_2$  im Innern des endlichen Solenoids.  $P_2$  ist für I innerer, für II äußerer Punkt, daher

$$\begin{aligned}(V_i)_2 &= (V'_i - V''_i)_2 = 2\pi [\sqrt{c^2 + z^{2\lambda}} + z] - 2\pi [\sqrt{c^2 + (l-z)^{2\lambda}} - (l-z)] \\ &= 2\pi [\sqrt{c^2 + z^{2\lambda}} - \sqrt{c^2 + (l-z)^{2\lambda}} + l],\end{aligned}$$

wie (6b) verlangt.

Da aber  $V'_i = V'_a + 4\pi z$ , so wird  $(V_i)_2 = (V'_a - V''_a)_2 + 4\pi z$ .

Wenn wir also die außerhalb des Solenoids I gezeichneten Potentialkurven symmetrisch zur Öffnung von I in das Innere ergänzen und die Schnittpunkte  $P_2$  dieser Kurven mit den zu II gehörigen Potentialkurven suchen, so ist in diesen Punkten die Differenz der zugehörigen Potentialwerte  $= (V'_a - V''_a)_2$ . Addieren wir hierzu  $4\pi z$ , so erhalten wir den gesuchten Wert  $(V_i)_2$ . Dies gilt natürlich auch für Punkte  $P_2$ , die nicht auf der Achse liegen; denn für solche ist statt  $4\pi z$  der Wert  $4\pi r \cdot P_1(\cos \vartheta) = 4\pi r \cos \vartheta = 4\pi z$  zu addieren.

Die Kurven gleichen Potentials sind wieder gezeichnet von  $V = 0$  in äquidistanten Intervallen bis zum Maximalwert  $V = 8\pi c$  in der Mitte des Solenoids.

Zur Konstruktion der Stromlinien wollen wir den Fluß durch die Mittelebene innerhalb und außerhalb des Solenoids sowie durch die Öffnung bestimmen. Um bequemer in Reihen entwickeln zu können, verschieben wir zur Berechnung des Flusses durch die Mitte des Solenoids den Koordinatenanfangspunkt in den Mittelpunkt des Solenoids, so daß in (6b)  $z = z' + \frac{l}{2}$ . Dann wird unter Berücksichtigung von  $l = 4c$ :

$$V_i = 2\pi [\sqrt{c^2 + (z' + 2c)^{2\lambda}} - \sqrt{c^2 + (2c - z')^{2\lambda}} + 4c]$$

für Punkte auf der Solenoidachse.

Entwickeln wir  $V_i$  für  $z < c$ , so kommt, wenn  $x = \frac{z'}{c}$ :

$$V_i = 2\pi c \sqrt{5} \left[ \sqrt{1 + \frac{1}{5}(x^2 + 4x)} - \sqrt{1 + \frac{1}{5}(x^2 - 4x)} + \frac{4}{\sqrt{5}} \right] \\ = 2\pi c \sqrt{5} \left[ \frac{4}{\sqrt{5}} + 2 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot 4x - \frac{1}{2 \cdot 4} \frac{1}{5^2} \cdot 8x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{5^3} (12x^5 + 64x^3) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{5^4} (16x^7 + 256x^5) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \frac{1}{5^5} (20x^9 + 640x^7 + 1024x^5) - + \dots \right] .$$

Die axiale Geschwindigkeitskomponente wird daher

$$v_i = \frac{\partial V_i}{\partial z'} = \frac{\partial V_i}{\partial x} \cdot \frac{1}{c} \\ = 4\pi \sqrt{5} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot 4 - \frac{1}{2 \cdot 4} \frac{1}{5^2} \cdot 24x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{1}{5^3} (60x^4 + 192x^2) \right. \\ \left. - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{1}{5^4} (112x^6 + 1280x^4) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \frac{1}{5^5} (180x^8 + 4480x^6 + 5120x^4) - + \dots \right] \\ = \frac{4}{10} \pi \sqrt{5} \left[ 4 - \frac{6}{5} x^2 + \frac{3}{50} (5x^4 + 16x^2) - \frac{1}{100} (7x^6 + 80x^4) + \frac{7}{4000} (9x^8 + 224x^6 + 256x^4) \right. \\ \left. - \frac{63}{2 \cdot 10^5} (11x^{10} + 480x^8 + 1792x^6) - + \dots \right] .$$

und somit für Punkte außerhalb der Achse

$$v_i = \frac{4}{10} \pi \sqrt{5} \left[ 4 - \frac{6}{5} \frac{r^2}{c^2} P_2 + \frac{3}{50} \frac{r^2}{c^2} (5 \frac{r^2}{c^2} P_4 + 16 P_2) - \frac{1}{100} \frac{r^4}{c^4} (7 \frac{r^4}{c^4} P_6 + 80 P_4) \right. \\ \left. + \frac{7}{4000} \frac{r^4}{c^4} (9 \frac{r^4}{c^4} P_8 + 224 \frac{r^2}{c^2} P_6 + 256 P_4) \right. \\ \left. - \frac{63}{2 \cdot 10^5} \frac{r^6}{c^6} (11 \frac{r^4}{c^4} P_{10} + 480 \frac{r^2}{c^2} P_8 + 1792 P_6) + \dots \right],$$

worin  $P_n = P_n(\cos \vartheta)$  das  $n^{\text{te}}$  Legendresche Polynom und  $r, \vartheta$  die Polarkoordinaten des betrachteten Punktes sind.

Für die Mittelebene ist  $\vartheta = 90^\circ$ ,  $r < c$ , also

$$v_i = \frac{2}{\sqrt{5}} \pi \left[ 4 + \frac{3}{5} \frac{r^2}{c^2} + \frac{3}{50} \frac{r^2}{c^2} \left( \frac{15}{8} \frac{r^2}{c^2} - 8 \right) - \frac{1}{100} \frac{r^4}{c^4} \left( -\frac{35}{16} \frac{r^2}{c^2} + 30 \right) + \right. \\ \left. + \frac{7}{4000} \frac{r^4}{c^4} \left( \frac{315}{128} \frac{r^4}{c^4} - 70 \frac{r^2}{c^2} + 96 \right) - \frac{63}{2 \cdot 10^5} \frac{r^6}{c^6} \left( -\frac{693}{256} \frac{r^4}{c^4} + \frac{525}{4} \frac{r^2}{c^2} - 560 \right) + \dots \right],$$

also nicht etwa konstant.

Der gesamte durch die Mittelebene strömende Fluß wird daher

$$F_i = \int_0^c 2\pi r \cdot v_i dr \\ = \frac{4}{\sqrt{5}} \pi^2 c^2 [2,000 + 0,1500 - 0,1013 - 0,0473 + 0,0131 + 0,0020 - + \dots],$$

oder

$$(9) \quad F_i = \frac{4}{\sqrt{5}} \pi^2 c^2 \cdot 2,0165 = 3,606 \pi^2 c^2.$$

Beim unendlich langen Solenoid war  $I = 4\pi^2 c^2$ .

Nehmen wir die Geschwindigkeit  $v_i$  durch die Mittelebene im Innern als konstant an und gleich der Geschwindigkeit in der Achse, so ist

$$v_i' = \left( \frac{\partial V_i}{\partial z} \right)_{z=2c} = \left\{ \frac{\partial}{\partial z} [\sqrt{c^2 + z^2} - \sqrt{c^2 + (l-z)^2} + l] \right\}_{z=2c} = \frac{8}{\sqrt{5}} \pi,$$

und der Fluß wird darnach

$$(10) \quad F_i' = v_i' \cdot \pi c^2 = \frac{8}{\sqrt{5}} \pi^2 c^2 = 3,578 \pi^2 c^2,$$

also nur  $\frac{0,028}{8,606} \cdot 100\% = 0,78\%$  von dem wirklichen  $F_i$  verschieden, so daß für die Zeichnung bei dem verhältnismäßig langen Solenoid ( $l = 4c$ ) die Geschwindigkeit in der Mittelebene noch als konstant angenommen werden darf.

Wir wollen nun in analoger Weise auch den Fluß durch die Öffnung des Solenoids berechnen, um ein Maß für die Streuung der Stromlinien zu bekommen. Der Koordinatenanfangspunkt sei wieder wie ursprünglich im Mittelpunkt der Öffnung, so ist das Potential für Punkte auf der Achse nach (6a)

$$V_i = 2\pi [\sqrt{c^2 + z^2} - \sqrt{c^2 + (l-z)^2} + l].$$

Entwickeln wir für  $z < c = \frac{l}{4}$  in eine binomische Reihe, so wird

$$V_i = 2\pi \left\{ c \left[ 1 + 0,500 \left( \frac{z}{c} \right)^2 - 0,125 \left( \frac{z}{c} \right)^4 + 0,0625 \left( \frac{z}{c} \right)^6 - 0,0391 \left( \frac{z}{c} \right)^8 + \dots \right] \right. \\ \left. - l \left[ 0,314 + 0,9696 \frac{z}{l} + 0,0289 \left( \frac{z}{l} \right)^2 - 0,0269 \left( \frac{z}{l} \right)^3 + 0,0244 \left( \frac{z}{l} \right)^4 \right. \right. \\ \left. \left. - 0,0214 \left( \frac{z}{l} \right)^5 + 0,0180 \left( \frac{z}{l} \right)^6 - \dots \right] \right\},$$

daher die axiale Geschwindigkeitskomponente unter Einsetzung von  $l = 4c$  für Punkte in der Achse

$$v_i = \frac{\partial V_i}{\partial z} = 2\pi \left\{ 0,9694 + 0,9855 \frac{z}{c} - 0,0005 \frac{z^2}{c^2} - 0,5015 \frac{z^3}{c^3} - 0,0004 \frac{z^4}{c^4} + \dots \right\},$$

somit für Punkte  $(r, \vartheta)$  außerhalb der Achse

$$v_i = 2\pi \left\{ 0,9694 P_0 + 0,9855 \cdot \frac{r}{c} P_1 - 0,0005 \cdot \frac{r^2}{c^2} P_2 - 0,5015 \frac{r^3}{c^3} P_3 \right. \\ \left. - 0,0004 \frac{r^4}{c^4} P_4 + \dots \right\},$$

also in der Öffnungsebene ( $\vartheta = 90^\circ$ ,  $r < c$ ):

$$v_i = 2\pi \left\{ 0,9694 + 0,00025 \cdot \frac{r^2}{c^2} - 0,00015 \frac{r^4}{c^4} + \dots \right\}.$$

Der Fluß durch die Öffnungsebene wird also

$$(11) \quad F = \int_0^c v_i \cdot 2\pi r dr = 4\pi^2 c^2 [0,9694 \cdot \frac{1}{2} + 0,00025 \cdot \frac{1}{4} - 0,00015 \cdot \frac{1}{6} + \dots] \\ = 1,939\pi^2 c^2,$$

während er beim unendlich langen Solenoid gleich  $2\pi^2 c^2$  war.

Es geht somit  $\frac{1,939}{2} = 96,9\%$  des gesamten Kraftflusses durch die Öffnung des endlichen Solenoids, während  $3,1\%$  längs des Mantels austritt, so daß also immer noch  $96,9\%$  aller Stromlinien streuen.

Bei Annahme konstanter axialer Geschwindigkeitskomponente in der Öffnung ist diese

$$v' = \left( \frac{\partial V_i}{\partial z} \right)_{z=0} = 2\pi \left[ \frac{\partial}{\partial z} (Vc^2 + z^2) - Vc^2 + (l - z)^2 - l \right]_{z=0} = \frac{8}{\sqrt{17}} \pi$$

und der Fluß

$$(12) \quad F' = \frac{8}{\sqrt{17}} \pi^2 c^2 = 1,940\pi^2 c^2.$$

Es darf also auch in der Öffnungsebene für unser Solenoid die axiale Geschwindigkeitskomponente noch als konstant angenommen werden. Tut man dies auch für die Mittelebene des Solenoids, so erhält man als Streuung nach (10) und (12)

$$100 \left( 1 - \sqrt{\frac{5}{17}} \right) \% = 45,8\%$$

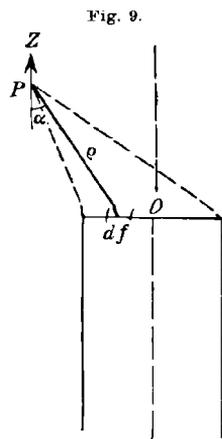
mit dem genauen Wert  $46,2\%$  fast noch völlig übereinstimmend.

Bei dem unendlich langen Solenoid war die Streuung  $50\%$ ; die Streuung nimmt also mit abnehmender Länge des Solenoids ab. Null wird die Streuung aber erst für das Solenoid von der Länge Null, d. h. den stromdurchflossenen Kreisring.

Schließlich wollen wir noch den Fluß durch die Mittelebene außerhalb des Solenoids bestimmen und zwar ohne Zuhilfenahme der Formel (6a). Die axiale Kraftkomponente in einem Punkte  $P$  außerhalb des Solenoids, welche von einem Endbelag herrührt, ist nach dem Coulombschen Gesetz (Fig. 9)

$$Z = \int \frac{df}{r^2} \cos \alpha,$$

das Integral ausgedehnt über die kreisförmige Öffnung. Dies ist aber



gleichzeitig der körperliche Winkel, unter dem die Öffnung von  $P$  aus gesehen wird. Liegt  $P$  auf der Achse, so ist daher

$$Z = 2\pi \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{c^2 + z^2}} \right]$$

oder

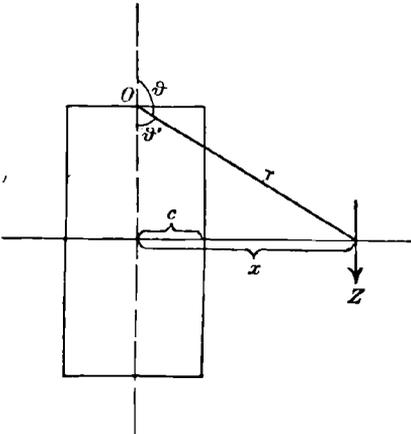
$$Z = 2\pi \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{c}{z}\right)^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{c}{z}\right)^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{c}{z}\right)^6 - + \dots \right] \quad \text{für } z > c.$$

Daraus für Punkte außerhalb der Achse

$$Z = 2\pi \left[ \frac{1}{2} \frac{c^2}{r^2} P_1 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{c^4}{r^4} P_3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{c^6}{r^6} P_5 - + \dots \right],$$

wo  $P_n(\cos \vartheta)$  wieder das  $n^{\text{te}}$  Legendresche Polynom bedeutet. Der Kraftfluß durch die Mittelebene außerhalb des Solenoids, der von den beiden gleichweit entfernt liegenden Endbelegen herrührt, ist daher durch einen zwischen dem Solenoidmantel und einem Kreis vom Radius  $x$  liegenden Kreisring (Fig. 10)

Fig. 10.



$$F_x = \int_c^x 2Z \cdot 2\pi x dx.$$

Da

$$x = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}(180 - \vartheta) = 2c \operatorname{tg} \vartheta',$$

$$dx = 2c \frac{d\vartheta'}{\cos^2 \vartheta'},$$

so wird

$$\begin{aligned} F_x &= 4\pi \int_c^x Z \cdot \frac{4c^2 \sin \vartheta'}{\cos^3 \vartheta'} d\vartheta' \\ &= -16\pi c^2 \int_c^x Z \cdot \frac{d(\cos \vartheta')}{\cos^3 \vartheta'}, \end{aligned}$$

und wenn wir für  $\cos \vartheta'$   $y$  setzen und beachten, daß  $2c = r \cdot \cos \vartheta' = r \cdot y$ ;  $\frac{c}{r} = \frac{1}{2} y$ , sowie daß auch die  $P_n$  Funktionen von  $y$  sind, so folgt:

$$F_x = +32\pi^2 c^2 \int_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^y \frac{dy}{y^5} \left[ \frac{1}{2 \cdot 2^2} y \cdot P_1(y) - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 2^4} y^4 P_3(y) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2^6} y^6 \cdot P_5(y) - + \dots \right].$$

Setzen wir noch die Werte für die  $P_n(y)$  ein, so wird

$$\begin{aligned} F_x &= 8\pi^2 c^2 \int_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^y \left[ \frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 2^2} (5y^4 - 3y^2) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2^2} (63y^8 - 70y^6 + 15y^4) + \dots \right] dy, \\ (13) \quad F_x &= \pi^2 c^2 [4,00y + 0,375y^3 - 0,316y^5 - 0,185y^7 + \dots - 3,582]. \end{aligned}$$

Der gesamte durch die Mittelebene außerhalb des Solenoids gehende Fluß ist darnach für  $x = \infty, y = 0$ :

$$(14) \quad F = -\pi^2 c^2 \cdot 3,582,$$

während sich aus (9)  $F$  ergab zu

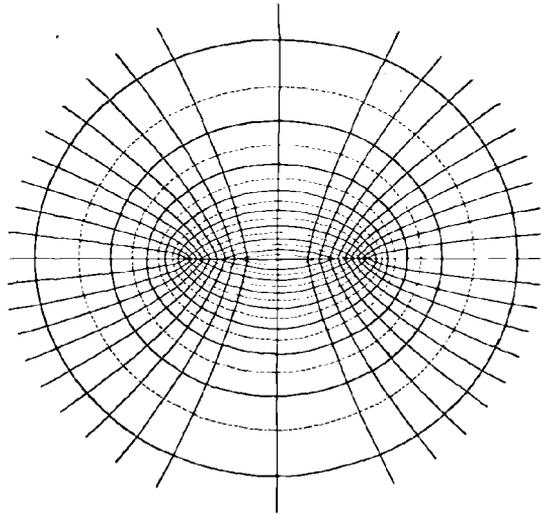
$$F = \pi^2 c^2 \cdot 3,606.$$

(Die nicht vollständige Übereinstimmung hat ihren Grund in der langsamen Konvergenz der Reihe (13) und der daraus entspringenden Unsicherheit der beiden letzten Dezimalen in (14)).

Es ist bemerkenswert, daß die Kurve, welche die Abhängigkeit des  $F$  von  $y = \cos \vartheta'$  aus (13) darstellt, eine Gerade wird.

Um nun den Schnittpunkt einer bestimmten Stromlinie mit der Halbierebene außerhalb des Solenoids zu erhalten, wobei die Stromlinie als Mantellinie einer Stromröhre gedacht ist, durch die ein bestimmter Fluß hindurchgeht (in der Figur  $\frac{1}{10}, \frac{2}{10} \dots$  bis  $\frac{10}{10} F'$ ), hat man nur aus der aufgetragenen Kurve (13) das dem betreffenden  $F'_x$  entsprechende  $y$  zu entnehmen, wodurch der Schnittpunkt bestimmt ist. Die beiden Schnittpunkte jeder Stromlinie mit der Mittelebene und allenfalls die (unter Annahme konstanter axialer Geschwindigkeitskomponente in den Öffnungen leicht zu bestimmenden) Schnittpunkte der Stromlinien mit den kreisförmigen Öffnungsebenen geben dann genügend Anhaltspunkte, um die Stromlinien als Orthogonaltrajektorien der Äquipotentialkurven zu zeichnen.

Fig. 4.



### C. Gleichmäßig mit Masse belegte Kreisscheibe.

Das Strömungsbild für die gleichmäßig mit Masse belegte Kreisscheibe ist dasselbe wie das des Äußern eines unendlich langen Solenoids (vgl. B. a), da bei diesem nur der eine im Endlichen gelegene Belag in Betracht kommt. Man hat nur das für das Äußere gezeichnete Strombild des unendlich langen Solenoids auch nach

innen symmetrisch zu ergänzen. (In der Figur ist die Zahl der Stromlinien gegenüber der des Solenoids verdoppelt.)

Es ist fast unnötig, zu bemerken, daß sämtliche Figuren als Schnitte einer durch die Symmetrieachse gehenden Ebene mit den räumlichen, in bezug auf diese Achse Rotationssymmetrie zeigenden Strömungsbildern zu betrachten sind.

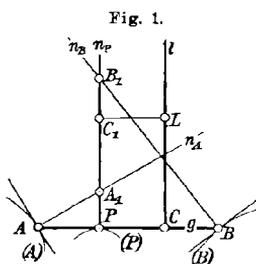
## Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes bei polytropischen Kurven.

Von EMIL WAELSCH in Brünn.

Herr Kosch hat im 45. Bd. dieser Zeitschrift eine Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes für einen Punkt der Kurve  $y = c \cdot x^\alpha$  abgeleitet, wobei  $x, y$  Cartesische rechtwinklige Koordinaten sind, und Herr Dingeldey im 54. Bd. eine andere Konstruktion.

Die nachfolgend abgeleitete Konstruktion ist einfacher als die genannten und gilt auch dann, wenn  $x, y$  Cartesische schiefwinklige Koordinaten sind mit verschiedenen Einheiten der Achsen.<sup>1)</sup>

Sie folgt aus einer allgemeinen kinematisch geometrischen Konstruktion Mannheims<sup>2)</sup>, welche dieser auch bei Kegelschnitten und



Zykloiden verwendet: „Die Punkte  $A, B, C$  einer Geraden  $g$  (Fig. 1) verändern sich mit dieser so, daß  $A, B$  resp. auf den Kurven  $(A), (B)$  laufen, während sie eine Kurve  $(P)$  einhüllt, die sie im Punkte  $P$  berührt, und  $AC : CB$  konstant bleibt; sind  $A_1, B_1$  die Schnittpunkte der Normalen  $n_A, n_B, [n_X$  sei die Normale der Kurve  $(X)$  für den Punkt  $X]$  mit der Normalen  $n_P$ , so liegt das Momentanzentrum  $C_1$

für die Bewegung des starren Systems, das aus  $g$  und dem Punkt  $C$  besteht, auf  $n_P$  so, daß

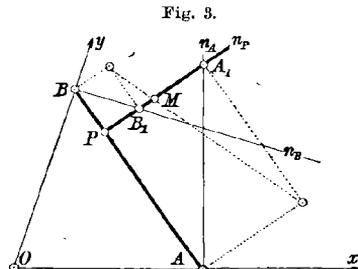
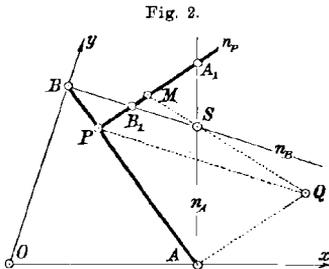
$$(1) \quad \overline{A_1 C_1} : \overline{C_1 B_1} = \overline{AC} : \overline{CB}."$$

1) Vgl. Mehmke: „Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte einer durch  $y = f(x)$  gegebenen Kurve.“ Süddeutsch. Blätt. für höh. Unterrichtsinst. 1893, p. 69.

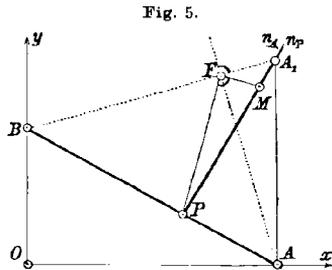
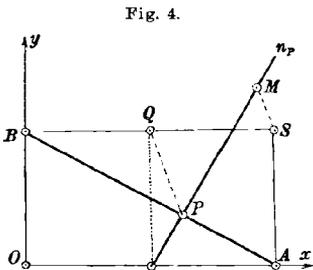
2) Siehe Mannheim: „Géométrie descriptive“, p. 173 ff. u. „Géométrie cinématique“ p. 15 ff. und Burmester: „Kinematik“, p. 91 ff.

Die im Punkte  $C$  auf  $g$  senkrechte Gerade  $l$  dieses starren Systems umhüllt eine Kurve ( $L$ ) und berührt diese im Fußpunkte  $L$  des Lotes, das von  $C_1$  auf  $L$  gefällt wird.

Ist nun ( $P$ ) die Kurve, deren Gleichung in dem Cartesischen schiefwinkligen Koordinatensystem  $Oxy$  lautet:  $y = cx^\alpha$ , und sind  $A$ ,  $B$  die Schnittpunkte ihrer Tangente im Punkte  $P$  mit  $Ox$ , bzw.  $Oy$ , so ist bekanntlich  $\overline{AP} : \overline{PB}$  konstant. Nimmt man daher in Fig. 1



als Kurven ( $A$ ), ( $B$ ) die Geraden  $Ox$  bzw.  $Oy$ , so kann  $P$  als Punkt  $C$  angesehen werden und die Normale  $n_P$  als Gerade  $l$ . Da jetzt das Momentanzentrum  $C_1$  auf diese Normale zu liegen kommt, so ist es identisch mit dem gesuchten Krümmungsmittelpunkte  $M$  der Kurve ( $P$ ) für den Punkt  $P$ . Dieser Punkt  $M$  teilt daher die Strecke  $\overline{A_1B_1}$  im Verhältnis  $\overline{AP} : \overline{PB}$ . Um ihn zu konstruieren hat man (Fig. 2) die



durch  $P$  parallel zu  $n_B$  gezogene Gerade mit der in  $A$  zu  $AB$  normalen Geraden in  $Q$  zu schneiden, dann liegt  $M$  auf  $SQ$ .

Für  $\alpha = -1$  ergibt sich die schon von Mannheim abgeleitete Konstruktion bei einer Hyperbel, von welcher die Asymptoten bekannt sind. Für  $\alpha = 2$  erhält man für eine Parabel, die durch zwei Punkte mit deren Tangenten gegeben ist, die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes für einen dieser Punkte.

Aus der Proportion (1) folgt auch, daß die Geraden  $g$ ,  $n_A$ ,  $n_B$ ,  $n_P$  Tangenten einer Parabel  $\mathfrak{P}$  sind, welche  $n_P$  im Punkte  $M$  berührt.

$M$  kann daher (Fig. 3) auch in symmetrischer Weise mit Hilfe der beiden gezeichneten Rechtecke gefunden werden.

Ist  $Ox$  normal zu  $Oy$ , so kann  $M$  wie in Fig. 4 durch  $SM \parallel PQ$  konstruiert werden. Ferner ist (Fig. 5)  $F$ , mit  $AF \perp BA_1$ , der Brennpunkt der Parabel  $\mathfrak{B}$  und der  $\sphericalangle PFM$  ein Rechter.

## Zum Integrator von E. Pascal.

Von Fr. A. WILLERS in Göttingen.

Herr E. Pascal<sup>1)</sup> hat kürzlich einen Integrator zur Integration der Differentialgleichung

$$y' + y = Q(x)$$

konstruiert, der ebenso, wie die meisten derartigen Apparate, z. B. der Integrator von Abdank-Abakanowicz<sup>2)</sup>, der Katenograph von R. Schimmack<sup>3)</sup>, die von Mehmke<sup>4)</sup> vorgeschlagenen Apparate usw. darauf beruht, daß eine scharfkantige Rolle, die mit horizontaler Achse gegen das Zeichenpapier gepreßt wird, bei jeder Bewegung nur in ihrer Vertikalebene rollen kann. Das Prinzip des Pascalschen Apparates hat freilich schon Potier<sup>5)</sup> auseinandergesetzt, doch dürfte diese Abhandlung, die sich nur in der deutschen Übersetzung des Buches von

1) E. Pascal, L'integratore meccanico per le equazioni differenziali lineari di 1° ordine e per altre equazioni differenziali. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (5) t. 18, 1909; Giornale di Mat. di Battaglini (3) t. 48, 1910. Nach der letzten Abhandlung, die ich erst bei der Korrektur dieser Arbeit einsenden konnte, hat Herr Pascal das Instrument so geändert, daß den Schienen für die Laufwagen variabler Abstand gegeben werden kann (im Max. 16, im Min. 7 cm.), sodaß, wie weiterhin schon auseinandergesetzt ist, die Integration linearer Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten möglich wird.

2) Abdank-Abakanowicz, Die Integratoren etc. (Deutsch von Bitterli, Leipzig 1889.)

3) R. Schimmack, Ein kinematisches Prinzip und seine Anwendung zu einem Katenographen. Zeitschrift f. Math. u. Phys. 52 (1905), vgl. auch die dort zitierte Literatur.

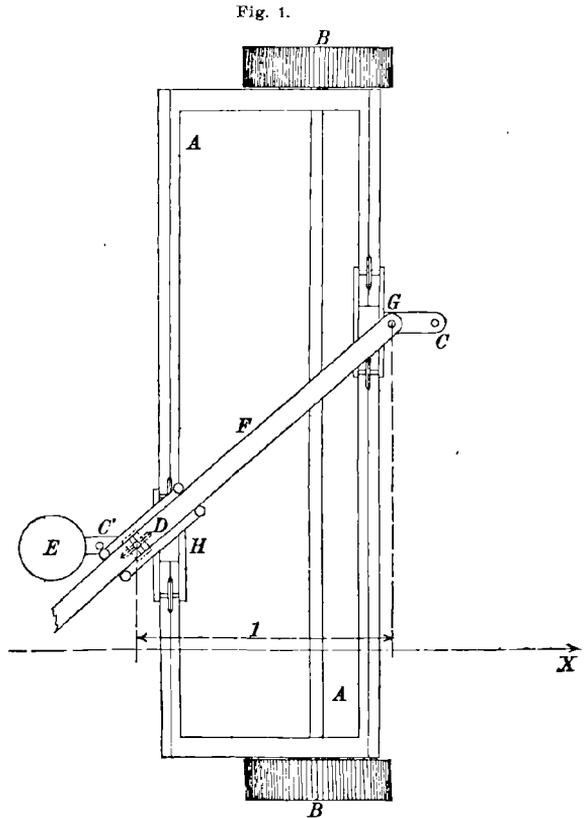
4) R. Mehmke, Über einen Mechanismus zur Lösung von Aufgaben der Dynamik mit Anwendung auf die mechanische Integration von Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung und von Systemen solcher. Jahresb. d. D. Math.-Ver. 16 (1907), S. 377.

5) A. Potier, Über ein Instrument zur mechanischen Konstruktion der Kurven  $f(x) = y + a \frac{dy}{dx}$  in Abdank-Abakanowicz, Die Integratoren usw. S. 166—168 (Deutsche Ausgabe).

Abdank-Abakanowicz findet, Herrn Pascal nicht bekannt gewesen sein. Potier hat nicht versucht, den Apparat wirklich zu bauen; auch findet sich dort nicht die ausführliche Diskussion der Leistungsfähigkeit des Integrators, wie in der Arbeit von Pascal.

Die Anordnung des Apparates gibt schematisch Fig 1, während die Photographie Fig. 2, die ich der Freundlichkeit Herrn Pascals verdanke, die wirkliche Ausführung zeigt.

Der rechtwinklige Rahmen *A* vermag mittels der Räder *B* parallel zur *X*-Achse verschoben zu werden; die zur *X*-Achse senkrechten Rahmenteile tragen zwei auf ihnen leicht verschiebbare kleine Wagen, den Differentialwagen *G* mit dem Fahrstift *C*, der längs der Kurve *Q(x)* geführt wird und den Integralwagen *H* mit der scharfrandigen Rolle *D*, dem Schreibstift *C'* und dem Gewicht *E*, das die scharfkantige Rolle gegen das Zeichenpapier drückt. Beide Wagen sind durch eine Schiene *F* verbunden, die sich um eine Achse des Differentialwagens dreht und die auf dem Integralwagen so hingleiten kann, daß die Ebene der scharfkantigen Rolle ihr stets parallel ist. Verschiebt man nun den Apparat,



nachdem man dem Integralwagen irgendeine Anfangslage gegeben hat, und führt dabei *C* auf der Kurve *Q(x)*, so rotiert die Rolle *D* stets nur in ihrer Ebene und verschiebt dabei den Integralwagen so, daß diese Ebene mit der der Schiene *F* zusammenfällt. Wählt man nun als Einheit die Projektion auf die *X*-Achse von der Strecke, die zwischen dem Drehpunkt der Schiene auf dem Differentialwagen und dem Punkt, in dem das Rad *D* die Zeichenebene berührt, liegt, so sieht man leicht, daß der Schreibstift *C'* eine Kurve *y* beschreibt, für die

$$y' = Q(x) - y; \quad y' + y = Q(x)$$

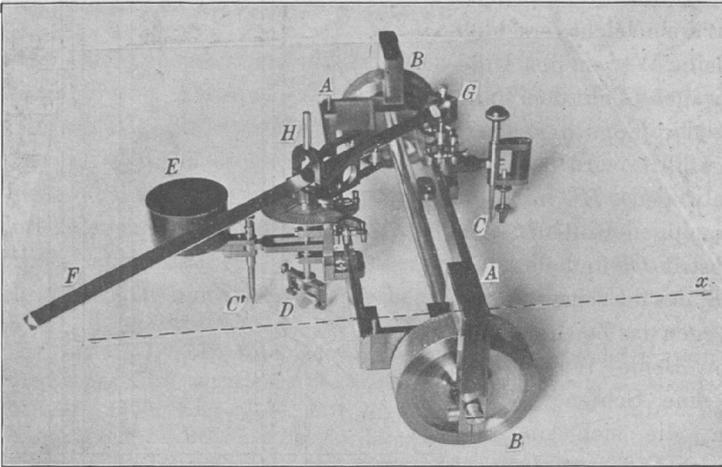
ist. Das Instrument integriert also in dieser Form die Gleichung  $y' + y = Q(x)$ .

Stellt man das Rad  $D$  so ein, daß seine Ebene nicht mehr parallel der Schiene ist, sondern daß sie mit der Vertikalebene durch die Schiene einen Winkel  $\alpha$  bildet und ist  $\operatorname{tg} \alpha = m$ , so zeichnet der Apparat eine Kurve auf, die ein Integral der Gleichung

$$y - \frac{m + y'}{my' - 1} = Q(x); \quad \frac{y' + m}{1 - my'} + y = Q(x)$$

ist. In beiden Fällen fallen natürlich die  $X$ -Achsen der Integralkurve und der Kurve  $Q(x)$  zusammen, während die  $Y$ -Achsen um die Projektion des Abstandes  $CC'$  auf die  $X$ -Achse gegeneinander verschoben

Fig. 2.



sind. Die unendliche Schar der Integralkurven erhält man dadurch, daß man ja dem Integralwagen unendlich viele Anfangslagen geben kann.

In der zitierten Abhandlung zeigt Pascal weiter, wie man vom Verlauf der Kurve  $Q(x)$  auf Eigentümlichkeiten der Integralkurve mittels ihrer Erzeugungsweise schließen kann; z. B. hat die Integralkurve ein Maximum oder Minimum, wenn korrespondierende Punkte der Kurve  $Q(x)$  und der Integralkurve gleiche Ordinaten haben, falls die Tangenten nicht zusammenfallen; dort, wo die Tangenten beider Kurven zusammenfallen, hat die Integralkurve einen Wendepunkt. Weiter weist er darauf hin, daß man bei Integration einer geschlossenen Kurve eine Zickzackkurve erhält, bei der entsprechende Punkte zwar dieselbe Abszisse haben

aber Ordinaten, die sich um  $e^{-x_0} \int_{x_0}^{x_0} Q(x) e^x dx$  unterscheiden, wo das Integral

um die geschlossene Kurve zu erstrecken ist. Durch Integration von  $Q = \text{const}$  erhält man die Kurve  $y = Me^x$ , durch abermalige Integration dieser Kurve bei passend gewählten Anfangsbedingungen die Kettenlinie. Endlich kann man das Instrument genau wie den Integrappen von Abdank-Abakanowicz zur Lösung beliebiger algebraischer Gleichungen benutzen.

Es möge noch kurz bemerkt werden, wie sich der Apparat leicht noch weiter ausbauen ließe. Würde man zunächst einmal den Abstand zwischen den beiden Rahmenteilen, auf denen die kleinen Wagen laufen, verstellbar machen, so könnte man mit dem Apparat durch wiederholte Integration lineare Differentialgleichungen beliebiger Ordnung mit konstanten Koeffizienten integrieren. Gibt man dem Abstand den Wert  $\frac{1}{a}$ , so erhält man, wenn man den Stift  $C$  auf der Kurve  $Q(x)$  hinführt, ein Integral der Gleichung

$$y' + ay = aQ(x),$$

Integriert man die so erhaltenen Kurven mit dem Abstand  $\frac{1}{b}$ , so erhält man ein Integral der Gleichung

$$z' + bz = by$$

oder

$$z'' + z'(b + a) + abz = abQ(x)$$

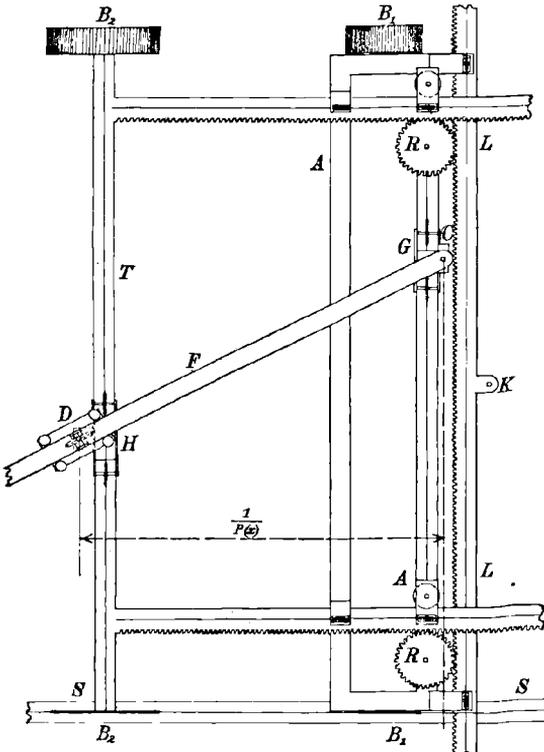
usw. Diese Integrationen kann man auch mit dem oben beschriebenen Apparat ausführen, wenn man vor jeder Integration noch eine Umzeichnung der gegebenen Kurve vornimmt, die den Maßstab der  $x$ -Koordinate entsprechend ändert. Bei einer derartigen Integration kann jede der  $(n - 1)$  Ableitungen für einen bestimmten Wert  $x = a$  einen gegebenen Wert haben. Dieser Anfangsbedingung wird man durch entsprechende Wahl der Anfangslage des Integralwagens bei jeder Integration genügen.

Weiter kann man den Apparat auch so einrichten, daß er imstande ist, lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit variablen Koeffizienten zu integrieren, nur muß derselbe dann, da ja zwei willkürliche Funktionen in der Gleichung sind, mit zwei Führungsstiften  $C$  und  $K$  versehen sein, wie das die schematische Fig. 3 zeigt.<sup>1)</sup> Der Apparat kann

1) Diese zwei Führungsstifte sind natürlich ein wesentlicher Nachteil des Apparates. Sie lassen sich aber bei einem Integrator für die allgemeine lineare Differentialgleichung erster Ordnung kaum vermeiden; vielmehr wird bei einem Integrator für Differentialgleichungen beliebiger Ordnung im allgemeinen für jede Funktion der Gleichung auch ein Führungsstift vorhanden sein müssen. Jeder dieser Stifte kann natürlich kinematisch auf der zugehörigen Kurve geführt werden. Ein derartiger Mechanismus wird aber — abgesehen von Integratoren für spezielle Gleichungen — so kompliziert, daß mir infolge der vielen Fehlerquellen seine

ganz ähnlich gebaut werden, wie der Pascalsche; Differential- und Integralwagen mit ihrer Verbindung sind genau dieselben; nur die beiden Rahmenteile, auf denen die beiden Wagen laufen, sind mittels des

Fig. 3.



zweiten Führungsstiftes  $K$  gegeneinander verschiebbar. Dieser Stift  $K$  an der Schiene  $L$  überträgt nämlich seine Auf- und Abbewegung mittels der Zahnräder  $R$  auf den Rahmenteil  $T$ , auf dem der Integralwagen läuft und nähert oder entfernt die beiden Rahmenteile um ebensoviel als er sich abwärts oder aufwärts bewegt. Führt man  $K$  auf der Kurve  $\frac{1}{P(x)}$ , so kann man es so einrichten, daß der Abstand der Drehachse des Differentialwagens und des Berührungspunktes der scharfrandigen Rolle  $D$  mit dem Zeichenpapier auf die  $X$ -Achse projiziert stets gleich  $\frac{1}{P(x)}$  ist.

Für die Benutzung des Apparates ist folgendes zu beachten.<sup>1)</sup> Wird durch die Elemente  $x, y_1, y_1'$  und  $x, y_2, y_2'$  die Gleichung  $y' + P(x)y = Q(x)$  erfüllt, so ist

$$y_1' - y_2' + P(x)(y_1 - y_2) = 0.$$

Vorteile ziemlich illusorisch zu sein scheinen, zumal man mit den Rechenmethoden, wie sie von Runge (Math. Annalen Bd. 46, S. 147 ff.), Heun (diese Zeitschrift Bd. 45, S. 23 ff.) und Kutta (diese Zeitschrift Bd. 46, S. 435 ff.) und Emden (Gasgugeln, S. 92, Leipzig 1907) entwickelt sind, die Integration mit genügender Genauigkeit ausführen kann. Es wäre daher interessant zu erfahren, wie sich bereits ausgeführte Apparate dieser Art bewähren, ob z. B. die mit dem von Kriloff (Bull. de l'Acad. imp. des sciences de St. Petersburg 1904, S. 17—37) beschriebenen Apparat zur Integration beliebiger gewöhnlicher Differentialgleichungen  $n$ ter Ordnung (ausgeführt sollte der Apparat für Differentialgleichungen vierter Ordnung werden; ein Fehler von  $\frac{1}{2}\%$  wurde erwartet) erhaltenen Resultate befriedigen.

1) Vgl. auch Czuber, Beitrag zur graphischen Integration der linearen Differentialgleichung erster Ordnung. Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 44 (1899), S. 41.

Schneiden sich die Geraden dieser beiden Elemente in  $\xi$  und  $\eta$ , so ist

$$\frac{y_1 - \eta}{x - \xi} = y'_1 \quad \text{und} \quad \frac{y_2 - \eta}{x - \xi} = y'_2$$

oder

$$\frac{y_1 - y_2}{x - \xi} = y'_1 - y'_2 = -P(x)(y_1 - y_2);$$

daraus folgt

$$\xi = x + \frac{1}{P(x)} \quad \eta = \frac{Q(x)}{P(x)}.$$

Da nun zwei Elemente beliebiger Integralkurven mit demselben  $x$  gewählt sind, so sieht man, daß alle Linienelemente der Gleichung  $y' + P(x)y = Q(x)$ , deren Punkte auf einer Parallelen zur  $y$ -Achse liegen, von einem Punkte ausstrahlen. Diese Punkte bilden eine Kurve, die man zunächst einmal zu zeichnen hat und auf der der Stift  $C$  entlang geführt wird. Um den Abstand der Stifte  $C$  und  $K$  verschoben wird mit einer  $X$ -Achse, die nur mit der obigen Kurve parallel zu sein aber nicht zusammen zu fallen braucht, die Kurve  $\frac{1}{P(x)}$  gezeichnet, auf der der Stift  $K$  geführt wird. Werden mit der Fortbewegung des Apparates gleichzeitig  $C$  und  $K$  auf diesen beiden Kurven geführt, so zeichnet die Rolle  $D$  eine der Integralkurven auf. Der gegebenen Anfangsbedingung genügt man durch die entsprechende Anfangsstellung des Integralwagens.

Bemerkt sei noch, daß es sich bei allen derartigen Integrappen, und besonders bei dem obigen Apparat empfiehlt, die Laufräder der einen Seite als scharfkantige Rollen auszubilden, die dann auf einer mit einer Rille versehenen Schiene laufen. Dadurch wird einmal das Einstellen des Apparates wesentlich erleichtert, und andererseits das Schiefhlaufen, das sonst bei den Integrappen sehr leicht eintritt, verhindert.<sup>1)</sup> Die Schiene  $S$  ist in der Skizze, die übrigens nicht die beste Ausführung des Apparates angeben soll, angedeutet. Vielleicht würde der Apparat praktischer so gebaut, daß der Rahmen als ganzes fest wäre und auf den Schenkeln parallel der  $X$ -Achse die Fahrschiene des Integralwagens rollte. Auch aus dem Integrationsmechanismus dieses Apparates kann man ähnliche Schlüsse über den Verlauf der Integralkurve ziehen, wie es Pascal getan hat.

Der ganzen Anordnung nach ist nun aber der Apparat nur imstande die Integralkurve zu zeichnen, wenn mindestens  $\frac{1}{P(x)} > 0$  ist.

1) Vgl. z. B. Arnold, Die Erdbewegung während des ersten Vorläufers eines Erdbebens. Diss. Göttingen 1909, S. 296.

Dem läßt sich aber so abhelfen, daß man dem  $P(x)$  eine Konstante  $a$  hinzufügt, so daß  $P(x) + a$  in dem gewünschten positiven Intervall liegt. Das Integral der Gleichung

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

lautet nämlich:

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x_1} P(x) dx} \left[ C + \int_{x_0}^{x_1} Q(x) e^{\int_{x_0}^x P(x) dx} dx \right],$$

während das von

$$\bar{y}' + (P(x) + a) \bar{y} = Q(x)$$

so aussieht:

$$\bar{y} = e^{-a(x_1 - x_0)} e^{-\int_{x_0}^{x_1} P(x) dx} \left[ C + \int_{x_0}^{x_1} Q(x) e^{a(x - x_0)} e^{\int_{x_0}^x P(x) dx} dx \right].$$

Zeichnet man also statt der Kurve  $\xi = x + \frac{1}{P(x)}$   $\eta = \frac{Q(x)}{P(x)}$  die Kurve

$$\xi = x + \frac{1}{a + P(x)} \quad \eta = \frac{Q(x) e^{-a(x - x_0)}}{a + P(x)},$$

so erhält man als Integralkurve zwar nicht  $y$ , aber

$$\bar{y} = e^{-a(x - x_0)} \cdot y,$$

woraus man  $y$  leicht entnimmt.

Gleichungen höherer Ordnung mit variablen Koeffizienten lassen sich mit dem Apparat ohne Umzeichnung der Kurven nur dann lösen, wenn sie auf lineare Gleichungen erster Ordnung führen, die abgesehen von der ersten einen konstanten Koeffizienten haben. Alle Koeffizienten der Gleichung müssen sich dann in gewisser Weise durch eine Funktion ausdrücken lassen. Z. B. läßt sich nur die Gleichung zweiter Ordnung

$$z'' + (c + P(x)) z' + c \cdot P(x) z = Q(x)$$

mit dem Apparat integrieren, falls man die Kurven nicht nach jeder Integration umzeichnen will.

Göttingen, im April 1910.

**Mitteilung**  
**zu meiner Abhandlung<sup>1)</sup> über:**  
**Funktionentheoretische Methoden**  
**in der Hydrodynamik.**

Von H. BLASIUS in Berlin.

Zu dem zweiten Teil des genannten Aufsatzes, betreffend die funktionentheoretische Behandlung des Überfalls über ein Wehr, teilte mir Herr Prof. Forchheimer mit, daß der in Absatz 2 erwähnte Gedanke der zeichnerischen Lösung der Aufgabe bereits in seinem Encyclopädieartikel<sup>2)</sup> ausgesprochen ist.

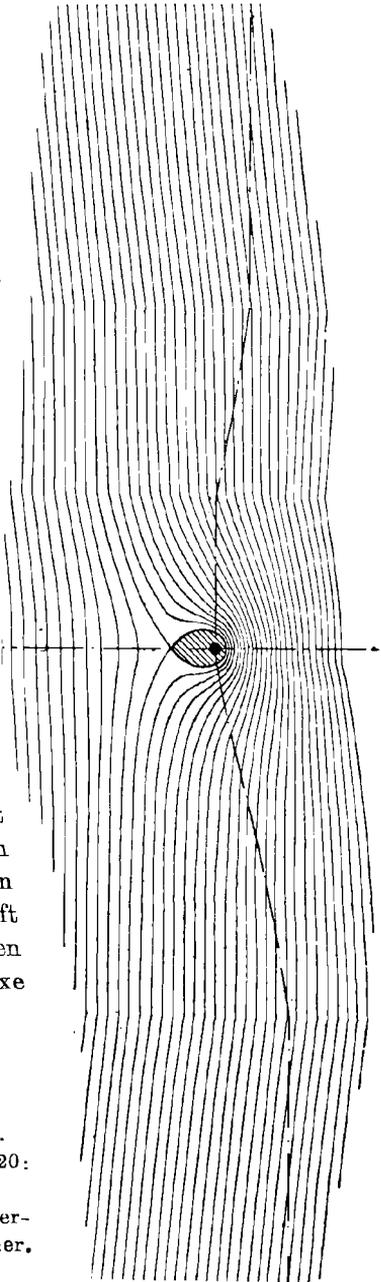
Gleichzeitig möchte ich darauf hinweisen, daß die Überlegungen des ersten Teils, betreffend die Kräfte auf starre Körper in zweidimensionaler stationärer Potentialströmung, Anwendung finden können bei der Bestimmung der Tragkraft von Aeroplanflächen: In dem Werke von Lanchester über Aerodynamik<sup>3)</sup> ist bemerkt, daß die Bewegung um eine Tragfläche als Potentialströmung mit zyklischer Bewegung aufgefaßt werden kann, und daß der zyklische Anteil in engem Zusammenhang mit der Tragkraft steht. In dem Falle der hier abgedruckten Fig. 70 (oder 48)<sup>3)</sup> ist das komplexe Potential der Strömung:

$$\varphi + i\psi = \chi = \alpha z + i\beta \ln z$$

1) Diese Ztschr. Bd. 58, 1910. S. 90 ff.

2) Encyclopädie d. math. Wiss. IV. 3, Art. 20: Forchheimer, Hydraulik. S. 414.

3) F. W. Lanchester, Aerodynamik, übersetzt von C. u. A. Runge. Leipzig bei Teubner. S. 101, § 90, und S. 138 ff., § 121—123.



und daher die Geschwindigkeiten:

$$u - iv = w = \frac{dz}{z} = \alpha + \frac{i\beta}{z}.$$

Die Geschwindigkeit  $\alpha$  der Parallelströmung ist von links nach rechts gerichtet, die zyklische Bewegung, für deren Stärke die Konstante  $\beta$  maßgebend ist, umkreist den Nullpunkt im Sinne des Uhrzeigers.

Nach der in meiner Abhandlung (Teil I Absatz 3) entwickelten Formel gilt für die Kräfte:

$$X - iY = \frac{i\rho}{2} \int w^2 dz,$$

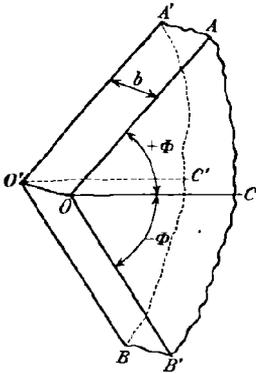
das Integral in positivem Sinne um die Singularität erstreckt. Im vorliegenden Falle liefert dies, nach dem Residuensatz ausgerechnet, die Tragkraft:

$$Y = 2\pi\rho\alpha\beta.$$

## Die Spannungsverteilung in keilförmigen Körpern, auf welche eine Einzelkraft einwirkt, unter Beschränkung auf das ebene Problem.

Von Dr. PAUL FILLUNGER in Wien.

Unter einem „keilförmigen“ Körper ist in der Folge ein solcher zu verstehen, dessen vier ebene Begrenzungsflächen aus zwei parallelen Ebenen und zwei sich schneidenden, welche letztere senkrecht zu ersteren stehen, gebildet sind. Nebensiehende Figur stellt einen solchen Körper dar. Die beiden parallelen Begrenzungsebenen sind mit  $OACB$  und  $O'A'C'B'$  bezeichnet, die sich schneidenden mit  $OO'A'A$  und  $OO'B'B$ . Eine fünfte Begrenzungsfläche sei der Form nach beliebig, aber mit allen ihren Punkten *unendlich ferne von der Schneide  $OO'$  entfernt*. In der Figur ist sie durch den unregelmäßigen Linienzug  $AA'C'B'BCA$  versinnbildlicht, und *an dieser Fläche sei der keilförmige Körper festgehalten*.



Die senkrechte Entfernung der beiden parallelen Begrenzungsebenen werde die „Breite“ des Keiles genannt und mit  $b$  bezeichnet.  $OO'C'C$  sei die Symmetrieebene des Keiles, und der Winkel  $\pm \Phi$ , den jede der beiden in der Schneide zusammentreffenden Begrenzungsebenen  $OO'A'A$  und  $OO'B'B$  mit ihr einschließt, heiße „Keilwinkel“.

Es werde ferner vorausgesetzt, daß der keilförmige Körper aus einem *isotropen* Material bestehe, welches in Folge der einwirkenden äußeren Kräfte nur *unendlich kleine Deformationen* erleide, und daß das System der Spannungsverteilung als ein *ebenes* angesehen werden kann.

Die letzte Voraussetzung erfordert zunächst, daß die Resultierende der äußeren Kräfte in der Mitte zwischen den beiden parallelen Begrenzungsebenen  $OACB$  und  $O'A'C'B'$  und parallel zu diesen ist. *Im vorliegenden Aufsatz ist nun die Aufgabe gestellt, den Spannungszustand des keilförmigen Körpers in bezug auf diese Reduktions-Resultante zu ermitteln.*

Die Natur dieses ebenen Problemes läßt ein Polar-Koordinaten-System zur analytischen Darstellung als ausreichend und vorteilhaft erkennen, wenn der Pol in  $O$  und die Polarachse zusammenfallend mit  $OC$ , der Projektion der Symtrieebene gewählt wird. Der Polarwinkel  $\varphi$  werde als positiv angesehen, wenn er durch eine Drehung von der Polarachse aus entgegen der Uhrzeigerichtung gemessen wird.

Die Bezeichnung der drei Spannungsgrößen, welche das ebene Problem aufweist, sei einer verbreiteten Übung gemäß gewählt wie folgt:

- $\sigma_r$ , eine Normalspannung in der Richtung des Radiusvektor, und zwar positiv, wenn sie eine Druckspannung ist;
- $\sigma_\varphi$ , eine Normalspannung in der Richtung der Tangenten an einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Pol ist, gleichfalls positiv, wenn sie eine Druckspannung vorstellt;
- $\tau$ , die Schubspannung in den beiden vorgenannten Richtungen, und zwar positiv, wenn sie auf einem dem Pole zugewandten Oberflächenelement in der Richtung des wachsenden Winkels  $\varphi$  tätig ist.

Wären die zwei partiellen Differentialquotienten jeder der drei Spannungsgrößen nach den beiden unabhängigen Variablen gegeben, so wäre damit der ganze Spannungszustand sofort bekannt. Dazu sind im allgemeinen 6 Gleichungen nötig.

Zwei von diesen 6 Gleichungen liefert die Bedingung des Gleichgewichtes am Volumelement. Sie lauten

$$(I) \quad \sigma_r + r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \sigma_\varphi + \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = 0$$

$$(II) \quad 2\tau + r \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} = 0.$$

Die Richtungslinie der früher erwähnten Reduktions-Resultante wird im allgemeinen nicht durch die Schneide des Keiles gehen. Die Resultante kann aber vom Standpunkt der Statik eines starren Körpers ersetzt werden durch eine andere, deren Richtung die Schneide des Keiles

trifft, in Verbindung mit einem Kräftepaar. In der Folge wird der Spannungszustand in bezug auf diese beiden Komponenten der allgemeinsten Resultierenden getrennt untersucht werden. Das Überlagerungsgesetz gestattet dann unter gewissen Voraussetzungen, die Spannungsverteilung auch für beliebige äußere Kräfte, welche zusammen ein ebenes System von Spannungen hervorrufen können, anzugeben.

Wir betrachten vorerst ein beliebiges, unendlich kleines Flächenelement im Inneren des keilförmigen Körpers, dessen Ebene parallel zur Schneide  $OO'$  des Keiles ist. Seine Projektion auf die Fläche  $OACB$  sei die unendlich kleine Strecke  $dl$ , während seine Breite gleich der *ganzen Breite*  $b$  des Keiles angenommen ist. Den mittleren Abstand dieses Flächenelements von der Schneide  $OO'$  bezeichnen wir mit  $r$ , und den Winkel, den dieser Leitstrahl mit der Symmetrieebene  $OC$  einschließt, mit  $\varphi$ . Endlich sei noch der Winkel, den die Strecke  $dl$  mit dem Leitstrahl einschließt, mit  $\Theta$  bezeichnet.

Geht die Richtungslinie der äußeren Kraft durch die Schneide des Keiles und schließt ihre positive Richtung einen Winkel  $\psi$  mit der Symmetrieebene des Keiles ein, so ist die Größe der *resultierenden Spannung*  $s$  auf dem Flächenelement  $bdl$  nur eine Funktion von  $P$ , wenn  $P$  die Größe der äußeren Kraft vorstellt, vom Richtungswinkel  $\psi$  derselben, ferner von  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\Theta$  und  $b$ , also

$$s = F(P, \psi, r, \varphi, \Theta, b) \quad -$$

und ihr Differential  $ds$  kann geschrieben werden, *sofern  $s$  stetig ist in bezug auf alle 6 unabhängigen Variablen*:

$$(1) \quad ds = \frac{\partial s}{\partial P} dP + \frac{\partial s}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial s}{\partial r} dr + \frac{\partial s}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial s}{\partial \Theta} d\Theta + \frac{\partial s}{\partial b} db.$$

Ähnliche Gleichungen könnten auch für den Richtungswinkel der resultierenden Spannung angeschrieben werden, *nur mit dem Unterschiede, daß dieser nur eine Funktion der anderen Winkelgrößen  $\psi$ ,  $\varphi$  und  $\Theta$  sein kann, während er von  $P$ ,  $r$  und  $b$  unabhängig sein muß*, wie aus Gründen der mechanischen Ähnlichkeit erhellt.

Ändert man nun die *Maßeinheit der Längengrößen* im Verhältnisse  $1:\alpha$ , so tritt  $r \times \alpha$  und  $b \times \alpha$  an Stelle von  $r$  und  $b$ . Auch  $P$  und  $s$  ändern sich, und zwar wird  $P$  zu  $P \times \alpha$  und  $s$  zu  $\frac{s}{\alpha}$ , wie aus den Dimensionsformeln einer Kraft und einer Spannung hervorgeht. Ist diese Verhältniszahl  $\alpha$  festgesetzt mit  $r \rightarrow \frac{r + dr}{r}$ , so beträgt die Änderung von  $r$  das Differential  $dr$ , und die zugehörigen Änderungen der anderen Größen sind  $db = b \left( \frac{r + dr}{r} \right) - b = b \frac{dr}{r}$ , ebenso  $dP = P \frac{dr}{r}$  und

$ds = s \left( \frac{r}{r+dr} \right) - s \doteq -s \frac{dr}{r}$ . Die Winkelmaße  $\psi$ ,  $\varphi$ , und  $\Theta$  bleiben unverändert, daher  $d\varphi = d\psi = d\Theta = 0$ .

Trägt man diese Differentialausdrücke in (Gl. 1) ein, so entsteht die neue Gleichung

$$(2) \quad -s \frac{dr}{r} = \frac{\partial s}{\partial P} P \frac{dr}{r} + \frac{\partial s}{\partial r} dr + \frac{\partial s}{\partial b} b \frac{dr}{r},$$

welche geeignet ist, die Abhängigkeit einer Spannung  $s$  vom Radius  $r$  allein festzustellen.

Denn  $s$  ist jedenfalls direkt proportional der Kraft  $P$  und indirekt proportional der Breite  $b$  des Keiles, d. h. man kann  $s$  auffassen als homogene Funktion vom Grade  $+1$  in bezug auf  $P$ , und vom Grade  $-1$  in bezug auf  $b$  allein. Nach Eulers Satz über homogene Funktionen kann daher

$$\frac{\partial s}{\partial P} \cdot P = s \quad \text{und} \quad \frac{\partial s}{\partial b} \cdot b = -s$$

geschrieben werden. Führt man diese Werte in Gl. (2) ein, so vereinfacht sie sich zu

$$(3) \quad s + r \frac{\partial s}{\partial r} = 0,$$

woraus zu schließen ist, daß

$$(4) \quad s = \frac{K}{r}$$

sein muß, wobei  $K$  eine Konstante in bezug auf  $r$  bedeutet, die aber als Funktion der zweiten Variablen, nämlich  $\varphi$ , aufgefaßt werden muß.

Geht man also auf einem Leitstrahl von einem beliebigen Flächenelement zu einem anderen, dazu parallelen über, so sind die zugehörigen resultierenden Spannungen (und daher auch deren Komponenten) indirekt proportional ihren Abständen von der Schneide des Keiles, wenn die Richtungslinie der äußeren Kraft durch dieselbe geht.

Die Größen in Gleichung (3) können in ihre Komponenten zerlegt werden, und man erhält so drei neue Differentialgleichungen

$$(III) \quad \sigma_r + r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = 0$$

$$(IV) \quad \sigma_t + r \frac{\partial \sigma_t}{\partial r} = 0$$

$$(V) \quad \tau + r \frac{\partial \tau}{\partial r} = 0.$$

Verbindet man [I] mit [III] und [II] mit [V], so findet man die Gleichungen

$$\sigma_t - \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{und} \quad \tau + \frac{\partial \sigma_t}{\partial \varphi} = 0.$$

Differenziert man diese Gleichungen, so kann man die beiden Differentialgleichungen 2<sup>ter</sup> Ordnung bilden

$$\sigma_t + \frac{d^2 \sigma_t}{d\varphi^2} = 0 \quad \text{und} \quad \tau + \frac{d^2 \tau}{d\varphi^2} = 0.$$

Diese Gleichungen verhalten sich völlig gleich, weshalb es genügt, eine von ihnen zu besprechen. Die Integration der ersten dieser Gleichungen ergibt

$$(5) \quad \sigma_t = C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi.$$

Die Bedingung, daß  $\sigma_t$  auf beiden Begrenzungsflächen  $OO'A'A$  und  $OO'B'B$  d. h. für  $\varphi = \pm \Phi$  Null werden muß, läßt die Integrationskonstanten bestimmen mit

$$C_1 = C_2 = 0.$$

Eine besondere Besprechung erfordert der Fall, welcher eintritt, wenn  $\Phi = \pi$  ist, und das Material des Keiles an den Begrenzungsflächen  $OO'A'A$  und  $OO'B'B$ , die sich dann gegenüber stehen, keine Diskontinuität aufweist, der Keil also in die unbegrenzte, volle Platte übergeht. In diesem speziellen Falle kann man stets denjenigen Leitstrahl als Polarachse (bzw. Symmetrieebene) auffassen, dessen Richtung mit der Richtung der äußeren Kraft zusammenfällt. Wegen der dann bestehenden, vollständigen Symmetrie, muß aber  $\sigma_{t,\varphi = +\frac{\pi}{2}} = \sigma_{t,\varphi = -\frac{\pi}{2}}$  sein, und damit findet man aus Gl. (5)  $C_1 = 0$ .

Für die unbegrenzte Platte ist daher  $\sigma_t = C_2 \cos \varphi$ , und auf gleiche Art hätte man aus obiger Differentialgleichung 2<sup>ter</sup> Ordnung für  $\tau$  auch gefunden  $\tau = C_4 \cos \varphi$ . Beide Spannungen werden aber Null für  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ . Würde man die Platte längs dieser Richtung entzweischneiden, so zerfiel sie in zwei Teile, deren jeder einen Keil vorstellte, dessen Winkel  $\Phi = \frac{\pi}{2}$  wäre, wobei sich die Gesetze der Spannungsverteilung nicht ändern könnten. Für beide Teile gilt aber nach obigem daß auch  $C_2$ , bzw.  $C_4 = 0$  sein muß.

*Somit treten Tangentialspannungen  $\sigma_t$  und Schubspannungen  $\tau$  im ganzen keilförmigen Körper (auf radialen, bzw. zur Schneide konzentrischen Schnittflächen) überhaupt nicht auf, wenn die Richtung der äußeren Kraft durch die Keilschneide geht.*

Für plattenförmige Körper verallgemeinert sich dieser Satz insofern, als bei der unbegrenzten Platte jede senkrechte Verbindungsgerade zwischen den parallelen Begrenzungsflächen als „Schneide“ angesehen werden kann.

Die allein übrig bleibende Spannung  $\sigma_r$  befolgt bei konstant bleibendem Winkel  $\varphi$  gemäß Gl. (4) ein Verteilungsgesetz, ausgedrückt durch

$$(6) \quad \sigma_r = \frac{K}{r},$$

wobei  $K$  eine Funktion von  $\varphi$  allein bedeutet.

Wirkt nur ein Kräftepaar mit dem Moment  $M$  auf den Keil ein, dessen Achse die Schneide des Keiles ist, so kann die resultierende Spannung  $s$  auf dem schon näher definierten Flächenelement  $b dl$  aufgefaßt werden als

$$s = F(M, r, \varphi, \Theta, b),$$

und ihr totales Differential ist, sofern  $s$  stetig ist in bezug auf alle fünf unabhängigen Variablen:

$$(7) \quad ds = \frac{\partial s}{\partial M} dM + \frac{\partial s}{\partial r} dr + \frac{\partial s}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial s}{\partial \Theta} d\Theta + \frac{\partial s}{\partial b} db.$$

Einer Änderung der Maßeinheit der Längengröße im Verhältnisse  $1 : \alpha$  entspricht eine Änderung des Radiusvektor  $r$  zu  $r \times \alpha$ , der Breite  $b$  zu  $b \times \alpha$ , des Momentes  $M$  zu  $M \times \alpha^2$  und der Spannung  $s$  zu  $\frac{s}{\alpha}$ . Die beiden letzten Änderungen folgen wieder aus den Dimensionsformeln eines Momentes und einer Spannung. Ist  $\frac{r+dr}{r}$  der Ausdruck für die Verhältniszahl  $\alpha$ , so betragen die Zuwächse der Veränderlichen  $dr$ ,  $db = b \frac{dr}{r}$ ,  $dM = M \left(\frac{r+dr}{r}\right)^2 = M + M \frac{2dr}{r}$ ,  $ds = -s \frac{dr}{r}$  und  $d\varphi = d\Theta = 0$ .

Mit diesen Differentialausdrücken entsteht aus Gl. (7) die Gleichung

$$(8) \quad -s \frac{dr}{r} = \frac{\partial s}{\partial M} M \frac{2dr}{r} + \frac{\partial s}{\partial r} dr + \frac{\partial s}{\partial b} b \frac{dr}{r}.$$

Da  $s$  auch in diesem Falle direkt proportional dem Momente  $M$  und indirekt proportional der Breite  $b$  sein muß, kann wieder  $\frac{\partial s}{\partial M} \cdot M = s$  und  $\frac{\partial s}{\partial b} \cdot b = -s$  gesetzt werden, wodurch man zu den Gleichungen gelangt

$$(9) \quad 2s + r \frac{\partial s}{\partial r} = 0$$

und

$$(10) \quad s = \frac{L}{r^2}.$$

Gl. (10) spricht die Tatsache aus: Die resultierenden Spannungen auf zwei parallelen Flächenelementen am selben Leitstrahl verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate ihrer mittleren Abstände von der Schneide,

wenn diese Spannungen von einem Kräftepaare herrühren. Zerlegt man Gl. (9) in die Komponenten, so findet man an Stelle von III, IV und V die Gleichungen

$$(III^*) \quad 2\sigma_r + r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = 0$$

$$(IV^*) \quad 2\sigma_t + r \frac{\partial \sigma_t}{\partial r} = 0$$

$$V^*) \quad 2\tau + r \frac{\partial \tau}{\partial r} = 0.$$

Verbindet man I mit III\* und II mit V\*, so gelangt man zu den Gleichungen

$$\sigma_r + \sigma_t - \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\sigma_t}{d\varphi} = 0.$$

Die Integration der 2<sup>ten</sup> Gleichung ergibt  $\sigma_t = C$ , und weil  $\sigma_t$  am Rande ( $\varphi = \pm \Phi$ ) verschwinden muß, ist  $\sigma_t$  im ganzen keilförmigen Körper gleich Null. Damit entsteht aus der ersten Gleichung

$$(11) \quad \sigma_r - \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = 0$$

als eine Beziehung zwischen den allein vorkommenden Spannungen  $\sigma_r$  und  $\tau$  bei diesem Sonderfall. Geht aber der Keil in die schon besprochene unbegrenzte volle Platte über, so muß  $\frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = 0$  sein, somit

$$\sigma_r + \sigma_t = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\sigma_t}{d\varphi} = 0.$$

Würde man wieder einen ebenen Schnitt senkrecht zu den beiden parallelen Begrenzungsebenen der Platte führen, so müßten die Spannungen auf demselben eine Resultierende ergeben. Da eine solche nicht auftreten kann, muß  $\sigma_r = \sigma_t = 0$  sein. Dieser Spezialfall bietet nun kein weiteres Interesse. Er ist der einfachste, den das Keilproblem enthält.

Aus Gl. (10) geht auch hervor (oder aus (III\*) und (V\*))

$$(12) \quad \sigma_r = \frac{L}{r^2}$$

$$(13) \quad \tau = \frac{L'}{r^2},$$

wobei  $L$  und  $L'$  Funktionen von  $\varphi$  allein bedeuten.

Im Zusammenhang der gewonnenen Resultate kann man folgenden Satz aussprechen: *Eine Tangentialspannung  $\sigma_t$  kommt im keilförmigen Körper auch dann nicht vor, wenn nur ein Kräftepaar auf den Keil einwirkt. Die Radialspannung  $\sigma_r$  und Schubspannung  $\tau$  sind durch Gl. (11)*

miteinander verbunden, und jede von ihnen ist zufolge Gl. (12) und (13) verkehrt proportional dem Quadrate des Abstandes von der Schneide, wenn man nur Flächenelemente miteinander vergleicht, die auf demselben Leitstrahl liegen.

Bekanntlich gelten die Gleichungen (I) und (II) nur für vollkommen starre Körper in aller Strenge (nämlich wenn für die mit der Zeit veränderlichen Koordinaten der Massenpunkte bei einer kontinuierlichen Deformation die ursprünglichen Koordinaten gesetzt werden können). Für nichtstarre Körper gelten sie unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Kleinheitsordnung.

Auch die Gleichungen (III), (IV) und (V), bzw. (III\*), (IV\*) und (V\*) setzen voraus, daß der Körper seine Gestalt nicht ändere und gelten daher ebenfalls nur für starre Körper streng, für nichtstarre, sofern die Verschiebungsderivationen als unendlich klein angesehen werden können; nur unter Vernachlässigung von Gliedern höherer als 1<sup>ter</sup> Kleinheitsordnung.

Durch diese Gleichungen wurde die Abhängigkeit der Spannungen von  $r$  allein bestimmt, und durch ihre Verbindung mit (I) und (II) den Grenzbestimmungen an unbelasteten Begrenzungsflächen entsprochen. Nur die Abhängigkeit der Radialspannung  $\sigma_r$  von  $\varphi$  konnte auf diesem Wege nicht aufgefunden werden, da der Differentialquotient  $\frac{\partial \sigma_r}{\partial \varphi}$  in den bisher aufgestellten Gleichungen überhaupt nicht vorkommt.

Die Gleichungen (I) und (II) pflegt man als die „Bedingungen der statischen Möglichkeit“ einer Spannungsverteilung zu bezeichnen. Analog sollte man die Gleichungen (III) bis (V) bzw. (III\*) bis (V\*). Die „Bedingungen der geometrischen Möglichkeit“ nennen, da sie unter der einzigen Voraussetzung, daß die Spannungen stetige Funktionen der Kräfte und der Koordinaten der Massenpunkte sind, aus rein geometrischen Beziehungen abgeleitet wurden.

Wichtig ist ferner die Erkenntnis, daß, unter der genannten Voraussetzung, auch die Spannungsverteilung in einem idealen, vollkommen starren Körper nur zum Teile „unbestimmt“ ist.

Die weitere Untersuchung des Spannungszustandes in keilförmigen Körpern bietet nun keine Schwierigkeit von prinzipieller Bedeutung mehr. Denn soll die gesuchte Spannungsverteilung auch „elastisch möglich“ sein, so muß es eine Funktion  $F$  der Koordinaten  $r$ ,  $\varphi$  (die sogenannte „Airysche Spannungsfunktion“) geben, von solcher Beschaffenheit, daß, wenn Polar-Koordinaten zur Anwendung kommen

$$(14) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) = 0$$

4\*

und an jeder Stelle des Körpers die Spannungen durch die Gleichungen

$$(15) \quad \begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \\ \sigma_t = \frac{\partial^2 F}{c r^2} \\ \tau = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) \end{cases}$$

gegeben sind, da unsere Untersuchung sich auf das ebene Problem beschränkt.

Da in jedem Falle  $\sigma_t$  im ganzen Keile verschwindet, kann Gl. (14) mit Rücksicht auf die zwei ersten Gleichungen (15) für *keilförmige Körper* auch geschrieben werden

$$(16) \quad \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = 0.$$

Geht die Richtungslinie der äußeren Kraft durch die Schneide des Keiles, so ist zufolge Gl. (6)

$$\sigma_r = \frac{K}{r}.$$

Mit Rücksicht auf das, was über die Größe  $K$  dort gesagt wurde, folgt daraus, wenn man  $\sigma_r$  in Gl. (16) einträgt

$$(VI) \quad \frac{d^2 K}{d\varphi^2} + K = 0.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet

$$K = \alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi,$$

daher

$$(17) \quad \sigma_r = \frac{1}{r} (\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi).$$

Zur Bestimmung von  $\alpha$  und  $\beta$  dient die Grenzbedingung auf einer durch die ganze äußere Kraft belasteten Fläche, als welche wir einen kreiszylindrischen Querschnitt mit dem Radius  $r = 1$  ansehen. Schließt die positive Richtung der äußeren Kraft den Winkel  $\psi$  mit der Symmetrieebene des Keiles ein und ist  $b$  die Breite desselben, so ist

$$(18) \quad \left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{2 P \sin \psi}{b(2\Phi - \sin 2\Phi)} \\ \beta &= \frac{2 P \cos \psi}{b(2\Phi + \cos 2\Phi)} \end{aligned} \right\}$$

Da  $\sigma_t$  und  $\tau$  im ganzen Keile bei diesem Spezialfall gleich Null sein müssen, ist, wie aus der 2<sup>ten</sup> und 3<sup>ten</sup> Gl. (15) hervorgeht, die Spannungsfunktion

$$F = r \cdot f,$$

worin  $f$  eine Funktion von  $\varphi$  *allein* bedeutet. Setzt man dies in die erste Gleichung (15) ein, so ergibt sich mit Gl. (17)

$$\frac{d^2 f}{d\varphi^2} + f = \alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert

$$f = \frac{\alpha}{2} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + \frac{\beta}{2} \varphi \sin \varphi + C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi.$$

Demnach lautet die Spannungsfunktion  $F$  selbst mit Unterdrückung der bedeutungslosen Glieder  $C_1 \sin \varphi$  und  $C_2 \cos \varphi$

$$(19) \quad F = r \left[ \frac{\alpha}{2} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + \frac{\beta}{2} \varphi \sin \varphi \right].$$

Wirkt nur ein Kräftepaar, dessen Achse mit der Keilschneide zusammenfällt, so ist nach Gl. (12)

$$\sigma_r = \frac{L}{r^2}.$$

Führt man diesen Ausdruck in (Gl. 16) ein, so erhält man die Differentialgleichung

$$(VI^*) \quad \frac{d^2 L}{d\varphi^2} + 4L = \Theta.$$

Daher weiter

$$L = \gamma \sin 2\varphi + \delta \cos 2\varphi$$

und endlich

$$(20) \quad \sigma_r = \frac{1}{r^2} (\gamma \sin 2\varphi + \delta \cos 2\varphi).$$

Zufolge Gl. (11) ist aber  $\sigma_r - \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = \Theta$  und daher

$$\tau = \frac{1}{r^2} \left( -\frac{\gamma}{2} \cos 2\varphi + \frac{\delta}{2} \sin 2\varphi + C \right).$$

Zur Bestimmung der Integrations-Konstanten  $C$  sei bemerkt, daß  $\tau$  für  $\varphi = \pm \Phi$  Null werden muß, weil auf diesen Flächen keine äußeren Kräfte angreifen. Dadurch entsteht für  $\tau$  der Ausdruck

$$(21) \quad \tau = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\gamma}{2} (\cos 2\Phi - \cos 2\varphi) - \frac{\delta}{2} (\sin 2\Phi - \sin 2\varphi) \right].$$

Zur Ermittlung der Konstanten  $\gamma$  und  $\delta$  berechnen wir zunächst die *Resultierende* der Spannungen  $\sigma_r$  und  $\tau$  auf einem kreiszylindrischen Querschnitt mit dem Radius  $r = 1$ . Bezeichnet man die Komponente der Resultierenden in der Richtung  $\varphi = 0$  mit  $R_x$  und in der Richtung  $\varphi = +\frac{\pi}{2}$  mit  $R_y$ , so ist

$$R_x = \int_{-\Phi}^{+\Phi} (\sigma_r \cos \varphi - \tau \sin \varphi) d\varphi$$

und

$$R_y = \int_{-\Phi}^{+\Phi} (\sigma_r \sin \varphi + \tau \cos \varphi) d\varphi$$

und nach Einsetzung von  $\sigma_r$  und  $\tau$  aus Gl. (20) und (21) [mit  $r = 1$ ] und Auswertung der Integrale:

$$R_x = 2\delta \sin \Phi \cos^2 \Phi$$

$$R_y = -2\delta \sin^2 \Phi \cos \Phi.$$

Da aber bei einem allein angreifenden Kräftepaar  $R_x = R_y = 0$  sein muß, ist auch

$$\delta = 0$$

zu setzen, und daher

$$(22) \quad \begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r^2} \gamma \sin 2\varphi \\ \tau = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\gamma}{2} (\cos 2\Phi - \cos 2\varphi) \right]. \end{cases}$$

Die Auffindung der Konstanten  $\gamma$  geschieht, indem man das Moment der Schubspannungen  $\tau$  in bezug auf die Schneide des Keiles gleichsetzt dem Momente  $M$  des Kräftepaares.

Man erhält, wenn wieder  $b$  die Breite des Keiles vorstellt,

$$(23) \quad \gamma = \frac{2M}{b(2\Phi \cos 2\Phi - \sin 2\Phi)}.$$

Die Spannungsfunktion  $F$  selbst findet man aus der letzten Gl. (15)

$$\tau = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right)$$

in Verbindung mit Gl. (22) durch zwei Integrationen zu

$$F = \frac{\gamma}{4} (2\varphi \cos 2\Phi - \sin 2\varphi) + C_1 r \varphi + C_2.$$

Bestimmt man aus dieser Gleichung nach Vorschrift der ersten Gl. (15) die Spannung  $\sigma_r$ , so findet man

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2} \gamma \sin 2\varphi + \frac{C_1 \varphi}{r}.$$

Daher muß  $C_1 = 0$  gewählt werden. Mit Unterdrückung des bedeutungslosen  $C_2$  lautet die Spannungsfunktion bei diesem Spezialfall schließlich

$$(24) \quad F = \frac{\gamma}{4} (2\varphi \cos 2\Phi - \sin 2\varphi).$$

Bemerkenswert ist, daß nach Gl. (23)  $\gamma$  unendlich groß wird bei endlichen Werten von  $M$ , daher auch  $\sigma_r$  und  $\tau$ , wenn

$$2\Phi = \text{tg } 2\Phi$$

ist. Die kleinste reelle Wurzel dieser Gleichung nach der selbstverständlichen  $\Phi = 0$  ist

$$2\Phi = 4,49341\dots = 257^\circ 27' 13''\dots$$

oder

$$\Phi = 128^\circ 43' 36''.$$

Die Spannungsfunktion für die allgemeinste Lage der resultierenden äußeren Kraft wird gefunden durch Addition der rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdrücke in Gl. (19) und (24).

Aus den Gl. (17), (18), (22) und (23) können die bekannten Formeln für *rechteckige Stabquerschnitte* entwickelt werden, da jeder solche Stab als ein Keil angesehen werden kann, dessen Schneide im Unendlichen liegt und dessen Keilwinkel  $\Phi = 0$  ist. Die genannten Gleichungen gelten auch näherungsweise für ein *materielles Schraubenkonoid* mit beliebig vielen Windungen, unter Ausschluß aller in der Nähe der Achse gelegenen Teile desselben. Dasselbe gilt natürlich auch für einen Körper, welcher durch zwei kongruente Schraubenkonoiden mit gemeinsamer Achse und 2 Ebenen begrenzt wird, die sich in der gemeinsamen Achse schneiden. Die Achse vertritt in beiden Fällen die Schneide des Keiles, während man sich als den „festgehaltenen“ Querschnitt den Schnitt dieser Körper mit einem unendlich großen Kreiszyylinder vorzustellen hat, dessen Achse ebenfalls mit der Achse der Schraubenkonoiden zusammenfällt.

Da Tangentialspannungen  $\sigma_t$  und Schubspannungen  $\tau$  im ganzen Keile nicht auftreten, wenn die Richtungslinie der Reduktions-Resultanten durch die Schneide des Keiles geht, ist Gl. (17) für eine solche Einzelkraft auch streng gültig für *alle geraden Konoide mit geschlossener Leitkurve*, sofern die Einzelkraft senkrecht zur Leitgeraden steht. Nur haben  $\alpha$  und  $\beta$  dann nicht die in Gl. (18) angeführten Werte, sondern müssen für jede neue Leitkurve eigens bestimmt werden.

Sind bei einem *Ringsektor mit rechteckigem Querschnitte* an den beiden kreiszylindrischen Begrenzungsflächen Spannungen vorhanden, welche die Gleichungen (17) und (22) befolgen, die rechteckigen Begrenzungsflächen aber unbelastet, so sind die Spannungen im Inneren des Ringsektors gleichfalls durch Gl. (17) und (22) gegeben. Eine ähnliche Tatsache ergibt sich, wenn man ein gerades Konoid durch zwei Kreiszyylinder mit der Leitgeraden als Achse sich geschnitten denkt. Insofern bilden die hier abgeleiteten Formeln daher eine *Erweiterung des De Saint-Vénantschen Problem*es, als das De Saint-Vénantsche Problem auch ebene Probleme umfaßt.

## Eine Methode zur Auflösung quadratischer und kubischer Gleichungen mit der Rechenmaschine.

Von Dr. LOTHAR VON SCHRUTKA in Wien.

Inhalt.	Seite
1. Einleitung . . . . .	56
2. Grundgedanke. Methode des Quadratwurzelziehens .	57
3. Auflösung der quadratischen Gleichung $x^2 + bx = c$ .	57
4. Verbesserung des Wurzelwertes nach der Newtonschen Näherungsmethode . . . . .	58
5. Bestimmung der zweiten Wurzel . . . . .	58
6. Verwendung negativer Ziffern . . . . .	59
7. Beispiel . . . . .	59
8. Negative Koeffizienten und negative Wurzeln . . . . .	62
9. Die Gleichung $ax^2 + bx = c$ . . . . .	62
10. Die kubische Gleichung. Berechnung einer Wurzel .	62
11. Verfahren beim Übergang von einer Wurzelstelle zur nächsten . . . . .	63
12. Endstellung der Maschine . . . . .	64
13. Bestimmung der beiden anderen Wurzeln . . . . .	65
14. Verwendung einer zweiten Rechenmaschine . . . . .	66
15. Verwendung negativer Ziffern . . . . .	67
16. Negative Koeffizienten und negative Wurzeln; die Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx = d$ . . . . .	68
17. Beispiel . . . . .	68

1. In einer Notiz in der Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 46 (1901) S. 479—483 erwähnt R. Mehmke zwei Methoden der Ausziehung der Quadratwurzel mit Hilfe der Rechenmaschine; die eine beruht darauf, daß die Summe der  $n$  ersten ungeraden Zahlen  $n^2$  ist, die zweite auf der Horner'schen Methode der Auflösung numerischer Gleichungen. Von der zweiten Methode zeigt Mehmke, wie sie auch zur Auflösung allgemeiner quadratischer und (bei Anwendung von zwei Rechenmaschinen) auch allgemeiner kubischer Gleichungen verwendet werden kann.

In den folgenden Zeilen soll auch für die ersterwähnte Methode eine Ausdehnung auf allgemeine quadratische und kubische Gleichungen gegeben werden. Sie steht an Schnelligkeit der Rechnung im allgemeinen hinter der Mehmkeschen Methode zurück, besonders dann, wenn bei dieser eine eigentliche Multiplikationsmaschine zur Verfügung steht, hat dagegen den Vorteil, daß jede Ziffer ohne Versuche sofort fest bestimmt wird.

2. Der Grundgedanke der genannten Methode ist wohl in der Differenzenrechnung zu suchen. Die Funktion  $\varphi(x) = x^2$  hat zur ersten Differenz  $\Delta\varphi(x) = (2x + h)h$ , zur zweiten  $\Delta^2\varphi(x) = 2h^2$ . Um daher das Quadrat einer Zahl, etwa

$$100\alpha + 10\beta + \gamma + \frac{\delta}{10} + \dots$$

zu berechnen, addiere man zunächst

$$10000 + 30000 \dots + \overline{2\alpha - 1} \cdot 10000 = 10000 \cdot \alpha^2,$$

dann hiezu

$$(20\alpha + 1) \cdot 100 + (20\alpha + 3) \cdot 100 + \dots + (20\alpha + 2\beta - 1) \cdot 100$$

und erhält  $(100\alpha + 10\beta)^2$ , dann hiezu

$$(200\alpha + 20\beta + 1) + (200\alpha + 20\beta + 3) + \dots + (200\alpha + 20\beta + 2\gamma - 1)$$

und erhält  $(100\alpha + 10\beta + \gamma)^2$ , dann

$$(2000\alpha + 200\beta + 20\gamma + 1)_{10}^1 + \dots$$

usw.

Umgekehrt erhält man die Quadratwurzel aus einer Zahl, indem man von ihr zuerst die höchste in ihr enthaltene Potenz von 100, es sei dies  $100^n = 10^{2n}$ , dann  $3 \cdot 10^{2n}$ ,  $5 \cdot 10^{2n}$ ,  $\dots$  subtrahiert, so lange dies noch möglich ist; ist  $\overline{2\alpha - 1} \cdot 10^{2n}$  der letzte Subtrahend gewesen, so folgt nun  $(20\alpha + 1) \cdot 10^{2n-1}$ , usw.

Die Ziffern  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  bilden sich in jedem Falle im Quotienten der Rechenmaschine.

3. Beachtet man nun, daß eine Funktion  $\varphi(x) = x^2 + bx$  die erste Differenz  $\Delta\varphi(x) = (2x + b + h)h$  und die zweite Differenz  $\Delta^2\varphi(x) = 2h^2$  hat, so erkennt man, daß die Auflösung der Gleichung

$$x^2 + bx = c$$

genau so wie die Ausziehung der Quadratwurzel erfolgt, nur daß man als ersten Subtrahend nicht  $10^{2n}$ , sondern  $10^{2n} + b$  zu wählen hat.

Der Vorgang ist mithin folgender:

Man ermittelt die größte der Zahlen  $n$ , für die

$$10^{2n} + b \cdot 10^n \quad (n = \dots, 3, 2, 1, 0, -1, -2, \dots)$$

kleiner als  $c$  ist (dann ist  $10^n \leq x < 10^{n+1}$ ), stellt dann im Schaltwerk  $b$  ein und erhöht sogleich die von den Einern von  $b$  aus um  $n$  Stellen weiter links gelegene Stelle um 1. Die Einstellung wird soweit links vorgenommen als möglich, doch muß die Möglichkeit vorhanden sein, die genannte Stelle noch um 19 vermehren zu können,

weil  $A\varphi(x)$  dem Betrag  $20 \cdot 10^n$  nahekommt, wenn  $x$  die Größe  $10^{n+1}$  fast erreicht. Ferner stellt man im Zählwerk  $c$  so weit links wie möglich ein und bringt es in eine solche Lage, daß die  $n$ te Stelle von  $c$  über den Einern von  $b$  steht. Von nun an braucht man sich um den Stellenwert durchaus nicht mehr zu kümmern. Man subtrahiert, erhöht diejenige Stelle des Schaltwerks, wo 1 eingestellt wurde, um 2, subtrahiert wieder, usw. Ist eine Subtraktion nicht mehr möglich, so erhöht man die Stelle des Schaltwerks nur um 1, aber auch die rechts benachbarte um 1, verschiebt das Zählwerk um eine Stelle nach links, subtrahiert usw. Sollte einmal ein Rest so klein sein, daß auch nach der Verlegung die Subtraktion unmöglich bleibt, so ist nicht die rechts benachbarte, sondern die zweite (eventuell dritte usw.) Stelle des Schaltwerks um 1 zu erhöhen und das Zählwerk um zwei (drei usw.) Stellen nach links zu verlegen.

Wenn man sich die Überzeugung verschafft hat, daß bei der hier vorgeschriebenen Anordnung die erste Stelle des Schaltwerks nicht besetzt wird, so kann man statt mit der zweiten Stelle auch mit der ersten beginnen, um mehr Spielraum zu haben.

4. Man übersieht leicht, daß im Schaltwerk zu dem anfangs eingestellten  $b$  genau  $2x_1$  hinzugekommen ist (wo  $x_1$  die gesuchte Wurzel bedeutet), wenn man Sorge trägt, nach der letzten Subtraktion noch die Erhöhung der Stelle des Schaltwerks um 1 vorzunehmen, so daß also die Zahl im Schaltwerk nach Beendigung der Subtraktionen

$$b + 2x_1$$

beträgt. Im Zählwerk hingegen steht die Zahl

$$c - (x_1^2 + bx_1),$$

im Quotienten endlich die gesuchte Wurzel  $x_1$ . Die Schlußstellung stimmt also mit der bei der Mehmkaschen Methode genau überein.

Bezeichnet man  $x^2 + bx - c$  mit  $f(x)$ , so steht also im Zählwerk  $-f(x_1)$ , im Schaltwerk  $b + 2x_1 = f'(x_1)$ ; man kann daher durch Berechnung des Quotienten  $-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ , wobei man nur den Rest im Zählwerk möglichst weit links einzustellen hat, nach der Newtonschen Näherungsmethode einen verbesserten Wurzelwert

$$x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

erhalten.

5. Eine andere Verwendung der Zahl im Schaltwerk ist folgende: Nennt man die zweite Wurzel der Gleichung  $x_2$ , so ist bekanntlich

$$b = -x_1 - x_2$$

daher

$$b + 2x_1 = x_1 - x_2;$$

man kann daher die zweite Wurzel  $x_2$  erhalten, indem man  $x_1$  ins Zählwerk bringt und  $x_1 - x_2$  durch eine Kurbeldrehung davon subtrahiert.

6. Um die Anzahl der Kurbeldrehungen zu vermindern, bedient man sich bekanntlich bei der Anwendung der Rechenmaschine gern der negativen Ziffern  $\bar{1} \bar{2} \bar{3} \bar{4} \bar{5}$  im Multiplikator oder Quotient (vgl. etwa Enz. d. math. Wiss. IF S. 944, E. Selling, Eine neue Rechenmaschine S. 15 und S. 48). Dieses Verfahren kann auch hier angewendet werden; man hat an einer Stelle des Zählwerks, die eine negative Wurzelziffer liefert, die sukzessiven Additionen von 1, 2, 2,  $\dots$  2, 1 durchweg in Subtraktionen zu verwandeln.

7. Als Beispiel möge die Auflösung der Gleichung

$$x^2 + 11 \cdot 102x = 234 \cdot 95$$

behandelt werden. Die Wurzel liegt zwischen 10 und 100, und zwar nahe bei 10, man stellt daher im Schaltwerk von links beginnend 11102 ein und erhöht die erste Ziffer auf 2. Der Gang der Rechnung wird im folgenden veranschaulicht: die eingerahmten Zahlen beziehen sich auf das Schaltwerk, die nicht eingerahmten auf das Zählwerk, die links beigetzten Zahlen auf den Quotienten. Es wurde eine Maschine mit 6 Stellen im Schaltwerk, 7 Stellen im Quotienten und 12 Stellen im Zählwerk vorausgesetzt. Die überzähligen Nullen sind zumeist weggelassen.

0000000	234950000000
	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px;">211020</div>
1	0239300
	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px;">312020</div>
101	208098
	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px;">314020</div>
102	176696
	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px;">316020</div>
103	145094
	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px;">318020</div>
104	113292
	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px;">320020</div>
105	81290

60 Methode zur Auflösung quadr. u. kub. Gleichungen mit der Rechenmaschine.

105	81290
	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">322020</span>
106	49088
	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">324020</span>
107	166860
	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">325120</span>
1071	134348
	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">325320</span>
1072	101816
	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">325520</span>
1073	69264
	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">325720</span>
1074	36692
	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">325920</span>
1075	041000
	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">326030</span>
10751	0839700
	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">326041</span>
107511	513659
	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">326043</span>
1075120	000001876160
	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">326044</span>

Stellt man den Rest 187616 soweit als möglich links ein und dividiert durch 326044, so findet man

$$575431;$$

der genaue Wert der Wurzel ist somit

$$10.7512575431.$$

Stellt man 107512 im Zählwerk ein und subtrahiert 326044, so bekommt man die zweite Wurzel mit 6 Ziffern

$$000000107512$$

$$\text{326044}$$

$$781468$$

also — 21·8532, die folgenden Ziffern sind, wie leicht zu sehen, dieselben wie bei der andern Wurzel, somit ist der genaue Wert

$$- 21\cdot8532\bar{5}75431.$$

Rechnet man mit negativen Ziffern, so ergibt sich folgendes Bild. (Die Zeichen + — am Rahmen der Schaltwerkzahlen beziehen sich auf die Operationen des Addierens und Subtrahierens, also entweder auf die Stellung des Hebels für das Wendegetriebe oder auf den Sinn der Kurbeldrehung).

0000000	234950000000
	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">211020</span>
1	023930
	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">321020</span>
11	9918280
	+ <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">330020</span>
11 $\bar{1}$	9951282
	+ <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">328020</span>
11 $\bar{2}$	99840840
	+ <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">326920</span>
11 $\bar{2}\bar{1}$	99873538
	+ <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">326720</span>
11 $\bar{2}\bar{2}$	99906204
	+ <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">326520</span>
11 $\bar{2}\bar{3}$	99938856
	+ <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">326320</span>
11 $\bar{2}\bar{4}$	99971488
	+ <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">326120</span>
11 $\bar{2}\bar{5}$	0000410000
	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">326030</span>
11 $\bar{2}\bar{5}\bar{1}$	08397

Der weitere Verlauf der Rechnung ist derselbe wie vorhin. Die Wurzel erscheint in der Form

$$11\cdot\bar{2}\bar{5}\bar{1}26\bar{2}\bar{5}431$$

oder

$$11\cdot\bar{2}\bar{5}13\bar{4}\bar{2}\bar{5}431.$$

8. Bisher waren  $b$  und  $c$  stillschweigend als positiv vorausgesetzt. Ebenso war nur die Berechnung einer positiven Wurzel ins Auge gefaßt. Diese Beschränkungen sind jedoch leicht aufzuheben.

Ist der Wert von  $c$  negativ, so stellt man entweder im Zählwerk das arithmetische Komplement ein und trachtet links so viele Neuner als möglich zu erhalten, oder man addiert statt zu subtrahieren und umgekehrt.

Ist  $b$  negativ, so ist die Maschine anfänglich auf Addition statt auf Subtraktion zu stellen. Die sukzessiven Erhöhungen der ersten Differenzen erscheinen jetzt als Verminderungen des Wertes der Zahl im Schaltwerk. Ist die Zahl im Schaltwerk durch diese Verminderungen aufgezehrt, so tritt ein Zeichenwechsel ein (dabei wird der Ziffernkomplex rechts von der zuletzt geänderten Stelle durch sein Komplement ersetzt), gleichzeitig muß daher die Maschine auf Subtraktion gestellt und die im Quotienten entstandene positive Ziffer in die gleich hohe negative verwandelt werden.

Sucht man endlich eine negative Wurzel, so zeigt die Substitution  $x = -x'$ , durch die die Gleichung in

$$x'^2 - bx' = c$$

übergeht, daß die hierdurch bedingten Änderungen dieselben sind, wie die im letzten Absatz angeführten.

9. Schließlich würde es keiner Schwierigkeit unterliegen, die Methode auch noch auf die allgemeinere Gleichung

$$ax^2 + bx = c$$

auszudehnen; statt der sukzessiven Änderungen um  $1, 2, 2, \dots, 2, 1$  würden Änderungen um  $a, 2a, 2a, \dots, 2a, a$  eintreten haben; indessen wäre wohl, ausgenommen etwa bei den allereinfachsten Werten von  $a$ , die vorherige Transformation auf die einfachere Form von  $x^2 + bx = c$  unbedingt angezeigt.

10. Wir wenden uns nun zur kubischen Gleichung, die wir in der Form

$$x^3 + bx^2 + cx = d$$

voraussetzen. Nennt man die linke Seite  $\varphi(x)$ , so hat man

$$\Delta\varphi(x) = 3hx^2 + (2bh + 3h^2)x + ch + bh^2 + h^3$$

$$\Delta^2\varphi(x) = 6h^2x + 2bh^2 + 6h^3$$

$$\Delta^3\varphi(x) = 6h^3.$$

Um daher die für quadratische Gleichungen gegebene Rechenvorschrift dem Fall der kubischen Gleichung anzupassen, muß man beachten, daß

$\mathcal{A}^2\varphi(x)$  jetzt von  $x$  abhängig ist, also die Zahl im Schaltwerk um wechselnde Beträge zu verändern ist.

Der Vorgang ist daher der folgende: Man ermittelt die dekadischen Einheiten, zwischen denen die Wurzel liegt:

$$10^n \leq x < 10^{n+1},$$

stellt im Schaltwerk in Abständen von je  $n$  Stellen von links nach rechts  $1, b, c$ , ferner im Zählwerk  $d$  ein und bringt das Zählwerk in eine solche Lage, daß die Einer von  $d$  wieder um  $n$  Stellen weiter rechts sind als die von  $c$ . Alle Einstellungen geschehen soweit links als möglich, doch muß für die Stelle, wo  $1$  eingestellt wurde, die Möglichkeit einer Vermehrung um  $299$  offen bleiben (weil  $\mathcal{A}^2\varphi(x)$  dem Betrag  $300 \cdot 10^{2n}$  nahekommen kann) und ebenso für die, wo  $b$  eingestellt wurde, die Möglichkeit einer Vermehrung um  $19b$ . Eine approximative Kenntnis der Wurzel kann auch hier in manchen Fällen eine Milderung dieser Vorschrift begründen. Die so eingestellte Zahl wird von  $d$  subtrahiert, dann vermehrt man sie an der Stelle, wo  $1$  eingestellt war, um  $6$ , an der Stelle, wo  $b$  eingestellt war, um  $2b$  und subtrahiert wieder. Vorteilhafter aber ist es, diese Vergrößerung sofort in eine einzige Zahl zusammenzufassen ( $6 \cdot 10^n + 2b$  an der zuletzt genannten Stelle.) Die folgenden Vermehrungen erhält man, indem man  $6$  durch  $12, 18, 24$  usw. ersetzt. Alle die so entstandenen Zahlen im Schaltwerk werden sukzessive subtrahiert, bis dies nicht mehr möglich ist; im Quotienten ist dann die erste Stelle der Wurzel erschienen.

11. Um das Verfahren beim Übergang von einer Quotientenstelle zu der folgenden zu ermitteln, machen wir folgende Überlegung<sup>1)</sup>: Es sei  $\alpha$  der bereits gefundene Teil der Wurzel, der also, wenn wir die nächste Stelle als Einheit nehmen, mit  $10\alpha$  zu bezeichnen ist. Dann waren die letzten Zahlen im Zählwerk:

$$\begin{aligned} d &- 10^3(\alpha - 2)^3 - 10^2b(\alpha - 2)^2 - 10c(\alpha - 2) \\ d &- 10^3(\alpha - 1)^3 - 10^2b(\alpha - 1)^2 - 10c(\alpha - 1) \\ d &- 10^3\alpha^3 \quad - 10^2b\alpha^2 \quad - 10c\alpha, \end{aligned}$$

ihnen entsprechen als erste Differenzen (Zahlen im Schaltwerk):

$$\begin{aligned} 3000\alpha^2 - 9000\alpha + 7000 + 200b\alpha - 300b + 10c \\ 3000\alpha^2 - 3000\alpha + 1000 + 200b\alpha - 100b + 10c, \end{aligned}$$

als zweite Differenz (Vermehrung der Zahl im Schaltwerk):

$$6000\alpha - 6000 + 200b.$$

1) Die hier behandelte Aufgabe gehört eigentlich der Interpolationsrechnung an, vgl. etwa Enz. der math. Wiss. ID 3 Nr. 9, S. 813.

Die nächsten Zahlen im Zählwerk sollen

$$\begin{aligned}d - (10\alpha + 1)^3 - b(10\alpha + 1)^2 - c(10\alpha + 1) \\ d - (10\alpha + 2)^3 - b(10\alpha + 2)^2 - c(10\alpha + 2)\end{aligned}$$

werden, daher müssen zunächst

$$\begin{aligned}300\alpha^2 + 30\alpha + 1 + 20b\alpha + b + c \\ 300\alpha^2 + 90\alpha + 7 + 20b\alpha + 3b + c\end{aligned}$$

ins Schaltwerk kommen. Man wird daher das Schaltwerk um eine Stelle nach rechts (oder das Zählwerk um eine Stelle nach links) verlegen und die so entstandene Zahl im Zählwerk

$$300\alpha^2 - 300\alpha + 100 + 20b\alpha - 10b + c$$

durch Vermehrung um

$$330\alpha - 99 + 11b$$

auf die gewünschte Höhe bringen. Der Übergang zur nächsten Zahl erfordert dann eine Erhöhung um

$$60\alpha + 6 + 2b,$$

der darauffolgende um

$$60\alpha + 12 + 2b,$$

usw.

Beachtet man, daß die auf die letzte wirklich ausgeführte Erhöhung der Schaltwerkszahl folgende Erhöhung

$$6000\alpha + 200b - 10(600\alpha + 20b)$$

beträge und daß

$$330\alpha - 99 + 11b = \left[\frac{1}{2}(600\alpha + 20b) - 100\right] + \frac{1}{2}(60\alpha + 2b) + 1$$

ist, so erhält man folgende Regel. Beim Übergang von einer Stelle der Wurzel zur nächsten verlege man das Zählwerk um eine Stelle nach links, bilde noch die nächste Erhöhung der Schaltwerkszahl, füge aber nur die um 1 verminderte Hälfte dieser Erhöhung, dafür aber an der nächsten Stelle nach rechts ebenfalls die (unverminderte) Hälfte und an der zweitnächsten Stelle 1 hinzu; die folgende Erhöhung erhält man aus der vorhin gebildeten, aber nicht als solche verwendeten Erhöhung durch Vermehrung um 6 an der nächsten Stelle rechts, usw.

Sollte die so gebildete Zahl im Schaltwerk größer sein als die im Zählwerk, so ist dieses abermals nach links zu verlegen und die angegebene Vermehrung an Stellen im gegenseitigen Abstände 2 vorzunehmen, usw.; in der Wurzel erscheint dann eine Null.

12. Das in Nr. 10 und 11 beschriebene Verfahren wird solange fortgesetzt, bis alle Stellen des Schaltwerkes verwendet sind. Da bei

jeder Stelle der Wurzel um zwei Stellen im Schaltwerk weitergegangen wird, so erhält man auf diese Weise halb so viele Wurzelstellen, als die Stellenzahl der Maschine beträgt.

Die Wurzel  $x_1$  bildet sich im Quotienten der Rechenmaschine. Bildet man nach Abschluß des Verfahrens noch die nächstfolgende Erhöhung und fügt die um 1 verminderte Hälfte dieser Erhöhung im Schaltwerk hinzu, so beträgt diese Erhöhung  $6x_1 + 2b$ , da zu dem Ausgangswert  $2b$  noch für jede dekadische Einheit der Wurzel eine Hinzufügung von 6 an der entsprechenden Stelle stattgefunden hat, die Zahl im Schaltwerk aber ist  $3x_1^2 + 2bx_1 + c$ , wie man am einfachsten erkennt, wenn man die Einflüsse der beiden Summanden in den sukzessiven Erhöhungen trennt. Zu dem ursprünglich eingestellten  $c$  hat der unveränderliche Summand  $2b$  den Betrag  $2bx_1$ , der andere, veränderliche, aber den Betrag

$$\begin{aligned} & (1 + 6 + 12 + \dots + \overline{6\alpha - 1} + \overline{3\alpha - 1})10^{2n} + \\ & + (\overline{30\alpha + 1} + \overline{60\alpha + 6} + \overline{60\alpha + 12} + \dots + \overline{60\alpha + 6\beta - 1} + \overline{30\alpha + 3\beta - 1})10^{2n-1} \\ & + \dots = \left[6\frac{\alpha^2 - \alpha}{2} + 3\alpha\right]10^{2n} + \left[60\alpha\beta + 6\frac{\beta^2 - \beta}{2} + 3\beta\right]10^{2n-1} + \dots \\ & = 3\alpha^2 10^{2n} + (60\alpha\beta + 3\beta^2)10^{2n-1} + \dots = 3x_1^2 \end{aligned}$$

geliefert, wenn

$$x_1 = \alpha \cdot 10^n + \beta \cdot 10^{n-1} + \dots$$

gesetzt wird.

Setzen wir

$$x^3 + bx^2 + cx - d = f(x),$$

so ist

$$3x_1^2 + 2bx_1 + c = f'(x_1),$$

$$6x_1 + 2b = f''(x_1).$$

13. Die so erhaltenen Werte lassen sich auf verschiedene Art verwenden. Zunächst kann man nach der Newtonschen Näherungsmethode durch Division des gebliebenen Restes durch  $f'(x_1)$  einige weitere Stellen der Wurzel finden. Eine Verlegung des Restes wird hier zumeist unnötig sein, da der Quotient ohnedies erst zur Hälfte ausgenützt ist.

Ferner kann man mit leichter Mühe die Gleichung

$$\frac{1}{z}f(x_1 + z) = z^2 + \frac{1}{2}f''(x_1) \cdot z + f'(x_1) = 0$$

oder

$$z^2 + \frac{1}{2}f''(x_1)z = -f'(x_1)$$

bilden, ja die rechte Seite  $-f'(x_1)$  durch eine Kurbeldrehung sofort ins Zählwerk bringen. Die Wurzeln dieser Gleichung sind offenbar

$$x_2 - x_1 \text{ und } x_3 - x_1,$$

wenn  $x_2, x_3$  die beiden übrigen Wurzeln der gegebenen kubischen Gleichung sind.

Man kann aber auch leicht die Gleichung erhalten, die  $x_2$  und  $x_3$  selbst zu Wurzeln hat. Sie lautet bekanntlich

$$x^2 + (b + x_1)x + (c + bx_1 + x_1^2) = 0.$$

Ihre Koeffizienten bekommt man auf folgende Weise. Man vermindert  $\frac{1}{2}f''(x)$  einmal um  $x_1$ , erhält  $b + 2x_1$ , dann noch einmal um  $x_1$ ; dies gibt

$$b + x_1.$$

Dann multipliziert man das vorhin gefundene Zwischenresultat  $b + 2x_1$  mit  $x_1$  und zieht es von  $f'(x_1)$  ab, dies gibt

$$c + bx_1 + x_1^2.$$

Diese Subtraktion kann auf der Maschine ausgeführt werden, indem man (wie vorhin)  $-f'(x)$  ins Zählwerk bringt,  $b + 2x_1$  im Schaltwerk einstellt und  $(b + 2x_1)x_1$  addiert. Ändert man schließlich noch die Zahl im Schaltwerk in  $b + x_1$  um, so kann man mit der Auflösung der quadratischen Gleichung sofort beginnen.

Für den Fall, daß die Wurzel nach dem Newtonschen Verfahren auf eine größere Anzahl von Stellen berechnet wurde, sind noch Korrekturen anzubringen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f''(x_1 + \varepsilon) &= \frac{1}{2}f''(x_1) + 3\varepsilon, & f'(x_1 + \varepsilon) &= f'(x_1) + \varepsilon[\frac{1}{2}f''(x_1) + \frac{1}{2}f''(x_1) + 3\varepsilon] \\ b + (x_1 + \varepsilon) &= \frac{1}{2}f''(x_1) + \varepsilon, & c + b(x_1 + \varepsilon) + (x_1 + \varepsilon)^2 &= \\ &= f'(x_1) - (b + 2x_1)\varepsilon + (b + 2x_1 + \varepsilon)\varepsilon. \end{aligned}$$

All dies kann ohneweiters auf der Maschine gerechnet werden (vgl. das Beispiel in Nr. 17).

**14.** Hat man eine zweite Maschine zur Verfügung (die übrigens im allgemeinen nicht so viel Stellen zu haben braucht, wie die erste), so kann man sie zur Berechnung der im Schaltwerk der ersten Maschine sukzessive einzustellenden Zahlen verwenden. Am bequemsten ist folgende Methode. Ist etwa wieder

$$x_1 = \alpha \cdot 10^n + \beta \cdot 10^{n-1} + \dots,$$

so stellt man im Zählwerk der zweiten Maschine  $c$ , im Schaltwerk  $b$  ein, vermehrt um 1, addiert, vermehrt um 2, addiert zweimal, vermehrt um 3, addiert zweimal, vermehrt wieder um 3, addiert zweimal, usw., bis man  $(2\alpha - 1)$ -mal addiert hat, dann vermehrt man noch um 2 und addiert einmal. Jetzt verlegt man das Zählwerk um eine Stelle nach links, vermehrt die Zahl im Schaltwerk noch um 1 und zugleich an der nächsten Stelle rechts ebenfalls um 1, addiert, vermehrt um 2, addiert zweimal, vermehrt um 3, addiert zweimal usw.

Die Anzahl der Kurbeldrehungen ist freilich die doppelte Quersumme der Wurzel, aber die Zahl im Schaltwerk braucht immer nur um kleine Beträge geändert zu werden. Erhöht man nach der letzten Addition die Zahl im Schaltwerk um 1, so beträgt sie gerade  $3x_1 + b$ , im Quotienten würde sich, wenn darin (was leider selten der Fall ist) eine Zehnerübertragung stattfände,  $2x_1$  bilden. Im Zählwerk endlich hat sich  $3x_1^2 + 2bx_1 + c$  gebildet.

Man erkennt, daß man hier sofort die Auflösung der quadratischen Gleichung

$$z^2 + \frac{1}{2}f''(x_1)z + f'(x_1) = 0$$

anschließen kann. Ebenso kann man die Nr. 13 angegebene Umrechnung sofort ausführen.

Indessen läßt sich die hier auseinandergesetzte Rechenmethode auch anwenden, wenn man (was wohl die Regel sein wird) nur eine Rechenmaschine verwenden kann. Bei einiger Gewandtheit im Kopfrechnen wird man, besonders dann, wenn  $b$  nicht allzuviele Ziffern hat, alle notwendigen Operationen ausführen können, ohne eine einzige Ziffer zu schreiben. Insbesondere der Fall einer reduzierten kubischen Gleichung bietet diesen Vorteil.

Die Veränderung der Zahl im Schaltwerk geschieht am bequemsten und sichersten von links nach rechts.

Es braucht wohl kaum darauf hingewiesen zu werden, daß das hier auseinandergesetzte Verfahren die systematische Berechnung des Wertes einer gewissen ganzen Funktion dritten Grades für ein sich im Laufe der Rechnung erst bildendes Argument darstellt; es ist aber ebensosehr geeignet, diese Berechnung für einen a priori gegebenen Wert des Argumentes zu leisten; in diesem (praktisch allerdings minder wichtigen) Falle kann man die Aufgaben, die vorhin einer zweiten Maschine zugewiesen wurden, auch vor den übrigen Operationen auf derselben Maschine wie diese selbst ausführen, muß aber die hierbei erhaltenen Hilfsresultate zu Papier bringen.

15. Will man mit negativen Ziffern operieren, so zeigt der Anblick der Formeln für  $\mathcal{A}^2 f(x)$  und  $\mathcal{A}^3 f(x)$  (Nr. 10), daß man, abgesehen von der Umstellung der Maschine auf Addition, die Vermehrungen der Zahlen im Schaltwerk in Verminderungen zu verwandeln hat und die Beträge dieser Verminderungen bei jedem Schritte nicht um 6 größer, sondern um 6 kleiner werden müssen. Was die Übergangsstellen betrifft, so liefert die sehr einfache Umformung der in Nr. 11 gegebenen Formeln das Resultat, daß von den beiden Veränderungen der Schaltwerkszahl um die halbe nächste Erhöhung (oder Erniedrigung) sich dem Sinn nach die erste nach der vorhergehenden, die zweite

nach der folgenden Ziffer (oder, was auf dasselbe hinauskommt, normalen Veränderung) richtet, während die Verminderung und Vermehrung um 1 in jedem Falle in der gleichen Weise erfolgt.

16. Wenn einer oder mehrere der Koeffizienten  $b, c, d$  negativ sind, so bereitet dies nach dem in Nr. 8 Gesagten keine Schwierigkeiten. Die Aufsuchung negativer Wurzeln kann auf die positiver zurückgeführt werden, indem man  $b$  und  $d$  mit dem entgegengesetzten Vorzeichen nimmt.

Die allgemeinere Gleichung

$$ax^3 + bx^2 + cx = d$$

ließe sich nach derselben Methode behandeln, indem man die Vermehrungen um 1, 6, 12, ... durch solche um  $a, 6a, 12a, \dots$  ersetzt.

17. Als Beispiel möge die Gleichung

$$x^3 - 7.8x^2 - 64.196x = 7.02556$$

behandelt werden. Sie hat drei reelle Wurzeln, eine zwischen 10 und 100, eine zwischen  $-0.1$  und  $-1$  und eine zwischen  $-1$  und  $-10$ . Um die positive Wurzel zu bestimmen, ist im Zählwerk  $64196 + 780 - 1000 = 42196$  einzustellen und anfangs zu addieren. Die erste Vermehrung ist  $-1560 + 6000 = 4440$ ; da sie zu groß ist, so ist zur nächsten Stelle überzugehen; die Vermehrung ist  $1220 + 222 + 1$ . Sie bringt einen Zeichenwechsel der Zahl im Schaltwerk hervor. Es ist daher auch der Quotient hier umzustellen. Die folgende Ziffer wurde zu groß genommen, die dritte ist daher negativ.

Die Bezeichnungen sind dieselben wie in Nr. 7. Die im Kopf zu addierenden zweiten Differenzen sind neben die Schaltwerkszahlen gesetzt.

	0000000		000702556000
			+ <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">042196</span>
1			042898556
	145200		- <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">103004</span>
11			32598156
	504		- <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">153404</span>
12			17257756
	564		- <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">209804</span>
13			996277356
	27,09		+ <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">236894</span>
13 $\bar{1}$			998646296
	-618		+ <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">230714</span>
13 $\bar{2}$			000953436000

Die nächste Verminderung wäre 6120; wir vermindern also die Schaltwerkszahl um  $3060 + 10$  auf 227644 und dividieren in derselben Stellung weiter:

13 $\bar{2}$	000953436000
	- <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">227644</span>
13 $\bar{2}1$	725792
13 $\bar{2}2$	498148
13 $\bar{2}3$	270504
13 $\bar{2}4$	0428600
	- <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">227644</span>
13 $\bar{2}41$	200956
13 $\bar{2}42$	99999733120
	+ <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">227644</span>
13 $\bar{2}42\bar{1}$	99999960764
13 $\bar{2}42\bar{2}$	000001884080

Die Wurzel ist somit

$$13\bar{2}42\bar{1} = 12\cdot8419 = x_1.$$

Man hat ferner

$$f''(12\cdot8) = 227\cdot644; \quad \frac{1}{2}f'''(12\cdot8) = 30\cdot6.$$

Man lösche nun im Zählwerk und im Quotienten aus, addiere 227644, das noch im Schaltwerk steht, und bringe 306000 ins Schaltwerk. Jetzt subtrahiere man  $306 \cdot 419$  an der 7. Stelle des Zählwerks, dies ergibt 228926140000, darauf vermehre man  $30\cdot6$  um  $419 \cdot 3 = 1257$  auf 307257 und subtrahiere diese Zahl 419mal an der 10. Stelle des Zählwerks; man erhält 230213546830 und die Maschine ist zur Auflösung der Gleichung

$$z^2 + 30\cdot7257z = -230\cdot21354683,$$

deren Wurzeln  $x_2 - x_1$  und  $x_3 - x_1$  sind, vorbereitet. Man findet

$$x_2 - x_1 = -12\cdot9538, \quad x_2 = -0\cdot1119;$$

$$x_3 - x_1 = -17\cdot7719, \quad x_3 = -4\cdot9300.$$

Um die Gleichung für  $x_2$  und  $x_3$  selbst zu erhalten, bilde man der Reihe nach

$$\frac{1}{2}f''(12\cdot8) - 12\cdot8 = 17\cdot8$$

$$\frac{1}{2}f''(12\cdot8) - 12\cdot8 + 0\cdot0419 = 17\cdot8419$$

$$\frac{1}{2}f''(12\cdot8) - 12\cdot8 + 0\cdot0419 - 12\cdot8 = 5\cdot0419$$

im Schaltwerk und subtrahiere von der Zahl 227·644 im Zählwerk 17·8·12·8; dies gibt 999·804 (= -0·196); dann addiere man 17·8419·0·0419 und erhält

$$0·55157561.$$

Hiermit ist die Auflösung der Gleichung

$$x^2 + 5·0419x = -0·55157561$$

vorbereitet; man findet:

$$x_2 = -0·1118,$$

$$x_3 = -4·9300.$$

Die direkte Rechnung ergäbe genauere Werte:  $x_2 = -0·110953$ ,  $x_3 = 4·93096$ .

Es möge schließlich noch darauf hingewiesen werden, daß, wie dies im Gebiet des numerischen Rechnens wohl die Regel ist, die Anwendung der Methode viel einfacher ist als ihre theoretische Auseinandersetzung; der geringe Umfang des hier vorgeführten Beispiels, trotz der Ausführlichkeit des begleitenden Textes, läßt dies bereits deutlich erkennen.

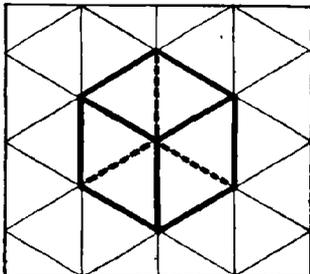
## Über trimetrische Liniennetze.

Von Dr. ARTHUR SCHULTZE,

a. o. Professor an der Universität in New-York.

Zum Zeichnen in sogenannter isometrischer Projektion<sup>1)</sup> bedient man sich häufig eines Liniennetzes, das aus drei Scharen gleich-abstehender Parallelen besteht, die sich unter Winkeln von 60° schneiden. Eine große Anzahl isometrischer Projektionen gestalten sich dann sehr einfach<sup>2)</sup>, nur haben die Bilder naturgemäß die Nachteile, die dem isometrischen Zeichnen im allgemeinen anhaften, wie das Auftreten störender Symmetrien, das Decken gewisser Punkte und Kanten usw.

Fig. 1.



1) Konstruiert man die Orthogonalprojektion eines Würfels, so werden die Projektionen der von einer Ecke auslaufenden 3 Kanten entweder sämtlich gleich, oder nur zwei werden gleich, oder alle drei werden ungleich. Man bezeichnet die so entstehenden Projektionen bezüglich als isometrische, dimetrische und trimetrische.

2) Dies zeigt z. B. die nebenstehende isometrische Projektion eines Würfels.

Liniensysteme, die trimetrische Projektionen ermöglichen, und die diese Nachteile nicht besitzen, kann man auf folgende Weise erhalten.

Denkt man sich den Raum vollständig mit aneinanderstoßenden Würfeln gefüllt, so würden die Projektionen aller Kanten auf eine Ebene offenbar ein solches System von Linien darstellen. Es ist aber einleuchtend, daß ein unendlicher Ausblick in dieses Würfelsystem auf ein endliches Stück einer Ebene projiziert, im allgemeinen unendlich viele Linien erzeugen würde, und nur die speziellen Fälle in denen sich die Kanten, regelmäßig wiederkehrend, mit anderen Kanten decken, können zur Konstruktion verwendet werden.

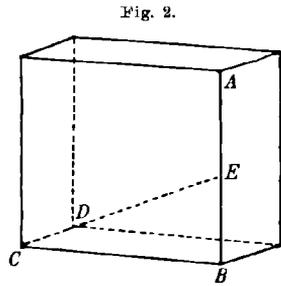


Fig. 2.

Um die Bedingungen, unter denen dies eintritt, zu untersuchen, konstruiere man  $ABCD$ , die orthogonale Projektion eines Würfels, und verlängere die Kante  $CD$  bis zum Durchschnitt  $E$  mit  $AB$ . Sollen die vertikalen Kanten sich in zyklischer Wiederkehr decken, so muß  $\frac{CE}{CD}$  eine rationale Zahl sein, und in ähnlicher Weise folgt aus der Deckung der horizontalen Kanten, daß  $\frac{AB}{EB}$  eine rationale Zahl sein muß.

Sind nun  $m$  und  $n$  zwei rationale Zahlen, wo indessen aus praktischen Rücksichten nur kleine ganze Zahlen in Betracht kommen, so haben wir die Bedingungen:

$$AB = n \cdot EB$$

$$CE = m \cdot CD$$

Betrachtet man alle Linien der Figur als Vektoren von der Form  $a + b\sqrt{-1}$  und setzt  $AB = x$ ,  $BC = y$ ,  $CD = z$ , so folgt, daß

$$EB + BC + CE = 0$$

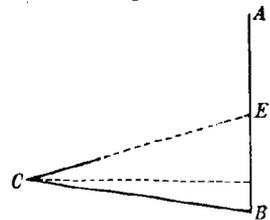
Fig. 3.

oder

$$(1) \quad \frac{x}{n} + y + mz = 0.$$

Nach einem bekannten Satze von Gauß stehen die orthogonalen Projektionen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  der Kanten irgend eines Würfels in der Beziehung:

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$



Setzt man  $x = 1$ , und löst die Gleichungen (1) und (2), so ergibt sich:

$$y = -\frac{1}{n(1+m^2)} \pm \frac{mi}{n(1+m^2)} \sqrt{m^2 n^2 + n^2 + 1}.$$

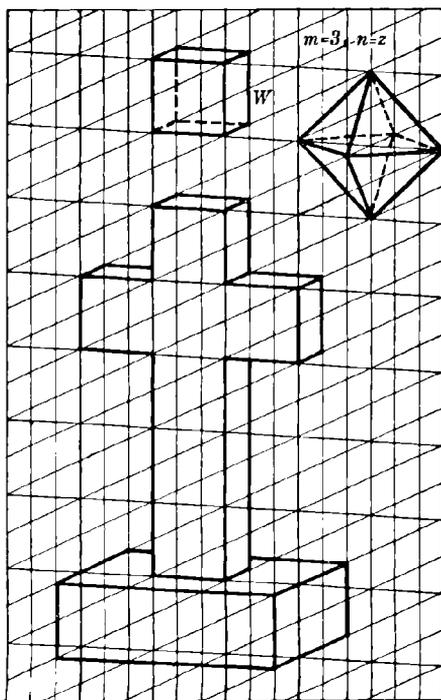
Ist  $CH$  das von  $C$  auf  $AB$  gefällte Lot, so folgt:

$$BH = \frac{1}{n(1+m^2)}$$

$$HC = \frac{m\sqrt{m^2n^2+n^2+1}}{n(1+m^2)}.$$

Wählt man daher für  $AB$  eine beliebige Einheit, so ist die Lage von  $C$  bestimmt, und da  $m$  und  $n$  bestimmte Zahlen sind, so ergibt sich leicht  $CD$ , die Projektion der dritten Kante, und folglich das vollständige trimetrische Liniennetz.

Fig. 4.



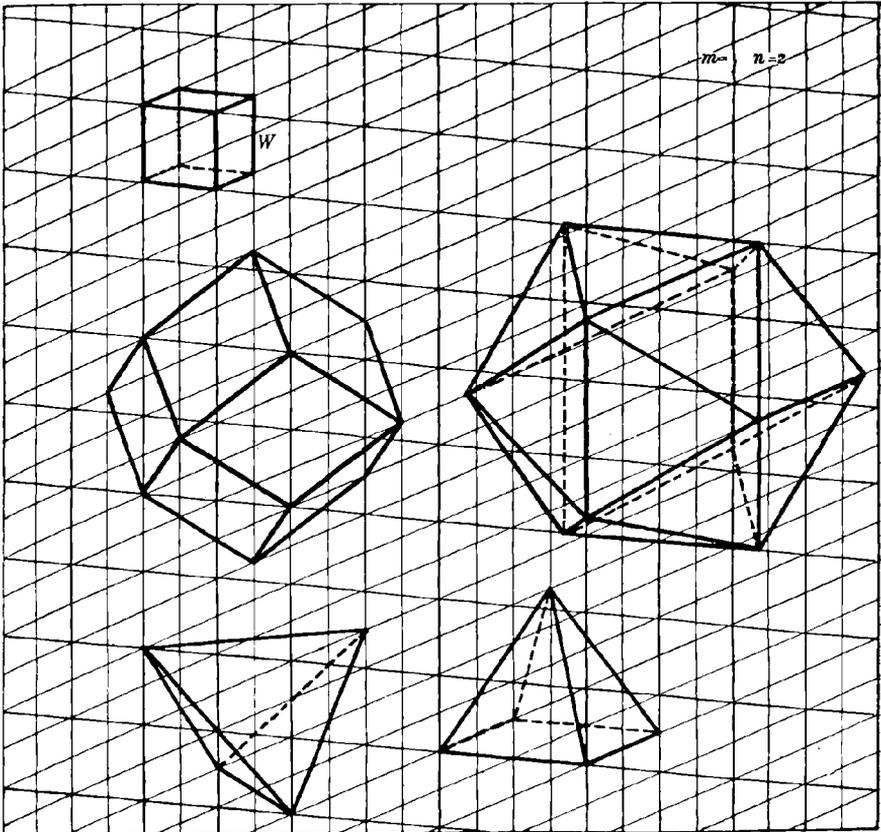
Untersucht man die verschiedenen Fälle, die durch Substituierung bestimmter Zahlen für  $m$  und  $n$  entstehen, so führt der Fall  $m = 1, n = 1$  offenbar zur isometrischen Projektion. Die Annahme  $m = 1, n > 1$  und  $m > 1, n = 1$  ergeben dimetrische Projektionen, das heißt solche, bei denen 2 Kanten eines projizierten Würfels gleich werden. Derartige Projektionen erweisen sich indessen, wegen der dabei auftretenden Symmetrien als wenig geeignet für praktische Zwecke.

Die einfachsten trimetrischen Projektionen, d. h. solche bei denen die Projektionen der drei anstoßenden Kanten eines Würfels ungleiche Länge haben, erhält man durch die Annahmen  $m = 2, n = 2$  und  $m = 3, n = 2$ , obgleich auch einige größere Werte brauchbare Resultate liefern. Die sich ergebenden Werte sind:

$m$	$n$	$BH$	$HC$
2	2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}\sqrt{21}$ oder angenähert $\frac{11}{12}$
3	2	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{20}\sqrt{41}$ „ „ $\frac{24}{25}$

Die beiden letzten Figuren zeigen die sich ergebenden Liniennetze und die Projektionen einiger bekannter Körper. Der eingezeichnete

Fig. 5.



Würfel ( $W$ ) erklärt die Bedeutung der Linien. Mit Hilfe eines derartigen Liniennetzes kann man trimetrische Projektionen in derselben einfachen Weise konstruieren, wie isometrische.

## Zur Ermittlung der Stromverteilung in Leitungsnetzen.

Von G. MATTAUSCH in Berlin.

Bei der Berechnung elektrischer Leitungsnetze bietet die Ermittlung der sogenannten wahren Stromverteilung noch immer nicht zu unterschätzende Schwierigkeiten, und es ist daher wohl angebracht, ein Verfahren ausfindig zu machen, das mittels einfacher Operationen das Problem der Ermittlung der Stromverteilung zu lösen vermag, und eine möglichst übersichtliche, leicht nachzuprüfende Rechnung ergibt.

Die gebräuchlichsten und am meisten zur Anwendung kommenden Methoden sind:

- die Schnittmethode von Herzog und Stark,
- die Spannungsmethode von Coltri,
- die Methode von Teichmüller,
- die Verlegungsmethode von Frick, und
- die Transfiguration nach Kenelly.

Es steht jedoch nicht fest, welche von den genannten Berechnungsarten den Vorzug verdient.

Es soll daher untersucht werden, auf welcher Grundlage und von welchem Gesichtspunkte aus diese Methoden zu vergleichen und zu verallgemeinern sind, auch soll versucht werden, alle Methoden in geeigneter Weise zu verbinden, oder es so einzurichten, daß man mit einer anderen Methode weiterrechnen kann, wenn die zuerst begonnene nicht zum Ziele führen sollte.

Liegt beispielsweise das im Leitungsplan (Fig. 1) dargestellte Netz zur Berechnung vor, so ist der Gang der Rechnung zur Bestimmung der Stromverteilung etwa folgender:

1. man superponiert Speisepunkte über die Knotenpunkte und ermittelt hierfür die Stromverteilung, die mit Stromverteilung I bezeichnet werden soll;
2. man denkt sich das Netz nur in den Knotenpunkten und zwar mit den unter 1. gefundenen Strömen belastet, diese Stromverteilung soll Stromverteilung II heißen;
3. man superponiert Stromverteilung I über Stromverteilung II, indem man die algebraische Summe der unter 1. und 2. gefundenen Ströme bildet bzw. die Stromverteilung I von der Stromverteilung II subtrahiert, man erhält dann durch die Superposition dieser beiden Stromverteilungen die Wahre Stromverteilung des Netzes.

Zur Bestimmung der Stromverteilung I benutzt man am besten die Schnittmethode von Herzog und Stark.

Dieselbe soll kurz wiederholt werden.

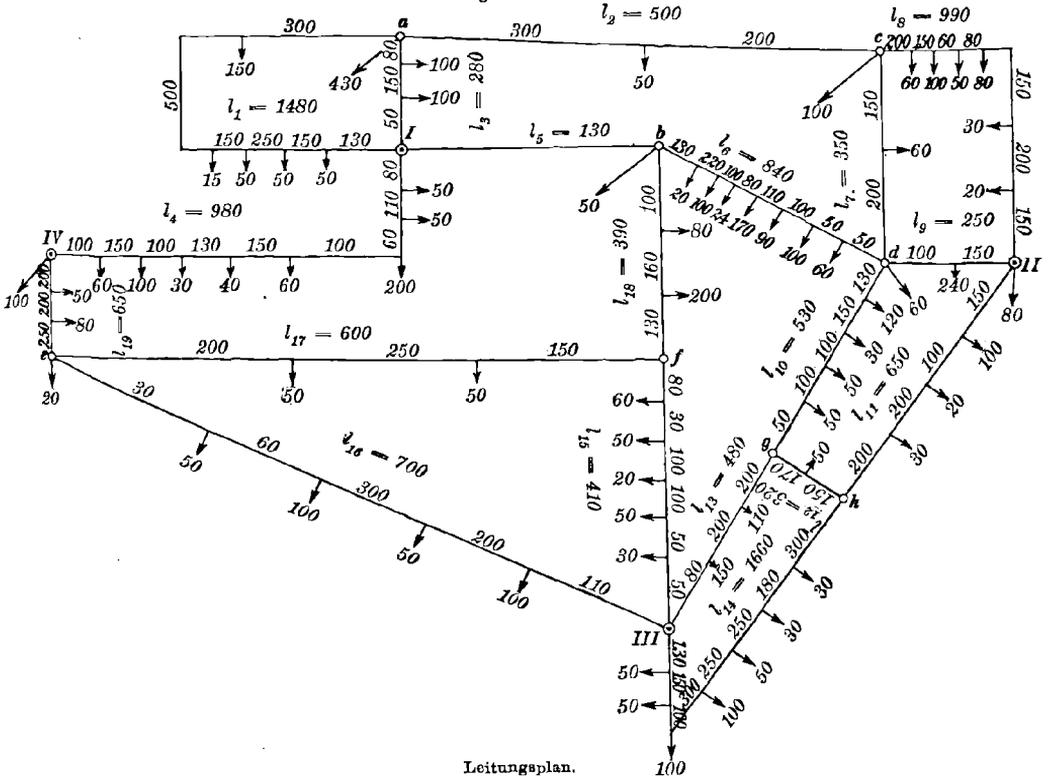
Alle Knotenpunkte sind jetzt als Speisepunkte gedacht, sodaß dem Netz außer durch die Speisepunkte auch durch die Knotenpunkte Strom zugeführt wird. Die Stromverteilung eines solchen von zwei Seiten aus gespeisten Stranges läßt sich mit Hilfe der Strommomente d. i. der Produkte aus Belastungsstrom mal Leitungslänge:  $J \cdot l$  leicht ermitteln.

Fig. 2 stelle einen Leitungsstrang dar, der in den Punkten  $a$  und  $b$  mit Strom versehen wird.

Nach den Kirchhoffschen Regeln oder dem zweiten Kirchhoffschen Satze ist alsdann:

$$J_1 \cdot l_1 + J_2(l_1 + l_2) + J_3(l_1 + l_2 + l_3) + \dots + J_n(l_1 + l_2 + \dots + l_n) = \sum_1^n (J \cdot l),$$

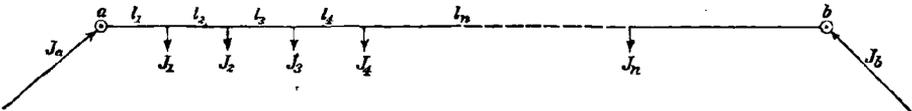
Fig. 1.



gleichen Querschnitt aller Leitungsstücke vorausgesetzt, sodaß die Widerstände proportional den Leitungslängen sind.

Fig. 2.

— L —



Es wird:

$$J_b = \frac{\sum_1^n (J \cdot l)}{\sum_1^n l}$$

$$J_a = \sum J - J_b.$$

Da ich bei der Ermittlung der Stromzuführungen nach der Schnittmethode von Herzog und Stark<sup>1)</sup> durch die Gesamtlänge zu dividieren habe, kann ich mit einfachen Entfernungen, wie sie im Leitungsplan (Fig. 1) eingeschrieben sind, statt mit Leitungslängen (doppelten Entfernungen) rechnen.

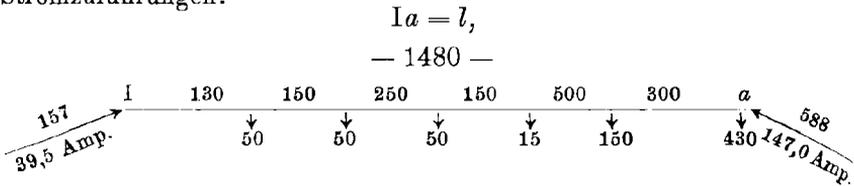
Die Belastungen sind im Leitungsplan durch Glühlampen zu 16 HK ausgedrückt; ich will daher bei Bestimmung der Strommomente mit Glühlampen statt mit Ampère rechnen, erst bei Bestimmung der einzelnen Stromzuführungen soll die Umrechnung auf Ampère stattfinden.

Wähle ich eine Betriebsspannung von 220 Volt, so benötigt eine 16 HK-Kohlenfadenlampe mit einem Energiebedarf von rund 55 Watt bei dieser Spannung einen Strom von

$$J = \frac{\text{Watt}}{\text{Volt}} = \frac{55}{220} = 0,25 \text{ Amp.}$$

Die durch Glühlampen ausgedrückten Stromzuführungen sind demnach mit 0,25 bei Umrechnung auf Ampère zu multiplizieren.

Nach dieser Methode ergeben die einzelnen Leitungen folgende Stromzuführungen:



$$\Sigma J = 186,5 \text{ Amp.}$$

$$50 \cdot 130 = 6500$$

$$50 \cdot 280 = 14000$$

$$50 \cdot 530 = 26000$$

$$15 \cdot 680 = 10200$$

$$150 \cdot 1180 = 177000$$

$$\Sigma J = 315 \qquad 234200 - \Sigma(J \cdot l)$$

$$J_0 = \frac{\Sigma(J \cdot l)}{\Sigma l} = \frac{234200}{1480} = 158 \text{ Glühlampen}$$

$$+ 430 \quad \text{,,}$$

$$588 \text{ Glühlampen}$$

$$J_1 = \Sigma J - J_a = 315 - 158 = 157 \text{ Glühlampen}$$

$$J_a = 588 \cdot 0,25 = 147,0 \text{ Ampère}$$

$$J_1 = 157 \cdot 0,25 = 39,5 \text{ Ampère.}$$

1) Herzog und Stark: „Über die Stromverteilung in Leitungsnetzen“ E. T. Z. 1890, Heft 33, und Herzog und Feldmann: „Die Berechnung elektrischer Leitungsnetze in Theorie und Praxis“, Springer, Berlin 1903, S. 252 u. ff.

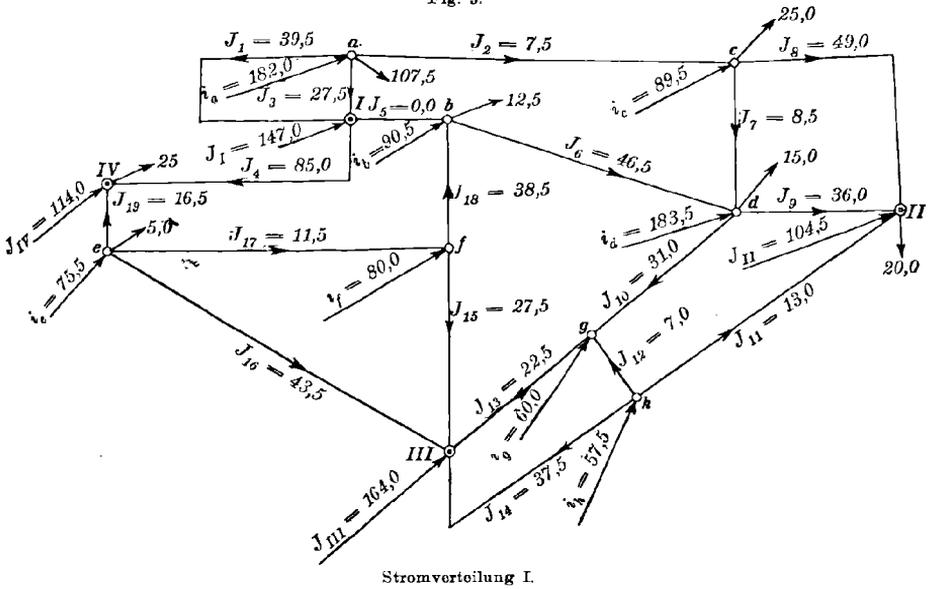
Man bildet also immer die Summen der Strommomente:  $\Sigma(J \cdot l)$  und erhält durch Division mit der Gesamtlänge:  $\frac{\Sigma(J \cdot l)}{\Sigma l}$  die eine Stromzuführung. Die andere Stromzuführung erhält man durch Subtraktion von  $\Sigma J$  weniger der zuerst berechneten Stromzuführung:  $\Sigma J - J_1$ .

Damit ist die Stromverteilung I festgelegt. Sie ist in Fig. 3 dargestellt.

Wir kommen nun zu Stromverteilung II.

Sie wird bestimmt unter der Annahme, daß nur die Knotenpunkte  $a, b, c$  usw. belastet seien und zwar mit den durch Stromverteilung I gefundenen Strömen  $i_a, i_b, i_c$  usw.

Fig. 3.

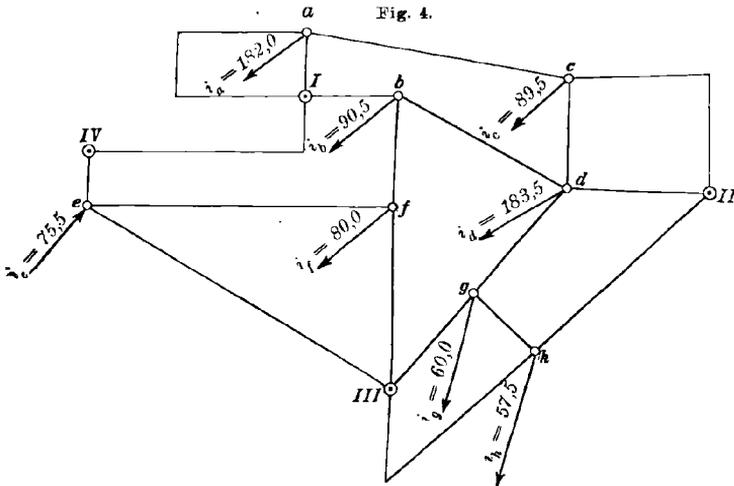


Bei Ermittlung der Stromverteilung I haben wir dem Netz Ströme zugeführt, die ihm in Wirklichkeit nicht zufließen; um diese Ströme zu eliminieren, belasten wir zur Bestimmung der Stromverteilung II das Netz ausschließlich mit denselben und zwar in den entsprechenden Knotenpunkten, wie dies Fig. 4 darstellt.

Zur Bestimmung dieser Stromverteilung bilde ich das Netz auf die in Fig. 5 dargestellte Gestalt um, indem ich folgende Erwägungen anstelle:

Speisepunkt I und IV kann ich als Punkte gleichen Potentials zusammenlegen, da ich die Annahme mache, daß von der Zentrale aus auf konstante Spannung der Speisepunkte reguliert wird, ebenso Speise-

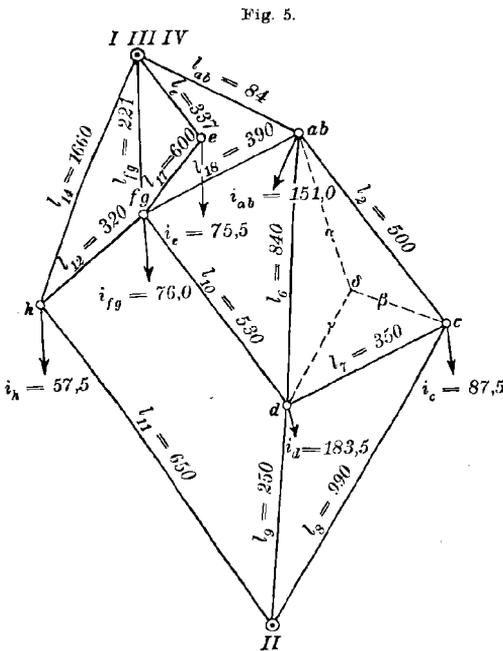
punkt III, da zwischen den Speisepunkten III und IV nur der Knotenpunkt *e* liegt, sodaß die Speisepunkte I, III und IV einen einzigen Speisepunkt bilden.



Das nur in den Knotenpunkten belastete Netz.

Die Leitungen  $l_{16}$  und  $l_{19}$  kann ich, da sie beide zu einem Speisepunkt führen, als parallel geschaltete Widerstände zusammenfassen und sie durch ihren kombinierten Widerstand ersetzen oder, da ich gleichen Querschnitt für alle

Leitungen voraussetze, und somit die Widerstände proportional ihren Längen sind, Kombinationslängen nach der Verlegungs- oder Reduktionsmethode von Frick<sup>1)</sup> bilden, ebenso können die Leitungen  $l_{13}$  und  $l_{15}$  und die Leitungen  $l_1$  und  $l_3$  und die durch Kombination von  $l_1$  und  $l_3$  entstandene Leitung mit Leitung  $l_5$  durch kombinierte Widerstände bzw. Kombinationslängen ersetzt werden, da ihre Knotenpunkte *g* und *f* bzw. *a* und *b* direkt mit einem Speisepunkt in Verbindung stehen.



Reduziertes Netz. I. Transfiguration.

Durch die Kombination dieser Leitungen fällt der Knotenpunkt *a* mit *b*, und der Knotenpunkt *f* mit *g* zusammen, ich erhalte die Knotenpunkte *ab* und *fg*.

1) Frick: Zeitschrift für Elektrotechnik, Wien 1894, S. 265, und Herzog und Feldmann: „Die Berechnung elektrischer Leitungsnetze“, Springer, Berlin 1903, S. 240 u. ff.

Die Leitung  $l_4$  scheidet aus und fällt bei der weiteren Berechnung weg, da sie von beiden Seiten aus gespeist wird, die Stromverteilung I ist daher auch gleichzeitig die Wahre Stromverteilung für dieses Leitungsstück.

Das Netz mit 4 Speisepunkten und 8 Knotenpunkten ist jetzt auf ein Netz mit 2 Speisepunkten und 6 Knotenpunkten reduziert und vereinfacht worden. Die Kombinationslängen berechnen sich, wie folgt:

$$l_e = \frac{l_{1a} \cdot l_{1g}}{l_{1a} + l_{1g}} = \frac{700 \cdot 650}{1350} = 337$$

$$l_a = \frac{l_1 \cdot l_3}{l_1 + l_3} = \frac{1480 \cdot 280}{1760} = 236$$

$$l_{ab} = \frac{l_a \cdot l_5}{l_a + l_5} = \frac{236 \cdot 130}{366} = 84$$

$$l_{fg} = \frac{l_{1g} \cdot l_{1e}}{l_{1g} + l_{1e}} = \frac{480 \cdot 410}{890} = 221.$$

Ich muß jetzt die Ströme  $J_a$  und  $J_f$  nach  $b$  resp.  $g$  verlegen, und zwar geschieht dies am besten nach der Methode von Frick. Dieselbe soll kurz erklärt werden.

Fig. 6 stelle eine Leitung dar mit konstantem Querschnitt, die durch die Speisepunkte  $S_1$  und  $S_3$  mit Strom versehen wird.

Inazweige der Strom  $i_a$ , in  $b$  der Strom  $i_b$  ab.

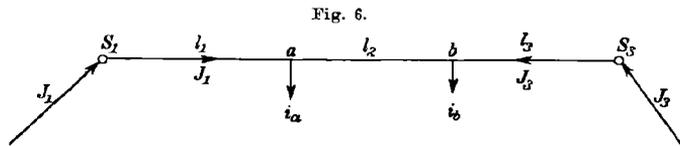


Fig. 6.  
Leitung mit konstantem Querschnitt.

Durch die hierdurch bedingte Stromverteilung wird im Punkte  $b$  ein ganz bestimmter Spannungsabfall  $\Delta E_b$  auftreten.

Um nun die Stromverteilung zu finden, verlegen wir den in  $a$  abgezweigten Strom  $i_a$  mit nach  $b$  d. h. wir nehmen in  $b$ , abgesehen von dem bereits vorhandenen Abzweigstrom  $i_b$  noch den Strom

$$i_{ab} = i_a \cdot \frac{l_1}{l_1 + l_2}$$

ab. Hierdurch ändert sich die Summe der Strommomente bis zum Punkte  $b$  von  $S_1$  aus gerechnet nicht, denn es ist:

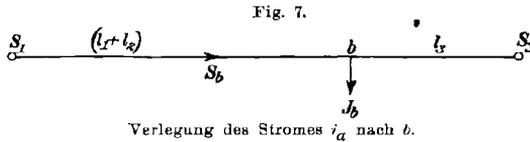
$$\left( i_a \cdot \frac{l_1}{l_1 + l_2} + i_b \right) (l_1 + l_2) = i_a \cdot l_1 + i_b \cdot (l_1 + l_2).$$

Infolgedessen behält der Strom  $J_3$  seine Größe bei, ganz gleich, ob in  $a$  der Strom  $i_a$  oder in  $b$  der Strom  $i_{ab}$  abzweigt, und der Spannungsverlust im Punkte  $b$  bleibt derselbe.

Fig. 7 zeigt die Verlegung des Stromes  $i_{ab}$  nach  $b$ .

$$i_{ab} + i_b = J_b.$$

$J_b$  bezeichnet man als den reduzierten Belastungsstrom.



Die Zuführung des Stromes  $J_b$  verteilt sich auf die beiden Leitungen  $(l_1 + l_2)$  und  $l_3$ , und zwar, da wir konstanten Querschnitt an-

nahmen, proportional ihren Längen.

Es ist somit:

$$J_3 = J_b \cdot \frac{l_1 + l_2}{l_1 + l_2 + l_3}$$

und der von  $S_1$  nach  $b$  fließende Summenstrom:

$$S_b = J_b \cdot \frac{l_2}{l_1 + l_2 + l_3} = J_b - J_3.$$

Für die wahren Leitungsströme  $J_2$  und  $J_1$  folgt dann:

$$J_2 = S_b - i_{ab} = J_b - J_3 - i_{ab},$$

$$J_1 = S_b - i_{ab} + i_a = J_b - J_3 - i_{ab} + i_a.$$

Die Verlegung der Ströme  $i_a$  und  $i_f$  vollzieht sich somit nach der Frickschen Methode folgendermaßen:

$$i_{ab} = i_a \cdot \frac{l_a}{l_a + l_3 + l_5} = 182,0 \cdot \frac{236}{646} = 61,0 \text{ Amp.}$$

Da durch die Verlegung des Stromes  $i_a$  nach  $b$  die Knotenpunkte  $a$  und  $b$  zusammenfallen, wird die Knotenpunktsbelastung im Punkte  $ab$ :

$$J_{ab} = i_{ab} + i_b = 61,0 + 90,5 = 151,0 \text{ Amp.}$$

Die Verlegung des Stromes  $i_f$  nach  $g$  ergibt:

$$i_{fg} = i_f \cdot \frac{l_{fg}}{l_{fg} + l_{15} + l_{13}} = 80 \cdot \frac{221}{1111} = 16,0 \text{ Amp.}$$

Es wird alsdann, da die Knotenpunkte  $f$  und  $g$  zusammenfallen, die Belastung im Punkte  $fg$ :

$$J_{fg} = i_{fg} + i_g = 16 + 60 = 76,0 \text{ Amp.}$$

Das Netz hat alsdann folgende in Fig. 5 eingetragenen Knotenpunktsbelastungen:

$$\begin{aligned} J_{ab} &= 151,0 \text{ Amp.} \\ J_c &= 89,5 \text{ „} \\ J_d &= 183,5 \text{ „} \\ J_e &= 76,5 \text{ „} \\ J_{fg} &= 76,0 \text{ „} \\ J_h &= 57,5 \text{ „} \end{aligned}$$

Es können nunmehr folgende Transfigurationen vorgenommen werden.

Das Dreieck  $ab, c, d$  kann ich nach Kenelly<sup>1)</sup> in einen widerstandstreuen Stern umbilden (I. Transfiguration).

Die Sternwiderstandslängen berechnen sich zu:

$$l_\alpha = \frac{l_2 \cdot l_3}{l_2 + l_3 + l_7} = \frac{500 \cdot 840}{1690} = 250,$$

$$l_\beta = \frac{l_2 \cdot l_7}{l_2 + l_6 + l_7} = \frac{500 \cdot 350}{1690} = 103,$$

$$l_\gamma = \frac{l_6 \cdot l_7}{l_2 + l_6 + l_7} = \frac{840 \cdot 350}{1690} = 174.$$

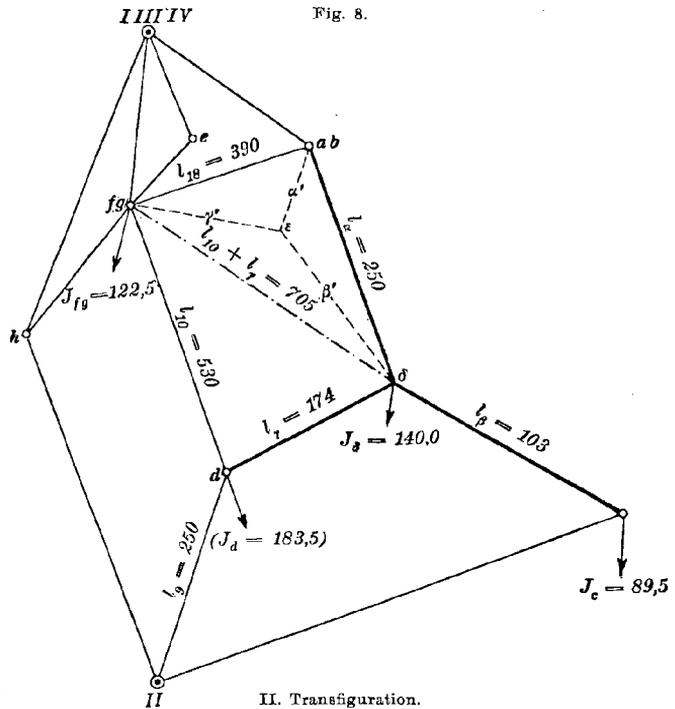
Nach dieser I. Transfiguration erhält das Netz die in Fig. 8 dargestellte Gestalt.

Ich erhalte ein Viereck mit den Endpunkten  $fg, ab, \delta, d$ , welches ich in ein Dreieck umbilde, und dieses Dreieck transfiguriere ich wiederum nach Kenelly in einen widerstandstreuen Stern.

Die Umbildung des genannten Vierecks in ein Dreieck (II. Transfiguration) vollzieht sich folgendermaßen<sup>2)</sup>:

Ich verlege die Belastung in  $d$  nach  $fg$  und dem Sternpunkt  $\delta$ .

Der Belastungsstrom verteilt sich auf die beiden Knotenpunkte  $fg$  und  $\delta$  proportional den Leitfähigkeiten, oder da die Leitungen alle gleichen Querschnitt haben, umgekehrt ihren



1) Kenelly: „On the predetermination of the regulation in alternating current transformers“, Electr. World and Engineer 1899, S. 343, und Herzog und Feldmann: „Die Berechnung usw.“, 1903, S. 205–216 und S. 264–277.

2) Herzog und Feldmann: „Die Berechnung usw.“ S. 272 u. ff.

Längen, da die Leitungslänge in der Formel für die Leitfähigkeit ( $f = \frac{q}{L \cdot \rho}$ ) im Nenner auftritt.

Demnach

$$\frac{J_d}{J_{d\delta}} = \frac{l_{10} + l_\gamma}{l_{10}}.$$

Daraus ergibt sich die auf  $\delta$  fallende Stromkomponente zu:

$$J_{d\delta} = J_d \cdot \frac{l_{10}}{l_{10} + l_\gamma} = 183,5 \cdot \frac{530}{705} = 140,0 \text{ Amp.}$$

Die auf  $fg$  fallende Komponente ist alsdann:

$$J_a - fg = J_d - J_{d\delta} = 186,5 - 140 = 46,5 \text{ Amp.}$$

Punkt  $d$  fällt weg, ich erhalte als nunmehrige Knotenpunktbelastungen in  $fg$  und  $\delta$ :

$$J_{fg} = 46,5 + 76 = 122,5 \text{ Amp.}$$

und

$$J_\delta = J_{d\delta} = 140,0 \text{ Amp.}$$

Nach dieser Verlegung der Ströme wird die Leitung  $d - fg$  und die Leitung  $d - \delta$  in Serie geschaltet, ich erhalte die Leitung

$$fg - \delta = 530 + 175 = 705$$

und die Leitung

$$II - \delta = l_\delta = 250 + 175 = 425.$$

Dadurch ist das Viereck in ein Dreieck widerstandstreu umgebildet. Jetzt kann dieses Dreieck:  $fg, \delta, ab$  durch den widerstandstremen Stern:  $\varepsilon, fg, \delta, ab$  ersetzt werden (III. Transfiguration).

Die Sternwiderstandslängen berechnen sich wiederum, wie früher:

$$l'_\alpha = \frac{390 \cdot 250}{1345} = 72,$$

$$l'_\beta = \frac{250 \cdot 705}{1345} = 131,$$

$$l'_\gamma = \frac{390 \cdot 705}{1345} = 204.$$

Nach dieser dritten und letzten Transfiguration erhält das Netz die in Fig. 9 dargestellte Form.

Weitere Transfigurationen lassen sich jetzt nicht mehr vornehmen.

Es kann nun zur Bestimmung der Stromverteilung II geschritten werden unter der Annahme, daß die Knotenpunkte allein belastet sind.

Durch die mehrfache Transfigurierung des Netzes und die Ver-

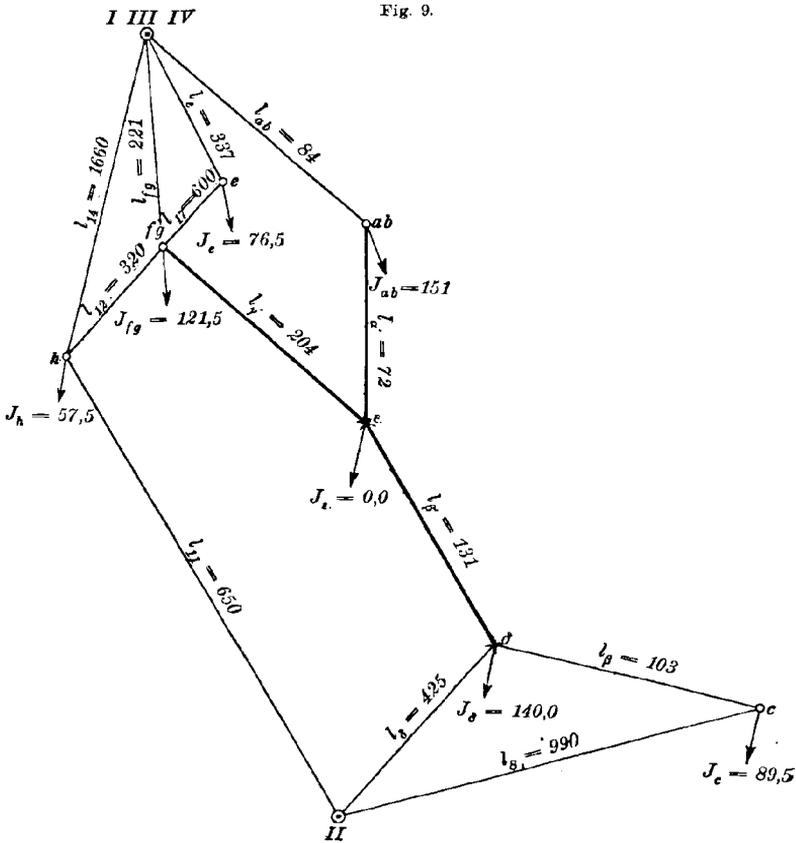


Fig. 9.

III. Transfiguration.

legung der Ströme ergeben sich folgende endgültige Knotenpunktbelastungen (Fig. 9):

- $J_{ab} = 151,0$  Amp.
- $J_c = 89,5$  „
- $J_d = 140,0$  „
- $J_e = 75,5$  „
- $J_{fg} = 122,5$  „
- $J_h = 57,5$  „
- $J_k = 0,0$  „

Diese Stromverteilung II kann jetzt nach der Spannungsmethode von Coltri<sup>1)</sup> oder nach der Methode von Teichmüller<sup>1)</sup> ermittelt werden

1) Coltri: E. T. Z., 1893, S. 10, und Teichmüller: E. T. Z., 1893, S. 538; ferner Herzog und Feldmann, S. 249 u. ff.

Diese beiden wichtigen Methoden unterscheiden sich voneinander nur dadurch, daß in ihren Gleichungssystemen bei der Methode von Coltri die Spannungsdifferenzen, bei der Methode von Teichmüller die Spannungsverluste an Stelle der Spannungsdifferenzen als Unbekannte auftreten.

Stellen wir also für den vorliegenden Fall das Teichmüllersche Gleichungssystem auf, so ergeben sich in bezug auf die 7 Knotenpunkte folgende 7 Gleichungen:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ab} \cdot \sum F_{ab} - \varepsilon_a \cdot f'_\alpha - J_{ab} &= 0, \\ \varepsilon_c \cdot \sum F_c - \varepsilon_\delta \cdot f'_\beta - J_c &= 0, \\ \varepsilon_e \cdot \sum F_e - \varepsilon_{fg} \cdot f'_{17} - J_e &= 0, \\ \varepsilon_\delta \cdot \sum F_\delta - \varepsilon_e \cdot f'_\beta - \varepsilon_c \cdot f'_\beta - J_\delta &= 0, \\ \varepsilon_{fg} \cdot \sum F_{fg} - \varepsilon_e \cdot f'_{17} - \varepsilon_h \cdot f'_{12} - \varepsilon_i \cdot f'_\gamma - J_{fg} &= 0, \\ \varepsilon_h \cdot \sum F_h - \varepsilon_{fg} \cdot f'_{12} - J_h &= 0, \\ \varepsilon_i \cdot \sum F_i - \varepsilon_{ab} \cdot f'_\alpha - \varepsilon_{fg} \cdot f'_\gamma - \varepsilon_\delta \cdot f'_\beta - J_i &= 0.\end{aligned}$$

Hierin bedeutet  $\varepsilon$  den Spannungsverlust,  $f$  die Leitfähigkeit,  $\sum F_{ab}$  die Summe der Leitfähigkeiten um den Knotenpunkt  $ab$ .

Das Teichmüllersche Gleichungssystem ergibt demnach so viele Unbekannte als Knotenpunkte vorhanden sind und ebensoviele Gleichungen.

Die Unbekannten sind die jeweiligen Spannungsverluste von einem Speisepunkte bis zum nächsten Knotenpunkte:

$$\varepsilon_{ab}, \varepsilon_c, \varepsilon_e, \varepsilon_\delta, \varepsilon_{fg}, \varepsilon_h \text{ und } \varepsilon_i.$$

Die Leitfähigkeiten berechnen sich unter Zugrundelegung eines Querschnittes von  $240 \text{ mm}^2$  nach der Formel:

$$f = \frac{q}{L \cdot \varrho}.$$

Die nach dieser Formel berechneten Leitfähigkeiten sind in nachstehender Tabelle zusammengestellt:

Tabelle der Leitfähigkeiten.

$f_1 = 4,65$	$f_{11} = 10,55$	$f_{ab} = 88,7$	$\sum F_{ab} = 183,7$
$f_2 = 13,7$	$f_{12} = 21,4$	$f_c = 20,4$	$\sum F_c = 31,85$
$f_3 = 24,5$	$f_{13} = 14,3$	$f_{fg} = 31,0$	$\sum F_{fg} = 97,83$
$f_4 = 7,0$	$f_{14} = 4,63$	$f_\delta = 16,1$	$\sum F_h = 36,08$
$f_5 = 52,8$	$f_{15} = 16,7$	$f'_\beta = 66,6$	$\sum F_\delta = 135,35$
$f_6 = 8,07$	$f_{16} = 9,8$	$f'_\alpha = 95,2$	$\sum F_c = 73,55$
$f_7 = 19,6$	$f_{17} = 11,43$	$f'_\beta = 52,3$	$\sum F_i = 181,6$
$f_8 = 6,95$	$f_{18} = 17,55$	$f'_\gamma = 34,6$	
$f_9 = 27,5$	$f_{19} = 10,55$		
$f_{10} = 12,95$			

Um das Teichmüllersche System aufzulösen, benutzt man am besten die Seidelsche<sup>1)</sup> Methode und das graphische Verfahren von von den Bergh-Mehmke.<sup>2)</sup>

Setzt man als ersten Annäherungswert

$$\varepsilon_{ab} = \varepsilon_c = \varepsilon_e = \varepsilon_g = \varepsilon_{fg} = \varepsilon_h = \varepsilon_\varepsilon = 4,0 \text{ Volt,}$$

so erhält man folgende Fehler, die mit  $N$  bezeichnet werden sollen.

$$\begin{aligned} N_{ab} &= 201,8 \\ N_c &= - 83,3 \\ N_e &= 4,1 \\ N_\delta &= - 81,8 \\ N_{fg} &= - 4,9 \\ N_h &= 1,52 \\ N_\varepsilon &= - 33,6 \end{aligned}$$

Man berechnet nun ein

$$\Delta \varepsilon_{ab} = - \frac{N_{ab}}{183,7}$$

und daraus die neuen Fehler  $N'_{ab}$  usf.

Es empfiehlt sich, die Fehler und die Unbekannten nach folgendem Schema niederzuschreiben, aus dem man die Weiterrechnung erkennen und gleichzeitig sehen kann, wie die Fehler kleiner werden und die Unbekannten gegen einen bestimmten Wert konvergieren.

Fehlerbestimmung nach Seidel.

