

ANNALI
DI
MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi in Pisa

Ulisse Dini in Pisa

Giuseppe Jung in Milano

Corrado Segre in Torino

SERIE III. * TOMO XXV.

MILANO

TIPO-LITOGRAFIA REBESCHINI DI TURATI E C.

OFFICINA CARTE VALORI

—
1916.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XXV.^o (SERIE III.^a)

	PAG.
Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e, in particolare, fra i punti di una curva di genere due — <i>Carlo Rosati</i>	1
Vene fluenti tra pareti interrotte. — <i>Bruto Caldonazzo</i>	33
Sulle curve gobbe algebriche reali a circuiti concatenati. — <i>Luigi Brusotti</i>	99
Ricerche intorno ad una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali. — <i>Luigi Bianchi</i>	129
Intorno ad una classe di superficie rigate. <i>Pietro Tortorici</i>	205
Invarianti proiettivo-differenziali delle curve tracciate su una superficie e definizione proiettivo-differenziale di una superficie. — <i>Guido Fubini</i>	229
Sopra un problema al contorno nella teoria delle funzioni di variabile complessa. — <i>A. Signorini</i>	253
Sopra alcuni polinomi approssimativi. — <i>Leonida Tonelli</i>	275
Sulle pluritangenti di una ipersuperficie algebrica generale. — <i>Eugenio Brambilla</i>	317

Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e, in particolare, fra i punti di una curva di genere due.

(Di CARLO ROSATI, a Pisa.)

In questo lavoro, che si propone di continuare lo studio della teoria delle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica, al quale ho dedicato due Note comparse nei *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei* (*), espongo dapprima una semplice interpretazione geometrica delle p^2 relazioni a cui soddisfano gli interi caratteristici di una corrispondenza nella classica rappresentazione di HURWITZ, mostrando che ad ogni corrispondenza, e a tutte quelle che da essa dipendono, si può associare una omografia *razionale* di un iperspazio S_{2p-1} reale, trasformante in sè un certo S_{p-1} immaginario.

Mi occupo poi delle corrispondenze (che chiamo *speciali*) nelle quali è nullo il determinante degli interi caratteristici: esse sono rappresentate da omografie singolari, e ad ognuna di esse vengono associati due sistemi regolari di integrali di 1.^a specie riducibili. Se inversamente la curva possiede sistemi siffatti, su di essa esistono corrispondenze speciali.

Nelle Note su ricordate ho visto che se due corrispondenze T e T^{-1} , l'una inversa dell'altra, sono dipendenti, esse devono essere o *equivalenti* o *residue*, cioè la differenza o la somma dei gruppi G e G^{-1} omologhi per la T e T^{-1} di un punto variabile sulla curva, deve variare in una serie lineare; ed ho inoltre provato che il numero base μ della totalità delle corrispondenze algebriche è uguale alla somma dei numeri base μ_1 e μ_2 delle corrispondenze della prima e della seconda specie.

(*) ROSATI, *Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Vol. XXII (1913).

Chiamerò le prime corrispondenze *simmetriche* (con lieve estensione del significato della parola), le seconde *emisimmetriche*. È poi chiaro che il numero μ_1 è effettivamente il numero base delle corrispondenze simmetriche (coincidenti con le loro inverse) perchè, se T è equivalente a T^{-1} , la corrispondenza simmetrica $T + T^{-1}$, essendo dipendente da T , può sostituire T nella costruzione della base.

Caratterizzo allora le omografie che rappresentano corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche: esse nascono moltiplicando per un sistema nullo fisso (sistema nullo *fondamentale*) i sistemi nulli e le polarità razionali trasformanti in sè l' S_{p-1} . Le corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche indipendenti, esistenti sulla curva, sono quindi tante quanti i complessi lineari razionali e le quadriche razionali indipendenti che contengono l' S_{p-1} ; dal che segue subito che i valori di μ_1 e di μ_2 non possono oltrepassare p^2 .

Considero poi le corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche speciali, le quali nascono da sistemi nulli e da polarità degeneri.

Nella 2.^a parte applico queste considerazioni al caso $p = 2$. In esso, ricorrendo alla notissima rappresentazione di KLEIN dello spazio rigato sopra una quadrica di S_6 , ed applicando alcune proprietà sopra gli spazi fondamentali delle omografie involutorie razionali, determino i valori di μ_1 e di μ_2 in tutti i casi possibili (*).

Per la dimostrazione della effettiva esistenza di curve cui si riferiscono i valori trovati di μ_1 e di μ_2 , utilizzo una elegante interpretazione geometrica, dovuta al prof. SCORZA, della disuguaglianza riemanniana fra i periodi degli integrali normali della curva.

(*) Il numero μ_1 coincide col numero base della totalità delle curve tracciate sulla superficie di JACOBI relativa alla curva. Cfr., a questo proposito, la importante Memoria dei sigg. BAGNERA e DE FRANCHIS: *Le nombre ρ de M. Picard pour les surfaces hyperelliptiques, etc.* (Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo, Tomo XXX, 1910).

PARTE PRIMA

§ 1. SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLE RELAZIONI DI HURWITZ.

1. Data una curva C di genere p , si indichino con $u_1 u_2 \dots u_p$ i p integrali normali di prima specie ad essa relativi, e sia

$$\left. \begin{array}{ccccccc}
 1 & 0 \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\
 0 & 1 \dots & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 \dots & 1 & a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp}
 \end{array} \right\} (a_{rs} = a_{sr}) \quad (1)$$

la tabella dei loro periodi alle retrosezioni $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{2p}$.

Se T è una corrispondenza algebrica fra i punti di C , che faccia passare da un punto generico x al gruppo degli omologhi $y' \dots y''$, si hanno le notissime relazioni di HURWITZ (*),

$$\sum_{r=1}^{r=\alpha} u_k(y^r) = \sum_i \pi_{ki} u_i(x) + \pi_k \quad (k = 1, 2, \dots, p). \quad (2)$$

In esse le π_k sono costanti che dipendono dall'origine delle integrazioni, ed i numeri π_{ki} soddisfano alle $2p^2$ condizioni

$$\left. \begin{array}{l}
 \pi_{kl} = h_{kl} + \sum_i g_{il} a_{ki} \\
 \sum_i \pi_{ki} a_{il} = H_{kl} + \sum_i G_{il} a_{ki}
 \end{array} \right\} (k, l = 1, 2, \dots, p), \quad (3)$$

nelle quali i numeri h, g, H, G sono interi (interi *caratteristici* della corri-

(*) HURWITZ, *Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenz-princip*. Math. Annalen, Bd. 28 (1886).

spondenza). L'eliminazione delle π_{kl} dalle (3) conduce poi alle p^2 relazioni

$$\left. \begin{aligned} \sum_i h_{ki} \alpha_{ii} + \sum_{im} g_{mi} \alpha_{km} \alpha_{ii} = H_{ki} + \sum_i G_{ii} \alpha_{ki} \\ (k, l = 1, 2, \dots, p), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

che legano i periodi α_{rs} agli interi h, g, H, G .

Il determinante $\begin{vmatrix} h_{ik} & g_{ik} \\ H_{ik} & G_{ik} \end{vmatrix}$, di ordine $2p$, si dirà *determinante* della corrispondenza.

Volendo dare una interpretazione geometrica alle formole di HURWITZ, ricorreremo ad una rappresentazione che abbiamo altra volta utilizzato. Si consideri cioè entro un S_{2p-1} l' S_{p-1} , che diremo α , intersezione degli iperpiani $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p$ le cui coordinate sono le orizzontali della tabella (1), e si faccia corrispondere ad ogni ciclo di C il punto razionale di S_{2p-1} che ha per coordinate omogenee gli interi che legano il ciclo alle retrosezioni, e ad ogni integrale di 1.^a specie l'iperpiano della stella (α) le cui coordinate sono i periodi normali dell'integrale stesso. Sappiamo allora che l'appartenenza di un punto razionale di S_{2p-1} ad un iperpiano della stella (α) significa che l'integrale corrispondente all'iperpiano ha il periodo nullo lungo il ciclo che ha per immagine il punto (*).

Si osservi ora che, facendo descrivere ad x un ciclo σ sulla curva C , i punti $y' y'' \dots y^x$ si permutano fra loro e nasce quindi un ciclo σ' , che diremo *omologo* di σ , il quale è la somma dei cicli a cui equivalgono le sostituzioni circolari in cui si decompone la sostituzione prodotta sui punti suddetti.

Preso inoltre un integrale di 1.^a specie qualsiasi $u(x)$, la somma dei valori che esso ha nei punti $y' y'' \dots y^x$ omologhi di x , considerata come funzione di x , darà un nuovo integrale di 1.^a specie $U(x)$, che diremo pure omologo di $u(x)$ per la corrispondenza T .

La T produce dunque una trasformazione sui cicli ed una sugli integrali, e le due trasformazioni hanno questo legame: se il ciclo σ e l'integrale $u(x)$ hanno per omologhi il ciclo σ' e l'integrale $U(x)$, il periodo di $U(x)$ lungo σ è uguale al periodo di $u(x)$ lungo σ' .

(*) ROSATI, *Sugli integrali abeliani riducibili*. Atti della R. Accademia di Torino, Vol. L (1915). La rappresentazione cui alludiamo è, in certo modo, duale dell'altra, cui è ricorso il prof. SCORZA nella Nota: *Sugli integrali abeliani riducibili* (Rend.^{to} della R. Acc. dei Lincei, Vol. XXIV, 1915).

Si supponga infatti nelle formole (3) di fissare il valore dell'indice k e di dare ad l i valori $1, 2, \dots, p$: i primi membri delle $2p$ relazioni, che così si ottengono, sono le coordinate in S_{2p-1} dell'iperpiano della stella (α) che corrisponde ad α_k nella omografia Π , mentre i secondi membri sono le coordinate dell'iperpiano omologo di α_k nell'omografia Ω^{-1} .

Facendo allora percorrere a k i valori $1, 2, \dots, p$, si vede che, in forza delle $2p^2$ relazioni (3), gli iperpiani $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ hanno gli stessi omologhi nell'omografia Ω^{-1} dello spazio S_{2p-1} e nell'omografia Π della stella (α), cioè la Ω^{-1} subordina nella stella (α) l'omografia Π .

Le relazioni (4) esprimono dunque che la omografia Ω , immagine della corrispondenza, trasforma in sè lo spazio α .

Reciprocamente, data in S_{2p-1} un'omografia razionale Ω soddisfacente alla condizione suddetta, saranno determinati infiniti gruppi di valori, fra loro due a due proporzionali, degli interi h, g, H, G ; e ciascun gruppo di valori soddisferà alle relazioni (3), e quindi alle (4) che ne conseguono, perchè le (3) esprimono appunto che il corrispondente nella Ω^{-1} dell'iperpiano α_k ($k = 1, 2, \dots, p$) della stella (α) appartiene alla stella medesima.

Allora, come è noto (*), si possono costruire sulla curva infinite corrispondenze due a due equivalenti che hanno i numeri di ciascun gruppo come interi caratteristici; variando il gruppo, si ottengono infinite corrispondenze, due a due dipendenti, che hanno tutte per immagine l'omografia Ω .

Il significato geometrico delle relazioni di HURWITZ è quindi contenuto nel risultato:

Ogni corrispondenza fra i punti della curva C ha per immagine un'omografia razionale dello spazio S_{2p-1} che trasforma in sè lo spazio α (e quindi il suo coniugato α_0); e, reciprocamente, ogni omografia razionale soddisfacente alla condizione suddetta, è immagine di infinite corrispondenze, fra loro due a due dipendenti.

Il numero base μ della totalità delle corrispondenze sulla curva C coincide dunque col numero delle omografie razionali indipendenti dello spazio S_{2p-1} che trasformano in sè lo spazio α . Si vede poi subito che l'omografia immagine dell'identità e di ogni corrispondenza a valenza è l'omografia identica.

(*) HURWITZ, loc. cit., § 11.

§ 2. CORRISPONDENZE SPECIALI.

2. Diremo *speciale* una corrispondenza quando ha per immagine un'omografia singolare. Vedremo ora che tali corrispondenze esistono quando e soltanto quando la curva possedga sistemi regolari di integrali riducibili. Sarà utile perciò premettere il

LEMMA. Ogni spazio S_{p-1+q} condotto per α non può contenere più di $2q$ punti razionali linearmente indipendenti.

Si supponga infatti che in un S_{p-1+q} condotto per α siano contenuti $2q+1$ punti razionali indipendenti, e siano $c_1 c_2 \dots c_{2q+1}$ dei cicli sulla curva che abbiano i suddetti punti per immagini. Presi allora altri $2(p-q)-1$ cicli $c'_1 c'_2 \dots c'_{2(p-q)-1}$, indipendenti fra loro e dai primi, in guisa da formare con essi un sistema completo di $2p$ cicli indipendenti, si conducano per l' S_{p-1+q} $p-q$ iperpiani indipendenti, cui corrispondano sulla curva gli integrali $U_1 U_2 \dots U_{p-q}$. Se

$$\omega_{ki} = \omega'_{ki} + i \omega''_{ki} \left(\begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, p-q \\ l = 1, 2, \dots, 2(p-q)-1 \end{array} \right)$$

indica il periodo dell'integrale U_k lungo il ciclo c'_i ; sarà possibile determinare $2(p-q)$ valori *reali* non tutti nulli $\lambda_1 \mu_1, \lambda_2 \mu_2, \dots, \lambda_{p-q} \mu_{p-q}$ soddisfacenti alle $2(p-q)-1$ equazioni lineari

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 \omega'_{1i} + \mu_1 \omega''_{1i} + \lambda_2 \omega'_{2i} + \mu_2 \omega''_{2i} + \dots + \lambda_{p-q} \omega'_{p-q,i} + \mu_{p-q} \omega''_{p-q,i} = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, 2(p-q)-1); \end{array} \right\} (5)$$

ma allora l'integrale

$$(\mu_1 + i \lambda_1) U_1 + (\mu_2 + i \lambda_2) U_2 + \dots + (\mu_{p-q} + i \lambda_{p-q}) U_{p-q}$$

avrebbe i periodi nulli lungo i cicli $c_1 c_2 \dots c_{2q+1}$ e, in forza delle relazioni (5), periodi reali lungo i cicli $c'_1 c'_2 \dots c'_{2(p-q)-1}$. Sarebbe perciò una costante, il che contraddice all'ipotesi che gli integrali $U_1 U_2 \dots U_{p-q}$ siano indipendenti (*).

(*) Questo ragionamento è analogo ad uno di SEVERI, riprodotto alla pag. 339 delle sue *Lezioni di Geometria algebrica* (Padova, Draghi (1908)).

3. Possiamo ora dimostrare il

TEOREMA I. Il determinante $\begin{vmatrix} h & g \\ H & G \end{vmatrix}$ di una corrispondenza T ha sempre per caratteristica un numero pari $2q$. Quando è $0 < q < p$, la somma dei valori che un integrale generico della curva ha nei punti del gruppo omologo di un punto variabile α genera, al variare dell'integrale, un sistema regolare riducibile ∞^{q-1} ; la curva possiede poi un secondo sistema regolare riducibile ∞^{p-q-1} , i cui integrali dànno somma costante nei punti del gruppo suddetto.

Siano q ed r ($0 \leq q \leq p$, $0 \leq r \leq 2p$) le caratteristiche dei determinanti delle omografie Π ed Ω .

Quando è $q = 0$, cioè quando tutti i coefficienti π_{rs} sono nulli, la corrispondenza T è a valenza zero ed avrà quindi nulli tutti gli interi caratteristici, onde è $r = 0$.

Supposto poi che la omografia Π non sia singolare, dico che anche Ω non può essere singolare. Facciamo infatti descrivere a un iperpiano ξ la stella (α): l'iperpiano ξ' , corrispondente di ξ nell'omografia non singolare Π , è sempre determinato e descrive tutta la stella (α). E siccome ξ' è anche omologo di ξ nella Ω^{-1} , se la Ω fosse singolare, ξ' dovrebbe passare costantemente per lo spazio ρ' luogo dei punti che in Ω hanno l'omologo indeterminato. Ne segue che ρ' dovrebbe esser contenuto in α , il che non può avvenire perchè ρ' è uno spazio razionale, ed è noto che α non può contenere alcun punto reale. Abbiamo dunque che se è $q = p$, deve essere $r = 2p$.

Supponiamo ora che sia $0 < q < p$. La omografia Π è in tal caso singolare di specie $p - q$, ed ammetterà come *primo* e *secondo* spazio singolari (*) due stelle Σ_{p-q-1} e Σ_{q-1} i cui sostegni, che diremo α' ed α'' , saranno rispettivamente un S_{p-1+q} ed un S_{2p-1-q} uscenti dallo spazio α . Anche la omografia Ω fra i punti di S_{2p-1} è singolare e di specie $2p - r$; essa ammetterà quindi come primo e secondo spazio singolari due spazi delle dimensioni rispettive $2p - r - 1$ ed $r - 1$, che indicheremo con ρ' e ρ'' . Ora è noto che le stelle di centri ρ'' e ρ' costituiscono il primo ed il secondo spazio singolari

(*) Un'omografia singolare di specie h fra i punti di un S_r possiede due spazi singolari S_{h-1} ed S_{r-h} , il primo dei quali è il luogo dei punti che hanno l'omologo indeterminato ed il secondo contiene l'omologo di ogni altro punto dello spazio (Cfr. BERTINI, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi, etc.*, pag. 58, Pisa, Spoerri, 1907). Chiameremo brevemente questi spazi *primo* e *secondo* spazio singolari dell'omografia. Allorchè l'omografia singolare opera su iperpiani anzichè su punti, esisteranno due stelle singolari di iperpiani, che continueremo a chiamare *primo* e *secondo* spazio singolari dell'omografia.

dell'omografia Ω^{-1} fra gli iperpiani di S_{2p-1} ; quindi, dovendo la Ω^{-1} subordinare entro la stella (α) l'omografia Π , si deduce che ρ'' è contenuto in α' e ρ' in α'' . E poichè gli spazi ρ' e ρ'' sono razionali, in virtù del lemma precedente dovrà essere

$$r \leq 2q, \quad 2p - r \leq 2(p - q);$$

da cui segue $r = 2q$.

Le stelle Σ_{p-q-1} e Σ_{q-1} , i cui centri α' ed α'' contengono rispettivamente due spazi razionali di dimensioni $2q - 1$ e $2(p - q - 1)$ sono dunque (*) immagini di due sistemi regolari ∞^{p-q-1} e ∞^{q-1} di integrali riducibili. Se ora ricordiamo il significato all'omografia Π , vediamo che i sistemi suddetti sono quelli appunto di cui è parola nell'enunciato del teorema.

Una corrispondenza T , col determinante di caratteristica $2q$ ($0 < q < p$) si dirà *speciale, di specie $p - q$* . Essa definisce dunque, nel modo anzidetto, due sistemi regolari riducibili ∞^{p-q-1} ∞^{q-1} , che diremo *associati alla corrispondenza*.

Osservazione. I due sistemi regolari riducibili associati ad una corrispondenza speciale T e quindi i due spazi singolari $R_{2(p-q)-1}$ ed R_{2q-1} dell'omografia Ω , immagine di T , non sono necessariamente indipendenti (**). In generale avverrà che i due spazi suddetti avranno comune un R_{2i-1} appoggiato ad α lungo un s_{i-1} (***). In tal caso la Ω subordina nel suo 2° spazio singolare R_{2q-1} un'omografia singolare ω_1 di cui R_{2i-1} è il 1° spazio singolare; il 2° spazio singolare di ω_1 è un $R_{2(q-i)-1}$ luogo degli omologhi nella ω_1 , di tutti i punti di R_{2q-1} e quindi di tutti i punti di R_{2p-1} nella omografia Ω^2 , quadrato della Ω . E poichè la Ω^2 è l'omografia immagine della corrispondenza T^2 (****), l' $R_{2(q-i)-1}$ dovrà essere lo spazio razionale corrispondente ad un sistema regolare riducibile $\infty^{p-q+i-1}$ i cui integrali dànno somma costante nei punti del

(*) ROSATI, *Sugli integrali abeliani riducibili*, loc. cit.

(**) Nella mia Nota dei *Rendiconti dei Lincei* (Vol. XXIV, agosto 1915), in cui sono esposti i risultati di questo lavoro, vanno soppresse nel primo enunciato del n.° 2 le parole *tra loro indipendenti*.

(***) Perchè il sistema congiungente due sistemi regolari riducibili è, per una osservazione di SEVERI, regolare. (Cfr. SEVERI, *Sugli integrali abeliani riducibili*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, Vol. XXIII, 1914, e la Nota già citata di SCORZA).

(****) Per la regola, che invocheremo anche al n.° 7, con cui si ottengono gli interi caratteristici di una corrispondenza prodotto di altre (HURWITZ, loc. cit., § 10).

gruppo omologo di un punto variabile α per la corrispondenza T^2 ; lo spazio stesso dovrà quindi appoggiarsi ad α lungo un s_{q-l_1-1} .

Analogamente, se i due spazi R_{2l_1-1} ed $R_{2(q-l_1)-1}$ s'intersecano in un R_{2l_2-1} , la ω_1 subordina in $R_{2(q-l_1)-1}$ un'omografia singolare ω_2 che avrà R_{2l_2-1} come 1° spazio singolare e come 2° spazio un $R_{2(q-l_1-l_2)-1}$, il quale, per essere il luogo dell'omologo di un qualsiasi punto di R_{2p-1} per la Ω^3 , immagine di T^3 , dovrà appoggiarsi ad α lungo un $s_{q-l_1-l_2-1}$ ed essere lo spazio razionale corrispondente ad un sistema regolare riducibile $\infty^{p-q+l_1+l_2-1}$ i cui integrali danno somma costante nei punti del gruppo omologo di α per la T^3 . Possiamo così proseguire finchè si giungerà ad una omografia ω_i di un $R_{2(q-l_1-l_2-\dots-l_{i-1})-1}$ in cui uno dei due spazi singolari $R_{2l_{i-1}}$ $R_{2(q-l_1-l_2-\dots-l_{i-1})-1}$ sparisce, cioè acquista la dimensione -1 . Sarà un R_{-1} il 1° spazio sing. di ω_i (e quindi $l_i = 0$, cioè ω_i è non singolare) se nell'omografia precedente ω_{i-1} il 2° spazio singolare $R_{2(q-l_1-l_2-\dots-l_{i-1})-1}$ è indipendente dal 1° $R_{2l_{i-1}-1}$; sarà invece un R_{-1} il 2° spazio singolare di ω_i (e quindi $l_i = q - l_1 - l_2 - \dots - l_{i-1}$) se nella ω_{i-1} il 2° spazio sing. è contenuto nel 1° o coincidente con esso. Nel 1° caso le omografie $\Omega^{i+1}, \Omega^{i+2}, \dots$ hanno costantemente come 2° spazio sing. lo stesso $R_{2(q-l_1-l_2-\dots-l_{i-1})-1}$ che spetta ad Ω^i ; nel 2° caso le $\Omega^{i+1}, \Omega^{i+2}, \dots$ hanno come 2° spazio sing. un R_{-1} , cioè sono tali che ogni punto di R_{2p-1} ha per esse l'omologo indeterminato.

Il significato dei numeri $l_1 l_2 \dots l_{i-1} l_i$ è dunque espresso dal fatto che *esistono rispettivamente $p - q, p - q + l_1, \dots, p - q + l_1 + \dots + l_{i-1}$ integrali indipendenti che danno somma costante nei punti del gruppo omologo di α per le corrispondenze T, T^2, \dots, T^i ; e che il numero degli integrali indipendenti che danno somma costante nei punti del gruppo omologo di α per le T^{i+1}, T^{i+2}, \dots è costantemente $p - q + l_1 + \dots + l_{i-1} + l_i$, in cui è $l_i = 0$ ovvero $l_i = q - l_1 - \dots - l_{i-1}$ secondochè si dà il 1° o il 2° dei casi suaccennati. In questo secondo caso le T^{i+1}, T^{i+2}, \dots sono dunque corrispondenze a valenza zero.*

Il ragionamento fatto prova pure che *fra i numeri $l_1 l_2 \dots l_i$ sussistono le disuguaglianze $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_i$.*

Gli spazi singolari di Ω sono adunque indipendenti quando non esistono integrali che danno somma costante nel gruppo omologo di α per la T^2 senza che diano somma costante nel gruppo omologo di α per la T .

Nell'ipotesi che i due sistemi regolari riducibili siano indipendenti, il teorema precedente è facilmente invertibile. Vale cioè il seguente

4. TEOREMA II. *Dati due sistemi regolari riducibili complementari ∞^{p-q-1} e ∞^{q-1} , esistono delle corrispondenze speciali, di specie $p - q$, alle quali i sistemi medesimi sono associati.*

I due sistemi sono infatti rappresentati da due stelle d'iperpiani i cui centri α' e α'' sono un S_{p-1+q} ed un S_{2p-1-q} intersecantisi in α e contenenti rispettivamente due spazi razionali R_{2q-1} ed $R_{2(p-q)-1}$ indipendenti, appoggiati ad α lungo un s_{q-1} ed un s_{p-q-1} . Si indichi ora con ω un'omografia razionale dello spazio R_{2q-1} trasformante in sè l' s_{q-1} ; di omografie soddisfacenti a questa condizione ne esiste almeno una: l'omografia identica. Possiamo allora costruire entro l' S_{2p-1} un'omografia razionale Ω , singolare di specie $p-q$, che ammetta come primo e secondo spazio singolari l' $R_{2(p-q)-1}$ e l' R_{2q-1} e che subordini in questo secondo spazio la ω . Poichè la Ω^{-1} fra gli iperpiani di S_{2p-1} induce manifestamente nella stella (α) un'omografia singolare di cui le stelle di centri α' e α'' costituiscono il primo e il secondo spazio singolari, la Ω sarà immagine di infinite corrispondenze speciali, di specie $p-q$, fra loro due a due dipendenti, a cui sono associati i sistemi dati di integrali riducibili.

Osservazione I. Le corrispondenze speciali di specie $p-q$, indipendenti, associate ai dati sistemi riducibili, sono dunque tante quante le omografie razionali ω indipendenti dello spazio R_{2q-1} trasformanti in sè lo spazio s_{q-1} (e quindi il suo coniugato $s_{q-1}^{(0)}$). Poichè le omografie di R_{2q-1} che trasformano in sè questi spazi formano un sistema lineare ∞^{2q-1} , si deduce:

Il numero delle corrispondenze speciali di specie $p-q$ indipendenti, a cui sono associati due dati sistemi riducibili complementari ∞^{p-q-1} e ∞^{q-1} , non può oltrepassare $2q^2$.

Osservazione II. Scambiando l'ufficio dei due spazi $R_{2(p-q)-1}$ ed R_{2q-1} , si ottengono omografie singolari immagini di corrispondenze speciali di specie q . A due dati sistemi regolari riducibili complementari vengono dunque associati due sistemi di corrispondenze speciali, uno di specie $p-q$ e l'altro di specie q . Ed è chiaro che le corrispondenze di un sistema sono indipendenti da quelle dell'altro.

Osservazione III. Le considerazioni fatte nella Osserv. I del n.º prec. possono estendersi al prodotto di due o più corrispondenze speciali.

Siano T_1 e T_2 due corrispondenze speciali di specie $p-q_1$ e $p-q_2$, $R_{2(p-q_1)-1}$ ed R_{2q_1-1} gli spazi singolari dell'omografia Ω_1 immagine di T_1 , $R_{2(p-q_2)-1}$ ed R_{2q_2-1} quelli dell'omografia Ω_2 immagine di T_2 . Supposto che il 2º spazio sing. di Ω_1 , ed il 1º di Ω_2 s'intersechino in un R_{2l-1} , ed appartengano quindi ad un $R_{2(p-q_2+q_1-l)-1}$, l' R_{2l-1} è il luogo degli omologhi per la Ω_1 di tutti i punti contenuti in un $R_{2(q_2-q_1+l)-1}$ uscente dal 1º spazio sing. di Ω_1 , mentre gli omologhi per la Ω_2 dei punti di $R_{2(p-q_2+q_1-l)-1}$ descrivono un $R_{2(q_1-l)-1}$ contenuto nel 2º spazio sing. di Ω_2 ; gli spazi $R_{2(q_2-q_1+l)-1}$ ed $R_{2(q_1-l)-1}$

saranno manifestamente il 1° e 2° spazio singolari dell'omografia $\Omega_1 \Omega_2$ immagine della corrispondenza $T_1 T_2$. Questa corrispondenza è dunque speciale di specie $p - q_1 + l$ e dei due sistemi regolari riducibili ad essa associati il 1° è contenuto nell'analogo di T_1 mentre il 2° contiene l'analogo di T_2 .

Nel caso particolare $l = q_1$, quando cioè il 2° spazio sing. di Ω_1 è contenuto nel 1° di Ω_2 (o coincide con esso), la corrispondenza $T_1 T_2$ è a valenza zero.

La circostanza precedente si verifica per due corrispondenze T_1 e T_2 speciali di specie $p - q$ e di specie q , cui sono associati gli stessi sistemi d'integrali riducibili (V. Osserv. prec.). Dunque: *I due sistemi di corrispondenze speciali cui sono associati gli stessi sistemi complementari di integrali riducibili sono tali che il prodotto di una corrispondenza di un sistema per una dell'altro, dà origine ad una corrispondenza a valenza zero.*

§ 3. CORRISPONDENZE SIMMETRICHE ED EMISIMMETRICHE. RECIPROCIÀ INVOLUTORIE CHE LE RAPPRESENTANO.

5. Gli interi caratteristici delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche, cioè delle corrispondenze che sono rispettivamente equivalenti o residue delle loro inverse, sono legati da certe relazioni che è facile di determinare.

Sia T una corrispondenza cui spetti il determinante $\begin{vmatrix} h_{ik} & g_{ik} \\ H_{ik} & G_{ik} \end{vmatrix}$. È noto (*) che fra gli interi caratteristici di T e quelli $h'_{ik} g'_{ik} H'_{ik} G'_{ik}$ della corrispondenza inversa T^{-1} sussistono le relazioni

$$h'_{ik} = G_{ki}, \quad g'_{ik} = -g_{ki}, \quad H'_{ik} = -H_{ki}, \quad G'_{ik} = h_{ki}, \quad (6)$$

sicchè il determinante della T^{-1} sarà $\begin{vmatrix} G_{ki} & -g_{ki} \\ -H_{ki} & h_{ki} \end{vmatrix}$.

Se ora supponiamo che la corrispondenza T sia simmetrica, ovvero emisimmetrica, soddisfacente cioè o alla condizione $T - T^{-1} \equiv 0$, ovvero all'altra $T + T^{-1} \equiv 0$, i suoi interi caratteristici dovranno avere valori rispettivamente

(*) Cfr. la Nota al § 10 della Memoria di HURWITZ già citata.

uguali o contrari dei corrispondenti della T^{-1} ; e reciprocamente se l'una o l'altra di queste circostanze si verifica, la corrispondenza T sarà rispettivamente equivalente o residua della sua inversa T^{-1} .

Abbiamo dunque il risultato:

Gli interi caratteristici di una corrispondenza simmetrica sono legati dalle relazioni

$$h_{ik} = G_{ki}, \quad g_{ik} = -g_{ki}, \quad H_{ik} = -H_{ki}; \quad (7)$$

e quelli di una corrispondenza emisimmetrica dalle altre

$$h_{ik} = -G_{ki}, \quad g_{ik} = g_{ki}, \quad H_{ik} = H_{ki}. \quad (8)$$

6. Vogliamo ora caratterizzare le omografie immagini delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche.

Sia T una corrispondenza cui spetti il determinante $\begin{vmatrix} h_{ik} & g_{ik} \\ H_{ik} & G_{ik} \end{vmatrix}$ ed Ω l'omografia immagine di T , la quale, come abbiamo visto, è rappresentata dalle formule

$$\begin{aligned} \rho x'_i &= h_{i1} x_1 + h_{i2} x_2 + \cdots + h_{ip} x_p + H_{i1} x_{p+1} + \cdots + H_{ip} x_{2p} \\ \rho x'_{p+i} &= g_{i1} x_1 + g_{i2} x_2 + \cdots + g_{ip} x_p + G_{i1} x_{p+1} + \cdots + G_{ip} x_{2p} \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, p). \end{aligned}$$

Indicando con $r_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$, le coordinate di retta nello spazio S_{2p-1} , si consideri il complesso lineare

$$r_{1,p+1} + r_{2,p+2} + \cdots + r_{p,2p} = 0$$

ed il sistema nullo non singolare \mathcal{A} determinato da questo complesso, e che è definito dalle formule

$$\xi_i = -x_{p+i}, \quad \xi_{p+i} = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

Sappiamo (*) che lo spazio $S_{p-1} = \alpha$, e quindi il suo coniugato α_0 , sono spazi totali nel detto complesso, sono cioè trasformati in sè dal sistema nullo \mathcal{A} .

Si moltiplichino ora la omografia Ω per il sistema nullo \mathcal{A} : nasce la reci-

(*) ROSATI, *Sugli integrali abeliani riducibili*, loc. cit.

procità razionale $R = \Omega \mathcal{A}$, definita dalle formule

$$\xi'_i \equiv -g_{i1} x_1 - g_{i2} x_2 - \dots - g_{ip} x_p - G_{i1} x_{p+1} - \dots - G_{ip} x_{2p} \\ (i = 1, 2, \dots, p)$$

$$\xi'_{p+i} \equiv h_{i1} x_1 + h_{i2} x_2 + \dots + h_{ip} x_p + H_{i1} x_{p+1} + \dots + H_{ip} x_{2p},$$

la quale manifestamente trasforma in sè gli spazi α ed α_0 .

Da ora innanzi associeremo alla corrispondenza T , insieme alla omografia Ω , anche la reciprocità R che nasce da Ω nel modo che abbiamo detto. Tale reciprocità R si dirà pure *immagine* della corrispondenza T .

È chiaro che due corrispondenze dipendenti hanno per immagine la stessa reciprocità, e che, inversamente, data una reciprocità razionale R trasformante in sè gli spazi α ed α_0 , poichè la omografia $\Omega = R\mathcal{A}$ gode della stessa proprietà, la R è immagine di infinite corrispondenze, due a due fra loro dipendenti.

Facciamo ora l'ipotesi che la T sia una corrispondenza simmetrica ovvero emisimmetrica. L'esame delle relazioni (7) e (8) che legano nei due casi gli interi caratteristici della T , mostra che il determinante della reciprocità R è rispettivamente emisimmetrico e simmetrico. Si giunge quindi al risultato:

La reciprocità razionale immagine di una corrispondenza simmetrica è un sistema nullo e quella immagine di una corrispondenza emisimmetrica è una polarità.

In particolare l'identità e le corrispondenze a valenza (che sono, com'è noto, equivalenti alle inverse) hanno per immagine il sistema nullo fondamentale \mathcal{A} .

Con ciò restano dunque caratterizzate anche le omografie che sono immagini di corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche; esse si ottengono moltiplicando per il sistema nullo fondamentale \mathcal{A} rispettivamente i sistemi nulli razionali e le polarità razionali che trasformano in sè lo spazio α (e quindi il coniugato α_0).

Vediamo allora che i numeri ν_1 e ν_2 delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche indipendenti uguagliano rispettivamente il numero dei complessi lineari razionali indipendenti che ammettono α ed α_0 come spazi totali e quello delle quadriche razionali indipendenti che contengono i medesimi spazi; ciò conduce subito alla conseguenza:

I numeri base ν_1 e ν_2 delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche sopra una curva di genere p non possono oltrepassare p^2 .

7. Le relazioni (6) che legano gli interi caratteristici delle corrispondenze T e T^{-1} dicono che le reciprocità immagini di T e di T^{-1} sono inverse l'una dell'altra.

Ricordando poi la regola (*) con cui, noti gli interi caratteristici di due corrispondenze T e T' , si ottengono quelli della corrispondenza prodotto TT' , si vede che l'omografia immagine di TT' è il prodotto delle omografie immagini di T e di T' . Se allora T e T' sono tali che il loro prodotto è una corrispondenza a valenza, le omografie immagini di T e di T' sono inverse l'una dell'altra. Chiamando *complementari* due corrispondenze soddisfacenti alla condizione suddetta, abbiamo il risultato:

Una corrispondenza e la sua inversa hanno per immagini due reciprocità inverse; due corrispondenze complementari hanno per immagini due omografie inverse.

In particolare:

Le omografie involutorie sono immagini di corrispondenze che hanno il quadrato dotato di valenza.

Si supponga ora che una corrispondenza T e la sua inversa T^{-1} siano complementari, che cioè i prodotti TT^{-1} e $T^{-1}T$ siano dotati di valenza. La T e la T^{-1} hanno allora per immagini due omografie Ω ed Ω^{-1} l'una inversa dell'altra; ma poichè anche le reciprocità immagini di T e di T^{-1} sono inverse l'una dell'altra, $\Omega \mathcal{A}$ dovrà essere l'inversa di $\Omega^{-1} \mathcal{A}$, cioè $\Omega \mathcal{A} = \mathcal{A} \Omega$, e quindi la Ω è permutabile col sistema nullo fondamentale \mathcal{A} ; reciprocamente, se l'omografia Ω , immagine di T , è permutabile con \mathcal{A} , la T e la T^{-1} sono complementari. D'altra parte, detti α e β gli indici di T , si consideri la corrispondenza simmetrica S che si ottiene assumendo come omologhi due punti, quando appartengono allo stesso gruppo G_β omologo di un punto α per la T , e la corrispondenza S' dedotta in modo analogo da T^{-1} . Si avranno allora le equivalenze

$$T^{-1}T \equiv \alpha I + S \quad TT^{-1} \equiv \beta I + S'$$

nelle quali con I si è indicata l'identità; da queste risulta che le corrispondenze T e T^{-1} sono complementari quando e soltanto quando le corrispondenze S ed S' sono dotate di valenza. Se S ed S' si dicono le corrispondenze *lateral*i della T , si può dunque enunciare:

(*) HURWITZ, loc. cit., § 10.

Le omografie permutabili col sistema nullo fondamentale \mathcal{A} sono immagini di corrispondenze che hanno le loro laterali dotate di valenza.

8. Passiamo ora ad occuparci delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche speciali.

Sia T una corrispondenza speciale di specie $p - q$: la omografia Ω , immagine di T , sarà dunque singolare ed avrà come primo e secondo spazio singolari due spazi razionali $R_{2(p-q)-1}$ ed R_{2q-1} . Se poi la T è simmetrica o emisimmetrica, il prodotto $\Omega \mathcal{A}$ darà origine o ad un sistema nullo S , ovvero ad una polarità P . Ma allora è chiaro che il complesso lineare relativo ad S o la quadrica che individua la polarità P dovranno essere specializzati ed avere lo spazio $R_{2(p-q)-1}$ come spazio singolare, e che inoltre l' R_{2q-1} è polare di quello nel sistema nullo fondamentale \mathcal{A} .

Vediamo dunque che i sistemi regolari riducibili associati ad una corrispondenza speciale simmetrica o emisimmetrica T sono indipendenti e tali che l'uno di essi individua l'altro (*).

Noi diremo che la T appartiene al sistema regolare riducibile ∞^{q-1} rappresentato dalla stella d'iperpiani il cui centro contiene l' $R_{2(p-q)-1}$. Come abbiam visto, questo sistema riducibile è generato dalla somma dei valori che un integrale variabile della curva possiede nei punti del gruppo omologo per la T di un punto variabile x .

Dato, inversamente, un sistema regolare riducibile ∞^{q-1} , esistono corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche appartenenti ad esso?

Si consideri lo spazio razionale $R_{2(p-q)-1}$ contenuto nel centro della stella

(*) Cfr. il n.° 4 della mia Nota citata « *Sugli integrali abeliani riducibili* ». Colgo l'occasione per avvertire che la dimostrazione ivi contenuta si può ulteriormente semplificare osservando che una retta reale appoggiata allo spazio α , e quindi al coniugato α_0 , non può appartenere al complesso \mathcal{A} . Se infatti $\alpha_k + i\beta_k$, $\alpha_k - i\beta_k$ ($k = 1, 2, \dots, 2p$) sono le coordinate di due punti $P P_0$ immaginari coniugati appartenenti agli spazi $\alpha \alpha_0$, l'ipotesi che la congiungente $P P_0$ sia del complesso \mathcal{A} conduce all'uguaglianza

$$(\alpha_1 \beta_{p+1} - \alpha_{p+1} \beta_1) + (\alpha_2 \beta_{p+2} - \alpha_{p+2} \beta_2) + \dots + (\alpha_p \beta_{2p} - \alpha_{2p} \beta_p) = 0. \quad (1)$$

Ma l'integrale di 1.^a specie, che ha per immagine l'iperpiano polare di P nel sistema nullo \mathcal{A} , ha i periodi normali uguali a

$$\alpha_{p+1} + i\beta_{p+1}, \dots, \alpha_{2p} + i\beta_{2p}, -(\alpha_1 + i\beta_1), \dots, -(\alpha_p + i\beta_p);$$

la (1) contraddice dunque alla disuguaglianza fondamentale di RIEMANN, dal che segue la verità dell'asserto.

d'iperpiani che rappresenta il sistema riducibile dato, e sia R_{2q-1} il suo polare nel sistema nullo fondamentale \mathcal{A} . Segando \mathcal{A} con R_{2q-1} si ottiene in questo spazio un sistema nullo non singolare λ , trasformante in sè l' s_{q-1} lungo il quale R_{2q-1} si appoggia ad α . Se ora ω è un'omografia di R_{2q-1} che nasce moltiplicando per λ un sistema nullo razionale σ ovvero una polarità razionale π trasformanti in sè l' s_{q-1} , la omografia singolare Ω di specie q dello spazio S_{2p-1} che ha come primo e secondo spazio singolari l' $R_{2(p-q)-1}$ e l' R_{2q-1} e che subordina in quest'ultimo spazio la ω , è immagine di infinite corrispondenze, due a due dipendenti, rispettivamente simmetriche od emisimmetriche, appartenenti al sistema riducibile dato. E poichè di omografie ω soddisfacenti alla prima condizione ne esiste almeno una ed è l'identità, si deduce che ad un dato sistema riducibile ∞^{q-1} appartengono sempre corrispondenze speciali di specie $p - q$ simmetriche.

In ogni caso vediamo che le corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche indipendenti appartenenti al dato sistema riducibile sono tante quanti i sistemi nulli σ e le polarità π indipendenti di R_{2q-1} che trasformano in sè l' s_{q-1} . Donde si trae che:

I numeri delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche indipendenti, speciali di specie $p - q$, appartenenti ad un dato sistema riducibile ∞^{q-1} , non possono oltrepassare q^2 .

Osservazione I. Poichè i sistemi regolari riducibili associati ad una corrispondenza speciale simmetrica o emisimmetrica sono indipendenti, per l'Osservazione del n.º 3 si ha la proprietà: *Se T è una corrispondenza simmetrica o emisimmetrica, ogni integrale che dia somma costante nei punti del gruppo omologo di un punto variabile x per la corrispondenza T^i ($i = 2, 3, \dots$) deve dare somma costante nei punti del gruppo omologo di x per la T .*

Osservazione II. Siano Ω e Ω' le omografie immagini di due corrispondenze T e T^{-1} inverse l'una dell'altra. Poichè le reciprocità $\Omega \mathcal{A}$ e $\Omega' \mathcal{A}$ sono l'una inversa dell'altra (n.º 7), dovrà essere $\Omega' = \mathcal{A} \Omega^{-1} \mathcal{A}$, in cui Ω^{-1} indica la omografia inversa di Ω fra gli iperpiani di S_{2p-1} . Se dunque Ω è singolare, la Ω' è pure singolare della stessa specie di Ω ed i suoi spazi singolari (1° e 2°) sono polari di quelli di Ω (2° e 1°) nel sistema nullo \mathcal{A} . Si ha dunque il risultato: *Se le corrispondenze T, T^2, T^3, \dots sono speciali di specie $p - q$, $p - q + l_1, p - q + l_2, \dots$, anche le corrispondenze inverse $T^{-1}, T^{-2}, T^{-3}, \dots$ sono speciali della stessa specie $p - q, p + q + l_1, p - q + l_2, \dots$*

PARTE SECONDA

§ 4. LA COPPIA DI RETTE CORRISPONDENTE AI PERIODI DI UNA CURVA
DI GENERE DUE.

9. Vogliamo ora applicare le considerazioni precedenti alla ricerca dei numeri base μ_1 e ν_2 per le curve di genere due.

Sia

$$\left. \begin{array}{cccc} 1 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 & a_{21} & a_{22} \end{array} \right\} (a_{12} = a_{21}) \quad (9)$$

la tabella dei periodi normali dei due integrali di 1^a specie di una curva C di genere due. I due spazi $\alpha \alpha_0$, di cui abbiamo parlato nei numeri precedenti, sono ora due rette immaginarie coniugate di seconda specie di un S_3 reale ω , ed appartenenti al complesso lineare fondamentale \mathcal{A} di equazione

$$p_{13} + p_{24} = 0. \quad (10)$$

È noto che la condizione necessaria e sufficiente perchè la tabella (9) sia quella dei periodi normali di una curva di genere due, è espressa dalla disuguaglianza

$$a'_{11} a'_{22} - a'^2_{12} > 0, \quad (11)$$

nella quale $a'_{11} a'_{12} a'_{22}$ indicano i coefficienti dell'immaginario i in $a_{11} a_{12} a_{22}$.

Questa condizione è suscettibile di una elegante interpretazione geometrica, dovuta al prof. SCORZA (*), la quale è utile qui ricordare, perchè ad essa dovremo ricorrere in seguito.

Se si stabilisce una relazione omografica *reale* fra il sistema lineare ∞^3 di complessi lineari contenenti le rette $\alpha \alpha_0$ ed uno spazio S_3 , in guisa cioè che a complessi reali corrispondano punti reali di esso, i complessi speciali del sistema vengono rappresentati sui punti di una quadrica reale a punti

(*) SCORZA, *Sulle funzioni iperellittiche singolari*. Rendiconti della R.^a Accademia dei Lincei, Vol. XXIII (1914).

ellittici. La (11) esprime allora, secondo il teorema di SCORZA, che il complesso fondamentale (10) ha per immagine un punto *interno* alla detta quadrica.

Una coppia di rette immaginarie coniugate di 2^a specie, appartenenti al complesso (10) e soddisfacenti inoltre alla condizione del teorema di SCORZA, definisce dunque una tabella di periodi normali (*); si dirà perciò *la coppia di rette corrispondente ai periodi della curva*.

10. Abbiamo visto che, in virtù della interpretazione geometrica delle formule di HURWITZ, per determinare i numeri ν_1 e ν_2 delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche indipendenti, e quindi il numero base $\nu_1 + \nu_2$ della totalità delle corrispondenze, dobbiamo ricercare quanti sono i complessi lineari razionali e quante le quadriche razionali indipendenti che contengono la coppia $(\alpha \alpha_0)$. Si noti subito che, per essere queste rette immaginarie coniugate di 2^a specie, le dette quadriche, quando sono reali, dovranno essere a punti iperbolici.

Da ora innanzi la totalità delle corrispondenze che dipendono da k corrispondenze indipendenti, si dirà brevemente *un S_{k-1} di corrispondenze*.

Le corrispondenze speciali provengono dalla presenza sulla curva di integrali riducibili a ellittici (n.º 3).

Si consideri un integrale ellittico I e sia r la retta razionale, appoggiata alla coppia $(\alpha \alpha_0)$, ad esso corrispondente. Ad I appartiene sempre un S_0 di corrispondenze simmetriche speciali (n.º 8); sono quelle che hanno per immagine il sistema nullo singolare individuato dal complesso lineare speciale di asse r . Perchè ad I appartengano corrispondenze emisimmetriche, occorre che la polarità rispetto alla quadrica degenerare nella coppia di piani $r\alpha$, $r\alpha_0$ sia razionale, cioè che i due piani medesimi siano gli elementi doppi di una involuzione razionale entro il fascio di asse r . Prendendo allora in questo fascio gli elementi di riferimento razionali, dovranno le due coordinate $\omega \omega'$, che il piano $r\alpha$ ha entro il fascio, soddisfare ad una equazione quadratica omogenea a coefficienti interi e a determinante negativo. E poichè ω ed ω' sono i periodi ridotti dell'integrale riducibile I , si deduce che l'integrale stesso è a moltiplicazione complessa. Abbiamo dunque il risultato:

Ad un integrale ellittico appartiene sempre un S_0 di corrispondenze speciali simmetriche; quando l'integrale è a moltiplicazione complessa, ad esso appartiene pure un S_0 di corrispondenze speciali emisimmetriche.

(*) Basta, per scrivere la tabella, considerare le coordinate dei piani che da una delle rette proiettano i vertici 2 ed 1 della piramide di riferimento.

§ 5. DIGRESSIONE.

11. La ricerca, di cui si parla nel n.º precedente, viene facilitata ricorrendo alla notissima rappresentazione di KLEIN dello spazio rigato $\omega = (\alpha \alpha_0)$ sopra una quadrica V_4^2 di S_5 . Ma, per procedere con chiarezza, dobbiamo premettere alcune osservazioni sulle quadriche di S_5 con S_2 reali, e sulle omografie involutorie razionali di un iperspazio.

TEOREMA III. *Data in S_5 una quadrica non specializzata V_4^2 contenente S_2 reali, un S_3 reale, non tangente ad essa, la sega in una V_2^2 (reale) a punti iperbolici od ellittici, secondochè l' S_1 polare dell' S_3 è secante o non secante della quadrica stessa; e due S_2 polari reali la segano in due coniche che sono insieme reali o immaginarie.*

In virtù del significato geometrico della legge d'inerzia di SYLWSTER (*), l'equazione della V_4^2 con S_2 reali si può infatti, mediante una trasformazione reale delle coordinate, ridurre alla forma

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 = 0.$$

Osservando allora le sezioni della V_4^2 con un S_1 ed un S_3 opposti, ovvero con due S_2 opposti della piramide di riferimento, l'asserto viene subito provato.

12. Sulle omografie razionali involutorie ci occorreranno in seguito i seguenti due teoremi:

TEOREMA IV. *In una omografia involutoria razionale di S_n , gli spazi fondamentali, quando hanno dimensioni diverse, sono razionali.*

Infatti, per l'ipotesi fatta, l'equazione di grado $n+1$ a coefficienti razionali, da cui dipende la ricerca degli spazi fondamentali dell'omografia, dovrà ammettere due sole radici, di diversa molteplicità. Ciascuna di esse appartiene dunque al campo di razionalità dei coefficienti, sarà cioè razionale. Di qui segue subito che sono razionali gli spazi fondamentali medesimi.

COROLLARIO. *Le omografie involutorie razionali in uno spazio di dimensione pari hanno sempre gli spazi fondamentali razionali.*

(*) Vedasi, ad es., BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* (loc. cit.), pag. 124.

TEOREMA V. In uno spazio S_{2m+1} di dimensione dispari sia data un'omografia involutoria razionale con gli spazi fondamentali $S_m S'_m$ di ugual dimensione. Se uno di questi, S_m , è contenuto in uno spazio razionale, ovvero contiene uno spazio razionale, S_m ed S'_m sono razionali.

Se infatti S_l ($l > m$) è uno spazio razionale passante per S_m , entro S_l , che è unito nell'omografia data, questa subordina un'omografia involutoria razionale la quale ha gli spazi fondamentali di dimensione diversa: uno di questi è S_m , l'altro l'intersezione di S_l con S'_m . Per il teorema precedente, lo spazio S_m dovrà dunque essere razionale, dal che segue subito che è razionale anche S'_m .

Supposto poi che S_l ($l < m$) sia uno spazio razionale contenuto in S_m , facendo il ragionamento duale, considerando cioè l'omografia involutoria razionale subordinata nella stella di centro S_l , si giunge alla dimostrazione della seconda parte del teorema.

§ 6. RAPPRESENTAZIONE DELLO SPAZIO RIGATO $\omega = (\alpha \alpha_0)$ SOPRA UNA QUADRICA DI S_5 .

13. Assumendo come immagine di una retta di ω il punto di S_5 che ha per coordinate omogenee le coordinate plückeriane della retta, lo spazio rigato $\omega = (\alpha \alpha_0)$ viene rappresentato sulla quadrica Φ di S_5 la cui equazione è

$$(p p) = p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} = 0;$$

ai punti e ai piani di ω vengono a corrispondere gli S_2 dei due sistemi della quadrica Φ , che diremo *primo* e *secondo* sistema.

Qui importa notare che, in siffatta rappresentazione, quando un ente di ω (punto, retta, piano) è reale o, in particolare, razionale, l'ente omologo di Φ è pure reale o razionale.

Un sistema nullo di ω ha per immagine un'omologia armonica di S_5 i cui spazi fondamentali sono un S_0 e un S_4 polari rispetto a Φ . Se il sistema nullo è razionale, l'omologia suddetta è razionale ed ha quindi (teor. IV) gli spazi fondamentali razionali.

Una polarità di ω ha per immagine un'omografia involutoria di S_5 i cui spazi fondamentali sono due S_2 polari rispetto a Φ . Se la polarità è razio-

nale, l'omografia è pure razionale; sui suoi spazi fondamentali possiamo soltanto affermare che sono reali, quando si sappia che la quadrica a coefficienti razionali, fondamentale della polarità, è reale a punti iperbolici, ovvero immaginaria (*).

Gli ∞^3 complessi lineari dello spazio ω contenenti le rette α ed α_0 , vengono rappresentati dagli ∞^3 iperpiani passanti per una retta reale a non secante la Φ ; fra questi è l'iperpiano *razionale* π , immagine del complesso fondamentale \mathcal{A} . La polarità rispetto a Φ trasforma questi iperpiani nei punti dell' $S_3 = \tau$, polare di a , e fornisce quindi la rappresentazione *reale* dei complessi lineari stessi sui punti di un S_3 , a cui si riferisce il teorema del professore SCORZA. I complessi speciali sono rappresentati dai punti della quadrica φ a punti ellittici (teor. III) sezione di Φ con τ , ed il complesso fondamentale \mathcal{A} da un punto *razionale* P , che, per il teorema suddetto, dovrà essere interno a φ .

Inversamente è chiaro che una retta reale a , non secante la Φ , il cui S_3 polare contenga un punto *razionale* P interno alla quadrica reale φ a punti ellittici in cui il detto S_3 sega la Φ , determina una coppia $(\alpha \alpha_0)$ di rette corrispondente ai periodi di una curva di genere due (**).

(*) Scritta l'equazione della quadrica sotto la forma canonica

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0, \tag{1}$$

in cui i coefficienti a_i sono numeri interi positivi o negativi, fra le coordinate plückeriane $p_{ik} p'_{ik}$ di due rette polari rispetto ad essa, sussistono, com'è facile vedere, le relazioni

$$\left. \begin{aligned} \rho p'_{12} &= a_3 a_4 p_{34} & \rho p'_{34} &= a_1 a_2 p_{12} \\ \rho p'_{13} &= a_4 a_2 p_{42} & \rho p'_{42} &= a_1 a_3 p_{13} \\ \rho p'_{14} &= a_2 a_3 p_{23} & \rho p'_{23} &= a_1 a_4 p_{14}; \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

queste sono poi le formule della omografia razionale involutoria di S_3 che rappresenta la polarità. Poichè l'equazione da cui dipende la ricerca degli spazi fondamentali di detta omografia ammette le due radici triple

$$\rho = \pm \sqrt{a_1 a_2 a_3 a_4},$$

si deduce che i due S_2 fondamentali dell'omografia stessa sono reali, quando la quadrica (1) è a punti iperbolici ovvero immaginaria; sono immaginari coniugati, quando la quadrica suddetta è a punti ellittici.

I due S_2 saranno poi razionali soltanto nel caso in cui il prodotto $a_1 a_2 a_3 a_4$ sia un quadrato.

(**) Con una omografia razionale che non muti la Φ , si può infatti condurre l'iperpiano polare di P nell'iperpiano $p_{13} + p_{24} = 0$.

14. Un punto razionale di τ è dunque immagine di un S_0 di corrispondenze simmetriche della curva C ; in particolare P è immagine dell' S_0 costituito dalle corrispondenze a valenza. Quando il punto giace sulla quadrica φ , l' S_0 è di corrispondenze speciali; il punto si assume anche come immagine dell'integrale ellittico cui appartiene il detto S_0 di corrispondenze.

Un S_1 ed un S_2 di corrispondenze simmetriche sono rappresentati da una retta e da un piano razionali dello spazio τ . Poichè la quadrica φ non contiene rette reali, si deduce che non possono esistere sulla curva degli S_1 di corrispondenze simmetriche tutte speciali.

Un piano reale di τ , non tangente a φ , che, insieme al suo polare rispetto a Φ , definisca un'omografia involutoria razionale, è immagine di un S_0 di corrispondenze emisimmetriche non speciali. Nelle condizioni dette si trova certo ogni piano razionale di τ non tangente a φ .

Caratterizziamo ora i piani rappresentanti gli S_0 di corrispondenze emisimmetriche speciali. Sia perciò M un punto razionale di φ immagine di un integrale ellittico a moltiplicazione complessa, e indichiamo con μ il piano ivi tangente alla φ . Il piano $\mu' = Ma$ sarà polare di μ rispetto a Φ , cioè rispetto alla V_3^2 specializzata in cui l'iperpiano ξ , tangente in M a Φ , sega la Φ . Nella stella dell'iperpiano ξ , che ha il centro in M , si consideri l'omografia involutoria i cui spazi fondamentali sono μ e μ' ; essa subordina nelle due schiere di S_2 del primo e del secondo sistema appartenenti alla V_3^2 , ciascuna delle quali contiene infiniti S_2 razionali, due involuzioni I_1 e I_2 . La condizione perchè M sia immagine di un integrale ellittico a moltiplicazione complessa, e quindi il piano μ rappresenti un S_0 di corrispondenze emisimmetriche speciali, è che la seconda involuzione I_2 sia razionale.

È chiaro che se il piano μ (e quindi anche μ') è razionale, le involuzioni I_1 e I_2 sono entrambe razionali. Dunque un piano razionale di τ tangente a φ (*) è certo immagine di un S_0 di corrispondenze emisimmetriche speciali.

Se una corrispondenza emisimmetrica descrive un S_1 o un S_2 , il piano di τ che la rappresenta varia in un fascio o in una stella. Si vede dunque che non possono esistere sulla curva degli S_1 di corrispondenze emisimmetriche tutte speciali.

(*) Quando un piano razionale di τ tocca φ , il punto di contatto è pure razionale. Questo punto è infatti quello che il piano ha comune col suo polare rispetto a Φ .

§ 7. DETERMINAZIONE DEI VALORI DI μ_1 E DI μ_2 .

15. Per quanto abbiamo visto al n.º 6, i valori possibili per il numero base μ_1 delle corrispondenze simmetriche sulla curva C sono 1, 2, 3, 4.

Esaminiamo il

1.º Caso: $\mu_1 = 1$. Lo spazio τ contiene allora l'unico punto razionale P , immagine dell' S_0 delle corrispondenze a valenza. Proveremo ora che non esistono sulla C corrispondenze emisimmetriche, onde è $\mu_2 = 0$.

La curva intanto non possiede corrispondenze speciali, non contenendo la quadrica φ alcun punto razionale.

Si supponga che esista su C una corrispondenza emisimmetrica non speciale; essa sarà rappresentata da un piano reale λ dello spazio τ , non tangente a φ , che insieme al suo polare λ' rispetto alla quadrica Φ individua un'omografia involutoria razionale. Questa omografia subordina in τ l'omologia armonica che ha per spazi fondamentali il piano λ ed il punto $L = (\lambda' \tau)$, che è polo di λ rispetto alla quadrica φ . Il punto P non può giacere nel piano λ nè coincidere col punto L , chè altrimenti uno dei piani λ λ' verrebbe a contenere un punto razionale, e dovrebbero perciò entrambi essere razionali (n.º 12, Teor. V), contro l'ipotesi $\mu_1 = 1$. Ma allora l'omologo di P nell'omologia (L, λ) sarà un punto razionale distinto da P , e ciò contraddice pure all'ipotesi.

Vediamo dunque che l' S_0 delle corrispondenze a valenza esaurisce la totalità delle corrispondenze; si ha cioè il notevole risultato:

Se una curva di genere due non possiede corrispondenze singolari simmetriche, ogni corrispondenza su di essa è dotata di valenza.

16. 2.º Caso: $\mu_1 = 2$. La curva possiede un S_1 di corrispondenze simmetriche, rappresentato nello spazio τ da una retta razionale r_1 contenente il punto P e secante la φ in due punti reali L_1, L_2 .

Facciamo l'ipotesi che esista su C una corrispondenza emisimmetrica T e sia λ il piano dello spazio τ che ad essa corrisponde. Se la T è speciale, il piano λ è tangente a φ in uno dei punti L_1, L_2 (che dovrà perciò essere razionale) e passa quindi per la retta s , polare di r_1 rispetto a φ .

Se poi T è non speciale, il piano λ non tocca la quadrica φ , e, insieme al suo polare λ' , individua un'omografia involutoria razionale, la quale subordina nello spazio τ l'omologia armonica che ha per spazi fondamentali il piano λ ed il punto $L = (\lambda' \tau)$, polo di λ rispetto a φ .

Poichè τ non contiene punti razionali esterni ad r_1 , la r_1 dovrà essere trasformata in sè da questa omologia, e, non potendo giacere in λ (n.º 12, Teor. V), dovrà passare per il punto L . Ne segue che λ dovrà contenere la retta s .

I piani dello spazio τ , che rappresentano corrispondenze emisimmetriche, vanno dunque ricercati nel fascio (s) , donde segue che al massimo è $\mu_2 = 2$.

Si prenda ora su r_1 un punto razionale qualsiasi X e sia Ξ il suo iperpiano polare rispetto a Φ , il quale segnerà τ nel piano ξ del fascio (s) che è polare di X rispetto a Φ . Un piano λ del fascio (s) , che sia immagine di una corrispondenza emisimmetrica *non speciale*, è trasformato dall'omologia armonica razionale (X, Ξ) di S_3 , o, ciò che è lo stesso, dall'omologia armonica (X, ξ) di τ , in un piano che è pure immagine di una tale corrispondenza.

Così non può dirsi se λ rappresenta una corrispondenza emisimmetrica speciale, perchè l'omologia (X, Ξ) muta bensì l'uno nell'altro i punti L_1, L_2 , ma trasforma gli S_2 di un sistema di Φ uscenti da L_1 negli S_2 dell'altro sistema uscenti da L_2 , onde può avvenire che l'uno dei punti e non l'altro sia immagine di un integrale ellittico a moltiplicazione complessa (cfr. n.º 14).

Facendo poi variare il punto razionale X su r_1 , si deduce che *se la curva contiene una corrispondenza emisimmetrica non speciale, contiene un S_1 di corrispondenze emisimmetriche.*

In questa ipotesi, possiamo dire di più che se i punti L_1 ed L_2 sono razionali, e quindi immagini di due integrali ellittici (*), questi devono essere a moltiplicazione complessa; cioè *se l' S_1 di corrispondenze simmetriche contiene due S_0 di corrispondenze speciali, anche l' S_1 delle emisimmetriche contiene due S_0 di corrispondenze speciali.*

Infatti, l' $S_3 = (as)$, polare di r_1 rispetto a Φ , è razionale e sega Φ in una quadrica V_2^2 a punti iperbolici (n.º 11). Essa contiene poi nelle sue due schiere infinite generatrici razionali, tracce nel detto S_3 degli S_2 razionali dei due sistemi uscenti dal punto razionale L_1 (ovvero dal punto L_2). L'involuzione gobba che ha per assi le rette a ed s , essendo subordinata nel detto S_3 dalle omografie razionali involutorie $(\lambda \lambda')$ di S_3 , immagini delle corrispondenze emisimmetriche, sarà razionale e subordinerà quindi a sua volta due involuzioni razionali nelle due schiere di generatrici della V_2^2 . Ciò basta per af-

(*) Se l'uno è razionale, lo è anche l'altro, perchè ulteriore intersezione della quadrica razionale Φ con la retta razionale r_1 uscente da un suo punto razionale. Si ha così, per via geometrica, la conferma di un noto teorema di PICARD.

fermare che i due integrali ellittici aventi per immagini i punti razionali L_1 ed L_2 sono a moltiplicazione complessa.

Dal ragionamento fatto discende che, nel caso $\nu_1 = 2$, le sole ipotesi possibili sono le seguenti:

a) $\nu_1 = 2, \nu_2 = 0$. *La curva possiede un S_1 di corrispondenze simmetriche e nessuna emisimmetrica.*

Questo caso si suddivide in due:

a') *Le corrispondenze simmetriche sono tutte non speciali.*

a'') *Esistono nel detto S_1 due S_0 di corrispondenze speciali. La curva possiede allora due integrali ellittici, nessuno dei quali a moltiplicazione complessa.*

b) $\nu_1 = 2, \nu_2 = 1$. *Sulla curva esiste un S_1 di corrispondenze simmetriche contenente due S_0 di corrispondenze speciali, e un S_0 di corrispondenze speciali emisimmetriche. La curva possiede due integrali ellittici, dei quali uno è a moltiplicazione complessa.*

c) $\nu_1 = 2, \nu_2 = 2$. *Sulla curva esiste un S_1 di corrispondenze simmetriche ed un S_1 di emisimmetriche. Questo caso si suddivide pure in due:*

c') *Non esistono sulla curva corrispondenze speciali.*

c'') *I due S_1 contengono entrambi due S_0 di corrispondenze speciali. La curva possiede allora due integrali ellittici, entrambi a moltiplicazione complessa.*

17. 3.º Caso: $\mu_1 = 3$. Le corrispondenze simmetriche della curva formano un S_2 rappresentato entro lo spazio τ da un piano razionale r_2 passante per P e secante quindi la quadrica φ in una conica reale non degenere f .

Sulla curva esiste certo un S_0 di corrispondenze emisimmetriche non speciali rappresentato pure dal piano razionale r_2 (n.º 14); dico che, all'infuori di quelle esistenti nel detto S_0 , la curva non possiede altre corrispondenze emisimmetriche.

Esista infatti una corrispondenza emisimmetrica non speciale indipendente da quelle: sia λ il piano dello spazio τ , diverso da r_2 , che la rappresenta e λ' il suo polare rispetto a Φ .

La omografia razionale involutoria (λ, λ') di S_5 subordina nello spazio τ l'omologia armonica che ha per spazi fondamentali il piano λ ed il punto $L = (\lambda' \tau)$, polo di λ rispetto a φ . Poichè τ non contiene punti razionali esterni al piano r_2 , il piano stesso sarà unito in quell'omologia e dovrà quindi passare per il centro L della medesima. In esso verrà poi subordinata un'omo-

logia armonica razionale che ha L per centro e la retta $l = (\lambda r_2)$ per asse. Il punto L e la retta l dovranno quindi essere razionali (n.º 12, Teor. IV), e saranno quindi razionali i piani $\lambda \lambda'$ (n.º 12, Teor. V), contro l'ipotesi $\mu_1 = 3$.

Suppongasi ora che esista su C una corrispondenza emisimmetrica speciale, rappresentata dal piano ξ tangente a ϕ in un punto razionale X della conica f , la quale verrà perciò a contenere infiniti punti razionali. Indicato allora con Ξ l'iperpiano razionale tangente in X alla ϕ , e con V_3^2 la quadrica specializzata in cui Ξ sega la ϕ , nella stella dell'iperpiano Ξ che ha il centro in X , l'omografia involutoria, che ha per spazi fondamentali il piano ξ ed il piano $\xi' = X\alpha$, subordina nella schiera degli S_2 del secondo sistema di V_3^2 una involuzione razionale I_2 (n.º 14).

Il piano razionale r'_2 , polare di r_2 rispetto a ϕ , è contenuto in Ξ e sega la V_3^2 in una conica f' con infiniti punti razionali (quelli che r'_2 ha comuni con gli S_2 razionali di V_3^2), e la involuzione I_2 determina su f' un'involuzione razionale. L'omologia armonica del piano r'_2 , che subordina su f' quest'ultima involuzione, sarà dunque razionale; e poichè il centro di essa è il punto $(r'_2 \xi)$, si deduce che lo spazio τ contiene un punto razionale esterno ad r'_2 , contro l'ipotesi.

Si deduce dunque che quando è $\mu_1 = 3$, dovrà essere $\mu_2 = 1$, cioè:

Se le corrispondenze simmetriche della curva formano un S_2 , la curva possiede un S_0 di corrispondenze emisimmetriche non speciali.

In tal caso può darsi che :

a) *L' S_2 delle corrispondenze simmetriche sia tutto di corrispondenze non speciali.*

b) *Nel detto S_2 siano contenuti infiniti S_0 di corrispondenze speciali. La curva possiede allora infiniti integrali ellittici, nessuno dei quali a moltiplicazione complessa.*

18. 4.º Caso: $\mu_1 = 4$. Sulla curva esiste un S_3 di corrispondenze simmetriche rappresentate dall'intero spazio τ , che dovrà essere allora uno spazio razionale. La quadrica ϕ contiene infiniti punti razionali, quelli che τ ha comuni con gli S_2 razionali di ϕ . Il piano tangente a ϕ in uno di questi punti, essendo l'intersezione dello spazio τ con l'iperpiano razionale tangente nel punto medesimo alla ϕ , è razionale. Gli infiniti punti razionali di ϕ sono dunque immagini di integrali ellittici a moltiplicazione complessa (n.º 14); ed i piani in essi tangenti alla ϕ rappresentano degli S_0 di corrispondenze emisimmetriche speciali.

Ogni piano razionale di τ , non tangente a ϕ , è immagine di un S_0 di

corrispondenze emisimmetriche non speciali; inversamente, un piano che sia immagine di un tale S_0 , per il fatto che è contenuto nello spazio razionale τ , è razionale. Segue dunque che quando è $\nu_1 = 4$, deve essere $\nu_2 = 4$, cioè:

Se la curva possiede un S_3 di corrispondenze simmetriche, possiede anche un S_3 di corrispondenze emisimmetriche. Tanto il primo come il secondo S_3 contengono infiniti S_0 di corrispondenze speciali, e sulla curva si hanno infiniti integrali ellittici tutti a moltiplicazione complessa.

OSSERVAZIONE. Notevole è il fatto che quando esistono sulla curva integrali ellittici, la conoscenza del numero e della specie di questi conduce subito alla determinazione dei valori di μ_1 e di μ_2 .

Così se la curva possiede due (soli) integrali ellittici, che non siano a moltiplicazione complessa, si ha $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 0$.

Se dei due integrali uno è a moltiplicazione complessa, si ha $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$.

Se entrambi sono a moltiplicazione complessa, si ha $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 2$.

Se la curva possiede più di due integrali ellittici, ne possiede, come è noto, infiniti. Può darsi allora che nessuno di questi sia a moltiplicazione complessa, ovvero tutti siano a moltiplicazione complessa. Nel primo caso si ha $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 1$, nel secondo $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 4$.

§ 8. DIMOSTRAZIONE DELLA EFFETTIVA ESISTENZA DI CURVE CUI SI RIFERISCONO I VALORI TROVATI DI μ_1 E DI μ_2 .

19. Sia P un punto razionale di S_3 e π il suo iperpiano polare rispetto a Φ . Poichè la V_3^2 in cui π sega Φ contiene S_1 reali, la sua equazione in π si può, mediante una trasformazione reale delle coordinate, ridurre alla forma

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 = 0;$$

questa dice che in ogni quintupla reale polare di V_3^2 esiste un S_1 non secante il cui S_2 polare ha comune con V_3^2 una conica immaginaria. Chiamando α ed α' l' S_1 e l' S_2 suddetti, l' $S_3 = P\alpha$, polare di α rispetto a Φ , sega Φ in una quadrica φ a punti ellittici (n.º 11); e poichè il piano α , polare di P rispetto a φ , sega φ in una conica immaginaria, il punto P sarà interno a φ . Variando la suddetta quintupla reale in modo continuo, l' $S_3 = P\alpha$ varia con conti-

nuità intorno a P . Ne segue che la retta α può essere scelta in modo che $l'S_3 = P\alpha$ non contenga, all'infuori di P , alcun punto razionale (*).

La retta α fornisce allora (n.º 13) una coppia $(\alpha \alpha_0)$ corrispondente ai periodi di una curva di genere due che si trova nelle condizioni del 1.º Caso (n.º 15).

20. Sia r_1 una retta razionale secante la quadrica Φ in due punti reali $L_1 L_2$. Nell' S_3 polare di r_1 , il quale sega Φ in una quadrica V_2^2 a punti iperbolici (n.º 11), si consideri un tetraedro polare della V_2^2 stessa e siano $\alpha \alpha'$ i due spigoli opposti non secanti. $l'S_3 = r_1 \alpha'$, polare di α rispetto a Φ , sega Φ in una quadrica φ a punti ellittici che ha comuni con r_1 i punti $L_1 L_2$. Variando con continuità il detto tetraedro, $l'S_3 = r_1 \alpha'$ varia con continuità intorno ad r_1 ; ne segue che α può esser scelta in modo che $l'S_3 = r_1 \alpha'$ non contenga alcun punto razionale esterno ad r_1 , nè alcun piano fondamentale di una omografia razionale involutoria trasformante in sè la Φ (**).

Se allora i due punti $L_1 L_2$ non sono razionali, la retta α fornisce la coppia $(\alpha \alpha_0)$ corrispondente ai periodi di una curva che si trova nelle condizioni del 2.º Caso a') (n.º 16).

Facciamo ora l'ipotesi che L_1 ed L_2 siano razionali. Al variare continuo dell' $l'S_3 = r_1 \alpha'$, il piano λ_1 tangente in L_1 alla φ , cioè l'intersezione del detto S_3 con l'iperpiano \mathcal{A} , tangente in L_1 a Φ , varia pure in modo continuo. Nei due sistemi di S_2 della V_2^2 sezione di \mathcal{A}_1 con Φ , il piano λ_1 ed il suo polare λ'_1 subordinano dunque due involuzioni che variano pure in modo continuo. La retta α può quindi essere scelta in modo che nessuna delle due involuzioni sia razionale, ed allora fornisce una coppia $(\alpha \alpha_0)$ corrispondente ai periodi di una curva che si trova nelle condizioni del 2.º Caso a'') (n.º 16).

21. Si mantenga l'ipotesi che i punti $L_1 L_2$ in cui r_1 sega Φ siano razionali. La V_2^2 sezione di Φ con $l'S_3$ polare di r_1 è a punti iperbolici e contiene nelle sue due schiere infinite generatrici razionali, traccie nel detto S_3 degli infiniti S_2 razionali di Φ uscenti da L_1 e da L_2 . Si fissi allora in una

(*) Qui applichiamo la proprietà: *Uno spazio reale S_k che si muove in un S_r in modo continuo, non può contenere uno spazio razionale variabile.* L'ipotesi opposta condurrebbe infatti all'assurdo che l'insieme costituito da una infinità di spazi razionali avrebbe la stessa potenza del continuo.

(**) Poichè un tal piano dipende da un gruppo d'interi (i coefficienti dell'omografia razionale), l'insieme costituito da una infinità di questi piani non può avere la potenza del continuo. Vale dunque per essi la considerazione fatta nella Nota precedente per gli spazi razionali.

schiera un'involuzione ellittica I_2 che mandi ogni generatrice razionale in una pure razionale (basta, per individuare I_2 , prendere due coppie separantisi di generatrici razionali), e sia I_1 un'involuzione ellittica dell'altra schiera scelta in modo generico. Le due involuzioni I_1 e I_2 stabiliscono fra i punti della V_2^2 una corrispondenza biunivoca involutoria, la quale, com'è facile vedere, è omografica; e siccome manda in sè ciascuna delle due schiere, sarà contenuta in una involuzione gobba dello spazio S_3 . Per il fatto che le involuzioni I_1 e I_2 sono ellittiche, gli assi α e α' di questa involuzione gobba sono reali e non secanti la V_2^2 . L' $S_3 = (r_1 \alpha)$ sega quindi la Φ in una quadrica φ a punti ellittici, che ha comuni con r_1 i punti $L_1 L_2$. Tenendo fissa l'involuzione razionale I_2 e variando con continuità I_1 , si può fare in modo che l' $S_3 = r_1 \alpha'$, il quale varia con continuità intorno ad r_1 , non contenga punti razionali esterni ad r_1 ; ma poichè ora *uno* dei punti $L_1 L_2$ è immagine di un integrale ellittico a moltiplicazione complessa (quello cioè che proietta la schiera sostegno di I_2 mediante S_2 del 2.º sistema di Φ (n.º 14)), si deduce che la retta α fornisce una coppia $(\alpha \alpha_0)$ corrispondente ai periodi di una curva nelle condizioni del 2.º Caso b) (n.º 16).

22. Le involuzioni $I_1 I_2$ siano ora entrambe razionali, ma scelte del resto in modo affatto generico; i due punti $L_1 L_2$ sono allora immagini di integrali ellittici a moltiplicazione complessa, e la retta α fornisce quindi la coppia $(\alpha \alpha_0)$ corrispondente ai periodi di una curva nelle condizioni del 2.º Caso c") (n.º 16).

OSSERVAZIONE. Poichè le involuzioni I_1 e I_2 devono ora essere razionali, non è più possibile farle variare in modo continuo. Sorge quindi il dubbio che non si possa evitare che lo spazio $S_3 = r_1 \alpha'$ venga a contenere punti razionali esterni ad r_1 .

Si osservi anzitutto che quando, per una determinata coppia di involuzioni razionali $I_1 I_2$, un punto razionale esterno ad r_1 viene a cadere in τ , τ dovrà divenire uno spazio razionale, non potrà cioè contenere un solo piano razionale passante per r_1 . Questo piano segherebbe infatti la φ in una conica f con infiniti punti razionali, fra i quali L_1 ed L_2 sarebbero immagini di integrali ellittici a moltiplicazione complessa, e ciò non può avvenire come abbiám visto al n.º 17.

Quando poi lo spazio τ diviene razionale, dovrà esser razionale la sua polare α rispetto a Φ , e quindi anche α' . Il dubbio cui sopra abbiám accennato sarà quindi rimosso, quando si mostri che con una scelta generica delle involuzioni $I_1 I_2$ nel campo razionale le rette $\alpha \alpha'$ non sono razionali.

Si ripeta perciò per lo spazio rigato ($\alpha \alpha'$) la rappresentazione di KLEIN che abbiamo sopra applicato allo spazio $\omega = (\alpha \alpha_0)$. Le due schiere della quadrica V_2^2 contenuta in detto spazio son rappresentate da due coniche ff' , con infiniti punti razionali, sezioni di Φ con un S_2 ed un S'_2 polari; e le due involuzioni $I_1 I_2$ da due involuzioni sulle coniche stesse aventi per centri due punti razionali HH' di S_2 e di S'_2 interni ad f ed f' . Le intersezioni AA' di Φ con la retta HH' (le quali sono certamente reali perchè, com'è facile vedere, l' S_2 polare di HH' sega Φ in una quadrica a punti iperbolici) sono poi le immagini delle rette $\alpha \alpha'$. E siccome ogni retta razionale secante la Φ può mettersi nelle condizioni della HH' (*), si deduce che con una scelta generica delle I_1 e I_2 nel campo razionale le rette $\alpha \alpha'$ non sono razionali.

23. Per dimostrare l'esistenza di curve per le quali si verifica il 2.^o Caso c') procederemo nel modo seguente.

Si consideri in S_3 un'omografia razionale involutoria trasformante in sè la Φ , i cui piani fondamentali $\lambda \lambda'$ siano reali ma non razionali, ed inoltre secanti la Φ in coniche immaginarie (**). Si indichi poi con r_1 la retta razionale congiungente due punti razionali omologhi nell'omografia ($\lambda \lambda'$). L' S_3 polare di r_1 sega Φ in una V_2^2 e i due piani $\lambda \lambda'$ in due rette $\alpha \alpha'$ polari rispetto a questa V_2^2 . Poichè, per l'ipotesi fatta, α ed α' sono entrambe non secanti, la V_2^2 sarà a punti iperbolici e quindi r_1 segnerà Φ in due punti reali $L_1 L_2$. Essi non saranno poi razionali se i due punti razionali omologhi nella omografia ($\lambda \lambda'$), congiunti dalla r_1 , sono scelti in modo generico (***)).

(*) Giustificiamo l'asserzione. Sia infatti r una retta razionale secante la Φ in due punti AA' reali ma non razionali; il suo S_3 polare rispetto a Φ è razionale e sega Φ in una quadrica V_2^2 a punti iperbolici con infiniti punti razionali. Si costruisca un tetraedro razionale polare rispetto a questa quadrica e siano $r_1 r_2$ i due spigoli opposti non secanti. L' $S_3 = (r r_1)$, polare di r_2 , sega Φ in una quadrica \bar{V}_2^2 a punti ellittici, con infiniti punti razionali. Un piano λ condotto per r_1 e per un punto razionale di questa \bar{V}_2^2 sega Φ in una conica f con infiniti punti razionali e la r in un punto razionale H , che sarà interno ad f . Il piano λ' , polare di λ , passa per r_2 , sega Φ in una conica f' contenente infiniti punti razionali, e la r in un punto razionale H' interno ad f' . La retta r è dunque nelle condizioni richieste.

(**) Per la dimostrazione della possibilità della scelta dei piani $\lambda \lambda'$ soddisfacenti alle condizioni suddette, vedasi la nota al n.º 13.

(***) Supposto che l'omografia ($\lambda \lambda'$) sia rappresentata dalle formule (2) della nota al n.º 13, è facile provare con semplice calcolo che l'equazione di 2º grado da cui dipende la ricerca dei punti $L_1 L_2$ ha il discriminante sempre positivo, se $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ sono positivi, ma non necessariamente un quadrato.

Lo spazio $\tau = (\alpha' r_1)$, polare di α , segnerà Φ in una quadrica φ a punti ellittici, avente comuni con r_1 i punti L_1, L_2 . Inoltre è facile vedere che in τ non esiste alcun punto razionale esterno ad r_1 . Infatti l'ipotesi che τ sia razionale, ovvero contenga un piano razionale passante per r_1 , contraddice al fatto che τ contiene il piano λ' , non razionale, fondamentale dell'omografia razionale involutoria $(\lambda \lambda')$ (vedansi i n.° 17, 18).

È chiaro allora che la retta α fornisce una coppia $(\alpha \alpha_0)$ corrispondente ai periodi di una curva nelle condizioni del 2.° Caso c') (n.° 16).

24. Siano r_2 ed r'_2 due piani razionali, polari rispetto a Φ e secanti la Φ in due coniche reali f ed f' . Si prenda in r'_2 una retta α , reale ma non razionale, non secante la f' . Il suo spazio polare τ segnerà Φ in una quadrica φ a punti ellittici avente comune col piano razionale r_2 la conica reale f . Essendo α non razionale, lo spazio τ non contiene punti razionali esterni ad r_2 ; ne segue che α fornisce la coppia $(\alpha \alpha_0)$ corrispondente ai periodi di una curva nelle condizioni del 3.° Caso a) (n.° 17).

Se poi r_2 è il piano determinato da tre punti razionali di Φ , la f contiene infiniti punti razionali, ed otteniamo il 3.° Caso b) (n.° 17).

Infine ogni retta razionale non secante la Φ fornisce la coppia $(\alpha \alpha_0)$ relativa al 4.° Caso (n.° 18).

Pisa, luglio 1915.

Vene fluenti tra pareti interrotte.

(Di BRUTO CALDONAZZO, a Milano.)

INTRODUZIONE.

In una Nota nei *Rendiconti dei Lincei* ⁽¹⁾ G. COLONNETTI ha assegnato l'integrale generale del moto piano di un liquido tra due pareti rigide, una delle quali interrotta e che viene sostituita, per così dire, nel tratto mancante da un pelo libero (Fig. 1).

In una Nota successiva ⁽²⁾ applica il risultato allo studio del caso che schematicamente traduce il tubo del VENTURI. Precisamente egli assume ret-



Fig. 1.

tilinea la parete non interrotta, il che gli permette la riflessione del campo del moto rispetto a tale parete. In tal modo risolve il problema del moto piano di un liquido tra due pareti interrotte (Fig. 2), *simmetriche* una all'altra rispetto ad un asse.

In questa Nota io mi propongo lo studio del moto piano permanente di un liquido tra *due pareti qualsivogliano* (e quindi anche non simmetriche)

⁽¹⁾ *Sull'efflusso dei liquidi tra pareti che presentano una interruzione*, Rend. dei Lincei, vol. XX, serie 5.^a, 1.^o sem. (1911), pp. 649-655.

⁽²⁾ Loc. cit., pp. 789-797.

ambidue interrotte (Fig. 3), lungo i tratti mancanti scorrendo il liquido tra due peli liberi.

Già il COLONNETTI nella seconda Nota rileva come la questione abbia stretta analogia coi fenomeni che si verificano in prossimità di ogni brusco cambiamento di direzione o di sezione nei canali. Altrettanto può ripetersi ben a ragione per il problema da me trattato, del quale quello del COLONNETTI risulta un caso particolare. Infatti in vicinanza dei gomiti o delle strozzature nei tubi e nei canali la corrente non segue più le pareti, ma lascia tra sè e quelle una regione in cui il liquido non partecipa direttamente al

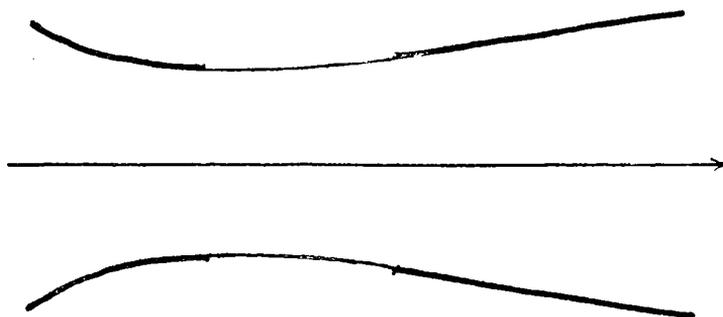


Fig. 2.

moto della corrente e che in certi casi può riguardarsi come sensibilmente in quiete.

Si può supporre allora che il moto avvenga tra pareti interrotte i cui tratti mancanti sono sostituiti da tubi di flusso liberi, limitanti la corrente del liquido in quiete. Nel caso piano da noi considerato abbiamo a che fare naturalmente con peli liberi. Una volta determinata la forma dei peli liberi (ed a ciò conduce il nostro problema) se si sostituiscono questi con pareti rigide aventi la stessa forma calcolata pei peli liberi, il liquido si muoverà su questi tratti con velocità costante. Questo fatto può interessare l'ingegnere idraulico che voglia sottoporre le pareti di una condotta in una curva od in una strozzatura a sola azione idrostatica.

Per lo studio del problema mi servo del noto metodo analitico che il LEVI-CIVITA introdusse nella Memoria: *Scie e leggi di resistenza* ^(*).

(*) Rend. Circ. mat. di Palermo, t. XXIII (1907), pp. 1-37.

Riesco ad esprimere l'integrale generale del moto sfruttando la soluzione del problema di DIRICHLET nella corona circolare data dal VILLAT (*).

Ciò mi permette nello stesso tempo di stabilire una relazione tra i valori assoluti della velocità sui peli liberi e la configurazione delle pareti [§§ 14 e 15].

Come applicazione valuto l'integrale generale che corrisponde ad un canale a pareti di forma poligonale [§ 19]. Studio quindi il caso particolare in cui il canale ha le pareti rettilinee facenti un gomito (Fig. 11). Trovo che il valore assoluto della velocità è sempre compreso tra i valori che la velocità assume sui due peli liberi e posso dare sotto forma finita le equazioni intrinseche dei peli liberi [§§ 20-22]. Questi peli liberi non hanno flessi; uno di essi (λ) rivolge la convessità al campo del moto e su di esso la velocità ha il valore massimo, l'altro (λ') rivolge la concavità al campo del moto e su di esso la velocità ha il valore minimo.

Più interessante, e dal punto di vista pratico più istruttivo, riesce questo caso quando il campo del moto ha un asse di simmetria (Fig. 12 e 13).

Ecco i risultati più salienti cui sono giunto in tale caso.

Il valore c della velocità all'infinito è medio proporzionale fra i valori della velocità sui peli liberi. Siccome assumo eguale ad 1 il valore della velocità massima, cioè quella su λ , si ha quindi il valore della velocità su λ'

$$V_{\lambda'} = c^2.$$

Nella trattazione del problema intervengono le costanti K , K' e k , le prime due da riguardarsi come integrali ellittici completi di prima specie relativi al modulo k , definite dalla relazione

$$\frac{K}{K'} = -\frac{1}{\alpha} \log c,$$

dove α è l'angolo del gomito del canale.

L'equazione intrinseca del pelo λ , contando gli archi a partire dall'estremo a monte, è

$$\rho = \frac{K'}{\alpha} \sqrt{(1 - e^{-2s})(1 - k^2 e^{2s})}, \quad 0 \leq s \leq \log \frac{1}{k}.$$

Il pelo libero λ' è omotetico di λ e c^2 è il rapporto d'omotetia tra λ e λ' .

(*) H. VILLAT, *Le Problème de Dirichlet dans une aire annulaire*, Rend. Circ. mat. di Palermo, t. XXXIII (1912).

Quando l'angolo α è diverso da π il centro di omotelia è il punto dell'asse di simmetria che dista dalle pareti rigide μ e ν , che si raccordano a λ , di

$$\frac{\pi c}{1 - c^2}.$$

Quando $\alpha = \pi$, il doppio di questo numero rappresenta la distanza alla quale devono giacere le pareti stesse μ e ν , in tal caso parallele.

PARTE PRIMA.

Problema generale.

§ 1. POSIZIONE DEL PROBLEMA.

Precisiamo il problema facendo le seguenti ipotesi:

I. Un liquido (fluido omogeneo incompressibile) di densità ρ^* si muova di moto *piano continuo permanente ed irrotazionale* tra due pareti rigide (Fig. 3) indefinitamente estese sia a monte che a valle, tutte e due *interrotte* rispettivamente nei tratti OQ ed $O'Q'$.

II. Al finito le pareti presentino forma arbitrariamente prefissata, con tangente generalmente continua, escluso cioè al più un numero finito di punti (*punti angolosi*), nei quali la tangente cambia bruscamente di direzione. All'infinito a monte ed a valle infine le pareti tendano a diventare parallele, la loro distanza restando finita.

III. Essendo evidente il significato delle notazioni indicate nella Fig. 3, supporremo che il liquido scorra sempre aderente alle pareti, μ e μ' a monte e ν e ν' a valle.

Laddove le pareti sono interrotte *il liquido in moto sia a contatto lungo il pelo libero λ con un liquido della stessa densità ma in quiete della regione B e lungo il pelo libero λ' con lo stesso liquido pure in quiete della regione B'.*

In altre parole ammettiamo che i filetti, guidati dalle pareti rigide a monte μ e μ' fino ai punti O ed O' , proseguano quindi nei peli liberi λ e λ'

fino ai punti Q e Q' . A partire da questi punti gli stessi filetti ritornano ad essere guidati dalle pareti rigide v e v' a valle.

IV. In ogni punto della vena in moto, pareti rigide incluse, eccettuato

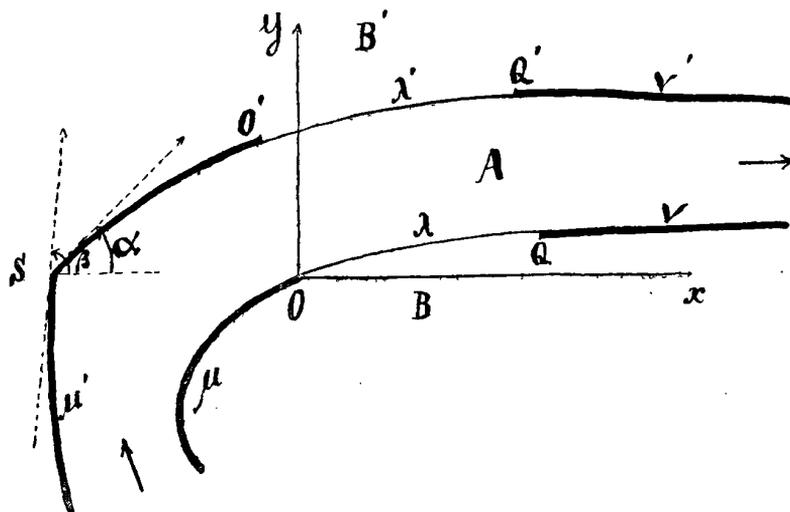


Fig. 3.

eventualmente in un numero finito di punti angolosi di queste pareti, la velocità sia *finita e diversa da zero*.

V. All'infinito sia a monte che a valle i filetti tendano a diventare paralleli alle pareti e la velocità abbia lo stesso valore V^* , in ogni punto all' ∞ a monte, lo stesso valore V^*_2 in ogni punto all' ∞ a valle.

§ 2. IMPOSTAZIONE ANALITICA DEL PROBLEMA.

Sia O, x^*, y^* una coppia di assi cartesiani ortogonali con l'origine in O , l'asse Ox^* diretto come la velocità assintotica a valle, l'asse Oy^* rivolto verso il campo del moto ⁽⁵⁾ (Fig. 3) [verrà giustificato in seguito perchè nella figura è scritto semplicemente x ed y in luogo di x^* ed y^*]. Indichiamo con

⁽⁵⁾ Vogliamo dire con ciò che se si immagina di far tendere O all' ∞ a valle lungo $\lambda + v$ conservando l'asse Ox^* parallelo a se stesso, l'asse Oy^* tende verso il campo del moto in modo da tagliare la parete v' .

u^* e v^* le componenti della velocità in un punto generico P . Poichè, (I), il moto è permanente ed irrotazionale esistono due funzioni armoniche associate

$$\begin{aligned} \varphi^*(x^*, y^*), \text{ potenziale di velocità;} \\ \psi^*(x^*, y^*), \text{ funzione di corrente;} \end{aligned}$$

definite dalle equazioni ai differenziali totali

$$\left. \begin{aligned} d\varphi^* &= u^* dx^* + v^* dy^*, \\ d\psi^* &= -v^* dx^* + u^* dy^*, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

a meno di una inessenziale costante addittiva. Per la (I) ancora, le eventuali forze di massa devono derivare da un potenziale. Indicheremo con $-U^*(x^*, y^*)$ il potenziale relativo all'unità di massa. È superfluo rilevare che la funzione U^* è indipendente da ρ^* ; riterremo inoltre che essa sia continua in tutto il campo A del moto come pure nelle regioni B e B' attraverso i peli liberi λ e λ' . Poniamo al solito

$$\left. \begin{aligned} z^* &= x^* + i y^*, \\ w^* &= u^* - i v^*, \\ f^* &= \varphi^* + i \psi^*, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

con che w^* ed f^* risultano entrambe funzioni della variabile complessa z^* e le (1) sono compendiate nella relazione

$$\frac{df^*}{dz^*} = w^*. \quad (3)$$

Sia V^* il valore assoluto della velocità in un generico punto P di A :

$$V^* = |w^*| = \sqrt{u^{*2} + v^{*2}},$$

e p^* la corrispondente pressione.

Poichè il moto è stazionario e non vorticoso le equazioni idrodinamiche di EULERO si riassumono nell'unica relazione,

$$\frac{1}{\rho^*} p^* = -\frac{1}{2} V^{*2} + U^* + \text{cost.} \quad (4)$$

Per sfruttare l'ipotesi III premettiamo alcune considerazioni d'indole generale.

Consideriamo in seno ad un liquido (in due dimensioni) (*), dotato di moto permanente ed irrotazionale, una linea di flusso λ , che sia in pari tempo linea di discontinuità per il valore della velocità. Ammettiamo che pur potendo essere variabile da punto a punto, la densità ρ^* del fluido si conservi *continua* attraverso a λ .

Diciamo A e B le due regioni in cui viene diviso il campo del moto da λ . Le grandezze che compaiono nella (4), eccettuata V^* , sono tutte continue attraverso λ .

Siano V^*_A e V^*_B i valori che V^* assume in un punto P di λ , a seconda che si tende a P dalla regione A o dalla regione B . Dalla (4) segue allora facilmente

$$V^{*2}_A - V^{*2}_B = \text{cost.},$$

la quale relazione deve essere identicamente verificata in ogni punto di λ .

Quindi in generale in seno ad un fluido, in moto permanente sotto l'azione di forze conservative, una linea di flusso attraverso la quale la densità è continua può essere linea di *discontinuità* per il valore della velocità a condizione che sia *costante la differenza* dei quadrati dei due valori che la velocità assume in un punto della linea, da una parte rispettivamente e dall'altra della linea stessa.

Nel caso particolare in cui nella regione B vi è la quiete ($V^{*2}_B = 0$) dovremo avere evidentemente

$$V^*_A = \text{cost.},$$

e cioè la regione A in moto confina con la regione B in quiete mediante una linea di flusso su cui la velocità ha valore costante (pelo libero).

Nel nostro problema in A e B (ipotesi III) il liquido ha la stessa densità costante, per cui ρ^* è certamente continua su λ ed in B vi è la quiete; quindi, per quanto abbiamo ora provato, la velocità assume necessariamente su λ un valore costante (V^*_λ).

Analogamente su λ' la velocità avrà un valore costante $V^*_{\lambda'}$, essendo in generale $V^*_{\lambda'}$ diverso da V^*_λ . Riassumendo dalla III segue

$$\left. \begin{aligned} V^* &= V^*_\lambda = \text{cost.} && \text{su } \lambda; \\ V^* &= V^*_{\lambda'} = \text{cost.} && \text{su } \lambda'. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(*) Si potrebbe considerare anche un fluido in tre dimensioni; si arriverebbe alle stesse conclusioni, colla differenza che in luogo di linea di discontinuità si deve parlare di superficie di discontinuità per il valore della velocità.

Nel problema che stiamo trattando dunque non sono escluse le forze, anzi possono agire sul liquido forze qualsivogliano, purchè conservative, circostanza questa necessariamente verificata dal fatto che il moto è irrotazionale.

Ciò è importante, perchè così si può tener conto ad es. della gravità, la quale effettivamente interviene sempre⁽⁷⁾.

Lungo i peli liberi è costante, come segue dalla (4), la somma della pressione più l'energia potenziale relativa alla massa contenuta nell'unità di volume:

$$p^* - \rho^* U^* = \text{cost.}$$

In generale quindi lungo i peli liberi λ e λ' la pressione è variabile con il potenziale delle forze esterne e solo nell'assenza di queste forze, ($U^* = \text{cost.}$), sarà $p^* = \text{cost.}$ lungo ciascuno dei peli liberi.

§ 3. SCELTA DELLE UNITÀ DI MISURA.

Scegliamo come unità di misura della densità la densità stessa ρ^* del liquido, come unità di velocità la velocità V^* , sul pelo libero λ e come unità di portata una portata π volte minore della portata q^* della corrente. Ciò verrà giustificato in seguito dalla forma speciale che in tal guisa assumono le condizioni ai limiti per le funzioni incognite del problema [(11) e (16)].

Fissate le dette tre unità, tutte le altre unità risultano completamente determinate. Indicheremo la misura di una grandezza nel sistema fissato con la stessa lettera che serve ad indicare la grandezza senza l'asterisco. Avremo

(7) Tutte le questioni idrodinamiche che vennero trattate sfruttando il metodo analitico introdotto dal LEVI-CIVITA nella Memoria *Scie e leggi di resistenza* (già da noi citata) sono caratterizzate dal fatto che su certe linee di flusso, separanti un liquido in quiete da un liquido in moto, la velocità è costante. In tali questioni si premette in generale l'ipotesi che manchino le forze di massa ($U^* = \text{cost.}$). Da quanto abbiamo visto, questa ipotesi *non è necessaria* per la costanza di V^* su tali linee e perciò i risultati ottenuti nello studio di tali questioni restano validi anche se intervengono forze di massa conservative, a condizione però che su queste linee *la densità del fluido sia continua.*

quindi ad es.

$$\left. \begin{aligned} z^* &= \frac{q^*}{\pi \rho^* V^*_{\lambda}} z, & (z = x + i y), \\ w^* &= V^*_{\lambda} w, & (w = u - i v), \\ f^* &= \frac{q^*}{\pi \rho^*} f, & (f = \varphi + i \psi), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

z , w ed f essendo quindi puri numeri. Conveniamo inoltre di far intervenire in seguito relazioni solamente fra le misure delle grandezze considerate; si ha così il vantaggio di dover operare sempre con puri numeri. Sarà comodo però, quantunque non rigoroso, di chiamare ancora con gli stessi nomi delle grandezze concrete i numeri che ne esprimono le misure.

Per questo diciamo semplicemente in seguito asse delle x , asse delle y ed abbiamo tralasciato gli asterischi a queste lettere nella Fig. 3 come avrà già avvertito il lettore.

Nel nuovo sistema di misure, con le convenzioni fatte le (1) si scrivono

$$\begin{aligned} d\varphi &= u dx + v dy, \\ d\psi &= -v dx + u dy, \end{aligned}$$

e la (3), che le riassume, diventa

$$\frac{df}{dz} = w. \quad (7)$$

Questa ci definisce la funzione f , nel campo del moto a meno di una costante arbitraria assoluta.

Infine le (5) si traducono nelle seguenti:

$$\left. \begin{aligned} V &= 1, & \text{su } \lambda; \\ V &= V_{\lambda}, & \text{su } \lambda'. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

§ 4. COMPORTAMENTO DI $f = \varphi + i\psi$ NEL CAMPO DEL MOTO.

È noto che su una linea di flusso la funzione ψ è costante e che passando da una linea ad un'altra linea di flusso l'incremento subito dalla ψ rappresenta (in valore e segno) la portata della vena compresa tra le due

linee, a condizione che la normale alla prima rivolta alla vena si coordini alla velocità come l'asse delle y si coordina all'asse delle x .

Per l'ipotesi III una linea di flusso è costituita dalla parete rigida μ , dal pelo libero λ e dalla parete rigida ν ; un'altra linea di flusso è costituita dalla parete μ' , dal pelo λ' e dalla parete ν' . Su ciascuna di esse la ψ è costante.

Assumiamo la costante addittiva, che per la (7) resta arbitraria nella determinazione della f e che d'altra parte è inessenziale pel nostro problema, in modo che sia

$$f = 0 \quad \text{in } 0.$$

Ciò importa

$$\varphi = 0, \quad \text{in } 0; \quad (9)$$

e, poichè ψ è costante su $\mu + \lambda + \nu$ cui appartiene il punto 0,

$$\psi = 0 \quad \text{su } \mu + \lambda + \nu. \quad (10)$$

Il valore costante che ψ assume su $\mu' + \lambda' + \nu'$ è la portata dell'intera vena e cioè π ; dunque

$$\psi = \pi \quad \text{su } \mu' + \lambda' + \nu'. \quad (11)$$

Quanto alla funzione φ osserviamo che si ha, detto ds un elemento d'arco di una generica linea di flusso preso positivamente nel senso del moto:

$$\frac{d\varphi}{ds} = V.$$

Ma per la IV, avuto presente la 2.^a delle (6), è generalmente $V > 0$; ciò vale a dire che φ è sempre crescente lungo una generica linea di flusso nel senso del moto.

Avremo perciò

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= +\infty, \quad \text{all}'\infty \text{ a valle;} \\ \varphi &= -\infty, \quad \text{all}'\infty \text{ a monte,} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

singularità queste che fanno riscontro alle discontinuità della ψ all' ∞ a monte e a valle, come risulta dalle (10) e (11).

L'equazione indefinita (7) e le condizioni ai limiti (9), (10), (11) e (12) determinano completamente la funzione f nel campo del moto. Oltre alle singularità considerate nei punti all' ∞ della vena, essa presenterà delle singularità negli eventuali punti angolosi delle pareti rigide.

§ 5. LA FUNZIONE w ED IL SUO LOGARITMO $-it$.

La funzione

$$w = u - iv$$

è funzione di z , uniforme e regolare nel campo del moto, la quale per le (8) e la IV deve soddisfare alle condizioni:

$$\left. \begin{aligned} |w| = V &= \begin{cases} 1 & \text{su } \lambda, \\ V_\lambda & \text{su } \lambda', \end{cases} \\ |w| > 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

e finita in ogni altro punto, tolti gli eventuali punti angolosi delle pareti.

Indichiamo con τ il *logaritmo aritmetico* di V e con \mathfrak{S} l'*angolo* che il vettore velocità forma col semiasse Ox , contato questo angolo positivamente nel verso $x \rightarrow y$, negativamente nel verso opposto. Converremo di contare quest'angolo tra $-\pi$ e $+\pi$. Dopo tali convenzioni possiamo scrivere

$$u = e^\tau \cos \mathfrak{S}, \quad v = e^\tau \sin \mathfrak{S},$$

od anche

$$w = e^{-it}, \quad (14)$$

in cui

$$t = \mathfrak{S} + i\tau.$$

La funzione t così definita è funzione di z regolare uniforme nel campo del moto, finita e continua dovunque tolti gli eventuali punti angolosi delle pareti rigide nei quali la sua parte reale \mathfrak{S} è discontinua e la corrispondente τ diventa infinita nel modo che è caratterizzato dalla discontinuità della \mathfrak{S} . Le condizioni ai limiti per \mathfrak{S} sono

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S} &= \Phi, & \text{su } \nu + \nu'; \\ \mathfrak{S} &= \Psi, & \text{su } \mu + \mu'. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

con Φ e Ψ indicando la successione dei valori che \mathfrak{S} assume sulle pareti rigide, valori che sono prefissati assieme alle pareti rigide, perchè su esse la velocità ha la stessa direzione che la tangente alle pareti. Quindi Φ e Ψ sono a ritenersi funzioni note dei punti delle pareti rigide; noi ammetteremo che tali funzioni siano sommabili lungo le pareti,

Quanto a τ , dalle prime delle (13) segue

$$\tau = \begin{cases} 0, & \text{su } \lambda; \\ \tau', & \text{su } \lambda', \end{cases} \quad (16)$$

indicando con τ' il logaritmo aritmetico di $V_{\lambda'}$,

$$\tau' = \log V_{\lambda'}.$$

§ 6. TRASFORMAZIONE CONFORME DI UN'AREA SEMPLICE IN UN RETTANGOLO.

Ci proponiamo in questo paragrafo di far vedere che è *sempre possibile ed in modo unico la trasformazione conforme diretta di un'area semplicemente connessa A in un rettangolo R in modo che a quattro punti prefissati di A vengano a corrispondere i vertici di R .*

Siano P_1, P_2, P_3, P_4 i punti prefissati sul contorno di A e succedentisi in questo ordine, quando si percorra il contorno nel verso positivo (cioè in

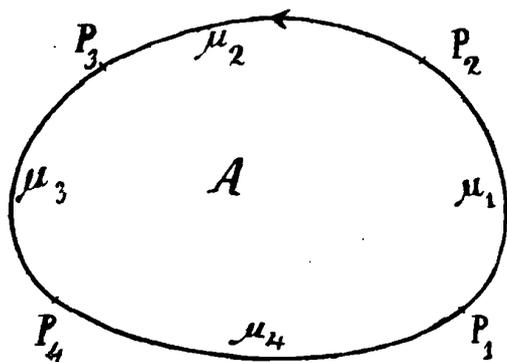


Fig. 4.

modo da avere il campo A alla sinistra); $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ le parti (finite o no) in cui il contorno resta diviso (vedi Fig. 4). È noto anzitutto (*) che si può sempre fare la trasformazione conforme diretta di un campo semplicemente connesso in un semipiano in modo che tre dati punti del contorno abbiano per immagini tre punti prefissati della retta che limita il semipiano.

Il campo A quindi si può rappresentare nel semipiano $Y' \geq 0$ della variabile complessa $Z' = X' + i Y'$ in modo che le immagini dei punti P_1, P_2, P_3 siano in particolare i punti $-1, 1$ ed il punto all' ∞ dell'asse reale $Y' = 0$. La corrispondenza biunivoca fra i punti di A e del semipiano che così si viene a stabilire determina come immagine del punto P_4 un punto a posto necessariamente sul semiasse reale negativo ed alla sinistra del punto -1 (vedi Fig. 5).

(*) Cfr. ad es. E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, Chap. X.

Facciamo ora la sostituzione

$$Z'' = X'' + i Y'' = \frac{Z' + k}{k Z' + 1},$$

con k indicando una costante reale che determineremo in modo opportuno. Con questa sostituzione all'asse reale $Y' = 0$ corrisponde l'asse reale $Y'' = 0$

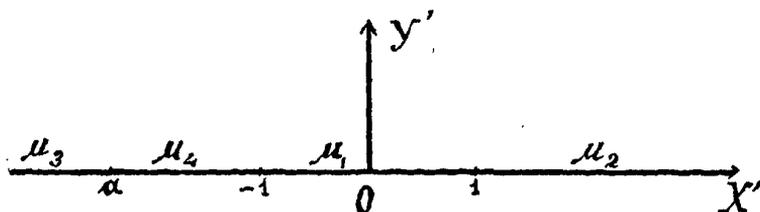


Fig. 5.

del piano Z'' , ai punti -1 ed 1 del primo corrispondono pure i punti -1 ed 1 del secondo ed al punto all' ∞ dell'asse $Y' = 0$ corrisponde il punto $\frac{1}{k}$, come è facile constatare. Infine al punto a corrisponde il punto $\frac{a+k}{ak+1}$. Vediamo se è possibile scegliere k in modo che questo punto diventi simmetrico rispetto all'origine al punto $\frac{1}{k}$. Dovremo avere perciò

$$\frac{a+k}{ak+1} = -\frac{1}{k},$$

dal che segue che k è radice dell'equazione

$$k^2 + 2ak + 1 = 0.$$

Le sue radici $-a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ sono manifestamente reali perchè essendo a alla sinistra del punto -1 è $a < -1$; è facile constatare inoltre dalla forma dell'equazione stessa che esse sono reciproche e positive.

Esprimiamo ora il coefficiente dell'immaginario di Z'' ; dall'ultima posizione colla quale si passa dal piano Z' al piano Z'' ricaviamo

$$Y'' = \frac{(1-k^2) Y'}{(1+kX')^2 + k^2 Y'^2}.$$

Questa ci dice che al semipiano $Y' \geq 0$ corrisponde il semipiano $Y'' \geq 0$

se $k < 1$, oppure il semipiano $Y'' \leq 0$ se $k > 1$. Sul primo semipiano si ha la rappresentazione conforme *diretta* dell'area A , sul secondo invece quella *inversa*. Conveniamo di scegliere la rappresentazione diretta; il che è quanto dire scegliamo delle due radici k quella minore dell'unità, alla quale condizione soddisfa una ed una sola delle radici trovate e precisamente

$$k = -a - \sqrt{a^2 - 1}.$$

In tal modo ai punti P_1 e P_2 corrispondono i punti -1 e 1 ; ai punti P_4 e P_3 i punti $-\frac{1}{k}$ e $\frac{1}{k}$ dell'asse reale $Y'' = 0$, l'area A è trasformata in modo diretto nel semipiano $Y'' \geq 0$ (vedi Fig. 6). Possiamo inoltre aggiungere che tale trasformazione è sempre possibile ed in un solo modo (*).

Introduciamo infine una nuova variabile $Z = X + iY$, definita dall'integrale ellittico

$$Z = \int_0^{Z''} \frac{dZ''}{\sqrt{(1-Z''^2)(1-k^2 Z''^2)}}. \quad (17)$$

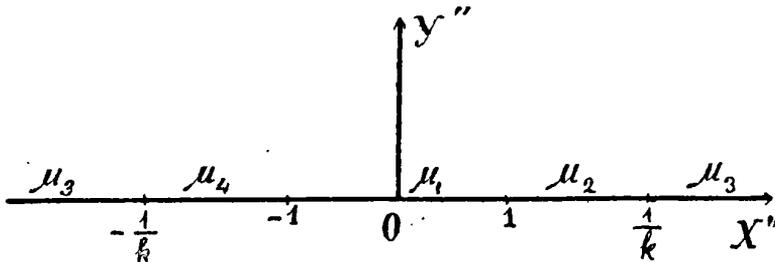


Fig. 6.

È noto ⁽¹⁰⁾ che con tale sostituzione il semipiano $Y'' \geq 0$ si può rappresentare in modo conforme diretto sul rettangolo R del piano complesso Z i cui vertici sono i punti di affisse (Fig. 7)

$$-K, \quad K, \quad K + iK', \quad -K + iK',$$

(*) È evidente che alla stessa conclusione si arriva per la trasformazione conforme inversa, che si ottiene sul semipiano $Y'' \leq 0$ scegliendo l'altra radice

$$k = -a + \sqrt{a^2 - 1} > 1.$$

⁽¹⁰⁾ Cfr. ad es. E. PICARD, loc. cit. (*).

in cui K e K' sono gli integrali definiti

$$K = \int_0^1 \frac{dZ''}{\sqrt{(1-Z''^2)(1-k^2 Z''^2)}},$$

$$K' = \int_0^1 \frac{dZ''}{\sqrt{(1-Z''^2)(1-k'^2 Z''^2)}}, \quad k' = \sqrt{1-k^2}.$$

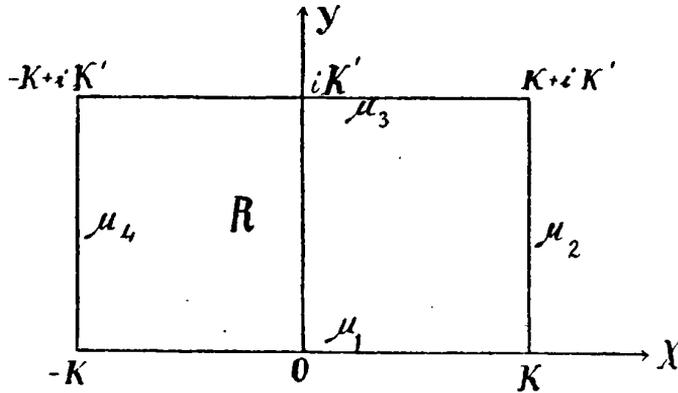


Fig. 7.

Tali vertici poi corrispondono rispettivamente ai punti $-1, 1, \frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$ dell'asse $Y''=0$ e quindi ai punti P_1, P_2, P_3, P_4 del contorno della primitiva area A e con ciò il teorema proposto è dimostrato. Operando l'inversione dell'integrale nella (17) si ha la Z'' espressa dalla funzione ellittica di JACOBI

$$Z'' = sn Z, \quad \text{seno amplitudine } Z, \quad (17)$$

i cui periodi reale ed immaginario sono rispettivamente $4K$ e $2iK'$.

§ 7. RAPPRESENTAZIONE DEL CAMPO DEL MOTO SUL RETTANGOLO R .

Identifichiamo l'area generica A del paragrafo precedente col nostro campo del moto e poniamo

$$\mu_1 = \mu' + \mu; \quad \mu_2 = \lambda; \quad \mu_3 = \nu + \nu'; \quad \mu_4 = \lambda'.$$

Pel teorema dimostrato il campo del moto si può rappresentare ed in modo unico sul rettangolo R del piano complesso Z in modo che le pareti rigide μ e μ' a monte dell'interruzione sono rappresentate sul lato reale, quelle a valle ν e ν' sul lato a questo parallelo ed i peli liberi λ e λ' sui lati paralleli all'asse immaginario, rispettivamente alla destra ed alla sinistra di

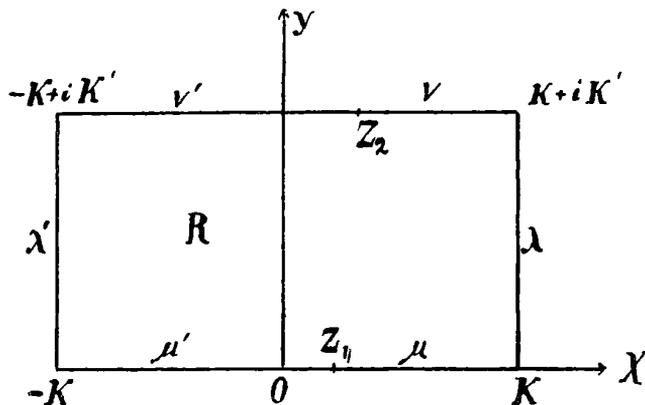


Fig. 8.

detto asse (Fig. 8). All'origine O del campo del moto corrisponde il punto K di R ; agli altri tre punti Q , Q' , O' corrispondono rispettivamente i vertici $K + iK'$, $-K + iK'$, $-K$.

Quanto ai punti all'infinito della vena in moto possiamo dire soltanto che ad essi corrispondono rispettivamente i punti $Z_1 = X_1$ del lato reale $Y = 0$ (a quello a monte) e $Z_2 = X_2 + iK'$ del lato $Y = iK'$ (a quello a valle). La loro effettiva posizione dipende dalla configurazione delle pareti rigide.

§ 8. LA FUNZIONE $f(Z)$.