	$N$	$N^I$	$N^{II}$	$N^{III}$	$N^{IV}$	$N^V$	$N^{VI}$	$N^{VII}$
$N_{ab}$	201,8	52	20	52	26	14,8	10,4	1
$N_c$	- 83,3	31	- 0,03	- 0,0009	- 13,8	- 13	- 10	- 6,8
$N_e$	4,1	0,01	- 1,9	- 2,8	- 2,2	- 1,1	- 3,1	- 0,5
$N_\delta$	- 81,8	26	10	26	13	7,5	5,2	0,5
$N_{fg}$	- 4,9	16,3	24,3	19	8	4,58	6,6	0,9
$N_h$	1,52	1,72	3,6	- 5	- 4,2	- 2,1	- 5,8	- 1
$N_\varepsilon$	- 33,6	- 100	34	- 9	- 43,2	- 26,5	- 18,3	- 1,8

1) Ludwig Seidel: „Über ein Verfahren, die Gleichungen, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt, sowie lineare Gleichungen überhaupt, durch successive Annäherung aufzulösen.“ Abhandl. der math.-physik. Klasse der bayr. Akad., II. Bd., 1874. — Für elektrische Lichtnetze, 1890, E. T. Z. S. 445. — Ferner Teichmüller, E. T. Z., 1893, S. 538. — Ferner Herzog und Feldmann: „Die Berechnung usw.“ S. 285—287.

2) R. Mehmke: Mathem. Sammlung der Moskauer mathem. Gesellsch. 1892, Bd. 16, S. 342, ferner Enzyklopädie der mathem. Wiss. I 2, S. 970.

## Korrekturen für die Spannungsverluste.

	$\varepsilon_{ab}$	$\varepsilon_c$	$\varepsilon$	$\varepsilon_\delta$	$\varepsilon_{fg}$	$\varepsilon_h$	$\varepsilon_e$	
1.	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	1. Annäherungswert.
2.	-1,1	1,13	-0,13	0,6	0,0505	-0,0476	0,555	$= \Delta_e^I$
3.	-0,284	-0,42	-0,00314	0,0074	-0,166	0,1	0,186	$= \Delta_e^{II}$
4.	-0,109	0,0004	0,06	0,00016	-0,256	0,138	0,0485	$= \Delta_e^{III}$
5.	-0,284	0,000012	0,09	-0,192	-0,2	0,12	0,24	$= \Delta_e^{IV}$
6.	-0,142	0,19	0,0712	-0,2	-0,09	0,0003	0,14	$= \Delta_e^V$
7.	-0,081	0,2	0,03	-0,152	-0,027	0,16	0,1	$= \Delta_e^{VI}$
8.	-0,0565	0,136	0,1	-0,1	-0,04	0,03	0,01	
	3,2	6,72	3,87	6,06	4,15	4,07	4,25	

Bricht man nach der achten Durchrechnung ab, so erhält man durch Summierung der ersten Näherungswerte und aller Korrektionswerte die wahren Werte der Unbekannten  $\varepsilon_{ab}$ ,  $\varepsilon_c$ ,  $\varepsilon_\delta$  usf. mit hinreichender Annäherung.

Es ergeben sich folgende Werte für die Spannungsverluste in Volt:

$$\begin{array}{l|l}
 \varepsilon_{ab} = 3,02 & \varepsilon_{fg} = 4,15 \\
 \varepsilon_c = 6,72 & \varepsilon_h = 4,07 \\
 \varepsilon_e = 6,06 & \varepsilon_e = 4,25 \\
 \varepsilon_\delta = 3,87 &
 \end{array}$$

Damit ist das Teichmüllersche Gleichungssystem gelöst. Denn es ist alsdann:

$$\begin{array}{l}
 ab: 3,02 \cdot 183,7 - 4,25 \cdot 95 = 151 \\
 \quad 555 - 404 = 151 \\
 c: 6,72 \cdot 73,55 - 6,06 \cdot 66,6 = 89,5 \\
 \quad 495 - 405,5 = 89,5 \\
 e: 3,87 \cdot 31,8 - 4,15 \cdot 11,43 = 75,5 \\
 \quad 123 - 47,5 = 75,5 \\
 \delta: 6,06 \cdot 235,35 - 4,25 \cdot 52,6 - 6,73 \cdot 66,6 = 140 \\
 \quad 814 - 224 - 450 = 140 \\
 fg: 4,15 \cdot 97,8 - 3,87 \cdot 11,43 - 4,07 \cdot 21,4 - 4,25 \cdot 34 = 122,5 \\
 \quad 402 - 45 - 89 - 145 = 122,5 \\
 h: 4,07 \cdot 36 - 4,15 \cdot 11,4 = 57,5 \\
 \quad 146 - 89,5 = 57,5 \\
 \varepsilon: 4,25 \cdot 181,8 - 3,02 \cdot 95 - 6,06 \cdot 52,6 - 4,15 \cdot 34 = 0 \\
 \quad 750 - 288 - 310 - 142 = 0
 \end{array}$$

Durch die Kenntnis dieser Spannungsverluste ist die Stromverteilung II festgelegt. Denn es ist alsdann:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \varepsilon_{ab} \cdot f_1 &= 3,02 \cdot 4,65 &= 14,0 \text{ Amp.} \\
 J_2 &= -(\varepsilon_{ab} - \varepsilon_c) \cdot f_2 &= + 3,7 \cdot 13,7 &= 50,5 \text{ ,,} \\
 J_3 &= \varepsilon_{ab} \cdot f_3 &= 3,02 \cdot 24,5 &= 74,0 \text{ ,,} \\
 J_4 &= 85,0 &= 85,0 &= 85,0 \text{ ,,} \\
 J_5 &= \varepsilon_{ab} \cdot f_5 &= 3,02 \cdot 52,8 &= 159,0 \text{ ,,} \\
 J_6 &= -(\varepsilon_{ab} - \varepsilon_\delta) \cdot f_6 &= + 0,54 \cdot 8,07 &= 4,5 \text{ ,,} \\
 J_7 &= -(\varepsilon_\delta - \varepsilon_c) \cdot f_7 &= + 3,16 \cdot 19,6 &= 62,0 \text{ ,,} \\
 J_8 &= \varepsilon_c \cdot f_8 &= 6,72 \cdot 6,95 &= 46,5 \text{ ,,} \\
 J_9 &= \varepsilon_\delta \cdot f_9 &= 6,06 \cdot 27,5 &= 167,0 \text{ ,,} \\
 J_{10} &= -(\varepsilon_{fg} - \varepsilon_h) \cdot f_{10} &= - 0,59 \cdot 12,95 &= - 7,5 \text{ ,,} \\
 J_{11} &= \varepsilon_h \cdot f_{11} &= 4,07 \cdot 10,55 &= 43,0 \text{ ,,} \\
 J_{12} &= -(\varepsilon_{fg} - \varepsilon_h) \cdot f_{12} &= - 0,08 \cdot 21,4 &= - 1,7 \text{ ,,} \\
 J_{13} &= \varepsilon_{fg} \cdot f_{13} &= 4,15 \cdot 14,3 &= 59,5 \text{ ,,} \\
 J_{14} &= \varepsilon_h \cdot f_{14} &= 4,07 \cdot 4,63 &= 17,0 \text{ ,,} \\
 J_{15} &= \varepsilon_{fg} \cdot f_{15} &= 4,15 \cdot 16,7 &= 69,5 \text{ ,,} \\
 J_{16} &= \varepsilon_e \cdot f_{16} &= 3,87 \cdot 9,8 &= 38,0 \text{ ,,} \\
 J_{17} &= -(\varepsilon_{fg} - \varepsilon_e) \cdot f_{17} &= - 0,28 \cdot 11,43 &= - 3,2 \text{ ,,} \\
 J_{18} &= -(\varepsilon_{ab} - \varepsilon_{fg}) \cdot f_{18} &= + 1,13 \cdot 17,55 &= 20,0 \text{ ,,} \\
 J_{19} &= \varepsilon_e \cdot f_{19} &= 3,87 \cdot 10,55 &= 41,0 \text{ ,,}
 \end{aligned}$$

Diese Stromverteilung II ist in Fig. 10 dargestellt.

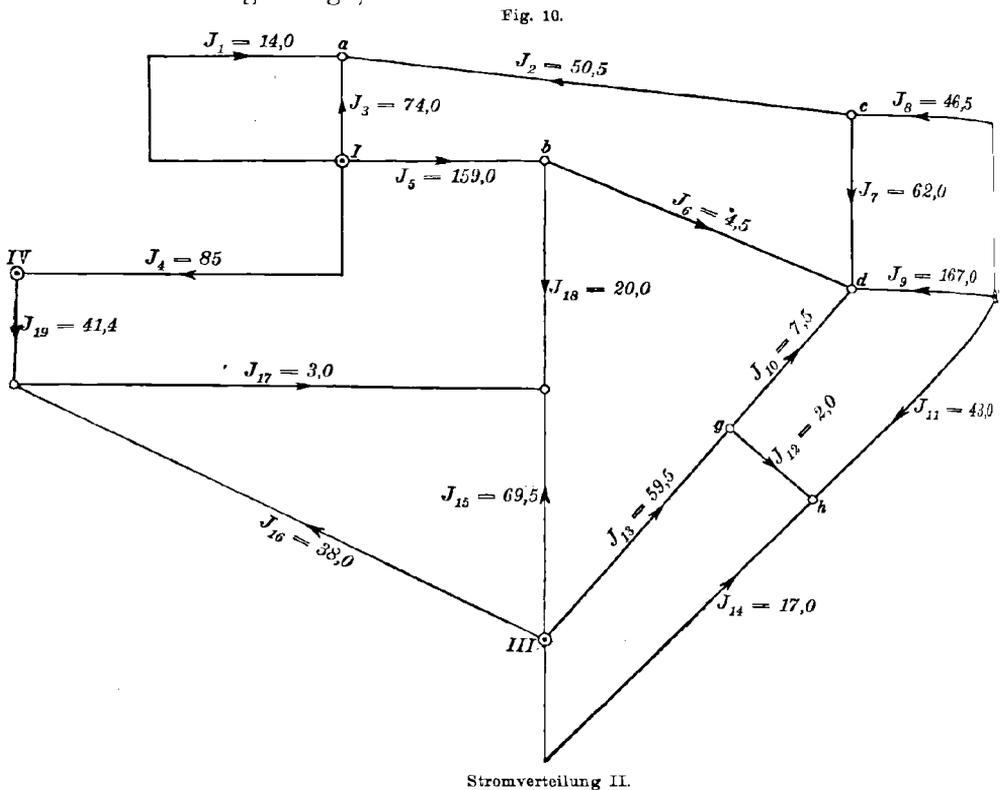
Ich finde die wahre Stromverteilung des Netzes dadurch, daß ich die algebraische Addition der Stromverteilungen I u. II bilde.

Die wahre Stromverteilung ergibt sich demnach, wie folgt:

$$\begin{array}{l|l}
 J_1 = 14,0 - 39,5 = - 25,5 \text{ Amp.} & J_{11} = 43,0 - 13,0 = 30,0 \text{ Amp.} \\
 J_2 = 50,5 - 7,5 = 43,0 \text{ ,,} & J_{12} = - 1,7 - 7,0 = - 9,0 \text{ ,,} \\
 J_3 = 74,0 - 27,5 = 46,5 \text{ ,,} & J_{13} = 59,5 - 22,5 = 37,0 \text{ ,,} \\
 J_4 = 85,0 = 85,0 \text{ ,,} & J_{14} = 17,0 - 37,5 = - 20,5 \text{ ,,} \\
 J_5 = 159,0 - 0,0 = 159,0 \text{ ,,} & J_{15} = 69,5 - 27,5 = 42,0 \text{ ,,} \\
 J_6 = 4,5 - 46,5 = - 42,0 \text{ ,,} & J_{16} = 38,0 - 43,5 = - 5,5 \text{ ,,} \\
 J_7 = 62,0 - 9,5 = 53,5 \text{ ,,} & J_{17} = - 3,2 - 11,5 = - 14,5 \text{ ,,} \\
 J_8 = 46,5 - 49,0 = - 2,5 \text{ ,,} & J_{18} = 20,0 - 38,5 = - 18,5 \text{ ,,} \\
 J_9 = 167,0 - 36,0 = 131,0 \text{ ,,} & J_{19} = 41,0 - 16,5 = 24,5 \text{ ,,} \\
 J_{10} = - 7,5 - 31,0 = - 38,5 \text{ ,,} &
 \end{array}$$

Die wahre Stromverteilung ist in Fig. 11 dargestellt und zwar im Amp. Die Richtigkeit dieser wahren Stromverteilung kann man auf dreierlei Weise prüfen:

1. muß die Summe sämtlicher von den Speisepunkten fortfließenden Ströme gleich sein der Summe der Belastungen der einzelnen Leitungsstränge;



2. muß, da an 5 Knotenpunkten direkt Belastungen hängen, die algebraische Addition der Ströme um den betreffenden Knotenpunkt herum diese direkte Knotenpunktsbelastung ergeben;
3. müssen die maximalen Spannungsverluste, die dort auftreten, wo Stromumkehr stattfindet, von verschiedenen Seiten aus dieselben sein, ebenso wie die Spannungsverluste von einem Speisepunkt bis zum nächsten Knotenpunkt von verschiedenen Speisepunkten aus berechnet, dieselben sein müssen.

Damit ist das Problem der Ermittlung der Stromverteilung gelöst.

Werfen wir einen kurzen Rückblick, so erhellt aus den oben gemachten Darlegungen, daß es immer möglich sein wird, das Problem



## Beiträge zur Kinematik starrer und affin-veränderlicher Systeme, insonderheit über die Windung der Bahnen der Systempunkte.<sup>1)</sup>

Von R. MEHMKE in Stuttgart.

Über die Windung oder Torsion der Bahnen, welche die Punkte eines starren oder auch affin-veränderlichen räumlichen Systems bei irgendeiner zwangsläufigen Bewegung beschreiben, scheint noch nichts veröffentlicht worden zu sein.<sup>2)</sup> Es gibt hier jedoch Beziehungen von bemerkenswerter Einfachheit. Solche bringt Nr. 1. In Nr. 2 wird die Frage beantwortet, welches die verwandten Beziehungen sind, die für die Krümmung der Punktbahnen bei ebener Bewegung gelten, in Nr. 3 werden die möglichen Sonderfälle erörtert, in Nr. 4 die Ergebnisse auf Räume von mehr als drei Dimensionen ausgedehnt.

### I. Ergebnisse.

#### 1. Windung der Punktbahnen.

Wie man weiß, gehört zu jeder Lage des bewegten Systems eine Raumkurve dritter Ordnung, die sog. Wendekurve, deren Punkte im gewöhnlichsten Fall augenblicklich Wendepunkte in ihren Bahnen durchlaufen.<sup>3)</sup> Durch einen beliebigen Systempunkt  $x$  können wir eine einzige Gerade ziehen, welche die Wendekurve in zwei Punkten  $a$  und  $b$  trifft; sie ist eine sog. Sehne oder Bisekante der Wendekurve. Man könnte sie den durch  $x$  gehenden *Wendestrah*l nennen; er läßt sich durch eine lineare Konstruktion finden, als Schnitt zweier Ebenen. Bekanntlich gibt es auch eine gewisse, durch die Wendekurve hindurchgehende Fläche dritter Ordnung, deren Punkte augenblicklich Bahnstellen mit stationärer Schmiegun

1) Der erste Teil, Nr. 1—4, ist die Wiedergabe eines Vortrags, gehalten auf der Naturforscherversammlung in Salzburg am 21. September 1909; der zweite Teil bringt die Beweise, die beim Vortrag weggelassen wurden.

2) Herr Schönflies hat es auf meine briefliche Anfrage bestätigt, nachdem eine Durchsicht des eingehenden Berichts der Herren Schönflies und Grübler über Kinematik im vierten Bande der Enzyklopädie ohne Ergebnis geblieben war.

3) Vgl. A. Schönflies, Geometrie der Bewegung, Leipzig 1886, S. 137. Die Wendekurve wurde nach Schönflies zuerst von J. D. Everett, 1874, entdeckt.

4) Vgl. Schönflies, ebenda S. 142.

kann diesen Punkt durch eine lineare Konstruktion bestimmen, dagegen die Punkte  $a$  und  $b$  als Doppelpunkte zweier kollokaler projektiver Punktreihen.

Für die Windung  $w$  der Bahnstelle, die der Systempunkt  $x$  augenblicklich beschreibt, habe ich i. J. 1890 den Ausdruck gefunden:

$$(1) \quad w = \gamma \frac{\overline{c\bar{x}}}{\overline{a\bar{x}} \cdot \overline{b\bar{x}}},$$

wo der Zahlfaktor  $\gamma$  nur von der Richtung des Wendestrahls abhängt, nicht von seiner absoluten Lage und nicht von der Lage des Punktes  $x$  in ihm. Das Produkt  $\overline{a\bar{x}} \cdot \overline{b\bar{x}}$  der Abstände des Punktes  $x$  von den Punkten  $a$  und  $b$  könnte man etwa die *Wendepotenz* im Punkt  $x$  nennen. Es ist zwar möglich, daß die Punkte  $a$  und  $b$  imaginär werden, aber die Wendepotenz bleibt immer reell, ebenso wie der Wendestrahls und der Punkt  $c$ .

Dieses Ergebnis scheint zunächst recht vereinzelt zu sein. Um einen Zusammenhang mit andern Beziehungen, auch mit schon bekannten, herzustellen, ist es vielleicht besser, nicht die Windung zu betrachten, sondern die Größe

$$\frac{ds}{dt} \frac{d\tau}{dt} \frac{d\vartheta}{dt},$$

worin  $dt$  das Zeitelement,  $ds$  das Bahnelement,  $d\tau$  den Winkel zweier unendlich benachbarter Tangenten und  $d\vartheta$  den Winkel zweier unendlich benachbarter Schmiegungebenen der Bahn bezeichnet. Jene Größe ist also das Produkt aus drei Geschwindigkeiten: aus der Geschwindigkeit  $ds/dt$ , mit der sich der Systempunkt  $x$  in seiner Bahn bewegt, aus der Geschwindigkeit  $d\tau/dt$ , mit der sich die Bahntangente in der Schmiegungeebene um ihren Berührungspunkt dreht, und aus der Geschwindigkeit  $d\vartheta/dt$ , mit der sich die Schmiegungeebene um die Tangente dreht. Ein passender kurzer Name dafür ist mir nicht bekannt. Die fragliche Größe ist übrigens gleich der Binormal-Komponente der Überbeschleunigung (Geschwindigkeit dritter Ordnung). Ich finde dafür den Ausdruck:

$$(2) \quad \text{Binormal-Überbeschleunigung} = \frac{ds}{dt} \frac{d\tau}{dt} \frac{d\vartheta}{dt} = \beta \cdot \overline{c\bar{x}},$$

wo der Zahlfaktor  $\beta$  wieder nur von der Richtung des Wendestrahls abhängt.

## 2. Krümmung der Punktbahnen bei ebener Bewegung.

Von welchem Satz in der Ebene mag der vorhergehende das räumliche Seitenstück sein? Ein Wendestrahls hat die Eigenschaft, daß alle seine Punkte augenblicklich Bahnstellen beschreiben, deren Schmiegungeebenen parallel sind. Einem solchen Strahl entspricht in der Ebene,

können wir sagen, ein Ort von Systempunkten, die augenblicklich Bahnstellen mit parallelen Tangenten beschreiben. Das ist immer ein Strahl durch den Geschwindigkeits-Mittelpunkt oder Pol  $p$ , ein sog. Polstrahl. Nun gibt es in der Ebene, auch bei affin-veränderlichen Systemen, eine durch den Pol gehende Kurve zweiter Ordnung, deren Punkte, von Sonderfällen abgesehen, augenblicklich Wendepunkte in ihren Bahnen durchlaufen; es ist die sog. Wendekurve, die bei starren und auch noch bei ähnlich-veränderlichen Systemen in einem Kreis besteht, dem Wendekreis. Der Polstrahl, der durch einen Systempunkt  $x$  von allgemeiner Lage hindurchgeht, möge die Wendekurve zum zweitenmal in  $c$  treffen. Als entsprechende Größe zur Binormal-Überbeschleunigung können wir in der Ebene ansehen die Normal-Beschleunigung  $v^2/\rho$ , die auch gleich  $\frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\tau}{dt}$  ist. Ich finde dafür den Ausdruck

$$(3) \quad \text{Normalbeschleunigung} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \alpha \cdot \bar{c}x,$$

wo der Zahlfaktor  $\alpha$  nur von der Richtung des Polstrahls abhängt. Die Ähnlichkeit mit Gleichung (2) ist in der Tat vollkommen. Nebenbei bemerkt ist bei starren und ähnlich-veränderlichen Systemen  $\alpha$  sogar von der Richtung unabhängig, z. B. bei starren Systemen hat man  $\alpha = \omega^2$  (wo  $\omega$  die augenblickliche Drehgeschwindigkeit des Systems bezeichnet), während in der Formel (1) und (2) die Konstanten  $\gamma$  und  $\beta$  auch bei starren Systemen tatsächlich noch von der Richtung abhängen. Bei starren ebenen Systemen führt die letzte Formel ohne weiteres zu dem bekannten Ausdruck für den Krümmungshalbmesser

$$\rho = \frac{px^2}{cx},$$

auf dem die schönen Konstruktionen von Grübler beruhen.<sup>1)</sup> Bei affin-veränderlichen Systemen tritt noch ein Zahlfaktor hinzu, der von der Richtung des Polstrahls abhängt:

$$(4) \quad \rho = \alpha' \frac{px^2}{cx}.$$

Es lassen sich zwei Hilfskegelschnitte konstruieren, die den Pol zum Mittelpunkt haben, von der Art, daß man  $\alpha'$  sehr einfach durch die in den Polstrahl fallenden Halbmesser dieser Kegelschnitte ausdrücken kann, wodurch man Verallgemeinerungen der Grüblerschen Konstruktionen erhält. Ähnlich ist es im Raum mit den Konstanten  $\beta$  und  $\gamma$ ; sie lassen sich auf einfache Weise durch die zum betreffenden Wendestrahle parallelen Halbmesser zweier Hilfsflächen darstellen, von

1) M. Grübler, diese Zeitschrift Bd. 29 (1884), S. 310—313.

denen die eine von zweiter Ordnung ist, die andere von der dritten Ordnung.

### 3. Sonderfälle.

Fragen wir uns, um wieder zum Raum und zu den ersten beiden Formeln zurückzukehren, was eintritt, wenn entweder die Bewegung eine außergewöhnliche ist, oder der Punkt  $x$  eine besondere Lage hat, so daß er keine gewöhnliche Bahnstelle beschreibt, sondern eine singuläre?

Für den Punkt  $c$  als Systempunkt gilt noch die Formel (1), da sich für  $x = c$  ergibt  $w = 0$ , wie es sein muß. Für die Punkte der Wendekurve dagegen verliert Formel (1) ihre Gültigkeit, denn für  $x = a$  oder  $x = b$  liefert sie  $w = \infty$ ; während, wie ich früher einmal gezeigt habe<sup>1)</sup>, die gewöhnlichen Punkte der Wendekurve Bahnstellen mit endlicher Windung erzeugen.

Sei allgemein  $(l, m, n)$  das Zeichen<sup>2)</sup> der Bahnstelle, die ein Systempunkt  $x$  beschreibt, d. h. die positive ganze Zahl  $l$  sei gleich der Ordnung der Geschwindigkeit niedrigster Ordnung von  $x$ , die augenblicklich nicht Null ist — sie liefert durch ihre Richtung die Bahntangente — ferner sei  $m$  die Geschwindigkeit niedrigster Ordnung des Punktes, die nicht parallel zur Tangente ist — sie ist parallel zur Schmiegungeebene der Bahn, bestimmt also zusammen mit der erstgenannten Geschwindigkeit die Schmiegungeebene — und schließlich sei  $n$  die Ordnung der Geschwindigkeit niedrigster Ordnung des Punktes  $x$ , die nicht parallel zur Schmiegungeebene ist. Die Systempunkte, bei denen augenblicklich die Geschwindigkeiten der Ordnungen  $l$ ,  $m$  und  $n$  linear abhängig, d. h. parallel zu einer und derselben Ebene sind, erfüllen eine Fläche dritter Ordnung  $\Phi_{l,m,n}$ , und auf dieser Fläche liegt eine gewisse Raumkurve dritter Ordnung  $C_{l,m}$ , bei deren Punkten augenblicklich die Geschwindigkeiten von den Ordnungen  $l$  und  $m$  parallel zueinander sind. Der betrachtete Systempunkt  $x$  kann weder auf dieser Kurve noch auf jener Fläche liegen. Die durch ihn gehende Sehne von  $C_{l,m}$  möge diese Kurve in den Punkten  $a$  und  $b$  treffen, und ihr dritter Schnittpunkt mit  $\Phi_{l,m,n}$  heiße  $c$ . Dann erhält man für die Binormalkomponente der Geschwindigkeit  $n$ -ter Ordnung des Punktes  $x$  wiederum einen Ausdruck der Form  $\beta \cdot \bar{c}x$ , wo  $\beta$  nur von der Richtung des Strahles  $\bar{c}x$  abhängt. Wenn ferner  $l + m = n$  und infolgedessen die Windung der von  $x$  beschriebenen Bahnstelle endlich und von Null verschieden ist<sup>3)</sup>, so erhält

1) R. Mehmke, Über die Benennung und kinematische Unterscheidung der verschiedenen Arten von Kurvenpunkten . . ., diese Zeitschrift Bd. 49 (1903), S. 83.

2) R. Mehmke, a. a. O., S. 71.

3) a. a. O., S. 77.

man für die Windung ganz wie im gewöhnlichen Fall einen Ausdruck der Form

$$w = \gamma \frac{\overline{cx}}{\overline{ax} \cdot \overline{bx}}.$$

Man könnte sogar gemäß einem früher von mir gemachten Vorschlag<sup>1)</sup> Windungen höherer Ordnung in Betracht ziehen, dann würde rechts nur noch eine gewisse Potenz der Geschwindigkeit  $l$ -ter Ordnung des Punktes  $x$  als Faktor auftreten. Also die mitgeteilten Formeln sind von größter Allgemeinheit.

#### 4. Ausdehnung auf Räume von höheren Dimensionen.

Für Leser, die an der Ausdehnung der Kinematik auf Räume von höheren Dimensionen Gefallen finden, sei noch folgendes mitgeteilt. Im Raum von vier Dimensionen z. B. geht bei einem affin-veränderlichen System durch einen beliebigen Systempunkt  $x$  von allgemeiner Lage ein Strahl hindurch, dessen Punkte augenblicklich Bahnelemente mit parallelen Schmiegräumen von drei Dimensionen beschreiben, und auf jedem solchen Strahl liegt ein Ausnahmepunkt  $c$ , der augenblicklich ein Bahnelement mit stationärem drei-dimensionalen Schmiegräum durchläuft. Betrachtet man das Produkt aus folgenden vier Geschwindigkeiten: der Geschwindigkeit des Punktes in seiner Bahn, der Drehgeschwindigkeit der Tangente um ihren Berührungspunkt, der Drehgeschwindigkeit der Schmiegeebene um die Tangente und der Drehgeschwindigkeit des Schmiegräum um die Schmiegeebene, so ist dieses Produkt bis auf einen, nur von der Richtung des Strahls  $cx$  abhängenden Zahlfaktor gleich dem Abstand  $\overline{cx}$ . Mit anderen Worten, man hat für Räume von beliebig hohen Dimensionen stets wieder Formeln analog denen für die Ebene und für den gewöhnlichen Raum.

(Fortsetzung folgt.)

1) a. a. O., S. 81.

## Bücherschau.

**Dr. Emil Müller**, o. ö. Professor an der k. k. technischen Hochschule in Wien, **Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen.** Erster Band mit 273 Figuren in Text und 3 Tafeln, 366 und IV S. 8<sup>o</sup>. Leipzig und Berlin 1908, B. G. Teubner. Preis geb. *M* 12.—

Im Gegensatz zu den zahlreich erscheinenden mehr oder minder populären Büchern, welche die Projektionslehre in hergebrachter oder etwas geänderter Gruppierung behandeln, liegt hier ein Lehrbuch vor, das diese Disziplin auf streng wissenschaftlicher Basis und in erschöpfender, vielfach neuer und origineller Weise zur Darstellung bringt. Auf dem durch die grundlegenden Werke von Fiedler, Wiener und von Rohn und Papperitz bezeichneten Wege bedeutet es eine neue Etappe. Von vorn herein sei bemerkt, wodurch sich das neue Lehrbuch von den älteren unterscheidet: es ist, wie schon im Titel angegeben wird, für technische Hochschulen bestimmt. Das kommt dadurch zur Geltung, daß bei den Raumobjekten solche bevorzugt werden, welche der Architekt oder Ingenieur wirklich benutzt, daß ferner die Schatten-Konstruktionen eine besonders eingehende Behandlung finden und daß endlich die neuere Geometrie nicht in zusammenhängender Weise vorgetragen wird, sondern daß die aus diesem Gebiete notwendigen Sätze je an Ort und Stelle eingeflochten sind. Die Bezeichnung ist die in der Technik übliche; die Figuren sind in ausgezeichneter Weise korrekt und übersichtlich behandelt. Unter Umständen ist bloß ein einziger Riß beigegeben, wenn er zur Kenntlichmachung der Konstruktion genügt, und es wird eventuell durch eine beigefügte kleine Skizze der Zusammenhang mit der ganzen Figur hergestellt. Durch diese geschickte Methode gelingt es dem Verfasser, mit dem nicht großen Formate auszukommen. Für die in den Figuren benutzten Buchstaben sind nicht Drucklettern, sondern der Handschrift ähnliche, stehende Formen verwendet, wodurch die Figuren den Charakter von Handzeichnungen gewinnen sollen. Über die Zweckmäßigkeit dieser Maßregel dürften die Meinungen geteilt sein; leichter zu lesen sind sicher die Drucklettern. Das Buch beginnt zwar mit den Elementen, doch werden dieselben nur in den Hauptzügen behandelt, so daß eigentlich ein mit ihnen bereits vertrauter Leser vorausgesetzt wird.

Der vorliegende erste Band zerfällt in zwei Abschnitte, deren erster den Titel führt: Abbildung mittels zugeordneter Normalrisse. Nach den notwendigen Bemerkungen über das System der Tafeln und deren Vereinigung in einer Ebene werden zunächst die Seitenrisse behandelt, und sofort zur Lösung der sehr allgemeinen Aufgabe benutzt, den Normalriß einer gegebenen Figur in einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene zu ermitteln. Es folgt ein Beispiel über Drehungen, sowie ein sehr instruktives, praktisch wichtiges über das Weglassen der Rißachsen. Nun kann zur Erledigung der Grundaufgaben

über Lagenbeziehungen übergegangen werden. Daran reihen sich die Schattenbestimmungen für ebenflächige Körper. Der Affinität wird ein eigenes Kapitel gewidmet. Die Behandlung der metrischen Fundamental-Aufgaben beschließt endlich diese Theorie der stereometrischen Konstruktionen.

Der zweite, weit umfangreichere Abschnitt trägt den Titel: Kurven und Flächen. Lösung sie betreffender Aufgaben in zugeordneten Normalrissen. Allgemeine Betrachtungen über Kurven und Flächen eröffnen ihn; zum Teil können die Sätze natürlich nur ohne Beweis angeführt werden. Sodann wird eine Theorie der Kurven 2. Ordg. gegeben; die Ellipse ergibt sich als Normalriß des Kreises, die Kurven 2. Ordg. überhaupt werden als ebene Schnitte des Drehungskegels eingeführt. Nachdem der Begriff des Doppelverhältnisses, sowie harmonischer Punkte und Strahlen erörtert worden, ist die Möglichkeit gegeben, die Polareigenschaften der Kegelschnitte in aller Kürze vorzutragen. Die nächsten Kapitel behandeln dann die Kegel- und Zylinderflächen und die allgemeinen abwickelbaren Flächen, die Kugelfläche, die Rotations- und Schraubenflächen. Namentlich die letzteren, die allgemein durch Verschraubung einer beliebig gegebenen Raumkurve entstehen, finden eingehende Behandlung. Überall werden verschiedene Methoden angegeben, um die Kontur der Fläche, die Eigenschattengrenze und endlich die Lichtgleichen für parallele Beleuchtung im allgemeinen Falle sowohl wie bei speziellen Annahmen zu konstruieren. Ein letztes Kapitel beschäftigt sich mit windschiefen und sog. graphischen Flächen, welche letztere lediglich durch eine Schar graphisch gegebener Kurven bestimmt sind, wie etwa ein Schiffsrumpf.

Die Darstellung ist klar und verständlich; dankbar zu begrüßen sind auch an manchen Stellen eingestreute Bemerkungen, welche Anhaltspunkte für das Skizzieren oder freihändige Zeichnen geben. Erwähnt seien die brauchbaren Sätze auf S. 51 und S. 78, die allgemeine Formulierung von Satz 5 auf S. 40, sowie die Sätze über die Eigenschattengrenze auf S. 288—290.

Nicht für vorteilhaft hält es der Referent, daß die so instruktiven Durchdringungen ebenflächiger Gebilde allem Anscheine nach erst im 2. Bande behandelt werden sollen. Zu dürftig ist auch die wichtige Dreikantsaufgabe auf S. 98 weggekommen, welche die Schnittlinien zweier konzentrischer Umdrehungskegel ermitteln lehrt. Die Anzahl der Lösungen ist übrigens allgemein vier. Literaturangaben finden wir in reichem Maße; manchmal sogar überreichlich. Beispielsweise erscheint die Erwähnung der zyklographischen Abbildung auf S. 4 wenig zweckmäßig. So interessant sie an und für sich ist, so kann sie doch nicht im gleichen Atem mit solchen Abbildungen genannt werden, welche wirkliche Bilder der Objekte liefern. Endlich wäre es wünschenswert, das Buch noch in mancher Beziehung selbständiger zu machen. Den Satz z. B., daß jeder Kegel 2. Ordg. Kreisschnitte besitzt, muß ein auf solcher Grundlage aufgebautes Werk selbst enthalten und es darf für ihn nicht auf Rohn und Papperitz verwiesen werden (S. 193). Statt der Wörter „Knick“, „Drehfläche“, „Mehrfachpunkt“, „Strahlkurve“ würde der Referent die anderen vorschlagen: „Knickung“, „Drehungsfläche“, „mehrfacher Punkt“, „Strahlenkurve. Zum Schlusse aber möge das vorzügliche Werk nicht nur den Technikern, sondern auch den theoretischen Geometern bestens empfohlen werden.

München, den 15. März 1910.

KARL DÖHLEMANN.

**Hilfstafeln für Tachymetrie** von **Dr. W. Jordan**, Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover. Vierte Auflage. Stuttgart 1908, J. B. Metzler'sche Buchhandlung. *M* 8.—, geb. *M* 8.60.

**Prof. N. Jadanza Tachymeter-Tafeln** für zentesimale Winkelteilung. Deutsche Ausgabe, nach der 2. Auflage (Turin 1904) besorgt von **E. Hammer**. Stuttgart 1909, Konrad Wittwer. *M* 2.80, geb. *M* 3.50.

Unter den zahlreichen Hilfsmitteln zur Berechnung der bei tachymetrischen Messungen auftretenden Gleichungen

$$(1) \quad e = E \cos^2 \alpha \text{ und}$$

$$(2) \quad h = \frac{1}{2} E \sin 2\alpha$$

gehören die numerischen Tafeln von Jordan — für sexagesimale Winkelteilung — und von Jadanza — für zentesimale Winkelteilung — zu den meistbenutzten, so daß eine kurze Bemerkung zu den beiden Werken berechtigt sein dürfte.

In den Gleichungen (1) und (2) bedeuten  $e$  und  $h$  die horizontale Entfernung bzw. den Höhenunterschied zweier Punkte,  $\alpha$  den Neigungswinkel der zwischen ihnen möglichen Zielung, und  $E$  eine Rechnungshilfsgröße;  $\alpha$  wird unmittelbar,  $E$  mittelbar gemessen;  $h$  und  $e$  sind zu berechnen.

Jede Tachymetertafel zerfällt entsprechend den zwei Gleichungen (1) und (2) in zwei getrennte Tafeln für  $e$  und  $h$ , von denen jede wegen der zwei veränderlichen Größen  $E$  und  $\alpha$  zwei Eingänge besitzt. Da eine numerische Tachymetertafel, die in  $e$  und  $h$  eine genügende Genauigkeit bieten soll, auf eine größere Anzahl von Seiten verteilt werden muß, so hat man eine der beiden Veränderlichen  $E$  und  $\alpha$  als Haupt- oder Seiteneingang zu wählen. Bei den Jordanschen Tafeln wurde  $E$ , bei den Tafeln von Jadanza  $\alpha$  als Seiteneingang gewählt.

Die Jordanschen Tafeln enthalten auf 243 Seiten  $e$  und  $h$  für alle ganze  $E$  zwischen 10 und 250, und für  $\alpha$  im Maximum bis zu  $30^\circ$  in Abständen von 1 bzw. 2 Minuten;  $e$  ist auf eine,  $h$  auf zwei Dezimalen angegeben. Den Tafeln können demnach  $h$  und  $e$  für  $E$  und  $\alpha$  zwischen den angegebenen Grenzen — abgesehen von Interpolation — *unmittelbar* entnommen werden.

Die Tafeln von Jadanza enthalten auf nur 63 Seiten  $e$  und  $h$  für  $\alpha$  von  $0^\circ$  bis  $31^\circ$  in Abständen von  $0,02^\circ$  und für alle ganze  $E$  von 1 bis 9; dabei sind  $e$  und  $h$  bis zu  $E = 4$  auf fünf Dezimalen, und von  $E = 5$  bis  $E = 9$  auf vier Dezimalen angegeben. Mit Hilfe der Tafeln können also  $e$  und  $h$  für Werte von  $E$  zwischen 1 und 400 auf drei Dezimalen, und für Werte von  $E$  zwischen 400 und 900 auf zwei Dezimalen durch einfaches *Zusammensetzen* (Addieren) bestimmt werden.

Einer der Nachteile der numerischen Tafel im allgemeinen gegenüber der graphischen Tafel, bestehend in der durch Druckfehler bedingten Unsicherheit, trat bei den früheren Auflagen der Jordanschen Tafeln in solchem Umfang auf, daß bei ihrem Gebrauch Vorsicht nötig war; in der vorliegenden vierten Auflage dürften die früheren Druckfehler wohl größtenteils beseitigt sein.

Straßburg i. E.

P. WERKMEISTER.

## Neue Bücher.

### Arithmetik, Analysis.

1. LUDWIG, WILH., Lehrbuch der politischen Arithmetik. 2. Aufl. Wien, Fromme. M. 3.40.
2. RICHARDSON, L. F., The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. London, Dulau. 3 s. 6 d.
3. WELLSCH, SIEGMUND, Theorie u. Praxis der Ausgleichsrechnung. II. Bd. Probleme der Ausgleichsrechnung. Wien u. Leipzig, Fromme. M. 7.50.  
S. auch Nr. 70, 78.

### Astronomie, Geodäsie.

4. ANDING, E., Kritische Untersuchungen üb. die Bewegung der Sonne durch den Weltraum. 2. Abschnitt. Hilfsmittel u. vorbereitende Untersuchungen zur Stellarastronomie. Leipzig, Teubner. M. 10.—.
5. Astrographic catalogue, 1900. Oxford section. From photographs taken and measured at the University Observatory, Oxford, under the direction of H. H. Turner. Vols. 1—6. London 90 s.
6. BALL, SIR ROBERT S., The story of the sun. Part I. London. 7 d.
7. HAMMER, E., Meß- u. Rechen-Übungen zur praktischen Geometrie. 4. Aufl. A. Ausgabe f. Bau-Ingenieure. Stuttgart, Metzler. Geb. M. 3.30.
8. —, Dasselbe. B. Ausgabe f. Maschinen-Ingenieure und Architekten. Ebenda. Geb. 1.40.
9. HARZER, PAUL, Über die geometrische Methode zur Bestimmung der Bahnen von Himmelskörpern nach fünf Beobachtungen. (Publikation der Sternwarte in Kiel. XII.) Leipzig, Breitkopf & Härtel.
10. PAGANO DI MELITO, G., Le rette di altezza ed altri calcoli di astronomia nautica L. 3.50,
11. VOGLER, CH. AUG., Geodätische Übungen f. Landmesser u. Ingenieure. 3. Aufl. 1. Tl.: Feldübungen. Berlin, Parey. Geb. in Leinw. M. 10.—.
12. SCHWAHN, PAUL, Mathematische Theorie der astronomischen Finsternisse. (Mathem.-physikal. Schriften f. Ing. u. Studierende. hrsg. v. E. Jahnke, 8) Leipzig u. Berlin, Teubner. M. 3.20; geb. in Leinw. M. 3.60.  
S. auch Nr. 18, 31, 66.

### Darstellende Geometrie.

13. DUNCAN, R. HOWARD, Practical curve tracing. London. 5 s.
14. FANO, GIUSEPPE, Lezioni di geometria descrittiva date nel r. Politecnico di Torino. Torino. L. 16.—.
15. KOPPE, HEINR., Mathematische Modelle zum Selbstanfertigen. Nordhausen, Koppe. In Umschlag M. 1.50, die fertigen Modelle M. 2.50.
16. MÜLLER, EMIL, Technische Übungsaufgaben f. darstellende Geometrie. I. und II. Heft. Leipzig u. Wien, Deuticke. Je M. 5.—.

**Geschichte.**

17. AUERBACH, FELIX, *Geschichtstafeln der Physik.* Leipzig, Barth. *M.* 4.—; geb. *M.* 5.—.
18. HAERPFER, A., *Die Probleme v. Hansen u. Snellius.* (Abb. Gesch. der math. Wiss. 26. Heft Nr. 1.) *M.* 1.—.
- S. auch Nr. 71, 75.

**Logikrechnung.**

19. SCHRÖDER, ERNST, *Abriß der Algebra der Logik*, bearb. im Auftrag der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von Eugen Müller. In drei Teilen. Zweiter Teil. Aussagentheorie, Funktionen. Gleichungen u. Ungleichungen. Leipzig u. Berlin. Teubner. Geb. in Leinw. *M.* 4.—.

**Mechanik.**

20. BOUASSE, H., *Cours de mécanique rationnelle et expérimentale spécialement écrit pour les physiciens et les ingénieurs.* Paris, Delagrave. Fr. 20.—
21. BUCHALO, S., *Statik des Fluges.* Stuttgart, Greiner u. Pfeiffer. *M.* 3. 50.
22. COTTERILL, J. H., and SLADE, J. H., *Lessons in applied mechanics.* Vols 1 and 2. London. each 3 s
23. DARWIN, SIR GEORGE HOWARD, *Scientific papers vol 3. Figures of equilibrium of rotating liquid and geophysical investigations.* London. 15 s
24. *Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften m. Einschluß ihrer Anwendungen.* Bd. IV, 2. II. *Mechanik.* Leipzig, Teubner. *M.* 3. 40.
25. GÖTZ, HANS, *Theoretische Untersuchung e. Bonjour-Lachansée-Dampfmaschine auf Massendruck der Steuerung u. Resonanz des Regulators.* Berlin, Sirmion Nf. *M.* 3. 50.
26. HERTZ, HEINR., *Gesammelte Werke.* III. Bd. *Die Prinzipien der Mechanik*, in neuem Zusammenhange dargestellt. Hrsg. v. P. Lenard. Mit e. Vorworte von H. v. Helmholtz. 2. Aufl. Leipzig, Barth. *M.* 12.—; in Halbldr. *M.* 13. 50.
27. HOPKINSON, B., *Vibrations of systems having one degree of freedom.* (Cambridge, Engineering Tracts No. 1.) Cambridge, University Press. 2 s. 6 d.
28. HORT, W., *Technische Schwingungslehre. Einführung in die Untersuchung der f. den Ingenieur wichtigsten periodischen Vorgänge aus der Mechanik starrer, elastischer, flüssiger und gasförmiger Körper, sowie aus der Elektrizitätslehre.* Berlin, Springer. Geb. in Leinw. *M.* 6. 40.
29. LOBENZ, HANS, *Lehrbuch der technischen Physik.* 3. Bd.: *Technische Hydro-mechanik.* München, Oldenbourg. *M.* 14.—; geb. *M.* 15.—.
30. MEHRTENS, GEO. CHRISTOPH, *Vorlesungen üb. Ingenieur-Wissenschaften.* I. Tl.: *Statik u. Festigkeitslehre.* 2. Bd. *Äußere und innere Kräfte, sowie Formenänderungen statisch bestimmter Träger.* 2. umgearb. u. stark vermehrte Aufl. Leipzig, Engelmann. *M.* 21.—; geb. in Leinw. *M.* 22. 50.
31. POINCARÉ, H., *Leçons de mécanique céleste, professées à la Sorbonne.* T. III. *Théorie des marées.* Paris, Gauthier-Villars. Fr. 16.—.
32. TIERDING, H. E., *Theorie der Kräftepläne.* (Mathem.-physikal. Schriften f. Ing. u. Studierende, Bd. 7.) Leipzig u. Berlin, Teubner. *M.* 2. 60; geb. in Leinw. *M.* 3.—.
- S. auch Nr. 79.

**Physik.**

33. ALT, HEINRICH, *die Kälte, ihr Wesen, ihre Erzeugung u. Verwertung.* („Aus Natur u. Geisteswelt“, 311. Bändchen). Leipzig Teubner. *M.* 1.—; geb. *M.* 1. 25.
34. —, *Schülerübungen zur Einführung in die Physik.* Ein praktisches Hilfsbuch für den Lehrer. Leipzig und Berlin, Teubner.

35. BARRILLON, L., Les compteurs électriques à courants continus et à courants alternatifs. Leçons professées à l'Institut électrotechnique de Grenoble. Avec la collaboration de G. Ferroux. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 3.25.
36. BERG, OTTO, Das Relativitätsprinzip der Elektrodynamik. (Aus: Abhandlungen der Friesschen Schule.) Göttingen, Vandenhoeck u Ruprecht. *M* 1.60.
37. BOLTZMANN, LUDW., Vorlesungen üb. Gastheorie. 1. Tl.: Theorie der Gase m. einatomigen Molekülen, deren Dimensionen gegen die mittlere Weglänge verschwinden. 2., unveränd. Abdr. Leipzig, Barth. *M* 6.—; geb. *M* 7.—.
38. BRION, G., Leitfaden zum elektrotechnischen Praktikum. Leipzig u. Berlin, Teubner. *M* 10.—; geb. *M* 11.—.
39. BYK, ALFRED, Einführung in die kinetische Theorie der Gase. I. Die idealen Gase. (Mathem.-physikal. Schriften f. Ing. u. Studierende 10, 1.) Leipzig u. Berlin, Teubner. *M* 2.80; geb. *M* 3.20.
40. CHRISTIANSEN, C. u. MÜLLER, JOHN J. C., Elemente der theoretischen Physik. Mit e. Vorwort v. E. Wiedemann. 3., verb. Aufl. Leipzig, Barth. *M* 13.50; geb. in Leinw. *M* 15.—.
41. CHWOLSON, O. D., Traité de physique. Ouvrage tradnit sur les éditions russe et allemande par E. Davane. Édition revue et considérablement augmentée par l'auteur, suivie de notes sur la physique théorique, par E. Cosserat et F. Cosserat. Vol. 4. 1er fasc. Champ électrique constant. Paris. Hermann. Fr. 12.
42. COMBEBIAC, G., Les actions à distance. („Scientia“ phys.-mathématique n° 30.) Paris. Gauthier-Villars. Fr. 2.—.
43. Enzyklopädie der math. Wissenschaften m. Einschluß ihrer Anwendungen. V. Bd. Physik. 2. Tl. 3. Heft. Leipzig, Teubner. *M* 4.60.
44. Fortschritte, die der Physik im J. 1909. Dargestellt v. d. deutschen physikal. Gesellschaft. 65. Jahrg. 1. Abteilung. Allgemeine Physik, Akustik, physikalische Chemie. Braunschweig, Vieweg & Sohn. *M* 27.—.
45. FÜRSTENAU, ROB., Leitfaden der Röntgenphysik. Vorträge üb. die physikal. Grundlagen der Röntgenapparate. Stuttgart, Encke. *M* 3.—; geb. in Leinw. *M* 4.—.
46. GRAETZ, L., Kurzer Abriß der Elektrizität. 6. verm. Aufl. Stuttgart, Engelhorn. Geb. *M* 3.50.
47. HICKS, W. M., A critical study of spectral series. Part. I. The alcalies H and He. London. 2 s. 6 d.
48. HOLT, H., Der Entropiesatz oder der 2. Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie. Berlin, Springer. *M* 1.—.
49. LAMB, HORACE, The dynamical theorie of sound. London. 12 s. 6 d.
50. MACDONALD, H. M., The diffraction of electric waves round a perfectly reflecting obstacle. London. 2 s.
51. MAHLER, G., Physikalische Aufgabensammlung. Mit den Resultaten. (Sammlung Göschen Nr. 243.) Zweite, verb. u. verm. Aufl. Leipzig, Göschen. Geb. *M* —.80.
52. MIE, GUST., Lehrbuch der Elektrizität u. des Magnetismus. Eine Experimentalphysik des Weltäthers f. Physiker, Chemiker, Elektrotechniker. Stuttgart, Encke. *M* 18.60; geb. 20.
53. NODON, A., L'action électrique du soleil, son rôle dans les phénomènes cosmiques et terrestres. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 3.25.
54. OERTINGEN, ARTH. v., Die Schule der Physik. Besonders f. das Selbststudium verfaßt. Braunschweig, Vieweg & Sohn. *M* 10.—; geb. in Leinw. *M* 11.50.
55. PLANCK, MAX, 8 Vorlesungen üb. theoretische Physik, geh. an der Columbia University in the City of New York im Frühjahr 1909. Leipzig, Hirzel. *M* 3.60; geb. *M* 4.20.
56. POHL, ROB., Die elektrische Fernübertragung v. Bildern. (»Die Wissenschaft« Heft 34.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. *M* 1.80; geb. *M* 2.50.

57. PRINGSHEIM, E., Vorlesungen üb. die Physik der Sonne. Leipzig u. Berlin, Teubner. *M* 16.—; geb. in Leinw. *M* 18.—
58. RIGHI, AUGUSTO, La materia radiante e i raggi magnetici. 2<sup>a</sup> ediz. aumentata. Bologna. *L* 8.—
59. WALKER, GEORGE W., The initial accelerated motion of electrified systems of finite extent, and the reaction produced by the resulting radiation. London. 2 s. 6 d.
60. WEDEKIND, E., u. LEWIS, S. IUDD, Neue Atomgewicht-Kurven. Stuttgart, Enke. Geb. in Leinw. *M* 1.60.

S. auch Nr. 2, 6, 17, 20, 23, 28, 29, 65, 77.

### Statistik, Versicherungs-Mathematik.

61. LOEWY, A., Versicherungs-Mathematik. (Sammlung Göschen Nr. 180). 2. Aufl. Leipzig, Göschen. Geb. in Leinw. *M* —.80.
62. RICHARZ, FRZ. u. NEUMANN, ERNST. Über ein Maß des Verdachtes auf systematische Fehler. Progr. Marburg 1909. Elwert. *M* 1.20.
- S. auch Nr. 3.

### Tafeln.

63. DÖRFFURT, B., Graphische Tabellen f. Transmissionsberechnungen. Gr. Lichterfelde-Berlin, Runge. In Mappe *M* 2.50.
64. FÜRLE, HERM., Ein Rechenblatt zur Auflösung der Gleichung 4. Grades m. Hilfe des Zirkels. Progr. Berlin, Weidmann. *M* 1.—
65. KÜSTER, F. W., Logarithmische Rechentafel f. Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner u. Physiker. 10., neu berechnete Aufl. Leipzig, Veit & Co. Geb. in Leinw. *M* 2.40.
66. REGER, F., Tachymeter-Tafeln als Ergänzungen der Jordanschen „Hilfstafeln f. Tachymetrie“. Mit e. Vorwort v. E. Hammer. Stuttgart, Metzler. *M* 5.—; geb. in Leinw. *M* 5.60.
67. SCHULTZ, E., Vierstellige Logarithmen der gewöhnlichen Zahlen und der Winkelfunktionen in übereinstimmender Anordnung u. andere mathematische Tafeln nebst den erforderlichen physikalischen Hilfstafeln zum Gebrauche an den höheren Lehranstalten u. Lehrerseminarien. Vollständige Ausgabe (A). 2. Aufl. Essen, Baedeker. *M* 1.40.
68. ZECH, J., Tafeln der Additions- u. Subtraktions-Logarithmen f. 7 Stellen. [Aus: Vega-Hülse, Sammlung mathem. Taf.]. 4. Aufl. Berlin, Weidmann. *M* 3.—.

### Verschiedenes.

69. COMPTE-RENDU du congrès des mathématiciens tenu à Stockholm 22—25 septembre 1909. Publié par G. Mittag-Leffler et Ivar Fredholm. Leipzig u. Berlin, Teubner. *M* 5.—; geb. in Leinw. *M* 6.—.
70. DZIOBEK, O., Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 16.—.
71. ENSTRÖM, G., Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers. Erste Lieferung. (Jahresber. Deutsch. Mathematiker-Vereinigung. Der Ergänzungsbände IV. Bd. 1. Liefg.). Leipzig, Teubner. *M* 10.—.
72. ENRIQUES, FEDERIGO, Probleme der Wissenschaft. Übersetzt v. Kurt Grelling. I. Teil: Wirklichkeit und Logik. („Wissenschaft u. Hypothese“ XI 1.) Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. Geb. in Leinw. *M* 4.—.
73. —, Dasselbe. II. Teil. Die Grundbegriffe der Wissenschaft. Ebenda. Geb. in Leinw. *M* 5.—.
74. JUDE, ALEX., The theory of the steam turbine. 2nd ed. Revised throughout and re-written. London, Griffin. 18 s.

75. MIKAMI, YOSHIO, *Mathematical papers from the far east.* (Abh. zur Gesch. d. mathem. Wiss. XXVIII. Heft.) Leipzig, Teubner.
76. NATORP, PAUL, *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften.* („Wissenschaft u. Hypothese“ XII.) Leipzig u. Berlin, Teubner.  
Geb. in Leinw. *M* 6.60.
77. OSTERTAG, P., *Die Entropietafel f. Luft u. ihre Verwendung zur Berechnung der Kolben- und Turbo-Kompressoren.* Berlin, Springer. *M* 2.80.
78. PERRY, JOHN, *Höhere Analysis f. Ingenieure*, bearb. v. Rob. Fricke u. Fritz Süchting. 2., verb. u. erweit. Aufl. Leipzig, Teubner.  
Geb. in Leinw. *M* —.13.
79. SALIGER, RUD., *Antrittsrede zur Eröffnung der Vorlesungen üb. Mechanik und Statistik des Hochbaues sowie üb. Eisenhochbau an der k. k. technischen Hochschule in Wien am 30. XI. 1909.* Wien, Lehmann & Wentzel. *M* —.50.

### Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

- ALT, H., *Die Kälte . . .*, s. N. B. („Neue Bücher“) Nr. 33.
- , *Schülerübungen zur Einführung in die Physik*, N. B. 34.
- ANDING, E., *Kritische Untersuchungen über die Bewegung der Sonne durch den Weltraum*, s. N. B. 4.
- Annalen der Naturphilosophie*, hrsg. v. Wilhelm Ostwald. Neunter Band. Erstes Heft. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft.
- ARCHIMEDIS *opera omnia.* Cum commentariis Eutocii iterum edidit J. L. Heiberg. Volumen I. (Bibliotheca scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana.) Leipzig, Teubner. *M* 6 —; geb. in Leinw. *M* 6.60.
- ASTRONOMISCH-geodätische Arbeiten I. Ordnung. Bestimmung der Polhöhe u. des Azimutes in Memel i. J. 1907. Telegraphische Längenbestimmungen Potsdam-Jena, Jena-Gotha und Gotha-Göttingen i. J. 1909. (Veröff. des Kgl. preuß. geodät. Instituts, Neue Folge Nr. 43.) Berlin, Stankiewicz.
- AUBELL, FRANZ, *Ein reduzierendes Doppelbild-Tachymeter.* (Sonderabdruck aus d. österr. Zeitschr. f. Vermessungswesen, Jahrg. 1910.) Graz, Selbstverlag.
- AUERBACH, F., *Geschichtstafeln der Physik*, s. N. B. 17.
- BACHMANN, PAUL, *Niedere Zahlentheorie. 2. Teil. Additive Zahlentheorie.* (Teubners Sammlung Band X 2.) Leipzig, Teubner. *M* 16.—; geb. *M* 17.—.
- BALSER, LUDWIG, *Über die Verwendung der Parallelprojektion im geometrischen Unterricht.* (Wissenschaftl. Beilage zum Jahresbericht d. Großherzogl. Oberrealschule zu Darmstadt.) Darmstadt, Wintersche Buchdruckerei.
- BARBILLION-FERROUX. *Compteurs électriques*, s. N. B. 35.
- BERG, O., *Das Relativitätsprinzip der Elektrodynamik*, s. N. B. 36.
- BERNOULLI, JACOB, *Über unendliche Reihen (1689—1704).* Aus dem Lateinischen übersetzt u. hrsg. v. G. Kowalewski. (Ostwalds Klassiker Nr. 171) Leipzig 1909, Engelmann. Geb. *M* 2.50.
- BILLY, JACOBI DE, *Doctrinae analyticae inventum novum. Fermats Briefen an Billy entnommen.* Hrsg. u. übersetzt v. Paul von Schaeven. Berlin, Salle. *M* 3.—.
- BLUME, G., *Das Veranschlagen f. Hochbauten.* („Der Unterricht an Baugewerbeschulen“ 26.) Leipzig u. Berlin, Teubner. Kart. *M* 1.80.
- BÖHM, KARL, *Elliptische Funktionen. 2. Teil: Theorie der elliptischen Integrale. Umkehrproblem.* (Sammlung Schubert LXI.) Leipzig, Göschen. Geb. *M* 5.—.

- BOHNERT, F., Elementare Stereometrie, (Sammlung Schubert IV.) 2., durchgesehene Aufl. Leipzig, Göschen. Geb. *M* 2.40.
- BRICARD, R., Sur la géométrie des feuilletés de M. René de Saussure. Étude analytique. (Extrait des Nouvelles Annales de Mathématiques. 4e série, t. X, janvier 1910.) Paris, Gauthier-Villars.
- BRJON, G., Leitfaden zum elektrotechnischen Praktikum, s. N. B. 38.
- BUCHALO, S., Statik des Fluges, s. N. B. 21.
- BÜTZBERGER, F., Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Mit vielen Aufgaben und Anwendungen. Für Gymnasien, Seminarier u. technische Mittelschulen, sowie zum Selbstunterricht. Vierte, verb. u. verm. Aufl. Zürich 1909. Orell Füssli. *M* 2.—.
- BYK, A., Kinetische Theorie der Gase, s. N. B. 39.
- CABREIRA, ANTONIO, Les Mathématiques en Portugal. Deuxième défense des travaux de l'auteur. Lisbonne, chez l'auteur, Rua das Taipas, T. C.
- COMBEHIAC, G., Les actions à distances, s. N. B. 42.
- COMPTES RENDU du congrès des mathématiciens, s. N. B. 69.
- CONTRIBUTIONS from the Jefferson Physical Laboratory of Harvard University for the year 1909. Vol. VII. Cambridge, Mass., U. S. A.
- COUTURAT, LOUIS, Linguo internaciona di la Delegitaro (Ido). Internaciona matematikal lexiko en Ido, Germana, Angla, Franca e Italiana. Internationales mathematisches Lexikon in Ido, Deutsch, Englisch, Französisch u. Italienisch. Jena, Fischer. *M* 1.50.
- CRANTZ, P., Arithmetik u. Algebra zum Selbstunterricht. I. („Aus Natur u. Geisteswelt“, 120. Bändchen.). 2. Aufl. Leipzig, Teubner. Geb. *M* 1.25.
- DÜRER, ALBRECHT, Unterweisung der Messung. Um einiges gekürzt u. neuerem Sprachgebrauch angepaßt hrsg. sowie mit einem Nachwort versehen v. Alfred Peltzer. Auf Veranlassung u. mit einem Vorwort v. Hans Thoma. München 1909. Süddeutsche Monatshefte. G. m. b. H.
- DZIOBEK, O., Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, s. N. B. 70.
- ENRIQUES, F., Probleme der Wissenschaft, I, III, s. N. B. 72 u. 73.
- FRANKLAND, W. BARRETT, Theories of parallelism, an historical critique. Cambridge, University Press. 3
- GANTER, H., u. RUDIO, F., Die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. 7., verb. Aufl. Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 3.—.
- GUBLER, S. E., Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik u. Algebra f. Mittelschulen, methodisch bearb. IV. Heft. Zürich, Orell Füssli. *M* 1.20.
- GUTZMER, A., Bericht üb. die Tätigkeit des deutschen Ausschusses f. den mathematischen u. naturwissenschaftlichen Unterricht im J. 1909. (Schriften des deutschen Ausschusses f. den mathem. u. naturw. Unterricht. Heft 6.) Leipzig u. Berlin, Teubner.
- HARTDEGEN, FERD., Integral- u. Differentialrechnung. Brief 1. (Mathem. Unterrichtsbriefe f. das Selbststudium Erwachsener, Methode Burckhardt-Blank, Kursus 5.) Kahla i. Thür., Thür. Verlagsanstalt. *M* —.60.
- HARTL, HANS, Resultate zu den Aufgaben aus der Arithmetik u. Algebra. 3., verb. Auflage. Wien u. Leipzig, Deuticke. *M* 1.80.
- HARZER, P., Über die geometrische Methode zur Bestimmung der Bahnen von Himmelskörpern, s. N. B. 9.
- HEMANN, BRUNO, Kleine Himmelskunde. Allgemein verständliche Darstellung der Vorgänge im Weltall und Beschreibung der bekannten Weltkörper unter besonderer Berücksichtigung unseres Sonnensystems und unserer Erde. Leipzig, Röder & Schunke. *M* 1.25.

- HOCH, JULIUS, 1000 eingekleidete Gleichungen. Eine Ergänzung der algebraischen Aufgabensammlungen f. höhere Schulen sowie insbesondere f. technische Fachschulen u. Baugewerkschulen. Essen, Bädeker. *M* 2.—
- HOPKINSON, B., Vibrations of systems, s. N. B. 27.
- HORN, J., Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen. (Sammlung Schubert LX.) Leipzig, Göschen. Geb. *M* 10.—
- JACOB, JOSEF, Arithmetik. I. Teil: Unterstufe. Wien 1909, Deuticke. K. 2; geb. K. 2.40.
- . Dasselbe. I. Teil: Für die 1. bis 3. Klasse. Ebenda. K. 2; geb. K. 2.40.
- JACOB und SCHIFFNER, Lehrbuch der Arithmetik und Geometrie f. Realschulen. Raumlehre, bearb. v. Franz Schiffner. Für die 1. bis 3. Klasse. Wien, Deuticke. K. 2.—; geb. K. 2.40.
- KAMBLY-RÖDER, Trigonometrie, neu bearb. v. Albrecht Thaer. Ausg. B: Für Oberrealschulen, Realgymnasien u. Gymnasien m. mathematischem Reformunterricht. 32. Aufl. der Kamblyschen Trigonometrie. Breslau, Hirt. Kart. od. geb. *M* 2.50.
- KÖNIGSBERGER, LEO, Über eine Eigenschaft unendlicher Funktionalreihen. (Sitzungsber. der Heidelberger Ak. der Wiss. Stiftung Heinrich Lanz, math.-naturw. Klasse, Jahrg. 1909. 2. Abhandlg.) Heidelberg 1909, Winter.
- KOPPE, H., Mathematische Modelle zum Selbstanfertigen, s. N. B. 15.
- KOWALEWSKI, GERHARD, Die klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen, Leipzig, Engelmann. *M* 15.—; geb. *M* 16.50.
- KRAUS, KONRAD, Methodik der Naturlehre. Anleitung z. Erteilung des Unterrichts in Volks- u. Bürgerschulen u. Fortbildungsschulen. Wien, Pichlers Wittve & Sohn. K. 3.—; geb. K. 3.50.
- LANGE, MAX, Das Schachspiel u. seine strategischen Prinzipien. („Aus Natur und Geisteswelt“, 281. Bändchen.) Leipzig, Teubner. *M* 1.—; geb. *M* 1.25.
- LAUNHARDT, Am sausen den Webstuhl der Zeit. Übersicht üb. die Wirkungen der Entwicklung der Naturwissenschaften u. der Technik auf d. gesamte Kulturleben. („Aus Natur u. Geisteswelt“, 23. Bändchen.) 3. Aufl. bearb. von L. Troske. Leipzig, Teubner. *M* 1.—; geb. *M* 1.25.
- LIND, BENNO, Über das letzte Fermatsche Theorem. (Abh. z. Geschichte d. mathem. Wiss. Heft XXVI. 2.) Leipzig u. Berlin, Teubner. *M* 2.—
- LINNICH, MAX, Lehr- u. Übungsbuch der Mathematik. Für höhere Mädchenschulen bearb. I. Teil. Lehrstoff d. 4. u. 3. Klasse. Leipzig, Freytag. Geb. *M* 2.—
- , Lehr- u. Übungsbuch f. den Unterricht in der Arithmetik u. Algebra, mit einem Anhang f. den Unterricht in der analytischen Geometrie. Für die höheren Lehrerinnenseminare bearb. Leipzig, Freytag. Geb. in Leinw. *M* 2.50.
- LOEWY, A., Versicherungs-Mathematik, , s. N. B. 61.
- MAHLER, G., Physikalische Aufgabensammlung, , s. N. B. 51.
- MANDL, MAX, Lehrbuch der Geometrie f. die oberen Klassen der Gymnasien und Realgymnasien (IV.—VIII. Klasse). Wien, Manz. K. 4.—; geb. K. 4.50.
- , Lehrbuch der Geometrie f. d. oberen Klassen d. Realschulen (IV.—VIII. Kl.) Wien, Manz. Broch. K. 4.—; geb. K. 4.50.
- MANNOURY, G., Methodologisches und Philosophisches zur Elementar-Mathematik. Haarlem 1909, Visser Azn. *M* 8 50; geb. *M* 9.50.
- MIKAMI, Y., Mathematical papers from the far east, s. N. B. 75.
- MONTEIL, P.-L., Théorie du point. (2<sup>a</sup> partie). Géométrie curviligne. 2<sup>ème</sup> éd., revue, corrigée et considérablement simplifiée. Paris, Chapelot et Cie.
- MÜLLER, E., Technische Übungsaufgaben f. darstellende Geometrie, s. N. B. 16.
- MULICA, J., Beweis der Fermatschen Satzes. Übersetzung des Verfassers nach den Originalartikeln in der „Revista Artilerici“ Bukarest. Wien, v. Waldheim, Eberle & Co.

- NATORP, P., Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften, s. N. B. 76.
- NÉMETH, JOHANNES, Der große Fermatsche Lehrsatz. Aus dem Ungarischen v. Josef Eber-Budapest, Stephaneum Buchdruckerei.
- NETTO, EUGEN, Die Determinanten. (Mathem.-physikal. Schriften f. Ingenieure u. Studierende, hrsg. v. E. Jahnke, Nr. 9.) Leipzig, Teubner.  
*M* 3.20; geb. in Leinw. *M* 3.60.
- NITSCHÉ, OTTO, Der arithmetrische Lehrgang in symmetrischem Aufbau. Ein Grundriß. Berlin, Weidmann. *M* 1.—.
- NODON, A., L'action électrique du soleil, s. n. B. 53.
- PASCAL, E., Repertorium der höheren Mathematik. Zweite, völlig umgearbeitete Auflage der deutschen Ausgabe, unter Mitwirkung zahlreicher Mathematiker hrsg. v. P. Epstein u. H. E. Timerding. I. Band: Analysis. Erste Hälfte: Algebra, Differential- u. Integralrechnung. Leipzig u. Berlin, Teubner.  
Geb. in Leinw. *M* 10.—.
- POINCARÉ, H., Leçons de mécanique céleste. s. N. B. 31.
- POSKE, F., Über die Notwendigkeit der Errichtung einer Zentralanstalt f. den naturwissenschaftl. Unterricht. (Schriften des deutschen Ausschusses f. den mathematischen u. naturwissenschaftl. Unterricht.) Leipzig u. Berlin, Teubner.  
*M* —.60.
- PRINGSHEIM, E., Physik der Sonne, s. N. B. 57.
- ROSMANTH-SCHOBER, Geometrische Formenlehre. Ein Leitfaden f. den geometrischen Anschauungsunterricht in der ersten Realschulklasse. 10. Aufl. Nach den neuen Lehrplänen bearb. v. Franz Bergmann. Wien, Pichlers Wittve & Sohn.  
Geb. K. —.90.
- , Grundriß der Geometrie in Verbindung mit dem geometrischen Zeichnen. 1. Teil: Lehr- u. Übungsbuch f. die II. u. III. Realklasse. 11. Aufl. Nach den neuen Lehrplänen bearb. v. Franz Bergmann. Ebenda. Geb. K. 1.60
- , Dasselbe, 2. Teil: Lehr- u. Übungsbuch f. die IV. Realklasse. Ebenda.  
Geb. K. 1.30.
- SAUSSURE, RENÉ DE, Exposé résumé de la géométrie des »feuilletés«. Nouvelle géométrie de l'espace basée sur la considération du »corps rigide« comme élément spatial, donnant naissance aux système des corps rigides (déplacements finis à plusieurs paramètres). (Mém. Soc. Phys. et Hist. nat. de Genève, vol. 36, 1910). Genève, Kündig.
- SCHIEFFNER, FRANZ, u. TRAVNÍČEK, JOSEF, Raumlehre. Der Unterstufe 1. Teil. Wien, Deuticke. K. —.70; geb. K. 1.—.
- , Dasselbe, Der Unterstufe 2. Teil. Ebenda. K. —.90; geb. K. 1.20.
- SCHRÖDER, E., Abriß der Algebra der Logik, II, s. N. B. 19.
- SCHRÖDER, J., Aufgaben f. den Unterricht in der analytischen Geometrie der Ebene an höheren Schulen. Leipzig u. Berlin, Teubner. *M* 1.40.
- SCHUBERT, HERMANN, Elementare Arithmetik u. Algebra. (Sammlung Schubert I.) Leipzig, Göschen. Geb. *M* 2.80.
- SCHULTZ, E., Vierstellige Logarithmen s. N. B. 67.
- SCHUSTER, AUGUST, Einführung in die elementare Mathematik. In 12 Vorträgen. („Sammlung Kösel“ Nr. 33.) Kempten u. München, Kösel.  
Geb. in Leinw. *M* 1.—.
- SCHWABH, PAUL, Mathematische Theorie der astronomischen Finsternisse, s. N. B. 12.
- STAUBE, OTTO, Analytische Geometrie des Punktepaars, des Kegelschnittes u. der Fläche zweiter Ordnung. Erster Teilband. (Teubner Sammlung Bd. XXX, 1.) Leipzig u. Berlin, Teubner. *M* 20.—; geb. in Leinw. *M* 22.—.
- STAUBE, OTTO, Analytische Geometrie des Punktepaars, des Kegelschnittes und der Fläche zweiter Ordnung. Zweiter Teilband. (Teubners Sammlung Bd. XXX, 2.) Leipzig u. Berlin, Teubner. *M* 16.—; geb. in Leinw. *M* 18.—.

- STOCKHAUS, HERMANN, Beitrag zum Beweis des Fermatschen Satzes. Leipzig, Braustetter. *M* 2.—.
- TIMBERING, H. E., Die Theorie der Kräftepläne, s. N. B. 32.
- VATER, R., Die Maschinenelemente. („Aus Natur u. Geisteswelt“, 301. Bändchen.) Leipzig, Teubner. *M* 1.—; geb. in Leinw. *M* 1.25.
- VEREIN DEUTSCHER INGENIEURE, der, und seine Arbeiten. Hrgs. aus Anlaß der Weltausstellung in Brüssel 1910.
- VERWALTUNGS-BERICHT über das sechste Geschäftsjahr und Bericht über die sechste Ausschußsitzung des unter dem Protektorate Seiner Königlichen Hoheit des Prinzen Ludwig von Bayern stehenden Deutschen Museums. München 1909, Oldenbourg.
- VOLRMANN, PAUL, Eigenart der Natur u. Eigensinn des Monismus. Vortrag, gehalten in Kassel u. in Königsberg i. Pr. im Herbst 1909. Leipzig u. Berlin, Teubner.
- VOLQUARDTS, G., Feldmessen u. Nivellieren. („Der Unterricht an Baugewerkschulen“, 13.) Leipzig u. Berlin, Teubner. *Kart. M* —.80.
- WEAD, CHARLES KASSON, Music and Science. Address of the retiring president, read before the Philosophical Society of Washington, January 15, 1910. (Philos. Society of Washington, Bulletin, vol. XV, pp. 169—187.) Washington, Philosophical Society.
- WEAD, CHARLES K., JAMES BRYCE, MILTON UPDEGRAFF, R. R. WOODWARD, L. O. HOWARD, HERBERT PUTNAM, E. M. CALLAUDET, SIMON NEWCOMB. Memorial Addresses. Read before the Philosophical Society of Washington, Decembre 4, 1909. (Philos. Soc. of Washington Bulletin, vol. XV, p. 133—167.) Washington, Philosophical Society.
- WEBER, H., u. WELLSTEIN, J., Enzyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch f. Lehrer u. Studierende. I. Band. Elementare Algebra u. Analysis. 3. Aufl. Leipzig 1909, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 10.—.
- WEHNER, HEINRICH, Zu einer Revision eines Satzes der Gravitationslehre. (Sonderabdruck aus: Neue Weltanschauung, 1910, Heft 8.) Leipzig, Barth.
- WELLISCH, L., Theorie u. Praxis der Ausgleichsrechnung, s. N. B. 3.
- YOUNG, W., G., The fundamental theorems of the differential calculus. (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics No. 11.) Cambridge, University Press. 2 s. 6 d.

## Technisches Abhandlungsregister 1906—1907.

Von E. WÖLFFING in Stuttgart.

(Fortsetzung und Schluß von Band 58, S. 444.)

## Trigonometrie.

5000. *A. G. Bennett.* Trigonometric functions of frog angles expressed in terms of frog number. E.N. 57. 516.

5001. *C. Cario.* Schornsteinhöhenmessungen. Z.D.M. 29. 108.

5002. *P. Epstein.* Eine einfache Ableitung des Legendreschen Satzes. Z.V. 36. 62.

5003. *W. Foerster.* Ein Sonnenrohr zur genäherten Zeitbestimmung. D.M.Z. 1907. 169.

5004. *K. Fuchs.* Das Rückwärtseinschneiden im Raume. Z.V. 35. 425.

5005. *P. Gast.* Ein Beitrag zur Polhöhenbestimmung. Z.V. 35. 81.

5006. *F. K. Geist.* Denkschrift zur Basismessung zwischen Darmstadt und Griesheim. Z.V. 35. 169.

5007. *A. Grünert.* Zur Berechnung der Höhe aus den 3 Seiten eines Dreiecks. Z.V. 36. 945.

5008. *Haller.* Neutriangulierung in Württemberg. Z.V. 35. 785.

5009. *F. A. Halsey.* Trigonometry in the tool room. Am.M. 30. B. 785.

5010. *J. Heil.* Hilfstafeln zur trigon. und tachymetr. Höhenmessung für Zentesimalteilung des Kreises. Z.V. 36. 57.

5011. *A. H. Horton.* An error in leveling caused by waving the leveling rod. E.N. 56. 35.

5012. *Klempau.* Einketten mit geographischen Koordinaten. Z.V. 35. 137.

5013. *A. Klingatsch.* Über photographische Azimutbestimmung. Z.V. 35. 905; 929.

5014. *Kopsel.* Eine trigonometrische Aufgabe. Z.V. 35. 568.

5015. *L. Krüger.* Eine Teilungsaufgabe. Z.V. 35. 241.

5016. *W. Laska.* Polygonalmessungen bei Eisenbahnarbeiten. Z.V. 36. 185.

5017. *W. Laska.* Zur Geschichte des Rückwärtseinschneidens. Z.V. 36. 514.

5018. *P. Lehoux.* Tableau dressé pour servir au calcul de l'azimut et de l'heure d'après les tables Sanguer. J.G. (6) 9. 264.

5019. *H. Löschner.* Über den Anschluß von selbständigen Triangulierungen an solche höherer Ordnung. Z.V. 35. 377.

5020. *E. H. Mc Alister.* A new method for determining azimuth. E.N. 58. 89.

5021. *C. Pulfrich.* Über ein Verfahren zur direkten Ermittlung der Horizontalprojektion der Ziellinie nach einem nicht notwendig zugänglichen Punkte. Z.I. 27. 329.

5022. *Puller.* Bemerkungen zur Aufgabe des Rückwärtseinschneidens. Z.V. 36. 413.

5023. *H. Sossna.* Grenzausgleichungen unter Berücksichtigung von Bonitäten. Z.V. 35. 268.

5024. *Wilcke.* Beitrag zur Berechnung von Dreiecken. Z.V. 35. 439.

## Vektoranalysis.

5025. *C. Turnbull.* Vectors and Wattful currents. T.E. 59. 105.

## Wärme.

5026. *J. Adam.* Zur Bestimmung der Korrektion des herausragenden Fadens von Hg-thermometern mit Hilfe des Fadenthermometers. Z.I. 27. 101.

5027. *H. Alt.* Über die Verdampfungswärme des flüssigen O und flüssigen N und deren Änderung mit der Temperatur. Z.K.F.G. 9. 179; 10. 1; 19.

5028. *C. G. Atwater.* The burning of washer slate and coke braize. E.W. 48. 659.

5029. *A. Bantlin.* Der Nutzen des Dampfmantels nach neueren Versuchen. Z.V.D.I. 50. 1066; 1108; 1184; 1227; 1313.

5030. *A. Barbezat.* Turbo-Compressur, système Kateau et Armengand. S.B.Z. 48. 235.

5031. *T. M. Barlow*. The heat conductivity of iron stampings. T.E. 60. 554.
5032. *K. Bencke*. Dampfpumpendimensionierung. Z. D. M. 30. 395; 412.
5033. *H. Benisch* u. *A. Andersen*. Neuere kalorimetrische Untersuchungen von Wärmeschutzmitteln. Z. V. D. I. 50. 1655; 2046. — *C. Pasquay*. 2045.
5034. *B. Biegeleisen*. Die Wärmetransmissionsberechnung in Amerika und bei uns. G. I. 29. 713; 725.
5035. *B. Biegeleisen*. Zur Theorie der Abdampfung. G. I. 29. 233.
5036. *B. Bonnesen*. Abkühlung von Gebäuden und Empfindlichkeit der Thermometer. G. I. 30. 280.
5037. *E. Brauer*. Leistungsversuche an einer Kältemaschine System Linde. Z. G. K. 13. 45.
5038. *H. S. Brown*. Correction constants for steel tapes. E. N. 57. 32.
5039. *W. Brückner*. Die konstruktive Grundlage und die praktische Ausgestaltung der Brücknerheizung. G. I. 29. 362; 509. — *O. Krell*. 509.
5040. *O. Busse*. 2/5 gekuppelte Vierzylinder-Schnellzug-Verbundlokomotive für die dänischen Staatsbahnen. O. F. E. 44. 1.
5041. *O. Busse*. Über die Verdampfungsfähigkeit von Lokomotivkesseln. O. F. E. (2) 43. 177.
5042. *W. Campbell*. Über die Wärmebehandlung einiger hochgekohter Stähle. M. U. H. 3. 741; 781.
5043. *C. Cario*. Wärmemechanik. Z. D. M. 29. 273; 285; 297.
5044. *C. Cario*. Kritik über Verdampfungsversuche. Z. D. M. 30. 445; 457.
5045. *Chauvin* et *Arnoux*. Nouveaux pyromètres thermoélectriques industriels. B. S. E. 106. 1173.
5046. *D. Clerk*. Explosion temperatures. Eg. 84. 197.
5047. *P. Cooke*. Thermal efficiency of boilers. E. 101. 305.
5048. *C. G. Curtis*. Tests of Curtis turbines. Eg. 84. 298.
5049. *L. Demozny*. Das Härten von Stahl. M. U. H. 4. 726.
5050. *L. Demozny*. The hardening of steel. Eg. 84. 576; 603.
5051. *A. Dosch*. Mittelbarer Nachweis von unverbrannten Gasen in Verbrennungsprodukten. Z. D. M. 30. 393.
5052. *A. Dosch*. Beurteilung der Verbrennungsvorgänge bei Feueranlagen. Z. C. A. K. 2. 393; 421; 449; 473.
5053. *A. Dosch*. Die Größenbestimmung der durch Abgase beheizten Speisewasservorwärmer. P. M. C. 39. 125; 132; 142.
5054. *A. Duchesne*. Les phénomènes thermiques dans les machines à vapeur. R. D. M. 19. 5.
5055. *Eberle*. Einfluß des Kesselsteins auf die Wärmeausnutzung im Dampfkessel. Z. D. M. 30. 397; Z. B. D. 11. 108.
5056. *C. Eberle*. Der Einfluß des Gegendruckes und der Zwischendampfenahme auf den Dampfverbrauch von Kolbendampfmaschinen. Z. V. D. I. 51. 2005; 2070; Z. B. D. 11. 85; 96; 119; 133.
5057. *Eberle*. Hochhub sicherheitsventile. Z. B. D. 10. 163; 173.
5058. *C. Eberle*. Die neue Dampfmaschine der Altenburger Aktienbrauerei. Z. B. D. 11. 33; 43.
5059. *F. Ende*. Die Erwärmung eines drahtförmigen Schmelzeinsatzes. E. T. M. 25. 455. 478.
5060. *M. Ensslin*. Temperaturspannungen in einer kreisförmigen Platte. P. J. 322. 705; 721.
5061. *R. Esnault-Pelterie*. Moteur extra-léger à explosion. M. I. C. 60. B. 610.
5062. *V. Fischer*. Die Verwendung eines logarithmisch geteilten Koordinatensystems in der Wärmemechanik. Z. Ö. I. A. V. 59. 258.
5063. *P. Forchheimer*. Über Voruntersuchungen für Wasserversorgungen. Z. Ö. I. A. V. 58. 200.
5064. *F. Foster*. New gas engine diagrams. E. 103. 181.
5065. *H. Frank*. Feuerlose Lokomotiven. Z. D. M. 29. 365.
5066. *H. Friedrich*. Versuche über den Wärmedurchgang, ausgeführt an Thermometern. Z. G. K. 14. 187.
5067. *P. Fuchs*. Der Wärmeübergang an Vorwärmerheizflächen. Z. V. D. I. 51. 1106.
5068. *T. Ganzenmüller* und *W. Redenbacher*. Die Umrechnung der Leistung einer Kältemaschine auf Normalverhältnisse. Z. G. K. 13. 25.
5069. *T. Ganzenmüller*. Vergleich der Kälteleistung einer NH<sub>3</sub>-Kältemaschine beim Ansaugen nasser und trockengesättigter Dämpfe. Z. G. K. 13. 65.
5070. *K. Geilhausen*. Vergleichende Wärmedurchgangsversuche an einer Turbinenheißdampfleitung der Berliner städtischen Zentrale. Buch. K. B. 24. 311; 331.
5071. *R. Geipert*. Beiträge zur Berechnung des Nutzeffekts von Feuerungsanlagen. J. G. W. 49. 437; 459. 478. — *J. Hudler* 463.
5072. *J. Goder*. Die Verwertung des Abdampfes mit Unterbrechung arbeitender Dampfmaschinen. T. 12. 61.

5073. *A. Goebel*. Berechnung von Heißwasserheizungen. G.I. 29. 369.
5074. *P. Goerens*. Über den augenblicklichen Stand unserer Kenntnisse der Erstarrungs- und Erkaltevorgänge bei Eisenkohlenstofflegierungen. M.U.H. 3. 175; 4. 137; 173.
5075. *de Grahl*. Verbrennungsverluste und endotherme Reaktionen. Z.D.M. 30. 297.
5076. *G. de Grahl*. Wärmeerfordernis für Eisenbetonbauten. B.E.B. 6. 40.
5077. *G. de Grahl*. Wärmefaufnahme und Abgabe der Umfassungswände von Gebäuden. G.I. 30. Festnummer 26.
5078. *G. de Grahl*. Die spezifische Leistung der Heizkessel-Heizflächen. G. I. 29. 689.
5079. *G. de Grahl*. Zur Regelung der Wärmeabgabe bei Warmwasserheizungen. G.I. 29. 333.
5080. *A. Gramberg*. Zeichnerische Ermittlung der Strahlenberichtigung bei Heizwertbestimmungen mit der Bombe. Z.V.D.I. 51. 262.
5081. *M. Grellert*. Die Anordnung von Dampfheizapparaten innerhalb der Druckhöhe von Niederdruckdampfkesseln. G.I. 30. 71.
5082. *L. Guillet*. Traitement thermique des produits métallurgiques. M. I.C. 59. B. 570.
5083. *H. Haedicke*. Die Temperaturschwankungen auf der gesamten Erdoberfläche. P.J. 321. 141.
5084. *F. Häußler*. Untersuchungen explosibler Leuchtgasluftgemische. Z. V.D.I. 50. 240.
5085. *G. T. Hanchett*. Boiler efficiency tests. E.W. 47. 454.
5086. *H. Harkort*. Beitrag zum Studium des Systems Fe-W. M.U.H. 4. 617; 639; 673.
5087. *F. Hasenöhrl*. Zum Schnellumlauf der Warmwasserheizung. G.I. 29. 365; 511. — *H. Kraus* 511.
5088. *E. Hausbrand*. Dampfverbrauch und Bodenzahl der kontinuierlichen Alkohol-Destillierapparate. Z.C.A.K. 2. 585; 617; 641.
5089. *K. Heilmann*. Die Entwicklung der Lokomobilen von R. Wolf. Z.V.D.I. 50. 313; 446; 478.
5090. *C. Heinel*. Wärmetafeln für überhitzten Wasserdampf. Z.G.K. 14. 46.
5091. *C. Heinel*. Vereinfachte Behandlung thermodynamischer Aufgaben des praktischen Maschinenbaues vermittels Schaulinien. Z.K.F.G. 9. 6; 103.
5092. *O. Henckel*. Vorschläge zur Feststellung der Vorgänge in Verdampfungs- und Verdichtungsapparaten. Z.G.K. 14. 141.
5093. *J. B. Henderson*. Recent advantages in our knowledge of radiation phenomena and their bearing on the optical measurements of temperature. Eg. 82. 247.
5094. *J. B. Henderson*. Recent advantages in our knowledge of radiation phenomena and their bearing on radiation pyrometry. T.E. 57. 700.
5095. *E. Heyn* und *O. Bauer*. Kupfer und Schwefel. M.U.H. 3. 75.
5096. *E. Heyn* und *O. Bauer*. Kupfer und Phosphor. M.U.H. 4. 242; 257.
- 5097a. *G. Herberg*. Neuerungen im Überhitzerbau. Z.B.H.S. 64. 183.
- 5097b. *M. Hirsch*. Die Anwendung der maschinellen Kühlung auf den Kompressorbetrieb. Z.G.K. 14. 221.
5098. *J. W. Hobson*. Vaughans formula for equivalent heating surfaces. R.G.T. 42. 223.
5099. *J. H. van't Hoff*. Die Thermochemie. Z.Ö.I.A.V. 58. Suppl. 45.
5100. *F. Hoffmann* und *R. Rothe*. Über die Ausdehnung des technischen Pentans in tiefen Temperaturen und die Skale des Pentanthermometers. Z.I. 27. 265.
5101. *L. Holborn*. Optical pyrometry. T.E. 59. 794.
5102. *C. P. Holmböe*. Die ökonomische Bedeutung des Heißdampfes für die Dampfturbine und die Kolbendampfmaschine. K.B. 24. 239; 255.
5103. *B. Hopkinson*. The explosion of gaseous mixtures and the specific heat of the products. Eg. 81. 777.
5104. *B. Hopkinson*. On the indicated power and mechanical efficiency of the gas engine. Eg. 84. 570; 648; E. 104. 427; 453.
5105. *H. Hort*. Die Wärmevergänge beim Längen von Metallen. Z.V.D.I. 50. 1831; M.F.I. 41. 1.
5106. *M. Hottinger*. Vom Nutzeffekt gußeiserner Gliederkessel. G.I. 30. Festnummer 43.
5107. *M. Hottinger*. Berechnung eines Trockenkastens. G.I. 30. 157.
5108. *M. Hottinger*. Fernwarmwasserheizung. G.I. 30. 181; 361. — *M. Kretschmer* 359.
5109. *M. Hottinger*. Zentrale Fernwarmwasserversorgung. G.I. 30. 293.
5110. *M. Hottinger*. Bestimmung der Rohrdurchmesser bei Dampfheizungsanlagen. G.I. 30. 840; 857.
5111. *C. L. Hubbard*. Selection of a steam engine. E.W. 48. 859.

5112. *G. Jacob*. Die kalorimetrische Heizwertbestimmung von Kohle mit besonderer Berücksichtigung der Kalorimetereichung. Z. C. A. K. 2. 281; 313; 337; 369; 499; 533; 565; 597.
5113. *W. Jaeger* und *H. v. Steinwehr*. Anwendung des Platinthermometers bei kalorimetrischen Messungen. Z. I. 26. 237.
5114. *A. Jarolimek*. Über die Mechanik der Verdampfung. Z. D. W. 31. 159; 32. 24. — *F. Krauß* 32. 9.
5115. *J. E. Johnson*. Blastrefrigeration. Eg. 82. 332.
5116. *J. E. Johnson*. Different modes of blast refrigeration and their power requirements. E. 102. 305; 331.
5117. *E. Jouquet*. Le théorème de M. Gouy et quelques-unes de ses applications. R. D. M. 20. 213.
5118. *E. Jouquet*. Remarque sur la thermodynamique des machines motrices. R. D. M. 19. 41.
5119. *W. Kamerlingh-Onnes*. Über Messungen sehr tiefer Temperaturen. Z. K. F. G. 9. 1; 17; 35; 56; 72; 88; 163; 187; 10. 71.
5120. *K. Kaufmann*. Selbsttätige Temperaturregler für Dampf- und Warmwasserheizanlagen. G. I. 30. 480.
5121. *H. Kayser*. Die Gründe für die Temperaturerhöhungen in den Untergrundbahnen. G. I. 29. 317.
5122. *B. Kirsch*. Eine Methode zur Bestimmung der Wärmedurchlässigkeit von Baumaterialien. M. T. G. W. (2) 16. 52.
5123. *J. Klauudy*. Elemente, Verbindungen, Mischung, Lösung. Z. Ö. I. A. V. 58. Suppl. 10.
5124. *T. Klehe*. Der Drehrohrofen in der Zementindustrie. B. M. K. 12. 321. 371.
5125. *O. Knoblauch* und *M. Jacob*. Die Abhängigkeit der spezifischen Wärme  $c_p$  des Wasserdampfes von Druck und Temperatur. Z. V. D. I. 51. 81; 124; M. F. I. 35—36. 109.
5126. *F. Krämer*. Das Verhalten der Dämpfe in den Verdampfern der Kältemaschinen. Z. G. K. 13. 21; 41.
5127. *F. Kraus*. Der Wirkungsgrad der Dampfmaschine. Z. D. W. 31. 8; 15; 35; 52; 65; 85; 99; 113; 137; 146.
5128. *M. Krause*. Die Temperaturverhältnisse im Wärmeaustauschapparat. Z. G. K. 14. 227.
5129. *O. Krell*. Abkühlung von Gebänden. G. I. 30. 10.
5130. *V. Langen*. Dampfbetrieb bei hohen Drücken und hohen Temperaturen. Z. G. T. 4. 448.
5131. *A. Leon*. Schorsteinwärmspannungen. Z. V. D. I. 51. 1315.
5132. *A. Leon* und *A. Basch*. Über die Temperaturspannungen in einer Hohlkugel bei stationärer Wärmeströmung. Z. Ö. I. A. V. 59. 717.
5133. *E. Lesser*. Über Paul Möllers Untersuchungen an Drucklufthämern. Z. K. F. G. 10. 8; 26; 45; 89.
5134. *L. Letombe*. Comment s'exerce l'action de paroi dans les moteurs à combustion interne. M. I. C. 58. 661.
5135. *M. Longridge*. Superheated steam. Eg. 81. 164.
5136. *R. Lorenz*. Temperaturspannungen in Hohlzylindern. Z. V. D. I. 51. 743.
5137. *E. Lucas*. Anordnung und Bemessung der Rohrleitung bei Warmwasserheizungen mit besonderer Berücksichtigung der Wärmeverluste im Rohrnetz. G. I. 30. 457.
5138. *R. Lucas*. Über Wattverbrauch und Lichtstärke der Edisonglühlampe. E. Z. 27. 524.
5139. *F. Lux*. Das Raupp'sche Gas-kalorimeter. J. G. W. 49. 475.
5140. *O. Marr*. Kessel mit Überhitzer für Steinkohle-Schüttfeuerung. Z. D. M. 30. 277.
5141. *O. Marr*. Vom Trocknen. G. I. 29. 749; 781.
5142. *G. Marzahn*. Die Bestimmung der wirtschaftlichsten Dampfanlage für Betriebe mit Bedarf an Heizdämpfen. P. J. 321. 529; 551.
5143. *R. E. Mathot*. Mode de réglage, cycle et construction des moteurs à combustion interne. R. D. M. 18. 441.
5144. *F. E. Matteson*. Gas-engine calorimetry. Am. M. 29. B. 112.
5145. *G. Mees*. Der Einfluß des Mischungsverhältnisses auf die Wärmeeinsatznutzung in der Gasmaschine. Z. V. D. I. 51. 1586. — *K. Kutzbach* 1647.
5146. *R. Meves*. Luftverflüssigungs- und Sauerstoff-Stickstoff Gewinnungsverfahren. Z. C. A. K. 2. 561; 591.
5147. *F. Meyenberg*. Abdampf zur Kräfteerzeugung. Z. D. M. 29. 105; 145; 153; 161; 181.
5148. *B. Meyer*. Brennmaterialverbrauch und Nutzleistung in Kessel- und Feuerungsanlagen. Z. L. H. 12. 99; 105.
5149. *G. J. Meyer*. Theoretisches und Praktisches über Abschmelzsicherungen. E. Z. 28. 430; 1136; 1158.
5150. *A. Nägel*. Versuche an der Gasmaschine über den Einfluß des Mischungsverhältnisses. Z. V. D. I. 51. 1405; 1460.

5151. *C. Naske*. Der Generator in der Zementindustrie. Z.V.D.I. 50. 531; 883. — *A. Jabs* 883.
5152. *P. Oberhoffer*. Die spezifische Wärme des Fe. M.U.H. 4. 427; 447; 486;
5153. *C. Obrębowicz*. Das Mischwasserheizsystem. G.I. 29. 605.
5154. *L. Ott*. Untersuchungen zur Frage der Erwärmung elektrischer Maschinen. M.F.I. 35—36. 53.
5155. *J. E. Petavel*. The pressure of explosion. Eg. 81. 429.
5156. *Pfeiffer*. Korrektionsstafel zur Bestimmung des Heizwertes von Gas. J.G.W. 50. 67.
5157. *R. Pictet*. Die Entwicklung der Theorien und der Verfahrensweisen bei der Herstellung der flüssigen Luft. Z. K.F.G. 9. 51; 67; 92; 99; 115; 147; 184.
5158. *R. Pictet*. Ein neuer Motor mit adiabatischer Entspannung zur Herstellung flüssiger Luft. Z.K.F.G. 10. 101.
5159. *E. Rasch*. Die Ermittlung und Aufzeichnung der Umwandlungspunkte fester Lösungen. P.J. 321. 761.
5160. *E. Rasch*. Stickstoff in Eisen. P.J. 321. 691.
5161. *A. Reichelt*. Die konstruktive Behandlung der Heißdampfrohrlösungen mit Berücksichtigung der Materialfrage. P.J. 321. 659; 676.
5162. *F. J. Richter*. Beitrag zur Frage: Kann überhitzter Dampf Wasser enthalten? Z.V.D.I. 50. 282. — *J. Hermann* 512.
5163. *F. L. Richter*. Das Verhalten überhitzten Wasserdampfes in der Kolbenmaschine. M.F.I. 30. 49.
5164. *F. L. Richter*. Thermische Untersuchung an Kompressoren. M.F.I. 32. 1.
5165. *G. Rosset*. Méthodes de détermination de l'eau liquide mécaniquement entraînée par la vapeur. P.E.M. (5) 6. 156; 171; 186.
5166. *J. Rožić*. Beitrag zur Theorie der Lindschen Luftverflüssigungsmaschine. Z. K.F.G. 10. 117; 133.
5167. *H. Rubens*. Apparat zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents. Z.G.K. 13. 89.
5168. *K. Rubricius*. Kraftgewinnung aus Abdampf. E.T.M. 24. 525.
5169. *M. Rusch*. Eine bequeme Näherungsformel für die Spannung des gesättigten Dampfes zwischen 100° bis 220°. Z.Ö.I.A.V. 58. 536. — *A. Jorolimek*. 644.
5170. *R. Sanzin*. Vergleich zwischen einer 2- und einer 3-fach gekoppelten Schnellzug-Lokomotive. O.F.E. 44. 67.
5171. *E. Sauer*. Zur gekoppelten Personenzuglokomotive mit Speisewasservorwärmern. Z.V.D.I. 51. 11.
5172. *H. Scherber*. Les explosifs modernes. G.C. 51. 292.
5173. *O. Schneider*. Zur Dynamik der Dampfströmung in der Kolbendampfmaschine. Z.V.D.I. 51. 227. — *W. Schüle*. 228.
5174. *W. Schüle*. Zur Dynamik der Dampfströmung in der Kolbendampfmaschine. Z.V.D.I. 50. 1900; 1934; 1988.
5175. *W. Schüle*. Die Beurteilung der Turbokompressoren auf thermodynamischer Grundlage. Z.V.D.I. 51. 1669; 1883. — *A. Barbezat* 1883.
5176. *L. Sekutowicz*. Les turbines à gaz. M.I.C. 59. A. 195; 803. — *R. Armengaud* 754. — *J. Rey* 771. — *G. Hart* 784. — *L. Letombe* 787. — *A. Bochel* 798.
5177. *J. A. Smith*. Experiments on surface condensation. Eg. 81. 395.
5178. *J. A. Smith*. Air in relation to the surface condensation of low-pressure steam. E. 102. 75; 103.
5179. *H. R. Stafford*. The Mellin compound. A.E.R.J. 80. 130.
5180. *W. Stahl*. Über Dissoziationsspannungen resp. Sauerstoffdrücke einiger Oxyde in den Röst- und Schmelzhütten der Flammöfen. M.U.H. 4. 682.
5181. *R. T. Strohm*. Feed-water heating. E.W. 48. 661.
5182. *T. Wärmeverluste einer Dampfleitung*. K.B. 24. 357.
5183. *F. Thonet*. Étude sur le mouvement de la chaleur dans les parois des cylindres des machines à vapeur. R.D. M. 21. 533.
5184. *R. Trautmann*. Über die Betriebsergebnisse des K. Fernheiz- und Elektrizitätswerks Dresden. G.I. 30. Festnummer 36.
5185. *H. H. Vaughan*. Some notes on the tests at the St. Louis exposition. A.E.R.J. 81. 302.
5186. *C. W. Waidner* and *G. K. Burgess*. Optical pyrometry. Eg. 83. 276; 323. — *L. Holborn* 84. 345. — *C. Féry* 539.
5187. *R. I. Weighton*. The efficiency of surface condensers. Eg. 81. 497; 532; 630. — *J. W. Haywood* 630.
5188. *R. Wenck*. Die neueren Wasserheizungssysteme. Z.L.H. 12. 6; 17; 25; 45; 65; 87; 113; 119; 127; 177; 185.
5189. *K. Wendt*. Untersuchungen an Gaserzeugern. M.F.I. 31. 57.
5190. *Wiebe*. Die amerikanischen Prüfungsbestimmungen für Thermometer. D.M.Z. 1906. 8; 18; 28; 48; 58; 67; 76.
5191. *A. W. Witkowski*. Über die

Ausdehnung des H. Z.K.F.G. 9. 83; 124; 131.

5192. *G. Wobsa*. Zustandsgleichung des  $\text{NH}_3$  dampfes und seine thermischen Eigenschaften. Z.G.K. 14. 61.

5193. *R. Wotruba*. Die Heißluftmaschine mit großer Kompression. P.J. 321. 196.

5194. *Zyka*. Über den Dampfdurchgang durch Regulierventile in Niederdruckdampfheizungen. G.I. 29. 345; 30. 665; 681; 697.

5195. *N. N.* Kondensationsversuche. Z.D.M. 29. 251; 276; 323.

5196. *N. N.* Steam at high pressures and temperatures. Eg. 83. 1; 40.

5197. *N. N.* Thermal properties of water and steam at high temperatures. Eg. 83. 339; 472.

5198. *N. N.* Dampfüberhitzer. P. M. C. 40. 31; 38; 46.

5199. *N. N.* The specific heat of superheated steam. Eg. 83. 227.

5200. *N. N.* Constants for gases. Eg. 82. 75.

5201. *N. N.* Rise of temperature in cold stores. E. 101. 240.

5202. *N. N.* Die praktische Bedeutung des Stefan-Boltzmannschen Strahlungsgesetzes. Z.D.W. 32. 133.

5203. *N. N.* Die Bedeutung des Torpedos und Mittel zur Erhöhung seiner motorischen Leistungsfähigkeit. P.I.K. 1. 535.

5204. *N. N.* Turbine à vapeur de 12 chevaux, système Curtis. P.E.M. (5) 6. 65; 87.

5205. *N. N.* Die Druckluft- oder Mammutpumpe. Z.K.F.G. 9. 27.

5206. *N. N.* Empfindlichkeit der Thermometer. Z.D.M. 29. 482.

5207. *N. N.* Neues Wasser-Pyrometer zum Messen von Temperaturen zwischen  $625^\circ$  und  $1000^\circ$  C. J.G.W. 50. 1005.

### Winkelteilung.

5208. *Demozay*. La trisection de l'angle. G.C. 50. 451. — N.D.L.R. 452.

5209. *G. T. Llewellyn*. Procédé graphique pour la division d'un angle en 3 parties égales. G.C. 48. 404.

5210. *F. Rust*; *R. H. M.* The trisection of angles. E.N. 55. 130.

### Zahlentheorie.

5211. *J. Parker*. Finding change gears by prime-factor tables. Am. M. 30. B. 860.

### Zeicheninstrumente.

5212. *Bechtle*. Kurvensammler. Z.V. 36. 143.

5213. *F. W. Bowen*. A combination triangle. Am. M. 29. B. 248. — *Arbeite* 435.

5214. *J. Claren*. Ein neuer Ellipsenzirkel. D.M. 15. 176.

5215. *H. W. Fischer*. Method for ruling parallel lines of any spacing. Am. M. 30. A. 643.

5216. *F. T. Llewellyn*. A straight-line instrument for trisecting an angle. E. N. 55. 16. — *O. Fröhlich* 243. — *E. Thivolle* 416.

5217. *A. McAlpine*. Measuring the length of curved arches. Am. M. 29. B. 29.

5218. *Merrimac*. An adjustable triangle. Am. M. 30. B. 67.

5219. *V. de Puy*. Kurvensammler. W.B.S. 3. 403.

5220. *S. Sitte*. Der Perspektivschieber. C.G.U. 25. 404.

5221. *J. E. Sweet*. A new drawing instrument. Am. M. 29. A. 257.

5222. *C. Zimmermann*. Flächenzirkel. Z.V. 35. 272.

5223. *N. N.* Ein Beitrag zur Benutzung des Kurvenlineals. P.M.C. 40. 90.

5224. *N. N.* Équerre hyperbolique Morin. M.I.C. 60. B. 93.

## Der hyperbolische Kosinusbogenträger (Kettenlinienträger).

Von Baurat ADOLF FRANCKE in Alfeld an der Leine.

Die hyperbolische Kosinuslinie oder Kettenlinie hat den Krümmungshalbmesser  $\rho = \frac{r}{\cos \omega^2}$ , liegt mithin zwischen dem Kreise  $\rho = r$  und der Parabel  $\rho = \frac{r}{\cos \omega^3}$ . Sie ist der Parabel näher verwandt als dem Kreise, indem sie wie die Parabel die  $\infty$ ferne Gerade berührt. Für genügend geringe Pfeilhöhe fallen Kreis, Parabel und diese Bogenlinie in die nämliche Bogenform zusammen und zeigen daher die gleiche Kräfteverteilung. Für größere Pfeilhöhen aber fallen die elastischen Werte der Kreisform und der Parabelform weit auseinander. Diese Bogenform liegt zwischen denselben und läßt sich für größere Pfeilhöhen etwas einfacher als die Parabel mathematisch genau behandeln. Wertvoll muß es daher nach Meinung des Verfassers an und für sich sein, für diese der Parabel so nahe verwandte Linie auch für beliebige Pfeilhöhen eine genaue mathematische Darstellung des Spieles der inneren Kräfte zu gewinnen.

Überdies verdient diese Bogenform insofern allgemein technische Beachtung, als sie für manche Fälle als die zur praktischen Anwendung geeignetste bezeichnet werden muß.

Ordnet man die Stützlinie und die Linie der zugehörigen Lasthöhen einander zu, so erscheint diese Linie als das sich selbst entsprechende Element. Ein nach dieser Bogenlinie ausgeführtes Tonnengewölbe von gleichbleibender Wölbstärke trägt sich selbst als Stützlinie ohne innere Biegemomente.

Allgemein verteilt sich meist das Eigengewicht oder die ständige Last der Bogenkonstruktionen nicht gleichmäßig über die Wagerechte. Häufig schmiegt sich die Verteilung mehr oder weniger genau dem Gesetze  $p = \frac{p_0}{\cos \omega}$  an. Dann aber zeigt gerade diese Bogenlinie vor allen anderen Bogenformen den Vorzug, daß nur die rollende oder außergewöhnliche Belastung wesentliche innere Biegemomente hervorruft. Denn diese Bogenlinie ist die Stützlinie der Belastung  $p = \frac{p_0}{\cos \omega}$ .

Für diese Bogenlinie gelten, mit Bezug auf Fig. 1, die folgenden Gleichungen und Beziehungen zwischen den einzeln in Betracht kommenden Rechnungsgrößen.

Setzt man, für  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \omega$ , den Wert  $\frac{1}{\cos \omega} = \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s} \alpha$ , dann ist  $\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} \alpha = \operatorname{tg} \omega$ ,  $\mathfrak{T}\mathfrak{a}\mathfrak{n}\mathfrak{g} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$ ;  $\alpha = \int \frac{d\omega}{\cos \omega}$ ;  $\omega = \int \frac{da}{\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s} \alpha}$  und ist  $r$  der Krü-

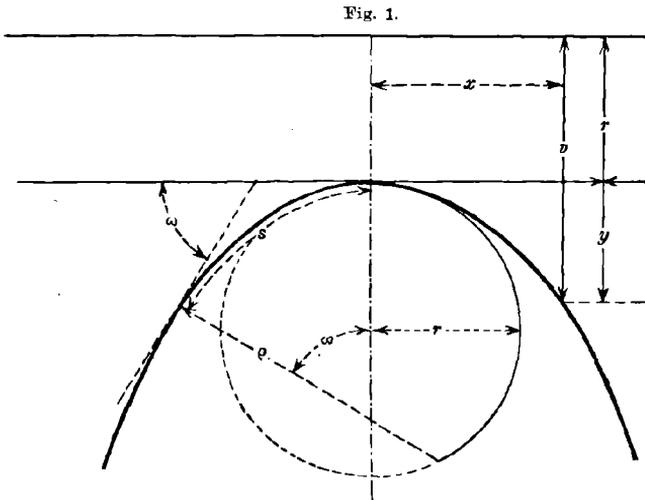


Fig. 1.

mungshalbmesser im Scheitel, dann ist dieser Wert  $r$  das Zeichen des Maßstabs, in welchem diese einförmige Linie gezeichnet oder angeschaut wird. Die verschiedenen Bögenformen, Bogen von verschiedener Pfeilhöhe, sind wie beim Kreise, Abschnitte von unterschiedenen Schluß-

winkeln, sämtlich von der einen einzigen Linienform abgeschnitten in verschiedener Tiefenlage, und es gelten die einfachen Beziehungen:  $x = r\alpha$ ;  $v = y + r = r\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s} \alpha$ ;  $s = r\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} \alpha$ ;  $\rho = r\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s}^2 \alpha$ ;  $y = r(\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s} \alpha - 1)$ ;

während die Sehnenhöhe  $u = r(\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s} \gamma - \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s} \alpha) = h \left\{ 1 - \frac{\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}^2 \frac{\alpha}{2}}{\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}^2 \frac{\gamma}{2}} \right\}$  ist, für  $\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s} \gamma \cos \beta = 1$ .

### 1. Wirkung des Bogenschubes $H$ .

Wir bezeichnen mit  $z$  die in Richtung des Krümmungshalbmessers gemessene elastische Durchbiegung des Bogens mit frei drehbaren, unverschieblichen Kämpfern und erhalten durch Anwendung der Gleichung  $EJ \frac{d^2 z}{ds^2} = \pm \mathfrak{M}$  für den Zustand  $H = 1$  die Gleichung  $FJ \frac{d^2 z}{ds^2} = h - y$  oder  $\frac{EJ}{r} \frac{d^2 z}{ds^2} = \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s} \gamma - \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s} \alpha$ , wobei  $\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s} \gamma \cos \beta = 1$  ist. (Fig. 2.)

Durch Integration nach  $ds = r\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s} \alpha d\alpha$  wird erhalten:

$$\frac{EJ}{r^2} \frac{dz}{ds} = \int (\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s} \gamma - \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s} \alpha) \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s} \alpha d\alpha = \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s} \gamma \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} \alpha - \frac{\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} \alpha \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s} \alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

Durch Einsetzung des Kämpferwertes  $\alpha = \gamma$  erhalten wir Kenntnis des wichtigen, bei Betrachtung von gekuppelten oder anderweit am Kämpfer gebundenen Bögen unentbehrlichen Wertes der vom Bogenschub erzeugten Kämpferdrehung

$$\frac{EJ}{r^3} \varphi = \frac{\sin 2\gamma - 2\gamma}{4} \cdot H,$$

welche Drehung bei positivem Drucke  $H$  vom Kämpfer nach auswärts gerichtet ist. Durch

nochmalige Integration nach  $ds = r \cos \alpha d\alpha$  wird erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{EJ}{r^3} z &= \int \left( \cos \gamma \sin \alpha - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \alpha d\alpha \\ \frac{EJ}{r^3} z &= \gamma \frac{\sin \gamma - \cos \gamma}{2} - \frac{\cos^3 \gamma}{3} + \frac{\cos \gamma \cos^2 \alpha}{2} - \frac{\cos^3 \alpha}{6} + \frac{\cos \alpha - \alpha \sin \alpha}{2}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für  $d\omega = \frac{d\alpha}{\cos \alpha}$  die Achsenschiebung  $w$ :

$$\begin{aligned} \frac{EJ}{r^3} w &= \frac{EJ}{r^3} \int z d\omega \\ &= \left\{ \gamma \frac{\sin \gamma - \cos \gamma}{2} - \frac{\cos^3 \gamma}{3} \right\} \omega + \frac{\cos \gamma}{2} \int \cos \alpha d\alpha - \int \frac{\cos^2 \alpha}{6} d\alpha + \int \frac{d\alpha}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} d\alpha \\ &= \left( \gamma \frac{\sin \gamma - \cos \gamma}{2} - \frac{\cos^3 \gamma}{3} \right) \omega + \frac{\cos \gamma}{2} \sin \alpha - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{12} + \frac{5}{12} \alpha - \frac{1}{2} \int \frac{\alpha \sin \alpha}{\cos \alpha} d\alpha \end{aligned}$$

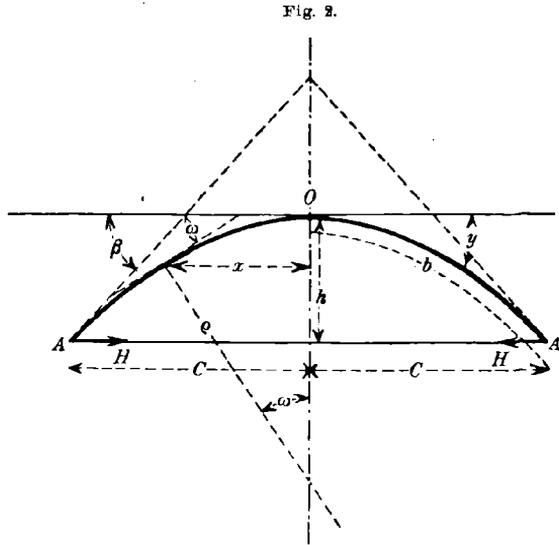
und mithin für  $\omega = \beta$ ,  $\alpha = \gamma$

$$\frac{EJ}{r^3} w = \left( \gamma \frac{\sin \gamma - \cos \gamma}{2} - \frac{\cos^3 \gamma}{3} \right) \beta + \frac{5(\sin 2\gamma + 2\gamma)}{24} - \frac{1}{2} \int_0^\gamma \alpha \operatorname{Tang} \alpha d\alpha.$$

Der letzte Wert  $A = \int \alpha \operatorname{Tang} \alpha d\alpha$  kann auf verschiedenen Wegen rechnerisch dargestellt werden. Wir geben zwei Formeln, von denen die eine bei kleinen, die andere bei großen Zahlenwerten  $\alpha$  rechnungsmäßig zweckmäßig ist. Weil  $\operatorname{Tang} \alpha < \alpha$  und zugleich  $\operatorname{Tang} \alpha < 1$  ist, so ist immer  $A < \frac{\alpha^3}{3}$  und zugleich  $A < \frac{\alpha^2}{2}$ . Da

$$\operatorname{Tang} \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2\alpha^5}{15} - \frac{17\alpha^7}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{62\alpha^9}{5 \cdot 7 \cdot 9^2} + \dots$$

8\*



ist, so ist

$$A = \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^5}{15} + \frac{2\alpha^7}{7 \cdot 15} - \frac{17\alpha^9}{5 \cdot 7 \cdot 9^2} + \frac{62\alpha^{11}}{5 \cdot 7 \cdot 9^2 \cdot 11} + \dots$$

Die Reihe ist zweckmäßig zur Berechnung von  $A = \int \alpha \text{Tang } \alpha d\alpha$  bei kleineren Werten  $\alpha$  und wird sehr unbequem bei großen Werten  $\alpha$ .

Setzt man

$$\text{Tang } \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}} = (1 - e^{-2\alpha})(1 + e^{-2\alpha})^{-1} = 1 - 2\{e^{-2\alpha} - e^{-4\alpha} + e^{-6\alpha} - e^{-8\alpha} + \dots\}$$

dann ist

$$\begin{aligned} A &= \int \alpha \text{Tang } \alpha d\alpha = \frac{\alpha^2}{2} - 2 \int (\alpha e^{-2\alpha} - \alpha e^{-4\alpha} + \alpha e^{-6\alpha} - \dots) d\alpha \\ &= \frac{\alpha^2}{2} - \frac{(1 - (1 + 2\alpha)e^{-2\alpha})}{2} + \frac{1 - (1 + 4\alpha)e^{-4\alpha}}{8} - \frac{(1 - (1 + 6\alpha)e^{-6\alpha})}{18} + \dots \\ &= \frac{\alpha^2}{2} - 2\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} - \dots\right) + \frac{(1 + 2\alpha)e^{-2\alpha}}{2} - \frac{(1 + 4\alpha)e^{-4\alpha}}{8} + \dots \\ &= \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\pi^2}{24} + \frac{(1 + 2\alpha)e^{-2\alpha}}{2} - \frac{(1 + 4\alpha)e^{-4\alpha}}{8} + \dots \end{aligned}$$

und diese Reihe ist zweckmäßig zur Berechnung bei großen Werten  $\alpha$ .

Wir setzen  $\text{Cof}^3 \gamma = \frac{\text{Cof } 3\gamma + 3 \text{Cof } \gamma}{4}$  ein und bezeichnen den, negativ unter Umkehrung der Vorzeichen genommenen, 16fachen Wert  $\frac{EJ}{r^3} w$  mit  $N$  und erhalten:

$$\begin{aligned} N &= -\frac{16EJ}{r^3} w \\ &= 4\beta \left\{ \frac{\text{Cof } 3\gamma}{3} + 3 \text{Cof } \gamma - 2\gamma \text{Sin } \gamma \right\} - \frac{10(2\gamma + \text{Sin } 2\gamma)}{3} + 8 \int_0^\gamma \alpha \text{Tang } \alpha d\alpha \end{aligned}$$

als genaues mathematisches Maß der vom Bogenschub  $H$  erzeugten Verlängerung der Bogenachse bei der Verbiegung.

## 2. Wirkung einer Scheitellast.

Die im Scheitel hängende Last  $P = 2$  verbiegt an und für sich, also für  $H = 0$  den Bogen, Fig. 3, nach Maßgabe der Gleichung:

$$EJ \frac{d^2 z}{ds^2} = x - e \quad \text{oder} \quad \frac{EJ}{r} \frac{d^2 z}{ds^2} = \alpha - \gamma$$

$$\frac{EJ}{r^2} \frac{dz}{ds} = \int \alpha \text{Cof } \alpha d\alpha - \gamma \text{Cof } \alpha d\alpha = (\alpha - \gamma) \text{Sin } \alpha - \text{Cof } \alpha + 1.$$

$$\begin{aligned} \frac{EJ}{r^3} z &= \int (\alpha - \gamma) \text{Sin } \alpha \text{Cof } \alpha d\alpha - \text{Cof } \alpha^2 d\alpha + \text{Cof } \alpha d\alpha \\ &= (\alpha - \gamma) \frac{\text{Cof}^2 \alpha}{2} - \frac{3 \text{Sin } \alpha \text{Cof } \alpha}{4} - \frac{3\alpha}{4} + \text{Sin } \alpha + \frac{3}{4} (\text{Sin } \gamma \text{Cof } \gamma + \gamma) - \text{Sin } \gamma. \end{aligned}$$

Daraus folgt nach Vervielfältigung mit  $d\omega = \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$  durch Integration:

$$\begin{aligned} \frac{EJ}{r^3} w &= \omega \left\{ \frac{3}{4} (\sin \gamma \cos \gamma + \gamma) - \sin \gamma \right\} + \int (\alpha - \gamma) \frac{\cos \alpha}{2} d\alpha - \frac{3}{4} \sin \alpha d\alpha \\ &\quad + \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha - \frac{3}{4} \int \frac{\alpha d\alpha}{\cos^2 \alpha} \\ &= \omega \left\{ \frac{3}{4} (\sin \gamma \cos \gamma + \gamma) - \sin \gamma \right\} + (\alpha - \gamma) \frac{\sin \alpha}{2} - \frac{5}{4} (\cos \alpha - 1) \\ &\quad + l \cdot \cos \alpha - \frac{3}{4} \int \frac{\alpha d\alpha}{\cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzung der Kämpferwerte  $\omega = \beta$ ,  $\alpha = \gamma$  wird erhalten:

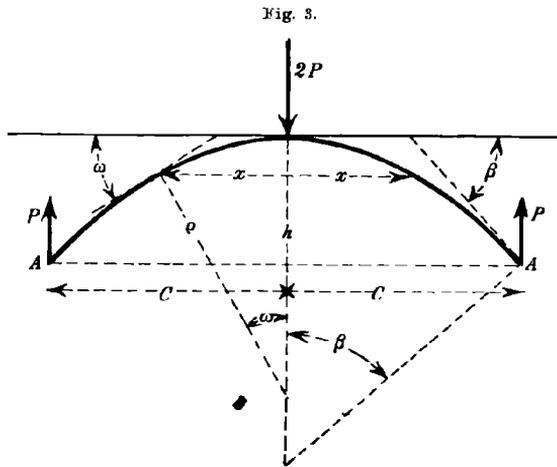
$$\frac{EJ}{r^3} w = \beta \left\{ \frac{3}{4} (\sin \gamma \cos \gamma + \gamma) - \sin \gamma \right\} + l \cdot \cos \gamma - \frac{5}{4} (\cos \gamma - 1) - \frac{3}{4} \int_0^\gamma \frac{\alpha d\alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

Man kann das letzte Integral für sich berechnen. Rechnerisch etwas einfacher gestaltet es sich zumeist, wenn

$$\begin{aligned} \int \frac{\alpha d\alpha}{\cos^2 \alpha} &= \int \alpha d\omega \\ &= \omega \cdot \alpha - \int \omega d\alpha \end{aligned}$$

gesetzt wird. Man erhält alsdann:

$$\begin{aligned} \frac{EJ}{r^3} w &= \beta \left( \frac{3 \sin 2\gamma}{8} - \sin \gamma \right) \\ &\quad + l \cdot \cos \gamma - \frac{5}{4} (\cos \gamma - 1) \\ &\quad + \frac{3}{4} \int_0^\gamma \omega d\alpha. \end{aligned}$$



Man kann  $\int_0^\gamma \omega d\alpha$  auf sehr verschiedene Weisen rechnerisch feststellen; wir geben hier zwei Wege an, von welchen der erste für kleine, der zweite für große Schlußwerte  $\alpha$ ,  $\gamma$  rechnerisch passend ist.

Weil

$$d\omega = \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = d\alpha \left\{ 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{5\alpha^4}{24} - \frac{61\alpha^6}{6!} + \dots \right\}$$

ist, so ist

$$\omega = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{5\alpha^5}{120} - \frac{61\alpha^7}{7!} + \dots$$

und daher

$$\int \omega d\alpha = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{24} + \frac{\alpha^6}{24 \cdot 6} - \frac{61\alpha^8}{8!} + \dots$$

Weil

$$\frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{I}\alpha} = 2(e^{-\alpha} - e^{-3\alpha} + e^{-5\alpha} - e^{-7\alpha} + \dots)$$

ist, so ist

$$\frac{\omega}{2} = 1 - e^{-\alpha} - \frac{(1 - e^{-3\alpha})}{3} + \frac{(1 - e^{-5\alpha})}{5} + \dots = \frac{\pi}{4} - e^{-\alpha} + \frac{e^{-3\alpha}}{3} - \frac{e^{-5\alpha}}{5} + \dots$$

$$\int \frac{\omega d\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}\alpha - \left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots\right) + e^{-\alpha} - \frac{e^{-3\alpha}}{9} + \frac{e^{-5\alpha}}{25} - \frac{e^{-7\alpha}}{49} + \dots$$

$$\frac{1}{2} \int \omega d\alpha = \frac{\pi}{4}\alpha - 0,91622 + e^{-\alpha} - \frac{e^{-3\alpha}}{9} + \frac{e^{-5\alpha}}{25} - \dots$$

Der Zahlenwert  $\int \omega d\alpha$  ist mithin stets bekannt. Um bei Zahlenrechnungen zu gegebenen Werten  $\omega, \beta$  die genauen zugehörigen Werte  $\alpha, \gamma$  zu bestimmen, kann man, abgesehen von den bereits gegebenen Beziehungen, eine der folgenden Gleichungen benutzen:

$$e^{\alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right); \quad \alpha = l \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right); \quad \alpha = \omega + \frac{\omega^3}{6} + \frac{\omega^5}{24} + \frac{61\omega^7}{7!} + \dots$$

$$\alpha = \sin \omega + \frac{\sin \omega^3}{3} + \frac{\sin \omega^5}{5} + \frac{\sin \omega^7}{7} + \dots$$

Wir vervielfältigen den gefundenen Wert  $\frac{EJ}{r^3} \omega$  mit 8 und erhalten in:

$$8 \frac{EJ}{r^3} \omega = Z = \beta(3 \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} 2\gamma - 8 \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} \gamma) + 8l \cdot \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{I} \gamma - 10(\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{I} \gamma - 1) + 6 \int_0^{\gamma} \omega d\alpha$$

einen, nach dem gleichen Maße wie für den Bogenschub  $H$  bestimmten mathematischen Ausdruck für die durch eine Scheitellast  $P = 1$  bei der Verlängerung bewirkte Verkürzung der Bogenlinie.

Wir betrachteten die Wirkung der bekannten Last  $P$  und die Wirkung des zunächst der Größe nach unbekanntes Schubes  $H$  jede für sich gesondert. Beide wirken gleichzeitig und gemeinsam an der tatsächlich vorhandenen, elastisch veränderten, Bogenlinie und jede der beiden Kräfte  $P, H$  verbiegt für sich allein diese Bogenlinie in der bestimmten nachgewiesenen Weise. Weil bei richtiger zahlenmäßiger Bemessung des Wertes  $H$  das Gesamtergebnis beider gesondert betrachteten Verbiegungen die Unveränderlichkeit der tatsächlich vorhandenen Bogenlinie darstellen muß, so erhalten wir zur Berechnung des von einer lotrechten Scheitellast  $P$  erzeugten Bogenschubes  $H$  die Gleichung:

$$(I) \frac{H}{P} = \frac{\beta(3 \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} 2\gamma - 8 \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} \gamma) + 8l \cdot \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{I} \gamma - 10(\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{I} \gamma - 1) + 6 \int_0^{\gamma} \omega d\alpha}{4\beta(3 \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{I} \gamma + \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{I} 3\gamma}{3} - 2\gamma \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} \gamma) - \frac{10(2\gamma + \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} 2\gamma)}{3} + 8 \int_0^{\gamma} \alpha \operatorname{Tang} \alpha d\alpha} = \frac{Z}{N}$$

welche Gleichung unverkürzt und mathematisch genau anwendbar bleibt für alle Werte  $\beta$ ,  $\gamma$  von  $\beta, \gamma = 0$  bis  $\beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = \infty$ , mithin für alle Pfeilhöhen von 0 bis  $\infty$ .

Für den  $\infty$  flachen Bogen wird  $Z = \frac{5}{3}\gamma^4$ ,  $N = \frac{32}{15}\gamma^5$ , und daher wird der Bogenschub erzeugt:

$$\frac{H}{P} = \frac{25}{32\gamma} = \frac{25r}{32c} = \frac{25c}{64h}.$$

Mithin ist der Bogenschub des  $\infty$  flachen Bogens etwas größer als  $\frac{3}{8}\frac{c}{h}$  nämlich = 0,3906  $\left(\frac{c}{h}\right)$  im Vergleich zu 0,375  $\left(\frac{c}{h}\right)$ .

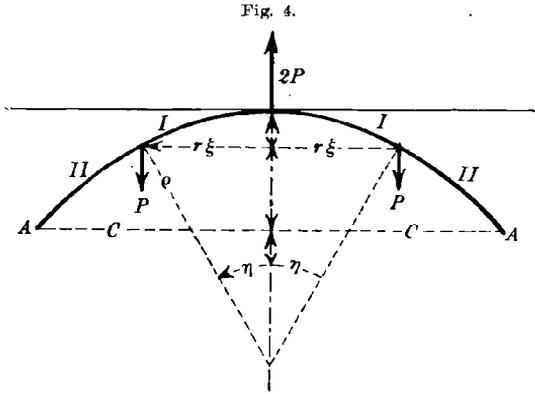
Setzt man  $\frac{H}{P} = \kappa \left(\frac{c}{h}\right)$  und prüft diesen Zahlenwert  $\kappa$  an der Hand der mathematischen Gleichung, so findet man, daß  $\kappa$  mit steigender Bogenhöhe abnimmt. Diese Abnahme erfolgt zunächst recht langsam. Für ausgesprochene Flachbögen findet man stets den rechnungsmäßigen Wert ungefähr genau =  $\frac{3}{8}$ . Erst wenn die Bogenform die Halbkreisform überschreitet,  $\frac{h}{c} \geq 1$  wird, weicht  $\kappa$  einigermaßen merklich vom Werte  $\frac{3}{8}$  ab. Für  $\frac{h}{c} = \text{rund } \frac{4}{3}$  hat man den Wert  $\kappa = \frac{1}{3}$ .

Für ungemessen große Pfeilhöhen wird  $\kappa$  verschwindend klein, indem  $\frac{H}{P}$  dem Grenzwert  $\frac{9}{8}\frac{r}{h} = \left(\frac{9r}{8c}\right) \cdot \frac{c}{h}$  für verschwindende Werte  $\frac{r}{c}$  zustrebt.

Als Rechnungsergebnis steht also der Wert  $\kappa = \frac{3}{8}$  als durchaus guter brauchbarer einfacher Zahlenwert für Flachbogen fest, der genauere Wert aber namentlich für große Pfeilhöhen ist im Einzelfall aus der mathematischen Gleichung zu entnehmen. Es liegt in der Natur der Sache, daß sich hier bei dieser Bogenform der Zahlenwert  $\kappa$  bei großen Pfeilhöhen anders entwickelt als bei der Parabel. Das Verhältnis  $\frac{P}{2H}$  wird immer in gewisser Beziehung stehen zur Schlußtangente, weil die Mittelkraft von  $\frac{P}{2H}$  und  $\kappa$  dem Halbbogen sich tunlichst anschmiegt, ihn so umfährt, daß keine Vergeudung von Kraft und Arbeitsleistung stattfindet. Bei der Parabel liegt der Schnittpunkt der beiden Schlußtangente über der Sehne in der Höhe  $t = 2h$ , bei der Kosinuslinie wächst dieses Verhältnis  $\frac{t}{h} = \frac{\alpha \sin \alpha}{\cos \alpha - 1}$  vom Werte 2 für kleine Pfeilhöhen ab allmählich mit wachsendem  $\alpha$  ins Ungemessene, daher auch  $\kappa$  unbegrenzt bis zum Werte 0 abnimmt.

3. Wirkung einer außerhalb des Scheitels hängenden lotrechten Last.

Um den von einer im beliebigen Bogenpunkt  $x$  angreifenden Einzellast erzeugten Bogenschub  $H$  zu ermitteln, betrachten wir zunächst (Fig. 4) die Wirkung von zwei symmetrisch in den Bogenpunkten  $\xi, \eta$ , hängenden Einzellasten  $P$  und einer im Scheitel negativ aufwärts gerichteten Kraft  $2P$ , weil wir durch diese Betrachtung am einfachsten zu anschaulich und übersichtlich gestalteten Gleichungen gelangen.



Für diesen Belastungsfall lauten, für  $H = 0$ , die Verbiegungsgleichungen für  $P=1$ :

Auf der Strecke I von  $\omega, \alpha = 0$  bis  $\omega = \eta, \alpha = \xi$

$$\frac{EJ}{r} \frac{d^2 z}{ds^2} = \xi - \alpha;$$

$$\frac{EJ}{r^3} \frac{dz}{ds} = \int (\xi - \alpha) \operatorname{Coj} \alpha d\alpha = \operatorname{Coj} \alpha - 1 + (\xi - \alpha) \operatorname{Sin} \alpha$$

$$\frac{EJ}{r^3} z = \int (\operatorname{Coj} \alpha - 1 + (\xi - \alpha) \operatorname{Sin} \alpha) \operatorname{Coj} \alpha d\alpha$$

$$= \frac{3 \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Coj} \alpha + 3\alpha}{4} - \operatorname{Sin} \alpha + (\xi - \alpha) \frac{\operatorname{Coj}^2 \alpha}{2} - \left\{ \frac{3\xi}{4} + (\operatorname{Coj} \xi - 1) \operatorname{Sin} \gamma - \frac{\operatorname{Sin} \xi \cdot \operatorname{Coj} \xi}{4} \right\}$$

und es wird

$$\frac{EJ}{r^3} z_{\xi} = (\operatorname{Coj} \xi - 1) (\operatorname{Sin} \xi - \operatorname{Sin} \gamma)$$

Für

$$\frac{EJ}{r^3} w = \frac{EJ}{r^3} \int z d\omega = \frac{EJ}{r^3} \int z d\alpha$$

erhalten wir:

$$\frac{EJ}{r^3} w = \frac{5}{4} (\operatorname{Coj} \alpha - 1) - l \cdot \operatorname{Coj} \alpha + (\xi - \alpha) \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{2} - \omega \left\{ \frac{3\xi}{4} + (\operatorname{Coj} \xi - 1) \operatorname{Sin} \gamma - \frac{\operatorname{Sin} \xi \operatorname{Coj} \xi}{4} \right\} + \frac{3}{4} \int_0^{\omega} \alpha d\omega.$$

Für die Strecke II, von  $\alpha = \xi$  bis  $\alpha = \gamma$ , auf welcher keine Außenkräfte angreifen, lauten die Gleichungen:

$$\frac{EJ}{r} \frac{d^2 z}{ds^2} = 0; \quad \frac{EJ}{r^3} \frac{dz}{ds} = \operatorname{Coj} \xi - 1; \quad \frac{EJ}{r^3} z = (\operatorname{Coj} \xi - 1) (\operatorname{Sin} \alpha - \operatorname{Sin} \gamma)$$

$$\frac{EJ}{r^3} w = (\operatorname{Coj} \xi - 1) l \cdot \operatorname{Coj} \alpha - \omega \operatorname{Sin} \gamma (\operatorname{Coj} \xi - 1) + \text{Konstante.}$$

Um den Gesamtwert  $\frac{EJ}{r^3}w$  für den Belastungsfall der Fig. 4 zu finden, haben wir den Wert der Strecke I innerhalb der Grenzen 0 und  $\xi$ , den Wert der Strecke II von  $\alpha = \xi$  bis  $\alpha = \gamma$  zu nehmen, und wir erhalten, nach gehöriger Zusammenstellung der einzelnen Werte, den Ausdruck:

$$8 \frac{EJ}{r^3}w = -Z_\xi - 8\{\text{Cof} \xi - 1\} \left\{ \beta \text{Sin} \gamma - \eta \text{Sin} \xi - l \cdot \frac{\text{Cof} \gamma}{\text{Cof} \xi} \right\},$$

wenn mit  $Z_\gamma, Z_\xi$  allgemein die oben gefundene Zählerfunktion bezeichnet wird:

$$Z_\xi = \eta \{ 2 \text{Sin} 2\xi - 8 \text{Sin} \xi \} + 8l \cdot \text{Cof} \xi - 10(\text{Cof} \xi - 1) + 6 \int_0^\xi \eta d\xi;$$

$$\text{Cof} \xi \cos \eta = 1.$$

Dieses Ergebnis war als selbstverständlich voranzusehen. Wäre in Fig. 4 für den Angriffspunkt  $x, \xi$  der Wert  $Z_\xi = 0$ , so befände sich Bogenteil I im genau negativ gleichen Belastungs- und Beanspruchungsfall wie der Bogen der Fig. 3. Also ist dem Werte  $-Z_\xi$  noch der achtfache Wert

$$\frac{8EJ}{r^3} \int z_\xi d\omega = \frac{8EJ}{r^3} z_\xi \cdot \eta,$$

sowie der entsprechende Wert des Bogenendes II hinzuzufügen.

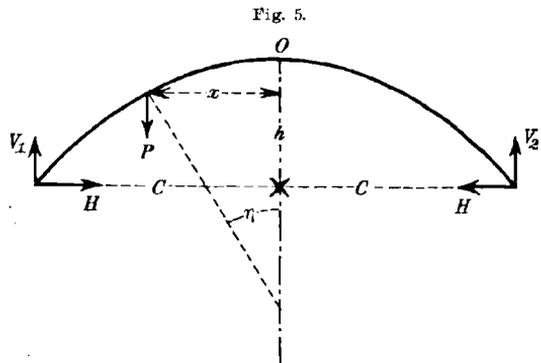
Wir heben, durch Zufügung von  $+Z$ , die negative Scheitelkraft  $2P$  wieder auf und erhalten für den von einer einzigen im Bogenpunkt  $x = r\xi$  hängenden Last  $P = 1$  erzeugten Bogenschub die Gleichung (Fig. 5):

$$(II) \quad \frac{H}{P} = \frac{Z - Z_\xi - 8(\text{Cof} \xi - 1) \left( \beta \text{Sin} \gamma - \eta \text{Sin} \xi - l \cdot \frac{\text{Cof} \gamma}{\text{Cof} \xi} \right)}{N}$$

oder für  $X = 8(\text{Cof} \xi - 1) \left( \beta \text{Sin} \gamma - \eta \text{Sin} \xi - l \cdot \frac{\text{Cof} \gamma}{\text{Cof} \xi} \right)$  kürzer geschrieben:

$$\frac{H}{P} = \frac{Z_\gamma - Z_\xi - X}{N}.$$

Besonders für vergleichende Rechnung zwischen einzelnen Bögen verschiedener Pfeilverhältnisse, also verschiedener Schlußwinkelwerte, ist diese Schreibweise rechnerisch bequem, insofern als  $Z_\xi$  der Zähler-



wert  $Z$  für Laststellung im Scheitel des kleineren Bogens der Spannweite  $= 2r\xi = 2x$  ist.

Die zusätzliche Funktion  $X$  verschwindet sowohl im Scheitel, wie am Kämpfer, während  $Z_\xi$  für Scheitelstellung  $= 0$ , für Kämpferstellung  $= Z_\gamma = Z$  wird. — Für  $\infty$ flache Bögen erhalten wir daraus:

$$\frac{H}{P} = \frac{\frac{5}{3}\gamma^4 - \frac{5}{3}\xi^4 - 2\xi^2(\gamma^2 - \xi^2)}{\frac{32}{15}\gamma^5} = \frac{(25\gamma^2 - 5\xi^2)(\gamma^2 - \xi^2)}{32\gamma^5}.$$

Indem man  $\gamma^2 \equiv 5\xi^2$  für mittlere Fälle forthebt, erhält man:

$$\frac{H}{P} = \frac{3(\gamma^2 - \xi^2)}{4\gamma^5} = \frac{3(c^2 - x^2)}{8ch} = \frac{3c(h - y)}{8h^2} = \frac{3cu}{8h^2},$$

wenn  $u$  die Sehnenhöhe bedeutet.

Es sind dieses die genau gleichen Rechnungsformeln, wie dieselben für die flache Parabel allgemein üblich sind. Allgemein ist die Parabel der hier betrachteten Bogenlinie sehr nahe verwandt und unterscheidet sich von dieser lediglich durch etwas schärferes Anwachsen des Krümmungshalbmessers  $\rho$  nach der Gleichung  $\rho = \frac{r}{\cos \omega^3} = r\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{J}\alpha^3$ , und stellt man für die Parabel die gleichgebaute und in allen einzelnen Zeichen Gleiches bedeutende Gleichung II auf:

$$\frac{H}{P} = \frac{Z - Z_\xi - X}{N},$$

dann haben die Funktionen  $N, Z, Z_\xi, X$  den folgenden Ausdruck:

$$N = \frac{\mathfrak{S}\mathfrak{I}\mathfrak{N} \gamma}{3} \left\{ \frac{5}{2} + \frac{77}{12} \mathfrak{S}\mathfrak{I}\mathfrak{N} \gamma^2 - \frac{4}{5} \mathfrak{S}\mathfrak{I}\mathfrak{N} \gamma^4 \right\} + \left\{ \frac{1 + 4 \mathfrak{S}\mathfrak{I}\mathfrak{N} \gamma^2}{4} \right\} \left\{ \beta(\gamma + \mathfrak{S}\mathfrak{I}\mathfrak{N} \gamma \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{J} \gamma)^2 - 2\gamma \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{J} \gamma - \int_0^\gamma \alpha^2 d\omega \right\} - \frac{\beta \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{J} \gamma^3}{3}.$$

Hierin kann der Zahlenwert des Integrals  $\int \alpha^2 d\omega$  auf sehr verschiedene Arten festgestellt werden.

Die Einsetzung der Reihe

$$\frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{J} \alpha} = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{5\alpha^4}{24} + \dots$$

ergibt

$$\int \alpha^2 d\omega = \int \frac{\alpha^2 d\alpha}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{J} \alpha} = \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^5}{10} + \frac{5\alpha^7}{168} - +,$$

wonach der Wert festgestellt werden kann. Weil

$$\int \alpha^2 d\omega = \omega \alpha^2 - \int \omega \alpha d\alpha,$$

so ist:

$$\int \alpha^2 d\omega = \omega \alpha^2 - 2 \int \left( \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{24} - \dots \right) \alpha d\alpha = \omega \alpha^2 - \frac{2\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{15} - \frac{\alpha^7}{84} + \dots$$

Vervielfältigt man die erste Reihe mit 2, die zweite mit 3, zählt zusammen und teilt durch 5, so erhält man:

$$\int \alpha^2 d\omega = \frac{9\alpha^2\omega - 4\alpha^3}{15} + \frac{\alpha^7}{210} + \dots$$

und für  $\alpha < 1$  ist

$$\int \alpha^2 d\omega = \frac{\alpha^2(9\omega - 4\alpha)}{15}$$

ein brauchbarer einfacher Rechnungswert.

Für große Werte  $\alpha$  rechnet man zweckmäßig nach der Reihe:

$$\begin{aligned} \int \frac{\alpha^2 d\alpha}{\mathcal{C}\mathcal{O}\gamma} &= 2 \int \alpha^2 \{ e^{-\alpha} - e^{-3\alpha} + e^{-5\alpha} - e^{-7\alpha} + \dots \} d\alpha \\ &= 4 \left( 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \dots \right) - e^{-\alpha}(4 + 4\alpha + 2\alpha^2) \\ &\quad \pm e^{-n\alpha} \left( \frac{4}{n^3} + \frac{4\alpha}{n^2} + \frac{2\alpha^2}{n} \right) \qquad n = 3, 5, 7, 9, \dots \end{aligned}$$

Für

$$C = \text{Sin } \gamma \left\{ \gamma^2 + \gamma \text{ Sin } 2\gamma + \frac{4(\mathcal{C}\mathcal{O}\gamma - 2)}{3} - \frac{7}{9} \text{Sin}^2 \gamma + \frac{7}{15} \text{Sin}^4 \gamma \right\}$$

ist

$$\begin{aligned} Z &= C\beta + \frac{\text{Sin}^2 \gamma}{5} \left\{ \frac{118}{9} - \text{Sin}^2 \gamma \right\} + \\ &\quad + \frac{64}{45} l \cdot \mathcal{C}\mathcal{O}\gamma - \gamma \text{ Sin } 2\gamma - \frac{4}{3} (\mathcal{C}\mathcal{O}\gamma - 1) - \text{Sin } \gamma \int_0^\beta \alpha^2 d\omega + \frac{4}{3} \int_0^\gamma \omega d\alpha, \end{aligned}$$

während  $Z_\xi$  durch Vertauschung von  $\gamma$  mit  $\xi$ ,  $\beta$  mit  $\eta$  hervorgeht und die betrachtete Last im Bogenpunkte  $x = r \text{ Sin } \xi$ ,  $y = \frac{r \text{ Sin}^2 \xi}{2}$ ,  $s = \frac{r}{2} (\xi + \text{Sin } \xi \mathcal{C}\mathcal{O}\xi)$  hängt und der Bogen die Spannweite

$$2c = 2r \text{ Sin } \gamma = 2r \text{ tg } \beta$$

hat.

Die zusätzliche Funktion  $X$  lautet für die Parabel:

$$\begin{aligned} X &= \left\{ \frac{2(1 - \mathcal{C}\mathcal{O}\xi)}{3} + \text{Sin } \xi \left( \xi + \frac{\text{Sin } 2\xi}{6} \right) \right\} \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ \beta \text{ Sin } 2\gamma - \eta \text{ Sin } 2\xi + 2 \mathcal{C}\mathcal{O}\xi - 2 \mathcal{C}\mathcal{O}\gamma + 2 \int_\xi^\gamma \omega d\alpha \right\} \end{aligned}$$

Mit mathematischem Zwang zeigen Parabel und Kosinuslinie für genügend flache Wölbung die rechnerungsmäßig gleiche Kräfteverteilung, und zwar bleibt hierbei die Übertragbarkeit des für eine Bogenform festgestellten Ergebnisses nicht notwendig gebunden an die Zulässigkeit der rechnerungsmäßigen Vertauschung des Wertes  $\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s}\gamma$  mit 1 oder mit  $1 + \frac{\gamma^2}{2}$ . Die Kräfteverteilung in zwei Einzelbogen der beiden Bogenarten ist nämlich überhaupt nicht auf Grund gleicher Schlußwerte  $\gamma$ , vielmehr auf Grund gleicher Werte  $\frac{h}{c}$  zu vergleichen. Die drei Linien  $\varrho = r$ ,  $\varrho = r \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s}^2\alpha$ ,  $\varrho = r \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s}^3\alpha$  laufen, wenn sie im nämlichen Maßstab, also für den gleichen Wert  $r$  des Krümmungshalbmessers im Scheitel gezeichnet werden, zwar mit wachsendem  $\alpha$  sehr bald weit auseinander. Dagegen bleiben namentlich die beiden Linien  $\varrho = r \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s}^2\alpha$ ,  $\varrho = r_1 \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s}^3\alpha$ , wenn sie über der nämlichen Sehne  $2c$  und mit der nämlichen Pfeilhöhe  $h$  gezeichnet werden, wesentlich weit weniger unterschieden. Der Verfasser neigt der Meinung zu, daß, soweit es sich nicht um Drehwerte handelt, also bei frei drehbaren Kämpfern, für Parabel und Kosinusbogen kein nennenswerter Unterschied in der Kräfteverteilung bestehen wird, so lange es sich um Flachbögen  $\frac{h}{c} < 1$  handelt.

Für die Parabel erfordert eine genaue mathematische Darstellung und rechnerische Prüfung ungleich weitläufigeres Schreibwerk und kehren wir daher wieder zum hyperbolischen Kosinusbogen zurück.

Man kann die Gleichung  $Z - Z_\xi - X = F$  zusammenziehen in den Ausdruck:

$$F = 2\beta \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\gamma (3 \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s}\gamma - 4 \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s}\xi) + \eta \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}2\xi + \\ + 8 \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s}\xi \lambda \cdot \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s}\gamma}{\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s}\xi} - 10(\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s}\gamma - \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s}\xi) + 6 \int_{\xi}^{\gamma} \eta d\xi,$$

wobei  $F_{\xi=0} = Z$  ist.

Um zu prüfen inwieweit die Formel  $\frac{H}{P} = H_0 \left(1 - \frac{x^2}{c^2}\right)$  oder die Formel  $H = H_0 \cdot \frac{u}{h} = H_0 \left\{ \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s}\gamma - \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s}\xi}{\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s}\gamma - 1} \right\}$  anwendbar bleibt, ist vor allem festzustellen, ob der Verlauf der Kräfteverteilung beim Austritt der wandelnden Last aus der Scheitelstellung einigermaßen richtig dargestellt bleibt, weil es keineswegs zwar irgend wichtig ist, ob die an sich verschwindenden Werte für Stellung in der Nähe der Kämpfer sehr genau festgestellt werden, hingegen für die Wirkung von Lasten nahe dem Scheitel die rechnerungsmäßige Genauigkeit voll gewahrt werden muß.

Wir betrachten daher die Ableitung von  $F$  nach  $\cos \xi$ :

$$\frac{dF}{d \cos \xi} = -8\beta \sin \gamma + 2 + \frac{2\eta \cos 2\xi}{\sin \xi} + 8l \cdot \frac{\cos \gamma}{\cos \xi} - 8 + 10 - \frac{6\eta}{\sin \xi},$$

welche für  $\xi = 0$ ,  $\frac{\eta}{\sin \xi} = 1$  den Wert  $-8(\beta \sin \gamma - l \cdot \cos \gamma)$  hat.

Aus der Darstellung:

$$H = H_0 \frac{u}{h} = \frac{Z \{ \cos \gamma - \cos \omega \}}{N \{ \cos \gamma - 1 \}}$$

ist ersichtlich, daß der Verlauf am Scheitel richtig dargestellt wird, so lange

$$\frac{8(\beta \sin \gamma - l \cdot \cos \gamma)(\cos \gamma - 1)}{Z} = 1$$

ist.

Dieses ist nicht genau der Fall, indem dieser Wert merkwürdig genau für alle in Betracht kommenden Bogenformen ungefähr  $= \frac{6}{5} = 1,2$  bleibt.

Also stellt die Formel  $H = H_0 \frac{u}{h}$  die Abnahme von  $H$  beim Austritt aus dem Scheitel zu gering dar.

Gleiches ist, wenigstens für Flachbogen, bezüglich der Formel

$$H = H_0 \left( 1 - \frac{x^2}{c^2} \right)$$

zu sagen.

Das entsprechende Kennzeichen der Genauigkeit lautet:

$$\frac{4(\beta \sin \gamma - l \cdot \cos \gamma) \gamma^2}{Z} = 1.$$

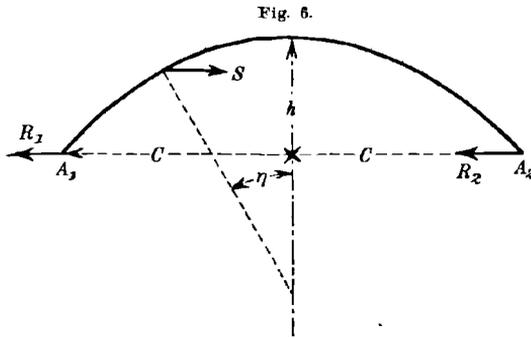
In der Tat geben die beiden Rechnungsformeln für Lasten außerhalb des Scheitels im allgemeinen etwas zu große Werte, jedoch ist die Abweichung nicht schwerwiegend. Die Formel

$$H = \frac{3c}{40h} \left( 5 - 6 \frac{x^2}{c^2} + \frac{x^4}{c^4} \right)$$

würde wahrscheinlich genauer sein.

#### 4. Wirkung einer zur Sehne gleichgerichteten Angriffskraft.

Die im Bogenpunkte  $x = r\xi$  angreifende zur Sehne gleichgerichtete Kraft  $S = 1$  erzeugt die in Richtung der Sehne wirkenden Widerlagerkräfte  $R_1$  und  $R_2$  (Fig. 6), deren Summe  $R_1 + R_2 = S = 1$  ist. Der Unterschied  $R_2 - R_1$  dieser Kräfte ist abhängig von der Weise der elastischen Verbiegung des Trägers. Wir betrachten daher (Fig. 7), den symmetrischen Belastungsfall, für welchen  $R = R_1 - R_2$  ist.

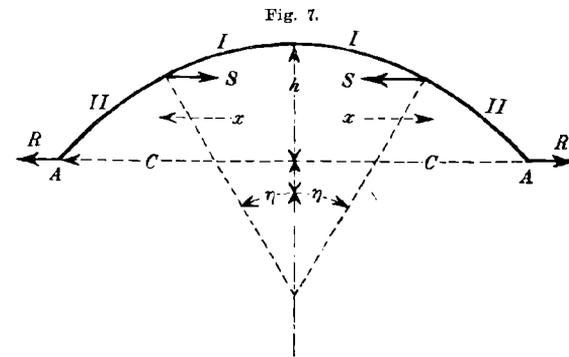


Wir halten die elastische Wirkung der Kräfte  $S$  und  $R$  getrennt, betrachten also einmal den Zustand unter der Voraussetzung  $S = 0$ , das zweite Mal unter der Voraussetzung  $R = 0$ . Die Wirkung  $w$  der Änderung der Bogenlänge durch  $R$  wird gemessen durch die bekannte

Funktion  $N$ , indem  $\frac{16 EJ}{r^3} w = N \cdot R$  ist. Die Wirkung von  $S$  wird dargestellt durch

$$\frac{16 EJ}{S r^3} = -N_\xi + 16 \alpha \int_0^\eta d\omega + 16 \varphi \int_\eta^\beta d\omega \int_\eta^\xi \mathfrak{C} \mathfrak{O} \alpha d\alpha,$$

wenn die festen Werte  $\alpha, \varphi$  der elastischen Bewegung des Angriffspunktes von  $S$  entsprechen.



$$\frac{EJ}{S r} z_\xi = \alpha; \quad \frac{EJ dz}{S r^2 d\xi} = \varphi;$$

$$N_\xi = 4\eta \left( 3 \mathfrak{C} \mathfrak{O} \int \xi + \frac{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \int^3 \xi}{3} - 2\xi \mathfrak{S} \mathfrak{in} \xi \right) - \frac{10(2\xi + \mathfrak{S} \mathfrak{in} 2\xi)}{3} + 8 \int_0^\xi \alpha \mathfrak{T} \mathfrak{a} \mathfrak{n} \mathfrak{g} \alpha d\alpha.$$

Die entsprechenden Verbiegungsgleichungen lauten, indem der Bogen von 0 bis  $\eta, \xi$  im Zustand des Bogenschubes  $S$ , von  $\eta$  bis  $\beta$  völlig frei von äußeren angreifenden Kräften ist, I auf der Strecke 0 bis  $\eta, \xi$ :

$$\frac{EJ d^2 x}{S r ds^2} = \mathfrak{C} \mathfrak{O} \int \xi - \mathfrak{C} \mathfrak{O} \int \alpha; \quad \frac{EJ dz}{S r^2 ds} = \mathfrak{C} \mathfrak{O} \int \xi \mathfrak{S} \mathfrak{in} \alpha - \frac{\mathfrak{S} \mathfrak{in} 2\alpha}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{EJ}{S r^3 \varphi \xi} = \frac{\mathfrak{S} \mathfrak{in} 2\xi - 2\xi}{4}.$$

II. Auf der Strecke  $\eta, \xi$  bis  $\beta, \gamma$ :

$$\frac{EJ dz}{S r^3 ds} = \varphi = \text{unverändert} = \frac{\mathfrak{S} \mathfrak{in} 2\xi - 2\xi}{4}$$

$$\frac{EJ}{S r^3 z} = \left( \frac{\mathfrak{S} \mathfrak{in} 2\xi - 2\xi}{4} \right) (\mathfrak{S} \mathfrak{in} \alpha - \mathfrak{S} \mathfrak{in} \gamma).$$

Mithin ist

$$\frac{EJ}{Sr^3} \alpha \xi = \frac{(\sin 2\xi - 2\xi)(\sin \xi - \sin \gamma)}{4}$$

und

$$\frac{EJ}{Sr^3} \int_{\eta}^{\beta} \alpha d\omega = \frac{(\sin 2\xi - 2\xi)}{4} \left\{ l \cdot \frac{\text{Cof} \gamma}{\text{Cof} \xi} - (\beta - \eta) \sin \gamma \right\}.$$

Hieraus ergibt sich als Gesamtwirkung:

$$\frac{16 EJ}{Sr^3} w = -N_{\xi} - W,$$

wenn

$$W = 4(\sin 2\xi - 2\xi) \{ \beta \sin \gamma - \eta \sin \xi + l \cdot \text{Cof} \xi - l \cdot \text{Cof} \gamma \}$$

ist.

Mithin erhalten wir für  $R$  den Wert:

$$R = R_1 - R_2 = \frac{N_{\xi} + W}{N}$$

und da  $R_1 + R_2 = 1$  ist, so folgt

$$2R_1 = 1 + \frac{N_{\xi} + W}{N}$$

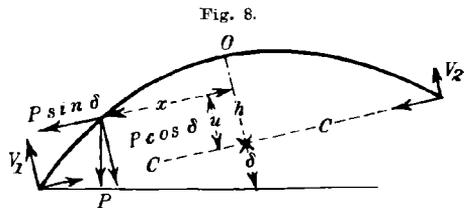
$$2R_2 = 1 - \frac{N_{\xi} + W}{N}.$$

Für  $\infty$ flache Bögen wird

$$\frac{N_{\xi} + W}{N} = \frac{\frac{32}{15} \xi^3 + \frac{8}{3} \xi^3 (\gamma^2 - \xi^2)}{\frac{32}{15} \gamma^5} = \frac{\xi^3 (5\gamma^2 - \xi^2)}{4\gamma^5}$$

$$\frac{2R_1}{S} = 1 + \frac{x^3 (5c^2 - x^2)}{4c^5} = 1 + \frac{x^3 (4h + u)}{4c^3 h},$$

welche Formel für hinreichend flache Bögen rechnerische Gültigkeit beibehält. Beim Herausrücken der Last aus der Scheitelstellung ändert sich die Wirkung zunächst sehr langsam. Für negative, nach außen gerichtete



Kräfte  $S$ , ist der Sinn, das Vorzeichen umzusetzen. Wir bezeichnen mit  $R_1$ , also dem Zeichen „1“, hier wie überall, die Wirkung an dem der angreifenden Kraft nächstliegenden Auflager.

Liegt (Fig. 8) ein Bogen in der Steigung  $\delta$ , so ist:

$$R_1 = P \cos \delta \cdot \frac{3uc}{8h^2} + \frac{P \sin \delta}{2} \left( 1 + \frac{x^3 (4h + u)}{4c^3 h} \right);$$

$$R_2 = P \cos \delta \cdot \frac{3uc}{8h^2} - \frac{P \sin \delta}{2} \left( 1 - \frac{x^3 (4h + u)}{4c^3 h} \right);$$

während die Auflagerkräfte senkrecht zur Sehne statisch bekannt sind,  $v_1 = \frac{P \cos \delta (c+x)}{2c} + \frac{P \sin \delta \cdot u}{2c}$ ; das unter der Last  $P$  erzeugte Moment hat den Wert:  $= P \cos \delta \cdot \frac{cu}{2h} - \frac{(R_1 + R_2)}{2} u - \frac{P \sin \delta \cdot xu}{2c}$ .

5. Wirkung von Kämpfermomenten.

Beim Angriff zweier Kämpfermomente  $M = 1$  (Fig. 9) verbiegt sich, für  $H = 0$ , der Bogen nach Maßgabe der Gleichung:

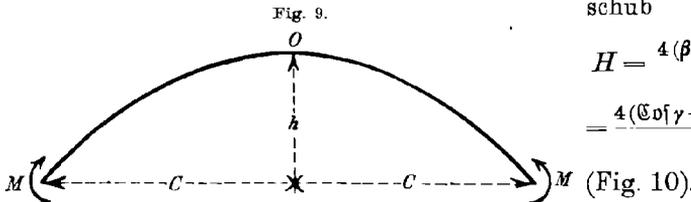
$$EJ \frac{d^2 z}{ds^2} = -1.$$

$$\frac{EJ}{r} \frac{dz}{ds} = -\sin \alpha; \quad \frac{EJ}{r^2} z = \frac{\cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha}{2}.$$

$$\frac{EJ}{r^2} w = \frac{\omega \cos^2 \gamma - \sin \alpha}{2}; \quad \frac{EJ}{r^2} w_\gamma = \frac{\beta \cos^2 \gamma - \sin \gamma}{2}.$$

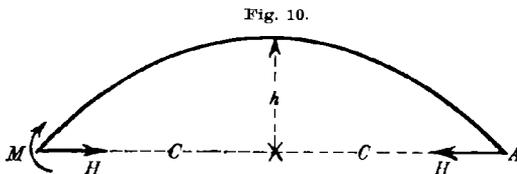
Mithin erzeugt der Angriff der beiden Kämpfermomente  $M$  den Bogen Schub  $H = \frac{M \cdot 8(\beta \cos^2 \gamma - \sin \gamma)}{rN} = \frac{M \cdot 8(\cos \gamma - 1)(\beta \cos^2 \gamma - \sin \gamma)}{hN}$ . Also gehört zu einem einzigen einseitig angreifenden Kämpfermoment der Bogen Schub

$$H = \frac{4(\beta \cos^2 \gamma - \sin \gamma)}{rN} \cdot M = \frac{4(\cos \gamma - 1)(\beta \cos^2 \gamma - \sin \gamma)}{h \cdot N}$$



Für unendlich flache Bogen erhalten wir daraus  $H = \frac{5M}{8h}$ .

Diese Formel ist rechnungsmäßig brauchbar für Flachbogen. Erst



wenn die Bogenform die Halb-

kreishöhe überschreitet,  $\frac{h}{c} \gg 1$ ,

nimmt in  $H = \mu \frac{M}{h} \equiv \frac{5M}{8h}$  der

Wert  $\mu$  einigermaßen merk-

lich zu. Für  $\frac{h}{c} = \frac{4}{3}$  wird

$\mu = \text{rund } \frac{2}{3}$ , und für  $\gamma = \infty$  wird  $\mu = \frac{3}{4}$ .

6. Undrehbare Einmauerung.

Weil die beiden symmetrisch angreifenden Kämpfermomente  $M$

der Fig. 9 im Zustand  $H = 0$  die Kämpferdrehung  $\frac{EJ}{r} \varphi = -\sin \gamma M$

erzeugen, der Scheitelzustand  $H$  aber die Kämpferdrehung  $\frac{EJ}{r^2} \varphi$

$= \frac{(\sin 2\gamma - 2\gamma)}{4} H$  erzeugt, so stehen beim Bogen mit undrehbaren

Kämpfern im Scheitelzustand  $H$  dieser Bogenschub  $H$  und zugehöriges Kämpfermoment  $M$  in der Beziehung  $M = rH \left\{ \frac{\sin 2\gamma - 2\gamma}{4\sin\gamma} \right\}$ . Weil nun der Schub die Länge der Bogenlinie verändert nach dem Maße  $\frac{EJ}{r^3} w = -\frac{NH}{16}$ , für die Wirkung aber der beiden Kämpfermomente das entsprechende Maß gilt  $\frac{EJ}{r^2} w = \frac{(\beta \cos^2\gamma - \sin\gamma)}{2} M$ , so stellt:

$$N - 16 \left\{ \frac{\sin 2\gamma - 2\gamma}{4\sin\gamma} \right\} \left\{ \frac{\beta \cos^2\gamma - \sin\gamma}{2} \right\} = U$$

allgemein den Ausdruck der von  $H$  beim Bogen mit festen undrehbaren Enden verursachten Längenänderung des Bogens dar und ist daher für diesen Bogen die allgemeine Nennerfunktion, wenn es sich um Bestimmung des durch eine Belastung  $P$  erzeugten Schubes handelt. Nach Zusammenziehen erhält man:

$$U = \beta \left\{ \frac{\cos 3\gamma}{3} + 9 \cos\gamma - \frac{4\gamma(\cos^2\gamma - 2)}{\sin\gamma} \right\} - \frac{(32\gamma + 4\sin 2\gamma)}{3} + 8 \int_0^\gamma \alpha \operatorname{Tang} \alpha \, d\alpha.$$

Weil eine Scheitellast  $P$  die Kämpfer dreht um das Maß  $-\frac{(\cos\gamma - 1)}{2}$ , so steht  $P$  und das ihm eigen zugehörige Kämpfermoment in der Beziehung  $\mathfrak{M} = -\frac{(\cos\gamma - 1)}{\sin\gamma} \cdot Pr$ , und dementsprechend stellt

$$Z = \frac{4(\cos\gamma - 1)}{\sin\gamma} (\beta \cos^2\gamma - \sin\gamma)$$

die allgemeine Zählerfunktion dar, welche nach Zusammenfassen in dem Ausdruck

$$\frac{H}{P_0} = \frac{\beta \left( \sin 2\gamma - 4\sin\gamma - 4 \operatorname{Tang} \frac{\gamma}{2} \right) + 8l \cdot \cos\gamma - 6(\cos\gamma - 1) + 6 \int_0^\gamma \omega \, d\alpha}{U}$$

den im Bogen mit undrehbaren Enden durch eine Scheitellast  $P_0$  erzeugten Bogenschub darstellt.

Für unendlich flache Bogen ergibt sich  $\frac{H}{P_0} = \frac{15}{16\gamma} \equiv \frac{15c}{32h}$ .

Da  $H$  allgemein also bekannt ist, so ist auch das Kämpfermoment

$\mathfrak{M} = -\frac{\operatorname{Tang} \frac{\gamma}{2} \cdot Pr}{2} + H \frac{(\sin 2\gamma - 2\gamma)}{4\sin\gamma} r$  allgemein bekannt. Für unendlich flache Bogen hat dasselbe den Wert  $\mathfrak{M} = \frac{Pc}{14}$ , während das Scheitelmoment  $\mathfrak{M}_0 = \frac{Pc}{8}$  wird.

Wir verfolgen hier jedoch die undrehbare Einmauerung nicht weiter, weil solche in der Wirklichkeit nicht vorhanden ist und daher die Betrachtung derselben lediglich nützlich ist zur Gewinnung an-

schaulicher Formeln für tatsächlich vorkommende elastische Bindung der Kämpfer. Die Darstellung der elastischen Bindung würde aber allgemein gehalten allzu weit über den Rahmen dieses Aufsatzes hinaus-schweifen. Wir stellen jedoch im folgenden noch einige elastische Kämpferwerte für den Bogen mit frei drehbaren Enden zusammen, deren Kenntnis unentbehrlich ist für die Berechnung gekuppelter Bogen-träger.