La funzione f di z regolare nel campo del moto si può considerare come funzione regolare di Z entro il rettangolo. Per essa valgono le condizioni al contorno (9), (10), (11) e (12) le quali, riferendoci ora alla nuova variabile Z , si traducono nelle seguenti:

$$\varphi = \begin{cases} 0, & \text{per } Z = K; \\ -\infty, & \text{per } Z = Z_1; \\ +\infty, & \text{per } Z = Z_2; \end{cases}$$

$$\psi = \begin{cases} 0, & \text{per } Z = X, \text{ con } X_1 \leq X \leq K; \text{ per} \\ & Z = K + i Y, \text{ con } 0 \leq Y \leq K' \text{ e per} \\ & Z = X + i K', \text{ con } X_2 \leq X \leq K; \\ \pi, & \text{per } Z = X, \text{ con } -K \leq X \leq X_1; \text{ per} \\ & Z = -K + i Y, \text{ con } 0 \leq Y \leq K' \text{ e per} \\ & Z = X + i K', \text{ con } -K \leq X \leq X_1. \end{cases}$$

Si constata senza difficoltà che la funzione

$$f(Z) = \log \frac{1 - sn Z_2}{1 - sn Z_1} \cdot \frac{sn Z - sn Z_1}{sn Z - sn Z_2}, \quad (18)$$

con la determinazione $f(K) = \log 1 = 0$, soddisfa a tutte le condizioni richieste. Infatti essa è funzione regolare finita e continua di Z nei punti *interni* di R tale essendo ivi $sn Z$, che non assume mai i valori $sn Z_1$ e $sn Z_2$. Avendosi $sn K = 1$, le condizioni imposte alla parte reale φ risultano manifestamente soddisfatte. Quanto alla ψ ricordiamo che $sn Z$, sul contorno di R è sempre *reale*; precisamente percorrendo il contorno nel verso positivo dall'origine al punto $i K'$, $sn Z$ cresce da 0 a $+\infty$ passando pel valore 1 in $Z = K$ e pel valore $\frac{1}{k}$ in $Z = K + i K'$; percorrendo invece il contorno dall'origine ad $i K'$ nel verso negativo la $sn Z$ decresce da 0 a $-\infty$ passando pel valore -1 in $Z = -K$ e pel valore $-\frac{1}{k}$ in $Z = -K + i K'$. Ne segue che sul tratto del contorno $\mu + \lambda + \nu$ la funzione $\frac{1 - sn Z_2}{1 - sn Z_1} \cdot \frac{sn Z - sn Z_1}{sn Z - sn Z_2}$ è reale *positiva*, sul tratto restante $\nu' + \lambda' + \mu'$ è reale *negativa* e quindi $\psi = 0$ sul primo tratto, $\psi = \pi$ sull'altro, come è richiesto ⁽¹¹⁾.

⁽¹¹⁾ Ritornando mediante la (17) al semipiano $Y'' = 0$, la (18) si scrive

$$f(Z'') = \log \frac{1 - Z''_2}{1 - Z''_1} \cdot \frac{Z'' - Z''_1}{Z'' - Z''_2}, \quad (18')$$

dove evidentemente si è posto

$$Z''_1 = sn Z_1, \quad Z''_2 = sn Z_2.$$

Se poniamo in (18')

$$Z'' - Z''_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}, \quad Z'' - Z''_2 = \rho_2 e^{i\theta_2},$$

§ 9. COMPORTAMENTO DELLA FUNZIONE t NEL RETTANGOLO R .

Anche la funzione $t = \mathfrak{S} + i\tau$ definita dalla (14) è funzione regolare di Z entro il rettangolo R . Le condizioni al contorno (15) stabilite per t , considerata come funzione di z nel campo del moto, si traducono ora riferendoci alla nuova variabile Z , nelle seguenti:

$$\mathfrak{S} = \begin{cases} \Phi, & \text{per } Y = K'; \\ \Psi, & \text{per } Y = 0, \end{cases} \quad (19)$$

dove le Φ e Ψ sono a considerarsi come funzioni prefissate dei punti dei lati $Y = iK'$, $Y = 0$ di R . Le (16) diventano adesso

$$\tau = \begin{cases} 0, & \text{per } X = K; \\ \tau', & \text{per } X = -K. \end{cases} \quad (20)$$

Per valutare la t conviene eseguire una ulteriore trasformazione conforme del campo del moto che ci permetterà, con facile artificio, di dare immediatamente la t sfruttando risultati già acquisiti dall'analisi.

abbiamo

$$f = \log \frac{1 - Z''_2}{1 - Z''_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)},$$

dalla quale, scindendo il reale dall'immaginario, otteniamo

$$\varphi = \log \left| \frac{1 - Z''_2}{1 - Z''_1} \right| \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \psi = \begin{cases} \theta_1 - \theta_2, & \text{se } Z''_2 < 0, \\ \theta_1 - \theta_2 + \pi, & \text{se } Z''_2 > 0. \end{cases}$$

Quando le linee equipotenziali $\varphi = \text{cost.}$ costituiscono nel piano Z'' la famiglia di circonferenze $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \text{cost.}$, coi centri sull'asse reale, le linee di flusso $\psi = \text{cost.}$ costituiscono il fascio di circonferenze $\theta_1 - \theta_2 = \text{cost.}$ passanti pei punti Z''_1 , Z''_2 . Si tenga presente che di queste curve interessano il nostro problema solo gli archi appartenenti al semipiano $Y'' \geq 0$.

§ 10. TRASFORMAZIONE DEL CAMPO DEL MOTO
IN UNA SEMICORONA CIRCOLARE.

Poniamo

$$z_0 = x_0 + i y_0 = i q e^{-i \frac{\pi Z}{2K}}, \quad (21)$$

in cui

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{2K}}, \quad (0 < q < 1). \quad (22)$$

Scindendo il reale dall'immaginario ciò equivale a porre (poichè $Z = X + i Y$)

$$x_0 = q e^{\frac{\pi Y}{2K}} \operatorname{sen} \frac{\pi X}{2K}, \quad y_0 = q e^{\frac{\pi Y}{2K}} \cos \frac{\pi X}{2K},$$

per cui, se diciamo ρ il modulo e σ l'argomento di z_0 ($z_0 = \rho e^{i\sigma}$), avremo

$$\rho = q e^{\frac{\pi Y}{2K}},$$

e potremo assumere

$$\sigma = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi X}{2K}. \quad (21')$$

La (21) trasforma il rettangolo R nella semicorona circolare C di raggi 1

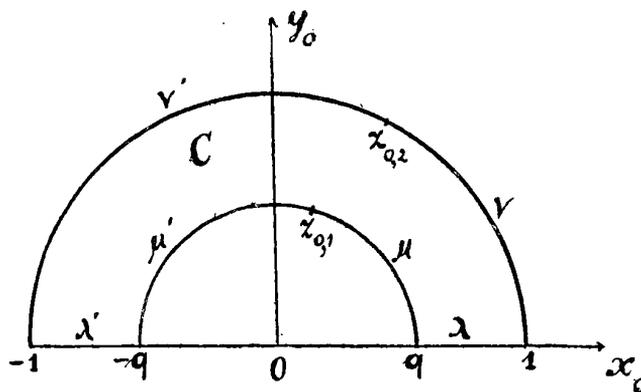


Fig. 9.

e q , col centro nell'origine, e che giace nel semipiano $y_0 \geq 0$ del piano com-

plesso z_0 . Infatti per $Y=0$ si ha $\rho=q$; per $Y=K'$, per la (22), è $\rho=1$; d'altra parte, poichè in R si ha $-K \leq X \leq K$, si ha dalla (21')

$$0 \leq \sigma \leq \pi.$$

Perciò, quando l'affissa Z descrive il lato reale di R , la corrispondente affissa z_0 descrive la semicirconferenza $|z_0|=q$, $y_0 \geq 0$; quando Z descrive il lato λ di R ($X=K$, quindi $\sigma=0$) la z_0 è reale, compresa tra q ed 1 . Facendo poi percorrere alla Z il lato $Y=K'$ di R , la z_0 descrive la semicirconferenza $|z_0|=1$, $y_0 \geq 0$; infine se la Z descrive il lato λ' di R ($X=-K$ e quindi $\sigma=\pi$) la z_0 è nuovamente reale compresa tra -1 e $-q$. È provato così che il contorno di R si trasforma nel contorno della semicorona C ; si prova poi facilmente che ad un punto interno di R corrisponde un punto interno di C in modo biunivoco. Basti osservare che in un punto interno di R si ha

$$0 < Y < K', \quad -K < X < K,$$

cui corrisponde

$$q < \rho < 1, \quad 0 < \sigma < \pi$$

e cioè un punto interno di C , e viceversa.

§ 11. LA FUNZIONE t NELLA SEMICORONA. LA FUNZIONE Ω . RIFLESSIONE.

Passando dal rettangolo alla semicorona la funzione $t = \vartheta + i\tau$ diventa funzione della variabile z_0 , regolare nella semicorona e soddisfacente alle condizioni al contorno:

$$\vartheta = \begin{cases} \Phi, & \text{per } \rho = 1; \\ \Psi, & \text{per } \rho = q; \end{cases} \quad (23) \quad \tau = \begin{cases} 0, & \text{per } q \leq \rho \leq 1 \text{ e } \sigma = 0; \\ \tau', & \text{per } q \leq \rho \leq 1 \text{ e } \sigma = \pi, \end{cases} \quad (23')$$

nelle quali si traducono le (19) e (20) passando alla semicorona.

Osserviamo che t , reale su λ , non lo è su λ' dove si ha $\tau = \tau'$, con τ' in generale diverso da zero. Ci proponiamo di ridurre il calcolo della funzione t a quello di una funzione

$$\Omega(z_0) = P + iQ$$

che sia reale tanto su λ che su λ' . Questo scopo si raggiunge introducendo

la funzione

$$t_0(z_0) = \vartheta_0 + i\tau_0 = -\frac{\tau'}{\pi} \log \frac{z_0}{q}, \quad (24)$$

con la determinazione $t_0 = 0$ per $z_0 = q$, e ponendo quindi

$$\Omega(z_0) = t(z_0) + t_0(z_0). \quad (25)$$

Infatti la t_0 è evidentemente regolare in \dot{C} , contorno incluso, sul quale, tenuta presente la (22), si ha

$$\vartheta_0 = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\tau' K'}{2K}, \text{ per } \rho = 1; \\ 0, \text{ per } \rho = q; \end{array} \right\} \quad (26) \quad \tau_0 = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ per } z_0 \text{ reale e } \sigma = 0, \\ -\tau', \text{ per } z_0 \text{ reale e } \sigma = \pi. \end{array} \right\} \quad (26')$$

Da queste ultime e dalle (23') segue appunto

$$Q = 0, \text{ per } z_0 \text{ reale.} \quad (27)$$

Quindi la Ω è reale per z_0 reale, come appunto si voleva; essa inoltre è regolare nella semicorona e sul contorno ha tutte e sole le singolarità della t .

Pel noto principio di SCHWARZ la Ω è continuabile per riflessione analitica nella semicorona simmetrica a quella considerata, rispetto all'asse reale; la sua parte reale (P) viene così ad assumere valori eguali, il coefficiente dell'immaginario (Q) valori eguali e di segno opposto in punti simmetrici all'asse reale. Questo fatto, tenuto conto che $Q = 0$ per z_0 reale, ci permette di affermare che la funzione Ω è anche *uniforme* nel campo doppiamente connesso, costituito dall'intera corona circolare. Sul contorno della corona per le (23) e (26) la parte reale di Ω deve assumere i valori

$$P = \left\{ \begin{array}{l} \Phi - \frac{\tau' K'}{2K}, \text{ per } \rho = 1; \\ \Psi, \text{ per } \rho = q, \end{array} \right\} \quad (28)$$

Le funzioni Φ e Ψ si conoscono sul contorno della semicorona primitiva, ma per la simmetria di P rispetto all'asse reale abbiamo

$$\Phi(2\pi - \theta) = \Phi(\theta), \quad \Psi(2\pi - \theta) = \Psi(\theta), \quad (29)$$

indicando con θ l'argomento dei punti del contorno della corona e conve-

nendo di far variare θ tra 0 e 2π . Così i valori di P sul contorno, dati dalla (27), sono completamente determinati.

Con l'introduzione della funzione Ω il problema è ridotto alla determinazione di una funzione regolare, finita, continua ed uniforme dei punti della corona, reale sull'asse reale, la cui parte reale assume sul contorno i valori prefissati (28), le Φ e Ψ soddisfacendo alle (29) ed essendo sommabili sul contorno stesso [§ 5].

§ 12. RICHIAMO SUL PROBLEMA DI DIRICHLET NELLA CORONA.

Il VILLAT⁽¹²⁾ ha espresso in modo elegante la funzione che risolve il problema di DIRICHLET nella corona circolare. Precisamente ecco come ha formulato la questione. Siano $\Phi'(\theta)$ e $\Psi'(\theta)$ i valori che la parte reale P' di una funzione $\Omega'(z_0) = P' + iQ'$ assume rispettivamente sulla circonferenza esterna $|z_0| = 1$ ed interna $|z| = q$, le Φ' e Ψ' essendo qualunque purchè sommabili. Si ponga allora

$$q = e^{-\frac{\pi\omega'}{\omega}}, \quad (\omega \text{ ed } \omega' \text{ reali positivi}), \quad (30)$$

ed assumiamo 2ω e $2i\omega'$ come periodi reale ed immaginario delle funzioni ellittiche di WEIERSTRASS. La funzione $\Omega'(z_0)$, la cui parte reale risolve il problema di DIRICHLET proposto, viene espressa dal VILLAT nel seguente modo:

$$\Omega'(z_0) = \frac{i\omega}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi'(\theta) \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi} \log z_0 - \frac{\omega}{\pi} \theta\right) d\theta - \left. \begin{array}{l} \\ - \frac{i\omega}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Psi'(\theta) \zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi} \log z_0 - \frac{\omega}{\pi} \theta\right) d\theta \end{array} \right\} \quad (31)$$

(ζ e ζ_3 essendo simboli delle note funzioni ellittiche). Questa funzione evidentemente è determinata a meno di una costante arbitraria puramente immaginaria. La (31) però in generale *non è uniforme*; perchè essa sia uniforme è necessario e basta che le $\Phi'(\theta)$ e $\Psi'(\theta)$ soddisfino alla relazione [VILLAT, l. c. (22)]

$$\int_0^{2\pi} (\Phi'(\theta) - \Psi'(\theta)) d\theta = 0. \quad (32)$$

(12) Loc. cit. (*).

La funzione Ω' (dimostra il VILLAT) è continua nell'interno della corona; per quanto riguarda il contorno riferiamo quanto interessa il nostro problema. Sul contorno le Φ' e Ψ' siano discontinue al più in un numero finito di punti, dove esse saltano bruscamente da un valore finito ad un altro valore pure finito. Sia ad es. $e^{i\varepsilon}$ uno di questi punti sul contorno esterno dove $\Phi'(\varepsilon - 0)$ e $\Psi'(\varepsilon + 0)$ sono i valori distinti che vi assume la Φ' quando si passa per questo punto, facendo crescere la ε . Nel punto considerato la singolarità della Ω' è così caratterizzata. Il suo coefficiente di i , Q' , diventa logicamente

$$\mp \infty \text{ a seconda che } \Phi'(\varepsilon + 0) - \Psi'(\varepsilon - 0) \geq 0.$$

La sua parte reale P' tende al valore

$$\Phi'(\varepsilon - 0) + \frac{\Phi'(\varepsilon + 0) - \Phi'(\varepsilon - 0)}{\pi} \gamma,$$

γ essendo l'angolo, sotto il quale il cammino, lungo il quale si tende ad $e^{i\varepsilon}$, taglia il contorno.

Aggiungiamo infine che la Ω' è omogenea rispetto ad ω ed ω' , e cioè dipende dai periodi solamente per mezzo del loro rapporto.

§ 13. DETERMINAZIONE DI $\Omega(z_0)$.

Per sfruttare quanto abbiamo richiamato nel paragrafo precedente, cominciamo con l'eguagliare i secondi membri delle (22) e (30), il che si ottiene ponendo

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{K'}{2K}.$$

Questa ci determina ω ed ω' a meno di un coefficiente di proporzionalità affatto inessenziale nella (31). Conveniamo di assumere

$$\omega = 2K, \quad \omega' = K' \tag{33}$$

e di esprimere sempre in seguito ω ed ω' in funzione di K e K' . È superfluo notare che così ω ed ω' sono reali e positivi come si richiede, tali essendo K e K' (vedi le espressioni di K e K' , § 6).

Poniamo ora nel secondo membro della (31)

$$\Phi' = \Phi - \frac{\tau' K'}{2K}, \quad \Psi' = \Psi.$$

La Ω' diviene in tal modo la funzione

$$\Omega(z_0) = \left. \begin{aligned} & \frac{2iK}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi(\theta) \zeta\left(\frac{2K}{i\pi} \log z_0 - \frac{2K}{\pi} \theta\right) d\theta - \\ & - \frac{2iK}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Psi(\theta) \zeta_s\left(\frac{2K}{i\pi} \log z_0 - \frac{2K}{\pi} \theta\right) d\theta - \\ & - \frac{i\tau'K'}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \zeta\left(\frac{2K}{i\pi} \log z_0 - \frac{2K}{\pi} \theta\right) d\theta, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

la quale soddisfa certamente alle condizioni (28) imposte alla P .

Essa soddisfa pure alla ulteriore condizione (27), di essere reale cioè sull'asse reale.

Basta osservare che, supposto d'aver sviluppato la Ω in serie del LAURENT,

$$\Omega(z_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} (a_n + i b_n) z_0^n, \quad (a_n \text{ e } b_n \text{ reali}),$$

in un punto regolare del contorno, sulla circonferenza esterna per fissare le idee, si ha

$$\Omega(z_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} (a_n + i b_n) e^{in\theta},$$

la cui parte reale è

$$P(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} (a_n \cos n\theta - b_n \sin n\theta).$$

Per le (28) avuto riguardo alle (29) il secondo membro deve restare inalterato scambiando θ in $2\pi - \theta$, il che è possibile solo quando $b_n = 0$. Si ha pertanto

$$\Omega(z_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z_0^n,$$

che è manifestamente reale per z_0 reale.

La funzione Ω , da noi cercata, oltre che soddisfare alle (27) e (28) deve essere *uniforme* nella corona. La condizione di uniformità è data dalla (32), la quale per la nostra Ω si scrive:

$$\int_0^{2\pi} \left(\Phi(\theta) - \Psi(\theta) - \frac{\tau'K'}{2K} \right) d\theta = 0.$$

Dobbiamo scegliere quindi la costante τ' in modo che sia soddisfatta quest'ultima relazione; dovrà essere perciò

$$\tau' = \frac{K}{\pi K'} \int_0^{2\pi} (\Phi(\theta) - \Psi(\theta)) d\theta. \quad (35)$$

In virtù dell'ipotesi fatta che le Φ e Ψ siano integrabili sul contorno, l'integrale del 2.^o membro è determinato e finito. Dopo ciò possiamo asserire che la Ω definita dalla (34), nella quale τ' ha il valore dato dalla (35), è la funzione richiesta.

Vogliamo tener conto in (34) e (35) delle relazioni (29). Per queste abbiamo

$$\int_{\pi}^{2\pi} \Phi(\theta) \zeta \left(\frac{2K}{i\pi} \log z_0 - \frac{2K}{\pi} \theta \right) d\theta = \int_0^{\pi} \Phi(\theta) \zeta \left(\frac{2K}{iK} \log z_0 + \frac{2K}{\pi} \theta - 4K \right) d\theta,$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \Psi(\theta) \zeta_s \left(\frac{2K}{i\pi} \log z_0 - \frac{2K}{\pi} \theta \right) d\theta = \int_0^{\pi} \Psi(\theta) \zeta_s \left(\frac{2K}{i\pi} \log z_0 + \frac{2K}{\pi} \theta - 4K \right) d\theta.$$

D'altra parte si ha in generale ⁽¹³⁾:

$$\zeta(u - 4K) = \zeta(u - 2\omega) = \zeta u - 2\eta,$$

$$\left(\eta = \zeta\omega = \zeta(2K) \right)$$

$$\zeta_s(u - 4K) = \zeta_s(u - 2\omega) = \zeta_s u - 2\eta;$$

quindi

$$\int_0^{2\pi} \Phi(\theta) \zeta \left(\frac{2K}{i\pi} \log z_0 - \frac{2K}{\pi} \theta \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \Phi(\theta) \left[\zeta \left(\frac{2K}{i\pi} \log z_0 - \frac{2K}{\pi} \theta \right) + \zeta \left(\frac{2K}{i\pi} \log z_0 + \frac{2K}{\pi} \theta \right) - 2\eta \right] d\theta,$$

$$\int_0^{2\pi} \Psi(\theta) \zeta_s \left(\frac{2K}{i\pi} \log z_0 - \frac{2K}{\pi} \theta \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \Psi(\theta) \left[\zeta_s \left(\frac{2K}{i\pi} \log z_0 - \frac{2K}{\pi} \theta \right) + \zeta_s \left(\frac{2K}{i\pi} \log z_0 + \frac{2K}{\pi} \theta \right) - 2\eta \right] d\theta.$$

⁽¹³⁾ Cfr. HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, t. I (Paris, Gauthier-Villars, 1886), p. 135. Si noti che l'HALPHEN scrive ω' al posto di $i\omega'$, come abbiamo creduto opportuno di fare per le applicazioni. In seguito dovendo citare ancora il tomo I di questo trattato, indicheremo nel testo semplicemente il nome dell'autore e la pagina.

Abbiamo ancora [HALPHEN, p. 201]

$$\int_0^{2\pi} \zeta\left(\frac{2K}{i\pi} \log z_0 - \frac{2K}{\pi} \theta\right) = -\frac{\pi}{2K} \left[2\eta\left(\frac{2K}{i\pi} \log z_0 - 2K\right) - i\pi\right].$$

Sostituendo in (34) abbiamo

$$\begin{aligned} \Omega(z_0) = & -\frac{iK'}{2\pi K} \tau' \left[4\eta\left(\frac{K}{i\pi} \log z_0 - K\right) - i\pi\right] - \frac{4i\eta K}{\pi^2} \int_0^\pi (\Phi(\theta) - \Psi(\theta)) d\theta + \\ & + \frac{2iK}{\pi^2} \int_0^\pi \Phi(\theta) \left[\zeta\left(\frac{2K}{i\pi} \log z_0 - \frac{2K}{\pi} \theta\right) + \zeta\left(\frac{2K}{i\pi} \log z_0 + \frac{2K}{\pi} \theta\right)\right] d\theta - \\ & - \frac{2iK}{\pi^2} \int_0^\pi \Psi(\theta) \left[\zeta_3\left(\frac{2K}{i\pi} \log z_0 - \frac{2K}{\pi} \theta\right) + \zeta_3\left(\frac{2K}{i\pi} \log z_0 + \frac{2K}{\pi} \theta\right)\right] d\theta. \end{aligned}$$

D'altra parte per le (29) è

$$\int_\pi^{2\pi} [\Phi(\theta) - \Psi(\theta)] d\theta = \int_0^\pi [\Phi(\theta) - \Psi(\theta)] d\theta,$$

per cui la (35) si scrive:

$$\tau' = \frac{2K}{\pi K'} \int_0^\pi [\Phi(\theta) - \Psi(\theta)] d\theta. \quad (36)$$

Tenuto conto di questa, l'ultima espressione trovata per la Ω si può mettere sotto la forma

$$\left. \begin{aligned} \Omega(z_0) = & -\frac{K'\tau'}{2\pi K} \left[4\eta\frac{K}{\pi} \log z_0 + \pi\right] + \\ & + \frac{2iK}{\pi^2} \int_0^\pi \Phi(\theta) \left[\zeta\left(\frac{2K}{i\pi} \log z_0 - \frac{2K}{\pi} \theta\right) + \zeta\left(\frac{2K}{i\pi} \log z_0 + \frac{2K}{\pi} \theta\right)\right] d\theta - \\ & - \frac{2iK}{\pi^2} \int_0^\pi \Psi(\theta) \left[\zeta_3\left(\frac{2K}{i\pi} \log z_0 - \frac{2K}{\pi} \theta\right) + \zeta_3\left(\frac{2K}{i\pi} \log z_0 + \frac{2K}{\pi} \theta\right)\right] d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

§ 14. INTEGRALE GENERALE DEL MOTO.

Dalla (25) abbiamo

$$t(z_0) = \Omega(z_0) - t_0(z_0).$$

Poniamo per $\Omega(z_0)$ la sua espressione (37) e per $t_0(z)$ la (24) tenendo

conto della (22); otteniamo:

$$t(z_0) = \frac{\tau'}{\pi} \left(1 - \frac{2\eta K'}{\pi}\right) \log z_0 + \left. \begin{aligned} &+ \frac{2iK}{\pi^2} \int_0^\pi \Phi(\theta) \left[\zeta\left(\frac{2K}{i\pi} \log z_0 - \frac{2K}{\pi} \theta\right) + \zeta\left(\frac{2K}{i\pi} \log z_0 + \frac{2K}{\pi} \theta\right) \right] d\theta - \\ &- \frac{2iK}{\pi^2} \int_0^\pi \Psi(\theta) \left[\zeta_3\left(\frac{2K}{i\pi} \log z_0 - \frac{2K}{\pi} \theta\right) + \zeta_3\left(\frac{2K}{i\pi} \log z_0 + \frac{2K}{\pi} \theta\right) \right] d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Questa con la (36) determina completamente la funzione $t(z_0)$. E poichè per mezzo della t si possono esprimere tutti gli elementi del moto, la funzione t costituisce l'integrale generale del moto di un fluido in un canale a pareti interrotte.

Abbiamo già detto che la $\Omega(z_0)$ è omogenea rispetto a ω ed ω' .

Per le (33) essa è omogenea anche rispetto a K e K' . Sono pure omogenee rispetto a K e K' la (36) manifestamente e la (21) per la (22); lo è pure quindi anche la funzione $t_0(z_0)$.

Da ciò segue che $t(z_0)$ è omogenea rispetto a K e K' .

Ricordiamo che il campo del moto è rappresentato dalla semicorona C , nella quale soltanto possiamo ridurci a considerare la $t(z_0)$ data dalla (38), in cui gli integrali definiti riguardano appunto la sola semicorona C .

Convieni anzi, avvantaggiandosene la semplicità della notazione, ritornare senz'altro al rettangolo R del piano Z , immagine conforme di C . A questo scopo dalla (21) ricaviamo, avuto riguardo alla (22),

$$\log z_0 = \frac{i\pi}{2K} (K + iK' - Z);$$

per la (21') alla variabile d'integrazione θ possiamo sostituire la variabile ξ mediante la

$$\theta = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\xi}{K}\right),$$

per la quale $d\theta = -\frac{\pi}{2K} d\xi$ ed al cammino d'integrazione da 0 a π per la θ si sostituisce il cammino da K a $-K$ per la ξ . A sostituzione eseguita

la (38) diviene la seguente funzione di Z :

$$t(Z) = \frac{i\tau'}{2K} \left(1 - \frac{2\eta K'}{\pi}\right) (K + iK' - Z) + \\ + \frac{i}{\pi} \int_{-K}^K \Phi(\xi) \left[\zeta(2K + iK' - Z - \xi) + \zeta(iK' - Z + \xi) \right] d\xi - \\ - \frac{i}{\pi} \int_{-K}^K \Psi(\xi) \left[\zeta_3(2K + iK' - Z - \xi) + \zeta_3(iK' - Z + \xi) \right] d\xi.$$

Corrispondentemente, introducendovi la ξ , la (36) si scrive

$$\tau' = \frac{1}{K'} \int_{-K}^K \left[\Phi(\xi) - \Psi(\xi) \right] d\xi \quad (39)$$

In base alla relazione [HALPHEN, p. 135 e 189 ove si tenga presente che $\zeta_3 u = \frac{d \log \sigma_3 u}{du}$]:

$$\zeta_3 u = \zeta(u + i\omega') - \eta' = \zeta(u + iK') - \eta', \quad (\eta' = \zeta iK'),$$

si ha

$$\zeta(2K + iK' - Z - \xi) + \zeta(iK' - Z + \xi) = \zeta_3(2K - Z - \xi) + \zeta_3(\xi - Z) + 2\eta', \\ \zeta_3(2K + iK' - Z - \xi) + \zeta_3(iK' - Z + \xi) = \zeta(2K - Z - \xi) + \zeta(\xi - Z) + 2\eta'.$$

Sostituiamo nell'ultima espressione di $t(Z)$, tenendo conto della relazione

$$i\eta\omega' - \eta'\omega = i\frac{\pi}{2}$$

[HALPHEN, p. 150]; otteniamo così in definitiva, per la (39),

$$t(Z) = \frac{i\tau'}{2K} \left(1 - \frac{2\eta K'}{\pi}\right) (K - Z) + \\ + \frac{i}{\pi} \int_{-K}^K \Phi(\xi) \left[\zeta_3(\xi - Z) + \zeta_3(2K - \xi - Z) \right] d\xi - \\ - \frac{i}{\pi} \int_{-K}^K \Psi(\xi) \left[\zeta(\xi - Z) + \zeta(2K - \xi - Z) \right] d\xi. \quad (40)$$

(14) Si noti che nella (39) e nella precedente scriviamo semplicemente $\Phi(\xi)$ e $\Psi(\xi)$ in luogo di $\Phi\left[\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\xi}{K}\right)\right]$ e $\Psi\left[\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\xi}{K}\right)\right]$; lo stesso del resto abbiamo fatto per le altre funzioni f e t passando da un piano complesso ad un altro, immagine conforme del primo.

§ 15. VELOCITÀ SU λ' E SUO COMPORTAMENTO NEI PUNTI ANGOLOSI.

La (39) esprime il logaritmo della velocità $V_{\lambda'}$ sul pelo libero λ' , in funzione del rapporto $\frac{K}{K'}$ e dei valori dell'angolo che la tangente alle pareti rigide fa con la velocità assintotica a valle. Abbiamo quindi

$$V_{\lambda'} = e^{\frac{1}{K'}} \int_{-K}^K [\Phi(\xi) - \Psi(\xi)] d\xi \quad (41)$$

Come avevamo già previsto, questa velocità differisce in generale da quella sul pelo libero λ , che abbiamo assunto eguale all'unità. Solo quando $\int_{-K}^K [\Phi(\xi) - \Psi(\xi)] d\xi$ è identicamente nullo sono eguali le velocità sui peli liberi λ e λ' .

Nel § 12 abbiamo detto come si comporti la parte reale ed il coefficiente di i nella funzione Ω' in quei punti del contorno dove le Φ' e Ψ' diventano discontinue passando bruscamente attraverso questi punti da un valore ad un altro entrambi finiti. Queste considerazioni si possono estendere anche alla Ω perchè, in virtù dell'ipotesi II, (§ 1), i valori (28) che la sua parte reale P assume sul contorno presentano al più discontinuità dello stesso tipo di quelle previste per la parte reale di Ω' . Queste considerazioni anzi valgono senz'altro per la funzione t , che ha comuni con la Ω le singularità al contorno.

Siano quindi α e β i valori per cui passa ad es. la Φ in un punto angoloso S del contorno $\mu' + \mu$ del campo del moto, quando si percorra questo nel verso positivo. In S il coefficiente τ di i nella funzione t diventa logicamente

$$\mp \infty \quad \text{a seconda che} \quad \beta - \alpha > 0.$$

Ma $\beta - \alpha$ (fig. 3) è il supplemento (in valore e segno) dell'angolo, contato tra 0 e 2π , che la prima tangente in S forma con la seconda ove si assuma su questa il verso opposto a quello del moto. (Prima, seconda tangente si riferisce all'ordine con cui le tangenti si succedono quando si percorre il contorno nel senso positivo.) In altre parole

$$\pi - (\beta - \alpha)$$

è l'angolo della cuspidè in S , rivolto al campo del moto stesso. Quest'angolo è convesso o concavo a seconda che $\beta - \alpha \geq 0$. Perciò ne segue che se in S l'angolo della cuspidè è convesso si ha $\tau = -\infty$ e quindi la velocità è nulla, se l'angolo è concavo si ha $\tau = +\infty$ e quindi la velocità è infinita ⁽¹⁵⁾.

Quanto alla parte reale \mathfrak{F} di t , essa assumerà in S un determinato valore compreso tra α e β e che dipende dal cammino seguito per giungere al punto stesso.

È opportuno rilevare che, essendo finita e diversa da zero la velocità sui due peli liberi, nei loro estremi $O, Q; O', Q'$ la funzione t deve essere regolare, perchè altrimenti questi punti dovrebbero comportarsi come punti angolosi e la velocità annullarsi quindi o diventarvi infinita. Per conseguenza la velocità è continua in valore e direzione nei punti d'attacco dei fletti liberi con le pareti rigide.

§ 16. CORRISPONDENZA TRA IL PIANO DEL RETTANGOLO E QUELLO DEL MOTO.

Dalla (7)

$$\frac{df}{dz} = w$$

per la (14) si ricava

$$dz = e^{it} df. \quad (42)$$

Questa, poichè tanto t che f sono funzioni di Z e si sa inoltre che a $z = 0$ corrisponde $Z = K$, stabilisce la corrispondenza tra i piani complessi Z e z . In particolare, sul pelo λ , dove $V = 1$, ($t = \mathfrak{S}$) e $df = d\varphi$

$$dz = e^{i\mathfrak{S}} d\varphi \quad \text{su } \lambda, \quad (43)$$

e quindi

$$\left. \begin{aligned} dx &= \cos \mathfrak{S} d\varphi, \\ dy &= \sin \mathfrak{S} d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (43')$$

Queste equazioni definiscono completamente il pelo libero λ . Su λ' in-

⁽¹⁵⁾ Cfr. U. CISOTTI, *Vene fluenti*, Rend. Circ. mat. di Palermo, t. XXV (1908), pp. 145-179, § 12.

G. COLONNETTI, *Moto di un liquido in un canale*, Rend. Circ. mat. di Palermo, t. XXXII (1911), p. 85.

vece, dove $V = V_{2'}$, ($t = \mathfrak{S} + i\tau'$), si ha

$$dz = e^{-\tau'} \cdot e^{i\mathfrak{S}} d\varphi, \quad (44)$$

e quindi:

$$\left. \begin{aligned} dx &= e^{-\tau'} \cos \mathfrak{S} d\varphi, \\ dy &= e^{-\tau'} \operatorname{sen} \mathfrak{S} d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (44')$$

Dobbiamo osservare che mentre t è espresso, con la (40), mediante funzioni ellittiche coi semiperiodi $\omega = 2K$, $i\omega' = iK'$, la f dipende da Z pel tramite di $sn Z$, i cui integrali completi corrispondenti sono K e K' . Come si sa dalla teoria delle funzioni ellittiche, a tale $sn Z$ corrispondono le funzioni di WEIERSTRASS coi semiperiodi ω ed $i\omega'$ tali che [HALPHEN, pp. 26, 33]

$$\omega = cK, \quad \omega' = cK'.$$

Nel nostro caso, posto eguale ad 1 l'inessenziale fattore di proporzionalità, si ha bensì $K' = \omega'$, ma si ha invece, per le (33),

$$K = \frac{\omega}{2}.$$

Non si potranno quindi senz'altro applicare le ordinarie formule che permettono di passare da sn alle ζ e ζ_3 e viceversa (¹⁶).

(¹⁶) Volendo si può esprimere $sn \left(u \middle| K, K' \right) = sn \left(u \middle| \frac{\omega}{2}, \omega' \right)$ mediante funzioni ellittiche coi semiperiodi ω ed ω' . Ecco come.

Sia $p u = p(u | \omega, \omega')$ la funzione ellittica di WEIERSTRASS relativa alle radici e_1, e_2, e_3 , soddisfacenti oltre che alle solite relazioni alla ulteriore relazione

$$e_1 - e_3 = 1$$

(con ciò assumiamo $c = 1$).

Poniamo

$$p^* u = p \left(u \middle| \frac{\omega}{2}, \omega' \right),$$

e le radici relative e^*_1, e^*_2, e^*_3 soddisfino pur esse alla relazione $e^*_1 - e^*_3 = 1$. Poniamo ancora corrispondentemente

$$q = e^{-\pi \frac{\omega'}{\omega}}, \quad q^* = e^{-2\pi \frac{\omega'}{\omega}},$$

per cui si ha

$$q^* = q^2.$$

§ 17. PELI LIBERI.

Fissiamo su λ il punto O come origine degli archi s contati su λ positivamente nel senso del moto; analogamente sia O' l'origine degli archi s' contati su λ' positivamente nello stesso senso (fig. 3).

Poichè

$$dz| = ds,$$

tenuto presente che φ su λ e λ' cresce nel senso del moto, dalle (43) e (43') ricaviamo:

$$\begin{aligned} ds &= d\varphi, & \text{su } \lambda; \\ ds' &= e^{-\tau'} d\varphi, & \text{su } \lambda'. \end{aligned}$$

Dall'HALPHEN, p. 431, tenuto conto dell'ultima relazione, si ha

$$\sqrt{p^*(u + i\omega') - e_s^*} = \frac{4\pi}{\omega} \sum \frac{q^n}{1 - q^{2n}} \operatorname{sen} 2n \frac{\pi}{2\omega} u, \quad n = 1, 3, 5, \dots,$$

e quindi [HALPHEN, p. 432],

$$\sqrt{p^*(u + i\omega') - e_s^*} = \frac{(e_2 - e_3) \sqrt{pu - e_1}}{\sqrt{pu - e_2} \sqrt{pu - e_3}}. \quad (\alpha)$$

D'altra parte si ha [HALPHEN, pp. 46, 47 e 25]

$$\sqrt{p^*(u + i\omega') - e_s^*} = \frac{\sqrt{e_1^* - e_2^*}}{sn\left(u + i\frac{\omega'}{2} \middle| \frac{\omega}{2}, \omega'\right)} = \sqrt{(e_1^* - e_2^*)(e_2^* - e_3^*)} sn\left(u \middle| K, K'\right).$$

Per la (α) abbiamo quindi

$$sn\left(u \middle| K, K'\right) = \frac{e_1 - e_3}{\sqrt{(e_1^* - e_2^*)(e_2^* - e_3^*)}} \cdot \frac{\sqrt{pu - e_1}}{\sqrt{pu - e_2} \sqrt{pu - e_3}}.$$

Poniamo in questa $u = K = \frac{\omega}{2}$; abbiamo [HALPHEN, p. 54]

$$1 = \frac{e_2 - e_3}{\sqrt{(e_1^* - e_2^*)(e_2^* - e_3^*)}} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{e_1 - e_3}}.$$

Dividendo a membro a membro la precedente per questa otteniamo:

$$sn\left(u \middle| K, K'\right) = \left(1 + \sqrt{e_1 - e_3}\right) \frac{\sqrt{pu - e_1}}{\sqrt{pu - e_2} \sqrt{pu - e_3}},$$

che è la formola richiesta.

Sui peli liberi, sui quali si ha rispettivamente $\psi = 0$ e $\psi = \pi$, è inoltre

$$df = d\varphi;$$

per la (18) quindi abbiamo

$$d\varphi = d \log \frac{sn Z - sn Z_1}{sn Z - sn Z_2}. \quad (45)$$

Per le convenzioni fatte poco sopra avremo dunque

$$s = \log \frac{1 - sn Z_2}{1 - sn Z_1} \cdot \frac{sn Z - sn Z_1}{sn Z - sn Z_2}, \quad Z = K + i Y, \quad (46)$$

poichè in O è $Z = K$ e quindi $sn Z = 1$, indicando $Z = K + i Y$ il generico valore di Z nel punto di λ dove l'arco assume il valore s . In modo analogo, poichè in O' è $Z = -K$ e quindi $sn Z = -1$, otteniamo su λ'

$$s' = e^{-\tau'} \log \frac{1 + sn Z_2}{1 + sn Z_1} \cdot \frac{sn Z - sn Z_1}{sn Z - sn Z_2}, \quad Z = -K + i Y. \quad (46')$$

In particolare se si pone nella (46) $Z = K + i K'$ e nella (46') $Z = -K + i K'$ otteniamo le lunghezze dei peli liberi:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \log \frac{1 - sn Z_2}{1 - sn Z_1} \cdot \frac{1 - k sn Z_1}{1 - k sn Z_2}, && \text{lunghezza di } \lambda; \\ \lambda' &= e^{-\tau'} \log \frac{1 + sn Z_2}{1 + sn Z_1} \cdot \frac{1 + k sn Z_1}{1 + k sn Z_2}, && \text{lunghezza di } \lambda'. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Indichiamo con ρ e ρ' i raggi di curvatura assoluta rispettivamente di λ e λ' . Ricordando che \mathfrak{P} è l'angolo che la tangente in un punto ad una linea di flusso fa con l'asse ∂x abbiamo

$$\rho = \left| \frac{ds}{d\mathfrak{P}} \right|, \quad \text{su } \lambda; \quad \rho' = \left| \frac{ds'}{d\mathfrak{P}'} \right|, \quad \text{su } \lambda';$$

ossia, se si calcolano ds e ds' nel senso del moto e quindi positivamente, per quanto abbiamo visto sopra abbiamo

$$\rho = \frac{d\varphi}{\left| \frac{d\mathfrak{P}}{ds} \right|}, \quad \text{su } \lambda; \quad \rho' = e^{-\tau'} \frac{d\varphi}{\left| \frac{d\mathfrak{P}'}{ds'} \right|}, \quad \text{su } \lambda',$$

dove per $d\varphi$ possiamo scrivere, poichè su λ è $Z = K + i Y$, su λ' è

$$Z = -K + iY \text{ [HALPHEN, p. 9]}$$

$$\left. \begin{aligned} d\varphi &= \frac{(sn Z_1 - sn Z_2) \sqrt{sn^2(K + iY) - 1} \sqrt{1 - k^2 sn^2(K + iY)}}{(sn(K + iY) - sn Z_1)(sn(K + iY) - sn Z_2)} dY, \text{ su } \lambda; \\ d\varphi &= \frac{(sn Z_2 - sn Z_1) \sqrt{sn^2(-K + iY) - 1} \sqrt{1 - k^2 sn^2(-K + iY)}}{(sn(-K + iY) - sn Z_1)(sn(-K + iY) - sn Z_2)} dY, \text{ su } \lambda'. \end{aligned} \right\} (48)$$

Poichè su λ si ha

$$1 \leq sn(K + iY) \leq \frac{1}{k} \text{ e su } \lambda' \text{ si ha pure } -\frac{1}{k} \leq sn(-K + iY) \leq -1,$$

i secondi membri delle (48) sono certamente reali.

§ 18. OSSERVAZIONI.

Come avviene nei problemi analoghi a quello da noi trattato, l'integrale generale (40) per lo più non si sa valutare per date pareti prefissate, perchè effettivamente le funzioni $\Phi(\xi)$ e $\Psi(\xi)$ per essere note in funzione di ξ esigono sia nota la corrispondenza tra il campo del moto e quello del rettangolo. Vi è dunque una relazione funzionale a soddisfare che presenta in generale un ostacolo insormontabile. Non è difficile superare questa difficoltà nel caso in cui le pareti μ , ν , μ' e ν' sono poligonali. Vedremo appunto nel paragrafo seguente quale diventa l'espressione dell'integrale generale per il caso di pareti poligonali e nei paragrafi successivi tratteremo il caso più speciale di pareti semplicemente rettilinee.

Prima di passare alle applicazioni accennate notiamo che la f data dalla (18) dipende, oltre che dalla variabile Z , dai parametri Z_1 , Z_2 e dal rapporto $\frac{K}{K'}$. Effettivamente nella (18) entra la funzione seno amplitudine, la quale dipende, oltre che dalla variabile Z , dal modulo k . Le tavole delle funzioni ellittiche permettono di valutare ciascuna delle grandezze k , K , K' ,

$\frac{K}{K'}$, quando sia nota una di esse. Per questo possiamo considerare come parametro nella f il rapporto $\frac{K}{K'}$ in luogo di k e preferiamo tale rapporto in quanto che la funzione t dipende, per quanto si è detto, da K e K' per mezzo del loro rapporto.

PARTE SECONDA.

Applicazioni.

§ 19. PARETI POLIGONALI. INTEGRALE GENERALE.

Dividiamo il lato reale di R in un numero finito di parti coi punti di ascissa X eguale a (fig. 10)

$$\begin{aligned} a'_1, a'_2, \dots, a'_{r'}, & \quad \text{nel tratto } (-K, Z_1), & \quad (\text{parete } \mu'); \\ a_r, a_{r-1}, \dots, a_1, & \quad \text{nel tratto } (Z_1, K), & \quad (\text{parete } \mu), \end{aligned}$$

e supponiamo che la funzione Ψ assuma sugli intervalli così determinati su questo lato:

$$\begin{aligned} & (-K, a'_1), (a'_1, a'_2) \dots (a'_{r'-1}, a'_{r'}), (a'_{r'}, X_1); \\ & (X_1, a_r), (a_r, a_{r-1}) \dots (a_2, a_1), (a_1, K) \end{aligned}$$

rispettivamente i valori costanti

$$\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{r'}, \alpha'_{r'+1}; \quad \alpha_{r+1}, \alpha_r, \dots, \alpha_2, \alpha_1.$$

Analogamente segniamo sul lato $Y = K'$ di R (fig. 10) i punti di ascissa X eguale a

$$\begin{aligned} b'_1, b'_2, \dots, b'_{s'}, & \quad \text{nel tratto } (-K + iK', Z_2), & \quad (\text{parete } \nu'); \\ b_1, b_2, \dots, b_s, & \quad \text{nel tratto } (Z_2, K + iK'), & \quad (\text{parete } \nu). \end{aligned}$$

e la funzione Φ negli intervalli così determinati su questo lato :

$$\begin{aligned} &(-K, b'_1), (b'_1, b'_2) \dots (b'_{s'-1}, b'_s), (b'_s, X_2); \\ &(X_2, b_s), (b_s, b_{s-1}) \dots (b_2, b_1), (b_1, K) \end{aligned}$$

assuma rispettivamente i valori costanti

$$\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_s, \beta'_{s+1}; \quad \beta_{s+1}, \beta_s, \dots, \beta_2, \beta_1.$$

Si riconosce facilmente che il rettangolo R rappresenta, in tali ipotesi, un campo del moto le cui pareti rigide sono poligonali. Consideriamo infatti uno dei generici intervalli in cui è stato diviso uno dei lati rappresentanti queste pareti; ad es. l'intervallo

$$(a_h, a_{h-1}), \quad 1 \leq h \leq r.$$

Agli estremi a_h, a_{h-1} corrispondono sulla parete rigida μ due determinati punti O_h, O_{h-1} ed il segmento di parete μ da essi compreso ha per immagine in R l'intervallo considerato. Su questo intervallo abbiamo per ipotesi $\Phi = \alpha_h$. Ricordiamo che la Ψ dà il valore dell'angolo che la tangente in un punto delle pareti rigide μ e μ' fa con l'asse delle x , contato positivamente nel senso $x \rightarrow y$, negativamente nel senso opposto, tra $-\pi$ e π . Ne segue che sul segmento O_h, O_{h-1} di μ tale angolo è costante ed il segmento O_h, O_{h-1} è quindi rettilineo. Analogamente si dica per gli altri intervalli.

Siano

$$\begin{aligned} &O_1, O_2, \dots, O_r; \\ &O'_1, O'_2, \dots, O'_r. \end{aligned}$$

i vertici delle poligonali, rispettivamente μ e μ' , corrispondenti ai punti

$$\begin{aligned} &a_1, a_2, \dots, a_r, \\ &a'_1, a'_2, \dots, a'_r. \end{aligned}$$

del lato reale di R (fig. 10). Siano ancora

$$\begin{aligned} &Q_1, Q_2, \dots, Q_s; \\ &Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_s. \end{aligned}$$

i vertici, rispettivamente di ν e ν' , corrispondenti ai punti del lato $Y = K'$ di R

aventi le ascisse

$$b_1, b_2, \dots, b_s;$$

$$b'_1, b'_2, \dots, b'_s.$$

Ricordiamo che le pareti all'infinito a monte ed a valle sono parallele e che l'asse delle x è parallelo alle pareti all'infinito a valle; ciò importa necessariamente

$$\alpha'_{r'+1} = \alpha_{r+1}, \quad \beta_{s+1} = \beta'_{s'+1} = 0. \tag{49}$$

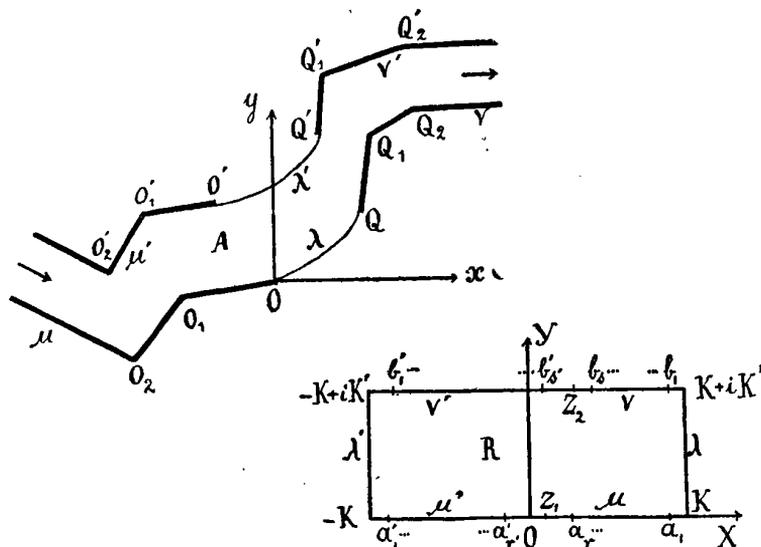


Fig. 10.

Consideriamo ora l'angolo che un lato delle pareti forma col suo precedente, rispetto al senso del moto, il verso positivo dei lati coincidendo con quello delle tangenti. Contiamo questo angolo positivamente o negativamente a seconda che il secondo lato considerato succede al primo nel senso $x \rightarrow y$ o nel senso opposto, tra $-\pi$ e $+\pi$. In base a queste convenzioni l'angolo γ_h che un generico lato $O_{h+1} O_h$ di μ fa col lato $O_h O_{h-1}$ è dato da

$$\gamma_h = \alpha_{h+1} - \alpha_h, \quad h = 1, 2, \dots, r, \tag{50}$$

il suo vertice essendo nel punto O_h . Analogamente le pareti che si incontrano nel punto O'_h di μ' formano l'angolo

$$\gamma'_{h'} = \alpha'_{h'+1} - \alpha'_{h'}, \quad h' = 1, 2, \dots, r'. \tag{50'}$$

Passando alle pareti v e v' , sulle quali gli indici attribuiti alle lettere dei vertici crescono nel senso del moto, mentre l'opposto accade su μ e μ' , abbiamo che gli angoli dei lati di v e v' , che si incontrano rispettivamente nei vertici Q_k e Q'_k , sono

$$\left. \begin{aligned} \delta_k &= \beta_k - \beta_{k+1}, & k &= 1, 2, \dots, s; \\ \delta'_{k'} &= \beta'_{k'} - \beta'_{k'+1}, & k' &= 1, 2, \dots, s'. \end{aligned} \right\} \quad (50'')$$

Per le (49) si ha in particolare

$$\delta_s = \beta_s, \quad \delta'_{s'} = \beta_{s'}. \quad (50''')$$

Ciò premesso, esprimiamo per il caso speciale considerato l'integrale generale (40):

$$\begin{aligned} t(Z) &= \frac{i \tau'}{2K} \left(1 - \frac{2\eta K'}{\pi} \right) (K - Z) + \\ &\quad + \frac{i}{\pi} \int_{-K}^K \Phi(\xi) \left[\zeta_s (\xi - Z) + \zeta_s (2K - \xi - Z) \right] d\xi - \\ &\quad - \frac{i}{\pi} \int_{-K}^K \Psi(\xi) \left[\zeta (\xi - Z) - \zeta (2K - \xi - Z) \right] d\xi. \end{aligned}$$

In questa per la (39) e per le ipotesi fatte abbiamo innanzi tutto

$$\begin{aligned} \tau' &= \frac{1}{K'} \left[\beta'_1 (K + b'_1) + \beta'_2 (b'_2 - b'_1) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \beta'_{s'} (b'_{s'} - b'_{s'-1}) + \beta_s (b_{s-1} - b_s) + \dots + \beta_1 (K - b_1) - \right. \\ &\quad \left. - \alpha'_1 (a'_1 + K) - \alpha'_2 (a'_2 - a'_1) - \dots - \right. \\ &\quad \left. - \alpha'_{r'} (a'_{r'} - a'_{r'-1}) - \alpha_r (a_{r-1} - a_r) - \dots - \alpha_1 (K - a_1) \right], \end{aligned}$$

la quale per le (50), (50'), (50'') e (50''') si può scrivere anche

$$\tau' = \frac{1}{K'} \left\{ K (\beta'_1 + \beta_1 - \alpha_1 - \alpha'_1) - \Sigma (a_n \gamma_n - a'_{n'} \gamma_{n'} + b_n \delta_n - b'_{n'} \delta'_{n'}) \right\}, \quad (51)$$

in cui, e lo diciamo una volta per sempre,

$$\begin{aligned} h &= 1, 2 \dots r, & h' &= 1, 2 \dots r'; \\ k &= 1, 2 \dots s, & k' &= 1, 2 \dots s'. \end{aligned}$$

Il primo integrale che compare nel secondo membro di $t(Z)$ (e che indi-

cheremo con I'), tenuto conto del comportamento delle Φ e Ψ sui lati di R e che in generale si ha

$$\zeta u du = d \log \sigma u,$$

$$\zeta_3 u du = d \log \sigma_3 u,$$

si può scrivere

$$I' = 2\eta(K-Z)\beta'_1 - \sum \delta_k \log \frac{\sigma_3(b_k - Z)}{\sigma_3(2K - b_k - Z)} + \sum \delta'_{k'} \log \frac{\sigma_3(b'_{k'} - Z)}{\sigma_3(2K - b'_{k'} - Z)}.$$

Per il 2.° integrale del 2.° membro di $t(Z)$, e che indicheremo con I'' , si perviene alla seguente espressione:

$$I'' = \left\{ 2\eta(K-Z) + i\pi \left\{ \alpha'_1 + \sum \gamma_h \log \frac{\sigma(a_h - Z)}{\sigma(2K - a_h - Z)} - \sum \gamma'_{h'} \log \frac{\sigma(a'_{h'} - Z)}{\sigma(2K - a'_{h'} - Z)} \right. \right.$$

Dopo ciò l'integrale generale, nel caso di pareti rigide poligonali, si scrive:

$$t(Z) = \alpha'_1 + \frac{i}{\pi} \left\{ \frac{\tau'}{2K} (\pi - 2\eta K') + 2\eta(\beta'_1 - \alpha'_1) \left\{ (K-Z) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{i}{\pi} \sum \left\{ \gamma_h \log \frac{\sigma(a_h - Z)}{\sigma(2K - a_h - Z)} - \gamma'_{h'} \log \frac{\sigma(a'_{h'} - Z)}{\sigma(2K - a'_{h'} - Z)} + \right. \right. \right. \quad (52) \\ \left. \left. + \delta_k \log \frac{\sigma_3(b_k - Z)}{\sigma_3(2K - b_k - Z)} - \delta'_{k'} \log \frac{\sigma_3(b'_{k'} - Z)}{\sigma_3(2K - b'_{k'} - Z)} \right\} \right.$$

nella quale τ' è data dalla (51).

Poichè le funzioni σ del 2.° membro di (52) sono sempre finite in R e si annullano solo dove il loro argomento è nullo [HALPHEN, p. 170] e poichè ancora le σ_3 sono pure finite in R annullandosi solo dove l'argomento è $-i\omega' = -iK'$ [HALPHEN, p. 187], appare chiaro dalla (52), tenuto presente il significato delle γ e delle δ , che il comportamento della $t(Z)$ nei punti angolosi è quello già previsto nel § 15.

Quanto ai logaritmi che compaiono nella (52), si devono scegliere le determinazioni per cui si ha

$$\log \frac{\sigma(a_h - Z)}{\sigma(2K - a_h - Z)} = \log \frac{\sigma(a'_{h'} - Z)}{\sigma(2K - a'_{h'} - Z)} = -i\pi \quad \text{per } Z = K,$$

$$\log \frac{\sigma_3(b_k - Z)}{\sigma_3(2K - b_k - Z)} = \log \frac{\sigma_3(b'_{k'} - Z)}{\sigma_3(2K - b'_{k'} - Z)} = 0 \quad \text{per } Z = K,$$

come è facile constatare tenendo conto delle condizioni ai limiti per la $t(Z)$.

§ 20. PARETI RETTILINEE. INTEGRALE GENERALE.

Supponiamo che le pareti rigide sia a monte che a valle siano rettilinee e parallele, e sia α l'angolo che le prime formano colle seconde (fig. 11).

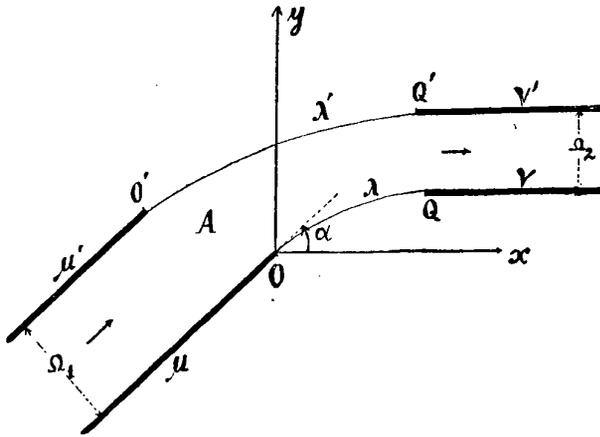


Fig. 11.

Siano Ω_1 ed Ω_2 le loro distanze e quindi, poichè π è la portata della vena in moto,

$$V_1 = \frac{\pi}{\Omega_1}, \quad V_2 = \frac{\pi}{\Omega_2} \quad (53)$$

sono le velocità assintotiche a monte ed a valle. L'angolo α , per le convenzioni fatte, è compreso tra $-\pi$ e π . Ma evidentemente possiamo limitarci a considerare α compreso tra 0 e π solamente. Infatti se fosse $-\pi \leq \alpha < 0$,

basterebbe il ribaltamento del piano del moto e lo scambio quindi della sponda destra del canale con la sponda sinistra per avere $0 < \alpha \leq \pi$. D'ora in avanti quindi avremo

$$0 \leq \alpha \leq \pi,$$

senza togliere niente con ciò alla generalità della questione.

È superfluo ricordare che l'asse Ox , parallelo alla velocità all' ∞ a valle, risulta nel nostro caso parallelo alle pareti a valle stesse.

Nel nostro caso è, evidentemente,

$$a_r = K, \quad a'_{r'} = -K;$$

$$\alpha_{r+1} = \alpha'_{r'+1} - \alpha,$$

e sono nulle le rimanenti a ed a' , α ed α' nonchè tutte le β e β' , per cui sono pure nulli tutti gli angoli γ , γ' , δ e δ' eccettuati

$$\gamma_r = \gamma'_{r'} = \alpha.$$

Tenuto conto di ciò la (51) diviene

$$\tau' = -\frac{2K}{K'} \alpha; \quad (54)$$

la (52) poi, anche per la (54), ci dà l'integrale generale del moto sotto la forma

$$t(Z) = \alpha - i \frac{\alpha}{K'} (K - Z). \quad (55)$$

Scindendo il reale dall'immaginario si ottiene

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \frac{\alpha}{K'} (K' - Y), \\ \tau &= -\frac{\alpha}{K'} (K - X). \end{aligned} \right\} \quad (55')$$

Possiamo constatare facilmente che la $t(Z)$ soddisfa di fatto al problema. Teniamo presente come è rappresentato il contorno del campo del moto su quello di R (fig. 8). Sulle pareti rigide μ' e μ abbiamo $Y = K'$ e quindi per la prima di (55') vi è $\vartheta = 0$; su ν e ν' abbiamo $Y = 0$ e corrispondentemente $\vartheta = \alpha$, come effettivamente è richiesto. Anche τ soddisfa alle condizioni imposte, le (20); infatti su λ dove $X = K$ risulta $\tau = 0$ e su λ' dove $X = -K$ si ha $\tau = -\frac{2\alpha K}{K'}$, eguale cioè a τ' per la (54).

§ 21. VELOCITÀ.

Dalle (55') si deducono le seguenti espressioni per le componenti della velocità:

$$\left. \begin{aligned} u &= e^{-\frac{\alpha}{K'}(K-X)} \cos \alpha \left(1 - \frac{Y}{K'}\right), \\ v &= e^{-\frac{\alpha}{K'}(K-X)} \sin \alpha \left(1 - \frac{Y}{K'}\right). \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

I valori di X ed Y sono finiti e continui in tutto R . Quindi la velocità è dovunque finita continua in valore e direzione e sempre diversa da zero.

Il valore della velocità è

$$V = e^{-\frac{\alpha}{K'}(K-X)}; \quad (56')$$

in particolare su λ' abbiamo

$$V_{\lambda'} = e^{-\frac{2K}{K'}\alpha}, \quad (57)$$

come del resto segue senz'altro dalla (50).

Come si vede dalla (56') il valore della velocità dipende da X , ma non da Y . Poichè in R la X varia tra il minimo $-K$ ed il massimo K , anche V varia corrispondentemente tra il minimo $e^{-\frac{2K}{K'}\alpha} = V_{\lambda'}$ per $X = -K$, ed il massimo $V = 1$ per $X = K$. D'altra parte si ha $X = -K$ su λ' , $X = K$ su λ soltanto. Ne concludiamo: *Su λ la velocità assume il valore massimo, su λ' essa assume il valore minimo.*

All'infinito a monte ed a valle, cui corrisponde rispettivamente

$$Z = Z_1 = X_1, \quad Z = Z_2 = X_2 + iK',$$

la velocità assume i valori

$$V_1 = e^{-\frac{\alpha}{K'}(K-X_1)},$$

$$V_2 = e^{-\frac{\alpha}{K'}(K-X_2)}.$$

Una volta prefissato il canale, e quindi date le velocità assintotiche, quest'ultime relazioni ci individuano X_1 ed X_2 ; ci individuano quindi i punti di R che corrispondono ai punti all' ∞ del canale. Otteniamo

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= K + \frac{K'}{\alpha} \log V_1, \\ X_2 &= K + \frac{K'}{\alpha} \log V_2. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Poichè deve essere necessariamente

$$X_1 \leq K, \quad X_2 \leq K,$$

ne deduciamo le relazioni

$$-\frac{2\alpha K}{K'} \leq \log V_1 \leq 0,$$

$$-\frac{2\alpha K}{K'} \leq \log V_2 \leq 0,$$

e, passando dai logaritmi ai numeri, per la (57)

$$\begin{aligned} V_{\lambda'} &\leq V_1 \leq 1, \\ V_{\lambda'} &\leq V_2 \leq 1. \end{aligned}$$

Cioè le velocità assintotiche devono essere comprese tra 1 e $V_{\lambda'}$, quello che del resto segue senz'altro pel fatto che 1 e $V_{\lambda'}$ sono il massimo ed il minimo di V . Se introduciamo le larghezze Ω_1 ed Ω_2 , per le (53), ricaviamo le disuguaglianze

$$\begin{aligned} \pi &\leq \Omega_1 \leq \frac{\pi}{V_{\lambda'}}, \\ \pi &\leq \Omega_2 \leq \frac{\pi}{V_{\lambda'}}. \end{aligned}$$

Quindi, supposto di prefissare le aperture della vena a monte ed a valle, queste non devono essere inferiori a π ; una volta prefissate queste, $V_{\lambda'}$ non può superare il più piccolo dei rapporti $\frac{\pi}{\Omega_1}$, $\frac{\pi}{\Omega_2}$.

Con le (58) due delle tre costanti indeterminate del problema restano definite; rimane la terza e cioè il rapporto $\frac{K}{K'}$. Quindi si può soddisfare ancora ad una condizione, purchè compatibile col problema.

Ad es. si potrà prefissare sulle pareti uno dei quattro punti O, Q, O', Q' ; oppure si può dare la velocità $V_{\lambda'}$, purchè non maggiore di V_1 e V_2 .

In questo caso ciò è lo stesso che dare τ' . Si ha allora dalla (50)

$$\frac{K}{K'} = -\frac{\tau'}{2\alpha}.$$

Nelle relazioni precedenti i segni $=$ possono comparire quando sia $|X_1| = K$ o $|X_2| = K$. In tali casi una delle pareti rigide almeno (Vedi fig. 8) viene a scomparire. Noi dobbiamo escludere tali casi, avendo ammesso che le interruzioni delle pareti siano finite.

Si osservi che per $\alpha = 0$ si avrebbe $V = 1$ e $\mathcal{S} = 0$ in tutti i punti della vena. Per l'ultimo gruppo di relazioni si dovrebbe avere allora $\Omega_1 = \Omega_2 = \pi$; e poichè tutte le linee di flusso sono rette anche le pareti μ e ν , e così μ' e ν' , dovranno giacere sopra una stessa retta.

È evidente che tale caso non presenta alcun interesse. Lo escluderemo senz'altro; basterà in definitiva limitarci a

$$0 < \alpha \leq \pi,$$

§ 22. PELI LIBERI.

Dalla 1.^a delle (55')

$$\mathfrak{S} = \alpha - \frac{\alpha}{K'} Y, \quad (59)$$

risulta che \mathfrak{S} (una volta fissato il canale) dipende dalla sola Y , riferendoci al rettangolo R . Quivi la Y varia da O a K' ; corrispondentemente \mathfrak{S} varia tra α e O . In particolare sui peli liberi λ e λ' , percorsi nel senso del moto, la Y cresce da O a K' e quindi \mathfrak{S} *decrece* da α a O .

Quindi *i peli liberi non hanno flessi*. Ed anche ne segue che il punto Q (ed a maggior ragione il punto Q') deve essere al di sopra dell'asse Ox .

In altre parole, per la possibilità del problema è necessario che il tratto di canale, a valle delle interruzioni delle pareti, sia sopra all'asse Ox . Inoltre i peli liberi λ e λ' rivolgeranno sempre rispettivamente la convessità e la concavità al campo del moto. In seguito diremo talvolta *pelo interno* il pelo libero λ ed *esterno* il pelo libero λ' . Tale locuzione, che ha un senso qualora si consideri la posizione dei peli liberi rispetto alla porzione di piano z che si trova a destra di una qualsiasi linea di flusso interna della vena, riesce del resto espressiva (Fig. 11).

Dalle (59) abbiamo

$$d\mathfrak{S} = -\frac{\alpha}{K'} dY;$$

quindi, procedendo nel senso del moto, lungo i peli liberi abbiamo

$$|d\mathfrak{S}| = \frac{\alpha}{K'} dY.$$

Per questa e per le (48), i raggi di curvatura assoluta di λ e λ' ,

$$\rho = \frac{d\varphi}{|d\mathfrak{S}|} \quad \text{su } \lambda; \quad \rho' = e^{-\tau'} \frac{d\varphi}{|d\mathfrak{S}'|}, \quad \text{su } \lambda'$$

si scrivono

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{K' (s n Z_1 - s n Z_2) \sqrt{s n^2 (K + i Y) - 1} \sqrt{1 - k^2 s n^2 (K + i Y)}}{\alpha \left(s n (K + i Y) - s n Z_1 \right) \left(s n (K + i Y) - s n Z_2 \right)}, \\ \rho' &= e^{-\tau'} \frac{K' (s n Z_2 - s n Z_1) \sqrt{s n^2 (-K + i Y) - 1} \sqrt{1 - k^2 s n^2 (-K + i Y)}}{\alpha \left(s n (-K + i Y) - s n Z_1 \right) \left(s n (-K + i Y) - s n Z_2 \right)}. \end{aligned} \right\} (60)$$

Poichè sui peli liberi snZ è sempre diverso da snZ_1 e snZ_2 , ne concludiamo che i raggi di curvatura sono dovunque finiti; in particolare essi si annullano negli estremi di λ e λ' : $O, Q; O', Q'$ dove snZ assume i valori $1, \frac{1}{k}; -1, -\frac{1}{k}$. E poichè, tendendo a questi punti lungo i peli stessi, ϑ prende in essi un valore determinato e finito, possiamo asserire che λ e λ' si comportano negli estremi come rami di curve aventi in questi punti una *cuspidè*. Non dimentichiamo però che in tali punti queste curve si raccordano perfettamente con le pareti rigide contigue.

Riprendendo le (46) e (46') abbiamo, con le convenzioni fatte al § 17, gli archi s ed s' sui due peli liberi

$$\left. \begin{aligned} s &= \log \frac{1 - snZ_2}{1 - snZ_1} \cdot \frac{sn(K + iY) - snZ_1}{sn(K + iY) - snZ_2}, \\ s' &= e^{-r'} \log \frac{1 + snZ_2}{1 + snZ_1} \cdot \frac{sn(-K + iY) - snZ_1}{sn(-K + iY) - snZ_2}. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Eliminando la Y tra ognuna di queste e la corrispondente delle (60) si ottengono le equazioni intrinseche dei due peli liberi.

Un altro tipo di equazioni, formalmente più semplice, si ottiene dalle (61) esprimendo in queste la Y in funzione di ϑ per mezzo della (59). Da questa abbiamo

$$Y = K' - \frac{K'}{\alpha} \vartheta,$$

per la quale

$$\pm K + iY = \pm K + iK' - i \frac{K'}{\alpha} \vartheta.$$

Ne segue [HALPHEN, p. 46 e 47]

$$sn(\pm K + iY) = \pm \frac{1}{k} dn\left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k'\right), \quad (62)$$

in cui $dn\left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k'\right)$ è la funzione ellittica *delta amplitudine* dell'argomento $\frac{K'}{\alpha} \vartheta$, relativa al modulo k' , complementare di k ; $k' = \sqrt{1 - k^2}$. Le (61) per-

tanto si possono scrivere

$$\left. \begin{aligned} s &= \log \frac{1 - s n Z_2}{1 - s n Z_1} \cdot \frac{d n \left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k' \right) - k s n Z_1}{d n \left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k' \right) - k s n Z_2}, \\ s' &= e^{-\tau} \log \frac{1 + s n Z_2}{1 + s n Z_1} \cdot \frac{d n \left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k' \right) + k s n Z_1}{d n \left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k' \right) + k s n Z_2}. \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq \vartheta \leq \alpha. \quad (61')$$

le quali da sole bastano ad individuare i due peli liberi.

Si possono dare anche le coordinate cartesiane dei peli liberi in funzione dell'angolo ϑ . Dalle (44) si ricava per le coordinate dei punti di λ

$$x = \int \cos \vartheta d \varphi, \quad y = \int \sin \vartheta d \varphi,$$

dove l'integrale si intende esteso su λ a partire da 0 al generico punto x, y .

Per le (48), (59) e (60) queste equazioni si scrivono

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{k k'^2 K'}{\alpha} (s n Z_1 - s n Z_2) \int_{\vartheta}^{\alpha} \frac{c n \left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k' \right) s n \left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k' \right) \cos \vartheta d \vartheta}{\left(d n \left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k' \right) - k s n Z_1 \right) \left(d n \left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k' \right) - k s n Z_2 \right)}, \\ y &= \frac{k k'^2 K'}{\alpha} (s n Z_1 - s n Z_2) \int_{\vartheta}^{\alpha} \frac{c n \left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k' \right) s n \left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k' \right) \sin \vartheta d \vartheta}{\left(d n \left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k' \right) - k s n Z_1 \right) \left(d n \left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k' \right) - k s n Z_2 \right)}, \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

ove si tenga presente [HALPHEN, p. 5] che su λ e cioè per $0 \leq \vartheta \leq \alpha$

$$\sqrt{d n^2 \left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k' \right) - k^2} = k' c n \left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k' \right),$$

$$\sqrt{1 - d n^2 \left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k' \right)} = k' s n \left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k' \right).$$

Le analoghe equazioni di λ' discendono dalle (44'); per le (48), (59), (60), tenuto presente che le ultime relazioni tra le funzioni ellittiche $d n, c n$ ed

sn valgono identicamente anche su λ' , si ottiene

$$\left. \begin{aligned} x' &= e^{-\tau'} \frac{k k'^2 K'}{\alpha} (sn Z_2 - sn Z_1) \int_{\wp}^{\alpha} \frac{cn\left(\frac{K'}{\alpha} \wp, k'\right) sn\left(\frac{K'}{\alpha} \wp, k'\right) \cos \wp d\wp}{\left(dn\left(\frac{K'}{\alpha} \wp, k'\right) + k sn Z_1\right) \left(dn\left(\frac{K'}{\alpha} \wp, k'\right) + k sn Z_2\right)}, \\ y' &= e^{-\tau'} \frac{k k'^2 K'}{\alpha} (sn Z_2 - sn Z_1) \int_{\wp}^{\alpha} \frac{cn\left(\frac{K'}{\alpha} \wp, k'\right) sn\left(\frac{K'}{\alpha} \wp, k'\right) \operatorname{sen} \wp d\wp}{\left(dn\left(\frac{K'}{\alpha} \wp, k'\right) + k sn Z_1\right) \left(dn\left(\frac{K'}{\alpha} \wp, k'\right) + k sn Z_2\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (63')$$

§ 23. CASO DELLA SIMMETRIA.

Supponiamo che il canale abbia la stessa larghezza Ω sia a monte che a valle, supponiamo cioè

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega.$$

Saranno perciò eguali tra loro le velocità assintotiche. Diciamo c il loro valore comune:

$$V_1 = V_2 = c.$$

Inoltre ammettiamo

$$X_1 = X_2 = 0, \quad (64)$$

ammettiamo cioè che i punti del contorno del rettangolo R , corrispondenti ai punti all' ∞ della vena, siano sull'asse immaginario. Vedremo in seguito che cosa importi questa ipotesi per l'effettivo campo del moto.

Dalle (58), che per le posizioni fatte vengono a coincidere con la

$$K + \frac{K'}{\alpha} \log c = 0,$$

ricaviamo il rapporto dei periodi

$$\frac{K}{K'} = -\frac{1}{\alpha} \log c. \quad (65)$$

Le (64) e (65) determinano tutti i parametri del problema. Introducendo nella (65) la larghezza del canale mediante la relazione

$$c = \frac{\pi}{\Omega}, \quad (66)$$

possiamo scrivere

$$\frac{K}{K'} = \frac{1}{\alpha} \log \frac{\Omega}{\pi}.$$

Si osservi che per quanto è stato detto nel paragrafo precedente si deve avere

$$\pi < \Omega < \frac{\pi}{c^2}.$$

Per la (65) dalla (54) segue

$$\tau' = 2 \log c,$$

donde, poichè τ' è il logaritmo del valore della velocità sul pelo esterno,

$$V_{\lambda'} = c^2:$$

la velocità sul pelo libero esterno è eguale al quadrato della velocità all'infinito.

Quest'ultima relazione equivale alla proporzione

$$1 : c = c : V_{\lambda'},$$

cioè, poichè 1 è il valore della velocità sul pelo interno: *la velocità all'infinito è media proporzionale tra le velocità sui peli liberi*, e ciò vale naturalmente qualunque sia il sistema di unità di misura prescelto.

Nel caso in cui si possono trascurare le forze di massa (ad es. in un canale in cui il moto avviene sensibilmente in piani orizzontali) dalla (4), per le convenzioni fatte nel § 3, abbiamo

$$p = -\frac{1}{2} V^2 + \text{cost.}$$

Diciamo p_{λ} e $p_{\lambda'}$ le due pressioni sui peli liberi λ e λ' , le quali sono manifestamente costanti. Si deduce facilmente l'eccesso di pressione sul pelo esterno rispetto a quella esercitata sul pelo interno:

$$p_{\lambda'} - p_{\lambda} = \frac{1}{2} (1 - c^4),$$

od anche, per la (66),

$$p_{\lambda'} - p_{\lambda} = \frac{\Omega^4 - \pi^4}{2\Omega^4} \quad (17).$$

(17) La stessa relazione vale del resto anche quando intervengono forze esterne, purchè, come si sa, derivanti da un potenziale, qualora i due punti in cui si considerano p_{λ} e $p_{\lambda'}$ appartengano ad una stessa linea equipotenziale.

Per le (64) abbiamo

$$s n Z_1 = s n 0 = 0; \quad s n Z_2 = s n i K' = \infty.$$

Per queste dalle (60) otteniamo i raggi di curvatura

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{K'}{\alpha} \sqrt{(1 - s n^{-2} (K + i Y)) (1 - k^2 s n^2 (K + i Y))}, \quad \text{su } \lambda; \\ \rho' &= \frac{1}{c^2} \cdot \frac{K'}{\alpha} \sqrt{(1 - s n^{-2} (-K + i Y)) (1 - k^2 s n^2 (-K + i Y))}, \quad \text{su } \lambda'. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Per gli archi abbiamo invece dalle (61)

$$\left. \begin{aligned} s &= \log s n (K + i Y), \quad \text{su } \lambda, \\ s' &= \frac{1}{c^2} \log [-s n (-K + i Y)], \quad \text{su } \lambda', \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

avendosi

$$\begin{aligned} 1 &\leq s n (K + i Y) \leq \frac{1}{k}, \quad \text{su } \lambda, \\ -\frac{1}{k} &\leq s n (-K + i Y) \leq -1, \quad \text{su } \lambda'. \end{aligned}$$

Eliminiamo $s n (K + i Y)$ tra ρ ed s , $s n (-K + i Y)$ tra ρ' ed s' . Abbiamo in tal modo le *equazioni intrinseche* dei peli liberi

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{K'}{\alpha} \sqrt{(1 - e^{-2s}) (1 - k^2 e^{2s})}, \\ \rho' &= \frac{1}{c^2} \cdot \frac{K'}{\alpha} \sqrt{(1 - e^{-2c^2 s'}) (1 - k^2 e^{2c^2 s'})}. \end{aligned} \right\} \quad (67')$$

Abbiamo pure le equazioni dei peli liberi in funzione dell'arco e dell'angolo \mathfrak{S} dalle (61'):

$$\left. \begin{aligned} s &= \log \frac{d n \left(\frac{K'}{\alpha} \mathfrak{S}, k \right)}{k}, \\ s' &= \frac{1}{c^2} \log \frac{d n \left(\frac{K'}{\alpha} \mathfrak{S}, k \right)}{k}. \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq \mathfrak{S} \leq \alpha; \quad (68')$$

Ponendo in queste $\mathfrak{S} = \dot{O}$ si ottengono le lunghezze dei peli liberi

$$\left. \begin{aligned} \bar{\lambda} &= \log \frac{1}{k}, \\ \bar{\lambda}' &= \frac{1}{c^2} \log \frac{1}{k}. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Perciò se nelle (67) si assumono s ed s' come variabili indipendenti si deve porre

$$\begin{aligned} 0 &\leq s \leq \log \frac{1}{k}, \\ 0 &\leq s' \leq \frac{1}{c^2} \log \frac{1}{k}, \end{aligned}$$

tra i quali limiti ρ e ρ' sono manifestamente reali.

Le equazioni intrinseche (67) hanno una forma abbastanza semplice. Non mi consta però che siano state studiate curve di questo tipo. Possiamo dimostrare però facilmente alcune proprietà fondamentali. Ricordiamo che queste curve non hanno flessi e negli estremi si comportano come rami di curve in una cuspidè. Ciò è stato dimostrato per il caso di pareti rettilinee qualsivogliano e risulta del resto manifestamente dalle (67).

Siano P e P' due generici punti di λ e λ' (Fig. 12), corrispondenti ad uno stesso valore di Y , le cui immagini quindi nel rettangolo R giacciono su una parallela all'asse reale. In P' si ha

$$s n Z = s n (-K + i Y) = -s n (K + i Y);$$

perciò $s n Z$ assume in P' valore eguale ma di segno opposto a quello assunto in P .

Confrontando tra loro le (67) e così le (68), riferendoci per ρ ed s al punto P , per ρ' ed s' al punto P' , ne deduciamo

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{s}{s'} = c^2.$$

Ora poichè c^2 è la velocità su λ' e quindi in P' , 1 è la velocità su λ e quindi in P , ne segue che tanto *i raggi di curvatura quanto gli archi nei punti P di λ e P' di λ' corrispondenti ad uno stesso valore di Y stanno nel rapporto inverso alle corrispondenti velocità.*

Le due curve λ e λ' pertanto sono simili e c^2 è il *rapporto di similitudine*. Per la (59) in P e P' inoltre \mathfrak{S} assume lo stesso valore; perciò le tan-

genti in P e P' ai due peli liberi sono *parallele*. I punti P e P' quindi dovranno essere allineati a due a due con uno stesso punto G del piano del moto, cioè le due curve sono *omotetiche* rispetto al punto G (*centro di omotetia*) ⁽¹⁸⁾.

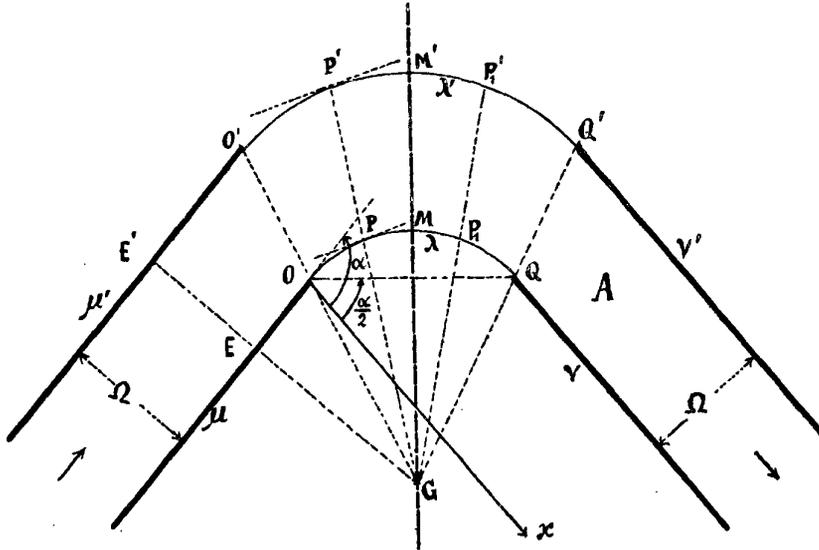


Fig. 12.

Sia ora P_1 il punto di λ in cui l'angolo della tangente a λ con l'asse delle x è

$$\vartheta_1 = \alpha - \vartheta,$$

ϑ essendo l'angolo della tangente in P . In P_1 $sn Z$ assume il valore, per la (62),

$$sn Z_1 = \frac{1}{k} dn \left(K' - \frac{K'}{\alpha} \vartheta, k' \right) = \frac{1}{dn \left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k' \right)},$$

[HALPHEN, p. 45 e 46], mentre in P si ha

$$sn Z = \frac{1}{k} dn \left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k' \right).$$

È chiaro quindi che si passa da P a P_1 scambiando $sn Z$ con $\frac{1}{k sn Z}$.

⁽¹⁸⁾ Alla stessa conclusione si può giungere confrontando le affisse z e z' dei due punti P e P' , che si possono ricavare dalla relazione $dz = e^{it} df$.

Ma per tale scambio il secondo membro della prima di (67) resta invariato, perciò i raggi di curvatura in P e P' sono eguali. Con lo stesso scambio si ottiene dalla prima delle (68) il valore s_1 , dell'arco in P_1 :

$$s_1 = \log \frac{1}{k} - \log s n Z,$$

da cui, essendo $s = \log s n Z$ l'arco in P , per la prima delle (69)

$$s + s_1 = \bar{\lambda}.$$

Ciò significa che contando su λ a partire dal punto Q , nel senso inverso a quello del moto quindi, un arco eguale ad s si giunge nel punto P_1 avente la stessa curvatura che in P e la tangente in P_1 fa con la parete ν lo stesso angolo che la tangente in P fa con la parete μ . In particolare per $\vartheta = \frac{\alpha}{2}$ si ha $s_1 = \frac{\alpha}{2}$, per cui i due punti P e P_1 vengono a coincidere con uno stesso punto M . Da tutto ciò segue che la curva λ è *simmetrica* alla normale alla curva stessa passante per M in cui $\vartheta = \frac{\alpha}{2}$. Lo stesso vale per la curva λ' che avrà in virtù dell'omotetia lo stesso asse di simmetria, il quale dovrà ancora passare per il centro d'omotetia G . L'asse di simmetria GM necessariamente è anche la bisettrice dell'angolo sui cui lati giacciono le pareti μ e ν e passa pel suo vertice; lo stesso si dica per l'angolo sui cui lati giacciono le pareti μ' e ν' .

È facile ora determinare la distanza di G dalle pareti rigide, ad es. da μ . Condotta da G la perpendicolare EE' (fig. 12) alle pareti μ e ν , si ha

$$\frac{GE}{GE'} = \frac{GO}{GO'}.$$

Ma il secondo rapporto, per la similitudine di λ e λ' , è eguale a c^2 ; quindi

$$\frac{GE}{GE'} = c^2,$$

dalla quale, poichè $GE' - GE = EE' = \Omega = \frac{\pi}{c}$, si ricava facilmente la distanza richiesta di G da μ :

$$GE = \frac{\pi c}{1 - c^2}, \quad (70)$$

od anche, esprimendo c in funzione di Ω ,

$$G E = \frac{\pi^2 \Omega}{\Omega^2 - \pi^2}.$$

Prefissate le pareti si determina subito l'asse di simmetria come la retta che passa pei punti d'incontro delle rette su cui si trovano μ e ν il primo, μ' e ν' il secondo. Se α è diverso da π la (70) permette di segnare senz'altro il punto G su quest'asse; ma se $\alpha = \pi$ l'asse è la retta parallela a μ e ν e da esse equidistante di $\frac{\pi c}{1-c^2}$, ma non potremo più individuare senza ricorrere ad altri elementi il punto G su di essa. Escludiamo per ora il caso $\alpha = \pi$, che tratteremo da ultimo.

Dalle (67') si deduce facilmente che i raggi di curvatura di λ e λ' a partire dagli estremi, che sono punti cuspidali, crescono da 0 fino ad un massimo nel punto che appartiene all'asse di simmetria, il valore massimo essendo

$$\frac{K'}{\alpha} (1 - k) \quad \text{in } M, \quad \frac{1}{c^2} \frac{K'}{\alpha} (1 - k) \quad \text{in } M'.$$

Vediamo un po' più da vicino il comportamento delle curve nei loro estremi.

Dalla prima delle (67') quadrando, dopo facili operazioni si ottiene

$$\rho^2 = \frac{K'^2}{\alpha^2} (1 + k^2 - e^{-2s} - k^2 e^{2s}).$$

Consideriamo la curva λ in un intorno del punto O di primo ordine rispetto agli archi s . L'ultima relazione allora, a meno di infinitesimi d'ordine superiore al primo rispetto ad s , si scrive

$$\rho^2 = 2 \frac{K'^2}{\alpha^2} (1 - k^2) s.$$

In tale intorno di O pertanto ⁽¹⁹⁾ la curva λ si comporta come la sviluppante del cerchio, di raggio $\frac{K'^2}{\alpha^2} (1 - k^2)$, in un intorno di 1.° ordine della sua cuspidale.

(19) Cfr. CESÀRO, *Geometria intrinseca* (Napoli, 1896), p. 10.

Per la simmetria, lo stesso vale per il punto Q ; e per la similitudine di λ e λ' , quest'ultima curva si comporterà nei suoi estremi O e Q' come la sviluppante del cerchio di raggio $\frac{1}{c^4} \frac{K'^2}{\alpha^2} (1 - k^2)$ in prossimità della sua cuspidale.

Per la effettiva costruzione di queste curve è più comodo riferirci anzichè alle loro equazioni intrinseche, alle loro equazioni parametriche (63) e (63').

È evidente che in virtù della omotetia di λ e λ' basterà considerare una sola di queste linee, per fissare le idee, λ . Le sue equazioni (63), poichè ora è $sn Z_1 = 0$, $sn Z_2 = \infty$, si scrivono

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{K'}{\alpha} k'^2 \int_{\vartheta}^{\alpha} \frac{cn\left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k'\right) sn\left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k'\right)}{dn\left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k'\right)} \cos \vartheta d\vartheta, \\ y &= \frac{K'}{\alpha} k'^2 \int_{\vartheta}^{\alpha} \frac{cn\left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k'\right) sn\left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k'\right)}{dn\left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k'\right)} \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Gli integrali dei secondi membri non si sanno conseguire in termini finiti.

Svilupperemo perciò opportunamente in serie la funzione integranda.

Introduciamo per un momento la funzione ellittica di WEIERSTRASS p coi semiperiodi

$$\omega_1 = K', \quad i\omega'_1 = iK,$$

corrispondente quindi alle radici

$$e_1 = \frac{1+k^2}{3}, \quad e_2 = \frac{1-2k^2}{3}, \quad e_3 = -\frac{2-k^2}{3},$$

che soddisfano alle relazioni

$$e_1 - e_3 = 1; \quad e_2 - e_3 = 1 - k^2 = k'^2.$$

Potremo scrivere allora [HALPHEN, p. 45]

$$k'^2 \frac{cn\left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k'\right) sn\left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k'\right)}{dn\left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta, k'\right)} = \frac{(e_2 - e_3) \sqrt{p\left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta\right) - e_1}}{\sqrt{p\left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta\right) - e_2} \sqrt{p\left(\frac{K'}{\alpha} \vartheta\right) - e_3}}, \quad (72)$$

dove i radicali, che vanno presi col segno +, sono sempre reali perchè su λ è

$$p\left(\frac{K'}{\alpha}\vartheta\right) \cong p\omega_1 = e_1 > e_2 > e_3.$$

Il secondo membro è la somma della serie trigonometrica, uniformemente convergente su λ [HALPHEN, p. 432]:

$$\frac{4\pi}{K'} \sum \frac{q_1^n}{1 - q_1^{2n}} \operatorname{sen} \frac{\pi}{\alpha} n \vartheta, \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad (72')$$

ove abbiamo posto

$$q_1 = e^{-\pi \frac{\omega'_1}{\omega_1}} = e^{-\pi \frac{K}{K'}}.$$

Abbiamo già trovato $V_{2'} = e^{-\frac{2K}{K'}\alpha} = c^2$, quindi è

$$q_1 = c^\alpha. \quad (73)$$

Dopo ciò le (71) si scrivono

$$\begin{aligned} x &= \frac{4\pi}{\alpha} \sum \frac{q_1^n}{1 - q_1^{2n}} \int_{\vartheta}^{\alpha} \operatorname{sen} \frac{\pi}{\alpha} n \vartheta \cos \vartheta d\vartheta, \\ y &= \frac{4\pi}{\alpha} \sum \frac{q_1^n}{1 - q_1^{2n}} \int_{\vartheta}^{\alpha} \operatorname{sen} \frac{\pi}{\alpha} n \vartheta \operatorname{sen} \vartheta d\vartheta, \end{aligned} \quad n = 1, 3, 5, \dots,$$

Posto per brevità

$$\begin{aligned} I'_n(\vartheta) &= \frac{1}{\alpha} \int_{\vartheta}^{\alpha} \operatorname{sen} \frac{\pi}{\alpha} n \vartheta \cos \vartheta d\vartheta, \\ I''_n(\vartheta) &= \frac{1}{\alpha} \int_{\vartheta}^{\alpha} \operatorname{sen} \frac{\pi}{\alpha} n \vartheta \operatorname{sen} \vartheta d\vartheta, \end{aligned}$$

quest'ultime si possono porre sotto la forma

$$\left. \begin{aligned} x &= 4\pi \sum \frac{q_1^n}{1 - q_1^{2n}} I'_n(\vartheta), \\ y &= 4\pi \sum \frac{q_1^n}{1 - q_1^{2n}} I''_n(\vartheta), \end{aligned} \right\} \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad (74)$$

nelle quali, come si ricava dopo facili calcoli, si ha

$$\left. \begin{aligned} I'_n(\vartheta) &= \frac{1}{\pi^2 n^2 - \alpha^2} \left[\alpha \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \frac{\pi}{\alpha} n \vartheta + \right. \\ &\quad \left. + n \pi \cos \vartheta \cos \frac{\alpha}{\pi} n \vartheta + n \pi \cos \alpha \right], \\ I''_n(\vartheta) &= \frac{1}{\pi^2 n^2 - \alpha^2} \left[-\alpha \cos \vartheta \operatorname{sen} \frac{\pi}{\alpha} n \vartheta + \right. \\ &\quad \left. + n \pi \operatorname{sen} \vartheta \cos \frac{\alpha}{\pi} n \vartheta + n \pi \operatorname{sen} \alpha \right]. \end{aligned} \right\} (75)$$

Per queste e poichè $q' < 1$, le serie che compaiono nelle (74) risultano manifestamente convergenti.

Poniamo ad es. nelle (74) $\vartheta = 0$; si ottengono così le coordinate $x(Q)$, $y(Q)$ del punto Q . Poichè si ha per le (75)

$$I'_n(0) = (1 + \cos \alpha) \pi \frac{n}{\pi^2 n^2 - \alpha^2},$$

$$I''_n(0) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \pi \frac{n}{\pi^2 n^2 - \alpha^2},$$

avremo

$$x(Q) = 4 \pi^2 (1 + \cos \alpha) \sum \frac{q_1^n}{1 - q_1^{2n}} \cdot \frac{n}{\pi^2 n^2 - \alpha^2},$$

$$y(Q) = 4 \pi^2 \operatorname{sen} \alpha \sum \frac{q_1^n}{1 - q_1^{2n}} \cdot \frac{n}{\pi^2 n^2 - \alpha^2}.$$

Da queste si deduce che

$$\frac{y(Q)}{x(Q)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

vale a dire che il segmento OQ (Fig. 12) fa con l'asse Ox l'angolo $\frac{\alpha}{2}$ e che quindi OQ risulta normale all'asse di simmetria, ciò che effettivamente deve essere perchè i punti O e Q sappiamo già essere simmetrici a tale asse.

Segue ancora da ciò che la lunghezza di OQ è

$$OQ = x(Q) \cos \frac{\alpha}{2} + y(Q) \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$$

ossia, sostituendovi le espressioni trovate per $x(Q)$ ed $y(Q)$,

$$OQ = 8\pi^2 \cos \frac{\alpha}{2} \sum \frac{q_1^n}{1 - q_1^{2n}} \frac{n}{\pi^2 n^2 - \alpha^2}. \quad (76)$$

Dato quindi il canale, dati cioè α e c , sappiamo segnare sull'asse di simmetria il punto G ; la (76) ci permette inoltre di fissare gli estremi $O, Q; O', Q'$ delle pareti rigide, si potrà segnare poi per punti la curva λ per mezzo delle (74) e quindi la curva λ' omotetica di λ rispetto a G .

Dalla (73)

$$q_1 = c^{\frac{\pi}{\alpha}},$$

risulta che q_1 , per un dato valore di α cresce con c e quindi cresce quando la larghezza Ω del canale diminuisce. La (76) mostra che OQ cresce con q_1 , e quindi col decrescere di Ω ; più precisamente supponiamo di far crescere indefinitamente Ω a partire dal suo limite inferiore π . Allora q_1 decresce dal suo limite superiore verso zero ed OQ decresce pure tendendo verso zero.

Veniamo ora a considerare la curva λ nel caso $\alpha = \pi$.

Valgono ancora le equazioni parametriche (74); bisogna però rilevare che le $I'_n(\vartheta)$ e $I''_n(\vartheta)$ date dalle (75) per $\alpha = \pi$ sono tutte determinate e finite, anche nella forma, eccettuate $I'_1(\vartheta)$ ed $I''_1(\vartheta)$ che assumono la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Applicando la regola dell'HOSPITAL, o meglio calcolando direttamente i due integrali $I'_1(\vartheta)$, $I''_1(\vartheta)$ per $\alpha = \pi$, si ottiene

$$I'_1(\vartheta) = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{\alpha} \vartheta,$$

$$I''_1(\vartheta) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\vartheta}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{2} \vartheta.$$

Per $n = 3, 5, 7 \dots$ le (75) ci danno senz'altro, ponendovi $\alpha = \pi$,

$$I'_n(\vartheta) = \frac{1}{\pi(n^2 - 1)} \left[\operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} n \vartheta + n \cos \vartheta \cos n \vartheta - n \right].$$

$$I''_n(\vartheta) = \frac{1}{\pi(n^2 - 1)} \left[-\cos \vartheta \operatorname{sen} n \vartheta + n \operatorname{sen} \vartheta \cos n \vartheta \right].$$

In particolare per $\mathcal{S} = 0$ abbiamo

$$I'_1 = I'_3 = I'_5 = \dots = 0,$$

$$I''_1 = \frac{1}{2}, \quad I''_3 = I''_5 = I''_7 = \dots = 0.$$

Quindi le coordinate del punto Q sono, per $\alpha = \pi$,

$$x(Q) = 0$$

$$y(Q) = \frac{2\pi q_1}{1 - q_1^2},$$

ossia, poichè per $\alpha = \pi$ dalla (68) risulta $q_1 = c$,

$$x(Q) = 0, \quad y(Q) = \frac{2\pi c}{1 - c^2}.$$

A questo risultato si poteva giungere senz'altro tenendo conto che l'asse di simmetria è parallelo alle pareti rigide e quindi l'asse Oy' è normale a tale asse e deve passare per il punto Q (fig. 13). D'altra parte l'ordinata di Q deve essere il doppio della distanza di G dalla parete μ , ciò che effettiva-

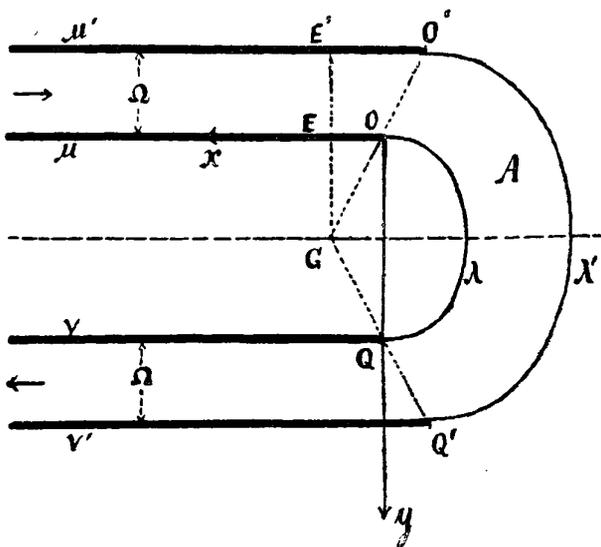


Fig. 13.

mente risulta ove si confronti la $y(Q)$ con la GE data dalla (70), la quale è valida anche per $\alpha = \pi$.

Da quanto precede segue dunque che se un canale a pareti parallele si ripiega su se stesso, volendo che nel gomito la vena scorra tra filetti liberi soddisfacenti alle condizioni di simmetria che valgono nel caso studiato, la striscia di piano interposta tra i due rami di canale deve avere una larghezza $y(Q)$ ben determinata e che dipende esclusivamente

dalla velocità c all' ∞ . Poichè c è compresa tra 0 ed 1 (questi limiti esclusi) la $y(Q)$ è compresa tra 0 ed ∞ .

Rimarchiamo, per la sua semplicità, la seguente relazione; si ha

$$y(Q) \cong \Omega,$$

a seconda che

$$c \cong \frac{1}{\sqrt{3}},$$

come facilmente si deduce dall'espressione di $y(Q)$.

Come già si disse, non basta conoscere la distanza di G da μ per individuare questo punto sull'asse di simmetria. Bisogna conoscere a questo scopo un punto almeno di λ' , corrispondente ad un determinato punto di λ .

Vediamo di determinare ad es. il punto Q' , corrispondente a Q .

Poichè abbiamo senz'altro (fig. 13)

$$\begin{aligned} y(Q') &= y(Q) + \Omega = \frac{2\pi c}{1-c^2} + \frac{\pi}{c} \\ &= \frac{\pi}{c} \frac{1+c^2}{1-c^2}, \end{aligned}$$

siamo condotti alla determinazione della sola $x(Q')$.

Dalla (42), che si può anche scrivere

$$dz = \frac{u + iv}{V^2} (d\varphi + i d\psi),$$

tenendo conto della sola parte reale, abbiamo

$$dx = \frac{1}{V^2} (u d\varphi - v d\psi).$$

Consideriamo questa relazione in un generico punto delle pareti v, v' cui corrisponde, riferendoci al rettangolo R (fig. 8), il punto $Z = X + iK'$.

D'altra parte su $v + v'$ è, per (57),

$$v = 0,$$

$$u = V = e^{-\frac{\pi}{K'}(K-X)} = c e^{\frac{\pi}{K'} X},$$

per cui

$$dx = \frac{1}{c} e^{-\frac{\pi}{K'} X} d\varphi.$$

Quanto a $d\varphi$, per essere $s n Z_1 = 0$, $s n Z_2 = \infty$, dalla (18) abbiamo

$$f = \log s n Z;$$

su $v + v'$ è [HALPHEN, p. 45]

$$s n Z = s n (X + i K') = \frac{1}{k s n X},$$

per cui $s n Z$ è negativo o positivo assieme ad X . Possiamo scrivere dunque

$$\varphi = -\log k s n X \quad \text{su } v, \quad \varphi = -\log k (-s n X) \quad \text{su } v',$$

da cui

$$d\varphi = -\frac{c n X d n X}{s n X} dX, \quad \text{su } v + v'.$$

Ne segue che

$$dx = -\frac{1}{c} e^{-\frac{\pi}{K'} X} \frac{c n X d n X}{s n X} dX.$$

Integrando il secondo membro tra $X = +K$ ed $X = -K$ otteniamo (fig. 8 e 13) la $x(Q')$, essendo $x(Q) = 0$:

$$x(Q') = \frac{1}{c} \int_{-K}^K e^{-\frac{\pi}{K'} X} \frac{c n X d n X}{s n X} dX.$$

La funzione integranda diviene infinita come $\frac{1}{s n X}$, e quindi di 1.º ordine, per $X = 0$. Tuttavia poichè nel passare attraverso questo punto la funzione integranda cambia di segno l'integrale si mantiene finito.

Isoliamo infatti dal cammino di integrazione l'intorno $(-\varepsilon, \varepsilon)$ contenente il punto O ; $0 < \varepsilon < K$. Si ha evidentemente (scrivendo solo i simboli)

$$\int_{-K}^K = \lim_{\varepsilon=0} \int_{-K}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon=0} \int_{+\varepsilon}^K.$$

Ma

$$\int_{-K}^{-\varepsilon} e^{-\frac{\pi}{K'} X} \frac{c n X d n X}{s n X} dX = - \int_{\varepsilon}^K e^{\frac{\pi}{K'} X} \frac{c n X d n X}{s n X} dX,$$

ove si tenga presente che $s n X$ è funzione dispari, $c n X$ e $d n X$ sono funzioni pari.

Quindi abbiamo

$$\int_{-K}^K e^{-\frac{\pi}{K'} X} \frac{c n X d n X}{s n X} d X = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^K \left(e^{-\frac{\pi}{K'} X} - e^{-\frac{\pi}{K'} X} \right) \frac{c n X d n X}{s n X} d X.$$

La funzione integranda resta finita anche per $X = 0$; infatti tale limite è

$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{\pi}{K'} X} - e^{\frac{\pi}{K'} X}}{s n X} &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{-2 \left(\frac{\pi}{K'} X + \frac{\pi^3}{2 \cdot 3 K'^3} X^3 + \dots \right)}{X - \frac{1 + k^2}{6} X^3 \dots} \\ &= -2 \frac{\pi}{K'}. \end{aligned}$$

Perciò in definitiva possiamo scrivere

$$x(Q') = -\frac{1}{c} \int_0^K \left(e^{\frac{\pi}{K'} X} - e^{-\frac{\pi}{K'} X} \right) \frac{c n X d n X}{s n X} d X. \quad (77)$$

Si constata subito, mantenendosi la funzione integranda positiva in tutto l'intervallo d'integrazione, che si ha necessariamente

$$x(Q') < 0.$$

Ciò importa che l'angolo $O G Q$ (rivolto alla vena) deve essere convesso.

L'integrale che ci dà $x(Q')$ non si sa conseguire in termini finiti. Lo esprimeremo quindi con una serie, seguendo un procedimento analogo a quello impiegato per il calcolo delle (71).

Poniamo per un momento

$$X = K + i \xi,$$

con che

$$\xi = i(K - X).$$

Ne segue [HALPHEN, p. 46 e 47]

$$\frac{c n X d n X}{s n X} = -i k'^2 \frac{s n(\xi, k') c n(\xi, k')}{d n(\xi, k')},$$

e per le (72) e (72')

$$\frac{c n X d n X}{s n X} = -\frac{4 \pi i}{K'} \sum \frac{c^n}{1 - c^{2n}} \operatorname{sen} \frac{\pi}{K'} n \xi, \quad n = 1, 3, 5, \dots;$$

essendo ora

$$q_1 = c = e^{-\pi \frac{K}{K'}},$$

ed avendosi ξ al posto di $\frac{K'}{\alpha} \mathfrak{S}$. Ristabiliamo nel secondo membro la variabile X : poichè abbiamo

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{K'} n \xi = \operatorname{sen} i \frac{n \pi}{K'} (K - X) = \frac{i}{2} \left(c^{-n} e^{-\frac{n \pi}{K'} X} - c^n e^{\frac{n \pi}{K'} X} \right)$$

sostituendo si ottiene

$$\frac{c n X d n X}{s n X} = \frac{2 \pi}{K'} \sum \frac{e^{-\frac{n \pi}{K'} X} - c^{2n} e^{\frac{n \pi}{K'} X}}{1 - c^{2n}}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Per questa la (77) si scrive, ove si ponga $\frac{\pi}{K'} X = \alpha$:

$$x(Q) = -\frac{2}{c} \sum \frac{1}{1 - c^{2n}} \int_0^{-\log c} (e^\alpha - e^{-\alpha}) (e^{-n\alpha} - c^{2n} e^{n\alpha}) d\alpha, \quad (77')$$

essendo evidentemente $\alpha = \pi \frac{K}{K'} = -\log c$ per $X = K$.

Da questa appare manifesto che $x(Q)$ dipende dalla sola velocità all'infinito c , come difatti deve essere. L'integrale che compare nel secondo membro si calcola facilmente:

$$\int_0^{-\log c} (e^\alpha - e^{-\alpha}) (e^{-n\alpha} - c^{2n} e^{n\alpha}) d\alpha = \frac{2}{1 - n^2} \left\{ (1 - c^2) n c^{n-1} - (1 - c^{2n}) \right\},$$

per $n = 3, 5, 7, \dots$; per $n = 1$ si ha

$$\int_0^{-\log c} (e^\alpha - e^{-\alpha}) (e^{-\alpha} - c^2 e^\alpha) d\alpha = -(1 + c^2) \log c - (1 - c^2).$$

Sostituendo in (77'), tenuto presente che $\sum \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{4}$ per $n = 3, 5, 7, \dots$, dopo le opportune riduzioni otteniamo

$$x(Q) = \frac{1}{c} + \frac{2}{c} \frac{1 + c^2}{1 - c^2} \log c + \frac{4(1 - c^2)}{c^2} \sum \frac{n c^n}{(1 - c^{2n})(n^2 - 1)}, \quad n = 3, 5, 7, \dots$$

È evidente l'assoluta convergenza della serie, essendo $c < 1$. Determinato così il punto Q' sulla parete v' , si determina subito G , intersezione dell'asse di simmetria con la retta QQ' . Supposto di aver costruito λ per punti, nel modo indicato, è facile ora costruire λ' , omotetico di λ rispetto a G , c^2 essendo il rapporto d'omotetia ⁽²⁰⁾.

§ 24. RITORNO AD UNITÀ DI MISURA GENERICHE.

In base alle convenzioni fatte al § 3, abbiamo scelto come sistema di unità di misura quello in cui la portata, la densità e la velocità hanno per unità di misura rispettivamente una portata π volte minore della portata q^* della vena, la densità ρ^* del liquido in moto e la velocità V^*_{λ} sul pelo libero λ .

In questo modo le unità, che di solito si assumono come fondamentali, sono, in funzione di q^* , ρ^* e V^*_{λ} ,

$$l = \frac{q^*}{\pi \rho^* V^*_{\lambda}}, \quad \text{per le lunghezze;}$$

⁽²⁰⁾ La (18'), della nota ⁽⁴⁰⁾, si scrive, nel caso studiato in questo paragrafo,

$$f = \log Z'';$$

perciò posto $Z'' = \rho e^{i\theta}$, le curve equipotenziali $\varphi = \text{cost.}$ sono rappresentate nel piano Z'' dalla famiglia di cerchi, col centro comune nell'origine

$$\rho = \text{cost.}$$

Le linee di flusso $\psi = \text{cost.}$ costituiscono il fascio di rette col centro in O

$$\theta = \text{cost.}$$

Si noti in particolare che per i punti 1 e -1 (fig. 6) passa la stessa circonferenza $\rho = 1$ e per i punti $\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ passa pure la stessa circonferenza $\rho = \frac{1}{k}$. Ma i primi due punti sono le immagini degli estremi a monte O ed O' dei peli liberi, gli altri due sono le immagini degli estremi a valle Q e Q' ; dunque O ed O' , e così Q e Q' , appartengono ad una stessa curva equipotenziale. Per quanto si sa, nei primi due è $\varphi = 0$, negli altri due $\varphi = \log \frac{1}{k}$.

$$m = \frac{q^{*2}}{\pi^2 \rho^* V^{*2}_\lambda}, \quad \text{per le masse;}$$

$$t = \frac{q^*}{\pi \rho^* V^{*2}_\lambda}, \quad \text{per i tempi.}$$

Per mezzo di queste unità è facile esprimere qualsiasi grandezza nel generico sistema di unità, nel quale sono state misurate q^* , ρ^* e V^*_λ .

Fermiamoci a considerare, in modo speciale, le grandezze che intervengono nel caso di pareti parallele simmetriche studiato nel paragrafo precedente.

Il problema è determinato quando sono date, oltre all'angolo α ed alla densità ρ^* , le seguenti costanti fisiche

- V^*_∞ , velocità assintotica,
- Ω^* , larghezza del canale,
- V^*_λ , velocità sul pelo libero interno.

In funzione delle prime due e della densità abbiamo

$$q^* = \rho^* V^*_\infty \Omega^*,$$

per la quale le unità di misura si scrivono

$$l = \frac{\Omega^* V^*_\infty}{\pi V^*_\lambda},$$

$$m = \frac{\rho^* \Omega^{*2} V^{*2}_\infty}{\pi^2 V^{*2}_\lambda},$$

$$t = \frac{\Omega^* V^*_\infty}{\pi V^{*2}_\lambda}.$$

Abbiamo già indicato con c il rapporto $\frac{V^*_\infty}{V^*_\lambda}$; ne segue

$$l = \frac{\Omega^*}{\pi} c,$$

$$m = \rho^* \frac{\Omega^{*2}}{\pi^2} c^2,$$

$$t = \frac{\Omega^*}{\pi} \frac{c}{V^*_\lambda}.$$

Vediamo così che l'unità di lunghezza dipende dalle velocità V^*_∞ e V^*_λ solo per mezzo del loro rapporto c , è indipendente da ρ^* e proporzionale ad Ω^* . Abbiamo già trovato del resto che nelle equazioni parametriche (74) del pelo libero interviene il solo rapporto c delle velocità all'infinito e su λ , pel tramite di $q_i = c \frac{\pi}{\alpha}$.

Come si esprimeranno le equazioni (74) introducendo al posto di x ed y le effettive lunghezze x^* ed y^* ? Basterà moltiplicare per l i secondi membri della (74); si ottiene così:

$$x^* = 4c\Omega^* \sum \frac{q_1^n}{1 - q_1^{2n}} I'_n(\vartheta),$$

$$y^* = 4c\Omega^* \sum \frac{q_2^n}{1 - q_2^{2n}} I''_n(\vartheta).$$

$n = 1, 3, 5, \dots,$

Per un dato angolo α quindi e per una data larghezza Ω^* del canale la forma dei peli liberi λ e λ' è la stessa per tutti quei moti le cui velocità V^*_∞ e V^*_λ stanno in uno stesso rapporto c . In tali condizioni la stessa forma avranno le linee di flusso; nei diversi casi però la velocità su di esse è proporzionale a V^*_λ .

Se invece supponiamo di far variare Ω^* tenendo costante c , tutte le lunghezze variano proporzionalmente ad Ω^* ed il campo del moto varierà restando simile a se stesso.

Milano, Novembre 1915.

INDICE

INTRODUZIONE	PAG. 33
------------------------	------------

PARTE PRIMA.

Problema generale.

§ 1. Posizione del problema	36
§ 2. Impostazione analitica del problema	37
§ 3. Scelta delle unità di misura	40
§ 4. Comportamento di $f = \varphi + i\psi$ nel campo del moto	41
§ 5. La funzione v ed il suo logaritmo $-it$	43
§ 6. Trasformazione conforme di un'area semplice in un rettangolo	44
§ 7. Rappresentazione del campo del moto sul rettangolo R	47
§ 8. La funzione $f(Z)$	48
§ 9. Comportamento della funzione t nel rettangolo R	50
§ 10. Trasformazione del campo del moto in una semicorona circolare	51
§ 11. La funzione t nella semicorona. La funzione Ω . Riflessione	52
§ 12. Richiamo sul problema di Dirichlet nella corona	54
§ 13. Determinazione di $\Omega(z_0)$	55
§ 14. Integrale generale del moto	58
§ 15. Velocità su λ' e suo comportamento nei punti angolosi	61
§ 16. Corrispondenza tra il piano del rettangolo e quello del moto	62
§ 17. Peli liberi	64
§ 18. Osservazioni	66

PARTE SECONDA.

Applicazioni.

§ 19. Pareti poligonali. Integrale generale	67
§ 20. Pareti rettilinee. Integrale generale	72
§ 21. Velocità	73
§ 22. Peli liberi	76
§ 23. Caso della simmetria	79
§ 24. Ritorno ad unità di misura generiche	95

Sulle curve gobbe algebriche reali a circuiti concatenati.

(Di LUIGI BRUSOTTI, a Pavia.)

Sulla *concatenazione* fra i circuiti di una curva gobba algebrica reale conosco soltanto un'osservazione di carattere negativo dovuta a HILBERT, il quale nota come una curva gobba algebrica reale di massimo genere, giacendo sopra una quadrica, non possa presentare circuiti concatenati (*).

Ho quindi creduto opportuno pubblicare la presente ricerca. Essa, come l'argomento richiede, si svolge nell'indirizzo topologico-proiettivo e considera perciò essenziali quelle proprietà che si collegano alla distinzione fra *circuiti pari* e *circuiti dispari*.

§ 1. LIMITI E SCOPO DELLA RICERCA.

1. È noto che ogni circuito pari si può ridurre per deformazione continua ad un punto.

Siano $x \geq 2$ circuiti pari così disposti che nessuno di essi possa ridursi per deformazione continua ad un punto senza attraversare almeno uno dei rimanenti. Tali x circuiti si diranno fra loro *totalmente concatenati*.

Se, fra x circuiti non totalmente concatenati, x' sono totalmente concatenati, gli x circuiti si diranno *parzialmente concatenati*.

Più circuiti pari che non siano nè totalmente nè parzialmente concatenati si diranno fra loro *affatto liberi*.

(*) HILBERT, *Ueber die reellen Züge algebraischer Curven* (Math. Ann., Bd. 38, 1891). Di una pubblicazione annunciata privatamente da G. B. DE SZ. NAGY non ho avuto ulteriori notizie.

Estendendo ai circuiti pari un teorema topologico sulla concatenazione fra anelli (*), si può (qualunque sia l'intero x) costruire un gruppo di x circuiti pari che sian fra loro (totalmente) concatenati pur essendo affatto liberi presi ad $x - 1$ ad $x - 1$; per es. un gruppo di tre circuiti pari fra loro (totalmente) concatenati pur essendo affatto liberi presi a due a due (Fig. 1).

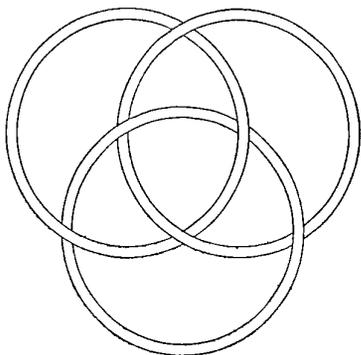


Fig. 1.

Nel seguito escluderò siffatti aggruppamenti di circuiti per $x > 2$, riducendomi ad una particolare forma di concatenazione, che dirò *concatenazione ordinaria*.

La configurazione di un sistema di k circuiti pari (in una prima analisi) dipenderà così unicamente dai rapporti di concatenazione o di libertà dei k circuiti presi in tutti i modi a due

a due. Essa, indicato ogni circuito con una lettera, verrà perciò rappresentata da uno specchio nel quale siano segnate tutte le coppie di circuiti mutuamente concatenati, omettendosi invece le coppie di circuiti mutuamente liberi (*schema di concatenazione di specie k*).