**7. Elastische Drehwerte.**

1. Der Schub  $H$  erzeugt die Kämpferdrehung  $\psi$ :

$$\frac{EJ\psi}{r^2} = \frac{\text{Sin } 2\gamma - 2\gamma}{4} \cdot H.$$

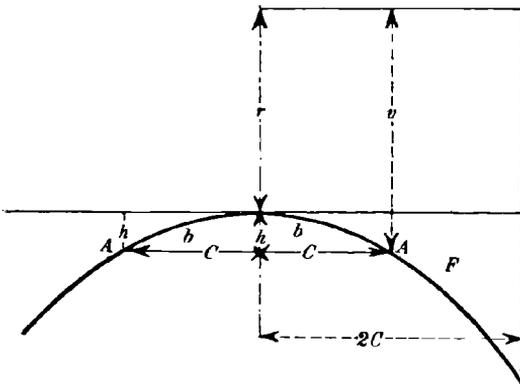
Will man nicht rechnen, vielmehr etwa bei zéichnerischem Ver-fahren unvermittelt die Längenabmessungen des Bogens anschauen, dann kann man (Fig. 11) schreiben:

$$\frac{2 EJ\psi}{H} = r^2 (\text{Sin } \gamma \text{ Cos } \gamma - \gamma) = bv - rc = bh + (b - c)r.$$

Geometrisch ist  $\frac{4 EJ\psi}{H} = (\text{Sin } 2\gamma - 2\gamma)r^2 = F_{2\gamma}$ , also die Kurven-fläche  $F$  bei doppelter Grundlinie  $2c$ , während  $(b - c)r$  die Fläche des tatsächlich behandelten Bogenträgers ist.

$$\text{In } \frac{4 EJ\psi}{H} = \frac{(\text{Sin } 2\gamma - 2\gamma)c^2}{\gamma^2} = \int_0^{2c} y dx \text{ schaut man in dem mittleren}$$

Fig. 11.



Ausdruck, der für  $2c$  als unveränderliche Spannweite nur  $\gamma$  als alleinige Bestim-mungsgröße enthält, deutlich die Zunahme des Dreh-wertes  $\psi$  bei wachsendem Pfeil, also wachsenden  $\gamma$ . Für genügend flache Bogen gilt

$$\frac{EJ\psi}{H} = \frac{c^2\gamma}{3} = \frac{2ch}{3},$$

welcher Wert jedoch mit wachsender Pfeilhöhe an-wächst.

Bei den durch äußere Angriffskräfte, Belastungen  $P$  oder Kämpfer-momente  $M$ , hervorgerufenen elastischen Kämpferdrehungen sind der Anschaulichkeit wegen die einfachen, d. h. die unvermittelt erzeugten Verdrehungen zu unterscheiden und zu sondern von den zusätzlich mittelbar durch den zur Angriffskraft als solcher zugehörigen Schub

erzeugten Drehungen. Die einfachen Werte entsprechen also der Verbiegung des frei im Raum, ohne unveränderliche Spannweite, unter Wirkung der Angriffskräfte und der entsprechenden Endkräfte, für  $H = 0$ , sich elastisch bewegenden Bogens.

2. Ein Kämpfermoment erzeugt die einfachen Verbiegungen, deren Summe:

$$\frac{EJ}{rM}(\xi + \theta) = -\sin \gamma$$

sich bereits oben (Fig. 9) ergab.

Um daher die Summe der vollen Verbiegungen zu erhalten, haben wir diesem Ausdruck noch die Wirkung des entsprechenden, zugehörigen Schubes hinzuzufügen und also zu schreiben:

$$EJ(\xi + \theta) = -r \sin \gamma M + \frac{(\sin 2\gamma - 2\gamma)}{2} H r^2$$

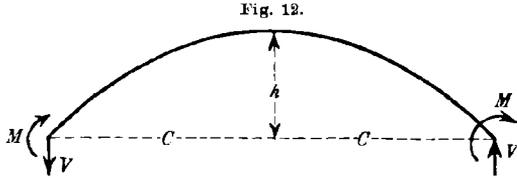
oder

$$\frac{EJ(\xi + \theta)}{r \cdot M} = -\sin \gamma + \frac{2(\beta \cos^2 \gamma - \sin \gamma)(\sin 2\gamma - 2\gamma)}{N}$$

Der Unterschied  $(\xi - \theta)$  ergibt sich (Fig. 12) aus dem antisymmetrischen Zustand:

$$\begin{aligned} \frac{EJ}{M} \frac{d^2 z}{ds^2} &= -\frac{\alpha}{\gamma}; \quad \frac{EJ}{rM} \frac{dz}{ds} = \frac{\cos \alpha - \alpha \sin \alpha}{\gamma} + \frac{\sin \gamma}{2} - \frac{3 \cos \gamma}{4\gamma} - \frac{1}{4 \sin \gamma} \\ \frac{EJ}{r^2 M} z &= -\frac{\alpha \sin^2 \alpha}{2\gamma} + \frac{3 \sin \alpha \cos \alpha}{4\gamma} + \frac{\alpha}{4\gamma} + \left( \frac{\sin \gamma}{2} - \frac{3 \cos \gamma}{4\gamma} - \frac{1}{4 \sin \gamma} \right) \sin \alpha \\ \frac{EJ}{rM} (\xi - \theta) &= -\frac{\sin \gamma}{2} + \frac{1}{4} \left( \frac{\cos \gamma}{\gamma} - \frac{1}{\sin \gamma} \right) = -\frac{\sin \gamma}{2} + \frac{1}{8} \left( \frac{\sin 2\gamma - 2\gamma}{\gamma \sin \gamma} \right). \end{aligned}$$

Man kann rechnungsmäßig schreiben:

$$\begin{aligned} &\frac{EJ}{M} (\xi + \theta) \\ &= -b + \frac{5r^2 (\sin 2\gamma - 2\gamma)}{16h} \\ &= -b + \frac{5r (\sin 2\gamma - 2\gamma)}{(16 \cos \gamma - 2)}. \end{aligned}$$


Für genügend flache Bogen erhält man daraus:

$$\begin{aligned} \frac{EJ}{M} (\xi + \theta) &= -\frac{3b}{8} + \frac{5c}{24} \\ \frac{EJ}{M} (\xi - \theta) &= -\frac{b}{2} + \frac{c}{h} \\ \frac{2EJ}{M} \xi &= -\frac{7}{8}b + \frac{5}{8}c \\ \frac{2EJ}{M} \theta &= \frac{b}{8} + \frac{c}{24}. \end{aligned}$$

Die Scheitellast  $P_0$  erzeugt die Gesamtdrehung am Kämpfer:

$$\frac{EJ}{r^2 P_0} \varphi = \frac{1 - \text{Co}\gamma}{2} + \frac{Z (\text{Sin} 2\gamma - 2\gamma)}{4N}$$

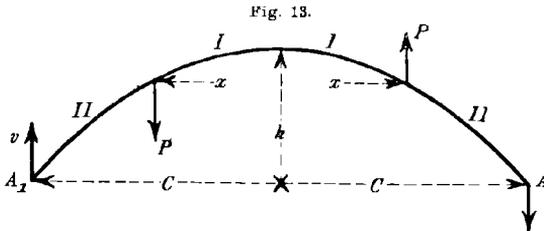
In diese Gleichung kann man für mittlere Fälle als guten Rechnungswert  $H = \frac{Z}{N} = \frac{3}{8} \frac{c}{h}$  einsetzen. Wir stellen hier jedoch zunächst fest, daß die mathematische Gleichung  $\frac{EJ}{P_0} \varphi$  für den Grenzfall  $r = \infty$ ,  $\gamma = 0$  auf den positiven Grenzwert  $\frac{EJ}{P_0} \varphi = \frac{c^2}{96}$  ausläuft, nicht auf den Wert 0, wie die Einsetzung  $\frac{Z}{N} = \frac{3c}{8h}$  für  $h = 0$  ergibt. Für  $h = 0$  wird der unendlich große Schub nicht  $\frac{3c}{8h}$ , sondern  $\frac{25}{64} \frac{c}{h}$ .

Eine im Punkte  $x, \xi, \eta$  hängende lotrechte Last erzeugt nach der Gleichung zu Fig. 4, für Scheitellast = 0, die reinen einfachen Biegunswerte:

$$\frac{EJ}{P r^2} (\varphi_1 + \varphi_2) = \text{Co}\xi - \text{Co}\gamma,$$

mithin die Gesamtwerte

$$EJ(\varphi_1 + \varphi_2) = (\text{Co}\xi - \text{Co}\gamma) r^2 P + r^2 H \frac{(\text{Sin} 2\gamma - 2\gamma)}{2}.$$



Nimmt man für nicht  
• allzu große Pfeilhöhe

$$H = \frac{H_0 (\text{Co}\gamma - \text{Co}\xi)}{(\text{Co}\gamma - 1)} = \frac{H_0 u}{h}$$

$$\text{und setzt } H_0 = \frac{3c}{8h},$$

dann erhält man:

$$\frac{EJ(\varphi_1 + \varphi_2)}{P} = \frac{2 EJ \varphi}{P_0} \cdot \frac{u}{h} = -\frac{3ru}{4} + \frac{3cbu}{8h}$$

Die Verbiebungsgleichungen bei antisymmetrischer Laststellung (Fig. 13) lauten:

Auf Strecke I von  $\alpha = 0$  bis  $\alpha = \xi$ :

$$\pm \frac{EJ}{rP} \frac{d^2 z}{ds^2} = \alpha \left( \frac{\xi}{\gamma} - 1 \right)$$

$$\frac{EJ}{r^2 P} \frac{dz}{ds} = \left( \frac{\xi}{\gamma} - 1 \right) (\alpha \text{Sin} \alpha - \text{Co}\alpha) + c$$

$$c = \frac{3\xi \text{Sin} \gamma \text{Co}\gamma - 4\gamma \text{Sin} \gamma \text{Co}\xi + \gamma \text{Sin} \xi \text{Co}\xi}{4\gamma \text{Sin} \gamma}$$

$$\frac{EJ}{r^2 P} z = \left( \frac{\xi}{\gamma} - 1 \right) \left( \alpha \frac{\text{Co}\alpha^2}{2} - \frac{3 \text{Sin} \alpha \text{Co}\alpha}{4} - \frac{3\alpha}{4} \right) + C \text{Sin} \alpha.$$

Auf Strecke II von  $\alpha = \xi$  bis  $\alpha = \gamma$ :

$$\frac{EJ}{rP} \frac{d^2z}{ds^2} = \xi \left( \frac{\alpha}{\gamma} - 1 \right);$$

$$\frac{EJ}{r^2P} \frac{dz}{ds} = \frac{\xi}{\gamma} (\alpha \operatorname{Sin} \alpha - \operatorname{Cos} \alpha) - \xi \operatorname{Sin} \alpha + \frac{3\xi \operatorname{Cos} \gamma \operatorname{Sin} \gamma + \gamma \operatorname{Sin} \xi \operatorname{Cos} \xi}{4\gamma \operatorname{Sin} \gamma}$$

$$\frac{EJ}{r^2P} (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\gamma \operatorname{Sin} 2\xi - \xi \operatorname{Sin} 2\gamma}{8\gamma \operatorname{Sin} \gamma},$$

und daher für genügend flache Bogen, aber nur für diese:

$$\frac{EJ}{P} (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{x(x^2 - c^2)}{6c} = -\frac{cxu}{6h}.$$

Dieser Wert  $EJ(\varphi_1 - \varphi_2)$  hat insofern besondere Bedeutung, als seine zeichnerische Darstellung bei symmetrischer elastischer Bindung des Bogenträgers zugleich die Einflußlinie der lotrechten Bogenquerkraft für wandernde Last  $P$  ergibt.

### 8. Berechnung der Verbiegung durch eine im Scheitel angreifende zur Sehne gleichgerichtete Kraft $2S$ .

Wir betrachten den in Fig. 14 dargestellten Belastungsfall, in welchem wir der Scheitelkraft  $2S$  den antisymmetrischen Angriff zweier Kämpfermomente  $\pm M = Sh = S(\operatorname{Cos} \gamma - 1)r$  hinzufügten. Die Verbiegungsgleichung lautet für diesen Fall:

$$\frac{EJ}{rS} \frac{d^2z}{ds^2} = \pm (\operatorname{Cos} \alpha - 1),$$

woraus folgt:

$$\frac{EJ}{r^2S} \frac{dz}{ds} = \int (\operatorname{Cos}^2 \alpha - \operatorname{Cos} \alpha) d\alpha = \frac{\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Sin} \alpha + \alpha}{2} - \operatorname{Sin} \alpha + C$$

$$\frac{EJ}{r^2S} z = \frac{\operatorname{Cos}^3 \alpha - 1}{6} + \frac{\alpha \operatorname{Sin} \alpha - \operatorname{Cos} \alpha + 1}{2} - \frac{\operatorname{Sin}^2 \alpha}{2} + C \operatorname{Sin} \alpha,$$

wobei  $C$  so zu bestimmen ist, daß  $z$  auch am Kämpfer verschwindet,

$$C = \frac{\operatorname{Sin} \gamma - \gamma}{2} + \frac{\operatorname{Cos} \gamma - 1}{2 \operatorname{Sin} \gamma} - \frac{\operatorname{Cos}^3 \gamma - 1}{6 \operatorname{Sin} \gamma} = \frac{\operatorname{Sin} \gamma - \gamma}{2} + \frac{\operatorname{Tang}^2 \frac{\gamma}{2}}{6} (2 - \operatorname{Cos}^2 \gamma - \operatorname{Cos} \gamma),$$

woraus wir für die Kämpferdrehung den Wert erhalten

$$\frac{EJ}{r^2S} \varphi = \frac{\operatorname{Sin} 2\gamma}{4} - \frac{\operatorname{Sin} \gamma}{2} + \frac{\operatorname{Tang}^2 \frac{\gamma}{2}}{6} (2 - \operatorname{Cos}^2 \gamma - \operatorname{Cos} \gamma).$$

Diesem Ausdruck haben wir den Wert:

$$\frac{EJ}{rM} (\xi - \theta) \text{ für } M = S(\operatorname{Cos} \gamma - 1)r$$

hinzuzufügen, also den Wert

$$\frac{EJ}{r^2 S} (\xi - \theta) = \left( -\frac{\sin \gamma}{2} + \frac{\sin 2\gamma - 2\gamma}{8\gamma \sin \gamma} \right) (\cos \gamma - 1),$$

woraus wir erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{EJ}{r^2 S_0} \varphi &= \frac{\cos \gamma (\cos \gamma - 1)}{4\gamma} - \frac{\text{Tang} \frac{\gamma}{2}}{6} \left( -\frac{1}{2} + \cos^2 \gamma + \cos \gamma \right) \\ &= \text{Tang} \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\sin 2\gamma}{8\gamma} + \frac{1}{12} - \frac{\cos^2 \gamma + \cos \gamma}{6} \right), \end{aligned}$$

und ist dieses also der doppelte Wert der von einer Scheitelkraft  $S_0 = 1$  hervorgebrachten Kämpferdrehung.

Für genügend flache Bogen, aber nur für diese, erhalten wir daraus:

$$\begin{aligned} \frac{EJ}{r^2 S_0} \varphi &= \frac{\gamma}{2} \left( \frac{2 + \frac{4}{3}\gamma^2}{8} + \frac{1}{12} - \frac{2 + \gamma^2 + \frac{\gamma^3}{2}}{6} \right) = -\frac{\gamma^3}{24} \\ \frac{EJ\varphi}{S_0} &= \mp \frac{ch}{12} \text{ und gilt für } S_0 = 1 \text{ der halbe Wert } \pm \frac{ch}{24}. \end{aligned}$$

Weil  $\varphi_2 = -\varphi_1$ , so kann man für eine einzige Kraft  $S_0$  auch schreiben:

$$\frac{EJ}{r^2 S_0} (\varphi_1 - \varphi_2) = \text{Tang} \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\sin 2\gamma}{8\gamma} + \frac{1}{12} - \frac{\cos^2 \gamma + \cos \gamma}{h} \right).$$

### 9. Kämpferverbiegung durch eine beliebig im festen Bogenpunkte $\alpha, \xi$ angreifende zur Sehne gleichgerichtete Einzelkraft $S = 1$ .

Die Summe der Verbiegungen kann aus den zur Fig. 7 gehörenden Gleichungen entnommen werden, indem die einfachen Verbiegungen  $\frac{EJ}{r^2 S} (\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\sin 2\xi - 2\xi}{4}$  und mithin die vollen Gesamtverbiegungen zu setzen sind:

$$\frac{EJ}{r^2 S} (\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\sin 2\xi - 2\xi}{4} - \frac{R}{S} \left( \frac{\sin 2\gamma - 2\gamma}{4} \right),$$

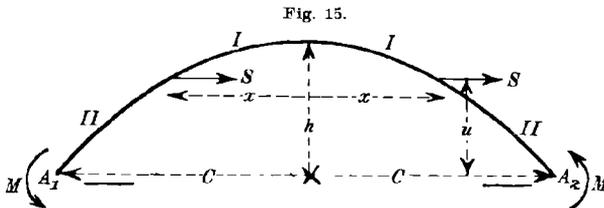


Fig. 15.

worin  $\frac{R}{S} = \frac{N_\xi + W}{N}$  ist.

Um den Unterschied  $\varphi_1 - \varphi_2$  festzustellen, betrachten wir (Fig. 15) den antisymmetrischen Angriff zweier Einzelkräfte  $S = 1$ , indem wir vorläufig die antisymmetrisch wirkenden Biegemomente  $M = \pm S \cdot u = Sr (\cos \gamma - \cos \xi)$  an den Kämpferpunkten hinzufügen.

Für diesen Belastungsfall lauten die Biegunsgleichungen:

I. Auf Strecke I von  $\alpha = 0$  bis  $\alpha = \xi$ :

$$\frac{EJ}{r} \frac{d^2 z}{ds^2} = 0; \quad \frac{EJ}{r^2} \frac{dz}{ds} = C; \quad \frac{EJ}{r^3} z = C \sin \alpha;$$

also ist im Punkte  $\xi$  die Durchbiegung

$$\frac{EJ}{r^3} z_{\xi} = C \sin \xi \quad \text{und} \quad \frac{EJ}{r^2} \frac{dz}{ds_{\xi}} = C.$$

II. Auf Strecke II von  $\alpha = \xi$  bis  $\alpha = \gamma$ :

$$\frac{EJ}{r} \frac{d^2 z}{ds^2} = \pm (\cos \alpha - \cos \xi)$$

$$\begin{aligned} \frac{EJ}{r^2} \frac{dz}{ds} &= \int (\cos \alpha - \cos \xi) d\alpha \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha + \alpha}{2} - \cos \xi \sin \alpha + \frac{\sin \xi \cos \xi - \xi}{2} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{EJ}{r^3} z &= \frac{\cos^3 \alpha - \cos^3 \xi}{6} + \frac{\alpha \sin \alpha - \cos \alpha + \cos \xi}{2} - \frac{\cos \xi \sin^2 \alpha}{2} \\ &\quad + \frac{(\sin \xi \cos \xi - \xi)}{2} \sin \alpha + C \sin \alpha. \end{aligned}$$

Der Wert  $C$  aber ist bestimmt durch den Zwang, daß  $z = 0$  wird für  $\alpha = \gamma$ . Hieraus folgt:

$$0 = \frac{\cos^3 \gamma - \cos^3 \xi}{6 \sin \gamma} + \frac{\gamma - \xi}{2} + \frac{(\cos \xi - \cos \gamma)}{2 \sin \gamma} - \frac{\cos \xi (\sin \gamma - \sin \xi)}{2} + C.$$

Daraus ergibt sich für die Kämpferdrehung:

$$\frac{EJ}{r^2} \frac{dz}{ds} = \frac{\sin \gamma (\cos \gamma - \cos \xi)}{2} - \frac{(\cos^3 \gamma - \cos^3 \xi)}{6 \sin \gamma} + \frac{\cos \gamma - \cos \xi}{2 \sin \gamma}.$$

Diesem Werte haben wir, indem wir die Kämpfermomente wieder aufheben, den Wert hinzuzufügen

$$\frac{EJ}{r^2} (\xi - \theta) = (\cos \gamma - \cos \xi) \left( -\frac{\sin \gamma}{2} + \frac{1}{8} \frac{(\sin 2\gamma - 2\gamma)}{\gamma \sin \gamma} \right)$$

und erhalten:

$$\frac{EJ}{r^2 S} (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{(\cos \gamma - \cos \xi)}{2 \sin \gamma} \left( \frac{\sin 2\gamma}{4\gamma} + \frac{1}{2} - \frac{\cos^2 \gamma + \cos \gamma \cos \xi + \cos^2 \xi}{3} \right).$$

Für genügend flache Bogen findet man daraus:

$$\frac{EJ}{r^2 S} (\varphi_1 - \varphi_2) = -\frac{(\gamma^2 - \xi^2)(\gamma^2 + 3\xi^2)}{24\gamma}; \quad \frac{EJ}{S} (\varphi_1 - \varphi_2) = -\frac{(c^2 - x^2)(c^2 + 3x^2)h}{12c^5}.$$

Man kann die auf lotrechte Belastung  $P$  bezüglichen Formeln weiter nutzbar machen, indem man  $P \equiv rpd\xi$  oder  $rp d\alpha$  vertauscht,

wo unter  $p$  eine beliebige Funktion für Streckenlast verstanden werden kann, und alsdann die Gleichungen integriert. Hierbei besteht ein bestimmter Unterschied zwischen den mathematisch genauen Gleichungen und den Annäherungsformeln. Erstere führen stets, welche Operationen man auch mit ihnen vornimmt, bedingungslos zu widerspruchsfreien Ergebnissen. Letztere aber, wenn sie auch dem bestimmten Zwecke, zu welchem sie aufgestellt wurden, rechnungsmäßig genügen, können dennoch, wenn aus ihnen durch Integrationen oder andere mathematische Behandlung weitergehende Schlüsse gezogen werden, zu Ungenauigkeiten und auch Widersprüchen führen. Sei z. B. in einem gekoppelten Bogenzuge die Hälfte eines bestimmten Einzelbogens belastet mit der Streckenlast  $p =$  Funktion  $x = f(\xi)$  oder  $f(\alpha)$ , dann bleibt, da:

$$\frac{EJ}{r^2 P} (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\gamma \sin 2\xi - \xi \sin 2\gamma}{8\gamma \sin \gamma}$$

ein vollkommener mathematischer Ausdruck ist, auch die Gleichung

$$\frac{EJ}{r^2} (\varphi_1 - \varphi_2) = \int \frac{(\gamma \sin 2\xi - \xi \sin 2\gamma)}{8\gamma \sin \gamma} f(\xi) d\xi$$

stets eine mathematisch vollkommene.

Dahingegen bleibt die Gleichung

$$\frac{EJ}{r^2} (\varphi_1 + \varphi_2) = P(\cos \xi - \cos \gamma) + \frac{H(\sin 2\gamma - 2\gamma)}{2}$$

nur dann eine mathematisch vollkommene bei Vertauschung von  $P = p d\xi \cdot r$ , wenn für  $H$  auch der genaue mathematische Ausdruck eingesetzt wird. Für  $p = p_0 \cos \xi$  ist die Bogenlinie Stützlinie bei voller Belastung, daher  $H = p_0 r$ . Bei Belastung nur einer Hälfte mit  $p = p_0 \cos \xi$  ist mithin  $H = \frac{p_0 r}{2}$  und mithin

$$\frac{EJ}{p_0 r^2} (\varphi_1 + \varphi_2) = \int_0^\gamma (\cos \xi - \cos \gamma) \cos \xi d\xi + \frac{\sin 2\gamma - 2\gamma}{4}$$

stets identisch = 0. Die Einsetzung aber eines Näherungswertes  $H$  würde zu Ungenauigkeiten führen, und es kann, in Umkehrung des Gedankenganges, aus der Größe derartiger Unstimmigkeiten auch rückwärts auf die höhere oder mindere Brauchbarkeit von Rechnungsformeln geschlossen werden.

## Sopra la derivazione dei canali.

Nota di UMBERTO CISOTTI a Padova (Italia).

Scopo della presente Nota è la razionale deduzione di una notevole formula, che può venire utilmente applicata quando si tratta di aprire nel fianco di un canale (*canale principale*) un secondo canale (*canale derivato*). Entrambi abbiano andamento rettilineo, almeno in vicinanza della località dove incomincia la derivazione del nuovo corso d'acqua.

Chiamando:  $\alpha$  l'angolo (misurato in lunghezza d'arco di circonferenza di raggio unitario) che il canale derivato forma col principale — considerati ciascuno nel senso della rispettiva corrente —;  $\lambda$  e  $\chi$  i rapporti delle larghezze e delle portate del primo al secondo, la formula accennata è la seguente

$$(I) \quad \lambda = \left[ \left( \frac{\chi}{1-\chi} \right)^{\frac{\pi}{\alpha}-1} - \chi^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \right]^{\frac{\alpha}{\pi}}.$$

Nel caso di derivazioni con piccole portate (ad es. per  $\chi < 0.10$ ) si può ricorrere alla formula approssimata, notevolmente più semplice

$$(II) \quad \lambda = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha} - 1} \cdot \chi.$$

Da essa apparisce che, per piccole derivazioni, il rapporto delle larghezze dei due canali si può ritenere proporzionale al rapporto delle portate, il coefficiente di proporzionalità dipendendo esclusivamente dallo angolo  $\alpha$  di derivazione, *variando anzi pochissimo con  $\alpha$  intorno al valore 1,16.*

Le precedenti formule si deducono partendo dai consueti principi generali della idrodinamica razionale, e trattando la questione in due dimensioni. Si ha con ciò il vantaggio di poter ricorrere all'efficace ausilio della rappresentazione conforme.

### 1. Preliminari. — Specificazione delle ipotesi.

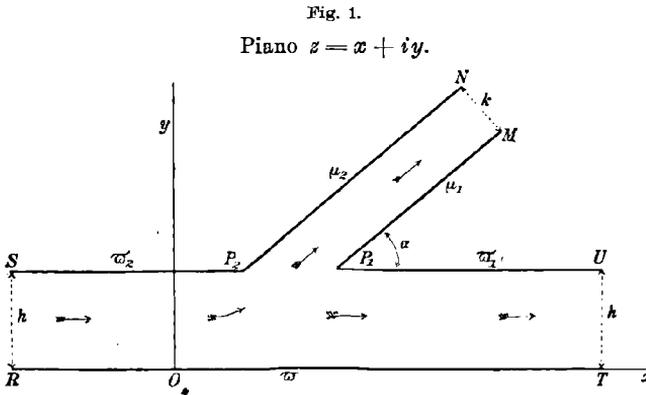
Si immagini un canale rettilineo (*canale principale*) a sponde verticali e a fondo orizzontale.

Da una delle sponde — ad es. dalla sinistra — si stacchi un secondo canale pure rettilineo (*canale derivato*). Il moto del liquido (fluido incompressibile, omogeneo, la cui densità costante prenderemo = 1) avvenga, nei due canali, per piani paralleli, orizzontali, senza

divario, sensibile, dall' uno all' altro di essi, in modo che le particelle liquide situate sopra una stessa retta perpendicolare al fondo, abbiano il medesimo comportamento.

Assunto uno dei piani del fascio come piano coordinato  $z = 0$ , di un sistema di riferimento, cartesiano ortogonale  $Oxyz$ , l' aspetto del moto risulta pertanto indipendente dalla coordinata  $z$ . — Basterà quindi occuparsi del moto delle particelle liquide nel piano  $z = 0$ .

Se si suppone ulteriormente che il fenomeno abbia carattere di stazionarietà, tutto sarà pure indipendente dal tempo  $t$ .



La regione del moto, nel piano  $z = 0$ , è limitata [vedi la Fig. 1] dai tre pezzi di pareti rigide  $\bar{w}$ ,  $\bar{w}_1 + \mu_1$ ,  $\bar{w}_2 + \mu_2$ , essendo:  $\bar{w}$ ,  $\bar{w}_1$ ,  $\bar{w}_2$  le sezioni (fatte col piano  $z = 0$ ) delle sponde

del canale principale; e  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  le sezioni delle sponde del canale derivato.

Le pareti rigide  $\mu_1$  e  $\mu_2$  si riattaccano a  $\bar{w}_1$  e  $\bar{w}_2$  rispettivamente nei punti  $P_1$  e  $P_2$ ;  $P_1P_2$  costituisce l' apertura del canale derivato.

I pezzi  $\bar{w}$ ,  $\bar{w}_1$ ,  $\bar{w}_2$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  sono rettilinei; di più  $\bar{w}_1$  e  $\bar{w}_2$  sono paralleli a  $\bar{w}$ , mentre  $\mu_1$  è parallelo a  $\mu_2$ .

La sponda  $\bar{w}$  si estende indefinitamente nei due sensi;  $\bar{w}_1$ ,  $\bar{w}_2$  e  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  si estendono indefinitamente a partire dai punti  $P_1$  e  $P_2$ , come mostra la Fig. 1.

La corrente del canale principale proviene dall' infinito (praticamente da distanza abbastanza grande da  $P_1P_2$ ) tra  $\bar{w}$  e  $\bar{w}_2$ , fino a che, giunta all' altezza dell' apertura  $P_1P_2$  del canale derivato, si bipartisce: una parte va a formare la corrente del canale derivato stesso, e scorre tra  $\mu_1$  e  $\mu_2$ ; la rimanente continua a scorrere nell' alveo principale tra  $\bar{w}$  e  $\bar{w}_1$ .

Se si vuole si può anche interpretare il moto del liquido, come la corrente di un canale, le cui sponde sieno  $\bar{w}$  e  $\bar{w}_2 + \mu_2$ , modificata dalla presenza di una parete rigida indefinita  $\bar{w}_1 + \mu_1$ , che presenta in  $P_1$  un punto angoloso.

Il filetto liquido che colpisce in  $P_1$  il profilo rigido  $\bar{w}_1 + \mu_1$  rimane momentaneamente arrestato, indi si bipartisce e prosegue scorrendo lungo  $\bar{w}_1$  e  $\mu_1$ .

Il filetto liquido che scorre aderente alla parete  $\bar{\omega}_2$ , giunto in  $P_2$  non si arresta, ma cambia bruscamente direzione seguendo la parete rigida  $\mu_2$ .

Tutti gli altri filetti vengono più o meno deviati, nessuno subisce arresti. — In sostanza ciò equivale a dire che *il valere assoluto della velocità delle particelle liquide è nullo in  $P_1$  e maggiore di zero in ogni altro punto del campo del moto; più precisamente escluso un intorno (comunque piccolo) di  $P_1$ , ammette un limite inferiore positivo.*

Introduciamo: l'angolo  $\alpha$  che le sponde del canale derivato, considerate nel verso della corrente, formano con quelle del canale principale, considerate pure nel verso della rispettiva corrente; le larghezze  $h$  e  $k$  del canale principale e del derivato; la portata  $q$  del canale principale a monte della derivazione; le portate  $q_1$  e  $q_2$  del canale principale, e del derivato a valle.

Si considerino le due sezioni  $RS$  e  $TU$  del canale principale, la prima a monte e la seconda a valle della derivazione, ed entrambi sufficientemente distanziate da  $P_1P_2$ .

Si può ritenere, sensibilmente, che i filetti liquidi prima di arrivare alla sezione  $RS$ , e dopo oltrepassata la sezione  $TU$  scorrano parallelamente alle sponde con velocità costanti, in valore assoluto e senso, che indicheremo rispettivamente con  $c$  e  $c_1$ .

Anche nel canale derivato si può ritenere che i filetti liquidi scorrano parallelamente alle sponde con una velocità costante, che indicheremo con  $c_2$ , al di là di una sezione  $MN$  abbastanza lontana dalla apertura  $P_1P_2$  del canale stesso.

Ciò posto avremo manifestamente le seguenti relazioni:

$$(1) \quad \begin{cases} q = ch, & q_1 = c_1h_1, & q_2 = c_2k; \\ q = q_1 + q_2, & \overline{P_1P_2} = \frac{k}{\text{sen } \alpha}. \end{cases}$$

Assumiamo, nel piano  $z = 0$ , una coppia di assi  $x, y$  coll'origine in un punto  $O$  della sponda  $\bar{\omega}$ , l'asse  $x$  coincidente con  $\bar{\omega}$  e diretto nel senso della corrente e l'asse  $y$  diretto verso la sponda opposta, del canale principale.

Supporremo infine che il moto del liquido sia *irrotazionale*.

## 2. Potenziale di velocità e funzione di corrente. Condizioni ai limiti.

Per essere irrotazionale il moto del liquido, esisterà una funzione uniforme  $\varphi(x, y)$  [potenziale di velocità] regolare nel campo del moto, tale che

$$(2) \quad d\varphi = udx + vdy,$$

essendo  $u$  e  $v$  le componenti della velocità nel punto generico  $(x, y)$ .

La (2) definisce la funzione  $\varphi$  a meno di una costante additiva; converremo di fissare tale costante in modo che sia  $\varphi = 0$  in  $P_1$ .

Per l'incompressibilità del liquido ( $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ), sarà  $\varphi$  funzione armonica e si potrà, di conseguenza, definire la funzione associata  $\psi$  (funzione di corrente) mediante l'equazione

$$(3) \quad d\psi = -v dx + u dy,$$

colla determinazione  $\psi = 0$ , nell'origine delle coordinate.

Se si nota che il nostro campo è semplicemente connesso, si può asserire che la  $\psi$  risulta, di necessità, uniforme.

Le condizioni ai limiti provengono dall'esprimere che le pareti rigide che limitano il campo, sono linee di flusso.

Ciò significa che sul contorno  $s = \bar{\omega} + \bar{\omega}_1 + \mu_1 + \mu_2 + \bar{\omega}_2$  potremo avere soltanto una velocità tangenziale; detta perciò  $n$  la normale in un generico punto di detto contorno, volta verso l'interno del campo, sarà

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0, \quad \text{lungo } s,$$

ovvero, designando  $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$  i coseni direttori della tangente in un generico punto di  $s$  nel senso del flusso (con che la coppia  $[s, n]$  risulta congruente ad  $[x, y]$ ), ed essendo

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dn} = u \frac{dy}{ds} - v \frac{dx}{ds} = \frac{d\psi}{ds},$$

avremo

$$\frac{d\psi}{ds} = 0, \quad \text{lungo } s.$$

Da questa scende che la  $\psi$  deve avere valore costante su ciascuno dei tre rami del contorno  $\bar{\omega}, \bar{\omega}_1 + \mu_1, \bar{\omega}_2 + \mu_2$ .

Intanto, notando che nell'origine  $O$  è  $\psi = 0$ , dovremo avere

$$(4) \quad \psi = 0, \quad \text{sopra } \bar{\omega}.$$

Sopra  $\bar{\omega}_1 + \mu_1$  e sopra  $\mu_2 + \bar{\omega}_2$  la  $\psi$  deve assumere valori costanti necessariamente diversi da zero e diversi tra loro.

Infatti, prendiamo a considerare le portate  $q$  e  $q_1$  del canale principale nelle sezioni  $RS$  e  $TU$  rispettivamente.

Tenendo presente che si è presa eguale ad 1 la densità del liquido, avremo

$$q = \int_{y_R}^{y_S} u dy, \quad q_1 = \int_{y_T}^{y_U} u dy,$$

avendo chiamato  $y_R = 0$ ,  $y_S = h$ ,  $y_T = 0$ ,  $y_U = h$ , le ordinate dei punti  $R, S, T, U$ .

Per la (3) avremo quindi

$$q = \psi_S - \psi_R, \quad q_1 = \psi_U - \psi_T,$$

ma per la (4) è

$$\psi_R = \psi_T = 0,$$

rimangono pertanto le

$$\psi_S = q, \quad \psi_U = q_1.$$

Per queste e per quanto si è precedentemente detto, si dovrà concludere

$$(5) \quad \begin{cases} \psi = q, & \text{sopra } \bar{\omega}_2 + \mu_2, \\ \psi = q_1, & \text{sopra } \bar{\omega}_1 + \mu_1. \end{cases}$$

Da queste, essendo per ipotesi  $0 < q_1 < q$ , scende quanto avevamo asserito.

Studiato il comportamento al contorno della funzione  $\psi$ , ci rimane da indagare quello del potenziale di velocità  $\varphi$ .

Il senso del moto è ovunque ben determinato, per essere

$$V = |\sqrt{u^2 + v^2}| > 0,$$

eccettuato il punto  $P_1$  in cui  $V = 0$  [cfr. n.º 1]; potremo perciò scrivere

$$\frac{dx}{ds} = \frac{u}{V}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{v}{V},$$

e quindi

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = V > 0,$$

in ogni punto di  $s$ , eccettuato  $P_1$ . Anzi, siccome escluso un intorno  $J$  (comunque piccolo) di  $P_1$  il limite inferiore dei valori di  $V$  è [cfr. n.º 1] una costante positiva  $\varepsilon$ , potremo ritenere in tutti i punti di  $s$ , esterni al piccolo intorno  $J$  suddetto

$$\frac{d\varphi}{ds} = V \geq \varepsilon > 0.$$

Questa disuguaglianza mostra che  $\varphi$  cresce costantemente e indefinitamente con  $s$ , tanto su  $\bar{\omega}$ , che su  $\bar{\omega}_2 + \mu_2$ , assumendo tutti i valori crescenti fino a  $+\infty$ , quando si procede nel senso del moto, assumendo invece tutti i valori decrescenti fino a  $-\infty$  quando si procede in senso opposto.

Consideriamo infine il comportamento della funzione  $\varphi$  sul terzo ramo del contorno,  $\bar{\omega}_1 + \mu_1$ .

Dalla

$$\frac{d\varphi}{ds} = V > 0,$$

si deduce che per essere  $\varphi = 0$  in  $P_1$ , la  $\varphi$  va sempre crescendo quando si procede nel senso del flusso, sia sopra  $\bar{\omega}_1$  che sopra  $\mu_1$ ; dalla più precisa disuguaglianza  $\frac{d\varphi}{ds} > V \geq \varepsilon > 0$ , valida fuori di  $J$ , scende che la funzione  $\varphi$  varia in entrambi i casi da 0 a  $+\infty$ .

3. Conseguenze analitiche. La funzione  $w$  ed il suo logaritmo  $-i\omega$ .

Posto

$$(6) \quad \begin{cases} x + iy = z, \\ u - iv = w, \\ \varphi + i\psi = f, \end{cases}$$

dove  $i = \sqrt{-1}$ , in virtù della (2) e della (3),  $w$  ed  $f$  risultano funzioni della variabile complessa  $z = x + iy$ , e le (2) e (3) stesse si compendiano nella unica relazione

$$(7) \quad \frac{df}{dz} = w.$$

La funzione  $w(z)$  è uniforme nel campo del moto, finita e continua anche sul contorno ad eccezione dei punti  $P_1$  e  $P_2$  [cfr. n° 1], finita all'infinito e tale che  $|w| = |\sqrt{u^2 + v^2}| = V > 0$ , eccettuato il punto  $P_1$  in cui  $|w| = 0$ .

La funzione  $f(z)$  è regolare (al finito) e, per la (7) è  $\left|\frac{df}{dz}\right| > 0$  entro il campo, il punto  $P_1$  escluso.

Poniamo

$$(8) \quad w = e^{-i\omega},$$

convenendo che per  $z = \infty$  [ $|w| = c$  (cfr. n° 1)] sia  $\omega = i \log c$ ; rimane così definita una funzione  $\omega(z)$ , uniforme nel campo del moto, finita e continua anche sul contorno, ad eccezione dei punti  $P_1$  e  $P_2$ .

Dalla (8), posto

$$(9) \quad \omega = \vartheta + i\tau, \quad (\vartheta \text{ e } \tau \text{ reali}),$$

si deducono le relazioni seguenti

$$(10) \quad \begin{cases} |w| = |\sqrt{u^2 + v^2}| = V = e^\tau, \\ \frac{u + iv}{V} = e^{i\vartheta}. \end{cases}$$

Dalla prima di queste apparisce che  $\tau$  è il *logaritmo neperiano del valore assoluto della velocità*, in un generico punto  $z$  del piano del moto; dalla seconda si deduce che  $\vartheta$  *rappresenta l'angolo che la direzione della velocità forma colla direzione positiva dell'asse delle  $x$* , cioè [cfr. n° 1] *colle pareti del canale principale, nel verso della corrente*.

Per le ipotesi fatte, facilmente si riconosce che  $\vartheta$  va contato fra  $-\pi$  e  $\pi$ , positivamente nel verso  $x \rightarrow y$ , partendo dalla direzione positiva dell' asse  $x$ , negativamente nel verso opposto.

Dopo ciò si deve avere manifestamente

$$(11) \quad \begin{cases} \vartheta = 0, & \text{sopra } \bar{\omega}, \bar{\omega}_1 \text{ e } \bar{\omega}_2; \\ \vartheta = \alpha, & \text{sopra } \mu_1 \text{ e } \mu_2. \end{cases}$$

Riassumendo, la funzione  $\omega(z) = \vartheta(x, y) + i\tau(x, y)$  dev' essere uniforme, finita e continua nei punti interni del campo del moto; sul contorno la sua parte reale  $\vartheta$  deve comportarsi nel modo stabilito dalle (11); di più per  $z = \infty$  dev' essere  $\omega = i \log c$ . Con ciò la  $\omega(z)$  risulta completamente definita.

Per la sua effettiva determinazione gioverà rappresentare in modo conforme il piano del moto sopra un semipiano, indi riferire la funzione  $\omega$  a questo semipiano, ed esprimere infine la  $\omega$  stessa in funzione di  $z$  a mezzo della relazione tra la variabile ausiliaria e la  $z$ .

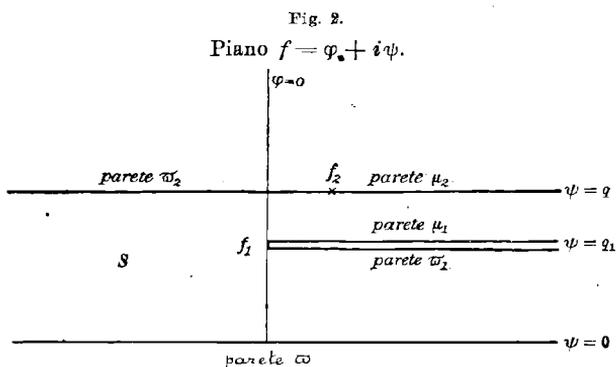
Ma, come vedremo, pel nostro scopo ci basterà esprimere la  $\omega$  in funzione della variabile ausiliaria.

#### 4. Rappresentazione conforme del piano del moto sopra un semipiano.

Consideriamo ora un piano complesso, rappresentativo della variabile  $f = \varphi + i\psi$ , e vediamo come varia il punto  $f$  mentre  $z$  si muove nel proprio piano.

Quando si fa percorrere all' affissa  $z$  tutta la parete rigida  $\bar{\omega}$ , nel verso della corrente, la  $f$ , per la (4) e per quanto abbiamo visto al numero precedente riguardo al comportamento della funzione  $\varphi$ , descrive la retta  $\psi = 0$  da  $-\infty$  a  $+\infty$ .

Quando la  $z$  descrive tutta la parete  $\bar{\omega}_2 + \mu_2$ , pure nel verso della corrente, la  $f$ , per la prima delle (5), descrive la retta  $\psi = g$ , da  $-\infty$  fino a  $+\infty$  [vedi comportamento di  $\varphi$  al n° precedente].



Facciamo infine percorrere alla  $z$  il ramo di contorno  $\bar{\omega}_1 + \mu_1$ .

Allora dalla seconda delle (5) scende che il punto  $f$  descrive la

retta  $\psi = q_1$ . In modo più preciso immaginiamo che l' affissa  $z$  percorra  $\bar{\omega}_1$ , oppure  $\mu_1$ , partendo da  $P_1$  nel senso del flusso.

Abbiamo veduto al numero precedente che tanto nel primo caso, quanto nel secondo,  $\varphi$  cresce da 0 a  $+\infty$ .

Dunque tanto a  $\bar{\omega}_1$  quanto a  $\mu_1$  corrispondono per la  $f$  valori che rientrano nell' espressione  $\varphi + iq_1$ , con  $\varphi > 0$ : esiste cioè una corrispondenza (1, 2) tra la linea  $\bar{\omega}_1 + \mu_1$  del piano  $z$  e la semiretta  $\psi = q_1$  di ascisse positive, del piano  $f$ .

Tale corrispondenza si può rendere biunivoca immaginando di praticare nel piano  $f$  un taglio lungo la semiretta  $\psi = q_1$ ,  $\varphi > 0$  [vedi Fig. 2].

Converremo, per la biunivocità della corrispondenza, che il bordo superiore del taglio (quello rivolto verso la retta  $\psi = q$ ) corrisponda al tratto  $\mu_1$ , ed il bordo inferiore al tratto  $\bar{\omega}_1$ , della parete rigida  $\bar{\omega}_1 + \mu_1$ .

Riconosciuto il comportamento di  $f(z)$  al contorno, ricordiamo che essa è regolare nel campo del moto (al finito) [cfr. n° 3]; notiamo inoltre, che, da quanto siamo venuti dicendo, risulta che al punto  $z = \infty$  corrisponde  $f = \infty$ .

Ciò posto, siamo autorizzati ad assumere la  $f = f(z)$  per una rappresentazione conforme del piano del moto sulla striscia tagliata  $S$ .

Infatti, per ogni funzione armonica, regolare in un campo assegnato, i valori nei punti interni sono compresi tra il limite inferiore ed il limite superiore di quelli che assume sul contorno. — Ora la funzione  $\psi$  è armonica e regolare nel campo del moto e assume sul contorno i valori 0,  $q_1 > 0$  e  $q > q_1$ ; possiamo dunque dire che la  $\psi$  varia tra 0 e  $q$ . — Per ciò, e pel fatto che  $\left| \frac{df}{dz} \right|$  non si annulla mai, il punto  $P_1$  escluso [n° 3], e inoltre perchè vi è corrispondenza biunivoca fra i contorni, si può concludere che ad ogni punto  $f$  della striscia tagliata  $S$  corrisponde un solo punto del piano  $z$ .<sup>1)</sup>

Ai punti  $P_1$  e  $P_2$  del piano  $z$ , dai quali si staccano le sponde del canale derivato, faranno riscontro nel piano  $f$  i due punti

$$f_1 = iq_1 \text{ e } f_1 = \varphi_2 + iq_1.$$

Vogliamo infine eseguire un ulteriore cambiamento di variabile per cui la striscia tagliata  $S$  venga sostituita da un semipiano.

Poniamo a tal uopo

$$(12) \quad \delta_1 = \frac{q_1 - q_2}{q},$$

1) Cfr. Osgood, „Lehrbuch der Funktionentheorie“ [Leipzig, Teubner, 1907] Cap. VIII, § 5.

con che  $\delta_1$  è una quantità reale, e di più, per le (1), minore, in valore assoluto, di 1.

Definiamo un numero reale  $\varphi_0$ , tale che

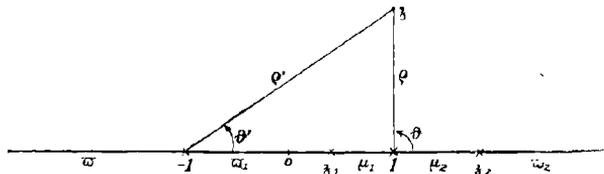
$$(13) \quad e^{\varphi_0} = (1 + \delta_1)^{\frac{q_1}{\pi}} (1 - \delta_1)^{\frac{q_2}{\pi}}.$$

E prendiamo infine in esame la relazione

$$(14) \quad e^{-\psi + \varphi_0 + i q_1} = (1 + \delta)^{\frac{q_1}{\pi}} (1 - \delta)^{\frac{q_2}{\pi}}.$$

Questa riferisce biunivocamente la striscia tagliata  $S$  al semipiano  $\mathfrak{z}$  di ordinate positive: al contorno di  $S$  corrisponde l'asse reale del piano  $\mathfrak{z}$ , in modo che alla retta  $\psi = 0$  fa riscontro il tratto  $(-\infty, -1)$ , mentre che alla retta  $\psi = q$  corrisponde il tratto  $(1, +\infty)$ , e ai bordi del taglio fa riscontro il tratto  $(-1, +1)$ , e precisamente al bordo superiore il tratto  $(\delta_1, 1)$ , all' inferiore il tratto  $(-1, \delta_1)$ .

Fig. 3.  
Piano  $\mathfrak{z}$ .



Infatti, posto

$$\begin{aligned} \mathfrak{z} - 1 &= \rho e^{i\vartheta} \quad (0 \leq \vartheta \leq \pi), \\ \mathfrak{z} + 1 &= \rho' e^{i\vartheta'} \quad (0 \leq \vartheta' \leq \pi); \end{aligned}$$

avremo

$$(1 + \delta)^{\frac{q_1}{\pi}} (1 - \delta)^{\frac{q_2}{\pi}} = \rho^{\frac{q_2}{\pi}} \rho'^{\frac{q_1}{\pi}} \cdot e^{i \left[ \frac{q_2}{\pi} (\vartheta - \pi) + \frac{q_1}{\pi} \vartheta' \right]},$$

e la (14) può scriversi

$$e^{\varphi_0 - \varphi - i(\psi - q_1)} = \rho^{\frac{q_2}{\pi}} \rho'^{\frac{q_1}{\pi}} e^{i \left[ \frac{q_2}{\pi} (\vartheta - \pi) + \frac{q_1}{\pi} \vartheta' \right]}.$$

Da questa osservando che nel punto  $\delta_1$  del piano  $\mathfrak{z}$  si ha  $\vartheta = \pi$ ,  $\vartheta' = 0$ , mentre che nel corrispondente punto  $f_1$  del piano  $f$  è  $\psi = q_1$ , si deducono le relazioni

$$(15) \quad \begin{cases} \varphi_0 - \varphi = \frac{1}{\pi} \log[\rho^{\frac{q_2}{\pi}} \rho'^{\frac{q_1}{\pi}}], \\ \psi = q_1 - \frac{q_2}{\pi} (\vartheta - \pi) - \frac{q_1}{\pi} \vartheta'. \end{cases}$$

Quando  $\mathfrak{z}$  descrive l'asse reale da  $-1$  fino a  $-\infty$ , il prodotto  $\rho^{\frac{q_2}{\pi}} \rho'^{\frac{q_1}{\pi}}$  varia, assumendo tutti i valori da 0 fino a  $+\infty$  e quindi, per la prima delle (15),  $\varphi$  varia da  $+\infty$  fino a  $-\infty$ ; ed essendo allora

$\vartheta = \vartheta' = \pi$  è, per la seconda delle (15),  $\psi = 0$ : dunque al tratto  $(-1, -\infty)$  dell' asse reale del piano  $\mathfrak{z}$  fa riscontro tutta la retta  $\psi = 0$  del piano  $f$ .

Quando  $\mathfrak{z}$  percorre l' asse reale da 1 a  $+\infty$ , variando allora il prodotto  $q^{\mathfrak{z}} q'^{\mathfrak{z}}$  da 0 fino a  $+\infty$ ,  $\varphi$  varia da  $+\infty$  a  $-\infty$ ; mentre essendo  $\vartheta = 0$  o  $\vartheta' = 0$ , si ha  $\psi = q_1 + q_2 = q$ . — Dunque al tratto  $(1, +\infty)$  dell' asse reale del piano  $\mathfrak{z}$  corrisponde tutta la retta  $\psi = q$  del piano  $f$ .

Quando si fa percorrere all' affissa  $\mathfrak{z}$ , l' asse reale partendo dal punto  $\mathfrak{z}_1$  fino ad 1, oppure nel senso opposto fino a  $-1$ , essendo allora  $\vartheta = \pi$  e  $\vartheta' = 0$ , si ha  $\psi = q_1$ ; mentre la  $\varphi$  varia in entrambi i casi sempre positivamente da 0 fino a  $+\infty$ .

Infatti, dalla (14), tenuto conto della (12), si deduce mediante derivazione

$$\frac{df}{d\mathfrak{z}} = \frac{q}{\pi} \frac{\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1}{1 - \mathfrak{z}^2}.$$

Da questa scende che tanto per  $\mathfrak{z}$  reale e crescente dal valore  $\mathfrak{z}_1$  al valore 1, quanto per  $\mathfrak{z}$  reale e decrescente da  $\mathfrak{z}_1$  fino a  $-1$ , la  $f$  assume valori reali e crescenti, e presenta quindi un minimo per  $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1$ . Ora per  $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1$  la (14), tenuto conto della (13), dà  $f = iq_1$ , cioè  $\varphi = 0$ , mentre per  $\mathfrak{z} = 1$ , oppure per  $\mathfrak{z} = -1$ , si ha  $\varphi = +\infty$ . Da ciò scende quanto avevamo asserito.

Dunque quando  $\mathfrak{z}$  descrive l' asse reale da  $\mathfrak{z}_1$  fino ad 1 l' affissa  $f$  descrive la retta  $\psi = q_1$  da 0 fino a  $+\infty$ ; lo stesso accade quando  $\mathfrak{z}$  va, lungo l' asse reale da  $\mathfrak{z}_1$  fino a  $-1$ : faremo perciò corrispondere a  $(\mathfrak{z}_1, 1)$  il bordo superiore del taglio della striscia  $S$ , e a  $(\mathfrak{z}_1, -1)$  il bordo inferiore. Si noti infine che se  $\mathfrak{z}$  è un punto del semipiano, non situato sull' asse reale, si ha

$$0 < \vartheta < \pi \quad \text{e} \quad 0 < \vartheta' < \pi;$$

ad esso corrisponde, a norma della seconda delle (15), un punto  $f$ , tale che

$$|\psi| < q_1 + q_2 = q.$$

Pertanto la (14) definisce l' accennata corrispondenza biunivoca tra il semipiano  $\mathfrak{z}$  di ordinate positive e la striscia tagliata  $S$ .

Al punto  $f_1 = iq_1$  (corrispondente al punto  $P_1$  del piano  $z$ ) corrisponde, come si è visto, il punto  $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1$ .

Al punto  $f_2 = \varphi_2 + iq$  (corrispondente al punto  $P_2$  del piano  $z$ ) fa riscontro, a norma della (14) il punto  $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_2 > 1$ , definito dalla relazione

$$(16) \quad e^{-f_2 + \varphi_0 + iq_1} = \left(1 + \frac{q_2}{\mathfrak{z}_2}\right)^\pi \left(1 - \frac{q_1}{\mathfrak{z}_2}\right)^\pi.$$

Al punto  $f = \infty$  (corrispondente a  $z = \infty$  del piano del moto) corrisponde  $\zeta = \infty$ . Per mezzo della (14) e della  $f = f(\zeta)$  potremo ora riferire biunivocamente il campo del moto al semipiano  $\zeta$  di ordinate positive; al contorno del campo del piano  $z$  fa riscontro l'asse reale del piano  $\zeta$ , in modo che alle sponde  $\mu_1$  e  $\mu_2$  del canale derivato corrispondono i due segmenti  $(\zeta_1, 1)$ ,  $(1, \zeta_2)$  del tratto  $(\zeta_1, \zeta_2)$  dell'asse reale del piano  $\zeta$ ; le sponde  $\bar{\omega}$ ,  $\bar{\omega}_1$ ,  $\bar{\omega}_2$  del canale principale vengono rappresentate rispettivamente dai rimanenti tratti  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, \zeta_1)$ ,  $(\zeta_2, +\infty)$  dell'asse reale del piano  $\zeta$ .

Considerando pertanto la  $\omega = \vartheta + i\tau$  del numero precedente, come funzione dell'argomento  $\zeta$ , nel semipiano corrispondente di ordinate positive, essa dev'essere funzione uniforme, finita e continua entro l'accennato semipiano; sul contorno la sua parte reale  $\vartheta$  deve soddisfare, a norma delle (11), alle condizioni seguenti

$$(11') \quad \begin{cases} \vartheta = 0 & \text{sui tratti } (-\infty, \zeta_1), (\zeta_2, +\infty), \\ \vartheta = \alpha & \text{sul tratto } (\zeta_1, \zeta_2), \end{cases}$$

dell'asse reale; di più dev'essere  $\omega = i \log c$ , per  $\zeta = \infty$ .

### 5. La funzione $\omega(\zeta)$ .

Poniamo

$$(17) \quad \omega(\zeta) = i \frac{\alpha}{\pi} \log \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_2} + i \log c,$$

colla determinazione  $\omega = i \log c$  per  $\zeta = \infty$ .

È facile constatare che la  $\omega(\zeta)$  così definita soddisfa a tutte le condizioni volute.

Infatti, notiamo subito che la  $\omega(\zeta)$  sopra definita si presenta funzione uniforme, finita e continua in tutti i punti del semipiano  $\zeta$  di ordinate positive, ad eccezione dei punti  $\zeta = \zeta_1$ ,  $\zeta = \zeta_2$  (corrispondenti — giova richiamarlo — ai punti  $P_1, P_2$  del piano del moto) in cui diviene infinita.

In quanto al comportamento della  $\omega(\zeta)$  al contorno notiamo che tanto per  $\zeta$  reale e minore di  $\zeta_1$ , quanto per  $\zeta$  reale e maggiore di  $\zeta_2$ , la quantità  $\frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_2}$  è reale e positiva per essere  $\zeta_2 > \zeta_1$  [n.º 4], quindi  $\log \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_2}$  è reale; pertanto dalla (17) si deduce che la parte reale di  $\omega$  è identicamente nulla.

Con ciò resta soddisfatta la prima delle condizioni (11').

Quando  $\zeta$  è reale e compresa tra  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$ , potendo scrivere

$$\log \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_2} = -i\pi + \log \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta},$$

la (17) diviene

$$\omega(\zeta) = \alpha + i \frac{\alpha}{\pi} \log \frac{\zeta - \delta_1}{\delta_2 - \zeta} + i \log c,$$

dove  $\log \frac{\zeta - \delta_1}{\delta_2 - \zeta}$  è reale.

In tal caso la parte reale di  $\omega$  è costante ed eguale ad  $\alpha$ .

Con ciò anche la seconda delle condizioni (11') è identicamente soddisfatta.

La  $\omega(\zeta)$  definita dalla (17) soddisfa pertanto ai voluti requisiti,  
c. d. d.

In quanto a  $\tau$ , coefficiente dell'unità immaginaria in  $\omega = \vartheta + i\tau$ , esso è definito, per  $\zeta$  reale, dalla relazione seguente

$$(18) \quad \tau = \frac{\alpha}{\pi} \log \left| \frac{\zeta - \delta_1}{\zeta - \delta_2} \right| + \log c.$$

Questa relazione ci permette di definire il valore assoluto  $V$  della velocità nei punti delle sponde dei due canali, in funzione della variabile ausiliaria  $\zeta$ .

Infatti, per la precedente e la prima della (10), abbiamo

$$(19) \quad V = e^\tau = c \left| \frac{\zeta - \delta_1}{\zeta - \delta_2} \right|^{\frac{\alpha}{\pi}},$$

per  $\zeta$  reale.

## 6. Relazione caratteristica fra elementi direttamente accessibili all'esperienza.

Dalla (19) risulta che per  $z = \infty$  la  $V$  tende al valore limite  $c$ , come effettivamente doveva essere, atteso che il punto  $\zeta = \infty$  dell'asse reale corrisponde al punto  $z = \infty$  a monte del canale principale, nel piano del moto.

Dalla (19) si deduce ancora che per  $\zeta = -1$  e  $\zeta = 1$ , il valore assoluto  $V$  della velocità, tende rispettivamente ai due valori finiti

$$c \left( \frac{1 + \delta_1}{1 + \delta_2} \right)^{\frac{\alpha}{\pi}}, \quad c \left( \frac{1 - \delta_1}{\delta_2 - 1} \right)^{\frac{\alpha}{\pi}}.$$

Ora se si tiene presente [cfr. n.º 4] che i punti  $\zeta = -1$  e  $\zeta = 1$  del piano  $\zeta$  corrispondono rispettivamente ai punti all'infinito a valle, dei due canali, principale e derivato, le cui velocità abbiamo già indicato [cfr. n.º 1] con  $c_1$  e  $c_2$ , avremo le relazioni

$$c \left( \frac{1 + \delta_1}{1 + \delta_2} \right)^{\frac{\alpha}{\pi}} = c_1, \quad c \left( \frac{1 - \delta_1}{\delta_2 - 1} \right)^{\frac{\alpha}{\pi}} = c_2,$$

Queste si possono anche scrivere nel modo seguente

$$\begin{aligned} \left(\frac{c}{c_1}\right)^\alpha (1 + \delta_1) &= 1 + \delta_2, \\ \left(\frac{c}{c_2}\right)^\alpha (1 - \delta_1) &= \delta_2 - 1. \end{aligned}$$

Da queste eliminando, per sottrazione, il  $\delta_2$  si ottiene la seguente notevole relazione

$$(20) \quad \left(\frac{c}{c_1}\right)^\alpha (1 + \delta_1) - \left(\frac{c}{c_2}\right)^\alpha (1 - \delta_1) = 2.$$

Ora tenendo presenti le (1) e la (12) abbiamo

$$\begin{aligned} 1 + \delta_1 &= \frac{2q_1}{q}, & 1 - \delta_1 &= \frac{2q_2}{q}; \\ \frac{c}{c_1} &= \frac{q}{q_1}, & \frac{c}{c_2} &= \frac{q}{q_2} \cdot \frac{k}{h}; \end{aligned}$$

per cui la (20) può scriversi

$$(20') \quad \left(\frac{q_1}{q}\right)^{1-\frac{\pi}{\alpha}} - \left(\frac{q_2}{q}\right)^{1-\frac{\pi}{\alpha}} \cdot \left(\frac{k}{h}\right)^\alpha = 1.$$

Poniamo

$$(21) \quad \frac{k}{h} = \lambda, \quad \frac{q_2}{q} = \chi,$$

con che  $\lambda$  e  $\chi$  rappresentano i rapporti, rispettivamente delle larghezze e delle portate del canale derivato al canale principale.

Allora dalla (20') si ricava

$$(22) \quad \lambda = \left\{ \left(\frac{\chi}{1-\chi}\right)^{\alpha-1} - \chi^{\alpha-1} \right\}^{\frac{1}{\alpha}}.$$

È questa la formula notevole che lega i rapporti delle larghezze e delle portate dei due canali, all'angolo di derivazione.

Da essa risulta che il rapporto delle larghezze  $\lambda$  cresce (o diminuisce) col rapporto delle portate  $\chi$ ; ciò che del resto risponde alla intuizione fisica del fenomeno.

Quando si vuol fare una piccola derivazione dal canale principale, in modo che del rapporto  $\chi$  delle portate si possano trascurare i quadrati e le potenze superiori, si può ricavare dalla (22) una espressione notevolmente più semplice per  $\lambda$ .

Infatti potendosi allora scrivere

$$(1 - \chi)^{1-\frac{\pi}{\alpha}} = 1 + \left(\frac{\pi}{\alpha} - 1\right) \chi,$$

la (22) diviene

$$(23) \quad \lambda = \left(\frac{\pi}{\alpha} - 1\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \chi = \sqrt[\frac{\pi}{\alpha}]{\frac{\pi}{\alpha} - 1} \cdot \chi.$$

*Osservazione.* È importante rilevare che per i valori di  $\alpha$  che più interessano la pratica, cioè per  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , il coefficiente  $\sqrt[\frac{\pi}{\alpha}]{\frac{\pi}{\alpha} - 1}$  assume valori  $\geq 1$ , ma certamente minori di 1,322, per cui sensibilmente si può attribuire a  $\sqrt[\frac{\pi}{\alpha}]{\frac{\pi}{\alpha} - 1}$  il valore medio 1,16, e assegnare in conseguenza alla (23) la forma ancora più semplice

$$(23') \quad \lambda = 1,16 \chi.$$

Infatti, posto  $\frac{\pi}{\alpha} = n$ , basterà studiare il comportamento qualitativo della funzione

$$N(n) = \sqrt[n]{n - 1},$$

nell'intervallo 2, +  $\infty$ .

Da essa intanto si deduce che per  $n = 2$  è  $N = 1$ .

Di più potendosi scrivere

$$\log N = \frac{\log(n-1)}{n},$$

e notando che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log N = 0,$$

possiamo dire che è pure  $N = 1$  quando  $n = \infty$ .

D'altra parte, essendo

$$\frac{d \log N}{dn} = \frac{1}{n^2} \left[ \frac{n}{n-1} - \log(n-1) \right],$$

$$\frac{d^2 \log N}{dn^2} = -\frac{2}{n} \left[ \frac{d \log N}{dn} + \frac{1}{2(n-1)^2} \right],$$

si deduce che la funzione  $\log N$ , e quindi la funzione  $N$ , assumono *un unico valore massimo* quando

$$\frac{n}{n-1} - \log(n-1) = 0.$$

Facilmente si constata che il valore di  $n$  che rende soddisfatta la precedente è  $n = 4,579 \dots$ ; e il corrispondente valore massimo di  $N$  è 1,321  $\dots$ .

Possiamo pertanto asserire che, variando comunque  $n$  tra 2 e +  $\infty$ , i valori di  $N$  soddisfanno certamente alle seguenti limitazioni

$$1 \leq N < 1,322, \quad \text{c. d. d.}$$

Notiamo ancora che ad  $n = 4,579 \dots$ , che rende massimo, come abbiamo visto,  $N$ , corrisponde un angolo di derivazione  $\alpha = 39^\circ 18'$  circa.

Segue una tabella di valori di  $\lambda$ , corrispondenti ai valori di  $\chi$  e di  $\alpha$  che maggiormente possono interessare nei casi concreti.

$$\text{Tabella dei valori di } \lambda = \left[ \left( \frac{\chi}{1-\chi} \right)^{\frac{\pi}{\alpha}-1} - \chi^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \right]^{\frac{\alpha}{\pi}}$$

	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 20^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 40^\circ$	$\alpha = 50^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 70^\circ$	$\alpha = 80^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
$\chi = 0,01$	0,011	0,012	0,013	0,013	0,013	0,012	0,011	0,011	0,010
$\chi = 0,02$	0,023	0,025	0,026	0,026	0,026	0,025	0,023	0,022	0,020
$\chi = 0,03$	0,035	0,037	0,039	0,039	0,039	0,037	0,035	0,033	0,030
$\chi = 0,04$	0,046	0,050	0,052	0,052	0,052	0,050	0,047	0,044	0,040
$\chi = 0,05$	0,058	0,063	0,065	0,066	0,065	0,062	0,059	0,055	0,050
$\chi = 0,06$	0,070	0,075	0,078	0,079	0,078	0,075	0,071	0,066	0,060
$\chi = 0,07$	0,083	0,088	0,091	0,092	0,091	0,087	0,083	0,077	0,070
$\chi = 0,08$	0,093	0,100	0,104	0,105	0,104	0,100	0,095	0,088	0,080
$\chi = 0,09$	0,105	0,113	0,117	0,118	0,117	0,112	0,107	0,099	0,090
$\chi = 0,10$	0,117	0,126	0,131	0,132	0,130	0,125	0,119	0,110	0,106
$\chi = 0,20$	0,269	0,285	0,294	0,296	0,292	0,282	0,266	0,247	0,223
$\chi = 0,30$	0,449	0,467	0,478	0,479	0,471	0,454	0,428	0,396	0,358
$\chi = 0,40$	0,681	0,696	0,703	0,700	0,685	0,657	0,619	0,571	0,516
$\chi = 0,50$	1,000	0,999	0,994	0,979	0,952	0,908	0,852	0,784	0,707

Padova, Settembre 1910.

## Über graphische Tafeln für Funktionen einer Veränderlichen, insbesondere über graphische Logarithmentafeln.

Von P. WERKMEISTER in Straßburg i. E.

Das einfachste Verfahren zur Herstellung einer graphischen Tafel für eine Funktion einer Veränderlichen besteht darin, daß man auf den beiden Seiten einer Linie die Skalen aufträgt, die durch die Werte der Veränderlichen und der Funktionen bestimmt und nach diesen beziffert sind. Als Träger für die Skalen wählt man aus praktischen Gründen, solche Linien, die sich in einfacher Weise — mit Lineal und Zirkel — zeichnen lassen. Eine der beiden Skalen kann man mit Rücksicht auf die dadurch entstehende Bequemlichkeit beim Aufzeichnen und beim

Gebrauch als gleichmäßige oder gewöhnliche Skala ausführen, deren Längeneinheit entsprechend der von der Tafel geforderten Genauigkeit zu wählen ist.

Um eine bestimmte Genauigkeit bei einer Tafel zu erreichen, ist es vielfach mit Rücksicht auf die Längen der Skalen nicht mehr möglich, die Tafel zusammenhängend, an einem Stück — z. B. mit Benutzung *einer* Geraden oder *eines* Kreises als Skalenträger — darzustellen; man zerlegt in diesem Falle die Tafel in einzelne Teile, die man dadurch erhält, daß man als Träger für die Skalen am besten ein System von parallelen Geraden wählt. Eine solche Zerlegung der ganzen Tafel bietet den weiteren Vorteil, daß man für jeden einzelnen Teil der Tafel die Längeneinheit für die gleichmäßige Skala beliebig wählen kann; man hat dadurch die Möglichkeit die Längeneinheit von Teil zu Teil so zu verändern, daß auch bei der ungleichmäßigen Skala die Ablesegenauigkeit an sämtlichen Stellen der Tafel beiläufig dieselbe ist, also jedenfalls eine bestimmte untere Grenze nicht überschreitet. Eine der bekanntesten Tafeln dieser Art ist die graphische Logarithmentafel von A. Tichy.<sup>1)</sup>

Bei einer, infolge der verlangten Genauigkeit bzw. der dadurch bedingten Skalenlänge in einzelne Teile zu zerlegenden Tafel kann man durch entsprechende Anordnung das Zeichnen der gleichmäßigen Skala umgehen, sodaß der Träger nur auf einer Seite eine Skala trägt; die dadurch erreichte Erhöhung der Übersichtlichkeit der ganzen Tafel ist nicht unwesentlich. Beachtet man nämlich, daß für mehrere aufeinanderfolgende Werte der Veränderlichen die entsprechenden Funktionswerte, z. B. in der ersten Ziffer übereinstimmen, und denkt man sich dementsprechend diese Werte in zwei Gruppen von Ziffern zerlegt, so läßt sich die Zerlegung der ganzen Tafel in einzelne Teile derart vornehmen, daß diese mit der ersten Gruppe übereinstimmen und nach dieser beziffert sind; bei einer bestimmten gegenseitigen Lage der Tafelteile und gleichmäßiger Funktionsskala kann dann die zweite Ziffergruppe z. B. durch eine außerhalb der eigentlichen Tafel zu zeichnende Hilfsskala in Verbindung mit einer beweglichen Ablesegeraden dargestellt werden. Der Grundgedanke bei einer solchen Anordnung der Tafel ist derselbe, der vielfach bei numerischen Tafeln Verwendung findet, indem man bei gegebenem Wert der Veränderlichen den gesuchten Funktionswert durch Zusammensetzen von zwei, an verschiedenen Stellen der Tafel zu entnehmenden Zifferngruppen erhält, oder

1) Graphische Logarithmentafeln, Wien 1897. Beilage zur Zeitschrift des Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins.

indem bei gegebenem Funktionswert der gesuchte Wert der Veränderlichen einen doppelten Tafelzugang erfordert.

Im Folgenden sollen einige Möglichkeiten zur Konstruktion von solchen Tafeln zusammengestellt werden, wobei — besonders mit Rücksicht auf einige von E. Leder<sup>1)</sup> angegebene und von der Industriellen Handelsgesellschaft in Berlin in den Handel gebrachte logarithmische Rechenapparate — als Beispiel einer Funktion die logarithmische gewählt wird, sodaß zunächst von *graphischen Logarithmentafeln* die Rede ist.

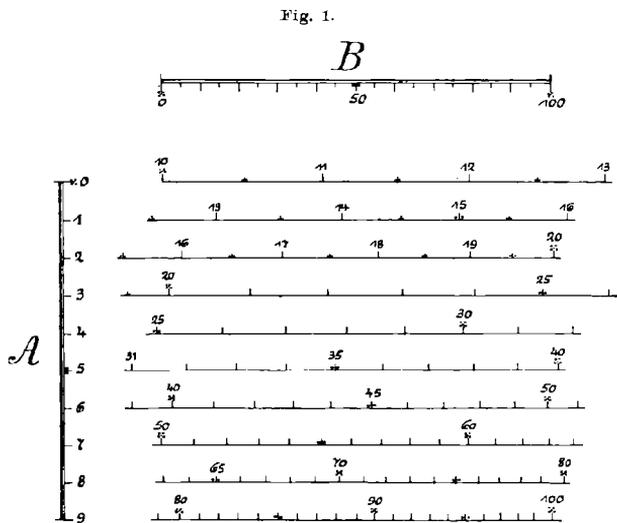
Für die zu besprechenden Tafeln sei der Einfachheit wegen die Gruppierung der der Tafel zu entnehmenden Mantisse derart vorgenommen, daß die

erste Gruppe — *A* — aus nur einer Ziffer besteht, die ganze Tafel also in zehn Teile zerfällt. Die Anzahl der Ziffern der zweiten Gruppe — *B* — ist von der jeweiligen Längeneinheit der dieser Gruppe entsprechenden Hilfsskala abhängig.

Die einfachste Art einer in der angegebenen Weise ent-

worfenen graphischen Logarithmentafel ist in der Figur 1 gezeichnet; sie besteht aus der — entsprechend der Abtrennung von nur einer Ziffer — an zehn parallelen Geraden angetragenen, nach dem Numerus bezifferten Hauptskala und den zu dieser senkrechten, bzw. parallelen Nebenskalen *A* und *B*, von denen *A* nach der ersten und *B* nach der zweiten und dritten Dezimale des Logarithmus beziffert ist.

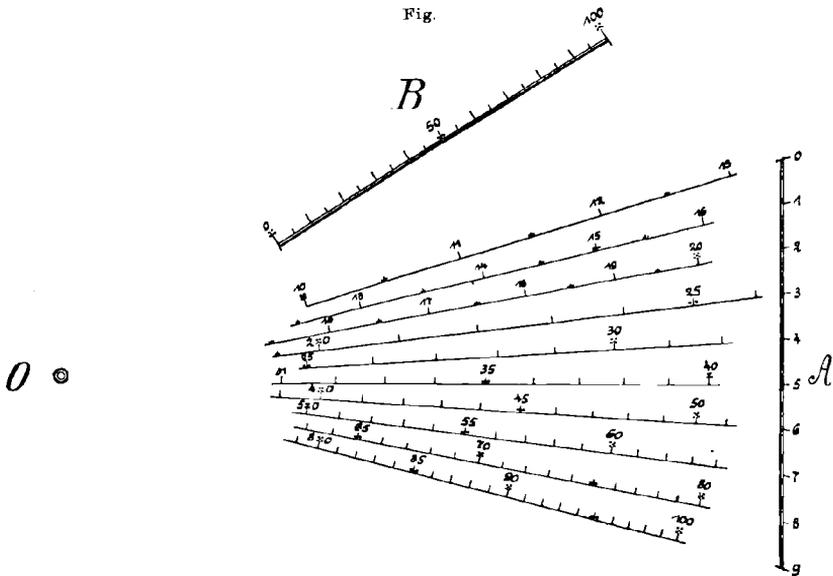
Die Benützung der Tafel kann auf zwei verschiedene Arten vorgenommen werden, je nachdem man die Skala *A* oder *B* beweglich anordnet. Im ersten Fall zeichnet man die Skala *A* auf einem durchsichtigen Lineal, das z. B. mit einer der Reißschiene ähnlichen Anschlagvorrichtung ver-



1) Vgl. Encyclopädie der Math. Wissenschaften Band I. Numerisches Rechnen von R. Mehmke. Seite 1079.

sehen ist, sodaß die Trägergerade von *A*, mit deren Hilfe die Einstellungen und Ablesungen an der Hauptskala und der Skala *B* vorzunehmen sind, parallel mit sich bewegt werden kann. Soll die Skala *B* beweglich angeordnet werden, so kann man sie an der Kante einer Reißschiene anbringen, sodaß sie derart über die Hauptskala geführt werden kann, daß ihr Anfangspunkt sich auf einer Senkrechten zu dieser bewegt. Was die Bequemlichkeit bei der Ablesung anbelangt, so ist die Einrichtung, bei der die Skala *A* auf einem durchsichtigen Lineal angeordnet ist, vorzuziehen.

Mit Rücksicht auf die Ablesung in der Nähe der Ränder der Hauptskala dürfen — bei dieser und den meisten folgenden Tafeln —



deren einzelne Teile nicht auf die Länge der Skala *B* abgeschnitten sein; es muß vielmehr jeder Teil ein Stück seines vorhergehenden und seines folgenden wiederholen.

Eine Tafel von der angegebenen Art ist die „Karte für graphisches Rechnen“ von G. Delinge.<sup>1)</sup>

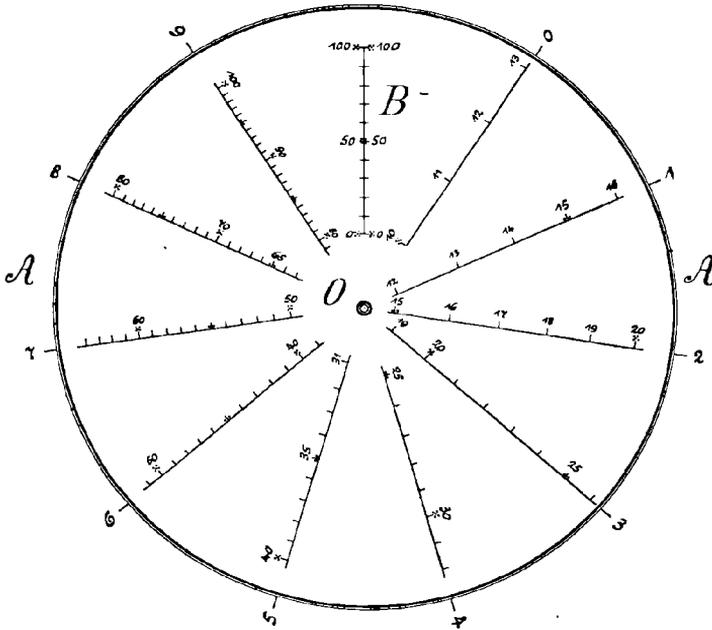
Eine andere Art der Tafelanordnung ist in der Figur 2 dargestellt. Die Hauptskala besteht aus zehn im Punkte *O* sich schneidenden Geraden, durch welche die nach der ersten Mantissenstelle bezifferte Skala *A* bestimmt ist; die Hilfsskala *B* hat als Träger eine ebenfalls durch *O* gehende Gerade. Die Benützung der Tafel geschieht entweder

1) D. R. P. Nr. 14636.

derart, daß man die Skala *B* an der Kante eines um *O* drehbaren Lineals angibt, oder — mit Rücksicht auf die Ablesung bequemer — mit Hilfe des Zirkels.

Als Träger der Skala *A* kann auch, wie die Figur 3 zeigt, an Stelle der Geraden ein Kreis gewählt werden. Eine solche Einrichtung der Tafel zeigt die von E. Leder entworfene „logarithmische Rechenscheibe“<sup>1)</sup>, die in zwei Ausführungen — auf Celluloid<sup>2)</sup> und auf Papier<sup>3)</sup> — von der Industriellen Handelsgesellschaft in Berlin herausgegeben

Fig. 3.



wird. Bei der „logarithmischen Rechenscheibe“ ist die Zerlegung der Mantisse derart vorgenommen, daß die erste Gruppe zwei Ziffern enthält; die Hauptskala zerfällt daher in hundert Teile. Die Ableseskala *B* ist auf einem um den Schnittpunkt der Trägergeraden der Hauptskala beweglichen Lineal angebracht; ihre Längeneinheit ist so gewählt, daß der Einheit der vierten Logarithmendezimale eine Strecke von 0,66 mm entspricht, sodaß die Logarithmen unmittelbar auf vier Stellen und durch Schätzung auf fünf Stellen der Tafel entnommen werden

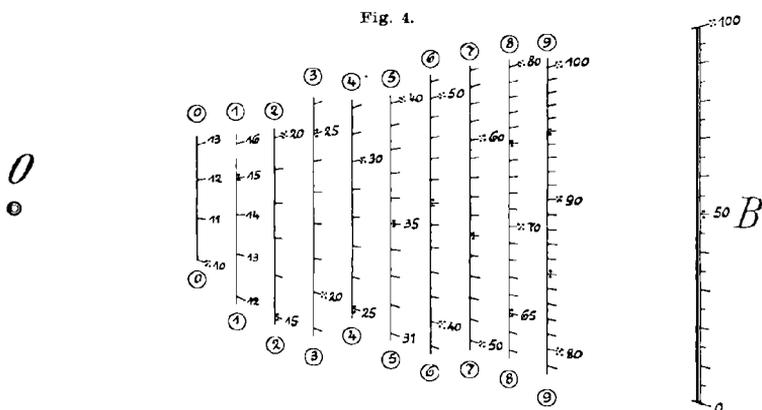
1) D. R. P. Nr. 104927.

2) Zum Preis von 3 Mark.

3) Als Beilage zu „Die Praxis des Logarithmen-Rechnens“ von Ernst Leder, Berlin 1908.

können. Bei einer Gesamtlänge von 66 mm<sup>1)</sup> der Skala *B* beträgt die der Hauptskala 660 cm. Wie Versuche zeigen, erreicht die Rechenscheibe nahezu die Genauigkeit einer fünfstelligen numerischen Logarithmentafel; der mittlere Fehler beträgt  $\pm 2$  Einheiten der fünften Stelle.

Bei den zwei besprochenen Tafeln ist die Längeneinheit für sämtliche Teile der Hauptskala dieselbe; der Abstand zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Strichen der Skala und damit deren Ablesegenauigkeit, sind deshalb an verschiedenen Stellen der Tafel nicht dieselben. Wie die folgenden Tafeln zeigen, ist es in einfacher Weise möglich, die Längeneinheit der Hauptskala mit fortschreitender Skala in natürlicher Weise zu vergrößern, sodaß der Unterschied in der Ablesegenauigkeit an verschiedenen Stellen der Tafel geringer ist.



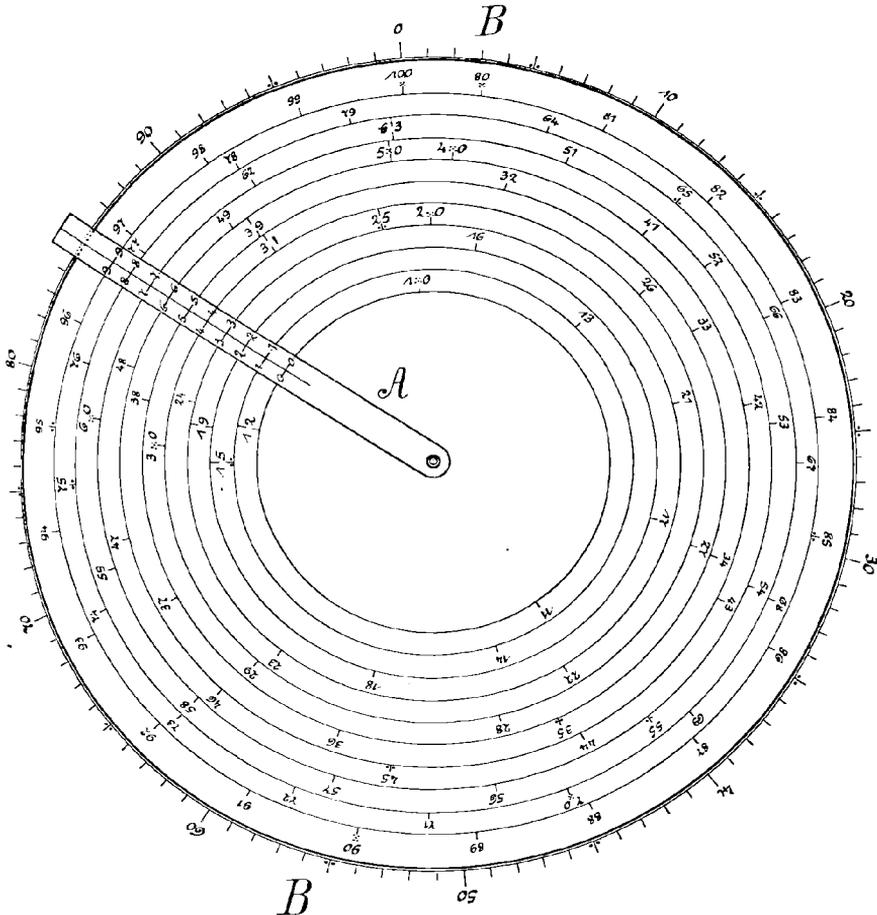
In der Figur 4 ist eine Tafel gezeichnet, bei der die Hauptskala als Träger parallele Geraden besitzt, deren Bezifferung nach der ersten Mantissenstelle der früheren Skala *A* entspricht. Die Benützung der Tafel, bei der man die Hauptskala und die Skala *B* gleichsam zentral aufeinander projiziert, geschieht am besten mit Hilfe eines in *O* befestigten Fadens, oder eines um *O* drehbaren, mit einer Ablesegeraden versehenen durchsichtigen Lineals.

An Stelle der parallelen Geraden als Träger der Hauptskala hat die Tafel der Figur 5 konzentrische Kreise, die nach der ersten Mantissenstelle beziffert sind. Die Skala *B* hat als Träger einen zur Hauptskala konzentrischen Kreis. Für die Einstellungen und Ablesungen bei Benützung der Tafel verwendet man ein um den Mittelpunkt der Kreise drehbares Lineal aus durchsichtigem Stoff, das die Skala *A* mit der Kreisbezifferung trägt; die Trägergerade von *A* dient zum Einstellen und

1) Die ganze Tafel — in Kreisformat — hat einen Durchmesser von 21 cm.

Ablesen. Die Tafel bietet im Vergleich mit der vorhergehenden Tafel (Figur 4) einen Vorteil, indem sie bei ungefähr derselben Platzbeanspruchung eine größere Genauigkeit sowohl in der Hauptskala als in der Skala *B* aufweist. Demgegenüber besitzt die Tafel einen Nachteil, der darin besteht, daß das Übereinandergreifen der einzelnen Tafelteile störend wirkt.

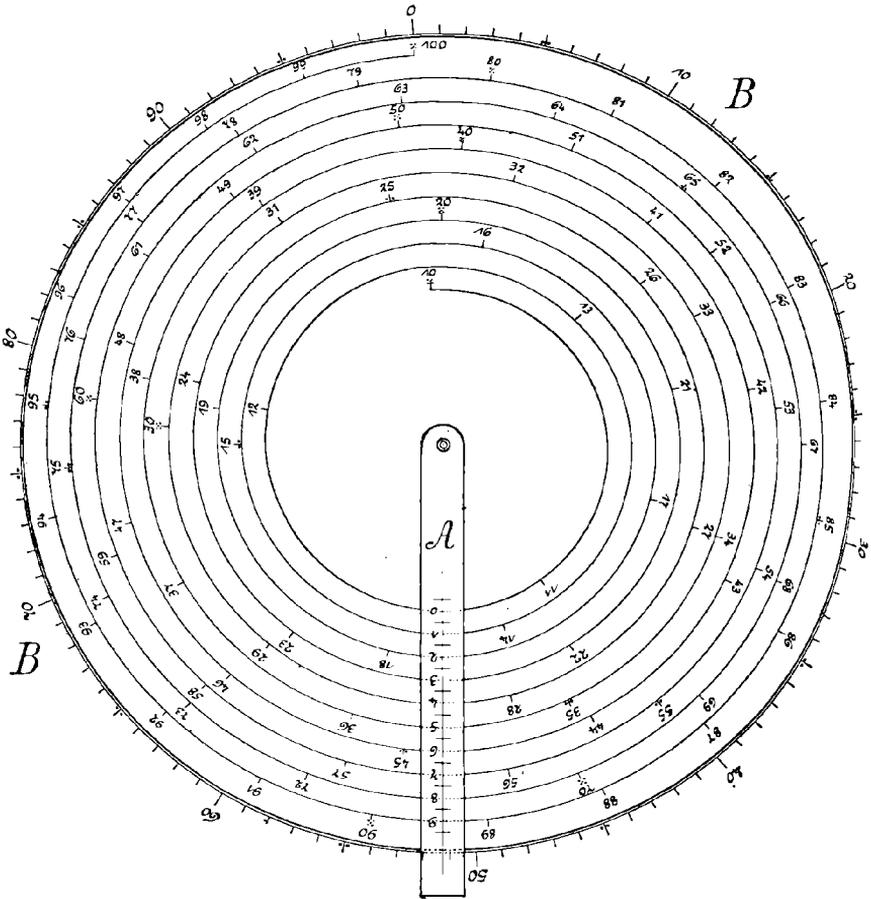
Fig. 5.



Die Trägerform der Hauptskala erforderte bei den seither betrachteten Tafeln stets eine Zerlegung der Skala in einzelne, unter sich äußerlich nicht zusammenhängende Teile; eine derartige Zerlegung, die durch das Übereinandergreifen der verschiedenen Skalenteile z. B. bei der Tafel der Figur 5 immerhin eine Unbequemlichkeit mit sich bringt, läßt sich dadurch umgehen, daß man als Hauptskalenträger eine spiral-

förmige Linie wählt. In der Figur 6 ist eine solche Tafel gezeichnet; der spiralförmige Träger setzt sich hier — mit Rücksicht auf die Ausführung der Zeichnung — aus lauter Halbkreisen zusammen. Die Skala *B* ist wie bei der vorhergehenden Tafel an einem Kreis als Träger angetragen; ein um den Mittelpunkt dieses Kreises drehbares

Fig. 6.



Lineal aus durchsichtigem Stoff trägt die *A*-Skala, bei der am besten die Zwischenräume zwischen je zwei Strichen nach der ersten Marktissenstelle beziffert sind; die Trägergerade der Skala dient zum Einstellen und Ablesen. Die *A*-Skala ist derart eingerichtet, daß die Skalenstriche bei Einstellung auf die Null der *B*-Skala mit dem Träger der Hauptskala übereinstimmen.

Eine möglichst *hohe Genauigkeit* in der Tafel läßt sich — wie bei



Gruppe der Mantisse nur einstellig wählt, dafür aber die Genauigkeit der *B*-Skala durch eine möglichst groß gewählte Längeneinheit steigert; am natürlichsten erreicht man dies bei den Tafeln in den Figuren 5 und 6.

Die durch die Größe und das Format der Tafel für die Längeneinheit der *B*-Skala gesetzte Grenze läßt sich noch dadurch weiter ziehen, daß man die *B*-Skala in zwei Stücke zerlegt, die von 0 bis 50 und von 50 bis 100 beziffert sind. Dieser Zerlegung entspricht dann eine solche der zehn Teile der Hauptskala ebenfalls in je zwei Stücke, sodaß diese dann aus zusammen zwanzig Teilen besteht; zu jedem der beiden Teile der *B*-Skala gehören demnach zehn Teile der Hauptskala. Diese Anordnung, die sich bei sämtlichen Tafeln anwenden läßt, ist in der Figur 7 für die Tafel der Figur 6 angegeben, wobei als Träger für die *B*-Skala ebenfalls eine spiralförmige Linie gewählt wurde.<sup>1)</sup> Die zu der ersten Hälfte der *B*-Skala — von 0 bis 50 — gehörenden zehn Unterteile der Hauptskala, die entsprechend der Zweiteilung von *B* auf zwanzig Windungen des spiralförmigen Trägers sich verteilt, müssen zusammen mit jener besonders hervorgehoben werden, was in der Figur durch Bemalen geschehen ist.<sup>2)</sup> Die Skala *A*, deren Trägergerade zugleich zum Ablesen dient, wird am besten auf einem durchsichtigen und drehbaren Lineal angebracht; die Skala, bei der bequemerweise die Zwischenräume beziffert werden, deckt sich bei Einstellung auf die Null der *B*-Skala mit je der zweiten Windung des Trägers der Hauptskala. Die Benützung der Tafel beim Aufsuchen des Logarithmus zu einem gegebenen Numerus geht folgendermaßen vor sich; mit der Geraden des drehbaren Lineals stellt man an der Hauptskala den gegebenen Numerus ein und liest die erste Stelle der Mantisse an der *A*-Skala des Lineals ab; die weiteren Stellen der Mantisse liest man jenachdem der gegebene Numerus an einer bemalten oder nicht bemalten Windung liegt, an der entsprechenden Windung der *B*-Skala ab.

Die Genauigkeit einer solchen graphischen Logarithmentafel entspricht — ebenso wie die der Tafel von E. Leder — bei einem Durchmesser der *B*-Skala von etwa 22 cm, nahezu derjenigen einer fünfstelligen numerischen Logarithmentafel. Als besondere Vorteile der Tafel können angeführt werden die bequeme Benützungsweise mit Hilfe einer Einstell- und Ablesegeraden und die nahezu gleiche Ablesegenauigkeit an sämtlichen Stellen der Hauptskala.

1) Man könnte auch — ohne daß die Tafel an Bequemlichkeit verlieren würde — zwei konzentrische Kreise wählen.

2) Die Zusammengehörigkeit könnte auch mit Hilfe der *A*-Skala zum Ausdruck gebracht werden, indem man bei dieser die Zwischenräume noch halbiert.

Auf Grund der für Logarithmen geltenden Sätze lassen sich mit Hilfe der im Vorstehenden besprochenen graphischen Logarithmentafeln auch *Rechenapparate* konstruieren. Für eigentliche Rechenschieberkonstruktionen, bei denen bei der Rechnung eine der Hauptskala gleichartige Skala an jener verschoben wird, die Hauptskala demnach eine logarithmische, mit derselben Längeneinheit in allen Teilen, sein muß, kommen zunächst nur die Tafeln der Figur 1 und 3, und unter diesen der Ausführungsmöglichkeit wegen nur die erstere in Betracht; über Rechenschieber mit in Stücke zerlegten Skalen vgl. Encyclopädie der Math. Wissenschaften Band I. Numerisches Rechnen von R. Mehmke, Seite 1058 und ff.

Der Grundgedanke bei der Ausgestaltung der Tafeln zu logarithmischen Rechenapparaten mit nur einer Hauptskala für Multiplikation und Division besteht darin, daß man mit Hilfe der Tafel zu den gegebenen Zahlen die Logarithmen ermittelt, diese — ohne sie abzulesen — mittels einer entsprechenden Vorrichtung mechanisch addiert oder subtrahiert, und zu dem so erhaltenen Logarithmus des Resultats rückwärts in der Tafel den Numerus ermittelt; dabei hat man entsprechend der Ablesung der Mantisse an *zwei* Skalen — *A* und *B* — eine doppelte Addition bzw. Subtraktion auszuführen. Die praktische Ausführung dieses Grundgedankens gestaltet sich am einfachsten bei der Tafel (Figur 3) von E. Leder, der auch mit Benützung dieser Tafel eine „mechanische Rechenscheibe“ konstruiert hat.<sup>1)</sup>

Die Rechenscheibe von E. Leder besteht aus der fest angebrachten, schieberartig ausgebildeten und mit einem Läufer versehenen Skala *B*, unter der die um ihren Strahlenschnittpunkt drehbare Hauptskala vorbeibewegt werden kann, sodaß der zur jeweiligen Rechnung nötige Teil unter dem Schieber (Skala *B*) eingestellt werden kann. Die Addition oder Subtraktion der beiden ersten Mantissenstellen wird selbsttätig durch ein besonderes Zählwerk besorgt; diejenige der folgenden Stellen läßt sich mit Hilfe der Schiebervorrichtung und des Läufers der *B*-Skala mechanisch ausführen. Da die der „mechanischen Rechenscheibe“ zugrunde liegende Hauptskala in bezug auf ihre Größenverhältnisse genau mit der „logarithmischen Rechenscheibe“ (vgl. oben) übereinstimmt, so dürften<sup>2)</sup> beide in der Genauigkeit der Resultate nicht weit auseinanderliegen<sup>3)</sup>; die mechanische Rechenscheibe erreicht dem-

1) Die Rechenscheibe wird ebenfalls von der Industriellen Handelsgesellschaft in Berlin — zum Preis von 70  $\mathcal{M}$  — in den Handel gebracht.

2) Dem Verfasser steht nur eine logarithmische Rechenscheibe zur Verfügung.

3) Mit Rücksicht auf die Schiebereinstellungen dürfte bei der mechanischen Rechenscheibe an Genauigkeit etwas verloren gehen.

nach eine Genauigkeit, welche zwischen derjenigen einer vier- und der einer fünfstelligen Tafel liegt.

Von den übrigen angeführten Möglichkeiten in der Anordnung der Hauptskala, fand diejenige mit konzentrischen Kreisen Verwendung bei der Rechenscheibe von G. Hermann<sup>1)</sup>; eine spiralförmige Trägerlinie wurde bei einer Rechenscheibe von A. Steinhauser<sup>2)</sup> benützt.

Außer den in den Figuren angedeuteten Trägerformen für die Hauptskala sind natürlich auch noch andere möglich; E. Leder verwendet z. B. bei einer unter dem Namen Tacharithmetikos in den Handel gebrachten logarithmischen Rechenmaschine<sup>3)</sup> hundert kongruente Kreisbogen, deren Mittelpunkte in gleichen Abständen auf einer Geraden liegen. Bei diesem Apparat ist die Hauptskala auf einem Leinwandstreifen angegeben, der so über zwei Rollen bewegt werden kann, daß der jeweils zu benützende Kreisbogen konzentrisch zu der ebenfalls an einem Kreisbogen angetragenen *B*-Skala zu liegen kommt. Die Verbindung beider Skalen wird durch einen um den Mittelpunkt der *B*-Skala drehbaren und von Hand zu bewegendem Zeiger hergestellt, der zugleich eine selbsttätige Addition bzw. Subtraktion der zweiten Zifferngruppe der Mantisse bewirkt; die Addition und Subtraktion der beiden ersten Mantissenstellen wird durch ein besonderes Zählwerk ebenfalls selbsttätig ausgeführt. Nach den in der Patentschrift und in verschiedenen Prospekten gemachten Angaben dürfte die Genauigkeit des Tacharithmetikos derjenigen einer fünfstelligen Logarithmentafel gleichkommen.

Beide Apparate von E. Leder sind je mit einem Kennzifferzählwerk versehen, das die Bestimmung der Kennziffer des Resultats selbsttätig besorgt.

---

1) Vgl. Ch. A. Vogler. Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln. Berlin 1877. Seite 50.

2) Vgl. R. Mehmke a. a. O. Seite 1063.

3) D. R. P. No. 199414. Zu beziehen von der schon mehrfach erwähnten Gesellschaft zum Preis von *M* 200.—.

## Erzwungene Schwingungen prismatischer Stäbe.

VON STEPH. TIMOSCHENKO in Kiew.

Die Aufgaben über erzwungene Schwingungen prismatischer Stäbe haben nicht nur eine theoretische, sondern auch eine große praktische Bedeutung. Man begegnet ihnen in den verschiedensten Zweigen des Maschinenbaues, im Brückenbau, im Schiffsbau usw. Trotzdem finden die allgemeinen Verfahren der Untersuchung kleiner Schwingungen, die vor allem in der Akustik ausgearbeitet worden sind, geringe Anwendung in der Technik. Dies wird zum Teil dadurch erklärt, daß in den Büchern über die Theorie des Schalls das Hauptaugenmerk auf freie Schwingungen gerichtet ist, während den erzwungenen Schwingungen nur geringe Beachtung geschenkt wird, und man sich gewöhnlich auf die Erläuterung des allgemeinen Verfahrens beschränkt.

Im vorliegenden Aufsatz untersuchen wir die Frage über die erzwungenen Schwingungen prismatischer Stäbe unter Benützung des allgemeinen Verfahrens<sup>1)</sup>, gestützt auf die Anwendung der zweiten Form der Gleichungen von Lagrange für Systeme mit unendlicher Zahl der Freiheitsgrade.

Der Aufsatz zerfällt in folgende Teile:

1. Erläuterung des allgemeinen Verfahrens.
2. Längsschwingungen prismatischer Stäbe. Als Beispiel untersuchen wir die Schwingungen eines Indikators.<sup>2)</sup>
3. Torsionsschwingungen. Hier wird das allgemeine Verfahren zur Untersuchung der Schwingungen einer Welle mit zwei an den Enden aufgesetzten Riemenscheiben benützt.
4. Querschwingungen prismatischer Stäbe.
5. Schwingungen der Brücken unter der Wirkung einer beweglichen Last.

§ 1. Bei der Untersuchung der Schwingungen werden wir die Lage des Systems durch dessen Normalkoordinaten bestimmen. Wenn  $\varphi_1, \varphi_2 \dots$  normale Koordinaten sind, so folgt schon aus deren Erklärung, daß die kinetische Energie des Systems und seine potentielle

1) Siehe Rayleigh, „Theory of sound“, § 101 (zweite Auflage).

2) Diese Aufgabe wurde von A. N. Krylow behandelt (siehe: Известия Академіи Наукъ 1909 г. „Нѣкоторыя замѣчанія о крестерахъ и индикаторахъ“). Das Verfahren, welches A. N. Krylow angewandt hat, unterscheidet sich von dem in diesem Aufsatz.

Energie durch Funktionen zweiten Grades dargestellt werden, die nur Quadrate der Größen  $\varphi_1, \varphi_2 \dots \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2 \dots$  enthalten. Man kann schreiben:

$$(1) \quad \begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(a_1 \dot{\varphi}_1^2 + a_2 \dot{\varphi}_2^2 + a_3 \dot{\varphi}_3^2 + \dots) \\ V &= \frac{1}{2}(c_1 \varphi_1^2 + c_2 \varphi_2^2 + c_3 \varphi_3^2 + \dots). \end{aligned}$$

Hier sind  $a_1, a_2 \dots c_1, c_2 \dots$  konstante Größen, die von der Konfiguration des Systems und dessen elastischen Eigenschaften abhängen. Die allgemeine Art der Eigenschwingungen des Systems erhält man durch Überlagerung einer Reihe von Normalschwingungen, die den Normalkoordinaten  $\varphi_1, \varphi_2 \dots$  entsprechen. Um Schwingungen, die einer beliebigen Koordinate  $\varphi_i$  entsprechen, zu finden, braucht man nur, unter Benutzung der Formel (1) für die lebendige Kraft und die potentielle Energie des Systems, eine entsprechende Lagrangesche Gleichung aufzustellen: da die Formeln (1) nur Quadrate der Größen  $\varphi_1, \varphi_2 \dots$  enthalten, so können die Gleichungen von Lagrange in sehr einfacher Form dargestellt werden:

$$(2) \quad \ddot{\varphi}_i + n_i^2 \varphi_i = \frac{1}{a_i} \cdot \bar{\Phi}_i, \quad \text{wo } n_i^2 = \frac{c_i}{a_i} \text{ ist.}$$

Mit  $\bar{\Phi}_i$  bezeichnen wir die verallgemeinerte Kraft, die der Koordinate  $\varphi_i$  entspricht. Bei gegebenen äußeren Kräften kann  $\bar{\Phi}_i$  aus der Bedingung bestimmt werden, daß  $\bar{\Phi}_i \delta \varphi_i$  die Arbeit der äußeren Kräfte bei einer Verschiebung darstellt, die dem Zuwachse  $\delta \varphi_i$  der Koordinate  $\varphi_i$  entspricht.

Bezeichnen wir mit  $(\varphi_i)_0$  und  $(\dot{\varphi}_i)_0$  den Anfangswert der Koordinate und die ihr entsprechende Geschwindigkeit, so stellt sich das allgemeine Integral der Gleichung (2) in folgender Form dar:

$$(3) \quad \varphi_i = (\varphi_i)_0 \cos n_i t + \frac{1}{n_i} (\dot{\varphi}_i)_0 \sin n_i t + \frac{1}{n_i} \int_0^t \bar{\Phi}_i \sin n_i (t - t_1) dt_1.$$

Die ersten beiden Glieder hängen nur vom Anfangszustande ab.

Ist im Anfangsmoment  $(\varphi_i)_0 = 0$  und  $(\dot{\varphi}_i)_0 = 0$ , so wird die Bewegung durch das dritte Glied des Integrals (3) definiert. Im weiteren werden wir uns hauptsächlich mit diesem dritten Gliede beschäftigen. Es bestimmt Schwingungen, welche von der Wirkung der äußeren Kräfte im Zeitraume 0 bis  $t$  abhängen, und hat daher das größte praktische Interesse.

§ 2. Die Schwingungen werden völlig hestimmt, wenn die Verschiebungen eines jeden Stabelementes bekannt sind. Die Elemente werden wir durch Normalschnitte zur Stabachse ausschneiden. Die Anfangslage eines beliebigen Elementes wird durch eine Koordinate be-

stimmt (die Entfernung  $x$  von einem beliebigen Stabende). Das Gewicht eines prismatischen Stabes, bezogen auf die Längeneinheit, bezeichnen wir mit  $q$ .

Die Verschiebung eines beliebigen Elementes bezeichnen wir mit  $y$  (bei Längs- und Querschwingungen bedeutet  $y$  die lineare Verschiebung des Elementes; bei Drehschwingungen dagegen die Winkelverschiebung). In allgemeiner Form kann die Verschiebung durch die Reihe dargestellt werden:

$$(4) \quad y = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \varphi_3 u_3 + \dots$$

Hier sind  $\varphi_1, \varphi_2 \dots$  Normalkoordinaten des Systems (Funktionen der Zeit  $t$ );  $u_1, u_2, u_3 \dots$  Normalfunktionen, welche den Koordinaten  $\varphi_1, \varphi_2 \dots$  entsprechen und von der Lage des untersuchten Elementes abhängen (Funktionen der Koordinate  $x$ ). Natürlich müssen sie so gewählt werden, daß im beliebigen Moment  $t$  die gegebenen Bedingungen an den Enden des Stabes erfüllt sind.

Die kinetische Energie des Systems bei Längs- und Querschwingungen stellt sich in folgender Form dar:

$$(5) \quad T = \frac{q}{2g} \int_0^l (y)^2 dx = \frac{q}{2g} \left\{ \varphi_1^2 \int_0^l u_1^2 dx + \varphi_2^2 \int_0^l u_2^2 dx \dots \right\}$$

Hier bedeutet  $l$  die Länge des Stabes,  $g$  die Beschleunigung der Schwerkraft. Der Multiplikator  $q$  befindet sich außerhalb des Integralzeichens, da angenommen wird, daß  $q$  längs des Stabes konstant sei.

In der Formel (5) werden die Glieder von der Form:

$$2\dot{\varphi}_i \cdot \dot{\varphi}_i \int_0^l q \cdot u_i u_i \cdot dx$$

gleich 0. Die Koordinaten  $\varphi_1, \varphi_2 \dots$  werden als normale angenommen, daher dürfen in dem Ausdruck der lebendigen Kraft nur die Quadrate dieser Größen vorkommen. Hieraus folgt, daß, wenn die Koordinaten  $\varphi_1, \varphi_2 \dots$  normal sein sollen, die Bedingung (6) erfüllt werden muß:

$$(6) \quad \int_0^l q \cdot u_i u_i dx = 0.$$

Ähnlich der lebendigen Kraft kann die potentielle Energie des Stabes ebenfalls durch eine Funktion dargestellt werden, welche nur die Quadrate der Größen  $\varphi_1, \varphi_2 \dots$  enthält. Hierauf kann die Bestimmung der Normalschwingungen in der Weise geschehen, wie es im vorhergehenden Paragraphen angegeben ist. Setzt man die so gefundenen Werte  $\varphi_1, \varphi_2 \dots$  in den allgemeinen Ausdruck (4) für die Ver-

schiebungen ein, so erhält man die allgemeine Lösung der Aufgabe. Wenden wir nun dieses allgemeine Verfahren auf die Lösung von speziellen Aufgaben an.

### Längsschwingungen der Stäbe.

§ 3. Betrachten wir die Schwingungen eines Stabes, von welchem ein Ende eingeklemmt, das andere dagegen frei ist.

Bringt man den Anfangspunkt der Koordinaten in den Schwerpunkt des befestigten Schnittes und richtet man die  $x$ -Achse nach der Stabachse, so haben wir an den Stabenden:

$$(1) \quad (y)_{x=0} = 0; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = 0.$$

Der allgemeine Ausdruck der Verschiebungen in Normalkoordinaten kann in diesem Falle sofort, wie folgt, geschrieben werden:

$$(2) \quad y = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varphi_n \sin \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{\pi x}{l}.$$

Es ist ersichtlich, daß der allgemeine Ausdruck (2) die Bedingungen an den Enden erfüllt. Jetzt bleibt uns übrig zu beweisen, daß die Größen  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  Normalkoordinaten sind. Zu diesem Zwecke bilden wir die Ausdrücke der potentiellen Energie und der lebendigen Kraft des Systems. Bezeichnen wir mit  $E$  den Youngschen Modul und mit  $\omega$  die Fläche des Querschnitts des Stabes, so erhalten wir:

$$v = \frac{1}{2} \omega E \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot dx.$$

Setzt man statt  $y$  seinen allgemeinen Ausdruck (2) und zieht in Betracht, daß

$$\int_0^l \cos \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{\pi x}{l} \cdot \cos \frac{2m+1}{2} \cdot \frac{\pi x}{l} dx = 0; \text{ bei } m \text{ nicht } = 0,$$

so erhält man:

$$(3) \quad v = \frac{\omega E \pi^2}{16 l} \sum_{n=0}^{n=\infty} \varphi_n^2 (2n+1)^2.$$

Die kinetische Energie des Stabes wird sein:

$$(4) \quad T = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{g} \int_0^l \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{gl}{g} \sum \dot{\varphi}_n^2.$$

Die Ausdrücke (3) und (4) enthalten nur die Quadrate der Größen  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  und Quadrate von deren ersten Ableitungen, folglich sind  $\varphi_1,$

$\varphi_2 \dots$  Normalkoordinaten des Systems. Um eine Normalschwingung zu finden, die einer beliebigen Koordinate  $\varphi_n$  entspricht, bilden wir mit Hilfe von (3) und (4) die entsprechende Lagrangesche Gleichung:

$$\frac{ql}{2g} \ddot{\varphi}_n + \frac{\omega E \pi^2}{8l} (2n + 1)^2 \varphi_n = \bar{\Phi}_n.$$

Führt man zur Abkürzung die Bezeichnung  $\frac{\omega E \cdot g}{g} = b^2$  ein, so erhält man (siehe 3. § 1):

$$\begin{aligned} \varphi_n &= (\varphi_n)_0 \cos \frac{b\pi}{l} \frac{(2n+1)}{2} \cdot t + (\dot{\varphi}_n)_0 \frac{2l}{b\pi(2n+1)} \cdot \sin \frac{b\pi}{l} \cdot \frac{(2n+1)}{2} \cdot t + \\ (5) \quad &+ \frac{4g}{\pi(2n+1)bq} \int_0^t \sin \left[ \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{b\pi}{l} (t-t_1) \right] \bar{\Phi}_n dt_1. \end{aligned}$$

Angenommen, der Anfangswert der Koordinate  $\varphi_n$  und der ihr entsprechenden Geschwindigkeit sei gleich Null, dann wird der Wert der Koordinate  $\varphi_n$  im beliebigen Augenblick  $t$  durch das dritte Glied der Lösung (5) bestimmt.

Setzt man dieses in den allgemeinen Ausdruck (2) für die Verschiebungen ein, so erhält man:

$$(6) \quad y = \frac{4g}{b\pi q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \int_0^t \sin \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{\pi x}{2} \cdot \sin \left[ \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{b\pi}{l} (t-t_1) \right] \bar{\Phi}_n dt_1.$$

Um also die Verschiebung des freien Stabendes zu erhalten, braucht man in der erhaltenen Lösung nur  $x=l$  zu setzen und statt  $\bar{\Phi}_n$  eine Größe zu wählen, die den gegebenen äußeren Kräften entspricht. Als Beispiel betrachten wir den Fall, wo die Kraft, welche die Schwingungen hervorruft, am Stabende angebracht und ihre Größe gleich  $\omega f(t)$  ist. Um die verallgemeinerte Kraft  $\bar{\Phi}_n$  zu finden, müssen wir bemerken, daß dem Zuwachse der Koordinate  $\delta\varphi_n$  die Verschiebung des Stabendes gleich

$$\delta\varphi_n \cdot \sin \frac{2n+1}{2} \cdot \pi$$

entspricht, und dann können wir die verallgemeinerte Kraft aus folgender Gleichung bestimmen:

$$\omega f(t) \cdot \delta\varphi_n \cdot \sin \frac{2n+1}{2} \cdot \pi = \delta\varphi_n \bar{\Phi}_n.$$

Setzt man den so gefundenen Wert für  $\bar{\Phi}_n$  in den allgemeinen Ausdruck (6) ein und nimmt  $x=l$  an, so wird für die Verschiebung des Stabendes folgender allgemeiner Ausdruck erhalten:

$$(7) \quad (y)_{x=l} = \frac{4g\omega}{b\pi q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \int_0^t \sin \left[ \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{b\pi}{l} (t-t_1) \right] f(t_1) \cdot dt_1.$$

In dem besonderen Falle, wo die angebrachte Kraft konstant ist (nehmen wir an, daß  $f(t) = p$  sei), gibt die Formel (7) für die Verschiebung die Größe

$$(y)_{x=l} = \frac{4g\omega p}{b\pi q} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{2l}{(2n+1)b\pi} \left[ 1 - \cos \frac{(2n+1)b\pi t}{2l} \right].$$

Setzt man  $t = \frac{2l}{b}$ , d. h. nimmt man den Zeitraum gleich der halben Periode des Grundtons, so erhalten wir die größte Verlängerung des Stabes

$$(y)_{max} = \frac{16 \cdot \omega l p g}{b^2 \pi^2 q} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{16 \omega l p g}{b^2 \pi^2 q} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{2lp}{E}.$$

Somit finden wir, daß die plötzlich angebrachte Kraft  $\omega p$  im Stab doppelt so große Verlängerungen hervorruft als die, welche der Gleichgewichtslage, bei der Wirkung der Zugkraft  $\omega p$ , entsprechen.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Verschiebungen des Stabendes in dem Falle, wo die Zugkraft, welche die Schwingungen hervorruft, eine konstante Größe (gleich  $\omega p$ ) ist und der Angriffspunkt sich auf der Stabachse mit der konstanten Geschwindigkeit  $a$  verschiebt. Im Anfang möge der Angriffspunkt mit dem Schwerpunkt des befestigten Stabschnittes zusammenfallen. Im beliebigen Augenblick  $t$  ist die Koordinate  $x$  des Angriffspunktes gleich  $at$ . Die Verschiebung dieses Punktes, die dem Zuwachse  $\delta \varphi_n$  der Koordinate  $\varphi_n$  entspricht, wird sein:

$$\delta \varphi_n \sin \frac{2n+1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{at}{l}.$$

Daher wird die verallgemeinerte Kraft in diesem Falle aus folgender Gleichung gefunden

$$\Phi_n \delta \varphi_n = \omega p \cdot \delta \varphi_n \cdot \sin \frac{2n+1}{2} \cdot \pi \frac{at}{l}.$$

Setzt man den so gefundenen Wert für  $\bar{\Phi}_n$  in die allgemeine Lösung (6) ein und nimmt  $x = l$ , so findet man:

$$\begin{aligned} (y)_l &= \frac{4\omega p g}{b\pi q} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^t \sin \left[ \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{b\pi}{l} (t - t_1) \right] \cdot \sin \left[ \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{\pi a t_1}{l} \right] \cdot dt_1 = \\ &= \frac{4\omega p g}{b\pi q} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n 2l}{\pi (2n+1)^2} \left[ \frac{a}{a^2 - b^2} \sin \frac{(2n+1)\pi b t}{2l} - \frac{b}{a^2 - b^2} \sin \frac{(2n+1)\pi a t}{2l} \right]. \end{aligned}$$

Wenn  $a = b$ , d. h. wenn die Geschwindigkeit der Verschiebung des Angriffspunktes der Zugkraft gleich der Geschwindigkeit der Schall-

verbreitung längs des Stabes ist, so nimmt der Ausdruck für  $(y)_t$  die Form  $\frac{0}{0}$  an. Bestimmt man seinen wahren Wert, so findet sich

$$y_t = \frac{4\omega p g}{b^2 \pi^2 q} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n l}{\pi(2n+1)^2} \left[ \sin \frac{2n+1}{2l} \cdot \pi a t - \frac{a t (2n+1) \pi}{2l} \cos \frac{(2n+1) \pi a t}{2l} \right].$$

Bei  $t = \frac{l}{a}$ , d. h. wenn der Angriffspunkt der Kraft das freie Ende erreicht, ist die Verlängerung des Stabes

$$(y)_t = \frac{l}{a} = \frac{4\omega p g l}{b^2 \pi^2 q} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{p l}{2 E}.$$

Folglich ist die Verlängerung des Stabes in diesem Augenblicke gleich der Hälfte der statischen Ausdehnung.

§ 4. Gehen wir jetzt zur Betrachtung der Aufgabe über Längsschwingungen eines prismatischen Stabes über, an dessen freies Ende die Last  $P$  angehängt ist. In der Praxis begegnet man einer solchen Aufgabe bei Untersuchung der Schwingungen der Indikatorfeder mit dem an sie angehängten Kolben. Die freien Schwingungen dieses Systems sind schon von Poisson untersucht worden, und diese Lösung könnte man bei der Bildung eines Ausdruckes für die Verschiebungen  $y$  in den Normalkoordinaten benützen. Zur größeren Deutlichkeit führen wir alle Rechnungen durch, die sich auf die Bestimmung der Normalkoordinaten beziehen. Bekanntlich ist die Frage nach den Längsschwingungen prismatischer Stäbe auf die Integration der Differentialgleichung

$$(8) \quad b^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

zurückzuführen (hier haben  $b^2$  und  $y$  ihre früheren Werte).

An den Enden gelten folgende Bedingungen:

$$a) y = 0 \quad \text{bei} \quad x = 0; \quad b) \omega E \frac{dy}{dx} = -\frac{P}{g} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \quad \text{bei} \quad x = l.$$

Soll der Stab eine normale Schwingung der Frequenz  $p$  machen, dann kann die Verschiebung eines beliebigen Punktes auf der Stabachse in folgender Form dargestellt werden:

$$y = X \cos pt, \text{ wo } X \text{ eine Funktion von } x \text{ allein ist.}$$

Setzt man dieses in die Gleichung (8) ein, so findet man für  $X$  den allgemeinen Ausdruck:

$$X = A \sin \frac{px}{b} + B \cos \frac{px}{b}.$$

Um der Forderung a) zu genügen, muß für das befestigte Stabende  $B = 0$  sein.

Die Bedingung b) führt uns zur folgenden transzendenten Gleichung:

Setzt man  $\frac{pl}{b} = \mu$ ,  $ql = Q$  und beachtet dabei, daß  $\frac{\omega E g}{q} = b^2$ , so erscheint die erhaltene Gleichung in folgender Form:

$$(9) \quad \mu \cdot tg \mu = \frac{Q}{P}.$$

Seien  $\mu_1, \mu_2 \dots$  die aufeinanderfolgenden Wurzeln der Gleichung (9); dann wird der allgemeine Ausdruck für die Verschiebungen  $y$  folgender sein:

$$(10) \quad y = \varphi_1 \sin \frac{\mu_1 x}{l} + \varphi_2 \sin \frac{\mu_2 x}{l} + \dots;$$

es ist leicht zu bestätigen, daß die Größen  $\varphi_1, \varphi_2 \dots$  in diesem Falle Normalkoordinaten des Systems sind. Zu diesem Zwecke bilden wir den Ausdruck der potentiellen Energie und der lebendigen Kraft des Systems:

$$(11) \quad \begin{aligned} V &= \frac{\omega E}{2} \int_0^l (dy/dx)^2 dx = \frac{\omega E}{2l^2} \int_0^l \sum (\mu_n \varphi_n \cos \frac{\mu_n x}{l})^2 dx = \\ &= \frac{\omega E}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 \varphi_n^2 \left(1 + \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n}\right). \end{aligned}$$

Der erhaltene Ausdruck für  $V$  enthält keine Glieder mit dem Produkt der Koordinaten, da die Integrale der Form

$$\int_0^l \cos \frac{\mu_n x}{l} \cdot \cos \frac{\mu_m x}{l} dx$$

auf Grund der Gleichung (9) gleich Null sind.

Die lebendige Kraft des Systems besteht aus der lebendigen Kraft des Stabes und der lebendigen Kraft der an denselben angehängten Last:

$$T = \frac{1}{2} \frac{q}{g} \int_0^l (dy/dt)^2 dx + \frac{P}{2g} (dy/dt)_{x=l}^2.$$

Setzt man statt  $y$  seinen allgemeinen Wert (10) und zieht man die Folge der Gleichung (9) in Betracht:

$$q \int_0^l \sin \frac{\mu_n x}{l} \sin \frac{\mu_m x}{l} dx = -P \sin \mu_n \cdot \sin \mu_m,$$

so erhält man für die lebendige Kraft den Ausdruck:

$$T = \frac{Q}{4g} \sum \dot{\varphi}_n^2 \left(1 - \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n}\right) + \frac{P}{2g} \sum \dot{\varphi}_n^2 \sin^2 \mu_n.$$

Setzt man statt  $P$  seinen Ausdruck durch  $Q$  aus Gleichung (9) ein, so erhält man

$$(12) \quad T = \frac{Q}{4g} \sum_{n=1}^{n=\infty} \dot{\varphi}_n^2 \left(1 + \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n}\right).$$

In diesem Ausdrücke für die lebendige Kraft kommen nur solche Glieder vor, die Quadrate der Größen  $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dots$  enthalten, folglich sind  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  Normalkoordinaten. Um eine Schwingung, die einer beliebigen Koordinate  $\varphi_n$  entspricht, zu bestimmen, bilden wir die entsprechende Lagrangesche Gleichung

$$\frac{Q}{2g} \left(1 + \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n}\right) \ddot{\varphi}_n + \frac{\omega \cdot E}{2l} \mu_n^2 \left(1 + \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n}\right) \varphi_n = \bar{\Phi}_n.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung (siehe 3, § 1), wird sein:

$$\begin{aligned} \varphi_n &= (\varphi_n)_0 \cos \frac{b\mu_n t}{l} + \frac{l}{b\mu_n} (\dot{\varphi}_n)_0 \sin \frac{b\mu_n t}{l} + \\ &+ \frac{l}{b\mu_n} \frac{2g}{Q} \frac{2\mu_n}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \int_0^t \bar{\Phi}_n \sin \frac{b\mu_n(t-t_1)}{l} \cdot dt_1. \end{aligned}$$

Wenn der Stab im Anfang sich in Ruhe befand und seine Stellung der Gleichgewichtslage entsprach, so ist  $(\varphi_n)_0 = 0$   $(\dot{\varphi}_n)_0 = 0$ , und dann wird die Schwingung, welche der Koordinate  $\varphi_n$  entspricht, durch das dritte Glied der allgemeinen Lösung bestimmt. Setzt man dieses in den allgemeinen Ausdruck für  $y$  in (10) ein, so erhält man

$$(13) \quad y = \frac{4g}{bq} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \mu_n x}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \int_0^t \bar{\Phi}_n \sin \frac{b\mu_n}{l} (t-t_1) dt_1.$$

Um die Verschiebungen des Stabes zu erhalten, muß man in dieser allgemeinen Lösung  $x = l$  nehmen und statt  $\bar{\Phi}_n$  den gegebenen Wert, der den äußeren Kräften entspricht, einsetzen.

Als Beispiel nehmen wir den Fall, daß im Anfangsmoment ( $t = 0$ ) am Stabende eine konstante Zugkraft  $\omega p$  angebracht worden ist. Um die Schwingungen zu finden, die beim plötzlichen Anbringen einer Kraft entstehen, braucht man nur in der allgemeinen Lösung (13) anzunehmen, daß

$$\bar{\Phi}_n = \omega p \sin \mu_n$$

sei. Die Verschiebung des Stabendes wird sein

$$(14) \quad y_t = \frac{4g\omega pl}{b^2q} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n} \cdot \frac{\left(1 - \cos \frac{b\mu_n t}{l}\right)}{(2\mu_n + \sin 2\mu_n)}.$$

Wird die Last  $P$  unbegrenzt verringert, so nähert sich das Verhältnis  $\frac{Q}{P}$  der Unendlichkeit und der Wert der  $n$ -ten Wurzel der transzendenten Gleichung (9) nähert sich der Größe

$$\mu_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}.$$

Setzt man dieses in die Gleichung (14) ein, so erhält man ein Ergebnis, das mit der Lösung des vorhergehenden Paragraphen übereinstimmt. Die größte Verlängerung bei plötzlichem Anbringen der Kraft ist gleich der doppelten statischen Ausdehnung. Betrachten wir jetzt den zweiten äußersten Fall, wenn das Verhältnis  $\frac{Q}{P}$  sich der Null nähert und der Wert der  $n$ -ten Wurzel der Gleichung (9) sich der Größe

$$\mu_n = (n-1)\pi$$

nähert.

Die erste Wurzel  $\mu_1$  nähert sich in diesem Falle unbegrenzt der Null; der Null nähern sich auch die Größen aller Glieder außer dem ersten in der Summe (14). Der Grenzwert führt uns zum System mit einem Freiheitsgrade: zur Schwingung der Last, die an einem gewichtslosen elastischen Stab aufgehängt ist.

Die Bewegung wird durch das erste Glied der Lösung (14) bestimmt. Für die Verschiebung der aufgehängten Last erhalten wir die Formel:

$$y_t = \frac{4g\omega pl}{b^2q} \cdot \frac{1 - \cos \frac{b\mu_n t}{l}}{4}.$$

Die größte Ausdehnung des Stabes wird sein:

$$(y)_{max} = \frac{2 \cdot g \cdot \omega pl}{b^2q} = \frac{2pl}{E},$$

folglich ist auch im zweiten Grenzfalle der Satz berechtigt, daß plötzlich angebrachte Kraft eine Verlängerung hervorruft, die der doppelten statischen Verlängerung gleich ist. Dieser Satz, als Sonderfall des Clapeyronschen Theorems, wird gewöhnlich in den elementaren Lehrbüchern der Festigkeitslehre gebraucht. Die Folgerung wird auf der Annahme aufgebaut, daß in einem gewissen Augenblicke die ganze kinetische Energie des Systems sich in potentielle Energie ver-

wandelt. Wie aus der allgemeinen Lösung (14) ersichtlich, ist diese Annahme nur in den Grenzfällen  $\frac{Q}{P} = \infty$  und  $\frac{Q}{P} = 0$  berechtigt, in allen übrigen Fällen sind die Wurzeln  $\mu_1, \mu_2 \dots$  der transzendenten Gleichung (9) inkommensurabel, niemals wird sich die ganze kinetische Energie in potentielle verwandeln, folglich wird auch die Verlängerung, die durch plötzliche Einwirkung der Kraft hervorgerufen ist, geringer als die verdoppelte statische Verlängerung sein.

Wirkt am Stabende eine variable Kraft  $\omega f(t)$ , die Schwingungen hervorruft, so erhält man den entsprechenden Wert der verallgemeinerten Kraft  $\bar{\Phi}$  aus der Gleichung

$$\bar{\Phi}_n \cdot \delta \varphi_n = \sin \mu_n \cdot \omega f(t) \cdot \delta \varphi_n.$$

Setzt man  $\bar{\Phi}$  in die allgemeine Lösung (13) ein und nimmt man  $x = l$  an, so findet sich für die Verschiebung des Stabendes der Ausdruck

$$(15) \quad (y)_l = \frac{4g\omega}{bq} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2 \mu_n}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \int_0^t f(t_1) \sin \frac{b\mu_n(t-t_1)}{l} \cdot dt_1.$$

Ist das Gewicht des Stabes  $Q$  im Vergleich zum Gewicht der Last  $P$  sehr gering, so wird die erste Wurzel der Gleichung (9) eine kleine Größe. Die Frequenz des Grundtypus der Schwingungen wird im Vergleich zu der Frequenz des der Reihe nach folgenden Typus klein sein. In der allgemeinen Lösung (15) wird das erste Glied der Summe die überwiegende Bedeutung haben. Um die Periode der Grundschiwingung zu bestimmen, können wir im vorliegenden Falle die Gleichung (9) durch folgenden Ausdruck ersetzen:

$$(16) \quad \mu^2 \left( 1 + \frac{\mu^2}{3} \right) = \frac{Q}{P}.$$

Als erste Annäherung kann man annehmen

$$\mu = \sqrt{\frac{Q}{P}},$$

dann wird die Periode des Grundtypus der Schwingungen sein

$$T = \frac{2\pi l}{\mu b} = 2\pi \sqrt{\frac{Pl}{\omega \cdot E} \cdot \frac{1}{g}},$$

d. h. die Schwingungsperiode ist eine solche wie die eines Pendels, dessen Länge gleich der statischen Verlängerung des Stabes unter der Wirkung der Last  $P$  ist.

Zu demselben Ergebnis kommt man auch auf elementarem Wege, man hat den Stab nur als gewichtlos anzunehmen. Um den Einfluß

des Eigengewichts des Stabes auf die Periode des Grundtypus zu bewerten, suchen wir die zweite Annäherung für die Wurzel der Gleichung (16). Setzt man in den rechten Teil der Gleichung

$$\mu^2 = \frac{Q}{P} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\mu^2}{3}}$$

statt  $\mu^2$  die erste Annäherung, so erhält man

$$\mu = \sqrt{\frac{Q}{P} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{Q}{P}\right)}.$$

Wird dieser Wert in den Ausdruck für die Schwingungsperiode gesetzt, so erhält man:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \cdot \frac{P + \frac{1}{3}Q}{\omega E}}.$$

Um den Einfluß des Eigengewichts des Stabes abzuschätzen, muß angenommen werden, daß ein Drittel dieses Gewichts am Ende konzentriert ist; dann wendet man die Formel an, die für die Schwingungsperiode im Falle eines gewichtlosen Stabes erhalten wurde.

§ 5. Bis jetzt wurde angenommen, daß im Anfangsmoment ( $t=0$ ) sich das System in Ruhe befand und die Anfangskoordinaten gleich Null waren. Die unter solchen Umständen gewonnenen Schwingungen werden durch die Wirkung äußerer Kräfte im Zeitraum von 0 bis  $t$  bedingt.

Betrachten wir jetzt die Schwingungen, die durch Anfangsumstände der Bewegung bedingt sind, d. h. durch die Anfangswerte der Koordinaten  $(\varphi_1)_0, (\varphi_2)_0 \dots$  und durch die Anfangswerte der ihnen entsprechenden Geschwindigkeiten  $(\dot{\varphi}_1)_0, (\dot{\varphi}_2)_0 \dots$ .

Der Wert einer beliebigen Koordinate  $\varphi_i$  auf Grund der allgemeinen Lösung [siehe § 1 (3)] wird sein

$$\varphi_i = (\varphi_i)_0 \cos n_i t + \frac{1}{n_i} (\dot{\varphi}_i)_0 \sin n_i t.$$

Der allgemeine Ausdruck für die Verschiebungen [siehe § 1 (4)] stellt sich wie folgt dar:

$$(17) \quad y = \sum u_i \left[ (\varphi_i)_0 \cos n_i t + \frac{1}{n_i} (\dot{\varphi}_i)_0 \sin n_i t \right].$$

Die Größen  $(\varphi_i)_0$  und  $(\dot{\varphi}_i)_0$  können aus den Anfangsumständen der Bewegung ermittelt werden. Für den Anfangsausgangsblick muß die Verschiebung eines jeden Elementes des Stabes und seine Geschwindigkeit gegeben sein. Diese Größen werden Funktionen der Lage des Elementes sein, d. h. Funktionen von  $x$ .

Sei

$$(y)_0 = \chi(x); \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = \psi(x),$$

dann erhalten wir auf Grund von (17)

$$(18) \quad \begin{aligned} \chi(x) &= \sum u_i(\varphi_i)_0, \\ \psi(x) &= \sum u_k(\dot{\varphi}_i)_0. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Größen  $(\varphi_i)_0 \dots$  und  $(\dot{\varphi}_i)_0 \dots$  benützen wir die Grundeigenschaft der Normalfunktionen [siehe (6) § 1].

Multipliziert man den Ausdruck (18) mit  $u_i \cdot q dx$  und integriert ihn zwischen den Grenzen von 0 bis  $l$ , so erhält man:

$$(19) \quad \begin{aligned} (\varphi_i)_0 &= \frac{\int_0^l \chi(x) \cdot u_i q dx}{\int_0^l u_i^2 q dx}, \\ (\dot{\varphi}_i)_0 &= \frac{\int_0^l \psi(x) u_i q dx}{\int_0^l u_i^2 q dx}. \end{aligned}$$

Setzt man statt  $u_i$  seinen Wert in die Ausdrücke (19) und betrachtet die an den Stab angehängte Last  $P$  als eine Verstärkung des Stabes, welche am Stabende auf unendlich kleiner Strecke verteilt ist, so erhält man:

$$\begin{aligned} (\varphi_i)_0 &= \frac{\int_0^l \chi(x) \sin \frac{\mu_n x}{l} q dx + \chi(l) \sin \mu_n \cdot P}{\int_0^l \sin^2 \frac{\mu_n x}{l} \cdot q dx + \sin^2 \mu_n \cdot P}, \\ (\dot{\varphi}_i)_0 &= \frac{\int_0^l \psi(x) \sin \frac{\mu_n x}{l} \cdot q dx + \psi(l) \cdot \sin \mu_n \cdot P}{\int_0^l \sin^2 \frac{\mu_n x}{l} q dx + \sin^2 \mu_n \cdot P}. \end{aligned}$$

Die gewonnenen Ausdrücke können bedeutend vereinfacht werden. Zu diesem Zwecke integrieren wir den Zähler teilweise:

$$\begin{aligned} \int_0^l \chi(x) \sin \frac{\mu_n x}{l} q dx &= -\frac{lq}{\mu} \left[ \chi(x) \cos \frac{\mu_n x}{l} \right]_0^l + \frac{lq}{\mu_n} \int_0^l \chi'(x) \cos \frac{\mu_n x}{l} \cdot dx \\ &= -\frac{Q}{\mu_n} \chi(l) \cos \mu_n + \frac{Q}{\mu_n} \int_0^l \chi'(x) \cos \frac{\mu_n x}{l} \cdot dx \end{aligned}$$

und bemerken, daß auf Grund der Gleichung (9)

$$-\frac{Q}{\mu_n} \chi(l) \cos \mu_n + P \cdot \chi(l) \cdot \sin \mu_n = 0 \quad \text{ist.}$$

Integriert man den Nenner und macht dabei einige Vereinfachungen auf Grund der Gleichung (9), so erhält man zuletzt:

$$(20) \quad \begin{aligned} (\varphi_i)_0 &= \frac{4}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \int_0^l \chi'(x) \cos \frac{\mu_n x}{l} \cdot dx, \\ (\dot{\varphi}_i)_0 &= \frac{4}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \int_0^l \psi'(x) \cos \frac{\mu_n x}{l} \cdot dx. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis kann auch anders erzielt werden. Bilden wir aus den Ausdrücken (18) die Ableitung nach  $x$ , und setzen zugleich statt  $u_i \dots$  die entsprechenden Werte ein, so erhalten wir:

$$(21) \quad \begin{aligned} \chi'(x) &= \sum (\varphi_i)_0 \frac{\mu_i}{l} \cdot \cos \frac{\mu_i x}{l}, \\ \psi'(x) &= \sum (\dot{\varphi}_i)_0 \frac{\mu_i}{l} \cdot \cos \frac{\mu_i x}{l}. \end{aligned}$$

Ziehen wir in Betracht, daß

$$\int_0^l \cos \frac{\mu_i x}{l} \cdot \cos \frac{\mu_s x}{l} \cdot dx = 0$$

ist<sup>1)</sup>, so erhalten wir nach Multiplikation des Ausdrucks (21) mit  $\cos \frac{\mu_i x}{l}$  und Integration zwischen den Grenzen 0 und  $l$ :

$$\begin{aligned} (\varphi_i)_0 &= \frac{l \int_0^l \chi'(x) \cos \frac{\mu_i x}{l} \cdot dx}{\mu_i \int_0^l \cos^2 \frac{\mu_i x}{l} \cdot dx} = \frac{4}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \int_0^l \chi'(x) \cos \frac{\mu_n x}{l} \cdot dx, \\ (\dot{\varphi}_i)_0 &= \frac{l \int_0^l \psi'(x) \cos \frac{\mu_i x}{l} \cdot dx}{\mu_i \int_0^l \cos^2 \frac{\mu_i x}{l} \cdot dx} = \frac{4}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \int_0^l \psi'(x) \cos \frac{\mu_n x}{l} \cdot dx; \end{aligned}$$

diese Ausdrücke stimmen mit den Ausdrücken (20) vollkommen überein.

1) Dies kann bewiesen werden, indem man die Integration ausführt und die Gleichung (9) in Betracht zieht. Man kann den Beweis auch darauf stützen, daß die in Normalkoordinaten ausgedrückte potentielle Energie des Systems keine Glieder mit dem Produkte der Koordinaten enthalten darf.

Torsionsschwingungen prismatischer Stäbe.

§ 6. Dieser Aufgabe begegnet der Techniker vor allem bei der Berechnung von Wellen, daher werden wir den Querschnitt des Stabes im Folgenden als kreisförmig annehmen.<sup>1)</sup>

Bezeichnet man die Entfernung eines beliebigen Schnittes vom Stabende mit  $x$ , den Drehwinkel des Schnittes mit  $\theta$ , den Gleitmodul mit  $G$  und die Masse der Volumeneinheit mit  $\rho$ , so kommt man zu der bekannten Differentialgleichung:

$$(1) \quad \rho \frac{d^2 \theta}{dt^2} = G \frac{d^2 \theta}{dx^2}.$$

Gehen wir von dem einfachen Falle aus, daß die Wellenenden frei sind. Für den Drehwinkel  $\theta$  kann man sofort einen Ausdruck in Normalkoordinaten schreiben:

$$(2) \quad \theta = \varphi_1 \cos \frac{\pi x}{l} + \varphi_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + \dots^2)$$

Hierbei werden an den Wellenenden folgende Bedingungen erfüllt:

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=0} = 0; \quad \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=l} = 0.$$

Die potentielle Energie des Systems wird sein:

$$(3) \quad V = \frac{1}{2} G \cdot J_p \int_0^l \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 dx = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{G \cdot J_p}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \varphi_n^2.$$

Für die lebendige Kraft erhalten wir den Ausdruck:

$$(4) \quad T = \frac{1}{2} \rho J_p \int_0^l \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 dx = \frac{\rho J_p l}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (\dot{\varphi}_n)^2.$$

Die Ausdrücke (3) und (4) enthalten nur die Quadrate der Größen  $\varphi_1, \varphi_2 \dots, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2 \dots$ , folglich sind  $\varphi_1, \varphi_2 \dots$  Normalkoordinaten des Systems. Die Gleichung von Lagrange, die einer beliebigen Koordinate  $\varphi_n$  entspricht, wird sein

$$\rho \frac{J_p l}{2} \ddot{\varphi}_n + \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{G \cdot J_p \cdot n^2}{l} \cdot \varphi_n = \Phi_n.$$

Führt man der Abkürzung wegen die Bezeichnung

$$(5) \quad \frac{G}{\rho} = b^2$$

1) All diese Resultate können auch bei Querschnitten beliebiger Form angewandt werden, nur muß man anstatt  $GJ_p$  den entsprechenden Wert der Torsionssteifigkeit setzen.

2) Zu diesem Ausdrucke kann auch noch die Windung der Welle, wie eine solche eines starren Körpers, hinzugefügt werden.

ein, so kann man das Integral der erhaltenen Gleichung in folgender Form darstellen:

$$(6) \quad \varphi_n = (\varphi_n)_0 \cos \frac{nb\pi t}{l} + \frac{l}{nb\pi} (\dot{\varphi}_n)_0 \sin \frac{nb\pi t}{l} + \\ + \frac{2}{nb\pi \cdot \rho J_p} \int_0^t \overline{\Phi}_n \sin \frac{nb\pi(t-t_1)}{l} \cdot dt_1.$$

Setzt man die so gefundenen Werte der Koordinaten  $\varphi_1, \varphi_2 \dots$  in den Ausdruck (2) für  $\theta$  ein, so wird die allgemeine Lösung der Aufgabe erhalten. Nehmen wir an, daß  $(\varphi_n)_0 = (\dot{\varphi}_n)_0 = 0$  ist und daß die Schwingungen der Welle durch zwei gleiche einander entgegengesetzte Kräftepaare  $M = f(t)$  hervorgerufen werden, welche an den Wellenenden wirken. Die verallgemeinerte Kraft  $\overline{\Phi}_n$  ergibt sich aus der Gleichung:

$$\overline{\Phi}_n \delta \varphi_n = f(t) \delta \varphi_n (\cos 0 - \cos n\pi),$$

folglich ist

$$\overline{\Phi}_n = 2f(t) \text{ für ungerades } n,$$

$$\overline{\Phi}_n = 0 \text{ für gerades } n.$$

Für die Koordinate  $\varphi_n$  erhalten wir den Ausdruck:

$$\varphi_n = \frac{4}{nb\pi \rho J_p} \int_0^t f(t_1) \cdot \sin \frac{nb\pi(t-t_1)}{l} \cdot dt_1 \text{ bei ungeradem } n,$$

$$\varphi_n = 0 \text{ bei geradem } n.$$

Der Drehwinkel  $\theta$  eines beliebigen Schnittes wird durch die Formel:

$$(7) \quad \theta = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4 \cos \frac{n\pi x}{l}}{nb\pi \rho J_p} \int_0^t f(t_1) \sin \frac{nb\pi(t-t_1)}{l} \cdot dt_1$$

ausgedrückt.

Als Beispiel betrachten wir jetzt jene Schwingungen, die entstehen werden, wenn an den Wellenenden im Anfangsmoment konstante Kräftepaare  $M_0$  und  $-M_0$  wirken. Setzt man  $M_0$  statt  $f(t_1)$  in die Formel (7) ein und führt die Integration aus, so erhält man:

$$\theta = \frac{4M_0 l}{b^2 \pi^2 \rho J_p} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} \cdot \left(1 - \cos \frac{nb\pi t}{l}\right).$$

Setzen wir  $t = \frac{l}{b}$ , so finden wir für den Drehwinkel den Wert

$$\varphi = (\theta)_{x=0} - (\theta)_{x=l} = \frac{16M_0 l}{b^2 \pi^2 \rho J_p} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} = \frac{2M_0 l}{G \cdot J_p}.$$

Der Drehwinkel  $\varphi$  ist doppelt so groß, als derjenige, der beim Wirken der Kräftepaare  $M_0$  und  $-M_0$  der Gleichgewichtslage entspricht.

§ 7. Betrachten wir jetzt eine Welle, an deren Enden Riemenscheiben aufgesetzt sind. Die Grundgleichung (1) gilt auch für diesen Fall, man muß nur die Bedingungen an den Enden ändern. Wenn  $J_1$  und  $J_2$  die Trägheitsmomente der Riemenscheiben bezüglich der Wellenachse sind, so werden diese Bedingungen wie folgt geschrieben:

$$a) \quad J_1 \frac{d^2\theta}{dt^2} = G \cdot J_p \frac{d\theta}{dx} \quad \text{bei } x = 0$$

$$b) \quad J_2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -G \cdot J_p \frac{d\theta}{dx} \quad \text{bei } x = l.$$

Um die Normalfunktionen zu finden, verfährt man folgendermaßen: Möge die Welle Normalschwingungen von beliebigem Typus machen und sei  $p$  die Frequenz dieser Schwingungen, dann stellt sich der Drehwinkel eines beliebigen Schnittes der Welle so dar:

$$\theta = X \cos pt;$$

hier ist  $X$  eine Funktion von  $x$ .

Setzt man diesen Wert in die Grundgleichung (1) ein, so findet sich für  $X$  folgender allgemeiner Ausdruck:

$$X = A \cos \frac{px}{b} + B \sin \frac{px}{b}.$$

Zur Bestimmung der willkürlichen Konstanten benützen wir die Bedingungen an den Wellenenden. Setzen wir in a) und b) den Wert für  $\theta$  ein, so erhalten wir:

$$a) \quad -AJ_1 p^2 = B \cdot \frac{p}{b} \cdot G \cdot J_p.$$

$$b) \quad p^2 \left( A \cos \frac{pl}{b} + B \sin \frac{pl}{b} \right) J_2 = \frac{p}{b} G J_p \left( B \cos \frac{pl}{b} - A \sin \frac{pl}{b} \right).$$

Hieraus erhalten wir zur Bestimmung der Frequenz  $p$  die transzendente Gleichung

$$p^2 \left( \cos \frac{pl}{b} - \frac{p J_1 b}{G \cdot J_p} \sin \frac{pl}{b} \right) J_2 = -\frac{p}{b} \cdot G \cdot J_p \left( \sin \frac{pl}{b} + \frac{p J_1 b}{G \cdot J_p} \cos \frac{pl}{b} \right).$$

Führt man die Bezeichnungen

$$\frac{pl}{b} = \mu; \quad pl J_p = J_0$$

ein ( $J_0$  stellt augenscheinlich das Trägheitsmoment der Welle bezüglich ihrer Achse dar), so kann die oben erhaltene transzendente Gleichung in folgender Form dargestellt werden:

$$(8) \quad \mu \frac{J_2}{J_0} \left( 1 - \mu \frac{J_1}{J_0} \operatorname{tg} \mu \right) = - \left( \operatorname{tg} \mu + \mu \frac{J_1}{J_0} \right).$$

Bezeichnet man die aufeinander folgenden Wurzeln dieser Gleichung mit  $\mu_1, \mu_2 \dots$ , so wird für  $\theta$  folgender Ausdruck in Normalkoordinaten erhalten:

$$\theta = \varphi_1 \left( \cos \frac{\mu_1 x}{l} - \mu_1 \frac{J_1}{J_0} \sin \frac{\mu_1 x}{l} \right) + \varphi_2 \left( \cos \frac{\mu_2 x}{l} - \mu_2 \frac{J_1}{J_0} \sin \frac{\mu_2 x}{l} \right) + \dots;$$

die potentielle Energie des Systems wird sein:

$$(9) \quad V = \frac{1}{2} G \cdot J_p \int_0^l \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2} G J_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2}{l^2} \int_0^l \varphi_n^2 \left( \sin \frac{\mu_n x}{l} + \mu_n \frac{J_1}{J_0} \cos \frac{\mu_n x}{l} \right)^2 dx = \frac{G \cdot J_p}{8l} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \varphi_n^2 \left[ 2\mu_n \left( 1 + \mu_n^2 \frac{J_1^2}{J_0^2} \right) - \sin 2\mu_n + \mu_n^2 \frac{J_1^2}{J_0^2} \sin 2\mu_n + 2\mu_n \frac{J_1}{J_0} (1 - \cos 2\mu_n) \right] = \frac{G J_p}{8l} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mu_n \varphi_n^2.$$

Die Glieder, die das Produkt der Koordinaten enthalten, werden fortfallen, da

$$\int_0^l \left( \sin \frac{\mu_m x}{l} + \mu_m \frac{J_1}{J_0} \cos \frac{\mu_m x}{l} \right) \left( \sin \frac{\mu_n x}{l} + \mu_n \frac{J_1}{J_0} \cos \frac{\mu_n x}{l} \right) dx = \frac{l \cos \mu_n \cos \mu_m}{\mu_n^2 - \mu_m^2} \left\{ \operatorname{tg} \mu_n \left( \mu_m + \mu_m \mu_n^2 \frac{J_1^2}{J_0^2} \right) - \operatorname{tg} \mu_m \left( \mu_n + \mu_n \mu_m^2 \frac{J_1^2}{J_0^2} \right) + \frac{J_1}{J_0} \operatorname{tg} \mu_n \operatorname{tg} \mu_m (\mu_n^2 - \mu_m^2) \right\}.$$

Der Ausdruck in den Klammern ist gleich Null. Davon kann man sich leicht überzeugen, wenn die Folge der Gleichung (8) in Betracht gezogen wird.

Die kinetische Energie des Systems wird aus der lebendigen Kraft der Welle und der lebendigen Kraft der an den Wellenenden sitzenden Riemenscheiben bestehen:

$$T = \frac{e \cdot J_p}{2} \int_0^l \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 dx + \frac{J_1}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)_{x=0}^2 + \frac{J_2}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)_{x=l}^2 = \frac{J_0}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} (\dot{\varphi}_n)^2 \left\{ 2\mu_n + \sin 2\mu_n + \mu_n^2 \left( \frac{J_1}{J_0} \right)^2 (2\mu_n - \sin 2\mu_n) - 2\mu_n \frac{J_1}{J_0} (1 - \cos 2\mu_n) + \frac{4\mu_n J_1}{J_0} + \frac{4\mu_n J_2}{J_0} \left( \cos \mu_n - \mu_n \frac{J_1}{J_0} \sin \mu_n \right)^2 \right\}.$$

Setzt man hier statt  $\frac{J_2}{J_0}$  den entsprechenden Wert aus der Gleichung (8) ein, so wird bewiesen, daß der in Klammern eingeschlossene

Faktor gleich  $A_n$  ist. Der Ausdruck für die lebendige Kraft wird dann sein:

$$(10) \quad T = \frac{J_0}{8} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \frac{1}{\mu_n} (\dot{\varphi}_n)^2.$$

Die der Koordinate  $\varphi_n$  entsprechende Gleichung von Lagrange wird:

$$\frac{J_0}{8} \cdot \frac{2}{\mu_n} \cdot A_n \ddot{\varphi}_n + A_n \frac{G \cdot J_p}{8l} 2\mu_n \cdot \varphi_n = \overline{\Phi}_n.$$

Setzen wir  $(\varphi_n)_0 = (\dot{\varphi}_n)_0 = 0$ , so erhalten wir für  $\varphi_n$  folgenden Ausdruck:

$$\varphi_n = \frac{4}{\varrho J_p A_n b} \int_0^t \Phi_n \sin \frac{b \mu_n}{l} (t - t_1) dt_1.$$

Der Drehwinkel  $\theta$  wird durch folgende Formel dargestellt:

$$(11) \quad \theta = \frac{4}{\varrho J_p b} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{A_n} \left( \cos \frac{\mu_n x}{l} - \mu_n \frac{J_1}{J_0} \sin \frac{\mu_n x}{l} \right) \int_0^t \Phi_n \sin \frac{b \mu_n}{l} (t - t_1) dt_1.$$

Jetzt bietet die Bestimmung erzwungener Schwingungen für einen besonderen Fall keinerlei prinzipielle Schwierigkeiten, man braucht nur in die allgemeine Lösung (11) den entsprechenden Wert  $\Phi_n$  einzusetzen. Werden die Trägheitsmomente der Riemenscheiben  $J_1$  und  $J_2$  unendlich verringert, so nähern sich die Wurzeln der Gleichung (8) den Werten  $\pi, 2\pi, \dots$

An der Grenze erhalten wir für  $\theta$  folgenden Ausdruck:

$$\theta = \frac{2}{\varrho J_p \cdot b \pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi x}{l} \int_0^t \Phi_n \sin \frac{n\pi x}{l} (t - t_1) dt_1.$$

Dieses stimmt mit dem Ergebnis überein, das für die Welle mit freien Enden erhalten wurde.

Betrachten wir näher den Fall, wo das Trägheitsmoment der Welle  $J_0$  im Vergleich mit den Größen  $J_1$  und  $J_2$  klein ist. Führen wir die Bezeichnung ein

$$\frac{J_0}{J_1} = K_1; \quad \frac{J_0}{J_2} = K_2,$$

so können wir die Gleichung (8) in folgender Form darstellen:

$$(12) \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{\mu(K_1 + K_2)}{\mu^2 - K_1 K_2}.$$

Sind  $K_1$  und  $K_2$  kleine Größen, so können wir unter Verzicht auf kleine Größen der höheren Ordnungen die Gleichung (12) wie folgt darstellen:

$$(12') \quad \mu \operatorname{tg} \mu = K_1 + K_2.$$

Für die erste Wurzel ergibt sich folgender angenäherte Wert:

$$\mu_1 = \sqrt{K_1 + K_2}.$$

Die folgende Wurzel unterscheidet sich wenig von  $\pi$ . Schreiben wir

$$\mu_2 = \pi + \alpha$$

und setzen wir dieses in die Gleichung (12) ein, so erhalten wir:

$$\alpha = \frac{K_1 + K_2}{\pi}; \quad \mu_2 = \pi + \frac{K_1 + K_2}{\pi}.$$

Ähnliche Betrachtungen führen zu

$$\mu_3 = 2\pi + \frac{K_1 + K_2}{2\pi} \quad \text{usw.}$$

Somit wird bei kleinen Werten von  $K_1$  und  $K_2$  die erste Wurzel der Reihe nach eine kleine Größe. Die dem Grundton entsprechende Schwingungsperiode wird im Vergleich mit der Periode des nächsten Tons groß sein.

Die erste Annäherung für die Frequenz des Grundtons erhalten wir bei der Annahme

$$\mu_1 = \sqrt{K_1 + K_2},$$

woraus

$$p_1 = \frac{b}{l} \sqrt{K_1 + K_2} = \sqrt{\frac{G \cdot J_p (J_1 + J_2)}{l \cdot J_1 \cdot J_2}}.$$

Dieses Ergebnis fällt mit dem zusammen, das man auf elementarem Wege erhalten kann, wenn man auf die Masse der Welle verzichtet und die Frequenz der Schwingungen des so entstandenen Systems mit einem Freiheitsgrade ausrechnet. Um den Einfluß der Masse der Welle auf die Frequenz der Schwingungen des Grundtons zu bewerten, suchen wir einen genaueren Ausdruck für  $\mu_1$ . Zu diesem Zwecke setzen wir in die Gleichung (12) statt  $\text{tg } \mu$  den Ausdruck  $\mu + \frac{\mu^3}{3}$  ein. Läßt man die kleinen Größen höherer Ordnung fort, so erhält man:

$$\mu_1^2 = K_1 + K_2 - \frac{1}{3}(K_1^2 + K_2^2 - K_1 K_2).$$

Die entsprechende Frequenz der Schwingungen wird sein

$$p_1 = \sqrt{\frac{b^2}{l^2} \left\{ K_1 + K_2 - \frac{1}{3}(K_1^2 + K_2^2 - K_1 K_2) \right\}}.$$

Setzt man statt  $K_1$  und  $K_2$  deren Werte ein und zieht in Betracht, daß sie kleine Größen darstellen, so kann der Ausdruck für  $p_1$  in folgender Form geschrieben werden:

$$p_1 = \sqrt{\frac{G \cdot J_p \left[ \left( J_1 + \frac{1}{3} J_0 \frac{J_2}{J_1 + J_2} \right) + \left( J_2 + \frac{1}{3} J_0 \frac{J_1}{J_1 + J_2} \right) \right]}{\left( J_1 + \frac{1}{3} J_0 \frac{J_2}{J_1 + J_2} \right) \left( J_2 + \frac{1}{3} J_0 \frac{J_1}{J_1 + J_2} \right)}}.$$

Diese Formel erhielten wir früher mit Hilfe der Näherungsmethode von Rayleigh.<sup>1)</sup>

Querschwingungen prismatischer Stäbe.

§ 8. Betrachten wir hier die Schwingungen in der Fläche der Hauptbiegungssteifigkeit des Stabes. Den Koordinatenanfang verlegen wir in den Schwerpunkt des linken Endquerschnittes, die  $x$ -Achse richten wir nach der Stabachse. Die Bestimmung der „freien“ Stab-schwingungen ist, wie bekannt, auf die Integration folgender Differentialgleichung zurückzuführen:

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + b^2 \frac{d^4 y}{dx^4} = 0.$$

Hier gelten folgende Bezeichnungen:

$$(2) \quad b^2 = \frac{EJ \cdot g}{q},$$

$EJ$  ist die Steifigkeit des Stabes bei der Biegung in der Fläche  $xy$ ,  $\frac{q}{g}$  ist die Masse der Längeneinheit des Stabes. Der allgemeine Ausdruck für die Durchbiegung in den Normalkoordinaten wird sich in folgender Form darstellen:

$$(3) \quad y = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \varphi_3 u_3 + \dots;$$

$u_1, u_2 \dots$  sind Normalfunktionen. Die Form dieser Funktionen hängt von der Art der Befestigung der Enden ab.<sup>2)</sup>

Die lebendige Kraft des Systems ist, wenn die Drehung der Querschnitte bei der Durchbiegung unberücksichtigt bleibt, folgende:

$$(4) \quad T = \frac{q}{2g} \int_0^l \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 dx = \frac{q}{2g} \sum_{n=1}^{n=\infty} (\dot{\varphi}_n)^2 \int_0^l u_n^2 dx.$$

Die Glieder von der Form

$$2 \dot{\varphi}_n \dot{\varphi}_m \int_0^l u_m \cdot u_n dx$$

sind gleich Null, da die Koordinaten  $\varphi_1, \varphi_2 \dots$  normal sind.

1) Siehe „О явлениях резонанса въ валахъ“ Извѣстія Петербургскаго политехническаго Института 1905 г.

2) Die Ausdrücke für die „Normalfunktionen“ in verschiedenen Fällen sind in dem früher erwähnten Buche von Rayleigh (worin auch die Bedeutung der Integrale  $\int_0^l u_n^2 dx$  angeführt ist) zu finden.

Die potentielle Energie des Systems ist die Energie der Biegung und kann in folgender Form dargestellt werden:

$$(5) \quad V = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{EJ}{2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \varphi_n^2 \int_0^l \left( \frac{d^2 u_n}{dx^2} \right)^2 dx.$$

Die einer beliebigen Koordinate  $\varphi_i$  entsprechende Gleichung von Lagrange wird sein:

$$(6) \quad \frac{q}{g} \int_0^l u_i^2 dx \cdot \ddot{\varphi}_i + EJ \int_0^l \left( \frac{d^2 u_i}{dx^2} \right)^2 dx \cdot \varphi_i = \bar{\Phi}_i.$$

Führt man die Bezeichnung ein

$$\frac{EJg}{q} \cdot \frac{\int_0^l \left( \frac{d^2 u_i}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l u_i^2 dx} = n_i^2,$$

so kann auf Grund von (3) und (6) die Durchbiegung des Trägers bei Schwingungen in folgender Form dargestellt werden:

$$(7) \quad y = \sum_{i=1}^{i=\infty} u_i \left\{ (\varphi_i)_0 \cdot \cos n_i t + \frac{1}{n_i} (\dot{\varphi}_i)_0 \sin n_i t + \right. \\ \left. + \frac{g}{q \int_0^l u_i^2 dx} \cdot \frac{1}{n_i} \int_0^t \bar{\Phi}_i \sin n_i (t - t_1) dt_1 \right\}$$

Die Konstanten  $(\varphi_i)_0$  und  $(\dot{\varphi}_i)_0$  können aus den Anfangsumständen der Bewegung gefunden werden. Gesetzt im Anfangsmoment sei:

$$(y)_0 = \chi(x); \quad \left( \frac{dy}{dt} \right)_0 = \psi(x).$$

Dann erhalten wir auf Grund von (7)

$$\chi(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} (\varphi_i)_0 \cdot u_i \\ \psi(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} (\dot{\varphi}_i)_0 \cdot u_i.$$

Benützt man die Grundeigenschaft der Normalfunktionen, so findet man:

$$(\varphi_i)_0 = \frac{\int_0^l \chi(x) u_i dx}{\int_0^l u_i^2 dx}; \quad (\dot{\varphi}_i)_0 = \frac{\int_0^l \psi(x) u_i dx}{\int_0^l u_i^2 dx}.$$

Zur Bestimmung der Schwingungen bleibt nur in jedem besonderen Falle der entsprechende Wert der verallgemeinerten Kraft  $\bar{\Phi}_i$  zu finden.

§ 9. Betrachten wir näher die Frage nach den Schwingungen prismatischer Stäbe mit gestützten Enden, da man dieser Art der Befestigung bei der praktischen Anwendung besonders oft begegnet. In diesem Falle werden die Bedingungen an den Enden wie folgt geschrieben

$$y = 0 \text{ bei } x = 0 \text{ und bei } x = l$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \text{ bei } x = 0 \text{ und bei } x = l.$$

Der allgemeine Ausdruck für die Durchbiegung in Normalkoordinaten wird:

$$(8) \quad y = \sum_{i=1}^{i=\infty} \varphi_i \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

Folglich ist

$$u_i = \sin \frac{i\pi x}{l}; \quad \int_0^l u_i^2 dx = \frac{l}{2}; \quad \int_0^l \left(\frac{d^2 u_i}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{i^4 \cdot \pi^4}{l^4} \cdot \frac{l}{2}.$$

Die Ausdrücke (4) und (5) für die lebendige Kraft und die potentielle Energie können so dargestellt werden:

$$T = \frac{ql}{4g} \sum_{i=1}^{i=\infty} (\dot{\varphi}_i)^2; \quad V = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum_{i=1}^{i=\infty} i^4 \varphi_i^2.$$

Die Gleichung für die Koordinate  $\varphi_i$  wird:

$$\ddot{\varphi}_i + \frac{b^2 i^4 \pi^4}{l^4} \varphi_i = \frac{2g}{ql} \bar{\Phi}_i.$$

Gesetzt, im Anfangsmoment sei  $(\varphi_i)_0 = (\dot{\varphi}_i)_0 = 0$ , so erhalten wir für die Durchbiegung des Trägers folgenden allgemeinen Ausdruck:

$$(9) \quad y = \sum_{i=1}^{i=\infty} \sin \frac{i\pi x}{l} \cdot \frac{l^2}{b\pi^2 i^2} \cdot \frac{2g}{ql} \int_0^t \bar{\Phi}_i \sin \frac{b i^2 \pi^2}{l^2} (t - t_1) dt_1.$$

§ 10. Als Beispiel betrachten wir das Schaukeln eines Trägers durch die periodische Kraft  $P = P_0 \sin nt$ , deren Angriffspunkt im Schnitte  $x = c$  liegt. Zur Bestimmung der verallgemeinerten Kraft  $\Phi_i$  geben wir der entsprechenden Koordinate den Zuwachs  $\delta\varphi_i$ . Diesem Zuwachse entspricht die Durchbiegung

$$\delta y = \delta\varphi_i \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

Die Kraft  $P$  leistet bei dieser Durchbiegung offenbar die Arbeit

$$P \cdot \delta \varphi_i \cdot \sin \frac{i\pi c}{l} = P_0 \cdot \delta \varphi_i \sin nt \cdot \sin \frac{i\pi c}{l}.$$

Vergleicht man dieses mit der Arbeit  $\Phi_i \delta \varphi_i$  der verallgemeinerten Kraft, so wird gefunden, daß

$$\Phi_i = P_0 \sin nt \sin \frac{i\pi c}{l} \text{ ist.}$$

Setzt man den gefundenen Wert der verallgemeinerten Kraft in die allgemeine Lösung (9) und führt die Integration aus, so kommt:

$$(10) \quad y = \frac{2gP_0 l^3}{q} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \cdot \sin \frac{i\pi x}{l}}{b^2 i^4 \pi^4 - n^2 l^4} \sin nt - \\ - \frac{2P_0 l^6 g \cdot n}{q b \pi^3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \cdot \sin \frac{i\pi x}{l}}{i^2 (b^2 i^4 \pi^4 - n^2 l^4)} \sin \frac{b i^2 \pi^2 t}{l^2}.$$

Die durch die erste Summe bestimmten Schwingungen haben dieselbe Periode wie die Kraft  $P$ . Die zweite Summe stellt „freie“ Schwingungen des Stabes dar. Beim Vorhandensein äußerer Widerstände erlöschen diese Schwingungen allmählich, und man hat praktisch nur mit „erzwungenen“ Schwingungen des Systems zu tun.

Wir bemerken, daß, wenn der Angriffspunkt mit einem der Knotenpunkte des  $i$ ten Schwingungstypus zusammenfällt,  $\sin \frac{\pi i c}{l} = 0$  ist und die entsprechenden Glieder in der Lösung (10) ebenfalls gleich Null sind; folglich wird die Kraft keine Schwingungen des Typus  $i$  hervorrufen.