Nel campo così circoscritto, il problema più generale di topologia algebrica sarà quello di costruire una curva gobba, algebrica (reale) di dati caratteri algebrici, i cui circuiti (tutti pari) formino un sistema avente uno schema di concatenazione assegnato.

2. La presente ricerca risolve il problema enunciato per curve di genere qualunque ma d'ordine (pari) abbastanza elevato e per un'ampia classe di schemi, la quale si può così caratterizzare.

Su di una punteggiata (in senso proiettivo) si consideri un sistema di k coppie (di punti). Due fra esse potranno separarsi oppure non separarsi. Rappresentata ogni coppia con una lettera, si potrà formare uno specchio nel quale siano segnate tutte le coppie di coppie mutuamente separantisi, omesse invece le coppie di coppie non separantisi (*schema di separazione di specie k*).

Se un sistema di k circuiti pari è riferito biunivocamente al sistema di coppie in tal modo che a circuiti concatenati corrispondano coppie sepa-

(*) HERMANN BRUNN, *Ueber Verkettung* (Sitzungsber. der math. phys. Cl. der bayer. Akad. der Wiss., Bd. 22, 1892).

Per $x = 3$ vedi: TAIT, *On knots* (Transactions of the R. Edinb. Soc., vol. 28, 1876).

rantisi e reciprocamente, lo schema di concatenazione dell'un sistema e lo schema di separazione dell'altro si diranno fra loro *isomorfi*.

Ogni specchio del tipo descritto può essere (sotto l'aspetto topologico) interpretato come schema di concatenazione (*), mentre [secondo quanto si dirà più innanzi (§ 2)] solo per $k < 6$ un tale specchio può in ogni caso interpretarsi come schema di separazione.

Gli schemi di concatenazione isomorfi a schemi di separazione formano appunto la classe presa in esame. In essa sono compresi, come casi assai particolari, tipi molto notevoli, così (qualunque sia k): gli schemi di concatenazione completa (circuiti concatenati a due a due in tutti i modi), di concatenazione in serie semplice aperta (il primo concatenato col secondo, il secondo col terzo, ..., il penultimo coll'ultimo), di concatenazione in serie semplice chiusa (il primo col secondo, il secondo col terzo, ..., l'ultimo col primo).

3. Precisando, si perverrà (§ 3) al seguente:

TEOREMA I. *Dati gli interi (positivi o nulli) n, p, k soddisfacenti alle:*

$$2n \geq p + k + 2,$$

$$k \leq p + 1,$$

ed assegnato uno schema di separazione S di specie k , esiste una curva gobba (irriducibile) d'ordine $2n$, di genere p , priva di punti multipli, costituita nella sua parte reale da un sistema di k circuiti pari avente lo schema di concatenazione isomorfo ad S .

Si osservi che la condizione $k \leq p + 1$ è necessaria perchè, per un noto teorema di HARNACK (**), una curva di genere p possiede $p + 1$ circuiti al più.

La condizione $2n \geq p + k + 2$ potrà forse essere sostituita da un'altra meno restrittiva. Non potrà però il teorema essere valido anche per n qualunque, come, prescindendo dal lato puramente algebrico della questione (***), si desume osservando che curve sopra una quadrica non possono presentare concatenazione oppure svolgendo apposite considerazioni topologico-algebriche (vedi § 7).

(*) Ciò discende, come caso particolare, da una proposizione più generale. Cfr. HERMANN BRUNN, loc. cit.

(**) *Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven* (Math. Ann., Bd. 10, 1876).

(***) Per questo vedasi specialmente: HALPHEN, *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques* (Journal de l'École polytechnique, Cahier 52, 1882).

Una proprietà già accennata per $k < 6$ (num. 2) condurrà ad interessanti corollari e permetterà per $p < 5$ di risolvere il problema nell'ipotesi di schemi di concatenazione del tutto arbitrari (cfr. § 4).

4. Le considerazioni valide per i sistemi di circuiti pari si estendono ai sistemi di circuiti tutti pari salvo al più uno.

Si dirà che $x \geq 2$ circuiti tutti pari salvo al più uno sono *totalmente concatenati* quando nessuno, pari, di essi possa ridursi (per deformazione continua) ad un punto senza attraversare almeno uno dei rimanenti (l'eventuale circuito dispari compreso).

Ciò posto, si estendono immediatamente i concetti di concatenazione parziale, di circuiti affatto liberi, di concatenazione ordinaria, di schema di concatenazione, di isomorfismo fra schemi di concatenazione e di separazione.

Si giungerà (§ 5) al seguente:

TEOREMA II. *Dati gli interi (positivi o nulli) n, p, k soddisfacenti alle:*

$$2n + 1 \geq p + k + 2$$

$$0 < k \leq p + 1,$$

assegnato uno schema di separazione S di specie k e in esso fissata una coppia di punti, esiste una curva gobba (irriduttibile) d'ordine $2n + 1$, di genere p , priva di punti multipli, costituita nella sua parte reale da un sistema di k circuiti tutti pari salvo uno, collo schema di concatenazione isomorfo ad S in modo che il circuito dispari corrisponda alla coppia prefissata.

Sulle condizioni $0 < k \leq p + 1$, $2n + 1 \geq p + k + 2$ si possono ripetere, con lievi mutamenti, le osservazioni del numero precedente. Così dicasi per il corollario sul caso $p < 5$ (Cfr. § 6).

5. I mezzi impiegati sono relativamente semplici. Essi consistono nell'introduzione di un'opportuna rigata razionale (con retta multipla) soddisfacente a particolari condizioni di realtà, nell'uso di una sua rappresentazione sopra un piano reale ed in un procedimento di « piccola variazione » che permetta di costruire in tale rappresentazione l'immagine piana di una curva gobba del tipo richiesto.

§ 2. SCHEMI DI SEPARAZIONE.

6. Sopra una punteggiata si consideri il sistema costituito dalle k coppie di punti:

$$c_1 \equiv A_1 B_1, \quad c_2 \equiv A_2 B_2, \dots, \quad c_k \equiv A_k B_k, \quad (1)$$

e, supposti i punti A_i, B_i tutti distinti, si formi (num. 2) il suo *schema di separazione*:

$$c_{i_1} c_{j_1}, \quad c_{i_2} c_{j_2}, \dots, \quad c_{i_q} c_{j_q}. \quad (2)$$

Il mutuo separarsi delle coppie $c_{i_m} c_{j_m}$ ($m = 1, 2, \dots, q$) si può rendere più intuitivo distendendo la punteggiata sopra una *conica* e tracciando le

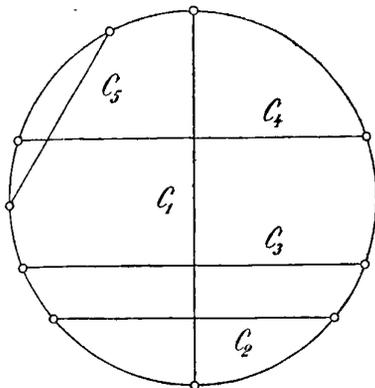


Fig. 2.

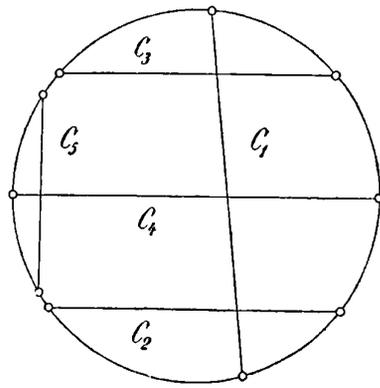


Fig. 3.

corde $A_i B_i$ [$i = 1, 2, \dots, k$] (*). Invero, secondo che due coppie si separino o non si separino, le rispettive corde si tagliano o non si tagliano.

Si prenda, ad esempio, in esame il sistema rappresentato dalla Fig. 2, dove, come si converrà d'ora innanzi, ogni corda è accompagnata dalla lettera che compete alla coppia degli estremi. Esso ha evidentemente lo schema:

$$c_1 c_2, \quad c_1 c_3, \quad c_1 c_4, \quad c_4 c_5. \quad (3)$$

Un sistema (1) però non è sempre topologicamente individuato dal suo

(*) Per *corda* $A_i B_i$ intendo il segmento della retta $A_i B_i$ interno alla conica.

schema (2) di separazione. Così i sistemi rappresentati da Fig. 2 e da Fig. 3, pur essendo sotto l'aspetto topologico essenzialmente diversi, hanno lo stesso schema di separazione (3).

7. Sorge il quesito se uno specchio di tipo (2), arbitrariamente assegnato, sempre possa interpretarsi come schema di separazione per un sistema di k coppie di punti.

Il quesito ha risposta affermativa per $k < 6$; per $k \geq 6$ esistono invece specchi di tipo (2) non interpretabili come schemi di separazione.

Per la dimostrazione è opportuno soffermarsi sui più semplici procedimenti atti a dedurre schemi di separazione di specie $k + 1$ da schemi di separazione di specie k . Essi sono i seguenti:

I. *Aggregare una coppia isolata, cioè non separante alcuna delle coppie (1)* [una $c_{k+1} \equiv A_{k+1} B_{k+1}$, essendo i punti A_{k+1}, B_{k+1} in uno stesso dei $2k$ segmenti proiettivi definiti dall'insieme dei punti A_i, B_i ($i = 1, 2, \dots, k$)].

II. *Aggregare una coppia separante una sola c_s delle (1)* [una $c_{k+1} \equiv A_{k+1} B_{k+1}$ coi punti A_{k+1}, B_{k+1} prossimi per es. ad A_s , ma da bande opposte di questo].

III. *Aggregare una coppia che separi (oppure non separi) la c_s di (1) e che rispetto alle rimanenti coppie (1) si comporti come c_s [cioè separi (risp. non separi) quelle di tali coppie che c_s separa (risp. non separa)].* La coppia $c_{k+1} = A_{k+1} B_{k+1}$ da aggregare si scelga, p. es., con A_{k+1} prossimo comunque ad A_s e con B_{k+1} prossimo a B_s dalla banda opportuna.

8. Per $k = 2$ ogni specchio del tipo (2) [lo specchio nullo, risp. lo specchio c_1, c_2] è schema di separazione [per due coppie che non si separano, risp. che si separano].

Per $k = 3, 4$ ogni specchio del tipo (2) presenta, come si può verificare, o una coppia isolata, oppure una coppia separante una sola delle rimanenti, o, infine, due coppie (separantisi o non separantisi) che si comportano ugualmente colle rimanenti.

Quindi, coi procedimenti del n. 7, si può dimostrare per induzione che per $k \leq 4$ ogni specchio di tipo (2) è schema di separazione.

9. Sia $k = 5$. Se lo specchio di tipo (2) presenta o una coppia isolata, oppure una coppia separante una sola fra le rimanenti, o infine due coppie di uguale comportamento, si può ancora dimostrare (num.¹ 7, 8) che esso è schema di separazione.

Si esaminino gli specchi che non rientrino nei tipi ricordati. Allo scopo di classificarli si introduca il concetto di *serie semplice chiusa*, cioè di una successione di coppie così disposte che la prima separi la seconda, la seconda separi la terza, ..., l'ultima separi la prima (non intervenendo tra le coppie stesse ulteriori rapporti di separazione).

Si avranno i seguenti casi:

I. *Lo specchio si identifica con una serie semplice chiusa di cinque coppie.*

Sia $c_1 c_2 c_3 c_4 c_5$ la serie, onde:

$$c_1 c_2, c_2 c_3, c_3 c_4, c_4 c_5, c_5 c_1$$

lo specchio. Esso è schema di separazione, come risulta dalla Fig. 4.

II. *Lo specchio presenta una serie semplice chiusa di quattro coppie.*

Siano, p. es., $c_1 c_2 c_3 c_4$ ordinatamente le coppie della detta serie. La c_5 dovrà separarne almeno due, nè potrà separarne due non consecutive, perchè, ad esempio, se separasse le $c_1 c_3$, queste avrebbero nello specchio ugual comportamento, il che attualmente si esclude.

La c_5 separerà dunque due coppie consecutive della serie ed esse sole. Separi le $c_1 c_2$. Lo specchio sarà:

$$c_1 c_2, c_2 c_3, c_3 c_4, c_4 c_1; \\ c_1 c_5, c_2 c_5.$$

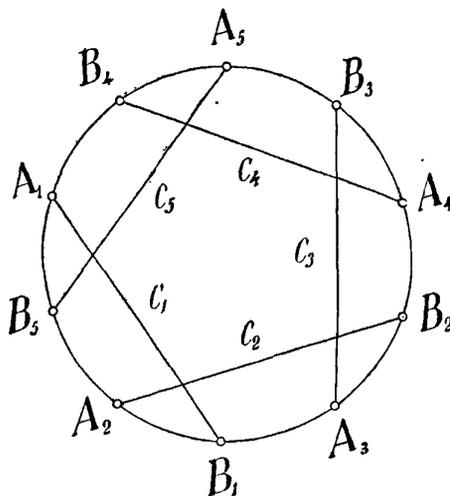


Fig. 4.

Esso è schema di separazione, come risulta dalla Fig. 5.

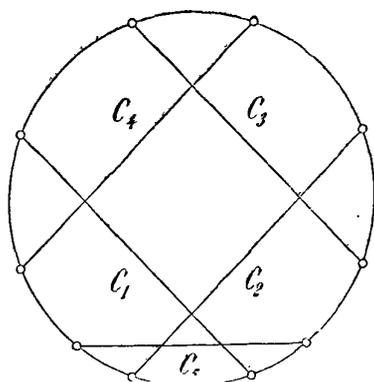


Fig. 5.

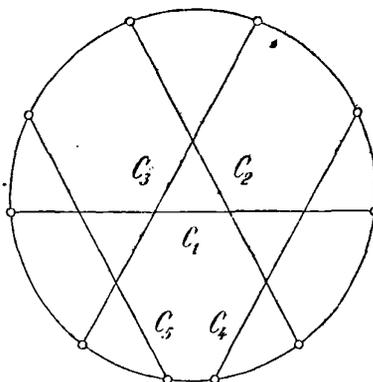


Fig. 6.

III. *Lo specchio presenta una serie semplice chiusa di tre coppie (e non una con più di tre coppie).*

Siano $c_1 c_2 c_3$ le coppie della serie.

Le $c_4 c_5$ non potranno entrambe separare (non separare) tutte e tre le coppie della serie, perchè in tal caso avrebbero ugual comportamento. Una di esse dunque, p. es. c_4 , separerà due sole (per es. c_1, c_2) od una sola (per es. c_1) delle $c_1 c_2 c_3$.

α) *La c_4 separi $c_1 c_2$ (e non c_3).*

La c_5 non potrà comportarsi ugualmente con $c_1 c_2$, perchè in tal caso $c_1 c_2$ avrebbero nello specchio ugual comportamento. Ad es.: c_5 separi c_1 e non c_2 .

La c_5 non potrà comportarsi ugualmente neppure con $c_3 c_4$, dovendosi evitare l'ugual comportamento di c_3 e c_4 .

Se c_5 separa c_3 (e non c_4) si ha lo specchio:

$$c_1 c_2, \quad c_2 c_3, \quad c_3 c_1; \quad c_1 c_4, \quad c_2 c_4; \quad c_1 c_5, \quad c_3 c_5, \quad (4)$$

che è schema di separazione, come risulta dalla Fig. 6.

Se c_5 separa c_4 (e non c_3) si ha lo specchio:

$$c_1 c_2, \quad c_2 c_3, \quad c_3 c_1; \quad c_1 c_4, \quad c_3 c_4; \quad c_1 c_5, \quad c_4 c_5,$$

che è schema di separazione, perchè, scritto nell'ordine:

$$c_1 c_2, \quad c_2 c_4, \quad c_4 c_1; \quad c_1 c_3, \quad c_2 c_3; \quad c_1 c_5, \quad c_4 c_5,$$

appare dello stesso tipo di (4), dal quale si deduce collo scambio delle lettere c_3 e c_4 .

β) *La c_4 separi c_1 (e non c_2 nè c_3).*

Ad evitare l'uguale comportamento di c_2, c_3 , la c_5 separerà una sola di esse. *La c_5 separi c_2 (non c_3).*

Non potendo c_5 separare una sola coppia, essa dovrà separare almeno una fra le c_1, c_4 . Se c_5 separasse c_1 e non c_4 , si cadrebbe nell'ugual comportamento di c_2, c_3 ; se c_5 separasse c_4 e non c_1 , si avrebbe la serie semplice chiusa $c_1 c_2 c_3 c_4$, il che ora si esclude.

Dunque c_5 separa così c_1 come c_4 e si ha lo specchio:

$$c_1 c_2, \quad c_2 c_3, \quad c_3 c_1; \quad c_1 c_4, \quad c_2 c_5, \quad c_1 c_5, \quad c_4 c_5,$$

che, scritto nell'ordine:

$$c_1 c_2, \quad c_2 c_5, \quad c_5 c_1; \quad c_1 c_3, \quad c_2 c_3; \quad c_1 c_4, \quad c_5 c_4,$$

risulta di tipo (4) ed è quindi schema di separazione.

IV. Si escludano i casi precedenti.

La c_1 separerà due coppie (almeno); siano c_2, c_3 . Esse non si separeranno, ad evitare la serie $c_1 c_2 c_3$. La c_2 non può separare la sola c_1 ; separi ad es. c_4 . La c_1 non può separare nè c_1 nè c_3 ad evitare le serie $c_1 c_2 c_4$ oppure $c_3 c_1 c_2 c_4$. Perciò la c_4 separerà c_3 . Affinchè la c_3 non separasse la sola c_1 , dovrebbe c_3 separare c_3 , senza però separare alcuna delle c_1, c_2 per evitare le serie $c_2 c_4 c_3, c_1 c_3 c_3$. Ma ciò condurrebbe alla serie $c_1 c_2 c_4 c_3 c_3$, che pur è da escludersi. Dunque i primi tre casi esauriscono la discussione.

Concludendo: Per $k = 5$ ogni specchio di tipo (2) si può interpretare come schema di separazione.

E, riunendo il presente risultato con quelli del num. 8:

Per $k < 6$ ogni specchio di tipo (2) si può interpretare come schema di separazione.

10. Si passi ora a dimostrare l'esistenza, per $k \geq 6$, di specchi del tipo (2) non interpretabili come schemi di separazione.

Ad es., per $k = 6$, non si può interpretare come schema di separazione lo specchio:

$$\left. \begin{array}{l} c_1 c_2, \quad c_2 c_3, \quad c_3 c_4, \quad c_4 c_5, \quad c_5 c_1; \\ c_1 c_6, \quad c_2 c_6, \quad c_3 c_6, \quad c_4 c_6, \quad c_5 c_6. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Innanzitutto di un sistema avente quale schema lo specchio (5) farebbe parte la serie semplice chiusa $c_1 c_2 c_3 c_4 c_5$, e questa, come si rileva da una breve indagine, produrrebbe necessariamente una disposizione topologicamente identica a quella di Fig. 4.

Lo specchio (5) richiederebbe ulteriormente una coppia $c_6 \equiv A_6 B_6$ separante tutte le rimanenti. Ma una tal coppia non esiste.

Invero, con riferimento alla Fig. 4, si osservi che A_6 dovrebbe trovarsi fra due punti $A_i (i \leq 5)$ consecutivi; si trovi p. es. fra A_1 ed A_2 (*). In tale ipotesi, perchè c_6 separasse così c_2 come c_3 , dovrebbe B_6 giacere fra A_3 e B_2 (**), mentre, perchè separasse così c_3 come c_4 , dovrebbe lo stesso B_6 giacere

(*) S'intende in quello dei due segmenti proiettivi determinati da A_1, A_2 che non contiene i rimanenti punti A_i .

(**) S'intende in quello dei due segmenti proiettivi determinati da A_3, B_2 che non contiene i rimanenti punti A_i, B_i .

cere fra A_4 e B_3 . Il che coinvolge contraddizione. E l'asserita impossibilità è così dimostrata.

Analoghi esempi per $k > 6$ si otterrebbero facilmente sia estendendo le precedenti considerazioni, sia aggregando allo specchio (5) nuove lettere comunque collegate alle antiche e fra loro.

11. Nella grande varietà degli schemi di separazione, credo fissar l'attenzione sui tipi seguenti, che si presentano per ogni valore di k .

I. *Schema di separazione completa:*

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 c_2, & c_1 c_3, & \dots, & c_1 c_{k-1}, & c_1 c_k, & & \\ & c_2 c_3, & \dots, & c_2 c_{k-1}, & c_2 c_k, & & \\ & & & & & & \dots & \\ & & & & & & & c_{k-2} c_{k-1}, & c_{k-2} c_k, & \\ & & & & & & & & & c_{k-1} c_k. \end{array}$$

Alla costruzione di un conveniente sistema si può pervenire per induzione, applicando il procedimento III del num. 7. A ciò del resto conduce la seguente disposizione dei punti A_i, B_i :

$$A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, B_2, \dots, B_k.$$

II. *Schema di separazione in serie semplice aperta:*

$$c_1 c_2, c_2 c_3, \dots, c_{s-1} c_s, \dots, c_{k-1} c_k.$$

Alla costruzione di un conveniente sistema si può pervenire per induzione, applicando il procedimento II del num. 7. Lo scopo per altro si raggiunge colla disposizione seguente dei punti A_i, B_i :

$$A_1, A_2, B_1, A_3, B_2, \dots, A_s, B_{s-1}, \dots, A_k, B_{k-1}, B_k.$$

III. *Schema di separazione in serie semplice chiusa* (cfr. num. 9):

$$c_1 c_2, c_2 c_3, \dots, c_{s-1} c_s, \dots, c_{k-1} c_k, c_k c_1.$$

Ad esso conduce la disposizione:

$$A_1, B_k, A_2, B_1, A_3, B_2, \dots, A_s, B_{s-1}, \dots, A_k, B_{k-1}.$$

Ad es., per $k = 5$, vedasi Fig. 4.

12. Termino il presente paragrafo con una semplice osservazione, di cui si farà uso in seguito.

Sul sostegno della punteggiata si consideri un segmento proiettivo d . Dato il sistema (1) di coppie $c_i \equiv A_i B_i$, esiste pure un sistema:

$$c^*_1 \equiv A^*_1 B^*_1, \quad c^*_2 \equiv A^*_2 B^*_2, \quad c^*_k \equiv A^*_k B^*_k \quad (6)$$

topologicamente identico ad (1), ma coi punti A^*_i, B^*_i appartenenti tutti a d . Similmente esiste un sistema (6) topologicamente identico ad (1), ma coi punti A^*_i, B^*_i tutti in d salvo uno prefissato [per es. salvo B^*_1] fuori di d .

Ciò dipende dalla possibilità di costruire punti A^*_i, B^*_i aventi lo stesso ordinamento dei punti $A_i B_i$ e soddisfacenti alle volute condizioni.

Implicitamente risulta che, in entrambi i casi indicati, i sistemi (1) e (6) hanno schemi di separazione identici.

§ 3. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA I.

13. Siano gli interi (positivi o nulli) n, k, p , soddisfacenti alle relazioni

$$2n \geq p + k + 2, \quad (7)$$

$$k \leq p + 1, \quad (8)$$

già introdotte nell'ipotesi del *Teorema I* (num. 3).

Si supponga dapprima:

$$n \geq p + 2, \quad (9)$$

nel qual caso la (7) è conseguenza della (8).

In un piano reale π si considerino:

1.º Una retta reale r e su di essa un'involuzione J_n reale, ∞^1 di grado n , senza punti fissi, possedente un gruppo $H' H'' \dots H^{(n)}$ di cui k punti $H' H'' \dots H^{(k)}$ siano reali e distinti [il che è sempre possibile perchè dalle (8) (9) si deduce $k < n$], mentre i rimanenti (distinti dai primi k) siano reali oppure distribuiti in coppie di punti immaginari coniugati.

2.º Un punto E reale fuori di r .

3.º Un gruppo reale di p punti $E_i (i = 1, 2, \dots, p)$, fuori di r , in posizione algebricamente generica così fra loro come rispetto a J_n e ad E

(onde sarà lecito supporre che nessuna delle rette EE_i passi per qualcuno dei punti $H^{(i)}$).

Le curve C^n d'ordine n (di π) aventi in E un punto $(n-1)$ -plo, passanti (semplicemente) per ciascuno dei punti E_i e secanti r in gruppi della J_n formano un sistema ∞^{n-p+1} *lineare e reale*, perchè lineari e reali sono le condizioni alle quali si sottopongono le C^n .

Per la (9) è lecito estrarne un sistema *lineare e reale* ∞^3 , che, essendo scelto in modo generico, segnerà ancora sulla r la J_n . Lo indicherò con (C^n) .

14. Si riferiscano proiettivamente le curve del sistema (C^n) ai piani di uno spazio reale a tre dimensioni, in tal maniera che a curve reali di (C^n) corrispondano piani reali (e reciprocamente). Basterà per ciò far corrispondere a quattro curve reali e linearmente indipendenti di (C^n) quattro piani reali e linearmente indipendenti nello spazio.

Ad un sistema lineare ∞^2 di (C^n) corrisponde una stella di piani; se il sistema è reale la stella ha centro reale. In particolare al sistema delle curve di (C^n) passanti per un punto generico P di π corrisponde una stella il cui centro si indicherà con P_0 . Al variare di P in π , il punto P_0 descrive una superficie razionale π_0 , rigata, d'ordine $2n-p-1$, di cui è spontanea la rappresentazione su π in modo che punti reali abbiano per immagini punti reali (*).

Le curve di (C^n) sono le immagini delle sezioni piane di π_0 , le rette per E delle sue generatrici. La r è l'immagine di una retta reale r_0 moltiplicata secondo n per π_0 , in modo che gli intorni di un punto Q_0 di r_0 sulle n falde passanti per esso vengono rappresentati rispettivamente negli intorni degli n punti $Q' Q'' \dots Q^{(n)}$ di un gruppo di J_n .

Il punto E rappresenta una direttrice razionale di ordine $n-1$. Ciascuno dei punti E_i rappresenta una generatrice; mentre ciascuna delle rette EE_i rappresenta il punto in cui tale generatrice si appoggia ad r_0 .

Il sistema (C^n) non ammette altre curve fondamentali all'infuori delle EE_i , tale proprietà competendo al sistema completo dal quale (C^n) è estratto in modo algebricamente generico.

(*) Allo scopo di mettere in evidenza le condizioni di realtà introdotte, ho preferito esporre in modo alquanto diffuso la presente applicazione di un metodo ben noto. Vedi CAPORALI, *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane* (Collectanea math. in memoriam D. Chelini, Milano, Hoepli, 1881; pag. 144; oppure: *Memorie di Geometria*, Napoli, Pellerano, 1888).

15. La rigata π_0 , possedendo una retta n -pla (la r_0), sarà ulteriormente dotata di una curva doppia Δ_0 di ordine:

$$\frac{1}{2} (2n - p - 2) (2n - p - 3) - \frac{1}{2} n (n - 1) = \frac{1}{2} (3n - p - 3) (n - p - 2).$$

Applicando con lievi modificazioni un noto procedimento (*), si trova che l'immagine Δ di Δ_0 è di ordine:

$$2(n - 1)(n - p - 2),$$

ha in E un punto multiplo secondo:

$$(2n - 3)(n - p - 2)$$

ed in ciascuno dei punti E_i un punto multiplo secondo:

$$n - p - 2.$$

Le curve Δ_0 e Δ sono in corrispondenza (1, 2), perchè gli intorno di un punto M_0 della Δ_0 sulle due falde di π_0 ivi concorrenti sono rappresentati in π dagli intorno di due punti $M^* M^{**}$ generalmente distinti della Δ . Le coppie $M^* M^{**}$ formano un'involuzione (irrazionale) che indicherò con Θ .

16. In π si consideri il sistema (K^{2p+2}) delle curve d'ordine $2p+2$, aventi in E un punto $2p$ -plo ed in ciascuno dei punti E_i un punto doppio. Il sistema (lineare, reale) è di dimensione $3p+5$ e di genere p .

Una K^{2p+2} è l'immagine di una curva (gobba) K_0^{2p} di π_0 d'ordine $2n$ e di genere p .

Una K_0^{2p} generica è priva di punti multipli. Infatti questi potrebbero provenire soltanto:

I. Da punti multipli dell'immagine K^{2p+2} fuori dei punti fondamentali di (C^n), mentre una K^{2p+2} generica ne è priva.

II. Da incontri di K^{2p+2} con curve fondamentali di (C^n) fuori dei punti fondamentali, mentre le sole curve fondamentali di (C^n) sono le rette EE_i (num. 14 in fine), ed una K^{2p+2} generica non le taglia fuori dei punti E, E_i .

III. Dall'esistenza su K^{2p+2} di coppie dell'involuzione Θ (num. 15), esistenza che non si verifica per una K^{2p+2} generica, non verificandosi ad esempio

(*) CAPORALI, loc. cit., § 3.

per la K^{2p+2} spezzata nelle p rette EE_i da contarsi ciascuna due volte ed in due rette prese genericamente fuori dall'involuppo delle congiungenti le coppie di Θ .

IV. Dall'esistenza su K^{2p+2} di due o più punti appartenenti ad uno stesso gruppo dell'involuzione J_n , esistenza che non si verifica per una K^{2p+2} generica, le cui intersezioni con r si possono prendere in modo arbitrario.

17. Fissato uno schema di separazione S di specie k , mi propongo di dimostrare come esista una K_0^{2p} (di genere p) costituita nella sua parte reale da un sistema di k circuiti pari il cui schema di concatenazione (ordinaria) sia isomorfo ad S .

Si riprendano in considerazione i punti $H' H'' \dots H^{(k)}$ del num. 13.

Se Q' varia su r nell'intorno reale di H' (descrivendo un segmento d') i punti $Q'' Q''' \dots Q^{(k)}$ variano su r rispettivamente negli intorni reali di $H'' H''' \dots H^{(k)}$, mantenendosi distinti fra loro e coi punti $Q^{(k+1)} Q^{(k+2)} \dots Q^{(p)}$, descrivendo quindi altrettanti segmenti $d'' d''' \dots d^{(k)}$ non aventi alcun punto in comune nè fra loro nè con d' . È inoltre lecito supporre (num. 13) che nessuna delle rette EE_i tagli qualcuno dei segmenti $d^{(j)}$.

Gli intorni (reali) di $d' d'' \dots d^{(k)}$ sono le immagini degli intorni di un segmento d_0 della r_0 su k falde $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ reali e distinte della π_0 passanti per esso.

Sopra d_0 si assuma un sistema di coppie di punti:

$$c_1 = A_1 B_1, \quad c_2 = A_2 B_2, \quad \dots, \quad c_k = A_k B_k,$$

di cui sia S lo schema di separazione, il che (num. 12) è sempre possibile.

L'intorno di A_i (risp. B_i) su φ_i sarà rappresentato in π dall'intorno di un punto $A_i^{(j)}$ (risp. $B_i^{(j)}$) del segmento $d^{(j)}$.

18. Ciò posto, è possibile (ed in più modi) determinare una K^{2p+2} reale, secante la r nei punti (reali):

$$A'_1, B'_1, A''_2, B''_2, A'''_3, B'''_3, \dots, A_k^{(k)}, B_k^{(k)},$$

ed ulteriormente in $p - k + 1$ coppie di punti immaginari coniugati, assegnate in modo algebricamente generico.

Sia:

$$g = 0$$

la sua equazione, quando in π si introduca un sistema di coordinate projective con elementi di riferimento reali e del resto arbitrari (*).

Sia

$$e_i = 0$$

l'equazione della retta EE_i ($i = 1, 2, \dots, p$); sia inoltre

$$v = 0$$

quella della retta r .

La:

$$e_1^2 e_2^2 \dots e_p^2 v^2 + t g = 0, \quad (10)$$

per t reale e di valore assoluto abbastanza piccolo, è l'equazione di una K^{2p+2} , reale, ottenuta mediante « piccola variazione » di quella spezzata nelle rette EE_1, EE_2, \dots, EE_p ed r , da contarsi due volte ciascuna (**).

Se, ridonando per un momento al parametro t l'intera variabilità, lo si considera come funzione:

$$t = - \frac{e_1^2 e_2^2 \dots e_p^2 v^2}{g}$$

delle coordinate di un punto P , reale, corrente in π , si trova che t cambia di segno solo quando P attraversa in un punto generico (semplice) la $g = 0$ (mentre non cambia segno quando P attraversa in un punto generico una delle rette EE_i , oppure la retta r).

Qualora le regioni determinate in π da $g = 0$ si contraddistinguano (come è lecito) coi segni $+$ e $-$, in modo che regioni limitrofe abbiano segno opposto, la (10) (per la sua parte reale) si svolgerà in regioni di ugual segno.

Ora dal comportamento della $g = 0$ risulta che nell'intorno della curva composta colla r e colle EE_i (considerata nella sua parte reale) sono regioni

(*) Si sottintende che le equazioni di curve reali si debbano immaginare liberate dagli eventuali fattori numerici complessi.

(**) Per uno studio metodico sui procedimenti di « piccola variazione » vedasi la mia Memoria: *Sulla generazione di curve piane algebriche reali mediante « piccola variazione » di una curva spezzata* [Annali di Matematica, T. 22 (3), pagg. 117-169]. In essa si esclude però la presenza di componenti multiple. L'uso di queste ha qualche connessione con uno studio di CAYLEY [Sur les courbes aplaties (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris; T. 74; pagg. 708-712, 1872; oppure Coll. Math. Papers, VIII, pagg. 258-261)] e con qualche metodo di KLEIN [specialmente in *Riemann'sche Flächen* (Autogr. Vorlesungen, Göttingen, 1892)].

di ugual segno quelle prossime ai segmenti

$$A'_1 B'_1, A''_2 B''_2, \dots, A^{(k)}_k B^{(k)}_k$$

(indicandosi con $A^{(j)}_j B^{(j)}_j$ il segmento proiettivo di estremi $A^{(j)}_j B^{(j)}_j$, interno a $d^{(j)}$), mentre hanno segno opposto le rimanenti.

Per opportuna scelta del segno di t , la parte reale della (10) sarà dunque costituita da k ovali $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_k$, uno qualunque ω_i dei quali passa per i punti $A^{(j)}_j, B^{(j)}_j$ e proviene dalla « piccola variazione » per sdoppiamento del segmento $A^{(j)}_j B^{(j)}_j$ contato due volte.

La (10) possiede bensì ulteriori punti reali nei punti fondamentali reali di (C^n) , ma vi passa con rami immaginari coniugati.

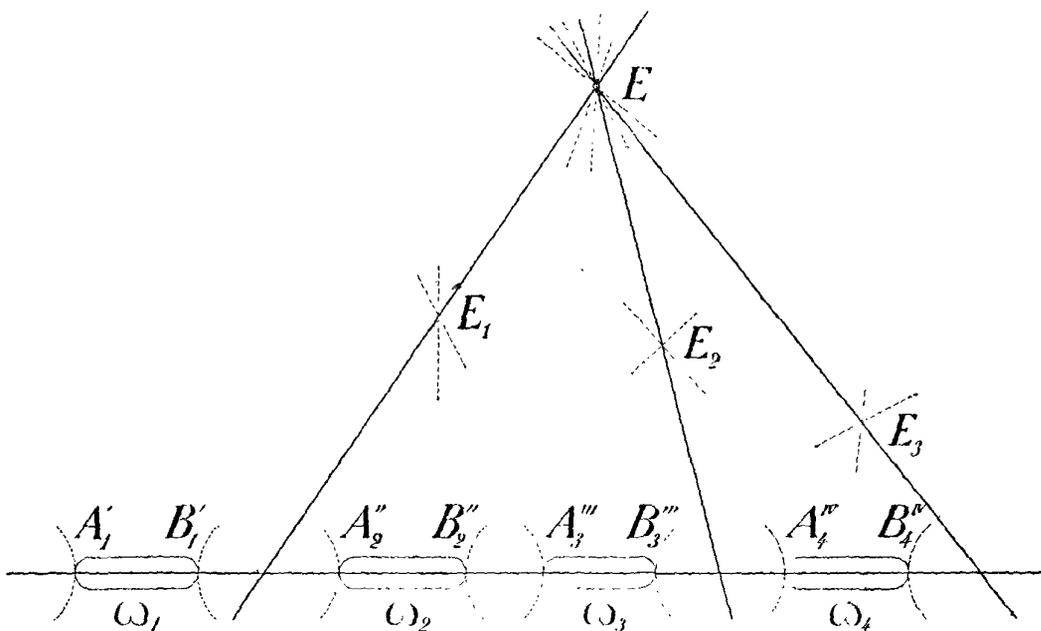


Fig. 7.

Tutto ciò risulta schematicamente dalla Fig. 7, ove la $g=0$ è segnata con tratto punteggiato.

19. La (10) è immagine di una particolare K^{2n}_0 , che indicherò con Γ^{2n} . Dico che Γ^{2n} è la curva richiesta.

Essa ha intanto (come ogni K^{2n}_0) l'ordine ed il genere richiesti (risp. $2n$ e p) e (num. 16) non possiede punti multipli. Inoltre, come pur si richiede,

consta nella sua parte reale dei k circuiti pari

$$\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_k$$

aventi per immagini gli ovali $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ della (10), poichè il comportamento di (10) nei punti fondamentali di (C^n) assoggetta Γ^{2n} soltanto al passaggio per punti immaginari coniugati di π_0 .

Rimane quindi a dimostrare che il sistema $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_k$ presenta il caso della concatenazione ordinaria (num. 1) e che il suo schema Σ di concatenazione è isomorfo ad S .

Si noti anzitutto come γ_j giaccia nella falda φ_j , si appoggi ad r_0 nei punti A_j, B_j della coppia c_j , anzi si possa ritenere ottenuto mediante « piccola variazione » per sdoppiamento del segmento $A_j B_j$, contato due volte, nella detta falda (quando con $A_j B_j$ si indichi il segmento proiettivo di estremi A_j, B_j interno al segmento d_0).

Si considerino ora due circuiti γ_i, γ_j . Se le coppie $c_i \equiv A_i B_i, c_j \equiv A_j B_j$ si separano, i circuiti γ_i, γ_j , come risulta dalla Fig. 8, sono fra loro concatenati; mentre se le coppie $c_i \equiv A_i B_i, c_j \equiv A_j B_j$ non si separano, i circuiti γ_i, γ_j non sono fra loro concatenati, come risulta dalla Fig. 9 oppure dalla Fig. 10; onde, ammessa la concatenazione ordinaria, risulta Σ isomorfo ad S .

D'altra parte, per la situazione dei circuiti $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_k$ lungo la r_0 , è intuitivo come tre o più di essi liberi a due a due siano affatto liberi e come perciò siano soddisfatte le condizioni contenute nella definizione di concatenazione ordinaria.

Così la ricerca iniziata al n. 17 è esaurita, ossia è dimostrato il Teorema I per il caso in cui sussista la (9).

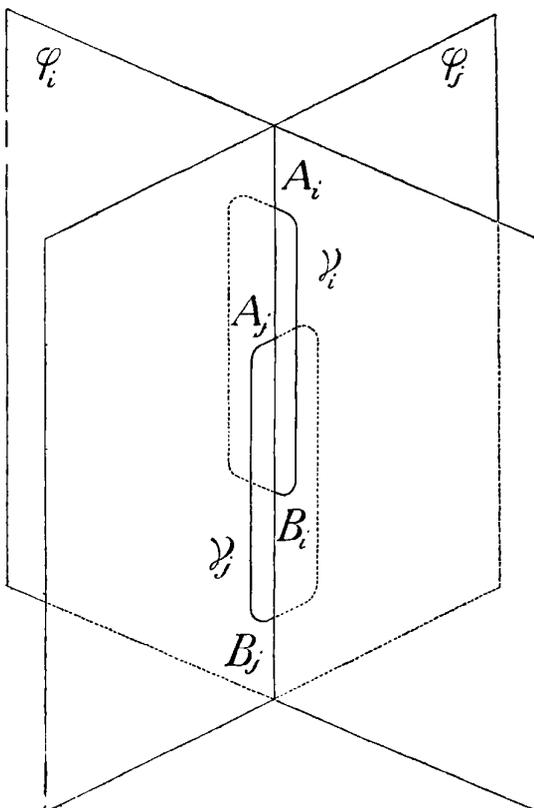


Fig. 8.

20. Si mantengano le (7) (8), ma, abbandonata la (9), si supponga invece

$$n \leq p + 1. \tag{11}$$

In tal caso in π si assumano:

1.° Una retta reale r e su di essa un'involuzione J_k (senza punti fissi)

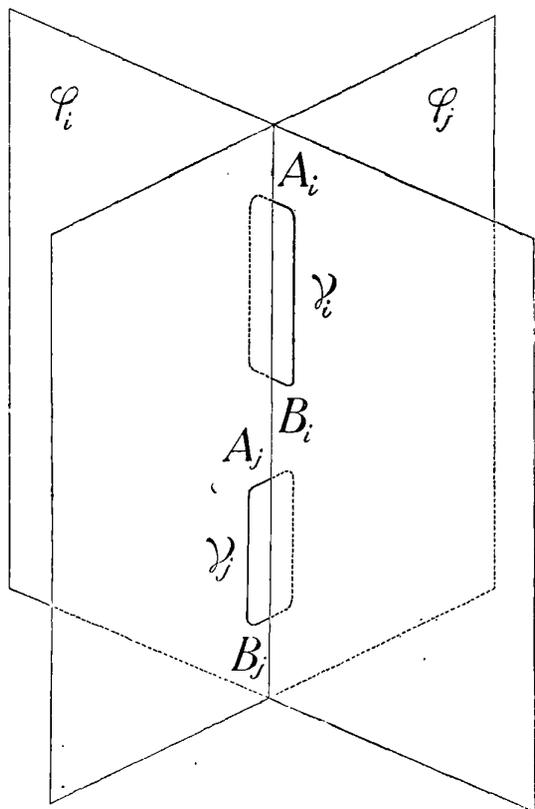


Fig. 9.

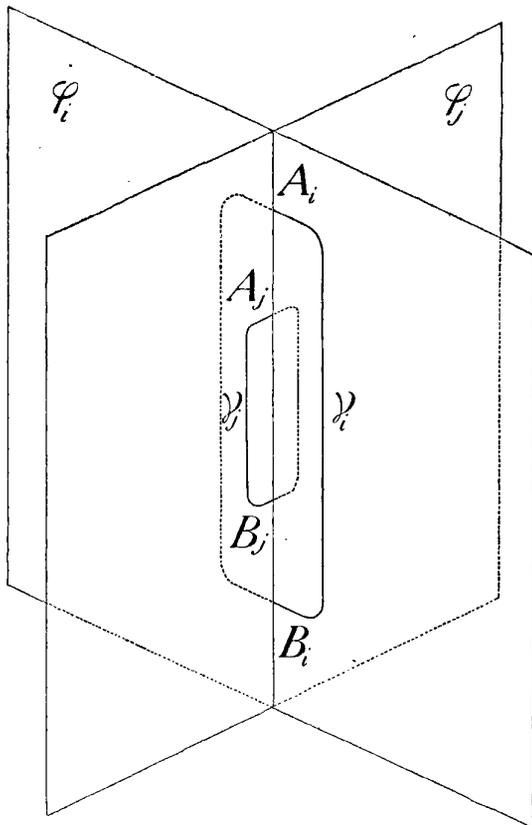


Fig. 10.

reale ∞^1 di grado k , di cui faccia parte un gruppo $H' H'' \dots H^{(k)}$ di punti tutti reali.

2.° Un punto reale E fuori di r .

3.° Un gruppo reale di $n - k$ punti $E_1 E_2 \dots E_{n-k}$ sopra r , algebricamente generici così fra loro come rispetto ad E ed a J_k [il che è possibile perchè dalle (7) (8) si deduce $n > k$].

4.° Un gruppo reale di $p - n + k$ punti $E_{n-k+1}, E_{n-k+2} \dots E_p$ fuori di r , algebricamente generici fra loro e rispetto ai dati precedentemente introdotti

[il che per la (11) è sempre possibile, quando si escluda il caso $k = 0, n = p + 1$, di cui è immediata la trattazione diretta].

Le curve C'' , d'ordine n , aventi in E un punto $(n - 1)$ plo, passanti (semplicemente) per ciascuno dei punti E_i e secanti ulteriormente r in gruppi della J_k formano un sistema lineare e reale $\infty^{2n-p-k+1}$, dal quale per la (7) è lecito estrarre un sistema lineare reale ∞^3 , che dirò (C'').

21. Con metodo simile a quello del num. 14 si interpreti (C'') come immagine del sistema costituito dalle sezioni piane di una rigata π_0 d'ordine $2n - p - 1$, in una rappresentazione reale di questa su π . Così si svolgano le osservazioni analoghe in relazione agli elementi fondamentali della corrispondenza fra π e π_0 .

Però nel caso presente la r sarà immagine di una retta r_0 multipla secondo k per π_0 e gli intorni dei punti $Q' Q'' \dots Q^{(k)}$ conjugati in J_k saranno immagini degli intorni di un punto Q_0 di π_0 , su k falde di π_0 .

La curva Δ_0 , doppia per π_0 , sarà d'ordine

$$\frac{1}{2} (2n - p + k - 3) (2n - p - k - 2)$$

e la sua immagine Δ , d'ordine:

$$(n + k - 2) (2n - p - k - 2)$$

avrà in E un punto multiplo secondo:

$$(n + k - 3) (2n - p - k - 2)$$

ed in ciascuno dei punti E_i un punto multiplo secondo:

$$2n - p - k - 2.$$

Le considerazioni sull'involuzione Θ si estendono semplicemente.

Si introducano infine in π le K^{2p+2} (d'ordine $2p + 2$, di genere p) con un punto $2p$ -plo in E e doppio in ciascun punto E_i ($i = 1, 2, \dots, p$), come immagini di curve K_0^{2n} di π_0 (d'ordine $2n$, di genere p), delle quali una generica non possiede punti doppi (il che si dimostra in modo ovvio col metodo del num. 16).

22. Assegnato uno schema di separazione S di specie k , la ricerca di r^{2n} (cioè di una K_0^{2n} la cui parte reale consti di un sistema di k circuiti

collo schema di concatenazione, ordinaria, isomorfo ad S) si svolge come nel caso precedente (num.¹ 17, 18, 19) con una lieve modificazione riguardante la scelta di

$$g = 0$$

la quale, fuori dei punti $A_j^g B_j^g$ ($j = 1, 2, \dots, k$) ed E_i ($i = 1, 2, \dots, n - k$), dovrà tagliare la r in $p - n + 1$ coppie [cfr. la (11)] di punti immaginari conjugati.

Così anche il secondo caso è esaurito ed il *Teorema I* è dimostrato.

§ 4. COROLLARÌ DEL TEOREMA I.

23. Si supponga che lo schema S di separazione coincida con uno dei tipi indicati al n. 11.

Dal *Teorema I* si deducono così i seguenti corollarì:

Dati gli interi (positivi o nulli) n, p, k soddisfacenti alle (7) (8):

I. *Esistono curve gobbe (reali, irriduttibili) d'ordine $2n$ e genere p , prive di punti multipli, aventi k circuiti pari concatenati a due a due in tutti i modi (concatenazione completa).*

II. *Esistono curve gobbe (reali, irriduttibili) d'ordine $2n$ e genere p , prive di punti multipli, aventi k circuiti pari concatenati in serie semplice aperta (il primo col secondo, il secondo col terzo, ..., il penultimo coll'ultimo).*

III. *Esistono curve gobbe (reali, irriduttibili) d'ordine $2n$ e genere p , prive di punti multipli, aventi k circuiti pari concatenati in serie semplice chiusa (il primo col secondo, il secondo col terzo, ..., l'ultimo col primo).*

24. Si richiami ora l'enunciato col quale ha termine il num. 9. Proposto un qualunque schema Σ di concatenazione (ordinaria) di specie $k < 6$, esso risulterà isomorfo ad uno schema S di separazione.

Perciò dal *Teorema I* si potrà pur dedurre che:

Dati gli interi (positivi o nulli) $n, p, k < 6$ soddisfacenti alle (7) (8) ed assegnato (ad arbitrio) uno schema di concatenazione Σ di specie k , esiste una curva gobba (irriduttibile) d'ordine $2n$ e genere p , priva di punti multipli, costituita nella sua parte reale da un sistema di k circuiti pari di schema Σ .

Se poi si osserva che per $p < 5$ la condizione $k < 6$ è implicita nella (8), si ricava:

Dati gli interi (positivi o nulli) n , $p < 5$, k , soddisfacenti alle (7) (8) ed assegnato (ad arbitrio) uno schema di concatenazione Σ di specie k , esiste una curva gobba (irriducibile) d'ordine $2n$ e genere p , priva di punti multipli, costituita nella sua parte reale da un sistema di k circuiti pari di schema Σ .

In altri termini, salva la restrizione imposta all'ordine dalla (7), il problema topologico-algebrico della concatenazione ordinaria fra circuiti tutti pari è pienamente risolto per i primi valori del genere ($p = 0, 1, 2, 3, 4$).

§ 5. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA II.

25. Siano gli interi (positivi o nulli) n, k, p soddisfacenti alle relazioni:

$$2n + 1 \geq p + k + 2 \quad (12)$$

$$0 < k \leq p + 1 \quad (13)$$

già introdotte nell'ipotesi del *Teorema II* (num. 4).

Si supponga dapprima:

$$n \geq p + 1, \quad (14)$$

nel qual caso la (12) discende dalla (13).

In un piano reale π si considerino:

1.° Una retta reale r e su di essa un'involuzione J_n reale ∞^1 di grado n , senza punti fissi, possedente un gruppo reale $H' H'' \dots H^{(n)}$ di cui k punti $H' H'' \dots H^{(k)}$ siano reali e distinti così fra loro come dai rimanenti [il che è sempre possibile perchè dalle (13) (14) si deduce $k \leq n$].

2.° Un punto reale E fuori di r .

3.° Un gruppo reale di $p - 1$ (*) punti E_i ($i = 1, 2, \dots, p - 1$) fuori di r , in posizione algebricamente generica rispetto ai dati precedentemente introdotti (per es. nessuna delle EE_i passerà per qualcuno dei punti $H^{(j)}$).

26. Dal sistema lineare reale ∞^{n-p+2} delle C^n d'ordine n , avente un punto $(n - 1)$ -plo in E , un punto semplice in ciascuno dei punti E_i e se-

(*) Si suppone implicitamente $p > 0$. La trattazione diretta del caso $p = 0$ non offre difficoltà. Per ogni ordine $2n + 1 \geq 3$ esistono curve gobbe razionali reali, necessariamente dotate di un solo circuito.

cante r in gruppi di J_n , è lecito per la (14) estrarre un sistema (C^n) lineare reale ∞^3 , ed interpretarne le curve come immagini delle sezioni piane di una rigata razionale π_0 d'ordine $2n - p$, rappresentata biunivocamente su π in modo che l'immagine di un punto P_0 reale di π_0 sia un punto P reale di π (e reciprocamente).

Le proprietà di π_0 , solo in qualche particolare differenti da quelle esposte ai num. 14 e 15 (*), si dimostrano con metodo analogo.

In π si consideri ora il sistema (K^{2p+1}) delle curve d'ordine $2p + 1$, aventi in E un punto $(2p - 1)$ -plo ed in ciascuno dei punti E_i un punto doppio. Il sistema (lineare, reale) è di dimensione $3p + 5$ e di genere p .

Una K^{2p+1} è immagine di una curva (gobba) K_0^{2n+1} (di π_0) d'ordine $2n + 1$ e di genere p .

Che una K_0^{2n+1} generica non possenga punti multipli, si dimostra col metodo del num. 16. L'esclusione di punti doppi provenienti dal passaggio dell'immagine K^{2p+1} per coppie di Θ si potrà p. es. verificare sulla K^{2p+1} spezzata nelle EE_i da contarsi ciascuna due volte, in una retta generica per E e in due rette generiche non congiungenti coppie di Θ .

27. Si assegni uno schema di separazione S di specie k e si fissi in esso una coppia. Esiste una K_0^{2n+1} (di genere p) costituita nella sua parte reale da un sistema di k circuiti (tutti pari salvo uno), il cui schema di concatenazione è isomorfo ad S in modo che alla coppia fissata corrisponda il circuito dispari.

Per dimostrare ciò, come al num. 17, si introducano i segmenti $d' d'' \dots d^{(k)}$ di r i quali contengano rispettivamente i punti $H' H'' \dots H^{(k)}$ ed i cui intorni in π siano immagini di quelli di un segmento d_0 della r_0 sopra k falde reali distinte $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_k$ di π_0 . Nessuna delle EE_i tagli un segmento $d^{(i)}$.

Sulla r_0 si assuma un sistema di coppie di punti

$$c_1 \equiv A_1 B_1, \quad c_2 \equiv A_2 B_2, \dots, \quad c_k \equiv A_k B_k$$

di schema S e, quando sia ad es. c_1 la coppia prefissata, si determini il sistema in modo che tutti i punti $A_i B_i$ siano su d_0 , escluso il punto B_1 , fuori di d_0 . Ciò è sempre possibile, come risulta da una osservazione esposta al num. 12.

(*) Ad es. i caratteri della curva doppia Δ_0 di π_0 e della sua immagine Δ in π si deducono da quelli indicati al num. 14 mutandovi p in $p - 1$.

L'intorno di $A_i (i = 1, 2, \dots, k)$, risp. di $B_i (i = 2, 3, \dots, k)$ su φ_j , sarà rappresentato in π dall'intorno di un punto $A_i^{(j)}$, risp. $B_i^{(j)}$, del segmento $d^{(j)}$.

28. È possibile, in più di un modo, determinare una K^{2p+1} reale, secante la r nei punti (reali):

$$A'_1; A''_2, B''_2; A'''_3, B'''_3; \dots; A_k^{(k)}, B_k^{(k)}$$

ed ulteriormente in $p - k + 1$ coppie assegnate di punti immaginari coniugati. Sia:

$$g = 0$$

la sua equazione in un sistema di riferimento reale.

Sia:

$$e_i = 0$$

l'equazione di $EE_i (i = 1, 2, \dots, p - 1)$; sia:

$$v = 0$$

quella di r ed infine sia:

$$a = 0$$

quella della retta EA'_1 . La:

$$e_1^2 e_2^2 \dots e_{p-1}^2 v^2 a + t g = 0, \tag{15}$$

per t reale e di valor assoluto abbastanza piccolo, è l'equazione di una curva reale ottenuta mediante « piccola variazione » da quella spezzata nelle rette $EE_1, EE_2, \dots, EE_{p-1}, r, EA'_1$, tutte contate due volte, all'infuori dell'ultima contata una volta.

La

$$t = - \frac{e_1^2 e_2^2 \dots e_{p-1}^2 v^2 a}{g},$$

pensata come funzione di un punto P reale, corrente in π , non muta segno quando P genericamente attraversa una delle EE , oppure la r , mentre muta di segno quando P genericamente attraversa EA'_1 , oppure $g = 0$.

Nella ripartizione di π in regioni contrassegnabili coi segni $+$ e $-$, prodotta dalla $g = 0$ e da EA'_1 , insieme considerate, la (15) si svolgerà in regioni di ugual segno. D'altra parte nell'intorno (reale) di r hanno ugual segno le regioni prossime ai segmenti

$$A''_2 B''_2, A'''_3 B'''_3, \dots, A_k^{(k)} B_k^{(k)}$$

[intendendo che $A_j^{(j)} B_j^{(j)}$ ($j > 1$), fra i segmenti cogli estremi indicati, sia quello interno a $d^{(j)}$]; hanno segno opposto le rimanenti.

Segue che, per opportuna scelta del segno di t la parte reale della (15) consta di un circuito dispari ω_1 (prossimo alla EA'), secante in A' , la r e di $k-1$ ovali $\omega_2 \omega_3 \dots \omega_k$, uno qualunque ω_j , dei quali passa per $A_j^{(j)}$, $B_j^{(j)}$ e proviene dalla « piccola variazione » per sdoppiamento del segmento $A_j^{(j)} B_j^{(j)}$ contato due volte. La (15) possiede bensì ulteriori punti reali nei punti fondamentali reali di (C^n) , ma vi passa con rami tutti immaginari conjugati, quando, come è implicito, si escluda in E il ramo reale fornito da ω_1 .

Si veda perciò la rappresentazione schematica di Fig. 11.

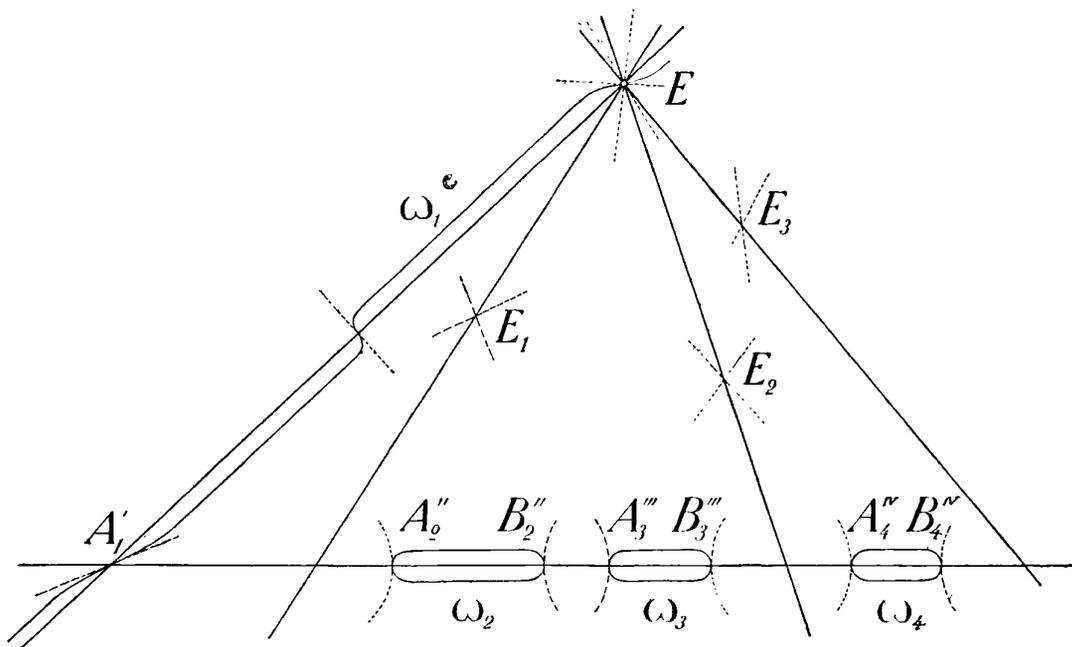


Fig. 11.