Wechselt die Kraft ihre Größe langsam, so ist  $n$  klein. In der allgemeinen Lösung (10) kann man das zweite Glied, welches als Faktor  $n$  hat, fortlassen; außerdem kann in den Gliedern der ersten Summe die Größe  $n^2 l^4$  im Vergleich zu  $b^2 i^4 \pi^4$  fortgelassen werden. Für die Durchbiegung erhalten wir schließlich den Ausdruck:

$$(11) \quad y = \frac{2gP_0 l^3 \sin nt}{q b^2 \pi^4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \cdot \sin \frac{i\pi x}{l}}{i^4} = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \cdot \sin \frac{i\pi x}{l}}{i^4}.$$

Das gefundene Ergebnis stellt die Durchbiegung des Trägers bei statischer Wirkung der Kraft  $P$  im Schnitte  $c$  dar.<sup>1)</sup>

1) Siehe unsere Arbeit: „Примѣненіе нормальныхъ координатъ . . .“ Извѣстія Кіевскаго политехническаго института 1909 г.

Wir wollen hier den besonderen Fall betrachten, bei welchem die Periode der äußeren Kraft gleich der Periode eines beliebigen Typus eigener Schwingungen des Systems ist (Resonanzerscheinung). Sei

$$b^2 i^4 \pi^4 = n^2 l^4.$$

In diesem Falle werden die Nenner des entsprechenden Paares von Gliedern in der allgemeinen Lösung (10) gleich Null. Bringt man diese Glieder aus den Zeichen der Summen heraus und entwickelt die Unbestimmtheit, so wird folgendes erhalten.

$$-\frac{P_0 g}{q l n} t \cos n t \sin \frac{i \pi c}{l} \cdot \sin \frac{i \pi x}{l} + \frac{P_0 g}{q n^2 l} \sin n t \sin \frac{i \pi c}{l} \sin \frac{i \pi x}{l}.$$

Wir erhalten ein Glied, welches als Faktor  $t$  hat.

Die Amplitude der Schwingungen hat das Bestreben unbegrenzt zu wachsen. Dieses Ergebnis ist dadurch entstanden, daß wir die Widerstände unberücksichtigt ließen. Je kleiner der Widerstand ist, um so bedeutendere Größe kann die Amplitude der Schwingungen erreichen. Eine kleine Kraft kann große Durchbiegungen, folglich auch große Spannungen im Träger hervorrufen. Diese Erscheinung muß man bei technischen Berechnungen berücksichtigen; gewöhnlich sucht man die Resonanzerscheinungen durch die Veränderung der Querdimensionen des Trägers zu vermeiden.

Ist die Frequenz der Kraft, welche die Schwingungen hervorrufft, kleiner als die Frequenz  $\frac{b \pi^2}{l^2}$  des Grundtypus der Trägerschwingungen, d. h.  $\frac{n l^2}{b \pi^2} = \alpha < 1$ , so kann man zur Berechnung der dynamischen Durchbiegung die angenäherte Formel benutzen. Wir wollen jetzt den Ausdruck für die Durchbiegung in der Mitte der Stützweite bilden. Zu diesem Zwecke setzen wir in der allgemeinen Lösung (10)  $x = \frac{l}{2}$

$$(12) \quad (y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{2 g P_0 l^3}{q b^2 \pi^4} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k \sin \frac{(2k+1) \pi c}{l}}{(2k+1)^4 - \alpha^2} \sin n t - \\ - \frac{2 g P_0 l^3 n}{q b \pi^2 \cdot b^2 \pi^4} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-1)^k \sin \frac{(2k+1) \pi c}{l}}{(2k+1)^2 [(2k+1)^4 - \alpha^2]} \sin \frac{(2n+1)^2 b \pi^2 t}{l^2}.$$

Zieht man den Ausdruck für die Durchbiegung bei statischer Wirkung der Kraft  $P_0$  in Betracht [siehe (11)] und bezeichnet mit  $f_{st}$  die statische Durchbiegung in der Mitte, so läßt sich die dynamische Durchbiegung, mit genügender Genauigkeit, in folgender Form darstellen:

$$f_d = f_{st} \left( \frac{1}{1 - \alpha^2} \sin n t - \alpha \sin \frac{b \pi^2 t}{l^2} \right).$$

Im ungünstigsten Falle ist die größte Durchbiegung in der Mitte

$$(13) \quad (f_d)_{\max} = f_{st} \left( \frac{1}{1 - \alpha^2} + \alpha \right).$$

§ 11. Mit Hilfe der Lösung (10) kann man die Schwingungen des Trägers im Falle der Wirkung einer verteilten Belastung, die ihre Größe periodisch wechselt, leicht finden.

Möge hier  $p \cdot \sin nt \cdot dc$  die Belastung sein, die auf das Längenelement  $dc$  ( $p$  ist eine Funktion von  $c$ ) kommt. Setzt man  $pdc$  statt  $P_0$  in die Lösung (10) ein und integriert nach  $c$  zwischen den Grenzen  $c$  und  $l$ , so wird die gesuchte Lösung erhalten. Nehmen wir hier z. B. an, daß  $p = \text{konst.}$  sei, d. h. der Träger der Wirkung einer gleichmäßig verteilten Belastung von variabler Intensität unterliege. (Ungefähr unter ebensolchen Bedingungen befindet sich die Kupplungsgange der Lokomotivräder). Nach Ausführung der obenerwähnten Integration finden wir

$$(14) \quad y = \frac{4g \cdot pl^4}{q\pi} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi x}{l} \sin nt}{(2k+1) [(2k+1)^4 \cdot b^2 \pi^4 - n^2 l^4]} - \\ - \frac{4gp l^6 \cdot n}{qb\pi^5} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi x}{l} \cdot \sin \frac{b(2k+1)^2 \pi^2 t}{l^2}}{(2k+1)^5 [(2k+1)^4 b^2 \pi^4 - n^2 l^4]}.$$

Bei sehr langsamer Veränderung der Intensität der Belastung wird  $n$  eine kleine Größe; für  $y$  erhalten wir den Wert

$$y = \frac{4pl^4}{EJ\pi^5} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}}{(2k+1)^5}.$$

Dieses stimmt mit dem Ausdrucke für die statische Durchbiegung des Trägers überein.<sup>1)</sup>

Ist  $n$  kleiner als die Frequenz der Schwingungen, die dem Grundton entspricht, so kann man zur Ausrechnung der größten dynamischen Durchbiegung die früher erhaltene Formel (13) benutzen.

§ 12. Betrachten wir jetzt Schwingungen des Trägers, die bei Wirkung einer konstanten Kraft  $P$  entstehen, wenn ihr Angriffspunkt sich mit konstanter Geschwindigkeit  $a$  längs der  $X$ -Achse bewegt. Im Anfangsmoment befinde sich die Kraft über der linken Stütze. Wir wollen jetzt den Ausdruck für die verallgemeinerte Kraft  $\Phi_i$  bestimmen. Zu diesem Zwecke geben wir der Koordinate  $\varphi_i$  im Augenblick  $t$  einen

1) Siehe die früher zitierte Arbeit: „Примѣненіе нормальныхъ координатъ“.

unendlich kleinen Zuwachs  $\delta\varphi_i$ . Diesem Zuwachse entspricht die Durchbiegung

$$\delta y = \delta\varphi_i \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

Die äußere Kraft  $P$ , die sich in diesem Augenblicke von dem linken Ende in einer Entfernung  $at$  befindet, wird bei dieser Durchbiegung die Arbeit

$$P \cdot \delta\varphi_i \sin \frac{i\pi at}{l}$$

leisten; vergleicht man dieses mit der Arbeit  $\Phi_i \delta\varphi_i$  der verallgemeinerten Kraft, so findet man

$$\Phi_i = P \sin \frac{i\pi at}{l}.$$

Setzen wir dieses in die allgemeine Lösung (9) ein und führen die Integration aus, so erhalten wir:

$$(15) \quad y = \frac{2Pl^3g}{q\pi^2} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{i\pi at}{l}}{i^2(i^2\pi^2b^2 - a^2l^2)} - \frac{2Pl^4ga}{qb\pi^3} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \cdot \sin \frac{bi^2\pi^2t}{l^2}}{i^3(b^2i^2\pi^2 - a^2l^2)}.$$

Die erste Summe der erhaltenen Lösung gibt Schwingungen, die von der Geschwindigkeit  $a$  abhängen. Dies sind „erzwungene Schwingungen“ des Systems; die zweite Summe stellt „freie Schwingungen“ dar.

Verringert man die Bewegungsgeschwindigkeit  $a$  der Kraft  $P$  auf dem Träger, so müssen wir an der Grenze zur statischen Durchbiegung des Trägers kommen. In der Tat, setzen wir in der Lösung (15)  $a = 0$ ,  $at = \xi$ , so finden wir

$$y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \cdot \sin \frac{i\pi \xi}{l}}{i^4}.$$

Dies stimmt mit dem früher gefundenen Ausdruck für die statische Durchbiegung, siehe (11), überein.

Setzen wir  $x = \frac{l}{2}$  und  $\xi = \frac{l}{2}$ , so kommen wir zu dem bekannten Ergebnis:

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \cdot \frac{\pi^4}{96} = \frac{Pl^3}{48EJ}.$$

Betrachten wir jetzt ausführlicher den besonderen Fall, wo

$$a^2l^2 = i^2\pi^2b^2$$

ist.

Hierbei werden in der Lösung (15) die Nenner von zwei Gliedern gleich Null. Bringt man diese Glieder aus dem Zeichen der Summe heraus und entwickelt die Unbestimmtheit, so erhält man:

$$(16) \quad -\frac{Pg}{qi\pi a} t \cos \frac{i\pi at}{l} \sin \frac{i\pi x}{l} + \frac{Pgl}{qi^2\pi^2a^2} \sin \frac{i\pi at}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

Das erste Glied hat als Faktor  $t$ , folglich wird die Amplitude der Schwingungen des Typus  $i$  unendlich wachsen.

Wir kommen wieder zur „Resonanzerscheinung“. Ein praktisches Interesse hat der Fall, wo die Resonanz dem Grundtypus der Schwingungen entspricht, d. h. wo

$$(17) \quad b^2 \pi^2 = a^2 l^2.$$

Die Schwingungsperiode  $T$  für den Grundton wird

$$T = \frac{2\pi l^2}{b\pi^2} = \frac{2l^2}{b\pi},$$

oder auf Grund von (17):

$$T = \frac{2l}{a}.$$

Folglich ist  $T$  doppelt so groß als der Zeitraum, den der Angriffspunkt der Kraft  $P$  zum Durchlaufen der Stützweite des Trägers nötig hat.

Denken wir uns in der Lösung (15)  $x = \frac{l}{2}$ , und formen wir die Glieder, welche  $i = 1$  entsprechen, mittels (16) um, so erhalten wir für die Durchbiegung in der Mitte den Ausdruck:

$$(18) \quad \begin{aligned} (y)_{x=\frac{l}{2}} = & -\frac{Pg}{q\pi a} t \cos \frac{\pi a t}{l} + \frac{Pgl}{q\pi^2 a^2} \sin \frac{\pi a t}{l} \\ & + \frac{2Plg}{q\pi^2 a^2} \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k \frac{\sin (2k+1)\pi a t}{(2k+1)^2 [(2k+1)^2 - 1]} \\ & - \frac{2Plg}{q\pi^2 a^2} \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k \frac{\sin (2k+1)^2 \pi a t}{(2k+1)^2 [(2k+1)^2 - 1]}. \end{aligned}$$

Die Summen dieses Ausdrucks haben keinen besonderen Einfluß auf die Größe der maximalen Durchbiegung. Begnügen wir uns mit den ersten zwei Gliedern des Ausdrucks (18), so finden wir, daß die größte Durchbiegung dem Augenblick  $t = \frac{l}{a}$  entspricht, in welchem die Kraft  $P$  die rechte Stütze des Trägers erreicht. Die Größe der maximalen Durchbiegung wird:

$$y_{max} = \frac{Pl^3}{\pi^3 EJ}.$$

Vergleicht man dieses mit der größten statischen Durchbiegung  $f_{st} = \frac{Pl^3}{48 EJ}$ , so findet man:

$$\frac{(f_d)_{max}}{f_{st}} = \frac{48}{\pi^3} = \text{rund } 1,55.$$

In der Praxis ist die Periode  $T$  des Grundtypus der Schwingungen mehrmals kleiner als der Zeitraum  $\frac{2l}{a}$ , daher ist  $al$  im Vergleich mit der Größe  $b\pi$  klein. Führen wir die Bezeichnung ein:

$$al : b\pi = \alpha,$$

so kann die Lösung (15) in folgender Form dargestellt werden:

$$(19) \quad y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \cdot \sin \frac{i\pi at}{l}}{i^2(i^2 - \alpha^2)} - \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \alpha \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \cdot \sin \frac{bi^2\pi^2 t}{l^2}}{i^3(i^2 - \alpha^2)}.$$

Um die Durchbiegung in der Mitte des Trägers in jenem Augenblick zu finden, wo die Kraft  $P$  sich in einer Entfernung  $c$  vom linken Ende befindet, muß man in der Lösung (19)  $x = \frac{l}{2}$ ;  $at = c$  annehmen:

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = f_d = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k \sin \frac{(2k+1)\pi c}{l}}{(2k+1)^2[(2k+1)^2 - \alpha^2]} - \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \alpha \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k \sin \frac{(2k+1)^2 b\pi^2 t}{l^2}}{(2k+1)^3[(2k+1)^2 - \alpha^2]}.$$

Bezeichnet man mit  $f_{st}$  die statische Durchbiegung in der Mitte, wenn die Kraft  $P$  in einer Entfernung  $c$  vom linken Ende wirkt, und mit  $F_{st}$  die statische Durchbiegung, wenn  $P$  in der Mitte der Stützweite wirkt, so kann die dynamische Durchbiegung in der Mitte mit genügender Genauigkeit durch die Formel dargestellt werden:

$$(20) \quad f_d = \frac{f_{st}}{1 - \alpha^2} - \alpha \cdot F_{st} \cdot \sin \frac{b\pi^2 t}{l^2}.$$

Im ungünstigsten Falle ist:

$$(21) \quad (f_d)_{max} = \frac{F_{st}}{1 - \alpha^2} + \alpha \cdot F_{st}.$$

Hier beachten wir, daß man im Ausdruck (20) das erste Glied für die dynamische Durchbiegung als statische Durchbiegung des Trägers, bei gleichzeitiger Wirkung der Querkraft  $P$  (im Schnitte  $x = c$ ) und der Längsdruckkraft  $Q = \alpha \cdot \frac{F_{st}\pi^2 t}{l^2}$ , ansehen kann. Um  $f_d$  zu erhalten, muß man der statischen Durchbiegung harmonische Schwingungen auferlegen, welche die Amplitude  $\alpha F_{st}$  und eine Periode haben, welche der Periode des Grundtypus der Schwingungen des untersuchten Trägers gleich ist.

1) Siehe die oben erwähnte Arbeit: „Примѣненіе нормальныхъ координатъ“.

Werden auf dem Träger Systeme von mehreren Kräften  $P_1, P_2 \dots$  mit gleicher Geschwindigkeit  $a$  fortbewegt, so muß man zur Bestimmung der Durchbiegung die Wirkungen der einzelnen Kräfte summieren. Hier

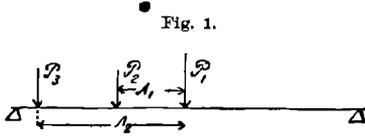


Fig. 1.

bezeichnen  $P_1, P_2 \dots$  die Kräfte in der Reihenfolge, in der sie bei der Fortbewegung auf den Träger treten (siehe Fig. 1);  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  sind die entsprechenden Abstände der Kräfte  $P_2, P_3, \dots$

von der Kraft  $P_1$ , zuletzt erhalten wir für jede Kraft die dynamische Durchbiegung in der Mitte unter Anwendung der Formel (20):

$$(22) \quad f_a = \frac{f'_{st} + f''_{st} + f'''_{st} + \dots}{1 - \alpha^2} - \alpha F'_{st} \sin \frac{b\pi^2 t}{l^2} - \alpha F''_{st} \sin \frac{b\pi^2}{l^2} \left( t - \frac{\lambda_1}{a} \right) - \alpha F'''_{st} \sin \frac{b\pi^2}{l^2} \left( t - \frac{\lambda_2}{a} \right) - \dots$$

Die ungünstigsten Bedingungen werden dann vorhanden sein, wenn die Amplituden der von den einzelnen Kräften hervorgerufenen Schwingungen sich summieren, d. h. wenn die Zeiträume  $\frac{\lambda_1}{a}, \frac{\lambda_2}{a}, \dots$  Vielfache von  $T$  sind (der Periode des Grundtypus der Schwingungen des Trägers). In diesem Falle ist

$$(f_d) = \frac{1}{1 - \alpha^2} (f'_{st} + f''_{st} + f'''_{st} + \dots) - \alpha (F'_{st} + F''_{st} + F'''_{st} + \dots) \sin \frac{b\pi^2 t}{l^2}.$$

§ 13. Als letztes Beispiel betrachten wir die Schwingungen eines Trägers unter Wirkung einer gleichmäßig verteilten Belastung, die auf

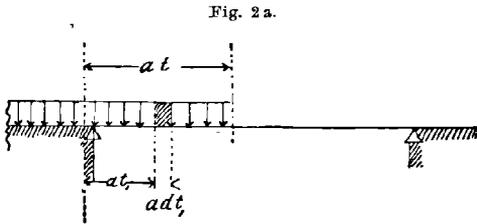


Fig. 2a.

den Träger mit konstanter Geschwindigkeit  $a$  heraufrollt (siehe Fig. 2a). Bezeichnen wir mit  $p$  die Kraft, die auf die Einheit der Trägerlänge kommt, dann wird  $p a d t_1$  die Kraft sein, die dem Träger-elemente  $a d t_1$  zukommt, das

in der Entfernung  $a t_1$  vom linken Ende ausgeschnitten ist.

Die Durchbiegung  $\delta y$ , welche die elementare Kraft  $p a d t_1$  hervorruft, wird auf Grund der Lösung (15) des vorangegangenen Paragraphen bestimmt.

$$\delta y = \frac{2 p l^3 g a}{q \pi^2} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i \pi x}{l} \cdot \sin \frac{i \pi a t_1}{l} \cdot d t_1}{i^2 (i^2 \pi^2 b^2 - \alpha^2 l^2)} - \frac{2 p l^4 g a^2}{q b \pi^3} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i \pi x}{l} \cdot \sin \frac{b i^2 \pi^2 t_1}{l^2}}{i^3 (b^2 i^2 \pi^2 - \alpha^2 l^2)} d t_1.$$

Integriert man diesen Ausdruck nach  $t_1$  zwischen den Grenzen

0 und  $t_1$ , so erhält man als Durchbiegung von den Kräften, die auf der ganzen Strecke  $at$  verteilt sind:

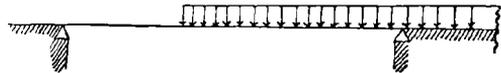
$$(23) \quad y = \frac{2pl^4g}{qb^2\pi^5} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l}}{i^5} + \frac{2pl^4ga^2}{qb^2\pi^5} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \cos \frac{bi^2\pi^2 t}{l^2}}{i^5(b^2i^2\pi^2 - a^2l^2)} - \frac{2pl^4g}{q\pi^5} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \cos \frac{i\pi at}{l}}{i^5(i^2\pi^2 b^2 - a^2l^2)}.$$

Zu demselben Ergebnis kommt man, wenn man im vorliegenden Falle die Werte  $\Phi_i$  berechnet und in die allgemeine Lösung [(9) § 9] einsetzt. Um  $\Phi_i$  zu finden, dient natürlich die Gleichung:

$$\Phi_i \delta \varphi_i = p \delta \varphi_i \int_0^{at} \sin \frac{i\pi x}{l} dx.$$

Die Lösung (23) ist anwendbar, solange  $at < l$  ist. Sobald  $at = l$  ist, wirken auf den Träger gleichmäßig verteilte Kräfte; der Träger macht „freie Schwingungen“, welche durch die Größen  $y$  und  $\frac{dy}{dt}$  im Augenblick  $t = \frac{l}{a}$  bestimmt werden.

Fig. 2 b.



Wenn die Kräfte  $p$  von der Stützweite des Trägers (siehe Fig. 2 b) herunterzugehen beginnen, dann treten wiederum erzwungene Schwingungen auf. Der Ausdruck für  $y$  kann auf dieselbe Weise wie im vorhergegangenen Falle erhalten werden. Natürlich muß man die Werte  $y$  und  $\frac{dy}{dt}$  für den Augenblick, wo die Belastung beginnt von der Stützweite des Trägers abzugehen, in Betracht ziehen.

Wird in der Lösung (23) die Geschwindigkeit  $a$  gleich Null genommen, so kommt man von der Aufgabe der Dynamik zur Aufgabe der Statik; für die Durchbiegung in der Mitte der Stützweite wird dann folgender Ausdruck erhalten:

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{2pl^4g}{q\pi^5b^2} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^5} - \frac{2pl^4ga^2}{q\pi^5b^2} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k \cos \frac{(2k+1)\pi at}{l}}{(2k+1)^5}.$$

Wenn man  $at = l$  setzt, d. h. den Augenblick wählt, bei dem die Kräfte  $p$  auf der ganzen Stützweite des Trägers verteilt sind, so findet sich:

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{4pl^4g}{q\pi^5b^2} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^5} = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EJ},$$

was mit der bekannten Formel für die Durchbiegung des Trägers durch gleichmäßig verteilte Belastung übereinstimmt.

§ 14. In allen von uns angeführten besonderen Fällen beschränkten wir uns auf das Aufsuchen eines Ausdrucks für die dynamische Durchbiegung des Trägers.

Um Spannungen zu bestimmen, ist es nötig, den dynamischen Wert der Trägerkrümmung in verschiedenen Schnitten zu finden, d. h. einen allgemeinen Ausdruck für  $\frac{d^2y}{dx^2}$  zu bilden. Betrachten wir den Fall der Biegung eines Trägers durch die längs der  $x$ -Achse mit konstanter Geschwindigkeit  $a$  sich fortbewegende Kraft. Auf Grund der Lösung (15) erhalten wir:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2Pl^2g}{q} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \cdot \sin \frac{i\pi at}{l}}{i^2\pi^2 b^2 - a^2 l^2} + \frac{2Pl^2ga}{qb\pi} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{bi^2\pi^2 t}{l^2}}{i(b^2 i^2 \pi^2 - a^2 l^2)}.$$

Wenn wir in diesem Ausdrucke  $x = \frac{l}{2}$  annehmen und zugleich  $at = \xi$ ,  $\frac{a^2 l^2}{b^2 \pi^2} = \alpha^2$  setzen, so erhalten wir für die Krümmung des Trägers in der Mitte der Stützweite folgende Formel:

$$(24) \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{2Pl}{EJ\pi^2} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k \sin \frac{(2k+1)\pi\xi}{l}}{(2k+1)^2 - \alpha^2} + \frac{2Pl}{EJ\pi^2} \alpha \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k \sin \frac{b\pi^2(2k+1)^2 t}{l^2}}{(2k+1)[(2k+1)^2 - \alpha^2]}.$$

Wenn die Geschwindigkeit  $a$  der Bewegung der Kraft  $P$  sehr klein ist, so hat die Krümmung in der Mitte den Wert

$$-\frac{2Pl}{EJ\pi^2} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k \sin \frac{(2k+1)\pi\xi}{l}}{(2k+1)^2}.$$

Im Augenblick des Zusammenfallens der Kraft  $P$  mit der Mitte der Stützweite erhält dieser Ausdruck den Maximalwert

$$-\frac{2Pl}{EJ\pi^2} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = -\frac{Pl}{4EJ}.$$

Dies fällt mit der bekannten Formel der Festigkeitslehre zusammen.

Kehren wir zum Ausdruck (24) zurück, so bemerken wir, daß das erste Glied mit genügender Genauigkeit gleich dem statischen Werte der Krümmung dividiert durch  $1 - \alpha^2$  angenommen werden kann.

Hierzu muß man Schwingungen hinzufügen, die durch das zweite Glied des Ausdrucks (24) bestimmt werden. Zieht man jedoch nur die Schwingungen des Grundtypus in Betracht, so kann man die Formel zur Berechnung des größten Wertes der Trägerkrümmung wie folgt darstellen:

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_d = \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{st} \left(\frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{8}{\pi^2} \alpha\right);$$

[ $\alpha$  ist eine kleine Größe].

Bemerkt sei, daß man zur angenäherten Berechnung der Krümmung wie der Durchbiegung [siehe Formel (21)] nur die Größe  $\alpha$  zu kennen braucht, d. h. man muß verstehen, die Periode des Grundtypus der Schwingungen des Trägers zu finden. Diesen Umstand kann man zur Bestimmung der dynamischen Durchbiegung nicht-prismatischer Stäbe benützen. Die Berechnung der Periode des Grundtypus der Schwingungen solcher Stäbe kann mittels der Rayleighschen Näherungsmethode ausgeführt werden. Von vornherein nehmen wir eine geeignete Form der Biegung, mit andern Worten wir verwandeln unsern Träger in ein System mit einem Freiheitsgrade. Für dieses System bilden wir den Ausdruck der potentiellen Energie und der lebendigen Kraft. Alsdann kann die Berechnung der Frequenz und der Periode der Schwingungen ohne Schwierigkeit ausgeführt werden. Die so erhaltene Schwingungsperiode wird stets kleiner sein als die wahre Größe der Periode des Grundtypus der Schwingungen des Trägers.

### Schwingungen der Brücken unter der Wirkung beweglicher Lasten.

§ 15. Einige Resultate des vorhergehenden Kapitels können zur Bestimmung von Schwingungen dienen, welche bei Brücken unter der Wirkung einer beweglichen Belastung entstehen. Bei der Berechnung der Brücken wird gewöhnlich angenommen, daß die bewegliche Belastung aus einer Lage mit unendlich kleiner Geschwindigkeit in die andere Lage übergeht, weshalb auch der Druck einer jeden der beweglichen Lasten in einem beliebigen Augenblick dem Gewichte dieser Last gleich ist. Bei endlichen Geschwindigkeiten ist diese Annahme nicht ganz genau. Dank der Durchbiegung der Brücken führen die darauf rollenden Lasten einige Verschiebungen in der lotrechten Richtung aus. Die Trägheitskräfte, welche dieser Verschiebung entsprechen, müssen natürlich zum Gewichte der Lasten hinzugefügt werden, wenn der Druck berechnet wird, der durch die Lasten auf die Brücke bewirkt wird. Außerdem müssen die Trägheitskräfte der Elemente der Brücke selbst berücksichtigt werden, die beim Passieren der beweglichen Belastung Verschiebungen ausführen. Im vollen Umfange ist die Auf-

gabe hinsichtlich der dynamischen Durchbiegung der Brücken bis jetzt nicht gelöst, es sind nur folgende Grenzfälle untersucht worden:

1. Wenn das Gewicht der Brücke klein ist im Vergleich zu dem Gewichte der darauf rollenden Last, dann kann man mit genügender Genauigkeit sich auf den Einfluß der Trägheitskräfte der Last allein beschränken.

2. Wenn das Gewicht der beweglichen Belastung klein ist im Vergleich zum Gewichte der Brücke.

Der erste Versuch, den Einfluß der Trägheitskräfte der rollenden Last auf die Durchbiegung der Brücke zu bestimmen (unter Außerachtlassung der Masse der Brücke selbst) stammt von dem Professor an der Universität zu Cambridge Willis. Willis nahm an, daß die Bahn der rollenden Last  $P$  durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$(1) \quad y = \frac{P(lx - x^2)^2}{3lEJ}.$$

(Diese Gleichung wird erhalten, wenn man für jede Lage der Last die statische Durchbiegung unter derselben berechnet. Die so ermittelte Kurve ergibt die Bahn für den Fall, wo die Last sich auf der Brücke mit unendlich kleiner Geschwindigkeit fortbewegt.) Er fand für die Trägheitskraft der Last folgende Größe:

$$-\frac{P}{g} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{P}{g} \cdot \frac{a^2 d^2 y}{dx^2} = -\frac{Pa^2}{g} \cdot \frac{2P}{3lEJ} [l^2 - 6lx + 6x^2].$$

Hier ist mit  $a$  die Geschwindigkeit der Bewegung der Last auf der Brücke bezeichnet. Den größten Wert erhalten die Trägheitskräfte bei  $x = \frac{l}{2}$ . Der in diesem Augenblick von der Last erzeugte Druck wird sein:

$$(2) \quad P \left( 1 + \frac{a^2 Pl}{g \cdot 3EJ} \right) = P \left( 1 + \frac{16 \cdot a^2 f_{st}}{gl^2} \right) = P \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right).$$

Hier ist

$$f_{st} = \frac{Pl^2}{48EJ}; \quad \beta = \frac{gl^2}{16a^2 f_{st}}.$$

Die genaue Lösung der Aufgabe über die Durchbiegung eines gewichtlosen Stabes unter der Wirkung einer rollenden Last rührt von dem englischen Gelehrten G. G. Stokes her.<sup>1)</sup>

Es stellt sich heraus, daß bei den üblichen Geschwindigkeiten und zulässigen Werten von  $f_{st}$  die Größe  $\frac{1}{\beta}$  klein ist, und das Resultat von Willis (2) den Einfluß der Trägheit der Last mit genügender Genauig-

1) „Discussion of a differential equation relative to the breaking of Railway Bridges“. Mathematical and physical papers vol. 11, p. 179.

keit bewertet. Als zweite Annäherung kann man für den Druck der Last in der Mitte die Formel<sup>1)</sup> anwenden:

$$(3) \quad P\left(1 + \frac{1}{\beta - 3}\right).$$

Falls wir mit Hilfe der Formel (3) den Druck der Achsen einer Lokomotive oder eines Waggons finden wollen, so brauchen wir statt  $P$  nur das Gewicht eines Räderpaares zu setzen; der Einfluß der Massen der übrigen Teile der Lokomotive oder des Waggons wird dank dem Vorhandensein der Federn verringert, daher muß das Gewicht dieser Teile mit einem Koeffizienten, der fast gleich Eins ist, multipliziert werden. Nach den Ausrechnungen von Zimmermann bildet der Zuwachs des Druckes von den Trägheitskräften im ungünstigsten Falle 14 % des statischen Druckes (eine ähnliche Steigerung des Druckes erhält man bei der Geschwindigkeit der Bewegung 100 km/Stund. für Träger von 30 cm Höhe).

Angenommen, die Bahngleichung der Last sei die Gleichung (1), so kann man ungefähr auch den Einfluß der Trägheitskräfte des Trägers selbst auf die Größe der Durchbiegung und auf die Größe des maximalen Biegemomentes bewerten. Bezeichnet man mit  $Q$  das Gewicht des Trägers, so kann man für das größte Biegemoment unter Berücksichtigung der Trägheitskräfte der Last  $P$  und des Trägers folgende Formel schreiben<sup>2)</sup>:

$$(4) \quad M_{max} = \frac{Pl}{4} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) + \frac{Ql}{8} \left(1 + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{\beta}\right).$$

§ 16. Die Formeln (2) und (3) des vorhergehenden Paragraphen, welche unter der Annahme erhalten wurden, daß der Stab gewichtlos sei, können natürlich nur in dem Falle befriedigende Resultate ergeben, wo das Gewicht des Trägers im Vergleich zum Gewichte der darauf rollenden Last klein ist. Mit der Zunahme der Stützweite der Brücke hat ihr Gewicht bei der Bewertung der bewegten Belastung eine vorherrschende Bedeutung. Schon Stokes bemerkte, daß die Bewegung der Last im Träger Schwingungen hervorrufen muß. Zur Bestimmung dieser Schwingungen wandte er ein Näherungsverfahren an, das er in

1) Eine analoge Formel ist in der Arbeit von Zimmermann angeführt: „Die Schwingungen eines Trägers mit beweglicher Last.“ Hier müssen wir bemerken, daß diese häufig zitierte Arbeit erst ein halbes Jahrhundert nach der von Stokes erschienen ist. In derselben fehlen Erwähnungen der Arbeit von Stokes, die in einem derartig verbreiteten Werke, wie S. Venants Übersetzung (Theorie der Elastizitätslehre von Clebsch) dargelegt worden ist.

2) Siehe: Clebsch, übersetzt von S. Venant, S. 607.

der oben erwähnten Arbeit dargelegt hat. Das Verfahren beruht auf der Annahme, daß das Gewicht der bewegenden Last im Vergleich zum Gewicht der Brücke klein sei. Das von Stokes für die Schwingungen des Trägers erhaltene Resultat ist sehr nahe demjenigen, welches das zweite Glied der Annäherungsformel [(29) § 12] ergibt.

Eine genaue Lösung der Aufgabe betreffend die Schwingungen des Trägers in dem Falle, wo man die Masse der sich fortbewegenden Last unbeachtet lassen kann, gab A. N. Krylow.<sup>1)</sup> Seine Lösung, gestützt auf die Integration der Differentialgleichung für die Querschwingungen eines prismatischen Stabes, fällt mit der oben angeführten Lösung [siehe (15) § 12] zusammen, die auf die Anwendung der Normalkoordinaten gegründet ist. Die Ergänzungsdurchbiegung, bedingt durch Schwingungen des Trägers, wird, wie wir schon sahen, durch die Größe  $\alpha = \frac{al}{b\pi}$  bestimmt: die Werte von  $\alpha$  und die ihnen entsprechenden Perioden  $T$  der Grundschwingungen für Brücken verschiedener Stützweiten sind in folgender Tabelle angegeben.

		$l_m$	10	20	40	60	80	100
		$T$ sec	0,046	0,079	0,129	0,181	0,226	0,270
$\alpha$ bei	{	$a = 10$ mt/sec	0,023	0,020	0,016	0,015	0,014	0,0135
		$a = 30$ mt/sec	0,069	0,060	0,048	0,045	0,042	0,040

Bei diesen Berechnungen wurde angenommen, daß die Brücke einen Träger von konstantem Querschnitt darstellt. Die Höhe der Brücke ist gleich 0,1 der Stützweite, die zulässige Spannung 800 kg/cm<sup>2</sup>. Das Gewicht bestimmt man aus Tabellen für das Eigengewicht der Eisenbahnbrücken.<sup>2)</sup> Aus dieser Tabelle ist ersichtlich, daß der Einfluß der Schwingungen des Trägers auf die Größe der maximalen Durchbiegung nicht groß und um so kleiner ist, je größer die Stützweite der Brücke ist. Wird die allgemeine Lösung [(15) § 12] benutzt, so kann man den Einfluß auf die Durchbiegung der sich fortbewegenden Last ungefähr in dem Falle bewerten, wo das Gewicht dieser Last im Vergleich zum Gewichte der Brücke klein ist. Der Druck  $P$ , den die rollende Last  $P$  auf die Brücke ausübt, wird durch folgende Formel bestimmt:

$$P' = P \left( 1 - \frac{1}{g} \frac{d^2 y}{dt^2} \right).$$

1) „Über die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben.“ Math. Annalen Bd. 61.

2) „Der Brückenbau“, Handbuch der Ingenieurwissenschaften, II. Bd. 2. Abschnitt S. 6.

Die erste Annäherung erhalten wir, wenn wir in diesen Ausdruck statt  $y$  seinen Wert [(15) § 12] einsetzen, der unter der Annahme der Bewegung einer konstanten Kraft  $P$  auf dem Träger erhalten wurde. Nimmt man aus den Summen, welche die Lösung (15) bilden, nur je ein erstes Glied, d. h. betrachtet man den Träger als ein System mit einem Freiheitsgrade und setzt  $x = at$ , so wird für die Durchbiegung unter der Last folgender Ausdruck gefunden:

$$y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sin \frac{\pi at}{l} \left( \sin \frac{\pi at}{l} - \alpha \sin \frac{b\pi^2 t}{l^2} \right).$$

Bildet man  $\frac{d^2y}{dt^2}$  und läßt die Glieder fort, die  $\alpha^2$  als Faktor haben, so wird für die Trägheitskräfte der rollenden Last folgender Wert erhalten:

$$(5) \quad -\frac{P}{g} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -P \cdot \frac{2P}{Q} \cdot \alpha \sin \frac{\pi at}{l} \cdot \sin \frac{b\pi^2 t}{l^2}.$$

Wir wollen jetzt die Schwingungen bestimmen, welche durch diese Kräfte bedingt werden.

Wird hier das allgemeine Verfahren angewandt, so erhält man für die verallgemeinerte Kraft  $\Phi$  den Wert

$$\Phi = -P \frac{2P}{Q} \cdot \alpha \sin^2 \frac{\pi at}{l} \sin \frac{b\pi^2 t}{l^2}.$$

Setzt man dieses in die allgemeine Lösung (9) ein, so kommt:

$$y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \cdot \frac{2P}{Q} \cdot \alpha \sin \frac{b\pi^2 t}{l^2} \sin^2 \frac{\pi at}{l}.$$

Die Amplitude dieser Schwingungen wird im Vergleich zu der Amplitude der Schwingungen  $\alpha$ , die der ersten Annäherung entspricht, nur in dem Falle klein sein, wo  $\frac{2P}{Q}$  eine kleine Größe ist. Nur unter dieser Bedingung können wir durch aufeinanderfolgende Annäherungen den Einfluß der Trägheitskräfte der rollenden Last bewerten.

Hierbei müssen wir bemerken, daß bei der Bewertung des Einflusses der Trägheit der auf der Brücke rollenden Lokomotive und der Wagen nur die Masse der beiden Räder berücksichtigt zu werden braucht. Die Massen der übrigen Teile tragen, dank der Wirkung der Federn, nur wenig zu der Schwingung der Brücke bei, da die Frequenz der eigenen Schwingungen der Brücke (wenn die Stützweite nicht zu groß ist) die Frequenz der eigenen Schwingungen der Lokomotive und der Wagen um ein Vielfaches übertrifft.<sup>1)</sup>

1) Siehe die oben erwähnte Arbeit von A. N. Krylow.

Die Betrachtung der beiden Grenzfälle der Wirkung der beweglichen Belastung auf die Brücken gibt Veranlassung zu der Annahme, daß die Vergrößerung der Durchbiegung und des maximalen Biegemomentes, bedingt dadurch, daß die Last mit einer endlichen Geschwindigkeit auf den Träger heraufrückt, im allgemeinen nicht groß und um so kleiner ist, je größer die Stützweite der Brücke ist.

Außer der oben erörterten Ursache wird die Vergrößerung der Durchbiegung durch Stöße an den Schienenstößen, durch Stöße von abgenutzten Bandagen und zuletzt durch die Wirkung der Gegengewichte hervorgerufen. Die Stöße an den Schienenstößen können besonders große Nebenspannungen bei Brücken von kleinen Stützweiten hervorrufen, daher dürfen bei solchen Brücken keine Schienenstöße zugelassen werden.

§ 17. Wir wollen jetzt die Schwingungen betrachten, welche bei Brücken durch die Wirkung der Gegengewichte hervorgerufen werden. Aus der Tabelle des vorhergehenden Paragraphen ist ersichtlich, daß die Schwingungsperioden von Brücken mit einer Spannweite von 60 bis 100 m sich in den Grenzen von  $\frac{1}{6}$  bis  $\frac{1}{4}$  Sekunde halten. Bei bedeutenden Geschwindigkeiten können die mit Gegengewichten versehenen Räder ungefähr in demselben Zeitraum eine volle Umdrehung machen. In Folge davon, daß die Frequenz der freien Schwingungen der Brücke mit der Winkelgeschwindigkeit der Räder, die mit Gegengewichten versehen sind, zusammenfällt, erhält man die Erscheinung der Resonanz. Die Amplitude der Schwingungen, welche durch die Trägheitskräfte der Gegengewichte hervorgerufen werden, kann unter solchen Bedingungen eine sehr bedeutende Größe erreichen. Zur Untersuchung dieser Schwingungen wollen wir hier das allgemeine Verfahren anwenden.

Bezeichnen wir mit  $Q$  das Gewicht des Gegengewichts, mit  $\rho$  die Entfernung seines Schwerpunktes von der Radachse, mit  $a$  die Geschwindigkeit der Lokomotive, und mit  $r$  den Halbmesser des Rades, so wird die dem Gegengewicht entsprechende Zentrifugalkraft sein:

$$F = \frac{Q}{g} \frac{a^2}{r^2} \cdot \rho.$$

Bei den vorhandenen Dimensionen der Gegengewichte und bei den üblichen Geschwindigkeiten der Bewegung kann die Kraft  $F$  für Schnellzugslokomotiven 5000 kg und für Güterzugslokomotiven 3500 kg erreichen. Die Kraft, welche hier die Schwingungen der Brücke erzwingt, ist die Vertikalkomponente der Kraft  $F$ . Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß im Augenblicke des Aufgangs des Rades

auf die Brücke das Gegengewicht die niedrigste Lage einnimmt und bezeichnen wir mit  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit des Rades, dann wird die uns beschäftigende Vertikalkomponente der Kraft  $F'$  sein:

$$(6) \quad F' \cos \omega t.$$

Die verallgemeinerte Kraft  $\Phi_n$ , welche der Koordinate  $\varphi_n$  entspricht, wird sich durch folgende Formel darstellen:

$$\Phi_n = F' \cos \omega t \sin \frac{n\pi a t}{l}.$$

Um die Schwingungen zu erhalten, braucht man nur diesen Wert der verallgemeinerten Kraft in die allgemeine Lösung (9) [§ 9] einzusetzen. Führt man die dort angegebenen Integrationen aus und führt zur Abkürzung die Bezeichnungen ein

$$\frac{a l}{b \pi} = \alpha; \quad \frac{\omega l^2}{b \pi^2} = \beta,$$

so erhält man für die Durchbiegung  $y$  folgenden allgemeinen Ausdruck:

$$(8) \quad y = \frac{F'l^3}{EJ\pi^4} \sum_{i=1}^{i=\infty} \sin \frac{i\pi x}{l} \left\{ \frac{\sin \left( \frac{i\pi a}{l} + \omega \right) t}{i^4 - (\beta + i\alpha)^2} + \frac{\sin \left( \frac{i\pi a}{l} - \omega \right) t}{i^4 - (\beta - i\alpha)^2} + \frac{\alpha}{i} \left[ \frac{\sin \frac{i^2 b \pi^2}{l^2} t}{(i\alpha)^2 - (i^2 - \beta)^2} + \frac{\sin \frac{i^2 b \pi^2}{l^2} t}{(i\alpha)^2 - (i^2 + \beta)^2} \right] \right\}.$$

Setzen wir in dieser Lösung  $\omega = \beta = 0$ , so kommen wir zu dem Ausdrucke für die Schwingungen im Falle der Bewegung der konstanten Kraft  $F'$  mit einer konstanten Geschwindigkeit auf dem Träger: die Lösung (8) fällt mit der Lösung (15) [§ 12] zusammen.

Setzen wir  $\alpha = 0$  und nehmen wir an, daß  $\beta$  klein ist, so erhalten wir:

$$y = \frac{2 F'l^3}{EJ\pi^4} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \cdot \sin \frac{i\pi a t}{l}}{i^4},$$

d. h. die statische Durchbiegung bei der Bewegung der Kraft  $F' \cdot \cos \omega t$ . Diese Formel kann man bei Brücken mit kleiner Stützweite anwenden.

Oben wurde bereits erwähnt, daß bei großen Geschwindigkeiten der Lokomotive die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ungefähr von derselben Größe sein kann, wie die Frequenz der Grundschwingungen der Brücke  $\frac{b\pi^2}{l^2}$ , folglich ist die Größe  $\beta$  nahe Eins. Wir wollen für diesen Fall die Summe der Glieder der Lösung (8) untersuchen, welche  $i = 1$  entsprechen, da bei  $\beta$  nahe Eins gerade nur diese Glieder eine überwiegende

Bedeutung haben. Nach einigen Umformungen kann die Summe dieser Glieder in folgender Form dargestellt werden:

$$\begin{aligned} & \frac{Fl^3}{2EJ\pi^4} \sin \frac{\pi x}{l} \left\{ \sin \left( \frac{\pi a}{l} + \omega \right) t \left( \frac{1}{1 + \alpha + \beta} + \frac{1}{1 - \alpha - \beta} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \sin \left( \frac{\pi a}{l} - \omega \right) t \left( \frac{1}{1 + \alpha - \beta} + \frac{1}{1 - \alpha + \beta} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \sin \frac{b\pi^2 t}{l^2} \left( \frac{1}{1 + \alpha - \beta} + \frac{1}{-1 + \alpha + \beta} + \frac{1}{1 + \alpha + \beta} + \frac{1}{-1 + \alpha - \beta} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Wenn sich  $\beta$  der Eins nähert, so überwiegt die Summe der Glieder:

$$(9) \frac{Fl^3}{2EJ\pi^4} \sin \frac{\pi x}{l} \left\{ \frac{\sin \left( \frac{\pi a}{l} + \omega \right) t}{1 - \alpha - \beta} + \frac{\sin \left( \frac{\pi a}{l} - \omega \right) t}{1 + \alpha - \beta} - \frac{\sin \frac{b\pi^2 t}{l^2}}{1 - \alpha - \beta} + \frac{\sin \frac{b\pi^2 t}{l^2}}{1 + \alpha - \beta} \right\}.$$

Setzt man

$$\beta = 1 - \alpha, \text{ d. h. } \omega = \frac{b\pi^2}{l^2} - \frac{\pi a}{l},$$

so kann die Summe der Glieder (9) in folgender Form dargestellt werden:

$$\begin{aligned} & \frac{Fl^3}{2EJ\pi^4} \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \left\{ \frac{\sin \left( \frac{\pi a}{l} + \omega \right) t - \sin \frac{b\pi^2 t}{l^2}}{1 - \alpha - \beta} + \frac{\sin \left( \frac{\pi a}{l} - \omega \right) t + \sin \frac{b\pi^2 t}{l^2}}{1 + \alpha - \beta} \right\} = \\ & = \frac{Fl^3}{2EJ\pi^4} \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \left\{ -t \cdot \frac{b\pi^2}{l^2} \cdot \cos \frac{b\pi^2 t}{l^2} + \frac{1}{\alpha} \cdot \sin \frac{\pi a t}{l} \cos \omega t \right\}. \end{aligned}$$

Die diesen Gliedern entsprechende Durchbiegung in der Mitte  $y_1$  erhalten wir bei der Annahme  $x = \frac{l}{2}$  zu:

$$y_1 = \frac{2Fl^3}{EJ\pi^4} \cdot \frac{1}{4\alpha} \left\{ -t \frac{a\pi}{l} \cdot \cos \frac{b\pi^2 t}{l^2} + \sin \frac{\pi a t}{l} \cos \omega t \right\}.$$

Bei  $t = \frac{l}{2a}$ , d. h. wenn die Räder mit den Gegengewichten die Mitte der Stützweite erreicht haben, finden wir:

$$\begin{aligned} (y_1)_{t=\frac{l}{2a}} &= \frac{2Fl^3}{EJ\pi^4} \cdot \frac{1}{4\alpha} \left\{ -\frac{\pi}{2} \cos \frac{b\pi^2 t}{l^2} + \cos \omega t \right\} = \\ &= \frac{2Fl^3}{EJ\pi^4} \cdot \frac{1}{4\alpha} \left\{ -\frac{\pi}{2} \cos \frac{b\pi^2 t}{l^2} + \cos \left( \frac{b\pi^2}{l^2} - \frac{\pi a}{l} \right) t \right\} = \\ &= \frac{2Fl^3}{EJ\pi^4} \cdot \frac{1}{4\alpha} \left\{ -\frac{\pi}{2} \cos \frac{b\pi^2 t}{l^2} + \cos \left( \frac{b\pi^2 t}{l^2} - \frac{\pi}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Im ungünstigsten Falle wird die Amplitude der Schwingungen in diesem Augenblicke sein:

$$(10) \quad \frac{2Fl^3}{EJ\pi^4} \cdot \frac{\pi}{8\alpha}.$$

Bei  $t = \frac{l}{\alpha}$  finden wir für die Amplitude der Schwingungen folgenden Wert:

$$(11) \quad \frac{2Fl^3}{EJ\pi^4} \cdot \frac{\pi}{4\alpha}.$$

Die erhaltene Amplitude ist zweimal kleiner als diejenige, die bei der Wirkung der Kraft  $F' \cos \frac{b\pi^2 t}{l^2}$  erzielt wird, die in der Mitte der Stützweite im Zeitraume  $\frac{l}{\alpha}$  (siehe § 10) wirkt.

Wie aus der Tabelle des § 16 ersichtlich ist, schwanken die Größen  $\alpha$ , bei denen man die Resonanz für Schnellzugslokomotiven erwarten kann, zwischen den Grenzen  $\frac{1}{20} - \frac{1}{35}$  (bei einem Umfange der führenden Räder von 6 m), für Güterlokomotiven hat das entsprechende  $\alpha$  einen halb so großen Wert (bei einem Umfange der führenden Räder von 3 m). Zieht man diese Werte von  $\alpha$  in Betracht, so schließt man auf Grund der Formel (11), daß für Schnellzugslokomotiven die maximale Durchbiegung, hervorgerufen durch die Gegengewichte, 15—20 mal die statische Durchbiegung durch die Kraft  $F'$  (bis 5 Ton.) überwiegen kann, welche sich in der Mitte der Stützweite befindet. Dieses Ergebnis erhielten wir, indem wir die Dämpfung außer acht ließen.

Dank den Widerständen wird die Amplitude der Schwingungen kleiner, aber dennoch ist beim Vorhandensein der Resonanz der Einfluß der Gegengewichte auf die Durchbiegung sehr bedeutend, und gerade diese Ursache kann bei Brücken mit großer Stützweite starke Schwingungen hervorrufen.

\* \* \*

Die angeführten Beispiele genügen, um die Anwendbarkeit des allgemeinen Verfahrens, gestützt auf die Benützung der Normalkoordinaten, für die Lösung einer ganzen Reihe wichtiger technischer Aufgaben zu zeigen. Im Falle der Wirkung von Einzelkräften ist dieses Verfahren einfacher als das Verfahren, das sich auf die Integration der entsprechenden Differentialgleichungen stützt.

Ferner hoffen wir, dieses Verfahren zur Untersuchung der bei Stößen entstehenden Schwingungen anwenden zu können.

## Beiträge zur Kinematik. starrer und affin-veränderlicher Systeme, insonderheit über die Windung der Bahnen der Systempunkte.

Von R. MEHMKE in Stuttgart.

(Fortsetzung von S. 94.)

### II. Beweise.

#### 5. Bewegung in der Ebene.

Die Sätze in Nr. 2 über die Krümmung der Punktbahnen bei ebener Bewegung eines affin-veränderlichen Systems  $\Sigma$  will ich zuerst beweisen.

Bedeutet  $\boldsymbol{x}$  den Träger eines beliebigen Systempunktes, d. h. den Vektor von einem willkürlichen festen Ursprung nach diesem Punkt, und bezeichnet man die Ableitungen nach der Zeit durch Striche, so ist bekanntlich  $\boldsymbol{x}'$  die als Vektor aufgefaßte Geschwindigkeit des Punktes  $\boldsymbol{x}$ , und  $\boldsymbol{x}''$  seine als Vektor aufgefaßte Beschleunigung. Die Länge eines Vektors durch das Vorsetzen von „mod“ bezeichnend, hat man

$$\text{mod } \boldsymbol{x}' = \frac{ds}{dt} = v.$$

Für die Normalbeschleunigung  $v^2/\rho$  läßt sich wegen  $\rho = ds/d\tau$  schreiben:

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\tau}{dt},$$

wie bekannt. Das äußere Produkt<sup>1)</sup>  $[\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}'']$  ist offenbar gleich dem Produkt aus der Länge von  $\boldsymbol{x}'$  und der Normalbeschleunigung, also wird

$$(5) \quad \text{Normalbeschleunigung} = \frac{v^2}{\rho} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{[\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}'']}{\text{mod } \boldsymbol{x}'}$$

Denkt man sich einmal die Geschwindigkeiten aller Punkte von  $\Sigma$ , das andre Mal ihre Beschleunigungen nach Größe und Richtung an den Ursprung angetragen, so sind die Systeme der sich ergebenden Endpunkte, die mit  $\Sigma^I$  und  $\Sigma^{II}$  bezeichnet seien, nach einem bekannten Satz<sup>2)</sup> affin zu  $\Sigma$ . Es mögen  $\mathfrak{U}_1$  und  $\mathfrak{U}_2$  die Symbole sein, die, wenn man sie vor irgendeinen Vektor von  $\Sigma$  setzt, diesen Vektor in den ent-

1) In der Ebene ist das äußere Produkt zweier Vektoren eine Zahlgröße gleich dem Inhalt des durch diese Vektoren bestimmten Parallelogramms, mit bestimmtem Vorzeichen genommen.

2) R. Mehmke, Zivilingenieur Bd. 29 (1883), S. 492. Herr L. Burmester nennt die Systeme  $\Sigma^I$  und  $\Sigma^{II}$  „Abtragsysteme“ (s. diese Zeitschrift Bd. 47, 1902, S. 129).

sprechenden Vektor von  $\Sigma^I$  bzw.  $\Sigma^{II}$  verwandeln.<sup>1)</sup> Ist z. B.  $a$  ein zweiter beliebiger Systempunkt, also der Vektor von  $a$  nach  $x$ , d. h.  $(x - a)$ , ein beliebiger, dem System  $\Sigma$  angehöriger Vektor, so kann man für die entsprechenden Vektoren von  $\Sigma^I$  und  $\Sigma^{II}$ , die offenbar gleich  $(x' - a')$  bzw.  $(x'' - a'')$  sind, schreiben:

$$(6) \quad x' - a' = \mathfrak{U}_1(x - a),$$

$$(7) \quad x'' - a'' = \mathfrak{U}_2(x - a).$$

Setzt man in (6) an Stelle von  $a$  den Pol  $p$ , für den  $p' = 0$  ist, so kommt:

$$x' = \mathfrak{U}_1(x - p).$$

Betrachtet man lauter Punkte eines und desselben Polstrahls und setzt man einen zu ihm parallelen Vektor von der Länge 1 gleich  $e$ , bezeichnet man ferner die (mit bestimmtem Vorzeichen genommene) Länge der Strecke  $px$  durch  $\overline{px}$ , dann wird

$$x - p = \overline{px} \cdot e,$$

also kommt nach Einsetzen in die vorhergehende Gleichung:

$$(8) \quad x' = \overline{px} \cdot \mathfrak{U}_1 e,$$

woraus

$$(9) \quad v = \text{mod } x' = \overline{px} \cdot \text{mod } \mathfrak{U}_1 e$$

und

$$(10) \quad \frac{x'}{\text{mod } x'} = \frac{\mathfrak{U}_1 e}{\text{mod } \mathfrak{U}_1 e}.$$

Wenn man statt des willkürlichen Punktes  $a$  den zweiten Schnittpunkt  $c$  des Polstrahls  $px$  mit der Wendekurve in die Gleichung (7) einsetzt<sup>2)</sup>, so erhält man

$$x'' - c'' = \mathfrak{U}_2(x - c),$$

1) Mit Graßmann betrachten wir solche Symbole als Faktoren. Man kann sie unter anderem als Vektorbrüche darstellen, d. h. als Brüche mit mehreren Zählern und ebensovielen Nennern, wobei beliebige Vektoren von  $\Sigma$  als Nenner, die entsprechenden Vektoren von  $\Sigma^I$  bzw.  $\Sigma^{II}$  als die zugehörigen Zähler dienen. In der Ebene genügen zwei Nenner, die in beliebigen nicht parallelen Vektoren von  $\Sigma$  bestehen. (Vgl. H. Graßmann, Ausdehnungslehre von 1862, S. 241 — Werke I, 2. S. 240 Nr. 377).

2) Wenn die „Abtragsysteme“  $\Sigma^I$  und  $\Sigma^{II}$  gegeben sind, so läßt sich  $c$  auf folgende Weise konstruieren. Man sucht zur Verbindungslinie  $px$ , die (als Gerade von  $\Sigma$ )  $G$  heißen möge, die entsprechende Gerade  $G^I$  in  $\Sigma^I$  (die offenbar durch den Ursprung geht), betrachtet nun  $G^I$  als Gerade von  $\Sigma^{II}$  — sie sei als solche mit  $H^{II}$  bezeichnet — und sucht hierzu die entsprechende Gerade  $H$  von  $\Sigma$ , (die durch den Beschleunigungspol  $p_2$  gehen wird, als den Punkt von  $\Sigma$ , der dem Ursprung als Punkt von  $\Sigma^{II}$  entspricht). Der Schnittpunkt von  $G$  und  $H$  ist der gesuchte Punkt  $c$ , denn da die Geschwindigkeit  $c'$  und die Beschleunigung  $c''$  von  $c$  nach dem Antragen an den Ursprung in eine und dieselbe Gerade  $G^I = H^{II}$  fallen, so sind sie parallel. Offenbar sind  $G$  und  $H$  entsprechende Strahlen zweier projektiver Strahlenbüschel mit den Scheiteln  $p$  und  $p_2$ , womit man einen Beweis dafür hat, daß der Ort von  $c$ , die Wendekurve, ein durch  $p$  und  $p_2$  gehender Kegelschnitt ist.

oder da

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} = \overline{c\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{e}$$

ist:

$$(11) \quad \boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{c}'' + \overline{c\boldsymbol{x}} \cdot \mathfrak{U}_2 \boldsymbol{e}.$$

Nun sind die Geschwindigkeiten aller Punkte eines Polstrahls parallel, insbesondere  $\boldsymbol{x}'$  und  $\boldsymbol{c}'$ ; aber der Punkt  $c$  ist dadurch ausgezeichnet, daß bei ihm die Geschwindigkeit  $\boldsymbol{c}'$  und die Beschleunigung  $\boldsymbol{c}''$  parallel sind; folglich sind auch  $\boldsymbol{x}'$  und  $\boldsymbol{c}''$  parallel und das äußere Produkt dieser beiden Vektoren verschwindet. Es fällt deshalb bei der äußeren Multiplikation der Gleichungen (10) und (11) das erste Glied rechts fort, und man erhält:

$$(12) \quad \frac{[\boldsymbol{x}' \boldsymbol{c}'']}{\text{mod } \boldsymbol{x}'} = \overline{c\boldsymbol{x}} \cdot \frac{[\mathfrak{U}_1 \boldsymbol{e} \mathfrak{U}_2 \boldsymbol{e}]}{\text{mod } \mathfrak{U}_1 \boldsymbol{e}}.$$

Mit der Abkürzung

$$(13) \quad \frac{[\mathfrak{U}_1 \boldsymbol{e} \mathfrak{U}_2 \boldsymbol{e}]}{\text{mod } \mathfrak{U}_1 \boldsymbol{e}} = \alpha$$

gibt das die in Nr. 2 behauptete Gleichung

$$\text{Normalbeschleunigung} = \alpha \cdot \overline{c\boldsymbol{x}},$$

wobei  $\alpha$  gemäß (13) in der Tat nur vom Vektor  $\boldsymbol{e}$  abhängt, d. h. von der Richtung des Polstrahls, nicht von der Lage des Punktes  $\boldsymbol{x}$  in ihm.

Für den Krümmungshalbmesser erhält man daher

$$\varrho = \frac{v^2}{\alpha \cdot \overline{c\boldsymbol{x}}}$$

oder wegen (9) und (13):

$$\varrho = \frac{\overline{p\boldsymbol{x}^2}}{\overline{c\boldsymbol{x}}} \cdot \frac{(\text{mod } \mathfrak{U}_1 \boldsymbol{e})^3}{[\mathfrak{U}_1 \boldsymbol{e} \mathfrak{U}_2 \boldsymbol{e}]}.$$

Man findet so in der Tat, wie in Nr. 2 unter Gleichung (4) angegeben wurde, für  $\varrho$  einen Ausdruck der Form

$$\alpha' \frac{\overline{p\boldsymbol{x}^2}}{\overline{c\boldsymbol{x}}},$$

wenn man zur Abkürzung

$$(15) \quad \frac{(\text{mod } \mathfrak{U}_1 \boldsymbol{e})^3}{[\mathfrak{U}_1 \boldsymbol{e} \mathfrak{U}_2 \boldsymbol{e}]} = \alpha'$$

setzt.

Um Konstruktionen ausführen zu können, denken wir uns zuerst vom Pol in jedem Polstrahl im einen oder andern Sinn eine Strecke gleich dem reziproken Wert von  $\text{mod } \mathfrak{U}_1 \boldsymbol{e}$  abgetragen. Der Ort des Endpunkts  $d$  ist eine Ellipse; denn gemäß der Erklärung hat man

$$(16) \quad \overline{pd} = \frac{1}{\text{mod } \mathfrak{U}_1 \boldsymbol{e}},$$

also wird die Größe der Geschwindigkeit von  $d$  nach Gleichung (9):

$$\text{mod } d' = \overline{pd} \cdot \text{mod } u_1 e$$

oder wegen (16):

$$\text{mod } d' = 1,$$

der Ort des Punktes  $d$  ist folglich die Kurve von  $\Sigma$ , die dem um den Ursprung mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreis als Kurve von  $\Sigma^1$  entspricht, also eine Ellipse.<sup>1)</sup> Sie werde die *Hilfsellipse*  $F_1$  genannt.

Weiter denken wir uns in jedem Polstrahl, ebenfalls vom Pol aus und im einen oder andern Sinn, eine Strecke abgetragen gleich der Quadratwurzel aus dem reziproken Wert entweder von  $[u_1 e u_2 e]$ , oder von  $-[u_1 e u_2 e]$ , je nachdem das äußere Produkt  $[u_1 e u_2 e]$  positiv oder negativ ist. Für den Endpunkt  $f$  der abgetragenen Strecke erhält man der Erklärung zufolge:

$$(17) \quad \overline{pf^2} = \frac{\pm 1}{[u_1 e u_2 e]}.$$

Das gibt wegen

$$\overline{pf} u_1 e = u_1 (f - p)$$

und

$$\overline{pf} u_2 e = u_2 (f - p)$$

für den Träger  $f$  des Endpunkts die quadratische Gleichung

$$(18) \quad [u_1 (f - p) \cdot u_2 (f - p)] = \pm 1,$$

die einen Kegelschnitt vorstellt, der  $p$  zum Mittelpunkt hat. Er heiße der *Hilfskegelschnitt*  $K_{1,2}$ . Jetzt nimmt der Ausdruck (14) für den Krümmungshalbmesser die Form an:

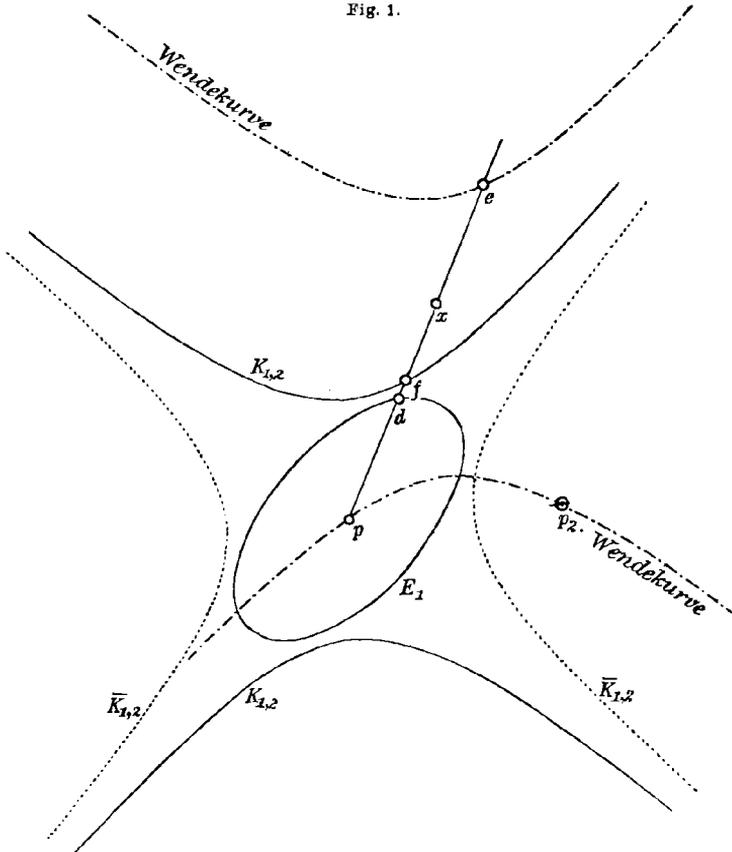
$$(19) \quad \rho = \pm \frac{\overline{px^2} \cdot \overline{pf^2}}{\overline{cx} \cdot p \overline{d^3}}.$$

Über den Hilfskegelschnitt sei folgendes bemerkt. Wenn für jede Richtung von  $e$  das Vorzeichen von  $[u_1 e u_2 e]$  dasselbe ist, so besteht er in einer Ellipse, weil dann  $\overline{pf}$  nie unendlich wird. Gibt es aber zwei reelle getrennte Polstrahlen, für die  $[u_1 e u_2 e]$  verschwindet, so hat dieses äußere Produkt in dem einen Paar von Scheitelwinkeln, die jene Polstrahlen miteinander bilden, einen positiven Wert, in dem andern Paar von Scheitelwinkeln einen negativen Wert, so daß man zwei Hyperbeln  $K_{1,2}$  und  $\overline{K}_{1,2}$  mit den fraglichen Polstrahlen als gemeinsamen Asymptoten erhält. Der Kürze wegen soll auch dann nur von

1) Wie übrigens wohlbekannt ist, s. L. Burmester, diese Zeitschrift Bd. 19 (1874), S. 472, Satz VII.

„dem“ Hilfskegelschnitt gesprochen werden. (In Figur 1 ist ein solcher Fall dargestellt. Die Hyperbel, die positiven Werten von  $[\mathfrak{u}_1 e \mathfrak{u}_2 e]$  entspricht, ist voll ausgezogen, die andere punktiert. Die Wendekurve ist strich-punktiert gezeichnet). Fallen die genannten beiden Polstrahlen in einen zusammen, so entartet, wie man leicht einsieht, der Hilfskegelschnitt zu einem Paar von parallelen Geraden, die symmetrisch zum

Fig. 1.



ausgezeichneten Polstrahl sind. Die Wendekurve hat dieselben unendlich-fernen Punkte, wie der Hilfskegelschnitt  $K_{1,2}$ . Für den (vom Pol verschiedenen) Punkt  $c$  der Wendekurve, der in dem zu  $e$  parallelen Polstrahl liegt, hat man nämlich vermöge (8):

$$c' = \bar{p}c \cdot \mathfrak{u}_1 e,$$

und (7) ergibt für  $x = c$ ,  $a = p$ :

$$c'' = p'' + \bar{p}c \cdot \mathfrak{u}_2 e.$$

Durch Nullsetzen des äußeren Produkts  $[e'e'']$  erhält man daher nach Weglassen des Faktors  $\bar{p}c$ , der gleich Null gesetzt den Pol geben würde, zur Bestimmung von  $c$  die lineare Gleichung für  $\bar{p}c$ :

$$(20) \quad [u_1 e p''] + \bar{p}c \cdot [u_1 e u_2 e] = 0.$$

Somit wird  $\bar{p}c$  ebenfalls (wie  $\bar{p}f$ ) unendlich, wenn  $[u_1 e u_2 e]$  verschwindet.<sup>1)</sup>

Nach dem Vorhergehenden sind die Wendekurve und der Hilfskegelschnitt  $K_{1,2}$ , wenn dieser nicht zerfällt, entweder beide Ellipsen oder beide Hyperbeln mit parallelen Asymptoten. Besteht aber der Hilfskegelschnitt in einem Paar paralleler Geraden, so ist (von Sonderfällen abgesehen) die Wendekurve eine Parabel, deren Achse parallel zu jenem Geradenpaar verläuft. In den letzten beiden Fällen verhalten sich, was die Normalbeschleunigung und die Bahnkrümmung anlangt, die Systempunkte, die auf einem Polstrahl mit unendlich fernem  $c$  (kurz gesagt auf einer Asymptote von  $K_{1,2}$ ) liegen, anders als die übrigen Systempunkte. Bezeichnet nämlich  $x$  einen derartigen Systempunkt und setzt man in (7) statt des willkürlichen Systempunkts  $\alpha$  den Pol  $p$ , so kommt

$$x'' - p'' = u_2(x - p)$$

oder wegen

$$x - p = \bar{p}x \cdot e,$$

(20)

$$x'' = p'' + \bar{p}x \cdot u_2 e.$$

Bei der Bildung des äußeren Produkts dieser Gleichung mit (10) fällt das zweite Glied rechts fort, weil nach der Voraussetzung jetzt  $[u_1 e u_2 e] = 0$  ist. Somit erhält man für die Normalbeschleunigung von  $x$  den konstanten, d. h. von der Lage dieses Punkts in der fraglichen Assymptote unabhängigen Wert

$$\frac{[u_1 e p'']}{\text{mod } u_1 e},$$

der, wie man sieht, gleich der Projektion der Beschleunigung  $p''$  des Poles auf die Bahnnormale von  $x$  ist. Der Krümmungshalbmesser der Bahn ist in diesem Fall lediglich proportional  $v^2$  oder  $\bar{p}x^2$ , dem Quadrat des Abstands, den der Systempunkt vom Pol hat.

Bei einem ähnlich-veränderlichen System besteht die Hilfsellipse  $E_1$  (als Ort der Systempunkte, deren Geschwindigkeit die konstante Länge  $v = 1$  hat) in einem Kreis um den Pol als Mittelpunkt. Auch der

1) Den Sonderfall, in welchem für eine der beiden ausgezeichneten Richtungen von  $e$  auch  $[u_1 e p'']$  verschwindet, also  $\bar{p}c$  unbestimmt wird und die Wendekurve in ein Geradenpaar ausartet, wollen wir hier nicht weiter verfolgen.

Hilfskegelschnitt  $K_{1,2}$  muß ein solcher Kreis sein, weil die Wendekurve in diesem Fall ein Kreis ist. Also sind jetzt  $\overline{pd}$ ,  $\overline{pf}$  und damit  $\alpha$ ,  $\alpha'$  unabhängig von der Richtung des Polstrahls  $px$ .

### 6. Bewegung im Raum. Konstruktion eines Wendestrahls und der ausgezeichneten Punkte in ihm.

Es handelt sich zunächst darum, für irgendeine Lage eines stetig bewegten räumlichen affin-veränderlichen Systems  $\Sigma$  den durch einen beliebigen Systempunkt  $x$  gehenden Wendestrahls und die darin liegenden Punkte  $a$  und  $b$  der Wendekurve sowie den Punkt  $c$  des Wendestrahls, dessen Bahn in  $c$  eine stationäre Schmiegungeebene hat, auf möglichst einfache Weise zu konstruieren. Wir setzen voraus, daß nicht nur die (schon bei der ebenen Bewegung benützten) „Abtragsysteme“  $\Sigma^I$  und  $\Sigma^{II}$  der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen gegeben seien, sondern auch das ebenfalls mit  $\Sigma$  affine Abtragsystem  $\Sigma^{III}$ , das sich ergibt, wenn man sich die Überbeschleunigungen (Geschwindigkeiten dritter Ordnung) aller Punkte von  $\Sigma$  nach Länge und Richtung an den Ursprung angetragen denkt, wobei wieder die Endpunkte der erhaltenen Strecken den betreffenden Punkten von  $\Sigma$  zuzuordnen sind. Die Verbindungsebene der an den Ursprung angetragenen Geschwindigkeit  $x'$  und Beschleunigung  $x''$  des Punktes  $x$ , als Ebene von  $\Sigma^I$  angesehen, heiße  $A^I$ ; dieselbe Ebene, als Ebene von  $\Sigma^{II}$  betrachtet, heiße  $B^{II}$ . Die entsprechenden Ebenen von  $\Sigma$  seien  $A$  und  $B$ . Wir nehmen an, daß sie nicht zusammenfallen. Ihre Schnittgerade ist der gesuchte, durch  $x$  gehende Wendestrahls, denn jeder Punkt dieser Geraden hat die Eigenschaft, daß seine Geschwindigkeit und seine Beschleunigung einer bestimmten Ebene parallel sind, nämlich  $A^I = B^{II}$ , also beschreiben die fraglichen Punkte augenblicklich alle Bahnstellen mit parallelen Schmiegungeebenen. Betrachtet man diese Ebene  $A^I = B^{II}$  als dem System  $\Sigma^{III}$  angehörig und bezeichnet sie als solche noch mit  $\Gamma^{III}$ , so entspricht ihr in  $\Sigma$  eine bestimmte Ebene  $\Gamma$ . Wir nehmen an, sie gehe nicht durch den Schnitt von  $A$  und  $B$ . Der Schnittpunkt von  $\Gamma$  mit dem Wendestrahls (also der Schnittpunkt der drei Ebenen  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ ) ist der gesuchte Punkt  $c$ , denn es sind für ihn die Geschwindigkeiten der ersten drei Ordnungen parallel zu einer und derselben Ebene  $A^I = B^{II} = \Gamma^{III}$ . Den Ort von  $c$  wollen wir mit  $\Phi_{1,2,3}$  bezeichnen.<sup>1)</sup>

1) Da  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  entsprechende Ebenen dreier projektiver Bündel sind, deren Scheitel in den Polen der ersten drei Ordnungen:  $p = p_1$ ,  $p_2$  und  $p_3$  bestehen, nämlich in den Punkten von  $\Sigma$ , die der Reihe nach dem Ursprung als Punkt von  $\Sigma^I$ ,  $\Sigma^{II}$  und  $\Sigma^{III}$  entsprechen, so findet man den bekannten Satz bestätigt, daß  $\Phi_{1,2,3}$  eine durch die genannten drei Pole hindurch gehende Fläche dritter Ordnung ist.

Dem betrachteten Wendestrahl, der als Gerade von  $\Sigma$  mit  $S$  bezeichnet sei, entspreche in  $\Sigma^I$  die Gerade  $S^I$  und in  $\Sigma^{II}$  die Gerade  $S^{II}$  (Fig. 2).  $S^I$  und  $S^{II}$  fallen beide in die Ebene  $A^I = B^{II}$ . Ein in dieser durch den Ursprung gezogener veränderlicher Strahl treffe  $S^I$  im Punkt  $s^I$ ,  $S^{II}$  im Punkt  $t^{II}$ . Dem Punkt  $s^I$  als Punkt von  $\Sigma^I$  entspreche in  $\Sigma$  der Punkt  $s$ , ebenso dem Punkt  $t^{II}$  als Punkt von  $\Sigma^{II}$  der Punkt  $t$  in  $\Sigma$ . Die Punkte  $s$  und  $t$ , die beide auf dem Wendestrahle  $S$  liegen, haben infolge der Konstruktion die Eigenschaft, daß die Geschwindigkeit von  $s$  parallel mit der Beschleunigung von  $t$  ist. Ordnet man  $s$  und  $t$  einander zu, so ergeben sich zwei projektive Punktreihen mit demselben Träger  $S$ . Ihre Doppelpunkte  $a$  und  $b$  sind offenbar die gesuchten, in  $S$  liegenden Punkte der Wendekurve, denn jeder von ihnen ist nach dem Vorhergehenden so beschaffen, daß seine Geschwindigkeit und seine Beschleunigung parallel sind.

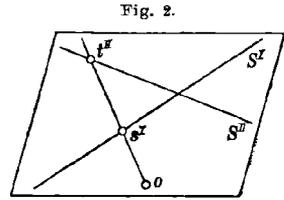


Fig. 2.

Es ist (wie schon in Nr. 5) immer vorausgesetzt, daß die Abtragungssysteme  $\Sigma^I$ ,  $\Sigma^{II}$  und  $\Sigma^{III}$  von allgemeinsten Art seien. Auf die Besonderheiten einzugehen, die sich zeigen können, wenn unter diesen Systemen solche vorkommen, die in ein ebenes System, oder eine gerade Punktreihe, oder einen einzelnen Punkt ausgeartet sind, würde hier zu weit führen.

### 7. Binormal-Überbeschleunigung.

$U_1$  und  $U_2$  sollen wieder dasselbe bedeuten, wie in Nr. 5, nämlich symbolische Faktoren, die jeden Vektor von  $\Sigma$  in den entsprechenden Vektor von  $\Sigma^I$  bzw.  $\Sigma^{II}$  verwandeln. Auch bezeichne  $x$  wieder den Träger des beliebigen Systempunkts  $x$ , also die nach Länge und Richtung aufgefaßte Strecke vom festen Ursprung nach jenem Punkt. Ferner sei  $e$  ein Vektor von der Länge 1 parallel zu dem durch  $x$  gehenden Wendestrahle. Für die Vektoren  $U_1 e$  und  $U_2 e$  von  $\Sigma^I$  und  $\Sigma^{II}$ , die dem Vektor  $e$  von  $\Sigma$  entsprechen, wollen wir zur Vereinfachung in der Regel schreiben:

$$U_1 e = e^I, \quad U_2 e = e^{II}.$$

Es sind  $e^I$  und  $e^{II}$  parallel zu derselben Ebene  $A^I = B^{II}$  (vgl. Nr. 6) wie  $x'$  und  $x''$ , die Geschwindigkeit und die Beschleunigung von  $x$ . Im Raum ist das Graßmannsche äußere Produkt zweier Vektoren gleich einer gerichteten Fläche (einem *Bivektor* nach der Ausdrucksweise von Peano), nämlich gleich dem durch die beiden Vektoren be-

stimmtes Parallelogramm nach Stellung, Flächeninhalt und Sinn. Die vorhergehende Betrachtung hat gezeigt, daß die Bivektoren  $[\mathbf{x}' \mathbf{x}'']$  und  $[\mathbf{e}^I \mathbf{e}^{II}]$  parallel sind.<sup>1)</sup> Es folgt daraus, wenn man den Flächeninhalt eines Bivektors durch Vorsetzen von „mod“ bezeichnet, die Gleichung:

$$(21) \quad \frac{[\mathbf{x}' \mathbf{x}'']}{\text{mod } [\mathbf{x}' \mathbf{x}'']} = \frac{[\mathbf{e}^I \mathbf{e}^{II}]}{\text{mod } [\mathbf{e}^I \mathbf{e}^{II}]},$$

vorausgesetzt, daß man die Flächeninhalte der fraglichen beiden Bivektoren mit demselben Vorzeichen oder mit verschiedenen Vorzeichen versieht, je nachdem diese Bivektoren gleichen Sinn haben oder nicht.

Weiter bezeichne  $\mathfrak{U}_3$  den symbolischen Faktor, der jeden beliebigen Vektor von  $\Sigma$  in den entsprechenden Vektor von  $\Sigma^{III}$  verwandelt. Dann ist, da  $\mathbf{x}'''$  die Geschwindigkeit dritter Ordnung oder Überbeschleunigung des beliebigen Systempunkts  $\mathbf{x}$  als Vektor vorstellt und da  $(\mathbf{x} - \mathbf{c})$  und  $(\mathbf{x}''' - \mathbf{c}''')$  entsprechende Vektoren von  $\Sigma$  und  $\Sigma^{III}$  sind:

$$\mathbf{x}''' - \mathbf{c}''' = \mathfrak{U}_3 (\mathbf{x} - \mathbf{c}).$$

Aber

$$\mathbf{x} - \mathbf{c} = \overline{c\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e},$$

also:

$$\mathbf{x}''' = \mathbf{c}''' + \overline{c\mathbf{x}} \cdot \mathfrak{U}_3 \mathbf{e},$$

oder wenn man statt  $\mathfrak{U}_3 \mathbf{e}$  die Abkürzung  $\mathbf{e}^{III}$  anwendet:

$$(22) \quad \mathbf{x}''' = \mathbf{c}''' + \overline{c\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}^{III}.$$

Das Graßmannsche äußere Produkt dreier Vektoren ist gleich dem (mit bestimmtem Vorzeichen genommenen) Rauminhalt des durch die Vektoren bestimmten „Spates“ oder Parallelepipeds. Da die Vektoren  $\mathbf{e}^I$ ,  $\mathbf{e}^{II}$  und  $\mathbf{e}^{III}$  parallel zu einer und derselben Ebene  $\mathbf{A}^I = \mathbf{B}^{II} = \mathbf{C}^{III}$  sind (vgl. Nr. 6), so verschwindet ihr äußeres Produkt. Deshalb fällt, wenn man das äußere Produkt der Gleichungen (21) und (22) bildet, das erste Glied rechts fort, und es kommt:

$$(23) \quad \frac{[\mathbf{x}' \mathbf{x}'' \mathbf{x}''']}{\text{mod } [\mathbf{x}' \mathbf{x}'']} = \overline{c\mathbf{x}} \cdot \frac{[\mathbf{e}^I \mathbf{e}^{II} \mathbf{e}^{III}]}{\text{mod } [\mathbf{e}^I \mathbf{e}^{II}]}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist nichts anderes als die Binormal-Komponente der Überbeschleunigung des Systempunkts  $\mathbf{x}$ ; denn betrachtet man das Parallelogramm  $[\mathbf{x}' \mathbf{x}'']$  — das der Schmiegeebene der Bahn von  $\mathbf{x}$  angehört, wenn man  $\mathbf{x}'$  und  $\mathbf{x}''$  an den Punkt selbst anträgt — als Grundfläche des Parallelepipeds  $[\mathbf{x}' \mathbf{x}'' \mathbf{x}''']$ , so ist der Zähler

1) Wir setzen voraus,  $[\mathbf{e}^I \mathbf{e}^{II}]$  sei von Null verschieden, was (wie sich zeigen wird) bedeutet, daß der betrachtete Wendestrahle keinen unendlich-fernen Punkt der Wendekurve enthält.

des Bruches auf der linken Seite von (23) gleich dem Produkt aus dem Inhalt der Grundfläche des fraglichen Parallelepipeds und seiner Höhe, aber der Nenner gleich dem Inhalt der Grundfläche, also der Bruch selbst gleich der Höhe jenes Parallelepipeds oder gleich der Projektion der Überbeschleunigung  $x'''$  auf die Binormale der Bahn (mit bestimmtem Vorzeichen genommen). Die Abkürzung

$$(24) \quad \frac{[e^I e^{II} e^{III}]}{[\text{mod}[e^I e^{II}]]} = \beta$$

einführend gelangt man so zur Gleichung (2) in Nr. 1, wobei  $\beta$ , wie man sieht, nur von  $e$ , also nur von der Richtung des Wendestrahls abhängt.

Für die Binormal-Komponente der Überbeschleunigung hat schon H. Resal den Ausdruck  $v^3/\rho e_1$  gefunden<sup>1)</sup>, worin  $e_1 = 1/\rho$  den Windungshalbmesser bezeichnet. Wegen der bekannten Beziehungen

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad \frac{v}{e} = \frac{d\tau}{dt}, \quad \frac{v}{e_1} = \frac{d\vartheta}{dt}$$

hat man dafür auch die in Nr. 1 erwähnte Darstellung

$$\frac{v^3}{e e_1} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\tau}{dt} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$$

### 8. Wendepotenz. Windung.

Bezeichnet  $y$  einen beliebigen Systempunkt auf dem durch  $x$  gehenden Wendestrahle,  $\lambda$  die mit bestimmtem Vorzeichen genommene Länge  $\overline{yx}$ , dann ist

$$\begin{aligned} x - y &= \lambda e, \\ x' - y' &= \mathfrak{U}_1(x - y), \\ x'' - y'' &= \mathfrak{U}_2(x - y), \end{aligned}$$

also

$$y' = x' - \lambda \mathfrak{U}_1 e = x' - \lambda e^I, \quad y'' = x'' - \lambda \mathfrak{U}_2 e = x'' - \lambda e^{II}.$$

Damit  $y$  in der Wendekurve liegt, also mit einem der früher  $a$  und  $b$  genannten Punkte zusammenfällt, müssen  $y'$  und  $y''$  parallel sein oder es muß ihr äußeres Produkt  $[y' y'']$  verschwinden. Das gibt

$$0 = [x' x''] - \lambda [x' e^{II} + e^I x''] + \lambda [e^I e^{II}].$$

Aus der schon in Nr. 7 benützten Tatsache, daß die Vektoren  $x'$ ,  $x''$ ,  $e^I$ ,  $e^{II}$  parallel zu einer und derselben Ebene sind, folgt, daß die Bivektoren  $[x' x'']$ ,  $[x' e^{II}]$ ,  $[e^I x'']$  und  $[e^I e^{II}]$  alle parallel sind. Die

1) H. Resal, *Traité de cinématique pure*, Paris 1862, p. 171.

vorhergehende Gleichung ist homogen und linear in bezug auf jene parallelen Bivektoren, deshalb muß eine Gleichung derselben Form zwischen ihren (mit bestimmtem Vorzeichen genommenen) Flächeninhalten bestehen, d. h. man hat für  $\lambda$  die quadratische Gleichung

$$(25) \quad 0 = \text{mod} [\mathcal{X}' \mathcal{X}''] - \lambda \text{mod} [\mathcal{X}' e^{II} + e^I \mathcal{X}''] + \lambda^2 \text{mod} [e^I e^{II}].$$

Ihre Wurzeln  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , in

$$y = x - \lambda e$$

eingesetzt, liefern die Träger der beiden Punkte  $a$  und  $b$  der Wendekurve. Das Produkt der beiden Wurzeln bestimmt sich aus Gleichung (25) zu

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{\text{mod} [\mathcal{X}' \mathcal{X}'']}{\text{mod} [e^I e^{II}]}.$$

Da

$$\lambda_1 = \overline{ax}, \quad \lambda_2 = \overline{bx}$$

ist, so erhält man hieraus

$$(26) \quad \text{mod} [\mathcal{X}' \mathcal{X}''] = \overline{ax} \cdot \overline{bx} \cdot \text{mod} [e^I e^{II}].$$

Es bestätigt sich, daß das in Nr. 1 „Wendepotenz“ genannte Produkt der Längen  $\overline{ax}$  und  $\overline{bx}$  immer reell ist, einerlei ob jene Längen selbst reell und verschieden, oder einander gleich, oder imaginär sind, d. h. unabhängig davon, ob der durch  $x$  gehende Wendestrahls eine eigentliche Sehne der Wendekurve, oder eine Tangente, oder eine un-eigentliche Sehne ist.

Der Flächeninhalt des Bivektors  $[\mathcal{X}' \mathcal{X}'']$  ist, wie schon in Nr. 5 bemerkt wurde, gleich dem Produkt aus der Geschwindigkeit und der Normalbeschleunigung des Punktes  $x$ , also ließe sich die linke Seite von (26) auch  $v^3/\rho$  schreiben<sup>1)</sup>, während die linke Seite von (23) nach dem am Schluß von Nr. 7 Gesagten gleich  $v^3 w/\rho$  ist. Daher erhält man durch Division von (23) mit (26) unmittelbar einen Ausdruck für die Windung  $w$  der vom Systempunkt  $x$  augenblicklich beschriebenen Bahnstelle, nämlich

$$(27) \quad w = \frac{\overline{ax}}{ax \cdot bx} \cdot \frac{[e^I e^{II} e^{III}]}{(\text{mod} [e^I e^{II}])^2}.$$

1) Hier sei noch auf einen Satz hingewiesen, den man zur Lösung von Aufgaben über die Krümmungshalbmesser der Bahnen von Systempunkten benutzen könnte. Für alle Punkte eines und desselben Wendestrahls sind die Binormalen der von ihnen erzeugten Bahnelemente parallel, weil die Schmiegungebenen es sind. Denkt man sich an jeden Punkt eines Wendestrahls den Wert, den  $v^3/\rho$  in diesem Punkte hat, als Länge angetragen, und zwar in der zugehörigen Binormale, so liegen die Endpunkte, wie man leicht aus (26) erschließt, auf einer (durch  $a$  und  $b$  gehenden) Parabel, deren Achse in eine der fraglichen Binormalen fällt.

Mithin kann man tatsächlich  $w$  in der Form  $\gamma \frac{\overline{cx}}{\overline{ax} \cdot \overline{bx}}$  schreiben, worin

$$(28) \quad \gamma = \frac{[e^I e^{II} e^{III}]}{(\text{mod } [e^I e^{II}])^2}$$

nur von der Richtung des Wendestrahls abhängt.

9. Die Hilfsflächen  $F_{1,2}$  und  $\Psi_{1,2,3}$ .

In der Parallelen durch den Ursprung 0 zum Vektor  $e$ , also zum Wendestrahle, der den Punkt  $x$  enthält, denke man sich den reziproken Wert der Quadratwurzel aus dem positiv genommenen Flächeninhalt des Bivektors  $[e^I e^{II}]$  als Länge im einen oder anderen Sinn an den Ursprung angetragen. Für den Endpunkt  $d$ , den man so erhält, ist dann

$$(29) \quad \overline{od}^2 = \frac{\pm 1}{\text{mod } [e^I e^{II}]}$$

In derselben Geraden werde an den Ursprung der reziproke Wert der dritten Wurzel aus  $[e^I e^{II} e^{III}]$  als Länge angetragen, und zwar in der Richtung von  $e$  oder in der umgekehrten Richtung, je nachdem  $[e^I e^{II} e^{III}]$  positiv oder negativ ist. Bezeichnet man den sich ergebenden Endpunkt mit  $f$ , so ist

$$(30) \quad \overline{of}^3 = \frac{1}{[e^I e^{II} e^{III}]}$$

Für die durch (24) und (28) erklärten Größen  $\beta$  und  $\gamma$  hat man jetzt

$$(31) \quad \beta = \pm \frac{\overline{od}^2}{\overline{of}^3}$$

und

$$(32) \quad \gamma = \frac{\overline{od}^4}{\overline{of}^3}$$

Weiter ergibt sich aus (23), (26) und (27):

$$(33) \quad \text{Binormal-Überbeschleunigung} = \frac{v^3}{e} w = \pm \frac{\overline{cx} \cdot \overline{od}^2}{\overline{of}^3},$$

$$(34) \quad \frac{v^3}{e} = \pm \frac{\overline{ax} \cdot \overline{bx}}{\overline{od}^2},$$

$$(35) \quad w = \frac{\overline{cx} \cdot \overline{od}^4}{\overline{ax} \cdot \overline{bx} \cdot \overline{of}^3}.$$

Das Quadrat des Flächeninhalts eines Bivektors  $B$  ist gleich dem „inneren“ Quadrat  $B^2$  von  $B$ . Daher läßt sich das Quadrat von (29) schreiben:

$$\overline{od}^4 [e^I e^{II}]^2 = \overline{od}^4 [u_1 e \ u_2 e]^2 = 1,$$

woraus man für den Träger  $d$  des Punktes  $d$  durch Einsetzen von

$$\overline{od} \cdot e = d$$

erhält:

$$(36) \quad [\mathfrak{U}_1 d \mathfrak{U}_2 d]^2 = 1.$$

Da diese Gleichung in bezug auf  $d$  vom vierten Grade ist, stellt sie eine Fläche vierter Ordnung vor. Sie heiÙe die Hilfsfläche  $F_{1,2}$ .

Für den Träger  $f$  des Punktes  $f$  ergibt sich, wenn man in (30)  $f$  statt  $od \cdot e$  und für  $e^I, e^{II}, e^{III}$  ihre Werte setzt:

$$(37) \quad [\mathfrak{U}_1 f \mathfrak{U}_2 f \mathfrak{U}_3 f] = 1,$$

d. h. der Ort des Punktes  $f$  ist eine Fläche dritter Ordnung. Wir wollen sie die Hilfsfläche  $\Psi_{1,2,3}$  nennen.

Die reellen unendlich fernen Punkte der Hilfsfläche  $F_{1,2}$  sind dieselben wie die der Wendekurve, denn der Punkt  $d$  fällt nach (29) dann und nur dann ins Unendliche, wenn  $[e^I e^{II}]$  verschwindet, und das geschieht nach (25) dann und nur dann, wenn  $\lambda$  unendlich wird, d. h. wenn einer der Punkte  $a$  und  $b$  ins Unendliche rückt, wodurch er mit  $d$  zur Deckung kommt, weil die Gerade  $od$  parallel zum Wendestrahle ist.

Weiter haben die Fläche  $\Phi_{1,2,3}$  — der Ort des Punktes  $c$  — und die Hilfsfläche  $\Psi_{1,2,3}$  ihre unendlich fernen Punkte gemeinsam. Denn nehmen wir zuerst an,  $[e^I e^{II}]$  sei von Null verschieden, so folgt aus (23), daß  $c$  im Unendlichen liegt, wenn  $[e^I e^{II} e^{III}]$  verschwindet, in welchem Falle wegen (30) auch  $f$  ins Unendliche rückt und mit  $c$  zusammenfällt. Verschwindet aber  $[e^I e^{II}]$ , so verschwindet gleichzeitig  $[e^I e^{II} e^{III}]$ , die Punkte  $f$  und  $d$  fallen miteinander und mit einem unendlich fernen Punkte der Wendekurve zusammen, die bekanntlich ganz in der Fläche  $\Phi_{1,2,3}$  enthalten ist.

#### 10. Besondere Lagen des Wendestrahls.

Es würde mich über das Ziel, das ich mir vorläufig gesteckt habe, weit hinausführen, wenn ich auf die Sonderfälle eingehen wollte, die bei besonderer Beschaffenheit der „Abtragsysteme“  $\Sigma^I, \Sigma^{II}$  und  $\Sigma^{III}$  (also der Symbole  $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3$ ), oder beim Vorhandensein besonderer Beziehungen zwischen diesen Systemen auftreten können. Dagegen werde noch untersucht, wie im gewöhnlichsten Fall die Ausdrücke für die Windung usw. sich ändern, sobald der betrachtete Wendestrahle nach einem unendlich fernen Punkt der Fläche  $\Phi_{1,2,3}$  oder der Wendekurve geht.

Im ersten Falle, d. h. wenn  $c$  unendlich fern liegt, ohne zugleich ein Punkt der Wendekurve zu sein, verschwindet  $[e^I e^{II} e^{III}]$ , aber nicht

$[e^I e^{II}]$ . Gleichung (21) bleibt bestehen, (22) und (23) dagegen werden unbrauchbar. Statt des Punktes  $c$  führen wir dann einen willkürlichen im Endlichen liegenden Punkt  $q$  des Wendestrahls ein und erhalten:

$$\begin{aligned} x - q &= \overline{qx} \cdot e, \\ x''' &= q''' + \overline{qx} \cdot U_3 e = q''' + \overline{qx} \cdot e^{III}. \end{aligned}$$

Bei der äußeren Multiplikation dieser Gleichung mit (21) fällt auf der rechten Seite das zweite Glied fort, und es ergibt sich für die Binormal-Überbeschleunigung der auf dem ganzen Wendestrahle konstante Wert:

$$(23') \quad \frac{[x' x'' x''']}{\text{mod } [x' x'']} = \frac{v^3}{e} w = \frac{[e^I e^{II} q''']}{\text{mod } [e^I e^{II}]}.$$

Weil Gleichung (26) ihre Gültigkeit behält, so tritt an Stelle von (27) die Gleichung

$$(27') \quad w = \frac{1}{\overline{ax} \cdot \overline{bx}} \cdot \frac{[e^I e^{II} q''']}{(\text{mod } [e^I e^{II}])^2}.$$

Also die Windung ist in diesem Fall allein von der Wendepotenz abhängig und ihr umgekehrt proportional.

Nehmen wir jetzt an, der Wendestrahle enthalte einen unendlich fernen Punkt der Wendekurve, ohne eine Asymptote von ihr zu sein. Dann ist (vgl. (25))  $[e^I e^{II}] = 0$ , aber  $[x' e^{II} + e^I x'']$  von Null verschieden. Der auf diesem Wendestrahle liegende endliche Punkt der Wendekurve heiße  $a$ . Man hat

$$\begin{aligned} x &= a + \overline{ax} \cdot e, \\ x' &= a' + \overline{ax} \cdot e^I, \\ x'' &= a'' + \overline{ax} \cdot e^{II}. \end{aligned}$$

Die äußere Multiplikation der letzten beiden Gleichungen ergibt, weil  $[a' a''] = 0$  und  $[e^I e^{II}] = 0$  ist:

$$[x' x^{II}] = \overline{ax} \cdot [a' e^{II} + e^I a''].$$

Also erhält man statt (26) die Gleichung:

$$(26'') \quad \text{mod } [x' x''] = \frac{v^3}{e} = \overline{ax} \cdot \text{mod } [a' e^{II} + e^I a''].^1)$$

Gleichung (21) kann man ersetzen durch

$$\frac{[x' x']}{\text{mod } [x' x']} = \frac{[q' q'']}{\text{mod } [q' q'']},$$

wo wieder  $q$  einen beliebigen (endlichen) Hilfspunkt auf dem Wendestrahle bezeichnet. Wenn der Punkt  $c$  im Endlichen liegt, was wir

1) An Stelle der in Anm. 1, S. 214 erwähnten Parabel tritt jetzt offenbar eine gerade Linie.

annehmen wollen<sup>1)</sup>, so bleibt Gleichung (22) bestehen und die äußere Multiplikation mit der letzten Gleichung liefert:

$$(23'') \quad \frac{[x' x'' x''']}{\text{mod}[x' x'']} = \frac{v^3}{\rho} w = \overline{cx} \cdot \frac{[q' q'' e^{III}]}{\text{mod}[q' q'']}.$$

Für die Windung erhält man so:

$$(27'') \quad w = \frac{\overline{cx}}{ax} \cdot \frac{[q' q'' e^{III}]}{\text{mod}[q' q''] \cdot \text{mod}[a' e^{II} + e^I a'']}.$$

Ist der untersuchte Wendestrahle eine Asymptote der Wendekurve, so hat Gleichung (25) die Doppelwurzel  $\lambda = \infty$ , d. h. es ist nicht nur  $[e^I e^{II}] = 0$ , wie im vorhergehenden Fall, sondern außerdem

$$[x' e^{II} + e^I x''] = 0.$$

Bildet man das äußere Produkt der Gleichungen

$$\begin{aligned} q' &= x' + \overline{xq} \cdot e^I, \\ q'' &= x'' + \overline{xq} \cdot e^{II}, \end{aligned}$$

so kommt wegen der vorhergehenden beiden Bedingungen

$$[q' q''] = [x' x''].$$

Also es ist in diesem Falle  $[x' x'']$  konstant, folglich auch  $\text{mod}[x' x'']$  oder  $v^3/\rho$ . Die Windung wird jetzt einfach dem Abstand  $\overline{cx}$  proportional, nämlich

$$(27''') \quad w = \overline{cx} \cdot \frac{[q' q'' e^{III}]}{(\text{mod}[q' q''])^2}.$$

### 11. Fall eines starren Punktsystems.

Trotzdem die Bewegung eines starren Systems insofern zu den im Vorhergehenden nicht besonders berücksichtigten Fällen gehört, als bei einem solchen das zugehörige Abtragsystem  $\Sigma^I$  mindestens in ein ebenes System ausartet, wollen wir doch für den gewöhnlichsten Fall einer derartigen Bewegung die Produkte  $[e^I e^{II}]$  und  $[e^I e^{II} e^{III}]$  berechnen und die Gleichungen der beiden Hilfsflächen  $F_{1,2}$  und  $\Psi_{1,2,3}$  in Cartesischen Koordinaten aufstellen. Es ist wegen des letzteren Zwecks am besten, wenn man sich die Bewegung von  $\Sigma$  aus dem Rollen eines ihm angehörigen Kegels auf einem Kegel von immer gleich bleibender Stellung und einer fortschreitenden Bewegung der gemeinsamen Spitze beider Kegel zusammengesetzt denkt, wobei bekanntlich die Gestalt jener sog. Achsenkegel oder Polkegel von der Wahl

1) Es könnte  $c$  nur ins Unendliche rücken, wenn eine besondere Beziehung zwischen  $\Sigma^I, \Sigma^{II}, \Sigma^{III}$  vorhanden wäre, entgegen der Grundannahme bei dieser Abhandlung. Deshalb werden wir den fraglichen Fall hier nicht untersuchen.

ihrer Spitze, die ein beliebiger Systempunkt sein darf, unabhängig ist. Die fortschreitende Bewegung der Spitze hat auf die Vektoren, die  $\Sigma$  angehören, keinen Einfluß, weshalb wir im folgenden uns die Spitze in Ruhe und mit dem früher benützten Ursprung zusammenfallend denken können. Weil  $\Sigma$  starr ist, so werden die Vektoren  $u_1 e, u_2 e, u_3 e$  gleich  $e', e'', e'''$ , gleich den Ableitungen des Vektors  $e$  nach der Zeit; denn sind  $x$  und  $y$  zwei Systempunkte vom Abstände  $\overline{xy} = \lambda$ , deren Verbindungsgerade  $xy$  gleiche Richtung mit  $e$  hat, so daß

$$y - x = \lambda e$$

ist, dann wird einerseits

$$y' - x' = u_1 (y - x) = \lambda u_1 e,$$

während andererseits, da  $\lambda$  konstant ist, durch Ableitung nach der Zeit sich ergibt

$$y' - x' = \lambda e',$$

also in der Tat

$$e^I = u_1 e = e'$$

und auf dieselbe Weise

$$e^{II} = u_2 e = e'', \quad e^{III} = u_3 e = e'''.$$

Sei  $k$  ein Vektor von der Länge 1 in der augenblicklichen Drehachse oder gemeinsamen Kante der Polkegel,  $\omega$  die augenblickliche Drehgeschwindigkeit von  $\Sigma$ , mit dem Vorzeichen +, wenn die Drehung in der Richtung von  $k$  gesehen als Rechtsdrehung erscheint. Denkt man sich den Vektor  $e$  an den Ursprung angetragen, so gilt bekanntlich für die Geschwindigkeit  $e'$  seines Endpunkts, wenn man vorübergehend

$$(38) \quad \omega k = u$$

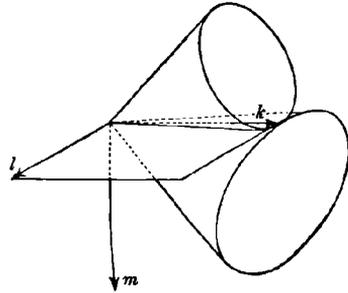
setzt, also den sog. Drehvektor  $u$  einführt:

$$(39) \quad e' = [ue] \quad \text{oder} \quad |e' = [ue].^1)$$

Hieraus folgt durch äußere Multiplikation mit  $[ue]$ :

$$(40) \quad [uee'] = [ue]^2,$$

Fig. 3.



1) Der senkrechte Strich von einem Vektor oder Bivektor bedeutet seine „Ergänzung“ im Sinne Grassmanns. Die Ergänzung eines beliebigen Bivektors (einer gerichteten Fläche) ist ein Vektor senkrecht zur Ebene des Bivektors, mit einer Längenzahl gleich der Flächenzahl des Bivektors und von solcher Richtung, daß der Sinn des Bivektors, in der Richtung des Vektors gesehen, positiv erscheint; umgekehrt ist auch der Bivektor die Ergänzung des Vektors.

ferner durch Ableitung nach der Zeit

$$(41) \quad |e'' = [u' e] + [u e'].$$

Die äußere Multiplikation der vorhergehenden Gleichung mit der zweiten Gleichung (39) ergibt nach Anwendung der „Regel des doppelten Faktors“<sup>1)</sup>

$$|[e' e''] = [u u' e] e + [a e e'] u,$$

oder bei Benützung von (39):

$$(42) \quad |[e' e''] = |[e^I e^{II}] = [u u' e] e + [u e]^2 u,$$

Weiter erhält man durch Ableiten von (41) nach der Zeit

$$|e''' = [u'' e] + 2[u' e] + [u e'']$$

und durch äußere Multiplikation dieser Gleichung mit der vorhergehenden, da

$$[e u'' e] = 0 \quad \text{und} \quad [u u e''] = 0$$

ist:

$$|[e' e'' e'''] = [e' e'' e'''] = 2 [u u' e] [e u' e'] + [u u' e] [e u e''] \\ + [u e]^2 [u u'' e] + 2 [u e]^2 [u u' e].$$

Man findet aber aus (38) und (40):

$$[e u' e'] = [e u e''] = -[u e | u' e] = [u u' e'] = [u u' | u e],$$

also durch Einsetzen in die vorhergehende Gleichung:

$$(43) \quad [e' e'' e'''] = [e^I e^{II} e^{III}] = -3 [u u' e] [u e | u' e] \\ + [u e]^2 [u u'' e + 2 u u' | u e].$$

Da die Gleichungen (42) und (43) homogen in bezug auf  $e$  sind, so gelten sie auch, wenn  $e$  nicht die Länge 1 hat.

1) Sie besteht darin, daß, wenn  $u, v, w$  drei beliebige Vektoren sind, man hat:

$$[uv \cdot uw] = [uvw] u,$$

ebenso

$$[uv \cdot vw] = [uvw] v,$$

und

$$[uw \cdot vw] = [uvw] w.$$

(Fortsetzung folgt.)

## Bücherschau.

---

**Dr. A. L. Crelle's Rechentafeln** welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Neue Ausgabe. Besorgt von **O. Seeliger**. Mit Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen von 1—1000. Berlin 1907, Georg Reimer. *M* 15.—

Die mit Recht so beliebten Rechentafeln von A. L. Crelle, von denen hier eine neue Ausgabe vorliegt, erschienen erstmals 1820 in zwei Bänden. Eine zweite, einbändige — von A. L. Crelle noch vorbereitete, von C. Bremiker besorgte — Ausgabe erschien 1857; die Anordnung der Tafeln in dieser zweiten Ausgabe, die wie bei allen späteren so auch bei der neuen beibehalten wurde, ist bekanntlich die folgende: Die Gesamttafel zerfällt in einzelne, je eine halbe Seite einnehmende Tafeln, von denen für jeden Faktor (Multiplikator) zwischen 1 und 1000 eine nach ihm benannte vorhanden ist, die seine Produkte mit allen Faktoren (Multiplikanden) zwischen 1 und 1000 enthält. Die  $\left. \begin{array}{l} \text{Vertikal-} \\ \text{Horizontal-} \end{array} \right\}$

Reihen dieser Tafeln entsprechen den  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Hundertern} \\ \text{Einern und Zehnern} \end{array} \right\}$  der Multiplikanden, und sind deshalb nach ihnen bezeichnet. Der Umstand, daß bei dieser Anordnung alle Produkte einer Horizontalreihe in den beiden letzten Ziffern übereinstimmen, wurde bei den Tafeln dazu benützt, diese beiden Ziffern abzutrennen und für jede Tafel in einer rechts angefügten Vertikalreihe anzugeben.

Ein Übelstand der seitherigen Ausgaben, der darin bestand, daß aus Raumrücksichten unter den Faktoren die durch 10 teilbaren nicht aufgenommen waren, ist in der neuen Ausgabe beseitigt, so daß diese die Produkte aller Zahlen von 1 bis 1000 mit ebensolchen enthalten; der durch diese Erweiterung bedingten Vergrößerung des Formats (Klein Folio) wurde dadurch entgegengewirkt, daß kleinere Ziffern verwendet wurden, was durch die Wahl der sog. altenglischen Ziffernform möglich war.

Eine Erleichterung beim Aufschlagen einer Tafel und beim Eingehen in sie bietet die neue Ausgabe dadurch, daß in ihr die Bezeichnung der einzelnen Tafeln und ihrer Vertikalreihen nicht wie seither nur am Kopf, sondern auch am Fuß jeder Tafel angegeben ist.

Im Gegensatz zu den früheren Ausgaben weist die neue eine übersichtliche Gliederung der Vertikal- und Horizontalreihen auf, was bei den letzteren mit Rücksicht auf die Abtrennung der beiden Endziffern der Produkte besonders wertvoll ist.

Um die Tafeln auch für näherungsweise, auf die beiden abgetrennten Stellen verzichtende Rechnung einzurichten, ist die drittletzte Ziffer mit einem

(\*) versehen, wenn der Wert der beiden letzten 50, und mit einem (\*), wenn er größer als 50 ist; dadurch ist es möglich, die drittletzte Ziffer je nach dem Wert der beiden letzten — ohne diese nachzusehen — entsprechend ab- oder aufzurunden. Ob diese Einrichtung viel Verwendung finden wird, ist sehr fraglich; in den meisten Fällen wird man bei einer näherungsweise, vierstelligen Rechnung zu einem weniger umfangreichen Hilfsmittel als die Crelleschen Tafeln — z. B. der Schererschen Rechentafel oder einem 50 cm langen Rechenschieber — greifen.

Die angeführten Verbesserungen werden im Zusammenhang mit der geeigneten Ausstattung dazu beitragen, den Crelleschen Rechentafeln auch fernerhin den Ruf als den der besten Multiplikationstafeln zu erhalten.

Straßburg i. E.

P. WERKMEISTER.

**J. Bojko, Ingenieur. Neue Tafel der Viertelquadrate aller natürlichen Zahlen von 1 bis 20 000 zur Bildung aller möglichen Produkte im Bereiche 1 mal 1 bis 10 000 mal 10 000.** Zürich 1909, E. Speidel. M 1.50.

Die Tafel dient wie alle Tafeln der Viertelquadrate zur Multiplikation nach der Formel

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4};$$

in ihrem der Faktorensomme  $(a+b)$  entsprechenden Argument geht sie ähnlich wie die erste von A. Voisin 1817<sup>1)</sup> herausgegebene Tafel der Viertelquadrate bis 20 000, so daß sich mit ihrer Hilfe die Produkte von allen ein- bis vierstelligen Zahlen mit ebensolchen berechnen lassen. Die ganze Tafel ist auf nur 20 Seiten untergebracht; dies ist besonders auffallend, wenn man beachtet, daß eine dieselbe Leistung aufweisende Tafel nach Art der bekannten Crelleschen eine große Anzahl von Bänden — nach Berechnung des Verfassers 100 — benötigen würde.

Das Zusammendrängen der Tafel auf eine so geringe Anzahl von Seiten wurde — zum Teil in ähnlicher Weise wie bei der weitgehendsten Tafel der Viertelquadrate von J. Blater<sup>2)</sup> — durch eine Zerlegung der Viertelquadrate in drei Gruppen von Ziffern, die für gewisse, unter sich in Zusammenhang stehende Argumente übereinstimmen, erreicht. Die Anordnung der Tafel ist in einer beigegebenen Einführung eingehend erläutert.<sup>3)</sup>

Wenn auch infolge der Dreiteilung der Tafelwerte und der sonstigen, durch das Zusammendrängen auf einen kleinen Raum bedingten Einrichtungen die Benützung der Tafel nicht so ganz einfach ist, so stellt sie doch mit Rücksicht auf ihre — bei sehr geringem Umfang — große Leistungsfähigkeit eine für gewisse Fälle recht beachtenswerte Multiplikationstafel vor.

Straßburg i. E.

P. WERKMEISTER.

1) Vgl. R. Mehmké. Numerisches Rechnen. Encyclopädie der Math. Wissensch. Band I, Seite 948.

2) Tafel der Viertelquadrate aller Zahlen von 1 bis 200 000, Wien 1887.

3) Vgl. J. Bojko. Eine neue Tafel der Viertelquadrate. Diese Ztschr. f. Math. und Phys. 57. Band, S. 194.

Professor **A. Adler**, Direktor der k. k. Staatsrealschule im 7. Bezirke Wiens, Privatdozent an der technischen Hochschule. **Fünfstellige Logarithmen mit mehreren graphischen Rechentafeln und häufig vorkommenden Zahlenwerten.** Leipzig 1909, Sammlung Göschen No. 423. Geb. *M* —.80.

Das Werkchen enthält zunächst je fünfstellig die üblichen Haupttafeln: Gemeine Logarithmen der Zahlen, Werte der goniometrischen Funktionen und Logarithmen der goniometrischen Funktionen; letzere im Winkel — außer bei den beiden ersten Graden — um je zwei Minuten fortschreitend. Zur Ermittlung der Logarithmen der Funktionen Sinus und Tangens von Winkeln unter  $2^0$  bzw. zwischen  $88^0$  und  $90^0$  sind zwei besondere, auf die Maskelynesche Regel sich beziehende Täfelchen angegeben.

An kleineren Tafeln sind u. a. aufgenommen: Eine Tafel enthaltend die Quadrate, Kuben, Quadratwurzeln, Kubikwurzeln und Reziproken der Zahlen 1 bis 100; verschiedene Tafeln für Zinseszins- und Rentenrechnung und eine Tafel der Längen der Kreisbogen für den Halbmesser 1.

Außer einigen vielfach gebrauchten astronomischen und physikalischen Zahlenwerten findet man eine cartesische Tafel für die Kurven  $y = \log x$  und  $y = \log \operatorname{nat} x$ , eine logarithmische Skala mit einigen Bemerkungen über den logarithmischen Rechenschieber, und die von M. d'Ocagne nach der Methode der fluchtrecten Punkte angegebenen Tafeln zur graphischen Lösung der Gleichungen zweiten und dritten Grads.

Die einzelnen Tafeln sind übersichtlich angeordnet, so daß das Werkchen bei seinem vielseitigen Anforderungen entsprechenden Inhalt als nützliches Taschenbuch für den praktischen Rechner bezeichnet werden kann.

Straßburg i. E.

P. WERKMEISTER.

**G. Bauer.** **Vorlesungen über Algebra.** Herausgegeben vom Math. Verein München. 2. Aufl. Von K. Doehlemann. VI u. 366 S. 8. mit Bildnis G. Bauers u. 11 Textfiguren. Leipzig 1910, B. G. Teubner. Geh. *M* 11.—, geb. *M* 12.—.

Dieses Buch gehört ja nicht eigentlich zu dem Gebiet, das unsere Zeitschrift pflegt. Aber wir dürfen Bauers Vorlesungen, die nach 6 Jahren schon in 2. Auflage erscheinen, doch hier erwähnen, da sie sich durch eine sehr einfache Darstellung der Grundtatsachen der Algebra auszeichnen, wobei besonders Rücksicht auf die wirkliche Ausführung der Rechnungen genommen wird. Besonders hinzuweisen ist in dieser Richtung auf den III. Abschnitt über die *numerische Auflösung* der Gleichungen. Dort werden nicht bloß die Regula falsi und die Newtonsche Methode anschaulich dargestellt und an Beispielen erläutert, auch die Lagrangesche Kettenbruchmethode, die ja etwas mühsamer ist, wird besprochen, eingehend aber wird die vorteilhafteste aller Näherungsmethoden, die Methode Graeffes, auseinandergesetzt. Auch einen eigenen großen Abschnitt über Determinanten bietet das von Prof. Doehlemann sorgfältig durchgesehene und in mehreren Punkten gegen die erste Auflage verbesserte Buch.

Pirmasens.

H. WIELEITNER.

**M. Lindow.** Die Anwendung der Differentialrechnung auf das technische Zeichnen. 88 S. 8. Mit 45 Textfiguren. Jena 1910, H. W. Schmidt. Geb. *M* 2.50.

Wir werden Zweck und Ziel des vorliegenden kleinen Buches besser als es der Titel tut kennzeichnen, wenn wir sagen, daß der Verfasser, selbst Oberlehrer an den Kgl. Vereinigten Maschinenbauschulen in Dortmund, in ihm nur zeigen will, wie die Verwendung des Differentialquotienten der einfachsten Funktionen, sowie des Ausdruckes für den Krümmungsradius die rasche Zeichnung von krummen Linien (Kegelschnitten, Sinuslinie, zyklidalen Kurven und der Kettenlinie) erleichtert. Das insbesondere dadurch, daß nicht bei jeder Kurve neue Überlegungen gemacht werden müssen, um die Tangente und den Krümmungsmittelpunkt zu konstruieren, wie dies bei der sogenannten „elementaren“ Behandlung nötig ist. Um möglichst allen verständlich zu bleiben, hat der Verfasser auch alles Nötige in dem Büchlein selbst entwickelt. Hier könnte man ja vielleicht in manchen Einzelheiten, auf die wir nicht eingehen können, etwas anderer Meinung sein. Aber der Verfasser steht durchaus über seinem Stoffe. Unrichtig ist nur die Unterscheidung zwischen Epi- und Hypozykloiden (S. 77). Bei den Figuren ist vielfach auf die bei der Reproduktion verwendete Verkleinerung zu wenig Rücksicht genommen. Ein wesentlicher Fehler ist dem Zeichner in Fig. 24 (S. 44) untergelaufen; er geht aus dem richtigen Text ohne weiteres hervor. Das anspruchslose Schriftchen ist ein weiteres erfreuliches Zeichen, daß man auch auf diesen Schulen von den gewundenen Umschreibungen der Infinitesimalprozesse wieder abkommt.<sup>1)</sup>

Pirmasens.

H. WIELEITNER.

1) Wir verweisen jeden, der das interessante Gebiet des mathematischen Unterrichts an den Maschinenbauschulen näher kennen lernen will, auf den ausgezeichneten Bericht, den H. Grünbaum jüngst darüber herausgegeben hat.

---

#### Berichtigungen zu Heft 1 dieses Bandes:

- S. 50 Z. 11 v. u. lies 0 statt  $\emptyset$ ,  
 „ 51 „ 19 „ o. „ Grenzbedingungen statt Grenzbestimmungen,  
 „ 53 „ 14 „ „ „ 0 statt  $\emptyset$ ,  
 „ 53 „ 19 „ „ „ 0 „  $\emptyset$ ,  
 „ 55 „ 3 „ „ „ 12'' „ 13'',  
 „ 93 „ 1 „ „ „ vierter statt zweiter.
-

## Stromfunktionen symmetrischer und unsymmetrischer Flügel in zweidimensionaler Strömung.

Von H. BLASIUS in Berlin.

1. Die Stromverteilung bei gekrümmten Tragflächen ist, wie Fig. 1 darstellt, derart, daß unter der Flugfläche ein Gebiet geringerer Geschwindigkeit und höheren Druckes liegt, während oberhalb größere Geschwindigkeit und geringerer Druck herrscht. Aus dem Druckunterschied resultiert die Tragkraft und es ist zugleich ersichtlich, daß dieser Auftrieb mit einer Zirkulation um die Tragfläche verbunden ist, weil die Integration des Geschwindigkeitspotentials oben herum größere Werte liefert, als unten. Ferner hat die Druckdifferenz einen aufsteigenden Strom vor der Fläche zur Folge; die gesenkte Vorderkante entspricht also der Bedingung „stoßfreien“ Eintritts.

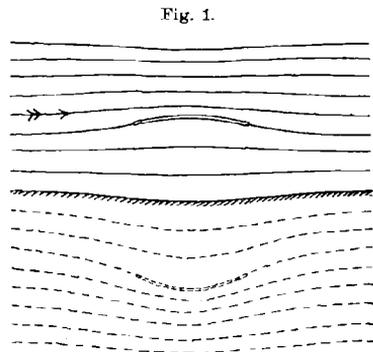


Fig. 1.

Das komplexe Potential der zweidimensionalen Strömung für den Kreisbogen wurde zuerst von Kutta<sup>1)</sup> ausgerechnet, der zugleich für den Zusammenhang zwischen Tragkraft  $K$  pro Einheit der Breite und Zirkulation die Formel aufstellte:

$$K = 2\pi \frac{\gamma}{g} ac,$$

wobei  $a$  die Geschwindigkeit im Unendlichen und  $2\pi c$  die Stärke der Zirkulation  $\int v ds$  ist. Das Potential verhält sich dann im Unendlichen wie  $ax - c \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$  das komplexe Potential ( $\chi = \varphi + i\psi$ ) wie  $az + ic \ln z$ ,

1) Kutta: Ill. aeron. Mitteilungen 1902; Münchener Berichte 1910. Eine Darstellung der Verhältnisse findet sich auch bei Lanchester: Aerodynamik übersetzt von C. u. A. Runge. Leipzig, B. G. Teubner. Denselben Grundgedanken des Zusammenhanges zwischen Zirkulation und Kraft findet man bei Lorenz, Neue Theorie und Berechnung der Kreiselräder. München, Verlag v. Oldenbourg.

wobei  $z = x + iy$  stets die Ebene der Koordinaten  $x, y$  beschreibt. Dieselbe Formel ist auch von Joukowsky<sup>1)</sup> abgeleitet, und ist in Übereinstimmung mit einer von mir<sup>2)</sup> aufgestellten komplexen Formel, die allgemein für die in zweidimensionaler Potentialströmung wirkenden Kräfte gilt.

2. Das Verhalten im Unendlichen zeigt übrigens, daß die Stromlinien im Unendlichen zwar parallel der  $x$ -Achse laufen, aber keine Asymptoten besitzen, weil die Stromfunktion das Glied  $c \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  enthält, und es ist auch unmöglich, daß die Strömung im Unendlichen zu reiner Parallelströmung übergeht, weil sie von der Tragfläche dauernd Impuls aufnehmen muß. Erst wenn man, nach dem in Fig. 1 angedeuteten Spiegelungsverfahren, den Einfluß der Erdoberfläche berücksichtigt, die ja den Impuls aufnehmen muß, dann wird im Unendlichen der logarithmische Zirkulationsanteil Null, und man erhält Asymptoten. Bei größerer Nähe der Erdoberfläche läßt sich die Tragkraft dann nicht mehr nach obiger Formel ausrechnen, man muß auf die genannte allgemeine komplexe Formel zurückgreifen und erhält das Resultat, daß bei gleicher Zirkulation um die Flugfläche die Tragkraft in der Nähe der Erdoberfläche geringer wird. Nimmt man nämlich an, daß die Zirkulation auf einen Punkt konzentriert ist, was zwar noch keine Flugfläche, aber doch eine typische Strömung liefert (ohne Spiegelung in Fig. 3a gezeichnet), legt man dann die  $x$ -Achse der komplexen  $z$ -Ebene in die Erdoberfläche und den Zirkulationspol in die Höhe  $y = h$  darüber, sein Spiegelbild nach  $z = -ih$ , so lautet der Ausdruck für das komplexe Potential:

$$\chi = a z + i c \ln(z - ih) - i c \ln(z + ih)$$

für die Geschwindigkeitsverteilung:

$$u - iv = w = \frac{d\chi}{dz} = a + \frac{ic}{z - ih} - \frac{ic}{z + ih}$$

Die Kraftkomponenten  $X$  und  $Y$  auf den Zirkulationspol (Impulsströme dorthin) berechnen sich aus der oben<sup>2)</sup> erwähnten Formel:

$$X - iY = \frac{i\gamma}{2g} \int w^2 dz$$

integriert auf einem Wege um den Pol herum. Dies ergibt nach dem Residuensatz:

$$Y = 2\pi \frac{\gamma}{g} \left( a - \frac{c}{2h} \right) c.$$

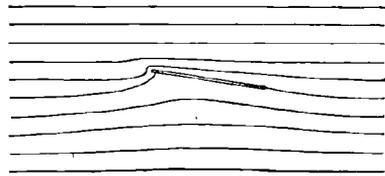
1) Joukowsky, Zeitschrift f. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt 1910.

2) Zeitschr. f. Math. u. Physik 1910, Bd. 58, S. 93 und Bd. 59, S. 43. Bei der Abfassung dieser letzteren Mitteilung waren mir die Resultate von Kutta und Joukowsky leider noch nicht bekannt.

Es ist also zur Errechnung des Auftriebs die Geschwindigkeit  $a$  um die Geschwindigkeit  $\frac{c}{2h}$ , die der Spiegelpunkt am Ort der Flugfläche erzeugt, zu vermindern. Der Spiegelpunkt bringt zum Ausdruck, daß der mit der Geschwindigkeit  $a$  fahrende Flugapparat in der Nähe des Erdbodens eine gewisse Menge Luft mitführt, wodurch sich die „wirksame“ Geschwindigkeit verringert. Im folgenden ist auf die Nähe des Erdbodens keine Rücksicht weiter genommen. Die Rechnungen gelten für den unbeschränkten Raum und für den zweidimensionalen Vorgang in den Koordinaten  $x, y$ .

3. Die Strömung um eine kreisbogenförmig gekrümmte Flugfläche stellte Kutta nach dem Schwarz-Christoffelschen Verfahren her, und zwar auch für solche Fälle, in denen die äußere Strömung schief zur Flugfläche gerichtet ist. In solchen Fällen existieren für den Kreisbogen nur Lösungen, die an der Vorderkante singular sind, wie Fig. 2 für die ebene Flugfläche zeigt, und die genannten Arbeiten von Kutta und Joukowsky beschäftigten sich nun hauptsächlich mit

Fig. 2.



der Frage, wie diese Singularität durch Abrundung der Vorderkante zu vermeiden sei, und ob aus der Geschwindigkeitsvermehrung dort vorn eine Saugkraft in Richtung der Strömung resultiert. Ich befolge in dieser Abhandlung eine andere Methode, zu dem komplexen Potential solcher Strömungen zu gelangen. Ich gehe aus von der Überlegung, welche Singularitäten das Potential in der komplexen Ebene haben muß, und baue den Funktionsausdruck aus diesen Singularitäten auf. Der Querschnitt der Flugfläche ergibt sich dann als Stromlinie zwischen zwei Verzweigungspunkten, wobei i. a. verschiedene Form der oberen und unteren Linie zu erwarten ist. Die Form der Flugfläche ist also nicht, wie bei Kutta, gegeben, sondern sie ergibt sich erst aus der gefundenen Lösung, für deren Aufbau möglichst einfache Funktionsform, nur mit den notwendigsten Singularitäten, maßgebend war. Für den Fall schiefer äußerer Strömung wird daher gerade eine solche Fläche sich ergeben, bei der hinten und vorn stetiger Verlauf der Strömung stattfindet.

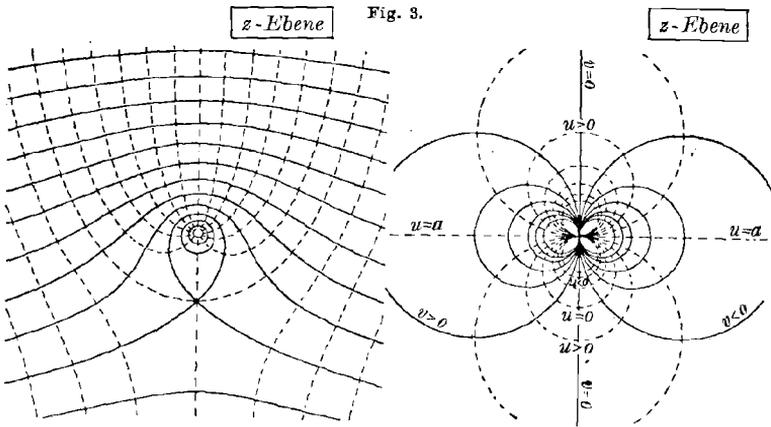
4. Die einfachste Verbindung von Parallelströmung und Zirkulation, die sich aber für sich noch nicht zur Darstellung der gesuchten Strömung eignet, ist das komplexe Potential

$$\chi = \varphi + i\psi = az + ic \ln z$$

bzw. die Geschwindigkeitsverteilung

$$w = u - iv = a + \frac{ic}{z}$$

Ihnen entsprechen die Abbildungen Fig. 3 a und b. Für den Zirkulationsanteil ist die logarithmische Singularität in  $\chi$ , der einfache Pol in  $w$  charakteristisch. Im Unendlichen verhält sich  $\chi$  wie  $az$ ,  $w$  ist regulär und hat den Wert  $a$ .  $w$  zeigt den einfacheren Bau und soll daher im folgenden zuerst hergestellt werden,  $\chi$  folgt durch Integration. Außer dem für die Zirkulation charakteristischen Pol und dem Verhalten im Unendlichen ist nun bei der Herstellung von  $w$  zu berücksichtigen, daß die beiden Endpunkte des Querschnittes der Flugfläche in Fig. 1 Verzweigungspunkte der funktionentheoretischen Abbildung sind, von welcher Fig. 1 (ohne die Spiegelung an der Erdoberfläche) nur ein Blatt,



das „physikalische Blatt“ darstellt. Durch die Flugfläche hindurch gelangt man oben und unten in die analytische Fortsetzung, und in dem bzw. den anderen Blättern liegen dann die nötigen Singularitäten, also der Pol. Wir haben also im einfachsten Fall eine Funktion  $w$  herzustellen, die 1) auf einer zweiblättrigen Fläche mit Verzweigungspunkten bei  $z = +1$  und  $z = -1$  eindeutig ist, 2) im Unendlichen des physikalischen Blattes den Wert  $a$  annimmt, 3) im zweiten Blatt einen Pol besitzt. Auf diese Weise muß sich die gesuchte Geschwindigkeitsverteilung ergeben, bei der nicht, wie in Fig. 3, die Singularität störend im physikalischen Blatt auftritt. Dies ist, wenigstens in kurzer Darstellung, das heuristische Prinzip, von dem ich ausging.

5. Zu der genannten Fläche gehört die Funktion

$$\xi = \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$$

Sie ist dort eindeutig und nimmt auch jeden Wert nur in einem Punkte der Riemannschen Fläche an. Jede andere Funktion, die auf derselben

Fläche eindeutig sein soll, kann als eindeutige Funktion von  $\xi$  geschrieben werden.<sup>1)</sup> Die hauptsächlichsten Werte von  $\xi$  sind:

Für	$z = -1$	$\xi = \infty,$
	$z = +1$	$\xi = 0,$
	$z = \infty$	$\xi = \pm i,$
	$z = 0$	$\xi = \pm 1.$

Für reelles  $z$  zwischen  $-1$  und  $+1$  wird  $\xi$  rein reell, außerhalb dieser Punkte rein imaginär.

Aus  $\xi$  können wir nun Funktionen mit beliebig gegebener Lage von Nullstelle und Pol aufbauen. So ist z. B.

$$\frac{1-\xi}{1+\xi} \quad \text{oder} \quad \frac{\sqrt{1+z}-\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}+\sqrt{1-z}}$$

eine Funktion, die bei  $z=0$  im einen Blatte Null, im anderen Blatte unendlich wird, bei  $z=\pm 1$  verzweigt ist, sonst überall regulär ist. Auch diese Funktion könnte, ebenso wie  $\xi$  selbst und wie jede andere gebrochenlineare Funktion von  $\xi$ , zur Grundlage des Aufbaues beliebiger Funktionen genommen werden.

Die gesuchte Funktion  $w$  wollen wir zusammenaddieren aus der Geschwindigkeit im Unendlichen  $a$  und einem Anteil, der dann im Unendlichen des phys. Blattes Null wird. Den Pol dieses zweiten Anteils verlegen wir zunächst speziell ins Unendliche des zweiten Blattes und erhalten dann für diesen Anteil den Ausdruck:

$$\tau = i \frac{i-\xi}{i+\xi} = i \frac{i\sqrt{1+z}-\sqrt{1-z}}{i\sqrt{1+z}+\sqrt{1-z}}.$$

Der Faktor  $i$ , der an Stelle einer im allgemeinen willkürlichen Konstanten steht, ist mit Rücksicht auf den Wert der Zirkulation (s. unten) normiert. Ein einfacherer Ausdruck für  $\tau$  ist:

$$\tau = i(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

und die Umkehrung, die beim Entwerfen der Fig. 4 und 5 benutzt wurde, ist:

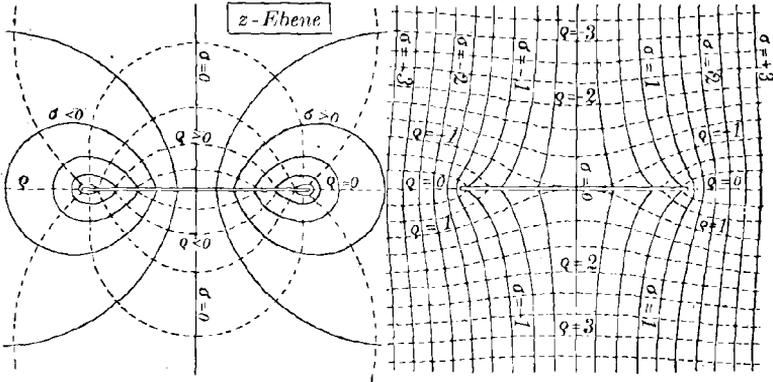
$$z = \frac{1}{2} \left( \frac{\tau}{i} + \frac{i}{\tau} \right)$$

$\tau$  wird im Unendlichen der  $z$ -Ebene im einen Blatt Null, im zweiten  $\infty$ , und verhält sich im Unendlichen des ersten Blattes wie  $\frac{i}{2z}$ , im Un-

1) Die Funktion  $\sqrt{1-z^2}$ , die vielleicht näher gelegen hätte, kann zunächst die Rolle von  $\xi$  nicht spielen, da sie jeden Wert an zwei Punkten annimmt. Jede eindeutige Funktion von  $\sqrt{1-z^2}$  würde also diese Beschränkung mitmachen: z. B. in der Lage der Pole. Und  $\xi$  zum Beispiels würde nicht als eindeutige Funktion von  $\sqrt{1-z^2}$  geschrieben werden können.

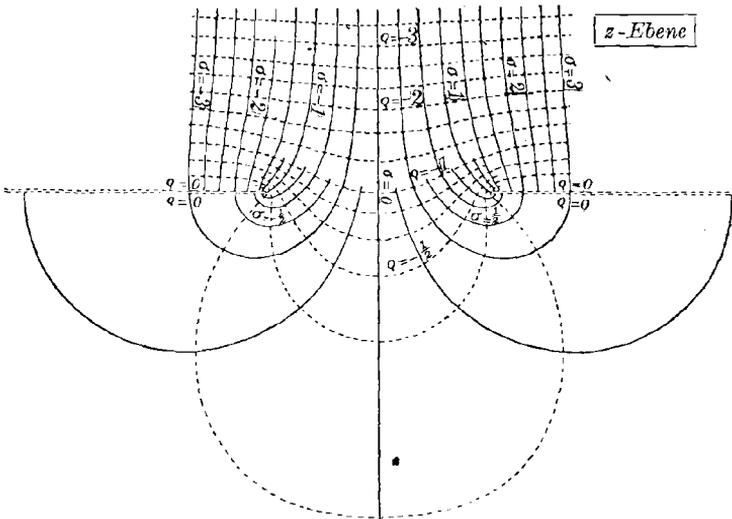
endlichen des zweiten Blattes wie  $2iz$ , bei  $z=0$  ist  $\tau = \pm 1$ , bei  $z = -1$   $\tau = -i$ , bei  $z = +1$   $\tau = +i$ , auf der reellen  $z$ -Achse außerhalb der Punkte  $\pm 1$  ist  $\tau$  rein imaginär, innerhalb komplex: dem Einheitskreis

Fig. 4.



der  $\tau$ -Ebene entsprechend. Auf Grund dieser Angaben ist das Bild von  $\tau = \rho + i\sigma$ , also die Kurven  $\rho = \text{const}$ ,  $\sigma = \text{const}$  über der  $z$ -Ebene leicht zu entwerfen. Legen wir den Verzweigungsschnitt zwischen

Fig. 5.



$z = -1$  und  $+1$ , so zeigt Fig. 4a das erste, Fig. 4b das zweite Blatt. Von dem Zusammenhang durch den Verzweigungsschnitt hindurch gibt Fig. 5 eine klare Vorstellung. Sie zeigt bei anderer Lage des Verzweigungsschnittes den Zusammenhang der unteren Halbebene von 4a

mit der oberen von 4b. Die Kurvenbilder sind symmetrisch zur imaginären  $z$ -Achse.

6. Die Funktion:

$$w = a + 2c\tau$$

wobei:

$$\tau = i(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

erfüllt alle Bedingungen, die in Absatz 4) gestellt waren. Es sind wegen

$$w = u - iv, \quad \tau = \rho + i\sigma$$

die Geschwindigkeitskomponenten:

$$u = a + 2c\rho, \quad v = -2c\sigma$$

$w$  verhält sich im Unendlichen des ersten Blattes wie

$$a + \frac{ic}{z},$$

so daß  $a$  als Geschwindigkeit im Unendlichen und  $2\pi c$  als Wert der Zirkulation zu betrachten ist. Am Verzweigungsschnitt und zwar am oberen bzw. unteren Ufer ist in Übereinstimmung mit Fig. 4a

$$\tau = i(x \mp i\sqrt{1-x^2}),$$

also die Geschwindigkeitskomponenten:

$$u = a \pm 2c\sqrt{1-x^2}, \quad v = -2cx.$$

Bei kleiner Wölbungshöhe ist dies auch die Geschwindigkeitsverteilung an der Flugfläche. An den Verzweigungspunkten  $x = \mp 1$  ist demnach:

$$u = a, \quad v = \pm 2c,$$

so daß hier ein Aufströmen bzw. Abströmen stattfindet. Die Beschleunigung bzw. Verzögerung ist wegen der  $\sqrt{1-x^2}$  in  $u$  an diesen Punkten  $\infty$ . In der Mitte der Flugfläche ist oben bzw. unten:

$$u = a \pm 2c, \quad v = 0,$$

also die richtige Geschwindigkeitsvermehrung bzw. -verminderung. Dies Verhalten im physikalischen Blatt entspricht allen Anforderungen. Aus dem Werte der Zirkulation folgt nach der in 1. erwähnten Formel der Auftrieb pro Einheit der Breite

$$K = 2\pi \frac{\rho}{g} ac,$$

als Impulsstrom aus dem Unendlichen zum Verzweigungsschnitt hin.

7. Durch Integration gewinnt man aus  $w$  das komplexe Potential:

$$\varphi + i\psi = \chi = \int w dz,$$

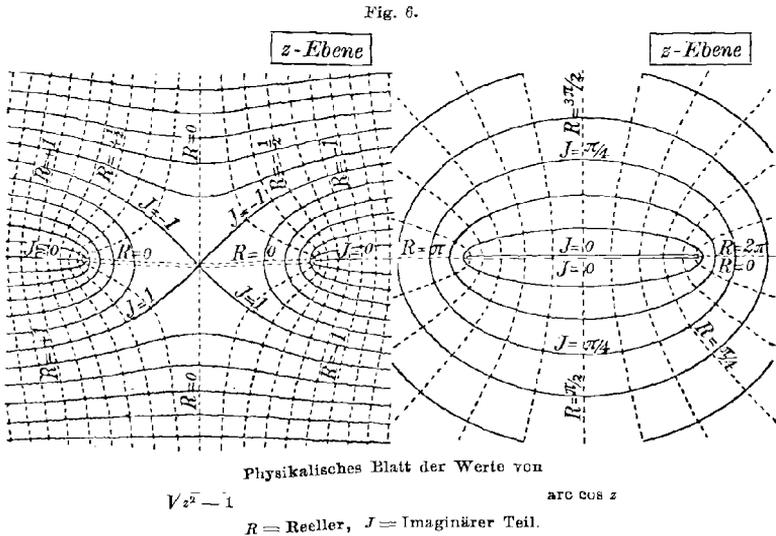
$$\chi = az + icz(z + \sqrt{z^2 - 1}) + c \arccos z$$

232 Stromfunktionen symm. u. unsymm. Flügel in zweidimensionaler Strömung.  
 oder bei Einführung von  $\tau$  ins Integral:

$$\chi = a z - ic \frac{\tau^2}{2} - ic \ln \tau,$$

wobei die untereinanderstehenden Glieder bis auf Konstante gleich sind.

Von  $\sqrt{z^2 - 1}$  entspricht das in Fig. 6a gezeichnete Blatt dem physikalischen Blatt und von  $\arccos z$  ist, in Übereinstimmung mit dem



oben festgestellten Wert der Zirkulation die Werteverteilung der Fig. 6b zu benutzen. Der Wert der Stromfunktion  $\psi$  an beiden Verzweigungspunkten ist:

$$\psi = c.$$

Die Ausrechnung der Potentialdifferenzen am oberen und unteren Ufer des Verzweigungsschnittes entlang ergibt den schon im Unendlichen festgestellten Wert der Zirkulation.

Zur genauen Berechnung des Querschnittes der Flugfläche müßte nun  $\chi$  in reell und imaginär zerlegt werden, was sehr mühsam ist. Wir führen daher die genaue Rechnung nur einzelner charakteristischer Stücke durch: An den Verzweigungspunkten  $z = \pm 1$  ist:  $u = a, v = \pm 2c$ , also der Tangens des Neigungswinkels der Fläche:  $\pm 2c/a$ . Um den Wölbungspfeil  $f$  zu finden, müssen wir für  $z = if$  die Stromfunktion  $\psi$  ausrechnen und  $= c$  setzen: Es ergibt sich unter Benutzung der Werteverteilungen von Fig. 6 für den oberen Rand:

$$af - cf(f - \sqrt{f^2 + 1}) + c \operatorname{Ar} \sin f = c.$$

Und in gleicher Weise für den unteren Rand, zu dem wir in Fig. 6a

und b durch den Verzweigungsschnitt von unten ins nächste Blatt gehen müssen:

$$af - cf(f + \sqrt{f^2 + 1}) - c \text{Arjñ} f = c.$$

Also für die beiden Begrenzungen verschiedenen Wölbungspfeil  $f$ . Bei kleinem  $\frac{c}{a}$ , wie es den praktischen Fällen entspricht, wird aus beiden Gleichungen:

$$f = \frac{c}{a}.$$

Hierdurch ist die Zirkulation mit der Wölbungshöhe in Verbindung gebracht. Bei größerem  $\frac{c}{a}$  wird das  $f$  der unteren Begrenzung sogar größer als das der oberen, so daß die Dicke der Flugfläche negativ würde. Diese Unstimmigkeit soll durch die folgenden Verallgemeinerungen beseitigt werden.

8. Zunächst sollen für kleines  $\frac{c}{a}$  einige naheliegende Resultate gewonnen werden:

Man kann zur Berechnung der Flugfläche von kleiner Durchbiegung in allen mit  $c$  multiplizierten Gliedern  $y = 0$ , also  $z = x$  setzen, was bereits in Absatz 6 bei der Berechnung der Werte von  $u$  und  $v$  am Verzweigungsschnitt geschah. Die Gleichung der Flugfläche kommt aus der Formel für das komplexe Potential mit  $z = x$  in den kleinen Gliedern:

$$\chi = az + icx(x \mp i\sqrt{1-x^2}) + c \arccos x$$

heraus, indem man  $\psi = c$  setzt:

$$\psi = ay + cx^2 = c$$

also:

$$y = \frac{c}{a}(1 - x^2).$$

Der in (7) berechnete Neigungswinkel an den Enden und die angenäherte Wölbungshöhe werden hierdurch bestätigt.

Um eine Konstante zu sparen, waren die Verzweigungspunkte nach  $z = \pm 1$  gelegt, also die Tiefe  $l$  des Querschnitts  $l = 2$  angenommen. Es werden dadurch nur die Formeln berührt, die in den Dimensionen nicht stimmen. ( $c \sim$  Geschwindigkeit  $\times$  Länge). Der in Absatz 6 ermittelte Auftrieb ist mit der Breite  $\frac{F}{l}$  zu multiplizieren:

$$K = 2\pi \frac{\gamma}{g} ac \cdot \frac{F}{l}$$

oder wenn wir die Zirkulation durch den Wölbungspfeil ausdrücken:

$$K = 2\pi \frac{f}{l} \cdot \frac{\gamma}{g} Fa^2.$$

Auch die oben erwähnte Kuttasche Abhandlung gibt für kleine Wölbungshöhe dieselbe Formel. Die Übereinstimmung mit den experimentellen Bestimmungen kann an Hand der Mitteilungen aus der Göttinger Modellversuchsanstalt<sup>1)</sup> geprüft werden. Es ist dort geschrieben:

$$K = \xi \cdot \frac{\gamma}{g} F a^2,$$

wobei  $a$  die Geschwindigkeit des Flugzeuges,  $F$  die Fläche,  $\gamma$  das spez. Gew. der Luft,  $\xi$  ein dimensionsloser Koeffizient ist, und es ergibt sich nun hier theoretisch:

$$\xi = 2\pi \frac{f}{l}.$$

Nur für sehr kleine Wölbungshöhe  $\frac{f}{l} = \frac{1}{60}$  stimmt der theoretische Wert annähernd mit dem gemessenen überein, und auch wenn man berücksichtigt, daß nach Nr. 5 der Göttinger Mitteilungen der Koeffizient für den zweidimensionalen Vorgang größer wird, gelangt man zur Übereinstimmung höchstens bis  $\frac{f}{l} = \frac{1}{25}$ .

9. Daß bei der genaueren Rechnung in Absatz 7 die Dicke der Flugfläche in zweiter Näherung negativ wird, hat darin seinen Grund, daß unterhalb der Fläche die Komponente  $u$  kleiner als oben ist, so daß die Neigung  $\frac{v}{u}$  der Strömung etwas steiler als oben wird. Wir werden diesen Umstand vermeiden, und sogar positive Dicke erhalten, wenn wir den Pol der Abbildung näher an die obere Begrenzungslinie heranbringen, wodurch dort größere Werte von  $v$  sich ergeben, als an dem (im physikalischen Blatt) unteren Rand des Verzweigungsschnittes. Der Pol muß also nicht im Unendlichen des zweiten Blattes, sondern in seiner unteren Halbebene bei positivem  $\varrho$  (Fig. 4b) liegen. Wir nehmen den Wert  $\tau_0$ , an den der Pol fällt, zunächst reell an,  $\tau_0 = \varrho_0$ , was noch zu symmetrischen Verhältnissen führt; und stellen nun, ebenso wie in Absatz 5 aus  $\xi$ , so jetzt aus  $\tau$  eine Funktion her, die im zweiten Blatt bei  $\tau = \varrho_0$  einen Pol hat, im Unendlichen des physikalischen Blattes sich wie  $a + \frac{ic}{z}$  verhält, bei  $z = \pm 1$  verzweigt und sonst regulär ist:

$$u - iv = w = a + \frac{2c\varrho_0\tau}{\varrho_0 - \tau}$$

$$\tau = i(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

Die Konstanten in der Geschwindigkeitsverteilung  $w$  sind so normiert, daß der Auftrieb pro Einheit der Breite

$$K = 2\pi \frac{\gamma}{g} ac$$

1) Zeitschr. f. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt 1910, Heft 11, S. 129; Heft 15, S. 193.

bleibt, in Übereinstimmung mit dem Verhalten im Unendlichen. Die Geschwindigkeiten am oberen und unteren Rande der Flugfläche sind bei kleinem  $\frac{c}{a}$ , also flacher Krümmung:

$$w = a + 2c\varrho_0 \frac{\pm\sqrt{1-x^2} + ix}{\varrho_0 \mp 1 \sqrt{1-x^2} - ix},$$

$$u = a + 2c\varrho_0 \frac{\pm\varrho_0\sqrt{1-x^2} - 1}{1 + \varrho_0^2 \mp 2\varrho_0\sqrt{1-x^2}}, \quad v = \frac{-2c\varrho_0^2 x}{1 + \varrho_0^2 \mp 2\varrho_0\sqrt{1-x^2}},$$

also die Neigung bei  $z = \mp 1$

$$\frac{v}{u} = \pm \frac{\varrho_0^2}{1 + \varrho_0^2} \cdot \frac{2c}{a},$$

und die Geschwindigkeitserhöhung bzw. Erniedrigung in der Mitte:

$$u = a \pm \frac{\varrho_0}{\mp 1} \cdot 2c.$$

10. Als komplexes Potential ergibt sich

$$\chi = \int w dz = az + ic[\varrho_0\tau + (1 + \varrho_0^2) \ln(\varrho_0 - \tau) - \ln \tau].$$

Für  $\varrho_0 = \infty$  geht dies bis auf eine Konstante in die Formel von Absatz 7 über. An den Verzweigungspunkten  $z = \pm 1$ ,  $\tau = \pm i$  hat die Stromfunktion den Wert:

$$\psi_{\pm 1} = c(1 + \varrho_0^2) \ln \sqrt{1 + \varrho_0^2}.$$

Die Gleichung der Flugfläche berechnen wir, in derselben Annäherung wie in (8), in der Weise, daß in die mit  $c$  multiplizierten kleinen Glieder  $\tau = \pm\sqrt{1-x^2} + ix$  für den oberen bzw. unteren Rand eingesetzt wird:

$$\chi = az + ic[\pm\varrho_0\sqrt{1-x^2} + i\varrho_0x + (1 + \varrho_0^2) \ln(\varrho_0 \mp \sqrt{1-x^2} - ix) - \ln(\pm\sqrt{1-x^2} + ix)],$$

und nun gibt  $\psi = \psi_{\pm 1}$  gesetzt die Gleichung der Fläche:

$$\psi = ay + c[\pm\varrho_0\sqrt{1-x^2} + (1 + \varrho_0^2) \ln \sqrt{\varrho_0^2 \mp 2\varrho_0\sqrt{1-x^2} + 1}] = c(1 + \varrho_0^2) \ln \sqrt{1 + \varrho_0^2},$$

also:

$$y = \frac{c}{a} \left[ (1 + \varrho_0^2) \ln \sqrt{\frac{1 + \varrho_0^2}{1 + \varrho_0^2 \mp 2\varrho_0\sqrt{1-x^2}}} \mp \varrho_0\sqrt{1-x^2} \right].$$

Die Wölbungshöhe  $f$  für den oberen und unteren Rand ist hiernach:

$$f = \frac{c}{a} \left[ (1 + \varrho_0^2) \ln \frac{\sqrt{1 + \varrho_0^2}}{\varrho_0 \mp 1} \mp \varrho_0 \right].$$

Der von dem Parameter  $\varrho_0$  abhängige Faktor, der sich für großes  $\varrho_0$  wie  $1 \pm \frac{4}{3\varrho_0} + \frac{1}{\varrho_0^2}$  verhält, also in den Wert von Absatz 7 und 8 über-

geht, ist in Fig. 7 als Funktion von  $\varrho_0$  gezeichnet. Die berechneten Werte sind:

	Für $\varrho_0 = 1$	1,2	1,5	2	3	4	6	8	10	$\infty$
$\frac{a}{c} \cdot f$	{ oben = $\infty$	3,815	2,668	2,024	1,581	1,406	1,253	1,183	1,146	1
	{ unten = 0,307	0,364	0,437	0,531	0,650	0,722	0,803	0,847	0,876	1.

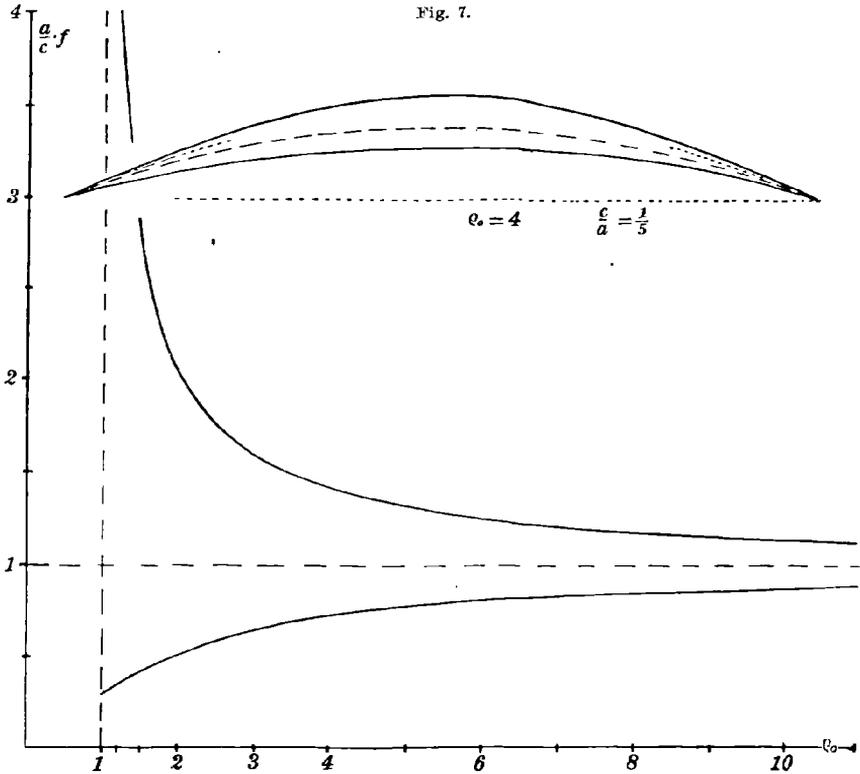


Fig. 7.

Außerdem ist in Fig. 7 die Flügelform für  $\varrho_0 = 4$ ,  $\frac{c}{a} = \frac{1}{5}$  gezeichnet. Die berechneten Werte sind:

	$x = 0$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$a$	{ oben = 1,406	1,336	1,131	0,815	0,420	0
$c \cdot y$	{ unten = 0,722	0,696	0,618	0,484	0,286	0

Die Neigung am Ende ist  $\frac{1,882}{5}$  und es sei bemerkt, daß der obere Bogen die Tangente von oben berührt. Die Tragkraft ist dieselbe wie bei der gestrichelt gezeichneten einfachen Fläche, die am Ende etwas stärkere Neigung  $2/5$  hat. Je nach der Wahl von  $\frac{c}{a}$  kann bei gleicher

Ausdehnung in der  $x$ -Richtung die Wölbung flacher genommen werden. Die Wahl von  $\varrho_0$  bestimmt das Verhältnis der Dicke zur Wölbung.

11. Eine Serie unsymmetrischer Flugflächen ergibt sich, wenn der Pol im zweiten Blatt auf der reellen  $x$ -Achse liegt. Wir legen seinen Ort, ebenso wie in Absatz 5 und 9 durch den Wert von  $\tau$  fest, der dann rein imaginär wird:  $\tau_0 = i\sigma_0$ . Soll die Flugfläche an der vorderen Seite stärker gekrümmt sein, so muß der Pol an dieser Seite, also bei negativem  $\sigma_0$  liegen, damit dort die größeren Werte von  $v$  hinkommen. Die Geschwindigkeitsverteilung ist, wie in Absatz 9, gegeben durch:

$$w = a - ib + \frac{2c i \sigma_0 \tau}{i \sigma_0 - \tau},$$

$$\tau = i(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$b$  ist die  $y$ -Komponente der Geschwindigkeit im Unendlichen, die hier der Unsymmetrie wegen auftreten muß. Als wesentlicher Parameter tritt neben der  $x$ -Komponente  $a$  und der Zirkulation  $2\pi c$  die Zahl  $\sigma_0$  auf, die für die Unsymmetrie maßgebend ist.  $b$  ist dann nicht mehr unabhängig, denn eben wegen der Unsymmetrie wird die Stromfunktion  $\psi$  bei  $z = -1$  und  $z = +1$  im allgemeinen nicht mehr denselben Wert annehmen; es wird vielmehr im allgemeinen eine Anzahl Stromlinien durch den Verzweigungsschnitt ins andere Blatt übertreten, sowie am anderen Ufer eine ebenso große Zahl<sup>1)</sup> aus dem zweiten Blatt eintreten. Nur bei bestimmter Strömungsrichtung  $b/a$  wird diese Anzahl Null sein. Der Zusammenhang zwischen  $b$ ,  $c$  und  $\sigma_0$  wird also bestimmt durch Gleichsetzen der Stromfunktionen für  $z = -1$  und  $+1$ .

Das komplexe Potential ist:

$$\chi = (a - ib)z + ic[i\sigma_0\tau + (1 - \sigma_0^2) \ln(i\sigma_0 - \tau) - \ln \tau]$$

und nun für  $z = -1$ ,  $\tau = -i$ :

$$\psi_{-1} = b + c\sigma_0 + c(1 - \sigma_0^2) \ln|\sigma_0 + 1|$$

für  $z = +1$ ,  $\tau = +i$ :

$$\psi_{+1} = -b - c\sigma_0 + c(1 - \sigma_0^2) \ln|\sigma_0 - 1|$$

und hieraus:

$$b = c \left[ -\sigma_0 - \frac{\sigma_0^2 - 1}{2} \ln \frac{\sigma_0 - 1}{\sigma_0 + 1} \right].$$

12. Am Verzweigungsschnitt bzw. an der Flugfläche ist

$$u = a \pm 2c \frac{\sigma_0^2 \sqrt{1 - x^2}}{\sigma_0^2 - 2\sigma_0 x + 1}$$

$$v = b + 2c \frac{\sigma_0 (1 - \sigma_0 x)}{\sigma_0^2 - 2\sigma_0 x + 1},$$

1) Bei reellem  $c$ , also reiner Zirkulation, wobei im Unendlichen keine Divergenz ist.

das obere Vorzeichen gilt für den oberen, das untere für den unteren Rand der Fläche. An den Enden bei  $z = \mp 1$  ist:

$$\begin{aligned}u_{\mp 1} &= a, \\v_{-1} &= b + 2c \frac{\sigma_0}{\sigma_0 + 1}, \\v_{+1} &= b - 2c \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - 1}.\end{aligned}$$

13. Die Gleichung der Flugfläche, deren oberer und unterer Rand ebenso wie in 7 und 8 in erster Näherung zusammenfallen, erhalten wir ebenso wie in 10:

$$y = \frac{c}{a} \left[ -x \cdot \frac{\sigma_0^2 - 1}{2} \ln \frac{\sigma_0 - 1}{\sigma_0 + 1} + \frac{\sigma_0^2 - 1}{2} \ln \frac{\sigma_0^2 - 2\sigma_0 x + 1}{\sigma_0^2 - 1} \right].$$

Der Scheitel der Fläche liegt bei  $v = 0$  oder  $\frac{dy}{dx} = 0$ , also:

$$x_{\max} = -\frac{1}{\ln \frac{\sigma_0 - 1}{\sigma_0 + 1}} + \frac{1}{2} \left( \sigma_0 + \frac{1}{\sigma_0} \right).$$

Die Wölbungshöhe  $f$ , die proportional zu  $\frac{c}{a}$  wird, ergibt sich dann aus der Formel für  $y$ . Zahlenwerte sind in Absatz 15 angegeben.

14. Die Konstanten in  $w$  sind so normiert, daß  $a$  und  $b$  die Geschwindigkeitskomponenten,  $2\pi c$  die Zirkulation ist. Es sind demnach, in Übereinstimmung mit der komplexen Formel, die Kraftkomponenten pro Einheit der Breite:

$$X = -2\pi \frac{\gamma}{g} bc, \quad Y = 2\pi \frac{\gamma}{g} ac.$$

Die Resultierende steht also stets senkrecht zur Strömung, und es ist auch bei schiefer Strömung eine Arbeitsleistung nicht erforderlich.

Zur Berechnung des Angriffspunktes berechnen wir das Drehmoment um den Koordinatennullpunkt nach der Formel<sup>1)</sup>

$$N = \text{reeller Teil von: } \frac{\gamma}{2g} \int w^2 z dz$$

und aus dem Verhalten von  $w$  im Unendlichen folgt pro Einheit der Breite:

$$N = \pi \frac{\gamma}{g} \frac{ac}{\sigma_0}.$$

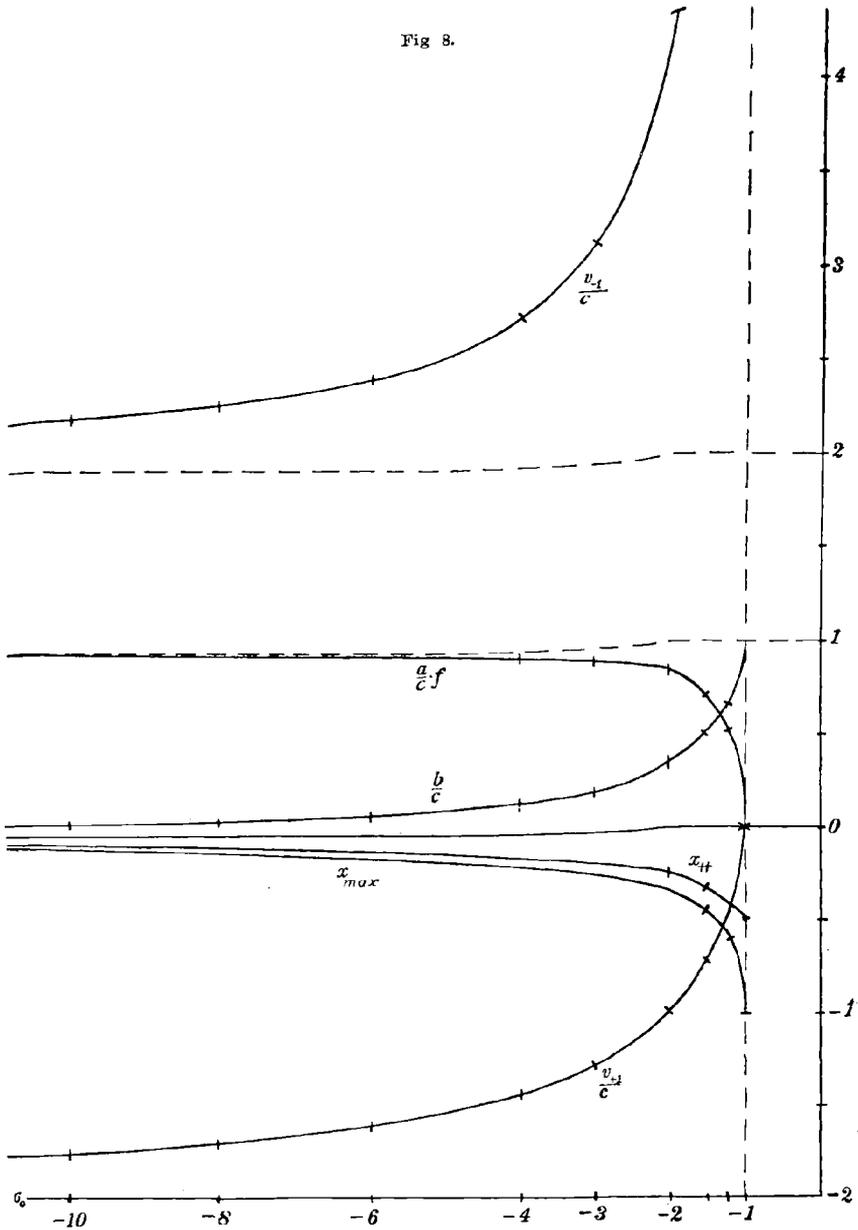
Der Hebelarm, an dem der Auftrieb  $Y$  angreift, ist:

$$x_H = \frac{N}{Y} = \frac{1}{2\sigma_0}.$$

1) Zeitschr. f. Math. u. Physik, Bd. 58, 1910; S. 96.

VON H. BLASIUS.

Fig 8.



15. Die in 11 bis 14 entwickelten Formeln ergeben als Funktion des Parameters  $\sigma_0$  die in Fig. 8 gezeichneten Werte. Es ist hierbei zu beachten, daß für die Längen  $x$  und  $y$  die halbe Tiefe der Flugfläche als Einheit gilt, da die Verzweigungspunkte bei  $x = \mp 1$  liegen. Die

Abhängigkeit von den Konstanten  $a$  und  $c$  kommt dadurch zum Ausdruck, daß nicht  $b, v, f$  selbst aufgetragen sind, sondern  $\frac{b}{c}, \frac{v}{c}$  und  $\frac{a}{c} f$ . Die berechneten Zahlenwerte sind folgende:

$\sigma_0$	$\frac{b}{c}$	$\frac{v_{-1}}{c}$	$\frac{v_{+1}}{c}$	$x_{\max}$	$\frac{a}{c} \cdot f$	$x_H$
- 1	1,000	$\infty$	0	- 1	0	- 0,500
- 1,2	0,672	12,672	- 0,419	- 0,600	0,497	- 0,417
- 1,5	0,494	6,494	- 0,706	- 0,462	0,714	- 0,333
- 1,876	0,378	4,662	- 0,926	- 0,363	0,828	- 0,267
- 2	0,352	4,352	- 0,981	- 0,340	0,850	- 0,250
- 3	0,227	3,227	- 1,273	- 0,224	0,936	- 0,167
- 4	0,169	2,836	- 1,431	- 0,167	0,966	- 0,125
- 6	0,112	2,512	- 1,602	- 0,111	0,985	- 0,083
- 8	0,084	2,370	- 1,694	- 0,083	0,992	- 0,082
- 10	0,067	2,289	- 1,751	- 0,067	0,994	- 0,050
- $\infty$	0	2,000	- 2,000	0	1,000	0

Will man die Tiefe  $l$  nicht = 2 setzen, so lautet der Kopf der Tabelle:

$\sigma_0$	$\frac{l}{2} \frac{b}{c}$	$\frac{l}{2} \frac{v_{-1}}{c}$	$\frac{l}{2} \frac{v_{+1}}{c}$	$\frac{2}{l} x_{\max}$	$\frac{a}{c} f$	$\frac{2}{l} x_H$
------------	---------------------------	--------------------------------	--------------------------------	------------------------	-----------------	-------------------

Im Unendlichen verhalten sich diese Funktionen wie

$$\frac{b}{c} \sim -\frac{2}{3\sigma_0}, \quad x_{\max} \sim \frac{2}{3\sigma_0}, \quad \frac{a}{c} f \sim 1 - \frac{5}{9\sigma_0^2},$$

$\sigma_0 = -\infty$  entspricht dem symmetrischen Fall von Absatz 6 und 7. Mit wachsendem  $\sigma_0$  rückt die größte Wölbung immer weiter nach vorn, ebenso der Hebelarm des Auftriebs. Bei gleichem  $\frac{c}{a}$ , also gleichem Auftrieb, wird hierbei die Wölbungshöhe etwas geringer. Ebenso wird natürlich auch mit wachsender Unsymmetrie der Eintrittswinkel  $\frac{v_{-1}}{a}$  steiler (bei gleichem  $\frac{c}{a} \cdot \frac{2}{l}$ ) und entsprechend auch der Winkel  $\arctg \frac{b}{a}$  der äußeren Strömung, bei welchem glatter Eintritt stattfindet. Der Grenzfall  $\sigma_0 = -1$  entspricht der ebenen Fläche, da hier nach 13 überall  $y = 0$  ist. Dem entspricht auch in der vorstehenden Tabelle  $f = 0$  und  $v_{+1} = 0$ . Der Eintritt an der vorderen Kante ist jetzt nicht mehr „stoßfrei“, da die Singularität, der Pol, in diesen Punkt gerückt ist, daher auch  $v_{-1} = \infty$ . Es ist  $c = b \frac{l}{2}$  geworden, so daß also der Auftrieb pro Breiteinheit  $\pi \frac{\gamma}{g} a b l$  ist. Mit der Breite  $\frac{F}{l}$  multipliziert ergibt dies:

$$K = \frac{\pi b}{a} \cdot \frac{\gamma}{g} F a^2.$$

Der Angriffspunkt  $x_H = -0,5 \cdot \frac{l}{2}$  liegt um ein Viertel der Tiefe vom

vorderen Rande entfernt. Der Teilungspunkt  $u=0$  der Strömung von Fig. 2 (die nicht quantitativ gezeichnet ist) liegt nach der Gleichung in 12 am unteren Rande bei:

$$a = 2b \frac{\sqrt{1-x^2}}{2+2x}$$

oder mit Rücksicht auf die Dimension von  $x$ :

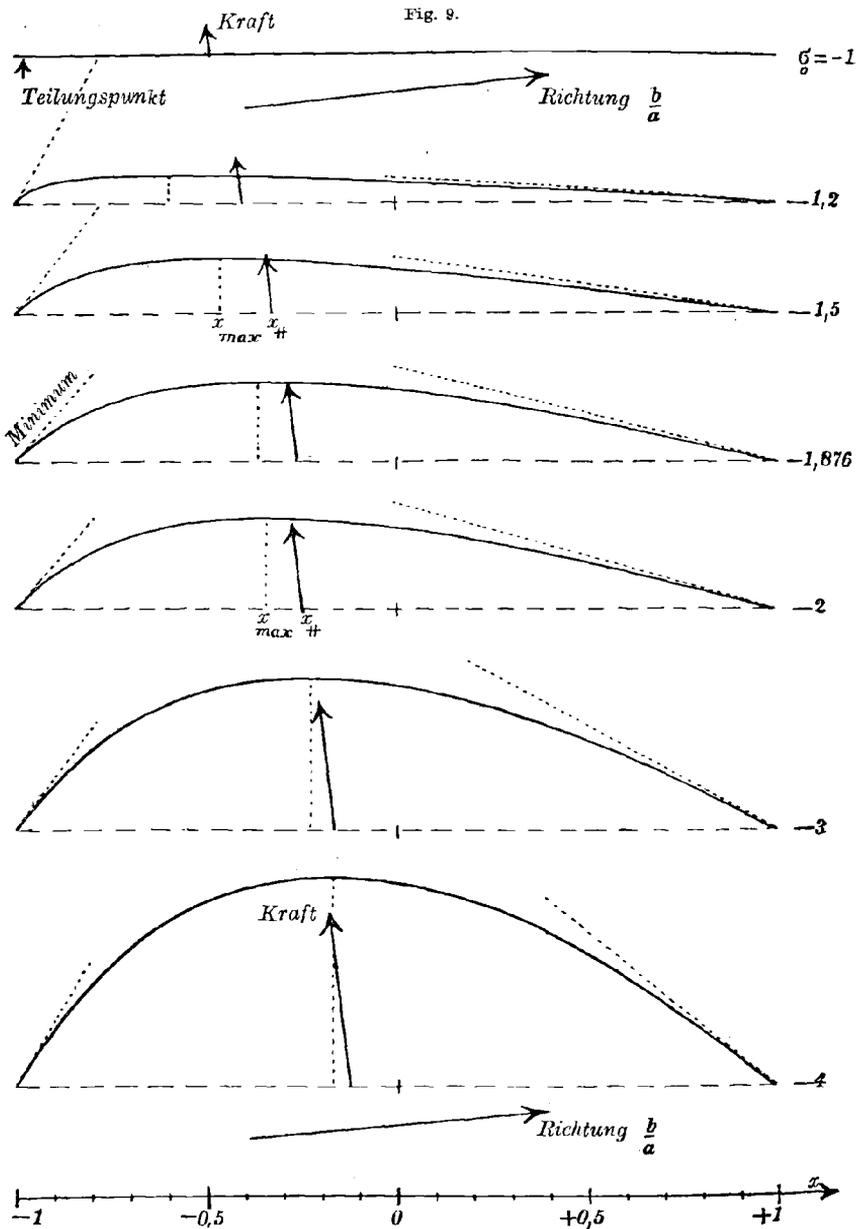
$$x = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \cdot \frac{l}{2}.$$

Alles ist in Übereinstimmung mit Kutta, in dessen oben genannter Abhandlung dieser Fall ebenfalls als Spezialfall auftritt. Da die Kraft nicht senkrecht auf der Fläche, sondern auf der Geschwindigkeit steht, so müssen wir mit Kutta eine Saugkraft infolge des Unterdrucks an der vorderen Ecke annehmen.

16. Nach Absatz 11 sind von den 4 Parametern  $a, b, c, \sigma_0$  drei unabhängig. Die Abhängigkeit von  $a$  ist trivial, da sich hier nur eine proportionale Vergrößerung der Geschwindigkeiten ergibt. Es bleiben also als wesentliche Parameter übrig  $\frac{b}{a}, \frac{2c}{la}$  und die Unsymmetrie  $\sigma_0$ , zwischen denen eine Beziehung besteht. Den Zusammenhang und die Hauptabmessungen der zugehörigen Flügelformen beherrschen wir durch die Tabelle in Nr. 15. Weitere Punkte der einzelnen Fläche können nach 13 berechnet werden.

Bei konstantem  $\frac{b}{a}$  gibt es noch  $\infty^1$  Flügelformen, bei denen glatter Eintritt stattfindet, je nach dem Grade der Unsymmetrie  $\sigma_0$ . In der folgenden Tabelle und in Fig. 9 ist die Reihe dieser Flächen dargestellt für den Wert  $\frac{b}{a} = 0,1 \sim 5^{\circ}44'$ . Es ist berechnet die Größe  $\frac{2}{l} \cdot \frac{c}{a}$ , der die Kräfte proportional sind, die Neigungen  $\frac{v_{-1}}{a}$  und  $\frac{v_{+1}}{a}$  und die Wölbungshöhe  $f$  in Teilen der halben Tiefe.  $x_{\max}$  und  $x_H$  siehe Absatz 15.

$\sigma_0$	$\frac{2}{l} \cdot \frac{c}{a}$	$\frac{v_{-1}}{a}$	$\frac{v_{+1}}{a}$	$\frac{2}{l} f$
— 1	0,100	$\infty$	— 0	0
— 1,2	0,149	1,887	— 0,062	0,074
— 1,5	0,203	1,318	— 0,143	0,145
— 1,876	0,264	1,230	— 0,244	0,218
— 2,0	0,284	1,238	— 0,278	0,241
— 3	0,441	1,422	— 0,572	0,413
— 4	0,592	1,678	— 0,846	0,572
— 6	0,893	2,240	— 1,430	0,880
— 8	1,191	2,822	— 2,020	1,182
— 10	1,493	3,422	— 2,618	1,485
— $\infty$	$\infty$	$\infty$	— $\infty$	$\infty$ .



Bemerkenswert sind die außerordentlich großen Werte der Neigung am vorderen Rande, die ein Minimum bei  $\sigma_0 = -1,876$  zeigen. Die Lage dieses Minimums ist von  $\frac{b}{a}$  unabhängig.

Die Wahl gerade dieser Flügelform ist insofern relativ günstig, als eine möglichst geringe Neigung vorn die Wirbelbildung vermindert. Indessen kann sie natürlich nicht als „beste“ Flügelform angesprochen werden, denn erstens ist sie nach der Art der Herstellung nur ein partikulärer Fall, und zweitens wird man gut tun, von diesem Werte zu symmetrischen Formen (etwa bis  $\sigma_0 = -2$ ) abzuweichen, da der Auftriebskoeffizient  $\frac{c}{a}$  und die Wölbungshöhe dorthin wächst, während sich der Eintrittswinkel an seinem Minimum ja wenig ändert. Bei den letzten gezeichneten Flügeln  $\sigma_0 = -3$  und  $-4$  ist eine Übereinstimmung der berechneten Strömung mit der Wirklichkeit natürlich nicht mehr vorhanden (vgl. Absatz 8). Die Formen liegen auch nicht mehr im Bereich der Näherung. Diese Typen führen erst bei einer Verkleinerung der  $y$ -Ordinaten und entsprechender Verkleinerung der Richtung  $\frac{b}{a}$  zu brauchbaren Formen. Ein Maximum für den Auftrieb und eine „beste“ Fläche ergibt sich aus diesen rein dynamischen Rechnungen nicht.

17. Zur weiteren Durchführung der hier verwendeten Methode bietet sich zunächst die Möglichkeit, den Pol im zweiten Blatt zu beliebig komplexen Werten von  $\tau$ :  $\tau_0 = \rho_0 + i\sigma_0$  zu legen. Man erhält dadurch Flügel von beliebiger Dicke ( $\rho_0$ ) und Unsymmetrie ( $\sigma_0$ ). Die Ränder laufen dabei stets in Spitzen aus, an denen glatter Eintritt der Strömung stattfindet. Um ein Umströmen der vorderen Spitze darzustellen, wie in Absatz 15 erwähnt, muß man einen weiteren Pol in diese Spitze hineinlegen. Man würde so Anschluß an die Kuttaschen Resultate herstellen. Um abgerundete Enden darzustellen, müßte im vorderen Punkt eine Quelle liegen;  $c$  würde dann komplex werden müssen, da die vollständige Funktion  $w$  im Unendlichen divergenzfrei sein muß. Man würde so Verallgemeinerungen der Joukowskyschen Formen herstellen.

Andererseits ist zur Verbesserung des Anschlusses an die experimentellen Werte die Anwendung der Prandtlschen Ablösungstheorie<sup>1)</sup> auf die Grenzschichten am Flügel nötig.

1) Föppl: Technische Mechanik, Bd. VI, S. 371.

## Über die Verzahnung der Hyperboloidräder mit geradlinigem Eingriff.

VON MARTIN DISTELI in Karlsruhe.

Die vorliegenden Ausführungen bezwecken, allgemeine Gesetze für die Verzahnungen der Hyperboloidräder mit geradlinigen Eingriffsflächen aufzustellen.

Diese Verzahnungen von Rädern an gekreuzten Achsen bilden das eigentliche Analogon zu den bekannten Linienverzahnungen der Räder mit parallelen und mit sich schneidenden Achsen und ist daher im folgenden das Augenmerk darauf gerichtet, den Zusammenhang der vorliegenden Aufgaben im Raume mit denjenigen der Ebene und der Kugel nach Möglichkeit hervortreten zu lassen.<sup>1)</sup>

Daher wurde auch die gebräuchliche Einteilung der Verzahnungen in zwei Gruppen beibehalten, je nachdem die Zahn- oder Profilflächen durch primäre oder sekundäre Axoide dargestellt werden, obschon im Grunde ein wesentlicher Unterschied beider Methoden nicht besteht.

Da nicht jede willkürliche Regelfläche Eingriffsfläche sein kann, eine graphische Darstellung der Verzahnung ohne Kenntnis der Eingriffsfläche aber schlechterdings unmöglich ist, so ist auch die Eingriffsfläche durch primäre und sekundäre Axoide dargestellt.

Die primären Axoide der Eingriffsfläche führen alsbald zu den primären Axoiden der Profilflächen. Diese Darstellung kann als die allgemeine räumliche *Zykloidenverzahnung* bezeichnet werden. Wird der Richtungskegel der Eingriffsfläche ein gerader Kreiskegel, so fallen Eingriffsfläche und primäres Axoid der Profilflächen in die nämliche offene, scharfgängige Schraubenfläche zusammen, und wir haben das vollkommene Analogon zur gewöhnlichen Zykloidenverzahnung der Ebene und der Kugel.<sup>2)</sup>

Die sekundären Axoide der Eingriffsfläche führen analog zu dem sekundären Axoiden der Profilfläche, wobei der Richtungskegel des

1) Vgl. M. Disteli, Über einige Sätze der kinematischen Geometrie, welche der Verzahnungslehre zylindrischer und konischer Räder zugrunde liegen. Diese Zeitschrift, 56. Band 1908, Heft 3.

2) Vgl. M. Disteli, Über instantane Schraubengeschwindigkeiten und die Verzahnung der Hyperboloidräder. Diese Zeitschrift, 51. Band 1904, in welcher Arbeit die graphische Darstellung der speziellen Zykloidenverzahnung ausgeführt ist.

R. Crain, Schraubenräder mit geradlinigen Eingriffsflächen. Dissertation, Technische Hochschule Berlin 1907

ruhenden sekundären Axoids der Evolutenkegel des Richtungskegels der Profilfläche ist, während seine auf ihm rollende Tangentenebene den Richtungskegel des beweglichen sekundären Axoids darstellt. Die Verzahnung kann daher als allgemeine räumliche *Evolventenverzahnung* bezeichnet werden. Hierbei muß aber, um völlige Allgemeinheit zu erreichen, noch eine willkürlich zu wählende Schiebung des beweglichen Axoids längs der Erzeugenden der Profilfläche hinzugenommen werden.

Geht der Richtungskegel der Eingriffsfläche in ein ebenes Strahlbüschel über, so erhalten wir die gewöhnliche räumliche Evolventenverzahnung. Aber es ist hierbei erst durch gewisse, im allgemeinen zulässige Näherungen möglich, zu bewirken, daß die Eingriffsfläche und das bewegliche sekundäre Axoid in dieselbe offene flachgängige Schraubenfläche zusammenfallen, wodurch dann das vollständige Analogon der Evolventenverzahnung der Ebene und der Kugel erreicht wird.

Diese Darstellung der Evolventenverzahnung, welche schon wegen ihrer Einfachheit und Anschaulichkeit Interesse verdient, scheint bis anhin keine Behandlung gefunden zu haben, vielleicht aus dem Umstande, weil die von Th. Olivier<sup>1)</sup> schon viel früher aufgestellte erste räumliche Linienverzahnung irrtümlicherweise als Evolventenverzahnung angesehen wurde.

Dies ist aber keineswegs der Fall; vielmehr gehört das Beispiel von Olivier als Spezialfall zu einer Gruppe allgemeinerer Verzahnungen, welche aus denjenigen mit geradlinigem Eingriff dadurch hervorgehen, daß an Stelle der geraden Linie eine Hilfsfläche  $\Phi$  in die Bewegung der primären Axoide einbezogen wird. Die Profilflächen erscheinen dann als Hüllflächen dieser Hilfsfläche  $\Phi$  mit krummlinigem Eingriff und die Verzahnung Oliviers, die developpable Profilflächen besitzt, wurde nur geradlinig, weil bei dieser in Rücksicht auf möglichste Einfachheit die Hilfsfläche  $\Phi$  als eine ebene Fläche gewählt worden ist.

Wir erkennen daraus, daß die Verzahnungen mit geradlinigen Eingriffsflächen voranzustellen sind und durch Einführung einer Hilfsfläche von selbst zu den allgemeinsten Verzahnungen mit krummlinigem Eingriff hinüberführen.

## I. Teil.

### Darstellung der Verzahnung durch primäre Axoide. Räumliche Zykloidenverzahnung.

#### § 1. Die Grundkörper der Hyperboloidräder.

Die Punkte eines ruhenden Systems  $\Sigma$  seien bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem  $O(X, Y, Z)$ . In diesem System vollziehe ein zweites System  $\sigma$  augenblicklich eine Schraubenbewegung um eine

1) Vgl. Théodore Olivier; *Théorie géométrique des Engrenages*. Paris 1842.

Achse  $o$ , welche durch den Punkt  $(a, b, c)$ , die Winkelgeschwindigkeit  $\omega(P, Q, R)$  und den Windungsparameter  $h$  bestimmt ist, so daß

$$S = h \cdot \omega$$

die augenblickliche Schiebungsgeschwindigkeit längs der Achse  $o$  bedeutet.

Alsdann hat der mit dem Punkt  $P(X, Y, Z)$  koinzidierende Punkt von  $\sigma$  in  $\Sigma$  die Geschwindigkeitskomponenten

$$(1) \quad \begin{aligned} U_x &= U - RY + QZ \\ U_y &= V - PZ + RX \\ U_z &= W - QX + PY, \end{aligned}$$

wobei die Größen  $U, V, W$  durch die Gleichungen

$$(2) \quad \begin{aligned} U &= hP + Rb - Qc \\ V &= hQ + Pc - Ra \\ W &= hR + Qa - Pb \end{aligned}$$

erklärt sind.

Die Gleichungen (1) sagen aus, daß eine instantane Schraubengeschwindigkeit stets darstellbar ist durch zwei Strecken, die von einem Reduktionspunkt  $O$  ausgehen, von welchen die eine die parallel an den Punkt  $O$  verschobene Winkelgeschwindigkeit  $(P, Q, R)$  ist, die andere die Geschwindigkeit  $(U, V, W)$ , welche der Reduktionspunkt durch die Schraubebewegung selbst erhält.

Sind ferner in einer Achse der Anfangspunkt und die positive Richtung festgelegt, und erfolgt um die Achse eine Drehung, welche von der positiven Seite gegen den Anfangspunkt gesehen, im Sinne des Uhrzeigers dreht, so soll die Drehung als positiv bezeichnet werden. Ebenso seien die Achsen des Koordinatensystems jedesmal derart bezeichnet, daß die Drehungen von  $X$  nach  $Y$ , von  $Y$  nach  $Z$  und von  $Z$  nach  $X$  von der dritten Achse aus gesehen im Sinne des Uhrzeigers erfolgen.

Denkt man sich jetzt ein System  $\Sigma_1$ , dessen feste Achse  $o_1$  die Achse  $Y$  im Abstände  $(-r_1)$  von  $O$  rechtwinklig schneidet, und welche gegen die Achse  $Z$  den Winkel  $(\frac{\pi}{2} + \alpha_1)$  einschließt (Fig. 1), drehe sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $(-\omega_1)$  um  $o_1$ , so sind nach (2) die sechs Komponenten dieser Drehgeschwindigkeit bezüglich  $\Sigma$

$$(3) \quad \begin{aligned} P_1 &= -\omega_1 \cos \alpha_1, & U_1 &= -r_1 \omega_1 \sin \alpha_1 \\ Q_1 &= 0, & V_1 &= 0 \\ R_1 &= +\omega_1 \sin \alpha_1, & W_1 &= -r_1 \omega_1 \cos \alpha_1. \end{aligned}$$

Dreht sich desgleichen ein weiteres System  $\Sigma_2$  um die feste Achse  $o_2$ , welche die Achse  $Y$  im Abstände  $(+r_2)$  rechtwinklig trifft und mit der Achse  $Z$  den Winkel  $(\frac{\pi}{2} - \alpha_2)$  einschließt, um  $o_2$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $(+\omega_2)$ , so sind die Komponenten dieser Drehgeschwindigkeit bezüglich  $\Sigma$

$$(4) \quad \begin{aligned} P_2 &= \omega_2 \cos \alpha_2, & U_2 &= r_2 \omega_2 \sin \alpha_2 \\ Q_2 &= 0 & V_2 &= 0 \\ R_2 &= \omega_2 \sin \alpha_2, & W_2 &= -r_2 \omega_2 \sin \alpha_2. \end{aligned}$$

Um die zu diesen Drehgeschwindigkeiten gehörenden Grundhyperboloide  $H_1$  und  $H_2$  zu bestimmen, hat man bloß die Differenz der beiden Drehgeschwindigkeiten zu bilden. Alsdann ist die Achse dieser resultierenden Schraubengeschwindigkeit die gemeinsame Berührungskante der Hyperboloide, während ihre Winkel- resp. Schiebungs- resp. Gleitgeschwindigkeit die relative Roll- resp. Gleitgeschwindigkeit darstellen, mit welchen das eine Hyperboloid auf dem anderen abschrotet. Wir wollen dabei über die vier positiven Konstanten  $r_1, r_2, \alpha_1, \alpha_2$  so verfügen, daß die gemeinsame Berührungskante gerade mit der Achse  $X$  zusammenfällt.

Die Bedingungen hierfür sind

$$(5) \quad \begin{aligned} R_2 - R_1 &= \omega_2 \sin \alpha_2 - \omega_1 \sin \alpha_1 = 0 \\ W_2 - W_1 &= -r_2 \omega_2 \cos \alpha_2 + r_1 \omega_1 \cos \alpha_1 = 0, \end{aligned}$$

aus welchen Gleichungen folgt

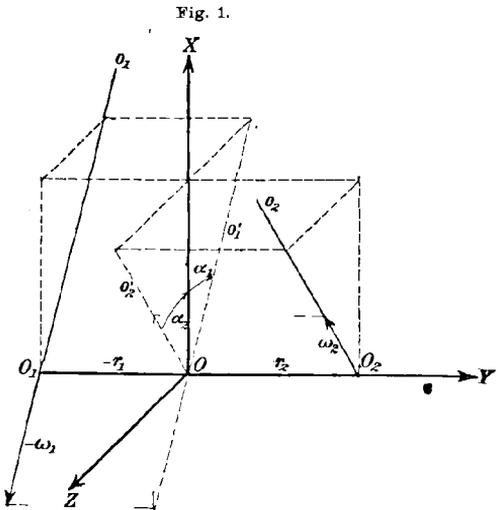
$$(6) \quad r_1 \cotg \alpha_1 = r_2 \cotg \alpha_2.$$

Die resultierende Winkel- und Schiebungs- resp. Gleitgeschwindigkeit haben jetzt die Werte

$$(7) \quad \begin{aligned} P_2 - P_1 &= \omega_2 \cos \alpha_2 + \omega_1 \cos \alpha_1 \\ U_2 - U_1 &= r_2 \omega_2 \sin \alpha_2 + r_1 \omega_1 \sin \alpha_1, \end{aligned}$$

so daß sich für den resultierenden Windungsparameter ergibt

$$(8) \quad h_0 = \frac{U_2 - U_1}{P_2 - P_1} = \frac{r_1 + r_2}{\cotg \alpha_1 + \cotg \alpha_2},$$



welcher Wert sich mit Hilfe der Beziehung (6) auf die Form bringen läßt

$$(9) \quad h_0 = r_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = r_2 \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Bedeutet demnach  $2e$  den kürzesten Abstand und  $2\beta$  den Winkel der beiden Achsen  $o_1$  und  $o_2$ , so daß man hat

$$(10) \quad r_1 + r_2 = 2e, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta$$

so wird

$$(11) \quad \begin{aligned} r_1 &= \frac{2e}{\sin 2\beta} \cos \alpha_2 \sin \alpha_1 \\ r_2 &= \frac{2e}{\sin 2\beta} \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ h_0 &= \frac{2e}{\sin 2\beta} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ k_0 &= r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 = \frac{2e}{\sin 2\beta} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2. \end{aligned}$$

Durch die Krehkreisradien  $r_1$  und  $r_2$  und die Achsenwinkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  sind die Grundhyperboloide vollständig bestimmt. Die Größe  $k_0$  bedeutet den Verteilungsparameter des Hyperboloids  $H_1$ ; die Gleichung (6) drückt also aus, daß beide Hyperboloide denselben Verteilungsparameter haben und sich demgemäß längs  $X$  berühren.

## § 2. Das Grundzylindroid und die einfachsten primären Axoide der Verzahnung.

Wir nehmen an, ein bewegliches System  $\sigma$  besitze gegen  $\Sigma$  augenblicklich eine Schraubengeschwindigkeit  $\omega$ , die durch die 6 Komponenten  $(P, Q, R, U, V, W)$  bestimmt sein möge, während die Systeme  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  sich mit den Winkelgeschwindigkeiten  $(-\omega_1)$  und  $(+\omega_2)$  um die Achsen  $o_1$  und  $o_2$  drehen. Durch die Schraubengeschwindigkeit  $\omega$  erhält jeder Punkt von  $\sigma$  in  $\Sigma$  eine absolute Geschwindigkeit, durch die Drehgeschwindigkeiten  $(-\omega_1)$  und  $(+\omega_2)$  je eine Führungsgeschwindigkeit, durch die Differenz der beiden also eine relative Geschwindigkeit, mit welcher er sich augenblicklich gegen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  bewegt.

Bezeichnen also

$$(12) \quad \Omega_1 = \omega + \omega_1, \quad \Omega_2 = \omega - \omega_2$$

diese relativen Schraubengeschwindigkeiten, so erhebt sich die Frage, wie die Schraubengeschwindigkeit  $\omega$  gewählt werden muß, damit die beiden relativen Schraubengeschwindigkeiten zur nämlichen Schraube  $(X, h_0)$  an der Berührungskante der Grundhyperboloide gehören.

Diese Bedingung erfordert zunächst

$$(13) \quad Q = 0, \quad R = R_1 = R_2,$$

also wird

$$(14) \quad \Omega_1 = P - P_1, \quad \Omega_2 = P - P_3.$$

Sodann muß sein

$$(15) \quad V = 0, \quad W = W_1 = W_2,$$

so daß die Schiebungsgeschwindigkeiten werden

$$S_1 = U - U_1, \quad S_2 = U - U_2.$$

Sollen also die Windungsparameter der beiden relativen Schraubengeschwindigkeiten übereinstimmen, so muß die Gleichung bestehen

$$\frac{S_1}{\Omega_1} = \frac{S_2}{\Omega_2},$$

also

$$\frac{U - U_1}{P - P_1} = \frac{U - U_2}{P - P_2} = \frac{U_2 - U_1}{P_2 - P_1} = h_0.$$

Wenn also die relativen Windungsparameter einander gleich sind, so haben sie den gemeinsamen Wert  $h_0$ , und man erhält daher

$$U = h_0 P + U_1 - h_0 P_1 = h_0 P - (r_1 - r_3) R.$$

Damit also die beiden relativen Schraubengeschwindigkeiten, mit welchen sich  $\sigma$  augenblicklich gegen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  bewegt, zur Schraube  $(X, h_0)$  gehören, muß  $\sigma$  in  $\Sigma$  die Schraubengeschwindigkeit  $\omega$  mit den 6 Komponenten haben

$$(16) \quad \begin{aligned} P &= P, & U &= h_0 P - (r_1 - r_2) R \\ Q &= 0 & V &= 0 \\ R &= R_1 = R_2, & W &= -r_1 \cotg \alpha_1 R. \end{aligned}$$

Da in diesen Gleichungen  $P$  willkürlich bleibt, so werden durch dieselben unendlich viele Schraubengeschwindigkeiten dargestellt, deren Achsen sämtlich die Achse  $Y$  rechtwinklig schneiden und welche daher eine bestimmte Regelfläche erfüllen.

Ist  $s$  der Abstand einer solchen Achse  $o$  von  $O$ ,  $\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)$  der Winkel derselben gegen die Achse  $Z$ ,  $h$  ihr Windungsparameter, so ergeben die Gleichungen (2)

$$(17) \quad \begin{aligned} U &= h P + R s = h_0 P - (r_1 - r_2) R \\ W &= h R - P s = -r_1 \cotg \alpha_1 R. \end{aligned}$$

Setzt man also

$$(18) \quad \begin{aligned} P &= \omega \cos \lambda, & R &= \omega \sin \lambda \\ - (r_1 \cotg \alpha_1 + h_0) &= A_0 \\ - (r_1 - r_2) &= B_0, \end{aligned}$$

so ergibt die Auflösung von (17)

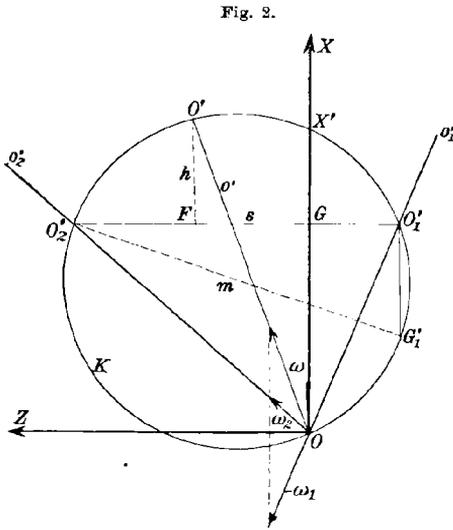
$$\begin{aligned}
 s &= \frac{RU - PW}{P^2 + R^2} = -A_0 \sin \lambda \cos \lambda + B_0 \sin^2 \lambda \\
 (19) \quad h &= \frac{PU + RW}{P^2 + R^2} = h_0 + A_0 \sin^2 \lambda + B_0 \sin \lambda \cos \lambda \\
 s \cotg \lambda - h &= r_1 \cotg \alpha_1 = h_0.
 \end{aligned}$$

Nach der ersten dieser drei Gleichungen ist der gesuchte Ort aller Achsen das durch die drei Achsen  $o_1, o_2, X$  bestimmte Grundzylindroid  $G$ , während die zweite Gleichung jeder Achse den Windungsparameter zuordnet, also die Parameterverteilung angibt. Die dritte Gleichung hat eine geometrische Bedeutung, auf welche wir bald zurückkommen. Zunächst ergibt sich also das Resultat:

*Drehen sich zwei Systeme  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  mit den Winkelgeschwindigkeiten  $(-\omega_1)$  und  $(+\omega_2)$  augenblicklich um die Achsen  $o_1$  und  $o_2$ , während*

*ein System  $\sigma$  in  $\Sigma$  augenblicklich die absolute Schraubengeschwindigkeit  $\omega$  besitzt, und soll jeder Punkt von  $\sigma$  in  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  Relativgeschwindigkeiten von einerlei Richtung erhalten, so müssen die 6 Komponenten der absoluten Schraubengeschwindigkeit dem Gleichungssystem (16) genügen, d. h. die absolute Schraubengeschwindigkeit muß eine der unendlich vielen Schraubengeschwindigkeiten des Grundzylindroids sein.*

Die Schraubengeschwindigkeiten des Grundzylindroids lassen sich nun leicht auch graphisch darstellen. Es sei in Fig. 2 die Ebene  $XZ$  die Zeichenebene. Sind  $o'_1$  und  $o'_2$  die Projektionen der Achsen  $o_1$  und  $o_2$  auf  $XZ$  und ziehen



wir im Abstände  $2e \cotg 2\beta$  eine Parallele zur Achse  $Z$ , so schneidet diese  $o'_1$  in  $O'_1$ ,  $o'_2$  in  $O'_2$  und  $X$  in  $G$  derart, daß  $O'_1G$  und  $GO'_2$  die Längen der Kehlkreisradien  $r_1$  und  $r_2$  der Grundhyperboloide sind. Durch die 3 Punkte  $O, O'_1, O'_2$  läßt sich jetzt ein Kreis  $K$  legen, welcher der Bildkreis der Darstellung heißt und dessen Durchmesser die Länge  $2e : \sin 2\beta$  hat.

Ist jetzt  $o'$  die Projektion der Achse  $o$ , welche gegen  $Z$  den Winkel  $(\frac{\pi}{2} - \lambda)$  einschließt, so trifft diese den Kreis  $K$  zum zweitenmal in einem Punkte  $O'$ , welcher der Bildpunkt der Achse  $o$  heißt. Fällt man nun

von  $O'$  das Lot  $O'F$  auf die Sehne  $O'_1O'_2$ , so lassen die Gleichungen (19) erkennen, daß die Strecke  $GF$  die Entfernung  $s$  der Achse  $o$  von  $X$  und die Strecke  $F'O'$  den Windungsparameter  $h$  derselben darstellen. Beide Strecken sind positiv, wenn sie im Sinne der positiven, zu ihnen parallelen Achsen  $Z$  und  $X$  verlaufen. Dreht sich der Halbstrahl  $o$  einmal ganz um  $O$ , so erhält man alle Schrauben des Grundzylindroids; die Strecke  $GX'$  stellt speziell den Windungsparameter  $h_0$  der Achse  $X$  dar.

Trägt man im weiteren in den Geraden  $o'_1$  und  $o'_2$  von  $O$  aus nach Größe und Sinn die Winkelgeschwindigkeiten  $-\omega_1$  und  $+\omega_2$  auf, so ist infolge der Gleichung (5) die Verbindungslinie der Endpunkte dieser Strecken parallel  $X$ . Infolge der Gleichung

$$R = R_1 = R_2$$

ist auf dieser Parallelen aber auch der Endpunkt der Geschwindigkeit  $\omega$  gelegen, so daß mittels dieser Parallelen sämtliche Winkelgeschwindigkeiten, die zu den vorigen Schrauben gehören, graphisch dargestellt sind.

Denkt man sich jetzt die Achse  $X$  selbst als Erzeugende mit der Schraube  $(o, h)$  verschraubt, so entsteht eine geradlinige Schraubenfläche  $S$ , welche längs  $X$  den Verteilungsparameter

$$s \cotg \lambda - h$$

besitzt. Nach der dritten der Gleichungen (19) wird dieser durch die Strecke  $OG$  dargestellt und ist gleich dem Verteilungsparameter der Grundhyperboloide. Da diese und die Schraubenfläche  $S$  überdies den Punkt  $O$  zum gemeinsamen Zentralpunkt und die Ebene  $XZ$  zur gemeinsamen Zentralebene haben, so berühren sich alle drei Regelflächen längs  $X$ . Auf diese Weise entsteht aus allen Schrauben des Grundzylindroids eine unendliche Schar von Schraubenflächen, die alle längs  $X$  in Berührung stehen und mit dem Verzahnungsproblem aufs engste zusammenhängen.

Ist nämlich  $e$  eine beliebige Erzeugende der Fläche  $S$  und wird diese mit  $S$  unendlich wenig verschraubt, so setzt die Schraubung der Fläche  $S$  die Hyperboloide  $H_1$  und  $H_2$  in drehende Bewegung. Es beschreibt daher  $e$  in  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  zwei windschiefe Flächenelemente, die auch durch Verschraubung von  $e$  mit den Relativschraubengeschwindigkeiten  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  an der Schraube  $(X, h_0)$  entstehen und sich daher längs der ganzen Erstreckung von  $X$  berühren.

Dauert also dieser Bewegungsvorgang während einer endlichen Zeit, so beschreibt  $e$  in  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  zwei Regelflächen  $Z_1$  und  $Z_2$ , die sich beständig längs einer Geraden  $e$  berühren, indem sie schief zur Berührungskante übereinander weggleiten. Der geometrische Ort dieser Berührungskante  $e$  ist im ruhenden System  $\Sigma$  die Schraubenfläche  $S$ ,

welche daher die Eingriffsfläche darstellt, während die Regelflächen  $Z_1$  und  $Z_2$  die Zahn- oder Profillflächen sind, die zu dieser Eingriffsfläche gehören.

Da ferner die Schraubenfläche  $S$  beständig auf den Grundhyperboloiden abschrotet, so können die Profillflächen auch als Rollflächen erhalten werden, indem die Fläche  $S$  mit der Geraden  $e$  über die Hyperboloide abschrotet. Die Schraubenfläche  $S$  ist also zugleich die sogenannte Wälzungsfläche und bildet daher mit jedem der beiden Grundhyperboloide zusammen das Paar der primären Axoide der Verzahnung.

In Analogie mit dem Sprachgebrauch für zylindrische und konische Räder kann man daher diese Verzahnung als spezielle räumliche Zykloidenverzahnung bezeichnen und das Resultat aussprechen:

*Analog dem System der Wälzkreise der zylindrischen und konischen Räder existiert im Falle der Hyperboloidräder eine einfach unendliche Schar sich berührender Schraubenflächen  $S$ , die zu sämtlichen Schrauben des Grundzylindroids gehören, welche sowohl als Eingriffsflächen als auch als Wälzungsflächen für eine räumliche Zykloidenverzahnung der Hyperboloide gewählt werden können und mit diesen zusammen die einfachsten primären Axoide der Verzahnung darstellen.*

### § 3. Die allgemeinen geradlinigen Eingriffsflächen und Wälzungsflächen und ihre primären Axoide.

Die eben betrachteten Eingriffsflächen  $S$  sind insofern spezieller Art, als wir vorausgesetzt haben, daß während der ganzen Dauer der Bewegung die instantane Schraubenachse  $o$  des Systems  $\sigma$  ihre Lage auf dem Grundzylindroid nicht ändert, daß also in den Gleichungen (16) die Komponente  $P$  einen konstanten Wert besitzt.

Indem wir jetzt diese Beschränkung fallen lassen und  $P$  als veränderliche Funktion der Zeit auffassen, erhalten wir die allgemeinste Bewegung, welche das System  $\sigma$  gegen  $\Sigma$  ausführen kann.<sup>1)</sup>

Werden die Punkte von  $\sigma$  bezogen auf ein Koordinatensystem  $(x, y, z)$ , dessen Anfangspunkt in  $\Sigma$  die Koordinaten  $L, M, N$  besitzt, so können die Übergangsformeln von  $\sigma$  zu  $\Sigma$  in der Form geschrieben werden:

$$(20) \quad \begin{aligned} X &= L + a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ Y &= M + a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ Z &= N + a_3 x + b_3 y + c_3 z. \end{aligned}$$

1) Vgl. X. Antomari: Application de la méthode cinématique à l'étude des propriétés des surfaces réglées. Paris 1894.

F. Schur: Über die Bewegung eines starren Körpers durch Abschrotten. Diese Zeitschrift 55. Band (1907), Heft 4.

K. Heun: Lehrbuch der Mechanik. Göschen, Leipzig 1906.

Die Komponenten der instantanen Schraubengeschwindigkeit  $\omega$  bezüglich  $\Sigma$  sind dann:

$$(21) \quad \begin{aligned} P &= a_2 a'_3 + b_2 b'_3 + c_2 c'_3 = - (a'_2 a_3 + b'_2 b_3 + c'_2 c_3) \\ Q &= a_3 a'_1 + b_3 b'_1 + c_3 c'_1 = - (a'_3 a_1 + b'_3 b_1 + c'_3 c_1) \\ R &= a_1 a'_2 + b_1 b'_2 + c_1 c'_2 = - (a'_1 a_2 + b'_1 b_2 + c'_1 c_2) \end{aligned}$$

und bezüglich  $\sigma$ :

$$(22) \quad \begin{aligned} p &= c_1 b'_1 + c_2 b'_2 + c_3 b'_3 = - (c'_1 b_1 + c'_2 b_2 + c'_3 b_3) \\ q &= a_1 c'_1 + a_2 c'_2 + a_3 c'_3 = - (a'_1 c_1 + a'_2 c_2 + a'_3 c_3) \\ r &= b_1 a'_1 + b_2 a'_2 + b_3 a'_3 = - (b'_1 a_1 + b'_2 a_2 + b'_3 a_3). \end{aligned}$$

Sind umgekehrt  $P, Q, R$  als Funktionen der Zeit gegeben, so bestehen wegen der Bedingung

$$Q = 0$$

die Gleichungen

$$(23) \quad \begin{aligned} a'_1 &= -a_2 R, & b'_1 &= -b_2 R, & c'_1 &= c_2 R \\ a'_2 &= a_1 R - a_3 P, & b'_2 &= b_1 R - b_3 P, & c'_2 &= c_1 R - c_3 P \\ a'_3 &= a_2 P, & b'_3 &= b_2 P, & c'_3 &= c_2 P. \end{aligned}$$

Nehmen wir jetzt an, die von der Achse  $x$  beschriebene Regel-  
fläche habe einen gegebenen Richtungskegel, d. h.  $a_1, a_2, a_3$  seien be-  
kannte Funktionen der Zeit, so können auch die übrigen 6 Richtungs-  
kosinus durch eine einzige Quadratur als Funktionen der Zeit dargestellt  
werden. Es ist nämlich etwa

$$\begin{aligned} c_2 &= a_3 b_1 - b_3 a_1 = a_3 b_1 + a_1 (a_1 c_2 - c_1 a_2) \\ \text{oder} \quad c_2(1 - a_1^2) + c_1 a_1 a_2 &= a_3 b_1. \end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit  $R$  und beachtet (23), so folgt

$$c'_1 (1 - a_1^2) + c_1 a_1 a'_1 = \frac{a_3 a'_1}{a_2} b_1.$$

Setzt man nunmehr

$$b_1 = -\sqrt{1 - a_1^2} \sqrt{1 - \frac{c_1^2}{1 - a_1^2}},$$

die Wurzeln positiv genommen, so folgt

$$\frac{c'_1 \sqrt{1 - a_1^2} + c_1 \frac{a_1 a'_1}{\sqrt{1 - a_1^2}}}{\sqrt{1 - \frac{c_1^2}{1 - a_1^2}}} = -\frac{a_3 a'_1}{a_2}.$$

Dividiert man beide Seiten durch  $1 - a_1^2$  und setzt zur Abkürzung

$$T = -\int_0^t \frac{a_3 a'_1}{a_2(1 - a_1^2)} dt,$$

so folgt durch Integration

$$c_1 = \sqrt{1 - a_1^2} \sin T, \quad b_1 = -\sqrt{1 - a_1^2} \cos T,$$

wodurch auch die übrigen Richtungskosinus bestimmt sind, nämlich

$$b_2 \sqrt{1 - a_1^2} = -a_3 \sin T + a_1 a_2 \cos T$$

$$b_3 \sqrt{1 - a_1^2} = a_2 \sin T + a_1 a_3 \cos T$$

$$c_2 \sqrt{1 - a_1^2} = -a_3 \cos T - a_1 a_2 \sin T$$

$$c_3 \sqrt{1 - a_1^2} = a_2 \cos T - a_1 a_3 \sin T.$$

Zur Zeit  $t = 0$  sind dann die beiden Systeme  $\Sigma$  und  $\sigma$  einander parallel.

Nach (16) sind nun aber auch  $U, V, W$  bekannte Funktionen der Zeit, und es durchwandert die instantane Achse  $o$  in  $\Sigma$  das Grundzylindroid mit den Gleichungen

$$(24) \quad \begin{aligned} X &= u \frac{P}{\omega} \\ Y &= \frac{RU - PW}{\omega^2} \\ Z &= u \frac{R}{\omega}. \end{aligned}$$

Um die endlichen Bewegungsgleichungen des Systems  $\sigma$  zu erhalten, haben wir die Bahnkurve des Anfangspunktes  $(L, M, N)$  zu ermitteln. Nach (1) sind aber die Geschwindigkeitskomponenten dieses Punktes

$$(25) \quad \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= U - RM \\ \frac{dM}{dt} &= RL - PN \\ \frac{dN}{dt} &= W + PM. \end{aligned}$$

Multipliziert man aber diese Gleichungen mit  $a_1, a_2, a_3$  und berücksichtigt die Gleichungen (23), so folgt durch Addition

$$\frac{d}{dt}(a_1 L + a_2 M + a_3 N) = a_1 U + a_3 W.$$

Zwei analoge Gleichungen ergeben sich durch Multiplikation mit  $b_1, b_2, b_3$ , bzw.  $c_1, c_2, c_3$ .

Wenn man demnach zur Abkürzung setzt:

$$(26) \quad \begin{aligned} \int_0^t (a_1 U + a_3 W) dt &= J_x \\ \int_0^t (b_1 U + b_3 W) dt &= J_y \\ \int_0^t (c_1 U + c_3 W) dt &= J_z. \end{aligned}$$

so sind

$$(27) \quad \begin{aligned} L &= a_1 J_x + b_1 J_y + c_1 J_z \\ M &= a_2 J_x + b_2 J_y + c_2 J_z \\ N &= a_3 J_x + b_3 J_y + c_3 J_z \end{aligned}$$

die endlichen Gleichungen der vom Anfangspunkt des Systems  $\sigma$  beschriebenen Bahnkurve. Da die Koordinatensysteme  $\Sigma$  und  $\sigma$  zu Anfang der Bewegung nunmehr koinzidieren, so geht die Bahnkurve durch den Punkt  $O$ .

Setzt man die Werte für  $L, M, N$  in (20) ein, so erhält man die endlichen Bewegungsgleichungen von  $\sigma$  und es ist daher möglich, die Gleichungen der von irgendeiner Geraden  $e$  des Systems  $\sigma$  beschriebenen Rollfläche  $E$  anzugeben.

Sind

$$x = x_0 + u\alpha_0, \quad y = y_0 + u\beta_0, \quad z = z_0 + u\gamma_0$$

die Gleichungen der Geraden  $e$  bezüglich  $\sigma$ , so hat die Rollfläche  $E$  in  $\Sigma$  die Gleichungen

$$(28) \quad \begin{aligned} X &= L + a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0 + u(a_1 \alpha_0 + b_1 \beta_0 + c_1 \gamma_0), \\ Y &= M + a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0 + u(a_2 \alpha_0 + b_2 \beta_0 + c_2 \gamma_0), \\ Z &= N + a_3 x_0 + b_3 y_0 + c_3 z_0 + u(a_3 \alpha_0 + b_3 \beta_0 + c_3 \gamma_0). \end{aligned}$$

Unter diesen Rollflächen gibt es zweifach unendlich viele, welche den gegebenen Richtungskegel  $(a_1, a_2, a_3)$  besitzen. Sie werden erhalten durch die Bewegung aller zur Achse  $x$  parallelen Geraden von  $\sigma$ .

Mit

$$\alpha_0 = 1, \quad \beta_0 = 0, \quad \gamma_0 = 0, \quad x_0 = 0$$

lauten ihre Gleichungen

$$(29) \quad \begin{aligned} X &= L + b_1 y_0 + c_1 z_0 + u a_1, \\ Y &= M + b_2 y_0 + c_2 z_0 + u a_2, \\ Z &= N + b_3 y_0 + c_3 z_0 + u a_3. \end{aligned}$$

Unter diesen Flächen ist endlich eine, welche von der Achse  $x$  selbst beschrieben wird und durch  $X$  hindurchgeht mit den Gleichungen

$$(30) \quad \begin{aligned} X &= L + u a_1, \\ Y &= M + u a_2, \\ Z &= N + u a_3, \end{aligned}$$

welche wir in der Folge allein betrachten wollen. Nehmen wir überdies an, daß der Richtungskegel die Ebene  $XY$  längs  $X$  berührt, so wird nach ihrer Erzeugung die Fläche  $E$  die beiden Grundhyperboloide längs  $X$  berühren.

Die Bewegung des Systems  $\sigma$  erfolgt aber durch Abschrotten eines gewissen Axoids  $H$  auf dem Grundzylindroid. Seine Gleichungen werden erhalten, indem man die instantane Achse  $o$  im System  $\sigma$  darstellt und lautet daher

$$(31) \quad \begin{aligned} x &= a_2 s - J_x + u \frac{p}{\omega}, \\ y &= b_2 s - J_y + u \frac{q}{\omega}, \\ z &= c_2 s - J_z + u \frac{r}{\omega}, \end{aligned}$$

wobei

$$p = a_1 P + a_3 R, \quad q = b_1 P + b_3 R, \quad r = c_1 P + c_3 R$$

zu setzen ist.

Bei der Bewegung von  $\sigma$  beschreibt aber auch die fest bleibende Achse  $X$  im beweglichen System eine Regelfläche  $W$ , welche auch als Rollfläche bei der umgekehrten Bewegung von  $\Sigma$  in  $\sigma$  durch die Achse  $X$  beschrieben wird. Ihre Gleichungen sind daher nichts anderes als diejenigen der Achse  $X$  ausgedrückt im System  $\sigma$  und lauten daher

$$(32) \quad \begin{aligned} x &= -J_x + u a_1, \\ y &= -J_y + u b_1, \\ z &= -J_z + u c_1. \end{aligned}$$

Bevor wir auf die Bedeutung der Flächen  $E$  und  $W$  für das Verzahnungsproblem eingehen, wollen wir noch die geometrische Beziehung der beiden Flächen  $W$  und  $H$  näher betrachten.

Bedeutet der Index Null den Wert, den eine Funktion von  $t$  zurzeit  $t = t_0$  annimmt, so lassen sich die Gleichungen der Fläche  $W$  zurzeit  $t = t_0$  in bezug auf das feste System  $\Sigma$  in folgender Weise schreiben:

$$\begin{aligned} X &= L_0 - (a_1^0 J_x + b_1^0 J_y + c_1^0 J_z) + u(a_1^0 a_1 + b_1^0 b_1 + c_1^0 c_1), \\ Y &= M_0 - (a_2^0 J_x + b_2^0 J_y + c_2^0 J_z) + u(a_2^0 a_1 + b_2^0 b_1 + c_2^0 c_1), \\ Z &= N_0 - (a_3^0 J_x + b_3^0 J_y + c_3^0 J_z) + u(a_3^0 a_1 + b_3^0 b_1 + c_3^0 c_1). \end{aligned}$$

Jedem Wert von  $t$  entspricht eine Erzeugende von  $W$ , dem Werte  $t = t_0$  entspricht insbesondere die Erzeugende  $X$ .

Bestimmen wir jetzt die Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung der Fläche  $W$  für die Punkte  $u$  der Erzeugenden  $X$ , also für  $t = t_0$  so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= -U_0, & \frac{\partial Y}{\partial t} &= -u R_0, & \frac{\partial Z}{\partial t} &= -W_0, \\ \frac{\partial X}{\partial u} &= 1, & \frac{\partial Y}{\partial u} &= 0, & \frac{\partial Z}{\partial u} &= 0. \end{aligned}$$

Daher werden die Fundamentalgrößen erster Ordnung

$$E = U_0^2 + W_0^2 + u^2 R_0^2, \quad F = -U_0, \quad G = 1,$$

und

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{W_0^2 + u^2 R_0^2}.$$

Bedeutet ferner  $\xi, \eta, \zeta$  die Richtungskosinus der Flächennormale im Punkte  $u$  von  $X$ , so wird

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left( \frac{\partial Y}{\partial t} \frac{\partial Z}{\partial u} - \frac{\partial Z}{\partial t} \frac{\partial Y}{\partial u} \right) = 0, \\ \eta &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left( \frac{\partial Z}{\partial t} \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial Z}{\partial u} \right) = \frac{-W_0}{\sqrt{W_0^2 + u^2 R_0^2}}, \\ \zeta &= -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left( \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial Y}{\partial u} - \frac{\partial Y}{\partial t} \frac{\partial X}{\partial u} \right) = \frac{u R_0}{\sqrt{W_0^2 + u^2 R_0^2}}. \end{aligned}$$

Die Richtungskosinus der Normalen der Fläche  $W$  sind also die nämlichen, wie diejenigen einer Schraubenfläche  $S$ , deren Achse  $o$  mit der instantanen Schraubenachse von  $\sigma$  koinzidiert und welche durch  $X$  hindurchgeht. Es folgt daraus, daß sich die Flächen  $W$  und  $S$  längs  $X$  berühren, daß sie also denselben Zentralpunkt  $O$  und den nämlichen Verteilungsparameter haben.

Da

$$\frac{\eta}{\zeta} = -\frac{W_0}{u R_0} = -\frac{r_1 \cotg \alpha_1}{u}$$

ist, so folgt, daß in der Tat der Verteilungsparameter der Fläche  $W$  den konstanten Wert

$$h_0 = r_1 \cotg \alpha_1 = -\frac{W_0}{R_0}$$

besitzt. Die Linie  $u = 0$  ist demnach die Striktionslinie der Fläche  $W$  und berührt die Striktionslinie der Fläche  $S$  in  $O$ .

Durch weitere Differentiation obiger Gleichungen erhält man ferner

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} &= -(U_0' + u R_0'), \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= R_0 U_0' - P_0 W_0' - u R_0' = s(P_0^2 + R_0^2) - u R_0', \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} &= -(W_0' - u P_0 R_0'). \end{aligned}$$

Für die Striktionslinie speziell ist  $u = 0$  zu setzen. Bezeichnet  $ds$  das Bogenelement derselben,  $\tau$  seinen Winkel gegen  $X$ , so ist

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{U_0^2 + W_0^2}$$

also

$$\begin{aligned} \frac{dX}{ds} &= \frac{-U_0}{\sqrt{U_0^2 + W_0^2}} = \cos \tau, \\ \frac{dY}{ds} &= 0, \\ \frac{dZ}{ds} &= \frac{-W_0}{\sqrt{U_0^2 + W_0^2}} = \sin \tau. \end{aligned}$$

Somit wird

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{ds^2} &= -\sin \tau \frac{d\tau}{ds}, \\ \frac{d^2 Y}{ds^2} &= \frac{\frac{d^2 t}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} = s \frac{P_0^2 + R_0^2}{U_0^2 + W_0^2} = \frac{s}{s^2 + h^2} = \frac{1}{\rho_0}, \\ \frac{d^2 Z}{ds^2} &= \cos \tau \frac{d\tau}{ds}, \end{aligned}$$

wo  $\rho_0$  den Krümmungsradius der Striktionslinie der Fläche  $S$  bedeutet. Bezeichnet jetzt  $\rho$  denjenigen für die Fläche  $W$ ,  $\gamma$  den Winkel der beiden Schmiegungebenen durch die gemeinsame Tangente der Striktionslinien, so ist

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \rho \frac{d^2 Y}{ds^2} = \frac{\rho}{\rho_0}, \\ \frac{1}{\rho} &= \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_0}\right)^2 + \left(\frac{d\tau}{ds}\right)^2}. \end{aligned}$$

Demnach oskulieren sich zwar die beiden Striktionslinien nicht, aber der Krümmungsradius der Striktionslinie der Fläche  $W$  ist die Orthogonalprojektion desjenigen für die Fläche  $S$ .

Kehren wir nunmehr zur Fläche  $W$  zurück, so ergibt sich weiterhin

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial t \partial u} &= 0, & \frac{\partial^2 Y}{\partial t \partial u} &= -R_0, & \frac{\partial^2 Z}{\partial t \partial u} &= 0, \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} &= 0, & \frac{\partial^2 Y}{\partial u^2} &= 0, & \frac{\partial^2 Z}{\partial u^2} &= 0. \end{aligned}$$

Für die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung hat man daher die Werte:

$$\begin{aligned} D &= \sum \xi \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{W_0^2 + u^2 R_0^2}} \{u(W_0 R_0' - R_0 W_0') + k_0 s(P_0^2 + R_0^2)R_0 + u^2 P_0 R_0'\}. \end{aligned}$$

Infolge des konstanten Verteilungsparameters der Fläche  $W$  ist aber

$$\frac{W_0}{R_0} = -k_0 \quad \text{also} \quad W_0 R_0' - R_0 W_0' = 0.$$

Somit

$$\begin{aligned} D &= \frac{R_0}{\sqrt{W_0^2 + u^2 R_0^2}} (u^2 P_0 R_0 + k_0 s(P_0^2 + R_0^2)) \\ D' &= \sum \xi \frac{\partial^2 X}{\partial t \partial u} = \frac{W_0 R_0}{\sqrt{W_0^2 + u^2 R_0^2}} \\ D'' &= \sum \xi \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = 0. \end{aligned}$$

Der Krümmungsradius  $R_n$  irgendeines Normalschnittes im Punkte  $u$  der Fläche  $W$  ist daher bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{1}{R_n} = \frac{D dt^2 + 2 D' dt du + G du^2}{E dt^2 + 2 F dt du + G du^2}.$$

Da nun infolge der Konstanz des Verteilungsparameters der Fläche  $W$  auch die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung für beide Flächen  $W$  und  $S$  übereinstimmen, so haben in jedem Punkte  $u$  die Normalschnitte und nach dem Meusnierschen Satze auch alle schiefen Schnitte durch beide Flächen denselben Krümmungsradius. Die beiden Flächen  $W$  und  $S$  berühren sich also längs  $X$  von der zweiten Ordnung und haben daher drei aufeinander folgende Erzeugende gemeinsam. In Zusammenfassung ergibt sich demnach das Resultat:

*Die Fläche  $W$  wird in jeder Stellung längs der Berührungskante mit den Grundhyperboloiden von derjenigen Schraubenfläche  $S$  oskuliert, deren Achse auf dem Grundzylindroid mit der augenblicklichen Schraubenachse des Systems  $\sigma$  zusammenfällt.*

Die Schraubenfläche  $S$  vertritt also in diesem Falle räumlich vollständig den Krümmungskreis der Kurve, und man kann daher das Axoid  $H$  als die Evolutenfläche von  $W$  und diese als die Evolventenfläche von  $H$  bezeichnen. Dieser Zusammenhang der beiden Flächen läßt sich auch formal leicht zum Ausdruck bringen.

Nach (23) sind

$$-Rdt = d\sigma \quad \text{und} \quad -Pdt = d\varepsilon$$

Bogenelement und geodätischer Kontingenzwinkel des sphärischen Bildes der Fläche  $W$ , also  $\lambda$  der sphärische Krümmungsradius desselben. Ist  $\tau$  der Winkel der Striktionslinie gegen die Erzeugende, so ist

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{U}{W} = \frac{R}{-k_0} = -\frac{i_0}{k_0}.$$

Die Größen  $i_0$  und  $k_0$  sind daher zwei geometrische Invarianten der Fläche  $W$ . Nun ist

$$-(a_1 U + a_3 W) dt = (a_1 i_0 - a_3 k_0) d\sigma,$$

oder es ist

$$J_x = -\int_0^t (a_1 i_0 - a_3 k_0) d\sigma.$$

In analoger Weise lassen sich  $J_y$  und  $J_z$  schreiben, und es nehmen daher die Gleichungen der Fläche  $H$  die Form an

$$\begin{aligned} x &= \int_0^t (a_1 i_0 - a_3 k_0) d\sigma + s a_2 + u (a_1 \cos \lambda + a_3 \sin \lambda) \\ (33) \quad y &= \int_0^t (b_1 i_0 - b_3 k_0) d\sigma + s b_2 + u (b_1 \cos \lambda + b_3 \sin \lambda) \\ z &= \int_0^t (c_1 i_0 - c_3 k_0) d\sigma + s c_2 + u (c_1 \cos \lambda + c_3 \sin \lambda), \end{aligned}$$

welche ihre Abhängigkeit als Evolutenfläche von  $W$  zum Ausdruck bringen.

Indem wir jetzt von den geometrischen zu den kinematischen Eigenschaften der Flächen  $E$  und  $W$  zurückkehren, läßt sich leicht einsehen, daß  $E$  die Eingriffsfläche,  $W$  die Wälzungsfläche einer Verzahnung für geradlinigen Eingriff sind.

Bewegt sich nämlich  $\sigma$  in  $\Sigma$  durch Abschroten des Axoids  $H$  auf dem Grundzylindroid  $G$ , so berührt die mit  $H$  fest verbundene Fläche  $W$  die Grundhyperboloide beständig längs  $X$  und versetzt diese derart in drehende Bewegung, als ob die augenblicklich oskulierende Schraubensfläche  $S$  auf ihnen abschroten würde. Der gesamte Bewegungsvorgang erfüllt also in jedem Augenblicke die Vorschrift (16) und es beschreibt daher die Achse  $x$  in  $\Sigma$  die Eingriffsfläche, in  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  die zugehörigen Profilflächen  $Z_1$  und  $Z_2$ . Da an Stelle der Geraden  $x$  auch jede beliebige andere Gerade  $e$  von  $\sigma$  treten kann, so ergibt sich das Resultat:

*Bewegt sich ein System  $\sigma$  im ruhenden System  $\Sigma$  derart, daß ein Axoid  $H$  gemäß den Bedingungen (16) auf dem Grundzylindroid  $G$  abschroten, während die durch die umgekehrte Bewegung entstehende Evolutenfläche  $W$  von  $H$  durch Abschroten auf den Grundhyperboloiden die Räume  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  in Drehbewegung versetzt, so beschreibt jede beliebige Gerade  $e$  von  $\sigma$  in  $\Sigma$  eine Eingriffsfläche, in  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  aber die zu dieser gehörigen Profilflächen einer Verzahnung für geradlinigen Eingriff.*

Die Profilflächen können als Rollflächen auch dadurch erhalten werden, daß die Fläche  $W$  mit der erzeugenden Geraden  $x$  über die ruhenden Grundhyperboloide abschroten. Daher ist  $W$  nichts anderes als die Wälzungsfläche der Verzahnung und bildet daher mit dem Grundhyperboloid das Paar primärer Axoide der Profilfläche. Wir können daher sagen:

*Das Grundzylindroid und das Axoid  $H$  bilden die primären Axoide der Eingriffsfläche; das Grundhyperboloid und die Wälzungsfläche  $W$  die primären Axoide der Profilflächen.*

Überträgt man den ganzen Bewegungsvorgang in der unendlich-fernen Ebene auf die Kugel, indem man alle Richtungskegel parallel an einen Fixpunkt verschiebt, so erhält man die allgemeinste Zyklidenverzahnung der Richtungskegel der Grundhyperboloide. Man kann daher die eben besprochenen Verzahnungen der Hyperboloide als räumliche Zyklidenverzahnungen bezeichnen und sie ebenso einteilen wie die Verzahnungen ihrer Richtungskegel. Reduziert sich das primäre Axoid  $H$  auf eine Erzeugende  $o$  des Grundzylindroids, so ist der

Richtungskegel der Eingriffsfläche ein gerader Kreiskegel, die Flächen  $E$  und  $W$  fallen mit der zugehörigen Schraubenfläche  $S$  zusammen, und wir haben dann das räumliche Analogon zur gewöhnlichen Zykloidenverzahnung der konischen Räder.

In diesem besondern Falle haben die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  die konstanten Werte

$$P = \omega \cos \lambda, \quad Q = 0, \quad R = \omega \sin \lambda.$$

Soll zur Zeit  $t = 0$  das System  $\sigma$  mit  $\Sigma$  zusammenfallen, so liefern die Gleichungen (23) für die Richtungskosinus leicht die folgenden Werte:

$$(34) \begin{aligned} a_1 &= \cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda \cos \omega t, & b_1 &= -\sin \lambda \sin \omega t, & c_1 &= \sin \lambda \cos \lambda (1 - \cos \omega t) \\ a_2 &= \sin \lambda \sin \omega t, & b_2 &= \cos \omega t, & c_2 &= -\cos \lambda \sin \omega t \\ a_3 &= \sin \lambda \cos \lambda (1 - \cos \omega t), & b_3 &= \cos \lambda \sin \omega t, & c_3 &= \sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda \cos \omega t. \end{aligned}$$

Nun folgt aus den Gleichungen (17)

$$a_1 U + a_3 W = h p + s a'_2,$$

also ist

$$J_x = \int_0^t (h p + s a'_2) dt = h p t + s a_2$$

$$J_y = \int_0^t (h q + s b'_2) dt = -s + s b_2$$

$$J_z = \int_0^t (h r + s c'_2) dt = h r t + s c_2.$$

Die Wälzungsfläche  $W$  hat also die Gleichungen

$$(35) \begin{aligned} x &= -h p t - s a_2 + u a_1 \\ y &= +s - s b_2 + u b_1 \\ z &= -h r t - s c_2 + u c_1, \end{aligned}$$

während die Gleichungen der Eingriffsfläche  $E$  lauten

$$(36) \begin{aligned} X &= h P t - s b_1 + u a_1 \\ Y &= s - s b_2 + u a_2 \\ Z &= h R t - s b_3 + u a_3. \end{aligned}$$

Da die Bewegung von  $\sigma$  eine Schraubenbewegung ist, so geht man zur umgekehrten Bewegung über, indem man  $t$  durch  $-t$  ersetzt. Wie die obigen Werte erkennen lassen, gehen dabei  $a_2, b_2, c_2$  über in  $b_1, b_2, b_3$  und  $a_1, b_1, c_1$  in  $a_1, a_2, a_3$ , d. h. die Gleichungen von  $W$  gehen über in diejenigen von  $E$ , weil infolge der Koinzidenz der Systeme am Anfang der Bewegung gleichzeitig

$$P = p, \quad Q = q = 0, \quad R = r$$

ist. Das Axoid  $H$  endlich hat die Gleichungen

$$(37) \quad \begin{aligned} x &= -hpt + u \frac{p}{\omega} \\ y &= s \\ z &= -hrt + u \frac{r}{\omega}, \end{aligned}$$

welche aber die Schraubenachse  $o$  darstellen. Man kann daher das Resultat aussprechen:

*Das System der Schraubenflächen  $S$  ist das einzige System geradliniger Eingriffsflächen, welches mit dem System der Wälzungsflächen identisch ist.*

#### § 4. Analytische und graphische Darstellung der Profllflächen.

Um auch die Profllfläche  $Z_1$  durch Gleichungen darzustellen, beziehen wir die Punkte des Systems  $\Sigma_1$  auf ein Koordinatensystem  $O_1(X_1, Y_1, Z_1)$ , dessen positive Achse  $X_1$  mit der positiven Seite von  $o_1$  zusammenfällt, während zu Anfang der Bewegung die Achse  $Y_1$  mit  $Y$  koinzidiert, zur Zeit  $t$  aber den Winkel  $(-\varphi_1)$  mit ihr einschließt. Das System  $\Sigma$  wird mit  $\Sigma_1$  zu einer beliebigen Zeit zur Deckung gebracht, indem man  $\Sigma$  um  $Y$  dreht um den Winkel  $(+\alpha_1)$ , sodann parallel  $Y$  verschiebt um den Betrag  $(-r_1)$ ; endlich um die neue Achse  $X_1$  um den Winkel  $(-\varphi_1)$  dreht. Die Übergangsformeln von  $\Sigma$  zu  $\Sigma_1$  lauten dann:

$$(38) \quad \begin{aligned} X_1 &= X \cos \alpha_1 - Z \sin \alpha_1 \\ Y_1 &= (r_1 + Y) \cos \varphi_1 - (X \sin \alpha_1 + Z \cos \alpha_1) \sin \varphi_1 \\ Z_1 &= (r_1 + Y) \sin \varphi_1 + (X \sin \alpha_1 + Z \cos \alpha_1) \cos \varphi_1. \end{aligned}$$

Setzt man hierin die Werte von  $X, Y, Z$  aus (30) ein, so erhält man die Gleichungen der Profllfläche  $Z_1$ . Dieselben können aber in einfachere Form gebracht werden durch die Einführung der Richtungskosinus  $A_i, B_i, C_i$  der Achsen des Systems  $\sigma$  gegen die Achsen von  $\Sigma_1$ . Dabei ist

$$(39) \quad \begin{aligned} A_1 &= a_1 \cos \alpha_1 - a_3 \sin \alpha_1 \\ A_2 &= a_2 \cos \varphi_1 - (a_1 \sin \alpha_1 + a_3 \cos \alpha_1) \sin \varphi_1 \\ A_3 &= a_2 \sin \varphi_1 + (a_1 \sin \alpha_1 + a_3 \cos \alpha_1) \cos \varphi_1, \end{aligned}$$

aus welchen Werten die entsprechenden für  $B_i$  und  $C_i$  folgen, indem man die  $a_i$  durch  $b_i$  resp.  $c_i$  ersetzt.

Alsdann erhält man für die Profllfläche  $Z_1$  bezüglich  $\Sigma_1$  die folgenden Gleichungen

$$(40) \quad \begin{aligned} X_1 &= A_1 J_x + B_1 J_y + C_1 J_z + u A_1 \\ Y_1 &= r_1 \sin \varphi_1 + A_2 J_x + B_2 J_y + C_2 J_z + u A_2 \\ Z_1 &= r_1 \cos \varphi_1 + A_3 J_x + B_3 J_y + C_3 J_z + u A_3. \end{aligned}$$

wobei wegen

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} \quad \text{und} \quad R = R_1$$

$$(41) \quad \varphi_1 = \frac{1}{\sin \alpha_1} \int_0^t R dt$$

eine ebenfalls bekannte Funktion der Zeit ist. Bedenkt man nun, daß die Profilfläche durch Abschroten der Achse  $x$  mit der Wälzungsfläche  $W$  entsteht, so folgt als charakteristische Eigenschaft:

*Entsprechende Profilflächen für geradlinigen Eingriff müssen in jedem Augenblicke der Bewegung längs ihrer Berührungskante  $x$  von derjenigen Schraubenfläche  $S_x$  berührt werden, welche zur Schraube  $(X, h_0)$  gehört.*

Die Tangenten der Schraubenlinien dieser Schraubenfläche  $S_x$  in den Punkten  $u$  von  $x$  enthalten aber die Relativgeschwindigkeiten, mit welchen sich der Punkt  $u$  in  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  bewegt. Diese Geschwindigkeiten sind der Größe nach verschieden, fallen aber der Richtung nach zusammen und bestimmen die Tangenten der Linien  $u = \text{const.}$  der beiden Profilflächen d. h.

*Die Linien  $u = \text{const.}$  der Profilflächen bilden diejenigen Liniensysteme auf diesen Flächen, welche bei der Drehung beider Räder in gleitender Berührung bleiben.*

Ist jetzt  $Z_1$  eine beliebige Regelfläche, welche als Profilfläche verwendet werden soll, so erhält man auf ihr das System der Berührungslinien mit der zweiten Profilfläche, indem man  $Z_1$  um  $o_1$  dreht und in jeder Lage unendlich wenig um die Schraube  $(X, h_0)$  verschraubt. Die im allgemeinen krummlinigen Charakteristiken erfüllen dann im Raume  $\Sigma$  die Eingriffsfläche, durch welche umgekehrt die zweite Profilfläche bestimmt ist. Das System der Charakteristiken ist aber nur dann identisch mit dem System der geraden Erzeugenden, falls diese durch Abschroten einer dieser Geraden mit einer der Flächen  $W$  auf dem Grundhyperboloid entstanden ist, d. h.

*Eine beliebige Regelfläche kann zwar unter gewissen Voraussetzungen Profilfläche für krummlinigen Eingriff sein, einen geradlinigen Eingriff aber gestattet sie nur, wenn sie als Rollfläche einer Wälzungsfläche  $W$  darstellbar ist.*

Das System der Wälzungsflächen (32) gestattet nun aber auch eine Profilfläche mit geradlinigem Eingriff als Hüllfläche einer geradlinigen Hilfsfläche  $\Phi$  zu erzeugen.

Die Profilfläche  $Z_1$  sei entstanden durch Abschroten einer Geraden  $e$  mit der Wälzungsfläche  $W$  auf dem Grundhyperboloid  $H_1$ . Auf

diesem schrote jetzt gleichzeitig eine zweite Wälzungsfläche  $W'$  derart ab, daß die Berührungskanten von  $W$  und  $W'$  mit  $H_1$  beständig zusammenfallen. Ersetzt man aber in jedem Augenblick der Bewegung  $W$  und  $W'$  durch die oskulierenden Schraubenflächen  $S$  und  $S'$  an der augenblicklichen Berührungskante  $X$ , so erkennt man, daß die Relativbewegung von  $W$  gegen  $W'$  eine Schraubenbewegung um die Schraube  $(X, h_0)$  ist. Es beschreibt daher  $e$  relativ gegen  $W'$  eine Regelfläche  $\Phi$ , welche die Profillfläche  $Z_1$  beständig längs  $e$  berührt, so daß  $Z_1$  auch als Hüllfläche von  $\Phi$  erscheint, d. h.

*Ist eine Profillfläche mit geradlinigem Eingriff durch Abschroten einer Geraden  $e$  mit der Wälzungsfläche  $W$  entstanden, so ist sie unendlich oft auch als Hüllfläche einer geradlinigen Hilfsfläche  $\Phi$  darstellbar. Wird diese von  $e$  durch Abschroten mit  $W$  auf einer zweiten Wälzungsfläche  $W'$  erzeugt, so ist  $\Phi$  mit  $W'$  auf dem Grundhyperboloid abzuschroten.*

Aus dem Vorstehenden geht hervor, daß durch Angabe des Richtungskegels  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  der Eingriffsfläche  $E$  diese und alle weiteren Regelflächen der Verzahnung vollständig bestimmt sind. Die Eingriffsfläche wird dabei zweckmäßig aus zwei Teilen zusammengesetzt, von welchen der eine ganz außerhalb, der andere ganz innerhalb des Grundhyperboloids verläuft, während beide Teile an der Kante  $X$  berührend an die Hyperboloide mit einer Wendekante ineinander übergehen.

Nach Angabe der Eingriffsfläche erfolgt die Konstruktion der Profillfläche am einfachsten durch die Bestimmung ihrer Spurkurven in zwei zur Achse des Hyperboloids normalen Ebenen, von welchen die eine zweckmäßig mit der Kehlkreisebene zusammenfällt.<sup>1)</sup>

Von Wichtigkeit ist dabei die Kenntnis der Tangente  $t$  in demjenigen Punkt der Spurkurve, welcher auf der Berührungskante  $X$  liegt und in welchem die beiden Teile der ganzen Spurkurve mit einem Wendepunkt ineinander übergehen. Diese Wendetangente ist aber die Spur der Tangentenebene im Punkte  $u$  der Kante  $X$  und es ist daher zunächst die Gleichung dieser Ebene aufzustellen.

Setzt man in den Transformationsgleichungen (38)

$$X = u, \quad Y = 0, \quad Z = 0$$

so erhält man als Gleichungen der relativen Schraubenachse des Systems  $\sigma$  in  $\Sigma_1$  zur Zeit  $t$

$$(42) \quad \begin{aligned} X_1 &= u \cos \alpha_1 \\ Y_1 &= r_1 \cos \varphi_1 - u \sin \alpha_1 \sin \varphi_1 \\ Z_1 &= r_1 \sin \varphi_1 + u \sin \alpha_1 \cos \varphi_1. \end{aligned}$$

1) Vergleiche hierüber die vollständig durchgeführte Konstruktion der Profillflächen für eine aus zwei Schraubenflächen  $S$  bestehende Eingriffsfläche a. a. O.

Die Achse durchwandert also das Hyperboloid  $H_1$ . Da  $\Omega_1$  die Winkelgeschwindigkeit und  $h_0$  der Windungsparameter der relativen Schraubengeschwindigkeit sind, so ergeben sich für ihre Komponenten in  $\Sigma_1$  die Werte

$$(43) \quad \begin{aligned} p_1 &= \Omega_1 \cos \alpha_1 & u_1 &= \Omega_1 (h_0 \cos \alpha_1 + r_1 \sin \alpha_1) \\ q_1 &= -\Omega_1 \sin \alpha_1 \sin \varphi_1 & v_1 &= \Omega_1 (-h_0 \sin \alpha_1 + r_1 \cos \alpha_1) \sin \varphi_1 \\ r_1 &= +\Omega_1 \sin \alpha_1 \cos \varphi_1 & w_1 &= \Omega_1 (h_0 \sin \alpha_1 - r_1 \cos \alpha_1) \cos \varphi_1. \end{aligned}$$

Für die Punkte der Kante  $X$  ist aber

$$t = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad X_1 = u \cos \alpha_1, \quad Y_1 = r_1, \quad Z_1 = u \sin \alpha_1$$

zu setzen und es ergeben daher die Gleichungen (1) als Komponenten der relativen Geschwindigkeit des Punktes  $u$

$$(44) \quad \begin{aligned} u_x &= \Omega_1 h_0 \cos \alpha_1 \\ u_y &= 0 \\ u_z &= \Omega_1 h_0 \sin \alpha_1. \end{aligned}$$

Da die relative Geschwindigkeit aber die Richtung der Tangente der Linie  $u = \text{const.}$  der Profilfläche bestimmt, so folgt:

*Die Linien  $u = \text{const.}$  beider Profilflächen berühren sich und die Achse  $X$  in allen Punkten dieser Achse. Diese ist daher eine Rückkehrkante beider Profilflächen und die Tangentenebenen im Punkte  $u$  sind daher die Schmiegungebenen der Linien  $u = \text{const.}$  dieser Flächen.*

Die Tangentenebene an die Profilfläche  $Z_1$  enthält also die Beschleunigung des Punktes  $u$ . Ihre Komponenten ergeben sich durch Differentiation der Gleichungen (1) und haben die Werte

$$(45) \quad \begin{aligned} p_x &= -\Omega_1 \omega_1 u \sin^2 \alpha_1 + \Omega'_1 h_0 \cos \alpha_1 \\ p_y &= \Omega_1 \omega_1 (-h_0 \sin \alpha_1 + r_1 \cos \alpha_1) \\ p_z &= \Omega_1 \omega_1 u \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + \Omega'_1 h_0 \sin \alpha_1. \end{aligned}$$

Die Gleichung der Tangentenebene lautet daher

$$u_y p_z - u_z p_y (X_1 - u \cos \alpha_1) + (u_x p_x - u_x p_x) (Y_1 - r_1) + (u_x p_y - u_y p_x) (Z_1 - u \sin \alpha_1) = 0$$

oder nach Einsetzen der Werte

$$(r_1 \cos \alpha_1 - h_0 \sin \alpha_1) (X_1 \sin \alpha_1 - Z_1 \cos \alpha_1) + u \sin \alpha_1 (Y_1 - r_1) = 0.$$

Setzt man daher

$$(46) \quad r_1 \frac{\cotg \alpha_1 - h_0}{u} = \text{tg } \Theta,$$

so stellt die Gleichung

$$(47) \quad X_1 \sin \alpha_1 \sin \Theta + (Y_1 - r_1) \cos \Theta - Z_1 \cos \alpha_1 \sin \Theta = 0$$

die Tangentenebene in der Hesseschen Normalform dar. Es bedeutet demnach  $\Theta$  den Winkel der Normalen der Tangentenebene gegen die Achse  $Y$ . Daher ist  $\Theta$  auch der Winkel der Tangentenebene des Punktes  $u$  gegen die Zentralebene  $XZ$  der Profillfläche im Zentralpunkt  $O$ , und die Größe

$$(48) \quad K = r_1 \cotg \alpha_1 - h_0$$

welche nach (11) und mit Rücksicht auf Fig. 2 auch durch die Strecke

$$K = 2e \cotg 2\beta = G'_1 O'_1$$

dargestellt wird, der Verteilungsparameter der Profillfläche längs ihrer Rückkehrkante. Da  $K$  durch die gegenseitige Lage der beiden windschiefen Achsen  $o_1$  und  $o_2$  vollständig bestimmt ist, so folgt:

*Wie auch im übrigen die Eingriffsfläche und Wälzungsfläche gewählt werden mögen, längs der Berührungskante der Grundhyperboloide stehen sämtliche Profillflächen miteinander in Berührung und haben einen nur von der gegenseitigen Lage beider Achsen abhängigen Verteilungsparameter, welcher im Falle rechtwinklig gekreuzter Achsen verschwindet.*

Die verlangte Tangente  $t$  der Spurkurve der Profillfläche ist nun die Schnittlinie der Schnittebene

$$X_1 = u \cos \alpha_1$$

mit der Tangentenebene. Ihre Projektion auf die Ebene  $Y_1 Z_1$  hat daher die Gleichung

$$K(u \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 - Z_1 \cos \alpha_1) + u(Y - r_1) = 0.$$

Sie trifft die Achse  $Y_1$  in einem Punkte  $T$ , der durch die Koordinate

$$(49) \quad Y_1 = r_1 - K \sin \alpha_1 \cos \alpha_1$$

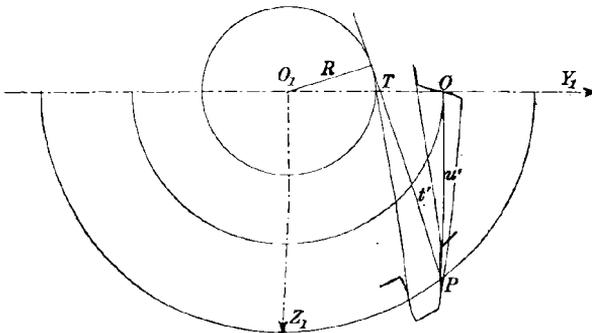
bestimmt ist, und daher gefunden wird, indem man, Fig. 3, die Strecke

$$OT = G'_1 O'_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1$$

in der Achse  $Y_1$  von  $O$  aus gegen  $O_1$  abträgt. Da dieser Punkt  $T$  von  $u$  ganz unabhängig ist, so gehen die Projektionen der Spurtangenten aller Punkte  $u$

von  $X$  durch ihn und umhüllen andererseits für alle Zahnprofile einer und derselben Schnittebene einen um den Punkt  $O$  beschriebenen Kreis,  $R$ . Nur in der Kehlkreisebene selbst geht das Zahnprofil rechtwinklig durch den Teilkreis.

Fig. 3.



Im Falle rechtwinklig gekreuzter Achsen  $o_1$  und  $o_2$  verschwinden  $K$  und  $OT$ , und es umhüllen die Projektionen der Spurtangenten aller Schnitte den Kehlkreis. Die Profilflächen sind längs  $X$  developpabel, statt rechtwinklig ist das Profil tangential zum Kehlkreis. Die Zähne sind daher in der Nachbarschaft der Teilkreise unbrauchbar. Begrenzt man dagegen die Räder durch zwei außerhalb der Kehlkreisebene liegende Schnittebenen, so bleibt die Brauchbarkeit der Verzahnung auch in diesem Falle bestehen.

II. Teil.

Darstellung der Verzahnung durch sekundäre Axoide.  
Räumliche Evolventenverzahnung.

§ 5. Die Eulerschen Winkel und die sekundären Axoide  
der Eingriffsfläche.

Sind  $(P, Q, R, U, V, W)$  die Komponenten der instantanen Schraubengeschwindigkeit, mit der ein System  $\sigma(xyz)$  sich augenblicklich im festen System  $\Sigma(X, Y, Z)$  bewegt, so kann die Lage der instantanen Achse  $a$  auch durch ihren kürzesten Abstand  $S$  von der Achse  $X$ , sowie durch den Neigungswinkel  $\nu$  gegen die Achse  $X$  bestimmt werden.

Sind  $X_0, Y_0, Z_0$  die Koordinaten des Fußpunktes  $F$  des gemeinsamen Lotes  $n$  von  $X$  und  $a$  in  $a$ , so hat man zu ihrer Bestimmung die Gleichungen

$$\begin{aligned} (1) \quad & U - RY_0 + QZ_0 = hP \\ & V - PZ_0 + RX_0 = hQ \\ & W - QX_0 + PY_0 = hR, \end{aligned}$$

aus welchen sich zunächst der Windungsparameter

$$(2) \quad h = \frac{PU + QV + RW}{P^2 + Q^2 + R^2}$$

ergibt. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt aber

$$X_0(Q^2 + R^2) - QW + RV - P(QY_0 + RZ_0) = 0$$

oder, da  $n$  zu  $a$  senkrecht, also

$$(3) \quad QY_0 + RZ_0 = 0$$

ist:

$$X_0(Q^2 + R^2) = QW - RV,$$

d. h.

$$(4) \quad X_0 = \frac{QW - RV}{Q^2 + R^2}.$$

Andererseits folgt aus der ersten Gleichung

$$-RY_0 + QZ_0 = hP - U$$

der kürzeste Abstand

$$(5) \quad S = \frac{hP - U}{\sqrt{Q^2 + R^2}},$$

und für den Winkel  $\delta$  der positiven Normalen  $n$  gegen  $Y$

$$(6) \quad \cos \delta = -\frac{R}{\sqrt{Q^2 + R^2}}, \quad \sin \delta = \frac{Q}{\sqrt{Q^2 + R^2}}.$$

Folglich

$$(7) \quad Y_0 = S \cos \delta, \quad Z_0 = S \sin \delta.$$

Setzen wir nun fest, daß der Quadratwurzel stets das Vorzeichen von  $Q$  gegeben werde, so ist  $\delta$  ein Winkel zwischen 0 und  $\pi$ . Er bestimmt die positive Richtung der Normalen  $n$ , auf welcher der Abstand  $S$  aufzutragen ist und zwar nach der positiven oder negativen Seite, je nachdem  $S$  positiv oder negativ ist.

Ist jetzt  $\nu$  der Winkel, den die Achse  $a$  gegen  $X$  einschließt, d. h. der spitze Winkel, um welchen von der positiven Seite von  $n$  aus gesehen  $X$  im Sinne des Uhrzeigers gedreht werden muß, bis  $X$  parallel der Achse  $a$  wird, so genügt zur Bestimmung derselben die einzige Gleichung

$$(8) \quad \cotg \nu = \frac{P}{\sqrt{Q^2 + R^2}}.$$

Die Drehung der Achse  $X$  erfolgt also im positiven oder negativen Sinne um  $\nu$ , je nachdem der Quotient rechts positiv oder negativ ist. Aus der positiven Richtung der Achse  $X$  ergibt sich durch Drehung um  $\nu$  die positive Seite der Achse  $a$ , und es ist nach dieser der Windungsparameter  $h$  als Strecke aufzutragen, falls sich für  $h$  ein positiver Wert ergibt.

Wenn  $Q$  verschwindet, so ist die Achse  $a$  parallel der Ebene  $XZ$ . Das Vorzeichen der Wurzel ist willkürlich, d. h. die positive Richtung kann mit der positiven oder negativen Seite der Achse  $Y$  zusammenfallen; da sich aber mit der Wurzel auch das Vorzeichen des Winkels  $\nu$  und des Abstandes  $S$  ändert, so führen beide Vorzeichen der Wurzel geometrisch zur nämlichen Lage der Achse  $a$ .

Oft ist es zweckmäßig, die beiden Größen  $h$  und  $S$  gleichzeitig aus zwei Gleichungen zu berechnen.

Man hat dazu

$$(9) \quad \begin{aligned} hP - S\sqrt{Q^2 + R^2} &= U \\ SP + h\sqrt{Q^2 + R^2} &= \frac{QV + RW}{\sqrt{Q^2 + R^2}}. \end{aligned}$$

Dividiert man beide Gleichungen durch

$$\omega = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$$

und erteilt man  $\omega$  das Vorzeichen von  $P$ , so wird  $\nu$  ein spitzer Winkel und man hat

$$(10) \quad \begin{aligned} h \cos \nu - S \sin \nu &= \frac{U}{\sqrt{Q^2 + R^2}} \sin \nu \\ h \sin \nu + S \cos \nu &= \frac{QV + RW}{Q^2 + R^2} \sin \nu. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun für den Augenblick die besondere Schraubenbewegung, für welche

$$R = 0, \quad W = 0$$

$P, Q, U, V$  konstant sind, so ist

$$X_0 = 0, \quad \cos \delta = 0, \quad \sin \delta = 1$$

d. h. die Schraubenachse  $a$  schneidet die Achse  $Z$  im Abstände

$$S = \frac{hP - U}{Q}$$

rechtwinklig. Es beschreibt also  $X$  eine Schraubenfläche, welche den Punkt  $O$  augenblicklich zum Zentralpunkt und die Ebene  $XY$  zur Zentralebene hat. Der Punkt  $u$  von  $X$  hat die Geschwindigkeitskomponenten

$$\begin{aligned} u_x &= U = hP - QS \\ u_y &= V = hQ + PS \\ u_z &= -uQ. \end{aligned}$$

Die Tangentenebene des Punktes  $u$  schließt demnach gegen die Zentralebene einen Winkel  $\Phi$  ein, der durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{u_z}{u_y} = -\frac{u}{h + S \operatorname{cotg} \nu}$$

bestimmt ist. Es ist also

$$- (h + S \operatorname{cotg} \nu)$$

der Verteilungsparameter der Schraubenfläche.

Bedeutet anderseits  $\tau$  den Winkel der Striktionslinie der Fläche gegen die Achen  $X$ , so ist

$$(11) \quad \operatorname{tg} \tau = \frac{u_y}{u_x} = \frac{hQ + SP}{hP - SQ} = \frac{h + S \operatorname{cotg} \nu}{h \operatorname{cotg} \nu - S}$$

Setzt man also

$$(12) \quad \begin{aligned} h + S \operatorname{cotg} \nu &= k \\ h \operatorname{cotg} \nu - S &= i, \end{aligned}$$

so sind

$$k \quad \text{und} \quad i = k \operatorname{cotg} \tau$$

zwei geometrische Invarianten der Schraubenfläche, durch welche diese eindeutig bestimmt ist. Man erhält dann

$$(13) \quad \begin{aligned} S &= k \sin \nu \cos \nu - i \sin^2 \nu \\ h &= k \sin^2 \nu + i \sin \nu \cos \nu, \quad \text{d. h.} \end{aligned}$$

*Hilfssatz:* Ist  $\nu$  der Neigungswinkel der Achse  $a$  einer Schraubensfläche gegen die Erzeugende  $X$  und  $S$  der Radius  $S$  ihrer Striktionslinie und der Windungsparameter  $h$  definiert durch die Gleichungen (13), so bedeutet  $k$  den negativen Verteilungsparameter und  $k : i$  die trigonometrische Tangente des Winkels  $\tau$  ihrer Striktionslinie gegen die Erzeugende.

Für die folgenden Ausführungen ist es nun zweckmäßig, die neun Richtungskosinus der Achsen  $x, y, z$  des beweglichen Systems  $\sigma$  durch die Eulerschen Winkel  $\varphi, \vartheta, \psi$  auszudrücken. Fallen zu Anfang der Bewegung beide Systeme zusammen, so gelangt  $\sigma$  in eine beliebige Stellung zur Zeit  $t$ , indem man  $\sigma$  zuerst um die Achse  $X$  dreht um den Winkel  $\varphi$ , sodann um die neue Lage der Achse  $y$  um den Winkel  $\vartheta$ , endlich um die dadurch erzielte neue Lage der Achse  $x$  um den Winkel  $\psi$ , alle drei Drehungen im Sinne des Uhrzeigers ausgeführt.

Die Richtungskosinus erhalten dadurch die Werte

$$(14) \quad \begin{aligned} a_1 &= \cos \vartheta & b_1 &= -\sin \vartheta \cos \psi \\ a_2 &= \sin \vartheta \cos \varphi & b_2 &= -\sin \vartheta \sin \psi + \cos \vartheta \cos \varphi \cos \psi \\ a_3 &= \sin \vartheta \sin \varphi & b_3 &= \cos \vartheta \sin \psi + \cos \vartheta \sin \varphi \cos \psi \\ c_1 &= \sin \vartheta \sin \psi \\ c_2 &= -\sin \varphi \cos \psi - \cos \vartheta \cos \varphi \sin \psi \\ c_3 &= \cos \varphi \cos \psi - \cos \vartheta \sin \varphi \sin \psi. \end{aligned}$$

Die Komponenten der instantanen Winkelgeschwindigkeit des Systems  $\sigma$  sind bezüglich  $\Sigma$

$$(15) \quad \begin{aligned} P &= \varphi' + \cos \vartheta \psi' \\ Q &= -\sin \vartheta \varphi' + \sin \vartheta \cos \varphi \psi' \\ R &= \cos \vartheta \varphi' + \sin \vartheta \sin \varphi \psi'. \end{aligned}$$

In bezug auf  $\sigma$  haben sie die Werte

$$(16) \quad \begin{aligned} p &= \cos \vartheta \varphi' + \psi' \\ q &= \sin \psi \vartheta' - \sin \vartheta \cos \varphi \psi' \\ r &= \cos \psi \vartheta' + \sin \vartheta \sin \varphi \psi'. \end{aligned}$$

Sind also  $\varphi$  und  $\vartheta$  gegebene Funktionen der Zeit, so ist damit der Richtungskegel der Eingriffsfläche festgelegt. Infolge der Bedingung

$$Q = -\sin \vartheta \varphi' + \sin \vartheta \cos \varphi \psi' = 0$$

wird jetzt auch der dritte Eulersche Winkel

$$(17) \quad \psi = \int_0^t \operatorname{tg} \varphi \frac{\vartheta'}{\sin \vartheta} dt$$

eine bekannte Funktion der Zeit. Demnach sind die neun Richtungskosinus durch eine einzige Quadratur bestimmbar. Dies wurde schon früher gezeigt durch Einführung eines Hilfswinkels  $T$ , der eben nichts anderes ist, als der dritte Eulersche Winkel  $\psi$ .

Eliminiert man mittels der Gleichung

$$\psi' = \operatorname{tg} \varphi \frac{\vartheta'}{\sin \vartheta}$$

die Größe  $\psi'$  aus den Gleichungen (15), so erhält man schließlich für die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  in  $\Sigma$  die Werte

$$P = \varphi' + \operatorname{cotg} \vartheta \operatorname{tg} \varphi \vartheta'$$

$$(18) \quad Q = 0$$

$$R = \frac{\vartheta'}{\cos \varphi}.$$

Zudemgegebenen Richtungskegel gehört nun nach (30 I) eine bestimmte Eingriffsfläche

$$X = L + u a_1$$

$$Y = M + u a_2$$

$$Z = N + u a_3,$$

die jetzt durch sekundäre Axoide erzeugt werden soll.

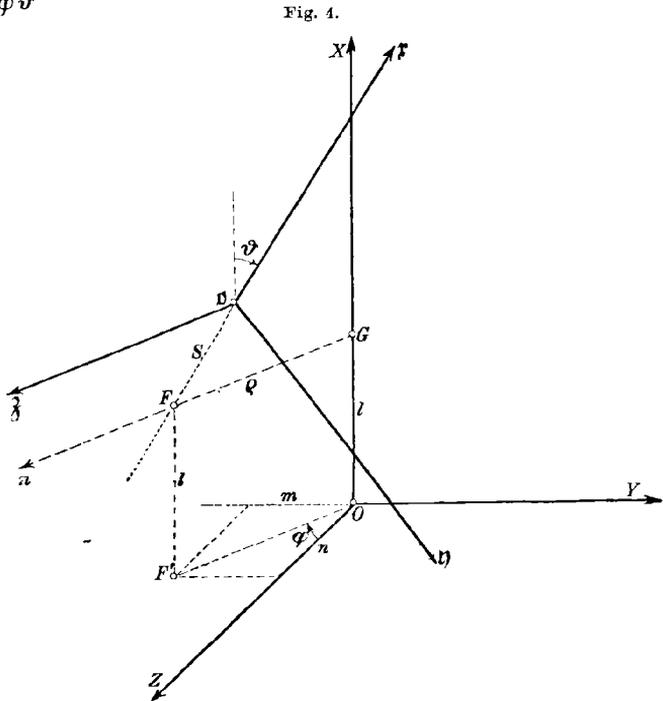
Um zur Darstellung der letztern zu gelangen, führen wir an Stelle des Systems  $\sigma$  ein neues System  $\xi(\xi, \eta, \zeta)$  ein, dessen

Achse  $\xi$  beständig mit  $x$  zusammenfalle, während die Achse  $\zeta$  parallel und gleichgerichtet sei mit der gemeinsamen Normalen  $n$  der Achsen  $X$  und  $x$ , deren positive Richtung gegen  $Z$  den Winkel  $\varphi$  einschlieÙe, Fig. 4.

Ist  $G$  der Fußpunkt von  $n$  in  $X$ ,  $F$  derjenige in  $\xi$  und sind  $l, m, n$  die Koordinaten von  $F$ , so möge der Anfangspunkt  $v$  von  $\xi$  die Koordinaten besitzen

$$(19) \quad \mathcal{L} = l + S \cos \vartheta, \quad \mathcal{M} = m + S \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \mathcal{N} = n + S \sin \vartheta \sin \varphi,$$

wo  $S$  eine beliebige Funktion von  $\vartheta$  bedeutet, welche eine Verschiebung des Systems  $\xi$  längs  $\xi$  zur Folge hat und daher als Schiebungsfunktion



bezeichnet werde. Um die Übergangsformeln von  $\mathfrak{s}$  zu  $\Sigma$  zu erhalten, hat man in den Gleichungen (14) einfach den Winkel

$$\psi = 0$$

zu setzen.

Sie lauten also

$$\begin{aligned} X &= \mathfrak{L} + \mathfrak{x} \cos \vartheta - \mathfrak{y} \sin \vartheta \\ (20) \quad Y &= \mathfrak{M} + \mathfrak{x} \sin \vartheta \cos \varphi + \mathfrak{y} \cos \vartheta \cos \varphi - \mathfrak{z} \sin \varphi \\ Z &= \mathfrak{N} + \mathfrak{x} \sin \vartheta \sin \varphi + \mathfrak{y} \cos \vartheta \sin \varphi + \mathfrak{z} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Bezeichnet man nun den in der positiven Richtung der Normalen  $n$  gemessenen Abstand  $GF$  mit  $\varrho$ , so ist

$$(21) \quad m = -\varrho \sin \varphi, \quad n = +\varrho \cos \varphi.$$

Wenn also  $u_0$  noch den Abstand des Punktes  $F$  vom Anfangspunkt  $(L, M, N)$  des Systems  $\sigma$  bedeutet, so bestehen zur Bestimmung von  $l, m, n$  die Gleichungen

$$\begin{aligned} L &= a_1 J_x + b_1 J_y + c_1 J_z = l - u_0 a_1 \\ (22) \quad M &= a_2 J_x + b_2 J_y + c_2 J_z = m - u_0 a_2 = -\frac{\varrho}{\sin \vartheta} a_2 - u_0 a_2 \\ N &= a_3 J_x + b_3 J_y + c_3 J_z = n - u_0 a_3 = \frac{\varrho}{\sin \vartheta} a_3 - u_0 a_3. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber

$$\begin{aligned} (23) \quad l a_1 - u_0 &= J_x \\ l b_1 + \varrho \sin \psi &= J_y \\ l c_1 + \varrho \cos \psi &= J_z, \end{aligned}$$

also ist

$$\begin{aligned} \varrho &= +J_y \sin \psi + J_z \cos \psi \\ (24) \quad l \sin \vartheta &= -J_y \cos \psi + J_z \sin \psi. \end{aligned}$$

Die beiden letztern Gleichungen bestimmen mit (21) die Koordinaten  $l, m, n$  des Fußpunktes  $F$ , während die erste der Gleichungen (23) den Abstand  $u_0$  bestimmt.

Die Gleichungen der Eingriffsfläche sind nunmehr

$$\begin{aligned} (25) \quad X &= l + u a_1 \\ Y &= m + u a_2 \\ Z &= n + u a_3. \end{aligned}$$

Da die Profilfläche  $Z_1$  längs  $\mathfrak{x}$  von der Schraubenfläche  $S_x$  berührt werden muß, die zur Schraube  $(X, h_0)$  gehört, so durchwandert im Laufe der Bewegung der Punkt  $F$  die Striktionslinie der Profilfläche, während die Ebene  $(\mathfrak{x}, \mathfrak{z})$  der Zentralebene, die Ebene  $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$  der asymptotischen Ebene parallel bleiben. Es bleibt demnach das System  $\mathfrak{s}$  dem be-

gleitenden Dreikant der Profilfläche parallel und wird mit diesem Dreikant identisch, sobald die Schiebungsfunktion  $S$  verschwindet.

In Analogie mit dem Sprachgebrauch für zylindrische und konische Räder nennt man daher die Axoide der Bewegung von  $\mathfrak{z}$  in  $\Sigma_1$  die sekundären Axoide der Profilflächen. Ihnen entsprechen in  $\Sigma$  die sekundären Axoide der Eingriffsfläche.

Mit

$$\psi = 0, \quad \psi' = 0$$

haben nun die Komponenten der instantanen Schraubengeschwindigkeit von  $\mathfrak{z}$  in  $\Sigma$  an der Achse  $\mathfrak{p}$  die Werte

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \varphi', & \mathfrak{Q} &= -\sin \vartheta \vartheta', & \mathfrak{R} &= \cos \vartheta \vartheta' \\ \mathfrak{U} &= \mathcal{L}' + \mathfrak{R}\mathfrak{M} - \mathfrak{Q}\mathfrak{N} = l' + S' \cos \vartheta \\ (26) \quad \mathfrak{V} &= \mathfrak{M}' + \mathfrak{P}\mathfrak{N} - \mathfrak{R}\mathfrak{L} = -\varrho' \sin \varphi - l \cos \vartheta \vartheta' + S' \sin \vartheta \cos \varphi \\ \mathfrak{W} &= \mathfrak{N}' + \mathfrak{Q}\mathfrak{L} - \mathfrak{P}\mathfrak{M} = \varrho' \cos \varphi - l \sin \vartheta \vartheta' + S' \sin \vartheta \sin \varphi. \end{aligned}$$

Nach (2) ist daher der Windungsparameter

$$(27) \quad \mathfrak{D} = \frac{(l + S' \cos \vartheta) \varphi' + \varrho' \vartheta'}{\varphi'^2 + \vartheta'^2}.$$

Bezeichnet ferner  $n'$  das gemeinsame Lot der Achse  $X$  und der Schraubenachse  $\mathfrak{p}$ ,  $\delta$  seinen Winkel gegen  $Y$ ,  $\mathfrak{X}_0$  seinen Abstand von  $O$ ,  $\mathfrak{S}$  seine Länge, so ist

$$(28) \quad \mathfrak{X}_0 = l - \frac{dS}{d\vartheta} \sin \vartheta$$

$$(29) \quad \sqrt{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{R}^2} = -\vartheta', \quad \cos \delta = \cos \varphi, \quad \sin \delta = \sin \varphi.$$

Die positive Seite von  $n'$  schließt also gegen  $Y$  den Winkel  $\varphi$  ein. Auf ihr ist nach dem Vorzeichen aufzutragen der Abstand

$$(30) \quad \mathfrak{S} = \frac{(l + S' \cos \vartheta) \vartheta' - \varrho' \varphi'}{\varphi'^2 + \vartheta'^2}.$$

Gibt man der Quadratwurzel das Vorzeichen von  $\varphi'$ , so ist der Winkel  $\tau$  der Schraubenachse gegen  $X$  durch die Gleichungen

$$(31) \quad \cos \tau = \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \vartheta'^2}}, \quad \sin \tau = \frac{-\vartheta'}{\sqrt{\varphi'^2 + \vartheta'^2}}$$

bestimmt. Er ist also von  $n'$  aus gesehen negativ, und es lauten daher die Gleichungen der Schraubenachse  $\mathfrak{p}$  bezüglich  $\Sigma$ :

$$\begin{aligned} (32) \quad \mathfrak{X} &= l - \frac{dS}{d\vartheta} \sin \vartheta + u \cos \tau \\ \mathfrak{Y} &= \mathfrak{S} \cos \varphi + u \sin \tau \sin \varphi \\ \mathfrak{Z} &= \mathfrak{S} \sin \varphi - u \sin \tau \cos \varphi. \end{aligned}$$

Sie stellen gleichzeitig die Gleichungen des festen sekundären Axoides der Eingriffsfläche dar.

Transformiert man die Gleichungen der Schraubenachse  $\mathfrak{p}$  nach dem System  $\mathfrak{s}$ , so erhält man die Gleichungen des beweglichen sekundären Axoids der Eingriffsfläche, nämlich

$$\begin{aligned}
 \xi &= \left( \mathfrak{S} - \frac{dS}{d\vartheta} \cos \vartheta \right) \sin \vartheta - S + u \cos \tau \cos \vartheta \\
 (33) \quad \eta &= \left( \mathfrak{S} - \frac{dS}{d\vartheta} \cos \vartheta \right) \cos \vartheta + \frac{dS}{d\vartheta} - u \cos \tau \sin \vartheta \\
 \xi &= \qquad \qquad \qquad - \varrho - u \sin \tau.
 \end{aligned}$$

Je nach der Wahl der Schiebungsfunktion  $S$  entstehen also unendlich viele Paare sekundärer Axoide der Eingriffsfläche, alle mit den nämlichen Richtungskegeln.

Bei der umgekehrten Bewegung von  $\Sigma$  in  $\mathfrak{s}$  beschreibt nun auch die Achse  $X$  eine Regelfläche  $\mathcal{A}$ , welche bei der direkten Bewegung stets die Achse  $X$  enthält. Ihre Gleichungen in  $\mathfrak{s}$  lauten daher

$$\begin{aligned}
 (34) \quad \xi_{\mathcal{A}} &= -S + v \cos \vartheta \\
 \eta_{\mathcal{A}} &= \qquad -v \sin \vartheta \\
 \xi_{\mathcal{A}} &= -\varrho.
 \end{aligned}$$

Die Fläche  $\mathcal{A}$  ist je nach der Wahl der Schiebungsfunktion ein offenes gerades Konoid, dessen Erzeugende die zur  $\xi$ -Achse parallele Normale  $n$  von  $X$  und  $\xi$  rechtwinklig schneiden. Ein geschlossenes Konoid wird  $\mathcal{A}$  nur für den Fall, daß  $S$  verschwindet.

Indem wir noch einmal auf die Gleichungen (24) zurückkommen, ergibt sich durch Differentiation der ersten nach leichter Rechnung

$$(35) \quad \frac{d\varrho}{d\vartheta} = -(l \operatorname{tg} \varphi + r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1)$$

und durch Differentiation der zweiten

$$\begin{aligned}
 (36) \quad \varrho &= (l \operatorname{cotg} \varphi - r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 - h_0) \sin \vartheta \cos \vartheta \\
 &- \left( \operatorname{cotg} \varphi \left( h_0 \frac{d\varphi}{d\vartheta} - \frac{dl}{d\vartheta} \right) - \frac{r_1 - r_2}{\sin \varphi} \right) \sin^2 \vartheta.
 \end{aligned}$$

Die Integrale dieser Differentialgleichungen haben allgemein die Form

$$\begin{aligned}
 \varrho &= (J_y + y_0) \sin \psi + (J_z + z_0) \cos \psi \\
 l \sin \vartheta &= -(J_y + y_0) \cos \psi + (J_z + z_0) \sin \psi,
 \end{aligned}$$

wo  $y_0$  und  $z_0$  willkürliche Konstanten bedeuten, und liefern daher als Eingriffsflächen diejenigen, welche durch die Gleichungen (29 I) dargestellt sind, und somit durch die zu  $X$  parallelen Geraden von  $\sigma$  beim Abschrotten der primären Axoide beschrieben werden.

§ 6. Die Relativbewegung von  $\mathfrak{s}$  in  $\sigma$  und das Zylindroid  $G_p$ .

Da die Systeme  $\mathfrak{s}$  und  $\sigma$  stets die Achse  $\mathfrak{r}$  gemeinsam haben, so besteht die Relativbewegung von  $\mathfrak{s}$  in  $\sigma$  in einer Schraubebewegung um diese Achse, deren Geschwindigkeit nichts anderes ist, als die Differenz der Schraubengeschwindigkeiten an den Schrauben  $(p, \mathfrak{S})$  und  $(o, h)$ .

Statt mit der besonderen Schraube  $(o, h)$  wollen wir zunächst die Schraubengeschwindigkeit an der Achse  $p$  mit der Schraubengeschwindigkeit an einer beliebigen Achse des Grundzylindroids kombinieren, welche durch den Winkel  $\mu$  gegen  $X$  bestimmt ist. Die Komponenten der letztern bezüglich  $\Sigma$  sind dann

$$(37) \quad \begin{aligned} P_0 &= \frac{\cotg \mu}{\cos \varphi} \mathfrak{P}', & U_0 &= h_0 \frac{\cotg \mu}{\cos \varphi} \mathfrak{P}' - (r_1 - r_2) \frac{\mathfrak{P}'}{\cos \varphi} \\ Q_0 &= 0, & V_0 &= 0 \\ R_0 &= \frac{\mathfrak{P}'}{\cos \varphi}, & W_0 &= -r_1 \cotg \alpha_1 \frac{\mathfrak{P}'}{\cos \varphi}. \end{aligned}$$

Die relative Schraubengeschwindigkeit hat daher die Komponenten

$$(38) \quad \begin{aligned} P_v &= \mathfrak{P} - P_0 = \mathfrak{P}' - \frac{\cotg \mu}{\cos \varphi} \mathfrak{P}' \\ Q_v &= \mathfrak{Q} - Q_0 = -\sin \varphi \mathfrak{P}' \\ R_v &= \mathfrak{R} - R_0 = -\frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \mathfrak{P}' \\ U_v &= \mathfrak{U} - U_0 = l' + S' \cos \vartheta - h_0 \frac{\cotg \mu}{\cos \varphi} \mathfrak{P}' + \frac{r_1 - r_2}{\cos \varphi} \mathfrak{P}' \\ V_v &= \mathfrak{V} - V_0 = -\mathfrak{P}' \sin \varphi - l \cos \varphi \mathfrak{P}' + S' \sin \vartheta \cos \varphi \\ W_v &= \mathfrak{W} - W_0 = \mathfrak{P}' \cos \varphi - l \sin \varphi \mathfrak{P}' + S' \sin \vartheta \sin \varphi + r_1 \cotg \alpha_1 \frac{\mathfrak{P}'}{\cos \varphi}. \end{aligned}$$

Ist also  $\delta_v$  der Winkel der positiven Richtung des gemeinsamen Lotes  $n_v$  von  $X$  und der relativen Schraubenchse  $\mathfrak{r}_v$ , so ist

$$\cos \delta_v = -\sin \varphi, \quad \sin \delta_v = +\cos \varphi,$$

also 
$$\delta_v = \varphi + \frac{\pi}{2},$$

d. h.  $n_v$  ist der Normalen  $n$  parallel und gleichgerichtet und daher vom Winkel  $\mu$  ganz unabhängig.

Bedeutet ferner  $\nu$  den Winkel der Achse  $\mathfrak{r}_v$  gegen  $X$ , so ist

$$\cotg \nu = \frac{P_v}{\sqrt{Q_v^2 + R_v^2}} = \frac{\mathfrak{P}' - \frac{\cotg \mu}{\cos \varphi} \mathfrak{P}'}{-\tg \varphi \mathfrak{P}'},$$

so daß die Gleichung besteht

$$(39) \quad \cotg \mu = \frac{\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}'} \cos \varphi + \cotg \nu \sin \varphi.$$

Ist im weiteren  $l_\nu$  der Abstand der Normalen  $n_\nu$  von  $O$ , so ist

$$l_\nu = \frac{Q_\nu W_\nu - R_\nu V_\nu}{Q_\nu^2 + R_\nu^2} = - \frac{\frac{d\varrho}{d\vartheta} + r_1 \cotg \alpha_1}{\tg \varphi}.$$

Nach (35) ist also

$$(40) \quad l_\nu = l$$

wieder eine von  $\mu$  ganz unabhängige Größe, und es fällt somit  $n_\nu$  mit  $n$  zusammen.

Wollen wir nun auch den Abstand  $\varrho_\nu$  der Achse  $\xi_\nu$  und ihren Windungsparameter  $h_\nu$  berechnen, so hat man nach (10) die beiden Bestimmungsgleichungen

$$h_\nu \cos \nu - \varrho_\nu \sin \nu = - \left( \frac{r_1 - r_2}{\sin \varphi} - h_0 \frac{\cotg \mu}{\sin \varphi} + \cotg \varphi \left( \frac{dl}{d\vartheta} + \frac{dS}{d\vartheta} \cos \vartheta \right) \right) \sin \nu$$

$$h_\nu \sin \nu + \varrho_\nu \cos \nu = - \left( r_1 \cotg \alpha_1 - \cotg \varphi \left( l - \frac{dS}{d\vartheta} \sin \vartheta \right) \right) \sin \nu.$$

Beachtet man nun, daß wegen (39)

$$\frac{h_0 \cotg \mu}{\sin \varphi} = h_0 \frac{d\varphi}{d\vartheta} \cotg \varphi + h_0 \cotg \nu$$

ist, subtrahiert man ferner in der zweiten Gleichung auf beiden Seiten

$$h_0 \sin \nu$$

und setzt man endlich zur Abkürzung

$$(41) \quad \begin{aligned} A &= \cotg \varphi \left( l - \frac{dS}{d\vartheta} \sin \vartheta \right) - r_1 \cotg \alpha_1 - h_0 \\ B &= \cotg \varphi \left( h_0 \frac{d\varphi}{d\vartheta} - \frac{dl}{d\vartheta} - \frac{dS}{d\vartheta} \cos \vartheta \right) - \frac{r_1 - r_2}{\sin \varphi}, \end{aligned}$$

so nehmen die Bestimmungsgleichungen die Form an

$$(h_\nu - h_0) \cos \nu - \varrho_\nu \sin \nu = B \sin \nu$$

$$(h_\nu - h_0) \sin \nu + \varrho_\nu \cos \nu = A \sin \nu,$$

woraus folgt

$$(42) \quad \begin{aligned} \varrho_\nu &= A \sin \nu \cos \nu - B \sin^2 \nu \\ h_\nu - h_0 &= A \sin^2 \nu + B \sin \nu \cos \nu. \end{aligned}$$

Damit ist die relative Schraubengeschwindigkeit an der Achse  $\xi_\nu$  vollständig bestimmt.

Will man also die Relativbewegung des Systems  $\mathfrak{z}$  in  $\sigma$  haben, so muß die Achse auf dem Grundzylindroid mit  $o$  koinzidieren, d. h. man hat

$$\mu = \lambda$$

zu setzen. Es ist aber

$$(43) \quad \cotg \lambda = \frac{P}{Q} = \frac{\varphi'}{\vartheta'} \cos \varphi + \cotg \vartheta \sin \varphi$$

und da  $\vartheta$  und  $\nu$  spitze Winkel sind, wegen (39)

$$\nu = \vartheta.$$

Setzt man also in den Gleichungen (42) ebenfalls  $\nu$  gleich  $\vartheta$ , so erhält man für den Abstand  $\varrho$  und den Windungsparameter  $H$  der relativen Schraubenbewegung von  $\xi$  in  $\sigma$

$$(44) \quad \begin{aligned} \varrho &= A \sin \vartheta \cos \vartheta - B \sin^2 \vartheta \\ H - h_0 &= A \sin^2 \vartheta + B \sin \vartheta \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Die Vergleichung der ersten dieser Gleichungen mit (36) zeigt, daß die Achse  $\xi_v$  in der Tat mit  $\xi$  zusammenfällt, daß also  $\varrho$  von der Schiebelfunktion  $S$  unabhängig ist.

Endlich ist die relative Winkelgeschwindigkeit an der Achse  $\xi$

$$(45) \quad \Omega = -\operatorname{tg} \varphi \frac{\vartheta'}{\sin \vartheta} = -\psi'.$$

Damit ist die relative Schraubengeschwindigkeit des Systems  $\xi$  in  $\sigma$  vollständig bestimmt.<sup>1)</sup>

Die erste der Gleichungen (42) ist nun aber diejenige eines Zylindroids  $G_\vartheta$ , dessen Erzeugende  $\xi_v$  sämtlich die Normale  $n$  rechtwinklig treffen, während die zweite Gleichung (42) die Parameterverteilung auf dem Zylindroid angibt. Das Zylindroid ist jedesmal durch die beiden Schrauben  $(X, h_0)$  und  $(\xi, H)$  bestimmt, wechselt aber mit  $\vartheta$ , d. h. mit der Lage der Erzeugenden  $\xi$  auf der Eingriffsfläche auch seine Gestalt.

Auf diesem Zylindroid liegt nun auch die Achse  $k_1$  der Relativbewegung von  $\xi$  in  $\Sigma_1$ ; man hat nur die Achse  $o$  des Grundzylindroids mit  $o_1$  zu vertauschen d. h.

$$\mu - \alpha_1$$

zu setzen. Demnach ist der Winkel  $\vartheta_1$  der Achse  $k_1$  gegen  $X$  bestimmt durch die Gleichung

$$(46) \quad -\operatorname{cotg} \alpha_1 = \frac{\varphi'}{\vartheta} \cos \varphi + \operatorname{cotg} \vartheta_1 \sin \varphi,$$

während der Abstand  $\varrho_1$  der Achse  $k_1$  von  $X$  und ihr Windungsparameter  $h_1$  bestimmt sind durch die Gleichungen

$$(47) \quad \begin{aligned} \varrho_1 &= A \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 - B \sin^2 \vartheta_1 \\ h_1 - h_0 &= A \sin^2 \vartheta_1 + B \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1. \end{aligned}$$

1) Da  $u_0 + S$  den Abstand der Anfangspunkte beider Systeme  $\xi$  und  $\sigma$  in  $\xi$  bedeutet, so ist der Windungsparameter  $H$  auch bestimmt durch die Gleichung

$$H = -\frac{u_0' + S'}{\psi'},$$

und es ergibt in der Tat die direkte Differentiation der Gleichung

$$u_0 = l a_1 - J_x$$

für  $H$  obigen Wert wieder.

Läßt man analog die Achse  $o$  mit  $o_2$  zusammenfallen, so erhält man die Achse  $k_2$  der Relativbewegung von  $\xi$  in  $\Sigma_2$ .

Will man die Gleichung des Zylindroids und seine Parameterverteilung von der Achse  $\zeta$  aus darstellen, so sind

$$(48) \quad \varrho_v - \varrho \quad \text{und} \quad \Gamma = \nu - \vartheta$$

Abstand und Neigung der Achse  $\zeta_v$  gegen  $\zeta$ . Daher ist

$$\begin{aligned} \varrho_v - \varrho &= A(\sin \nu \cos \nu - \sin \vartheta \cos \vartheta) - B(\sin^2 \nu - \sin^2 \vartheta), \\ h_v - H &= A(\sin^2 \nu - \sin^2 \vartheta) + B(\sin \nu \cos \nu - \sin \vartheta \cos \vartheta). \end{aligned}$$

Es bestehen aber die Identitäten

$$\begin{aligned} \sin \nu \cos \nu - \sin \vartheta \cos \vartheta &= \cos 2\vartheta \sin \Gamma \cos \Gamma - \sin 2\vartheta \sin^2 \Gamma, \\ \sin^2 \nu - \sin^2 \vartheta &= \sin 2\vartheta \sin \Gamma \cos \Gamma + \cos 2\vartheta \sin^2 \Gamma. \end{aligned}$$

Man erhält daher

$$\begin{aligned} \varrho_v - \varrho &= (A \cos 2\vartheta - B \sin 2\vartheta) \sin \Gamma \cos \Gamma - (A \sin 2\vartheta + B \cos 2\vartheta) \sin^2 \Gamma, \\ h_v - H &= (A \sin 2\vartheta + B \cos 2\vartheta) \sin \Gamma \cos \Gamma + (A \cos 2\vartheta - B \sin 2\vartheta) \sin^2 \Gamma. \end{aligned}$$

Nach (44) ist aber

$$\begin{aligned} A \cos 2\vartheta - B \sin 2\vartheta &= \varrho \cotg \vartheta - (H - h_0), \\ A \sin 2\vartheta + B \cos 2\vartheta &= (H - h_0) \cotg \vartheta + \varrho. \end{aligned}$$

Somit ist

$$(49) \quad \begin{aligned} \varrho_v - \varrho &= (\varrho \cotg \vartheta - (H - h_0)) \sin \Gamma \cos \Gamma - ((H - h_0) \cotg \vartheta + \varrho) \sin^2 \Gamma, \\ h_v - H &= (\varrho \cotg \vartheta - (H - h_0)) \sin^2 \Gamma + ((H - h_0) \cotg \vartheta + \varrho) \sin \Gamma \cos \Gamma. \end{aligned}$$

die gesuchte Darstellung.

Man kann daher das Resultat aussprechen:

*Jede Erzeugende  $\zeta$  der Eingriffsfläche liegt mit der Achse  $X$  und den beiden Achsen  $k_1$  und  $k_2$  der Relativbewegungen von  $\xi$  in  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  auf einem Zylindroid  $G_{\vartheta}$ , welches mit der Lage von  $\zeta$  seine Gestalt beständig ändert und in jedem Augenblick der Bewegung die Gesamtheit der Achsen aller Schraubengeschwindigkeiten enthält, die durch Kombination der augenblicklichen Schraubengeschwindigkeit an der Achse  $\varrho$  mit allen Schraubengeschwindigkeiten des Grundzylindroids entstehen.*

## § 7. Die Gleichungen der Profilfläche und ihre sekundären Axoide.

Setzt man in den Gleichungen (49)

$$(50) \quad \nu = \vartheta_1, \quad \vartheta = \vartheta_1 - \vartheta,$$

so stellt  $\vartheta$  den sphärischen Krümmungsradius des sphärischen Bildes der Profilfläche dar; es geht  $\varrho$  in  $\varrho_1$ ,  $h_v$  in  $h_1$  über, und man hat daher

für den Abstand der Achse  $k_1$  von  $\mathfrak{r}$  und ihren Windungsparameter nach einfacher Umstellung die Werte

$$(51) \quad \begin{aligned} \varrho_1 - \varrho &= (\varrho \cotg \vartheta + h_0) \sin \Theta \cos \Theta - (\varrho - h_0 \cotg \vartheta + H(\cotg \Theta + \cotg \vartheta)) \sin^2 \Theta, \\ h_1 &= (\varrho \cotg \vartheta + h_0) \sin^2 \Theta + (\varrho - h_0 \cotg \vartheta + H(\cotg \Theta + \cotg \vartheta)) \sin \Theta \cos \Theta. \end{aligned}$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$(52) \quad \begin{aligned} h_0 + \varrho \cotg \vartheta &= K, \\ \varrho - h_0 \cotg \vartheta + H(\cotg \Theta + \cotg \vartheta) &= J, \end{aligned}$$

so wird

$$(53) \quad \begin{aligned} \varrho_1 - \varrho &= K \sin \Theta \cos \Theta - J \sin^2 \Theta, \\ h_1 &= K \sin^2 \Theta + J \sin \Theta \cos \Theta, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$(54) \quad \begin{aligned} h_1 + (\varrho_1 - \varrho) \cotg \Theta &= h_0 + \varrho \cotg \vartheta = K, \\ h_1 \cotg \Theta - (\varrho_1 - \varrho) &= \varrho - h_0 \cotg \vartheta + H(\cotg \Theta + \cotg \vartheta) = J. \end{aligned}$$

Von den beiden Größen  $K$  und  $J$  ist  $K$  von der Schiebungsfunktion  $S$  unabhängig. Stellen wir die Gleichungen der Achse  $k_1$  im System  $\mathfrak{s}$  dar, so erhalten wir die Gleichungen des sekundären Axoids  $\mathfrak{K}_1$  der Profilfläche, nämlich

$$(55) \quad \begin{aligned} \xi_k &= -S + v \cos \Theta, \\ \eta_k &= v \sin \Theta, \\ \lambda_k &= K \sin \Theta \cos \Theta - J \sin^2 \Theta. \end{aligned}$$

Es ist also  $\mathfrak{K}_1$  ebenso wie  $\mathcal{A}$  ein offenes gerades, von  $\mathcal{A}$  aber verschiedenes Konoid. Es wird geschlossen für  $S = 0$ .

Um nun das zweite sekundäre Axoid  $K_1$  im Zusammenhang mit der Profilfläche darzustellen, bestimmen wir die Geschwindigkeitskomponenten des Anfangspunktes  $\mathfrak{o}$  von  $\mathfrak{s}$  bezüglich  $\sigma$ . Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_k$  an der Achse  $k_1$  hat in  $\Sigma$  die Komponenten

$$(56) \quad P_k = \varphi' + \frac{\cotg \alpha_1}{\cos \varphi} \vartheta', \quad Q_k = -\sin \varphi \vartheta', \quad R_k = -\frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \vartheta'$$

und daher in  $\mathfrak{s}$

$$(57) \quad \begin{aligned} p_k &= P_k \cos \vartheta + Q_k \sin \vartheta \cos \varphi + R_k \sin \vartheta \sin \varphi = \omega_k \cos \Theta, \\ q_k &= -P_k \sin \vartheta + Q_k \cos \vartheta \cos \varphi + R_k \cos \vartheta \sin \varphi = \omega_k \sin \Theta, \\ r_k &= -Q_k \sin \varphi + R_k \cos \varphi = 0. \end{aligned}$$

Dabei ist also

$$\frac{p_k}{q_k} = \cotg \Theta.$$

Nun hat der Anfangspunkt von  $\mathfrak{s}$  die Geschwindigkeitskomponenten

$$(58) \quad \begin{aligned} u_x &= h_1 p_k - (\varrho_1 - \varrho) q_k = q_k (h_1 \cotg \Theta - (\varrho_1 - \varrho)) = q_k J, \\ u_y &= h_1 q_k + (\varrho_1 - \varrho) p_k = q_k (h_1 + (\varrho_1 - \varrho) \cotg \Theta) = q_k K, \\ u_z &= -q_k S. \end{aligned}$$

Sind jetzt  $x_1, y_1, z_1$  die Koordinaten des Anfangspunktes von  $\mathfrak{s}$  in  $\Sigma_1$  und

$$(59) \quad \begin{aligned} X_1 &= x_1 + \mathfrak{A}_1 \xi + \mathfrak{B}_1 \eta + \mathfrak{C}_1 \mathfrak{s}, \\ Y_1 &= y_1 + \mathfrak{A}_2 \xi + \mathfrak{B}_2 \eta + \mathfrak{C}_2 \mathfrak{s}, \\ Z_1 &= z_1 + \mathfrak{A}_3 \xi + \mathfrak{B}_3 \eta + \mathfrak{C}_3 \mathfrak{s} \end{aligned}$$

die Übergangsformeln von  $\mathfrak{s}$  zu  $\Sigma_1$ , so gehen die Richtungskosinus  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$  aus den früheren  $A, B, C$  in (39, I) hervor, indem man  $\psi$  gleich Null setzt. Führt man gleichzeitig an Stelle von  $t$  eine neue Variable  $T$  ein, durch die Gleichung

$$(60) \quad q_k dt = dT,$$

so bedeutet  $T$  die Bogenlänge des sphärischen Bildes der Profillfläche. Man hat daher

$$(61) \quad \mathfrak{A}_1 = A_1, \quad \mathfrak{A}_2 = A_2, \quad \mathfrak{A}_3 = A_3,$$

und wegen

$$\begin{aligned} r_k &= 0, \\ \frac{d\mathfrak{A}_1}{dt} &= -\mathfrak{C}_1 q_k, \quad \frac{d\mathfrak{A}_2}{dt} = -\mathfrak{C}_2 q_k, \quad \frac{d\mathfrak{A}_3}{dt} = -\mathfrak{C}_3 q_k. \end{aligned}$$

Bedeutet also fortan der Strich den Differentialquotienten nach  $T$ , so ist

$$(62) \quad \mathfrak{C}_1 = -\mathfrak{A}'_1, \quad \mathfrak{C}_2 = -\mathfrak{A}'_2, \quad \mathfrak{C}_3 = -\mathfrak{A}'_3,$$

wodurch nun auch die  $\mathfrak{B}_i$  bekannt sind.

Aus (39) folgen nun für die Komponenten des Punktes  $\mathfrak{o}$  bezüglich  $\mathfrak{s}$  die Werte

$$(63) \quad \begin{aligned} u_\xi &= \mathfrak{A}_1 x'_1 + \mathfrak{A}_2 y'_1 + \mathfrak{A}_3 z'_1 = J, \\ u_\eta &= \mathfrak{B}_1 x'_1 + \mathfrak{B}_2 y'_1 + \mathfrak{B}_3 z'_1 = K, \\ u_\mathfrak{s} &= \mathfrak{C}_1 x'_1 + \mathfrak{C}_2 y'_1 + \mathfrak{C}_3 z'_1 = -S \end{aligned}$$

und daraus

$$(64) \quad \begin{aligned} x'_1 &= \mathfrak{A}_1 J + \mathfrak{B}_1 K - \mathfrak{C}_1 S, \\ y'_1 &= \mathfrak{A}_2 J + \mathfrak{B}_2 K - \mathfrak{C}_2 S, \\ z'_1 &= \mathfrak{A}_3 J + \mathfrak{B}_3 K - \mathfrak{C}_3 S. \end{aligned}$$

Zerlegen wir  $J$  in einen von  $S$  unabhängigen Teil  $J_0$  und in einen von  $S$  abhängigen, so erkennt man aus dem Werte von  $H$ , daß man hat

$$J = J_0 - \cotg \varphi \sin \vartheta \frac{dS}{d\vartheta} (\cotg \Theta + \cotg \vartheta) = J_0 - \frac{\cotg \varphi \sin \vartheta_1}{\sin \Theta} \frac{dS}{d\vartheta}.$$

Nun ist aber

$$\sin \vartheta_1 = -\operatorname{tg} \varphi \frac{d\vartheta}{\omega_k dt}$$

also

$$(65) \quad J = J_0 + \frac{dS}{q_k dt} = J_0 + \frac{dS}{dT}.$$

Man erhält somit

$$(66) \quad \begin{aligned} x'_1 &= \mathfrak{A}_1 J_0 + \mathfrak{B}_1 K + \mathfrak{A}'_1 S + \mathfrak{A}_1 S', \\ y'_1 &= \mathfrak{A}_2 J_0 + \mathfrak{B}_2 K + \mathfrak{A}'_2 S + \mathfrak{A}_2 S', \\ z'_1 &= \mathfrak{A}_3 J_0 + \mathfrak{B}_3 K + \mathfrak{A}'_3 S + \mathfrak{A}_3 S' \end{aligned}$$

und daher als Gleichungen der Profilfläche in  $\Sigma_1$ :

$$(67) \quad \begin{aligned} X_1 &= \int (\mathfrak{A}_1 J_0 + \mathfrak{B}_1 K) dT + (u + S) \mathfrak{A}_1, \\ Y_1 &= \int (\mathfrak{A}_2 J_0 + \mathfrak{B}_2 K) dT + (u + S) \mathfrak{A}_2, \\ Z_1 &= \int (\mathfrak{A}_3 J_0 + \mathfrak{B}_3 K) dT + (u + S) \mathfrak{A}_3, \end{aligned}$$

aus welcher Darstellung hervorgeht, daß die Profilfläche von der gewählten Schiebungsfunction  $S$  ganz unabhängig ist, und diese daher nur auf deren sekundäre Axoide einen Einfluß ausübt. Die Linie

$$u = -S$$

ist die Striktionslinie der Profilfläche.

Transformiert man endlich die Gleichungen (55) der Achse  $k_1$  nach  $\Sigma_1$ , so erhält man als Gleichungen des sekundären Axoids  $K_1$  in  $\Sigma_1$

$$(68) \quad \begin{aligned} X_{1k} &= \int (\mathfrak{A}_1 J_0 + \mathfrak{B}_1 K) dT + \mathfrak{C}_1 (\varrho_1 - \varrho) + v (\mathfrak{A}_1 \cos \Theta + \mathfrak{B}_1 \sin \Theta), \\ Y_{1k} &= \int (\mathfrak{A}_2 J_0 + \mathfrak{B}_2 K) dT + \mathfrak{C}_2 (\varrho_1 - \varrho) + v (\mathfrak{A}_2 \cos \Theta + \mathfrak{B}_2 \sin \Theta), \\ Z_{1k} &= \int (\mathfrak{A}_3 J_0 + \mathfrak{B}_3 K) dT + \mathfrak{C}_3 (\varrho_1 - \varrho) + v (\mathfrak{A}_3 \cos \Theta + \mathfrak{B}_3 \sin \Theta), \\ \varrho_1 - \varrho &= K \sin \Theta \cos \Theta - \left( J_0 + \frac{dS}{dT} \right) \sin^2 \Theta. \end{aligned}$$

Das sekundäre Axoid  $K_1$  ist also wie  $\mathfrak{K}_1$  nur von  $S'$  abhängig, ändert sich also nicht bei Vermehrung von  $S$  um eine Konstante.

Mit

$$S = 0$$

erhält man die beiden besonderen sekundären Axoide, welche der Bewegung des begleitenden Dreikants der Profilfläche entsprechen.

Die Gleichungen (52) sagen nun aus, daß die beiden Schraubenflächen  $S_x$  und  $S_k$  an den Schrauben  $(X, h_0)$  und  $(k_1, h_1)$  die Profilfläche längs  $\xi$  berühren, daß also  $-K$  der Verteilungsparameter der Profilfläche ist. Ist ferner  $\tau$  der Schnittwinkel der Striktionslinie der Profilfläche gegen die Erzeugende, so ist

$$(69) \quad \operatorname{tg} \tau = \frac{u_\eta}{u_\xi} = \frac{K}{J_0}.$$

Es ist also auch  $J_0$  eine Invariante der Profilfläche und auch aus diesem Grunde von  $S$  unabhängig. Infolge der Gleichungen (53) ist

aber nach dem Hilfssatz  $\tau$  auch der Winkel der Striktionslinie der Schraubenfläche  $S_k$  gegen  $\xi$  und es berühren sich daher die Striktionslinien beider Flächen im Zentralpunkt von  $\xi$ .

Wenn auch infolge der Veränderlichkeit des Verteilungsparameters  $K$  die Profilfläche und die Schraubenfläche  $S_k$  nicht drei aufeinander folgende Erzeugende gemein haben können, so ist doch unter allen Schraubenflächen, welche die Profilfläche längs  $\xi$  berühren,  $S_k$  diejenige eindeutig bestimmte Fläche, welche die innigste Berührung mit der Profilfläche eingeht und daher ihre Striktions-schraubenfläche genannt werden kann.

In der Anfangslage haben die Profilflächen längs  $X$  den Verteilungsparameter

$$(70) K_0 = - \lim_{\vartheta=0} (\rho \operatorname{ctg} \vartheta + h_0) = - \lim_{\vartheta=0} \left( \frac{d\rho}{d\vartheta} \right) - h_0 = r_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 - h_0,$$

einen für alle Profilflächen konstanten Wert, so daß sich sämtliche Profilflächen längs  $X$  berühren.

Ebenso ist

$$\mathfrak{K}_0 = - \lim_{\vartheta=0} \left( \frac{d(\rho_1 - \rho)}{d(\vartheta_1 - \vartheta)} \right)$$

der Verteilungsparameter des sekundären Axoids  $\mathfrak{K}_1$  in der Anfangslage. Wenn  $\Theta$  gegen Null konvergiert, konvergieren  $\vartheta_1$  gegen  $\vartheta$  und  $\rho_1$  gegen  $\rho$  und es ist daher

$$(71) \quad \mathfrak{K}_0 = - \lim_{\vartheta=0} \left( \frac{d\rho}{d\vartheta} \right) = r_1 \operatorname{ctg} \alpha_1.$$

Die sekundären Axoide  $\mathfrak{K}_1$  und  $\mathfrak{K}_2$  berühren also in der Anfangslage längs  $X$  beide die Grundhyperboloide, sie gehen also stetig ineinander über und bilden eine einzige Fläche  $\mathfrak{K}$ , d. h.

*Wird das System  $\mathfrak{s}$  derart bewegt, daß die sekundären Axoide der Eingriffsfläche aufeinander abschroteten, so setzt gleichzeitig das mit  $\mathfrak{s}$  festverbundene sekundäre Axoid  $\mathfrak{K}$  durch Abschroteten auf den sekundären Axoiden  $K_1$  und  $K_2$  die Räume  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  ebenso in Drehbewegung wie ihre Grundhyperboloide, und es beschreibt daher die Achse  $\xi$  in  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  die zur Eingriffsfläche gehörigen Profilflächen.*

Da bei dieser Erzeugungsweise der Richtungskegel der Profilfläche der Evolventenkegel des Richtungskegels des Axoids  $K_1$  ist, so kann diese Verzahnung als allgemeine räumliche Evolventenverzahnung bezeichnet werden.

### § 8. Die exakte Evolventenverzahnung $\varphi = 0$ .

Für zylindrische und konische Räder gilt der Satz, daß die Parallelkurven zweier Profile wieder Profile sind. Es erhebt sich also

die Frage, ob ein analoger Satz für die räumliche geradlinigen Evolventenverzahnung besteht, ob also bei der Bewegung von  $\mathfrak{s}$  in  $\Sigma_1$  außer  $\mathfrak{r}$  noch eine andere Gerade  $e$  von  $\mathfrak{s}$  eine Profillfläche beschreiben kann.

Wenn dies der Fall wäre, so muß  $e$  in  $\Sigma$  eine Eingriffsfläche beschreiben, also mit dem System  $\sigma$  fest verbunden sein. Als Gerade des Systems  $\mathfrak{s}$  erleidet sie aber gegen  $\sigma$  eine Verschraubung mit der Winkelgeschwindigkeit  $-\psi'$  um die Achse  $\mathfrak{r}$ . Bei der Bewegung von  $\mathfrak{s}$  in  $\Sigma$  beschreibt daher außer  $\mathfrak{r}$  keine Gerade von  $\mathfrak{s}$  eine Eingriffsfläche und daher außer  $\mathfrak{r}$  auch keine Gerade in  $\Sigma_1$  eine Profillfläche, es sei denn, daß die Relativbewegung von  $\mathfrak{s}$  in  $\sigma$  verschwindet, d. h. daß

$$\psi' = \operatorname{tg} \varphi \frac{\vartheta'}{\sin \vartheta} = 0 \text{ oder } \varphi = 0$$

ist, in welchem Falle jede Gerade von  $\mathfrak{s}$  in  $\Sigma$  eine Eingriffsfläche, in  $\Sigma_1$  eine Profillfläche beschreibt.

Zu demselben Schluß gelangt man auch durch Rechnung. Wenn  $e$  eine weitere Profillfläche beschreibt, so muß  $e$  beständig auf dem Zylindroid  $G_\varphi$  bleiben, weil die Profillfläche längs  $e$  von den beiden Schraubenflächen  $S_x$  und  $S_k$  berührt werden muß. Es darf also das Zylindroid  $G_\varphi$  im Laufe der Bewegung seine Gestalt nicht ändern, d. h. es müssen nach (49) die drei Größen

$$S, \quad \varrho \cotg \vartheta - (H - h_0), \quad \varrho + (H - h_0) \cotg \vartheta$$

Konstanten sein. Man hat also

$$(72) \quad \begin{aligned} \varrho \cotg \vartheta - (H - h_0) &= \alpha \\ \varrho + (H - h_0) \cotg \vartheta &= \beta. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\varrho = \alpha \sin \vartheta \cos \vartheta + \beta \sin^2 \vartheta = A \sin \vartheta \cos \vartheta - B \sin^2 \vartheta,$$

also

$$A = \alpha, \quad B = -\beta.$$

Ebenso ergibt sich

$$H - h_0 = -\alpha \sin^2 \vartheta + \beta \sin \vartheta \cos \vartheta = A \sin^2 \vartheta + B \sin \vartheta \cos \vartheta,$$

also

$$A = -\alpha, \quad B = \beta.$$

Aus beiden Gleichungen folgt also

$$A = 0, \quad B = 0, \quad \varrho = 0, \quad \frac{d\varrho}{d\vartheta} = 0.$$

Wegen

$$\frac{dS}{d\vartheta} = 0$$

ist also nach (41)

$$A = l \cotg \varphi + r_1 \cotg \alpha_1 - h_0 = 0.$$

Andererseits ist

$$-\frac{d\varphi}{d\vartheta} = l \operatorname{tg} \varphi + r_1 \operatorname{cotg} \varphi = 0.$$

Die Elimination von  $l$  aus beiden Gleichungen ergibt

$$(73) \quad \sin^2 \varphi = -\frac{r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1}{h_0} = -\frac{r_1}{r_2} \operatorname{cotg}^2 \alpha_1.$$

Schließen wir also den Fall

$$\varphi = 0$$

aus, so ergibt sich für  $\varphi$  aus dieser Gleichung ein reeller Wert nur dann, wenn  $r_1$  und  $r_2$  entgegengesetztes Zeichen haben.

Ist also  $\varepsilon$  dieser Wert von  $\varphi$ , so ist nun

$$l = -r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 \operatorname{cotg} \varepsilon$$

eine Konstante, d. h.

$$\frac{dl}{d\vartheta} = 0.$$

Setzt man diesen Wert jetzt in die zweite Bedingungsgleichung

$$B = -\operatorname{cotg} \varepsilon \frac{dl}{d\vartheta} - \frac{r_1 - r_2}{\sin \varepsilon} = 0$$

ein, so folgt

$$(74) \quad r_1 - r_2 = 0.$$

In Verbindung mit der vorigen Bedingung wird also

$$r_1 = r_2 = 0,$$

d. h. wir haben den Fall konischer Räder, und gelangen daher zu dem Resultat:

*Bei der räumlichen Evolventenverzahnung mit geradlinigem Eingriff beschreibt i. a. außer der Achse  $\mathfrak{z}$ , welche die gegebene Eingriffsfläche durchläuft, keine weitere Gerade von  $\mathfrak{s}$  eine Profilsfläche, es sei denn, daß die relative Bewegung von  $\mathfrak{s}$  in  $\sigma$  verschwindet.*

Wenn dies eintritt, so ist

$$\varphi = 0.$$

In diesem Falle ist aber die Eingriffsfläche unmittelbar bekannt; sie ist nämlich diejenige offene gerade Schraubenfläche  $S$ , die durch Verschraubung von  $X$  mit der zu  $X$  normalen Schraube des Grundzylindroids entsteht. Mit

$$\varphi = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0, \quad R = \vartheta', \quad \lambda = \frac{\pi}{2}$$

erhält man für die Schraube  $(o, h)$

$$s = -(r_1 - r_2), \quad h = -r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1.$$

Damit nun die Schraube  $(p, \mathfrak{S})$  mit dieser Schraube  $(o, h)$  identisch werde, müssen die Gleichungen bestehen

$$(75) \quad \begin{aligned} \mathfrak{X}_0 &= l - \frac{dS}{d\vartheta} \sin \vartheta = 0 \\ \mathfrak{S} &= \frac{dl}{d\vartheta} + \frac{dS}{d\vartheta} \cos \vartheta = -(r_1 - r_2) \\ \mathfrak{H} &= \frac{d\varrho}{d\vartheta} = -r_1 \cotg \alpha_1. \end{aligned}$$

Man hat daher zur Bestimmung von  $l$  die Gleichung

$$\frac{dl}{d\vartheta} \sin \vartheta + l \cos \vartheta + (r_1 - r_2) \sin \vartheta = 0.$$

also

$$l = \frac{k + (r_1 - r_2) \cos \vartheta}{\sin \vartheta}.$$

Da  $l$  auch für  $\vartheta = 0$  endlich bleiben soll, ist die Integrationskonstante

$$k = -(r_1 - r_2)$$

zu setzen. Alsdann ergibt sich

$$(76) \quad \begin{aligned} l &= -(r_1 - r_2) \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \\ \varrho &= -r_1 \cotg \alpha_1 \vartheta \\ S &= -(r_1 - r_1) \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}. \end{aligned}$$

Die Eingriffsfläche hat demnach in  $\Sigma$  die Gleichungen

$$(77) \quad \begin{aligned} X &= -(r_1 - r_2) \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} + u \cos \vartheta \\ Y &= u \sin \vartheta \\ Z &= -r_1 \cotg \alpha_1 \vartheta. \end{aligned}$$

Da nun die Schrauben  $(p, H)$  und  $(o, h)$  identisch sind, so ist nun die Schraubengeschwindigkeit an der Achse  $\mathfrak{x}_v$  des Zylindroids  $G_\vartheta$  bestimmt durch die Werte

$$P_v = -\cotg \mu \vartheta', \quad U_v = -h_0 \cotg \mu \vartheta' = h_0 P_v.$$

Das ganze Zylindroid  $G_\vartheta$  reduziert sich also auf die Achse  $X$ , mit welcher also auch die Achse  $k_1$  beständig koinzidiert.

Die Flächen  $\mathfrak{R}$  und  $\mathcal{A}$  fallen daher zusammen. In der Tat erhält man mit

$$\vartheta = -\vartheta, \quad \varrho_1 = 0$$

für diese Flächen nach (34) und (55)

$$(78) \quad \begin{aligned} \mathfrak{x}_k &= (r_1 - r_2) \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} + v \cos \vartheta = \mathfrak{x}_A \\ \mathfrak{y}_k &= -v \sin \vartheta = \mathfrak{y}_A \\ \mathfrak{z}_k &= r_1 \cotg \alpha_1 \vartheta = \mathfrak{z}_A. \end{aligned}$$

Die Flächen sind also auch mit der Eingriffsfläche identisch, weil diese von  $X$  auch durch die umgekehrte Bewegung von  $\mathcal{Z}$  in  $\sigma$  beschrieben wird. Als sekundäres Axoid  $K_1$  figuriert ferner das Grundhyperboloid, welches aber zugleich auch mit der Eingriffsfläche das Paar primärer Axoide darstellt. In Zusammenfassung ergibt sich also das Resultat:

*Unter allen geradlinigen Eingriffsflächen, welche die Grundhyperboloide längs ihrer Berührungskante  $X$  berühren, gibt es eine einzige, nämlich die gerade, offene Schraubenfläche  $E$ , welche zu der auf  $X$  senkrecht stehenden Schraube des Grundzylindroides gehört, welche zusammen mit dem Grundhyperboloid gleichzeitig sowohl das Paar primärer, als auch das Paar sekundärer Axoide darstellt. Dieses sekundäre Axoid  $E$  ist das einzige, welches außerdem exakte Eingriffsfläche, Wälzungsfläche und Fläche  $\mathcal{A}$  ist und das einzige, dessen sämtliche Erzeugende Profilflächen beschreiben, welche das Grundhyperboloid zum gemeinsamen sekundären Axoid haben.*

Da die Achsen  $k_1$  und  $k_2$  beständig mit  $X$  koinzidieren, so fallen auch die beiden Schraubenflächen  $S_k$  zusammen, d. h. die Profilflächen oskulieren sich längs der Erzeugenden  $\varepsilon$ . Die räumliche Verzahnung leidet daher an demselben Mangel, wie die entsprechende Verzahnung konischer Räder, und wir sind daher genötigt, auf den Fall

$$\varphi = \text{const.} = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

zurückzugreifen, welcher das eigentliche Analogon zur Evolventenverzahnung im gebräuchlichen Sinne darstellt. Indem wir aber die Bestimmung der exakten Eingriffsfläche einer anderen Gelegenheit vorbehalten, beschränken wir uns auf eine angenäherte Darstellung, auf welche die exakte für die zeichnerische Ausführung doch hinauslaufen muß.

### § 9. Die angenäherte Evolventenverzahnung $\varphi = \text{const.}$

Die Komponenten der Schraubengeschwindigkeit an der Achse  $p$  werden mit

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad \mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{Q} = -\cos \varepsilon \vartheta', \quad \mathfrak{R} = \sin \varepsilon \vartheta'.$$

Ist  $\delta$  der Winkel der positiven Normalen  $n'$  zwischen  $X$  und  $p$ , so ist

$$\cos \delta = \sin \varepsilon, \quad \sin \delta = \cos \varepsilon, \quad \delta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon = \varphi.$$

Dreht man die Achse  $X$  von  $n'$  aus gesehen um einen rechten Winkel im positiven Sinn, so ist sie der positiven Richtung von  $p$  parallel. Die Achse  $p$  steht also auf der Ebene  $\eta$  der Geraden  $X$  und  $n'$  senk-

recht, und es stellt das Strahlenbüschel in  $\eta$  am Punkte  $O$  den Eingriffskegel der Verzahnung dar.

Die Näherung besteht nun darin, daß wir annehmen, die Achse  $p$  habe in  $\Sigma$  eine feste Lage, während sie in Wirklichkeit kleine Parallelverschiebungen erleidet.

Wenn die Achse  $p$  in  $\Sigma$  fest sein soll, müssen  $\mathfrak{X}_0$ ,  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{H}$  konstante Werte erhalten. Wir haben also die Bedingungen

$$(79) \quad \begin{aligned} \mathfrak{X}_0 &= l - \frac{dS}{d\vartheta} \cos \vartheta = \alpha \\ \mathfrak{S} &= \frac{dl}{d\vartheta} + \frac{dS}{d\vartheta} \cos \vartheta = \beta \\ \mathfrak{H} &= \frac{d\varrho}{d\vartheta} = \mathfrak{H}_0. \end{aligned}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt nun

$$\frac{dl}{d\vartheta} \sin \vartheta + l \cos \vartheta = \alpha \cos \vartheta + \beta \sin \vartheta,$$

also

$$l = \alpha + \frac{k - \beta \cos \vartheta}{\sin \vartheta}.$$

Soll  $l$  auch für  $\vartheta = 0$  einen endlichen Wert erhalten, so ist die Integrationskonstante  $k$  gleich  $\beta$  zu setzen. Es wird also

$$\begin{aligned} l &= \alpha + \beta \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \\ S &= \beta \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}, \end{aligned}$$

da eine additive Konstante der Schiefungsfunktion ohne Einfluß ist.

Aus der Bedingung für die Eingrifffläche

$$\frac{d\varrho}{d\vartheta} = - (l \cotg \varepsilon + r_1 \cotg \alpha_1)$$

ergibt sich daher

$$(80) \quad \varrho = - (\alpha \cotg \varepsilon + r_1 \cotg \alpha_1) \vartheta - 2\beta \cotg \varepsilon \log \cos \frac{\vartheta}{2}.$$

Wählt man aber, wie gewöhnlich, für konische Räder

$$\varepsilon = 75^\circ,$$

so kann das zweite Glied in  $\varrho$  gegen das erste vernachlässigt werden, da überdies  $\vartheta$  ein kleiner Winkel sein wird.

Es ist daher

$$(81) \quad \varrho = - (\alpha \cotg \varepsilon + r_1 \cotg \alpha_1) \vartheta = \mathfrak{H}_0 \vartheta.$$

Andererseits ist  $\varrho$  allgemein bestimmt durch die Gleichung

$$\varrho = A \sin \vartheta \cos \vartheta - B \sin^2 \vartheta,$$

wo nach (41)

$$A = \alpha \operatorname{tg} \varepsilon - r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 - h_0$$

$$B = -\beta \operatorname{tg} \varepsilon - \frac{r_1 - r_2}{\cos \varepsilon}$$

ist.

Es wird sich also darum handeln, die beiden Werte für  $\varrho$  durch geeignete Wahl der Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  möglichst zur Übereinstimmung zu bringen. Denkt man sich aber für den Augenblick  $\varrho$  und  $\vartheta$  als rechtwinklige Punktkoordinaten, so wird die Gerade

$$\varrho = \mathfrak{S}_0 \vartheta$$

die Kurve

$$\varrho = A \sin \vartheta \cos \vartheta - B \sin^2 \vartheta$$

im Punkte  $\vartheta = 0$  berühren, falls  $A$  und  $\mathfrak{S}_0$  übereinstimmen; es wird aber überdies der Berührungspunkt ein Wendepunkt der Kurve, und die Gerade wird seine Wendetangente, falls

$$(82) \quad B = -\beta \operatorname{tg} \varepsilon - \frac{r_1 - r_2}{\cos \varepsilon} = 0$$

gesetzt wird. Es folgt daraus

$$\beta = -\frac{r_1 - r_2}{\sin \varepsilon}.$$

Andererseits folgt aus der Bedingung  $\mathfrak{S}_0 = A$

$$\text{oder} \quad -(\alpha \operatorname{cotg} \varepsilon + r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1) = \alpha \operatorname{tg} \varepsilon - r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 - h_0$$

$$\alpha = h_0 \sin \varepsilon \cos \varepsilon, \quad \mathfrak{S}_0 = -(r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 + h_0 \cos^2 \varepsilon).$$

Wir finden daher in Zusammenfassung der Ergebnisse

$$(83) \quad \begin{aligned} \mathfrak{X}_0 &= h_0 \sin \varepsilon \cos \varepsilon \\ \mathfrak{S} &= -\frac{r_1 - r_2}{\sin \varepsilon} = R_0 \\ \mathfrak{S}_0 &= -(r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 + h_0 \cos^2 \varepsilon), \end{aligned}$$

wodurch die Schraube  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{S})$  bestimmt ist.

Ferner wird

$$(84) \quad \begin{aligned} \varrho &= \mathfrak{S}_0 \vartheta \\ l &= h_0 \sin \varepsilon \cos \varepsilon + R_0 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \\ S &= R_0 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}, \end{aligned}$$

wodurch die Eingriffsfläche bestimmt ist.

Da zu Anfang der Bewegung die Achse  $\mathfrak{x}$  mit  $X$  zusammenfällt, so ist die Eingriffsfläche mit der Fläche  $\mathcal{A}$  identisch, nämlich die durch Verschraubung der Geraden  $X$  mit der Schraube  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{S})$  entstehende offene gerade Schraubenfläche. Ihre Gleichungen in  $\Sigma$  lauten

$$(85) \quad \begin{aligned} X &= h_0 \sin \varepsilon \cos \varepsilon + R_0 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} + u \cos \vartheta \\ Y &= -\mathfrak{S}_0 \cos \varepsilon \vartheta + u \sin \vartheta \sin \varepsilon \\ Z &= +\mathfrak{S}_0 \sin \varepsilon \vartheta + u \sin \vartheta \cos \varepsilon. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Achsen des Systems  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  zu Anfang der Bewegung mit  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ , so hat sein Anfangspunkt für  $\vartheta = 0$  die Koordinaten

$$\bar{x} = h_0 \sin \varepsilon \cos \varepsilon, \quad \bar{y} = 0, \quad \bar{z} = 0.$$

Demnach ergeben sich aus (20) für  $\vartheta = 0$  die Übergangsgleichungen

$$(86) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= X - h_0 \sin \varepsilon \cos \varepsilon \\ \bar{y} &= Y \sin \varepsilon + Z \cos \varepsilon \\ \bar{z} &= -Y \cos \varepsilon + Z \sin \varepsilon, \end{aligned}$$

und es lauten daher die Gleichungen der Eingriffsfläche bezogen auf  $\bar{x}$

$$(87) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= R_0 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} + u \cos \vartheta \\ \bar{y} &= u \sin \vartheta \\ \bar{z} &= \mathfrak{S}_0 \vartheta, \end{aligned}$$

aus welcher Darstellung ohne weiteres die Identität der Eingriffsfläche  $E$  mit der Fläche  $\mathcal{A}$  hervorgeht.

Da ferner die Schraube  $(p, \mathfrak{S})$  in  $\Sigma$  eine feste Lage hat, so existiert nun nur ein einziges Zylindroid  $G_\vartheta$ . Zu seiner Ermittlung setzen wir in die Gleichungen

$$\delta_\nu = \frac{\pi}{2} + \varphi, \quad l_\nu = - \frac{\frac{d\rho}{d\vartheta} + r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \varphi}$$

den Wert für  $\varphi$  ein, so folgt

$$\delta_\nu = \pi - \varepsilon, \quad l_\nu = h_0 \sin \varepsilon \cos \varepsilon,$$

d. h. die Erzeugenden  $\bar{x}_\nu$  von  $G_\vartheta$  schneiden  $\bar{x}$  rechtwinklig. Da ferner

$$\nu = \vartheta, \quad \rho_\nu = \mathfrak{S}_0 \sin \vartheta \cos \vartheta$$

ist, so lauten die Gleichungen von  $G_\vartheta$  bezüglich  $\bar{x}$ :

$$(88) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= u \cos \vartheta \\ \bar{y} &= u \sin \vartheta \\ \bar{z} &= \mathfrak{S}_0 \sin \vartheta \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Weil nun die Achse  $\bar{x}$  beständig auch auf  $G_\vartheta$  liegt, so muß man annehmen, daß für die in Betracht kommenden Werte von  $\vartheta$  beide Flächen  $E$  und  $G_\vartheta$  als identisch angesehen werden dürfen.

Ist nun  $\vartheta_1$  der Winkel der Achse  $k_1$  auf dem Zylindroid  $G_\vartheta$  gegen  $X$ , so ist

$$(89) \quad \operatorname{cotg} \vartheta_1 = - \frac{\operatorname{cotg} \alpha_1}{\cos \varepsilon} = - \operatorname{cotg} \gamma,$$

wobei

$$\vartheta_1 = - \gamma$$

den Betrag  $\frac{\pi}{12}$  i. a. nicht überschreiten wird. Für die Profilfläche liegt nun stets  $\vartheta$  zwischen  $+\gamma$  und  $-\gamma$ .

Vergleichen wir also die Spurpunkte der parallelen Erzeugenden beider Flächen in der Ebene  $(\bar{y}, \bar{z})$ , so wird die Verzahnung insoweit genau sein, als wir berechtigt sind, alle Größen, die unterhalb der beiden Grenzen

$$(90) \quad \begin{aligned} f_1 &= \mathfrak{S}_0(\gamma - \sin \gamma \cos \gamma) \\ f_2 &= R_0 \frac{1 - \cos \gamma}{\cos \gamma} \end{aligned}$$

liegen, zu vernachlässigen.

Trifft dies mit hinreichender Genauigkeit zu, so darf man die Achse  $k_1$  des Zylindroids  $G_\gamma$  durch die zu ihr parallele Achse  $k_1^*$  der Eingriffsfläche ersetzen. Es sind also die drei Flächen  $E, \mathcal{A}, \mathfrak{K}$  wieder identisch. Die Abweichung von der exakten Verzahnung besteht dann darin, daß die gemeinsame Normale  $n$  der Achsen  $k_1^*$  und  $\bar{x}$  an der Achse  $X$  im Abstand  $f_2$  vorbeigeht, so daß die Profilfläche längs  $\bar{x}$  nicht mehr genau von der Schraubenfläche  $S_x$  berührt wird.

Das sekundäre Axoid  $K_1$  ist jetzt das durch Drehung der Achse  $k_1^*$  um  $\alpha_1$  entstehende Rotationshyperboloid und es bleibt noch zu zeigen, daß beide sekundären Axoide längs  $k_1^*$  in Berührung sind.

Setzt man in den Gleichungen (85) von  $E$

$$u = S = R_0 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2},$$

so erhält man die Gleichungen der Striktionslinie der Eingriffsfläche. Ersetzt man darin  $\vartheta$  durch  $(-\gamma)$  und beachtet, daß Größen, die kleiner sind als

$$\mathfrak{S}_0(\gamma - \sin \gamma \cos \gamma) \quad \text{und} \quad R_0(1 - \cos \gamma),$$

weggelassen werden sollen, so ergeben sich als Koordinaten des Zentralpunktes der Erzeugenden  $k_1^*$ :

$$(91) \quad \begin{aligned} l_k &= h_0 \sin \varepsilon \cos \varepsilon - R_0 \sin \gamma \\ m_k &= + \mathfrak{S}_0 \cos \varepsilon \sin \gamma \cos \gamma \\ n_k &= - \mathfrak{S}_0 \sin \varepsilon \sin \gamma \cos \gamma. \end{aligned}$$

Der Zentralpunkt hat daher in  $\Sigma_1$  die Koordinaten

$$(92) \quad \begin{aligned} X_k &= l_k \cos \alpha_1 - n_k \sin \alpha_1 \\ Y_k &= r_1 + m_k \\ Z_k &= l_k \sin \alpha_1 + n_k \cos \alpha_1. \end{aligned}$$

Bedeutet aber  $\beta$  den Öffnungswinkel des Richtungskegels des sekundären Axoids  $K_1$ ,  $\delta$  den Winkel des gemeinsamen Lotes  $n_1$  der

Achsen  $o_1$  und  $k_1^*$  gegen  $Y$ , so bilden auf der Kugeloberfläche  $\alpha_1, \beta, \gamma$  die Seiten eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks mit  $\alpha_1$  als Hypotenuse,  $\varepsilon$  als Gegenwinkel zur Seite  $\beta$ , und  $\delta$  als Gegenwinkel von  $\gamma$ .

Infolge dessen bestehen die bekannten Beziehungen

$$(93) \quad \begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \cos \beta \cos \gamma, & \operatorname{tg} \beta &= \operatorname{tg} \alpha_1 \cos \delta, & \cos \alpha_1 &= \operatorname{cotg} \varepsilon \operatorname{cotg} \delta \\ \sin \beta &= \sin \alpha_1 \sin \varepsilon, & \operatorname{tg} \gamma &= \operatorname{tg} \alpha_1 \cos \varepsilon, & \cos \varepsilon &= \cos \beta \sin \delta \\ \sin \gamma &= \sin \alpha_1 \sin \delta, & \operatorname{tg} \beta &= \operatorname{tg} \varepsilon \sin \gamma, & \sin \delta &= \cos \gamma \sin \varepsilon, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$(94) \quad \begin{aligned} \sin \gamma \cos \gamma \frac{\sin \varepsilon}{\cos \alpha_1} &= \operatorname{tg} \beta \sin \delta \\ \sin \gamma \cos \gamma \frac{\sin^2 \varepsilon}{\cos \varepsilon} &= \operatorname{tg} \beta \cos \delta. \end{aligned}$$

Unter Anwendung dieser Winkelbeziehungen ist nun

$$(95) \quad \mathfrak{F}_0 \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{\cos \varepsilon} = -r_1 \cos^2 \gamma - r_2 \sin^2 \gamma = R_0 \sin \varepsilon \cos^2 \gamma - h_0 \operatorname{cotg} \alpha_1$$

oder nach Multiplikation mit dem Faktor  $\sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin \alpha_1$

$$\mathfrak{F}_0 \sin \gamma \cos \gamma \sin \varepsilon \sin \alpha_1 + h_0 \sin \varepsilon \cos \varepsilon \cos \alpha_1 = R_0 \sin \gamma \cos \gamma \cos \alpha_1 \sin^2 \varepsilon.$$

Daher wird nun

$$\begin{aligned} X_k &= \mathfrak{F}_0 \sin \gamma \cos \gamma \sin \varepsilon \sin \alpha_1 + h_0 \sin \varepsilon \cos \varepsilon \cos \alpha_1 - R_0 \sin \gamma \cos \alpha_1 \\ &= -R_0 \cos \alpha_1 \sin \gamma (1 - \sin^2 \varepsilon \cos \gamma), \end{aligned}$$

d. h. mit Rücksicht auf die beiden letzten Faktoren sehr nahe

$$(96) \quad X_k = 0.$$

Es bestehen daher jetzt die Gleichungen

$$\begin{aligned} l_k \cos \alpha_1 - n_k \sin \alpha_1 &= 0 \\ l_k \sin \alpha_1 + n_k \cos \alpha_1 &= Z_k. \end{aligned}$$

Daher wird

$$(97) \quad Z_k = \frac{n_k}{\cos \alpha_1} = -\mathfrak{F}_0 \frac{\sin \gamma \cos \gamma \sin \varepsilon}{\cos \alpha_1} = -\mathfrak{F}_0 \operatorname{tg} \beta \sin \delta.$$

Nach (94) ist aber

$$r_1 = -\mathfrak{F}_0 \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{\cos \varepsilon} - R_0 \sin \varepsilon \sin^2 \gamma.$$

Es reduziert sich daher  $Y_k$  auf den Wert

$$Y_k = -\mathfrak{F}_0 \sin \gamma \cos \gamma \frac{\sin^2 \varepsilon}{\cos \varepsilon} = -\mathfrak{F}_0 \operatorname{tg} \beta \cos \delta.$$

Die Werte für  $X_k, Y_k, Z_k$  sagen aber aus, daß mit großer Näherung der Zentralpunkt der Erzeugenden  $k_1^*$  in der Ebene  $Y_1 Z_1$  liegt, daß seine Verbindungslinie mit  $O_1$  gegen  $Y$  den Winkel  $\delta$  einschließt, also das

gemeinsame Lot von  $O_1$  und  $k_1^*$  ist, und daß der Kehlkreisradius des Hyperboloids  $K_1$  die Größe

$$(98) \quad R_k = -\mathfrak{S}_0 \operatorname{tg} \beta$$

hat. Diese Gleichung drückt aber in der Form

$$-\mathfrak{S}_0 = R_k \operatorname{cotg} \beta$$

geschrieben aus, daß die beiden sekundären Axoide längs  $k_1^*$  den nämlichen Verteilungsparameter haben und sich daher in der Tat berühren.

Wird das Übersetzungsverhältnis gleich der Einheit, so verschwindet die Größe  $f_2$ ; die Konstruktion bleibt aber eine Näherung, weil  $f_1$  nicht Null ist, sie ist aber genauer als die andere. Man kann daher sagen:

*Im Falle der Evolventenverzahnung im engern Sinne kann die Eingriffsfläche näherungsweise durch eine gerade, offene Schraubenfläche ersetzt werden, vom Striktionsschraubenradius*

$$R_0 = -\frac{r_1 - r_2}{\sin \varepsilon}$$

und vom Windungsparameter

$$\mathfrak{S}_0 = -(r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 + h_0 \cos^2 \varepsilon),$$

deren Achse  $\mathfrak{p}$  im Punkte

$$\mathfrak{X}_0 = h_0 \sin \varepsilon \cos \varepsilon, \quad \mathfrak{Y}_0 = R_0 \sin \varepsilon, \quad \mathfrak{Z}_0 = R_0 \cos \varepsilon$$

auf der Ebene  $\eta$  ihres Richtungskegels senkrecht steht. Sie ist zugleich das bewegliche sekundäre Axoid  $\mathfrak{R}$ , geht durch die Achse  $X$  und berührt längs  $k_1^*$  und  $k_2^*$  die ruhenden sekundären Axoide, welche durch zwei mit den Grundhyperboloiden konzentrische, koaxiale Rotationshyperboloide  $K_1$  u.  $K_2$  dargestellt werden, von den Öffnungswinkeln  $\beta_1$  und  $\beta_2$  und den Kehlkreisradien

$$R_{1k} = -\mathfrak{S}_0 \operatorname{tg} \beta_1, \quad R_{2k} = -\mathfrak{S}_0 \operatorname{tg} \beta_2.$$

Schrobt  $\mathfrak{R}$  auf den Hyperboloiden  $K_1$  und  $K_2$  ab, so beschreibt jede seiner Erzeugenden zwischen den Achsen  $k_1^*$  und  $k_2^*$  zwei entsprechende Profilflächen, und zwar um so genauer, je mehr sich das Übersetzungsverhältnis der Einheit nähert. Im letztern Falle geht das Axoid  $\mathfrak{R}$  in eine Wendelfläche über.