29. La (15) è immagine di una K_0^{2n+1} che indicherò con Γ^{2n+1} . La Γ^{2n+1} è la curva richiesta (num. 27).

Essa è infatti d'ordine $2n+1$, di genere p e consta nella sua parte reale di k circuiti $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_k$ (aventi risp. le immagini $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_k$), tutti pari all'infuori di γ_1 che è dispari [non producendo il comportamento di (15) nei punti fondamentali di (C^n) ulteriori punti reali di Γ^{2n+1}]. Rimane a provarsi che la concatenazione di Γ^{2n+1} è ordinaria e che lo schema è, nel modo voluto, isomorfo ad S , ossia, poichè già alla coppia prefissata c_1 , corrisponde il circuito dispari γ_1 , che a coppie c_i , separantisi (risp. non separantisi) corrispondono circuiti γ_i concatenati (risp. liberi).

Per ciò che riguarda la natura della concatenazione e per quanto si riferisce alle coppie di circuiti pari γ_i, γ_j ($i > 1, j > 1$) la dimostrazione procede come al num. 19.

Per quanto invece si riferisce ad una coppia γ_i, γ_j ($j > 1$), si osservi che γ_i si ricava per « piccola variazione » ordinaria dalla generatrice di π_0 secante

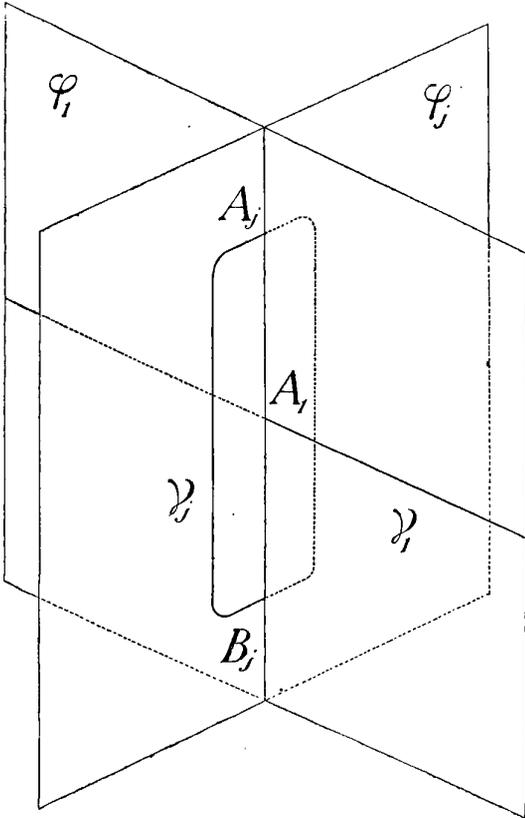


Fig. 12.

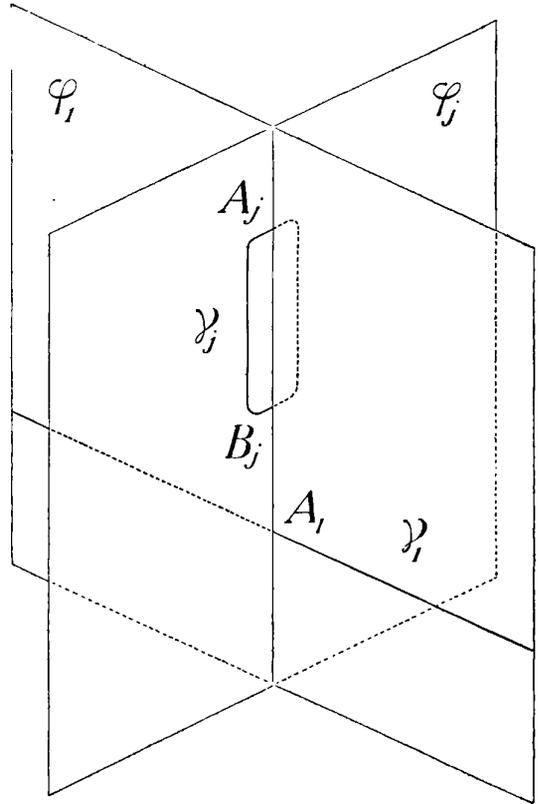


Fig. 13.

r_0 in A_1 e (nell'intorno di A_1) appartenente a φ_i , mentre γ_j si deduce mediante « piccola variazione » per sdoppiamento nella falda φ_j del segmento $A_j B_j$ contato due volte (al solito intendendosi per $A_j B_j$ il segmento avente gli estremi indicati e interno a d_0).

D'altra parte poichè B_1 , esterno a d_0 , è pure esterno ad $A_j B_j$, il punto A_1 sarà interno oppure esterno ad $A_j B_j$, secondo che la c_j separi o non separi c_1 . Ora nel primo caso γ_i e γ_j sono mutuamente concatenati, come risulta dalla Fig. 12, mentre nel secondo γ_i e γ_j sono mutuamente liberi, come risulta dalla Fig. 13.

L'isomorfismo è così dimostrato e la trattazione del caso attuale è esaurita.

30. Rimane a considerarsi il caso in cui [permanendo le (12) (13)] anzichè la (14) valga la

$$n \leq p. \quad (16)$$

L'analogia che esso presenta sotto un certo aspetto col caso precedente, e sotto l'altro col caso svolto ai num.¹ 20, 21, 22, può dispensare da una trattazione particolareggiata.

S'introducano, in modo algebricamente generico:

1.^o Una retta reale r e su di essa un'involuzione J_k (senza punti fissi) reale ∞^1 di grado k , di cui faccia parte un gruppo $H'H'' \dots H^{(k)}$ di punti tutti reali.

2.^o Un punto reale E fuori di r .

3.^o Un gruppo reale di $n - k$ punti $E_1 E_2 \dots E_{n-k}$ sopra r .

4.^o Un gruppo reale di $p - n + k - 1$ punti $E_{n-k+1}, E_{n-k+2}, \dots E_{p-1}$ fuori di r .

Le C^n d'ordine n aventi un punto $(n - 1)$ -plo in E , un punto semplice in ciascun punto E_i , secanti ulteriormente r in gruppi di J_k formano un sistema lineare, reale, $\infty^{2n-p-k+2}$, dal quale per la (12) si potrà estrarre il sistema $\infty^3 (C^n)$, immagine di quello delle sezioni piane di una rigata razionale, colle condizioni di realtà analoghe a quelle altrove esposte.

Fissato uno schema di separazione S , fra le K^{2p+1} con punto $(2p - 1)$ -plo in E e doppio in ciascuno dei punti E_i , è lecito, coi metodi dei num.¹ 27, 28, 29, scegliere la curva immagine di una curva Γ^{2n+1} di genere p , i cui circuiti $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_k$ (tutti pari salvo uno) formino un sistema collo schema di concatenazione isomorfo, in modo prefissato, ad S .

Così anche il *Teorema II* è interamente dimostrato.

§ 6. COROLLARÎ DEL TEOREMA II.

31. La supposizione che S presenti uno dei tipi del num. 11 conduce ad alcuni corollari del *Teorema II*, analoghi a quelli già dedotti dal *Teorema I* ed esposti al num. 23. Essi sono i seguenti:

Dati gli interi (positivi o nulli) n, p, k soddisfacenti alle (12) (13):

I. *Esistono curve gobbe (reali, irriduttibili) d'ordine $2n+1$ e di genere p , prive di punti multipli, i cui k circuiti, tutti pari salvo uno dispari, sono concatenati a due a due in tutti i modi (concatenazione completa).*

II. *Esistono curve gobbe (reali, irriduttibili) d'ordine $2n+1$ e di genere p , prive di punti multipli, i cui k circuiti, tutti pari salvo uno dispari, sono concatenati in serie semplice aperta, occupando il circuito dispari nella serie un posto prefissato ad arbitrio.*

III. *Esistono curve gobbe (reali, irriduttibili) d'ordine $2n+1$ e di genere p , prive di punti multipli, i cui k circuiti, tutti pari salvo uno dispari, sono concatenati in serie semplice chiusa.*

32. Così i corollari del *Teorema I* esposti al num. 24 trovano i loro analoghi in altri del *Teorema II*, parimenti ricavati dall'enunciato in fine del num. 9. Cioè:

Dati gli interi (positivi o nulli) n , p , $k < 6$ soddisfacenti alle (12) (13) ed assegnato (ad arbitrio) uno schema di concatenazione Σ di specie k , esiste una curva gobba (irriduttibile) d'ordine $2n+1$ e di genere p , priva di punti multipli, costituita nella sua parte reale da un sistema di k circuiti (tutti pari salvo uno dispari), avente lo schema Σ , arbitraria restando la scelta del posto occupato in Σ dal circuito dispari.

Onde:

Dati gli interi (positivi o nulli) n , $p < 5$, k soddisfacenti alle (12) (13) ed assegnato (ad arbitrio) uno schema di concatenazione Σ di specie k , esiste una curva gobba (irriduttibile) d'ordine $2n+1$ e di genere p , priva di punti multipli, costituita nella sua parte reale da un sistema di k circuiti (tutti pari salvo uno dispari), avente lo schema Σ , arbitraria restando la scelta del posto occupato in Σ dal circuito dispari.

Sulla portata del risultato valgono osservazioni analoghe a quelle del citato num. 24.

§ 7. SU QUALCHE CONDIZIONE NECESSARIA
PER L'ESISTENZA DI UNA CURVA D'ORDINE E GENERE DATI
AVENTE UNO SCHEMA DI CONCATENAZIONE PREFISSATO.

33. Il problema topologico-algebrico della concatenazione ordinaria, per circuiti tutti pari salvo al più uno dispari, è stato risolto nei paragrafi che precedono colle restrizioni seguenti:

I. Lo schema Σ di concatenazione è isomorfo ad uno schema S di separazione.

II. L'ordine m è $\cong p + k + 2$ (essendo p il genere della curva e k il numero dei circuiti).

III. È $k \leq p + 1$ (e per m dispari $k > 0$).

Di esse la III è necessaria (vedi num.¹ 3, 4).

Nell'intento di delimitare il campo entro il quale le condizioni I e II possano essere sostituite con altre meno restrittive, svolgo alcune semplici considerazioni. Esse condurranno a stabilire qualche condizione necessaria per l'esistenza di una soluzione del problema proposto.

34. Premetto il seguente:

LEMMA. *Dati due circuiti $\gamma \gamma'$, se esiste un centro fuori di essi, dal quale vengano proiettati su di un piano in circuiti non secantisi, γ e γ' sono mutuamente liberi.*

Nell'ipotesi è implicito che uno almeno dei circuiti $\gamma \gamma'$ sia pari, perchè due circuiti dispari da un centro fuori di essi sono proiettati in due circuiti dispari, e questi necessariamente si tagliano. La tesi ha dunque un preciso significato in base a precedenti convenzioni (vedi num.¹ 1, 4).

Perciò, se ad es. γ è pari, qualunque sia γ' , per la dimostrazione del Lemma basterà provare che γ si può ridurre mediante deformazione continua ad un punto senza attraversare γ' .

Sia O il centro di proiezione, che per semplicità di linguaggio suppongo al finito, e sia C il cono proiettante γ .

Poichè O è fuori di γ , si può considerare una sfera Ω di centro O non includente punti di γ . La Ω segnerà C in due circuiti δ_1, δ_∞ distinti (ma eventualmente secantisi) e diametralmente opposti su Ω (*). Se su δ_1 si fissa un senso positivo ed un'origine degli archi, e si indica con x la lunghezza dell'arco così contato, ad ogni valore di x corrisponde una ed una sola generatrice di C (quando si considerino distinte generatrici coincidenti in una multipla di C ma poste su falde diverse), quindi uno ed un sol punto di γ . Su ogni generatrice di C si fissino i punti D_1, D_∞ di intersezione con δ_1, δ_∞ e si assuma il sistema di coordinate proiettive in cui ad O, D_1, D_∞ competano le coordinate $zero, 1, \infty$; dicasi y la coordinata del punto corrente.

(*) Per una proprietà caratteristica dei circuiti pari già osservata da MÖBIUS [vedi BERZOLARI, *Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven* (Enc. der Math. Wiss., III, 2, Heft 3) a pagg. 385-386].

Allora il circuito γ sarà rappresentato su C da un'equazione

$$y = f(x)$$

ove $f(x)$ è funzione di x continua, finita, costantemente positiva e periodica, con periodo uguale alla lunghezza dell'intero circuito δ_1 .

Analogamente la

$$y = t f(x)$$

ove t sia un numero positivo, rappresenta un circuito su C , in condizioni topologicamente analoghe a quelle di γ . Se, partendo dal valore $t = 1$, si fa decrescere e tendere a zero t con continuità, si ottiene una deformazione continua di γ che lo riduce a coincidere col punto O per scorrimento su C .

Ma, per l'ipotesi, γ' e C non hanno punti comuni, onde in tale deformazione γ non attraversa γ' (*) ed il Lemma è dimostrato.

Segue che:

Se due circuiti γ, γ' (di cui almeno uno pari) sono concatenati, essi sono proiettati da un centro generico su di un piano in due circuiti che si tagliano in due punti almeno.

Ciò risulta dal Lemma, quando si osservi che anche nella proiezione uno almeno dei circuiti è pari.

35. Sia Γ^m una curva gobba, reale, irriduttibile, priva di punti multipli, d'ordine m e di genere p , costituita nella sua parte reale da un sistema di $k > 1$ circuiti $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$, tutti pari salvo al più uno. Sia:

$$\gamma_{i_1} \gamma_{j_1}, \gamma_{i_2} \gamma_{j_2}, \dots, \gamma_{i_q} \gamma_{j_q}$$

lo schema Σ (di concatenazione ordinaria) del sistema e si consideri, insieme alla sua specie k , anche il numero q delle coppie di circuiti mutuamente concatenati (indice dello schema).

Il numero dei punti doppi apparenti (reali od immaginari) di Γ^m è dato da:

$$\frac{1}{2} (m - 1) (m - 2) - p.$$

D'altra parte (vedi numero precedente), per un centro di proiezione O ge-

(*) Può però talora attraversare se stesso su una generatrice doppia per C , che considerata sull'una e sull'altra falda dia luogo a sistemi di riferimento diversi per lo scambio di D_1, D_∞ .

nerico ciascuna delle q coppie di circuiti mutuamente concatenati porta il contributo di (almeno) *due punti doppi apparenti reali*.

Altri due punti doppi apparenti reali si possono ottenere con opportuna scelta del centro O . Su un circuito γ_i pari (di Γ^m) si assumano infatti tre punti non allineati $P_1 P_2 P_3$; il piano $P_1 P_2 P_3$ non contiene γ_i (perchè Γ^m è gobba irriduttibile) e quindi lo taglia ulteriormente in un punto almeno; sia questo P_4 . Se si sceglie, come centro O , il punto in cui si tagliano le rette $P_1 P_2, P_3 P_4$, lo scopo è raggiunto.

Segue:

$$\frac{1}{2} (m-1)(m-2) - p \geq 2q + 2,$$

che più semplicemente si scrive:

$$m(m-3) \geq 2(p+2q+1). \quad (17)$$

La (17) lega l'ordine ed il genere assegnati per la curva coll'*indice* dello schema di concatenazione proposto e costituisce appunto una *condizione necessaria* per la risolubilità del problema della concatenazione ordinaria.

Fissati p e q la (17) stabilisce un limite inferiore per m , generalmente più basso di quello fornito dalla condizione II (num. 33).

Se lo schema proposto è quello di concatenazione completa, deve porsi:

$$q = \frac{1}{2} k(k-1)$$

e la (17) si trasforma nella:

$$m(m-3) \geq 2(p+k^2-k+1). \quad (18)$$

La (18) sarà da considerarsi come *condizione necessaria* per la risolubilità del problema ad es. nell'intero campo determinato dalla condizione I (num. 33), tenuta presente, com'è naturale, la III.

Ricerche intorno ad una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali (*).

(Di LUIGI BIANCHI, a Pisa.)

PREFAZIONE.

Nella teoria dei sistemi tripli di superficie ortogonali dello spazio (euclideo) abbiamo tre sistemi fondamentali di equazioni a derivate parziali del primo ordine a cui soddisfano gli elementi che determinano intrinsecamente il sistema (**). Il primo gruppo di queste equazioni è quello per le sei rotazioni β_{ik} ($i \neq k \equiv 1, 2, 3$) e si scrive:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} &= \beta_{ii} \beta_{ik} \\ \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} &= -\beta_{ii} \beta_{ik}, \end{aligned} \right\} \quad (i \neq k \neq l) \quad (a)$$

dove per (i, k, l) si pongono successivamente le permutazioni degli indici $(1, 2, 3)$. Le rotazioni β_{ik} fissano la *rappresentazione sferica*, e sono comuni ad una infinità di sistemi tripli ortogonali (dipendente da tre funzioni arbitrarie), che hanno, in punti corrispondenti, eguale orientazione del triedro principale. Questi sistemi diconsi *trasformati di Combescure* l'uno dell'altro, od anche, con una più breve denominazione di DARBOUX, *sistemi paralleli*.

(*) Una prima parte dei risultati di queste ricerche ha fatto oggetto di una mia comunicazione nei *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei* (16 maggio 1915). Alcune considerazioni fondamentali della Nota vengono qui riprodotte.

(**) Vedi DARBOUX, *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes* (2^{ème} édition, 1910). — Cfr. particolarmente Livre III, Chap. V, oppure le mie *Lezioni di geometria differenziale* (2.^a ediz.), §§ 413, 414.

Assegnate le rotazioni β_{ik} in funzione di u_1, u_2, u_3 (in guisa da soddisfare alle (a)), l'orientazione del triedro principale, coi coseni di direzione (X_i, Y_i, Z_i) $i = 1, 2, 3$ pei suoi tre spigoli, è determinata, a meno di movimenti nello spazio, dal sistema completamente integrabile di equazioni ai differenziali totali:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_i}{\partial u_i} &= -\beta_{ki} X_k - \beta_{ii} X_i \\ \frac{\partial X_i}{\partial u_k} &= \beta_{ik} X_k, \end{aligned} \right\} \quad (i = k = l) \quad (a')$$

colle analoghe per Y_i, Z_i .

Ogni sistema triplo ortogonale colle rotazioni β_{ik} si può individuare in due modi diversi, sostanzialmente equivalenti, e cioè: 1.º col determinare i coefficienti H_i^2 della espressione del ds^2 dello spazio, riferito al sistema triplo ortogonale (u_1, u_2, u_3)

$$ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + H_3^2 du_3^2; \quad (1)$$

2.º dalle espressioni delle tre distanze algebriche di un punto fisso dello spazio (dell'origine) dalle tre facce del triedro principale, quantità che indichiamo con W_1, W_2, W_3 (*).

Queste quantità H_i, W_i sono legate alle rotazioni β_{ik} dagli altri due degli accennati sistemi di equazioni a derivate parziali

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k, \quad (b) \quad \frac{\partial W_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} W_k. \quad (b^*)$$

Le condizioni di integrabilità per l'uno o per l'altro sistema sono soddisfatte, a causa delle (a) della prima linea, e l'integrale generale (H_1, H_2, H_3) o (W_1, W_2, W_3) , delle (b) o delle (b*), viene a dipendere da tre funzioni arbitrarie essenziali (**). Nel primo modo, nota una terna (H_1, H_2, H_3) soluzione delle (6), si ha per quadrature il corrispondente sistema triplo ortogonale (a meno di una traslazione) dalle formole

$$\frac{\partial x}{\partial u_i} = H_i X_i, \quad \frac{\partial y}{\partial u_i} = H_i Y_i, \quad \frac{\partial z}{\partial u_i} = H_i Z_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2)$$

(*) Le stesse quantità sono indicate da DARBOUX con P_0, P_1, P_2 .

(**) Per un sistema iniziale di valori delle u_i , per es. per $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, si può assegnare ad arbitrio la funzione di u_i cui si riduce la H_i (o la W_i) quando vi si fa $u_k = u_l = 0$.

Nel secondo modo, nota una terna (W_1, W_2, W_3) soluzione delle (b^*) , si ha il corrispondente sistema triplo ortogonale *in termini finiti* colle formole

$$x = \sum_i S W_i X_i, \quad y = \sum_i S W_i Y_i, \quad z = \sum_i S W_i Z_i. \quad (3)$$

I due sistemi lineari (b) , (b^*) si diranno associati, o anche si dirà l'uno *aggiunto* dell'altro per questa proprietà d'immediata dimostrazione. Se (H_1, H_2, H_3) è una soluzione delle (b) , e (W_1, W_2, W_3) una soluzione delle (b^*) , l'espressione $\sum_i S H_i W_i d u_i$ è un differenziale esatto.

Corrispondentemente a questa relazione analitica fra il sistema (b) ed il suo aggiunto (b^*) , in diverse questioni concernenti i sistemi tripli ortogonali, si manifesta come una sorta di reciprocità fra le proprietà che dipendono dalle H_i e quelle che si legano alle W_i . Ed ogni qualvolta si abbia una classe di sistemi tripli ortogonali che sia definita da proprietà delle H_i , vi è luogo di domandare se esiste una classe, da dirsi *reciproca*, definita dalle corrispondenti proprietà delle W_i . A queste considerazioni si legano appunto le ricerche della presente Memoria, nel modo che andiamo a dire.

La classe dei sistemi tripli ortogonali (u_1, u_2, u_3) , nei quali ciascuna superficie della serie $u_3 = \text{cost.}$ ha costante la curvatura (variabile in generale con u_3), può ritenersi definita (vedi § 1) da questa proprietà che, scegliendo opportunamente i parametri u_1, u_2 , i coefficienti H_1^2, H_2^2 si trovano legati da una relazione lineare a coefficienti costanti, alla quale, senza alterare la generalità, possiamo dare la forma $H_1^2 - H_2^2 = \text{cost.}$, o l'altra $H_1^2 + H_2^2 = \text{cost.}$, secondo che la curvatura delle $u_3 = \text{cost.}$ è positiva o negativa.

Nel senso sopra indicato, sarà da considerarsi come reciproca della precedente la classe di sistemi tripli ortogonali (se esistono) per la quale si abbia

$$W_1^2 + c W_2^2 = \text{cost.}, \quad (\alpha)$$

dove c è una costante arbitraria, il cui valore è qui per altro essenziale, come risulta dal significato geometrico assoluto di W_1, W_2 . Dimosteremo che, escluso il caso assurdo $c = 0$, ed ancora l'altro $c = 1$ che porterebbe al caso ovvio di superficie parallele (evolventi della sfera), per ogni altro valore di c esistono in effetto sistemi tripli ortogonali della classe (α) e dipendono da tre funzioni arbitrarie essenziali, come i sistemi di WEINGARTEN. La determinazione di questi sistemi ortogonali si collega, in modo singolare

geometrico, colla teoria delle congruenze pseudosferiche, più particolarmente con quei sistemi di superficie pseudosferiche che ho denominato *sistemi obliqui di Weingarten* (*). La teoria di questi sistemi obliqui, costruita nella Memoria ora citata, assume così una nuova interpretazione, e in particolare dà luogo a trasformazioni, che possono ancora dirsi di BÄCKLUND, dei sistemi tripli ortogonali della classe (α).

Ma un'altra ricerca analoga di sistemi tripli ortogonali reciproci conduce ancora a questa teoria dei sistemi obliqui di WEINGARTEN; si tratta qui della classe reciproca dei sistemi ortogonali che diciamo di *Guichard-Darboux* (**), caratterizzati dalla relazione fra le H ,

$$H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = a(x^2 + y^2 + z^2) + b \quad (a, b \text{ costanti}).$$

Siccome $x^2 + y^2 + z^2 = W_1^2 + W_2^2 + W_3^2$, sono da dirsi reciproci di questi gli eventuali sistemi tripli ortogonali che soddisfino ad una relazione della forma

$$k_1 W_1^2 + k_2 W_2^2 + k_3 W_3^2 = \text{cost.}, \quad (\beta)$$

dove k_1, k_2, k_3 sono tre costanti da supporre soltanto diseguali, per escludere i casi ovvii che nel sistema figurino serie di sviluppabili. Se una delle costanti k_i si annulla, si ricade nei sistemi della classe (α); in generale i sistemi (β), prendendo comunque le costanti k , esistono nella stessa generalità dei sistemi della classe (α), coi quali hanno inoltre a comune la *rappresentazione sferica*. Fissando l'attenzione sulle rotazioni β_{ik} in questa immagine *sferica*, si vede che i quadrati delle rotazioni in ciascuna coppia

$$(\beta_{21}, \beta_{31}), (\beta_{32}, \beta_{12}), (\beta_{13}, \beta_{23})$$

sono legati da una relazione lineare a coefficienti costanti. Questa è una circostanza *caratteristica* per la detta immagine sferica; anzi basta supporre che una tale relazione abbia luogo per una delle tre coppie, perchè la stessa cosa si verifichi per le altre due.

Le tre indicate relazioni quadratiche fra le rotazioni permettono di ridurre a forme normali semplici (§ 6) il sistema di equazioni a derivate parziali da cui il problema dipende, ed, interpretate geometricamente, ne fanno vedere la relazione colla teoria dei sistemi obliqui di WEINGARTEN.

(*) *Annali di Matematica*, Serie 3^a, Tomo XIX (1912).

(**) Vedi DARBOUX, I. c., Livre III, Chap. X.

Dopo questi risultati, siamo condotti a considerare, in generale, quei sistemi tripli ortogonali che hanno la stessa immagine sferica dei sistemi della classe (α) o (β) ; questi diciamo *sistemi* (Ω) per ricordare il loro legame coi sistemi obliqui (Ω_σ) di WEINGARTEN, *ad angolo σ costante* (Cf. m. c.). In tutti i sistemi (Ω) le superficie di ciascuna delle tre serie godono della singolare proprietà che la congruenza delle loro normali ha i raggi paralleli a quelli di una congruenza pseudosferica e le linee di curvatura della superficie corrispondono alle asintotiche delle due falde pseudosferiche focali. Inoltre la distanza dei punti limiti e l'angolo dei piani focali in queste congruenze pseudosferiche conservano, per ciascuna delle tre serie, i medesimi valori costanti. Aggiungiamo che, mentre per tutte le tre serie le dette congruenze pseudosferiche sono *reali*, per una soltanto hanno fuochi (sviluppabili) reali, invece per le altre due serie le sviluppabili sono immaginarie (coniugate). Così, in questa teoria dei sistemi ortogonali (Ω) , vengono a presentarsi, insieme alle congruenze pseudosferiche ordinarie (a sviluppabili reali), anche le congruenze pseudosferiche *reali*, ma a sviluppabili immaginarie.

In riguardo poi a quella serie di superficie nel sistema (Ω) , diciamo le $u_3 = \text{cost.}$, le cui congruenze pseudosferiche associate hanno sviluppabili reali, la indicata proprietà geometrica può trasformarsi nell'altra equivalente: *Ogni superficie $u_3 = \text{cost.}$ nel sistema (Ω) è divisa in parallelogrammi infinitesimi di eguale area da un doppio sistema di linee della superficie, che si tagliano sotto angolo costante 2σ , ed hanno per bisettrici le linee di curvatura.*

Questa proprietà caratterizza perfettamente i sistemi tripli ortogonali (Ω) , sicchè le presenti ricerche risolvono completamente il problema di associare in famiglie di LAMÉ le superficie a cui appartiene la descritta proprietà per le traiettorie isogonali, sotto angolo costante, delle linee di curvatura.

Pei sistemi (Ω) , in generale, si può costruire una teoria delle trasformazioni di BÄCKLUND, e delle trasformazioni di LIE, deducendola da quella già nota pei sistemi obliqui di WEINGARTEN. Ma esistono in questo caso delle trasformazioni molto più semplici, che diciamo *trasformazioni parallele*, perchè conducono da un sistema (Ω) ad altri colla medesima immagine sferica. L'esistenza di queste trasformazioni è essenzialmente legata alle indicate relazioni quadratiche fra le rotazioni. Una terza classe di trasformazioni dei sistemi Ω si ottiene dalla inversione per raggi vettori reciproci, osservando che un particolare sistema (Ω) della classe (β) , quando si annulli la costante del secondo membro, è cangiato da un'inversione col centro nell'origine in un altro sistema della stessa specie. Le trasformazioni così ottenute sono *trasformazioni di Ribaucour* per inviluppi di sfere.

Negli ultimi paragrafi della Memoria (29-31) ci occupiamo brevemente di una doppia generalizzazione dei sistemi (Ω). La prima si ottiene sostituendo ai particolari sistemi obliqui di WEINGARTEN ad angolo σ costante i generali *con angolo σ variabile*. Nei sistemi tripli ortogonali che ne derivano le superficie della serie $u_3 = \text{cost.}$ hanno ancora, ciascuna, le normali parallele ai raggi di una congruenza pseudosferica, e le loro linee di curvatura corrispondono alle asintotiche delle due falde focali; ma l'angolo dei due piani focali è in questo caso variabile colla superficie $u_3 = \text{cost.}$

La seconda ulteriore generalizzazione risulta dal considerare sistemi tripli ortogonali che dipendono, in modo analogo, da quelle congruenze W , più generali delle pseudosferiche, le cui falde focali hanno in punti corrispondenti eguale curvatura.

Avvertiamo in fine, senza più ripeterlo nel corso della Memoria, che escluderemo sempre nelle ricerche seguenti i casi ovvii in cui nel sistema triplo figurino delle sviluppabili. Per ciò: *nessuna delle rotazioni β_{ik} potrà annullarsi, nè ridursi ad una costante.*

§ 1.

I SISTEMI TRIPLI ORTOGONALI CON $a H_1^2 + b H_2^2 = c$.

Cominciamo le nostre ricerche col dimostrare che se in un sistema triplo ortogonale (u_1, u_2, u_3) sussiste, per una conveniente scelta dei parametri u_1, u_2 , la relazione quadratica fra H_1, H_2

$$a H_1^2 + b H_2^2 = c \quad (a, b, c \text{ costanti}), \quad (4)$$

le superficie della serie $u_3 = \text{cost.}$ saranno, ciascuna, a curvatura costante. Per questa ricerca, e per tutte le seguenti, conviene scrivere per disteso i sistemi differenziali (a), (b), (b*). Le nove equazioni per le sei rotazioni sono:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_3} &= \beta_{13} \beta_{32}, & \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_1} &= \beta_{21} \beta_{13}, & \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_2} &= \beta_{32} \beta_{21}, \\ \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_3} &= \beta_{31} \beta_{23}, & \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_1} &= \beta_{12} \beta_{31}, & \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_2} &= \beta_{23} \beta_{12}, \\ \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} &= -\beta_{31} \beta_{32}, & \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} + \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_3} &= -\beta_{12} \beta_{13}, \\ & & \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_3} + \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1} &= -\beta_{23} \beta_{21}. \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

Le equazioni del sistema (b) si scrivono

$$\left. \begin{aligned} * \quad , \quad \frac{\partial H_1}{\partial u_2} = \beta_{21} H_2, \quad \frac{\partial H_1}{\partial u_3} = \beta_{31} H_3, \\ \frac{\partial H_2}{\partial u_1} = \beta_{12} H_1, \quad * \quad , \quad \frac{\partial H_2}{\partial u_3} = \beta_{32} H_3, \\ \frac{\partial H_3}{\partial u_1} = \beta_{13} H_1, \quad \frac{\partial H_3}{\partial u_2} = \beta_{23} H_2, \quad * \quad , \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

e quelle del sistema aggiunto (b*)

$$\left. \begin{aligned} * \quad \frac{\partial W_1}{\partial u_2} = \beta_{12} W_2, \quad \frac{\partial W_1}{\partial u_3} = \beta_{13} W_3, \\ \frac{\partial W_2}{\partial u_1} = \beta_{21} W_1, \quad * \quad , \quad \frac{\partial W_2}{\partial u_3} = \beta_{23} W_3, \\ \frac{\partial W_3}{\partial u_1} = \beta_{31} W_1, \quad \frac{\partial W_3}{\partial u_2} = \beta_{32} W_2, \quad * \quad . \end{aligned} \right\} \quad (B^*)$$

Nella relazione (4) supposta le costanti a, b saranno ambedue diverse da zero, altrimenti sarebbe costante H_2 o H_1 , e si annullerebbe per le (B) qualche rotazione, ciò che escludiamo. Variando ciascuno dei parametri u_1, u_2 per un fattore costante, si introducono nelle costanti a, b dei fattori positivi arbitrari; perciò la (4), secondo che le costanti a, b hanno lo stesso segno o il contrario, può ridursi alla forma

$$H_1^2 + H_2^2 = \text{cost.}, \quad (4')$$

oppure all'altra

$$H_1^2 - H_2^2 = \text{cost.} \quad (4'')$$

Sviluppando i calcoli per la prima (4'), cominciamo dal derivarla rapporto ad u_1, u_2, u_3 , ciò che dà per le (B)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_1}{\partial u_1} = -\beta_{12} H_2, \quad \frac{\partial H_2}{\partial u_2} = -\beta_{21} H_1, \\ \beta_{31} H_1 + \beta_{32} H_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Paragonando la prima di queste coll'altra del sistema (B): $\frac{\partial H_1}{\partial u_2} = \beta_{21} H_2$, e costruendo la relativa condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial u_1} (\beta_{21} H_2) + \frac{\partial}{\partial u_2} (\beta_{12} H_2) = 0,$$

risulta per le (B) stesse e per la (5₂)

$$\frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_2} = 0. \quad (6)$$

Ma dalla terza delle (5) abbiamo

$$H_1 = \lambda \beta_{32}, \quad H_2 = -\lambda \beta_{31}, \quad (7)$$

con λ fattore di proporzionalità, e sostituendo nelle due prime (5) ne deduciamo per le (A) e per le (7) stesse:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u_1} = \frac{\partial \lambda}{\partial u_2} = 0,$$

onde λ dipende solo da u_3 . D'altra parte, sostituendo ora i valori (7) nelle due equazioni (A)

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1}{\partial u_2} &= \beta_{21} H_2 = -\lambda \beta_{21} \beta_{31}, \\ \frac{\partial H_2}{\partial u_1} &= \beta_{12} H_1 = -\lambda \beta_{12} \beta_{32}, \end{aligned}$$

ne risultano le altre due

$$\frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_1} = -\beta_{32} \beta_{12}, \quad \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_2} = -\beta_{31} \beta_{21}.$$

Associandole alla (6), vediamo che le rotazioni debbono qui soddisfare, oltre che alle (A), alle tre relazioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_2} &= 0, \\ \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_1} &= -\beta_{32} \beta_{12}, \quad \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_2} = -\beta_{31} \beta_{21}. \end{aligned}$$

In una Memoria precedente (*) si è dimostrato che queste tre relazioni esprimono che l'immagine sferica del sistema coincide con quella di un si-

(*) *Sopra i sistemi tripli di superficie ortogonali derivati per trasformazione di Combescure dai sistemi a curvatura costante* (Annali di Matematica, Serie 3.^a, Tomo XXIV). Vedi il § 3 di questa Memoria.

stema pseudosferico (u_1, u_2, u_3) , che dà al ds^2 la forma caratteristica

$$ds^2 = \cos^2 \theta du_1^2 + \sin^2 \theta du_2^2 + R^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial u_3} \right)^2 du_3^2,$$

con $R = R(u_3)$, e nel quale le $u_3 = \text{cost.}$ sono superficie pseudosferiche di raggio R . Ora per le rotazioni β_{31}, β_{32} abbiamo qui

$$\beta_{31} = -\frac{\sin \theta}{R}, \quad \beta_{32} = \frac{\cos \theta}{R},$$

onde nel sistema supposto avremo, per le (7)

$$H_1 = \lambda \frac{\cos \theta}{R}, \quad H_2 = \lambda \frac{\sin \theta}{R}.$$

Ma la condizione che sia costante $H_1^2 + H_2^2$ porta che λ sia proporzionale per un fattore costante a R , e passando ad un sistema omotetico possiamo fare $\lambda = R$, cioè $H_1 = \cos \theta$, $H_2 = \sin \theta$, e p. e. dalla $\frac{\partial H_1}{\partial u_3} = \beta_{31} H_3$ risulta $H_3 = R \frac{\partial \theta}{\partial u_3}$, onde il sistema supposto coincide col pseudosferico. La proprietà pel caso (α') è dunque dimostrata. Similmente, nell'altro caso ($4''$), si vede che alle (A) vengono ad aggiungersi le tre equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_1} - \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_2} &= 0, \\ \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_1} &= \beta_{32} \beta_{12}, \quad \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_2} = \beta_{31} \beta_{21}. \end{aligned}$$

Dai risultati del § 3 della Memoria ora citata segue, in modo analogo, che nel sistema triplo ortogonale supposto le $u_3 = \text{cost.}$ sono superficie a curvatura costante positiva, in particolare si riducono a *sfere* quando si annulla nella ($4''$) la costante del secondo membro, cioè per $H_1^2 = H_2^2$.

§ 2.

IL SISTEMA DIFFERENZIALE PER LE ROTAZIONI NEL CASO $W_1^2 + cW_2^2 = \text{cost.}$

Secondo quanto si è detto nella prefazione, saranno da considerarsi come reciproci dei precedenti quei sistemi tripli ortogonali nei quali si verifichi la relazione

$$W_1^2 + cW_2^2 = \text{cost.}, \quad (8)$$

con c costante. Il caso $c=0$ è manifestamente da escludersi come assurdo, perchè sarebbe $W_1 = \text{cost.}$, e le superficie $u_1 = \text{cost.}$ si ridurrebbero ad un'unica sfera. Ma anche il caso $c=1$ dovremo escludere, perchè questo porterebbe, come si vedrà, l'annullarsi di qualche rotazione. Dimostriamo che, per ogni altro valore della costante c nella (8), esistono sistemi tripli ortogonali corrispondenti, con tre funzioni arbitrarie essenziali. Si osservi che la (8) rappresenta per le superficie $u_3 = \text{cost.}$ (e medesimamente per ciascuna delle altre due serie $u_1 = \text{cost.}$, $u_2 = \text{cost.}$) un'equazione a derivate parziali del secondo ordine a cui tutte soddisfano. Il problema che ci occupa può quindi enunciarsi anche così: *Trovare le famiglie di Lamé composte di superficie integrali della equazione del secondo ordine* (8). Questa viene ad avere infinite soluzioni comuni colla nota equazione generale del terzo ordine per le famiglie di LAMÉ (DARBOUX, l. c., Chap. I).

Imitando l'analisi del § 1, cominciamo dall'esaminare le conseguenze differenziali che l'equazione in termini finiti (8) fra W_1 e W_2 viene ad aggiungere ai sistemi differenziali (A), (B*). Derivando la (8) rapporto ad u_1 , u_2 , coll'osservare le (B*), otteniamo in primo luogo

$$\frac{\partial W_1}{\partial u_1} = -c \beta_{21} W_2, \quad \frac{\partial W_2}{\partial u_2} = -\frac{1}{c} \beta_{12} W_1, \quad (9)$$

mentre la derivazione rapporto ad u_3 dà l'altra relazione

$$\beta_{13} W_1 + c \beta_{23} W_2 = 0. \quad (10)$$

Ora aggreghiamo le (9) alle (B*) e costruiamo le corrispondenti condi-

zioni d'integrabilità

$$c \frac{\partial}{\partial u_2} (\beta_{21} W_2) + \frac{\partial}{\partial u_1} (\beta_{12} W_2) = 0, \quad c \frac{\partial}{\partial u_3} (\beta_{21} W_2) + \frac{\partial}{\partial u_1} (\beta_{13} W_3) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u_1} (\beta_{12} W_1) + c \frac{\partial}{\partial u_2} (\beta_{21} W_1) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u_3} (\beta_{12} W_1) + c \frac{\partial}{\partial u_2} (\beta_{23} W_3) = 0.$$

Eseguendo le derivazioni, coll'aver riguardo alle (A), (B*), e insieme alle (9), (10) stesse, troviamo le tre nuove condizioni per le rotazioni

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + c \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} = 0, \quad (11) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1} &= -c \beta_{21} \beta_{23}, \\ \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} &= -\frac{1}{c} \beta_{12} \beta_{13}. \end{aligned} \right\} (12)$$

La prima di queste, combinata colla prima equazione della terza linea in (A)

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} = -\beta_{31} \beta_{32}, \quad (11^*)$$

dimostra che il caso $c = 1$ è da escludersi, portando l'annullarsi di una almeno delle due rotazioni β_{31} , β_{32} . Essendo adunque $c \neq 1$, le (11), (11*) risolte danno

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} = \frac{c}{1-c} \beta_{31} \beta_{32}, \quad \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} = \frac{1}{c-1} \beta_{31} \beta_{32}, \quad (13)$$

e le quattro relazioni (12), (13), insieme alle otto rimanenti nel sistema (A), dopo avervi soppressa la (11*), già inclusa nelle (13), danno un sistema di dodici equazioni che si risolve rispetto a due delle derivate di ciascuna delle sei rotazioni. Lo scriviamo sotto la seguente forma definitiva, che pone in evidenza (nelle caselle mancanti) le rispettive variabili parametriche:

$$\left. \begin{aligned} * \quad & \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} = \frac{1}{c-1} \beta_{31} \beta_{32}, \quad \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_3} = \beta_{23} \beta_{31}, \\ * \quad & \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_2} = \beta_{32} \beta_{21}, \quad \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_3} = (c-1) \beta_{21} \beta_{23}, \\ \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} &= \frac{c}{1-c} \beta_{31} \beta_{32}, \quad * \quad \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_3} = \beta_{13} \beta_{32}, \\ \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_1} &= \beta_{31} \beta_{12}, \quad * \quad \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_3} = \frac{1-c}{c} \beta_{12} \beta_{13}, \\ \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1} &= -c \beta_{21} \beta_{23}, \quad \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_2} = \beta_{12} \beta_{23}, \quad * \quad , \\ \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_1} &= \beta_{21} \beta_{13}, \quad \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} = -\frac{1}{c} \beta_{12} \beta_{13}, \quad * \quad . \end{aligned} \right\} (I)$$

Vediamo pertanto che: *Nei sistemi tripli ortogonali pei quali si verifica la condizione (8) le sei rotazioni β_{ik} debbono soddisfare a questo sistema differenziale (I). Solo più tardi potremo dimostrare l'inversa (Vedi § 7), che cioè, se le rotazioni soddisfano le (I), esiste un sistema triplo ortogonale corrispondente che verifica la (8), e questo sistema è univocamente determinato a meno di un'omotetia.*

§ 3.

ESISTENZA E PROPRIETÀ DELLE SOLUZIONI β_{ik} DEL SISTEMA (I).

a) Per prima cosa dobbiamo esaminare se il sistema differenziale (I) ammette soluzioni, ed in quale arbitrarietà. Ma prima è utile osservare una singolare proprietà di costruzione del sistema (I), che servirà a facilitare molto le successive ricerche:

Il sistema differenziale (I) resta invariato se si eseguisce sugli indici 1, 2, 3 una qualunque permutazione, purchè nello stesso tempo si faccia subire alla costante c una conveniente sostituzione del gruppo diedrale G_6 del birapporto

$$\left(c; \frac{1}{c}, 1-c, \frac{1}{1-c}, \frac{c}{c-1}, \frac{c-1}{c} \right).$$

Questo segue dalle due proprietà seguenti d'immediata verifica: 1.^a Il sistema (I) resta invariato per la trasposizione (12) se contemporaneamente si cangia c in $\frac{1}{c}$; 2.^a esso resta pure invariato per la permutazione circolare (1 2 3) cangiando insieme c in $\frac{1}{1-c}$. Di qui segue che fra le 6 permutazioni degli indici e le 6 sostituzioni lineari di G_6 si ha la corrispondenza (d'isomorfismo oloedrico):

$$\begin{aligned} 1 &\sim c, & (1\ 2\ 3) &\sim \frac{1}{1-c}, & (1\ 3\ 2) &\sim \frac{c-1}{c}, \\ (1\ 2) &\sim \frac{1}{c}, & (2\ 3) &\sim \frac{c}{c-1}, & (1\ 3) &\sim 1-c. \end{aligned}$$

b) Ciò premesso, constatiamo che le condizioni d'integrabilità delle (I)

rientrano nelle (I) stesse. Basta verificare questo per la prima condizione di integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_3} \right) - \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} \right) = \frac{\partial}{\partial u_2} (\beta_{23} \beta_{31}) + \frac{1}{1-c} \frac{\partial}{\partial u_3} (\beta_{31} \beta_{32}) = 0,$$

il cui primo membro in effetto, eseguite le derivazioni colle (I) stesse, identicamente si annulla. Dopo ciò, utilizzando l'osservazione in *a*), si vede che anche le altre cinque condizioni d'integrabilità sono soddisfatte, perchè una permutazione degli indici le riconduce alla prima.

In queste condizioni, il sistema (I) appartiene alla più semplice classe dei sistemi lineari canonici *completamente integrabili*, secondo la denominazione del BOURLET (*), ed ammette quindi infinite soluzioni, che dapprima risultano dipendere da 6 funzioni arbitrarie. E invero, fissato un sistema iniziale di valori per le u_i , diciamo $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, si sa che le (I) posseggono uno ed un solo sistema integrale (β_{ik}) , tale che β_{21} , β_{31} si riducano a funzioni arbitrarie date della loro variabile parametrica u_1 , quando le altre due (principali) u_2 , u_3 assumono i valori iniziali $(0, 0)$; e similmente si possono dare ad arbitrio

$$\begin{aligned} \beta_{12}, \beta_{32} & \text{ quali funzioni di } u_2, \text{ per } u_1 = u_3 = 0, \\ \beta_{13}, \beta_{23} & \text{ » » di } u_3, \text{ per } u_1 = u_2 = 0. \end{aligned}$$

Ma in realtà è chiaro che di queste 6 funzioni arbitrarie, 3 sono soltanto apparenti provenendo dall'arbitrarietà lasciata ai parametri u_1 , u_2 , u_3 . Così p. e., senza alterare la generalità, possiamo scegliere i parametri u_1 , u_2 , u_3 in guisa che le tre rotazioni β_{21} , β_{32} , β_{13} si riducano tutte inizialmente eguali all'unità:

$$\beta_{21}(u_1, 0, 0) = 1, \quad \beta_{32}(0, u_2, 0) = 1, \quad \beta_{13}(0, 0, u_3) = 1.$$

Concludiamo quindi: *Le soluzioni del sistema (I) dipendono da tre funzioni arbitrarie essenziali*. Come si introducano queste tre funzioni arbitrarie, e quale ne sia il significato geometrico si vedrà meglio più avanti.

(*) Vedi BOURLET, *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées*. Annales de l'École Normale Supérieure, T. VIII, 3^{ème} Serie, Suppl. (1891). — Per il caso semplice attuale cf. anche DARBOUX, l. c., Livre III, Chap. I.

§ 4.

GLI INTEGRALI QUADRATICI DEL SISTEMA (I).

Il sistema differenziale (I) possiede un'altra proprietà, tanto più interessante che essa lo caratterizza completamente. Per stabilirla, consideriamo l'espressione quadratica nella coppia di rotazioni (β_{13}, β_{23})

$$\Omega_3 = \beta_{13}^2 + c \beta_{23}^2.$$

In forza delle (I), le due derivate di Ω_3 rapporto ad u_1 , u_2 identicamente si annullano, poichè

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega_3}{\partial u_1} &= \beta_{13} \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1} + c \beta_{23} \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_1} = -\beta_{13} \cdot c \beta_{21} \beta_{23} + c \beta_{23} \cdot \beta_{21} \beta_{13} = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega_3}{\partial u_2} &= \beta_{13} \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_2} + c \beta_{23} \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} = \beta_{13} \cdot \beta_{12} \beta_{23} + c \beta_{23} \cdot \frac{-1}{c} \beta_{12} \beta_{13} = 0, \end{aligned}$$

onde segue che Ω_3 è funzione della sola u_3 . Ora osserviamo che un cangiamento del parametro u_3 ha per effetto di moltiplicare la coppia di rotazioni (β_{13}, β_{23}) per una funzione arbitraria di u_3 ; similmente cangiando il parametro u_1 restano moltiplicate (β_{21}, β_{31}) per una funzione di u_1 , e cangiando u_2 si moltiplicano (β_{32}, β_{12}) per una funzione di u_2 (*). Dopo ciò è chiaro che, scegliendo convenientemente il parametro u_3 , potremo ridurre Ω_3 ad una costante. Ora applichiamo al risultato ottenuto l'osservazione in α) § 3, eseguendo la permutazione circolare degli indici (1 2 3), poi il suo quadrato (1 3 2), cangiando dunque la prima volta c in $\frac{1}{1-c}$, la seconda in $\frac{c-1}{c}$.

(*) Un cangiamento dei parametri u_1, u_2, u_3 nei rispettivi u'_1, u'_2, u'_3 , ove si indicano con accenti i nuovi valori delle H_i e delle β_{ik} , produce il seguente effetto:

$$H'_i = H_i \frac{d u_i}{d u'_i}, \quad H'_k = H_k \frac{d u_k}{d u'_k},$$

e perciò

$$\beta'_{ik} = \frac{1}{H'_i} \frac{\partial H'_k}{\partial u'_i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H'_k}{\partial u_i} = \beta_{ik} \frac{d u_k}{d u'_k} = \beta_{ik} \cdot f(u_k).$$

Ne dedurremo che le due espressioni

$$\Omega_1 = \beta_{21}^2 + \frac{1}{1-c} \beta_{31}^2, \quad \Omega_2 = \beta_{32}^2 + \frac{c-1}{c} \beta_{12}^2$$

sono funzioni la prima della sola u_1 , la seconda della sola u_2 , e disponendo dei parametri u_1, u_2 possiamo ridurre queste funzioni a costanti. Concludiamo quindi: *Il sistema differenziale (1) possiede, scelti convenientemente i parametri u_1, u_2, u_3 , i tre integrali quadratici nelle rotazioni:*

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= \beta_{21}^2 + \frac{1}{1-c} \beta_{31}^2 = \text{cost.} \\ \Omega_2 &= \beta_{32}^2 + \frac{c-1}{c} \beta_{12}^2 = \text{cost.} \\ \Omega_3 &= \beta_{13}^2 + c \beta_{23}^2 = \text{cost.} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Ora dimostriamo che questa proprietà caratterizza perfettamente il caso attuale, anzi più in generale: *Se in un sistema triplo ortogonale (u_1, u_2, u_3) (con rotazioni tutte diverse da zero) sussiste fra i quadrati delle rotazioni di una delle tre coppie $(\beta_{21}, \beta_{31}), (\beta_{32}, \beta_{12}), (\beta_{13}, \beta_{23})$ una relazione lineare, lo stesso accade per le altre due, e le rotazioni soddisfano al sistema differenziale (1).*

Poniamo che p. e. fra β_{13}, β_{23} sussista la relazione quadratica

$$\beta_{13}^2 + c \beta_{23}^2 = \text{cost.} \quad (c = f(u_3)),$$

e derivando, colle (A), rispetto ad u_1, u_2 , ne dedurremo

$$\frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1} = -c \beta_{23} \beta_{21}, \quad \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} = -\frac{1}{c} \beta_{13} \beta_{12}. \quad (15)$$

Essendo inoltre $\frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_2} = \beta_{12} \beta_{23}$, la condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial u_1} (\beta_{12} \beta_{23}) + c \frac{\partial}{\partial u_2} (\beta_{23} \beta_{21}) = 0,$$

calcolata colle (A) e colle (15), dà nuovamente la (11*) § 2

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + c \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} = 0.$$

Ne segue, come si è visto al § 2, che è necessariamente $c=1$, e risolvendo le equazioni ottenute, si ritrova nuovamente il sistema differenziale (I), c. d. d.

§ 5.

SISTEMI TRIPLI ORTOGONALI CON: $k_1 W_1^2 + k_2 W_2^2 + k_3 W_3^2 = \text{cost.}$

Un altro problema, più generale di quello trattato al § 2, conduce ancora allo stesso sistema differenziale (I) per le rotazioni. Proponiamoci di trovare quei sistemi tripli ortogonali (u_1, u_2, u_3) nei quali le quantità W_1, W_2, W_3 siano legate dalla relazione quadratica

$$k_1 W_1^2 + k_2 W_2^2 + k_3 W_3^2 = \text{cost.} \quad (16)$$

con k_1, k_2, k_3 costanti. Questi sono i sistemi da considerarsi quali reciproci dei sistemi di GUICHARD-DARBOUX soddisfacenti alla condizione:

$$H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = a(x^2 + y^2 + z^2) + b,$$

come già si è detto nella prefazione. Naturalmente, per non ricadere nei casi già considerati, supporremo che nella (16) nessuna delle tre costanti k , si annulli; ma di più si vedrà che è da escludersi anche il caso della eguaglianza di due k , perchè ne conseguirebbe l'annullarsi di qualche rotazione. Dalla (16), derivando rapporto ad u_1 , deduciamo per le (B*) § 1

$$\frac{\partial W_1}{\partial u_1} = -\frac{k_2}{k_1} \beta_{21} W_2 - \frac{k_3}{k_1} \beta_{31} W_3;$$

e similmente dovranno sussistere le altre due analoghe dedotte permutando circolarmente gli indici. Aggregando queste tre equazioni alle (B*), abbiamo per W_1, W_2, W_3 il sistema di equazioni ai differenziali totali:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial u_1} &= -\frac{k_2}{k_1} \beta_{21} W_2 - \frac{k_3}{k_1} \beta_{31} W_3, & \frac{\partial W_1}{\partial u_2} &= \beta_{12} W_2, & \frac{\partial W_1}{\partial u_3} &= \beta_{13} W_3, \\ \frac{\partial W_2}{\partial u_1} &= \beta_{21} W_1, & \frac{\partial W_2}{\partial u_2} &= -\frac{k_3}{k_2} \beta_{32} W_3, & \frac{\partial W_2}{\partial u_3} &= \beta_{23} W_3, \\ \frac{\partial W_3}{\partial u_1} &= \beta_{31} W_1, & \frac{\partial W_3}{\partial u_2} &= \beta_{32} W_2, & \frac{\partial W_3}{\partial u_3} &= -\frac{k_1}{k_3} \beta_{13} W_1 - \frac{k_2}{k_3} \beta_{23} W_2, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

e si osservi subito che, ove si ponesse $k_1 = k_2 = k_3$, questo sistema coinciderebbe precisamente col sistema (α') (Prefazione) a cui soddisfano i coseni (X_1, X_2, X_3). Costruendo le condizioni d'integrabilità per le (17), ponendo mente alle (A), si trova subito che alle (A) dobbiamo aggiungere le tre seguenti:

$$\left. \begin{aligned} k_1 \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + k_2 \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + k_3 \beta_{31} \beta_{32} &= 0, \\ k_2 \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} + k_3 \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_3} + k_1 \beta_{12} \beta_{13} &= 0, \\ k_3 \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_3} + k_1 \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1} + k_2 \beta_{23} \beta_{21} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Paragonando queste colle (A) della terza linea

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + \beta_{31} \beta_{32} &= 0, \\ \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} + \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_3} + \beta_{12} \beta_{13} &= 0, \\ \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_3} + \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1} + \beta_{23} \beta_{21} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18^*)$$

si viene ad escludere il caso della eguaglianza di due k , perchè allora (non annullandosi alcuna rotazione) ne verrebbe $k_1 = k_2 = k_3$, il che è assurdo pel nostro problema risultandone

$$W_1^2 + W_2^2 + W_3^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \text{cost.}$$

Essendo adunque diseguali le k , la risoluzione delle coppie di equazioni corrispondenti (18), (18*) ci dà

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} &= \frac{k_2 - k_3}{k_1 - k_2} \beta_{31} \beta_{32}, & \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} &= \frac{k_3 - k_1}{k_2 - k_3} \beta_{12} \beta_{13}, & \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_3} &= \frac{k_1 - k_2}{k_3 - k_1} \beta_{23} \beta_{21}, \\ \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} &= \frac{k_3 - k_1}{k_1 - k_2} \beta_{31} \beta_{32}, & \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_3} &= \frac{k_1 - k_2}{k_2 - k_3} \beta_{12} \beta_{13}, & \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1} &= \frac{k_2 - k_3}{k_3 - k_1} \beta_{23} \beta_{21}. \end{aligned}$$

Ma se poniamo

$$c = \frac{k_2 - k_3}{k_1 - k_3}, \quad (19)$$

da cui $1 - c = \frac{k_1 - k_2}{k_1 - k_3}$, $\frac{c}{c-1} = \frac{k_2 - k_3}{k_2 - k_1}$, si vede che queste formole vengono appunto a coincidere colle corrispondenti del sistema (I). Dunque ogni sistema triplo ortogonale pel quale sia soddisfatta la (16) ha un'immagine sferica le cui rotazioni β_{ik} soddisfano al sistema (I), ove a c si attribuisca il valore (19).

Ma, per il caso attuale generale, noi possiamo subito invertire questo risultato e dimostrare che se le rotazioni β_{ik} soddisfano alle (I), e si prendono inoltre ad arbitrio tre costanti k_1, k_2, k_3 , purchè siano diseguali, nessuna delle tre nulla, e siano legate alla costante c dalla (19), esisteranno sempre (infiniti) sistemi tripli ortogonali coll'assegnata immagine sferica, e soddisfacenti alla condizione (16). Tanto risulta dall'osservare che, nelle nostre ipotesi, il sistema di equazioni ai differenziali totali (17) è completamente integrabile, e d'altronde possiede l'integrale quadratico (16). Nei detti sistemi restano quindi tre costanti arbitrarie, inclusa una moltiplicativa (d'omotetia).

Il risultato analogo pei sistemi più particolari del § 2, corrispondenti all'annullarsi di una delle k , sarà stabilito più oltre (§ 7), comportando una trattazione diversa.

§ 6.

RIDUZIONE DEL SISTEMA DIFFERENZIALE (I) A FORME NORMALI.

Dopo i risultati ottenuti nei paragrafi precedenti, l'interesse principale della nostra ricerca si concentra sulla integrazione del sistema differenziale (I), e noi andiamo ora a ridurre questo sistema a forme normali più semplici, ciò che, facilitandone l'interpretazione geometrica, condurrà a nuovi risultati.