### § 9. Das räumliche Analogon der Savaryschen Formel und Konstruktion.

In der Ebene und auf der Kugel dient die sogenannte spezielle Savarysche Konstruktion dazu, für die von den Punkten des beweglichen Systems beschriebenen Bahnkurven die Krümmungsmittelpunkte

zu konstruieren, wenn die augenblicklichen Krümmungskreise der Polkurven gegeben sind.

Im Falle der Verzahnung konischer Räder bestehen diese Krümmungskreise aus dem Teilkreis und demjenigen der Wälzungskurve und die Savarysche Konstruktion liefert die Krümmungsmittelpunkte der beiden Zahnprofile für ihren Berührungspunkt. Aus den Gleichungen

$$\cotg \vartheta \sin \varphi = \cotg \lambda - \frac{\varphi'}{\vartheta'} \cos \varphi$$

$$\cotg \vartheta_1 \sin \varphi = - \cotg \alpha_1 - \frac{\varphi'}{\vartheta'} \cos \varphi$$

folgt für das erste Profil

$$(99) \quad (\cotg \vartheta - \cotg \vartheta_1) \sin \varphi = \cotg \lambda + \cotg \alpha_1$$

und analog für das zweite

$$(100) \quad (\cotg \vartheta - \cotg \vartheta_2) \sin \varphi = \cotg \lambda - \cotg \alpha_2,$$

welches eben die Savaryschen Formeln sind.

Um zum Analogon des Raumes überzugehen, hat man die Schiebungs-  
funktion

$$S = 0$$

zu setzen, so daß die Bewegung des Systems  $\mathfrak{s}$  mit derjenigen des begleitenden Dreikants der Profillfläche identisch ist. Die Savarysche Konstruktion besteht dann darin, die Achse  $k_1$  der Striktionsschraubenfläche  $S_k$  längs der Berührungskante  $\mathfrak{x}$  der Profillflächen zu finden, wenn die Achse  $o_1$  des Grundhyperboloids, sowie die Achse  $o$  der Striktionsschraubenfläche  $S$  der Wälzungsfläche  $W$  auf dem Grundzylinder, endlich die Erzeugende  $\mathfrak{x}$  selbst durch drei Konstanten  $\varphi, l, \vartheta$  gegeben sind.

Im ganzen treten nun sechs Schrauben auf mit den Achsen

$$o_1, X, o, \mathfrak{x}, \mathfrak{p}, k_1,$$

deren Windungsparameter die Werte

$$O, h_0, h, H, \mathfrak{S}, h_1$$

haben. Dabei ist

$$h = s \cotg \lambda - r_1 \cotg \alpha_1.$$

Wegen der Gleichung

$$A = l \cotg \varphi - r_1 \cotg \alpha_1 - h_0 = \varrho \cotg \vartheta + H - h_0$$

ist ferner

$$H = l \cotg \varphi - \varrho \cotg \vartheta - r_1 \cotg \alpha_1,$$

$$h_1 = l \cotg \varphi - \varrho_1 \cotg \vartheta_1 - r_1 \cotg \alpha_1,$$

endlich folgt aus (27) mit

$$\cotg \tau = - \frac{d\varphi}{d\vartheta}$$

$$\mathfrak{S} = - l \operatorname{tg} \varphi - \mathfrak{S} \cotg \tau - r_1 \cotg \alpha_1.$$

Sämtliche Werte der Windungsparameter sind also durch die Lage ihrer Achse mitbestimmt.

Nach ihrer Bildungsweise liegen aber die sechs Schrauben viermal zu dreien auf dem nämlichen Zylindroid und haben demnach zu dreien die nämliche gemeinsame Normale. Die vier Zylindroide sind bestimmt durch die Schrauben

$$\begin{aligned} & (o_1, 0), \quad (X, h_0), \quad (o, h), \\ & (o, h), \quad (\xi, H), \quad (p, \mathfrak{S}), \\ & (p, \mathfrak{S}), \quad (o_1, 0), \quad (k_1, h_1), \\ & (k_1, h_1), \quad (X, h_0), \quad (\xi, H) \end{aligned}$$

die zugehörigen Hauptachsen oder gemeinschaftlichen Normalen der je drei Schrauben sind

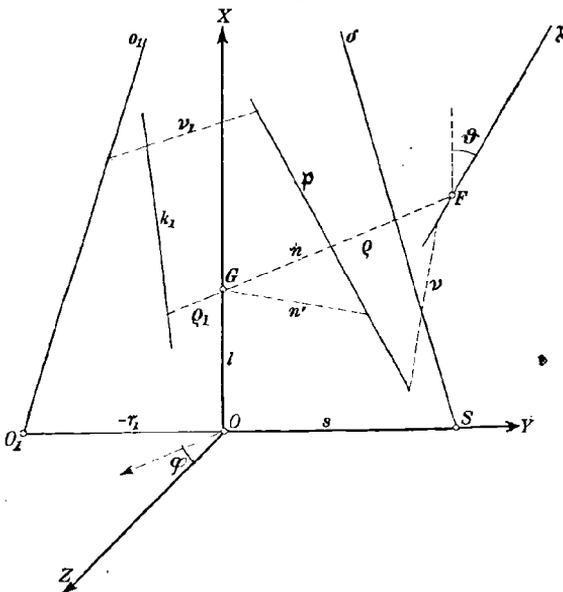
$$Y, \quad \nu, \quad \nu_1, \quad n.$$

Endlich bestimmen die beiden Schrauben

$$(X, h_0) \quad \text{und} \quad (p, \mathfrak{S})$$

ein fünftes Zylindroid, welches mit dem ersten und vierten die Schraube  $(X, h_0)$  mit dem zweiten und dritten  $(p, \mathfrak{S})$  gemeinsam hat, und dessen

Fig. 5.



Hauptachse  $n'$  im Fußpunkt  $G$  der Normalen  $n$  in  $X$  auf  $X$  und  $n$  zugleich senkrecht steht.

Zur Konstruktion der gesuchten Achse  $k_1$  sind die Windungsparameter nicht notwendig, vielmehr erfordert die Bestimmung von  $k_1$  nur die mehrmalige Konstruktion der gemeinsamen Normalen zweier windschiefen Geraden (Fig. 5) und läßt sich durch folgenden Satz aussprechen.

*Wird eine Profilfläche durch eine Gerade  $\xi$  mittels Abschroten der Wälzungs-*

*fläche  $W$  auf dem Grundhyperboloid  $H_1$  erzeugt und ist  $X$  die augenblickliche Berührungskante der Axoide,  $o_1$  die Achse des Hyperboloids,  $o$  die Achse der augenblicklichen Striktionsschraubenfläche  $S$  von  $W$  auf*

dem Grundzylindroid, so sei  $n$  die gemeinsame Normale von  $X$  und  $\xi$ ,  $n'$  die gemeinsame Normale von  $X$  und  $n$ . Konstruiert man jetzt die gemeinsame Normale  $\nu$  von  $\xi$  und  $o$ , dann die gemeinsame Normale  $p$  von  $\nu$  und  $n'$ , endlich die gemeinsame Normale  $\nu_1$  von  $p$  und  $o_1$ , so ist die gemeinsame Normale  $k_1$  von  $\nu_1$  und  $n$  die verlangte Striktionsachse.

In analoger Weise ergibt sich eine Striktionsachse  $k_2$  der zweiten Profilfläche, wenn an Stelle der Achse  $o_1$  die Achse  $o_2$  tritt.

Da nun die geometrische Konstruktion der Achse  $k_1$  von den sechs Windungsparametern ganz unabhängig ist, andererseits die drei Schrauben jedes der vier Zylindroide auch dann noch diesem Zylindroid angehören, wenn sämtliche Windungsparameter um den nämlichen konstanten Betrag  $h'$  verändert werden, so bleibt die Konstruktion unverändert bestehen, wenn an Stelle des Hyperboloids  $H_1$  eine Schraubenfläche  $S_1$  vom Windungsparameter  $h'$ , an Stelle der Schraubenfläche  $S$  eine solche  $S'$  vom Windungsparameter  $(h + h')$  tritt. Diese Schraubenflächen können aber als Striktions-schraubenflächen zweier allgemeiner Axoide angesehen werden, und es folgt daraus, daß der obige Satz allgemeine Gültigkeit besitzt.

Die angegebene Konstruktion kann nun aber auch durch eine Strecken- und Winkelrelation formal zum Ausdruck gebracht werden.

Aus den Gleichungen

$$\frac{e}{\sin^2 \vartheta} = A \cotg \vartheta - B,$$

$$\frac{e_1}{\sin^2 \vartheta_1} = A \cotg \vartheta_1 - B$$

folgt durch Subtraktion

$$(101) \quad \frac{e}{\sin^2 \vartheta} - \frac{e_1}{\sin^2 \vartheta_1} = A(\cotg \vartheta - \cotg \vartheta_1)$$

oder da

$$A = l \cotg \varphi + A_0,$$

nach (99)

$$(102) \quad \frac{e}{\sin^2 \vartheta} - \frac{e_1}{\sin^2 \vartheta_1} = (l \cotg \varphi + A_0) \frac{\cotg \lambda + \cotg \alpha_1}{\sin \varphi}.$$

Nach (19, I) ist aber

$$s = -A_0 \sin \lambda \cos \lambda + B_0 \sin^2 \lambda$$

und daher für

$$s = -r_1 \quad \text{und} \quad \lambda = -\alpha_1,$$

$$r_1 = -A_0 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 - B_0 \sin^2 \alpha_1.$$

Es folgt daraus

$$(103) \quad \frac{s}{\sin^2 \lambda} + \frac{r_1}{\sin^2 \alpha_1} = -A_0(\cotg \lambda + \cotg \alpha_1),$$

somit durch Einsetzen in (102)

$$(104) \left( \frac{s}{\sin^2 \lambda} + \frac{r_1}{\sin^2 \alpha_1} \right) + \left( \frac{\varrho}{\sin^2 \vartheta} - \frac{\varrho_1}{\sin^2 \vartheta_1} \right) \sin \varphi = l \cotg \varphi (\cotg \lambda + \cotg \alpha_1)$$

für die Achse  $k_1$ , und

$$(105) \left( \frac{s}{\sin^2 \lambda} - \frac{r_2}{\sin^2 \alpha_2} \right) + \left( \frac{\varrho}{\sin^2 \vartheta} - \frac{\varrho_2}{\sin^2 \vartheta_2} \right) \sin \varphi = l \cotg \varphi (\cotg \lambda - \cotg \alpha_2)$$

für die zweite Achse  $k_2$ .

Diese beiden Formeln sind also das Analogon der speziellen Savaryschen Formel im Raume.

Eine Unbestimmtheit des Abstandes  $\varrho_1$  für die Achse  $k_1$  tritt nur ein, wenn  $\vartheta$  verschwindet, wenn also die Erzeugende  $\varkappa$  der Profilfläche der Achse  $X$  parallel ist und daher das Flächenelement der Profilfläche zylindrisch wird.

Betrachten wir jetzt die Gesamtheit aller Geraden  $\varkappa$ , welche die Normale  $n$ , die durch ihren Abstand  $l$  von  $O$  und den Winkel  $\varphi$  gegen  $Z$  bestimmt ist, rechtwinklig treffen, so werden sie durch die Gleichung

$$\varrho = A \sin \vartheta \cos \vartheta - B \sin^2 \vartheta,$$

in der

$$A = l \cotg \varphi + A_0$$

eine Konstante und  $B$  ein variabler Parameter ist, in ein Büschel von Zylindroiden  $(A, B)$  geordnet, welche sich sämtlich längs  $X$  berühren.

Durchwandert  $\varkappa$  eines dieser Zylindroide  $(A, B)$ , so beschreibt auch die Achse  $p$  eine Regelfläche, indem sie stets die Normale  $n'$  von  $X$  und  $n$  rechtwinklig schneidet. Ist  $\tau$  der Winkel von  $p$  gegen  $X$ , so ist ihr Abstand von  $X$  bestimmt durch die Gleichung

$$\varrho = \frac{d\varrho}{d\vartheta} \sin \tau \cos \tau + \frac{dl}{d\vartheta} \sin^2 \tau.$$

Es ist aber

$$\frac{d\varrho}{d\vartheta} = -(l \cotg \varphi + r_1 \cotg \alpha_1),$$

$$\frac{dl}{d\vartheta} = -B \tg \varphi - h_0 \cotg \tau - \frac{r_1 - r_2}{\cos \varphi}.$$

Setzt man daher zur Abkürzung

$$(106) \quad \begin{aligned} -l \tg \varphi - r_1 \cotg \alpha_1 - h_0 &= -l \tg \varphi + A_0 = A_1, \\ B \tg \varphi + \frac{r_1 - r_2}{\cos \varphi} &= B \tg \varphi - \frac{B_0}{\cos \varphi} = B_1, \end{aligned}$$

so wird

$$(107) \quad \varrho = A_1 \sin \tau \cos \tau - B_1 \sin^2 \tau.$$

Jedem Zylindroid  $(A, B)$  entspricht also ein Zylindroid  $(A_1, B_1)$ , wobei die Parameter  $B$  und  $B_1$  durch die Beziehung

$$(108) \quad B_1 \cos \varphi - B \sin \varphi + B_0 = 0$$

verbunden sind.

Die gemeinsame Normale  $\nu$  der Achsen  $\xi$  und  $\eta$  trifft aber jedesmal auch eine bestimmte Achse  $o$  des Grundzylindroids  $(A_0, B_0)$  rechtwinklig. Drei solche Achsen sind also der nämlichen Ebene parallel und ihre drei Winkel  $\vartheta$ ,  $\tau$  und  $\lambda$  gegen  $X$  sind allemal verknüpft durch die Gleichung

$$(109) \quad \cotg \tau \cos \varphi - \cotg \vartheta \sin \varphi + \cotg \lambda = 0.$$

*Jede Gerade  $\nu$ , welche je eine Erzeugende zweier der drei Zylindroide  $(A, B)$ ,  $(A_1, B_1)$ ,  $(A_0, B_0)$  rechtwinklig trifft, schneidet auch eine Erzeugende des dritten rechtwinklig.*

• Bleibt die Achse  $\xi$  auf dem Zylindroid  $(A, B)$  fest, so durchlaufen  $o$  und  $\eta$  gleichzeitig die Zylindroide  $(A_0, B_0)$  und  $(A_1, B_1)$ , während den Achsen  $o_1$  und  $o_2$  von  $(A_0, B_0)$  jedesmal zwei Achsen  $k_1$  und  $k_2$  von  $(A, B)$  zugeordnet werden, die durch die Gleichung

$$(110) \quad (\cotg \vartheta_2 - \cotg \vartheta_1) \sin \varphi = \cotg \alpha_2 + \cotg \alpha_1$$

verbunden sind, d. h.

*Wird eine Gerade  $\xi$  mit allen möglichen Wälzungsflächen  $W$  augenblicklich auf beiden Grundhyperboloiden abgeschrotet, so beschreibt sie unendlich viele Paare sich berührender Profilflächen, deren Striktionsachsen auf dem durch  $\xi$  bestimmten Zylindroid  $(A, B)$  eine Projektivität erfüllen, welche von der Lage der Erzeugenden  $\xi$  auf dem Zylindroid ganz unabhängig ist.*

Wird also  $\eta$  auf dem Zylindroid  $(A_1, B_1)$  festgehalten, so durchwandert  $\xi$  das Zylindroid  $(A, B)$ ,  $o$  das Zylindroid  $(A_0, B_0)$ , während  $k_1$  und  $k_2$  fest bleiben. Fällt  $\xi$  mit  $k_1$  zusammen, so deckt sich  $o$  mit  $o_1$ ; fällt  $\xi$  nach  $k_2$ , so fällt  $o$  nach  $o_2$ , d. h.

*Zu jeder Achse  $\xi$  des Zylindroids  $(A, B)$  läßt sich eine augenblickliche Wälzungsfläche  $W$  derart angeben, daß alle Profilflächenpaare dieselben Striktionsachsen  $k_1$  und  $k_2$  haben. Schrotet  $k_1$  mit dem Hyperboloid  $H_1$  auf dem Hyperboloid  $H_2$  ab, so ist  $k_2$  die Striktionsachse der Rollfläche von  $k_1$  und umgekehrt.*

Lassen wir aber mit  $k_1$  gleichzeitig die Profilfläche  $Z_1$  abschroten, so umhüllt sie als Hüllfläche augenblicklich die Profilfläche  $Z_2$ . Demnach sagt der vorige Satz in anderer Fassung aus:

*Beschreibt eine Profilfläche  $Z_1$  mit der augenblicklichen Striktionsachse  $k_1$  durch Abschrotten mit dem Hyperboloid  $H_1$  auf dem Hyperboloid  $H_2$  als Hüllfläche die Profilfläche  $Z_2$ , so ist die Striktionsachse  $k_2$  der Hüllfläche nichts anderes als die Striktionsachse der von  $k_1$  beschriebenen Rollfläche.*

Auch diese Sätze haben allgemeine Gültigkeit.

Karlsruhe, im September 1910.

## Allgemeine Theorie unsymmetrischer Ablenkungen bei Systemen mit einem Freiheitsgrad und deren Zusammenhang mit der allgemeinen Theorie unsymmetrischer Schwingungen gleicher Systeme, nebst Anwendungen auf besondere Fälle.

Von Dr. PAUL SCHULZE in Gardelegen.

Stellt man für ein um die Ruhelage schwingendes System die Differentialgleichung der Beschleunigung auf, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$K \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = f(\alpha),$$

die man für hinreichend kleine Werte von  $\alpha$  in eine Potenzreihe nach  $\alpha$  entwickeln kann:

$$K \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -c_0 - c_1 \alpha - c_2 \alpha^2 - c_3 \alpha^3 - c_4 \alpha^4 - \dots$$

darin bedeuten<sup>1)</sup>:

$$c_0 = -f(0), \quad c_1 = -f'(0), \quad c_2 = -\frac{f''(0)}{2!}, \quad c_3 = -\frac{f'''(0)}{3!}, \quad c_4 = -\frac{f^{IV}(0)}{4!}.$$

Da nun für die Ruhelage  $\alpha = 0$  auch  $f(0) = 0$  wird, so geht die Gleichung über in die folgende:

$$K \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -c_1 \alpha - c_2 \alpha^2 - c_3 \alpha^3 - c_4 \alpha^4 - \dots$$

Während bei Pendelbewegungen, unter Berücksichtigung sehr kleiner Amplituden, die Gleichung

$$K \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -c_1 \alpha$$

1) Vgl. F. Richarz und P. Schulze: Über asymmetrische Schwingungen um eine Lage stabilen Gleichgewichts. Ann. d. Phys. Bd. 8 (1902) S. 362.

die bekannte Gleichung für symmetrische Pendelbewegungen darstellt und gewöhnlich in dieser Form benützt wird, ist die Gleichung

$$K \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -c_1 \alpha - c_2 \alpha^2$$

bei Gelegenheit der Untersuchung spezieller Fälle von Schwingungen von mir behandelt worden.<sup>1)</sup> Eine allgemeine Lösung unter Berücksichtigung weiterer Glieder hat sodann J. Horn in verschiedenen Arbeiten gegeben, deren erste nur kurze Zeit nach der meinigen erschien.<sup>2)</sup>

Ist die Differentialgleichung der Beschleunigung derartig, daß Glieder mit geraden Potenzen von  $\alpha$  auftreten, so sind die Schwingungen um die Ruhelage unsymmetrisch, d. h. die Elongationen nach der einen Seite der Ruhelage sind größer als die entsprechenden nach der anderen.

F. Richarz hat sodann gezeigt, daß in allen Fällen, in denen unsymmetrische Schwingungen vorhanden sind, auch unsymmetrische Ablenkungen existieren; d. h. durch gleiche zu beiden Seiten der Ruhelage in gleicher Weise einwirkende Drehungsmomente werden verschiedene Ablenkungen hervorgerufen, und zwar findet die größere Ablenkung auch stets nach der Seite hin statt, nach welcher bei den Schwingungen die größere Elongation auftritt. Es existiert also offenbar ein Zusammenhang der Asymmetrien in beiden Fällen.

F. Richarz hat für diesen Zusammenhang unter Voraussetzung so kleiner Ablenkungen, daß nur zweite Potenzen der Ablenkungen berücksichtigt werden, eine allgemeine Formel angegeben<sup>3)</sup>, die indessen nur beschränkte Gültigkeit hat, wie aus den Untersuchungen von F. Eichhorn hervorgeht.<sup>4)</sup>

Im Folgenden sollen den Hornschen Entwicklungen für Schwingungen entsprechende Formeln für Ablenkungen abgeleitet werden.

Dazu gehen wir aus von der Differentialgleichung der Beschleunigung, welche lautete:

$$K \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -c_1 \alpha - c_2 \alpha^2 - c_3 \alpha^3 - c_4 \alpha^4 - \dots$$

1) P. Schulze: Über asymmetrische Schwingungen um eine Lage stabilen Gleichgewichts. Diss. Greifswald (1901) S. 25 u. f.

2) J. Horn: Zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad. Zeitschr. für Math. u. Physik. Bd. 47 (1902) S. 400; Bd. 49 (1903), S. 246.

3) F. Richarz und P. Schulze. S. o. Ann. d. Phys. Bd. 8 (1902), S. 362.

4) F. Eichhorn: Über die Asymmetrie der Schwingungen und ihren Zusammenhang mit der Asymmetrie der Ablenkungen im Falle eines durch Drillung gehobenen Pendels und eines durch einen Stroim abgelenkten astatischen Nadel-paares. Diss. Marburg 1909, S. 62.

In einer beliebigen Lage, in der das schwingende System gegen die Ruhelage den Winkel  $\beta$  bildet, werde nun plötzlich das System festgehalten. Dann muß ein neues Drehungsmoment vorhanden sein, das denjenigen, welche das System in die Ruhelage zurückzudrehen suchen, das Gleichgewicht hält. Bezeichnen wir dieses Drehungsmoment mit  $\delta$  so folgt:

$$\delta = -c_1\beta - c_2\beta^2 - c_3\beta^3 - c_4\beta^4 - \dots$$

Für hinreichend kleine Werte  $\delta$  läßt sich alsdann  $\beta$  in eine Potenzreihe nach  $\delta$  entwickeln. Dann folgt:

$$\beta = -\frac{1}{c_1}\delta - \frac{c_2}{c_1^2}\delta^2 - \left(2\frac{c_2^2}{c_1^3} - \frac{c_3}{c_1^2}\right)\delta^3 - \left(5\frac{c_2^3}{c_1^4} - 5\frac{c_2c_3}{c_1^3} + \frac{c_4}{c_1^2}\right)\delta^4 - \dots$$

Man erkennt, die Koeffizienten der Potenzen von  $\delta$  lassen sich durch die gleichen Größen ausdrücken, die in der Differentialgleichung der Beschleunigung als Koeffizienten auftreten. Ausführlicheres über diesen Zusammenhang folgt im folgenden Abschnitt.

Die vorstehende Entwicklung findet indessen nur solange statt, als  $\delta$  eine Größe ist, die mit  $\beta$  in keinerlei Beziehung steht. Indessen gibt es Fälle, in denen das Drehungsmoment  $\delta$  einen Faktor besitzt, der eine Funktion von  $\beta$  darstellt. Setzt man dann:

$$\delta = \delta_0 \cdot \varphi(\beta),$$

so folgt:

$$\delta_0 \cdot \varphi(\beta) = -c_1\beta - c_2\beta^2 - c_3\beta^3 - c_4\beta^4 - \dots$$

Entwickeln wir  $\varphi(\beta)$  in eine Potenzreihe nach  $\beta$ , setzen wir dann:

$$\varphi(\beta) = +a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + a_3\beta^3 + a_4\beta^4 - \dots$$

so folgt:

$$\delta_0 \{a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + a_3\beta^3 + a_4\beta^4 + \dots\} = -c_1\beta - c_2\beta^2 - c_3\beta^3 - c_4\beta^4 - \dots$$

oder:

$$\delta_0 = \frac{-c_1\beta - c_2\beta^2 - c_3\beta^3 - c_4\beta^4 - \dots}{a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + a_3\beta^3 + a_4\beta^4 + \dots}$$

Entwickeln wir endlich  $\beta$  in eine Potenzreihe nach  $\delta_0$ , so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \beta = & -\frac{a_0}{c_1}\delta_0 - \left(\frac{c_2a_0^2}{c_1^2} - \frac{a_1a_0}{c_1^2}\right)\delta_0^2 - \left[\frac{a_0^3}{c_1^3}\left(2\frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{c_3}{c_1}\right) - \frac{a_0^2}{c_1^2}\left(3\frac{a_1c_2}{c_1^2} - \frac{a_1}{c_1}\right) + \frac{a_0a_1^2}{c_1^3}\right]\delta_0^3 \\ & - \left[\frac{a_0^4}{c_1^4}\left(5\frac{c_2^3}{c_1^3} - 5\frac{c_2c_3}{c_1^2} + c_4\right) - \frac{a_0^3}{c_1^3}\left(10\frac{c_2^2a_1}{c_1^2} - 4\frac{a_1c_2}{c_1^2} - 4\frac{a_1c_3}{c_1^2} + \frac{a_2}{c_1}\right)\right. \\ & \left. + \frac{a_0^2}{c_1^2}\left(6\frac{a_1^2c_2}{c_1^2} - 3\frac{a_1a_2}{c_1^2}\right) - \frac{a_0a_1^3}{c_1^3}\right]\delta_0^4 \dots \end{aligned}$$

**Zusammenhang zwischen der Asymmetrie der Schwingungen und der Asymmetrie der Ablenkungen.**

Bedeutet bei einem um die Ruhelage schwingenden System  $\vartheta$  die eine Elongation von der Ruhelage aus nach der als positiv fest-

gesetzten Seite, so ergibt sich die entsprechende Elongation  $\vartheta_1$  nach der negativen Seite<sup>1)</sup>:

$$\vartheta_1 = -\vartheta - \frac{2}{3} \frac{c_2}{c_1} \vartheta^2 - \frac{4}{9} \frac{c_2^2}{c_1^2} \vartheta^3 - \left( \frac{16}{27} \frac{c_2^3}{c_1^3} - \frac{2}{3} \frac{c_2 c_3}{c_1^2} + \frac{2}{5} \frac{c_4}{c_1} \right) \vartheta^4 \dots$$

Für die Ablenkungen  $\beta$  als Funktion des Drehungsmomentes ergab sich für den vorher erwähnten ersten Fall:

$$\beta = -\frac{1}{c_1} \delta - \frac{c_2}{c_1^2} \delta^2 - \left( 2 \frac{c_2^2}{c_1^3} - \frac{c_3}{c_1^2} \right) \delta^3 - \left( 5 \frac{c_2^3}{c_1^4} - 5 \frac{c_2 c_3}{c_1^3} + \frac{c_4}{c_1^2} \right) \delta^4 - \dots$$

Man erkennt bereits aus der Vergleichung dieser Formeln, daß sich die Koeffizienten von  $\delta, \delta^2, \delta^3$  durch dieselben Größen  $c_1 c_2 c_3 \dots$  darstellen lassen wie die Koeffizienten von  $\vartheta^2 \vartheta^3 \dots$ . Setzen wir zur Abkürzung:

$$\beta = -\mu_1 \delta - \mu_2 \delta^2 - \mu_3 \delta^3 - \mu_4 \delta^4 + \dots$$

so folgt:

$$\mu_1 = \frac{1}{c_1} \quad \mu_2 = \frac{c_2}{c_1^2} \quad \mu_3 = 2 \frac{c_2^2}{c_1^3} - \frac{c_3}{c_1^2} \quad \mu_4 = 5 \frac{c_2^3}{c_1^4} - 5 \frac{c_2 c_3}{c_1^3} + \frac{c_4}{c_1^2}$$

und umgekehrt:

$$c_1 = \frac{1}{\mu_1} \quad c_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1^2} \quad c_3 = 2 \frac{\mu_2^2}{\mu_1^3} - \frac{\mu_3}{\mu_1^2} \quad c_4 = 5 \frac{\mu_2^3}{\mu_1^4} - 5 \frac{\mu_2 \mu_3}{\mu_1^3} + \frac{\mu_4}{\mu_1^2}$$

Man erkennt, die Größen  $c_1 c_2 c_3$  lassen sich durch die Größen  $\mu_1 \mu_2 \mu_3$  ebenso ausdrücken, wie die Größen  $\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots$  durch die Größen  $c_1 c_2 c_3 \dots$ .

Setzen wir die letzten Werte in die Gleichung für  $\vartheta_1$  ein, so erhalten wir:

$$\vartheta_1 = -\vartheta - \frac{2}{3} \frac{\mu_2}{\mu_1^2} \vartheta^2 - \frac{4}{9} \frac{\mu_2^2}{\mu_1^3} \vartheta^3 - \left( \frac{34}{27} \frac{\mu_2^3}{\mu_1^4} - \frac{4}{3} \frac{\mu_2 \mu_3}{\mu_1^3} + \frac{2}{5} \frac{\mu_4}{\mu_1^2} \right) \vartheta^4 - \dots$$

Für experimentelle Zwecke kann man also die Koeffizienten in der Reihe für  $\vartheta_1$  aus Ablenkungen bestimmen. Nach Einsetzen der Werte  $\mu_1 \mu_2 \dots$  in die vorstehende Gleichung muß sich aus dieser für jeden beobachteten Wert  $\vartheta$  auch durch Rechnung der zugehörige Wert  $\vartheta_1$  ergeben, der dann mit dem beobachteten  $\delta_1$  übereinstimmen muß.

Für den zweiten vorher entwickelten Fall folgte:

$$\begin{aligned} \beta = & -\frac{a_0}{c_1} \delta_0 - \left( \frac{c_2 a_0^2}{c_1^2} - \frac{a_1 a_0}{c_1^2} \right) \delta_0^2 - \left[ \frac{a_0^3}{c_1^3} \left( 2 \frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{c_3}{c_1} \right) - \frac{a_0^2}{c_1^2} \left( 3 \frac{a_1 c_2}{c_1^2} - \frac{a_2}{c_1} \right) + \frac{a_0 a_1^2}{c_1^3} \right] \delta_0^3 \\ & - \left[ \frac{a_0^4}{c_1^4} \left( 5 \frac{c_2^3}{c_1^3} - 5 \frac{c_2 c_3}{c_1^2} + \frac{c_4}{c_1} \right) - \frac{a_0^3}{c_1^3} \left( 10 \frac{c_2^2 a_1}{c_1^2} - 4 \frac{a_2 c_2}{c_1^2} - 4 \frac{a_1 c_3}{c_1^2} + \frac{a_3}{c_1} \right) \right. \\ & \left. + \frac{a_0^2}{c_1^2} \left( 6 \frac{a_1^2 c_2}{c_1^2} - 3 \frac{a_1 a_2}{c_1^2} \right) - \frac{a_0 a_1^3}{c_1^3} \right] \delta_0^4. \end{aligned}$$

1) Vgl. J. Horn s. o. Bd. 49, S. 247 und 267.

Setzen wir hierin:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{a_0}{c_1} & \mu_2 &= \frac{c_2 a_0^2}{c_1^2} - \frac{a_1 a_0}{c_1^2} & \mu_3 &= \frac{a_0^3}{c_1^3} \left( 2 \frac{c_2^2}{c_1} - c_3 \right) - \frac{a_0^2}{c_1^2} \left( 3 \frac{a_1 c_2}{c_1^2} - \frac{a_2}{c_1} \right) + \frac{a_0 a_1^2}{c_1^3} \\ \mu_4 &= \frac{a_0^4}{c_1^4} \left( 5 \frac{c_2^3}{c_1^3} - 5 \frac{c_2 c_3}{c_1^2} + \frac{c_4}{c_1} \right) - \frac{a_0^3}{c_1^3} \left( 10 \frac{c_2^2 a_1}{c_1^2} - 4 \frac{a_2 c_2}{c_1^2} - 4 \frac{a_1 c_3}{c_1^2} + \frac{a_3}{c_1} \right) \\ &+ \frac{a_0^2}{c_1^2} \left( 6 \frac{a_1^2 c_2}{c_1^2} - 3 \frac{a_1 a_2}{c_1^2} \right) - \frac{a_0 a_1^3}{c_1^4},\end{aligned}$$

so folgt:

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{a_0}{\mu_1} & c_2 &= \frac{a_0 \mu_2}{\mu_1^2} - \frac{a_1}{\mu_1} \\ c_3 &= \frac{a_0}{\mu_1^3} \left( 2 \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} - \frac{\mu_3}{\mu_1} \right) - \frac{a_1}{\mu_1} \left( \frac{7 \mu_2}{\mu_0} - \frac{6 a_1}{a_0} \right) + \frac{a_2}{\mu_1} \\ c_4 &= \frac{5 a_0 \mu_2^3}{\mu_1^3} - \frac{a_0 \mu_2}{\mu_1^2} (5 \mu_3 + 8 a_1 \mu_2) + \frac{1}{\mu_1^5} (a_0 \mu_4 - 20 a_1 \mu_2^2 + 4 a_0 a_1 \mu_3) \\ &+ \frac{1}{\mu_1^4} (5 \mu_3 a_1 + 28 a_1^2 \mu_2) + \frac{1}{\mu_1^3} \left( a_1 \mu_2 + 24 \frac{a_1^2 \mu_2}{a_0} \right) \\ &- \frac{1}{\mu_1^2} \left( 4 a_1 a_2 + 24 \frac{a_1^3}{a_0} \right) + \frac{1}{\mu_1} \left( a_3 + 12 \frac{a_1 a_2}{a_0} \right).\end{aligned}$$

Setzen wir diese Werte für  $c_1 c_2 c_3 c_4 \dots$  in die Gleichung für  $\vartheta_1$  sein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\vartheta_1 &= -\vartheta - \frac{2}{3} \left( \frac{\mu_2}{\mu_1^2} - \frac{a_1}{a_0} \right) \vartheta^2 - \frac{4}{9} \left( \frac{\mu_2}{\mu_1^2} - \frac{a_1}{a_0} \right)^2 \vartheta^3 \\ &+ \left( \frac{3^{\frac{1}{2}} \mu_2^3}{27 \mu_1^3} - \frac{4}{3} \frac{\mu_2 \mu_3}{\mu_1^3} + \frac{2}{5} \frac{\mu_4}{\mu_1^4} + \dots \right) \vartheta^4 + \dots\end{aligned}$$

Die letzte Klammer enthält außer den angeführten Gliedern noch eine Anzahl solcher, die  $a_0 a_1 a_2 \dots$  als Faktoren enthalten.

Man erkennt sofort, daß die letzte Gruppe von Formeln die erstere als speziellen Fall in sich schließt, wenn man  $a_0 = 1, a_1 = a_2 = \dots = 0$  setzt.

Die im vorstehenden abgeleiteten Formeln stellen allgemein den Zusammenhang zwischen der Asymmetrie der Schwingungen und der Asymmetrie der Ablenkungen dar.

Um diesen herzustellen, genügt daher die Bestimmung der Größen  $\mu$  allein nicht. Es müssen vielmehr auch die Größen  $a$  bekannt sein. Indessen sind, wie es auch die nachfolgenden Beispiele zeigen, in den meisten Fällen die Größen  $a$  durch dieselben Konstanten ausgedrückt, wie die Größen  $\mu$ , so daß sich zwischen beiden in der Regel noch gewisse Beziehungen aufstellen lassen, die für jeden Einzelfall besondere sind.

#### Anwendung der Theorie asymmetrischer Ablenkungen auf spezielle Fälle.

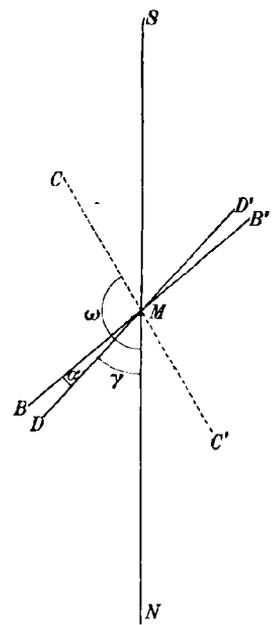
Im folgenden sollen die im vorhergehenden abgeleiteten Formeln auf Einzelfälle angewendet werden. Es mag im voraus bemerkt sein, daß die meisten dieser Fälle ausführlich behandelt sind, jedoch nur unter

der Voraussetzung, daß es sich um so kleine Ablenkungen handelt, daß dritte und höhere Potenzen der Ablenkungswinkel vernachlässigt werden können, dasselbe gilt auch für die Schwingungen dieser Systeme. Indessen wird man in solchen Fällen, in denen einmal der Genauigkeitsgrad der Messungen ein hoher und zum anderen die Asymmetrie eine große ist, auch bei kleinen Schwingungen das dritte Glied hinzuziehen müssen.<sup>1)</sup>

Im folgenden sollen daher die Entwicklungen im allgemeinen bis zum dritten Gliede ausgeführt werden. Die Hinzufügung weiterer Glieder hat keine Schwierigkeit. Da man bei den Ablenkungen von der Gleichung für die Schwingungen ausgehen muß (siehe S. 298), so soll diese jedesmal vorangestellt werden.

1. Ablenkungen an einem Horizontal-Intensitätsvariometer.

An dem Torsionskopf einer Drehwage sei das eine Ende eines Drahtes fest eingeklemmt, an dem unteren Ende sei ein Magnet befestigt. Es sei nun *NS* (s. Fig.) die Lage des magnetischen Meridians, in welcher sich der Magnet befinden möge, wenn der Draht ohne Torsion ist. Nun werde der Torsionskopf um den Winkel  $NMC = \omega$  gedreht; der Magnet folgt der Drehung teilweise und gelangt in einer Lage *DMD'* zur Ruhe, in der er gegen den Meridian den Winkel  $\gamma$  bildet. Wird jetzt der Magnet in Schwingungen versetzt und bildet er in einer beliebigen Lage den Winkel  $\alpha$  gegen die Ruhelage, so ergibt sich als Differentialgleichung der Beschleunigung:



$$K \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = - D_1 \sin(\gamma + \alpha) + D_2 (\omega - (\gamma + \alpha)),$$

wobei als positiver Drehungssinn derjenige festgesetzt sei, in welchem tordiert worden ist.

Aus

$$\left(\frac{d^2 \alpha}{dt^2}\right)_{\alpha=0} = 0$$

folgt:

$$D_2 = \frac{D_1 \sin \gamma}{\omega - \gamma}.$$

1) Genaueres hierüber siehe P. Schulze, Allgemeine Theorie asymmetrischer Schwingungen und Ablenkungen und Anwendung auf das zu erdmagnetischen Messungen bestimmte Unifilarmagnetometer. Beilage zum Osterprogramm der Realschule zu Gardelegen, Ostern 1911.

Bedeutet dann  $M$  das magnetische Moment des Stabes,  $H$  die Horizontalintensität, so ist  $D_1 = MH$ , also:

$$K \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -MH \sin(\gamma + \alpha) + \frac{MH \sin \gamma}{\omega - \gamma} (\omega - (\gamma + \alpha)),$$

oder nach Entwicklung in eine Potenzreihe:

$$K \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -D_1 \left( \cos \gamma + \frac{\sin \gamma}{\omega - \gamma} \right) \alpha + \frac{D_2}{2} \sin \gamma \alpha^2 + \frac{D_1}{6} \cos \gamma \alpha^3 - \frac{D_1}{24} \sin \gamma \alpha^4 - \dots$$

Diese Gleichung stellt die Gleichung der Beschleunigung dar, aus der sich der Wert  $\vartheta_1$  ergibt:

$$\vartheta_1 = -\vartheta + \frac{1}{3} \frac{1}{\cot \gamma + \frac{1}{\omega - \gamma}} \vartheta^2 - \left( \frac{1}{3} \frac{1}{\cot \gamma + \frac{1}{\omega - \gamma}} \right)^2 \vartheta^3 + \left[ \left( \frac{1}{3} \frac{1}{\cot \gamma + \frac{1}{\omega - \gamma}} \right)^3 + \frac{1}{18} \frac{\cot \gamma}{\left( \cot \gamma + \frac{1}{\omega - \gamma} \right)^2} + \frac{1}{60} \frac{\cot \gamma}{\cot \gamma + \frac{1}{\omega - \gamma}} \right] \vartheta^4.$$

Werden in dieser Gleichung die beiden letzten Glieder vernachlässigt, was man bei sehr kleinen Schwingungen jedenfalls tun kann, so ergibt sich daraus die Gleichung, die in einer früheren Arbeit ausführlich behandelt ist<sup>1)</sup>, als spezieller Fall. Die Ablenkungen können nun auf verschiedene Weise hervorgebracht werden.

a) *Ablenkungen durch weitere Drehung des Torsionskopfes.*

Befindet sich der Magnet in der Ruhelage, so gilt als Gleichgewichtsbedingung:

$$-D_1 \sin \gamma + D_2 (\omega - \gamma) = 0.$$

Wird jetzt der Torsionskopf um einen kleinen Winkel  $\varepsilon$  gedreht, so folgt der Magnet um einen kleinen Winkel  $\beta$ . Die Gleichgewichtsbedingung lautet dann:

$$-D_1 \sin(\gamma + \beta) = D_2 (\omega + \varepsilon - (\gamma + \beta)).$$

Daraus folgt:

$$-D_1 \frac{\sin \gamma}{\omega - \gamma} \cdot \varepsilon = -D_1 \sin(\gamma + \beta) + \frac{D_1 \sin \gamma}{\omega - \gamma} (\omega - (\gamma + \beta))$$

oder:

$$-MH \frac{\sin \gamma}{\omega - \gamma} \varepsilon = -MH \left( \cos \gamma + \frac{\sin \gamma}{\omega - \gamma} \right) \beta + \frac{MH}{2} \sin \gamma \beta^2 + \frac{MH}{6} \cos \gamma \beta^3 - \frac{MH}{24} \sin \gamma \beta^4 - \dots$$

1) P. Schulze, s. o. Dissert. S. 28.

In der obigen Ablenkungsformel ist also zu setzen:

$$\delta_0 = \varepsilon, \quad a_0 = -\frac{MH \sin \gamma}{\omega - \gamma}, \quad a_1 = a_2 = \dots = 0.$$

Dann folgt:

$$\beta = \frac{1}{(\omega - \gamma) \cot \gamma + 1} \varepsilon + \frac{\omega - \gamma}{2 [(\omega - \gamma) \cot \gamma + 1]^3} \varepsilon^2 + \left[ \frac{(\omega - \gamma)^2}{2 [(\omega - \gamma) \cot \gamma + 1]^5} + \frac{(\omega - \gamma) \cot \gamma}{6 [(\omega - \gamma) \cot \gamma + 1]^4} \right] \varepsilon^3 + \dots$$

Dieser Fall der Ablenkungen ist von R. v. Foerster<sup>1)</sup> spezieller untersucht, auch unter Vernachlässigung dritter Potenzen. Der von Foerster gefundene Wert ergibt sich auch hier als spezieller Fall.

b) *Ablenkung durch einen zweiten Magneten.* Befindet sich der Magnet in Ruhe und bringen wir in seine Schwingungsebene einen zweiten Magneten so, daß seine Achse senkrecht steht auf der Achse des drehbaren Magneten in seiner Ruhelage, und daß seine Achse durch den Mittelpunkt des zweiten geht, so wird der bewegliche Magnet um einen Winkel  $\beta$  abgelenkt. Ist  $M'$  das magnetische Moment des ablenkenden Magneten,  $e$  der Abstand der Mittelpunkte, so folgt als Gleichgewichtsbedingung:

$$-\frac{MM'}{e^3} \cos \beta = -D_1 \sin(\gamma + \beta) + \frac{D_1 \sin \gamma}{\omega - \gamma} (\omega - (\gamma + \beta))$$

oder:

$$-\frac{MM'}{e^3} \left(1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{24} - \dots\right) = -MH \left(\cos \gamma + \frac{\sin \gamma}{\omega - \gamma}\right) \beta + \frac{MH}{2} \sin \gamma \beta^2 + \frac{MH}{6} \cos \gamma \beta^3 - \frac{MH}{24} \sin \gamma \beta^4 - \dots$$

In die allgemeine Ablenkungsformel haben wir also einzusetzen:

$$\delta_0 = -\frac{MM'}{e^3}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_4 = \frac{1}{24} \dots$$

Dann folgt:

$$\beta = -\frac{1}{H \left(\cos \gamma + \frac{\sin \gamma}{\omega - \gamma}\right)} \frac{M'}{e^3} + \frac{\sin \gamma}{2 H^2 \left(\cos \gamma + \frac{\sin \gamma}{\omega - \gamma}\right)^3} \left(\frac{M'}{e^3}\right)^2 - \frac{1}{2 H^3 \left(\cos \gamma + \frac{\sin \gamma}{\omega - \gamma}\right)^5} \left\{ \frac{1}{\left(\cot \gamma + \frac{1}{\omega - \gamma}\right)^3} + \frac{1}{\left(\cot \gamma + \frac{1}{\omega - \gamma}\right)} - 1 \right\} \left(\frac{M'}{e^3}\right)^3 + \dots$$

Auf diesen, wie auch auf den folgenden Fall habe ich bereits an anderer Stelle hingewiesen.<sup>2)</sup>

1) R. v. Foerster: Über die Asymmetrie der Ablenkungen und ihren Zusammenhang mit der Asymmetrie der Schwingungen bei einem magnetischen Horizontal-Intensitätsvariometer. Diss. Marburg 1905.

2) P. Schulze: Über das Uniflarmagnetometer. Ann. d. Phys. Bd. 8 (1902), S. 714.

c) *Ablenkungen durch Änderung der Horizontalintensität.*

Ändert sich die Horizontalintensität um den Betrag  $\delta H$  und wird hierdurch der Magnet aus seiner Ruhelage um den Winkel  $\beta$  abgelenkt, so ergibt sich als Gleichgewichtsbedingung:

$$-M(\dot{H} + \delta H) \sin(\gamma + \beta) + D_2(\omega - (\gamma + \beta)) = 0$$

oder:

$$+M\delta H \sin(\gamma + \beta) = -MH \sin(\gamma + \beta) + \frac{MH \sin \gamma}{\omega - \gamma} (\omega - (\gamma + \beta))$$

oder:

$$\begin{aligned} \delta H \left\{ M \sin \gamma + M \cos \gamma \beta - \frac{M \sin \gamma}{2} \beta^2 - \frac{M \cos \gamma}{6} \beta^3 + \dots \right\} \\ = -MH \left( \cos \gamma + \frac{\sin \gamma}{\omega - \gamma} \right) \beta + \frac{MH}{2} \sin \gamma \beta^2 + \frac{MH}{6} \cos \gamma \beta^3 - \dots \end{aligned}$$

In der allgemeinen Ablenkungsformel haben wir also zu setzen:

$$\begin{aligned} \delta_0 = \delta H, \quad a_0 = M \sin \gamma, \quad a_1 = M \cos \gamma, \quad a_2 = -\frac{M \sin \gamma}{2}, \\ a_3 = -\frac{M \cos \gamma}{6}. \end{aligned}$$

Dann folgt schließlich:

$$\begin{aligned} \beta = & -\frac{1}{H \left( \cot \gamma + \frac{1}{\omega - \gamma} \right)} \delta H + \left( \frac{1}{2H^2 \left( \cot \gamma + \frac{1}{\omega - \gamma} \right)^3} + \frac{\cot \gamma}{H^2 \left( \cot \gamma + \frac{1}{\omega - \gamma} \right)} \right) \delta H^2 \\ & - \left( \frac{1}{2H^3 \left( \cot \gamma + \frac{1}{\omega - \gamma} \right)^5} - \frac{3}{2} \frac{\cot \gamma}{H^3 \left( \cot \gamma + \frac{1}{\omega - \gamma} \right)^4} + \frac{\cot \gamma - 2 \cot^2 \gamma}{2H^3 \left( \cot \gamma + \frac{1}{\omega - \gamma} \right)^3} \right) \delta H^3 \end{aligned}$$

2. *Ablenkungen bei der magnetischen Wage.*

An einer gewöhnlichen Wage sei an Stelle der einen Wagschale ein Magnet befestigt und senkrecht unter diesem ein zweiter Magnet so aufgestellt, daß die ungleichnamigen Pole einander gegenüberstehen. Auf die andere Schale werden nun soviel Gewichte zugelegt, bzw. von ihr fortgenommen, daß der Wagebalken sich in horizontaler Lage befindet. Wird jetzt die Wage in Schwingungen versetzt, so lautet die Differentialgleichung der Bescheinigung<sup>1)</sup>:

$$K \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -D_1 \sin(\gamma + \alpha) + \frac{D_1 R^2 \sin \gamma \{ R \cos \alpha - l \sin \alpha \}}{\sqrt{R^2 - 2lR \sin \alpha + 4l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

oder nach Entwicklung in eine Reihe:

$$\begin{aligned} K \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = & -D_1 \left\{ \cos \gamma - \frac{2l}{R} \sin \gamma \right\} \alpha + D_1 \cdot \frac{3l^2}{R^2} \sin \gamma \alpha^2 \\ & + \frac{D_1}{6} \left\{ \cos \gamma + 24 \frac{l^3}{R^3} \sin \gamma - 11 \frac{l}{R} \sin \gamma \right\} \alpha^3 \\ & \frac{D_1}{24} \sin \gamma \left\{ 120 \frac{l^4}{R^4} - 105 \frac{l^2}{R^2} \right\} \alpha^4 - \dots \end{aligned}$$

1) Ableitung dieser Gleichung siehe P. Schulze. Dissert. S. 59.

Hieraus folgt:

$$\vartheta_1 = -\vartheta + \frac{2 \frac{l^2}{R^2}}{\cotg \gamma - 2 \frac{l}{R}} \vartheta^2 - \left( \frac{2 \frac{l^2}{R^2}}{\cotg \gamma - 2 \frac{l}{R}} \right)^2 \vartheta^3$$

$$+ \left[ \left( \frac{2 \frac{l^2}{R^2}}{\cotg \gamma - 2 \frac{l}{R}} \right)^3 + \frac{1}{3} \frac{l^2 (\cotg \gamma + 24 \frac{l^3}{R^3} - 11 \frac{l}{R})}{(\cotg \gamma - 2 \frac{l}{R})^2} + \frac{8 \frac{l^4}{R^4} - 7 \frac{l^2}{R^2}}{\cotg \gamma - 2 \frac{l}{R}} \right] \vartheta^4$$

Die Ablenkungen an der magnetischen Wage kann man nun dadurch erzeugen, daß man auf der Seite, auf welcher der Magnet befestigt ist, ein kleines Übergewicht zulegt. Bezeichnen wir dasselbe mit  $\delta$ , so folgt, wenn  $l$  die Länge des Wagebalkens bedeutet, als Gleichgewichtsbedingung:

$$-\delta \cdot l \cos \beta = -D_1 \sin(\gamma + \beta) + \frac{D_1 \sin \gamma R^2 (R \cos \beta - l \sin \beta)}{\sqrt{R^2 - 2lR \sin \beta + 4l^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}}$$

oder:

$$\delta \left\{ -l + \frac{l}{2} \beta^2 - \frac{l}{24} \beta^4 + \dots \right\} = -D_1 \left\{ \cos \gamma - 2 \frac{l}{R} \sin \gamma \right\} \beta$$

$$+ 3D_1 \frac{l^2}{R^2} \sin \gamma \beta^2 + \frac{D_1}{6} \left\{ \cos \gamma + 24 \frac{l^3}{R^3} \sin \gamma - 11 \frac{l}{R} \sin \gamma \right\} \beta^3 + \dots$$

Daher ist zu setzen:

$$\delta_0 = \delta \quad a_0 = -l \quad a_1 = a_3 = \dots = 0 \quad a_2 = \frac{l}{2} \quad a_4 = -\frac{l}{24} \dots$$

Dann folgt:

$$\beta = \frac{l}{D_1 \left( \cos \gamma - 2 \frac{l}{R} \sin \gamma \right)} \delta + \frac{3 \frac{l^4}{R^2} \sin \gamma}{D_1^2 \left( \cos \gamma - 2 \frac{l}{R} \sin \gamma \right)^3} \delta^2$$

$$+ \frac{l^3}{D_1^3 \left( \cos \gamma - 2 \frac{l}{R} \sin \gamma \right)^3} \left\{ \frac{6 \frac{l^2}{R^2}}{\left( \cotg \gamma - 2 \frac{l}{R} \right)^2} + \frac{\cotg \gamma + 24 \frac{l^3}{R^3} - 11 \frac{l}{R}}{6 \left( \cotg \gamma - 2 \frac{l}{R} \right)} - \frac{1}{2} \right\} \delta^3.$$

Nun ist  $D_1 = q \cdot d$ , worin  $q$  das Gewicht des Wagebalkens mit der daranhängenden Last,  $d$  den Abstand des Schwerpunktes vom Unterstützungspunkt bedeutet. Bedeutet ferner  $p$  das Gewicht, welches man zulegen muß, um nach Fortnahme des zweiten Magneten dieselbe Einstellung der Wage hervorzubringen, so ist

$$q d \cdot \sin \gamma = p l.$$

Mithin

$$D_1 = \frac{p l}{\sin \gamma}.$$

Führt man diesen Werte ein, so folgt:

$$\beta = \frac{1}{p \left\{ \cotg \gamma - 2 \frac{l}{R} \right\}} \delta + \frac{3 \frac{l^2}{R^2}}{p^2 \left( \cotg \gamma - 2 \frac{l}{R} \right)^3} \delta^2$$

$$+ \frac{1}{p^3 \left( \cotg \gamma - 2 \frac{l}{R} \right)^3} \left\{ \frac{6 \frac{l^2}{R^2}}{\left( \cotg \gamma - 2 \frac{l}{R} \right)^2} + \frac{\cotg \gamma + 24 \frac{l^3}{R^3} - 11 \frac{l}{R}}{6 \left( \cotg \gamma - 2 \frac{l}{R} \right)} - \frac{1}{2} \right\} \delta^3.$$

**3. Ablenkungen bei einem durch Drillung gehobenen Pendel.**

Ein langer dünner Draht sei horizontal ausgespannt, das eine Ende sei fest eingeklemmt, während das andere durch einen Torsionskopf drehbar ist. In der Mitte des Drahtes sei senkrecht zu ihm ein Stäbchen angelötet, derart, daß es senkrecht steht, sobald der Draht ohne Torsion ist. Wird nun der Torsionskopf um einen Winkel so gedreht, so folgt das Stäbchen der Drehung um einen Winkel  $\gamma$ . Versetzt man jetzt das Stäbchen in Schwingungen, und bildet es in einer beliebigen Lage gegen die Ruhelage den Winkel  $\alpha$ , so ergibt sich als Differentialgleichung der Beschleunigung<sup>1)</sup>:

$$K \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = D_1 (\omega - 2\gamma - 2\alpha) - \frac{D_1 (\omega - 2\gamma)}{\sin \gamma} \sin (\gamma + \alpha)$$

oder:

$$K \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = - D_1 (2 + (\omega - 2\gamma) \cotg \gamma) \alpha + \frac{D_1 (\omega - 2\gamma)}{2} \alpha^2$$

$$+ \frac{D_1 (\omega - 2\gamma) \cotg \gamma}{6} \alpha^3 - \frac{D_1 (\omega - 2\gamma)}{24} \alpha^4.$$

Daraus folgt:

$$\vartheta_1 = - \vartheta + \frac{1}{3} \frac{1}{\omega - 2\gamma} \vartheta^2 - \left( \frac{1}{3} \frac{1}{\omega - 2\gamma} + \cotg \gamma \right)^2 \vartheta^3$$

$$- \left[ \left( \frac{1}{3} \frac{1}{\omega - 2\gamma} + \cotg \gamma \right)^3 - \frac{1}{18} \left( \frac{2}{\omega - 2\gamma} + \cotg \gamma \right)^2 + \frac{1}{60} \frac{1}{\omega - 2\gamma} + \cotg \gamma \right] \vartheta^4.$$

Die Ablenkungen des Stäbchens kann man leicht wieder durch Drehung des Torsionskopfes erzeugen.

In der Ruhelage ist:

$$D_1 (\omega - 2\gamma) = D_2 \sin \gamma.$$

Dreht man jetzt den Torsionskopf um einen Winkel  $\varepsilon$  und wird das Stäbchen dadurch um den Winkel  $\beta$  abgelenkt, so gilt als neue Gleichgewichtsbedingung:

$$D_1 (\omega + \varepsilon - 2\gamma - 2\beta) = D_2 \sin (\gamma + \beta)$$

oder:

$$D_1 (\omega + \varepsilon - 2\gamma - 2\beta) = \frac{D_1 (\omega - 2\gamma)}{\sin \gamma} \sin (\gamma + \beta)$$

1) F. Eichhorn: s. o. Diss. S. 16.

oder: 
$$D_1 \varepsilon = - D_1 (\omega - 2\gamma - 2\beta) - \frac{D_1 (\omega - 2\gamma)}{\sin \gamma} \sin (\gamma + \beta),$$

oder nach Entwicklung in eine Reihe:

$$D_1 \varepsilon = - D_1 (2 + (\omega - 2\gamma) \cot \gamma) \alpha + \frac{D_1 (\omega - 2\gamma)}{2} \alpha^2 + \frac{D_1 (\omega - 2\gamma) \cot \gamma}{6} \alpha^3 + \dots$$

In die allgemeine Ablenkungsformel ist also einzusetzen:

$$\delta_0 = \varepsilon \quad a_0 = D_1 \quad a_1 = a_2 = \dots = 0.$$

Mithin folgt:

$$\beta = - \frac{1}{2 + (\omega - 2\gamma) \cot \gamma} \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{\omega - 2\gamma}{(2 + (\omega - 2\gamma) \cot \gamma)^2} \varepsilon^2 - \left[ \frac{1}{(2 + (\omega - 2\gamma) \cot \gamma)^3} \left( \frac{1}{2} \frac{1}{(\omega - 2\gamma + \cot \gamma)^2} + \frac{\cot \gamma}{\omega - 2\gamma + \cot \gamma} \right) \right] \varepsilon^3.$$

**4. Ablenkungen durch einen Strom bei einer an einem gedrehten Faden hängenden Galvanometernadel.**

An einem untordierten Draht hängt ein astatisches Nadelpaar. In der Ruhelage bilde die Achse der stärkeren Nadel gegen den Meridian den Winkel  $\xi$ , die des zweiten schwächeren mit der Achse der ersteren den Winkel  $(\alpha + \gamma)$ . Dann werde der Torsionskopf in der positiven Richtung, die der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzt sei, um einen Winkel  $\omega$  gedreht. Das Magnetsystem folgt der Torsion zum Teil und zwar um einen Winkel  $\gamma$ . Wird nun das Magnetsystem in Schwingungen versetzt und bildet es in einer beliebigen Lage gegen die Ruhelage den Winkel  $\alpha$ , so lautet die Differentialgleichung der Beschleunigung<sup>1)</sup>:

$$K \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = - D_1 \sin (\xi + \varphi + \alpha) + D_2 \sin (\xi + \varphi + \gamma + \alpha) + D_3 (\omega - \varphi - \alpha).$$

$D_1, D_2$  und  $D_3$  hängen zusammen durch die Beziehungen:

$$- D_1 \sin (\xi + \varphi) + D_2 \sin (\xi + \varphi + \gamma) + D_3 (\omega - \varphi) = 0$$

und:

$$- D_1 \sin \xi + D_2 \sin (\xi + \gamma) = 0.$$

Dann folgt durch Reihenentwicklung:

$$\begin{aligned} K \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = & - (D_1 \cos (\xi + \varphi) - D_2 \cos (\xi + \varphi + \gamma) + D_3) \alpha \\ & + \left( \frac{D_1}{2} \sin (\xi + \varphi) - \frac{D_2}{2} \sin (\xi + \varphi + \gamma) \right) \alpha^2 \\ & + \left( \frac{D_1}{6} \cos (\xi + \varphi) - \frac{D_2}{6} \cos (\xi + \varphi + \gamma) \right) \alpha^3. \end{aligned}$$

1) F. Eichhorn s. o. Diss. S. 47.

Daraus folgt:

$$\vartheta_1 = -\vartheta + \frac{1}{3} \frac{D_1 \sin(\xi + \varphi) - D_2 \sin(\xi + \varphi + \gamma)}{D_1 \cos(\xi + \varphi) - D_2 \cos(\xi + \varphi + \gamma) + D_3} \vartheta^2 - \frac{1}{9} \frac{(D_1 \sin(\xi + \varphi) - D_2 \sin(\xi + \varphi + \gamma))^2}{(D_1 \cos(\xi + \varphi) - D_2 \cos(\xi + \varphi + \gamma) + D_3)^2} \vartheta^3 - \dots$$

Ablenkungen an der schwingenden Galvanometernadel können einmal durch weitere Drehung des Torsionskopfes hervorgebracht werden. Die Rechnung gestaltet sich für diesen Fall ganz ähnlich, wie in dem ersten Falle des Magnetometers. Ferner kann eine Ablenkung hervorgebracht werden durch einen galvanischen Strom. Eichhorn<sup>1)</sup> hat den Fall untersucht, daß dabei die Windungen der Galvanometerrollen parallel zum Meridian stehen und hat für die neue Ruhelage die folgende Gleichung gefunden:

$$-\frac{\mathcal{A}i}{C} \{ D_1 \cos(\xi + \varphi + \beta) - D_2 \cos(\xi + \varphi + \gamma + \beta) \} = -D_1 \sin(\xi + \varphi + \beta) + D_2 \sin(\xi + \varphi + \gamma + \beta) + D_3(\omega - \varphi - \beta),$$

worin  $\mathcal{A}i$  die Stromstärke,  $C$  die Galvanometerkonstante bedeuten. Entwickelt man nach Potenzen von  $\beta$ , so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}i}{C} \{ & -[D_1 \cos(\xi + \varphi) - D_2 \cos(\xi + \varphi + \gamma)] + [D_1 \sin(\xi + \varphi) - D_2 \sin(\xi + \varphi + \gamma)]\beta \\ & + \frac{1}{2}[D_1 \cos(\xi + \varphi) - D_2 \cos(\xi + \varphi + \gamma)]\beta^2 - \frac{1}{6}[D_1 \sin(\xi + \varphi) - D_2 \sin(\xi + \varphi + \gamma)]\beta^3 \\ & = -[D_1 \cos(\xi + \varphi) - D_2 \cos(\xi + \varphi + \gamma) + D_3]\beta + \frac{1}{2}[D_1 \sin(\xi + \varphi) - D_2 \sin(\xi + \varphi + \gamma)]\beta^2 \\ & + \frac{1}{6}[D_1 \cos(\xi + \varphi) - D_2 \cos(\xi + \varphi + \gamma)]\beta^3 - \dots \}. \end{aligned}$$

Mithin ist in die allgemeine Ablenkungsformel einzusetzen:

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{\mathcal{A}i}{C} \\ a_0 &= - [D_1 \cos(\xi + \varphi) - D_2 \cos(\xi + \varphi + \gamma)] \\ a_1 &= [D_1 \sin(\xi + \varphi) - D_2 \sin(\xi + \varphi + \gamma)] = D_3(\omega - \varphi) \\ a_2 &= \frac{1}{2}[D_1 \cos(\xi + \varphi) - D_2 \cos(\xi + \varphi + \gamma)] = -\frac{1}{2}a_0 \\ a_3 &= -\frac{1}{6}[D_1 \sin(\xi + \varphi) - D_2 \sin(\xi + \varphi + \gamma)] = -\frac{1}{6}D_3(\omega - \varphi). \end{aligned}$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{D_1 \cos(\xi + \varphi) - D_2 \cos(\xi + \varphi + \gamma)}{D_1 \cos(\xi + \varphi) - D_2 \cos(\xi + \varphi + \gamma) + D_3} \frac{\mathcal{A}i}{C} \\ &+ \frac{D_3(\omega - \varphi)[D_1 \cos(\xi + \varphi) - D_2 \cos(\xi + \varphi + \gamma)]}{(D_1 \cos(\xi + \varphi) - D_2 \cos(\xi + \varphi + \gamma) + D_3)^2} \left\{ \frac{D_1 \cos(\xi + \varphi) - D_2 \cos(\xi + \varphi + \gamma)}{(D_1 \cos(\xi + \varphi) - D_2 \cos(\xi + \varphi + \gamma) + D_3)} - 1 \right\} \left( \frac{\mathcal{A}i}{C} \right)^2 \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Um durch das Experiment in allen diesen Fällen den Zusammenhang zwischen der Asymmetrie der Schwingungen und der Asymmetrie

1) F. Eichhorn Diss. s. o. S. 41.

der Ablenkungen zu prüfen, beobachtet man eine Anzahl Ablenkungen, berechnet nach der Methode der kleinsten Quadrate die Koeffizienten  $\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots$  und aus diesen nach den angeführten Formeln die Koeffizienten von  $\vartheta^2 \vartheta^3 \vartheta^4 \dots$  in der Reihe für  $\vartheta_1$ . Beobachtet man andererseits eine Anzahl Umkehrpunkte der Schwingungen, und berechnet aus diesen nach der Methode der kleinsten Quadrate die Koeffizienten von  $\vartheta^2 \vartheta^3 \dots$  so müssen diese Werte mit den vorher gefundenen übereinstimmen. Sind endlich die Konstanten bekannt, so lassen sich die Koeffizienten auch direkt berechnen.

Für den Zusammenhang zwischen Schwingungen und Ablenkungen in dem zuletzt betrachteten Falle des Galvanometers hat F. Eichhorn eine andere Formel gefunden, die indessen nur für diesen speziellen Fall gilt und aus der allgemeinen Formel hervorgeht, weil für diesen speziellen Fall  $a_0 = -c_1 \mu_1$ ,  $a_1 = -2c_2$  ist.

## Geschwindigkeitsänderung eines bewegten Hohlraums infolge von Kompression.

Von ANTON WEBER in Dillingen a. D.

In der Dynamik bewegter Hohlräume verdient folgender Fall Beachtung. Ein Hohlraum mit unendlich dünnen, vollkommen spiegelnden Wänden bewege sich mit der Geschwindigkeit  $q$  in der  $x$ -Richtung. Seine Grenzflächen seien senkrecht zu den Koordinatenrichtungen. Senkrecht zur Bewegungsrichtung möge der Hohlraum durch äußere Kräfte komprimiert werden. Eine translatorische Kraft sei nicht vorhanden. Dann verlangsamt sich die Bewegung des Hohlraums von selbst.

Die Bewegungsgröße berechnet sich aus der Energie der Hohlraumstrahlung mittels der Formel

$$(1) \quad G = \frac{4q}{3c^2 + q^2} E,$$

wie sich aus den von Herrn Plank angegebenen Formeln<sup>1)</sup> ergibt. Die Zunahme der Bewegungsgröße ist also

$$(2) \quad dG = \frac{4(3c^2 - q^2)}{(3c^2 + q^2)^2} E dq + \frac{4q}{3c^2 + q^2} dE.$$

Die Energie nimmt infolge der Kompression zu um die Größe

$$(3) \quad dE = -pdV,$$

<sup>1)</sup> Ann. d. Phys. 26, S. 9, 1908. Gleichung (3) und (5).

wo  $p$  den Druck pro Flächeneinheit vorstellt. Da keine Translationsarbeit geleistet wird, ist die Zunahme der Bewegungsgröße Null:

$$(4) \quad dG = 0.$$

Gleichung (1) gibt also wegen (2) und (3)

$$(5) \quad 0 = \frac{4(3c^2 - q^2)}{(3c^2 + q^2)^2} E dq - \frac{4q}{3c^2 + q^2} \cdot p dV.$$

Weil aber<sup>1)</sup>

$$(6) \quad p = \frac{c^2 - q^2}{3c^2 + q^2} \cdot \frac{E}{V},$$

wird aus (5)

$$(7) \quad dq = \frac{q(c^2 - q^2)}{3c^2 - q^2} \cdot \frac{dV}{V}.$$

Soll die Verlangsamung vermieden werden, dann muß eine entsprechend große translatorische Kraft hinzutreten. Es ist

$$F' = q dG.$$

Die Größe  $dG$  finden wir aus (2), wenn wir dort  $dq = 0$  setzen. Es ergibt sich

$$F' = \frac{4q^2}{3c^2 + q^2} dE,$$

und mit Rücksicht auf (3) und (6)

$$(8) \quad F' = - \frac{4q^2(c^2 - q^2)}{(3c^2 + q^2)^2} \cdot E \frac{dV}{V}.$$

Untersucht man den letzteren Vorgang, wo eine translatorische Kraft vorhanden ist, im Ruhssystem des Hohlraums, so wird auch dort der Hohlraum komprimiert. Eine translatorische Kraft ist jedoch in diesem bewegten System nicht vorhanden. Beim Übergang von einem System zum anderen kann also die Translationskraft verschwinden.

Diese Tatsache ist übrigens schon enthalten in den Plankschen Transformationsformeln<sup>2)</sup> für die Kraft  $F$ . Dieselben lauten für eine in der Bewegungsrichtung wirkende Kraft

$$(9) \quad F_x = F'_x + \frac{g}{c^2} \left( V \frac{dp}{dt} + T \frac{dS}{dt} \right).$$

Wenn  $F'_x$  Null ist, kann somit  $F_x$  immer noch von Null verschieden sein.

Wie die Formel (9) zeigt, hat die Zuführung von Wärme ( $= T \frac{dS}{dt}$ ) eine analoge Wirkung wie die Kompression.

1) a. a. O. S. 8 Zeile 1.

2) a. a. O. S. 22, Gl. (32).

## Die Transformation von Energie und Bewegungsgröße.

VON ANTON WEBER in Dillingen a. D.

Energie und Bewegungsgröße einer Hohlraumstrahlung lassen sich auf ein bewegtes System folgendermaßen direkt transformieren. Der Hohlraum ruhe im gestrichenen System  $\Sigma'$ , welches sich im ungestrichenen System  $\Sigma$  in der  $x$ -Richtung mit der Geschwindigkeit  $q$  bewegt.

In  $\Sigma'$  sind alle Richtungen des Hohlraumes gleichwertig, d. h. die Mittelwerte von  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$  und  $[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$  sind für jede Richtung gleich groß, speziell auch für jede Koordinatenrichtung. Daher gelten die Gleichungen

$$(1) \quad M(\mathfrak{E}'^2 + \mathfrak{H}'^2) = M(\mathfrak{E}_y'^2 + \mathfrak{H}_y'^2) = M(\mathfrak{E}_z'^2 + \mathfrak{H}_z'^2) = \frac{1}{3} M(\mathfrak{E}'^2 + \mathfrak{H}'^2).$$

$$(2) \quad M[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}']_x = M[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}']_y = M[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}']_z = 0.$$

Für die ungestrichenen Größen gelten diese Gleichungen nicht. Die Einsteinschen<sup>1)</sup> Transformationsgleichungen geben die Werte

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= \mathfrak{E}'_x & \mathfrak{H}_x &= \mathfrak{H}'_x \\ \mathfrak{E}_y &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} \left( \mathfrak{E}'_y + \frac{q}{c} \mathfrak{H}'_z \right) & \mathfrak{H}_y &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} \left( \mathfrak{H}'_y - \frac{q}{c} \mathfrak{E}'_z \right) \\ \mathfrak{E}_z &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} \left( \mathfrak{E}'_z - \frac{q}{c} \mathfrak{H}'_y \right) & \mathfrak{H}_z &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} \left( \mathfrak{H}'_z + \frac{q}{c} \mathfrak{E}'_y \right). \end{aligned}$$

Hieraus berechnen wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2 &= \mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2 + \mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2 \\ &= (\mathfrak{E}'^2 + \mathfrak{H}'^2) + \frac{c^2 + q^2}{c^2 - q^2} [(\mathfrak{E}'^2 + \mathfrak{H}'^2) + (\mathfrak{E}'^2 + \mathfrak{H}'^2)] \\ &\quad + \frac{4qc}{c^2 - q^2} [\mathfrak{E}'\mathfrak{H}']_x. \end{aligned}$$

Gehen wir zu den Mittelwerten über, dann erhalten wir, gemäß (1) und (2)

$$M(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) = \frac{3c^2 + q^2}{3(c^2 - q^2)} M(\mathfrak{E}'^2 + \mathfrak{H}'^2),$$

oder wenn wir die mittlere Energiedichte mit  $\varepsilon$  bzw.  $\varepsilon'$  bezeichnen

$$(3) \quad \varepsilon = \frac{3c^2 + q^2}{3(c^2 - q^2)} \varepsilon'.$$

1) Ann. d. Phys. 17, S. 909, 1905.

Das Volumen transformiert sich mittels

$$V = \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c} V'.$$

Also ergibt sich aus (3) die Transformationsgleichung für die Energie  $E$

$$(4) \quad E = \frac{3c^3 + q^2}{3c\sqrt{c^2 - q^2}} E'.$$

In analoger Weise läßt sich die mittlere Energieströmung transformieren. Wir brauchen nur deren  $x$ -Komponente zu berechnen, da nur diese von Null verschieden sein kann. Es ist

$$\begin{aligned} [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_x &= \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y \\ &= \frac{c^2 + q^2}{c^2 - q^2} [\mathfrak{E}'\mathfrak{H}']_x + \frac{cq}{c^2 - q^2} [(\mathfrak{E}'_y{}^2 + \mathfrak{H}'_y{}^2) + (\mathfrak{E}'_z{}^2 + \mathfrak{H}'_z{}^2)]. \end{aligned}$$

Gemäß Gleichungen (1) und (2) wird daraus

$$M[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_x = \frac{2}{3} \frac{cq}{c^2 - q^2} M(\mathfrak{E}'^2 + \mathfrak{H}'^2),$$

oder, wenn wir die mittlere Impulsdichte mit  $g$  bezeichnen

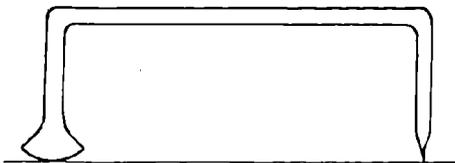
$$(5) \quad g = \frac{4q}{3(c^2 - q^2)} \varepsilon'.$$

## Über eine zweckmäßige Konstruktion des Stangenplanimeters.

Von HORST VON SANDEN in Göttingen.

Das von dem dänischen Offizier Prytz erfundene Stangen- oder Beilplanimeter besteht in einer zweimal rechtwinklig umgebogenen Stange, die an einem Ende in einer Spitze  $A$  endigt, am anderen in einer Schneide  $B$  (Fig. 1). Führt man die Spitze  $A$  auf einer Kurve  $c$ ,

Fig. 1.



während man die Schneide leicht gegen das Papier drückt (und die Ebene der Stange vertikal hält), so wird die Schneide, d. h. ihr Berührungspunkt, eine Kurve  $\gamma$  beschreiben, derart, daß während der Umfahrung die Tangente im Punkte  $B$  von  $\gamma$

durch die Spitze  $A$  geht, da sich ja  $B$  in jedem Moment nur in der Richtung der Schneide (d. h. der Geraden  $BA$ ) bewegen kann.

Umfährt man mit der Spitze  $A$  eine geschlossene Kurve, von einem Punkte anfangend bis wieder hin zu diesem Punkte, so beschreibt die Schneide  $B$  eine, im allgemeinen mit Spitzen versehene Kurve, die sich

nicht schließt. Ist  $A_0B_0$  die Anfangslage des Systems und  $A_0B_1$  die Lage nach der Umfahrung, so zeigt die Theorie des Instruments<sup>1)</sup>, daß der Winkel  $\varphi$  zwischen Anfangs- und Endlage der Stange, multipliziert mit dem Quadrat ihrer Länge, gleich ist dem Flächeninhalt der von  $A$  umfahrenen Kontur plus einem leicht abzuschätzenden Korrektionsgliede.

Beim Gebrauch des Instrumentes in dieser Form ist erstens die Handhabung nicht gerade bequem, und zweitens ist der Winkel  $\varphi$  mühsam und nur ungenau zu ermitteln. Daher wurde das Instrument in folgender Weise abgeändert. Statt der Schneide  $B$  wurden zwei Rollen (mit scharfem Rande)  $R_1$  und  $R_2$  angebracht, die auf einer zur Stange  $AB$  rechtwinkligen Achse sitzen (s. Fig. 2). Der Punkt  $B$  der Achse wird dann genau so wie durch die Schneide geführt. Die Berührungspunkte der Rollen be-

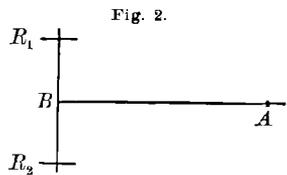


FIG. 2.

schreiben auf dem Papier zwei Parallelkurven zu der von  $B$  beschriebenen Kurve. Ist  $\pm a$  der Abstand der Rollen von  $B$ , so gilt folgendes: Es sei  $ds$  ein Bogenelement der von  $B$  beschriebenen Kurve,  $d\sigma_1$  und  $d\sigma_2$  die entsprechenden von den Rollen durchlaufenen Bogenelemente der Parallelkurven. Ist  $r$  der Krümmungsradius der  $B$ -Kurve und  $d\varphi$  der Winkel zwischen zwei Nachbarlagen der Stange  $AB$ , so ist:

$$\begin{aligned} ds &= r \cdot d\varphi, \\ d\sigma_1 &= (r + a) \cdot d\varphi, \\ d\sigma_2 &= (r - a) \cdot d\varphi, \end{aligned}$$

daraus folgt:  $d\sigma_1 - d\sigma_2 = 2 \cdot a \cdot d\varphi$  und  $\int d\sigma_1 - d\sigma_2 = 2 \cdot a \cdot \varphi$ .

Die Differenz der Bogenlängen, der von den Rollen durchlaufenen Parallelkurven, ist also proportional dem Winkel  $\varphi$  zwischen der Anfangs- und Endlage der Stange  $AB$ .

Diese Differenz der Bogenlängen ist nun aber gleich der relativen Verdrehung der Rollen zueinander, welche sich mit großer Genauigkeit ablesen läßt. Zu diesem Ende ist jede Rolle starr verbunden mit einer Trommel (s. Fig. 3 in der Mitte der Achse). Der Umfang der einen Trommel trägt eine Teilung, während die andere Trommel zwei um  $180^\circ$  auseinanderstehende Nonien trägt. Die Verdrehung wird nun an dem gerade sichtbaren Nonius abgelesen. Diese Ablesung gibt multipliziert mit einer Konstanten den Flächeninhalt, wobei noch eine Korrektur anzubringen ist.

1) Über die Theorie s. C. Runge, Ztschr. f. Vermessungswesen, Bd. XXIV (1895), Heft 12, S. 321; A. Korselt, diese Zeitschr. f. Math. u. Physik, Bd. 43 (1898), S. 312.

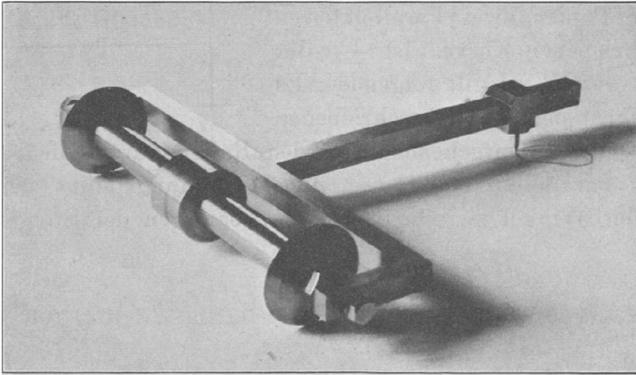
Die leicht zu messenden Konstanten des Apparates sind: der Rollendurchmesser, der Abstand der Rollen (d. h. ihrer scharfen Ränder) voneinander und der Abstand des Fahrstiftes von der Rollenachse.

Dieser ist verstellbar eingerichtet, indem der Fahrstift an einer Hülse befestigt ist, die auf der „Stange“ gleitet und festgestellt werden kann. Der Abstand  $p$  von der Rollenachse kann an einer Teilung auf der Stange abgelesen werden.

Für die Handhabung des Apparates ergeben sich aus seiner Theorie folgende einfache Regeln:

Der Schwerpunkt der zu umfahrenden Fläche bzw. ein diesem, nach Augenmaß, möglichst benachbarter Punkt, wird durch eine Gerade mit einem Punkte der Kontur verbunden. Dann wird der Fahrstift

Fig. 3.



in den Schwerpunkt gebracht, aus diesem längs jener Geraden bis zur Kontur geführt, und nach Umfahung derselben wieder zurück zum Schwerpunkt, worauf der Nonius abgelesen wird. Die Ablesung wird mit

einer aus einer Tabelle zu entnehmenden Zahl multipliziert und damit eine erste Näherung für den Flächeninhalt gewonnen. Diese kann natürlich durch mehrmalige Durchfahung des oben angegebenen Linienzuges und Bildung des arithmetischen Mittels der Ablesungen wesentlich verbessert werden. Es empfiehlt sich hierbei, um den Einfluß des Fehlers in der Schätzung der Schwerpunktslage zu vermeiden, die Anfangslagen der Stange bei den einzelnen Messungen immer um  $180^\circ$ , bei noch größerer Anzahl der Messungen immer um  $90^\circ$  abzuändern.

Von dem so ermittelten Näherungswert ist eine Korrektur abzuziehen, welche gleich ist dem polaren Trägheitsmomente der Fläche bezüglich des Schwerpunktes dividiert durch das doppelte Quadrat ( $2 \cdot p^2$ ) der Stangenlänge, d. h. Abstand des Fahrstiftes von der Rollenachse.

Zur Schätzung dieser Korrektur denke man sich die zu messende Fläche durch einen um den Schwerpunkt geschlagenen Kreis gleichen Trägheitsmomentes ersetzt. Ist  $r$  sein Radius, so wird die Korrektur  $k = \frac{1}{4} \cdot \frac{r^4 \cdot \pi}{p^2}$ . Die Werte der Korrektur  $k$  können einem Nomogramm

entnommen werden, das dem Apparat beigegeben wird.<sup>1)</sup> Es wird dann jedenfalls keine Schwierigkeiten haben, wenigstens eine obere und eine untere Grenze für die Korrektur anzugeben.

Die Genauigkeit des Apparates ist *ceteris paribus* dem Abstände der Rollen voneinander proportional.

Da das auf die Rollen wirkende Drehmoment relativ zu den Reibungswiderständen der Rollenlager groß ist, gibt eine robuste Ausführung des Apparates schon gute Resultate.

Es wurde ein Apparat ausgeführt von folgenden Dimensionen:

Rollendurchmesser: 40,00 mm.

Rollenabstand: 150,21 mm.

$p$  variabel zwischen 50 mm und 192 mm.

Umfang der Trommel in 100 Teile geteilt, so daß die Noniuseinheit des Umfanges angibt.

$\frac{1}{1000}$

Preis: 54 *M.*

Zur Kontrolle wurde ein Kreis von 9,93 mm Radius mehrfach vermessen:

Bei zehn Umfahrungen wurden folgende Werte in Noniuseinheiten abgelesen, wobei halbe geschätzt wurden:

Für  $p = 191$

10,5	}	Arithm. Mittel: 10,15. (Mittlerer Fehler des Mittels: 0,07.)
10,0		Als erste Näherung ergibt dies: 309,77 qmm.
10,0		(Konstante: 30,52.)
10,0		Die Korrektur wird: $(\frac{10}{191})^2 \cdot 100 \cdot 0,8 = 0,22$ , d. i. 0,07%,
10,5		also gibt das Instrument: 309,55, wogegen der wahre Inhalt
10,0		309,79 qmm ist.
10,5		Die Abweichung beträgt mithin 0,24, d. i. 0,08%.
10,0		Der mittlere Fehler macht $0,07 \cdot 30,52 = 2,1$ qmm, d. i.
10,0		0,7% aus.
10,0		

Für  $p = 101$  ergaben zehn Ablesungen:

37,0	}	
36,5		Im Mittel: 36,50. (Mittl. Fehler: 0,13.)
36,0		Konstante: 8,53.
37,0		Erste Näherung: 311,34.
36,5		Korrektur: $(\frac{10}{101})^2 \cdot 100 \cdot 0,8 = 0,79$ , d. i. 0,2%, also ist das
36,5		Resultat: 310,55.
37,0		Die Abweichung ist: 0,8 0,27%.
36,0		Der mittlere Fehler macht 1,1, d. i. 0,4% aus.
36,0		
36,5		

1) Setzt man  $y = \log k$ ;  $x = \log p$  so besteht das *Nomogramm* bei einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit logarithmischen Maßstäben auf den Achsen in der Parallelgeradenschar:  $2x + y - 4 \log r + 0,1049 = 0$ .

Sieht man von dem Korrektionsgliede ab, so zeigt sich, daß bei mittleren Stangenlängen  $p$  der mittlere Fehler des Resultates etwa umgekehrt proportional der benutzten Stangenlänge ist. Die Konstante d. i. der Flächenwert der Noniuseinheit nimmt aber mit der zweiten Potenz von  $p$  ab.

Es empfiehlt sich also,  $p$  so klein einzustellen, daß der mutmaßliche Fehler beim Schätzen des Trägheitsmomentes etwas unterhalb des Fehlers bleibt, der durch den mittleren Ablesungsfehler verursacht wird.

Eine zehnmalige Umfahrung des Kreises mit einem Coradischen Kompensationspolarplanimeter ergab die Ablesungen:

37,0	} Im Mittel: 38,70. (Mittl. Fehler des Mittels: 0,36.) Konstante: 8. Gemessene Fläche: 309,6; Abweichung: 0,2. <i>Der mittlere Fehler macht 2,9, d. i. 0,9% aus.</i>
38,0	
40,5	
39,0	
38,0	
37,5	
40,0	
39,0	
38,5	
39,5	

Für weitere Ausführungen des neuen Apparates ist beabsichtigt, den Umfang der Trommel in 200 Teile zu teilen und den Rollenabstand auf 200 mm zu erhöhen, sowie auch die Länge der Stange zu vergrößern, so daß die Genauigkeit des neuen Planimeters an die der genauesten bekannten heranreichen dürfte, während der Preis etwa 80% niedriger ist.

Göttingen, Februar 1911.

## Bücherschau.

**Perry, J., Höhere Analysis für Ingenieure.** Autorisierte deutsche Bearbeitung von R. Fricke und F. Süchting. 2. vermehrte und verbesserte Auflage. [XI u. 464 S.] 8<sup>o</sup> m. 106 Textfiguren. Leipzig 1910, B. G. Teubner. Geb. *M.* 13.—.

Die Herausgabe der ersten deutschen Auflage dieses Buches war eine literarische und pädagogische Tat gewesen. Literarisch, weil es bis dahin kein auch nur entfernt ähnliches Buch gegeben hatte, das so geeignet gewesen wäre die Kluft zwischen Mathematik und Technik zu überbrücken, pädagogisch, weil der Verfasser — ein Lehrtalent allerersten Ranges — es wie kein zweiter versteht, auch schwierigere Entwicklungen als so einfach hinzustellen, daß auch der Schwächere unwillkürlich Mut faßt und dadurch wie von selbst zum Verständnis durchdringt. Der buchhändlerische Erfolg blieb nicht aus. Heute präsentiert sich nach 8 Jahren schon eine zweite, vielfach verbesserte, um 40 Seiten vermehrte Auflage. Abgesehen von einer großen Menge von Änderungen und Erweiterungen, die auf exaktere Darstellung und leichtere Verständlichkeit abzielen, wurden vor allem die technischen Bezeichnungen durchweg so abgeändert, daß sie mit den in Deutschland gebräuchlichsten übereinstimmen.

Für solche, die das ausgezeichnete Buch noch nicht kennen, ein paar Andeutungen. Das Buch hat drei Kapitel. Das I. Kapitel hat die einfache Überschrift » $x^n$ «, das II. » $e^x$  und  $\sin x$ « und das III. »Schwierigere Aufgaben und Lehrsätze«. Die ersten zwei Kapitel geben, immer an der Hand von zahlreichen Beispielen aus der theoretischen Physik und aus allen Gebieten der Technik, die auf die Funktionen der Überschrift bezüglichen Entwicklungen, während im III. Kapitel das ganze Stoffgebiet zusammengefaßt, über das Allernötigste hinaus erweitert und auf schwierigere Probleme angewendet wird. Das Buch ist ja für Ingenieure geschrieben, es ist aber auch dem Studiierenden der Mathematik in jedem Stadium seiner Entwicklung zu empfehlen. Im Anfang wird er die einfachsten Begriffe hier in außerordentlich frischer Weise dargestellt finden und sie auf die gewöhnlichsten Funktionen anwenden lernen, indem er sich die Beispiele auswählt, die seinem Gedankenkreise zunächst liegen. In späteren Semestern wird der Mathematiker die strengeren Methoden kennen lernen müssen, aber Perry wird dann seinen erweiterten Kenntnissen immer neue Beispiele unterlegen, an denen er seine Kräfte üben, seine theoretischen Studien ergänzen kann. Perrys Buch wird auch den Mathematiker nirgends abstoßen; denn wenn der Verfasser auch alles bei Seite läßt, was dem Ingenieur gleichgültig sein kann, so ist doch das, was geboten wird, in durchaus mathematischer Auffassung gegeben und besonders die Grundbegriffe sind einwandfrei erläutert. Der Verfasser ist

auch Mathematiker, das sieht man auf jeder Seite. Wer es recht erkennen will, der vergleiche nur einmal ein anderes »populär« sein wollendes Buch, z. B. die „Grundzüge der Differential- und Integralrechnung“ von F. Bendt, die in der Reihe der Weberschen Katechismen eben in vierter Auflage herauskamen.

Für eine dritte Auflage wäre vielleicht aber doch zu überlegen, ob nicht die Stetigkeit irgendwo erläutert werden sollte. Der einfache Hinweis der Beschränkung auf stetige Funktionen mit stetigen Differentialquotienten würde dann manchen Satz oder Beweis besser fundieren. Die »Kettenlinie« auf S. 207 ist ein exakter Kreisbogen. Da eine Glättung des Stils schon für diese Auflage ausdrücklich hervorgehoben wird, könnte man in der dritten dann wenigstens einige der vielzuvielen »derselbe, dieselbe, dasselbe« durch »er, sie, es« oder »dies, diese, dieses«, und das oft gebrauchte, altertümelnde »dieserhalb« durch »deswegen, deshalb« o. ä. ersetzen.

Pirmasens.

H. WIELEITNER.

**A. Brill.** Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik raumerfüllender Massen. Mit 27 Figuren. X u. 236 S. Leipzig und Berlin 1909, B. G. Teubner. Geh. *M* 7.—, geb. *M* 8.—.

Wenn einmal eine Geschichte der physikalischen Systeme geschrieben wird, wie es eine Geschichte der philosophischen Systeme schon lange gibt, dann wird man, wie ich glaube, nicht ohne Verwunderung sehen, daß das, was eigentlich als das Natürlichste erscheint, die unbefangene Schilderung der Vorgänge, erst mühsam erobert werden mußte, daß vorher eine uralte, auf metaphysischer Grundlage beruhende Überlieferung ihren Einfluß ausübt und den Forscher nur mit vorgefaßten Meinungen und vorgebildeter Überzeugung an die Erscheinungen in der Natur herantreten läßt. Wie lange ist der Grundsatz der mechanischen Welterklärung, daß alles Geschehen im letzten Grunde Bewegung ist, mit völliger Bestimmtheit ausgesprochen worden, ohne daß die tatsächlichen Beobachtungen irgendeine Berechtigung dazu boten! Man weiß ja, wann zuerst durch die Herleitung der wirklichen Erscheinungen aus mechanischen Hypothesen die Zurückführung des Lichtes und der Wärme auf Bewegungsvorgänge eine wissenschaftliche Begründung erfahren hat; aber dies war so spät der Fall, daß, als es geschah, schon gleichzeitig durch Faradays experimentelle Untersuchungen die Reaktion gegen die rein mechanische Ausdeutung der Natur eintrat. Nach Faraday schuf Maxwell die elektromagnetische Lichttheorie, welche die Abwendung von der Mechanik als dem Erklärungsgrunde aller Erscheinungen fortführte; aber gerade durch Maxwell bekam die Mechanik eine neue Bedeutung für die allgemeine Naturauffassung: sie soll eine Erklärung der Naturerscheinungen dadurch liefern, daß sie gewisse parallele Vorgänge zeigt, die der anschaulichen Erfassung näher liegen. Es beginnt damit das Aufsuchen von mechanischen Bildern für Erscheinungen, von denen man sich bewußt ist, daß sie in ihrem Wesen ganz anders geartet sind. Aber die Mechanik ist selbst nicht immer die Schilderung von wirklichen Bewegungsvorgängen, sie ist oft nur die mathematische Darstellung idealer Erscheinungen. So handelt die theoretische Hydrodynamik nicht unmittelbar von der Bewegung realer Flüssigkeiten, sondern sie beruht auf Voraussetzungen, die in der Wirklichkeit nicht erfüllt sind. Dadurch wird ihr nichts von ihrem Wert genommen,

dieser Wert wird nur ein ganz anderer als der der praktischen Hydraulik, er ist ebenso wie der Gegenstand ein idealer. Hingegen hat es die Theorie der festen elastischen Körper in gewissem Sinne vermocht, ideale und praktische Bedeutung zu vereinen. Dafür scheinen aber die Grundlagen dieser Theorie viel weniger selbstverständlich als die der Hydrodynamik. Man fühlt, wie hier erfahrungsmäßige Grundlagen zur Feinheit der mathematischen Abstraktion abgeklärt sind, während die Begründung der Hydrodynamik von Euler aus der vollen Gestaltungsfreude der mathematischen Phantasie heraus, unbekümmert um alle Empirie, geschaffen ist. Diese Bemerkungen holen ein bißchen weit aus, und sie sind auch allgemach zu Binsenwahrheiten geworden, aber sie scheinen mir doch unerläßlich zum Verständnis des Buches, dem wir ein paar allgemein orientierende Worte widmen sollen; sie scheinen mir vor allem nötig für den, der die mathematischen Darstellungen mit den Augen des Technikers anzusehen gewohnt ist und von ihnen unmittelbar greifbare Resultate erwartet.

Dieses Buch geht aber über die theoretische Hydrodynamik und die Elastizitätstheorie, denen es zunächst gewidmet ist, in bemerkenswerter Weise hinaus.

Um die Mitte des vorigen Jahrhunderts hat sich in England das Bedürfnis herausgestellt, noch andere Medien als die elastischen festen Körper und die idealen Flüssigkeiten in Betracht zu ziehen; es handelt sich insbesondere um ein Medium, das ähnlich wie gallertige und schaumige Massen der Drehung seiner Teilchen widerstrebt. Dieses von Mac Cullagh und William Thomson eingeführte Medium ist es, was Brill in dem vorliegenden Buche als quasi-elastisches Mittel behandelt, und in der mathematischen Theorie dieser Medien vollendet sich die knapp, aber verständlich gehaltene Darstellung. Diese Theorie bildete jedoch sozusagen nur den Rumpf des Buches, sein Kopf ist die Hertz'sche Mechanik, die zuerst für Punktsysteme entwickelt und dann, wenn auch mit gewissen notwendig werdenden Einschränkungen, auf raumerfüllende Massen übertragen wird. Der Schwanz, in den das Buch ausläuft — man verzeihe mir das unpoetische Wort, aber es drückt nicht bloß das Ende, sondern auch die Zuspitzung aus — ist dann der elektomagnetischen Lichttheorie gewidmet, für die in den quasi-elastischen Mitteln das mechanische Bild gefunden wird und an die sich die Elektronentheorie und das Relativitätsprinzip angliedert. Der Verfasser will hier keine zusammenfassende Darstellung, sondern nur eine erste Einführung geben, und es ist klar ersichtlich, wie ihm die ehrliche, warmeherzige Begeisterung für diese neuen Ideen die Feder geführt hat.

Braunschweig.

H. E. TIMERDING.

## Neue Bücher.

### Arithmetik, Analysis.

1. CARVALLO, E., Méthode pratique pour la résolution numérique complète des équations algébriques et transcendantes. 3<sup>e</sup> éd. Paris 1910.  
S. auch 36, 68, 125, 136.

### Astronomie, Geodäsie.

2. BRENDL, MART., Theorie der kleinen Planeten. 3. Teil. Unter Mitwirkung von Jul. Kramer. (Abh. Ges. Wiss. Göttingen, math.-physikal. Klasse. Neue Folge. VI. Bd. Nr. 5.) Berlin 1910, Weidmann. *M.* 8.—
3. BRENDL, MART., Theorie der kleinen Planeten. IV. Teil. (Abh. Ges. Wiss. Göttingen, mathem.-physikal. Klasse. Neue Folge. VIII. Bd. Nr. 1.) Berlin 1911, Weidmann. *M.* 12.—
4. Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. VI. Bd. 2. Teil: Astronomie. 3. Heft. Leipzig 1910, B. G. Teubner. *M.* 3.60.
5. GAUSS, CARL FRIEDRICH, Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. Hrsg. von J. Frischauf. (Ostwalds Klassiker Nr. 177.) Leipzig 1910, Engelmann. *M.* 2.—
6. HAMMER, E., Lehrbuch der elementaren praktischen Geometrie (Vermessungskunde). Bd. I, Feldmessen und Nivellieren, des Lehrbuchs der Vermessungskunde besonders für Bauingenieure. Leipzig u. Berlin 1911, B. G. Teubner. *M.* 22.—; geb. in Leinw. *M.* 24.—
7. HOHENNER, H., Geodäsie. Eine Anleitung zu geodätischen Messungen für Anfänger mit Grundzügen der Hydrometrie und der direkten (astronomischen) Zeit- und Ortsbestimmung. Leipzig u. Berlin 1910, B. G. Teubner.  
Geb. in Leinw. *M.* 12.—
8. KOPPE, M., Die Bahnen der beweglichen Gestirne im Jahre 1911. Eine astronomische Tafel nebst Erklärung. Berlin 1911, Springer. *M.* —.40.
9. MESSERSCHMITT, J. B., Der Sternenhimmel. („Bücher der Naturwissenschaft“, 6. Band.) Leipzig 1910, Ph. Reclam jun. Geb. *M.* 1.—
10. NEWCOMB u. ENGELMANNS populäre Astronomie. 4. Aufl. In Gemeinschaft mit Eberhard, Ludendorff, Schwarzschild hrsg. von P. Kempf. Leipzig 1911, Engelmann. *M.* 14.—; geb. in Leinw. *M.* 15.60.
11. SEE, T. J. J., Researches on the evolution of the Stellar Systems. Vol. 2. The Capture theory of cosmical evolution. London 1910, Wesley. 42 s.  
S. auch 99, 124, 133.

### Darstellende Geometrie.

12. BARCHANEK, Darstellende Geometrie und Raumlehre. Ein Lehr- u. Übungsbuch f. die IV. bis VII. Klasse der Realschulen. Bearb. von Emil Ludwig. 3. Aufl. Wien 1910, Tempsky. Geb. K. 4.—
13. DALWICK, F. v., Vorlesungen über darstellende Geometrie. (In 2 Bdn.) 1. Bd. Die Methoden der Parallelprojektion. Leipzig 1911, B. G. Teubner.  
Geb. in Leinw. *M.* 13.—

14. KOMMERELL, V., Raumgeometrie (Stereometrie und darstellende Geometrie). Mit Benützung v. Kommerell-Hauucks Lehrbuch der Stereometrie f. den Schulgebrauch bearb. Tübingen 1910, Laupp. *M* 2.—; geb. in Leinw. *M* 2.60.
15. MÜLLER, EMIL, Technische Übungsaufgaben für darstellende Geometrie. III. Heft. Leipzig u. Wien 1910, Deuticke. *M* 1.25.
16. STORRY, G. A., The theory and practice of perspective. Oxford 1910. 10 s.
17. SPAPPANTSCHITSCH, RICHARD, Leitfaden der darstellenden Geometrie f. die V. bis VII. Klasse der Realschulen. Wien 1911, Tempsky. Geb. K. 4.—.  
S. auch 136.

### Geschichte.

18. BOHM, ERICH, Zur Geschichte des Erdmagnetismus. Progr. Hamburg 1910. *M* 1.50.
19. SCHULZE, F. A., Die großen Physiker u. ihre Leistungen. („Aus Natur u. Geisteswelt“, 324. Bändchen.) Leipzig 1910, B. G. Teubner. *M* 1.—; geb. *M* 1.25.
20. WERNER, OTTO, Zur Physik Leonardo da Vincis. Berlin 1910, Internationale Verlagsanstalt f. Kunst u. Literatur. *M* 2.—.  
S. auch 95, 124.

### Mechanik.

21. APPEL, T. et DAUTHEVILLE, S., Précis de mécanique rationnelle. Introduction à l'étude de la physique et de la mécanique appliquée à l'usage des candidats aux certificats de licence et les élèves des écoles techniques supérieures. Paris 1910, Gauthier-Villars. Frs. 25.—.
22. BERNOULLI, JAK. u. EULER, LEONH., Abhandlungen über das Gleichgewicht u. die Schwingungen der ebenen elastischen Kurven (1691, 1694, 1695 u. 1744). Übers. u. hrsg. v. H. Linsenbarth. (Ostwalds Klassiker Nr. 175.) Leipzig 1910, Engelmann. Geb. *M* 2.80.
23. CHRISTMANN, u. BAER, H., Grundzüge der Kinematik. Berlin 1910, Springer. *M* 4.80; geb. in Leinw. *M* 5.80.
24. CHURCH, J. P., Mechanics of internal work (or work of deformation), in elastic bodies and systems in equilibrium, including the method of least work. New York 1910, Wiley. Cloth. \$ 1.50.
25. CRANZ, C., Lehrbuch der Ballistik. 1. Bd. Äußere Ballistik oder Theorie der Bewegung des Geschosses von der Mündung der Waffe ab bis zum Eindringen in das Ziel. Gleichzeitig zweite u. vollständig umgearbeitete Auflage des „Compendiums der theoretischen äußeren Ballistik“ von 1896. Leipzig u. Berlin 1910, B. G. Teubner. Geb. in Leinw. *M* 20.—.
26. —, Dasselbe. 4. Bd. Atlas f. Tabellen, Diagramme u. photographische Momentaufnahmen. Ebenda. Geb. in Halbleinw. *M* 14.—.
27. DIETZE, RICH., Die Berechnung eiserner Balken- und Bogendächer. Düsseldorf 1910, Bagel. *M* 3.50.
28. FINGER, JOS., Elemente der reinen Mechanik. Als Vorstudien für die analytische und angewandte Mechanik und für die mathematische Physik an Universitäten und technischen Hochschulen sowie zum Selbstunterricht. Dritte, neu bearbeitete und vermehrte Aufl. Wien und Leipzig 1911, Hölder. *M* 22.—.
29. HENNEBERG, LEBRECHT, Die graphische Statik der starren Systeme. (Teubners Sammlung, Bd. XXXI.) Leipzig u. Berlin 1911, B. G. Teubner. Geb. in Leinw. *M* 24.—.
30. HORN, FRITZ, Die dynamischen Wirkungen der Wellenbewegung auf die Längsbeanspruchung des Schiffskörpers. Berlin 1911, Springer. *M* 3.—.
31. HORT, WILHELM, Technische Schwingungslehre. Einführung in die Untersuchung der für den Ingenieur wichtigsten periodischen Vorgänge aus der Mechanik starrer, elastischer, flüssiger und gasförmiger Körper, sowie aus der Elektrizitätslehre. Berlin 1910, Springer. *M* 5.60; geb. *M* 6.40.

32. **IHERING, A. v.**, Die Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper. I. Teil. Die Mechanik der festen Körper. („Aus Natur u. Geisteswelt“, 303. Bändchen.) Leipzig 1910, B. G. Teubner. *M* 1.—; geb. in Leinw. *M* 1.25.
33. **KELVIN, Lord**, Mathematical and physical Papers. Vol. 4. Hydro-dynamics and General Dynamics. Cambridge 1910, University Press. 18 s.
34. **KIRCHHOFF, R.**, Der Zweigelenbogen als statisch unbestimmtes Hauptssystem. Berlin 1911, Ernst & Sohn. *M* 3.60.
35. **KLEIN, F.**, u. **SOMMERFELD, A.**, Über die Theorie des Kreisels. Heft IV. Die technischen Anwendungen der Kreiseltheorie. Für den Druck bearb. u. ergänzt v. Fritz Nöther. Leipzig 1910, B. G. Teubner. *M* 8.—; geb. in Leinw. *M* 9.—.
36. **KORN, ARTHUR**, Über freie u. erzwungene Schwingungen. Eine Einführung in die Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig u. Berlin 1910, B. G. Teubner. *M* 5.60.
37. **MARCOLONGO, ROBERT**, Theoretische Mechanik. Autorisierte deutsche Bearbeitung von H. E. Timerding. 1. Bd. Kinematik u. Statik. Leipzig u. Berlin 1911, B. G. Teubner. *M* 10.—; geb. in Leinw. *M* 11.—.
38. **POINCARÉ, HENRI**, Die neue Mechanik. (Sonderabdruck aus: „Himmel u. Erde“, Jahrg. 23.) Leipzig u. Berlin 1911, B. G. Teubner. *M* —.60.
39. **WEYRAUCH, JAK. J.**, Elastische Bogenträger einschließlich der Gewölbe, Eisenbetonbogen u. Bogenfachwerke. Ihre Theorie u. Berechnung mit zahlreichen Beispielen u. Aufgaben entsprechend den Bedürfnissen der Praxis. 3. vollständig neu bearb. Aufl. Stuttgart 1911, Wittwer. *M* 24.—; geb. *M* 26.—.
40. **WITTENBAUER, FERD.**, Aufgaben aus der techn. Mechanik. 1. Bd. Allgemeiner Teil. 2. verb. Aufl. Berlin 1911, Springer. *M* 5.—; geb. in Leinw. *M* 5.80. S. auch 75, 117, 120, 125, 127.

### Physik.

41. **ABBE, ERNST**, Die Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop. Bearb. u. hrsg. v. Otto Lummer u. Fritz Reiche. Mit einem Bildnis Ernst Abbes. Braunschweig 1910, Vieweg u. Sohn. *M* 5.—; geb. *M* 6.—.
42. **AUERBACH, F.**, Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre. („Aus Natur u. Geisteswelt“, 40. Bändchen.) 3. Aufl. Leipzig 1910, B. G. Teubner. *M* 1.—; geb. *M* 1.25.
43. **BAKHUIS ROZEBOOM, H. W.**, Die heterogenen Gleichgewichte vom Standpunkte der Phasenlehre. 3. Heft. Die ternären Gleichgewichte. 1. Teil. Systeme mit nur einer Flüssigkeit ohne Mischkristalle u. ohne Dampf, v. F. A. H. Schreinemakers. Deutsch v. J. J. B. Deuß. Braunschweig 1911, Vieweg u. Sohn. *M* 10.—.
44. **BUGGE, GÜNTHER**, Strahlungserscheinungen, Ionen, Elektronen u. Radioaktivität. („Bücher der Naturwissenschaft“, 4. Bd.) Leipzig 1910, Reclam jun. Geb. *M* —.80.
45. **BYK, ALFRED**, Einführung in die kinetische Theorie der Gase. I. Die idealen Gase. (Mathem.-physikal. Schriften f. Ingenieure u. Studierende, 10. 1.) Leipzig u. Berlin 1910, B. G. Teubner. *M* 2.80; geb. in Leinw. *M* 3.20.
46. **CHWOLSON, O. D.**, Traité de Physique, ouvrage traduit sur les éditions russe et allemande par E. Davaux. Édition revue et considérablement augmentée par l'Auteur, suivie de Notes sur la Physique théorique par E. Cosserat et F. Cosserat. Tome troisième, second fascicule. Thermodynamique générale. Fusion. Vaporisation. Paris 1910, Hermann et fils. Fr. 11.—.
47. **COHN, EMIL**, Physikalisches über Raum u. Zeit. Nach einem im naturwissenschaftl.-medizin. Verein zu Straßburg am 11. Februar 1910 gehaltenen Vortrag. (Sonderabdruck aus dem XXIII. Jahrg. des illustr. naturw. Monatsschrift „Himmel u. Erde“.) Leipzig u. Berlin 1911, B. G. Teubner. *M* —.60.
48. **CURIE, Mme. P.**, Die Radioaktivität. Deutsche Ausg. (In etwa 8 Lfgn.) 1 Lfg. Leipzig 1911, Akad. Verl. d. Ges. *M* 3.—.

49. CURIE, Madame P., *Traité de Radioactivité*. Tomes I et II. Paris 1910, Gauthier-Villars. Fr. 30.—
50. DONLE, WILHELM, *Lehrbuch der Experimentalphysik f. den Unterricht an höheren Lehranstalten*. 5. u. 6. verb. Aufl. Stuttgart 1911, Grub. Geb. in Leinw. *M* 3.60.
51. *Fortschritte, die, der Physik im J. 1909. Dargestellt v. der deutschen physikal. Ges.* 65. Jahrg. 2. Abtl. Elektrizität u. Magnetismus. Optik des gesamten Spektrums, Wärme. Braunschweig 1910, Vieweg & Sohn. *M* 34.—.
52. ——. 3. Abtlg. Kosmische Physik. Ebenda. *M* 32.—.
53. FRIEDEL, G., *Leçons de cristallographie. Cours de l'École nationale des Mines de Saint-Etienne*. Paris 1911, Hermann et fils. Fr. 10.—.
54. GEIGEL, ROBERT, *Licht und Farbe*. („Bücher der Naturwissenschaft“, 5. Band. Reclams Universal-Bibliothek, Nr. 5188—5190.) Leipzig 1910, Reclam jun. *M* —.60; geb. in Leinw. *M* 1.—.
55. GLEICHEN, ALEX., *Die Theorie der modernen optischen Instrumente. Ein Hilfs- u. Übungsbuch für Physiker u. Konstrukteure opt. Werkstätten, sowie für Ingenieure im Dienste des Heeres u. der Marine*. Stuttgart 1911, Enke. *M* 10.80; geb. in Leinw. *M* 12.—.
56. GRAETZ, L., *Das Licht u. die Farben. Sechs Vorlesungen, gehalten im Volkshochschulverein München*. („Aus Natur und Geisteswelt“, 17. Bändchen.) 3. Aufl. Leipzig 1910, B. G. Teubner. Geb. in Leinw. *M* 1.25.
57. GRIMSEHL, ERNST, *Didaktik u. Methodik der Physik. (Handbuch der Erziehungs- u. Unterrichtslehre f. höhere Schulen, hrsg. v. A. Baumeister. 4. Bd., 1. Abtlg., 2. Hälfte.)* München 1911, Beck. *M* 3.—; geb. *M* 4.—.
58. GRIMSEHL, E., *Lehrbuch der Physik f. Realschulen*. Leipzig u. Berlin 1911, B. G. Teubner. Geb. in Leinw. *M* 2.60.
59. GRUNER, PAUL, *Kurzes Lehrbuch der Radioaktivität*. 2., vollständig umgearb. Aufl. v. „Die radioaktiven Substanzen u. die Theorie des Atomzerfalles“. Bern 1911, Francke. *M* 2.50.
60. HÖRNER, KARL, *Über den Kraftlinienverlauf im Luftraum u. in den Zähnen v. Dynamoankern*. Berlin 1910, Springer. *M* 1.20.
61. IGNATOWSKY, W. v., *Die Vektoranalysis u. ihre Anwendung in der theoretischen Physik. Teil II, Anwendung der Vektoranalysis in der theoretischen Physik. (Mathem.-physikal. Schriften f. Ingenieure u. Studierende, 6, 2.)* Leipzig u. Berlin 1910, B. G. Teubner. *M* 2.60; geb. in Leinw. *M* 3.—.
62. JOCHMANN, E., u. HERMES, O., *Grundriß der Experimentalphysik u. Elemente der Chemie sowie der Astronomie u. mathematischen Geographie. Zum Gebrauch beim Unterricht auf höheren Lehranstalten u. zum Selbststudium*. 17., vollständig neu bearbeitete Aufl. v. P. Spies. Berlin 1910, Winkelmann u. Söhne. Geb. *M* 5.50.
63. JÜPTNER, H. v., *Das chemische Gleichgewicht auf Grund mechanischer Vorstellungen*. Leipzig 1910, B. G. Teubner. *M* 11.—; geb. in Leinw. *M* 12.50.
64. KALÄHNE, ALFRED, *Grundzüge der mathematisch-physikalischen Akustik. I. Teil. (Mathem.-physikal. Schriften für Ingenieure u. Studierende, 11, 1.)* Leipzig u. Berlin 1910, B. G. Teubner.
65. KAYSER, H., *Handbuch der Spektroskopie*. 5. Bd. Leipzig 1910, Hirzel. *M* 48.—; geb. *M* 52.—.
66. KELLER, H., *Werdegang der modernen Physik. („Aus Natur u. Geisteswelt“, 343. Bändchen.)* Leipzig 1911, B. G. Teubner. *M* 1.—; geb. *M* 1.25.
67. KLEIBER, JOHANN, u. SIEPERT, PAUL, *Experimental-Physik und Chemie für die Oberstufe der höheren Mädchenbildungsanstalten (Gymnasien, Realgymnasien, Oberrealschulen u. Lyzeen)*. Berlin u. München 1910, Oldenbourg. *M* 4.25.
68. KNESER, ADOLF, *Die Integralgleichungen u. ihre Anwendungen in der mathematischen Physik. Vorlesungen, gehalten an der Universität zu Breslau*. Braunschweig 1911, Vieweg u. Sohn. *M* 6.—; geb. *M* 7.—.

69. KNOPS, KARL, Lehrbuch der Physik und Chemie f. die Lyzeen. Nach Koppe-Husmanns Physik bearbeitet. Essen 1910, Bädeker. Geb. *M* 6.—.
70. KRAUS, KONRAD, Experimentierkunde. Anleitung zu physikalischen und chemischen Versuchen in Volks- u. Bürgerschulen u. Fortbildungsschulen. 2., verm. Aufl. Wien 1910, Pichlers Witwe u. Sohn. *M* 4.65; geb. *M* 5.—.
71. LOMMEL, E. v., Lehrbuch der Experimentalphysik. 17.—19. Neubearb. Aufl. hrsg. v. Walt. König. Leipzig 1911, Barth. *M* 6.60; geb. in Leinw. *M* 7.50.
72. MARX, ERICH, Zweite Durchführung der Geschwindigkeitsmessung der Röntgenstrahlen. Experimentaluntersuchung. (Abh. kgl. sächs. Ges. d. Wiss., mathem.-phys. Kl., XXXII Bd., Nr. II.) Leipzig 1910, B. G. Teubner. *M* 4.—.
73. MICHELSON, A. A., Lichtwellen u. ihre Anwendungen. Übers. u. durch Zusätze erweitert v. Max Iklé. Leipzig 1911, Barth. *M* 7.60.
74. MINKOWSKI, HERMANN, Zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik. Mit einem Einführungswort von Otto Blumenthal. („Fortschritte der mathem. Wissenschaften in Monographien, hrsg. v. Otto Blumenthal, Heft 1.) Leipzig u. Berlin 1910, B. G. Teubner *M* 2.40.
75. NÁDAI, ÁRPÁD, Untersuchungen der Festigkeitslehre m. Hilfe des thermoelektrischen Temperaturmeßverfahrens. Berlin 1911, Ebering. *M* 2.50.
76. NATH, MAX, und KLEIBER, JOH., Physik f. die Oberstufe. Zum Gebrauch f. die Oberklassen höherer Lehranstalten. 4. Aufl. Mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse norddeutscher Lehranstalten. Berlin u. München 1910, Oldenbourg.
77. NOODT, GUSTAV, Leitfaden der Naturlehre für Lyzeen (höhere Lehrerinnenseminare). Nach den Ausführungsbestimmungen zu dem Erlasse vom 18. August 1908 über die Neuordnung des höh. Mädchenschulwesens in Preußen unter Mitwirkung v. Marie Gernct, Paul Schweden, Eduard Wrampelmeyer u. Julius Ziegler hrsg. I. Bd. Leipzig und Berlin 1911, B. G. Teubner. Geb. in Leinw. *M* 3.80.
78. —, Dasselbe. II. Bd. Ebenda. Geb. *M* 3.80.
79. PLANCK, MAX, Vorlesungen über Thermodynamik. 3., erw. Aufl. Leipzig 1911, Veit & Co. Geb. in Leinw. *M* 7.50.
80. REBENSTORFF, H., Physikalisches Experimentierbuch. I. Teil. Anleitung zum selbständigen Experimentieren f. jüngere u. mittlere Schüler. (Bastian Schmidts naturwissenschaftl. Schülerbibliothek, 1.) Leipzig u. Berlin 1911, B. G. Teubner.
81. ROHR, MORITZ VON, Die optischen Instrumente. („Aus Natur u. Geisteswelt“, 88. Bändchen.) 2., verm. u. verb. Aufl. Leipzig 1911, B. G. Teubner. *M* 1.—; geb. *M* 1.25.
82. RUDZKI, M. P., Physik der Erde. Leipzig 1911, Tauchitz. *M* 14.—.
83. SLABY, A., Entdeckungsfahrten in den elektrischen Ozean. Gemeinverständliche Vorträge. 4. Aufl. Wohlfeile Ausg. Berlin 1911, Simion Nachf. Geb. in Leinw. *M* 6.50.
84. SOUTHALL, JAMES P. C., The principles and methods of geometrical Optics, especially as applied to the theory of optical instruments. New York 1910, The Macmillan Company. § 5.50.
85. STARK, J., Prinzipien der Atombdynamik. 1. Tl. Die elektr. Quanten. Leipzig 1910, Hirzel. *M* 3.20; geb. *M* 4.—.
86. STARKE, HERMANN, Experimentelle Elektrizitätslehre, verbunden mit einer Einführung in die Maxwell'sche u. die Elektronentheorie der Elektrizität u. des Lichts. Zweite, auf Grund der Fortschritte der Wissenschaft umgearb. Aufl. Leipzig u. Berlin 1910, B. G. Teubner. Geb. in Leinw. *M* 12.—.
87. TRABERT, W., Lehrbuch der kosmischen Physik. Leipzig u. Berlin 1911, B. G. Teubner. *M* 20.—; geb. *M* 22.—.
88. TERPAIN, ALBERT, Notions fondamentales sur la télégraphie, envisagée dans son développement, son état actuel et ses derniers progrès. Paris 1910, Gauthier-Villars. Fr. 5.—.

89. TURFAIN, ALBERT, Téléphonie. Du téléphone Bell aux multiples automatiques. Essai sur les origines et le développement du téléphone. (Bibliothèque de l'Élève-Ingenieur.) Paris 1910, Gauthier-Villars. Fr. 5.—.
90. VOIGT, WOLDEMAR, Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluß der Kristalloptik). (Teubners Sammlung Band XXXIV.) Leipzig u. Berlin 1910, B. G. Teubner. *M* 30.—; geb. in Leinw. *M* 32.—.
91. WAALS, J. D. van der, Die Zustandsgleichung. Rede, geh. bei Empfang des Nobelpreises f. Physik. Leipzig 1911, Akadem. Verlagsges. *M* 1.20.
92. WALLENTIN, JGNAZ G., Grundzüge der Naturlehre f. die unteren Klassen der Mittelschulen. Ausgabe C. Für Realgymnasien. Wien 1909, Pichlers Witwe & Sohn. Geb. K. 3.20.
93. WEBER, ROBERT, Beispiele u. Übungen aus Elektrizität u. Magnetismus. Nach dem Manuskript der fünften französischen Auflage. Leipzig u. Berlin 1910, B. G. Teubner.
94. WERTH, HUGO, Das Licht. Ausführliche und allgemein verständliche Darstellung. Wien u. Leipzig 1910, Hartleben. *M* 8.—; geb. *M* 9.50.
95. WHITTAKER, E. T., A history of the theories of Aether and Electricity from the age of Descartes to the close of the 19. century. London 1911, Longmans. 12 s. 6 d. S. auch 31, 105, 117, 120, 121, 122, 123, 124, 126, 127, 133, 135, 137, 138.

#### Statistik, Versicherungs-Mathematik, Wahrscheinlichkeitsrechnung.

96. CZUBER, EMANUEL, Wahrscheinlichkeitsrechnung u. ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik u. Lebensversicherung. II. Bd. Mathematische Statistik. Mathematische Grundlagen der Lebensversicherung. 2., sorgfältig durchgesehene u. erweiterte Aufl. (Teubners Sammlung Bd. IX, 2.) Leipzig u. Berlin 1910, B. G. Teubner. Geb. in Leinw. *M* 14.—.
97. HACK, FRANZ, Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Sammlung Götschen Nr. 508.) Leipzig 1911, Götschen. *M* —.80.
98. RICHARD, P. J., Étude sur l'assurance complémentaire de l'assurance sur la vie. Avec de nombreux développements sur les assurances contre la maladie et l'invalidité. Paris 1911, Hermann & fils. Frs. 3.50.  
S. auch 108, 128

#### Tafeln, Rechenapparate.

99. Anuaire pour l'an 1911, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris 1910, Gauthier-Villars. Fr. 1.50.
100. BARLOWS Tables of squares, cubes, square roots, cube roots, reciprocals of all integer numbers up to 10.000. London 1911, Spon. 4 s.
101. BAUSCHINGER, J., und PETERS, J., Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit acht Dezimalstellen, enthaltend die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 200 000 und die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen für jede Sexagesimalsekunde des Quadranten. Erster Band. Tafel der achtstelligen Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 200 000. Stereotypausgabe. Leipzig 1910, Engelmann. *M* 17.—; geb. *M* 18.50.
102. BEMPORAD, A., Tavole logaritmico-trigonometriche a cinque decimali, nuovamente disposte. Catania 1910, Gianotta. L. —.80.
103. DOUGLASS Two-color logs, anti-logs and mathematical tables. London 1911, Simpkin. 4 d.
104. ERLANG, A. K., Fircifrede Logaritmetavler, og andre regnetavler til brug ved undervisning og i praksis. Udgave B. København 1910, Gads Forlag.
105. LUDWIG, K., Rechnerische u. logarithmische Tafel I. zur Reduktion des oberen bzw. unteren Heizwertes von Gasen bei  $t^{\circ}\text{C}$  u.  $b$  mm Barometerstand auf  $0^{\circ}$  bzw.  $15^{\circ}$  u. 760 mm, II. zur Reduktion beliebiger Gasvolumina bei  $t^{\circ}\text{C}$  u.  $b$  mm Barometerstand auf  $0^{\circ}$  bzw.  $15^{\circ}$  u. 760 mm. München 1911, Oldenbourg. *M* 1.20.

106. PEDDLE, J. B., The construction of graphical charts. London 1910, Hill. 6 s. 6 d.
107. SCHRUTKA, EDLER VON RECHTENSTAMM, LOTHAR, Theorie u. Praxis des logarithmischen Rechenschiebers. Leipzig u. Wien 1911, Deuticke. *M* 3.—.
108. WANACH, B., Tafel der Werte  $\frac{a \cdot b}{a + b}$  für alle zweistelligen Werte von  $a$  und  $b$  zur Berechnung der Gewichte v. Summen, Differenzen, Mittelwerten usw. (Veröffentlichung des königl. preuß. geodätischen Institutes, Neue Folge Nr. 46.) Potsdam 1910 (Leipzig, B. G. Teubner). *M* 1.20.
109. WEISBACH, Jul., Tafel der vielfachen Sinus u. Cosinus, sowie der vielfachen Sinus versus  $\varphi$ . kleinen Winkeln, nebst Tafeln der einfachen Tangenten, zum Gebrauch f. prakt. Geometer u. Mechaniker überhaupt u. f. Markscheider besonders. 8. Ster.-Ausg. Berlin 1911, Weidmann. *M* 1.—.
110. ZIMMERMANN, H., Rechentafel nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerte. Sechste Auflage. Ausgabe A. Berlin 1910, Ernst & Sohn. Geb. *M* 5.—.
111. —, Dasselbe. Ausgabe B mit Anhang, enthaltend Quadrattafel. Ebenda. Geb. *M* 6.—.

S. auch 128, 129.

#### Verschiedenes.

112. Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die mathematische Unterrichtskommission, hrsg. v. F. Klein. Leipzig u. Berlin 1910, B. G. Teubner.  
Band II, Heft 1: Heinrich Wieleitner, Der mathem. Unterricht an den höheren Lehranstalten, sowie Ausbildung u. Fortbildung der Lehrkräfte im Königreich Bayern. Mit einem Einführungswort v. P. Treutlein. *M* 2.40.
113. — — Band II, Heft 3: Erwin Gock, Der mathem. Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff u. Lehrverfahren, und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Königreich Württemberg. *M* 2.60.
114. — — Band III, Heft 2: H. E. Timerding, Die Mathematik in den physikal. Lehrbüchern. *M* 2.80.
115. — — Band IV, Heft I: Der mathem. Unterricht an den deutschen mittleren Fachschulen der Maschinenindustrie. *M* 2.60.
116. ABBENS, W., Mathematische Spiele. („Aus Natur u. Geisteswelt“, 170. Bändchen.) Leipzig 1911, B. G. Teubner. *M* 1.—; geb. *M* 1.25.
117. BURALI-FORTI, C., et MARCOLONGO, R., Éléments de calcul vectoriel, avec de nombreuses applications à la géométrie, à la mécanique et à la physique mathématique. Traduit de l'italien par S. Lattès. Paris 1910, Hermann et fils. Fr. 8.—.
118. CHRISTOFFEL, E. B., Gesammelte mathematische Abhandlungen. Unter Mitwirkung v. A. Krazer u. G. Faber hrsg. v. L. Maurer. I. Bd. Mit einem Bild E. B. Christoffels in Lichtdruck. Leipzig u. Berlin 1910, B. G. Teubner. *M* 18.—.  
— Dasselbe, 2 Bd.. Ebenda. *M* 16.—.
119. EMDEN, R., Grundlagen der Ballonführung. Leipzig u. Berlin 1911, B. G. Teubner. Geb. in Leinw. *M* 2.80.
120. FALKENBERG, GUST. v., Elektrizität u. Luftschiffahrt in ihren wechselseitigen Beziehungen. Rostock 1910, Volkmann Nachf. *M* 1.80.
121. GRASSMANN, HERMANN, Gesammelte mathematische und physikalische Werke. Dritten Bandes erster Teil: Theorie der Ebbe und Flut, Prüfungsarbeit 1840, und Abhandlungen zur mathematischen Physik, aus dem Nachlaß hrsg. v. Justus Graßmann u. Friedrich Engel. Leipzig 1911, B. G. Teubner.
122. GÜNTHER, SIEGMUND, Vergleichende Mond- und Erdkunde. („Die Wissenschaft“, Heft 37.) Braunschweig 1911, Vieweg & Sohn. *M* 5.—; geb. *M* 5.80.
123. JOHNSON, V. E., The theory and practise of Model Aeroplaning. London 1911, Spon. 3 s. 6 d.

124. KEFERSTIN, HANS, Große Physiker. Bilder aus der Geschichte der Astronomie und Physik. Für reife Schüler. (Bastian Schmidts naturwissensch. Schülerbibliothek, 4.) Leipzig u. Berlin 1911, B. G. Teubner. Geb. in Leinw. *M* 3.—.
125. LORENZ, HANS, Einführung in die Elemente der höheren Mathematik u. Mechanik. Für den Schulgebrauch u. zum Selbstunterricht. Berlin u. München 1910, Oldenbourg. *M* 2.40.
126. MINKOWSKI, HERMANN, Gesammelte Abhandlungen. Unter Mitwirkung v. Andreas Speiser u. Hermann Weyl hrsg. v. David Hilbert. II. Band. Mit einem Bildnis Hermann Minkowskis. Leipzig u. Berlin 1911, B. G. Teubner. *M* 16.—.
127. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, insbesondere aus den Laboratorien der technischen Hochschulen, hrsg. vom Verein deutscher Ingenieure. Heft 81. Nusselt, Wilh.: Der Wärmeübergang in Rohrleitungen. — Herbert, H.: Über den Zusammenhang der Biegeelastizität des Gußeisens mit seiner Zug- u. Druckelastizität. Berlin 1910, Springer. *M* 1.—.
128. NEUENDORFF, R., Praktische Mathematik. I. Teil. Graphisches u. numerisches Rechnen. („Aus Natur u. Geisteswelt“, 341. Bändchen.) Leipzig 1911, B. G. Teubner. *M* 1.—; geb. *M* 1.25.
129. NIMFÜHR, R., Die Luftschiffahrt, ihre wissenschaftlichen Grundlagen u. technische Entwicklung. 2. Aufl. („Aus Natur u. Geisteswelt“, 300. Band.) Leipzig, B. G. Teubner. *M* 1.—; geb. in Leinw. *M* 1.25.
130. OCAGNE, M. d', Leçons sur la topometrie et la cubature des terrasses. Nouveau tirage comprenant des notions sommaires de nomographie, des notions élémentaires sur la probabilité des erreurs et une instruction sur l'usage de la règle à calcul. Paris 1910, Gauthier-Villars. Fr. 8.50.
131. POINCARÉ, HENRI, Der Wert der Wissenschaft. Mit Genehmigung des Verfassers ins Deutsche übertragen von E. Weber. Mit Anmerkungen u. Zusätzen von H. Weber und einem Bildnis des Verfassers. 2. Aufl., mit einem Vorwort des Verfassers. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. Geb. in Leinw. *M* 3.60.
132. RAYMOND, W. G., Railroad field geometry. New York, Wiley. § 2.—.
133. RIGHI, ANOSTO, Kometen u. Elektronen. Deutsch v. Max Iklé. Leipzig 1911, Akadem. Verlagsges. *M* 2.40; geb. *M* 3.—.
134. SCHEEL, KAHL, Grundlagen der praktischen Metronomie. („Die Wissenschaft“, Heft 36.) Braunschweig 1911, Vieweg & Sohn.
135. SOMMERFELDT, E., Die Kristallgruppen nebst ihren Beziehungen zu den Raumgittern. Dresden 1911, Steinkopf. *M* 3.—.
136. VAHLEN THEODOR, Konstruktionen u. Approximationen in systematischer Darstellung. Eine Ergänzung der niederen, eine Vorstufe zur höheren Geometrie. (Teubners Sammlung, Bd. XXXIII.) Leipzig u. Berlin 1911, B. G. Teubner. *M* 11.—; geb. in Leinw. *M* 12.—.
137. WEBER, HEINRICH, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Nach Riemanns Vorlesungen in 5. Aufl. bearb. I. Bd. Braunschweig, Vieweg & Sohn. *M* 12.—; geb. in Halbfrz. *M* 13.60.
138. WEBER, HEINRICH, u. WELLSTEIN, JOSEF, Encyclopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch f. Lehrer u. Studierende. III. Bd. Angewandte Elementar-Mathematik. Erster Teil. Mathematische Physik, bearb. v. Rudolf H. Weber. Mit einem Buch über Maxima u. Minima v. H. Weber u. J. Wellstein. 2. Aufl. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. Geb. in Leinw. *M* 12.—.

## Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

- ABBE, E., Bildentstehung im Mikroskop, s. N. B. („Neue Bücher“) Nr. 41.  
 ABHANDLUNGEN über den mathematischen Unterricht in Deutschland, s. N. B. 112—116.  
 AHRENS, W., Mathematische Spiele, s. N. B. 116.  
 ANNUAIRE pour l'an 1911, s. N. B. 99.  
 APPELL-DAUTHEVILLE, Mécanique, s. N. B. 21.  
 AUERBACH, F., Grundbegriffe der modernen Naturlehre, s. N. B. 42.  
 BAKER, RICHARD PHILIPP, The problem of the angle-bisectors. Diss. Univ. Chicago 1911, The University of Chicago Press. § 1.10.  
 BAKHUIS ROZEBOOM, H. W., Die heterogenen Gleichgewichte vom Standpunkte der Phasenlehre. III, 1, s. N. B. 43.  
 BALTIN, R. u. MAIWALD, W., Kurzgefaßtes Lehrbuch der Mathematik f. Seminare u. Präparandenanstalten. Unter Zugrundelegung des Lehrbuchs v. Prof. Hch. Müller: Die Mathematik auf den Gymnasien u. Realschulen, Teil I, B nach den Lehrplänen v. 1901 f. Seminare usw. bearb. 3., verb. Anfl. Leipzig u. Berlin 1910, Teubner. *M* 2.60.  
 BARCHANEK-LUDWIG, Darstellende Geometrie, s. N. B. 12.  
 BAUSCHINGER, J., und PETERS, J., Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit acht Dezimalstellen, s. N. B. 101.  
 BEKE, E., und MIKOLA, S., Abhandlungen über die Reform des mathematischen Unterrichts in Ungarn. Im Auftrage der mathematischen Reformkommission des Landesvereins der Mittelschulprofessoren nach dem ungarischen Original unter Mitwirkung der Herren M. Balog und J. Rados hrsg. Leipzig und Berlin 1911, Teubner.  
 BENDT, FRANZ, Grundzüge der Differential- u. Integralrechnung. 4. Aufl. Leipzig 1910, Weber. Geb. in Leinw. *M* 3.—.  
 BERICHTS und Mitteilungen, veranlaßt durch die internationale mathematische Unterrichtskommission. V. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. *M* —.60.  
 BERNOULLI, JAK., u. EULER, L., Gleichgewicht u. Schwingungen der ebenen elastischen Kurven, s. N. B. 22.  
 BIANCHI, LUIGI, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Autorisierte Übersetzung v. Max Lukat. Zweite, vermehrte u. verbesserte Auflage. Leipzig u. Berlin 1910, Teubner. *M* 20.—; geb. in Leinw. *M* 22.—.  
 BRICK, H., Drähte u. Kabel, ihre Anfertigung u. Anwendung in der Elektrotechnik. („Aus Natur u. Geisteswelt“, 285. Bändchen.) Leipzig 1910, Teubner. *M* 1.—; geb. *M* 1.25.  
 BRYN MAWR College Monographs. Reprint series, vol. VIII. Contributions from the mathematical and physikal departments. Bryn Mawr 1909.  
 BUGGE, G., Strahlungserscheinungen, s. N. B. 44.  
 BURALI-FORTI, C., et MARCOLONGO, R., Éléments de calcul vectoriel, s. N. B. 117.  
 BYK, A., Einführung in die kinetische Theorie der Gase, s. N. B. 45.  
 CHARLIER, C. V. L., und ZINNER, E., Entwicklung des Potentials im Rotationsproblem. (Aus: Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Band 6, Nr. 17.) Uppsala & Stockholm, Almqvist & Wicksell.  
 CHRISTMANN, A., und BAER, H., Grundzüge der Kinematik. Berlin 1910, Springer. *M* 4.80; geb. *M* 5.80.  
 CHRISTOFFEL, E. B., Gesammelte mathematische Abhandlungen, s. N. B. 118.  
 CHWOLSON, O. D., Traité de physique, s. N. B. 46.  
 COHEN-KYSPEL, ADOLF, Versuch einer mechanischen Analyse der Veränderungen vitaler Systeme. Leipzig 1910, Thieme. *M* 1.80.

- COHN, E., Physikalisches über Raum u. Zeit, s. N. B. 47.
- CRAMER, HANS, Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff u. Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Großherzogtum Baden. (Abh. üb. den mathem. Unterricht in Deutschland, Bd. II Heft 4.) Leipzig u. Berlin 1910, Teubner. *M* 1.60.
- CRANTZ, PAUL, Planimetrie zum Selbstunterricht. (Aus Natur u. Geisteswelt, 340. Bändchen.) Leipzig 1911, Teubner. *M* 1.—; geb. *M* 1.25.
- CRANZ, C., Lehrbuch der Ballistik, s. N. B. 25 u. 26.
- CURIE, MADAME P., Radioactivité, s. N. B. 49.
- CZUBER, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung, s. N. B. 96.
- DARBOUX, GASTON, Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnés curvilignes. 2<sup>e</sup> éd. complétée. Paris 1910, Gauthier-Villars. Fr. 18.—.
- DARWIN, SIR GEORGE HOWARD, Scientific papers. Vol. III. Figures of equilibrium of rotating liquid and geophysical investigations. Cambridge 1910, University Press.
- DECOURDEMANCHE, J.-A., Traité pratique des poids et mesures des peuples anciens et des Arabes. Paris 1909, Gauthiers-Villars. Fr. 5.—.
- DONADT, A., Repetitorium der Schulmathematik für Schüler höherer Lehranstalten. I. Teil. Arithmetik. Leipzig 1911. Brandstetter. Geb. *M* 3.—.
- DONLE, W., Experimentalphysik, s. N. B. 50.
- DUMONT, ÉMILE, Grandeurs et Nombres. Arithmétique générale. Définitions et propriétés fondamentales des grandeurs géométriques et de leurs mesures: Nombres naturels, qualifiés, complexes, ternions et quaternions. Paris 1911, Hermann & fils. Fr. 10.—.
- EMDEN, R., Ballonführung, s. N. B. 119.
- ENGELHARDT, PHILIPP, Untersuchungen über die im Schlußwort des Lieschen Werkes „Geometrie der Berührungstransformationen“ angedeuteten Probleme. Leipzig u. Berlin 1910, Teubner.
- ERLANG, A. K., Fircifrede Logaritmetavler, s. N. B. 104.
- FÄRBER, CARL, Arithmetik. (Grundlehren der Mathematik f. Studierende und Lehrer. I. Th. Die Grundlehren der Arithmetik u. Algebra, bearb. v. E. Netto u. C. Färber. Erster Band.) Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. *M* 9.—.
- FESTSCHRIFT zur Feier des 100. Geburtstages EDUARD KUMMERS. Mit Briefen an seine Mutter u. an Leopold Kronecker. Hrsg. vom Vorstande der Berliner mathematischen Gesellschaft. Mit einem Bildnis E. Kummers. (Abh. zur Geschichte der mathem. Wissenschaften m. Einschluß ihrer Anwendungen. Heft XXIX.) Leipzig u. Berlin 1910, Teubner.
- FINGER, JOS., Elemente der reinen Mechanik, s. N. B. 28.
- FISCHER, PAUL, B., Koordinatensysteme. (Sammlung Göschen Nr. 507.) Leipzig 1911, Göschen. Geb. in Leinw. *M* —.80.
- FRAGEN der Elementargeometrie. Aufsätze v. U. Amaldi, G. Baroni, R. Bonola, B. Calò, G. Castelnuovo, A. Conti, E. Daniele, F. Enriques, A. Giacomini, A. Guarducci, G. Vailati, G. Vitali, gesammelt u. zusammengestellt v. Federigo Enriques. I. Teil. Die Grundlagen der Geometrie. Deutsche Ausg. v. Hermann Thieme. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 10.—.
- FREUND, ALFRED, Technische Elementarmechanik fester Körper für gewerbliche Lehranstalten u. zum Selbststudium. 2., erw. Aufl. Leipzig 1910, Brandstetter. Geb. *M* 1.—.
- FRICKE, ROBERT, u. KLEIN, FELIX, Vorlesungen üb. die Theorie der automorphen Funktionen. II. Band. Die funktionentheoretischen Ausführungen u. die Anwendungen. 2. Lfg. Kontinuitätsbetrachtungen im Gebiete der Hauptkreisgruppen. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. *M* 7.—.
- FRIEDEL, G., Leçons de cristallographie, s. N. B. 53.

- FUETER, RUDOLF, Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation und ihr Einfluß auf die Entwicklung der Zahlentheorie. Bericht, zur Feier des 100. Geburtstags Eduard Kummers der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erstattet. Sonderabdruck aus dem 20. Bande des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner.
- GAJDECZKA, JOSEF, Übungsbuch der Arithmetik u. Algebra f. die Mittel- u. Oberstufe der Gymnasien, Realgymnasien u. Realschulen. 8. Aufl. Wien 1910, Tempsky. Geb. Kr. 3.20.
- GAUSS, C. Fr., Höhere Geodäsie, s. N. B. 5.
- GEIGEL, R., Licht u. Farbe, s. N. B. 54.
- GEISTBECK, MICHAEL, Leitfaden der mathematischen u. physikalischen Geographie f. höhere Lehranstalten. 32., durchgesehene u. 33. Aufl. Freiburg i. B. 1910, Herder. *M.* 1.80; geb. *M.* 2.20.
- GRAETZ, L., Das Licht u. die Farben, s. N. B. 56.
- GRASSMANN, HERMANN, Gesammelte mathematische und physikalische Werke, III 1, s. N. B. 121.
- GRELLING, KURT, Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Göttingen 1910, Vandenhoeck & Ruprecht. *M.* 1.40.
- GRIMSEHL, E., Didaktik u. Methodik der Physik, s. N. B. 57.
- , Physik, s. N. B. 58.
- GRÜNER, P., Radioaktivität, s. N. B. 59.
- GÜNTHER, S., Mond- und Erdkunde, s. N. B. 122.
- HACK, FR., Wahrscheinlichkeitsrechnung, s. N. B. 97.
- HARDICKE, HERMANN,  $x^2 + y^2 = z^2$  und die räumliche Darstellung der Potenzen. 1910. Schladern (Sieg), Selbstverlag. *M.* —.60.
- HAMMER, E., Praktische Geometrie, s. N. B. 6.
- HÄRPFER, A., Die Probleme von Hansen u. Snellius. (Abh. zur Gesch. der mathem. Wiss. Heft XXVI. 1.) Leipzig u. Berlin 1910, Teubner.
- HARDY, G. H., Orders of Infinity, the "Infinitärcalcul" of Paul du Bois-Reymond. (Cambridge Tracts in Mathematics, and mathematical Physics, Nr. 12.) Cambridge 1910, University Press. 2 s. 6 d.
- HARTMANN, OTTO, Astronomisch- Erdkunde. 3., verb. Aufl. Stuttgart u. Berlin 1909, Grub. 12 s. 6 d.
- HEATH, SIR THOMAS L., Diophantus of Alexandria. A study in the history of Greek Algebra. 2<sup>d</sup> ed. With a supplement containing an account of Fermat's theorems and problems connected with Diophantine Analysis and some solutions of Diophantine problems by Euler. Cambridge 1910, University Press. 12 s. 6 d.
- HELM, GEORG, Die Grundlehren der höheren Mathematik. Zum Gebrauch bei Anwendungen und Wiederholungen zusammengestellt. Leipzig 1910, Akad. Verlagsgesellschaft. *M.* 13.40; geb. *M.* 14.20.
- HENNEBERG, L., Die graphische Statik der starren Systeme, s. N. B. 29.
- HEUSCHMANN, J. CHR., Aus Laienmund ein Wort zum sog. großen Fermatschen Satz. Erlangen 1911, Junge. *M.* 2.—.
- HENSEL, KURT, Ernst Eduard Kummer u. der große Fermatsche Satz. Akademische Festrede zu Kaisers Geburtstag. (Marburger akademische Reden 1910 Nr. 23.) Marburg, Elwert. *M.* —.50.
- HERTING, GOTTLIEB, Von Strecke, Quadrat und Würfel zum bestimmten Integral. Zum Gebrauche in den oberen Klassen unserer Mittelschulen u. beim Selbstunterrichte. Leipzig u. Berlin 1910, Teubner. Geb. in Leinw. *M.* 2.80.
- HILBERT, D., Théorie des corps de nombres algébriques. Ouvrage traduit de l'allemand par A. Lévy. Première partie. Le nombre algébrique et le corps algébrique. Paris 1911, Hermann et fils. Fr. 3.—.

- HOČEVAR, FRANZ, Lehr- u. Übungsbuch der Geometrie f. Gymnasien u. Realgymnasien. Mittelstufe (IV. u. V. Klasse). 7. Aufl. Wien 1911, Tempsky.  
K. 2.60.
- , Lehr- u. Übungsbuch der Arithmetik f. Gymnasien u. Realgymnasien. Mittelstufe (IV. u. V. Klasse). Wien 1910, Tempsky. Geb. K. 2.50.
- , Lehr- u. Übungsbuch der Arithmetik f. Realschulen. Mittelstufe (IV. u. V. Klasse). 2. Aufl. Wien 1911, Tempsky. Geb. K. 3.30.
- HÖHENNER, H., Geodäsie, s. N. B. 7.
- HUBBS, JOHANN, Einführung in ein eigenartiges, leichtes u. rasches Kopfrechnen. Aus dem Originalwerk: „Kopfrechnen mit u. ohne Hand-Rechenmaschine“. 3., erw. Aufl. Kronstadt-Brassó 1910. (Leipzig, Hedeler.) K. 1.20.
- In Memoria di Fernando Helguero, Roma 1911, Bertero e C.
- IGNATOWSKY, W. v., Vektoranalysis, s. N. B. 61.
- IRRING, A. v., Die Mechanik der festen, flüssigen u. gasförmigen Körper, s. N. B. 32.
- JOCHMANN, E., u. HERMES, O., Grundriß der Experimentalphysik. 17. Aufl. bearb. v. P. Spies. s. N. B. 62.
- KADNER, PAUL GEORG, Beweis des Fermatschen Satzes. Dresden 1910, Grünberg.  
*M.* —.40.
- KALÄHNE, A., Grundzüge der mathemat.-physikal. Akustik, s. N. B. 64.
- KEFERSTEIN, H., Große Physiker, s. N. B. 124.
- KELLER, H., Werdegang der modernen Physik, s. N. B. 66.
- KIRNER, ÁRPÁD, Das vernunftgemäße Studium der reinen u. angewandten Mathematik auf mnemologischer Grundlage. Mit besonderer Berücksichtigung der Infinitesimalrechnung. München 1910, Pöhlmann.
- KLEBER-SIEPERT, Experimental-Physik u. Chemie, s. N. B. 67.
- KLEIN-SOMMERFELD, Theorie des Kreisels, IV, s. N. B. 35.
- KNESER, A., Die Integralgleichungen, s. N. B. 68.
- KNOFS, K., Lehrbuch der Physik u. Chemie, s. N. B. 69.
- KOMMERELL, V., Raumeometrie, s. N. B. 14.
- KOMMERELL, V., u. KOMMERELL, K., Allgemeine Theorie der Raumkurven u. Flächen. II. Bd. 2., erw. Aufl. (Sammlung Schubert XLIV.) Leipzig 1911. Geb. *M.* 5.80.
- , Spezielle Flächen u. Theorie der Strahlensysteme. (Sammlung Schubert LXII.) Ebenda. Geb. *M.* 4.80.
- KOPPE, M., Die Bahnen der beweglichen Gestirne i. J. 1911, s. N. B. 8.
- KORN, A., Freie u. erzwungene Schwingungen, s. N. B. 36.
- KRAUS, K., Experimentierkunde, s. N. B. 70.
- KÜMMELL, GOTTFRIED, Physikalisch-chemische Praktikumsaufgaben. Leipzig u. Berlin 1910, Teubner. *M.* 1.60; geb. in Leinw. *M.* 2.—.
- LAAGER, F., Vereinfachter Lehrgang der Elemente der Trigonometrie f. Progymnasien, Gewerbeschulen, Seminarien usw., sowie zum Selbststudium. Zürich 1910, Vorbereitungs-Institut Minerva.
- LAMPERT, KURT, Die Abstammungslehre. („Bücher der Naturwissenschaft“, 7. Bd.) Leipzig 1910, Reclam jun. Geb. in Leinw. *M.* 1.—.
- LAZZERI, G., und BASSANI, A., Elemente der Geometrie (unter Verschmelzung von ebener und räumlicher Geometrie). Mit Genehmigung der Verfasser aus dem Italienischen übersetzt von P. Treutlein. Leipzig und Berlin 1911, Teubner.
- LEGRAND, ENRIQUE, Sommatation par une formule d'Euler. De l'usage qu'on peut en faire pour résoudre de nombreux problèmes. Sumaciones por una fórmula de Euler. Su aplicabilidad en la resolución de numerosos problemas. Bueno Aires 1911, Hermanos.
- LEHMANN, O., Das Kristallisationsmikroskop u. die damit gemachten Entdeckungen, insbesondere die der flüssigen Kristalle. Aus der Festschrift der Fridericiana zum 53. Geburtstag seiner Königl. Hoheit des Großherzogs Friedrich II. von Baden. Braunschweig 1910, Vieweg u. Sohn. *M.* 3.—.

- LEON, ALFONS, Über das Fließen fester Körper. (Sonderabdruck aus der „Rundschau für Technik und Wirtschaft“). Prag 1910, Haase.
- , Kerbgröße u. Kerbwirkung. (10. Mitteilung aus dem mech.-techn. Laboratorium der k. k. techn. Hochschule in Wien.) Wien 1910, Lehmann & Wentzel.
- , Über die Zerstörungen in tunnelartig gelochten Gesteinen. (11. Mitt. aus dem mech.-techn. Laboratorium der k. k. techn. Hochsch. in Wien.) Ebenda.
- LIETZMANN, WALTHER, Die Organisation des mathem. Unterrichts an den höheren Knabenschulen in Preußen. (Abh. üb. den mathem. Unterricht in Deutschland. Bd. I Heft 2). Leipzig u. Berlin 1910, Teubner. *M* 5.—.
- LINDEMANN, FERDINAND, Vorlesungen über Geometrie. Mit besonderer Benutzung der Vorträge von Alfred Clebsch bearb. u. hrsg. 2., verm. Aufl. Ersten Bandes erster Teil. Zweite Lieferung. Leipzig 1910, Teubner.
- LORENZ, H., Einführung in die Elemente der höheren Mathematik u. Mechanik, s. N. B. 125.
- , Lehrbuch der technischen Physik. III. Bd. Technische Hydromechanik. München u. Berlin 1910, Oldenbourg.
- LORIA, GINO, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe v. Fritz Schütte. 2. Aufl. I. Band. Die algebraischen Kurven. Leipzig und Berlin 1910, Teubner. *M* 16.50; geb. *M* 18.—.
- , Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Theorie und Geschichte. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearb. deutsche Ausgabe v. Fritz Schütte. 2. Aufl. Zweiter Band. Die transzendenten und die algebraischen Kurven. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. *M* 12.50; geb. in Leinw. *M* 14.—.
- MARCOLONGO, R., Theoretische Mechanik, deutsche Bearbeitung v. H. E. Timerding, s. N. B. 37.
- MARK, E., Geschwindigkeitsmessung der Röntgenstrahlen, s. N. B. 72.
- MESSERSCHMITT, J. B., Der Sternenhimmel, s. N. B. 9.
- MINKOWSKI, HERMANN, Gesammelte Abhandlungen. Unter Mitwirkung von Andreas Speiser und Hermann Weyl hrsg. v. David Hilbert. Erster Band. Mit einem Bildnis Hermann Minkowskis. Leipzig und Berlin 1911, Teubner.
- , Abhandlungen, s. N. B. 126.
- , Zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik, s. N. B. 74.
- MOČNIK, Lehrbuch der Arithmetik u. Algebra nebst einer Aufgabensammlung f. die V. bis VIII. Klasse der Gymnasien u. Realgymnasien. Bearb. v. Karl Zahradníček. 31. Aufl. Wien, Tempsky. Geb. K. 4.10.
- MONTEL, PAUL, Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions, publié sous la direction de M. Émile Borel.) Paris 1910, Gauthier-Villars. Fr. 3.50.
- MOROSOFF, N. A., Die Evolution der Materie auf den Himmelskörpern. Eine theoretische Ableitung des periodischen Systems. Autorisierte Übersetzung v. B. Pines u. A. Orechhoff. Dresden 1910, Steinkopf. *M* 1.50.
- MÜLLER, E., Technische Übungsaufgaben f. darstellende Geometrie, s. N. B. 15.
- NATH-KLEIBER, Physik, s. N. B. 76.
- NEUENDORFF, R., Praktische Mathematik, I, s. N. B. 128.
- NIMFÜHR, R., Die Luftschiffahrt, s. N. B. 129.
- NOODT, G., Leitfaden der Naturlehre, s. N. B. 77.
- POINCARÉ, H., Die neue Mechanik, s. N. B. 38.
- , Der Wert der Wissenschaft, s. N. B. 131.
- PRÖLL, A., Beiträge zur Theorie der Schiffsschraube. (Sonderabdruck aus dem Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft 1910.) Berlin, Springer.
- RAABE, E., und SÖHNER, A., Aktuelles Welt-Notiz-Rechenbuch „Summablitz“. Berlin 1910, „Summablitz“-Verlag. *M* 3.85.

- REBENSTORFF, H., Physikal. Experimentierbuch, s. N. B. 80.
- REGER, F., Tachymeter-Tafeln als Ergänzungen der Jordanschen „Hilfstafeln f. Tachymetrie“. Mit einem Vorwort v. E. Hammer. Stuttgart 1910, Metzler.
- REININGHAUS, FRITZ, Kalender-Reform-Vorschlag. Zürich 1910, Orell Fübli.
- REISNER, HEINRICH, Hydrologischer Beitrag zur Kenntnis der Beziehungen zwischen Talsperren u. Abwässern. (Sonderabdruck aus der Zeitschr. f. Gewässerkunde. X. Band, 2. Heft.)
- REY, JEAN, Über die Ursache der Gewichtszunahme von Zinn u. Blei beim Verkalken. Deutsch hrsg. u. mit Anm. versehen v. Ernst Ichenhäuser u. Max Speter. (Ostwalds Klassiker Nr. 172.) Leipzig 1909, Engelmann. *M* 1.20.
- RICHARD, P. J., Étude sur l'assurance complémentaire, s. N. B. 98.
- RICHTER, MAX, Über die Einführung in die Stereometrie u. das stereometrische Zeichnen. Leipzig 1910, Dürr. *M* 2.—.
- , Stereometrische Konstruktionsaufgaben. Leipzig 1910, Dürr. *M* —.40.
- ROHR, M. v., Die optischen Instrumente, s. N. B. 81.
- ROTHE, RUDOLF, Ernst Gerland zum Gedächtnis. Rede, gehalten am 2. Mai 1910 in der Kgl. Bergakademie zu Clausthal. Clausthal 1910, Piepersche Druckerei.
- ROOTS, JAMES D., What becomes of the sunlight and heat absorbed by the earth? London 1910. 1 s.
- ROSENBAUM, Th., Zur Theorie des Kreisels. (Sonderabdruck aus: „Schiffsbau“, Jahrg. 1910, Nr. 4.) Berlin 1910, Marfels
- RUDOLPH, H., Die Stellung der Physik und Naturphilosophie zur Weltätherfrage. Berlin 1911, Allg. medizinische Verlagsanstalt. *M* —.80.
- RUDSKI, M. P., Physik der Erde, s. N. B. 82.
- SCHERL, K., Grundlagen der praktischen Metronometrie, s. N. B. 134.
- SCHNELL, HEINRICH, Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff u. Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Großherzogtum Hessen. (Abh. üb. den mathem. Unterricht in Deutschland. Bd. II Heft 5.) Leipzig u. Berlin 1910, Teubner. *M* 1.60.
- SCHRUTKA, L. v., Logarithmischer Rechenschieber, s. N. B. 107.
- SCHULZE, F. A., Die großen Physiker u. ihre Leistungen, s. N. B. 19.
- SCHWAB, KARL, Lehr- u. Übungsbuch der Geometrie. II. Tl. Ausgabe A: Für die oberen Klassen der Realanstalten. Leipzig 1911, Freytag. Geb. *M* 2.—.
- SEISMOLOGISCHE Beobachtungen in Potsdam in der Zeit vom 1. Januar bis 30. Dezember 1909. (Veröffentlichungen des Kgl. preußischen geodätischen Institutes, Neue Folge Nr. 47.) Berlin 1910, Reichsdruckerei.
- SITZUNGSBERICHTE der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Stiftung Heinrich Lanz. Mathem.-naturw. Klasse. Jahrgang 1909. 3. Abhandlung: P. Lenard, Über Lichtemission u. deren Erregung. — 4. Abhandlung: A. Becker u. H. Baerwald, Zur Kenntnis der Elektrizitätsträger in Gasen: Über die durch Kathodenstrahlen erzeugten Elektrizitätsträger. Heidelberg 1909, Winter.
- SOMMER, J., Introduction à la théorie des nombres algébriques. Édition française revue et augmentée. Traduit de l'Allemand par A. Lévy. Avec préface de J. Hadamard. Paris 1911, Hermann et fils. Frs. 15.—.
- SOMMERFELDT, E., Kristallgruppen, s. N. B. 135.
- SOUTHALL, J. P. C., Geometrical Optics, s. N. B. 84.
- SPETER, MAX, Die chemischen Grundstoffe. (Bücher der Naturwissensch., 8. Bd.) Leipzig 1911, Reclam jun. Geb. *M* —.80.
- SUPPANTSCHITSCH, RICH., Darstellende Geometrie, s. N. B. 17.
- STARKE, H., Experimentelle Elektrizitätslehre, s. N. B. 86.
- STURM, RUDOLF, Maxima u. Minima in der elementaren Geometrie. Leipzig u. Berlin, Teubner.
- SILVESTER, JAMES JOSEPH, The collected mathematical papers. Vol. III (1870—1883). Cambridge 1909, University Press.

- TANNERY, JULES, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. 2<sup>ème</sup> édition entièrement refondue. II. tome. Intégrales définies, développement en série, langage géométrique, fonctions de variables imaginaires. Avec une note de M. Hadamard. Paris 1910, Hermann & Fils. Fr. 15.—.
- , Leçons d'Arithmétique théorique et pratique. Nouvelle édition (6<sup>e</sup>), complètement refondue. Paris 1911, Colin. Fr. 7.—.
- TRABERT, W., Kosmische Physik, s. N. B. 87.
- TREUTLEIN, P., Der geometrische Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen geometrischen Unterrichtes an unseren höheren Schulen. Mit einem Einführungswort v. F. Klein. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. *M* 5.—; geb. *M* 5.60.
- TURPAIN, A., Télégraphie, s. N. B. 88.
- , Téléphonie, s. N. B. 89.
- UHLICH, RUD., Grundlagen zu einer allgemeinen physikalischen Theorie. Leipzig, Wigand.
- VAHLEN, TH., Konstruktionen u. Approximationen, s. N. B. 136.
- VERWALTUNGS-BERICHT üB. das siebente Geschäftsjahr 1909—1910 u. Bericht üB. die siebente Ausschußsitzung des Deutschen Museums. München 1911, Oldenbourg.
- VIVANTI, G., Les fonctions polyédriques et modulaires. Traduit par Armand Cahen. Paris 1910, Gauthier-Villars. Fr. 12.—.
- VOIGT, ANDREAS, Theorie der Zahlenreihen u. der Reihengleichungen. Leipzig 1911, Göschen. *M* 4.—.
- VOIGT, W., Lehrbuch der Kristallphysik, s. N. B. 90.
- VORKAMP, G., Mathematische Formelsammlung. Dessau 1910, Franke. *M* —.80.
- WALTHER, F., Mathematischer Lehr- u. Übungsgang f. Lehrerbildungsanstalten (im Sinn der Meraner Forderungen). I. Tl.: Geometrie. Leipzig 1910, Brandstetter. Geb. *M* 2.80.
- , Dasselbe. II. Tl.: Arithmetik. Ebenda. Geb. *M* 2.80.
- , Dasselbe. III. Tl.: Stereometrie u. Trigonometrie. Ebenda. Geb. *M* 2.—.
- WANACH, B., Tafel der Werte  $\frac{a \cdot b}{a + b}$ , s. N. B. 108.
- WEBER, H., Die partiellen Differential-Gleichungen der mathem. Physik, s. N. B. 137.
- WEBER, H., u. WELLSTEIN, J., Encyklopädie der Elementar-Mathematik, III, s. N. B. 138.
- WEBER, KARL, Lehrbuch der Planimetrie f. höhere Schulen u. zum Selbstunterricht. Wolfenbüttel 1910, Zwißler. *M* 2.50.
- , Lehrbuch der Trigonometrie. Ebenda. *M* —.75.
- WEBER, R., Beispiele u. Übungen aus Elektrizität u. Magnetismus, s. N. B. 93.
- WERTH, H., Das Licht, s. N. B. 94.
- WILLIGER, J., Beweis des Fermatschen Satzes. Leipzig 1910, Jansa.
- WITTING, ALEXANDER, Der mathematische Unterricht an den Gymnasien u. Realanstalten nach Organisation, Lehrstoff u. Lehrverfahren u. die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Königreich Sachsen. (Abh. üB. den mathem. Unterricht in Deutschland, Bd. II Heft 2.) Leipzig u. Berlin 1910, Teubner. *M* 2.20.
- ZIMMERMANN, H., Rechentafel, s. N. B. 110.

## Ein mechanisches Problem aus der Theorie der Laval-Turbine, behandelt mit Methoden der Himmelsmechanik.<sup>1)</sup>

Von W. BEHRENS in Göttingen.

Die vorliegende Arbeit behandelt die Bewegung eines mechanischen Systems, welches man durch Idealisierung der Dampfturbine von de Laval erhält. Diese Bewegung hat man bereits auf verschiedene Weise angenähert dargestellt<sup>2)</sup>; aber trotzdem kennt man sie noch nicht genügend, denn alle diese Näherungsformeln versagen für eine besondere und zwar die interessanteste Klasse von Anfangsbedingungen, für den sogenannten kritischen Anfangsimpuls. Die vorliegende Arbeit wendet Näherungsmethoden der Himmelsmechanik auf das Problem an und erzielt dadurch zwei Fortschritte: sie erweitert die vorhandenen Näherungsformeln des *allgemeinen* Falles und fügt neue hinzu, die für den *besonderen* Fall des kritischen Anfangsimpulses gültig sind.

### I. Das Problem und seine Behandlung mit den gewöhnlichen Methoden.

#### 1. Beschreibung des zu betrachtenden mechanischen Systems.

Die Dampfturbine von de Laval ist, vom Standpunkte der Mechanik aus betrachtet, ein Schwungrad auf einer elastischen Welle, deren beide Enden fest gelagert sind. Charakteristisch für sie ist die Eigenschaft, daß sie in der Nähe einer bestimmten, der sogenannten kritischen Umdrehungszahl stark „schleudert“, während sie im übrigen ruhig und leicht läuft. Die Theorie lehrt allerdings, daß es unendlich viele solche kritische Umdrehungszahlen gibt; aber für die Praxis kommt davon nur eine, die kleinste, in Betracht, die man deshalb als „die kritische Umdrehungszahl“ schlechthin bezeichnet. Die höheren kritischen Umdrehungszahlen liegen weit über denjenigen, die man in der Praxis anwendet und sind um so größer, je größer das Verhältnis der Masse des Schwungrades zur Masse der Welle ist. Der Grund für das Vorhandensein dieser kritischen Umdrehungszahlen ist der, daß das Schwungrad niemals genau zentrisch auf der Welle aufsitzt, daß der Schwerpunkt des Schwungrades nie genau mit der Mittellinie der Welle zusammenfällt.

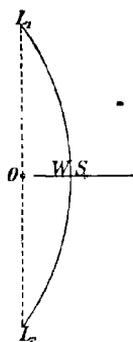
*Das mechanische System, durch welches wir die Laval-Turbine nachahmen wollen, ist sehr einfach konstruiert.* Wir haben (Fig. 1) eine un-

1) Diese Arbeit ist ein Abdruck meiner Inauguraldissertation (Göttingen 1911).

2) Vgl. die Fußnoten auf S. 344.

endlich dünne, in der Ruhelage geradlinige Welle, deren beide Enden  $L_1 L_2$  fest sind. Im Halbierungspunkte  $W$  der Welle ist eine unendlich dünne, ebene, starre Scheibe auf die Welle senkrecht zu ihr aufgesetzt. Der Schwerpunkt  $S$  der Scheibe ist von dem Punkte  $W$  um die Strecke

Fig. 1.



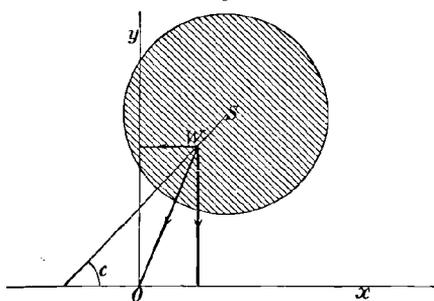
$\mu (\mu \geq 0)$  entfernt. Die Welle ist deformierbar und kann sich um ihre Mittellinie drehen; die Scheibe ist infolgedessen beweglich. Wir betrachten nur solche Bewegungen, bei denen die Scheibe sich in derjenigen Ebene bewegt, die auf der Strecke  $L_1 L_2$  in deren Halbierungspunkt  $O$  senkrecht steht. Durch die Deformation werden in der Welle elastische Kräfte erregt, die so beschaffen sein sollen, daß der Punkt  $W$  mit einer der Entfernung  $OW$  proportionalen Kraft nach  $O$  hingezogen wird. Weitere Kräfte und Drehmomente sollen auf das System nicht wirken. Für die Bewegung des Systems ist die Welle nur insofern von Bedeutung, als sie der Sitz der auf  $W$  wirkenden elastischen Kraft ist. Kümmern wir uns um den Ursprung

derselben nicht, so können wir unser System auch folgendermaßen beschreiben. Es ist ein ebenes, starres System; ein Punkt  $W$  desselben wird mit einer der Entfernung  $OW$  proportionalen Kraft nach dem festen Punkte  $O$  hingezogen. Das System hat drei Freiheitsgrade: der Punkt  $W$  kann sich frei bewegen, und das System kann sich um  $W$  drehen.<sup>1)</sup>

## 2. Bewegungsgleichungen.

Die Bewegungsgleichungen des Systems sind sehr einfach aufzustellen. Wir legen (Fig. 2) durch  $O$  ein rechtwinkliges Koordinatensystem, nennen die Koordinaten des Schwerpunktes  $S$  der Scheibe  $x, y$  und bezeichnen den Winkel zwischen der von  $W$  nach  $S$  gerichteten Geraden und der positiven  $x$ -Achse mit  $c$ . Die Koordinaten des Punktes  $W$  sind dann:

Fig. 2.



$x - \mu \cos c, \quad y - \mu \sin c.$

Wir wählen die Masseneinheit so, daß die Masse der Scheibe gleich 1 ist, und nehmen die Zeiteinheit so an, daß die

Kraft, die auf  $W$  wirkt, dem absoluten Betrage nach gerade *gleich* der Entfernung  $OW$  ist. Wir tun das natürlich, um unnütze Konstanten

1) Ein etwas anderes Modell der Laval-Turbine wird bei F. Klein und A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels, Heft 4 (Leipzig 1910), S. 886—893 betrachtet. Dort ist die Welle in der Ruhelage nicht geradlinig, geht aber durch den Schwerpunkt der Scheibe, während unser Modell sich umgekehrt verhält.

zu vermeiden. Den Trägheitsradius des Systems um den Schwerpunkt nennen wir  $q$ .

Der Schwerpunkt des Systems bewegt sich so, als wenn alle auf das System wirkenden Kräfte an ihm angriffen. Das gibt die beiden ersten Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} x'' &= - (x - \mu \cos c), \\ y'' &= - (y - \mu \sin c). \end{aligned}$$

Die Drehung des Systems um den Schwerpunkt erfolgt so, daß das Produkt aus Trägheitsmoment und Winkelbeschleunigung gleich dem Drehmoment der wirkenden Kräfte um den Schwerpunkt ist. Die Komponenten der am Punkte  $W$  angreifenden Kraft

$$- (x - \mu \cos c), \quad - (y - \mu \sin c)$$

haben in bezug auf den Schwerpunkt die Hebelarme

$$+ \mu \sin c, \quad - \mu \cos c.$$

Die dritte Bewegungsgleichung lautet also:

$$q^2 c'' = - (x - \mu \cos c) \mu \sin c + (y - \mu \sin c) \mu \cos c$$

oder

$$q^2 c'' = - \mu (x \sin c - y \cos c).$$

Die Bewegungsgleichungen des Systems sind also die folgenden:

$$(1) \quad \begin{aligned} x'' + x - \mu \cos c &= 0, \\ y'' + y - \mu \sin c &= 0, \\ q^2 c'' + \mu (x \sin c - y \cos c) &= 0. \end{aligned}$$

Die lebendige Kraft des Systems ist gegeben durch

$$2T = x'^2 + y'^2 + q^2 c'^2,$$

die potentielle Energie durch

$$2V = (x - \mu \cos c)^2 + (y - \mu \sin c)^2.$$

Um die Bewegungsgleichungen des Systems in der kanonischen Form zu erhalten, führen wir statt der Geschwindigkeiten  $x', y', c'$  die Impulse

$$X = \frac{\partial T}{\partial x'} = x', \quad Y = \frac{\partial T}{\partial y'} = y', \quad C = \frac{\partial T}{\partial c'} = q^2 c'$$

ein. Die gesamte Energie des Systems drückt sich dann so aus:

$$2F = (x - \mu \cos c)^2 + (y - \mu \sin c)^2 + X^2 + Y^2 + \frac{1}{q^2} C^2.$$

Die Bewegungsgleichungen des Systems in der kanonischen Form lauten also:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X, & \frac{dX}{dt} &= - (x - \mu \cos c), \\ \frac{dy}{dt} &= Y, & \frac{dY}{dt} &= - (y - \mu \sin c), \\ \frac{dc}{dt} &= \frac{1}{q^2} C, & \frac{dC}{dt} &= - \mu (x \sin c - y \cos c). \end{aligned}$$

Der Ausdruck der Energie des Systems ist eine Summe von fünf Quadraten; das wird uns bald nützlich sein.

### 3. Allgemeine Lösung.

In der Mechanik setzt man gewöhnlich voraus, daß aus einer beliebigen Anfangslage und einem beliebigen Anfangsimpulse eines mechanischen Systems eine und nur eine Bewegung desselben hervorgeht. Man setzt also voraus, daß es zu einem beliebigen Wertsystem  $x_0, y_0, c_0, X_0, Y_0, C_0$  ein und nur ein System von Funktionen  $x, y, c, X, Y, C$  von  $t$  gibt, das für alle  $t \geq 0$  einwertig ist, für diese  $t$  unseren Differentialgleichungen (2) genügt und für  $t = 0$  in das Wertsystem  $x_0, y_0, c_0, X_0, Y_0, C_0$  übergeht. Die Theorie der Differentialgleichungen lehrt aber, daß das keineswegs selbstverständlich ist: wir wollen deshalb diese Frage zunächst untersuchen. Wir werden sehen, daß es tatsächlich eine und nur eine solche Lösung gibt, und werden uns gleichzeitig über ihren analytischen Charakter orientieren.

Wir betrachten eine beliebige Stelle  $x_1, y_1, c_1, X_1, Y_1, C_1, t_1$  unserer Differentialgleichungen (2). Die rechten Seiten derselben sind unabhängig von  $t$  und an dieser Stelle analytisch in  $x, y, c, X, Y, C$ . Daraus folgt nach dem Existenzsatze der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, daß es ein und nur ein System von Funktionen  $x, y, c, X, Y, C$  von  $t$  gibt, das an der Stelle  $t = t_1$  analytisch ist und für  $t = t_1$  die Werte  $x_1, y_1, c_1, X_1, Y_1, C_1$  annimmt. Hieraus kann man zunächst auf die Existenz der gesuchten Lösung für alle  $t$  schließen, deren absoluter Betrag unter einer gewissen Zahl  $\tau$  liegt. Damit hat man sechs Elemente der gesuchten Funktionen, und man wird versuchen, sie längs der ganzen positiven reellen  $t$ -Achse fortzusetzen. Der Existenzsatz stellt aber die Möglichkeit dieses Prozesses nicht sicher: es wäre möglich, daß für ein  $t \geq \tau$  eine der Funktionen  $x, y, c, X, Y, C$  singulär wird. Wir werden jetzt zeigen, daß das in dem vorliegenden Falle nicht möglich ist. Wir schließen uns dabei dem Gedankengange des Cauchyschen Beweises des Existenzsatzes an, machen uns aber den einfachen Bau unserer Gleichungen (2) und besonders folgende beiden Tatsachen zunutze:

1. Die Anfangswerte  $x_0, y_0, c_0, X_0, Y_0, C_0$  und die Koeffizienten der Differentialgleichungen sind reell: infolgedessen sind alle Werte  $x_1, y_1, c_1, X_1, Y_1, C_1$ , die man aus den sechs Funktionselementen durch analytische Fortsetzung längs der reellen  $t$ -Achse erhält, reell.
2. Das Energieintegral erlaubt den Schluß, daß alle diese  $x_1, y_1, X_1, Y_1, C_1$  ihrem absoluten Betrage nach unter einer nur von den Anfangswerten  $x_0, y_0, X_0, Y_0, C_0$  abhängigen Grenze liegen.

Wir werden die Möglichkeit der unbegrenzten Fortsetzbarkeit bewiesen haben, wenn wir zeigen können, daß für alle durch den beschriebenen

Fortsetzungsprozeß zu erhaltenden Punkte  $x_1, y_1, c_1, X_1, Y_1, C_1, t_1$  die Konvergenzradien der zugehörigen Reihen nach Potenzen von  $t - t_1$  oberhalb einer gewissen Grenze  $G > 0$  bleiben, die nur abhängig ist von  $x_0, y_0, X_0, Y_0, C_0$ , nicht von  $x_1, y_1, c_1, X_1, Y_1, C_1, t_1$ . Das wollen wir nun tun.

Der Cauchysche Beweis des Existenzsatzes beruht darauf, daß, wenn man die rechten Seiten der Differentialgleichungen (2) durch Majoranten in bezug auf  $x - x_1, y - y_1, c - c_1, X - X_1, Y - Y_1, C - C_1$  ersetzt und diejenige Lösung der *neuen* Gleichungen bestimmt, die für  $t = t_1$  die Werte  $x_1, y_1, c_1, X_1, Y_1, C_1$  annimmt, diese Lösung eine Majorante derjenigen Lösung der *ursprünglichen* Gleichungen in bezug auf  $t - t_1$  ist, welche denselben Anfangsbedingungen genügt. Ein Mindestmaß der Konvergenzradien der Lösung der *neuen* Gleichungen ist also a fortiori ein solches für diejenige der Lösung der *ursprünglichen*. Wir wählen zunächst folgende Majoranten:

$$\begin{aligned} |X_1| + (X - X_1), & \quad |x_1| + (x - x_1) + \frac{\mu}{1 - (c - c_1)}, \\ |Y_1| + (Y - Y_1), & \quad |y_1| + (y - y_1) + \frac{\mu}{1 - (c - c_1)}, \\ \frac{1}{q^2} |C_1| + \frac{1}{q^2} (C - C_1), & \quad \mu \frac{|x_1| + (x - x_1) + |y_1| + (y - y_1)}{1 - (c - c_1)}. \end{aligned}$$

Hier haben wir bereits von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß  $c_1$  reell ist; denn für komplexe  $c_1$  ist  $\frac{1}{1 - (c - c_1)}$  im allgemeinen keine Majorante für  $\cos c$  und  $\sin c$  in bezug auf  $c - c_1$ . Diese sechs Majoranten ersetzen wir durch eine gemeinsame Majorante derselben:

$$\frac{M_1}{1 - ((x - x_1) + (y - y_1) + (c - c_1) + (X - X_1) + (Y - Y_1) + (C - C_1))},$$

wo

$$M_1 = \left(1 + \frac{1}{q^2} + \mu\right) (1 + |x_1| + |y_1| + |X_1| + |Y_1| + |C_1|)$$

gesetzt ist. Die dieser Majorante entsprechenden Differentialgleichungen lassen sich leicht für die gegebenen Anfangswerte integrieren. Die Lösung ist gegeben durch:

$$x - x_1 = y - y_1 = c - c_1 = X - X_1 = Y - Y_1 = C - C_1 = \sigma,$$

wo  $\sigma$  diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{M_1}{1 - 6\sigma}$$

ist, die für  $t = t_1$  verschwindet. Diese Lösung ist leicht zu berechnen: man findet

$$\sigma = \frac{1}{6} (1 - \sqrt{1 - 12M_1(t - t_1)}),$$

wo die Quadratwurzel für  $t = t_1$  den Wert  $+1$  hat. Sie ist in eine Reihe nach Potenzen von  $t - t_1$  entwickelbar für alle  $t - t_1$ , für die

$$|t - t_1| < \frac{1}{12M_1}.$$

Damit ist eine untere Grenze der Konvergenzradien derjenigen Lösung gefunden, die den Differentialgleichungen (2) genügt und für  $t = t_1$  die Werte  $x_1, y_1, c_1, X_1, Y_1, C_1$  annimmt.

Diese untere Grenze  $\frac{1}{12M_1}$  hängt nun aber noch von  $x_1, y_1, X_1, Y_1, C_1$  ab, und es fragt sich nun, ob es möglich ist, in ihr diese Werte durch die Anfangswerte  $x_0, y_0, X_0, Y_0, C_0$  zu ersetzen. Das gelingt in unserem Falle in der Tat wegen der besonderen Form des Energieintegrals. Es ist doch sicher:

$$\begin{aligned} & (x_1 - \mu \cos c_1)^2 + (y_1 - \mu \sin c_1)^2 + X_1^2 + Y_1^2 + \frac{1}{q^2} C_1^2 \\ &= (x_0 - \mu \cos c_0)^2 + (y_0 - \mu \sin c_0)^2 + X_0^2 + Y_0^2 + \frac{1}{q^2} C_0^2 \\ &\leq (|x_0| + |y_0| + |X_0| + |Y_0| + \frac{1}{q} |C_0| + \mu)^2 \\ &\leq (M_0 + \mu)^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt leicht:

$$\begin{aligned} |x_1| &\leq M_0 + 2\mu, & |X_1| &\leq M_0 + \mu, \\ |y_1| &\leq M_0 + 2\mu, & |Y_1| &\leq M_0 + \mu, \\ & & |C_1| &\leq q(M_0 + \mu). \end{aligned}$$

Daher ist

$$1 + |x_1| + |y_1| + |X_1| + |Y_1| + |C_1| \leq 1 + (4 + q)M_0 + (6 + q)\mu.$$

Also ist endlich

$$\frac{1}{12M_1} \geq \frac{1}{12 \left(1 + \frac{1}{q^2} + \mu\right) (1 + (4 + q)M_0 + (6 + q)\mu)} = G,$$

und damit ist eine nur von  $x_0, y_0, X_0, Y_0, C_0$  abhängige untere Grenze  $G$  der Konvergenzradien gefunden.

Wir können also sagen: *es gibt eine und nur eine für alle reellen  $t$  analytische Lösung  $x, y, c, X, Y, C$  der Differentialgleichungen (2), die für  $t = 0$  in die vorgegebenen Werte  $x_0, y_0, c_0, X_0, Y_0, C_0$  übergeht.*

Es fragt sich, ob es noch eine, *nicht* für alle reellen  $t$  analytische Lösung gibt, die dieselben Anfangsbedingungen befriedigt. Eine solche müßte schon für  $t = 0$  nichtanalytisch sein, sonst wäre sie mit unserer analytischen Lösung identisch. Damit man sagen könnte, sie nimmt für  $t = 0$  die Werte  $x_0, y_0, c_0, X_0, Y_0, C_0$  an, müßte sie, wenn  $t$  auf der positiven reellen Achse nach Null konvergiert, den Grenzwert

$x_0, y_0, c_0, X_0, Y_0, C_0$  haben. Die Theorie der Differentialgleichungen<sup>1)</sup> lehrt aber, daß es eine solche Lösung nicht gibt. *Folglich ist die analytische Lösung  $x, y, c, X, Y, C$  die einzige, die den gegebenen Anfangsbedingungen genügt.*

Das Interessante an diesen Ergebnissen ist, daß in analytischer Hinsicht keine Klasse von Anfangsbedingungen eine ausgezeichnete Rolle spielt: *in analytischer Hinsicht sind also die der kritischen Geschwindigkeit der Laval-Turbine entsprechenden Anfangsbedingungen nicht ausgezeichnet.*

Von den sechs Funktionen  $x, y, c, X, Y, C$  liegen  $x, y, X, Y, C$  für alle reellen  $t$  dem absoluten Betrage nach unter der nur von den Anfangswerten  $x_0, y_0, X_0, Y_0, C_0$  abhängigen Zahl

$$(1 + q) \left( |x_0| + |y_0| + |X_0| + |Y_0| + \frac{1}{q} |C_0| + 2\mu \right).$$

Für  $c$  können wir dagegen eine solche obere Grenze nicht angeben, und im allgemeinen wird auch keine solche existieren.

#### 4. Bekannte Integrale und Lösungen.

Nachdem wir uns so über die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichungen orientiert haben, haben wir sie mittels bekannter Funktionen als Funktionen der Zeit darzustellen. Das ist bis jetzt nicht geleistet; wir wollen kurz zusammenstellen, was in dieser Richtung geschehen ist.

Man kennt zwei Integrale des Systems (2), das Integral der Energie und das Integral der Flächengeschwindigkeiten:

$$xY - yX + C = 2L.$$

Die Frage, ob noch weitere Integrale existieren, werden wir später streifen.

Für  $\mu = 0$  kennt man alle  $\infty^6$  Lösungen. Dann erfolgen Bewegung des Schwerpunktes und Drehung des Systems um den Schwerpunkt unabhängig voneinander: der Schwerpunkt bewegt sich unter dem Einflusse der elastischen Kraft auf einer Ellipse, deren Mittelpunkt  $O$  ist, und das System dreht sich um den Schwerpunkt mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit  $w_0$ . Die Formeln für die Bewegung lauten:

$$(3) \quad \begin{array}{ll} x = P_1 \cos t + Q_1 \sin t, & X = Q_1 \cos t - P_1 \sin t, \\ y = P_2 \cos t + Q_2 \sin t, & Y = Q_2 \cos t - P_2 \sin t, \\ c = w_0 t + c_0, & C = C_0 = q^2 w_0. \end{array}$$

1) Encykl. d. math. Wiss., Bd. 2, Teil 1, S. 203—204 (P. Painlevé).

Für beliebiges  $\mu$  kennt man nur  $\infty^2$  Lösungen. Sie sind gegeben durch die Formeln

$$(4) \quad \begin{aligned} x &= \frac{\mu}{1-\mu^2} w_0 \cos(w_0 t + c_0), & X &= -\frac{\mu w_0}{1-\mu^2} \sin(w_0 t + c_0), \\ y &= \frac{\mu}{1-\mu^2} w_0 \sin(w_0 t + c_0), & Y &= \frac{\mu w_0}{1-\mu^2} \cos(w_0 t + c_0), \\ c &= w_0 t + c_0, & C &= C_0 = q^2 w_0. \end{aligned}$$

Diese Bewegungen, die man *stationäre Bewegungen* nennt, wollen wir hier nicht diskutieren. Wir wollen nur darauf aufmerksam machen, daß die Formeln (4) für die Werte  $w_0 = \pm 1$  ihren Sinn verlieren. Die Werte  $w_0 = \pm 1$  spielen hier also eine ausgezeichnete Rolle: wie wir bald sehen werden, nehmen sie überhaupt eine besondere Stellung ein, sie entsprechen der kleinsten kritischen Geschwindigkeit der Laval-Turbine, die wir früher kritische Geschwindigkeit schlechthin genannt haben. Daß es gerade die Werte  $\pm 1$  sind, ist natürlich Folge der einfachen Annahmen, die wir über die Konstanten des Systems gemacht haben. Höhere kritische Geschwindigkeiten besitzt unser System nicht, weil wir die Welle als masselos angenommen haben.

Wenn wir noch hinzufügen, daß Stodola<sup>1)</sup> diese stationären Bewegungen mit Hilfe der Methode der kleinen Schwingungen auf ihre Stabilität hin untersucht hat, und wenn wir noch auf zwei Arbeiten von Föppl<sup>2)</sup> und Lecornu<sup>3)</sup> hinweisen, in denen die *allgemeine* Lösung *approximiert* wird — wir kommen auf diese beiden Arbeiten noch zurück (S. 371—373) — so haben wir wohl alles angeführt, was über die allgemeine Lösung unseres Gleichungssystems bekannt ist. Es war eben wichtiger, die kritischen Geschwindigkeiten komplizierterer Systeme zu berechnen<sup>4)</sup>, als die Bewegung im einfachsten Falle genauer zu studieren.

Wenn man nun tiefer in die Bewegung unseres Systems eindringen will, so liegt folgender Weg am nächsten: man versucht aus den drei simultanen Differentialgleichungen (1) durch Elimination eine Gleichung für eine Koordinate allein zu erhalten. Es ist in diesem Falle sogar sehr einfach, eine solche Gleichung für den Winkel  $c$  aufzustellen. Man stellt aus den beiden ersten Gleichungen (1)  $x$  und  $y$  als Funktionen der Zeit  $t$  und des Winkels  $c$  dar und setzt diese in die dritte Gleichung

1) A. Stodola, Z. d. V. d. Ing., 47 (1906), S. 130—131; Die Dampfturbinen, 3. Aufl., Berlin 1905, S. 406—408.

2) A. Föppl, Zivilingenieur 41 (1895), S. 332—342; Vorlesungen üb. techn. Mech., Bd. 4, 3. Aufl., Leipzig 1909, S. 283—302.

3) L. Lecornu, Journ. de l'école polytechn. 11 (1906), S. 95—107.

4) Encykl. d. math. Wiss., Bd. 4, Teilbd. 4, S. 380—383 (Th. v. Kármán).

ein. Man erhält dann eine Differential-Integralgleichung von kompliziertem Bau für  $c$ . Setzt man die Ausdrücke für  $x$  und  $y$  in die Integrale der Energie und der Flächengeschwindigkeiten ein und eliminiert  $c'$ , so erhält man sogar eine reine Integralgleichung für  $c$ ; aber sie ist so kompliziert, daß man für die Darstellung unserer Bewegung daraus wohl keinen Nutzen ziehen kann. Jedenfalls verfolgen wir diesen Weg nicht.

## II. Reduktion des Problems auf das Problème général de la dynamique von Poincaré.

### 5. Analogie des Problems zu dem Problem der Planetenbewegung bei Beschränkung auf kleine Werte von $\mu$ .

Wir verzichten vielmehr darauf, die Bewegung unseres Systems in ihrer Allgemeinheit zu behandeln und *beschränken uns auf den Fall, wo die Exzentrizität  $\mu$  klein ist*. Dieser Fall entspricht ja auch den wirklichen Verhältnissen bei der Lavalturbine. Wir gehen also von der bekannten Bewegung des Systems im Falle  $\mu = 0$  aus und fragen: wie gestaltet sie sich für kleine Werte von  $\mu$ ?

Eine ähnliche Fragestellung haben wir in dem berühmtesten Probleme der theoretischen Mechanik, in dem Problem der  $n$  Körper. Man hat dort  $n$  materielle Punkte von den Massen  $m_1 \dots m_n$ , die aufeinander nach dem Newtonschen Gesetz wirken. Es ist leicht, die Differentialgleichungen dieser Bewegung aufzustellen; aber man ist weit davon entfernt, die allgemeine Lösung des Problems durch bekannte Funktionen darstellen zu können. Auch hier beschränkt man sich auf den Fall, wo die Verhältnisse  $\mu_i = \frac{m_i}{m_1} (i = 2 \dots n)$  klein sind: denn gerade dieser Fall ist in der Natur, in der Bewegung der Planeten um die Sonne verwirklicht. Auch hier kennt man für  $\mu_i = 0$  die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen: die Sonne bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit, die Planeten beschreiben relativ zu ihr Keplersche Kegelschnitte. Hier ist nun der Übergang vom Falle  $\mu_i = 0$  zum Falle kleiner Werte von  $\mu_i$  seit langem vollzogen: man hat unendliche Mühe und unendlichen Scharfsinn auf die Berechnung der Störungen verwendet, die die Planeten aufeinander und auf die Sonne ausüben. *Wir wollen versuchen, diese Methoden der Himmelsmechanik auf unser Problem anzuwenden*: die deutliche Analogie zwischen den beiden Problemen ermutigt dazu.

### 6. Das Problème général de la dynamique von Poincaré.

Die Methoden der Himmelsmechanik hat H. Poincaré in seinem dreibändigen Werke: „Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste“

(Paris 1892—99) zusammengefaßt, verallgemeinert und auf ihre mathematische Strenge hin untersucht. Er stellt ein allgemeines Problem der Mechanik<sup>1)</sup> voran, von dem das Problem der  $n$  Körper ein spezieller Fall ist. Dieses Problem ist das folgende. Ein mechanisches System hänge von einem Parameter  $\mu$  ab und sei bezogen auf die kanonischen Veränderlichen  $x_1 \dots x_n, X_1 \dots X_n$ . Die Energie  $F$  des Systems enthalte die Zeit nicht explizite und habe, als Funktion von  $\mu$  und den  $x_i$  und  $X_i$  betrachtet, folgende drei Eigenschaften:

1.  $F$  ist an der Stelle  $\mu = 0$  entwickelbar nach ganzen positiven Potenzen von  $\mu$ :

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots$$

2.  $F$  hat in bezug auf jede der Veränderlichen  $x_1 \dots x_n$  die Periode  $2\pi$ .
3.  $F_0$  hängt nicht ab von  $x_1 \dots x_n$ .

Es sind die kanonischen Bewegungsgleichungen der Mechanik

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial X_i}, \quad \frac{dX_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

für kleine Werte des Parameters  $\mu$  zu behandeln. Um dieses „Problème général de la dynamique“ gruppiert Poincaré die meisten Methoden der Himmelsmechanik: er zeigt, daß sie, obwohl sie nur für die Behandlung des Planetenproblems ersonnen und ausgebildet sind, auf dieses Problem verallgemeinert werden können. *Wir werden also die Anwendung der Methoden der Himmelsmechanik auf unsere Fragestellung sehr erleichtern, wenn wir zeigen können, daß sie dem allgemeinen Problem von Poincaré untergeordnet werden kann.*

### 7. Darstellung der Transformation.

Wir haben unser Problem auf die kanonischen Veränderlichen  $x, y, c, X, Y, C$  bezogen: die Energie  $F$  des Systems hat dann die Form:

$$2F = x^2 + y^2 + X^2 + Y^2 + \frac{1}{q^2} C^2 - 2\mu(x \cos c + y \sin c),$$

wenn wir die bedeutungslose additive Konstante  $\mu^2$  weglassen. Es ist also

$$F = F_0 + \mu F_1,$$

$F$  genügt also bereits der Bedingung 1., wenn wir unseren Parameter  $\mu$  mit dem dort auftretenden Parameter  $\mu$  identifizieren. Dagegen genügt  $F$  den Bedingungen 2. und 3. nur in bezug auf das Veränderlichenpaar  $c, C$ . Wir werden also versuchen, statt  $x, y, X, Y$

1) A. a. O. Bd. 1, S. 32—33.

andere kanonische Veränderliche  $a, b, A, B$  einzuführen, welche so beschaffen sind, daß  $F$ , als Funktion von  $a, b, A, B$  dargestellt, auch den Bedingungen 2. und 3. genügt: die Eigenschaft von  $F$ , die Bedingung 1. zu erfüllen und den Bedingungen 2. und 3. in bezug auf  $c, C$  zu genügen, wird ja natürlich durch eine solche Transformation nicht zerstört.

Die Bedingung 2. ist sicher erfüllt, wenn  $a$  und  $b$  als Winkel definiert werden können, deren Vermehrung um beliebige Vielfache von  $2\pi$  die Energie des Systems nicht ändert.

Die Bedingung 3. kann durch zwei andere ersetzt werden. Nehmen wir an, sie wäre erfüllt, dann lauten die Bewegungsgleichungen für  $a, b, A, B$  im Falle  $\mu = 0$  so:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\partial F_0}{\partial A}, & \frac{dA}{dt} &= -\frac{\partial F_0}{\partial a} = 0, \\ \frac{db}{dt} &= \frac{\partial F_0}{\partial B}, & \frac{dB}{dt} &= -\frac{\partial F_0}{\partial b} = 0. \end{aligned}$$

Aus den beiden Gleichungen für  $A$  und  $B$  folgt:

$$(5) \quad A = A_0, \quad B = B_0.$$

Da ferner im Falle  $\mu = 0$  auch  $C = C_0$  ist, so folgt aus den Gleichungen für  $a$  und  $b$ :

$$(5) \quad a = w_a t + a_0, \quad b = w_b t + b_0,$$

wo  $w_a$  und  $w_b$  die Werte von  $\frac{\partial F_0}{\partial A}$  und  $\frac{\partial F_0}{\partial B}$  an der Stelle  $A_0, B_0, C_0$  sind. Umgekehrt, wenn  $a, b, A, B$  kanonische Veränderliche sind, die für die Bewegung des Systems im Falle  $\mu = 0$  die Form (5) haben, dann ist  $F_0$  nicht abhängig von  $a$  und  $b$ ; denn die Bewegungsgleichungen, auf den Zeitpunkt  $t = 0$  angewandt, lehren, daß dann die Ableitungen  $\frac{\partial F_0}{\partial A}$  und  $\frac{\partial F_0}{\partial B}$  jeder Stelle  $a_0, b_0, A_0, B_0, C_0$  verschwinden.

*Wir haben also vier Funktionen  $a, b, A, B$  von  $x, y, X, Y$  zu bestimmen, die folgende Eigenschaften haben:*

1.  $a, b, A, B$  sind kanonische Veränderliche.
2.  $a, b$  können als Winkel definiert werden, deren Vermehrung um Vielfache von  $2\pi$  die Energie des Systems nicht ändert.
3. Für die Bewegung im Falle  $\mu = 0$  sind  $a, b$  lineare Funktionen der Zeit und
4.  $A, B$  konstant.

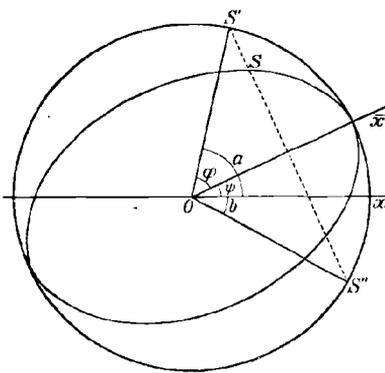
Wir zerlegen diese Bestimmung in zwei Schritte: wir bestimmen zunächst  $a, b$  und dann  $A, B$ .

Auf die Definition der Funktionen  $a$  und  $b$  wird uns die Bewegung im Falle  $\mu = 0$  führen. Hier bewegt sich der Schwerpunkt  $S$  auf einer festen Ellipse. Wir zeichnen eine Achsenrichtung der Ellipse willkürlich aus und nennen sie nach einem in der Astronomie üblichen Ausdrucke die „Apsidenrichtung der Ellipse“. Wir nehmen ein  $\bar{x}\bar{y}$ -Koordinatensystem an, dessen Achsen die Achsen der Ellipse sind, und zwar soll die Richtung der positiven  $\bar{x}$ -Achse mit der Apsidenrichtung der Ellipse zusammenfallen. Dann können wir die Bewegung des Punktes  $S$  so darstellen:

$$\bar{x} = m \cos(t + \varphi_0), \quad \bar{y} = n \sin(t + \varphi_0).$$

Wir nennen  $\varphi = t + \varphi_0$  die exzentrische Anomalie des Punktes  $S$  und  $m$  und  $n$  die Längen der Halbachsen der Ellipse. Wir weichen damit

Fig. 3.



etwas von der üblichen Definition ab; denn indem wir festsetzen, daß die exzentrische Anomalie des Punktes  $S$  stets mit der Geschwindigkeit 1 *wachsen* soll, müssen wir zulassen, daß  $m$  und  $n$  auch negative Werte annehmen. Das ist im allgemeinen nicht üblich, in unserem Falle aber zweckmäßig. Nun sollen unsere Funktionen  $a$  und  $b$  geometrisch als Winkel definiert werden können und außerdem in dem Falle  $\mu = 0$  linear von der Zeit abhängen. Uns bleibt kaum eine Wahl. Am nächsten liegt es, die

Definition von  $a$  und  $b$  so einzurichten, daß im Falle  $\mu = 0$   $a$  mit der exzentrischen Anomalie  $\varphi$  des Schwerpunktes  $S$  und  $b$  mit dem Winkel  $\psi$  der Apsidenrichtung  $O\bar{X}$  der Ellipse gegen die Richtung  $OX$  identisch ist; diese Winkel sind ja im Falle  $\mu = 0$  wirklich lineare Funktionen der Zeit, es ist doch dann  $\varphi = t + \varphi_0$  und  $\psi = \psi_0$ . Natürlich können wir für  $a$  und  $b$  auch lineare Funktionen von  $\varphi$  und  $\psi$  mit ganzzahligen Koeffizienten wählen, und es ist in der Tat für das Folgende zweckmäßiger  $a = \varphi + \psi$ ,  $b = \varphi - \psi$  zu setzen. Dann ist  $a$  gleich dem Winkel von  $OS'$  gegen  $OX$  in der Fig. 3,  $b$  gleich dem Winkel von  $OX$  gegen  $OS''$ . Um nun  $a$  und  $b$  für eine beliebige, kinematisch mögliche, also eventuell durch gewisse äußere Kräfte  $\mathfrak{R}_a$  bewirkte Bewegung des Systems zu definieren, konstruieren wir in jedem Zeitpunkte  $t$  zu ihr die „tangierende elliptische Bewegung“: darunter verstehen wir die Bewegung, die aus der gegebenen entstehen würde, wenn von dem Zeitpunkte  $t$  an plötzlich die äußeren Kräfte  $\mathfrak{R}_a$  und die Exzentrizität  $\mu$  verschwinden würden. Die Bewegung heißt „tangierend“, weil zur Zeit  $t$  der Punkt  $S$

bei ihr dieselbe Lage und Geschwindigkeit hat, wie bei der wirklichen Bewegung. Wir definieren nun für diesen Zeitpunkt  $t$   $\varphi$  als den gleichzeitigen Wert der exzentrischen Anomalie des Schwerpunktes  $S$  bei der gleichzeitig tangierenden elliptischen Bewegung und  $\psi$  als die Größe des Winkels der Apsidenrichtung der entsprechenden Ellipse gegen die Richtung der positiven  $x$ -Achse, und wir setzen dann wieder  $a = \varphi + \psi$ ,  $b = \varphi - \psi$ . Damit sind  $a$  und  $b$  als Funktionen der Veränderlichen  $x, y, X, Y$  bestimmt; sie genügen der Bedingung 3. auf S. 347, und da eine Vermehrung derselben um ganzzahlige Vielfache von  $2\pi$  die Energie des Systems ersichtlich nicht ändert, so genügen sie auch der Bedingung 2.

Wir wenden uns nun zur Bestimmung der Funktionen  $A$  und  $B$ , wobei wir den Bedingungen 1. und 4. genügen müssen. Es ist zunächst fraglich, ob das überhaupt möglich ist; es ist durchaus denkbar, daß man die Funktionen  $a$  und  $b$  überhaupt nicht zu einem System kanonischer Veränderlicher ergänzen kann, und es ist natürlich erst recht möglich, daß dies zwar gelingt, die so bestimmten Funktionen  $A, B$  aber für die Bewegung  $\mu = 0$  nicht konstant sind. In unserem Falle wird allerdings die Bestimmung gelingen.

Eine kanonische Transformation wird im allgemeinen durch eine Funktion  $S(a, b, A, B)$  vermittelt und ist definiert durch folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\partial S}{\partial X}, & y &= \frac{\partial S}{\partial Y}, \\ A &= \frac{\partial S}{\partial a}, & B &= \frac{\partial S}{\partial b}. \end{aligned}$$

Uns sind  $a, b$  als Funktionen von  $x, y, X, Y$  vorgeschrieben. Wir berechnen hieraus  $x, y$  als Funktionen von  $a, b, X, Y$ :

$$x = x(a, b, X, Y), \quad y = y(a, b, X, Y).$$

Es fragt sich also, ob man eine solche Funktion  $S(a, b, X, Y)$  bestimmen kann, daß

$$x = \frac{\partial S}{\partial X}, \quad y = \frac{\partial S}{\partial Y}$$

ist. Das ist dann und nur dann möglich, wenn die Gleichung

$$\frac{\partial x}{\partial Y} = \frac{\partial y}{\partial X}$$

erfüllt ist, und zwar gibt es in diesem Falle unendlich viele solche Funktionen  $S$ : man erhält die allgemeinste Funktion  $S$ , wenn man zu einer speziellen Funktion  $S$  eine willkürliche Funktion  $\chi(a, b)$  addiert:

$$S = \bar{S} + \chi(a, b).$$

Die Veränderlichen  $A, B$ , die  $a, b$  zu einem System kanonischer Veränderlicher ergänzen, sind dann gegeben durch:

$$A = \frac{\partial \bar{S}}{\partial a} + \frac{\partial \chi}{\partial a}, \quad B = \frac{\partial \bar{S}}{\partial b} + \frac{\partial \chi}{\partial b}.$$

Wenn wir also in unserem Falle der Bedingung 1. genügen wollen, so haben wir zu fragen, ob die Gleichung

$$\frac{\partial x}{\partial Y} = \frac{\partial y}{\partial X}$$

erfüllt ist. Wenn das der Fall ist, haben wir eine entsprechende Funktion  $\bar{S}(a, b, X, Y)$  zu konstruieren und die Funktionen

$$\bar{A} = \frac{\partial \bar{S}}{\partial a}, \quad \bar{B} = \frac{\partial \bar{S}}{\partial b}$$

zu bestimmen. Dann sind  $a, b, \bar{A}, \bar{B}$  kanonische Veränderliche. Um nun noch die Bedingung 4. zu erfüllen, haben wir zu fragen, ob man eine Funktion  $\chi(a, b)$  so bestimmen kann, daß die Funktionen

$$A = \bar{A} + \frac{\partial \chi}{\partial a}, \quad B = \bar{B} + \frac{\partial \chi}{\partial b}$$

für die Bewegung  $\mu = 0$  konstant sind. Erst wenn wir uns davon überzeugt haben, daß diese beiden Fragen zu bejahen sind, ist die Existenz einer Transformation von den gewünschten Eigenschaften bewiesen.

Um diese Fragen zu entscheiden, ist es natürlich nötig,  $x$  und  $y$  als Funktionen von  $a, b, X, Y$  wirklich zu berechnen. Zu dem Zwecke stellen wir zunächst  $x, y, X, Y$  als Funktionen von  $a, b$  und  $m, n$  dar, wo  $m, n$  die im Sinne der früheren Definition verstandenen Längen der Halbachsen der tangierenden Ellipse sind. In bezug auf das Koordinatensystem  $\bar{x}, \bar{y}$ , dessen positive  $\bar{x}$ -Achse die Apsidenrichtung dieser Ellipse ist, sind die Koordinaten des Schwerpunktes

$$\bar{x} = m \cos \varphi, \quad \bar{y} = n \sin \varphi.$$

Die Koordinaten  $\bar{X}, \bar{Y}$  seines Impulses erhält man, indem man  $\bar{x}, \bar{y}$  nach  $t$  differenziert und dabei  $\frac{dm}{dt} = \frac{dn}{dt} = 0$ ,  $\frac{d\varphi}{dt} = 1$  setzt:

$$\bar{X} = -m \sin \varphi, \quad \bar{Y} = n \cos \varphi.$$

Da die  $\bar{x}$ -Achse mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\psi$  bildet, so ist:

$$(6) \quad \begin{aligned} x &= m \cos \varphi \cos \psi - n \sin \varphi \sin \psi = \frac{m+n}{2} \cos a + \frac{m-n}{2} \cos b = r \cos a + s \cos b, \\ y &= m \cos \varphi \sin \psi + n \sin \varphi \cos \psi = \frac{m+n}{2} \sin a - \frac{m-n}{2} \sin b = r \sin a - s \sin b, \\ X &= -m \sin \varphi \cos \psi - n \cos \varphi \sin \psi = -\frac{m+n}{2} \sin a - \frac{m-n}{2} \sin b = -r \sin a - s \sin b, \\ Y &= -m \sin \varphi \sin \psi + n \cos \varphi \cos \psi = \frac{m+n}{2} \cos a - \frac{m-n}{2} \cos b = r \cos a - s \cos b. \end{aligned}$$

Wir berechnen aus den beiden letzten Gleichungen die Größen  $r, s$  als Funktionen von  $a, b, X, Y$  und setzen sie in die beiden ersten Gleichungen ein; dann erhalten wir  $x, y$  als Funktionen von  $a, b, X, Y$ :

$$x = \frac{-2X \cos a \cos b - Y \sin(a-b)}{\sin(a+b)}, \quad y = \frac{-X \sin(a-b) + 2Y \sin a \sin b}{\sin(a+b)}.$$

Hieraus folgt zunächst, daß die Gleichung

$$\frac{\partial x}{\partial Y} = \frac{\partial y}{\partial X}$$

in unserem Falle wirklich erfüllt ist. Man kann also  $a, b$  zu einem kanonischen System ergänzen. Wir berechnen eine Funktion  $\bar{S}$ , deren partielle Ableitungen nach  $X$  und  $Y$  gleich  $x$  und  $y$  sind:

$$\bar{S} = \frac{-X^2 \cos a \cos b - XY \sin(a-b) + Y^2 \sin a \sin b}{\sin(a+b)}.$$

Berechnen wir nun  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$ , indem wir  $\bar{S}$  nach  $a$  und  $b$  differenzieren und darin statt  $X, Y$  die Veränderlichen  $a, b, r, s$  einführen, so folgt:

$$\bar{A} = \frac{\partial \bar{S}}{\partial a} = r^2, \quad \bar{B} = \frac{\partial \bar{S}}{\partial b} = s^2.$$

Diese Größen sind bei der Bewegung  $\mu = 0$  konstant; wir können also  $\chi = 0$  annehmen und setzen:

$$(7) \quad A = r^2 = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2, \quad B = s^2 = \left(\frac{m-n}{2}\right)^2.$$

$A$  und  $B$  hängen also nur von den Achsen der tangierenden Ellipse ab.

*Es gibt also eine Transformation, die unser Problem auf das Problème général de la dynamique von Poincaré zurückführt, und wir haben sie vollständig dargestellt.*

Diese Transformation hat Ähnlichkeit mit derjenigen, die man beim Problem der  $n$  Körper anwendet: man führt auch dort eine tangierende Bewegung, die tangierende Keplersche Bewegung ein, die genau so definiert ist, wie unsere tangierende elliptische Bewegung. Gewöhnlich macht man allerdings dort die Transformation so, daß man auf Polarkoordinaten bezieht und die gesuchte Transformation aus einer gewissen einfachen vollständigen Lösung  $S$  der für den Fall  $\mu_i = 0$  geltenden Jacobischen partiellen Differentialgleichung ableitet. Dieser Weg führt dort schneller zum Ziele, als es der von uns eingeschlagene tun würde: er würde auch in unserem Falle schneller zum Ziele führen, aber er ist natürlich viel unbefriedigender als derjenige, den wir eingeschlagen haben.

Die Bewegungsgleichungen in den neuen Koordinaten  $a, b, c, A, B, C$  sind nun leicht zu finden. Die Gleichungen (6) und (7) lehren, daß

die Energie des Systems, durch  $a, b, c, A, B, C$  dargestellt, folgende Form hat:

$$F = A + B + \frac{1}{2q^2}C^2 - \mu(r \cos(a - c) + s \cos(b + c)).$$

Die Bewegungsgleichungen in den neuen Koordinaten sind also:

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 1 - \frac{\mu}{2r} \cos(a - c), \\ \frac{db}{dt} &= 1 - \frac{\mu}{2s} \cos(b + c), \\ \frac{dc}{dt} &= \frac{1}{q^2}C, \\ \frac{dA}{dt} &= -\mu r \sin(a - c), \\ \frac{dB}{dt} &= -\mu s \sin(b + c), \\ \frac{dC}{dt} &= \mu r \sin(a - c) - \mu s \sin(b + c). \end{aligned}$$

### 8. Zusammengehörigkeit der Lösungen der ursprünglichen und der transformierten Bewegungsgleichungen.

Wir haben jetzt also zwei Systeme von Differentialgleichungen, die Systeme (2) und (8), und deren Lösungen sind einander vermöge der durch (6) und (7) gegebenen Transformation zugeordnet. Wir wollen, bevor wir weiter gehen, die Art dieser Zuordnung näher betrachten. Wir wollen erstens fragen: wieviel Lösungen  $a, b, c, A, B, C$  von (8) gehören zu einer gegebenen Lösung  $x, y, c, X, Y, C$  von (2)? und zweitens: wie viel Lösungen  $x, y, c, X, Y, C$  von (2) gehören zu einer gegebenen Lösung  $a, b, c, A, B, C$  von (8)? Statt von einer Lösung  $a, b, c, A, B, C$  können wir auch stets von einer Lösung  $a, b, c, A, B, C, r, s$ , sprechen (wo natürlich  $r^2 = A, s^2 = B$  ist): denn die Gleichungen (8) definieren  $r$  und  $s$  als einwertige Funktionen der Funktionen  $a, b, c, A, B, C$  und deren Ableitungen nach der Zeit. Wir nehmen natürlich an, daß alle diese Funktionen  $x, y, c, X, Y, C, a, b, c, A, B, C, r, s$  für reelle  $t$  reell sind.

Um die erste Frage zu beantworten, leiten wir aus den Gleichungen (6) und (7) die folgenden ab:

$$(9) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} a &= \frac{y - X}{x + Y}, & \operatorname{tg} b &= \frac{y + X}{x + Y}, \\ A &= \frac{(x + Y)^2 + (y - X)^2}{4}, & B &= \frac{(-x + Y)^2 + (y + X)^2}{4}. \end{aligned}$$

Zu jedem Wertsysteme  $x, y, c, X, Y, C$  gehört also ein Wertsystem  $\operatorname{tg} a, \operatorname{tg} b$ , wenn keine der Doppelgleichungen

$$(10) \quad \begin{aligned} x + Y &= y - X = 0, \\ -x + Y &= y + X = 0 \end{aligned}$$

erfüllt ist, wenn also die zugehörige tangierende elliptische Bewegung keine Kreisbewegung ist. Ein Wertsystem  $x, y, c, X, Y, C$ , für das eine der Doppelgleichungen (10) besteht, wollen wir singulär nennen. Man zeigt nun in dem uns am meisten interessierenden Falle  $\mu > 0$  leicht indirekt, daß eine beliebig vorgelegte Lösung

$$x(t), y(t), c(t), X(t), Y(t), C(t)$$

der Differentialgleichungen (2) in jedem endlichen Zeitintervalle nur endlich oft durch singuläre Werte geht. Man kann also sicher eine unendliche Folge von Werten

$$\dots < t_i < t_{i+1} < \dots$$

$$\lim_{i \rightarrow -\infty} t_i = -\infty \qquad \lim_{i \rightarrow +\infty} t_i = +\infty$$

angeben, sodaß die vorgelegte Lösung für keinen inneren Punkt der Intervalle  $(t_i, t_{i+1})$  singulär ist; die Formeln (9) definieren also für das Innere der Intervalle  $(t_i, t_{i+1})$   $\operatorname{tg} a$  und  $\operatorname{tg} b$  als einwertige Funktionen der Zeit. Wir fassen nun einen beliebigen der Punkte  $t_i$  ins Auge und behaupten, daß die Funktion  $\operatorname{tg} a$  für  $\lim t = t_i$  einen Grenzwert besitzt. Das ist evident, wenn für  $t = t_i$  die erste der beiden Doppelgleichungen (10) nicht erfüllt ist. Besteht dagegen für  $t = t_i$  diese Doppelgleichung, so hat die Funktion

$$\operatorname{tg} a = \frac{y - X}{x + Y}$$

nach einem bekannten Satze der Differentialrechnung dort einen Grenzwert, wenn der Quotient

$$(11) \quad \frac{\frac{d}{dt}(y - X)}{\frac{d}{dt}(x + Y)}$$

dort einen solchen hat, und zwar sind diese Grenzwerte einander gleich. Dem Quotienten (11) gibt man mit Hilfe der Differentialgleichungen (1) leicht die Form

$$\frac{x + Y - \mu \cos c}{-y + X + \mu \sin c},$$

und dieser Ausdruck hat für  $\lim t = t_i$  den Grenzwert  $-\cotg c(t_i)$ . Wir definieren nun  $\operatorname{tg} a$  im Punkte  $t_i$  durch seinen Grenzwert für  $\lim t = t_i$ ; dann ist  $\operatorname{tg} a$  für jedes reelle  $t$  eindeutig und mindestens eine

der Funktionen  $\operatorname{tg} a, \frac{1}{\operatorname{tg} a}$  stetig. Sehen wir zwei Funktionen  $a$ , die sich nur um ein Vielfaches von  $2\pi$  unterscheiden, als gleich an, so gehören also zu der Lösung  $x, y, c, X, Y, C$  vermöge der Gleichungen (9) zwei und nur zwei einwertige stetige Funktionen  $a$ , die sich voneinander nur um die Konstante  $\pi$  unterscheiden. Dasselbe kann man ganz ähnlich für  $b$  zeigen, und da  $c, A, B, C$  einwertige stetige Funktionen von  $x, y, c, X, Y, C$  sind, so können wir sagen: *Zu einer vorgelegten Lösung  $x, y, c, X, Y, C$  der Gleichungen (2) gehören vier und nur vier Lösungen  $a, b, c, A, B, C$  der Gleichungen (8), die aus einer beliebigen derselben durch die Substitutionen*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ a + \pi & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ a & b + \pi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ a + \pi & b + \pi \end{pmatrix}$$

hervorgehen. Die Funktionen  $A$  und  $B$  nehmen nur positive Werte an; wenn  $A = 0$  ist, so ist  $\operatorname{tg} a = -\operatorname{cotg} c$ , also  $a - c = \pm \frac{\pi}{2}$ , und wenn  $B = 0$  ist, so ist  $\operatorname{tg} b = \operatorname{cotg} c$ , also  $b + c = \pm \frac{\pi}{2}$ . Ziehen wir die zugehörigen Funktionen  $r, s$  mit in Betracht, so können wir auch sagen: zu jeder Lösung  $x, y, c, X, Y, C$  gehören vier und nur vier Lösungen  $a, b, c, A, B, C, r, s$ , die aus einer derselben hervorgehen durch die Substitutionen

$$\begin{pmatrix} a & b & r & s \\ a & b & r & s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & r & s \\ a + \pi & b & -r & s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & r & s \\ a & b + \pi & r & -s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & r & s \\ a + \pi & b + \pi & -r & -s \end{pmatrix}.$$

Diese vier Lösungen  $a, b, c, A, B, C, r, s$  sind für unsere Zwecke gleichwertig, da ihnen dieselbe Bewegung entspricht: man kann also insbesondere stets annehmen, daß die Anfangswerte  $r_0$  und  $s_0$  positiv sind.

Noch einfacher erledigt sich die Frage, wieviel Lösungen  $x, y, c, X, Y, C$  zu einer Lösung  $a, b, c, A, B, C$  gehören. Denn eine Lösung  $a, b, c, A, B, C$  ist stets eine Lösung  $a, b, c, A, B, C, r, s$ , und zu einem Funktionensysteme  $a, b, c, A, B, C, r, s$  bestimmen die Gleichungen (6) ein und nur ein Funktionensystem  $x, y, c, X, Y, C$ . *Zu jeder Lösung  $a, b, c, A, B, C$  der Gleichungen (8) gehört also eine und nur eine Lösung  $x, y, c, X, Y, C$  der Gleichungen (2).*

## 9. Allgemeine Lösung der transformierten Bewegungsgleichungen.

Diese Betrachtungen lehren uns zunächst, welche Anfangsbedingungen wir einer Lösung der Differentialgleichungen (8) vorschreiben können.

Wir nehmen an, es sei ein beliebiges Wertsystem  $a_0, b_0, c_0, A_0, B_0, C_0, r_0, s_0$  vorgelegt, für das  $A_0 = r_0^2, B_0 = s_0^2$  ist,  $A_0$  und  $B_0$  also positiv sind. Wir wollen dieses System singular nennen, wenn eine der Gleichungen  $A_0 = 0, B_0 = 0$  besteht: dann und nur dann ist nämlich das zugehörige

System  $x_0, y_0, c_0, X_0, Y_0, C_0$  singular. Wir behaupten nun zunächst, daß es zu einem beliebigen nicht singulären System von Anfangswerten  $a_0, b_0, c_0, A_0, B_0, C_0, r_0, s_0$  eine und nur eine für alle reellen  $t$  einwertige Lösung  $a, b, c, A, B, C, r, s$  der Gleichungen (8) gibt, die für  $t = 0$  diese Anfangswerte annimmt. Den Anfangswerten  $a_0, b_0, c_0, A_0, B_0, C_0, r_0, s_0$  entspricht nämlich ein und nur ein System  $x_0, y_0, c_0, X_0, Y_0, C_0$ , diesem eine und nur eine Lösung  $x, y, c, X, Y, C$  der Gleichungen (2) und dieser vier und nur vier Lösungen  $a, b, c, A, B, C, r, s$  der Gleichungen (8), von denen eine und nur eine für  $t = 0$  die Werte  $a_0, b_0, c_0, A_0, B_0, C_0, r_0, s_0$  annimmt. Sind die Anfangswerte singular, so muß,

$$(12) \quad \begin{aligned} &\text{wenn } A_0 = 0 \text{ ist, } a_0 - c_0 = \pm \frac{\pi}{2}, \\ &\text{wenn } B_0 = 0 \text{ ist, } b_0 + c_0 = \pm \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

sein, wenn es überhaupt eine zugehörige Lösung geben soll. Sind diese Bedingungen aber erfüllt, dann gelten dieselben Schlüsse, wie früher. Zusammenfassend können wir also sagen: *Jedem den Bedingungen (12) genügenden Systeme von Anfangswerten  $a_0, b_0, c_0, A_0, B_0, C_0, r_0, s_0$  entspricht eine und nur eine für alle reellen  $t$  einwertige Lösung  $a, b, c, A, B, C, r, s$  der Differentialgleichungen (8).*

Wir betrachten kurz den analytischen Charakter dieser Lösungen. Die Funktionen  $c, C$  sind dieselben, wie in der Lösung der Gleichungen (2), also bereits untersucht; ebenso kennen wir  $A, B$ , denn es sind ganze rationale Funktionen von  $x, y, X, Y$ . Es bleiben also nur die Funktionen  $a, b, r, s$  zu untersuchen: wir werden zeigen, daß auch sie an jeder reellen Stelle  $t_0$  analytisch sind. Für  $\mu = 0$  ist das evident; wir nehmen also  $\mu > 0$  an. Daß  $a$  und  $b$  für jedes reelle  $t_0$  analytisch sind, beweisen wir so. Es ist:

$$\operatorname{tg} a = \frac{y - X}{x + Y}.$$

Ist  $x + Y$  an der Stelle  $t = t_0$  von Null verschieden, dann ist dort  $\operatorname{tg} a$  und infolgedessen auch  $a$  analytisch. Verschwindet  $x + Y$  dort, ist aber  $y - X$  für  $t = t_0$  von Null verschieden, so schreiben wir die obige Gleichung so:

$$\operatorname{cotg} \left( a + \frac{\pi}{2} \right) = - \frac{1}{\operatorname{tg} a} = - \frac{x + Y}{y - X}$$

und schließen dasselbe wie eben. Sind aber  $x + Y$  und  $y - X$  an der Stelle  $t = t_0$  gleich Null, so kommt es auf die Koeffizienten von  $t - t_0$  in den Entwicklungen von  $x + Y$  und  $y - X$  an. Diese sind gegeben durch die Werte von

$$\frac{d}{dt}(x + Y), \quad \frac{d}{dt}(y - X),$$

genommen an der Stelle  $t = t_0$ . Diese Größen haben wir schon einmal berechnet und zwar mit Hilfe der Differentialgleichungen (2). Wir finden so

$$(13) \quad \begin{aligned} x + Y &= (t - t_0)(\mu \sin c(t_0) + \dots), \\ y - X &= (t - t_0)(-\mu \cos c(t_0) + \dots) \end{aligned}$$

und haben also

$$\operatorname{tg} a = \frac{-\mu \cos c(t_0) + \dots}{\mu \sin c(t_0) + \dots}.$$

Jetzt ist sicher mindestens eines der konstanten Glieder der beiden Reihen von Null verschieden. Wir können also unsere früheren Schlüsse machen und finden, daß auch jetzt  $a$  an der Stelle  $t_0$  analytisch ist. Ähnlich folgt dies für  $b$ .

Dasselbe zeigen wir nun für  $r$  und  $s$ . Es ist

$$4r^2 = (x + Y)^2 + (y - X)^2.$$

Verschwinden an der Stelle  $t_0$  nicht beide Funktionen  $x + Y$  und  $y - X$ , so ergeben sich aus dieser Gleichung zwei Potenzreihen von  $t - t_0$ , von denen eine und nur eine die Funktion  $r$  an der Stelle  $t_0$  darstellt. Verschwinden dort aber beide Funktionen  $x + Y$  und  $y - X$ , so erhalten wir zufolge der Formeln (13):

$$4r^2 = \mu^2(t - t_0)^2(1 + \dots).$$

Daraus folgen wieder zwei Potenzreihen von  $t - t_0$ , von denen wieder eine und nur eine  $r$  darstellt. In jedem Falle ist also  $r$  an der Stelle  $t_0$  analytisch. Ebenso zeigt man dies für  $s$ . Also ist die Lösung  $a, b, c, A, B, C, r, s$ , die für  $t = 0$  die Werte  $a_0, b_0, c_0, A_0, B_0, C_0, r_0, s_0$  annimmt, für alle reellen  $t$  analytisch.

#### 10. Darstellung der bekannten Integrale und Lösungen mit Hilfe der neuen Koordinaten.

Die Gleichungen (8) lassen außer dem Integral der Energie noch das Integral der Flächengeschwindigkeiten zu, das die einfache Form hat:

$$A - B + C = 2L.$$

Es sagt aus, daß  $F$  nur von  $(a - c)$  und  $(b + c)$  abhängt. Wir können die Existenz dieses Integrals dazu benutzen, unser kanonisches System von  $2 \cdot 3$  Gleichungen auf ein kanonisches System von  $2 \cdot 2$  Gleichungen und eine Quadratur zurückzuführen. Wir werden aber im folgenden von dieser Möglichkeit keinen Gebrauch machen, dagegen wird uns die Existenz des Integrals der Flächengeschwindigkeiten noch sehr nützlich sein.

Wir haben schon früher die Frage nach weiteren Integralen aufgeworfen und nehmen sie hier noch einmal auf. Poincaré stellt

nämlich für sein Problème général de la dynamique eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung dafür auf, daß die Bewegungsgleichungen nicht mehr als  $q + 1$  (gewissen Beschränkungen unterworfenen) Integrale zulassen.<sup>1)</sup> Wenn in unserem Falle diese Bedingung für  $q = 1$  erfüllt wäre, so wäre also, da die Integrale der Energie und der Flächengeschwindigkeiten gegen die erwähnten Beschränkungen nicht verstoßen, bewiesen, daß die Gleichungen (8) keine weiteren solchen Integrale zulassen. Aber diese Bedingung ist *nicht* erfüllt; daraus folgt aber nicht die Existenz weiterer Integrale, denn die Bedingung von Poincaré ist zwar notwendig, reicht aber nicht hin.

Die Bewegungen im Falle  $\mu = 0$  lassen sich durch die neuen Koordinaten natürlich sehr einfach darstellen:

$$\begin{aligned} a &= t + a_0, & b &= t + b_0, & c &= w_0 t + c_0, \\ A &= A_0, & B &= B_0, & C &= C_0 = q^2 w_0. \end{aligned}$$

Aber auch die stationären Bewegungen bekommen eine einfache Form. Aus den Formeln (4) und (6) folgt zunächst, daß für sie

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg}(w_0 t + c_0), \quad \operatorname{tg} b = -\operatorname{tg}(w_0 t + c_0)$$

ist. Diese Gleichungen erfüllen wir durch

$$a = w_0 t + c_0, \quad b = -w_0 t - c_0.$$

Weiter ist

$$A = \frac{\mu^2}{4(1 - w_0)^2}, \quad B = \frac{\mu^2}{4(1 + w_0)^2}.$$

$c$  und  $C$  werden durch die Transformation nicht geändert,  $r$  und  $s$  bestimmen wir aus den Differentialgleichungen (8). Man erhält so folgende Darstellung der stationären Bewegungen:

$$\begin{aligned} a &= w_0 t + c_0, & b &= -w_0 t - c_0, & c &= w_0 t + c_0, \\ \varphi &= 0, & \psi &= w_0 t + c_0, \\ A &= \frac{\mu^2}{4(1 - w_0)^2}, & B &= \frac{\mu^2}{4(1 + w_0)^2}, & C &= C_0 = q^2 w_0, \\ r &= \frac{\mu}{2(1 - w_0)}, & s &= \frac{\mu}{2(1 + w_0)}. \end{aligned}$$

Die Bewegung des Schwerpunktes kann man also so beschreiben: er befindet sich dauernd in einem Endpunkte einer Hauptachse einer Ellipse, und diese Ellipse dreht sich, sich selbst kongruent bleibend, mit der konstanten Geschwindigkeit  $w_0$  um ihren Mittelpunkt. Wir haben also ein ganz anderes Bild, als im Falle  $\mu = 0$ : dort bewegt sich der Schwerpunkt auf einer festen Ellipse, hier ruht er auf einer sich bewegenden Ellipse.

1) A. u. O., Bd. 1, S. 250.

III. Behandlung des transformierten Problems mit Methoden der Himmelsmechanik.

11. Gemeinsame Eigenschaften der in Betracht kommenden Methoden der Himmelsmechanik.

Unsere Aufgabe ist nunmehr, diejenige Lösung  $a, b, c, A, B, C$  der Gleichungen (8), die den Anfangswerten  $a_0, b_0, c_0, A_0, B_0, C_0, r_0, s_0$  entspricht, mit den Methoden der Himmelsmechanik darzustellen. Dabei sind zwei Fälle möglich: die Anfangswerte sind entweder von  $\mu$  unabhängig oder hängen von  $\mu$  ab. Zu der letzteren Klasse von Anfangswerten gehören z. B. die der stationären Bewegungen.

Für uns kommen nur diejenigen Methoden der Himmelsmechanik in Betracht, die nicht auf das Problem der  $n$  Körper beschränkt, sondern auf das Problème général von Poincaré anwendbar sind, und die geeignet sind, die allgemeine Lösung desselben darzustellen. Das sind die ältere Methode von Lagrange und Laplace und die neueren Methoden von Lindstedt und von Bohlin.

Alle diese Methoden versuchen die exakte Lösung  $\varphi_i(t, \mu)$  der Bewegungsgleichungen bis zu einem gewissen Grade zu approximieren. Zu dem Zwecke bestimmt man ein System von Funktionen  $\varphi_i^{(p)}(t, \mu)$ , die für  $t = 0$  dieselben Werte annehmen, wie die  $\varphi_i(t, \mu)$ , und die den Bewegungsgleichungen

$$\frac{d x_i}{d t} - X_i(x, \mu) = 0$$

bis auf Glieder von höherer als  $p$ ter Ordnung genügen. Damit meint man, daß die Funktionen

$$\frac{d \varphi_i^{(p)}}{d t} - X_i(\varphi_k^{(p)}, \mu)$$

an der Stelle  $\mu = 0$  nach Potenzen von  $\mu^n$  ( $n \geq 1$ ) entwickelbar und durch  $\mu^{p + \frac{1}{n}}$  teilbar sind. Bei Lagrange und Laplace haben die Funktionen  $\varphi^{(p)}$  die folgende Form:

$$\varphi^{(p)} = \varphi_0(t) + \mu \varphi_1(t) + \dots + \mu^p \varphi_p(t),$$

bei Lindstedt die folgende:

$$\varphi^{(p)} = \varphi_0(t) + \mu \varphi_{p1}(t, \mu) + \dots + \mu^p \varphi_{pp}(t, \mu),$$

und bei Bohlin ist

$$\varphi^{(p)} = \varphi_0(t) + \mu^{\frac{1}{2}} \varphi_{p1}(t, \mu^{\frac{1}{2}}) + \dots + \mu^p \varphi_{p2p}(t, \mu^{\frac{1}{2}}).$$

Daß diese Funktionen wirklich Näherungslösungen sind, ist plausibel, und im Falle des Problems der  $n$  Körper bestätigt es die Beobachtung der Planetenbewegung, wenn man annimmt, daß diese eine exakte Lösung des Problems der  $n$  Körper darstellt, daß also für das Planetensystem alle Voraussetzungen desselben gelten, insbesondere das Newtonsche Gesetz. Bewiesen hat es zuerst Poincaré<sup>1)</sup>; aus seinen Überlegungen folgt, daß man eine Zahl  $a > 0$ , eine Funktion  $b(\mu)$ , die mit verschwindendem  $\mu$  nach einem Grenzwerte  $b > 0$  konvergiert, und eine Funktion  $\tau(\mu)$ , die für  $\lim \mu = 0$  den Grenzwert  $+\infty$  hat, angeben kann, so daß die Fehler

$$\xi_i = \varphi_i(u, t) - \varphi_i^{(p)}(u, t)$$

für alle  $0 \leq t \leq \tau(\mu)$  den Ungleichungen genügen:

$$(14) \quad |\xi_i| \leq a(e^{b(\mu)t} - 1)\mu^{p + \frac{1}{n}}.$$

Die Funktionen  $\varphi_i^{(p)}(t, \mu)$  haben also sicher folgende Eigenschaft.

$$\lim_{\mu=0} \frac{\varphi_i(t, \mu) - \varphi_i^{(p)}(t, \mu)}{\mu^p} = 0.$$

Man sagt, die Funktion  $\varphi_i^{(p)}$  ist zur Funktion  $\varphi_i$  asymptotisch von der  $p$ ten Ordnung. Durch diese Untersuchungen von Poincaré werden die Näherungsmethoden der Himmelsmechanik also auch für die Analysis wertvoll.

Das Intervall, in das der Fehler  $\xi$  durch die Ungleichung (14) eingeschlossen wird, ist um so kleiner, je kleiner  $\mu$  ist. Über die Abhängigkeit der Länge des Intervalls von  $p$  läßt sich dagegen trotz des Faktors  $\mu^{p + \frac{1}{n}}$  nichts Allgemeines aussagen, weil wir über die Abhängigkeit der Größen  $a$  und  $b$  von  $p$  nichts Allgemeines wissen. Jedenfalls konvergiert die Länge des Intervalls auch bei kleinem  $\mu$  für unendlich wachsendes  $p$  nicht immer gegen Null; Poincaré zeigt sogar, daß das im allgemeinen nicht der Fall ist: die Funktionenfolge  $\varphi^{(p)}(t, \mu)$  ( $p = 0, 1, \dots$ ) ist im allgemeinen divergent. *Wir wissen also nur, daß diese Näherung um so besser ist, je kleiner  $\mu$  ist.*

Vom Standpunkte der Fehlerabschätzung (14) sind die Methode von Lagrange und Laplace und die Methoden von Lindstedt und von Bohlin etwa gleich günstig: daraus folgt natürlich nicht, daß sie es in Wirklichkeit sind. Tatsächlich haben sich in der Astronomie die Reihen von Lindstedt und von Bohlin beim Studium der Bewegung der Planeten während größerer Zeiträume besser bewährt als die von Lagrange

1) A. a. O., Bd. 2, S. 6—8.

und Laplace, die in diesem Falle wegen der in ihnen auftretenden säkularen Glieder ungenügende Resultate liefern: gerade darauf beruht die Bedeutung der Reihen von Lindstedt und von Bohlin für die Himmelsmechanik. Da man außerdem von den Reihen von Lindstedt leicht zu denen von Lagrange und Laplace übergehen kann (indem man nämlich nach Potenzen von  $u$  entwickelt und die Glieder von höherer als  $p$ ter Ordnung wegläßt), das Umgekehrte aber nicht möglich ist, so entscheiden wir uns für die Methoden von Lindstedt und von Bohlin.

## 12. Gemeinsame Grundlage der Methoden von Lindstedt und von Bohlin.

Die beiden Methoden gehören eng zusammen: Die Methode von Lindstedt ist *im allgemeinen* anwendbar; es gibt aber *besondere* Anfangsbedingungen, bei denen sie versagt, bei denen aber die Methode von Bohlin zum Ziele führt. In der Himmelsmechanik tritt der letztere Fall ein, wenn die Umlaufzeiten zweier Planeten sich nahezu wie zwei kleine ganze Zahlen verhalten; in unserem Probleme wird er eintreten, wenn der Anfangsimpuls des Systems nahezu der kritische, d. h. wenn  $w_0 = \frac{C_0}{Q^2}$  nahezu gleich 1 ist.

Die Reihen von Lindstedt und Bohlin leitet Poincaré aus einem Satze her, der dem Satze über die Jacobische partielle Differentialgleichung analog ist. Dieser Satz lautet doch: genügt die Funktion  $S(x, \Xi)$ , die  $n$  willkürliche Konstanten  $\Xi$  enthält, von denen keine additiv ist, der partiellen Differentialgleichung

$$(15) \quad F\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = f,$$

bestimmt man  $x$  und  $X$  durch die Gleichungen

$$\xi = \frac{\partial S}{\partial \Xi}, \quad X = \frac{\partial S}{\partial x}$$

als Funktionen von  $\xi$  und  $\Xi$ , und setzt darin

$$\xi = \xi_0 + t \left( \frac{\partial f}{\partial \Xi} \right)_{\Xi = \Xi_0}, \quad \Xi = \Xi_0,$$

so genügen diese Funktionen  $x, X$  den  $2n$  kanonischen Gleichungen

$$(16) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial X}, \quad \frac{dX}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Der analoge Satz von Poincaré lautet<sup>1)</sup>: genügt die Funktion  $S^{(2)}(x, \Xi)$ , die  $n$  willkürliche Konstanten  $\Xi$ , von denen keine additiv ist, enthält,

1) A. a. O., Bd. 2, S. 21—22.

der partiellen Differentialgleichung (15) bis auf Glieder von höherer als  $p$ ter Ordnung, bestimmt man  $x$  und  $X$  durch die Gleichungen

$$\xi = \frac{\partial S^{(p)}}{\partial \Xi}, \quad X = \frac{\partial S}{\partial x}$$

als Funktionen von  $\xi$  und  $\Xi$  und setzt darin wieder

$$\xi = \xi_0 + t \left( \frac{\partial f}{\partial \Xi} \right)_{\Xi = \Xi_0}, \quad \Xi = \Xi_0,$$

so genügen diese Funktionen  $x, X$  den  $2n$  kanonischen Gleichungen (16) bis auf Glieder von höherer als  $p'$ ter Ordnung, wo  $p'$  nicht größer als  $p$  ist, im übrigen aber von der Wahl von  $S^{(p)}$  abhängt. Die Funktionen  $x, X$  sind daher zu der entsprechenden exakten Lösung asymptotisch von  $p'$ ter Ordnung. Dieser Satz enthält also eine Methode, die exakte Lösung asymptotisch darzustellen, und die Methoden von Lindstedt und von Bohlin sind Spezialfälle dieser Methode, die bestimmten einfachen Formen der Funktion  $S^{(p)}$  entsprechen. Für die Methode von Lindstedt ist  $p' = p$ , für die von Bohlin  $p' = p - \frac{1}{2}$ .

**13. Behandlung des allgemeinen Falles des Problems mit Hilfe der Methode von Lindstedt.**

*Wir beginnen nun damit, die Methode von Lindstedt<sup>1)</sup> auf unser Problem anzuwenden.*

Aus dem Ausdrücke der Energie unseres Systems

$$F = A + B + \frac{1}{2q^2} C^2 - \mu (\sqrt{A} \cos(a - c) + \sqrt{B} \cos(b + c))$$

ergibt sich die folgende Jacobische partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial S}{\partial a} + \frac{\partial S}{\partial b} + \frac{1}{2q^2} \left( \frac{\partial S}{\partial c} \right)^2 - \mu \left( \sqrt{\frac{\partial S}{\partial a}} \cos h + \sqrt{\frac{\partial S}{\partial b}} \cos k \right) = f,$$

wenn wir abkürzend setzen

$$h = a - c, \quad k = b + c.$$

*Wir wollen sie bis auf Glieder von höherer als  $p$ ter Ordnung erfüllen durch folgenden Ansatz:*

$$S^{(p)} = S_0 + \mu S_1(h, k) + \mu^2 S_2(h, k) + \dots + \mu^p S_p(h, k),$$

wo

$$S_0 = Aa + Bb + Cc$$

ist. Es genügt in unserem Falle,  $S_1 \dots S_p$  als nur von  $h$  und  $k$  abhängig anzunehmen, weil die Energiefunktion  $F$  nur von  $h$  und  $k$  abhängt; sonst müßten wir die Funktionen  $S_1 \dots S_p$  als von  $a, b, c$  abhängig ansetzen.

1) A. a. O., Bd. 2, Kap. 9.

Wir gehen mit der Funktion  $S^{(p)}$  in die partielle Differentialgleichung ein, entwickeln nach Potenzen von  $\mu$  und setzen die Koeffizienten von  $\mu^0, \mu^1, \dots, \mu^p$  auf beiden Seiten einander gleich. Wenn wir noch die Bezeichnung  $\omega = \frac{\Gamma}{q^2}$  einführen, die der Bezeichnung  $w = \frac{c}{q^2}$  analog ist, so erhalten wir folgende  $(p + 1)$  Gleichungen:

$$(17, 0) \quad A + B + \frac{1}{2} q^2 \omega^2 = f_0,$$

$$(17, i) \quad \frac{\partial S_i}{\partial h} (1 - \omega) + \frac{\partial S_i}{\partial k} (1 + \omega) = \Phi_i + f_i \quad (1 \leq i \leq p).$$

Darin ist  $\Phi_i$  eine ganze rationale Funktion von  $\frac{\partial S_j}{\partial h}$  und  $\frac{\partial S_j}{\partial k}$  ( $1 \leq j \leq i - 1$ ), deren Koeffizienten die Form  $P + P' \cosh + P'' \cos k$  haben, wo  $P, P', P''$  rationale Funktionen von  $\varrho = \sqrt{A}$  und  $\sigma = \sqrt{B}$  sind.

Wir werden jetzt zeigen, daß man aus diesen Gleichungen die Funktionen  $S_1 \dots S_p$  so bestimmen kann, daß *erstens* ihre Ableitungen nach  $a, b, c, A, B, \Gamma$  die Form

$$(18) \quad \sum_{m,n} (P_{mn} \cos(mh + nk) + Q_{mn} \sin(mh + nk))$$

haben, wo die  $P_{mn}$  und  $Q_{mn}$  rationale Funktionen von gewissen Verbindungen  $\nu_{\alpha\beta} = \alpha(1 - \omega) + \beta(1 + \omega)$  und von  $\varrho$  und  $\sigma$  sind, und daß *zweitens* diese Ableitungen für  $a = a_0, b = b_0, c = c_0, A = A_0, B = B_0, \Gamma = \Gamma_0$  verschwinden. Die letztere Eigenschaft wird uns nachher gestatten, die Anfangsbedingungen in einfacher Weise zu erfüllen.

Wir beweisen die Behauptung zunächst für  $S_1$ . Die Gleichung (17, 1) lautet:

$$\frac{\partial S_1}{\partial h} (1 - \omega) + \frac{\partial S_1}{\partial k} (1 + \omega) = \varrho \cos h + \sigma \cos k + f_1.$$

Wir können sie erfüllen durch:

$$\bar{S}_1 = \frac{\varrho}{1 - \omega} \sin h + \frac{\sigma}{1 + \omega} \sin k, \quad \bar{f}_1 = 0.$$

Die Ableitungen dieser Funktion  $\bar{S}_1$  haben die Form (18), genügen aber den Anfangsbedingungen nicht; jedoch können wir aus ihr leicht eine andere Lösung der Gleichung (17, 1) ableiten, deren Ableitungen die Form (18) haben *und* den Anfangsbedingungen genügen, nämlich

$$S = \bar{S}_1 - \left(\frac{\partial \bar{S}_1}{\partial h}\right)_0 h - \left(\frac{\partial \bar{S}_1}{\partial k}\right)_0 k - \left(\frac{\partial \bar{S}_1}{\partial A}\right)_0 A - \left(\frac{\partial \bar{S}_1}{\partial B}\right)_0 B - \left(\frac{\partial \bar{S}_1}{\partial \Gamma}\right)_0 \Gamma;$$

dabei soll der Index Null andeuten, daß nach der Differentiation  $a = a_0, b = b_0, c = c_0, A = A_0, B = B_0, \Gamma = \Gamma_0$  gesetzt ist. Diese Funktion genügt allen Anforderungen, wenn wir

$$f_1 = - \left(\frac{\partial \bar{S}_1}{\partial h}\right)_0 (1 - \omega) - \left(\frac{\partial \bar{S}_1}{\partial k}\right)_0 (1 + \omega)$$

setzen. Damit ist die Behauptung für  $S_1$  bewiesen.

Wir nehmen nun an, sie sei für  $S_1, S_2 \dots S_{i-1}$  bewiesen: wir wollen zeigen, daß sie dann auch für  $S_i$  gilt. Die Gleichung (17,  $i$ ) lautet:

$$\frac{\partial S_i}{\partial h}(1 - \omega) + \frac{\partial S_i}{\partial k}(1 + \omega) = \Phi_i + f_i.$$

Darin hat  $\Phi_i$  die Form (18): denn  $\Phi_i$  ist eine ganze rationale Funktion von  $\frac{\partial S_j}{\partial h}, \frac{\partial S_j}{\partial k} (1 \leq j \leq i - 1)$ , deren Koeffizienten unter die Form (18) fallen; alle diese  $\frac{\partial S_j}{\partial h}, \frac{\partial S_j}{\partial k}$  haben die Form (18), weil die Behauptung für  $1 \leq j \leq i - 1$  bereits bewiesen ist; Summe und Produkt zweier Funktionen (18) sind wieder Funktionen (18): also hat  $\Phi_i$  die Form (18), und wir können setzen:

$$\Phi_i = \sum_{m,n} (P_{mn} \cos(mh + nk) + Q_{mn} \sin(mh + nk)).$$

Wir können die Gleichung (17,  $i$ ) nun erfüllen durch

$$\bar{S}_i = \sum'_{m,n} \left( -\frac{Q_{mn}}{m(1-\omega) + n(1+\omega)} \cos(mh + nk) + \frac{P_{mn}}{m(1-\omega) + n(1+\omega)} \sin(mh + nk) \right),$$

$$\bar{f}_i = -P_{00},$$

wo bei der Summation  $\Sigma'$  das Wertepaar  $m = 0, n = 0$  auszuschließen ist. Die Ableitungen dieser Funktion haben die Form (18), aber sie erfüllen nicht die Anfangsbedingungen. Wir verfahren nun genau so wie im Falle  $i = 1$ : wir setzen

$$(19) \quad S_i = \bar{S}_i - \left( \frac{\partial \bar{S}_i}{\partial h} \right)_0 h - \left( \frac{\partial \bar{S}_i}{\partial k} \right)_0 k - \left( \frac{\partial \bar{S}_i}{\partial A} \right)_0 A - \left( \frac{\partial \bar{S}_i}{\partial B} \right)_0 B - \left( \frac{\partial \bar{S}_i}{\partial \Gamma} \right)_0 \Gamma,$$

$$f_i = \bar{f}_i - \left( \frac{\partial \bar{S}_i}{\partial h} \right)_0 (1 - \omega) - \left( \frac{\partial \bar{S}_i}{\partial k} \right)_0 (1 + \omega).$$

Diese Funktion  $S_i$  genügt allen Anforderungen. Die Behauptung gilt also auch für  $S_i$ , und damit ist sie vollständig bewiesen.

Wir bestimmen nun  $a, b, c$  und  $A, B, C$  als Funktionen von  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $A, B, \Gamma^1$ ) durch die Gleichungen

$$(20) \quad \xi = \frac{\partial S^{(p)}}{\partial \Xi} = x + \mu \bar{\xi}(\mu, x, \Xi), \quad X = \frac{\partial S^{(p)}}{\partial x} = \Xi + \mu \bar{X}(\mu, x, \Xi),$$

wo  $\bar{\xi}, \bar{x}$  in bezug auf die  $x$  die Periode  $2\pi$  haben. Dank den Anfangsbedingungen, die wir den Funktionen  $S_1 \dots S_p$  auferlegt haben, genügen diesen Gleichungen folgende Wertssysteme:

$$\begin{aligned} \xi &= x_0, & X &= \Xi_0, \\ x &= x_0, & \Xi &= \Xi_0. \end{aligned}$$

1) Die Funktionen dieser vier Systeme bezeichnen wir abkürzend mit  $x, X, \xi, \Xi$ .

Die Auflösung der Gleichungen (20) nach  $x$  und  $X$  ergibt

$$(21) \quad x = \xi + \mu \bar{x}(\mu, \xi, \Xi), \quad X = \Xi + \mu \bar{X}(\mu, \xi, \Xi),$$

wo  $\bar{x}$  und  $\bar{X}$  in bezug auf die  $\xi$  die Periode  $2\pi$  haben, und diesen Gleichungen genügen wieder die Wertsysteme

$$\begin{aligned} x &= x_0, & X &= \Xi_0, \\ \xi &= x_0, & \Xi &= \Xi_0. \end{aligned}$$

Wir setzen nun in den Gleichungen (21)

$$(22) \quad \xi = x_0 + t \left( \frac{\partial f}{\partial \Xi} \right)_{\Xi = \Xi_0 = X_0}, \quad \Xi = \Xi_0 = X_0.$$

Die so erhaltenen Funktionen  $x$  und  $X$  genügen also nach dem Satze von Poincaré den Bewegungsgleichungen bis auf die Glieder von höherer als  $p$ ter Ordnung, sind also zu der entsprechenden exakten Lösung asymptotisch von der  $p$ ten Ordnung. Man kann aus den Funktionen  $x$   $X$  sogar sehr leicht einfachere Funktionen ableiten, die die letzte Eigenschaft mit  $x$ ,  $X$  teilen: entwickelt man nämlich die rechten Seiten von (21) nach Potenzen von  $\mu$ , bezeichnet mit  $x^*$ ,  $X^*$  die Summen der ersten  $(p+1)$  Glieder und setzt dann die Gleichungen (22) ein, so sind, wie leicht ersichtlich,  $x^*$ ,  $X^*$  solche Funktionen.

In dieser Betrachtung sind allerdings stillschweigend folgende beiden Voraussetzungen gemacht:

1. Keine der Größen  $A_0$  und  $B_0$  ist gleich Null oder konvergiert mit verschwindendem  $\mu$  nach Null; dasselbe gilt dann also für  $v_0$  und  $s_0$ .
2. Keine der den in  $S^{(p)}$  auftretenden Nennern  $v_{\alpha\beta}$  entsprechenden Verbindungen  $\alpha(1-w_0) + \beta(1+w_0)$  ist gleich Null oder konvergiert mit verschwindendem  $\mu$  nach Null.

Durch die Bedingung 1. werden z. B. die stationären Bewegungen von unseren Betrachtungen ausgeschlossen; für sie ist ja

$$A_0 = \frac{\mu^2}{4(1-w_0)^2}, \quad B_0 = \frac{\mu^2}{4(1+w_0)^2},$$

also  $\lim_{\mu=0} A_0 = \lim_{\mu=0} B_0 = 0$ . Da in unserem Falle, wie leicht zu zeigen ist, alle  $\Phi_i$ , also auch alle  $S_i$  Summen von nur endlich vielen Gliedern sind, so werden durch die Bedingung 2. in unserem Falle nur eine endliche Anzahl von Werten  $\lim_{\mu=0} w_0$  ausgeschlossen. Hierzu gehören stets

die Werte  $w_0 = \pm 1$ , weil die Nenner  $1-w$  und  $1+w$  bereits in  $S_1$  auftreten. Die durch die Bedingung 2. ausgeschlossenen Bewegungen

werden wir später mit Hilfe der Methode von Bohlin behandeln; auf die Fälle, die der Bedingung 1. nicht genügen, gehen wir dagegen nicht ein.

Wir werden jetzt die Rechnung im Falle  $p = 2$  wirklich durchführen: wir wählen  $p = 2$ , weil für  $p = 1$  noch nicht alles Wesentliche hervortritt.

Wir kennen schon  $S_0$  und  $S_1$ : es ist

$$S_0 = Aa + Bb + \Gamma c,$$

und  $S_1$  ergibt sich aus

$$\bar{S}_1 = \frac{\rho}{1-\omega} \sin h + \frac{\sigma}{1+\omega} \sin k$$

vermöge der ersten Gleichung (19). Aus der Gleichung (17, 2) folgt nun zunächst  $\bar{S}_2$ :

$$\begin{aligned} S_2 = & \left( -\frac{1}{8q^2} \frac{\rho^2}{(1-\omega)^3} + \frac{1}{8} \frac{1}{(1-\omega)^2} \right) \sin 2h \\ & + \left( \frac{1}{2q^2} \frac{\rho_0 \rho}{(1-\omega_0)(1-\omega)^2} - \frac{1}{4} \frac{\rho_0}{\rho(1-\omega_0)(1-\omega)} \right) (\sin(h+h_0) + \sin(h-h_0)) \\ & + \left( -\frac{1}{8q^2} \frac{\sigma^2}{(1+\omega)^3} + \frac{1}{8} \frac{1}{(1+\omega)^2} \right) \sin 2k \\ & + \left( \frac{1}{2q^2} \frac{\sigma_0 \sigma}{(1+\omega_0)(1+\omega)^2} - \frac{1}{4} \frac{\sigma_0}{\sigma(1+\omega_0)(1+\omega)} \right) (\sin(k+k_0) + \sin(k-k_0)) \\ & + \frac{1}{4q^2} \frac{\rho \sigma}{1-\omega^2} \sin(h+k) - \frac{1}{4q^2} \frac{\rho \sigma}{\omega(1-\omega^2)} \sin(h-k) \\ & - \frac{1}{2q^2} \frac{\rho \sigma_0}{(1+\omega_0)(1-\omega)^2} (\sin(h+h_0) + \sin(h-k_0)) \\ & - \frac{1}{2q^2} \frac{\rho_0 \sigma}{(1-\omega_0)(1+\omega)^2} (\sin(h_0+k) - \sin(h_0-k)), \end{aligned}$$

und daraus ergibt sich  $S_2$  vermöge der ersten Gleichung (19). Durch die Wahl der Funktionen  $S_0, S_1, S_2$  ist nun die Funktion  $f = f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2$  bestimmt: man findet, wenn man additive Konstanten, die ja bedeutungslos sind, fortläßt:

$$\begin{aligned} f_0 &= A + B + \frac{1}{2} q^2 \omega^2, \\ (23) \quad f_1 &= \omega \left( \left( \frac{\partial \bar{S}_1}{\partial h} \right)_0 - \left( \frac{\partial \bar{S}_1}{\partial k} \right)_0 \right), \\ f_2 &= \frac{1}{4q^2} \left( \frac{A}{(1-\omega)^2} + \frac{B}{(1+\omega)^2} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1-\omega} + \frac{1}{1+\omega} \right) + \omega \left( \left( \frac{\partial \bar{S}_2}{\partial h} \right)_0 - \left( \frac{\partial \bar{S}_2}{\partial k} \right)_0 \right). \end{aligned}$$

Wir stellen nun die sechs Gleichungen (20)

$$\xi = \frac{\partial S^{(2)}}{\partial \Xi}, \quad X = \frac{\partial S^{(2)}}{\partial x}$$

auf. Der Bequemlichkeit halber setzen wir nach der Differentiation statt  $A, B, \Gamma, \rho, \sigma, \omega$  und  $A_0, B_0, \Gamma_0, \rho_0, \sigma_0, \omega_0$  die Größen  $A_0, B_0, C_0,$

$r_0, s_0, w_0$  ein; das ist erlaubt, da diese Gleichungen nicht mehr differenziert werden und wir nach der zweiten Gleichung (22) schließlich doch  $A, B, \Gamma, \varrho, \sigma, \omega$  und  $A_0, B_0, \Gamma_0, \varrho_0, \sigma_0, \omega_0$  durch  $A_0, B_0, C_0, r_0, s_0, w_0$  zu ersetzen haben. Man erhält so die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= a + \frac{\mu}{2} \frac{1}{r_0(1-w_0)} (\sin h - \sin h_0) + \frac{\mu^2}{8q^2} \left\{ -\frac{1}{(1-w_0)^3} \sin 2h \right. \\
 &\quad + \left( \frac{2}{(1-w_0)^3} + \frac{q^2}{r_0^2(1-w_0)^2} \right) (\sin(h+h_0) + \sin(h-h_0)) \\
 &\quad - \left( \frac{1}{(1-w_0)^3} + \frac{q^2}{r_0^2(1-w_0)^2} \right) \sin 2h_0 + \frac{s_0}{r_0(1-w_0^2)} \sin(h+k) \\
 &\quad - \frac{s_0}{r_0 w_0(1-w_0^2)} \sin(h-k) - \frac{2s_0}{r_0(1-w_0^2)(1-w_0)} (\sin(h+k_0) + \sin(h-k_0)) \\
 &\quad \left. + \frac{s_0}{r_0(1-w_0)^2} \sin(h_0+k_0) + \frac{s_0}{r_0 w_0(1-w_0)^2} \sin(h_0-k_0) \right\}, \\
 \beta &= b + \frac{\mu}{2} \frac{1}{s_0(1+w_0)} (\sin k - \sin k_0) + \frac{\mu^2}{8q^2} \left\{ -\frac{1}{(1+w_0)^3} \sin 2k \right. \\
 &\quad + \left( \frac{2}{(1+w_0)^3} + \frac{q^2}{s_0^2(1+w_0)^2} \right) (\sin(k+k_0) + \sin(k-k_0)) \\
 &\quad - \left( \frac{1}{(1+w_0)^3} + \frac{q^2}{s_0^2(1+w_0)^2} \right) \sin 2k_0 + \frac{r_0}{s_0(1-w_0^2)} \sin(h+k) \\
 &\quad - \frac{r_0}{s_0 w_0(1-w_0^2)} \sin(h-k) - \frac{2r_0}{s_0(1-w_0^2)(1+w_0)} (\sin(h_0+k) - \sin(h_0-k)) \\
 (24) \quad &\quad \left. + \frac{r_0}{s_0(1+w_0)^2} \sin(h_0+k_0) + \frac{r_0}{s_0 w_0(1-w_0)^2} \sin(h_0-k_0) \right\}, \\
 \gamma &= c + \frac{\mu}{q^2} \left\{ \frac{r_0}{(1-w_0)^2} (\sin h - \sin h_0) - \frac{s_0}{(1+w_0)^2} (\sin k - \sin k_0) \right\} \\
 &\quad + \frac{\mu^2}{4q^4} \left\{ -\left( \frac{3r_0^2}{2(1-w_0)^4} - \frac{q^2}{(1-w_0)^3} \right) \sin 2h - \frac{5r_0^2}{2(1-w_0)^4} \sin 2h_0 \right. \\
 &\quad + \left( \frac{4r_0^2}{(1-w_0)^4} - \frac{q^2}{(1-w_0)^3} \right) (\sin(h+h_0) + \sin(h-h_0)) \\
 &\quad + \left( \frac{3s_0^2}{2(1+w_0)^4} - \frac{q^2}{(1+w_0)^3} \right) \sin 2k + \frac{5s_0^2}{2(1+w_0)^4} \sin 2k_0 \\
 &\quad - \left( \frac{4s_0^2}{(1+w_0)^4} - \frac{q^2}{(1+w_0)^3} \right) (\sin(k+k_0) + \sin(k-k_0)) \\
 &\quad + \frac{2r_0 s_0 w_0}{(1-w_0^2)^2} \sin(h+k) + \frac{r_0 s_0 (1-3w_0^2)}{w_0^3 (1-w_0^2)^2} \sin(h-k) \\
 &\quad - \frac{4r_0 s_0}{(1-w_0^2)(1-w_0)^2} (\sin(h+k_0) + \sin(h-k_0)) \\
 &\quad - \frac{4r_0 s_0}{(1-w_0^2)(1+w_0)^2} (\sin(h_0+k) - \sin(h_0-k)) \\
 &\quad \left. + \frac{2r_0 s_0 w_0 (7+w_0^2)}{(1-w_0^2)^3} \sin(h_0+k_0) - \frac{r_0 s_0 (1-12w_0^2-5w_0^4)}{w_0^3 (1-w_0^2)^3} \sin(h_0-k_0) \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \mathbf{A} + \mu \frac{r_0}{1-w_0} (\cos h - \cos h_0) + \frac{\mu^2}{4q^2} \left\{ - \left( \frac{r_0^2}{(1-w_0)^3} - \frac{q^2}{(1-w_0)^2} \right) \cos 2h \right. \\
 &\quad + \left( \frac{2r_0^2}{(1-w_0)^3} - \frac{q^2}{(1-w_0)^2} \right) (\cos (h+h_0) + \cos (h-h_0) - 1) \\
 &\quad - \frac{r_0^2}{(1-w_0)^3} \cos 2h_0 + \frac{r_0 s_0}{1-w_0^2} \cos (h+k) - \frac{r_0 s_0}{w_0(1-w_0^2)} \cos (h-k) \\
 &\quad - \frac{2r_0 s_0}{(1-w_0^2)(1-w_0)} (\cos (h+k_0) + \cos (h-k_0)) \\
 &\quad \left. + \frac{r_0 s_0}{(1-w_0)^2} \cos (h_0+k_0) + \frac{r_0 s_0}{w_0(1-w_0)^2} \cos (h_0-k_0), \right. \\
 (25) \quad B &= \mathbf{B} + \mu \frac{s_0}{1+w_0} (\cos k - \cos k_0) + \frac{\mu^2}{4q^2} \left\{ - \left( \frac{s_0^2}{(1+w_0)^3} - \frac{q^2}{(1+w_0)^2} \right) \cos 2k \right. \\
 &\quad + \left( \frac{2s_0^2}{(1+w_0)^3} - \frac{q^2}{(1+w_0)^2} \right) (\cos (k+k_0) + \cos (k-k_0) - 1) \\
 &\quad - \frac{s_0^2}{(1+w_0)^3} \cos 2k_0 + \frac{r_0 s_0}{1-w_0^2} \cos (h+k) + \frac{r_0 s_0}{w_0(1-w_0^2)} \cos (h-k) \\
 &\quad - \frac{2r_0 s_0}{(1-w_0^2)(1+w_0)} (\cos (h_0+k) + \cos (h_0-k)) \\
 &\quad \left. + \frac{r_0 s_0}{(1+w_0)^2} \cos (h_0+k_0) - \frac{r_0 s_0}{w_0(1+w_0)^2} \cos (h_0-k_0), \right. \\
 C &= \Gamma - (A - \mathbf{A}) + (B - \mathbf{B}).
 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen bestimmen  $x, X$  als Funktionen von  $\xi, \Xi$ , die in  $\mu$  an der Stelle  $\mu = 0$  analytisch sind. Wir berechnen aber nicht diese Funktionen  $x, X$ , sondern die einfacheren Funktionen  $x^*, X^*$ , die aus  $x, X$  entstehen, wenn man darin die Glieder von höherer als zweiter Ordnung wegläßt. Dieses geschieht in zwei Schritten: erstens berechnen wir  $x^*$  aus den Gleichungen (24) als Funktionen von  $\xi, \Xi$ ; zweitens setzen wir diese Funktionen  $x^*$  an Stelle der  $x$  in die Gleichungen (25) ein und entwickeln nach Potenzen von  $\mu$ ; dann sind die  $X^*$  die Summen der drei ersten Glieder dieser drei Reihen. Die Durchführung dieser Rechnung bietet keine Schwierigkeit, sie ergibt die folgenden Gleichungen<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned}
 (26) \quad a^* &= \alpha - \frac{\mu}{2} \frac{1}{r_0(1-w_0)} (\sin \eta - \sin \eta_0) \\
 &\quad + \frac{\mu^2}{8q^2} \left\{ - \left( \frac{1}{(1-w_0)^3} - \frac{q^2}{r_0^2(1-w_0)^2} \right) \sin 2\eta - \frac{2q^2}{r_0^2(1-w_0)^2} \sin (\eta + \eta_0) \right. \\
 &\quad + \left( \frac{1}{(1-w_0)^3} + \frac{q^2}{r_0^2(1-w_0)^2} \right) \sin 2\eta_0 - \frac{4}{(1-w_0)^3} \sin (\eta - \eta_0) \\
 &\quad + \frac{s_0}{r_0(1+w_0)^2} \sin (\eta + \alpha) + \frac{4s_0 w_0}{r_0(1-w_0^2)^2} \sin (\eta + \alpha_0) \\
 &\quad - \frac{s_0}{r_0(1-w_0)^2} \sin (\eta_0 + \alpha_0) + \frac{s_0}{r_0 w_0(1+w_0)^2} \sin (\eta - \alpha) \\
 &\quad \left. + \frac{4s_0}{r_0(1-w_0^2)^2} \sin (\eta - \alpha_0) - \frac{s_0}{r_0 w_0(1-w_0)^2} \sin (\eta_0 - \alpha_0) \right\},
 \end{aligned}$$

1) Wir setzen, der Definition von  $h$  und  $k$  entsprechend,  $\eta = \alpha - \gamma, \alpha = \beta + \gamma$ .

$$\begin{aligned}
 b^* = & \beta - \frac{\mu}{2} \frac{1}{s_0(1+w_0)} (\sin \kappa - \sin \kappa_0) \\
 & + \frac{\mu^2}{8q^2} \left\{ - \left( \frac{1}{(1+w_0)^3} - \frac{q^2}{s_0^2(1+w_0)^2} \right) \sin 2\kappa - \frac{2q^2}{s_0^2(1+w_0)^2} \sin(\kappa + \kappa_0) \right. \\
 & + \left( \frac{1}{(1+w_0)^3} + \frac{q^2}{s_0^2(1+w_0)^2} \right) \sin 2\kappa_0 - \frac{4}{(1+w_0)^3} \sin(\kappa - \kappa_0) \\
 & + \frac{r_0}{s_0(1-w_0)^2} \sin(\eta + \kappa) - \frac{4r_0w_0}{s_0(1-w_0^2)^2} \sin(\eta_0 + \kappa) \\
 & - \frac{r_0}{s_0(1+w_0)^2} \sin(\eta_0 + \kappa_0) + \frac{r_0}{s_0w_0(1-w_0)^2} \sin(\eta - \kappa) \\
 & \left. - \frac{4r_0}{s_0(1-w_0^2)^2} \sin(\eta_0 - \kappa) - \frac{r_0}{s_0w_0(1+w_0)^2} \sin(\eta_0 - \kappa_0) \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c^* = & \gamma + \frac{\mu}{q^2} \left\{ \frac{r_0}{(1-w_0)^2} (\sin \eta - \sin \eta_0) - \frac{s_0}{(1+w_0)^2} (\sin \kappa - \sin \kappa_0) \right\} \\
 (26) \quad & + \frac{\mu^2}{8q^4} \left\{ - \frac{r_0^2}{(1-w_0)^4} (\sin 2\eta + 4 \sin(\eta + \eta_0) - 5 \sin 2\eta_0) \right. \\
 & - \left( \frac{12r_0^2}{(1-w_0)^4} - \frac{4q^2}{(1-w_0)^3} \right) \sin(\eta - \eta_0) \\
 & + \frac{s_0^2}{(1+w_0)^4} (\sin 2\kappa + 4 \sin(\kappa + \kappa_0) - 5 \sin 2\kappa_0) \\
 & + \left( \frac{12s_0^2}{(1+w_0)^4} - \frac{4q^2}{(1+w_0)^3} \right) \sin(\kappa - \kappa_0) \\
 & - \frac{4r_0s_0w_0}{(1-w_0^2)^2} \sin(\eta + \kappa) + \frac{4r_0s_0(1+3w_0)}{(1-w_0^2)^2(1-w_0)} \sin(\eta + \kappa_0) \\
 & - \frac{4r_0s_0(1-3w_0)}{(1-w_0^2)^2(1+w_0)} \sin(\eta_0 + \kappa) - \frac{4r_0s_0w_0(1+w_0^2)}{(1-w_0^2)^3} \sin(\eta_0 + \kappa_0) \\
 & - \frac{2r_0s_0(1+w_0^2)}{w_0^2(1-w_0^2)^2} \sin(\eta - \kappa) + \frac{4r_0s_0(3+w_0)}{(1-w_0^2)^2(1-w_0)} \sin(\eta - \kappa_0) \\
 & \left. + \frac{4r_0s_0(3-w_0)}{(1-w_0^2)^2(1+w_0)} \sin(\eta_0 - \kappa) - \frac{2r_0s_0(1-12w_0^2-5w_0^4)}{w_0^2(1-w_0^2)^3} \sin(\eta_0 - \kappa_0) \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A^* = & A + \mu \frac{r_0}{1-w_0} (\cos \eta - \cos \eta_0) + \frac{\mu^2}{4q^2} \left\{ \frac{r_0^2}{(1-w_0)^3} (\cos 2\eta - \cos 2\eta_0) \right. \\
 & + \left( \frac{4r_0^2}{(1-w_0)^3} - \frac{2q^2}{(1-w_0)^2} \right) (\cos(\eta - \eta_0) - 1) \\
 (27) \quad & - \frac{r_0s_0}{(1+w_0)^2} \cos(\eta + \kappa) - \frac{4r_0s_0w_0}{(1-w_0^2)^2} \cos(\eta + \kappa_0) \\
 & + \frac{r_0s_0}{(1-w_0)^2} \cos(\eta_0 + \kappa_0) - \frac{r_0s_0}{w_0(1+w_0)^2} \cos(\eta - \kappa) \\
 & \left. - \frac{4r_0s_0}{(1-w_0^2)^2} \cos(\eta - \kappa_0) + \frac{r_0s_0}{w_0(1-w_0)^2} \cos(\eta_0 - \kappa_0) \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B^* &= B + \mu \frac{s_0}{1+w_0} (\cos \kappa - \cos \kappa_0) + \frac{\mu^2}{4q^2} \left\{ \frac{s_0^2}{(1+w_0)^3} (\cos 2\kappa - \cos 2\kappa_0) \right. \\
 &+ \left( \frac{4s_0^2}{(1+w_0)^3} - \frac{2q^2}{(1+w_0)^2} \right) (\cos (\kappa - \kappa_0) - 1) \\
 &- \frac{r_0 s_0}{(1-w_0)^2} \cos (\eta + \kappa) + \frac{4r_0 s_0 w_0}{(1-w_0^2)^2} \cos (\eta_0 + \kappa) \\
 (27) \quad &+ \frac{r_0 s_0}{(1+w_0)^2} \cos (\eta_0 + \kappa_0) + \frac{r_0 s_0}{w_0(1-w_0)^2} \cos (\eta - \kappa) \\
 &\left. - \frac{4r_0 s_0}{(1-w_0^2)^2} \cos (\eta_0 - \kappa) - \frac{r_0 s_0}{w_0(1+w_0)^2} \cos (\eta_0 - \kappa_0) \right\}, \\
 C^* &= \Gamma - (A^* - A) + (B^* - B).
 \end{aligned}$$

Nun haben wir endlich  $\alpha, \beta, \gamma$  aus der ersten Gleichung (22) als Funktionen der Zeit zu berechnen, wobei  $f$  durch (23) gegeben ist. Wir erhalten so:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= a_0 + \left\{ 1 + \frac{\mu^2}{4q^2} \frac{1}{(1-w_0)^2} \right\} t, \\
 \beta &= b_0 + \left\{ 1 + \frac{\mu^2}{4q^2} \frac{1}{(1+w_0)^2} \right\} t, \\
 \gamma &= c_0 + \left\{ w_0 + \frac{\mu}{q^2} \left( \left( \frac{\partial \bar{S}_1}{\partial \bar{h}} \right)_0 - \left( \frac{\partial \bar{S}_1}{\partial k} \right)_0 \right) \right. \\
 &+ \frac{\mu^2}{q^2} \left( \frac{1}{2q^2} \left( \frac{A_0}{(1-w_0)^3} - \frac{B_0}{(1+w_0)^3} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{(1-w_0)^2} - \frac{1}{(1+w_0)^2} \right) \right. \\
 &\left. \left. - \left( \frac{\partial \bar{S}_2}{\partial \bar{h}} \right)_0 + \left( \frac{\partial \bar{S}_2}{\partial k} \right)_0 \right) \right\} t.
 \end{aligned}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichungen (26) und (27) ein, so sind wir am Ziel: die Funktionen  $\alpha^*, b^*, c^*, A^*, B^*, C^*$  nehmen für  $t=0$  die Werte  $a_0, b_0, c_0, A_0, B_0, C_0$  an und genügen den Bewegungsgleichungen (8) bis auf Glieder von höherer als zweiter Ordnung, sind also zu der entsprechenden exakten Lösung asymptotisch von der zweiten Ordnung.

Wir wollen jetzt diese asymptotische Darstellung der Lösung unserer Bewegungsgleichungen kurz diskutieren. Wenn wir in den Funktionen  $\alpha^*, b^*, c^*, A^*, B^*, C^*$  alle periodischen Funktionen weglassen, deren Amplitude zugleich mit  $\mu$  verschwindet, so erhalten wir eine Bewegung  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ , deren Abweichung von der zu diskutierenden Bewegung für alle  $t$  unterhalb einer von  $t$  unabhängigen, mit  $\mu$  gegen Null konvergierenden Grenze bleibt. Diese Bewegung  $\mathfrak{B}$  wird uns also einen

guten Überblick über die zu diskutierende Bewegung  $\mathfrak{B}^*$  geben. Die Bewegung  $\mathfrak{B}$  ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \alpha, & \bar{A} &= A_0, \\ \bar{b} &= \beta, & \bar{B} &= B_0, \\ \bar{c} &= \gamma, & \bar{C} &= C_0.\end{aligned}$$

*Diese Bewegung ist aber sehr anschaulich.* Der Schwerpunkt des Systems bewegt sich dabei auf einer Ellipse und zwar so, daß die Geschwindigkeit seiner exzentrischen Anomalie gleich

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\bar{a} + \bar{b})}{dt} = \frac{\mu^2}{4q^2} \frac{1 + w_0^2}{(1 - w_0^2)^2}$$

ist, und diese Ellipse dreht sich, sich selbst kongruent bleibend, mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\bar{\psi}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\bar{a} - \bar{b})}{dt} = \frac{\mu^2}{2q^2} \frac{w_0}{(1 - w_0^2)^2}$$

um ihren Mittelpunkt. Endlich dreht sich das System um seinen Schwerpunkt mit einer Winkelgeschwindigkeit, die nahe gleich  $w_0$  ist.

*Die Bewegung  $\mathfrak{B}^*$  unterscheidet sich von dieser Bewegung  $\mathfrak{B}$  nur durch Schwingungen:* über diese wollen wir uns orientieren, indem wir diejenigen Glieder derselben berechnen, die der Größe  $\mu$  proportional sind. Wir betrachten zunächst die Schwingungen des Schwerpunkts, und zwar betrachten wir sie von einem bewegten Koordinatensystem  $x_1, y_1$  aus, dessen Anfangspunkt die Bewegung  $\mathfrak{B}$  ausführt, also eine sich drehende Ellipse beschreibt, und dessen Achsen den festen Achsen parallel sind. Die Formeln (6), (26) und (27) lehren, daß der Schwerpunkt in bezug auf dieses Koordinatensystem folgende Schwingung ausführt:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{\mu}{1 - w_0^2} (\cos(\bar{a} - \bar{h}) - \cos(\bar{a} - h_0)), \\ y_1 &= \frac{\mu}{1 - w_0^2} (\sin(\bar{a} - \bar{h}) - \sin(\bar{a} - h_0)).\end{aligned}$$

Dies ist eine „Rosette“, deren Zentrum der Nullpunkt ist. Mit Rücksicht auf das Folgende betrachten wir sie noch von einem Koordinatensystem  $x_2, y_2$  aus, dessen Anfangspunkt der Anfangspunkt des Systems  $x_1, y_1$  ist, und dessen Achsen mit denen des Systems  $x_1, y_1$  den Winkel  $\bar{a}$  bilden, das sich also mit einer von 1 wenig verschiedenen Geschwindigkeit um seinen Anfangspunkt dreht. Dadurch erhalten wir folgendes Bild:

$$(28) \quad \begin{aligned}x_2 &= \frac{\mu}{1 - w_0^2} (\cos \bar{h} - \cos h_0), \\ y_2 &= - \frac{\mu}{1 - w_0^2} (\sin \bar{h} - \sin h_0).\end{aligned}$$

Der Schwerpunkt durchläuft also einen Kreis vom Radius  $\frac{\mu}{1-w_0}$  mit einer Winkelgeschwindigkeit, die nahe gleich  $(1-w_0)$  ist. Von dem festen Koordinatensystem  $x, y$  aus betrachtet, bewegt sich also der Schwerpunkt auf einer Kurve, die zwischen zwei konzentrischen, um ihren Mittelpunkt rotierenden Ellipsen hin- und herpendelt. Die Schwingung, die sich über die gleichförmige Rotation  $\bar{c}$  des Körpers um seinen Schwerpunkt lagert, besteht in erster Annäherung aus zwei Sinusschwingungen.

Um diese Formeln etwas zu beleben, wenden wir sie auf das folgende *Zahlenbeispiel* an:

$$\mu = 4 \cdot 10^{-4} \text{ cm}, \quad q = 25 \text{ cm}, \quad A_0 = B_0 = 1 \text{ cm}^2, \quad r_0 = s_0 = 1 \text{ cm}.$$

Für  $w_0 = 7^1$ ) ist dann die Drehgeschwindigkeit der Ellipse:

$$4 \cdot 10^{-13}.$$

Dabei ist die Zeiteinheit so gewählt, daß die Ellipse im Falle  $\mu = 0$  mit der Geschwindigkeit 1 durchlaufen wird. Nehmen wir an, daß dies in der Sekunde 50 mal geschieht<sup>1)</sup>, so legt die Ellipse den Winkel  $1^\circ$  zurück in der Zeit

$$\frac{1}{50 \cdot 360 \cdot 4 \cdot 10^{-13}} \text{ sec},$$

also in 4,4 Jahren! Die Bewegung der Ellipse ist also völlig unmerklich. Unter denselben Voraussetzungen hat der Kreis (28) den Durchmesser 0,000017 cm. *Der Schwerpunkt bewegt sich also in diesem Falle mit einer für alle Zwecke ausreichenden Genauigkeit auf einer festen Ellipse.*

Ebenso wie wir im vorigen die exakte Lösung unserer Bewegungsgleichungen von der zweiten Ordnung asymptotisch dargestellt haben, können wir sie von dritter, vierter, allgemein *pter* Ordnung asymptotisch darstellen, und die Form der Funktion  $S^{(p)}$  läßt leicht übersehen, daß diese Darstellungen den von uns gefundenen ganz ähnlich sind. Die wirkliche Berechnung ist natürlich entsprechend umständlicher.

Mit diesen Ergebnissen wollen wir den Inhalt der auf S. 344 erwähnten Arbeiten von Föppl und Lecornu vergleichen. Um dieses in präziser Form tun zu können, gehen wir auf die Bewegungsgleichungen in der ursprünglichen Gestalt zurück:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X, & \frac{dX}{dt} &= -(x - \mu \cos c), \\ \frac{dy}{dt} &= Y, & \frac{dY}{dt} &= -(y - \mu \sin c), \\ \frac{dc}{dt} &= \frac{1}{q^2} C, & \frac{dC}{dt} &= -\mu(x \sin c - y \cos c). \end{aligned}$$

1) Diese Zahlen liegen innerhalb der bei der Laval-Turbine üblichen Grenzen

Wir haben folgendes getan. Wir haben die Gleichungen zunächst für  $\mu = 0$  gelöst:

$$(3) \quad \begin{aligned} x &= P_1 \cos t + Q_1 \sin t, & X &= Q_1 \cos t - P_1 \sin t, \\ y &= P_2 \cos t + Q_2 \sin t, & Y &= Q_2 \cos t - P_2 \sin t, \\ c &= w_0 t + c_0, & C &= q^2 w_0 \end{aligned}$$

und haben dann für  $\mu > 0$  eine asymptotische Darstellung  $p$ ter Ordnung der exakten Lösung gesucht, indem wir die Integrationskonstanten  $P_1, Q_1, P_2, Q_2, w_0, c_0$  als Funktionen von  $t$  und  $\mu$  auffaßten und so bestimmten, daß die Ausdrücke (3) die Gleichungen (2) bis auf Glieder von höherer als  $p$ ter Ordnung befriedigen. Zu diesem Zwecke führten wir allerdings neue Koordinaten ein: aber das ist nicht wesentlich, nur Sache der Bequemlichkeit. Wir fanden so u. a., daß die durch  $P_1, Q_1, P_2, Q_2$  definierte Ellipse, wenn man von Schwingungen absieht, sich selbst kongruent bleibt und sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um ihren Mittelpunkt dreht. Im Falle  $p = 2$ , wo wir die Rechnung vollständig durchführten, fanden wir, daß diese Winkelgeschwindigkeit folgenden Wert hat:

$$\frac{\mu}{2q^2} \frac{w_0}{(1-w_0^2)^2}.$$

Diesem Ergebnis können wir nun den Inhalt der beiden genannten Arbeiten so gegenüberstellen. Föppl und Lecornu benutzen statt des Parameters  $\mu$  den Parameter  $\frac{1}{q^2}$ . Für  $\frac{1}{q^2} = 0$ , also für unendlich großen Trägheitsradius lautet die Lösung der Gleichungen (2) so:

$$\begin{aligned} x &= P_1 \cos t + Q_1 \sin t + \frac{\mu}{1-w_0^2} \cos(w_0 t + c_0), & X &= Q_1 \cos t - P_1 \sin t - \frac{\mu w_0}{1-w_0^2} \sin(w_0 t + c_0), \\ y &= P_2 \cos t + Q_2 \sin t + \frac{\mu}{1-w_0^2} \sin(w_0 t + c_0), & Y &= Q_2 \cos t - P_2 \sin t + \frac{\mu w_0}{1-w_0^2} \cos(w_0 t + c_0), \\ c &= w_0 t + c_0, & C &= \infty. \end{aligned}$$

Mit dieser Lösung hat Föppl als erster das Phänomen der kritischen Geschwindigkeit der Laval-Turbine theoretisch verständlich gemacht. Lecornu versucht nun, sich der exakten Lösung um einen zweiten Schritt zu nähern: er faßt  $P_1, Q_1, P_2, Q_2, w_0, c_0$  als Funktionen von  $t$  und  $\frac{1}{q^2}$  auf und bestimmt sie so, daß sie den Gleichungen (2) bis auf Glieder von höherer als erster Ordnung in  $\frac{1}{q^2}$  genügen. Ihn interessiert besonders das Verhalten der durch  $P_1, Q_1, P_2, Q_2$  definierten Ellipse: er findet, daß, wenn man von Schwingungen absieht und sich außerdem gewisse Vernachlässigungen gestattet, diese Ellipse sich selbst kongruent bleibt und sich um ihren Mittelpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{\mu^2}{2q^2} \frac{w_0}{(1-w_0^2)^2}$$

dreht. Diese Winkelgeschwindigkeit stimmt mit der von uns gefundenen überein. Auseinander herleiten kann man die beiden Resultate aber nicht, schon wegen der Verschiedenheit der benutzten Parameter  $\mu$  und  $\frac{1}{q^2}$ . Wir haben  $\mu$  und nicht  $\frac{1}{q^2}$  gewählt, weil der Grenzübergang  $\lim_{q^2} \frac{1}{q^2} = 0$  Schwierigkeiten schafft, die dem Problem selbst fremd sind (die Energie  $F$  und der Drehimpuls  $C$  werden dabei unendlich groß).

14. Behandlung des Falles des kritischen Anfangsimpulses mit Hilfe der Methode von Bohlin.

In den Formeln (26) und (27) treten die Nenner  $1 - w_0, 1 + w_0, w_0$  auf; in den Fällen  $\lim_{\mu=0} w_0 = \pm 1$  und  $\lim_{\mu=0} w_0 = 0$  liefern sie daher keine asymptotische Darstellung zweiter Ordnung der exakten Lösung. In diesen Fällen approximieren also die Funktionen (26) und (27) die exakte Lösung nicht. *Wir wollen uns daher jetzt nach Funktionen umsehen, die die exakte Lösung in diesen Ausnahmefällen asymptotisch darstellen. Eine solche Darstellung liefert die Methode von Bohlin<sup>1)</sup>*; für jeden der Ausnahmewerte von  $w_0$  ist jedoch eine besondere Rechnung nötig. Wir wollen die Rechnung für den uns am meisten interessierenden Fall  $w_0 = \pm 1$ , den Fall des kritischen Anfangsimpulses durchführen; es genügt dazu, den Fall  $w_0 = +1$  zu behandeln, da der Fall  $w_0 = -1$  sich leicht auf diesen zurückführen läßt.

*Poincaré zeigt<sup>2)</sup>, daß man die Reihen von Bohlin aus denen von Lindstedt herleiten kann.* In unserem Falle hätte man nur in die unendliche, allerdings im allgemeinen divergente Reihe von Lindstedt

$$S^{(\infty)} = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 \dots,$$

deren drei erste Glieder wir soeben wirklich berechnet haben, einzusetzen

$$\omega = 1 + \mu^{\frac{1}{2}} \omega',$$

die einzelnen Glieder nach Potenzen von  $\mu^{\frac{1}{2}}$  zu entwickeln und die Reihe  $S^{(\infty)}$  nach Potenzen von  $\mu^{\frac{1}{2}}$  zu ordnen. Man erhält so eine Reihe nach *positiven* Potenzen von  $\mu^{\frac{1}{2}}$ ; denn man kann leicht zeigen, daß  $S_i$  den Divisor  $1 - \omega$  höchstens in der Potenz  $2i - 1$  enthält. Man wird hiernach schon vermuten, daß neue Schwierigkeiten auftreten werden, wenn  $\omega'$  sehr klein wird, wenn man also in die unmittelbarste Nähe des

1) A. a. O., Bd. 2, Kap. 19 u. 20.

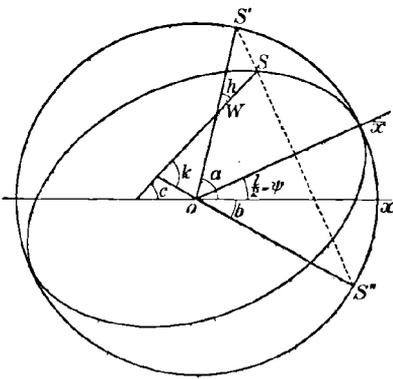
2) A. a. O., Bd. 2, S. 383—387.

kritischen Anfangsimpulses kommt; das werden wir bald bestätigt finden. Der Übergang von der Reihe von Lindstedt zu der von Bohlin ist also nichts weiter, als die formale Umordnung einer Reihe: aber wir können die Reihe von Bohlin auf diese Weise natürlich nicht tatsächlich berechnen, weil wir von der Reihe von Lindstedt nur die ersten Glieder wirklich kennen.

Bevor wir nun damit beginnen, die Methode von Bohlin auf unser Problem anzuwenden, führen wir eine einfache Koordinatentransformation aus. Statt der Winkel  $a, b, c$  benutzen wir folgende lineare Verbindungen derselben mit ganzzahligen Koeffizienten:

$$\begin{aligned} h &= a - c, \\ k &= b + c, \\ l &= a - b. \end{aligned}$$

Fig. 4.



Die Winkel  $h$  und  $k$  spielten schon in unseren bisherigen Betrachtungen eine Rolle: nehmen wir die Figur 3 zu Hilfe, durch die wir  $a$  und  $b$  definiert haben, und zeichnen wir den Winkel  $c$  ein (Fig. 4), so ist  $h$  der Winkel von  $OS'$  gegen  $WS$ ,  $k$  der Winkel von  $WS$  gegen  $OS''$ . Der Winkel  $l$  ist gleich dem Doppelten des Winkels  $\psi$ , des Winkels der Apsidenrichtung  $O\bar{X}$  der Ellipse gegen die Richtung  $OX$ . Wir ergänzen diese Veränderlichen  $h, k, l$  zu einem kanonischen Systeme durch die folgenden Veränderlichen  $H, K, L$ :

$$\begin{aligned} 2H &= A + B - C, \\ 2K &= A + B + C, \\ 2L &= A - B + C. \end{aligned}$$

Die Größe  $2L$  ist uns auch bereits bekannt: sie ist für unsere Bewegung eine Konstante, die Konstante der Flächengeschwindigkeiten.  $r$  und  $s$  behalten ihre Bedeutung:

$$r^2 = A = H + L, \quad s^2 = B = K - L.$$

Die Energie des Systems hat in den neuen Koordinaten die Form:

$$F = H + K + \frac{1}{2q^2} (H - K)^2 - \mu (r \cos h + s \cos k).$$

Die Jacobische partielle Differentialgleichung lautet also:

$$\frac{\partial S}{\partial h} + \frac{\partial S}{\partial k} + \frac{1}{2q^2} \left( \frac{\partial S}{\partial h} - \frac{\partial S}{\partial k} \right)^2 - \mu \left( \sqrt{\frac{\partial S}{\partial h}} + \frac{\partial S}{\partial t} \cos h + \sqrt{\frac{\partial S}{\partial k}} - \frac{\partial S}{\partial t} \cos k \right) = f.$$

Wir erfüllen sie bis auf Glieder von höherer als  $p$ ter Ordnung durch

$$S^{(p)} = S_0 + \mu^{\frac{1}{2}} S_1 + \mu S_2(h, k) + \dots + \mu^p S_{2p}(h, k),$$

und zwar setzen wir:

$$S_0 = (K - q^2)h + Kk + \Lambda l,$$

$$S_1 = q \int_{h_0}^h \sqrt{2(H + \varrho \cos h)} dh$$

$$= q \int_{h_0}^h \nu dh.$$

Dabei ist wie früher

$$\varrho^2 = \frac{\partial S_0}{\partial h} + \frac{\partial S_0}{\partial l} = K + \Lambda - q^2,$$

und ebenso setzen wir

$$\sigma^2 = \frac{\partial S_0}{\partial k} - \frac{\partial S_0}{\partial l} = K - \Lambda.$$

Gehen wir mit diesem Ansatz in die Jacobische Differentialgleichung ein und setzen die Koeffizienten von  $\mu^0, \mu^{\frac{1}{2}} \dots \mu^p$  auf beiden Seiten einander gleich, so erhalten wir folgende Kette von Gleichungen:

$$(29, 1) \quad 2K - \frac{1}{2}q^2 = f_0,$$

$$(29, 2) \quad 0 = f_1,$$

$$(29, 2') \quad 2 \frac{\partial S_2}{\partial k} = \sigma \cos k - H + f_2,$$

$$2 \frac{\partial S_i}{\partial k} + \frac{1}{q^2} \frac{\partial S_1}{\partial h} \frac{\partial S_{i-1}}{\partial h} = \Phi_i + f_i \quad (3 \leq i \leq 2p).$$

Darin ist  $\Phi_i$  eine rationale ganze Funktion von  $\frac{\partial S_j}{\partial h}, \frac{\partial S_j}{\partial k} (1 \leq j \leq i-2)$  und  $\frac{\partial S_{i-1}}{\partial k}$ , deren Koeffizienten die Form  $P + P' \cos h + P'' \cos k$  haben, wo  $P, P', P''$  rationale Funktionen von  $\varrho$  und  $\sigma$  sind. Die letzte Gleichung zerlegen wir in zwei. Es sei, wenn  $\Psi$  eine beliebige Funktion von  $h$  und  $k$  ist, die in bezug auf  $k$  die Periode  $2\pi$  hat:

$$[\Psi] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(h, k) dk;$$

$[\Psi]$  ist also eine Funktion von  $h$  allein. Dann ist die letzte Gleichung sicher erfüllt, wenn es die beiden folgenden sind:

$$(29, i) \quad \frac{\partial [S_{i-1}]}{\partial h} = q^2 \frac{[\Phi_i] + f_i}{\frac{\partial S_1}{\partial h}},$$

$$(29, i') \quad \frac{\partial S_i}{\partial k} = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{q^2} \frac{\partial S_1}{\partial h} \frac{\partial (S_{i-1} - [S_{i-1}])}{\partial h} + \Phi_i - [\Phi_i] \right).$$

Wir werden zeigen, daß man aus diesen Gleichungen die Funktionen  $S_2, S_3 \dots S_{2p}$  nacheinander so als Funktionen von  $h$  und  $k$  bestimmen kann, daß ihre Ableitungen nach  $h$  und  $k$  die Form haben:

$$(30) \quad \sum_{m,n} P_{m,n} \cos(mh + nk),$$

wo die  $P_{m,n}$  rationale Funktionen von  $v, \rho$  und  $\sigma$  sind. Dabei kümmern wir uns im Gegensatz zu früher zunächst nicht um die Anfangsbedingungen.

Wir beweisen diese Behauptung zunächst für  $S_2$ . Dazu benutzen wir die Gleichungen (29, 2') und (29, 3). Wir setzen in der Gleichung (29, 2')

$$f_2 = H;$$

sie lautet dann

$$\frac{\partial S_2}{\partial k} = \frac{\sigma}{2} \cos k$$

und bestimmt  $S_2 - [S_2]$ :

$$S_2 - [S_2] = \frac{\sigma}{2} \sin k.$$

In unserem Falle ist

$$\Phi_3 = \frac{1}{2q} \cos h \frac{\partial S_1}{\partial h} + \frac{\sigma}{2q^2} \cos k \frac{\partial S_1}{\partial h};$$

die Gleichung (29, 3) wird also:

$$\frac{\partial [S_2]}{\partial h} = \frac{q^2}{2q} \cos h + q^2 \frac{f_3}{\frac{\partial S_1}{\partial h}}.$$

In ihr ist noch  $f_3$  willkürlich: wir setzen  $f_3 = 0$  und erfüllen sie nun durch:

$$[S_2] = \int_0^h \frac{q^2}{2q} \cos h \, dh = \frac{q^2}{2q} \sin h.$$

Damit ist  $S_2$  vollständig bestimmt:

$$S_2 = \frac{q^2}{2q} \sin h + \frac{\sigma}{2} \sin k,$$

und man sieht leicht, daß die Ableitungen von  $S_2$  nach  $h$  und  $k$  die Form (30) haben.

Wir nehmen nun an,  $S_2, S_3 \dots S_{i-1}$  seien bereits gemäß der Behauptung bestimmt; wir wollen zeigen, daß das dann auch für  $S_i$  möglich ist. Wir benutzen dazu die Gleichungen (29,  $i'$ ) und (29,  $i + 1$ ). Zunächst hat  $\Phi_i$  die Form (30). Denn  $\Phi_i$  ist eine rationale ganze Funktion von  $\frac{\partial S_j}{\partial h}, \frac{\partial S_j}{\partial k}$  ( $1 \leq j \leq i - 2$ ) und  $\frac{\partial S_{i-1}}{\partial k}$ , deren Koeffizienten unter die Form (30) fallen; alle diese  $\frac{\partial S_j}{\partial h}, \frac{\partial S_j}{\partial k}$  haben die Form (30); Summe und Produkt zweier Funktionen (30) sind wieder Funktionen (30); also hat auch  $\Phi_i$  die Form (30). Daher hat auch die rechte Seite der Gleichung (29,  $i'$ )

$$\frac{\partial S_i}{\partial k} = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{q^2} \frac{\partial S_i}{\partial h} \frac{\partial (S_{i-1} - [S_{i-1}])}{\partial h} + \Phi_i - [\Phi_i] \right)$$

die Form (30): wir setzen

$$\frac{\partial S_i}{\partial k} = \sum_{m,n} P_{mn} \cos(mh + nk).$$

Wesentlich ist nun, daß hierin kein Summand eine Funktion von  $h$  allein ist: alle  $P_{m0}$  sind also gleich Null. Wir können daher die letzte Gleichung erfüllen durch:

$$S_i - [S_i] = \sum_{m,n} \frac{P_{mn}}{n} \sin(mh + nk).$$

Ist  $i = 2p$ , so setzen wir  $[S_i] = 0$ : dann ist also

$$S_i = \sum_{m,n} \frac{P_{mn}}{n} \sin(mh + nk),$$

und man sieht leicht, daß die Ableitungen von  $S_i$  nach  $h$  und  $k$  die Form (30) haben. Ist aber  $i < 2p$ , so bestimmen wir  $[S_i]$  aus der Gleichung (29,  $i + 1$ ):

$$\frac{\partial [S_i]}{\partial h} = q^2 \frac{[\Phi_{i+1}] + f_{i+1}}{\frac{\partial S_i}{\partial h}} = q \frac{[\Phi_{i+1}] + f_{i+1}}{v}.$$

Darin hat  $[\Phi_{i+1}]$  die Form (30), was wir ebenso beweisen, wie wir es gerade für  $\Phi_i$  gezeigt haben. Wir setzen  $f_{i+1} = 0$  und erfüllen die letzte Gleichung durch

$$[S_i] = \int_0^h q \frac{[\Phi_{i+1}]}{v} dh.$$

Damit ist  $S_i$  wieder vollständig bestimmt: es ist:

$$S_i = \int_0^h q \frac{[\varphi_{i+1}]}{\nu} dh + \sum_{m, n} \frac{P_{mn}}{n} \sin(mh + nk),$$

und man sieht, daß die Ableitungen von  $S_i$  nach  $h$  und  $k$  auch jetzt die Form (30) haben. Man kann also tatsächlich aus den Gleichungen (29) nacheinander  $S_2, S_3 \dots S_{2p}$  im Einklang mit der Behauptung bestimmen: insbesondere haben also  $\frac{\partial S^{(p)}}{\partial h}$  und  $\frac{\partial S^{(p)}}{\partial k}$  in bezug auf  $h$  und  $k$  die Periode  $2\pi$ .

Wir wollen  $\varrho \geq 0$  annehmen. Dann kommen für uns nur solche  $H$  in Betracht, die nicht kleiner als  $-\varrho$  sind: im Falle  $H < -\varrho$  ist ja

$$\frac{\partial S_i}{\partial h} = q\nu = q\sqrt{2(H + \varrho \cos h)}$$

für kein reelles  $h$  reell. Nehmen wir zunächst an, daß  $H > \varrho$  ist, dann sind alle  $\frac{\partial S_i}{\partial h}$  und  $\frac{\partial S_i}{\partial k}$  für jedes reelle  $h$  endlich, und es tritt keine Schwierigkeit auf, wenn wir aus der Funktion  $S^{(p)}$  nach der Methode von 12 die asymptotischen Darstellungen der Lösungen unserer Bewegungsgleichungen ableiten. Ist aber  $H \leq \varrho$ , dann können die  $\frac{\partial S_i}{\partial h}$  und  $\frac{\partial S_i}{\partial k}$  für reelle  $h$  unendlich werden, nämlich für  $h_j = \pm \vartheta + 2j\pi$ , wo  $\vartheta$  die kleinste positive Wurzel der Gleichung

$$\cos \vartheta = -\frac{H}{\varrho}$$

ist, und dann versagt die Methode von 12. Natürlich *braucht* diese Schwierigkeit nicht aufzutreten, und sie tritt nicht auf, wenn die  $S_i$ , die im allgemeinen *rationale* Funktionen von  $\nu$  sind, im besonderen *ganze rationale* Funktionen von  $\nu$  sind, in denen die Faktoren von  $\nu$  verschwinden. In unserem Beispiel tritt die genannte Schwierigkeit nicht auf, wenn man  $p = 1$  wählt; das zeigen die oben bestimmten Funktionen  $S_1, S_2$ . In anderen Fällen kann man sie umgehen, indem man  $f_3 \dots f_{2p}$  anders bestimmt, als wir es im Vorhergehenden getan haben. Für beliebiges  $p$  kommt man aber im Falle  $H \leq \varrho$  mit der Methode von Bohlin nicht aus. Dagegen führt ein anderer Weg zum Ziele: Poincaré gibt nämlich eine kanonische Transformation an<sup>1)</sup>, durch die dieser Fall auf einen anderen zurückgeführt wird, in dem die Methode von Lindstedt anwendbar ist. Da diese Transformation

1) A. a. O., Bd. 2, S. 354—366.

leicht auf den Fall  $H > q$  ausgedehnt werden kann, diese Methode also weiter reicht, als die Methode von Bohlin, so ist sie theoretisch sehr befriedigend; leider ist die Transformation aber ziemlich kompliziert, sodaß ihre Anwendung auf einen speziellen Fall nicht gerade bequem ist.

Wir wollen uns in unserem Beispiel auf den Fall  $p=1$  beschränken, weil schon im Falle  $p = \frac{3}{2}$  für  $H \leq q$  die erwähnte Schwierigkeit auftritt. Wir haben:

$$S^{(1)} = S_0 + \mu^{\frac{1}{2}} S_1 + \mu S_2,$$

und dabei ist

$$S_0 = (K - q^2)h + Kk + \Lambda l,$$

$$S_1 = q \int_{h_0}^h v dh,$$

$$S_2 = \frac{\sigma}{2} \sin k.^1)$$

Weiter ist

$$f = f_0 + \mu^{\frac{1}{2}} f_1 + \mu f_2,$$

$$f_0 = 2K - \frac{1}{2}q^2,$$

$$f_1 = 0,$$

$$f_2 = H.$$

Wir stellen nun die Gleichungen (20)

$$\xi = \frac{\partial S^{(1)}}{\partial \Xi}, \quad X = \frac{\partial S^{(1)}}{\partial x}$$

auf. Sie lauten:

$$(31) \quad \begin{aligned} \eta &= \mu^{\frac{1}{2}} q \int_{h_0}^h \frac{dh}{v}, \\ x &= h + k + \mu^{\frac{1}{2}} \frac{q}{2\sigma} \int_{h_0}^h \frac{\cos h}{v} dh + \frac{\mu}{4\sigma} \sin k, \\ \lambda = l &+ \mu^2 \frac{q}{2\sigma} \int_{h_0}^h \frac{\cos h}{v} dh - \frac{\mu}{4\sigma} \sin k, \end{aligned}$$

$$(32) \quad \begin{aligned} H &= K - q^2 + \mu^{\frac{1}{2}} q v, \\ K &= K + \mu \frac{\sigma}{2} \cos k, \\ L &= \Lambda. \end{aligned}$$

1) Wir hatten  $[S_{2p}] = 0$  gesetzt: vgl. S. 377.

Wir setzen nun in diesen Gleichungen gemäß (22)

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial H}\right)_0 t = \mu t, \\ \alpha &= \alpha_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial K}\right)_0 t = \alpha_0 + 2t, \\ \lambda &= \lambda_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial \Lambda}\right)_0 t = \lambda_0, \end{aligned}$$

$$H = H_0, \quad K = K_0, \quad \Lambda = \Lambda_0, \quad \varrho = \varrho_0, \quad \sigma = \sigma_0.$$

$\eta_0$  haben wir gleich Null gesetzt, weil wir wünschen, daß  $h_0$  und  $\eta_0$  zusammengehören. Die Gleichungen (31) und (32) definieren dann  $h, k, l, H, K, L$  als Funktionen der Zeit, die nach dem Satze von Poincaré (S. 360) zu der entsprechenden exakten Lösung asymptotisch von der Ordnung  $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  sind. Dabei ist vorausgesetzt, daß die auf S. 364 gemachte Voraussetzung 1. auch jetzt erfüllt ist: einer der dortigen Voraussetzung 2. analoge Beschränkung bedarf es jedoch nicht.

Wir berechnen aus den Funktionen  $h, k, l, H, K, L$  die uns geläufigeren Funktionen  $a, b, c, A, B, C$ , wobei wir in ihnen Glieder von der Größenordnung  $\mu^1$  weglassen dürfen, ohne daß sie aufhören, zur exakten Lösung asymptotisch von der Ordnung  $\frac{1}{2}$  zu sein. Wir erhalten so

$$\begin{aligned} (33) \quad a &= a_0 + t + \mu^{\frac{1}{2}} \frac{q}{2r_0v} \int_{h_0}^h \frac{\cos h}{v} dh, \\ b &= b_0 + t, \\ c &= a - h, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (34) \quad A &= A_0 - \mu^{\frac{1}{2}} q(v - v_0), \\ B &= B_0, \\ C &= q^2 + \mu^{\frac{1}{2}} qv. \end{aligned}$$

Dabei ist die Funktion  $h(t)$  definiert durch die Gleichung

$$t = -q \int_{h_0}^h \frac{dh}{\mu^{\frac{1}{2}} v},$$

wo  $v$  abkürzend gesetzt ist für  $\sqrt{2(H_0 + r_0 \cos h)}$ . Die durch die Gleichungen (33) und (34) definierten Funktionen nehmen für  $t = 0$  die Werte  $a_0, b_0, c_0, A_0, B_0, C_0 = q^2 + \mu^{\frac{1}{2}} qv_0$  an. Wir wollen die Anfangsbedingung

$$w_0 = 1 + \mu^{\frac{1}{2}} w'_0,$$

also

$$C_0 = q^2 + \mu^2 q^2 w'_0$$

erfüllen, haben daher zu setzen

$$v_0 = qw'_0,$$

also

$$H_0 = -r_0 \cos h_0 + \frac{q^2 w_0^2}{2}.$$

Wir haben schon die Voraussetzung eingeführt, daß der Wert  $r_0$  bzw. dessen Grenzwert für  $\lim \mu = 0$  von Null verschieden ist, und können annehmen, daß er größer als Null ist (vgl. S. 354): damit erfüllen wir die Voraussetzung, die wir vorhin über  $q$  gemacht haben. Für die Diskussion wollen wir  $r_0 = 1$  wählen, wie wir es auch in dem Zahlenbeispiel auf S. 371 getan haben. Das ist übrigens keine Beschränkung der Allgemeinheit, da wir über die Längeneinheit noch nicht verfügt haben. Ebenso dürfen wir  $h_0 = 0$  annehmen: durch passende Wahl des Anfangspunktes der Zeit kann man das immer erreichen.

*Vor allem müssen wir uns nun die Funktion  $h(t)$  näher ansehen.* Sie ist definiert durch

$$(35) \quad t = -q \int_0^h \frac{dh}{\mu^2 v} = q \int_0^{-h} \frac{dh}{\mu^2 v} = q \int_0^{-h} \frac{dh}{\sqrt{q^2 \mu w_0^2 + 2\mu(\cos h - 1)}}.$$

Aus dieser Gleichung kann man leicht  $\cos h$  als elliptische Funktion der Zeit darstellen. Aber das ist nicht einmal nötig: die Gleichung (35) ist von einem der wichtigsten Probleme der Mechanik her wohlbekannt, von dem Probleme des physischen Kreispendels. Der Ausschlagwinkel  $\varphi$  desselben, von der stabilen Gleichgewichtslage aus gerechnet, genügt nämlich der Differentialgleichung

$$q^2 \varphi'' = -gl \sin \varphi,$$

wo  $q$  der Trägheitsradius des Pendels um seine Aufhängeachse,  $g$  die Gravitationskonstante und  $l$  die Länge des Pendels (Entfernung des Schwerpunktes von der Aufhängeachse) ist. Hieraus folgt

$$q \varphi' = \sqrt{q^2 \varphi_0^2 + 2gl(\cos \varphi - 1)},$$

wenn das Pendel zur Zeit  $t = 0$  die Lage  $\varphi = 0$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\varphi_0$  hat. Durch Integration der letzten Gleichung erhält man

$$t = q \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{q^2 \varphi_0^2 + 2gl(\cos \varphi - 1)}}.$$

Vergleichen wir hiermit die Gleichung (35), so sehen wir, daß man ( $-h$ ) als Ausschlagwinkel eines physischen Pendels von der Länge  $\frac{l}{g}$

deuten kann, dessen Trägheitsmoment um die Aufhängeachse gleich dem Trägheitsmoment unseres Körpers um seinen Schwerpunkt ist, und das zur Zeit  $t = 0$  seine stabile Gleichgewichtslage mit der Geschwindigkeit  $\mu^{\frac{1}{2}} w'_0 = w_0 - 1$  verläßt. Die Funktion  $h(t)$  ist uns also nun vollständig bekannt.

Die Bewegung unseres Systems um den Schwerpunkt ist durch die Gleichung

$$c = a - h$$

gegeben. Wir betrachten sie von einem bewegten Koordinatensystem  $x_3, y_3$  aus, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt ist, und dessen Achsen mit den Achsen des festen Systems den Winkel  $\alpha$  bilden, das also mit einer von 1 wenig verschiedenen Geschwindigkeit rotiert. *In bezug auf dieses System ist also die Bewegung des Körpers um seinen Schwerpunkt identisch mit der Bewegung eines gewissen physischen Pendels, dessen Aufhängeachse durch den Anfangspunkt geht.* Lassen wir die Anfangsgeschwindigkeit  $w_0$  unseres Systems von links her an den Wert  $w_0 = 1$  heranrücken, so haben wir folgendes Bild. Zunächst überschlägt der Körper sich in negativem Sinne; die Geschwindigkeit dieser Bewegung wird um so kleiner, je näher wir dem Werte  $w_0 = 1$  kommen, und es gibt einen Grenzwert

$$w_1 = 1 - 2 \frac{\mu^{\frac{1}{2}}}{q} < 1,$$

für den sich der Körper asymptotisch der Lage  $(-h) = -\pi$  nähert. Wächst  $w_0$  weiter, so führt der Körper Schwingungen um die Gleichgewichtslage  $(-h) = 0$  aus, deren Amplitude um so kleiner wird, je mehr wir uns der kritischen Anfangsgeschwindigkeit  $w_0 = 1$  nähern. Für  $w_0 = 1$  ruht der Körper. Lassen wir  $w_0$  weiter wachsen, so haben wir das umgekehrte Bild: die Schwingungen nehmen zu, wir kommen an einen Grenzwert

$$w_2 = 1 + 2 \frac{\mu^{\frac{1}{2}}}{q},$$

für den sich der Körper asymptotisch der Lage  $(-h) = +\pi$  nähert, und jenseits dieses Grenzwertes überschlägt sich der Körper wieder, jetzt aber im positiven Sinne. Das Intervall von  $w_1$  bis  $w_2$ , das auch weiterhin eine ausgezeichnete Rolle spielen wird, wird man passend *das kritische Intervall* nennen: es ist aber nicht, wie es nach unseren Formeln scheinen könnte, von den Anfangswerten unabhängig, sondern hängt von  $r_0$  ab, welches für die Diskussion gleich 1 gesetzt ist.

Im allgemeinen Falle hatten wir gefunden, daß die Bewegung des Körpers um seinen Schwerpunkt eine gleichförmige Rotation ist, über die sich zwei Sinusschwingungen lagern. Von unserem bewegten Koordinatensystem  $x_3 y_3$  aus betrachtet, ist sie also ebenfalls eine gleichförmige Rotation, die von zwei Sinusschwingungen  $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$  überlagert ist; die Amplituden dieser Schwingungen sind zu  $(1 - w_0)^\mu$  bzw.  $(1 + w_0)^\mu$  proportional. Diese Ausdrücke lassen schon vermuten, daß die Schwingung  $\mathfrak{S}_1$  in der Umgebung von  $w_0 = 1$  beträchtliche Werte annehmen, die Schwingung  $\mathfrak{S}_2$  dagegen klein bleiben wird. Dies ist in der Tat der Fall: die Schwingung  $(-h)$ , die wir eben betrachtet haben, ist nämlich die Fortsetzung der Schwingung  $\mathfrak{S}_1$  des allgemeinen Falles, sie geht in diese über, wenn  $w_0$  sich hinreichend weit vom Punkte  $w_0 = 1$  entfernt, also für große Werte von  $|w'_0|$ ; die Schwingung  $\mathfrak{S}_2$  bleibt dagegen auch für  $w_0 = 1$  klein, denn sie tritt in unserer ersten Annäherung nicht auf: wir würden sie natürlich wiederfinden, wenn wir die Annäherung weiter treiben würden.

Für unser Zahlenbeispiel sind die Werte  $w_1$  und  $w_2$ , die das kritische Intervall begrenzen, die folgenden:

$$w_1 = 0,9984 \quad w_2 = 1,0016;$$

sie liegen also der kritischen Anfangsgeschwindigkeit sehr nahe. Die Dauer der unendlich kleinen Schwingung des Körpers im Falle  $w_0 = 1$  ist

$$2\pi \sqrt{\frac{q^2}{lg}} = 2\pi \sqrt{\frac{q^2}{\mu}} = 7854.$$

Nehmen wir wieder an, die kritische Umdrehungszahl in der Sekunde sei 50, so ist diese Schwingungsdauer gleich 25 sec; für  $w_0 = 7$  ist sie dagegen nur

$$\frac{2\pi}{|1 - w_0|} = 1,047$$

oder 0,003 sec.

Wir wenden uns nun der Diskussion der Bewegung des Schwerpunkts zu, die durch die beiden ersten Gleichungen (33) und die beiden ersten Gleichungen (34) definiert wird. Hierzu zerlegen wir zunächst das Integral

$$\int_0^h \frac{\cos h}{v} dh$$

in eine lineare und eine periodische Funktion der Zeit. Wir bezeichnen im Falle  $H_0 < 1$  mit  $\vartheta$  wieder die kleinste positive Wurzel der Gleichung

$$\cos \vartheta = -H_0$$

und verstehen im Falle  $H_0 \geq 1$  unter  $\vartheta$  die Konstante  $\pi$ . Dann ist in der Identität

$$\int_0^h \frac{\cosh h}{\nu} dh = \frac{\int_0^{\vartheta} \frac{\cosh h}{\nu} dh}{\int_0^{\vartheta} \frac{dh}{\nu}} - \frac{\int_0^{\vartheta} \frac{dh}{\nu} \int_0^h \frac{\cosh h}{\nu} dh - \int_0^{\vartheta} \frac{\cosh h}{\nu} dh \int_0^h \frac{dh}{\nu}}{\left(\int_0^{\vartheta} \frac{dh}{\nu}\right)^2}$$

der erste Summand eine lineare Funktion der Zeit, nämlich gleich

$$- \frac{\frac{1}{2} \int_0^{\vartheta} \frac{\cosh h}{\nu} dh}{\int_0^{\vartheta} \frac{dh}{\nu}} t,$$

und der zweite ist eine periodische Funktion der Zeit, die mit  $\alpha$  bezeichnet sei:

$$(36) \quad \alpha = \frac{\int_0^{\vartheta} \frac{dh}{\nu} \int_0^h \frac{\cosh h}{\nu} dh - \int_0^{\vartheta} \frac{\cosh h}{\nu} dh \int_0^h \frac{dh}{\nu}}{\left(\int_0^{\vartheta} \frac{dh}{\nu}\right)^2}$$

Die Periode von  $\alpha$  ist gleich derjenigen von  $h$ . Damit ist die Zerlegung ausgeführt. Wir sehen nun zunächst wieder von Schwingungen ab, konstruieren also die Bewegung  $\mathfrak{B}$ . Sie ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \bar{a} &= a_0 + t - \frac{\mu}{2} \frac{\int_0^{\vartheta} \frac{\cosh h}{\nu} dh}{\int_0^{\vartheta} \frac{dh}{\nu}} t, \\ \bar{b} &= b_0 + t, \\ \bar{A} &= A_0, \\ \bar{B} &= B_0. \end{aligned}$$

Diese Bewegung ist uns aber vollständig geläufig: der Schwerpunkt durchläuft eine sich drehende Ellipse so, daß seine exzentrische Anomalie eine konstante Geschwindigkeit hat. Die Drehgeschwindigkeit der Ellipse ist:

$$(37) \quad \frac{d\bar{\psi}}{dt} = \frac{d\frac{\bar{a} - \bar{b}}{2}}{dt} = - \frac{\mu}{4} \frac{\int_0^{\vartheta} \frac{\cosh h}{\nu} dh}{\int_0^{\vartheta} \frac{dh}{\nu}}$$

Sie ist viel beträchtlicher als im allgemeinen Falle: für unser Zahlenbeispiel ist sie für  $w_0 = 1$  gleich  $-10^{-4}$ , die Ellipse legt also den Winkel  $1^\circ$  zurück in der Zeit

$$\frac{1}{50 \cdot 360 \cdot 10^{-4}} \text{ sec} = 0,6 \text{ sec},$$

während im Falle  $w_0 = 7$  über 4 Jahre dazu nötig waren. Die Winkelgeschwindigkeit der Ellipse ändert sich auch in der Umgebung des Punktes  $w_0 = 1$  sehr rasch. Man bestätigt leicht, daß sie für

$$\begin{aligned} w_0 = w_1 &= 0,9984 \quad \text{gleich} \quad +10^{-4}, \\ w_0 &= 1 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad -10^{-4} \end{aligned}$$

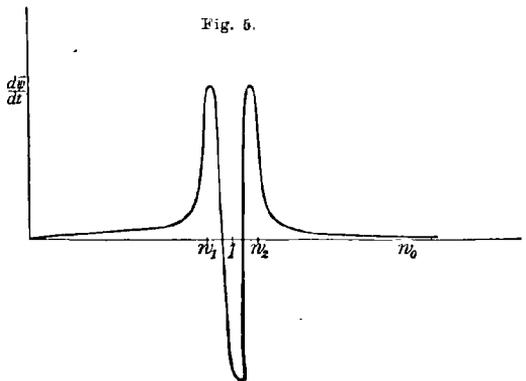
ist. *Trotzdem geht aber der hier gefundene Wert der Drehgeschwindigkeit stetig über in den des allgemeinen Falles.* Der Ausdruck (37) nähert sich nämlich für große Werte von  $|w'_0|$  dem folgenden:

$$\frac{\mu^2}{16 q^2 (1 - w_0)^2},$$

und den im allgemeinen Falle geltenden Ausdruck können wir so schreiben:

$$\frac{4 w_0}{(1 + w_0)^2} \frac{\mu^2}{16 q^2 (1 - w_0)^2}.$$

Diese beiden Ausdrücke unterscheiden sich aber nur um einen Faktor, der in der Nähe des Punktes  $w_0 = 1$  nahezu gleich 1 ist. Stellt man die Drehgeschwindigkeit  $\frac{d\bar{\varphi}}{dt}$  der Ellipse als Funktion von  $w_0$  dar, so erhält man eine Kurve vom Typus der in Figur 5 dargestellten; eine unserem Zahlenbeispiel entsprechende, quantitativ genaue Figur zu zeichnen ist nicht möglich: denn wählt man den Maßstab so, daß die Ordinate für  $w_0 = 7$  gleich 1 mm wird, dann ist die zu  $w_0 = 0,9984$  gehörige gleich 250 km, die zu  $w_0 = 1$  gehörige gleich  $-250$  km.



*Wir wenden uns nun zur Diskussion der Schwingungen des Schwerpunkts* um die soeben diskutierte Bewegung  $\mathfrak{B}$ . Wir betrachten sie wieder von einem bewegten Koordinatensystem  $x_1, y_1$  aus, dessen Anfangspunkt die Bewegung  $\mathfrak{B}$  ausführt, und dessen Achsen den festen Achsen parallel sind. Die Formeln (6),

(33) und (34) lehren, daß der Schwerpunkt in bezug auf dieses System folgende Bewegung ausführt:

$$x_1 = \frac{1}{2} \mu^{\frac{1}{2}} q (-(\nu - \nu_0) \cos \bar{a} - \alpha \sin a),$$

$$y_1 = \frac{1}{2} \mu^{\frac{1}{2}} q (-(\nu - \nu_0) \sin a + \alpha \cos \bar{a}),$$

wo  $\alpha$  durch die Gleichung (36) definiert ist. Diese Formeln legen nahe, die Bewegung von einem Koordinatensystem  $x_2, y_2$  aus zu betrachten, dessen Anfangspunkt mit dem des Systems  $x_1, y_1$  zusammenfällt, und das mit diesem den Winkel  $\bar{a}$  bildet, also mit einer von 1 wenig verschiedenen Geschwindigkeit rotiert. In bezug auf dieses System führt der Schwerpunkt folgende Schwingung aus:

$$x_2 = -\frac{1}{2} \mu^{\frac{1}{2}} q (\nu - \nu_0),$$

$$y_2 = \frac{1}{2} \mu^{\frac{1}{2}} q \alpha.$$

Dies ist die Parameterdarstellung einer Kurve. Wir berechnen sie am bequemsten mit Hilfe der elliptischen Normalintegrale  $F'$  und  $E$ . Im Falle  $q^2 w_0'^2 \geq 4$  haben wir

$$(38) \quad x_2 = -\frac{1}{2} \mu^{\frac{1}{2}} q^2 w_0' \left( \sqrt{1 - \left(\frac{2}{qw_0'}\right)^2 \sin^2 \varphi} - 1 \right),$$

$$y_2 = \frac{1}{2} \mu^{\frac{1}{2}} q^2 w_0' \left( E\left(\frac{2}{qw_0'}, \varphi\right) - \frac{E\left(\frac{2}{qw_0'}\right)}{F\left(\frac{2}{qw_0'}\right)} F\left(\frac{2}{qw_0'}, \varphi\right) \right),$$

$$\varphi = \frac{h}{2},$$

und im Falle  $q^2 w_0'^2 \leq 4$  ist

$$(39) \quad x_2 = -\frac{1}{2} \mu^{\frac{1}{2}} q^2 w_0' (\cos \varphi - 1),$$

$$y_2 = \mu^{\frac{1}{2}} q \left( E\left(\frac{qw_0'}{2}, \varphi\right) - \frac{E\left(\frac{qw_0'}{2}\right)}{F\left(\frac{qw_0'}{2}\right)} F\left(\frac{qw_0'}{2}, \varphi\right) \right),$$

$$\sin \varphi = \frac{2}{qw_0'} \sin \frac{h}{2}.$$

Im Falle  $q^2 w_0'^2 = 4$  ergeben diese beiden Gleichungssysteme übereinstimmend

$$(40) \quad x_2 = -\varepsilon \mu^{\frac{1}{2}} q \left( \cos \frac{h}{2} - 1 \right),$$

$$y_2 = \mu^{\frac{1}{2}} q \sin \frac{h}{2},$$

wo  $\varepsilon = \pm 1$  ist, je nachdem  $w'_0$  positiv oder negativ ist. Wir gehen noch in den Gleichungen (38) und (39) zu kleinen Werten des Moduls über und erhalten

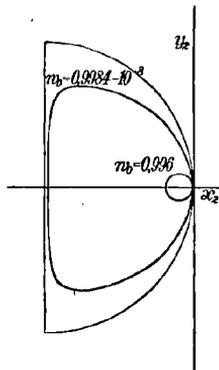
$$(38') \quad \begin{aligned} x_2 &= -\frac{\mu}{2(1-w_0)}(\cos h - 1), \\ y_2 &= \frac{\mu}{2(1-w_0)} \sin h \end{aligned}$$

und

$$(39') \quad \begin{aligned} x_2 &= -\frac{1}{2}\mu^{\frac{1}{2}}q^2w'_0(\cos \varphi - 1), \\ y_2 &= \frac{1}{16}\mu^{\frac{1}{2}}q^3w_0'^2 \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Wir wollen diese Kurven nun diskutieren und beginnen mit dem Falle, wo  $w'_0$  einen großen negativen Wert hat, wo wir uns also weit unterhalb der kritischen Geschwindigkeit befinden. Die Gleichungen (38') lehren, daß die Kurve dann ein Kreis ist, der links von der Ordinatenachse liegt und diese im Anfangspunkte berührt (Fig. 6a).<sup>1)</sup> Nähern

Fig. 6 a.



wir uns der kritischen Anfangsgeschwindigkeit, so wird der Kreis ein Oval (Gleichungen (38), Fig. 6a); dieses schmiegt sich, wenn  $w_0$  sich dem Werte  $w_0 = w_1$ , der unteren Grenze des kritischen Intervalles, in unserem Zahlenbeispiele also dem Werte  $w_0 = 0,9984$  nähert, einer Grenzkurve an, die von einem Halbkreise und dem begrenzenden Durchmesser gebildet wird: sie ist in die Figur 6a eingezeichnet. Für  $w_0 = w_1$  ist die Kurve der dem Grenzhalbkreise entsprechende Kreis (Gleichungen 40). Überschreiten wir den Wert  $w_1$ , so erhält die Kurve eine ganz andere Gestalt (Gleichungen (39), Fig. 6b): sie hat jetzt eine gewisse Ähnlichkeit mit einer Lemniskate. Diese Kurve schmiegt sich

1) Die Figuren 6 gehen aus den unserem Zahlenbeispiel entsprechenden durch vierfache Vergrößerung hervor.

Fig. 6 b.

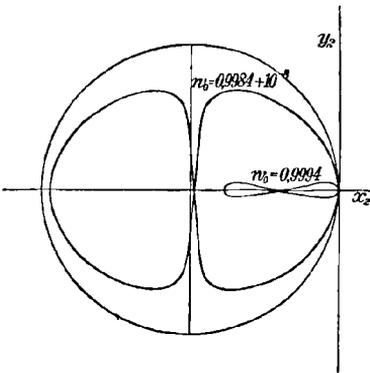


Fig. 6 c.

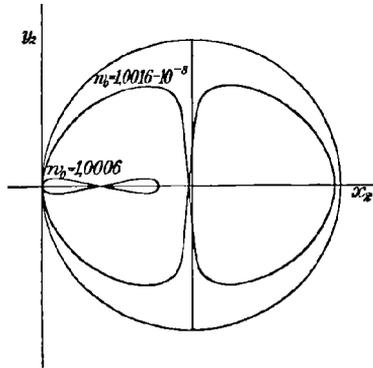
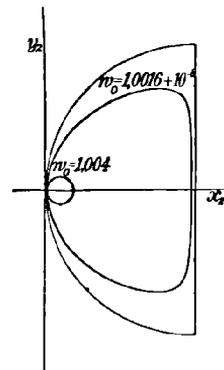


Fig. 6 d.



zunächst einer Grenzkurve an, die aus dem Kreise (40) und seinem der  $y_2$ -Achse parallelen Durchmesser gebildet wird: sie ist in die Figur 6 b eingezeichnet. Die Kurve wird mit wachsendem  $w_0$  rasch kleiner und flacher und zieht sich für  $\lim w_0 = 1$  auf den Nullpunkt zusammen

(Gleichungen (39'), Fig. 6b). Wächst  $w_0$  weiter, so spielt sich der umgekehrte Vorgang ab: nur liegen die Kurven jetzt rechts von der Ordinatenachse (Fig. 6c und 6d). *Der Übergang zum allgemeinen Falle ist auch jetzt ein durchaus stetiger*: um das einzusehen, brauchen wir nur die Kreise (28) und (38') zu vergleichen und zu beachten, daß der Faktor  $\frac{2}{1+w_0}$ , um den sich ihre Radien unterscheiden, in der Nähe von  $w_0$  nahezu gleich 1 ist. Diese Kurven durchläuft der Schwerpunkt in einer Zeit, die gleich der Periode der Pendelschwingung ( $-h$ ) des Körpers um seinen Schwerpunkt ist, in der Nähe der kritischen Geschwindigkeit also sehr langsam (für  $w_0 = 1$  in 25 sec).

Um uns über die Größenverhältnisse dieser Kurven zu orientieren, nehmen wir wieder unser Zahlenbeispiel auf. Wir bezeichnen als Durchmesser der Kurven die Länge des Stückes, welches sie auf der  $x_2$ -Achse abschneiden; dann ist der Durchmesser der Kurve für

$w_0 = 0$	gleich	0,0008 cm
0,5		0,0011
0,996		0,1
0,9984		1
0,9994		0,38
1		0
7		0,00002
$\infty$		0.

Der Kurvendurchmesser nimmt also in der Nähe von  $w_0 = 1$  sehr große Werte an, die Durchmesser für  $w_0 = 7$  und  $w_0 = 0,9984$  verhalten sich wie 1 zu 50000. Außerdem ändert er sich dort sehr rasch mit  $w_0$ .

*Die Bahn des Schwerpunktes in bezug auf das feste System* ist, wie im allgemeinen Falle, eine Kurve, die sich zwischen zwei konzentrischen, sich mit konstanter Geschwindigkeit drehenden Ellipsen hin- und herzieht: nur haben die beiden Ellipsen in dem Falle, wo  $w_0$  nahezu gleich 1 ist, einen größeren Abstand und eine größere Drehgeschwindigkeit, als im allgemeinen Falle. Trotzdem ist die Kurve unübersichtlich und schwer durch eine Zeichnung zu veranschaulichen: denn die Differenz der Azimute zweier aufeinanderfolgender Berührungspunkte der Kurve mit den Grenzellipsen ist sehr groß, in unserem Zahlenbeispiel für  $w_0 = 1$  etwa gleich  $2\pi \cdot \frac{50 \cdot 25}{2}$ , also ungefähr 625 volle Umdrehungen. Wir haben die Kurve deshalb von dem bewegten Koordinatensystem  $x_2, y_2$  aus betrachtet.

Damit sind wir am Ende unserer Diskussion; wir fügen nur noch drei Bemerkungen hinzu. Erstens: es scheint, als wenn die Bewegung, falls ihre Anfangsgeschwindigkeit *genau* die kritische ist, eine sehr

ruhige ist: es fallen ja dann alle Schwingungen fort. Aber das ist nur im Falle  $h_0 = 0$  richtig: wenn  $h_0$  nicht gleich Null ist, so können wir zwar durch Verschiebung des Anfangspunktes der Zeit stets erreichen, daß  $h_0$  gleich Null wird, aber dann ist das zugehörige  $w_0$  nicht mehr genau gleich 1. Genau so ist es ja beim Pendel: man kann da stets erreichen, daß  $\varphi_0$  gleich Null wird; dann ist aber  $\varphi'_0$  im allgemeinen von Null verschieden. Zweitens heben wir hervor, daß die Bewegung in den beiden Grenzfällen

$$w_0 = w_1, \quad w_0 = w_2$$

labil ist. In der Tat: eine unendlich kleine Änderung der Anfangsbedingungen bewirkt eine endliche Änderung der Bahnkurve des Schwerpunktes. Die dritte Bemerkung endlich bezieht sich auf  $r_0$  und  $s_0$ : wir haben vorausgesetzt  $\lim_{\mu=0} r_0 \neq 0$ ,  $\lim_{\mu=0} s_0 \neq 0$ ; unsere ganzen Betrachtungen gelten also z. B. *nicht* für die stationären und die diesen benachbarten Bewegungen.

### 15. Zusammenfassung.

Wir haben also folgendes Bild von der Bewegung unseres Systems erhalten. Die Bewegung ist in den beiden Fällen, die eine verschiedene Behandlung nötig machten, im allgemeinen Falle und im Falle des kritischen Anfangsimpulses, *qualitativ ähnlich*: sieht man von Schwingungen ab, so bewegt sich der Schwerpunkt auf einer um ihren Mittelpunkt mit konstanter Geschwindigkeit rotierenden Ellipse so, daß seine exzentrische Anomalie eine von 1 wenig verschiedene Geschwindigkeit besitzt, und der Körper dreht sich um seinen Schwerpunkt mit einer seinem Anfangsimpulse entsprechenden konstanten Geschwindigkeit; die Schwingungen des Systems in beiden Fällen haben allerdings weniger Ähnlichkeit miteinander. Dagegen ist die Bewegung in beiden Fällen *quantitativ sehr verschieden*: die Drehgeschwindigkeit der Ellipse ist im Falle des kritischen Anfangsimpulses viel größer als im allgemeinen Falle (in einem Zahlenbeispiel war das Verhältnis dieser Geschwindigkeiten für  $w_0 = 1$  und für  $w_0 = 7$  gleich  $25 \cdot 10^3 : 1$ ), und dasselbe gilt für die Amplitude der Schwingungen (wir fanden das Verhältnis  $5 \cdot 10^4 : 1$ ); ferner ändert sich die Bewegung im Falle des kritischen Anfangsimpulses mit  $w_0$  viel schneller als im allgemeinen Falle. Trotzdem konnten wir den Übergang der beiden Fälle ineinander genau verfolgen.

Unser mechanisches System ist also durchaus geeignet, das Phänomen der kritischen Geschwindigkeit der Laval-Turbine verständlich zu machen.

## Die Spannungsverteilung im geraden Kreiskegel, hervorgerufen durch eine Einzelkraft von beliebiger Richtung und Lage.

Von Dr. PAUL FILLUNGER in Wien.