Prima di tutto osserviamo che, senza ledere la generalità, possiamo supporre che il valore della costante c nelle (I) sia *negativo*. E invero, siccome dei tre valori $c, \frac{1}{1-c}, \frac{c}{c-1}$ due sono sempre positivi, l'altro negativo, una permutazione degli indici ci riconduce sempre al caso $c < 0$. Ed allora, indicando con σ un angolo costante reale, poniamo

$$c = -\operatorname{tg}^2 \sigma, \quad (20)$$

indi

$$\frac{1}{1-c} = \cos^2 \sigma, \quad \frac{c-1}{c} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma}.$$

Alla riduzione cercata siamo condotti dal ricordare che il sistema (I) possiede i tre integrali quadratici (§ 4)

$$\left. \begin{aligned} \beta_{21}^2 + \cos^2 \sigma \beta_{31}^2 &= U_1, \\ \operatorname{sen}^2 \sigma \beta_{32}^2 + \beta_{12}^2 &= U_2, \\ \frac{\beta_{13}^2}{\operatorname{sen}^2 \sigma} - \frac{\beta_{23}^2}{\cos^2 \sigma} &= U_3, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

dove U_i indica una funzione della sola u_i . Disponendo dei parametri u_1, u_2, u_3 , possiamo ridurre U_1, U_2, U_3 a tre costanti, ed anche alterarle a piacere di fattori costanti *positivi*. Siccome U_1, U_2 sono certamente positive, disponiamo dei parametri u_1, u_2 , sì da rendere $U_1 = U_2 = 1$, cioè:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{21}^2 + \cos^2 \sigma \beta_{31}^2 &= 1, \\ \beta_{12}^2 + \operatorname{sen}^2 \sigma \beta_{32}^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Quanto alla terza (21), conviene suddividere secondo che U_3 si annulla, oppure è diversa da zero.

1.° caso $U_3 = 0$. Allora abbiamo

$$\frac{\beta_{13}}{\operatorname{sen} \sigma} = \pm \frac{\beta_{23}}{\cos \sigma},$$

ma dei due segni basta considerare il superiore, cambiando nel caso opposto σ in $-\sigma$. Inoltre potremo supporre *positivo* il valore comune di

$$\frac{\beta_{13}}{\operatorname{sen} \sigma} = \frac{\beta_{23}}{\cos \sigma}, \quad (23)$$

altrimenti cangieremmo u_3 in $-u_3$. Le relazioni (22), (23) fra le rotazioni conducono ad esprimerle per tre funzioni ausiliarie reali θ, φ, ψ colle posizioni

$$\left. \begin{aligned} \beta_{21} &= \cos \theta, \quad \beta_{31} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \sigma}; \quad \beta_{12} = \cos \varphi, \\ \beta_{32} &= \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \sigma}; \quad \beta_{13} = \operatorname{sen} \sigma e^\psi, \quad \beta_{23} = \cos \sigma e^\psi, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

dove è da notarsi che il parametro u_3 resta ancora arbitrario ed un suo cambiamento fa aumentare ψ di una funzione arbitraria di u_3 . Introducendo questi valori (24) delle rotazioni nel sistema (I), ove è da porsi $c = -\operatorname{tg}^2 \sigma$, otteniamo nelle funzioni incognite θ, φ, ψ il sistema normale seguente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u_2} &= \cot \sigma \operatorname{sen} \varphi, & \frac{\partial \theta}{\partial u_3} &= -e^\psi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} &= \operatorname{tg} \sigma \operatorname{sen} \theta, & * &, & \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} &= -e^\psi, \\ \frac{\partial \psi}{\partial u_1} &= \operatorname{tg} \sigma \cos \theta, & \frac{\partial \psi}{\partial u_2} &= \cot \sigma \cos \varphi, & * &. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II})$$

Come segue già da quanto si è detto in generale al § 3, le condizioni d'integrabilità sono identicamente soddisfatte, e l'integrale generale contiene quindi tre funzioni arbitrarie, ma pel problema geometrico due sole sono essenziali, la terza dipendendo dall'arbitrarietà ancora lasciata al parametro u_3 .

2.° caso $U_3 = 0$. In questo caso, che è il generale, possiamo supporre p. e. $U_3 > 0$, altrimenti scambieremmo gli indici (1, 2) cangiando insieme σ in $\frac{\pi}{2} - \sigma$. Disponendo ora anche del parametro u_3 , possiamo rendere $U_3 = 1$, cioè

$$\frac{\beta_{13}^2}{\operatorname{sen}^2 \sigma} - \frac{\beta_{23}^2}{\cos^2 \sigma} = 1, \quad (23^*)$$

ed anche supporre che sia $\frac{\beta_{13}}{\operatorname{sen} \sigma} > 0$. Le formole (22), (23*) suggeriscono l'introduzione di tre ausiliarie reali θ, φ, ψ col porre

$$\left. \begin{aligned} \beta_{21} &= \cos \theta, & \beta_{31} &= \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \sigma}; & \beta_{12} &= \cos \varphi, & \beta_{32} &= \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \sigma}; \\ & & & & \beta_{13} &= \operatorname{sen} \sigma \cosh \psi, & \beta_{23} &= \cos \sigma \sinh \psi. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Introducendo questi valori delle rotazioni nelle (I), otteniamo il sistema differenziale per θ, φ, ψ sotto la seguente forma normale:

$$\left. \begin{aligned} * &, & \frac{\partial \theta}{\partial u_2} &= \cot \sigma \operatorname{sen} \varphi, & \frac{\partial \theta}{\partial u_3} &= -\sinh \psi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} &= \operatorname{tg} \sigma \operatorname{sen} \theta, & * &, & \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} &= -\cosh \psi, \\ \frac{\partial \psi}{\partial u_1} &= \operatorname{tg} \sigma \cos \theta, & \frac{\partial \psi}{\partial u_2} &= \cot \sigma \cos \varphi, & * &. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III})$$

Le condizioni d'integrabilità sono anche qui identicamente soddisfatte come per le (II), ma questa volta : *l'integrale generale* (θ, φ, ψ) *del sistema* (III) *dipende da tre funzioni arbitrarie essenziali.*

OSSERVAZIONE. Abbiamo separato i due casi (II) e (III), perchè, tanto dal punto di vista analitico come dal geometrico, il primo consente una trattazione molto più semplice; ma è bene osservare che le formole pei due casi possono riunirsi in un solo sistema come segue. Dette a, b due costanti arbitrarie, pongasi

$$\left. \begin{aligned} \beta_{21} = \cos \theta, \quad \beta_{31} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \sigma}, \quad \beta_{12} = \cos \varphi, \quad \beta_{32} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \sigma}; \\ \beta_{13} = \operatorname{sen} \sigma (a \cosh \psi + b \operatorname{senh} \psi), \quad \beta_{23} = \cos \sigma (a \operatorname{senh} \psi + b \cosh \psi), \end{aligned} \right\} \quad (25')$$

le funzioni θ, φ, ψ essendo assoggettate a soddisfare al sistema :

$$\left. \begin{aligned} * \quad , \quad \frac{\partial \theta}{\partial u_2} = \cot \sigma \operatorname{sen} \varphi, \quad \frac{\partial \theta}{\partial u_3} = -(a \operatorname{senh} \psi + b \cosh \psi), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = \operatorname{tg} \sigma \operatorname{sen} \theta, \quad * \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} = -(a \cosh \psi + b \operatorname{senh} \psi), \\ \frac{\partial \psi}{\partial u_1} = \operatorname{tg} \sigma \cos \theta, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u_2} = \cot \sigma \cos \varphi, \quad * \end{aligned} \right\} \quad (III')$$

Tutte le condizioni sono soddisfatte, come nei due casi particolari, che ne risultano ponendo una prima volta $a = b = 1$, e la seconda $a = 1, b = 0$.

§ 7.

RITORNO AL PROBLEMA DEI SISTEMI $W_1^2 + cW_2^2 = \text{cost.}$

Ad ogni terna integrale (θ, φ, ψ) del sistema (II), ovvero del sistema (III), corrispondono infiniti sistemi tripli ortogonali (dipendenti da tre funzioni arbitrarie), con rotazioni β_{ik} date dalle (24) nel primo caso, dalle (25) nel secondo. L'orientazione del triedro principale in questi sistemi è determinata (a meno di movimenti) dal sistema differenziale (α') della prefazione che qui, per le applicazioni che ne faremo in seguito, conviene scrivere per disteso.

Nel caso del sistema (II) esso prende la forma :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial u_1} &= -\cos \theta X_2 - \frac{\sin \theta}{\cos \sigma} X_3, & \frac{\partial X_1}{\partial u_2} &= \cos \varphi X_2, & \frac{\partial X_1}{\partial u_3} &= \sin \sigma e^\psi X_3, \\ \frac{\partial X_2}{\partial u_1} &= \cos \theta X_1, & \frac{\partial X_2}{\partial u_2} &= -\cos \varphi X_1 - \frac{\sin \varphi}{\sin \sigma} X_3, & \frac{\partial X_2}{\partial u_3} &= \cos \sigma e^\psi X_3, \\ \frac{\partial X_3}{\partial u_1} &= \frac{\sin \theta}{\cos \sigma} X_1, & \frac{\partial X_3}{\partial u_2} &= \frac{\sin \varphi}{\sin \sigma} X_2, & \frac{\partial X_3}{\partial u_3} &= -e^\psi (\sin \sigma X_1 + \cos \sigma X_2), \end{aligned} \right\} \quad (\text{II}^*)$$

e nel caso del sistema (III) l'altra

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial u_1} &= -\cos \theta X_2 - \frac{\sin \theta}{\cos \sigma} X_3, & \frac{\partial X_1}{\partial u_2} &= \cos \varphi X_2, & \frac{\partial X_1}{\partial u_3} &= \sin \sigma \cosh \psi X_3, \\ \frac{\partial X_2}{\partial u_1} &= \cos \theta X_1, & \frac{\partial X_2}{\partial u_2} &= -\cos \varphi X_1 - \frac{\sin \varphi}{\sin \sigma} X_3, & \frac{\partial X_2}{\partial u_3} &= \cos \sigma \sinh \psi X_3, \\ \frac{\partial X_3}{\partial u_1} &= \frac{\sin \theta}{\cos \sigma} X_1, & \frac{\partial X_3}{\partial u_2} &= \frac{\sin \varphi}{\sin \sigma} X_2, & \frac{\partial X_3}{\partial u_3} &= -\sin \sigma \cosh \psi X_1 - \cos \sigma \sinh \psi X_2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III}^*)$$

Ricordiamo, dal § 5, che fra i sistemi tripli ortogonali con questa rappresentazione sferica ne esistono certamente (infiniti) di quelli che soddisfano alla condizione (16)

$$k_1 W_1^2 + k_2 W_2^2 + k_3 W_3^2 = \text{cost.},$$

quando le costanti k_1, k_2, k_3 siano legate alla $c = -\text{tg}^2 \sigma$ dalla (19), che qui si scrive

$$k_3 = k_1 \sin^2 \sigma + k_2 \cos^2 \sigma, \quad (26)$$

e inoltre siano diseguali e nessuna delle tre nulla. Questi sistemi si ottengono integrando il sistema (17) ai differenziali totali ponendovi per le rotazioni i valori (24), ovvero i valori (25).

Ci rimane ancora da compiere la ricerca analoga per la classe particolare di sistemi al § 2, i quali corrispondono al caso, per ora escluso, che nella (26) si annulli una delle k . Intanto osserviamo che la relazione quadratica (16) diventa rispettivamente, secondo la (26)

$$\left. \begin{aligned} W_2^2 + \cos^2 \sigma W_3^2 &= \text{cost.}, & \text{per } k_1 &= 0, \\ W_1^2 + \sin^2 \sigma W_3^2 &= \text{cost.}, & \text{per } k_2 &= 0, \\ \cos^2 \sigma W_1^2 - \sin^2 \sigma W_2^2 &= \text{cost.}, & \text{per } k_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Questi casi richiedono una nuova trattazione, non potendo qui più applicarsi il sistema di equazioni ai differenziali totali (17). Risolvendo successivamente la questione per le tre relazioni (27), noi veniamo in sostanza a risolvere il problema al § 2 pei sistemi soddisfacenti alla condizione $W_1^2 + cW_2^2 = \text{cost.}$, qualunque sia il valore della costante c , perchè una permutazione di indici riconduce sempre al caso di c negativa.

§ 8.

DETERMINAZIONE DEI VALORI DI W_1 , W_2 , W_3 .

La ricerca dei valori di W_1 , W_2 , W_3 corrispondenti successivamente alle tre relazioni (27) si compie con facilità, usando del procedimento stesso al § 2, e si trova che in ogni caso esiste una ed una sola terna corrispondente (a meno di un fattore costante). Il problema del § 2 si risolve così *in termini finiti*, mentre quello generale del § 5 (quando nessuna delle k è nulla) richiede l'integrazione del sistema a differenziali totali (17).

a) Cominciando a trattare il problema nel caso del sistema differenziale (II), prendiamo in primo luogo la relazione (27₁):

$$W_2^2 + \cos^2 \sigma W_3^2 = \text{cost.}, \quad (27_1)$$

e deriviamola rapporto ad u_1 , il che dà per le (B*)

$$\beta_{21} W_2 + \cos^2 \sigma \beta_{31} W_3 = 0,$$

cioè per le (24)

$$W_2 \cos \theta + \cos \sigma \sin \theta W_3 = 0,$$

da cui

$$W_2 = \lambda \cos \sigma \sin \theta, \quad W_3 = -\lambda \cos \theta,$$

con λ fattore di proporzionalità. Risulta dalla (27₁) che λ deve essere costante, onde, passando ad un sistema omotetico, possiamo fare $\lambda = 1$, ossia

$$W_2 = \cos \sigma \sin \theta, \quad W_3 = -\cos \theta.$$

Dopo ciò, prendendo p. e. la formola

$$\frac{\partial W_3}{\partial u_1} = \beta_{31} W_1,$$

ne viene $W_1 = \cos \sigma \frac{\partial \theta}{\partial u_1}$. Ed ora inversamente, ponendo

$$W_1 = \cos \sigma \frac{\partial \theta}{\partial u_1}, \quad W_2 = \cos \sigma \sin \theta, \quad W_3 = -\cos \theta, \quad (28_1)$$

tutte le condizioni (B*) si trovano soddisfatte, a causa dei valori (24) delle rotazioni e delle formole (II). Dunque le (28₁) definiscono, a meno di un'omotetia, il sistema triplo domandato. Del tutto analogamente nel caso della (27₂) si ottiene il sistema domandato definito (a meno di un'omotetia) dalle formole

$$W_1 = \sin \sigma \sin \varphi, \quad W_2 = \sin \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}, \quad W_3 = -\cos \varphi. \quad (28_2)$$

Qualche maggiore osservazione si richiede nel caso della relazione (27₃)

$$\cos^2 \sigma W_1^2 - \sin^2 \sigma W_2^2 = \text{cost.},$$

che derivata rapporto ad u_3 dà

$$\cos \sigma e^\psi W_1 = \sin \sigma e^\psi W_2,$$

onde porremo

$$W_1 = \lambda \sin \sigma e^\psi, \quad W_2 = \lambda \cos \sigma e^\psi,$$

con λ fattore di proporzionalità. Dalle formole

$$\frac{\partial W_1}{\partial u_2} = \beta_{12} W_2, \quad \frac{\partial W_2}{\partial u_1} = \beta_{21} W_1$$

seguono le altre $\frac{\partial \lambda}{\partial u_1} = \frac{\partial \lambda}{\partial u_2} = 0$, e però λ è funzione solo di u_3 . Dall'osservazione fatta al § 6 risulta che, cangiando il parametro u_3 , possiamo fare p. e. $\lambda = 1$. Così avremo

$$W_1 = \sin \sigma e^\psi, \quad W_2 = \cos \sigma e^\psi,$$

e successivamente p. e. dalla formola $\frac{\partial W_1}{\partial u_3} = \beta_{13} W_3 = \sin \sigma e^\psi W_3$, risulterà

$W_3 = \frac{\partial \psi}{\partial u_3}$. Le formole definitive in questo caso sono adunque

$$W_1 = \sin \sigma e^\psi, \quad W_2 = \cos \sigma e^\psi, \quad W_3 = \frac{\partial \psi}{\partial u_3}, \quad (28_3)$$

e con queste sono in effetto soddisfatte tutte le (B*).

Si osservi che, nell'attuale caso del sistema (II), il rapporto $\frac{\beta_{13}}{\beta_{23}}$ è costante = $\operatorname{tg} \sigma$, quindi le linee (u_3) in tutti i corrispondenti sistemi tripli ortogonali sono curve piane. Di più nel caso (28₃) è pure costante il rapporto $\frac{W_1}{W_2} = \operatorname{tg} \sigma$, cioè: *le superficie $u_3 = \text{cost.}$ hanno costante il rapporto delle distanze dei loro piani principali dall'origine.*

b) Venendo al caso generale del sistema differenziale (III), si vede subito che per le due prime relazioni (27) valgono le stesse formole, ed i corrispondenti sistemi tripli ortogonali sono ancora definiti dalle (28₁), (28₂). Soltanto per la terza relazione (27) le formole (28₃) sono da sostituirsi colle altre

$$W_1 = \operatorname{sen} \sigma \operatorname{senh} \psi, \quad W_2 = \cos \sigma \operatorname{cosh} \psi, \quad W_3 = \frac{\partial \psi}{\partial u_3}. \quad (29)$$

§ 9.

INTEGRAZIONE DEL SISTEMA DIFFERENZIALE (II).

Veniamo ora alla ricerca, per noi fondamentale, della integrazione effettiva dei sistemi differenziali (II) e (III), cominciando dal primo caso, che è il più semplice. Dimosteremo che in questo caso l'integrazione si riconduce completamente alla teoria delle trasformazioni di BÄCKLUND per le superficie pseudosferiche *isolate*. Situandoci dapprima da un punto di vista puramente analitico, facciamo l'osservazione, comune del resto ai due casi (II) e (III), che se vi si considera u_3 come una costante (parametro), le due prime equazioni nelle due prime linee

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = \operatorname{tg} \sigma \operatorname{sen} \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial u_2} = \cot \sigma \operatorname{sen} \varphi$$

vengono a coincidere, sotto altra forma, colle formole della trasformazione di BÄCKLUND per le superficie pseudosferiche. Posto infatti

$$\varphi = \omega_1 + \omega, \quad \theta = \omega_1 - \omega, \quad (30)$$

esse si scrivono

$$\frac{\partial (\omega_1 + \omega)}{\partial u_1} = \operatorname{tg} \sigma \operatorname{sen} (\omega_1 - \omega), \quad \frac{\partial (\omega_1 - \omega)}{\partial u_2} = \operatorname{cot} \sigma \operatorname{sen} (\omega_1 + \omega). \quad (31)$$

Queste sono appunto, in coordinate asintotiche u_1, u_2 , le formole per la trasformazione di BÄCKLUND, che da una soluzione 2ω della equazione fondamentale per le superficie pseudosferiche

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u_1 \partial u_2} = \operatorname{sen} \Theta \quad (C)$$

fa passare ad una nuova soluzione $2\omega_1$, contenente una costante arbitraria.

Ma se ora riguardiamo anche u_3 come variabile, e facciamo le sostituzioni (30) nelle equazioni del sistema (II), otteniamo

$$\frac{\partial \omega}{\partial u_3} = 0, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial u_3} = -e^\psi, \quad (32)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_1} = \operatorname{tg} \sigma \operatorname{cos} (\omega_1 - \omega), \quad \frac{\partial \psi}{\partial u_2} = \operatorname{cot} \sigma \operatorname{cos} (\omega_1 + \omega). \quad (33)$$

La prima delle (32) dice che qui la soluzione 2ω della (C) è indipendente da u_3 , e $2\omega_1$ è una sua trasformata generica di BÄCKLUND per le (31), sicchè in 2ω , la variabile u_3 figura come costante d'integrazione. Inversamente prendasi per 2ω una funzione di u_1, u_2 che soddisfi l'equazione fondamentale (C), e sia $2\omega_1$ la sua trasformata generica di BÄCKLUND per le (31), nella quale entra una costante arbitraria, che riguardiamo come terza variabile u_3 . La derivazione delle (31) rapporto ad u_3 porge

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \log \frac{\partial \omega_1}{\partial u_3} = \operatorname{tg} \sigma \operatorname{cos} (\omega_1 - \omega), \quad \frac{\partial}{\partial u_2} \log \frac{\partial \omega_1}{\partial u_3} = \operatorname{cot} \sigma \operatorname{cos} (\omega_1 + \omega),$$

e se poniamo $e^\psi = -\frac{\partial \omega_1}{\partial u_3}$ (cangiando se occorre u_3 in $-u_3$), le condizioni (31), (32), (33) saranno tutte soddisfatte. Concludiamo adunque: *L'integrazione del sistema differenziale (II) si riconduce alle trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche isolate.*

§ 10.

RELAZIONE COLLE CONGRUENZE PSEUDOSFERICHE.

Conviene ora interpretare geometricamente questi risultati analitici per giungere alla determinazione effettiva dei sistemi tripli ortogonali associati ad ogni terna integrale (θ, φ, ψ) del sistema (II). Per questo partiamo dalle formole (II*) § 7 relative ai coseni di direzione (X_1, X_2, X_3) del triedro principale, e consideriamo sulla faccia (1, 2) di questo triedro le due direzioni inclinate dell'angolo costante σ sulla prima direzione (X_1, Y_1, Z_1) . Indicando con (ξ, η, ζ) , (ξ', η', ζ') i coseni di queste due direzioni, possiamo porre

$$\xi = -\cos \sigma X_1 + \sin \sigma X_2, \quad \xi' = \cos \sigma X_1 + \sin \sigma X_2, \quad (34)$$

colle analoghe per $\eta, \zeta, \eta', \zeta'$. Derivando rapporto ad u_1, u_2, u_3 colle (II*) § 7, otteniamo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial u_1} &= \cos \theta (\sin \sigma X_1 + \cos \sigma X_2) + \sin \theta X_3, \\ \frac{\partial \xi}{\partial u_2} &= -\cos \varphi (\sin \sigma X_1 + \cos \sigma X_2) - \sin \varphi X_3, \\ \frac{\partial \xi}{\partial u_3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi'}{\partial u_1} &= \cos \theta (\sin \sigma X_1 - \cos \sigma X_2) - \sin \theta X_3, \\ \frac{\partial \xi'}{\partial u_2} &= \cos \varphi (-\sin \sigma X_1 + \cos \sigma X_2) - \sin \varphi X_3, \\ \frac{\partial \xi'}{\partial u_3} &= \sin 2\sigma e^\psi X_3. \end{aligned} \right\} \quad (35')$$

Formando le derivate seconde miste $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1 \partial u_2}, \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_1 \partial u_2}$, troviamo colle (II), (II*)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1 \partial u_2} &= \cos (\varphi - \theta) \cdot \xi = \cos 2\omega \cdot \xi, \\ \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_1 \partial u_2} &= \cos (\varphi + \theta) \cdot \xi' = \cos 2\omega_1 \cdot \xi', \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

e inoltre dalle (35), (35') si deduce

$$\frac{\partial (\xi' + \xi)}{\partial u_1} = 2 \cos \theta \operatorname{sen} \sigma X_1 = \operatorname{tg} \sigma \cos \theta (\xi' - \xi) = \frac{\partial \psi}{\partial u_1} (\xi' - \xi),$$

$$\frac{\partial (\xi' - \xi)}{\partial u_2} = 2 \cos \varphi \cos \sigma X_2 = \cot \sigma \cos \varphi (\xi' + \xi) = \frac{\partial \psi}{\partial u_2} (\xi' + \xi).$$

Queste, se poniamo $e^{-\psi} = R$, possono scriversi

$$\frac{\partial (\xi' + \xi)}{\partial u_1} = - \frac{\partial \log R}{\partial u_1} (\xi' - \xi), \quad \frac{\partial (\xi' - \xi)}{\partial u_2} = - \frac{\partial \log R}{\partial u_2} (\xi' + \xi), \quad (37)$$

ed è inoltre

$$\frac{\partial^2 R}{\partial u_1 \partial u_2} = \cos 2\omega \cdot R. \quad (38)$$

Confrontando queste formole (36), (37), (38) colle formole generali relative al teorema di MOUTARD ed alla sua interpretazione geometrica per le congruenze W (*Lezioni*, Vol. II, Cap. XVI), si vede che ξ , η , ζ , legate dalla relazione $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$, sono tre soluzioni della equazione di MOUTARD

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1 \partial u_2} = \cos 2\omega \cdot \Phi,$$

mentre ξ' , η' , ζ' ne sono le trasformate di MOUTARD mediante la quarta soluzione R . Vi corrisponde adunque una congruenza W , che è manifestamente pseudosferica, e di cui vogliamo determinare le due falde focali (S , S'). Indicando con x , y , z ; x' , y' , z' le coordinate di due punti corrispondenti (fuochi), determineremo S colle formole di LELIEUVRE

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial u_1} & \frac{\partial \zeta}{\partial u_1} \\ \eta & \zeta \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial x}{\partial u_2} = \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u_2} & \frac{\partial \zeta}{\partial u_2} \end{vmatrix}, \text{ ecc.,}$$

le quali, osservando le (34), (35), si mutano nelle altre

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u_1} &= - \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \sigma X_1 + \cos \sigma X_2) + \cos \theta X_3, \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} &= - \operatorname{sen} \varphi (\operatorname{sen} \sigma X_1 + \cos \sigma X_2) + \cos \varphi X_3. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Queste, essendo fissato il valore di u_3 , determinano la posizione di S nello spazio a meno di una traslazione, e per la seconda falda S' abbiamo allora le formole (*Lezioni*, l. c., § 241)

$$x' = x + \begin{vmatrix} \eta' \zeta' \\ \eta \zeta \end{vmatrix}, \text{ ecc.,}$$

le quali, sostituendovi i valori effettivi (34), diventano

$$x' = x + \text{sen } 2\sigma X_3, \quad y' = y + \text{sen } 2\sigma Y_3, \quad z' = z + \text{sen } 2\sigma Z_3. \quad (40)$$

Importa a questo punto osservare che tutte le formole ora dedotte, eccettuate però le terze formole nelle (35), (35'), sono valide anche nell'altro caso del sistema differenziale (II), perchè le formole utilizzate con $u_3 = \text{cost.}$ sono comuni ai due casi (II), (III).

Ma se di più ci troviamo nel caso (II); la derivazione delle (39) rapporto ad u_3 dà subito

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_3} = \frac{\partial^2 x}{\partial u_2 \partial u_3} = 0, \quad (41)$$

e perciò possiamo aggiungere alle (39) l'altra

$$\frac{\partial x}{\partial u_3} = 0, \quad (39^*)$$

dopo di che: *La superficie pseudosferica S resta fissa nello spazio al variare di u_3 .*

§ 11.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA.

Le formole (40) dimostrano che i coseni di direzione del raggio della congruenza pseudosferica coincidono con quelli (X_3, Y_3, Z_3) della normale alla superficie $u_3 = \text{cost.}$ in uno qualunque dei nostri sistemi tripli ortogonali. Risulta di più che la superficie S può identificarsi con qualunque superficie pseudosferica data, giacchè la soluzione 2ω della (C) resta perfettamente arbitraria, e le ∞^1 superficie S' sono le trasformate della S per una medesima trasformazione di BÄCKLUND.

Dopo ciò possiamo formulare la costruzione seguente, che serve a trovare le immagini sferiche dei nostri sistemi tripli ortogonali, coi valori dei coseni di direzione (X_i, Y_i, Z_i) del triedro principale:

Si consideri una superficie pseudosferica qualunque S , riferita alle sue linee asintotiche u_1, u_2 , e si prendano le ∞^1 superficie pseudosferiche S' trasformate della S per una medesima trasformazione di Bäcklund, facendo corrispondere individualmente le S' ai valori di una terza variabile u_3 (costante d'integrazione). I coseni di direzione del raggio della congruenza pseudosferica, colle falde focali (S, S'), danno immediatamente i valori cercati per X_3, Y_3, Z_3 , dai quali, colle formole della terza linea nelle (II*), § 7, si calcoleranno subito quelli di (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2).

Osserviamo ancora che le tre classi di sistemi tripli ortogonali corrispondenti alle formole (28₁), (28₂), (28₃) si avranno così senz'altro in termini finiti. Nel caso delle (28₃) le formole si scrivono

$$\bar{x} = e^\psi (\sin \sigma X_1 + \cos \tau X_2) + \frac{\partial \psi}{\partial u_3} X_3,$$

$$\bar{y} = e^\psi (\sin \sigma Y_1 + \cos \sigma Y_2) + \frac{\partial \psi}{\partial u_3} Y_3,$$

$$\bar{z} = e^\psi (\sin \sigma Z_1 + \cos \sigma Z_2) + \frac{\partial \psi}{\partial u_3} Z_3,$$

e ne risulta l'identità

$$\xi \bar{x} + \eta \bar{y} + \zeta \bar{z} = 0.$$

Siccome ξ, η, ζ non contengono u_3 , ne segue che in questi sistemi tripli ortogonali le curve (u_3) sono tracciate nei piani condotti per l'origine parallelamente ai piani tangenti della superficie pseudosferica S .

§ 12.

CASO DEL SISTEMA DIFFERENZIALE (III).

Passando a trattare dell'integrazione del sistema differenziale (III), ricordiamo che, secondo l'osservazione già fatta al § 10, per le due falde focali (S, S') della congruenza pseudosferica, corrispondente ad un valore fisso

di u_3 , valgono sempre le formole (39) e (40). Ma, in luogo delle (41), si trovano ora le due seguenti

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_3} &= -\operatorname{sen} \sigma e^{-\psi} (\cos \theta X_1 + \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \theta X_3), \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u_2 \partial u_3} &= \cos \sigma e^{-\psi} (\cos \varphi X_2 + \cos \sigma \operatorname{sen} \varphi X_3). \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

La superficie pseudosferica S cangia ora di forma al variare di u_3 (poichè 2ω dipende da u_3), e le formole (39) determinano, per un valore fisso di u_3 , la superficie S solo a meno di una traslazione nello spazio. Ora si osservi che nel caso precedente S era fissa e le S' formavano un tale sistema che il passaggio da una S' alla consecutiva era dato da una *trasformazione infinitesima* di BÄCKLUND (*). Domandiamo se è possibile, anche nel caso attuale generale, collocare in tal guisa nello spazio le ∞^1 superficie pseudosferiche S che il passaggio da una posizione di S alla successiva avvenga per una trasformazione infinitesima di BÄCKLUND. Bisognerà allora che ciascun punto di S subisca uno spostamento la cui direzione giaccia nel piano tangente all'altra falda focale S' della corrispondente congruenza pseudosferica e sia normale al raggio di questa congruenza. Dopo ciò si vede che i coseni della detta direzione sono dati dai tre binomii

$$\operatorname{sen} \sigma X_1 - \cos \sigma X_2, \quad \operatorname{sen} \sigma Y_1 - \cos \sigma Y_2, \quad \operatorname{sen} \sigma Z_1 - \cos \sigma Z_2,$$

ai quali debbono dunque essere proporzionali le tre derivate di x, y, z rapporto ad u_3 . Dovremo porre in conseguenza

$$\frac{\partial x}{\partial u_3} = \Lambda (\operatorname{sen} \sigma X_1 - \cos \sigma X_2), \quad (43)$$

colle altre due analoghe, e vedere se è possibile determinare il fattore incognito Λ di proporzionalità in guisa che le (43) risultino compatibili. Basta formare le derivate delle (43) rapporto ad u_1, u_2 , e paragonarle colle (42), e ne risulta univocamente determinato il seguente valore di Λ

$$\Lambda = \operatorname{sen} \sigma \cos \sigma e^{-\psi},$$

(*) V. il § 1 della Memoria sui sistemi obliqui di WEINGARTEN citata nella prefazione (*Annali*, T. XIX).

che soddisfa in effetto a tutte le condizioni richieste. Ne concludiamo che le formole

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u_1} &= -\operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \sigma X_1 + \cos \sigma X_2) + \cos \theta X_3, \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} &= -\operatorname{sen} \varphi (\operatorname{sen} \sigma X_1 + \cos \sigma X_2) + \cos \varphi X_3, \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} &= \operatorname{sen} \sigma \cos \sigma e^{-\psi} (\operatorname{sen} \sigma X_1 - \cos \sigma X_2) \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV})$$

definiscono per quadrature (a meno di una traslazione) le ∞^1 superficie pseudosferiche collocate nello spazio nel modo richiesto. Le traiettorie (u_3) descritte dai punti delle S tagliano queste superficie sotto l'angolo costante 2σ , onde il sistema (S) non è altro che un particolare sistema obliquo di WEINGARTEN che, nelle notazioni della citata Memoria al T. XIX degli *Annali*, è da indicarsi con $\left(\Omega \frac{\pi}{2} - 2\sigma\right)$. E si osservi ancora che le formole (40)

$$x' = x + \operatorname{sen} 2\sigma X_3, \text{ ecc.}$$

danno il sistema associato $\left(\Omega' \frac{\pi}{2} - 2\sigma\right)$, costituito dalle seconde falde focali S' .

È facile, con opportuni cangiamenti nelle notazioni (cf. più avanti, § 29), identificare le formole stabilite nella Memoria sui sistemi obliqui di WEINGARTEN colle attuali (III), (III*) e (IV), le quali sono adunque da considerarsi come relative ai più generali sistemi obliqui di WEINGARTEN $\left(\Omega \frac{\pi}{2} - 2\sigma\right)$ ad angolo costante. Sono insomma due problemi identici i due della costruzione dei sistemi obliqui di WEINGARTEN $\left(\Omega \frac{\pi}{2} - 2\sigma\right)$, o della costruzione delle im-

magini sferiche nei nostri sistemi tripli ortogonali. Possiamo dunque formulare il risultato seguente:

Da ogni coppia di sistemi obliqui associati di Weingarten $\left(\Omega \frac{\pi}{2} - 2\sigma\right)$, $\left(\Omega' \frac{\pi}{2} - 2\sigma\right)$ si ottiene l'immagine sferica di una classe dei nostri sistemi tripli ortogonali, nei quali i coseni di direzione (X_3, Y_3, Z_3) della normale alle superficie $u_3 = \text{cost.}$ del sistema triplo sono dati da quelli del raggio della congruenza pseudosferica, che ha per falde focali due superficie pseudosferiche corrispondenti S, S' nei due sistemi associati.

È manifesto che la costruzione del § 11 è un caso particolare di questa, e corrisponde al caso che uno dei sistemi obliqui diventi un sistema *elementare* (m. c. § 3), l'altro riducendosi ad un'unica superficie pseudosferica *S*.

§ 13.

VERIFICA DELLE PROPRIETÀ DEI SISTEMI $\left(\frac{\Omega}{2}, \frac{\pi}{2}, -2\sigma\right)$.

Sulle formole (III), (III*), (IV) è facile confermare le proprietà fondamentali dei sistemi $\left(\frac{\Omega}{2}, \frac{\pi}{2}, -2\sigma\right)$, e dedurne la determinazione di questi sistemi dai loro elementi caratteristici (cf. m. c. § 9). Consideriamo nel sistema $\left(\frac{\Omega}{2}, \frac{\pi}{2}, -2\sigma\right)$, definito dalle (IV), le curve (u_3) , delle quali vogliamo calcolare la flessione $\frac{1}{\rho_3}$ e la torsione $\frac{1}{T_3}$. L'elemento d'arco ds_3 delle (u_3) è dato per le (IV₃) da

$$ds_3 = \sin \sigma \cos \sigma e^{-\psi} du_3,$$

e se pei coseni di direzione del triedro principale della curva (u_3) adottiamo le solite notazioni, affette dall'indice 3, abbiamo intanto pei coseni di direzione della tangente $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$

$$\alpha_3 = \sin \sigma X_1 - \cos \sigma X_2, \text{ ecc.} \quad (44)$$

Deriviamo queste rapporto ad u_3 , a sinistra colle formole di FRENET, a destra colle (III*), e troviamo

$$\frac{\xi_3}{\rho_3} = \frac{1}{\sin 2\sigma} (1 - \cos 2\sigma e^{2\psi}) X_3,$$

da cui

$$\xi_3 = \varepsilon X_3 \quad (\varepsilon = \pm 1), \quad (45)$$

e inoltre

$$\frac{1}{\rho_3} = \frac{\varepsilon}{\sin 2\sigma} (1 - \cos 2\sigma e^{2\psi}). \quad (46)$$

Dalle (45), (46) risulta per i coseni di direzione della binormale

$$\lambda_3 = -\varepsilon (\cos \sigma X_1 + \sin \sigma X_2),$$

e con una nuova derivazione rapporto ad u_3

$$\frac{1}{T_3} = -e^{2\psi}. \quad (47)$$

Segue dalle (46), (47) che tra la flessione $\frac{1}{\rho_3}$ e la torsione $\frac{1}{T_3}$ delle (u_3) sussiste la relazione lineare

$$\frac{\varepsilon \sin 2\sigma}{\rho_3} - \frac{\cos 2\sigma}{T_3} = 1, \quad (48)$$

cioè: *Le curve (u_3) sono curve di Bertrand della medesima famiglia (48).*

Si noti poi che, per le (45), la normale principale delle curve (u_3) coincide col raggio della congruenza pseudosferica, e nel sistema obliquo associato le curve (u_3) sono le coniugate delle primitive, avendo con queste a comune le normali principali.

Colle formole attuali possiamo ora dimostrare il teorema: *Per definire colle (III), (III*), (IV) un sistema obliquo $\left(\Omega \frac{\pi}{2} - 2\sigma\right)$ si possono dare ad arbitrio*

i seguenti elementi: 1.° una superficie pseudosferica S del sistema, 2.° una curva C di Bertrand, appartenente alla famiglia (48), che esca da un punto di S colla normale principale diretta nel piano tangente.

Applicando al sistema differenziale (III) i teoremi generali, risulta che, per definire una terna integrale (θ, φ, ψ) , si possono dare ad arbitrio i seguenti elementi:

$$\begin{array}{lll} \theta(u_1, u_2, u_3) & \text{per } u_2 = u_3 = 0, & \text{come funzione di } u_1, \\ \varphi(u_1, u_2, u_3) & \text{per } u_1 = u_3 = 0 & \text{» » di } u_2, \\ \psi(u_1, u_2, u_3) & \text{per } u_1 = u_2 = 0 & \text{» » di } u_3. \end{array}$$

Le due prime funzioni arbitrarie fissano, in modo arbitrario, la superficie pseudosferica $u_3 = 0$. Disponendo della terza $\psi(0, 0, u_3)$, si può dare, secondo la (47), alla torsione $\frac{1}{T_3}$ della curva di BERTRAND $u_1 = u_2 = 0$ una qualunque espressione in funzione dell'arco, ciò che dimostra il teorema.

§ 14.

SISTEMI TRIPLI ORTOGONALI (Ω) IN GENERALE.

Negli studi precedenti abbiamo visto come la ricerca dell'immagine sferica di quei sistemi tripli ortogonali, le cui rotazioni β_{ik} soddisfano alle condizioni (I) § 2, si riconduce completamente alla teoria dei sistemi obliqui di WEINGARTEN, ad angolo σ costante. Tutti questi sistemi tripli ortogonali saranno da ora in poi indicati brevemente come *sistemi* (Ω), per ricordare la loro dipendenza (la dipendenza della loro immagine sferica) dai sistemi obliqui $\left(\Omega, \frac{\pi}{2} - 2\sigma\right)$ di WEINGARTEN. Secondo il § 4, possiamo anche dire: *I sistemi tripli ortogonali* (Ω) *sono caratterizzati dalla proprietà che tra i quadrati delle rotazioni in ciascuna delle tre coppie* $(\beta_{21}, \beta_{31}), (\beta_{32}, \beta_{12}), (\beta_{13}, \beta_{23})$ *ha luogo una relazione lineare a coefficienti costanti.* Anzi si ricordi che basta l'esistenza di una di queste relazioni perchè ne seguano le altre due.

In altro modo più geometrico, possiamo caratterizzare i sistemi (Ω) da proprietà di cui godono le superficie delle sue tre serie. Intanto, per quelle della serie $u_3 = \text{cost.}$, risulta dal § 10 che ha luogo la proprietà seguente: *L'immagine sferica delle linee di curvatura di una superficie* $u_3 = \text{cost.}$ *si ottiene, considerando l'immagine sferica di una congruenza pseudosferica, e prendendo le linee sulla sfera che corrispondono alle asintotiche delle due falde focali.* Vedremo più oltre (§ 16) che di questa medesima proprietà godono anche le superficie delle altre due serie $u_1 = \text{cost.}$, $u_2 = \text{cost.}$, ma le congruenze pseudosferiche ai cui raggi sono parallele le normali della superficie, pure essendo *reali*, hanno sviluppabili immaginarie.

La proprietà geometrica sopra rilevata per le superficie $u_3 = \text{cost.}$ nel sistema (Ω) può porsi sotto quest'altra forma, che già si presentò in una mia Memoria del 1890 (*):

Le linee di curvatura di ogni superficie $u_3 = \text{cost.}$ *nei sistemi* (Ω) *sono le bisettrici di un doppio sistema di linee* (α, β) *della superficie, che si tagliano*

(*) *Sopra alcune classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali* (Annali di matematica, Serie II, T. XVIII).

sotto l'angolo costante 2σ e dividono la superficie in parallelogrammi infinitesimi d'area costante. Aggiungiamo subito che anche per le superficie delle altre due serie vale la stessa proprietà; soltanto per queste l'angolo σ è un immaginario puro, e le linee (α, β) sono coniugate immaginarie.

Volendo esaminare più da vicino la proprietà sopra enunciata, cominciamo dal riprodurre, dalla Memoria ora citata, le considerazioni fondamentali sui sistemi di linee (α, β) , tracciati sopra una qualunque superficie, a cui appartenga quella proprietà. Assumendo le linee (α, β) come coordinate, il ds^2 prenderà la forma

$$ds^2 = e^{-2\tau} d\alpha^2 + 2 \cos 2\sigma d\alpha d\beta + e^{2\tau} d\beta^2, \quad (49)$$

dove 2σ è l'angolo costante sotto cui si tagliano le dette linee, e τ indica una funzione di α, β . E invero l'elemento d'area $d\omega$ è dato qui da $d\omega = \sin 2\sigma \cdot d\alpha d\beta$, e prendendo $d\alpha, d\beta$ costanti si ha appunto la divisione in parallelogrammi infinitesimi d'area costante. Ora le equazioni differenziali delle bisettrici delle linee (α, β) sono

$$e^{-\tau} d\alpha + e^{\tau} d\beta = 0,$$

$$e^{-\tau} d\alpha - e^{\tau} d\beta = 0,$$

e indicando con $\frac{1}{\sqrt{E}}, \frac{1}{\sqrt{G}}$ due rispettivi fattori integranti dei loro primi membri, possiamo porre

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{E} du &= \cos \sigma (e^{-\tau} d\alpha + e^{\tau} d\beta), \\ \sqrt{G} dv &= \sin \sigma (e^{-\tau} d\alpha - e^{\tau} d\beta), \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

da cui quadrando e sommando

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2. \quad (51)$$

Prendendo u, v come variabili indipendenti, abbiamo dalle (50)

$$\left. \begin{aligned} e^{\tau} \sqrt{E} &= \cos \sigma \frac{\partial \alpha}{\partial u}, & e^{\tau} \sqrt{G} &= \sin \sigma \frac{\partial \alpha}{\partial v}, \\ e^{-\tau} \sqrt{E} &= \cos \sigma \frac{\partial \beta}{\partial u}, & e^{-\tau} \sqrt{G} &= -\sin \sigma \frac{\partial \beta}{\partial v}, \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

quindi anche

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} \sigma \frac{\partial}{\partial v} (e^{\tau} \sqrt{E}) - \cos \sigma \frac{\partial}{\partial u} (e^{\tau} \sqrt{G}) &= 0, \\ \operatorname{sen} \sigma \frac{\partial}{\partial v} (e^{-\tau} \sqrt{E}) + \cos \sigma \frac{\partial}{\partial u} (e^{-\tau} \sqrt{G}) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

e risolvendo rapporto a $\frac{\partial \tau}{\partial u}$, $\frac{\partial \tau}{\partial v}$, si ottiene

$$\frac{\partial \tau}{\partial u} = \operatorname{tg} \sigma \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial v} = \cot \sigma \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}. \quad (54)$$

Di qui segue la relazione

$$\operatorname{tg} \sigma \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) = \cot \sigma \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right), \quad (55)$$

la cui forma, si noti bene, non varia cangiando comunque i parametri u, v . Affinchè adunque un sistema ortogonale (u, v) , che dà al ds^2 la forma (51), sia quello delle bisettrici di un doppio sistema (α, β) colla proprietà descritta è *necessario* che sussista la (55). Ma inversamente, se questa sussiste, basta risalire le formole sopra scritte e ne segue la (49), sicchè:

La relazione (55) rappresenta la condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema ortogonale (u, v) sia quello delle bisettrici di un doppio sistema (α, β) di linee, che, intersecandosi sotto l'angolo costante 2σ , dividono la superficie in parallelogrammi infinitesimi d'eguale area.

Manifestamente la (55) dice che il rapporto

$$\frac{\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right)}{\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right)}$$

è una costante *positiva*. Se lo stesso rapporto fosse costante ma negativo, basterebbe prendere per σ un immaginario puro, e le linee (α, β) , anzichè reali, sarebbero coniugate immaginarie.

§ 15.

VERIFICA PER I SISTEMI (Ω).

Si supponga ora che il sistema ortogonale (u, v) , che verifica la condizione (55), sia quello delle linee di curvatura della superficie, e si indichi con

$$ds^2 = e du^2 + g dv^2 \quad (56)$$

il quadrato dell'elemento lineare sferico rappresentativo. Dalle note formole fondamentali (*) segue che si ha

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v},$$

onde se la (55) sussiste per la superficie S , riferita alle sue linee di curvatura, sussiste pure per la sua immagine sferica e viceversa. La proprietà in discorso è adunque comune a tutte le superficie colla stessa immagine sferica, e il problema di trovare le corrispondenti superficie si riduce alle due questioni successive: 1.^o trovare i sistemi ortogonali (u, v) sulla sfera che soddisfano alla condizione:

$$\operatorname{tg} \sigma \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} \right) = \cot \sigma \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} \right); \quad (55^*)$$

2.^o trovare le superficie che hanno questi sistemi sferici (u, v) per immagini delle linee di curvatura.

Basta occuparsi della prima questione, chè la seconda si tratta nel modo ben noto.

Associamo alla (55*) l'altra che esprime appartenere l'elemento lineare (56)

(*) Si ricordino le formole

$$\begin{aligned} \sqrt{E} &= r_2 \sqrt{e}, & \sqrt{G} &= r_1 \sqrt{g}, \\ \frac{\partial r_1}{\partial u} &= (r_2 - r_1) \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u}, & \frac{\partial r_2}{\partial v} &= (r_1 - r_2) \frac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial v}. \end{aligned}$$

alla sfera unitaria

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} \right) = -\sqrt{eg},$$

e ne dedurremo

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} \right) = -\sqrt{eg} \operatorname{sen}^2 \sigma, \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} \right) = -\sqrt{eg} \operatorname{cos}^2 \sigma,$$

formole che possiamo scrivere

$$\frac{\partial}{\partial u} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} \right)^2 + g \operatorname{sen}^2 \sigma \right\} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} \right)^2 + e \operatorname{cos}^2 \sigma \right\} = 0.$$

Integrando, e disponendo convenientemente dei parametri u, v , possiamo rendere

$$\left(\frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} \right)^2 + g \operatorname{sen}^2 \sigma = 1, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} \right)^2 + e \operatorname{cos}^2 \sigma = 1.$$

Introduciamo ora due angoli ausiliari θ, φ colle posizioni

$$\sqrt{e} \operatorname{cos} \sigma = \operatorname{sen} \theta, \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} = \operatorname{cos} \theta; \quad \sqrt{g} \operatorname{sen} \sigma = \operatorname{sen} \varphi, \quad \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} = \operatorname{cos} \varphi,$$

e ne risulteranno fra θ, φ le due relazioni

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \operatorname{tg} \sigma \operatorname{sen} \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial v} = \operatorname{cot} \sigma \operatorname{sen} \varphi. \quad (57)$$

Viceversa se θ, φ soddisfano queste equazioni, l'elemento lineare

$$d s'^2 = \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{cos}^2 \sigma} d u^2 + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\operatorname{sen}^2 \sigma} d v^2 \quad (58)$$

appartiene alla sfera di raggio $= 1$ e soddisfa alla (55*).

Nelle (57) si riconoscono (cangiate le notazioni u_1, u_2 in u, v) le due prime equazioni delle due prime linee nel sistema differenziale (II) o (III) § 6. E invero se, per una superficie $u_3 = \operatorname{cost.}$ nel sistema (Ω) , si costruisce il $d s'^2$ della rappresentazione sferica

$$d s'^2 = S d X_3^2$$

(i differenziali essendo presi per u_3 costante) si ha subito dalle (a') della prefazione

$$d s'^2 = \beta_{31}^2 d u_1^2 + \beta_{32}^2 d u_2^2, \quad (59)$$

ossia per le (24), (25) § 6

$$d s'^2 = \frac{\text{sen}^2 \theta}{\cos^2 \sigma} d u_1^2 + \frac{\text{sen}^2 \varphi}{\text{sen}^2 \sigma} d u_2^2,$$

formola che combina appunto colla (58). Ricordando i risultati del § 10, possiamo concludere: *I sistemi ortogonali sferici (u, v), che godono della proprietà voluta (che soddisfano alla (55*)), si ottengono facendo l'immagine sferica di una qualunque congruenza pseudosferica, e prendendo sulla sfera le linee (ortogonali) corrispondenti alle asintotiche delle due falde focali.*

§ 16.

LE SUPERFICIE DELLE DUE SERIE $u_1 = \text{cost.}$, $u_2 = \text{cost.}$ NEI SISTEMI (Ω).

La proprietà di cui godono le superficie $u_3 = \text{cost.}$ nei sistemi (Ω) dipende, come si è visto, da ciò che la loro rappresentazione sferica (59) soddisfa alla condizione (55*), cioè il rapporto

$$\frac{\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{1}{\beta_{31}} \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_1} \right)}{\frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1}{\beta_{32}} \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_2} \right)}$$

è una costante *positiva*. E notiamo che il rapporto stesso, per le (A) § 1, si può scrivere più semplicemente

$$\frac{\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1}}{\frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2}}.$$

Ora di una proprietà affatto analoga godono le rappresentazioni sferiche delle superficie delle altre due serie $u_1 = \text{cost.}$, $u_2 = \text{cost.}$ perchè i rapporti

corrispondenti

$$\frac{\frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2}}{\frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_3}}, \quad \frac{\frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_3}}{\frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1}}$$

sono pure costanti, però questa volta *negativi*. Questo risulta dalle formole (24), (25) per le rotazioni di un sistema (Ω), od anche dalle generali (I) § 2, giacchè quei tre rapporti hanno i valori costanti

$$-c, \quad \frac{1}{c-1}, \quad \frac{1-c}{c},$$

dei quali uno è positivo, gli altri due negativi (§ 6). Ne consegue che in ogni sistema (Ω) anche le superficie delle due serie $u_1 = \text{cost.}$, $u_2 = \text{cost.}$ godono della stessa proprietà delle $u_3 = \text{cost.}$, ma per esse l'angolo costante σ è un immaginario puro (§ 14). Si può conservare una forma reale alla nostra proprietà dimostrando, come faremo nel prossimo paragrafo, che le normali alle superficie $u_1 = \text{cost.}$, $u_2 = \text{cost.}$ sono parallele ai raggi di *congruenze pseudosferiche reali*, e le loro linee di curvatura corrispondono alle asintotiche delle due falde focali, le quali però nel caso attuale, anzichè reali, sono immaginarie (coniugate). Riepilogando, enunciamo nella seguente forma più completa la proprietà geometrica dei sistemi (Ω) che li caratterizza, come si vedrà, completamente:

In ogni sistema triplo ortogonale (Ω) le superficie di ciascuna delle tre serie hanno le normali parallele ai raggi di congruenze pseudosferiche reali, ed alle linee di curvatura delle superficie corrispondono le asintotiche delle due falde focali. Queste congruenze pseudosferiche reali hanno sviluppabili reali solo per una delle tre serie, immaginarie coniugate per le altre due.

Così con questi sistemi tripli ortogonali (Ω) vengono a porsi in relazione non solo le ordinarie congruenze pseudosferiche reali, ma anche le altre che, pure essendo reali, hanno i fuochi immaginari. Nel dimostrare le proprietà ora enunciate, noi verremo in sostanza a dare le formole effettive per la determinazione di queste congruenze reali che hanno costante per tutti i raggi la distanza dei punti limiti e costante, ma puramente immaginaria, la distanza dei fuochi. Osserviamo che l'esistenza di queste congruenze risulta anche dalle formole generali e la loro determinazione dipende (Vedi *Lezioni*,

Vol. I, pag. 324, nota) dalla ricerca di quegli elementi lineari sferici

$$d s'^2 = e d u^2 + g d v^2$$

nei quali il prodotto $\sqrt{e g}$ soddisfa alla equazione di LIOUVILLE

$$\frac{\partial^2 \log \sqrt{e g}}{\partial u \partial v} = k^2 \sqrt{e g},$$

dove k è una costante > 1 .

§ 17.

LE CONGRUENZE PSEUDOSFERICHE REALI A FUOCHI IMMAGINARI.

Abbiassi un sistema (Ω) , corrispondente dapprima al caso generale (III) § 6, ove le rotazioni hanno i valori (25). Prendiamo una superficie di (Ω) in una delle prime due serie, p. e. nella $u_1 = \text{cost.}$, e dimostriamo che sussiste la proprietà enunciata al paragrafo precedente, determinando effettivamente la congruenza pseudosferica ai cui raggi sono parallele le normali della superficie. Adoperando un'analisi simile a quella del § 10, introduciamo ora le tre quantità complesse

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{X_2}{\text{sen } \sigma} + i \cot \sigma X_3, & \eta &= \frac{Y_2}{\text{sen } \sigma} + i \cot \sigma Y_3, \\ \zeta &= \frac{Z_2}{\text{sen } \sigma} + i \cot \sigma Z_3, & (i &= \sqrt{-1}), \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

legate dalla relazione

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1. \quad (60^*)$$

Derivandole rapporto ad u_2, u_3 , coll'osservare le formole (III*) § 7, troviamo

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial u_2} &= -\frac{\cos \varphi}{\text{sen } \sigma} X_1 + \frac{i \cos \sigma}{\text{sen}^2 \sigma} \text{sen } \varphi X_2 - \frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen}^2 \sigma} X_3, \\ \frac{\partial \xi}{\partial u_3} &= -i \cos \sigma \cosh \psi X_1 - \frac{i \cos^2 \sigma}{\text{sen } \sigma} \text{senh } \psi X_2 + \cot \sigma \text{senh } \psi X_3, \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

e, calcolando ancora la derivata seconda mista, risulta

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_2 \partial u_3} = \cot \sigma (\sin \varphi \sinh \psi - i \cos \varphi \cosh \psi) \cdot \xi,$$

colle analoghe per η , ζ . Dunque ξ , η , ζ sono soluzioni della equazione di MOUTARD:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_2 \partial u_3} = \mathfrak{M} \cdot \Phi, \quad \text{con} \quad \mathfrak{M} = \cot \sigma (\sin \varphi \sinh \psi - i \cos \varphi \cosh \psi),$$

e possiamo perciò applicare le formole di LELIEUVRE per trovare una superficie S (immaginaria) i cui coseni di direzione della normale siano (ξ, η, ζ) e le linee (u_2, u_3) le asintotiche; a causa della (60*) la curvatura K della superficie S sarà $K = -1$, cioè la S sarà pseudosferica. Dette x, y, z le coordinate dal punto generico su S , queste saranno da calcolarsi dalle formole di LELIEUVRE (*):

$$\frac{\partial x}{\partial u_2} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial u_2} & \frac{\partial \zeta}{\partial u_2} \\ \eta & \zeta \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial x}{\partial u_3} = \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u_3} & \frac{\partial \zeta}{\partial u_3} \end{vmatrix}, \quad (62)$$

le quali, per le formole (60), (61), si cangiano subito nelle altre

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u_2} &= \frac{\sin \varphi}{\sin \sigma} X_1 + \frac{i \cos \sigma}{\sin^2 \sigma} \cos \varphi X_2 - \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \sigma} X_3, \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} &= \cos \sigma \sinh \psi X_1 + \frac{\cos^2 \sigma}{\sin \sigma} \cosh \psi X_2 + i \cot \sigma \cosh \psi X_3. \end{aligned} \right\} (63)$$

Passando dalla superficie S alla immaginaria coniugata S , e indicando con un soprassegno le quantità relative, abbiamo dalle (63)

$$\frac{\partial (x - \bar{x})}{\partial u_2} = 2i \frac{\cos \sigma}{\sin^2 \sigma} \cos \varphi X_2, \quad \frac{\partial (x - \bar{x})}{\partial u_3} = 2i \cot \sigma \cosh \psi X_3,$$

che possiamo anche scrivere per le (III*)

$$\frac{\partial (x - \bar{x})}{\partial u_2} = 2i \frac{\cos \sigma}{\sin^2 \sigma} \frac{\partial X_1}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial (x - \bar{x})}{\partial u_3} = 2i \frac{\cos \sigma}{\sin^2 \sigma} \frac{\partial X_1}{\partial u_3}.$$

(*) Si avverta che nei calcoli seguenti nel testo u_1 resta costante.