Die Untersuchungen der Elastizitätstheorie erfordern im allgemeinen, die Spannungen als Funktionen von drei unabhängigen Variablen, den Koordinaten eines Punktes im Raume, anzusehen. Kann aber vorausgesetzt werden, daß die Verteilung der Spannungen von einer jener drei Variablen unabhängig ist, so vereinfacht sich der Gang der Untersuchung bedeutend, und man faßt alle jene Spannungsverteilungen, bei welchen nur zwei unabhängige Variable auftreten, zusammen unter der Bezeichnung des ebenen Problems.

Es ist aber auch gelungen zu zeigen, daß man bei einer bestimmten Gattung des ebenen Problems<sup>1)</sup> die Abhängigkeit der Spannungen von einer der beiden unabhängigen Variablen für sich vollständig aufklären kann, ohne auf die Grundlagen der Elastizitätstheorie eingehen zu müssen, so daß die vollständige Lösung des gestellten Problems durch die Auflösung von Differentialgleichungen zu bewerkstelligen ist, welche, da sie nur mehr *eine, die letzte, unabhängige Variable enthalten, gewöhnliche Differentialgleichungen sind.*

In der vorliegenden Abhandlung erlaubt sich der Verfasser einen Fall mitzuteilen, bei welchem die Spannungsverteilung von vornherein als eine mit drei unabhängigen Variablen ausgestattete, mithin als eine *räumliche* angesehen werden muß, wo aber wieder durch eine ganz ähnliche Untersuchung wie beim oberwähnten ebenen Problem die Abhängigkeit der Spannungen von einer der drei unabhängigen Variablen aufgehellt werden kann, so daß nach Ausschaltung dieser die Lösung von partiellen Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variablen übrig bleibt. Auf diesem Wege war es möglich, ein vollständiges Spannungsverteilungsgesetz aufzufinden, dessen großes Anwendungsgebiet, wie in der Folge gezeigt werden wird, ihm auch eine *rein praktische Bedeutung* für technische Probleme sichern dürfte.

Die hier vorgeführte Aufgabe der Elastizitätstheorie ist zunächst dadurch gekennzeichnet, daß *nur ein einziger Massenpunkt*, nämlich

1) Siehe Bd. 59 Heft 1 dieser Zeitschrift, Abhandlg. d. Verf. „Die Spannungsverteilung in keilförmigen Körpern, auf welche eine Einzelkraft einwirkt, unter Beschränkung auf das ebene Problem“.

die Spitze eines Kegels, von der äußeren Einzelkraft beeinflusst wird, mag die Richtungslinie dieser äußeren Kraft durch die Spitze des Kegels gehen oder nicht. Alle anderen Massenpunkte werden *nur durch innere Kräfte* des materiellen Punktsystemes betroffen. Den Kegel denke man sich an einer Basisfläche festgehalten, welche mit allen Flächenelementen unendlich fern von der Spitze des Kegels liegt. Der Spannungszustand dieses Körpers kann, sofern er ein gerader Kreiskegel ist, für jede beliebige Lage der äußeren Kraft genau beschrieben werden, und er bildet zusammen mit dem vom Verfasser gefundenen Spannungszustand in keilförmigen Körpern die zwei einfachsten Vertreter einer Gruppe von Problemen, welche man als die „perspektivischen Spannungszustände“ bezeichnen sollte und die sowohl den ebenen Problemen (wie beim keilförmigen Körper) als auch den räumlichen (wie beim kegelförmigen, hier behandelten Körper) angehören können.

Wie beim keilförmigen Körper das ebene, so entspricht für die hier anzustellenden Untersuchungen das *räumliche Polarkoordinatensystem* am meisten der Natur der gestellten Aufgabe. Über die angewendeten Bezeichnungen geben die nachfolgenden Erläuterungen Aufschluß.

In Fig. 1 ist Punkt  $M$  bestimmt durch seine drei Polarkoordinaten

$r$ , den Abstand vom Pol  $O$ ,

$\varphi$ , den Winkel, welcher den Parallelkreis auf der Kugel mit dem Radius  $r$  festlegt, auf welchem  $M$  sich befindet, und

$\psi$ , den Winkel der Meridianebene gegen den Nullmeridian.

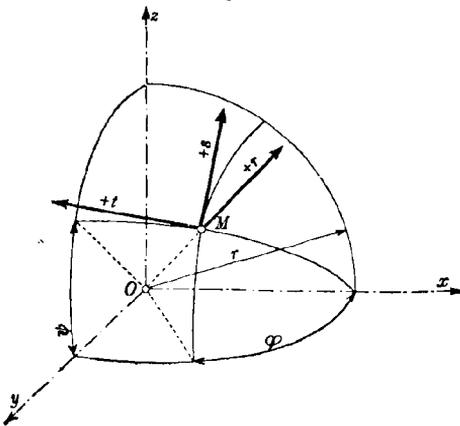
$r$  kann alle Werte zwischen 0 und

$+\infty$  annehmen,  $\varphi$  alle Werte zwischen 0 und  $\pi$ , und  $\psi$  alle Werte zwischen 0 und  $2\pi$ .

Neben diesem Polarkoordinatensystem sind noch zwei orthogonale Achsensysteme angenommen:

ein im Raume festes  $(x, y, z)$ , dessen Ursprung mit dem Pole des Polarsystemes zusammenfällt, dessen positive  $x$ -Achse mit der Polarchse des Polarsystemes identisch ist, während die  $x$ - $y$ -Ebene mit der Ebene des Nullmeridians übereinstimmt und die  $z$ - $x$ -Ebene mit der Meridianebene zum Winkel  $\psi = \frac{\pi}{2}$ ;

Fig. 1.



ferner ein im Raume veränderliches orthogonales Achsensystem  $(r, s, t)$ , dessen Ursprung im Punkte  $M_{(r, \varphi, \psi)}$  liegt; die positive Richtung  $r$  wird erhalten durch Verlängerung des Radiusvektor  $r$  über  $M$  hinaus, die positive Richtung  $s$  bildet die Tangente an den Parallelkreis von  $M$  aus in der Richtung des wachsenden Winkels  $\psi$  und die positive Richtung  $t$  die Tangente an den Meridian in der Richtung des wachsenden Winkels  $\varphi$ .

Dann sind die Neigungswinkel der positiven Achsenrichtungen  $r, s, t$  für eine beliebige Lage des Punktes  $M$  gegen die im Raume festen Richtungen  $x, y, z$  ausgedrückt durch die Polarkoordinaten des Punktes  $M$ , gegeben durch die 9 Gleichungen:

$$(1) \begin{cases} \cos(rx) = \cos \varphi, & \cos(ry) = \sin \varphi \cos \psi, & \cos(rz) = \sin \varphi \sin \psi \\ \cos(sx) = 0, & \cos(sy) = -\sin \psi, & \cos(sz) = \cos \psi \\ \cos(tx) = -\sin \varphi, & \cos(ty) = \cos \varphi \cos \psi, & \cos(tz) = \cos \varphi \sin \psi. \end{cases}$$

Bezeichnet man die Spannungen durch große Buchstaben, welche die Richtung der Spannungen kennzeichnen, während ein als Index beigefügter kleiner Buchstabe die Richtung der Normalen auf jenes Flächenelement angibt, auf welcher die Spannung besteht, so hat man es bei Verwendung von Polarkoordinaten mit folgenden 9 Spannungsgrößen zu tun:

$$\begin{array}{ccc} R_r & R_s & R_t \\ S_r & S_s & S_t \\ T_r & T_s & T_t \end{array}$$

wovon  $R_r, S_s, T_t$  Normalspannungen in drei zueinander senkrechten Richtungen vorstellen, während alle übrigen Schubspannungen sind. Da aber auch hier ebenso wie bei orthogonalen Koordinaten die Schubspannungen paarweise einander gleich sind (nämlich jene, welche man durch Vertauschung des Index mit dem großen Buchstaben in eine andere verwandeln kann), kommen in den nachfolgenden Gleichungen nur sechs verschiedene Spannungsgrößen vor, und zwar die Normalspannungen  $R_r, S_s, T_t$  und die Schubspannungen  $R_s, S_r, T_r$ . Alle Spannungen sind positiv, wenn sie in der positiven Richtung  $r, s$  bzw.  $t$  auf ein Flächenelement wirken, dessen Normale, ins Innere eines Raumelementes weisend, gleichfalls die positive Richtung  $r, s$  bzw.  $t$  einnimmt.

Das Gleichgewicht an einem sphärischen Raumelement, d. h. an einem Raumelement, welches begrenzt wird durch zwei konzentrische Kugelflächen mit den Radien  $r$  und  $r + dr$ , ferner durch zwei koaxiale Kreiskegel, deren Erzeugende die Winkel  $\varphi$  und  $\varphi + d\varphi$  mit der Achse einschließen und endlich durch zwei Meridianebenen, welche den

Winkel  $d\psi$  miteinander einschließen, erfordert, daß obige sechs Spannungen folgende Gleichungen<sup>1)</sup> befriedigen:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2R_r + r \frac{\partial R_r}{\partial r} - S_s - T_t + \frac{\partial R_s}{\partial \psi} \frac{1}{\sin \varphi} + T_r \operatorname{ctg} \varphi + \frac{\partial T_r}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{\partial S_s}{\partial \psi} \frac{1}{\sin \varphi} + 3R_s + r \frac{\partial R_s}{\partial r} + 2S_t \operatorname{ctg} \varphi + \frac{\partial S_t}{\partial \varphi} = 0 \\ -S_s \operatorname{ctg} \varphi + T_t \operatorname{ctg} \varphi + \frac{\partial T_t}{\partial \varphi} + \frac{\partial S_t}{\partial \psi} \frac{1}{\sin \varphi} + 3T_r + r \frac{\partial T_r}{\partial r} = 0. \end{array} \right.$$

1) Die Gleichungen (2) können entweder unmittelbar aus der Betrachtung des obenerwähnten sphärischen Raumelementes gewonnen werden, wobei das Gleichgewicht in der Richtung  $r$  die erste, in der Richtung  $s$  die zweite und in der Richtung  $t$  die dritte Gleichung liefert, oder aber durch Transformation aus den bekannten Gleichungen für rechtwinklige Koordinaten:

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0. \end{array} \right.$$

Zwischen den Koordinaten des orthogonalen Systemes und jenen des räumlichen Polarsystemes bestehen nämlich (siehe Fig. 1) die Beziehungen

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \cos \psi \\ z = r \sin \varphi \sin \psi. \end{array} \right.$$

Durch zweimalige Anwendung der bekannten Gleichungen

$$\begin{aligned} X_n &= X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz) \\ Y_n &= Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz) \\ Z_n &= Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz), \end{aligned}$$

mit Benützung der Gl. (1) findet man als Beziehungen zwischen den Spannungen des orthogonalen Systemes und den hier angewendeten die Gleichungen:

$$(c) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_x = R_r \cos^2 \varphi + T_t \sin^2 \varphi - 2T_r \sin \varphi \cos \varphi \\ Y_y = R_r \sin^2 \varphi \cos^2 \psi + S_s \sin^2 \psi + T_t \cos^2 \varphi \cos^2 \psi - 2R_s \sin \varphi \sin \psi \cos \psi - \\ \quad - 2S_t \cos \varphi \sin \psi \cos \psi + 2T_r \sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \psi \\ Z_z = R_r \sin^2 \varphi \sin^2 \psi + S_s \cos^2 \psi + T_t \cos^2 \varphi \sin^2 \psi + 2R_s \sin \varphi \sin \psi \cos \psi + \\ \quad + 2S_t \cos \varphi \sin \psi \cos \psi + 2T_r \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \psi \\ X_y = Y_x = R_r \sin \varphi \cos \varphi \cos \psi - T_t \sin \varphi \cos \varphi \cos \psi - R_s \cos \varphi \sin \psi + \\ \quad + S_t \sin \varphi \sin \psi + T_r (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \cos \psi \\ Y_z = Z_y = R_r \sin^2 \varphi \sin \psi \cos \psi - S_s \sin \psi \cos \psi + T_t \cos^2 \varphi \sin \psi \cos \psi + \\ \quad + R_s \sin \varphi (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) + S_t \cos \varphi (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) + \\ \quad + 2T_r \sin \varphi \cos \varphi \sin \psi \cos \psi \\ Z_x = X_z = R_r \sin \varphi \cos \varphi \sin \psi - T_t \sin \varphi \cos \varphi \sin \psi + R_s \cos \varphi \cos \psi - \\ \quad - S_t \sin \varphi \cos \psi + T_r (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \sin \psi. \end{array} \right.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (b) für die unabhängigen Variablen und der Gleichungen (c) für die abhängigen Variablen ist die Transformation der Gleichungen

Die gleichen Beziehungen, welche bei orthogonalen Achsensystemen zwischen den Spannungen einerseits, den linearen Dilatationen und den Schubwinkeln andererseits unter der Voraussetzung gelten, daß alle Deformationselemente unendlich klein vom ersten Kleinheitsgrade sind, haben auch hier volle Gültigkeit. Bezeichnet man die linearen Dilatationen in den drei Richtungen  $r, s, t$  beziehungsweise mit  $\lambda_r, \lambda_s, \lambda_t$  und die kubische Dilatation mit  $\nu$ , die Änderung des Winkels zweier ursprünglich zueinander senkrechten Flächenelemente, deren Schnittlinie die Richtung  $r, s$  oder  $t$  habe, beziehungsweise mit  $\varepsilon_r, \varepsilon_s, \varepsilon_t$  und verwendet man schließlich die beiden Kirchhoffschen Elastizitätskonstanten  $K$  (den Schubmodul) und  $\Theta$ , so bestehen die Gleichungen

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu = \lambda_r + \lambda_s + \lambda_t \\ R_r = -2K(\lambda_r + \Theta\nu) \\ S_s = -2K(\lambda_s + \Theta\nu) \\ T_t = -2K(\lambda_t + \Theta\nu) \\ R_s = -K\varepsilon_t \\ S_t = -K\varepsilon_r \\ T_r = -K\varepsilon_s. \end{array} \right.$$

chungen (a) möglich. Die Gleichungen (c) bzw. die diesen Gleichungen *inversen* Transformationsgleichungen dienen auch dazu, Spannungsverteilungsgesetze des einen Koordinatensystems in solche des anderen Systems zu verwandeln.

Die Transformation der Gleichungen (a) liefert die folgenden drei Gleichungen:

$$(d) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2R_r + r \frac{\partial R_r}{\partial r} - 2T_t - \frac{\partial T_t}{\partial \varphi} \operatorname{tg} \varphi + \frac{\partial R_s}{\partial \psi} \frac{1}{\sin \varphi} - \frac{\partial S_t}{\partial \psi} \frac{1}{\cos \varphi} + T_r \frac{(1 - 4 \sin^2 \varphi)}{\sin \varphi \cos \varphi} - \\ \quad - r \frac{\partial T_r}{\partial r} \operatorname{tg} \varphi + \frac{\partial T_r}{\partial \varphi} = 0 \\ \left( 2R_r + r \frac{\partial R_r}{\partial r} \right) \sin \varphi - S_s \frac{1}{\sin \varphi} - \frac{\partial S_s}{\partial \psi} \operatorname{tg} \psi + T_t \frac{(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}{\sin \varphi} + \frac{\partial T_t}{\partial \varphi} \cos \varphi - \\ \quad - \left( 3R_s + r \frac{\partial R_s}{\partial r} \right) \operatorname{tg} \psi + \frac{\partial R_s}{\partial \psi} - 2S_t \operatorname{ctg} \varphi \operatorname{tg} \psi - \frac{\partial S_t}{\partial \varphi} \operatorname{tg} \psi + \\ \quad + \frac{\partial S_t}{\partial \psi} \operatorname{ctg} \varphi + \left( 4T_r + r \frac{\partial T_r}{\partial r} \right) \cos \varphi + \frac{\partial T_r}{\partial \varphi} \sin \varphi = 0 \\ \left( 2R_r + r \frac{\partial R_r}{\partial r} \right) \sin \varphi - S_s \frac{1}{\sin \varphi} + \frac{\partial S_s}{\partial \psi} \operatorname{ctg} \psi + T_t \frac{(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}{\sin \varphi} + \\ \quad + \frac{\partial T_t}{\partial \varphi} \cos \varphi + \left( 3R_s + r \frac{\partial R_s}{\partial r} \right) \operatorname{ctg} \psi + \frac{\partial R_s}{\partial \psi} + 2S_t \operatorname{ctg} \varphi \operatorname{ctg} \psi + \\ \quad + \frac{\partial S_t}{\partial \varphi} \operatorname{ctg} \psi + \frac{\partial S_t}{\partial \psi} \operatorname{ctg} \varphi + \left( 4T_r + r \frac{\partial T_r}{\partial r} \right) \cos \varphi + \frac{\partial T_r}{\partial \varphi} \sin \varphi = 0 \end{array} \right.$$

Die Gleichungen (d) stellen zunächst nichts anderes vor als die Bedingungen des Gleichgewichtes in der Richtung der  $x$ -Achse,  $y$ -Achse und der  $z$ -Achse. Sie lassen sich aber untereinander vereinfachen, wodurch die Gleichungen (2) entstehen, welche das Gleichgewicht in den im Raume veränderlichen Richtungen  $r, s$  und  $t$  ausdrücken.

Die Polarkoordinaten der Verschiebung eines Massenpunktes werden mit  $u$ ,  $v$  und  $w$  bezeichnet, und zwar bedeutet  $u$  das Wachstum des Radiusvektor  $r$ ,  $v$  das Wachstum des den Parallelkreis angehenden Winkels  $\varphi$  und  $w$  das Wachstum des Winkels  $\psi$ .  $u$ ,  $v$  und  $w$  sind voraussetzungsgemäß unendlich klein vom ersten Grade und, da wir annehmen, daß der Körper nach erfolgter Deformation in einer Gleichgewichtslage zur Ruhe komme, nur Funktionen von  $r$ ,  $\varphi$  und  $\psi$ .

Dann lassen sich die Dilatationen und Schubwinkel durch die Größen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  und die unabhängigen Variablen  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  auf folgende Weise<sup>1)</sup> ausdrücken:

$$(4) \quad \begin{cases} \lambda_r = \frac{\partial u}{\partial r} & \varepsilon_r = \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial v}{\partial \psi} + \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial \varphi} \\ \lambda_\varphi = \frac{\partial w}{\partial \psi} + \frac{u}{r} + v \operatorname{ctg} \varphi & \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v}{\partial r} \\ \lambda_\psi = \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} & \varepsilon_\psi = \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial u}{\partial \psi} + r \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial r} \end{cases}$$

1) Die Gleichungen (4) können durch sorgfältige Beobachtung der Verschiebungswege der Eckpunkte eines sphärischen Raumelementes unmittelbar aufgestellt werden. In untrüglicher Weise gehen sie aus folgender Rechnung hervor: derselbe Punkt  $M(r, \varphi, \psi)$ , der in Figur 1 gezeichnet ist, gelangt durch die Transformation in die Lage  $M'(r+u, \varphi+v, \psi+w)$ . Dann sind die *orthogonalen Koordinaten* des Punktes  $M'$  in bezug auf das dem Punkte  $M$  zugeordnete rechtwinkelige Achsensystem  $(r, s, t)$ , die wir mit  $e_o, \sigma_o, \tau_o$  bezeichnen wollen, gegeben durch die Ausdrücke

$$\begin{aligned} e_o &= (r+u) [\cos(\varphi+v) \cos \varphi + \sin(\varphi+v) \sin \varphi \cos w] - r \\ \sigma_o &= (r+u) \sin(\varphi+v) \sin w \\ \tau_o &= (r+u) [\sin(\varphi+v) \cos \varphi \cos w - \cos(\varphi+v) \sin \varphi] \end{aligned}$$

oder, sofern  $u, v, w$  unendlich klein vom ersten Grade sind,

$$(e) \quad \begin{cases} e_o = u \\ \sigma_o = r \sin \varphi w \\ \tau_o = r v. \end{cases}$$

Die Koordinaten  $e, \sigma, \tau$  eines zweiten, dem Punkte  $M$  unendlich nahen Punktes  $m(r+dr, \varphi+d\varphi, \psi+d\psi)$  in bezug auf dasselbe orthogonale Achsensystem  $(r, s, t)$ , dessen Ursprung in  $M$  liegt, erhält man aus den Gleichungen (e) einfach dadurch, daß man  $dr, d\varphi, d\psi$  an die Stelle von  $u, v, w$  setzt.

$$(f) \quad \begin{cases} e = dr \\ \sigma = r \sin \varphi d\psi \\ \tau = r d\varphi. \end{cases}$$

Der Punkt  $m$  gelangt durch dieselbe Transformation in eine Lage

$m'(r+dr+u+du, \varphi+d\varphi+v+dv, \psi+d\psi+w+dw)$ , und man findet die orthogonalen Koordinaten des Punktes  $m'$  in bezug auf ein rechtwinkeliges Achsensystem  $(r', s', t')$ , welches dem Punkte  $m(r+dr, \varphi+d\varphi, \psi+d\psi)$  ebenso zugeordnet ist, wie das Achsensystem  $(r, s, t)$  dem Punkte  $M(r, \varphi, \psi)$ , dessen Ursprung also auch in  $m$  liegt, durch

Die Gleichungen (2), (3) und (4) bilden ihrem Wesen nach nichts Neues, sondern sind bloß die Form, welche die in der Elastizitäts-

Differentiationen aus den Gleichungen (e). Bezeichnet man die Koordinaten von  $m'$  in bezug auf  $(r', s', t')$  mit  $\rho', \sigma', \tau'$ , so ist, mit Vernachlässigung aller Glieder 3<sup>ter</sup> und 4<sup>ter</sup> Kleinheitsordnung

$$\begin{aligned} \rho' &= u + du = u + \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi \\ \sigma' &= (r + dr) \sin(\varphi + d\varphi) (w + dw) = r \sin \varphi w + \left( w \sin \varphi + r \frac{\partial w}{\partial r} \sin \varphi \right) dr + \\ &\quad + r \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial \psi} d\psi + \left( r \cos \varphi w + r \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) d\varphi \\ \tau' &= (r + dr) (v + dv) = rv + \left( v + r \frac{\partial v}{\partial r} \right) dr + r \frac{\partial v}{\partial \psi} d\psi + r \frac{\partial v}{\partial \varphi} d\varphi, \end{aligned}$$

oder in einer etwas anderen Schreibweise mit Benützung von (e) und (f)

$$(g) \quad \begin{cases} \rho' = \rho_0 + \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) \rho & + \left( \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) \sigma + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \tau \\ \sigma' = \sigma_0 + \left( r \sin \varphi + r \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial r} \right) \rho + \left( \frac{\partial w}{\partial \psi} \right) \sigma & + \left( \cos \varphi w + \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \tau \\ \tau' = \tau_0 + \left( v + r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \rho & + \left( \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial v}{\partial \psi} \right) \sigma + \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \tau. \end{cases}$$

Um aus den Koordinaten  $\rho' \sigma' \tau'$  des Punktes  $m'$  in bezug auf  $(r', s', t')$  die rechtwinkligen Koordinaten  $\rho_1, \sigma_1, \tau_1$  desselben Punktes  $m'$  in bezug auf das Achsensystem  $(r, s, t)$ , dessen Ursprung in  $M$  liegt, zu finden, verfährt man am einfachsten, da  $(r', s', t')$  aus  $(r, s, t)$  durch eine unendlich kleine Verschiebung und Verdrehung hervorgeht, indem man die ganze Lagenänderung in drei Verschiebungen bezw. Verdrehungen auflöst, und stets die Transformationsgleichungen einer Teillagenänderung in die der nächsten einsetzt. Man findet so mit Vernachlässigung aller Glieder von höherem als dem ersten Kleinheitsgrad die Beziehungen zwischen den Koordinaten  $\rho', \sigma', \tau'$  und  $\rho_1, \sigma_1, \tau_1$  eines beliebigen Punktes (mit Benützung von Gleichung f)

$$(h) \quad \begin{cases} \rho_1 = \rho' + dr - \sigma' \sin \varphi d\psi - \tau' d\varphi = \rho' + \rho + \left( -\frac{\sigma'}{r} \right) \sigma + \left( -\frac{\tau'}{r} \right) \tau \\ \sigma_1 = \sigma' + \left( r \sin \varphi + \rho' \sin \varphi + \tau' \cos \varphi \right) d\psi = \sigma' + \left( 1 + \frac{\rho'}{r} + \frac{\tau'}{r} \operatorname{ctg} \varphi \right) \sigma \\ \tau_1 = \tau' - \sigma' \cos \varphi d\psi + (r + \rho') d\varphi = \tau' + \left( -\frac{\sigma'}{r} \operatorname{ctg} \varphi \right) \sigma + \left( 1 + \frac{\rho'}{r} \right) \tau. \end{cases}$$

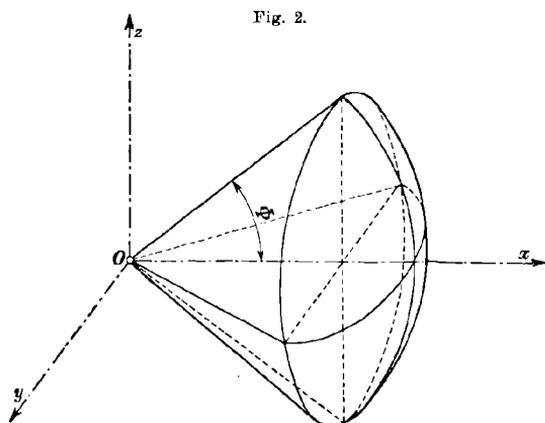
Durch Einsetzung der Werte aus (g) in (h) und abermalige Vernachlässigung aller Glieder höheren Kleinheitsgrades als des 2<sup>ten</sup> ergibt sich

$$(i) \quad \begin{cases} \rho_1 = \rho_0 + \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \rho & + \left( \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial u}{\partial \psi} - \sin \varphi w \right) \sigma + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) \tau \\ \sigma_1 = \sigma_0 + \left( w \sin \varphi + r \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial r} \right) \rho + \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial \psi} + \frac{u}{r} + v \operatorname{ctg} \varphi \right) \sigma + \left( \cos \varphi w + \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \tau \\ \tau_1 = \tau_0 + \left( v + r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \rho & + \left( \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial v}{\partial \psi} - \cos \varphi w \right) \sigma + \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) \tau. \end{cases}$$

Die Gleichungen (i) sind aber von der Form einer linearen Transformation

theorie allgemein angewendeten Grundgleichungen bei Verwendung räumlicher Polarkoordinaten annehmen.

In Fig. 2 ist ein gerader Kreiskegel gezeichnet und damit die Lage angegeben, welche er zu dem schon in Fig. 1 verzeichneten Achsensystem  $(x, y, z)$  einnimmt. Somit ist auch seine Lage zum räumlichen Polarkoordinatensystem festgelegt. Seine Spitze fällt mit dem Pol  $O$ , seine Achse mit der Polarachse  $Ox$  zusammen. Der Winkel, den die Erzeugenden der Mantelfläche mit der Achse einschließen, wird mit  $\Phi$  bezeichnet. Der Kreiskegel ist in Fig. 2 außer durch die Mantelfläche auch noch durch eine Kugelhaube begrenzt, welche zu  $O$  konzentrisch ist im Abstande  $r$  und deren Fläche mit  $F$  angegeben werde.



Man hat sich aber vorzustellen, daß der Kreiskegel über  $F$  hinaus bis ins Unendliche reiche und dort festgehalten werde.

Eine im Raume beliebig gelegene Einzelkraft  $P$ , von welcher aber vorausgesetzt werde, daß sie *nur auf den in der Spitze des Kegels liegenden Massenpunkt unmittelbar einwirke*,

kann stets nach Hinzufügung von zwei entgegengesetzt gerichteten, mit  $P$  parallelen Kräften  $R$  und  $-R$ , deren Richtungslinie durch die Spitze des Kegels geht, ersetzt werden durch die Kraft  $R$  im Vereine mit dem Kräftepaar  $(P, -R)$  vom Momente  $M$ ; sowohl  $R$  als  $M$  können nach Richtung und Größe leicht bestimmt werden, ebenso deren Komponenten  $R_x R_y R_z$  und  $M_x M_y M_z$ , so daß in der Folge nur von  $R$  und  $M$  bzw. den Komponenten beider gesprochen zu werden braucht.

$$x_1 = x_0 + a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z$$

$$y_1 = y_0 + a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z$$

$$z_1 = z_0 + a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z,$$

aus deren Koeffizienten die linearen Dilatationen und Schubwinkel, sofern sie unendlich kleine Größen sind, sich ergeben mit

$$\lambda_x = a_{11} - 1 \quad \varepsilon_x = a_{23} + a_{32}$$

$$\lambda_y = a_{22} - 1 \quad \varepsilon_y = a_{13} + a_{31}$$

$$\lambda_z = a_{33} - 1 \quad \varepsilon_z = a_{12} + a_{21}$$

In gleicher Weise findet man aus (i) die Werte von  $\lambda_r, \lambda_y, \lambda_z, \varepsilon_r, \varepsilon_s, \varepsilon_t$ , wie sie in Gleichung (4) angegeben sind.

Unter den gemachten Voraussetzungen gelingt die Bestimmung der Abhängigkeit aller Spannungen von einer der unabhängigen Variablen, nämlich vom Radiusvektor  $r$  auf genau gleiche Weise wie es für keilförmige Körper schon gezeigt wurde. Auch müssen ebenso wie dort die Kraft  $R$  und das Moment  $M$  getrennt behandelt werden.

Es wirke zunächst nur eine Kraft  $R$ , deren Richtungslinie durch die Spitze des Kegels gehe, auf den in der Spitze des Kegels befindlichen Massenpunkt ein. Infolge dieser Einwirkung tritt auf einem beliebigen, im Inneren des Kegels befindlichen Flächenelement eine resultierende Spannung  $s$  auf, welche bei größter Allgemeingültigkeit nur aufgefaßt zu werden braucht als eine unbekannt Funktion der äußeren Kraft  $R$ , des mittleren Abstandes des genannten Flächenelementes von der Spitze  $r$ , und im übrigen nur noch von lauter Winkelgrößen, welche die Lage des Flächenelementes im Raume sowie die Richtungswinkel seiner Flächennormalen ausdrücken; somit ist

$$s = f(R, r \dots),$$

wenn die Winkelgrößen nicht ausdrücklich angeschrieben werden.

Das Differential  $ds$  dieser Spannung ist dann

$$ds = \frac{\partial s}{\partial R} dR + \frac{\partial s}{\partial r} dr + \dots$$

Ändert man die Maßeinheit aller Längengrößen im Verhältnisse  $1 : \frac{r + dr}{r}$ , so erhält man (mit Vernachlässigung von Gliedern höherer Kleinheitsordnung) ein System zusammengehöriger Differentiale

$$dr, dR = R \frac{dr}{r}, \quad ds = -s \frac{dr}{r},$$

während die zugehörigen Differentiale der Winkelgrößen gleich Null sind. Die Differentiale ergeben sich unmittelbar aus den *Dimensionsformeln* einer Kraft und einer Spannung. Setzt man dieselben in die obige Gleichung ein, so entsteht

$$(5) \quad -s = \frac{\partial s}{\partial R} R + r \frac{\partial s}{\partial r}.$$

Da aber die Spannung der Kraft  $R$  jedenfalls direkt proportional, somit in bezug auf  $R$  allein eine homogene Funktion vom Grade  $+1$  sein muß, folgt nach Eulers Satz über homogene Funktionen

$$\frac{\partial s}{\partial R} R = +s,$$

und setzt man dies in Gl. (5) ein, so findet man

$$(6) \quad 2s + r \frac{\partial s}{\partial r} = 0$$

oder durch Integration dieser partiellen Differentialgleichung

$$(7) \quad s = \frac{f(\varphi, \psi)}{r^2},$$

wenn  $f(\varphi, \psi)$  eine willkürliche Funktion der Variablen  $\varphi$  und  $\psi$  darstellt.

Gleichung (7) drückt zunächst aus, daß die resultierenden Spannungen auf parallelen Flächenelementen, deren Mittelpunkte am selben Radialstrahl liegen, indirekt proportional dem Quadrat der Entfernung von der Spitze und zueinander parallel sind. Letzteres folgt daraus, daß durch die Änderung des Maßstabes für Längen überhaupt keine Winkeländerungen entstehen können, und daß daher außer Gl. (6) keine weiteren neuen Beziehungen aus dieser Änderung hervorgehen können.

Die gleiche Gesetzmäßigkeit muß aber auch für alle möglichen Komponenten der Spannung  $s$  Gültigkeit haben, so daß die Gl. (6) und (7) eine sechsfache Bedeutung erlangen, je nachdem  $R_r, S_s, T_\varphi, R_s, S_t$  oder  $T_r$  an Stelle von  $s$  in dieselben eingesetzt wird. Damit vereinfachen sich dann aber die Gleichungen (2) zu

$$(8) \quad \begin{cases} -S_s - T_t + \frac{\partial R_s}{\partial \psi} \frac{1}{\sin \varphi} + T_r \operatorname{ctg} \varphi + \frac{\partial T_r}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{\partial S_s}{\partial \psi} \frac{1}{\sin \varphi} + R_s + 2S_t \operatorname{ctg} \varphi + \frac{\partial S_t}{\partial \varphi} = 0 \\ -S_s \operatorname{ctg} \varphi + T_t \operatorname{ctg} \varphi + \frac{\partial T_t}{\partial \varphi} + \frac{\partial S_t}{\partial \psi} \frac{1}{\sin \varphi} + T_r = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (6), (7), (8) gelten nur, wenn *nur* eine Einzelkraft auf den Kegel einwirkt, deren Richtungslinie durch die Spitze des Kegels geht. Ist hingegen *nur* ein Kräftepaar vom Moment  $M$  vorhanden und wirkt dasselbe unmittelbar nur auf den in der Spitze des Kegels befindlichen Massenpunkt ein, so entsteht mittelbar auf jedem im Kegel befindlichen Flächenelement ebenfalls eine resultierende Spannung  $s$ , die als Funktion von  $M$ ,  $r$  und einigen Winkelgrößen mit hinreichender Allgemeinheit stets angesehen werden kann. Daher lauten die betreffenden Gleichungen hier

$$\begin{aligned} s &= f(M, r, \dots) \\ ds &= \frac{\partial s}{\partial M} dM + \frac{\partial s}{\partial r} dr + \dots \end{aligned}$$

Die Änderung der Maßeinheit aller Längengrößen läßt auch in diesem Falle ein zusammengehöriges System von Differentialen auffinden, und zwar, wenn die Änderung im Verhältnis  $1 : \frac{r+dr}{r}$  erfolgt, wie aus den Dimensionsformeln sich sofort ergibt, das System

$$dr, dM = M \cdot 2 \frac{dr}{r}, \quad ds = -s \frac{dr}{r},$$

und setzt man dasselbe in die letzte Gleichung ein, so entsteht

$$(9) \quad -s = 2 \frac{\partial s}{\partial M} \cdot M + r \frac{\partial s}{\partial r}.$$

Wieder muß die Spannung  $s$  direkt proportional dem äußeren Moment  $M$  sein, daher ist

$$\frac{\partial s}{\partial M} \cdot M = s$$

und Gl. (9) verwandelt sich in die der Gleichung (6) analoge:

$$(10) \quad 3s + r \frac{\partial s}{\partial r} = 0.$$

Integriert man diese Gleichung, so ergibt sich

$$(11) \quad s = \frac{f'(\varphi, \psi)}{r^3},$$

worin  $f'(\varphi, \psi)$  eine neue willkürliche Funktion von  $\varphi$  und  $\psi$  bedeutet.

Zu Gl. (10) (11) sind dieselben Bemerkungen zu machen wie es bei den analogen Gl. (6) und (7) geschehen ist. Insbesondere haben (10) und (11) eine sechsfache Bedeutung, da alle 6 zu ermittelnden Spannungen an die Stelle von  $s$  treten können. Daraus folgt weiter, daß die Gleichgewichtsbedingungen in Gl. (2) für den Fall eines *allein* auftretenden Kräftepaars auch in der neuen Form angeschrieben werden können:

$$(12) \quad \begin{cases} -R_r - S_s - T_t + \frac{\partial R_s}{\partial \psi} \frac{1}{\sin \varphi} + T_r \operatorname{ctg} \varphi + \frac{\partial T_r}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{\partial S_s}{\partial \psi} \frac{1}{\sin \varphi} + 2S_t \operatorname{ctg} \varphi + \frac{\partial S_t}{\partial \varphi} = 0 \\ -S_s \operatorname{ctg} \varphi + T_t \operatorname{ctg} \varphi + \frac{\partial T_t}{\partial \varphi} + \frac{\partial S_t}{\partial \psi} \frac{1}{\sin \varphi} = 0. \end{cases}$$

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß die Gleichungen (8) bzw. (12) für *alle kegelförmigen Körper* gelten, sofern die Kraft  $R$  bzw. das Moment  $M$  unmittelbar nur auf den in der Spitze liegenden Massenpunkt einwirken.

Die bisher aufgestellten Beziehungen reichen jedoch zur direkten Lösung des gestellten Problems nicht aus. Es sind vielmehr noch freie Annahmen zu machen und zu untersuchen, ob damit allen erforderlichen Bedingungen für einen möglichen Spannungszustand Rechnung getragen werden kann.

Die Analogie des geraden Kreiskegels mit den keilförmigen Körpern läßt darauf schließen, daß nur eine einzige Normalspannung, nämlich die Spannung  $R_r$  im Kreiskegel auftritt, sofern die Richtungslinie der äußeren Kraft durch die Spitze des Kegels hindurch geht. Und in der

Tat werden die Gl. (8) identisch befriedigt, wenn man die darin vorkommenden Spannungen  $S_s = T_t = R_s = S_t = T_r = 0$  setzt.

Sind aber  $S_s$  und  $T_t$  gleich Null, so ist bekanntlich

$$(13) \quad R_r = -2K \frac{1+3\Theta}{1+2\Theta} \lambda_r = -2K \frac{1+3\Theta}{1+2\Theta} \frac{\partial u}{\partial r}$$

zufolge Gl. (4).

Aus dem Verschwinden der drei Schubspannungen folgt weiter, daß auch  $\varepsilon_r = \varepsilon_s = \varepsilon_t = 0$  ist (Siehe Gl. (3) und Gl. (4)), so daß

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial v}{\partial \psi} + \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v}{\partial r} &= 0 \\ \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial u}{\partial \psi} + r \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial r} &= 0 \end{aligned}$$

zu setzen ist. Aus diesen drei Gleichungen läßt sich eine Differentialgleichung bilden, welche nur  $u$  enthält. Sie lautet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial \psi} - \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial u}{\partial \psi} = 0$$

und könnte leicht integriert werden. Da aber  $u$  Funktion von  $r$ ,  $\varphi$  und  $\psi$  ist, ist es vorteilhafter, die Gleichung noch nach  $r$  zu differenzieren:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial r \partial \varphi \partial \psi} - \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \psi} = 0.$$

Erteilt man nun dem Radius  $r$  einen festen Wert, so ist obige Differentialgleichung eine partielle 2. Ordnung für  $\frac{\partial u}{\partial r}$  mit den unabhängigen Variablen  $\varphi$  und  $\psi$ , und man erhält sofort

$$\frac{\partial u}{\partial r} = f(\psi) \sin \varphi + f(\varphi),$$

worin  $f(\psi)$  und  $f(\varphi)$  willkürliche Funktionen von  $\psi$  bzw. von  $\varphi$  allein bedeuten, und die Abhängigkeit des Differentialquotienten  $\frac{\partial u}{\partial r}$  von  $r$  nicht zum Ausdruck kommt. Diese ist jedoch aus Gl. (7) im Vereine mit Gl. (13) schon bekannt, so daß aus der Verbindung der genannten mit der obigen sich ergibt

$$R_r = \frac{1}{r^2} \left( -2K \frac{1+3\Theta}{1+2\Theta} \right) (f(\psi) \sin \varphi + f(\varphi)).$$

Setzt man

$$\begin{aligned} -2K \frac{1+3\Theta}{1+2\Theta} f(\psi) &= \alpha \cos \psi \\ -2K \frac{1+3\Theta}{1+2\Theta} f(\varphi) &= \beta \cos \varphi, \end{aligned}$$

wo  $\alpha$  und  $\beta$  noch unbekannte konstante Werte vorstellen, so lautet

$$(14) \quad R_r = \frac{1}{r^2} (\alpha \cos \psi \sin \varphi + \beta \cos \varphi)$$

und es ist zu untersuchen, ob und unter welchen Bedingungen  $R_r$  diese einfache Form annehmen kann.

Bildet man die Resultierende aller inneren Kräfte, welche sich auf jener Kugelhaube  $F$  vorfinden, mit der eine Kugel vom Radius  $r = 1$  den Kreiskegel durchsetzt, so muß diese Resultierende durch die Spitze des Kegels gehen, da wir angenommen haben, daß alle Spannungen mit Ausnahme von  $R_r$  gleich Null sind. Daraus folgt, daß Gl. (14) den Spannungszustand des Kegels vollkommen beschreiben kann, sofern die Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  von Null verschieden sind und sich eindeutig bestimmen lassen. Bedeuten  $R_x, R_y, R_z$  die Komponenten der Kraft  $R$  und  $dF = \sin \varphi d\varphi d\psi$  das Element der Fläche  $F$  so ist

$$(15) \quad \begin{cases} \iint_F R_r \cos(rx) dF = R_x \\ \iint_F R_r \cos(ry) dF = R_y \\ \iint_F R_r \cos(rz) dF = R_z. \end{cases}$$

Setzt man hier  $R_r$  mit  $r = 1$  aus Gl. (14) ein, die Richtungskosinusse aus Gl. (1) und integriert man nach  $\varphi$  zwischen den Grenzen 0 und  $\Phi$ , nach  $\psi$  zwischen 0 und  $2\pi$ , so ergibt sich

$$(16) \quad \begin{cases} \beta = \frac{3 R_x}{2\pi(1 - \cos^3 \Phi)} \\ \alpha = \frac{3 R_y}{\pi(2 - 3 \cos \Phi + \cos^3 \Phi)} \end{cases}$$

und  $R_z = 0$ .

Gleichung (14) stellt somit tatsächlich mit den Werten aus (16) den Spannungszustand des geraden Kreiskegels erschöpfend dar, wenn man den Winkel  $\psi$  von jener Meridianebene aus zählt, in welcher die äußere Kraft  $R$  liegt, weil dann  $R_z$  tatsächlich verschwindet.

Für  $\Phi = \frac{\pi}{2}$  und  $R_y = 0$  entsteht das von Boussinesq behandelte Problem. Mit  $\Phi = \pi$  wird  $\alpha = \frac{3 R_y}{4\pi}$  und  $\beta = \frac{3 R_x}{4\pi}$ , wie es sein muß, weil dann beide Richtungen gleichwertig sind. Dieser Fall kennzeichnet die Spannungsverteilung im unendlichen Raume, welche von einer auf einen einzigen Massenpunkt einwirkenden äußeren Kraft mittelbar hervorgerufen wird und ist möglicherweise von Bedeutung für mancherlei andere Untersuchungen.

Es ist auch ohne weiteres klar, daß Gl. (14) auch für jeden beliebigen, unregelmäßigen Kegel ihre Gültigkeit bewahrt, da außer  $R_r$  keine anderen Spannungen vorkommen. Nur wäre es Aufgabe einer besonderen Untersuchung, ein Verfahren ausfindig zu machen, wie man in jedem Falle die Gerade und Ebene bestimmt, welche als Polarachse bzw. als Nullebene des Winkels  $\psi$  zu gelten hat.<sup>1)</sup>

Wirkt nur ein Moment  $M$  auf die Spitze des geraden Kreiskegels ein, so führt die Analogie mit den keilförmigen Körpern zu der Annahme, daß nur jene Spannungen vorhanden sind, welche auf der zur Spitze konzentrischen Kugelhaube  $F$  (siehe Fig. 2) vorkommen, das sind die Spannungen  $R_r$ ,  $R_\psi$  und  $T_r$ , während  $S_\psi = T_\psi = S_r = 0$  ist.

Ist dies der Fall, so sind die beiden letzten der hier geltenden Gleichungen (12) von selbst erfüllt, während die erste sich vereinfacht zu

$$(17) \quad -R_r + \frac{\partial R_r}{\partial \psi} \frac{1}{\sin \varphi} + T_r \operatorname{ctg} \varphi + \frac{\partial T_r}{\partial \varphi} = 0$$

und zur Bestimmung der Spannungen herangezogen werden muß.

Ferner gilt, da  $S_\psi = T_\psi = 0$  ist, Gl. (13), auch für diesen Fall. Aus  $S_\psi = T_\psi = 0$  folgt aber auch  $\lambda_\psi - \lambda_r = 0$  oder

$$(18) \quad \frac{\partial w}{\partial \psi} + v \operatorname{ctg} \varphi - \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0.$$

Wegen  $S_r = 0$  muß auch  $\varepsilon_r = 0$  sein, daher

$$(19) \quad \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial v}{\partial \psi} + \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0.$$

Aus Gl. (18) und (19) lassen sich zur Bestimmung von  $v$  und  $w$  die beiden Differentialgleichungen bilden

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial \psi^2} \frac{1}{\sin^2 \varphi} + v \frac{1}{\sin^2 \varphi} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} \frac{1}{\sin \varphi} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \cos \varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \sin \varphi = 0. \end{cases}$$

Durch Einführung der Werte aus Gl. (3), (4) und (13) in Gl. (17) entsteht schließlich

$$2 \frac{1+3\Theta}{1+2\Theta} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} - \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - r \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - r \frac{\partial v}{\partial r} \operatorname{ctg} \varphi - r \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} = 0,$$

welche Gleichung sich vermöge Gl. (18) vereinfacht zu

$$(21) \quad 2 \frac{1+3\Theta}{1+2\Theta} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} - \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - 2r \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} = 0.$$

1) Um z. B. die Spannungsverteilung in jenem Körper zu finden, welcher sich zwischen zwei koaxialen Kreiskegelmänteln befindet, deren Erzeugende die Winkel  $\Phi_1$  bzw.  $\Phi_2$  mit der Achse einschließen, hätte man nur bei Auswertung der Integrale in (15) die Grenzen für den Winkel  $\varphi$  mit  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  anzunehmen.

Da jedoch zufolge Gl. (11) hier alle Spannungen *indirekt proportional* der dritten Potenz des Radiusvektor  $r$  sein müssen, lehrt eine Betrachtung der Gl. (3) bzw. (4) und (13) sofort, daß

$$(22) \quad u = \frac{u'}{r^3}, \quad v = \frac{v'}{r^3}, \quad w = \frac{w'}{r^3}$$

sein muß, wobei  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  nur mehr Funktionen von  $\varphi$  und  $\psi$  allein bedeuten.

Setzt man diese Ausdrücke in Gl. (21) ein und der Kürze halber

$$4 \frac{1 + 3\Theta}{1 + 2\Theta} = a,$$

so ergibt sich nach entsprechender Kürzung

$$(23) \quad a u' + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u'}{\partial \psi^2} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial u'}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u'}{\partial \varphi^2} - 6 \frac{\partial v'}{\partial \varphi} = 0,$$

welche Gleichung zur Bestimmung von  $u'$  bzw.  $u$  nach vorausgegangener Ermittlung von  $v'$  dienen kann. Es sei bemerkt, daß die Gleichungen (18), (19) und (20) mit den Variablen  $v'$  und  $w'$  ebenso lauten würden, wie sie für  $v$  und  $w$  angeschrieben wurden.

Das allgemeine Integral der Gleichungen (20) und (23) vermag Verfasser nicht anzugeben, wohl aber jene partikuläre Lösung, welche den Gleichungen (18), (19), (20) und (23) genügt und auch allen anderen Bedingungen entspricht, welche das gestellte Problem auferlegt. Die Lösung ist

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{ll} u' = \frac{6\alpha'}{2-a} \sin \varphi \sin \psi & \text{oder } u = \frac{1}{r^3} \frac{6\alpha'}{2-a} \sin \varphi \sin \psi \\ v' = (\alpha' \cos \varphi + \beta') \sin \psi & v = \frac{1}{r^3} (\alpha' \cos \varphi + \beta') \sin \psi \\ w' = \left( \frac{\alpha'}{\sin \varphi} + \beta' \operatorname{ctg} \varphi \right) \cos \psi + \gamma' & w = \frac{1}{r^3} \left[ \left( \frac{\alpha'}{\sin \varphi} + \beta' \operatorname{ctg} \varphi \right) \cos \psi + \gamma' \right], \end{array} \right.$$

worin  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  willkürliche Konstante bedeuten.

Mit Verwendung der Abkürzung  $a = 4 \frac{1 + 3\Theta}{1 + 2\Theta}$  und der Werte aus (24) erhält man aus den Gleichungen (3) bzw. (4) und (13):

$$\begin{aligned} R_r &= \frac{1}{r^3} \frac{6Ka\alpha'}{2-a} \sin \varphi \sin \psi \\ R_\varphi &= \frac{1}{r^3} \left( -\frac{3Ka\alpha'}{2-a} \cos \psi + 3K\beta' \cos \varphi \cos \psi + 3K\gamma' \sin \varphi \right) \\ T_r &= \frac{\sin \psi}{r^3} \left( -\frac{3Ka\alpha'}{2-a} \cos \varphi + 2K\beta' \right). \end{aligned}$$

Führt man an Stelle von  $-\frac{3Ka\alpha'}{2-a}$ ,  $3K\beta'$ ,  $3K\gamma'$  die neuen will-

kürlichen Konstanten  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  ein, so schreiben sich die drei Spannungen

$$R_r = \frac{-2\alpha}{r^3} \sin \varphi \sin \psi$$

$$R_s = \frac{1}{r^3} (\alpha \cos \psi + \beta \cos \varphi \cos \psi + \gamma \sin \varphi)$$

$$T_r = \frac{\sin \psi}{r^3} (\alpha \cos \varphi + \beta).$$

Von diesen drei Spannungen tritt nur  $T_r$  auf der Mantelfläche des geraden Kreiskegels auf. Da sie an dieser Stelle aber verschwinden muß, folgt, daß

$$\beta = -\alpha \cos \Phi,$$

daher

$$(25) \quad \begin{cases} R_r = \frac{-2\alpha}{r^3} \sin \varphi \sin \psi \\ R_s = \frac{1}{r^3} [\alpha \cos \psi (1 - \cos \Phi \cos \varphi) + \gamma \sin \varphi] \\ T_r = \frac{1}{r^3} \alpha \sin \psi (\cos \varphi - \cos \Phi) \end{cases}$$

Die angegebene Lösung muß die richtige sein, sofern die drei Spannungen *keine* Resultierende besitzen (da nur ein angreifendes Kräftepaar vorausgesetzt ist) und die Konstanten  $\alpha$  und  $\gamma$  sich eindeutig bestimmen lassen. Es muß also sein

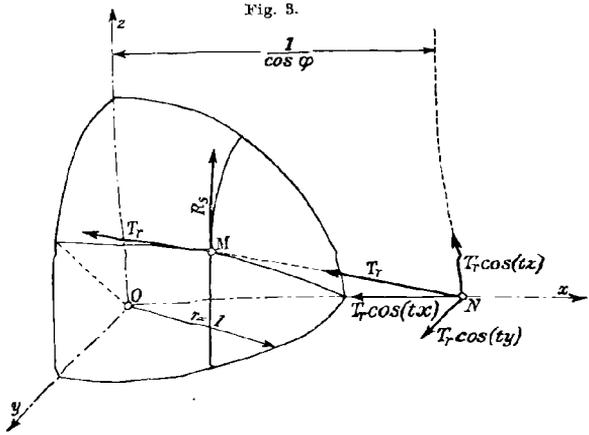
$$(26) \quad \begin{cases} \int_F [R_r \cos(rx) + R_s \cos(sx) + T_r \cos(tx)] dF = R_x = 0 \\ \int_F [R_r \cos(ry) + R_s \cos(sy) + T_r \cos(ty)] dF = R_y = 0 \\ \int_F [R_r \cos(rz) + R_s \cos(sz) + T_r \cos(tz)] dF = R_z = 0. \end{cases}$$

Da die Gleichungen (26) nach Einsetzung der Werte aus Gleichung (25) (wobei  $r=1$  angenommen werden kann, weshalb dann  $dF = \sin \varphi d\varphi d\psi$  zu setzen ist) und nach Ausrechnung der Integrale erfüllt werden, so ist in den Gleichungen (25) tatsächlich kein Widerspruch mit der Art der äußeren Einwirkung enthalten.

Man hat aber auch noch die Momentengleichungen in bezug auf die in der Kegelspitze sich rechtwinkelig schneidenden drei Achsen  $x, y, z$  aufzustellen, um zu erweisen, ob  $\alpha$  und  $\gamma$  von Null verschieden und eindeutig zu bestimmen sind. Zur Erläuterung dieses Vorganges dient Fig. 3. Dasselbst ist ein Punkt  $M_{(1, \varphi, \psi)}$  verzeichnet und an ihm

sind die *positiven* Richtungen der Spannungen  $R_s$  und  $T_r$  (positiv, sofern sie auf der *konkaven* sphärischen Oberfläche diese Richtung haben) angegeben.

Die Spannung  $R_s$  tritt in den Momentengleichungen überhaupt nicht auf, da ihre Richtung stets alle drei Achsen im Ursprung schneidet. Die Spannung  $T_r$  wird, da ihre Richtungslinie im Punkte  $N$ , dessen Abstand vom Ursprung den Wert  $\frac{1}{\cos \varphi}$  hat, die  $x$ -Achse schneidet, dort in ihre drei Komponenten  $T_r \cos(tx)$ ,  $T_r \cos(ty)$ ,  $T_r \cos(tz)$  zerlegt, und man findet schließlich



$$(27) \quad \begin{cases} \iint_{F'} R_s \sin \varphi dF' & = M_x \\ \iint_{F'} [R_s \cos(sx) \cos \varphi + T_r \cos(tz) \frac{1}{\cos \varphi}] dF' & = M_y \\ \iint_{F'} [R_s \cos(sy) \cos \varphi + T_r \cos(ty) \frac{1}{\cos \varphi}] dF' & = M_z \end{cases}$$

Die Auswertung der Integrale liefert

$$(28) \quad \begin{cases} \gamma = \frac{3 M_x}{2 \pi (2 - 3 \cos \Phi + \cos^3 \Phi)} \\ \alpha = \frac{3 M_y}{\pi (3 - 4 \cos \Phi + \cos^4 \Phi)} \end{cases}$$

während  $M_z = 0$  gefunden wird.

Somit stellen die Gleichungen (25) *nur dann* im Vereine mit den Werten aus (28) die Spannungsverteilung im geraden Kreiskegel tatsächlich dar, *wenn als Nullebene für den Winkel  $\psi$  jene Ebene gilt, welche bestimmt ist durch die sich schneidenden Achsen des Kegels und des äußeren Kräftepaars.*<sup>1)</sup>

1) Sucht man auch hier die Gültigkeit der Formeln auf den schon in der Fußnote auf S. 404 betrachteten *hohlen Kreiskegel* auszudehnen, so findet man aus der Gleichung  $T_r = \frac{\sin \psi}{r^3} (\alpha \cos \varphi + \beta)$ , weil hier  $T_r$  sowohl für  $\varphi = \Phi_1$  wie auch für  $\varphi = \Phi_2$  verschwinden muß,  $\alpha = \beta = 0$ . Die Gleichungen gelten daher nur, wenn auch  $M_y = 0$  ist. Die erste und dritte Gleichung (25) ist somit für diesen Körper *trivial*, und zur Bestimmung von  $\gamma$  ist die Integration nach  $\varphi$  im ersten Doppelintegral der Gleichung (27) zwischen den Grenzen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  auszuführen.

Wie mannigfaltig die Anwendung der für den geraden Kreiskegel gefundenen Formeln sein kann, soll an einem Beispiele gezeigt werden, welches nicht gerade naheliegend, wohl aber von praktischem Interesse ist. Es betrifft die *Verteilung der Schubspannungen* auf einem kreisförmigen Querschnitte des geraden Stabes.

Liegt nämlich die Spitze eines Kegels in unendlicher Entfernung von der zu untersuchenden Querschnittsfläche, so geht der Kegel über in einen zylindrischen Körper, und es müssen daher die für gerade Stäbe gültigen Formeln aus den hier abgeleiteten hervorgehen, aus den Formeln (25) und (28) also insbesondere die für gerade Stäbe mit kreisförmigem Querschnitt anzuwendenden.

Bei diesem Grenzübergange nähert sich der Winkel  $\Phi$  der Grenze Null, und die Konstante  $\alpha$  in Gleichung (28), welche auch geschrieben werden kann

$$\alpha = \frac{3 M_y}{\pi (3 - 4 \cos \Phi + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2 \Phi + \frac{1}{4} \cos 4 \Phi)}$$

erlangt, sofern man die hier vorkommenden Kosinuse durch unendliche Reihen ersetzt und alle Glieder von höherem als 4. Kleinheitsgrade vernachlässigt, den Grenzwert

$$\alpha = \frac{2 M_y}{\pi \Phi^4}$$

Setzt man diesen Wert in Gleichung (25) ein, so findet man zunächst

$$R_r = \frac{-4 M_y}{\pi r^3 \Phi^4} \sin \varphi \sin \psi.$$

Bezeichnet man den Abstand eines Punktes von der  $x-y$ -Ebene in Fig. 2 mit  $z$ , so ist  $z = r \sin \varphi \sin \psi$ ; ferner ist für unendlich kleine Winkel  $\Phi$

$$r \Phi = R,$$

wenn  $R$  den Radius jenes Kreises bedeutet, welcher den *Querschnitt* des nunmehr zylindrischen Körpers umgrenzt. Daher kann man auch schreiben

$$(29) \quad R_r = \frac{-M_y}{\pi R^3} \cdot \frac{z}{R}$$

womit das lineare Verteilungsgesetz der Normalspannungen in geraden Stäben zum Ausdruck kommt.  $\frac{\pi R^3}{4}$  ist das Widerstandsmoment  $W$  einer Kreisfläche, und die maximale Normalspannung tritt ein, wenn  $z$  seinen Größtwert  $R$  annimmt:

$$\max R_r = -\frac{M_y}{W}.$$

Nimmt man ferner an, daß  $M_x = 0$  sei (daß also keine *Torsion* vorhanden sei) daher auch  $\gamma = 0$ , und ersetzt man die Kosinusse in Gleichung (25) durch unendliche Reihen mit Vernachlässigung aller Glieder von höherem als *zweitem* Kleinheitsgrade, so findet man mit obigem Werte für  $\alpha$

$$(30) \quad \begin{cases} R_s = \frac{M_y}{\pi r^3 \Phi^2} (\Phi^2 + \varphi^2) \cos \psi \\ T_r = \frac{M_y}{\pi r^3 \Phi^2} (\Phi^2 - \varphi^2) \sin \psi. \end{cases}$$

Daraus ergeben sich die Höchstwerte der beiden Schubspannungen, zu

$$\begin{aligned} \max R_s &= \frac{2 M_y}{\pi r^3 \Phi^2} \\ \max T_r &= \frac{M_y}{\pi r^3 \Phi^2} \end{aligned}$$

oder, wenn man berücksichtigt, daß  $\frac{M_y}{r}$  nichts anderes als die im Querschnitt zu übertragende *Schubkraft*  $Q$  vorstellt und  $r^2 \Phi^2 = R^2$ , daher  $\pi r^2 \Phi^2 = F$  die *Fläche* des kreisförmigen Querschnittes ist,

$$(31) \quad \begin{cases} \max R_s = 2 \frac{Q}{F} \\ \max T_r = \frac{Q}{F}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (31) sind leicht in Worte zu kleiden, wenn man beachtet, daß  $\frac{Q}{F}$  die sogenannte „mittlere Schubspannung“ ist.

Die Spannung  $\max R_s$  ist zugleich die größte am ganzen Querschnitt auftretende Schubspannung, welche somit um 50% größer ausfällt, als der in technischen Hand- und Lehrbüchern auf Grund elementarer Methoden ermittelte Wert  $\frac{4}{3} \frac{Q}{F}$ .

Führt man an Stelle von  $R_s$  und  $T_r$  die gewöhnlich betrachteten Komponenten der resultierenden Schubspannung  $\tau_y$  und  $\tau_z$  ein, so findet man

$$(32) \quad \begin{cases} \tau_y = -\frac{2 Q y z}{F R^2} \\ \tau_z = \frac{Q}{F} \left( 1 + \frac{y^2 - z^2}{R^2} \right). \end{cases}$$

Trägt man in jedem Punkte  $\tau_y$  und  $\tau_z$  senkrecht zur Querschnittsfläche auf, so ergeben sich zwei kongruente, gleichseitige hyperbolische Paraboloiden, welche gegeneinander um 45° verdreht sind und deren Abstand in der Mitte  $\frac{Q}{F}$  gleich der mittleren Schubspannung ist.

Die resultierende Schubspannung in gleicher Weise senkrecht zum Querschnitt aufgetragen liefert eine Fläche vierter Ordnung.

## Beiträge zur Praxis der für die Berechnung des Rentenzinsfußes verwendbaren speziellen trinomischen Gleichung.

VON KARL GOLDZIHNER in Budapest.

### Einleitung.

Die algebraische Diskussion und die numerische Behandlung der trinomischen Gleichungen wurde in der grundlegenden Arbeit von Gauß<sup>1)</sup> vollständig erledigt; Gauß betonte vor allem, daß die algebraische Lösungsmethode neben den Reihenentwicklungen für die gesuchte Wurzel in praktischer Hinsicht unbedingt zu berücksichtigen ist. Wichtige Anwendung finden die trinomischen Gleichungen in der Politischen Arithmetik, indem die Bestimmung des Zinsfußes einer Rente auf die Lösung einer speziellen trinomischen Gleichung hinführt. Bei der praktischen Bearbeitung dieses Problems ist merkwürdigerweise zumeist nur der eine Weg befolgt worden, es gibt eine ganze Reihe von Lösungsmethoden, die zum Ausgangspunkt das Prinzip der Reihenentwicklung oder auf dasselbe zurückführbare kompliziertere Ansätze wählen. Der Nachteil der genaueren, in diese Klasse gehörenden Verfahren besteht darin, daß zur praktischen Lösung der Aufgaben spezielle Tabellen zur Verfügung stehen müssen, die Argumente nur in diskreter Aufeinanderfolge enthalten. Es ist wahr, daß man in der Praxis sehr oft mit den allereinfachsten Approximationen<sup>2)</sup>, wenigstens als guten Anfangswerten auskommt; wir glauben aber, daß bei der reichhaltigen Bearbeitung des direkten Weges heutzutage auch die nähere Beleuchtung der durch Gauß als indirekt bezeichneten algebraischen Methoden das Interesse beanspruchen kann. Diese These wird — wie die vorliegende Arbeit zu erweisen sucht — dadurch bekräftigt, daß die algebraische Behandlung nicht nur in schneller und in praktisch

1) Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen, II. Abt. (Werke Bd. III. S. 85—96). Im Buche von Runge: Praxis der Gleichungen (Sammlung Schubert. Leipzig. Göschen 1900. § 20) findet man eine sehr klare Darstellung der zu gebrauchenden Sätze; hier ist auch das Zinsfußproblem als Übungsaufgabe zum ersten Male allgemein angegeben.

2) Siehe z. B. in Bd. I. des Inst. of Act. Text Book (London 1901) Chap. VI.; Marie: Traité math. et prat. des opérations financières (Paris. Gauthier-Villars 1890) IV. Chap. II.; Barriol: Théorie et Pratique des op. fin. (Encycl. Scient. Paris. Doin. 1910). Chap. IV.

entsprechender Weise zum Ziele führt, sondern auch die Diskussion des eigentlichen algebraischen Problems vollauf erledigt.<sup>1)</sup>

Durch die Hervorkehrung der speziellen Bauart der Gleichung gelingt es, die algebraische Diskussion des Rentenzinsfußproblems den aus praktischen Bemerkungen entspringenden Gesichtspunkten anzupassen und die Anwendung der Gaußschen Lösungsmethode in diesem Kreise festzulegen. Im ersten Kapitel soll gezeigt werden, wie einfach sich die Lösung unseres Problems gestaltet, wenn man das ursprüngliche Gaußsche Verfahren mit der Methode von Mehmke<sup>2)</sup> kombiniert, welche die praktische Berechnung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen bezweckt. Es wird sich herausstellen, daß man neben der gewöhnlichen Logarithmentabelle nur die primitivste Form der Gaußschen Tabelle der Additionslogarithmen zur Verfügung haben muß, um das Resultat vierstellig genau zu erhalten.

Im zweiten Kapitel werden wir das Verfahren der *Funktionsiteration* zur Lösung unseres Problems heranziehen. Diese Methode wurde bereits in den achtziger Jahren auf das Rentenzinsfußproblem angewendet<sup>3)</sup>, und nachdem der Prozeß durch Netto, Isenkrahe und Heymann<sup>4)</sup> des näheren untersucht wurde, gelang es Heymann<sup>5)</sup>, die endgültige Formel für den praktischen Fall anzugeben. Da diese Arbeiten in den Fachkreisen weniger bekannt sind, so wollen wir die auf sie gegründete Behandlung der Zinsfußaufgabe hier vollständig vorführen und die nötigen Konvergenzbetrachtungen im Anschluß an die spezielle Bauart der Gleichungen erledigen. Das Bindeglied zwischen den beiden ersten Kapiteln ist ein einfacher Satz aus der Differentialrechnung, der in den

1) Diese Fragen werden in den Lehrbüchern der Politischen Arithmetik gewöhnlich nur in sehr allgemeiner Weise gestreift.

2) Praktische Methode zur Berechnung der reellen Wurzeln algebraischer oder transzendenter numerischer Gleichungen mit einer Unbekannten (*Zeitschr. für Math. und Phys.* XXXVI. 1891).

3) Hoffmann: Über die Auflösung der trinomischen Gleichungen durch kettenbruchartige Algorithmen (*Arch. für Math. und Phys.* 1881); Günther: Eine didaktisch wichtige Auflösung der trinomischen Gleichungen (*Zeitschr. für math. und naturwiss. Unt.* XI. 1887; mit Angabe der ältern Literatur); v. Schaewen: Bemerkungen zu dem Güntherschen Aufsatz (daselbst).

4) Netto: *Math. Ann.* XXIX. 1879 und Vorles. über Algebra Bd. I. (Leipzig. B. G. Teubner 1896. S. 300—305); Isenkrahe: *Math. Ann.* XXXI. 1881 und: *Das Verfahren der Funktionswiederholung* (Leipzig. B. G. Teubner 1897); Heymann: *Über die Auflösung der Gleichungen vom V. Grade* (*Zeitschr. für Math. und Phys.* XXXIX. 1894, besonders S. 327—354).

5) A. a. O. und: *Über die Auflösung der Gleichungen durch Iteration auf geometrischer Grundlage* (*Jahresber. der Techn. Lehranstalten. Chemnitz.* 1904).

beiden — ganz verschieden aufgebauten — Teilen den Kernpunkt der algebraischen Besprechung bildet.

Im letzten Kapitel geben wir die *graphische* Behandlung der Aufgabe auf Grund der logarithmographischen Methode, die zuerst Mehmke im Jahre 1889 für praktische algebraische Zwecke gestaltete.<sup>1)</sup> Dieses Verfahren wird auch die Einzelheiten der algebraischen Diskussion und die mit der Aufgabe verknüpften speziellen Vorkommnisse in anschaulicher Weise zu erörtern haben.

### I. Algebraische Behandlung der trinomischen Gleichung des Zinsfußproblems der Rentenrechnung.

1. Die Berechnung des Zinsfußes der Rente führt in den verschiedenen Fällen der Praxis auf eine ganz speziell aufgebaute trinomische Gleichung; wir wollen im Folgenden darauf hinweisen, wie die Einzelheiten der praktischen Beschaffenheit der Aufgabe aus dieser charakteristischen algebraischen Tatsache abzuleiten sind.

Je nachdem Endwert ( $E$ ) oder Barwert ( $B$ ) der Rente in Betracht kommt, treten in der Praxis die folgenden vier Fälle auf:

$$(A\ 1. \text{ und } A\ 2.) \quad E_n = \frac{R}{i}(r^n - 1), \quad E_n^{(1)} = E_n r$$

$$(B\ 1. \text{ und } B\ 2.) \quad B_n^{(1)} = \frac{R}{i} \frac{r^n - 1}{r^n}, \quad B_n = B_n^{(1)} r$$

( $R$ : Größe der konstanten Zeitrente;  $n$ : Anzahl der Perioden;  $i$ : auf die Periode und auf die Einheit bezogener Zinsfuß;  $r = 1 + i$ ).

Setzen wir:

$$r = x, \quad \frac{1}{r} = z; \quad \frac{E}{R} = E, \quad \frac{B}{R} = B^2),$$

so erhalten wir für den Zinsfuß die vier trinomischen Gleichungen:

$$(A\ 1.) \quad x^n - E_n x + E_n - 1 = 0$$

$$(A\ 2.) \quad x^{n+1} - (E_n^{(1)} + 1)x + E_n^{(1)} = 0$$

$$(B\ 1.) \quad z^{n+1} - (B_n^{(1)} + 1)z + B_n^{(1)} = 0$$

$$(B\ 2.) \quad z^n - B_n z + B_n - 1 = 0$$

1) Neue Methode beliebige numerische Gleichungen mit einer Unbekannten graphisch aufzulösen (Zivilingenieur XXXV, 1889); Referat im v. Dyckschen Katalog math. und math.-phys. Modelle (München, Wolf, 1893; Nachtrag S. 10—16) und in der Encyklop. der math. Wiss. (Leipzig, B. G. Teubner). I. F. 48. Siehe weiterhin d'Ocagne: *Traité de Nomographie* (Paris, Gauthier-Villars 1899. S. 376—389) und *Calcul graphique et Nomographie* (Encycl. Scient. Paris, Doin 1908. S. 361—363).

2)  $E$ , bzw.  $B$  sind End- und Barwert der Einheitsrente ( $s_n$ ,  $\sigma_n$ , bzw.  $a_{\bar{n}}$ ,  $a_n$ ). Es ist bei  $n > 1$ :

$$E, B > 1.$$

Die vier Fälle führen vom Standpunkt der Algebra auf ganz gleichartig aufgebaute trinomische Gleichungen mit zwei Zeichenwechseln, deren besonderes Kennzeichen darin besteht, daß die Differenz der beiden letzten Koeffizienten gleich *eins* ist. Die Gleichungen können also höchstens zwei *positive* Wurzeln haben; wir werden beweisen, daß eben die Spezialität der Koeffizienten es bewirkt, daß die Anzahl der positiven Wurzeln stets zwei ist. Vom rechnerischen Standpunkt kommt für die Lösung des Zinsfußproblems nur die eine der positiven Wurzeln in Betracht, da die triviale Lösung  $x = 1$ , bzw.  $z = 1$  sachlich auszuschließen ist. Die numerische Aufgabe wird sonach auf die Berechnung der stets existierenden nicht trivialen positiven Lösung beschränkt sein.

Das sachliche Moment führt weiterhin darauf, die vier ursprünglichen Gleichungen in zwei Typen einzuordnen; es wird sich zeigen, daß diese Unterscheidung auch durch die wesentlichen Punkte der algebraischen Diskussion begründet ist. Da nämlich aus sachlichen Gründen:

$$E_n > n, \quad \text{bzw.} \quad E_n^{(1)} > n + 1$$

$$B_n^{(1)} < n + 1, \quad \text{bzw.} \quad B_n < n,$$

so kann man das Problem nach den folgenden zwei Typen behandeln:

$$(1) \quad y^t - ey + e - 1 = 0 \begin{cases} \text{Typus A: } e > k \\ \text{Typus B: } e < k \end{cases} \quad (e > 1).$$

Für die Praxis sind die Fälle (A 1.) und (B 1.) die wichtigsten, diese sollen also im Folgenden als Vertreter der einzelnen Typen gelten.

Die Lösung der Zinsfußaufgabe führt somit in natürlicher Weise auf die Anwendung der Gaußschen Methode zur numerischen Behandlung trinomischer Gleichungen hin. Außer in einer Arbeit von Cantelli<sup>1)</sup> findet sich aber in der Fachliteratur der Politischen Arithmetik unseres Wissens kein Ansatz zur Befolgung dieses Weges; auch Cantelli gibt nur das kompliziertere Verfahren an, indem er die mit logarithmisch-trigonometrischen und nicht die mit Additionslogarithmen arbeitende Methode gebraucht.

Gauß äußert sich in der bereits erwähnten Abhandlung sehr günstig über den praktischen Wert seines Verfahrens, indem er sagt: „so bemerkenswert auch diese Reihen in allgemein theoretischer Rücksicht sind, so wird man doch, abgesehen von dem Falle, wo ihre Konvergenz eine sehr schnelle ist, in praktischer Beziehung immer den indirekten Methoden den Vorzug geben“. Wir wollen nun für unser

1) On the determination of the rate of interest in annuities certain (Journal of the Inst. of Act. XLI. 1907).

Problem die Grundlagen und die numerischen Einzelheiten der indirekten Methode präzisieren.

2. Für die Gleichung mit zwei Zeichenwechseln:

$$(2) \quad y^{m+n} - ey^m + f = 0$$

leitet Gauß die folgenden theoretischen Resultate ab<sup>1)</sup>:

Schreibt man:

$$\lambda = f^n e^{-(m+n)}, \quad \lambda^* = \frac{m^n n^n}{(m+n)^{m+n}},$$

so entstehen die folgenden Fälle:

- a)  $\lambda > \lambda^*$ : keine positive Wurzel vorhanden,
- b)  $\lambda = \lambda^*$ : zweifache positive Wurzel,
- c)  $\lambda < \lambda^*$ : zwei positive Wurzeln vorhanden, und zwar:

$$\alpha) \quad \lambda > \frac{1}{2^{m+n}}, \quad \text{für beide Wurzeln: } t = yf^{-\frac{1}{m+n}} \geq 1, \\ \text{je nachdem } m \geq n.$$

$$\beta) \quad \lambda < \frac{1}{2^{m+n}}, \quad \text{für die eine Wurzel } t > 1, \text{ für die andere } t < 1.$$

$$\gamma) \quad \lambda = \frac{1}{2^{m+n}}, \quad \text{für die eine Wurzel } t = 1, \text{ für die andere } t \geq 1.$$

Wir beweisen nun, daß die beiden Typen unserer Gleichung (1) stets zur Gruppe c) gehören.<sup>2)</sup>

Es ist in unserm Fall:

$$\lambda = \frac{(e-1)^{k-1}}{e^k}, \quad \lambda^* = \frac{(k-1)^{k-1}}{k^k}.$$

1) Gauß befolgt für die Diskussion den anschaulichen trigonometrischen Weg, der durch die Transformation  $y^{m+n} = ftg^2 \theta$  gegeben ist. Wir zitieren die Resultate in der Form, wie dieselben für die additionslogarithmische Behandlung durch die Transformation  $y^{m+n} = ft^{m+n}$  gebraucht werden (S. Runge, a. a. O. S. 141—144). Je nachdem man  $\theta$  oder  $t$  als neue Variable einführt, gelangt man zu den logarithmisch-trigonometrischen oder zu den additionslogarithmischen Formeln.

2) Wir legen Gewicht darauf, daß dieser Beweis ganz direkt aus der Gaußschen Betrachtung und in Anschluß an das sachliche Moment folgt. Auf einfache funktionstheoretische Abschätzungen stützt sich der Beweis v. Schaewens (a. a. O.), der noch weiterhin hervortreten läßt, daß:

$$A) \quad 1 \leq y < 2,$$

$$B) \quad 0 < y \leq 1.$$

Die Existenz der nicht trivialen positiven Lösung kann man weiterhin — nach Abtrennung der Wurzel 1 — auch auf einfachem algebraischen Wege erweisen (diese Bemerkung verdanke ich Herrn Professor J. König).

Daß stets

$$\lambda < \lambda^*$$

ist, folgt aus dem folgenden einfachen Satze: Die Funktion  $\lambda(e)$  hat beim Anwachsen von  $e$  eine <sup>abnehmende</sup> <sub>steigende</sub> Tendenz, je nachdem  $e \geq k$  (das Maximum wird erreicht für  $e = k$ ).

*Beweis:* Da  $k > 1$ ,  $e > 1$ , so ist:

$$\frac{d\lambda}{de} = \frac{k-1}{e-1} - \frac{k}{e} \leq 0 \quad \text{je nachdem} \quad \frac{k-1}{e-1} \leq \frac{k}{e},$$

d. h.

$$e \geq k;$$

$$\left(\frac{d^2\lambda}{de^2}\right)_{e=k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} < 0.$$

Die spezielle Verknüpfungsweise der Koeffizienten und die sachliche Auseinanderhaltung der beiden Typen bewirken es also, daß

beim Typus A) stets  $\lambda < \lambda_{\max} = \lambda^*$ , da  $e > k$ ,

beim Typus B) stets  $\lambda < \lambda_{\max} = \lambda^*$ , da  $e < k$ .

Die ursprüngliche Gleichung (2) geht nach Einführung von  $t$  und  $\lambda$  in die folgende Form über:

$$(2') \quad t^n + t^{-m} = \lambda^{-\frac{1}{m+n}}.$$

Für die triviale Lösung ist bei beiden Typen:  $t < 1$ ; weiterhin ist stets:  $m < n$ .

Aus sachlichen Gründen oder mit Anwendung des v. Schaewenschen Gedankenganges erfolgt für den Typus A):

$$1 < y < 2,$$

d. h. für den allgemeinen Fall:

$$(e-1)^{-\frac{1}{k}} < t < 2(e-1)^{-\frac{1}{k}}$$

$$\lambda^{-1} = \left(\frac{e}{e-1}\right)^{k-1} e = \left(1 + \frac{1}{e-1}\right)^{k-1} e \leq 2^{k-1} e,$$

also je nachdem

$$\lambda^{-1} \leq 2^k, \quad \text{ist} \quad t \leq 1.$$

Beim Typus A) kann also  $c_a)$  oder  $c_\beta)$  eintreten.

Für den Typus B) ist für die nicht triviale Lösung:

$$\frac{1}{2} < y < 1,$$

d. h.

$$\frac{1}{2}(e-1)^{-\frac{1}{k}} < t < (e-1)^{-\frac{1}{k}},$$

also stets  $t < 1$ , so daß man immer mit dem Fall  $c_a)$  zu tun hat (es ist stets:  $\lambda^{-1} < 2^k$ ).

3. Für die numerische Lösung ist diejenige Form der Behandlung die zweckmäßigere, welche von Additionslogarithmen Gebrauch macht. Die nähere Auseinandersetzung der Rechenarbeit<sup>1)</sup> für die Gleichung (2') führt auf folgende zwei Fälle:

$$a) \quad t > 1: \quad t^n(1 + t^{-(m+n)}) = \lambda^{-\frac{1}{m+n}},$$

also mit:

$$A = \log t^{-(m+n)}, \quad B = \log \{1 + t^{-(m+n)}\},$$

erfolgt die Gleichung:

$$(3_1) \quad -nA + (m+n)B = -\log \lambda.$$

$$b) \quad t < 1: \quad t^{-m}(1 + t^{m+n}) = \lambda^{-\frac{1}{m+n}},$$

$$A = \log t^{m+n}, \quad B = \log \{1 + t^{m+n}\},$$

$$(3_2) \quad -mA + (m+n)B = -\log \lambda.$$

In beiden Fällen ist

$$A < 0,$$

so daß nur ein Teil der Additionslogarithmentabelle heranzuziehen ist, wodurch die Rechenarbeit bedeutend erleichtert wird. Die numerische Arbeit ist auf die Approximation von  $A$  auf Grund der Gleichungen (3) beschränkt und schließlich ergibt sich:

$$y = \text{num log } \frac{A + \log f}{m+n}.$$

Im Falle unseres Problems erhalten wir:

$$(A \ 1.) \quad x = \text{num log } \frac{A + \log (E_n - 1)}{n},$$

$$(B \ 1.) \quad z = \text{num log } \frac{A + \log E_n^{(1)}}{n+1}.$$

Die Approximation von  $A$  liefert jedesmal zwei genügende Werte, von denen aber der eine nicht in Betracht kommt; es kann gezeigt werden, daß für  $t < 1$  — dies der häufigste Fall — beim Typus A) der größere, beim Typus B) der kleinere Wert von  $A + 10$  zu nehmen ist.

Zur Berechnung des Zinsfußes ist somit neben der gewöhnlichen Logarithmentabelle eine Gaußsche Additionslogarithmentabelle ausreichend. Für genauere Bestimmungen müßte ursprünglich eine größere Gaußsche Tabelle zur Verfügung stehen und die Approximation von  $A$  ist in diesem Falle eine ziemlich unbequeme Arbeit. Wir versuchten also einen in numerischer Hinsicht schneller zum Ziele führenden Weg zu finden und erzielten einen recht entsprechenden Erfolg durch die

1) S. Runge a. a. O

Kombination der einfachsten Gaußschen Tabelle mit dem einfachen linearinterpolierenden Verfahren von Mehmkke zur Berechnung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen. Gauß gibt in seiner Arbeit (S. 94) eine ganz kurze, für  $A$  einstellige Tabelle an<sup>1)</sup>, wir benutzen dieselbe um einen ersten Anfangswert für  $A$  zu berechnen; diesen Anfangswert korrigieren wir dann mit der Methode von Mehmkke, wozu nur noch eine gewöhnliche Logarithmentabelle notwendig ist.<sup>2)</sup> Die Rechnung kann so eingerichtet werden, daß man sich zum Schluß davon überzeugen kann, ob die Lösung bis zur erwünschten Stellenzahl wirklich genau erhalten wurde. Wir bemerken noch, daß die Einfachheit dieser Methode auch den Gebrauch von solchen Tabellen unnötig macht, die den bekannten Gundelfingerschen Tabellen ähnlich konstruiert sind.<sup>3)</sup>

4. Die angegebene Methode ist für alle trinomischen Gleichungen anwendbar, im Falle des Zinsfußproblems gestaltet sie sich besonders einfach. Wir zeigen dies an dem Beispiel, welches Runge<sup>4)</sup> mit der ursprünglichen Gaußschen Methode durchgerechnet hat und fügen den Werten von  $\log x$  auch die *Abweichung* im Resultat an.

Die zu behandelnde Gleichung ist die folgende:

$$x^{100} - 200x + 199 = 0.$$

Hierbei ist  $t < 1$  und aus der kleinen Gaußschen Probetafel erfolgt für die nicht triviale Lösung:

$$A = \log t^{100} = \bar{8},2166,$$

also:

$$\log x = \frac{A + \log 199}{100} = 0,005154.$$

1) Abgedruckt bei Runge a. a. O. S. 144.

2) Mehmkke gebraucht als Anfangswert gewöhnlich die auf graphischem Wege gefundene Annäherung.

3) Tafeln zur Berechnung der reellen Wurzeln sämtlicher trinomischer Gleichungen (Leipzig. B. G. Teubner. 1897). Diese Tafeln würden für unsere Aufgabe ohne eine mühsame Erweiterung auch sonst nicht ausreichen. Da nämlich Gundelfinger die Werte

$$A - \mu B, \text{ bzw. } B - \mu A \left( \mu = \frac{m}{m+n} \right)$$

tabelliert und die Tabellen für den Fall mit zwei Zeichenwechsln nur für  $\mu > 0,025$  berechnet sind, so könnte man in unserem Falle diese Tabellen nur bei

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} > 0,025$$

anwenden (d. h. für  $n, n+1 \leq 40$ ), was aber für die meisten Fälle der Praxis nicht ausreichend ist.

4) A. a. O. S. 147—148, daselbst auch die Formulierung der Gleichung als Zinsfußproblem.

Wir wenden nun auf diesen Anfangswert zwei Mehrkesche Gänge an und gebrauchen bei beiden einheitlich eine sechsstellige Logarithmentafel:

I. Gang:	II. Gang:
$\log x = 0,005154$	$\log x = 0,005532$
$\log 200 = 2,301030$	$\log 200 = 2,301030$
$\log II = 2,306184$   — 1	$\log II = 2,306562$
$100 \log x = \log I = 0,515453$   100	$\log I = 0,553214$
I: 3,276823   769	I: 3,574492   833
II: 202,387619   — 476	II: 202,563809   — 476
$R = -0,110796$	$R = +0,010683$
$S =$   293	$S =$   357
$\delta = -\frac{R}{S} = 0,0003781$	$\delta = -0,0002992$
$\log x = 0,005532$	$\log x = 0,0055021$
(Abweichung <sup>1)</sup> ) = — 0,0106831	(Abweichung = + 0,0001667)

Runge erhält mittels zweistelliger Gaußscher Tabelle:

$$A = \bar{8},2514$$

$$\log x = 0,005503$$

(Abweichung: — 0,0001288).

Wenden wir auf diesen Wert von  $\log x$  einen Mehrkeschen Gang an, so erfolgt:

$$\log x = 0,0055027 \quad (\text{Abweichung: } + 0,0001378).$$

Der Vergleich der Abweichungen ergibt also, daß in dem behandelten Fall die zweistellige Methode ohne Mehrkeschen Gang mit der einstelligen Methode mit zwei Gängen äquivalent ist, wenn man  $x$  bis auf vier Stellen genau erhalten will.

## II. Über die Anwendung der Entwicklungen nach Kettenwurzeln.

1. Im Folgenden soll eine Art Verallgemeinerung der für die Berechnung der Wurzeln allgemein bekannten Methode der *Iteration* auf unser Problem angewendet werden.<sup>2)</sup> Wird die Gleichung

$$F(x) = 0$$

1) Die Abweichung ist das —  $R$  des nächsten Ganges.

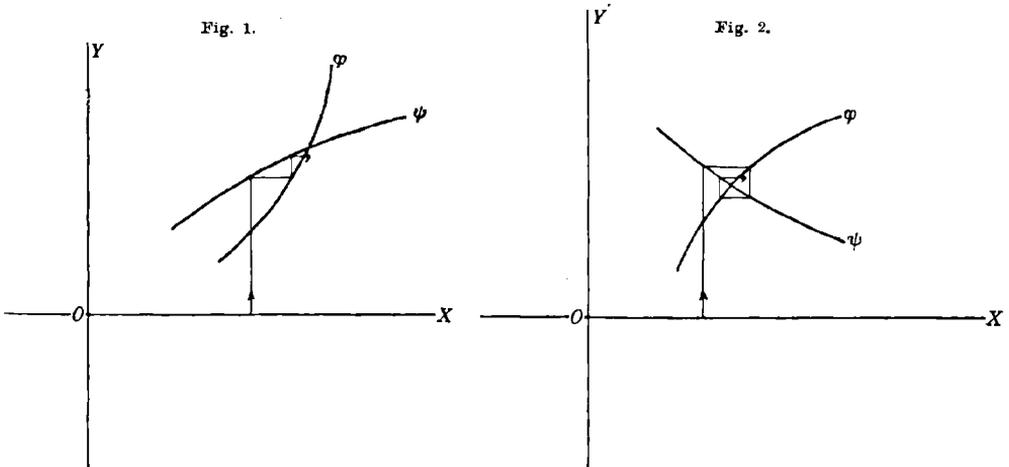
2) Der gewöhnliche Iterationsprozeß (s. z. B. Runge a. a. O., S. 153—154) geht von der aller einfachsten Spaltung aus ( $x = f(x)$ ) und erreicht bei zweckmäßigen Anordnungen eine sehr rasche Konvergenz. Wir zitieren besonders die neuere Vervollkommnung dieser Methode durch Montessus, der aus zwei ver-

in das simultane System

$$\begin{cases} y = \varphi(x) \\ y = \psi(x) \end{cases}$$

gespalten, so werden die reellen Wurzeln durch die Abszissen der Schnittpunkte der mit diesem System definierten Kurven geliefert (die Schnittpunkte sind nämlich solchen Spaltungen gegenüber invariant). Der Grundgedanke bei der Entwicklung der Lösungen nach Kettenwurzeln ist nun, daß man an die Schnittpunkte mit rasch konvergierenden, einfach charakterisierbaren Läufen nach dem Prinzip der Funktioneniteration herangeht. Für die Praxis sind also wesentlich: a) Konvergenz des Iterationsprozesses, b) womöglich einfache Spaltung, c) womöglich einfache algebraische Ausdrucksweise der Läufe, d) womöglich rasche Konvergenz.

Die Konvergenz wird nach den Sätzen, welche die allgemeine Theorie der Funktioneniteration liefert, untersucht.<sup>1)</sup> Die einfachste Spaltung



ist diejenige, bei der eine der Kurven eine Gerade ist. Die einfachsten Läufe bestehen aus solchen Anläufen (Treppen) bzw. Umläufen (Spiralen), die mit den Koordinatenachsen abwechselnd parallel sind (Fig. 1 und 2).

schiedenen solchen Spaltungen eine Funktion konstruiert, die sehr rasch zum Ziele führt. (Comptes Rendus 1909 und Méthode générale de détermination des racines des équations numériques. Louvain. 1910). Unabhängig von diesen Arbeiten hat Szilárd in einer ungarischen Arbeit (Kereskedelmi Szakoktatás XIX. 1910) diese Methode zur Berechnung des Zinsfußes der Rente durchgeführt, indem er die Raschheit der ursprünglichen sukzessiven Approximation durch einen ähnlichen Ansatz bedeutend erhöhte.

1) S. die in der Einleitung angegebene Literatur.

Im Falle der Konvergenz muß man dafür sorgen, daß die numerische Ausführung rasch zum Ziele führen soll, dies wird wesentlich auch von der Wahl des Ausgangspunktes der Läufe abhängen.

Es kann nun gezeigt werden, daß die nicht triviale Lösung unseres Problems stets mit rasch konvergierenden Anläufen approximiert werden kann und zwar mit stets *festem Ausgangswert*. Dieser letzte Punkt sei besonders hervorgehoben, da man eben hierdurch für die Lösung eine allgemein gültige Schlußformel aufstellen kann und somit zur Anwendung des Prozesses nicht erst einen dem gegebenen Fall angepaßten Anfangswert zu berechnen braucht, wie z. B. bei der Anwendung der einfachsten Iteration: der sukzessiven Approximation.

Wir wollen vor allem die Resultate der allgemeinen Theorie kurz anführen; dieselben hat Isenkrahe mit anschaulichen geometrischen Überlegungen und Netto in strenger analytischer Formulierung abgeleitet.

Zur Bestimmung der nicht trivialen Lösung des Problems mit Hilfe dieser Iterationsprozesse reichen die folgenden allgemeinen Sätze aus:

a) Bedeutet  $x_0$  die Anfangsabszisse, so kann die Lösung  $x$  durch zwei verschiedene Iterationsprozesse dargestellt werden; die Ausdrücke

$$x_k = [\psi^{(-1)}\varphi(x_0)]^k \quad \text{bzw.} \quad x_k = [\varphi^{(-1)}\psi(x_0)]^k$$

definieren die  $k$ -ten Approximationen. Die Läufe beginnen auf der  $\varphi$ -Kurve, wenn

$$\varphi'(x_0) < \psi'(x_0).$$

b) Die mit  $f(x)$  charakterisierte stetige Funktioneniteration konvergiert zu dem Werte  $x = \xi$ , falls:

$$|f'(\xi)| < 1.$$

(Der Fall  $|f'(\xi)| = 1$  ist besonders zu behandeln, die hierbei auftretenden allgemeineren Kriterien sind aber für die gegebene Aufgabe nicht zu berücksichtigen, da die obige Bedingung stets erfüllt sein wird.) Die Raschheit der Annäherung hängt im Falle der Konvergenz von der Größe des Ausdrucks:  $1 - |f'(\xi)|$  ab.

c) Man erhält einen

*Anlauf*, wenn  $f'(\xi) > 0$ , oder in anderer Form, wenn  $\text{sg } \varphi'(x) = \text{sg } \psi'(x)$ ,

*Umlauf*, wenn  $f'(\xi) < 0$ , oder in anderer Form, wenn  $\text{sg } \varphi'(x) \neq \text{sg } \psi'(x)$ .

d) „Wenn man in einer Gleichung  $F(x) = 0$  die Größe  $x$  an beliebig vielen Stellen, wo sie vorkommt, mit  $y$  vertauschen und so eine zweite Gleichung  $F(x, y) = 0$  bilden kann, aus welcher sich sowohl  $x$  als  $y$  isolieren läßt, etwa in der Form

$$x = g(y), \quad y = h(x),$$

dann können die Wurzeln der Gleichung  $F(x) = 0$  sämtlich durch konvergente Iterationen und zwar teils der Funktion  $g(y)$ , teils der Funktion  $h(x)$  dargestellt werden (Isenkrahe)<sup>4</sup>.

2. Auf Grundlage dieser Sätze behandeln wir vorerst die Gleichung

$$z^{n+1} - (e' + 1)z + e' = 0 \quad (e' < n)$$

des Typus  $B$ .<sup>1)</sup> Man erhält die einfachste Form der Spaltung, indem man die in den Heymannschen Arbeiten gebrauchte Transformation

$$z = u \sqrt[n]{e' + 1}$$

anwendet, welche zur Gleichung

$$u^{n+1} - u + c = 0$$

führt. Hierin ist:

$$c = \frac{e'}{(e' + 1)^{\frac{n+1}{n}}} < 1.$$

Die Spaltung

$$\begin{cases} y = \varphi(u) = u^{n+1} \\ y = \psi(u) = u - c \end{cases}$$

ergibt also eine Parabel höherer Ordnung durch den Anfangspunkt und eine Gerade mit dem Neigungswinkel von  $45^\circ$ .

Zur trivialen Lösung gehört:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt[n]{e' + 1}} < 1,$$

zur gesuchten Lösung gehört — da  $z_1 = 1$  und  $z_2 < 1$  ist —:

$$u_2 < u_1.$$

Es ist weiterhin leicht einzusehen, daß im Falle von zwei positiven Lösungen

$$c < u_2 < u_1,$$

so daß  $c$  als ein zweckmäßiger Anfangswert erscheint.

Der erste Iterationsprozeß liefert:

$$u_k = [\psi^{(-1)}\varphi(u_0)]^k,$$

d. h. mit der Anfangsabszisse  $u_0 = c$  erfolgt für die Lösung die folgende Kettenwurzelentwicklung:

$$u \equiv \text{iter} \cdot f(u) = \text{iter} \cdot (c + u^{n+1}) = c + \sqrt[n]{c + \sqrt[n]{c + \dots}} \quad \left( \nu = \frac{1}{n+1} \right).$$

Dieser Prozeß definiert einen Anlauf, da

$$\frac{d\varphi}{du} = (n+1)u^n > 0, \quad \frac{d\psi}{du} = 1 > 0;$$

1) Wir gebrauchen diese Form und diese Bezeichnungen, um die Korrespondenz mit dem praktischen Problem hervortreten zu lassen.

derselbe beginnt auf der Parabel, da

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)_{u=c} = (n+1) \frac{e'^n}{(e'+1)^{n+1}} < \frac{n^n}{(n+1)^n} < 1,$$

$$\left(\frac{d\psi}{du}\right)_{u=c} = 1.$$

Wir beweisen nun, daß mit  $u_0 = c$  dieser Prozeß stets konvergent ist und das zur nicht trivialen Lösung gehörende  $u_2$  darstellt.

Wäre nämlich  $c = 0$ , so würde die Kette den Wert  $u = 0$  ergeben; bei stetiger Vergrößerung von  $c$  bleibt der Prozeß so lange konvergent, bis für  $u$  die Grenze<sup>1)</sup>

$$f'(u) = (n+1)u^n = 1$$

erreicht wird, d. h.

$$u = \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}.$$

Wenn wir diesen Wert in die Gleichung einsetzen, so erhalten wir denjenigen Wert von  $c$ , der bei der Vergrößerung nicht übertroffen werden darf; es ist:

$$c_{\max} = \frac{n}{(n+1)^{\frac{n+1}{n}}} \quad \text{oder} \quad c_{\max}^n = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Daß nun das in den Gleichungen unseres Problemcs vorkommende  $c$  stets unter dieser Grenze bleibt, folgt aus dem Hilfssatz des ersten Kapitels, auf Grund dessen:

$$c^n = \frac{e'^n}{(e'+1)^{n+1}} < \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \quad (e' < n).$$

Da weiterhin

$$c < u_2 < u_1,$$

so wird der Prozeß wirklich das  $u_2$  approximieren, indem er bei Vergrößerung von  $c$  bis zum Grenzfall stets das der 0 benachbarte  $u$  darstellt.

Der Grad der Konvergenz hängt davon ab, inwieweit die Ungleichung für  $c^n$ , d. h. die Ungleichung

$$e' < n$$

erfüllt ist. Bei praktischen Aufgaben ist diese gewöhnlich in hohem Maße befriedigt; das heißt geometrisch so viel, daß die Abszisse des Schnittpunktes der Geraden mit der Abszissenachse ( $c$ ) sehr wenig verschieden ist von der zu  $u_2$  gehörigen Abszisse.

1) Für unsern Fall genügt es, nur den positiven Wert von  $f'(u)$  zu betrachten.

Bei der numerischen Ausführung kommt es natürlich nur auf Iterationen in endlicher Anzahl an; das Maß des Fehlers im  $k$ ten Gange wird durch den Wert

$$|y_k - y_{k-1}|$$

charakterisiert.

Die zweite Kettenbruchentwicklung würde so lauten:

$$u = \sqrt[n+1]{-c + \sqrt[n+1]{-c + \dots}}$$

diese ist — auch nach dem Satze d) — für die nicht triviale Lösung unbrauchbar.

3. Der Typus A) ist nach denselben Gesichtspunkten etwas komplizierter zu gestalten, da man zu allgemeineren Spaltungen gelangt. Wendet man auf die Gleichung

$$x^n - ex + e - 1 = 0 \quad (e > n)$$

die reziproke Transformation  $x = \frac{1}{z}$  an, so folgt die Form:

$$z^n - \frac{e}{e-1} z^{n-1} + \frac{1}{e-1} = 0.$$

Isenkrahe behandelte den allgemeinen Fall<sup>1)</sup>:

$$t^k - pt^l + q = 0,$$

der mit dem ersten Iterationsprozeß:

$$f(t) = \sqrt[l]{\frac{1}{p}(q + t^k)}$$

zur folgenden Kettenwurzelentwicklung hinführt:

$$t = \sqrt[l]{\frac{q}{p} + \frac{1}{p} \sqrt[l]{\frac{q}{p} + \frac{1}{p} \sqrt[l]{\frac{q}{p} + \dots}}}$$

Diese stellt die der 0 benachbarte Lösung in konvergenter Weise dar, bis durch Anwachsen von  $q$ :

$$q_{\max} = \frac{k-l}{l} \left(\frac{lp}{k}\right)^{\frac{k}{k-l}}$$

wird.<sup>2)</sup>

Wenden wir dieses allgemeine Resultat von Isenkrahe auf unsern Fall an, so kann wiederum bewiesen werden, daß der Prozeß stets konvergent ist und das zur nicht trivialen Lösung gehörende  $z$  darstellt. Es ist nämlich:

$$a) \quad q_{\max} = \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} \frac{e^n}{(e-1)^n} > \frac{(e-1)^{n-1}}{e^n} \frac{e^n}{(e-1)^n} = \frac{1}{e-1},$$

1) „Das Verfahren der Funktionswiederholung“ S. 68—71.

2) Es kommen auch hier nur die positiven Werte von  $f'(t)$  in Betracht.

d. h. mit Anwendung des Hilfssatzes erkennen wir, daß das in der Gleichung vorkommende absolute Glied stets die Bedingung der Konvergenz erfüllt;

b) es ist für die nicht triviale Lösung:  $z_2 < 1$ , für die triviale Lösung aber:  $z_1 = 1$ .

4. Für den Typus B) kann das Resultat des zweiten Punktes dieses Kapitels in der zuerst von Heymann angegebenen folgenden Formel zusammengefaßt werden:

$$\frac{1}{r} = \sqrt[n]{B_n^{(1)} + 1} \left[ \sqrt[n]{c + \sqrt[n]{c + \dots}} \right],$$

wobei  $v = \frac{1}{n+1}$  und  $c = \frac{B_n^{(1)}}{(B_n^{(1)} + 1)^{\frac{n+1}{n}}}$ .

Die Grundlagen zum Gebrauch dieser *Formel* sind wohl nach den obigen Ausführungen von Seite der Praxis als erledigt zu betrachten.

Wir geben zum Schluß das folgende Beispiel an, um den praktischen Wert dieses Verfahrens verfolgen zu können.

Es sei gegeben:

$$a_{50} = 21,4821846,$$

es ist also:

$$v = \frac{1}{51}, \quad c = 0,897846 < 1.$$

Die Gleichung für  $u$  lautet so:

$$u^{51} - u + 0,897846 = 0.$$

Die einzelnen Schritte des Iterationsprozesses stellen wir in einer Tabelle zusammen, die auch den Fehler der einzelnen Kettenwurzelgänge enthält. Die Berechnung erfolgt recht schnell, da man immer das vorangehende Resultat berücksichtigen kann und so bei jedem neuen Schritt einen Logarithmus aufzuschlagen und zwei Logarithmen zurückzusuchen braucht. (Die Werte von  $c$  und  $\log \sqrt[n]{(B_n^{(1)} + 1)}$  führt man in zweckmäßiger Weise auf Papierstreifen mit.)

	$u_k = c + y_{k-1}$	$y_k = \sqrt[n]{u_k}$	Fehler $(y_k - y_{k-1})$	%
$u_0$ :	0,897846	0,0041049	0,0010748	
$u_1$ :	0,901951	0,0051797	0,0003246	4,1788
$u_2$ :	0,903026	0,0055043	0,0001017	4,0550
$u_3$ :	0,903350	0,0056060	0,0000324	4,0176
$u_4$ :	0,903452	0,0056384	0,0000106	4,0059
$u_5$ :	0,903484	0,0056490	0,0000033	4,0021
$u_6$ :	0,903495	0,0056523	0,0000013	4,0012
$u_7$ :	0,903498	0,0056536		4,00023
	⋮	⋮	⋮	⋮

Der richtige Zinsfuß ist: 4 %.

### III. Über die Anwendung der graphischen Methoden.

1. Die graphische Behandlung von Gleichungen verfolgt besonders zwei wichtige Punkte: Sie gibt erstens Methoden zur raschen und bequemen Bestimmung von Anfangswerten, die für praktische Zwecke oder zur ersten Orientierung gute Dienste leisten; sie analysiert zweitens in der Anschauung die wesentlichen Einzelheiten der algebraischen Untersuchung. Bei den einzelnen Verfahren ist jedenfalls dafür zu sorgen, daß sie womöglich ohne weitere komplizierte Konstruktionen zu approximativen graphischen Rechenarbeiten nutzbar gemacht werden sollen. Die Kritik der praktischen Brauchbarkeit oder des heuristischen Wertes der graphischen Methode muß im gegebenen Falle diesen Gesichtspunkten angepaßt werden.

Zur graphischen Behandlung der trinomischen Gleichungen finden wir in der Literatur dieses Gegenstandes eine ganze Reihe von Verfahren angegeben; wir werden vorerst eine kurze Durchsicht derselben unternehmen und zwar in Hinblick auf unser spezielles praktisches Problem.

Die verschiedenen Ansätze können nach zwei Gruppen eingeteilt werden: je nachdem sie fertige, auch für  $n$  kотиerte Nomogramme liefern oder für jedes  $n$  ein besonderes Diagramm ergeben. In dieser Arbeit wollen wir uns besonders mit der Anwendung des *logarithmographischen Verfahrens* beschäftigen, das durch die Arbeiten von Mehmke zur graphischen Behandlung algebraischer Gleichungen und Gleichungssysteme nutzbar gemacht worden ist.<sup>1)</sup> Da das  $n$  bei unserm speziellen Problem eine wesentliche Rolle spielt, so hat die Mehmkesche Methode schon deshalb einen besonderen Vorteil, da sie mit entsprechender Spaltung der Gleichung nach beiden Gesichtspunkten einzurichten ist. Auf Grund dieses Verfahrens kann man weiterhin — wie wir in dieser Arbeit zeigen wollen — die Resultate der algebraischen Diskussion des ersten Kapitels besonders einfach in anschaulicher Weise verfolgen und nach ihren praktischen Beziehungen hervortreten lassen.

Von andern Methoden erwähnen wir die folgenden:

a) Die primitive Methode von Lalanne<sup>2)</sup>, die zu jedem  $n$  ein aus zwei Geradenscharen bestehendes Netz konstruiert. Für größere  $n$

1) S. die Literatur in der Einleitung.

2) Außer in ältern Schriften von Lalanne (aus den Jahren 1839—1879) s. Runge: Praxis der Gleichungen (S. 155—156); Massau: Mémoire sur l'intégration graphique (Ann. de l'Assoc. des Ingén. sortis des écoles spéciales de Gand 1878—1890) III. § 177; Poussin: Sur l'application des procédés graphiques aux calculs d'assurances (Bull. trim. de l'Inst. des Act. Franç. XV. 58, 1904) S. 175.

ist diese Methode auch in ihrer von Massau herrührenden Form für Approximation der Wurzeln wenig brauchbar; die algebraische Diskussion (z. B. die Existenz zweier positiven Wurzeln bei unserm Problem) läßt sich aber mit diesem Ansatz sehr anschaulich gestalten. Dieselben Bemerkungen betreffen den Ansatz, der diese Diagramme in parallelen Linienkoordinaten ausführt und der für die Fälle  $n = 2$  und  $n = 3$  in der Praxis sehr wertvolle Dienste leistet.<sup>1)</sup> (Für die Funktionenkoten erhält man hiebei statt der Geradenscharen Kurven  $n^{\text{ter}}$  Ordnung, die also eigentlich ein in die zweite Gruppe gehörendes Nomogramm liefern.)

b) Das kartésische Renten-Nomogramm von d'Ocagne-Prévot<sup>2)</sup>, das für die erste Approximation des Zinsfußes recht brauchbar ist. Wir haben dabei ein einfaches Beispiel für Nomogramme mit vier Koordinaten auf Grund der Skalenverschmelzung (accolement d'échelles). Die Ausführung der Zeichnung leidet an dem Umstand, daß die auftretenden krummlinigen Funktionenkoten linear nicht anamorphisiert werden können.

c) Die Methode von Torres<sup>3)</sup>, die man für unser Problem sehr einfach gestalten könnte. Dieselbe liefert ein Nomogramm mit translatorisch beweglichen Skalen und gehört in die Gruppe der kollinearen Diagramme.

2. Bei der *logarithmographischen Methode* wird der zuerst wohl von Lalanne gebrauchte und von englischen Physikern oft benutzte Gedanke verwertet, bei Kartesischen Tafeln  $\log x$  und  $\log y$  als Punktkoordinaten einzuführen, d. h. die Koordinatenachsen logarithmisch zu kotieren und die Funktionenkoten als *logarithmische Bilder* zu betrachten. Für die Lösung der algebraischen Gleichungen und Gleichungssysteme wurde von Mehmke der Satz über die „Parallelverschiebung des logarithmischen Bildes“<sup>4)</sup> angewendet, auf Grund dessen das in einem verschiebbaren Koordinatensystem gezeichnete logarithmische Bild mit Funktionenkoten in einem festen Koordinatensystem in Bezug gebracht wird. Die beiden Systeme ergeben sich nach zweckmäßiger Spaltung der gegebenen Gleichung, die Lösungen werden im festen System durch die Abszissen der Schnittpunkte des eingestellten logarithmischen Bildes mit den festen Funktionenkoten charakterisiert. Die

1) S. d'Ocagne: *Traité* S. 183—185 und S. 387.

2) S. d'Ocagne: *Traité* S. 304—306 und Schilling: *Über die Nomographie von M. d'Ocagne* (Leipzig, Teubner 1900) S. 34—36.

3) S. d'Ocagne: *Traité* S. 366—368.

4) Einer freundlichen Mitteilung von Prof. Mehmke verdanke ich die weitere Angabe, daß sich dieser Satz schon bei O. Reynolds: *Philos. Transact.* 1879, part. II, S. 753, findet.

Spaltung kann nun bei trinomischen Gleichungen nach zwei Gesichtspunkten geschehen: entweder so, daß man für jedes  $n$  mit einem einzigen logarithmischen Bild auskommt oder so, daß man für jedes  $n$  ein besonderes logarithmisches Bild konstruiert. Mehmkes Verdienst war es, eine höchst einfache Methode anzugeben, wie die logarithmischen Bilder von Polynomen mit Hilfe der Additions- und Subtraktionskurve leicht zu konstruieren sind; erst mit diesem Verfahren konnte der Satz über die Parallelverschiebung in weitausgedehntem Kreise zur graphischen Lösung wirklich nutzbar gemacht werden.

Die technische Ausführung der angegebenen Bemerkungen gestaltet sich nun im Falle algebraischer Gleichungen in folgender Weise: Man spaltet die Gleichungen so, daß das logarithmische Bild der einen Seite direkt konstruierbar sei und zeichnet dann das logarithmische Bild der andern Seite mit Hilfe des Satzes über die Parallelverschiebung. Die logarithmischen Bilder werden zweckmäßig in solchen Systemen gezeichnet, deren Achsen logarithmisch kodierte Skalen enthalten.

Für unsern Zweck reicht der Satz über die Parallelverschiebung in seiner folgenden einfachsten Form aus:

Das logarithmische Bild des Ausdruckes

$$a_1 u^{m_1} + a_2 u^{m_2}$$

kann aus dem logarithmischen Bild von

$$u^{m_1} + u^{m_2}$$

dadurch erhalten werden, daß man das Koordinatensystem dieses zweiten Bildes in entsprechender Weise auf dem festen Koordinatensystem einstellt. Diese Einstellung geschieht mit Hilfe der sogenannten „Merkgeraden“ (droites de repère), indem man die zu den ursprünglichen festen Achsen parallel laufenden Achsen des beweglichen Systems in den durch den Schnitt dieser Geraden gegebenen Anfangspunkt einstellt. Die Merkgeraden sind durch ihre Schnittpunkte:  ${}^a\log a_1$  bzw.  ${}^a\log a_2$  ( $a$ : Basis der logarithmischen Bilder)<sup>1)</sup> mit der fixen Ordinatenachse und durch ihre Richtungstangenten:  $m_1$  bzw.  $m_2$  gegeben.

Im Falle der allgemeinen trinomischen Gleichung, die stets auf die Form gebracht werden kann:

$$u^n \pm pu \pm q = 0,$$

kann man die folgenden zwei Spaltungsweisen anwenden:

$$\left. \begin{array}{l} t = u^n \\ t = \mp pu \mp q \end{array} \right\} \text{ I} \quad \left| \quad \begin{array}{l} t = \mp pu \\ t = u^n \pm q \end{array} \right\} \text{ II}$$

1) Im logarithmischen System sind diese Punkte auf der Ordinatenachse mit  $a_1$  bzw.  $a_2$  bezeichnet.

Wir wollen vor allem die anschauliche Diskussion unseres speziellen Problemes:

$$u^k - eu + e - 1 \begin{cases} \text{A) } e > k & (k = n; u : x) \\ \text{B) } e < k & (k = n + 1; u : z) \end{cases} \quad e > 1$$

mit diesen graphischen Hilfsmitteln erledigen<sup>1)</sup>; hierzu eignet sich die I. Spaltung, da das bewegliche logarithmische Bild hierbei von  $n$  unabhängig ist. Wir erhalten also Folgendes:

a) im festen System eine Geradenschar durch den Anfangspunkt, die nach der Richtungstangente  $k$  kotiert ist;

b) im beweglichen System muß das logarithmische Bild von  $(u - 1)^2$  gezeichnet werden und dann muß man die Merkggeraden so einstellen, daß sie durch die mit  $e$  bzw.  $e - 1$  kotierten Punkte der fixen Ordinatenachse durchgehen und die Richtungstangenten 1 bzw. 0 haben.<sup>3)</sup>

Der Vorteil der Spaltung I besteht also darin, daß man mit einem von  $n$  unabhängigen logarithmischen Bild operiert und im gegebenen Fall nur die entsprechende Einstellung des beweglichen Systems zu vollführen hat. Die positiven Lösungen der gegebenen Gleichung sind durch jene Abszissenkoten gegeben, die zu den Schnittpunkten der beiden logarithmischen Bilder gehören.

Zur graphischen Diskussion des speziellen Problemes sind nun die folgenden beiden Bemerkungen wesentlich (Fig. 3):

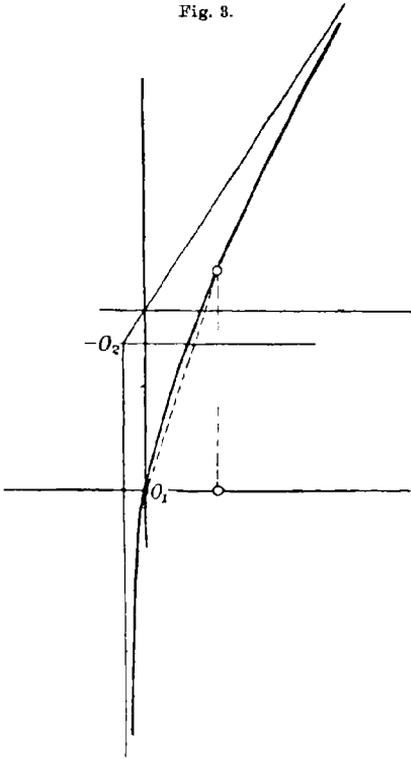
1. Das logarithmische Bild von  $(u - 1)$  geht nach der Einstellung durch den Anfangspunkt des festen Systems.

1) Wir bemerken, daß die Diskussion und die primitivste graphische Lösung auch direkt aus der Spaltungsweise I ohne logarithmische Bilder erfolgen kann.

2) Dieses logarithmische Bild (s. d'Ocagne: *Traité* V, § 140), dessen Konstruktion durch die Mehrkesche Methode der Additions- resp. Subtraktionskurve geschieht, ist dadurch charakterisiert, daß seine Asymptoten die negative Ordinatenachse und der in den ersten Quadranten fallende, durch den Anfangspunkt gehende Halbstrahl mit der Richtungstangente 1 sind.

3) Das bewegliche System wird auf durchsichtiges Papier gezeichnet. Der zu gebrauchende Strahl des festen Geradenbüschels kann auch nachträglich eingezeichnet werden.

Fig. 3.



*Beweis:* Die logarithmischen Bilder wurden durch die Anamorphose:

$${}^a \log u = x, \quad {}^a \log t = y$$

gewonnen, so daß also die Gleichung des beweglichen Bildes in  $x, y$  so lautet:

$$a^y = ea^x - (e - 1),$$

die durch  $x, y = 0$  befriedigt wird. Diese erste Bemerkung enthält ja nichts anderes, als daß die ursprüngliche Gleichung mit  $u = 1$  stets erfüllt ist.

2. Der positive Zweig des logarithmischen Bildes von  $(u - 1)$  gehört zu dem Typus A), der negative Zweig zum Typus B).

Fig. 4.

*Beweis:* Die Richtungstangente des Bildes im Punkte  $x, y = 0$  ist:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x,y=0} = (ea^{x-y})_{x,y=0} = e.$$

Wenn also  $e > k$ , so liegt der zweite Schnittpunkt oberhalb, wenn  $e < k$  unterhalb der X-Achse. Da  $k > 1$ , so ist dieser zweite Schnittpunkt bei beiden Typen stets vorhanden ( $k = 1$  würde die eine Asymptotenrichtung des Bildes ergeben).

Mit diesen Bemerkungen haben wir also die wesentlichen Resultate der algebraischen Diskussion in anschaulicher Weise abgeleitet; es gibt nämlich für den

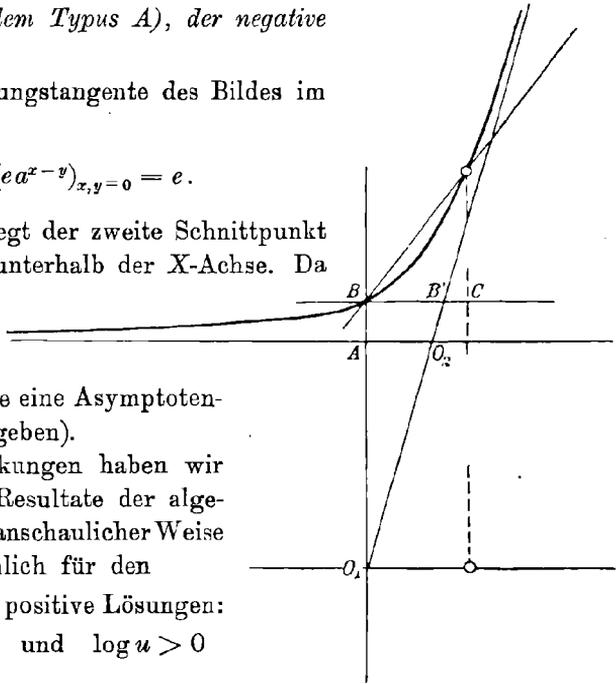
Typus A): stets zwei positive Lösungen:

$$\log u = 0 \quad \text{und} \quad \log u > 0 \\ (u : x);$$

Typus B): stets zwei positive Lösungen:  $\log u = 0$  und  $\log u < 0$

$$(u : z = \frac{1}{x}).$$

3. Zur graphischen Bestimmung eines Anfangswertes für die nicht triviale positive Lösung können beide Spaltungsweisen herangezogen werden. Eine Unbequemlichkeit entsteht nur daraus, daß die Ordinatenkoten für  $\log e$  und  $\log(e - 1)$  wenig verschieden sind, oder mit andern Worten, daß die nicht triviale Lösung sehr nahe gleich 1 ist. Diesem Umstand kann durch eine entsprechende Vergrößerung des in Betracht kommenden Teiles der Zeichnung geholfen werden; besonders für die zweite Spaltungsart und für den Fall des negativen Zweiges



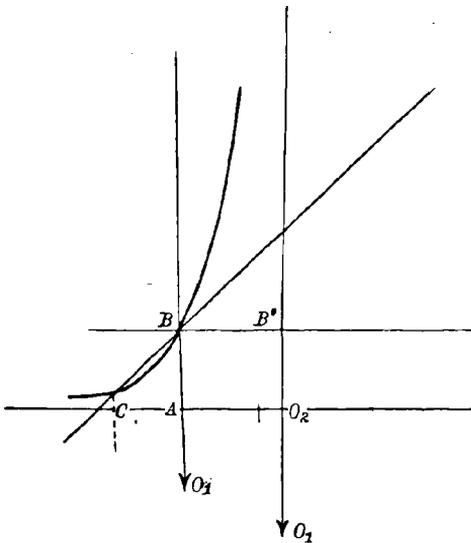
der ersten Spaltungswaise kann man dieses Verfahren zweckmäßig verwenden.

Die zweite Spaltungswaise ist durch die Gleichungen:

$$\begin{cases} t = eu \\ t = u^k + e - 1 \end{cases}$$

gegeben; das logarithmische Kurvenbild muß für jedes  $k$  gesondert konstruiert werden. Fig. 4 gibt in skizzenhafter Form die zur graphischen Arbeit notwendigen Schritte an: Die Gerade durch  $O_1$  mit der Richtungstangente  $k$  und die Gerade durch  $A$  (Ordinatenkote für  $\log(e - 1)$ ) sind die beiden Asymptoten des logarithmischen Kurvenbildes mit dem Anfangspunkt  $O_2$ ; die Gerade durch  $B$  (Ordinatenkote für  $\log e$ ) mit der Richtungstangente 1 ist das logarithmische Bild von  $eu$ .

Fig. 5.



Bei größerem  $k$ , aber besonders für die vergrößerte Figur, ist es wesentlich, daß man  $O_1$  gar nicht auszustrecken hat, sondern nur die Berechnungen ausführt:

$$\overline{AO_2} = l \frac{\log e - 1}{k}, \quad \overline{BB'} = l \frac{\log e}{k}$$

( $l$ : der entsprechende Vergrößerungsfaktor). Für den Typus A) fällt der Schnittpunkt der beiden Bilder rechts (s. Fig. 4), für den Typus B) links (s. Fig. 5) von der Ordinatenachse

durch  $O_1$ . Fig. 5 gibt in 50-facher Vergrößerung die graphische Lösung der Aufgabe des zweiten Kapitels ( $\overline{AC} = l \log \frac{1}{r}$ ).

Schlußbemerkung.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß mit den obigen Methoden auch die Berechnung der *Rentabilität von Obligationen* erfolgen kann. Diese Zinsfußaufgabe führt auf eine trinomische Gleichung von derselben speziellen Bauart, wie wir sie in dieser Arbeit behandelten.

Sind  $K_1$  und  $K_2$  zwei paritätische Kurse von Obligationen einer durch  $n$  gleichmäßige, nachschüssige Annuitäten rückzuzahlenden Anleihe und gehört zu  $\frac{K_1}{K_2}$  der Zinsfuß  $\frac{P_1}{P_2}$ , so besteht bekanntlich die folgende Proportion:

$$K_1 : K_2 = \frac{1 - v_2^n}{P_2} : \frac{1 - v_1^n}{P_1}$$

(Hiebei ist:

$$p_i = \frac{P_i}{100}, \quad v_i = \frac{1}{1 + p_i}; \quad i = 1, 2).$$

Bei Rentabilitätsberechnungen wird für gegebenes  $K_1$ ,  $P_1$  und  $n$  das zu  $K_2 = 100$  gehörende  $P_2$  gesucht. Setzen wir in der obigen Proportion

$$\frac{1}{v_2} = z,$$

so erhalten wir für  $z$  die folgende trinomische Gleichung:

$$z^{n+1} - (e + 1)z + e = 0,$$

wobei:

$$e = \frac{K_1(1 - v_1^n)}{P_1} = \frac{a_{1n} K_1}{100}.$$

Budapest, 1911, Januar.

## Graphische Zusammensetzung und Zerlegung von räumlichen Kräftegruppen.

Von O. MOHR in Dresden.

Die Aufgaben über Zusammensetzung von Kräften im Raume haben in der Regel die folgende Form: Auf einen starren Körper wirken Kräfte ( $K$ ), die durch ihre Projektionen auf drei zueinander rechtwinklig gestellte Ebenen  $xy$ ,  $xz$ ,  $yz$  gegeben sind. Die Gruppe ( $K$ ) soll ersetzt werden durch eine gleichwertige Gruppe von Kräften  $A, B, C \dots$ , deren Achsen  $a, b, c \dots$  entweder gegeben sind oder bestimmte Bedingungen zu erfüllen haben. Es ist daran zu erinnern, daß die Gleichwertigkeit zweier Kräftegruppen dargestellt werden kann durch *sechs* Gleichungen, die z. B. ausdrücken, daß die Projektionen und die Momente der beiden Gruppen in bezug auf die drei Achsen  $x, y, z$  übereinstimmen. Die Aufgabe ist also *bestimmt*, wenn sie *sechs* voneinander unabhängige Unbekannte enthält. Man hat ferner zu beachten, daß eine unbekannte Kraft, deren Lage keinen Bedingungen unterliegt, *fünf* unbekannte Größen enthält, z. B. die beiden Koordinaten ihres Schnittpunktes in der  $xy$ -Ebene und die drei Seitenkräfte in den Richtungen der Achsen  $x, y, z$ . Die Anzahl der Unbekannten ist *vier*, wenn die Kraft eine gegebene Gerade schneiden soll; *drei*, wenn sie in einer gegebenen Ebene liegt, oder durch einen gegebenen Punkt geht; *zwei*, wenn sie in einer gegebenen Ebene durch einen bestimmten Punkt gehen soll, und endlich ist natürlich nur *eine* Unbekannte zu bestimmen,

wenn die Achse der Kraft gegeben ist. Daß die Kräfte  $A, B, C$  der gegebenen Kräftegruppe ( $K$ ) gleichwertig sind, soll durch das Zeichen

$$A \mp B \mp C \equiv (K)$$

dargestellt werden. Die *gewendete* Kraft  $A$  wird mit  $\mp A$  bezeichnet. Die Kräftegruppe ( $K$ ) in Verbindung mit den *gewendeten* Kräften  $A, B, C$  bildet also die durch das Zeichen:

$$(K) \mp A \mp B \mp C \equiv 0$$

dargestellte *Gleichgewichtsgruppe*.

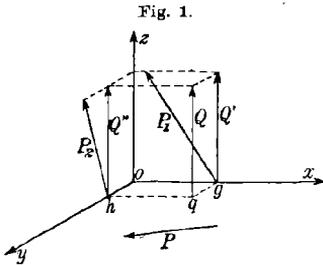


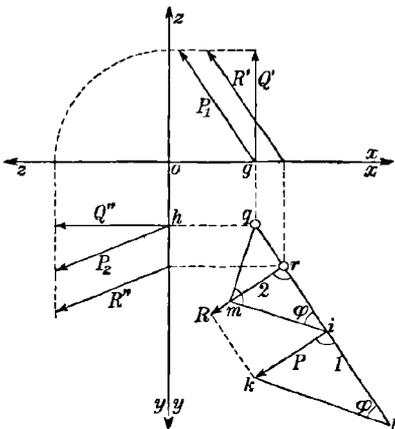
Fig. 1.

I. Die Kräftegruppe  $P \mp Q \equiv (K)$ . (Fig. 1.) Die Kraft  $P$  liegt in der  $xy$ -Ebene und  $Q$  ist parallel zur  $z$ -Achse; jede dieser beiden Kräfte enthält also *drei* unbekannte Größen. Man bildet durch Seilpolygone die Mittelkräfte der gegebenen

Kräfteprojektionen  $K$  in den drei Ebenen  $xy, xz, yz$ , was einer weiteren Erklärung nicht bedarf. Die Mittelkraft in der  $xy$ -Ebene ist die zu

bestimmende Kraft  $P$ . Die beiden anderen Mittelkräfte  $P_1, P_2$  in den Ebenen  $xz$  und  $yz$  schneiden die Achsen  $x$  und  $y$  in den Punkten  $g$  und  $h$  und bestimmen durch die Koordinaten  $og, oh$  den Schnittpunkt  $q$  der Kraft  $Q$  mit der  $xy$ -Ebene. Größe und Sinn dieser Kraft werden durch die gemeinschaftliche Projektion der Mittelkräfte  $P_1$  und  $P_2$  auf die  $z$ -Achse bestimmt. Wir wählen im folgenden den Sinn der  $z$ -Achse stets so, daß er auch den Sinn der Kraft  $Q$  angibt. Die Kräftegruppe  $P, Q$  ist der Gruppe ( $K$ ) gleichwertig, weil in bezug auf die Achsen  $x, y, z$  die Projektionen und die Momente der beiden Gruppen übereinstimmen.

Fig. 2.



II. Die Kräftegruppe  $M \mp R \equiv (K) \equiv P \mp Q$ . (Fig. 2.)  $M$  bezeichnet ein *Kräftepaar*, dessen Ebene zur Kraft  $R$  rechtwinklig gestellt ist. Die Kraft  $R$  enthält also *fünf* unbekannte Größen,  $M$  dagegen nur *eine*. Die Achse der Kraft  $R$  wird bekanntlich die *Zentralachse* der Kräftegruppe ( $K$ ) genannt. Von dem Punkte  $g$ , dem Schnittpunkte der Kraft  $Q$  mit der  $xy$ -Ebene fällt man das Lot  $qi$  auf die von der Strecke  $ik$  dargestellte Kraft  $P$  und verlängert dieses Lot um die Strecke  $il$  gleich der Größe der Kraft  $Q$ . Darauf zieht man  $im$  parallel zu  $lk$ ,  $qm$  normal zu  $im$  und  $mr$  parallel zu  $ki$ . Die Kraft  $R$  schneidet die  $xy$ -Ebene in dem Punkte  $r$  und ist im übrigen bestimmt

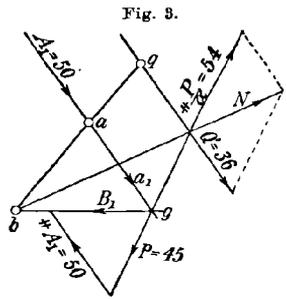
durch ihre Projektionen  $R, R', R''$ , die nicht der Lage nach, wohl aber nach Größe, Richtung und Sinn mit den Mittelkräften  $P, P_1, P_2$  übereinstimmen. Die Größe der Kraft  $R$  wird auch durch die Strecke  $lk$  dargestellt. Das Moment  $M$  des Kräftepaares hat die Größe  $R \cdot \overline{rm}$ , und sein Sinn in bezug auf die Kraft  $R$  stimmt überein mit dem Drehsinn der Kraft  $P$  in bezug auf die Kraft  $Q$ . Zum Beweise der Gleichwertigkeit bezeichnen wir die Achse  $rl$  mit 1, die Achse  $rm$  mit 2 und die in der Richtung und dem Sinne der Kraft  $Q$  durch den Punkt  $r$  gelegte Achse mit 3. In bezug auf diese drei Achsen sollen die Projektionen und die Momente der Kräftegruppe ( $K$ ) mit  $R_1, R_2, R_3$  und  $M_1, M_2, M_3$  bezeichnet werden. Man ersieht aus der Zeichnung

$$\begin{aligned} R_1 &= 0, & R_2 &= + P, & R_3 &= + Q, \\ M_1 &= 0, & M_2 &= - Q \cdot \overline{rq} = - P \cdot \overline{rm}, & M_3 &= - P \cdot \overline{ri} \end{aligned}$$

und ferner, wenn der Winkel  $rlk$  mit  $\varphi$  bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} R_1 : R_2 : R_3 &= M_1 : M_2 : M_3 = 0 : \text{tg } \varphi : + 1 \\ R &= \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2} = \frac{P}{\sin \varphi}, & M &= \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = P \cdot \overline{mi} \\ \frac{M}{R} &= \overline{mi} \sin \varphi = \overline{rm}. \end{aligned}$$

In den meisten graphostatischen Aufgaben empfiehlt es sich, zum Ersatz der gegebenen Kräftegruppe ( $K$ ) nicht die Kräfte  $R, M$ , sondern die Kräfte  $P, Q$  zu verwenden. Denn diese gewähren, wie aus den folgenden Beispielen zu ersehen ist, den erheblichen Vorteil, daß das graphische Verfahren fast vollständig in einer Projektionsebene, der  $xy$ -Ebene sich ausführen läßt. Anders verhält es sich in manchen dynamischen Aufgaben- und auch bei kinematischen Anwendungen, in denen nicht Kräfte, sondern in gleicher Weise unendlich kleine Drehungen eines starren Körpers zu zusammensetzen oder zu zerlegen sind.



III. Die Kräftegruppe  $A + B \equiv (K) \equiv P + Q$ . (Fig. 3.) Die Achse der Kraft  $A$  ist gegeben,  $B$  hat keine Bedingungen zu erfüllen;  $A$  enthält also eine,  $B$  dagegen fünf unbekannte Größen. In diesen und den folgenden Aufgaben werden die gewendeten Kräfte  $P, Q$  mit den unbekanntenen Kräften  $A, B$  zu einer Gleichgewichtsgruppe

$$+ P + Q + A + B \equiv 0$$

verbunden. Diese Gruppe zerfällt in zwei einfachere Gleichgewichtsgruppen:

$$\begin{aligned} \text{III}_1 & \quad + P + A_1 + B_1 \equiv 0 \\ \text{III}_2 & \quad + Q + A_2 + B_2 \equiv 0, \end{aligned}$$

wenn jede der unbekanntenen Kräfte zerlegt wird in zwei Seitenkräfte, von denen eine in der  $xy$ -Ebene liegt, und die andern zur  $z$ -Achse parallel gerichtet ist:

$$A \equiv A_1 \mp A_2, \quad B \equiv B_1 \mp B_2.$$

Die Gruppe  $III_1$  liegt also in der  $xy$ -Ebene, während  $III_2$  aus Parallelkräften von der Richtung der  $z$ -Achse besteht. Die Achsen  $a_1, b_1$  sollen den Sinn der Seitenkräfte  $A_1, B_1$  in dem Falle angeben, wenn die Seitenkräfte  $A_2, B_2$  den Sinn der  $z$ -Achse haben, also positiv sind. Die beiden Seitenkräfte  $A_1$  und  $A_2$  einer unbekanntenen Kraft  $A$  haben demnach stets gleiche Vorzeichen. Die positiven Verhältniszahlen  $\frac{A_1}{A_2}, \frac{B_1}{B_2}$  werden mit  $\alpha, \beta$  bezeichnet. Da die beiden Gleichgewichtsgruppen aus drei Kräften bestehen, so müssen  $P, A_1, B_1$  in einem Punkte  $g$  sich schneiden, und die Schnittpunkte  $g, a, b$  der drei Kräfte  $Q, A, B$  mit der  $xy$ -Ebene müssen in einer Geraden liegen. Die in Fig. 3 durch den Punkt  $q$  gelegte Kraft  $Q'$  hat Richtung und Sinn der gegebenen Achse  $a_1$  und die Größe  $Q$ . Das Gleichgewicht der Kräftegruppe  $III_2$  fordert, daß in bezug auf den unbekanntenen Punkt  $b$  das Moment der Kraft  $Q'$  nach Größe und Sinn dem Momente der Kraft  $\frac{A_1}{\alpha}$  gleich sei. Ferner fordert das Gleichgewicht der Gruppe  $III_1$ , daß in bezug auf den Punkt  $b$  die Momente der beiden Kräfte  $P$  und  $A_1$  nach Größe und Sinn übereinstimmen. Es folgt hieraus, daß die Gerade  $qa$  von der Mittelkraft  $N$  der beiden Kräfte  $Q'$  und  $\mp \frac{P}{\alpha}$  in dem Punkte  $b$  geschnitten wird.

Nachdem der Punkt  $b$  bestimmt worden ist, ergeben sich Größe und Sinn der Kräfte  $A_1, A_2, B_1, B_2$  in bekannter Weise. In dem vorliegenden Beispiele sind gegeben: die Punkte  $q$  und  $a$ , die Achse  $a_1$ , Lage und Sinn der Kraft  $P$  und die Größen

$$Q = + 36, \quad P = 45, \quad \alpha = \frac{5}{6}, \quad \frac{P}{\alpha} = 54.$$

Die Zeichnung ergibt:

$$Q: A_2: B_2 = \overline{ab}: \overline{qb}: \overline{aq} = + 3: + 5: - 2,$$

demnach ist

$$A_2 = + 60, \quad B_2 = - 24, \quad A_1 = \alpha A_2 = + 50,$$

$A_2$  hat also den Sinn der  $z$ -Achse,  $B_2$  den entgegengesetzten Sinn, und  $A_1$  hat den Sinn der Achse  $a_1$ . Die Kraft  $B_1$  wurde in der Zeichnung nach Lage, Größe und Sinn durch geometrische Summierung der Kräfte  $P$  und  $\mp A_1$  bestimmt. Eine Probe für die Genauigkeit der Zeichnung ergab die Bedingung, daß  $B_1$  durch den Punkt  $b$  gehen muß.

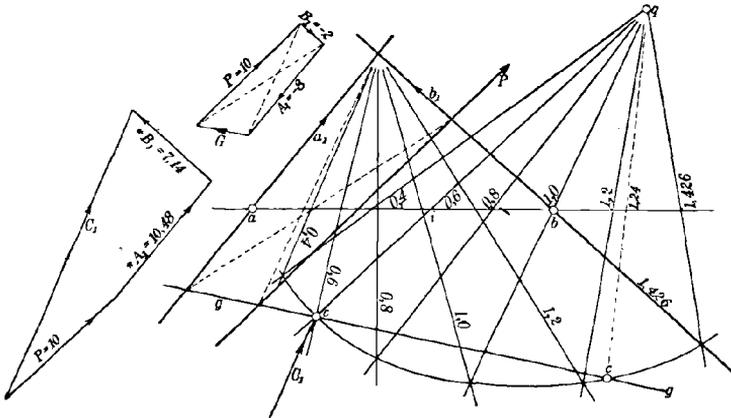
IV. Die Kräftegruppe  $A + B + C \equiv (K) \equiv P + Q$ . (Fig. 4, 5 u. 6). Die Achsen der beiden Kräfte  $A, B$  sind gegeben; die Kraft  $C$  soll eine in der  $xy$ -Ebene gegebene Gerade  $gg$  schneiden und enthält demnach vier unbekannte Größen. Wir erklären das Verfahren an einem Zahlenbeispiel. Fig. 4 zeigt die gegebenen Punkte  $q, a, b$ , die Achsen  $a_1, b_1$ , die Gerade  $gg$  und die Lage der Kraft  $P$ . Gegeben sind ferner die Größen:

$$P = -10, \quad Q = 10, \quad \alpha = \frac{11}{12}, \quad \beta = \frac{5}{12}.$$

Fig. 6.

Fig. 5.

Fig. 4.



Die Lage des Schnittpunktes  $c$  der Kraft  $C$  mit der Geraden  $gg$  kann durch die Gerade  $qic$ , und zwar durch die Verhältniszahl

$$(1) \quad \xi = \frac{a_2}{a b}$$

bestimmt werden;  $\xi$  ist negativ, wenn der Sinn  $ai$  dem Sinne  $ab$  entgegengesetzt ist. In der oben angegebenen Weise entstehen die beiden Gleichgewichtsgruppen:

$$\begin{aligned} \text{IV}_1 & \quad + P + A_1 + B_1 + C_1 \equiv 0, \\ \text{IV}_2 & \quad + Q + A_2 + B_2 + C_2 \equiv 0. \end{aligned}$$

Zwei von der Kraft  $C$  unabhängige Gleichgewichtsbedingungen der Gruppe  $\text{IV}_2$  ergeben sich durch die Momentengleichungen in bezug auf die Geraden  $qc$  und  $gg$ . Die erste fordert:

$$(2) \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{1 - \xi}{\xi},$$

und da die Abstände der Punkte  $a, b, q$  von der Geraden  $gg$  sich zueinander verhalten wie  $+3$  zu  $+5$  zu  $+12$ , so ergibt die zweite Momentengleichung die Bedingung:

$$(3) \quad 0 = 3A_2 + 5B_2 - 12Q = 3A_2 + 5B_2 + 120.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$(4) \quad A_2 = \frac{120(\xi - 1)}{3 + 2\xi}, \quad B_2 = -\frac{120\xi}{3 + 2\xi}$$

und ferner:

$$(5) \quad A_1 = \alpha A_2 = \frac{110(\xi - 1)}{3 + 2\xi}, \quad B_1 = \beta B_2 = -\frac{50\xi}{3 + 2\xi}$$

Die Momentenarme der Kräfte  $P$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  in bezug auf die unbekanntenen Punkte  $c$  mögen mit  $p$ ,  $a$  und  $b$  bezeichnet werden; ihre Werte sind positiv oder negativ, je nachdem sie rechts oder links von den betreffenden Kräften liegen. Das Gleichgewicht der Gruppe  $IV_1$  fordert:

$$(6) \quad 0 = -pP + aA_1 + bB_1.$$

Um aus dieser Gleichung das Glied  $pP$  zu entfernen, wurde in den Figuren 4 und 5 die Gleichgewichtsgruppe:

$$P + A' + B' + G = 0,$$

bestehend aus der gegebenen Kraft  $P$  und drei mit den Achsen  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $g$  zusammenfallenden Kräften gebildet. Die Zeichnung ergibt

$$(7) \quad A' = -8, \quad B' = -2.$$

Die Momentengleichung dieser Kräftegruppe in bezug auf den Punkt  $c$  fordert also:

$$(8) \quad pP = 8a + 2b.$$

In Verbindung mit den Gleichungen (6) und (5) folgt hieraus:

$$(9) \quad a + b \frac{3 + 27\xi}{67 - 47\xi} = 0.$$

Der Punkt  $c$  liegt demnach auf der Mittelkraft zweier Kräfte, die mit den Achsen  $a_1$ ,  $b_1$  zusammenfallen und im Sinne dieser Achsen die Größen:

$$A_1 = +1, \quad B_1 = \frac{3 + 27\xi}{67 - 47\xi}$$

haben. In der Figur 4 wurde der geometrische Ort des Punktes  $c$  gebildet, der dieser Bedingung und zugleich der Gleichung (1) entspricht. Zu diesem Zweck wurde jene Mittelkraft und die zugehörige Gerade  $qic$  für die Werte:

$$+ \xi = 0,4, 0,6, 0,8, 1,0, 1,2, 1,426 = \frac{67}{47}$$

aufgetragen und mit den zugehörigen Zahlen  $\xi$  bezeichnet. Die gegebene Gerade  $gg$  schneidet diese Kurve zweiter Ordnung in zwei Punkten  $c$ ,  $c$ , die den Bedingungen der Aufgaben entsprechen, und zwar für die Werte

$$\xi = +0,60 \text{ und } \xi = +1,24.$$

Für den ersten Fall mögen die Größen der Kräfte hier bestimmt werden. Nach den Gleichungen (4) ist für  $\xi = + 0,600$ :

$$A_2 = - 11,43, \quad B_2 = - 17,14, \quad C_2 = 11,43 + 17,14 - 10 = + 18,57.$$

Ferner ist nach den Gleichungen (5):

$$A_1 = - 10,48, \quad B_1 = - 7,14.$$

Die durch den Punkt  $c$  gehende Kraftprojektion  $C_1$  wurde in Figur 6 nach Größe, Richtung und Sinn durch geometrische Summierung der Kräfte  $P$ ,  $+ A_1$  und  $+ B_1$  gebildet. Eine Probe für die Genauigkeit der Zeichnung ergibt sich, wenn man die *Lage* der Mittelkraft:

$$C_1 \equiv P + A_1 + B_1$$

bestimmt.

V. Die Kräftegruppe  $A + B + C + D_1 \equiv (K) \equiv P + Q$ . Die Achsen der drei Kräfte  $A, B, C$  sind gegeben; die vierte Kraft  $D_1$  soll in einer gegebenen Ebene  $u$  liegen oder durch einen gegebenen Punkt  $v$  gehen. In beiden Fällen enthält die Kraft  $D_1$  drei unbekannte Größen. Im ersten Falle ersetzt man die Kraft  $D_1$  durch drei Kräfte

$$D + E + F \equiv D_1,$$

deren Achsen  $d, e, f$  in der gegebenen Ebene  $u$  liegen, nicht in einem Punkte sich schneiden und im übrigen nach Belieben gewählt werden können. Im zweiten Fall, wenn  $D_1$  durch den Punkt  $v$  gehen soll, ersetzt man diese Kraft ebenfalls durch drei Kräfte  $D, E, F$ , deren Achsen durch den Punkt  $v$  gehen, nicht in einer Ebene liegen und übrigens beliebig gewählt werden dürfen. Hierdurch werden die Aufgaben zurückgeführt auf den im Abschnitt VII zu besprechenden allgemeinen Fall: die Kräftegruppe  $(K)$  zu ersetzen durch eine Gruppe von sechs Kräften, deren Achsen gegeben sind. Es wird sich hierbei zeigen, daß durch passende Wahl der Achsen  $d, e, f$  das allgemeine Verfahren vereinfacht werden kann.

VI. Die Kräftegruppe  $A + B + C + D + E_1 \equiv (K) \equiv P + Q$ . Die Achsen der vier ersten Kräfte sind gegeben; die fünfte Kraft  $E_1$  soll in einer gegebenen Ebene  $u$  liegen und durch einen Punkt  $v$  dieser Ebene gehen. Indem man die unbekannte Kraft  $E_1$  ersetzt durch zwei Kräfte

$$E + F \equiv E_1,$$

deren Achsen  $e, f$  in der Ebene  $u$  durch den Punkt  $v$  gehen, führt man den Fall zurück auf die allgemeine Aufgabe des folgenden Abschnittes. Auch hier läßt sich das Verfahren durch passende Wahl der Achsen  $e, f$  vereinfachen.

VII. Die Kräftegruppe  $A \neq B \neq C \neq D \neq E \neq F \equiv (K) \equiv P \neq Q$ . Die Achsen der sechs unbekanntten Kräfte sind, wie im Abschnitt III beschrieben wurde, gegeben durch die Schnittpunkte  $a, b, c, d, e, f$  mit der  $xy$ -Ebene, durch die Achsenprojektionen  $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1$  in dieser Ebene, und durch die positiven Verhältniszahlen:

$$\alpha = \frac{A_1}{A_2}, \quad \beta = \frac{B_1}{B_2}, \quad \gamma = \frac{C_1}{C_2} \text{ usw.}$$

Um die beiden Gleichgewichtsgruppen:

$$(1) \quad \neq P \neq A_1 \neq B_1 \neq C_1 \neq D_1 \neq E_1 \neq F_1 \equiv 0$$

$$(2) \quad \neq Q \neq A_2 \neq B_2 \neq C_2 \neq D_2 \neq E_2 \neq F_2 \equiv 0$$

zu bilden, hat man folgende neun Gleichgewichtsgruppen zu bestimmen:

$$(3) \quad \neq Q \neq A_2^0 \neq B_2^0 \neq C_2^0 \equiv 0$$

$$(4) \quad \neq P \neq A_1^0 \neq B_1^0 \neq C_1^0 \neq P_0 \equiv 0$$

$$(5) \quad A'_2 \neq B'_2 \neq C'_2 \neq D'_2 \equiv 0$$

$$(6) \quad A'_1 \neq B'_1 \neq C'_1 \neq D'_1 \neq P_1 \equiv 0$$

$$(7) \quad A''_2 \neq B''_2 \neq C''_2 \neq E''_2 \equiv 0$$

$$(8) \quad A''_1 \neq B''_1 \neq C''_1 \neq E''_1 \neq P_2 \equiv 0$$

$$(9) \quad A'''_2 \neq B'''_2 \neq C'''_2 \neq F'''_2 \equiv 0$$

$$(10) \quad A'''_1 \neq B'''_1 \neq C'''_1 \neq F'''_1 \neq P_3 \equiv 0$$

$$(11) \quad \neq P_0 \neq \xi_1 P_1 \neq \xi_2 P_2 \neq \xi_3 P_3 \equiv 0.$$

Durch die gewählten Bezeichnungen wird angedeutet, daß die unbekanntten Kräfte

$A', A'', A'''$  mit der Achse  $a$

$B', B'', B'''$  mit der Achse  $b$

$C', C'', C'''$  mit der Achse  $c$

$D', E'', F'''$  mit den Achsen  $d, e, f$

zusammenfallen. In den Gruppen (5), (7), (9) kann die Größe einer der vier Kräfte nach Belieben angenommen werden. In der Gruppe (11) bezeichnen  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  die unbekanntten positiven oder negativen Zahlen, mit denen die in der  $xy$ -Ebene liegenden Kräfte  $P_1, P_2, P_3$  zu multiplizieren sind, um das Gleichgewicht der Gruppe herzustellen. Indem man die Gruppe (11) verbindet mit den Gruppen (3) und (4), ferner mit dem  $\xi_1$ -fachen der Gruppen (5) und (6), dem  $\xi_2$ -fachen der Gruppen (7) und (8) und dem  $\xi_3$ -fachen der Gruppen (9) und (10) entsteht offenbar die zu bestimmende, aus den Gruppen (1) und (2) zusammengesetzte Gruppe VII.

Es ist also:

$$A_1 = A_1^0 + \xi_1 A_1' + \xi_2 A_1'' + \xi_3 A_1'''$$

$$B_1 = B_1^0 + \xi_1 B_1' + \xi_2 B_1'' + \xi_3 B_1''' \text{ usf.}$$

Über die sehr einfache Bildung der oben verzeichneten Kräftegruppen ist noch folgendes zu bemerken. In der Figur 7 bezeichnen  $q, a, b, c$  die Schnittpunkte der Kräfte  $Q, A, B, C$  mit der  $xy$ -Ebene. Wird  $ki$  parallel zu  $aq$  und  $il$  parallel zu  $cb$  gezogen, so werden die Parallelkräfte der Gleichgewichtsgruppe (3) nach Größe und Sinn bestimmt durch die Gleichung:

$$\dagger Q : B_2^0 : C_2^0 : A_2^0 = \overline{bk} : \overline{kq} : \overline{ql} : \overline{lb}.$$

Im vorliegenden Beispiele hat die Streck  $\overline{kq}$  den Sinn der Strecke  $\overline{bk}$ , welcher dem Sinne der Strecken  $ql$  und  $lb$  entgegengesetzt ist. Daher haben  $A_2^0$  und  $C_2^0$  den Sinn der  $x$ -Achse, während die Kräfte  $\dagger Q$  und  $B_2^0$  von entgegengesetztem Sinne sind. Die mit den Achsen  $a_1, b_1, c_1$  zusammenfallenden Kräfte  $A_1^0, B_1^0, C_1^0$  der Gruppe (4) ergeben sich nach Größe und Sinn durch die Gleichungen:

$$A_1^0 = \alpha A_2^0, \quad B_1^0 = \beta B_2^0, \quad C_1^0 = \gamma C_2^0.$$

$P_0$  ist also die Mittelkraft der vier bekannten, in der  $xy$ -Ebene liegenden Kräfte  $P \dagger A_1^0 \dagger B_1^0 \dagger C_1^0$ . Wenn der Punkt  $q$  auf der Geraden  $ab$  liegt, so werden die beiden Kräfte  $C_1^0$  und  $C_2^0$  gleich Null. Liegt der Punkt  $c$  und nicht der Punkt  $q$  auf der Geraden  $ab$ , so werden die sechs Kräfte  $A_2^0, B_2^0, C_2^0, A_1^0, B_1^0, C_1^0$  *unendlich groß*. Dieser Fall ist zu vermeiden durch geeignete Auswahl der drei Kraftachsen  $a, b, c$  unter den gegebenen sechs Achsen. Die Bildung der Kräftegruppen (5), (7) und (9) kann in den Aufgaben der Abschnitte V und VI vereinfacht werden, indem man die zu wählenden Achsen  $d, e, f$  so legt, daß in der  $xy$ -Ebene *drei* Schnittpunkte der vier Kräfte in eine Gerade fallen, wodurch die vierte Kraft die Größe Null annimmt. Wenn die Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  die Kraft  $P_0$  in *einem* Punkte schneiden, so wird die Zahl  $\xi_3$  gleich Null. Schneiden die Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  die Kraft  $P_3$ , nicht aber die Kraft  $P_0$  in *einem* Punkte, so werden die drei Zahlen  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  und folglich die sechs unbekanntten Kräfte alle *unendlich groß*. Die Aufgabe gewährt also dann keine brauchbare Lösung. Ob dieser Fall vorliegt, läßt sich in der Regel nicht ohne weiteres, sondern nur durch die Ausführung des beschriebenen Verfahrens erkennen. Er tritt ein, wenn die gegebenen sechs Achsen oder einige derselben Träger einer Gleichgewichtsgruppe sein können, wie zuerst Möbius gezeigt

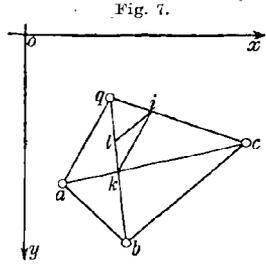


Fig. 7.

hat und in folgender Weise sich erklären läßt. Die sechs Gleichungen ersten Grades, welche das Gleichgewicht der Gruppe VII bedingen, ergeben für die unbekanntten Kräfte bestimmte endliche Werte, wenn die gegebenen Achsen voneinander unabhängig sind. Dieses Ergebnis wäre unmöglich, wenn die gegebenen Achsen Träger einer Gleichgewichtsgruppe:

$$A' \mp B' \mp C' \mp D' \mp E' \mp F' \equiv 0$$

sein könnten. Denn man könnte diese Gruppe mit einer beliebigen Zahl  $\xi$  multiplizieren und darauf mit der Gruppe VII verbinden, um eine unbegrenzte Anzahl von weiteren Lösungen der vorliegenden Aufgabe zu gewinnen. Von den gegebenen sechs Achsen dürfen daher nicht mehr als *zwei* in einer Ebene liegen und durch einen Punkt gehen, nicht mehr als *drei* in einer Ebene liegen, oder durch einen Punkt gehen, oder von drei windschiefen Geraden geschnitten werden, nicht mehr als *vier* von *zwei* Geraden und nicht mehr als *fünf* von *einer* Geraden geschnitten werden. Das einfachste Beispiel von sechs Achsen, welche diesen Bedingungen entsprechen, bilden die Kanten eines Tetraeders.

Näheres über diesen Gegenstand und über manche Einzelheiten der vorstehenden Mitteilung findet man nebst Literaturangaben in den folgenden Abhandlungen:

*Über die Zusammensetzung der Kräfte im Raume*, Zivilingenieur 1876, S. 121.

*Die Theorie der Streckensysteme*, Zivilingenieur 1888, S. 691.

*Eine Aufgabe der graphischen Statik*, Zivilingenieur 1889, S. 237.

*Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik*, Berlin 1906, S. 23 und 67.

## Beiträge zur Kinematik starrer und affin-veränderlicher Systeme, insonderheit über die Windung der Bahnen der Systempunkte.

Von R. MEHMKE in Stuttgart.

(Fortsetzung und Schluß von S. 220.)

Es mögen noch bedeuten:  $\mathbf{l}$  einen zu  $\mathbf{u}$  senkrechten Vektor von der Länge 1 in der gemeinsamen Tangentialebene der beiden Polkegel,  $\mathbf{m}$  einen Vektor von der Länge 1, der senkrecht auf  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{l}$  steht, und so gerichtet ist, daß  $\mathbf{k} \mathbf{l} \mathbf{m}$  ein Rechtssystem bilden, ferner  $\frac{d\sigma}{dt} = \sigma'$

die „Wechselgeschwindigkeit“ der Drehachse, d. h. die Geschwindigkeit, mit der sich  $k$  bei seiner Bewegung auf dem ruhenden Polkegel augenblicklich in der Ebene  $k l$  dreht, und zwar mit dem Vorzeichen + genommen, wenn die Bewegung in der Richtung von  $m$  gesehen als Rechtsdrehung erscheint, und endlich  $\frac{d\psi}{dt} = \psi'$  die Wechselgeschwindigkeit der genannten Tangentialebene, d. h. die Geschwindigkeit, mit der sich die Ebene  $k l$  um  $k$  dreht, mit dem Vorzeichen +, wenn diese Drehung im gleichen Sinn erfolgt, wie die des Systems. Durch leichte Rechnungen findet man

$$(43) \quad k' = \sigma' l, \quad l' = \psi' m - \sigma' k$$

und

$$(44) \quad k'' = -\sigma'^2 k + \sigma'' l + \sigma' \psi' m.$$

Die Ableitung von (38) nach der Zeit ergibt bei Benützung von (43) und (44):

$$(45) \quad u' = \omega' k + \omega \sigma' l,$$

$$(46) \quad u'' = (\omega'' - \omega \sigma'^2) k + (2 \omega' \sigma' + \omega \sigma'') l + \omega \sigma' \psi' m.$$

In bezug auf das gewöhnliche rechtwinklige Cartesische Koordinatensystem, von dem die Achsen und deren positive Richtungen durch die Vektoren  $k, l, m$  bestimmt sind, habe der Punkt, dessen Träger gleich  $e$  ist (also der Endpunkt des an den Ursprung angetragenen Vektors  $e$ ) die Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$ , so daß

$$(47) \quad e = \xi k + \eta l + \zeta m.$$

Mittels der durch (38) und (45) gelieferten Ausdrücke für  $u$  und  $u'$  ergibt sich zunächst

$$(48) \quad [u u' e] = \omega^2 \sigma' \xi$$

und

$$(49) \quad [u e]^2 = \omega^2 (\eta^2 + \zeta^2),$$

womit (42) die Form annimmt:

$$(50) \quad |[e' e''] = \omega^2 \sigma' \xi e + \omega^3 (\eta^2 + \zeta^2) k.$$

Erhebt man diese Gleichung ins innere Quadrat, so kommt wegen

$$e^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

und

$$e | k = \xi, \quad k^2 = 1:$$

$$(51) \quad [e' e'']^2 = \omega^4 \sigma'^2 \xi^2 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + (2 \omega^5 \sigma' \xi \zeta + \omega^6 \eta^2 + \omega^6 \zeta^2) (\eta^2 + \zeta^2) \\ = \omega^4 \sigma'^2 \xi^2 \zeta^2 + (2 \omega^5 \sigma' \xi \zeta + \omega^6 \eta^2 + (\omega^6 + \omega^4 \sigma'^2) \zeta^2) (\eta^2 + \zeta^2),$$

so daß die Gleichung der Hilfsfläche  $F_{1,2}$  in den laufenden Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  sich schreiben läßt:

$$(52) \quad \sigma'^2 \xi^2 \zeta^2 + (2 \omega \sigma' \xi \zeta + \omega^2 \eta^2 + (\omega^2 + \sigma'^2) \zeta^2) (\eta^2 + \zeta^2) = \frac{1}{\omega}.$$

Gleichung (43) macht es weiter nötig, die Ausdrücke  $[ue|u'e]$ ,  $[uu''e]$  und  $[uu'|ue]$  zu berechnen, wofür man mit Hilfe von (38), (45) und (46) erhält:

$$(53) \quad [ue|u'e] = \omega \eta (-\omega \sigma' \xi + \omega' \eta) + \omega \omega' \zeta^2,$$

$$(54) \quad [uu''e] = -\omega \sigma' \psi' \eta + (2 \omega \omega' \sigma' + \omega^2 \sigma'') \zeta,$$

$$(55) \quad [uu'|ue] = \omega^3 \sigma' \eta.$$

Durch Einsetzen in (43) kommt

$$(56) \quad [e'e''e'''] = 3 \omega^3 \sigma' (\omega \sigma' \xi \eta - \omega' (\eta^2 + \zeta^2)) \zeta \\ + \omega^3 (\eta^2 + \zeta^2) ((2 \omega^2 \sigma' - \sigma' \psi') \eta + (2 \omega' \sigma' + \omega \sigma'') \zeta).$$

Die Gleichung der Hilfsfläche  $\Psi_{1,2,3}$  kann deshalb in den laufenden Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  geschrieben werden:

$$(57) \quad 3 \sigma' (\omega \sigma' \xi \eta - \omega' (\eta^2 + \zeta^2)) \zeta \\ + (\eta^2 + \zeta^2) ((2 \omega^3 \sigma' - \sigma' \psi') \eta + (2 \omega' \sigma' + \omega \sigma'') \zeta) = \frac{1}{\omega^3}.$$

Bemerkung. Die Sonderfälle und die Ausdehnung auf Räume von höheren Dimensionen (vgl. Heft 1, S. 93 und 94 dieses Bandes) werden in einem späteren Aufsatz ihre Erledigung finden.

## Bücherschau.

**Albrecht Dürers Unterweisung der Messung.** Um einiges gekürzt und neuerem Sprachgebrauch angepaßt herausgegeben sowie mit einem Nachwort versehen von **Alfred Peltzer**. Auf Veranlassung und mit einem Vorwort von Hans Thoma. 195 S. 8°. München 1908, Süddeutsche Monatshefte G. m. b. H. Preis *M* 6.—, Luxusausgabe in Leder *M* 40.—.

Der moderne Künstler will im allgemeinen von der Theorie wenig wissen: er hält alles Gesetzmäßige für einen unnötigen Ballast, der ihn wohl gar noch in der Freiheit der Gestaltung behindert. Ganz andere Anschauungen vertritt freilich Hans Thoma in dem prachtvollen Vorwort, mit dem er die von den Süddeutschen Monatsheften herausgegebene Neuauflage von Dürers Unterweisung einleitet. Alfred Peltzer hat dieselbe besorgt und ein Nachwort dazu geschrieben. Sie ist ein unveränderter Abdruck des Dürerschen Buches, nur wurde die Sprache etwas modernisiert, und es ist einiges weggeblieben. Außerdem wurde ein Inhaltsverzeichnis beigegeben, was bei der Unübersichtlichkeit des Buches sehr dankenswert erscheint. Die neue Ausgabe enthält über 30 Figuren weniger. Manches ist auch weggeblieben, was Referent ungern vermißt, wie z. B. die theoretisch und praktisch gleich wichtige Schraubenlinie. Die Dürerschen Figuren sind zum Teil recht schlecht, die Buchstaben und Ziffern schwer lesbar. Man hätte sie nicht einfach photographisch reproduzieren dürfen. Weiter steht in dem Buche auch so viel Unrichtiges — Dürer hat die Mathematik ja mehr als Praktiker getrieben —, daß kurze, sachliche Anmerkungen für Nicht-Mathematiker unbedingt notwendig wären.

München, 2. Febr. 1911.

KARL DOEHLEMANN.

**A. Christmann und H. Baer. Grundzüge der Kinematik.** VIII u. 131 S. 8. Berlin 1910, J. Springer. Geh. *M* 4.80, geb. *M* 5.80.

Das vorliegende Buch soll nach der Absicht der Verfasser Studierenden, sowie den in der Praxis stehenden Konstrukteuren die Mittel in die Hand geben, Getriebe der verschiedensten Arten hinsichtlich ihrer Bewegungsverhältnisse zu untersuchen. Unter den Studierenden sind jedenfalls solche der technischen Hochschulen zu verstehen, die die einleitende Vorlesung über höhere Mathematik gehört haben. Doch sind die mathematischen Voraussetzungen sehr gering und beschränken sich eigentlich auf die Begriffe des Differentials und Differentialquotienten. Nur im letzten, dritten Abschnitt, der von den Massenkräften bewegter ebener Systeme handelt, kommt auch das bestimmte Integral ganz einfacher Funktionen vor. Die beiden ersten Abschnitte des Buches befassen sich bezüglich mit den Weg- und Geschwindigkeitsverhältnissen, und den Beschleunigungsverhältnissen der bewegten Systeme. Alle Untersuchungen

beziehen sich nur auf ebene Systeme. Die Art der Behandlung ist zumeist eine graphisch-geometrische, wobei die Rechnung nicht ganz verschmäht wird. Die Verfasser gelangen sehr schnell von den einfachsten Grundvorstellungen aus zur Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte, zur Gleichung von Savary, den Wendekreisen, dem Satze von Bobillier. Als Beispiele werden die kardanische (elliptische) Bewegung und ihre Umkehrung, die konchoidische Bewegung, das Kurbelgetriebe und verschiedene Geradfürungen durchgearbeitet. Die Beschleunigungsverhältnisse sind etwas ausführlicher behandelt, als es sonst üblich ist, in Anbetracht der Bedeutung höherer Tourenzahlen für die heutige Technik. Es werden hier nach Erledigung der grundlegenden Begriffe (Beschleunigungspol, Wechselkreise) das allgemeine Kurbelgetriebe, sodann Getriebe mit gerad- und krummlinigen Kulissen, die Collmann-Steuerung, Schubkurvengetriebe und Wälzhebel untersucht. Die Ermittlung der Massendrücke, ihrer Resultante und Einwirkung auf die Mechanismen ist das Ziel des letzten, verhältnismäßig kurzen Abschnittes. Erwähnt sei noch, daß aus neuerer Zeit insbesondere Arbeiten von Hartmann aus d. Zeitschr. d. Ver. dtsh. Ing. da und dort verwendet werden. — Das Buch ist, da es keine besonderen technischen Voraussetzungen macht, auch Mathematikern, die sich für Anwendungen interessieren, lebhaft zu empfehlen.

Pirmasens.

H. WIELEITNER.

**L. Crelier. Géométrie cinématique plane.** 47 S. 4°. Mit 55 Fig. Bienne 1908, Rüfonacht. Geh. *frs.* 1.50.

— **Systèmes cinématiques.** Scientia, Série phys.-math., No. 31. 100 S. 8°. Mit 13 Fig. und einem Bildnis von A. Mannheim. Paris 1911, Gauthier-Villars. Kart. *frs.* 2.—

Die erste Schrift gibt eine recht ansprechende Einführung in die kinematische Geometrie im Sinne A. Mannheims, d. h. in die Behandlung der Bewegungen unter Außerachtlassung des zeitlichen Verlaufes. Es werden viele Anwendungen auf die Konstruktion von Tangenten und Krümmungsmittelpunkten gemacht. Im Schlußkapitel werden verschiedene Geradfürungen besprochen, worunter wir die Inversoren von Hart und von Sylvester-Kempe vermißten.

Im zweiten Büchlein bietet der Verfasser eine eingehende Untersuchung der einfachsten kinematischen Systeme, wie des Schleifschiebers, der Schleifkurbel, des kardanischen Systems usw. Er stellt jedesmal die beiden Polkurven auf, gibt die Trajektorien aller Punkte der bewegten Ebene, die Einhüllenden aller Geraden und noch manches andere, was damit in Zusammenhang steht. Alte und neue Kurven treten dabei in den verschiedensten, zum Teil noch nicht bekannten Beziehungen auf. Ausdrücklich sei bemerkt, daß das System des Gelenkvierecks und die verschiedenen zyklodischen Bewegungen von der Betrachtung ausgeschlossen sind.

Pirmasens.

H. WIELEITNER.