Integrando, e disponendo delle costanti additive nelle (63), abbiamo

$$x - \bar{x} = 2i \frac{\cos \sigma}{\sin^2 \sigma} X_1, \quad y - \bar{y} = 2i \frac{\cos \sigma}{\sin^2 \sigma} Y_1, \quad z - \bar{z} = 2i \frac{\cos \sigma}{\sin^2 \sigma} Z_1. \quad (64)$$

Queste formole dimostrano che le rette (reali) congiungenti i punti corrispondenti (coniugati) di S, \bar{S} formano una congruenza i cui raggi sono paralleli alle normali della superficie $u_1 = \text{cost.}$, e le cui falde focali sono appunto (S, \bar{S}) . La distanza δ dei fuochi è costante, precisamente

$$\delta = 2i \frac{\cos \sigma}{\sin^2 \sigma},$$

ed è pur costante l'angolo ω dei due piani focali (delle due normali a S, \bar{S}), perchè

$$\cos \omega = S \xi \bar{\xi} = \frac{1 + \cos^2 \sigma}{\sin^2 \sigma}, \quad \text{indi} \quad \sin \omega = \frac{2i \cos \sigma}{\sin^2 \sigma},$$

onde la congruenza è in effetto pseudosferica. La distanza d dei due punti limiti è

$$d = \frac{\delta}{\sin \omega} = 1.$$

Possiamo del resto presentare queste formole, per le nostre congruenze pseudosferiche *reali*, sotto forma affatto libera da immaginari. Per questo si prenda come superficie di partenza la superficie media S_0 che è reale, e indicando con x_0, y_0, z_0 le coordinate dal punto medio, queste saranno definite, per quadrature, dalle formole reali, che seguono dalle (63):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x_0}{\partial u_2} &= \frac{\sin \varphi}{\sin \sigma} X_1 - \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \sigma} X_3, \\ \frac{\partial x_0}{\partial u_3} &= \cos \sigma \sinh \psi X_1 + \frac{\cos^2 \sigma}{\sin \sigma} \cosh \psi X_2. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

I coseni di direzione del raggio della congruenza sono X_1, Y_1, Z_1 , ed avendosi

$$\frac{\partial X_1}{\partial u_2} = \cos \varphi X_2, \quad \frac{\partial X_1}{\partial u_3} = \sin \sigma \cosh \psi X_3,$$

il calcolo dei coefficienti fondamentali di KUMMER (*Lezioni*, Vol. I, Cap. X) dà

$$E = \cos^2 \varphi, \quad F = 0, \quad G = \operatorname{sen}^2 \sigma \cosh^2 \psi,$$

$$e = 0, \quad f = \frac{\cos^2 \sigma}{\operatorname{sen} \sigma} \cos \varphi \cosh \psi, \quad f' = -\frac{1}{\operatorname{sen} \sigma} \cos \varphi \cosh \psi, \quad g = 0,$$

e pei valori di d, δ risultano nuovamente le formole

$$d = 1, \quad \delta = \frac{2i \cos \sigma}{\operatorname{sen}^2 \sigma}.$$

In questi calcoli abbiamo supposto che il sistema (Ω) appartenesse al caso generale del sistema differenziale (III). Se appartiene invece al sistema differenziale (II), si trovano i medesimi risultati, colla sola differenza che le formole (65) saranno da sostituirsi colle altre

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x_0}{\partial u_2} &= \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \sigma} X_1 - \frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen}^2 \sigma} X_3, \\ \frac{\partial x_0}{\partial u_3} &= e^\psi \left(\cos \sigma X_1 + \frac{\cos^2 \sigma}{\operatorname{sen} \sigma} X_2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (65^*)$$

(*Continua.*)

Ricerche intorno ad una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali.

(Di LUIGI BIANCHI, a Pisa.)

(Continuazione e fine, vedi Serie III, Tomo XXV, Fascicolo 1.º-2.º)

§ 18.

PROPRIETÀ CARATTERISTICA DEI SISTEMI (Ω).

Veniamo ora a dimostrare che la proprietà osservata al § 6 per le superficie delle tre serie nei sistemi tripli ortogonali (Ω), in relazione colle congruenze pseudosferiche, è in effetto caratteristica per questi sistemi.

Se in un sistema triplo ortogonale (u_1, u_2, u_3) si verifica la detta proprietà, i tre rapporti

$$\frac{\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1}}{\frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2}}, \quad \frac{\frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2}}{\frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_3}}, \quad \frac{\frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_3}}{\frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1}}$$

debbono essere tre costanti (§ 16); però ciascuna di queste sarà diversa da -1 , altrimenti per le (A) della terza linea verrebbe ad annullarsi qualche rotazione. Ciò premesso, possiamo indicare quei tre rapporti rispettivamente con

$$\frac{1-a}{a}, \quad \frac{1-b}{b}, \quad \frac{1-c}{c},$$

essendo a, b, c tre costanti finite e diverse da $(0, 1)$. Combinando le tre equazioni che ne risultano colle fondamentali (A) (cf. § 2), otteniamo il si-

stema seguente :

$$\left. \begin{aligned}
 * \quad , \quad \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} &= -a \beta_{31} \beta_{32}, \quad \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_3} = \beta_{23} \beta_{31}, \\
 * \quad , \quad \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_2} &= \beta_{32} \beta_{21}, \quad \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_3} = (c-1) \beta_{21} \beta_{23}, \\
 \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} &= (a-1) \beta_{31} \beta_{32}, \quad * \quad , \quad \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_3} = \beta_{13} \beta_{32}, \\
 \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_1} &= \beta_{31} \beta_{12}, \quad * \quad , \quad \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_3} = -b \beta_{12} \beta_{13}, \\
 \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1} &= -c \beta_{21} \beta_{23}, \quad \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_2} = \beta_{12} \beta_{23}, \quad * \quad , \\
 \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_1} &= \beta_{21} \beta_{13}, \quad \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} = (b-1) \beta_{12} \beta_{13}, \quad * \quad ,
 \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

dove si osserverà che il sistema resta inalterato, scambiando ciclicamente gli indici 1, 2, 3 e le costanti a, b, c . Ma ora bisogna esaminare le condizioni d'integrabilità, per le quali troviamo subito le tre seguenti :

$$\left. \begin{aligned}
 [1 + b(a-1)] \cdot \beta_{12} \beta_{13} \beta_{31} &= [1 + a(c-1)] \cdot \beta_{32} \beta_{21} \beta_{23}, \\
 [1 + c(b-1)] \cdot \beta_{23} \beta_{21} \beta_{12} &= [1 + b(a-1)] \cdot \beta_{13} \beta_{32} \beta_{31}, \\
 [1 + a(c-1)] \cdot \beta_{31} \beta_{32} \beta_{23} &= [1 + c(b-1)] \cdot \beta_{21} \beta_{13} \beta_{12}.
 \end{aligned} \right\} \quad (66^*)$$

Siccome nessuna delle rotazioni deve annullarsi, risulta dalle (66*) che se una delle tre costanti

$$1 + b(a-1), \quad 1 + c(b-1), \quad 1 + a(c-1) \quad (67)$$

si annulla, si annullano anche le altre due; ed allora, avendosi

$$a = \frac{1}{1-c}, \quad b = \frac{c-1}{c},$$

il sistema (66) viene in effetto a coincidere col sistema (I). Resta a vedersi se può accadere che le tre costanti (67) siano tutte diverse da zero. Allora

dalle (66*) risulterebbero, per divisione, le tre relazioni quadratiche

$$\left[1 + c(b - 1)\right] \beta_{12}^2 - \left[1 + a(c - 1)\right] \beta_{32}^2 = 0,$$

$$\left[1 + a(c - 1)\right] \beta_{23}^2 - \left[1 + b(a - 1)\right] \beta_{13}^2 = 0,$$

$$\left[1 + b(a - 1)\right] \beta_{31}^2 - \left[1 + c(b - 1)\right] \beta_{21}^2 = 0.$$

Per quanto si è visto al § 4, dovremmo trovarci nuovamente nel caso del sistema differenziale (1), e ciò contraddice all'ipotesi che le tre costanti (67) non si annullino.

Concludiamo adunque: *I sistemi tripli ortogonali (Ω) sono i più generali possibili pei quali si verifica la proprietà che ciascuna superficie delle tre serie ha le sue normali parallele ai raggi di una congruenza pseudosferica e le sue linee di curvatura corrispondono alle asintotiche delle due falde focali.*

§ 19.

SISTEMA (Ω) ELICOIDALE A CURVATURA COSTANTE.

Facciamo una breve digressione dalla teoria generale dei sistemi (Ω) per considerare un esempio particolare notevole, che appartiene nello stesso tempo ai sistemi di WEINGARTEN. È questo il sistema triplo di elicoidi a curvatura costante, congruenti in ciascuna serie, di cui tratta il § 443, Vol. II delle *Lezioni*. Qualunque elicoide a curvatura costante, rotando attorno all'asse, genera una famiglia di LAMÉ che dà luogo ad un sistema triplo elicoidale in questione. Che un tale sistema sia al tempo stesso un sistema (Ω) si vede subito dalle relative formole (l. c.), osservando che i quadrati delle rotazioni in ciascuna coppia

$$(\beta_{21}, \beta_{31}), (\beta_{32}, \beta_{12}), (\beta_{13}, \beta_{23})$$

sono legati da una relazione quadratica. Volendo presentare queste formole in accordo colle notazioni della presente Memoria, scriviamo il $d s^2$ riferito

al sistema triplo ortogonale sotto la forma

$$d s^2 = R^2 \left\{ \frac{k^2}{\cos^2 \sigma} c n^2 \tau d u_1^2 + \frac{1}{k^2 \sin^2 \sigma} d n^2 \tau d u_2^2 + \frac{k'^2}{k^2} s n^2 \tau d u_3^2 \right\},$$

dove σ , R indicano due costanti, k è il modulo delle funzioni ellittiche, k' il complementare, e l'argomento τ è la seguente funzione lineare di u_1 , u_2 , u_3

$$\tau = u_1 \operatorname{tg} \sigma + \frac{u_2 \cot \sigma}{k} + \frac{u_3}{k'}.$$

Per le rotazioni β_{ik} si trova

$$\beta_{21} = -k s n \tau, \quad \beta_{31} = -\frac{d n \tau}{\cos \sigma}; \quad \beta_{12} = -s n \tau, \quad \beta_{32} = -\frac{c n \tau}{\sin \sigma};$$

$$\beta_{13} = \frac{\sin \sigma}{k'} d n \tau, \quad \beta_{23} = \frac{k \cos \sigma}{k'} c n \tau;$$

come si vede sono legate dalle relazioni quadratiche del § 6:

$$\beta_{21}^2 + \cos^2 \sigma \beta_{31}^2 = 1, \quad \beta_{12}^2 + \sin^2 \sigma \beta_{32}^2 = 1, \quad \frac{\beta_{13}^2}{\sin^2 \sigma} - \frac{\beta_{23}^2}{\cos^2 \sigma} = 1.$$

Introducendo le tre variabili ausiliarie θ , φ , ψ colle posizioni

$$\cos \theta = -k s n \tau, \quad \sin \theta = -d n \tau; \quad \cos \varphi = -s n \tau, \quad \sin \varphi = -c n \tau;$$

$$\cosh \psi = \frac{d n \tau}{k'}, \quad \sinh \psi = \frac{k c n \tau}{k'},$$

si ritorna alle formole del § 6, e le equazioni differenziali (III) sono soddisfatte.

È da notarsi che le elicoidi a curvatura costante *positiva* del sistema sono le $u_3 = \text{cost.}$, precisamente

$$K_3 = \frac{1}{R^2};$$

le elicoidi delle altre due serie hanno le curvature negative.

$$K_1 = -\frac{\sin^2 \sigma}{R^2}, \quad K_2 = -\frac{\cos^2 \sigma}{R^2}.$$

Qualunque elicoidi a curvatura costante gode adunque della proprietà

caratteristica per le superficie di un sistema (Ω) descritta al § 18. In particolare, se la curvatura è positiva, le traiettorie isogonali, sotto conveniente angolo costante, delle linee di curvatura dividono la superficie in parallelogrammi infinitesimi d'eguale area. Sarebbe facile vedere che fra le superficie a curvatura costante soltanto le elicoidali godono della proprietà in discorso, ed il sistema (Ω) qui considerato è l'unico che appartenga insieme alla classe dei sistemi di WEINGARTEN.

§ 20.

TRASFORMAZIONI DI BÄCKLUND E TRASFORMAZIONI DI LIE DEI SISTEMI (Ω) .

A) *Trasformazioni di Bäcklund.* La costruzione dei sistemi (Ω) dipende in primo luogo da quella della loro immagine sferica, ossia dalla integrazione dei sistemi differenziali (II), o (III), e dei corrispondenti sistemi di equazioni ai differenziali totali (II*) o (III*). Come nel caso delle superficie pseudosferiche isolate, non abbiamo metodi che permettano di compiere queste integrazioni in generale, ma possiamo ancora qui costruire dei metodi di *integrazione successiva* che, partendo da sistemi integrali già noti, ne facciamo derivare infiniti nuovi. Si è visto infatti che il problema di costruire la rappresentazione sferica dei sistemi tripli ortogonali (Ω) equivale perfettamente all'altro della costruzione dei sistemi obliqui $(\Omega - \frac{\pi}{2} - 2\sigma)$ di WEINGARTEN. A

questi ultimi sistemi si è dimostrato (Tom. XIX degli *Annali*) che sono applicabili le trasformazioni di BÄCKLUND, le quali danno appunto metodi di integrazione successiva, perfezionati inoltre col teorema di permutabilità che risparmia le quadrature. Le trasformazioni di BÄCKLUND si trasportano dunque senz'altro alla costruzione della *rappresentazione sferica* dei sistemi (Ω) . Ma la ricerca si potrebbe spingere molto più oltre, e passare a costruzioni geometriche che permettano di applicare le trasformazioni di BÄCKLUND non solo alle immagini sferiche, ma *ai singoli sistemi (Ω) stessi*. Questo richiederebbe per altro ulteriori sviluppi dai risultati della teoria dei sistemi obliqui di WEINGARTEN, nei quali qui non vogliamo inoltrarci.

B) *Trasformazioni di Lie.* Per i sistemi di equazioni differenziali fonda-

mentali (II) o (III) si può ripetere l'osservazione fatta da LIE per le superficie pseudosferiche isolate. Se

$$\theta(u_1, u_2, u_3), \quad \varphi(u_1, u_2, u_3), \quad \psi(u_1, u_2, u_3)$$

è una terna integrale delle (II) o delle (III), le funzioni

$$\Theta(u_1, u_2, u_3) = \theta\left(k u_1, \frac{u_2}{k}, u_3\right), \quad \Phi(u_1, u_2, u_3) = \varphi\left(k u_1, \frac{u_2}{k}, u_3\right),$$

$$\Psi(u_1, u_2, u_3) = \psi\left(k u_1, \frac{u_2}{k}, u_3\right),$$

dove k è una costante arbitraria, soddisfano al sistema stesso quando vi si cangi $\operatorname{tg} \sigma$ in $\operatorname{tg} \sigma' = k \operatorname{tg} \sigma$. Questa è la trasformazione di LIE per i sistemi obliqui di WEINGARTEN (m. c., § 7). In particolare se vi si fa $k = \cot \sigma$, ne risulta $\operatorname{tg} \sigma' = 1$ ed il nuovo sistema obliquo di WEINGARTEN diventa un sistema triplo ortogonale di WEINGARTEN a flessione costante. Anche per i sistemi (Ω) questo caso di $\sigma = \frac{\pi}{4}$ è notevole; allora le superficie $u_3 = \text{cost.}$ in (Ω) sono divise in rettangoli infinitesimi d'area costante dalle bisettrici delle linee di curvatura.

§ 21.

ALTRO MODO DI STABILIRE LE TRASFORMAZIONI DI LIE.

Si può giungere alle trasformazioni di LIE dei sistemi (Ω) per un'altra via, notevole per la sua relazione coi sistemi particolari (Ω) soddisfacenti alla condizione del § 5

$$k_1 W_1^2 + k_2 W_2^2 + k_3 W_3^2 = \text{cost.}$$

Partiamo dall'osservazione di DARBOUX, applicabile in generale ai sistemi tripli coniugati (Vedi DARBOUX, *Systèmes orthogonaux*, pag. 366), che se le funzioni β_{ik} soddisfano alle prime sei equazioni del sistema (A) § 1, vi soddisfano pure le sei

$$\beta'_{ik} = \frac{\alpha_i}{\alpha_k} \cdot \beta_{ik}, \quad (68)$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono tre costanti qualunque. Ma supponiamo ora di più che le β_{ik} siano le rotazioni di un sistema triplo ortogonale (Ω) (*), e domandiamo se è possibile prendere le costanti α , in guisa che anche le β'_{ik} date dalle (68) siano le rotazioni di un sistema ortogonale. Intanto questo nuovo sistema è certamente alla sua volta un sistema (Ω'), perchè i quadrati delle rotazioni in ciascuna coppia

$$(\beta'_{21}, \beta'_{31}), (\beta'_{12}, \beta'_{32}), (\beta'_{23}, \beta'_{13})$$

sono legati da una relazione quadratica. Se indichiamo con c, c' i valori rispettivi della costante c nelle equazioni (I) a cui soddisfano le β_{ik} e le β'_{ik} e confrontiamo fra loro le equazioni corrispondenti, sostituendo nelle seconde i valori (68) delle β'_{ik} , troviamo quali condizioni necessarie e sufficienti per le α

$$\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} = \frac{c'}{c}, \quad \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2} = \frac{1}{1-c}, \quad \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1^2} = \frac{c'-1}{c-1}, \quad (69)$$

delle quali però una è manifestamente conseguenza delle altre due. Se vogliamo restare nel campo reale, è chiaro che le costanti c, c' debbono avere lo stesso segno, e quando siano positive dovranno essere insieme minori, o insieme maggiori dell'unità. Permutando gli indici, possiamo supporre c, c' negative, e porre $c = -\operatorname{tg}^2 \sigma, c' = -\operatorname{tg}^2 \sigma'$; ed allora basterà prendere p. e.

$$\alpha_1 = \operatorname{tg} \sigma', \quad \alpha_2 = \operatorname{tg} \sigma, \quad \alpha_3 = \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma'}.$$

È chiaro che le formole (68), quando siano soddisfatte le (69), rappresentano una effettiva trasformazione per le immagini sferiche dei sistemi (Ω); ma si vede facilmente, servendosi delle forme normali (II), (III) del sistema (I), che essa coincide in sostanza colla trasformazione di LIE. Ma nella forma attuale possiamo interpretarla in un nuovo modo introducendo i particolari sistemi (Ω) che soddisfano alla condizione

$$\alpha_1^2 W_1^2 + \alpha_2^2 W_2^2 + \alpha_3^2 W_3^2 = \operatorname{cost.}$$

(*) Più in generale, se si suppongono le relazioni (68) fra le rotazioni di due sistemi tripli ortogonali, questi appartengono necessariamente alla classe dei sistemi (Ω) e si hanno le relazioni del testo.

Le equazioni differenziali totali (47) per questi sistemi si scrivono infatti

$$\frac{\partial W_i}{\partial u_i} = -\frac{\alpha_k^2}{\alpha_i^2} \beta_{ki} W_k - \frac{\alpha_l^2}{\alpha_i^2} \beta_{li} W_l, \\ (i = k = l),$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} W_k,$$

od anche per le (68)

$$\frac{\partial W_i}{\partial u_i} = -\frac{\alpha_k}{\alpha_i} \beta'_{ki} W_k - \frac{\alpha_l}{\alpha_i} \beta'_{li} W_l,$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial u_k} = \frac{\alpha_k}{\alpha_i} \beta'_{ik} W_k.$$

Basta ora porre

$$\alpha_1 W_1 = X'_1, \quad \alpha_2 W_2 = X'_2, \quad \alpha_3 W_3 = X'_3,$$

e queste si cangiano precisamente nelle formole (α') della prefazione relative ai coseni di direzione del triedro principale nel sistema triplo ortogonale corrispondente alle rotazioni β'_{ik} . Di qui concludiamo: *Data l'immagine sferica di un sistema (Ω), la ricerca dei particolari sistemi che soddisfano alla condizione del § 5: $\alpha_1^2 W_1^2 + \alpha_2^2 W_2^2 + \alpha_3^2 W_3^2 = \text{cost.}$ equivale alla trasformazione di Lie.*

§ 22.

TRASFORMAZIONI PARALLELE (D) DEI SISTEMI (Ω).

Nelle trasformazioni di BÄCKLUND e nelle trasformazioni di LIE dei sistemi (Ω) cangia l'immagine sferica del sistema, restando però fissa la costante c delle formole (I) per le prime, mentre per le seconde cangia anche il valore di c . Andiamo ora a considerare pei sistemi (Ω) delle trasformazioni molto più semplici nelle quali l'immagine sferica del sistema non cangia e che diciamo per ciò *trasformazioni parallele*. L'esistenza di queste particolari trasformazioni è legata essenzialmente al sistema differenziale (I) § 2, cui soddisfano le rotazioni di un sistema (Ω), ossia alle relazioni quadratiche

fra le coppie di rotazioni $(\beta_{21}, \beta_{31}), (\beta_{32}, \beta_{12}), (\beta_{13}, \beta_{23})$ (Vedi § 4). Partiamo dall'osservazione seguente:

Se le rotazioni β_{ik} soddisfano alle (I), ed è (W_1, W_2, W_3) una terna qualunque di soluzioni del sistema differenziale (B*) § 1, le funzioni H_1, H_2, H_3 , calcolate dalle formole

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \frac{\partial W_1}{\partial u_1} + c \beta_{21} W_2, \\ H_2 &= c \frac{\partial W_2}{\partial u_2} + \beta_{12} W_1, \\ H_3 &= \beta_{13} W_1 + c \beta_{23} W_2, \end{aligned} \right\} \quad (D_1)$$

danno una terna di soluzioni del sistema aggiunto (B).

Per dimostrarlo basta sostituire questi valori di H_1, H_2, H_3 nelle (B), tenendo conto delle (I) e delle (B*) cui soddisfano, per ipotesi, W_1, W_2, W_3 . Da questo primo risultato ne deduciamo subito altri due permutando circolarmente gli indici, coll'applicare l'osservazione del § 3. E così vediamo che, accanto alle formole (D₁), si possono scrivere gli altri due sistemi di formole, che raggiungono lo stesso effetto:

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \beta_{21} W_2 + \frac{1}{1-c} \beta_{31} W_3, \\ H_2 &= \frac{\partial W_2}{\partial u_2} + \frac{1}{1-c} \beta_{32} W_3, \\ H_3 &= \frac{1}{1-c} \frac{\partial W_3}{\partial u_3} + \beta_{23} W_2, \end{aligned} \right\} \quad (D_2)$$

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \frac{c-1}{c} \frac{\partial W_1}{\partial u_1} + \beta_{31} W_3, \\ H_2 &= \beta_{32} W_3 + \frac{c-1}{c} \beta_{12} W_1, \\ H_3 &= \frac{\partial W_3}{\partial u_3} + \frac{c-1}{c} \beta_{13} W_1. \end{aligned} \right\} \quad (D)$$

Nota adunque un sistema (Ω) , corrispondente alla terna (W_1, W_2, W_3) , le formole precedenti faranno conoscere *per quadrature* tre nuovi sistemi (Ω) paralleli al primitivo, ove si sostituiscano nelle formole (2) della prefazione i valori di H_1, H_2, H_3 calcolati dalle (D₁), o dalle (D₂), o infine dalle (D₃). Queste diciamo, per abbreviare, *trasformazioni* (D) dei sistemi (Ω) . È da osservarsi per altro che, se il sistema (Ω) appartiene alla classe speciale del § 2 che soddisfa alla relazione:

$$W_1^2 + c W_2^2 = \text{cost.}, \quad (d_1)$$

la trasformazione (D₁) diventa illusoria, perchè dalle (9), (10) § 2 risulta

$$H_1 = H_2 = H_3 = 0,$$

cioè il sistema derivato si riduce ad un punto. Similmente diventano illusorie le trasformazioni (D_2) , (D_3) per quei sistemi (Ω) che soddisfino rispettivamente alle condizioni

$$W_2^2 + \frac{1}{1-c} W_3^2 = \text{cost.}, \quad (d_2) \qquad W_3^2 + \frac{c-1}{c} W_1^2 = \text{cost.} \quad (d_3)$$

Osserviamo poi che la forma lineare, omogenea delle formole (D_1) , (D_2) , (D_3) rende evidente che, applicando il procedimento ad una terna (W_1, W_2, W_3) combinazione lineare di un numero qualunque r di tali terne $(W_1^{(i)}, W_2^{(i)}, W_3^{(i)})$ $i = 1, 2, \dots, r$, anche la terna (H_1, H_2, H_3) sarà la medesima combinazione lineare delle r terne parziali corrispondenti $(H_1^{(i)}, H_2^{(i)}, H_3^{(i)})$ $i = 1, 2, \dots, r$.

Esprimendoci geometricamente, diremo che se il sistema (Ω) è una combinazione lineare (*) di più sistemi paralleli $(\Omega_1), (\Omega_2), \dots, (\Omega_r)$, anche il sistema derivato (21) è la stessa combinazione lineare degli r sistemi derivati $(\Omega'_1), (\Omega'_2), \dots, (\Omega'_r)$.

§ 23.

TRASFORMAZIONI PARALLELE (E) E LORO INVERSE.

Le trasformazioni parallele (D_1) , (D_2) , (D_3) dei sistemi (Ω) risultano come associate alle classi speciali di sistemi (Ω) che verificano rispettivamente la (d_1) , (d_2) , (d_3) , in quanto che, applicate a corrispondenti sistemi (Ω) di queste classi, li riducono a punti.

Possiamo facilmente trovare un'altra classe di trasformazioni parallele che comprende le precedenti e sta nella medesima relazione coi sistemi (Ω) del § 5, corrispondenti alla relazione

$$k_1 W_1^2 + k_2 W_2^2 + k_3 W_3^2 = \text{cost.} \quad (e)$$

Esaminando ora le formole (17) § 5 situate nella diagonale principale,

(*) Per l'interpretazione geometrica della combinazione lineare di più sistemi tripli ortogonali v. DARBOUX, l. c., p. 211.

e supponendo al contrario di avere un qualunque sistema (Ω) , siamo condotti a stabilire il teorema seguente:

Se le rotazioni β_{ik} soddisfano alle (I), ed è (W_1, W_2, W_3) una terna qualunque di soluzioni del sistema (B^*) , le funzioni H_1, H_2, H_3 calcolate dalle formole:

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= k_1 \frac{\partial W_1}{\partial u_1} + k_2 \beta_{21} W_2 + k_3 \beta_{31} W_3, \\ H_2 &= k_2 \frac{\partial W_2}{\partial u_2} + k_3 \beta_{32} W_3 + k_1 \beta_{12} W_1, \\ H_3 &= k_3 \frac{\partial W_3}{\partial u_3} + k_1 \beta_{13} W_1 + k_2 \beta_{23} W_2, \end{aligned} \right\} \quad (E)$$

dove k_1, k_2, k_3 siano tre costanti qualunque legate alla c dalla (19) $c = \frac{k_2 - k_3}{k_1 - k_3}$, danno una soluzione del sistema aggiunto (B). La verifica si fa nello stesso modo come al paragrafo precedente. Da queste formole (E) risulta adunque una classe di trasformazioni parallele dei sistemi (Ω) che diciamo *trasformazioni* (E) (*). Esse includono come casi particolari le tre trasformazioni $(D_1), (D_2), (D_3)$, le quali corrispondono alle posizioni seguenti:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = c, \quad k_3 = 0 \dots \text{ per } (D_1),$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = \frac{1}{1-c} \dots \text{ per } (D_2),$$

$$k_1 = \frac{c-1}{c}, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = 1 \dots \text{ per } (D_3).$$

(*) Notiamo come anche qui si manifesta la reciprocità dei sistemi (Ω) , confrontati con quelli paralleli ai sistemi di GUICHARD-DARBOUX. E infatti in questi ultimi sistemi le rotazioni β_{ik} soddisfano, oltre che alle equazioni (A), alle tre che si ottengono cangiando in quelle della terza linea β_{ik} in β_{ki} (V. DARBOUX, l. c.). Ne segue che le formole

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{\partial H_1}{\partial u_1} + \beta_{12} H_2 + \beta_{13} H_3 \\ W_2 &= \frac{\partial H_2}{\partial u_2} + \beta_{23} H_3 + \beta_{21} H_1 \\ W_3 &= \frac{\partial H_3}{\partial u_3} + \beta_{31} H_1 + \beta_{32} H_2 \end{aligned}$$

fanno passare da una terna (H_1, H_2, H_3) soluzione del sistema (B) ad una terna (W_1, W_2, W_3) che soddisfa al sistema aggiunto (B^*) .

In generale si osserverà che, una volta fissata la costante c , queste trasformazioni contengono, oltre una costante moltiplicativa (d'omotetia), un'altra costante arbitraria. La trasformazione (E) applicata ad un sistema (Ω) che verifichi la (e), *cogli stessi valori delle k* , lo riduce ad un punto.

Nel caso delle trasformazioni (E) possiamo subito risolvere il problema d'inversione e dimostrare: *Dato un qualunque sistema (Ω) , esistono ∞^2 sistemi (Ω') (non omotetici), ai quali applicando la trasformazione (E), con assegnate k , si ottiene il sistema dato (Ω) .*

E infatti, se il sistema dato (Ω) corrisponde alla terna H_1, H_2, H_3 , il problema d'inversione consiste nella ricerca di tre funzioni W_1, W_2, W_3 che soddisfino al sistema aggiunto (B*), e nello stesso tempo alle tre equazioni (E). Abbiamo così per W_1, W_2, W_3 un sistema di equazioni ai differenziali totali, che si riscontra subito essere illimitatamente integrabile, essendo le k legate a c dalla relazione (19): $\frac{k_2 - k_3}{k_1 - k_3} = c$. I valori iniziali di W_1, W_2, W_3 restano dunque arbitrari, onde il risultato enunciato. Si osservi che questi ∞^2 sistemi (Ω') si compongono linearmente con uno fisso e cogli ∞^2 sistemi della classe (e) i cui sistemi derivati si riducono ad un punto.

§ 24.

INVERSIONE DELLE TRASFORMAZIONI (D).

Nel caso delle trasformazioni (D) il problema d'inversione esige una diversa trattazione pel fatto che in uno dei secondi membri delle formole (D₁), (D₂), (D₃) non figurano derivate delle W ; e in effetto si vedrà che qui esiste un caso eccezionale, il cui comportamento è diverso da quello di tutti gli altri.

Per compiere la ricerca con maggiore chiarezza conviene riferirsi alla riduzione del sistema differenziale (I) ai tipi normali (II), (III) del § 6, dove la costante c ha il valore $c = -\operatorname{tg}^2 \sigma$, e distinguere corrispondentemente sei casi diversi. Ma cinque di questi comportano la stessa trattazione, ed il sesto caso eccezionale si ha quando il sistema (Ω) corrisponda alle (II) e si tratti della trasformazione (D₁). Dei cinque casi indicati basterà trattarne uno, p. e.

quello che corrisponde al sistema differenziale (III), le rotazioni β_{ik} avendo i valori (25), e si voglia invertire la trasformazione (D₁) con $c = -\operatorname{tg}^2 \sigma$. Noi supponiamo adunque che (H_1, H_2, H_3) sia una qualunque terna di soluzioni del corrispondente sistema (B):

$$\left. \begin{aligned} * \quad , \quad \frac{\partial H_1}{\partial u_2} &= \cos \theta \cdot H_2, \quad \frac{\partial H_1}{\partial u_3} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \sigma} \cdot H_3, \\ \frac{\partial H_2}{\partial u_1} &= \cos \varphi \cdot H_1, \quad * \quad , \quad \frac{\partial H_2}{\partial u_3} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \sigma} \cdot H_3, \\ \frac{\partial H_3}{\partial u_1} &= \operatorname{sen} \sigma \cosh \psi \cdot H_1, \quad \frac{\partial H_3}{\partial u_2} = \cos \sigma \operatorname{senh} \psi \cdot H_2, \quad * \quad , \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

e domandiamo di determinare W_1, W_2, W_3 in guisa da soddisfare al sistema aggiunto:

$$\left. \begin{aligned} * \quad , \quad \frac{\partial W_1}{\partial u_2} &= \cos \varphi \cdot W_2, \quad \frac{\partial W_1}{\partial u_3} = \operatorname{sen} \sigma \cosh \psi \cdot W_3, \\ \frac{\partial W_2}{\partial u_1} &= \cos \theta \cdot W_1, \quad * \quad , \quad \frac{\partial W_2}{\partial u_3} = \cos \sigma \operatorname{senh} \psi \cdot W_3, \\ \frac{\partial W_3}{\partial u_1} &= \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \sigma} W_1, \quad \frac{\partial W_3}{\partial u_2} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \sigma} W_2, \quad * \quad , \end{aligned} \right\} \quad (70^*)$$

ed insieme alle tre corrispondenti equazioni del sistema (D₁), delle quali la terza in termini finiti:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial u_1} - \operatorname{tg}^2 \sigma \cos \theta W_2 &= H_1, \\ - \operatorname{tg}^2 \sigma \frac{\partial W_2}{\partial u_2} + \cos \varphi \cdot W_1 &= H_2, \\ \operatorname{sen} \sigma \cosh \psi W_1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \sigma}{\cos \sigma} \operatorname{senh} \psi W_2 &= H_3. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

§ 25.

RIDUZIONE DEL PROBLEMA AD UNA QUADRATURA.

Associamo alla (71₃) quella che se ne ottiene derivando rapporto ad u_3 , cioè

$$(\sinh \psi W_1 - \operatorname{tg} \sigma \cosh \psi W_2) \frac{\partial \psi}{\partial u_3} + \operatorname{sen} \sigma W_3 = \frac{1}{\operatorname{sen} \sigma} \frac{\partial H_3}{\partial u_3},$$

e risolvendo rapporto a W_2 , W_3 , avremo

$$\left. \begin{aligned} W_2 &= \cot \sigma \cosh \psi W_1 - \frac{\cos \sigma}{\operatorname{sen}^2 \sigma \sinh \psi} H_3, \\ W_3 &= \frac{1}{\operatorname{sen} \sigma \sinh \psi} \frac{\partial \psi}{\partial u_3} W_1 - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma} \coth \psi H_3 \frac{\partial \psi}{\partial u_3} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma} \frac{\partial H_3}{\partial u_3}. \end{aligned} \right\} (72)$$

Sostituendo nelle equazioni (70*), (71) questi valori di W_2 , W_3 , otteniamo per la incognita W_1 il sistema di equazioni ai differenziali totali:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial u_1} &= \operatorname{tg} \sigma \cos \theta \cosh \psi W_1 - \frac{\cos \theta}{\cos \sigma \sinh \psi} H_3 + H_1, \\ \frac{\partial W_1}{\partial u_2} &= \cot \sigma \cos \varphi \cosh \psi W_1 - \frac{\cos \sigma \cos \varphi}{\operatorname{sen}^2 \sigma \sinh \psi} H_3, \\ \frac{\partial W_1}{\partial u_3} &= \coth \psi \frac{\partial \psi}{\partial u_3} W_1 - \frac{\cosh^2 \psi}{\operatorname{sen} \sigma \sinh \psi} \frac{\partial \psi}{\partial u_3} H_3 + \frac{\cosh \psi}{\operatorname{sen} \sigma} \frac{\partial H_3}{\partial u_3}, \end{aligned}$$

dalle quali, e dalle (72), seguono inversamente le (70*), (71). Ma le precedenti, tenuto conto delle equazioni differenziali (III) e delle (70₃), possono scriversi:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} \sigma \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{W_1}{\sinh \psi} \right) &= \frac{\partial}{\partial u_1} (H_3 \coth \psi) - \operatorname{sen} \sigma \sinh \psi H_1, \\ \operatorname{sen} \sigma \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{W_1}{\sinh \psi} \right) &= \frac{\partial}{\partial u_2} (H_3 \coth \psi) - \cos \sigma \cosh \psi H_2, \\ \operatorname{sen} \sigma \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{W_1}{\sinh \psi} \right) &= \frac{\partial}{\partial u_3} (H_3 \coth \psi) - \frac{\partial \psi}{\partial u_3} H_3. \end{aligned} \right\} (73)$$

Ora, siccome le tre funzioni nelle (29₃) § 8

$$\operatorname{sen} \sigma \operatorname{senh} \psi, \quad \cos \sigma \operatorname{cosh} \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u_3},$$

poste per W_1, W_2, W_3 nelle (70*) le soddisfano, risulta dalla proprietà generale osservata nella prefazione che l'espressione

$$dT = \operatorname{sen} \sigma \operatorname{senh} \psi \cdot H_1 du_1 + \cos \sigma \operatorname{cosh} \psi \cdot H_2 du_2 + \frac{\partial \psi}{\partial u_3} \cdot H_3 du_3,$$

è il differenziale esatto di una funzione T di u_1, u_2, u_3 . Le (73) si integrano dunque immediatamente, e si ha

$$\operatorname{sen} \sigma W_1 = H_3 \operatorname{cosh} \psi - T \operatorname{senh} \psi + C \operatorname{sen} \sigma \operatorname{cosh} \psi \quad (C \text{ costante arbitraria}).$$

Sostituendo nelle (72), abbiamo le formole definitive richieste

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} \sigma W_1 &= H_3 \operatorname{cosh} \psi - T \operatorname{senh} \psi + C \operatorname{sen} \sigma \operatorname{senh} \psi, \\ \operatorname{sen} \sigma W_2 &= \cot \sigma (H_3 \operatorname{senh} \psi - T \operatorname{cosh} \psi) + C \cos \sigma \operatorname{cosh} \psi, \\ \operatorname{sen} \sigma W_3 &= \frac{1}{\operatorname{sen} \sigma} \left(\frac{\partial H_3}{\partial u_3} - \frac{\partial \psi}{\partial u_3} T \right) + C \frac{\partial \psi}{\partial u_3}. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Il problema proposto è dunque sempre solubile con una quadratura e la soluzione contiene una costante arbitraria C . Come si vede, le formole (74) d'inversione per la trasformazione (D₁) si compongono linearmente colla terna fissa corrispondente a $C=0$ e colla terna speciale

$$\left(\operatorname{sen} \sigma \operatorname{senh} \psi, \quad \cos \sigma \operatorname{cosh} \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u_3} \right),$$

il cui sistema derivato si riduce ad un punto, ciò che era prevedibile a priori.

In modo analogo si procede per gli altri casi, salvo nel sesto caso eccezionale che ora andiamo a trattare.

§ 26.

ESAME DEL CASO ECCEZIONALE.

Si presenta questo caso, come già si è detto (§ 24), quando il sistema (Ω) corrisponde ad una terna di soluzioni (θ, φ, ψ) del sistema (II) § 6, ed abbia per ciò linee di curvatura (u_3) piane (§ 8), e inoltre la trasformazione da invertire sia la prima (D_1).

Prendiamo un qualunque sistema (Ω), corrispondente alle rotazioni (24) § 6, ed applichiamo la trasformazione (D_1), le cui formole, essendo qui $c = -\operatorname{tg}^2 \sigma$, si scrivono:

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \frac{\partial W_1}{\partial u_1} - \operatorname{tg}^2 \sigma \cos \theta W_2, \\ H_2 &= -\operatorname{tg}^2 \sigma \frac{\partial W_2}{\partial u_2} + \cos \varphi W_1, \\ H_3 &= e^\psi \operatorname{sen} \sigma (W_1 - \operatorname{tg} \sigma W_2). \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Scriviamo altresì le equazioni (B), (B*) § 1 per il caso attuale e cioè:

$$\left. \begin{aligned} * \quad , \quad \frac{\partial H_1}{\partial u_2} &= \cos \theta H_2, \quad \frac{\partial H_1}{\partial u_3} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \sigma} H_3, \\ \frac{\partial H_2}{\partial u_1} &= \cos \varphi H_1, \quad * \quad , \quad \frac{\partial H_2}{\partial u_3} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \sigma} H_3, \\ \frac{\partial H_3}{\partial u_1} &= \operatorname{sen} \sigma e^\psi H_1, \quad \frac{\partial H_3}{\partial u_2} = \cos \sigma e^\psi H_2, \quad * \quad , \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

$$\left. \begin{aligned} * \quad , \quad \frac{\partial W_1}{\partial u_2} &= \cos \varphi W_2, \quad \frac{\partial W_1}{\partial u_3} = \operatorname{sen} \sigma e^\psi W_3, \\ \frac{\partial W_2}{\partial u_1} &= \cos \theta W_1, \quad * \quad , \quad \frac{\partial W_2}{\partial u_3} = \cos \sigma e^\psi W_3, \\ \frac{\partial W_3}{\partial u_1} &= \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \sigma} W_1, \quad \frac{\partial W_3}{\partial u_2} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \sigma} W_2, \quad * \quad . \end{aligned} \right\} \quad (76^*)$$

Ora dimostriamo che: *A qualunque sistema (Ω) si applichi la trasfor-*

mazione (D₁) data dalle (75), il sistema derivato (H₁, H₂, H₃) è un sistema speciale, precisamente appartiene alla classe dei sistemi ciclici.

Deriviamo la (75₃) rapporto ad u₃, tenendo conto delle (76*) ed avremo

$$\frac{\partial H_3}{\partial u_3} = e^\psi \operatorname{sen} \sigma (W_1 - \operatorname{tg} \sigma W_2) \frac{\partial \psi}{\partial u_3},$$

che, per la (75₃) stessa, possiamo scrivere

$$\frac{\partial \log H_3}{\partial u_3} = \frac{\partial \psi}{\partial u_3}. \quad (77)$$

Questo dimostra già che il sistema derivato è un sistema speciale perchè la (77) non è una conseguenza delle (76). Per riconoscere quale proprietà geometrica caratterizza questi sistemi derivati, si integri la (77), il che dà

$$H_3 = e^\psi \cdot \Phi,$$

dove $\Phi = \Phi(u_1, u_2)$ è indipendente da u₃. Calcolando poi H₁, H₂ dalle (76) della terza linea, abbiamo:

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{\operatorname{sen} \sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} + \frac{\cos \theta}{\cos \sigma} \Phi, \\ H_2 &= \frac{1}{\cos \sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} + \frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen} \sigma} \Phi, \\ H_3 &= e^\psi \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Se si introducono questi valori di H₁, H₂, H₃ nelle (76), si trova per Φ l'unica condizione

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1 \partial u_2} = \cos(\varphi - \theta) \cdot \Phi, \quad (79)$$

dove è da ricordare (§ 9) che qui $\varphi - \theta = 2\omega$ non dipende da u₃. La (79) coincide per ciò colla equazione alle deformazioni infinitesime per la superficie pseudosferica S che, riferita alle sue asintotiche u₁, u₂, ha l'elemento lineare

$$ds^2 = du_1^2 + 2 \cos 2\omega du_1 du_2 + du_2^2.$$

È facile ora verificare che i sistemi ($\bar{\Omega}$) definiti dalle formole (78) sono sistemi ciclici, cioè che le curve piane (u₃) sono circoli. Per ciò basterà mo-

strare che hanno costante la flessione $\frac{1}{\rho_3}$. Ora questa è data dalla formola (*Lezioni*, Vol. II, § 409)

$$\frac{1}{\rho_3^2} = \frac{1}{r_{13}^2} + \frac{1}{r_{23}^2} = \frac{1}{H_3^2} (\beta_{13}^2 + \beta_{23}^2),$$

ossia, a causa dei valori (24) delle rotazioni, da

$$\frac{1}{\rho_3} = \frac{e^\psi}{H_3}. \quad (80)$$

Dunque pei sistemi $(\bar{\Omega})$ definiti dalle (78), abbiamo $\rho_3 = \Phi = \Phi(u_1, u_2)$, ciò che dimostra l'asserzione.

Importa ancora osservare che le formole (78), nelle quali si ponga per $\Phi = \Phi(u_1, u_2)$ una soluzione arbitraria della (79), danno i più generali sistemi ciclici $(\bar{\Omega})$, coll'assegnata rappresentazione sferica. E infatti, per la (80), deve essere allora $\frac{e^\psi}{H_3}$ indipendente da u_2 , e posto $H_3 = e^\psi \cdot \Phi$ ne seguono, come si è visto, le altre due equazioni (78) e la (79), il che dimostra l'asserzione.

§ 27.

INVERSIONE DELLA TRASFORMAZIONE (D_1) PEI SISTEMI CICLICI.

Si è visto che in questo caso eccezionale la trasformazione (D_1) , applicata a qualunque sistema (Ω) conduce sempre a sistemi $(\bar{\Omega})$ ciclici. Ma, inversamente, ora dimostriamo che:

Qualunque sistema $(\bar{\Omega})$ ciclico, coll'assegnata rappresentazione sferica, proviene per trasformazione (D_1) da infiniti sistemi (Ω) , i quali non dipendono più da costanti, ma da una funzione arbitraria.

Il sistema ciclico assegnato $(\bar{\Omega})$ corrisponda alle formole (78), essendo verificata la (79). Dobbiamo esaminare se è possibile determinare W_1, W_2, W_3

in guisa da soddisfare alle (76*), ed insieme alle corrispondenti (75):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial u_1} &= \operatorname{tg}^2 \sigma \cos \theta W_2 + \frac{1}{\operatorname{sen} \sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} + \frac{\cos \theta}{\cos \sigma} \Phi, \\ \operatorname{tg}^2 \sigma \frac{\partial W_2}{\partial u_2} &= \cos \varphi W_1 - \frac{1}{\cos \sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} - \frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen} \sigma} \Phi, \\ \operatorname{sen} \sigma W_1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \sigma}{\cos \sigma} W_2 &= \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Dall'ultima di queste

$$W_1 = \frac{\Phi}{\operatorname{sen} \sigma} + \operatorname{tg} \sigma W_2, \quad (81^*)$$

e per es. dalla

$$\frac{\partial W_2}{\partial u_3} = \cos \sigma e^\psi W_3,$$

esprimiamo anche W_3 per W_2 :

$$W_3 = \frac{e^{-\psi}}{\cos \sigma} \frac{\partial W_2}{\partial u_3}. \quad (82)$$

Sostituendo questi valori (81*), (82) di W_1 , W_3 nelle (76*) e nelle (75), si vede che, per soddisfarle tutte, basta soddisfare con W_2 alle due equazioni seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W_2}{\partial u_1} &= \operatorname{tg} \sigma \cos \theta W_2 + \frac{\Phi \cos \theta}{\operatorname{sen} \sigma}, \\ \frac{\partial W_2}{\partial u_2} &= \cot \sigma \cos \varphi W_2 - \frac{\cos \sigma}{\operatorname{sen}^2 \sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}, \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

ed assumere poi per W_1 , W_3 i valori (81*), (82). Ora, a causa delle due equazioni (II)

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_1} = \operatorname{tg} \sigma \cos \theta, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u_2} = \cot \sigma \cos \varphi,$$

le (83) possono scriversi

$$\frac{\partial}{\partial u_1} (e^{-\psi} W_2) = \frac{e^{-\psi} \Phi \cos \theta}{\operatorname{sen} \sigma}, \quad \frac{\partial}{\partial u_2} (e^{-\psi} W_2) = -\frac{\cos \sigma}{\operatorname{sen}^2 \sigma} e^{-\psi} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2},$$

e d'altra parte la condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial u_2} (e^{-\psi} \Phi \cos \theta) + \cot \sigma \frac{\partial}{\partial u_1} (e^{-\psi} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}) = 0$$

è identicamente soddisfatta per le (II) e per la (79). L'integrale generale W_2 delle (83) ha dunque la forma

$$W_2 = e^\psi (T + U_3),$$

dove T è una funzione fissa di u_1, u_2, u_3 , ed U_3 indica una funzione arbitraria della sola u_3 , conformemente a quanto abbiamo enunciato.

Rileviamo ancora alcune notevoli proprietà dei sistemi ciclici (Ω). I piani dei loro circoli sono paralleli (§ 11) ai piani tangenti della superficie pseudosferica S definita da

$$ds^2 = du_1^2 + 2 \cos 2\omega du_1 du_2 + du_2^2,$$

e per un noto teorema (*Lezioni*, Vol. II, § 276) nella congruenza degli assi dei circoli le sviluppabili corrispondono alle linee di curvatura (u_1) (u_2) del sistema (Ω), cioè alle asintotiche della superficie pseudosferica. Questa è adunque una congruenza di RIBAUCCOUR (*Lezioni*, Vol. II, § 278) la cui superficie generatrice è la pseudosferica S . Viceversa si prenda una qualunque congruenza di RIBAUCCOUR a superficie generatrice pseudosferica; essa è infinite volte ciclica ed uno qualunque degli ∞^1 sistemi ciclici corrispondenti è uno dei nostri sistemi ($\bar{\Omega}$). Se ne conclude:

In ogni sistema ciclico ($\bar{\Omega}$) i piani dei circoli involuppano una superficie di Voss, le cui geodetiche coniugate corrispondono alle linee di curvatura (u_1) (u_2).

Se in fine consideriamo un qualunque sistema (Ω) a linee di curvatura (u_3) piane, vediamo che i suoi sistemi ciclici osculatori lungo le superficie $u_3 = \text{cost.}$ (*Lezioni*, Vol. II, § 411) sono altrettanti sistemi ($\bar{\Omega}$), e quindi: *In ogni sistema (Ω) a linee di curvatura (u_3) piane, i piani di queste curve involuppano una superficie di Voss.*

§ 28.

TRASFORMAZIONI DI RIBAUCCOUR PEI SISTEMI (Ω).

Terminiamo questi studi sui sistemi (Ω) colla considerazione di una terza classe di trasformazioni di questi sistemi, che tiene come un posto intermedio fra le trasformazioni di BÄCKLUND e quelle parallele. Si ottengono

queste trasformazioni osservando dapprima il comportamento, rispetto all'inversione per raggi vettori reciproci, di quei particolari sistemi (Ω) della classe (16) § 5, che soddisfano alla condizione

$$k_1 W_1^2 + k_2 W_2^2 + k_3 W_3^2 = 0, \quad (f)$$

annullandosi nella (16) la costante del secondo membro, e che diremo per abbreviare *sistemi* (Ω_r) . Si ha il teorema: *Ogni sistema (Ω_r) , con una inversione per raggi vettori reciproci rispetto all'origine, si cangia in un altro sistema (Ω'_r) .*

Questo segue immediatamente dalle note formole dell'inversione per raggi vettori reciproci dei sistemi tripli ortogonali, che qui riproduciamo per maggior chiarezza. Sia (Σ) un qualunque sistema triplo ortogonale, (Σ') il sistema che proviene da (Σ) con un'inversione per raggi vettori reciproci, il cui centro supponiamo nell'origine e il raggio della sfera d'inversione $= 1$. Indicando con un accento la quantità relativa a (Σ') , abbiamo per le formole d'inversione

$$x' = \frac{x}{\rho}, \quad y' = \frac{y}{\rho}, \quad z' = \frac{z}{\rho}, \quad \text{con } \rho = x^2 + y^2 + z^2. \quad (84)$$

Derivando coll'osservare che si ha $\frac{\partial \rho}{\partial u_i} = 2 H_i W_i$, risulta

$$\frac{\partial x'}{\partial u_i} = \frac{H_i}{\rho} \left(X_i - \frac{2 x W_i}{\rho} \right),$$

da cui le formole

$$X'_i = X_i - \frac{2 x W_i}{\rho}, \quad (85)$$

$$H'_i = \frac{H_i}{\rho}, \quad W'_i = - \frac{W_i}{\rho}. \quad (86)$$

Da queste, calcolando le nuove rotazioni $\beta'_{ik} = \frac{1}{H'_i} \frac{\partial H'_k}{\partial u_i} = \frac{1}{W'_k} \frac{\partial W'_i}{\partial u_k}$, si ha subito (DARBOUX, l. c., pag. 467)

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2 W_i H_k}{\rho}. \quad (86^*)$$

Le seconde formole (86) dimostrano che, se (W_1, W_2, W_3) soddisfano la (f), anche (W'_1, W'_2, W'_3) la soddisfano, ciò che prova il teorema. Così,

conosciuto un sistema (Ω_r) , se ne ha subito un secondo (Ω'_r) con diversa immagine sferica, sicchè le formole precedenti dànno formole di trasformazione per le immagini sferiche dei sistemi (Ω) in generale. Per la effettiva ricerca di queste trasformazioni occorre avere integrato le corrispondenti equazioni ai differenziali totali (17) § 5, o almeno occorre conoscerne qualche soluzione particolare. Ma, supposto di conoscere effettivamente un sistema (Ω_r) , indi il suo inverso (Ω'_r) , possiamo applicare facilmente le trasformazioni non solo alle immagini sferiche, ma ai singoli sistemi (Ω) stessi, dimostrando che: *Da qualunque sistema (Ω) parallelo ad (Ω_r) si deducono, con una quadratura, ∞^1 sistemi (Ω') paralleli all'inverso (Ω'_r) .* Questo non dipende da una particolarità dei sistemi (Ω) , ma si applica a qualunque coppia $(\Sigma), (\Sigma')$ di sistemi tripli ortogonali inversi l'uno dell'altro, secondo le formole (84), (85), (86). Abbiasi infatti un qualunque sistema (Σ) parallelo al sistema (Σ) , i cui elementi indicheremo con un soprassegno. Se poniamo

$$T = \int (H_1 W_1 du_1 + H_2 W_2 du_2 + \bar{H}_3 W_3 du_3),$$

dove la espressione sotto il segno è un differenziale esatto (Prefazione), e la funzione T si può aumentare di una costante additiva, è facile vedere che le formole

$$\bar{x}' = x - T x', \quad (87)$$

colle analoghe, daranno un nuovo sistema $(\bar{\Sigma}')$ parallelo a (Σ') . E infatti si trova subito

$$\frac{\partial \bar{x}'}{\partial u_i} = (\bar{H}_i - T H'_i) X'_i,$$

ciò che dimostra l'asserto; ne risulta inoltre

$$\bar{H}'_i = H_i - T H'_i.$$

Se consideriamo in $(\Sigma), (\Sigma')$ due superficie corrispondenti, p. e. della serie $u_3 = \text{cost.}$, vediamo che le loro due normali in punti corrispondenti $P \equiv (\bar{x}, y, \bar{z}), P' \equiv (\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$ s'incontrano in un punto M equidistante da P, P' , onde la sfera col centro in M e raggio $PM = P'M$ tocca in P, P' le due dette superficie S, S' , e variando sopra (S, S') la coppia (P, P') si ha un involuppo di ∞^2 sfere di cui S, S' sono le due falde dell'involuppo e si corrispondono per linee di curvatura (trasformazione di RIBAUCCOUR).

Le trasformazioni dei sistemi (Ω) considerate nel presente paragrafo sono dunque trasformazioni (di RIBAUCCOUR) per involuppi di sfere.

§ 29.

I SISTEMI GENERALI OBLIQUI DI WEINGARTEN IN COORDINATE ASINTOTICHE.

I sistemi tripli ortogonali (Ω) di cui ci siamo occupati nella presente Memoria possono derivarsi, come abbiamo visto al § 12, da quei *particolari* sistemi obliqui di WEINGARTEN nei quali è costante l'angolo sotto cui le traiettorie dei singoli punti delle superficie pseudosferiche tagliano queste superficie. Ci proponiamo qui da ultimo di far vedere che anche dai sistemi *generali* obliqui di WEINGARTEN, ove il detto angolo varia dall'una all'altra superficie pseudosferica, può farsi derivare, in modo analogo, una classe più ampia di sistemi tripli ortogonali. Con ciò noi veniamo a confermare, per altra via, i risultati già stabiliti nella Memoria ed otteniamo la prima generalizzazione cercata dei sistemi (Ω). Per questo riprenderemo dalla citata Memoria del Tomo XIX degli *Annali* le formole relative ai più generali sistemi obliqui di WEINGARTEN, introducendovi per altro alcuni cangiamenti nelle notazioni, opportuni per il confronto colle formole della presente Memoria. In primo luogo muteremo nelle formole dell'indicato Tomo XIX l'angolo σ in $\frac{\pi}{2} - 2\sigma$, e al posto dei parametri u, v delle linee di curvatura delle superficie pseudosferiche introdurremo quelli u_1, u_2 delle asintotiche, ponendo

$$u_1 = \frac{1}{2}(u+v), \quad u_2 = \frac{1}{2}(u-v);$$

in fine la terza variabile w sarà qui indicata con u_3 . Allora le formole fondamentali (A), (B) del § 5 m. c. diventano nelle funzioni incognite θ, φ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(\varphi+\theta)}{\partial u_1} &= \operatorname{tg} \sigma \operatorname{sen}(\varphi-\theta), & \frac{\partial(\varphi-\theta)}{\partial u_2} &= \operatorname{cot} \sigma \operatorname{sen}(\varphi+\theta), \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3} &= -\operatorname{tg} \sigma \cos(\varphi-\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial u_3}, & \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2 \partial u_3} &= -\operatorname{cot} \sigma \cos(\varphi+\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial u_3}, \end{aligned} \right\} \text{(F)}$$

dove $\sigma = \sigma(u_3)$ è una funzione (arbitraria) di u_3 . Ad ogni coppia di funzioni θ, φ di u_1, u_2, u_3 , che soddisfino il sistema (F), corrisponde inversamente un sistema obliquo di WEINGARTEN, determinato o meno di movimenti nello

spazio dalle formole seguenti. Indicando con (X_3, Y_3, Z_3) i coseni di direzione della normale alla superficie pseudosferica $u_3 = \text{cost.}$ nel sistema, e con (X_1, Y_1, Z_1) , (X_2, Y_2, Z_2) quelli delle tangenti alle rispettive linee di curvatura $u_1 - u_2 = \text{cost.}$, $u_1 + u_2 = \text{cost.}$, abbiamo le formole del quadro seguente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial u_1} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_1} X_2 - \text{sen } \theta X_3, & \frac{\partial X_2}{\partial u_1} &= -\frac{\partial \theta}{\partial u_1} X_1 + \text{cos } \theta X_3, \\ & & \frac{\partial X_3}{\partial u_1} &= \text{sen } \theta X_1 - \text{cos } \theta X_2, \\ \frac{\partial X_1}{\partial u_2} &= -\frac{\partial \theta}{\partial u_2} X_2 - \text{sen } \theta X_3, & \frac{\partial X_2}{\partial u_2} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_2} X_1 - \text{cos } \theta X_3, \\ & & \frac{\partial X_3}{\partial u_2} &= \text{sen } \theta X_1 + \text{cos } \theta X_2, \\ \frac{\partial X_1}{\partial u_3} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_3} (-\text{cos } 2\sigma X_2 + \text{sen } 2\sigma \text{cos } \varphi X_3), \\ & & \frac{\partial X_2}{\partial u_3} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_3} (\text{cos } 2\sigma X_1 + \text{sen } 2\sigma \text{sen } \varphi X_3), \\ & & \frac{\partial X_3}{\partial u_3} &= -\text{sen } 2\sigma \frac{\partial \theta}{\partial u_3} (\text{cos } \varphi X_1 + \text{sen } \varphi X_2). \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Note le (X_i, Y_i, Z_i) , si ha con quadrature il sistema obliquo di WEINGARTEN dalle formole

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u_1} &= \text{cos } \theta X_1 + \text{sen } \theta X_2, & \frac{\partial x}{\partial u_2} &= \text{cos } \theta X_1 - \text{sen } \theta X_2, \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} &= \text{sen } 2\sigma \frac{\partial \theta}{\partial u_3} \left\{ -\text{cos } 2\sigma \text{sen } \varphi X_1 + \text{cos } 2\sigma \text{cos } \varphi X_2 - \text{sen } 2\sigma X_3 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (88^*)$$

L'esistenza e l'arbitrarietà delle soluzioni del sistema (F) si giudica facilmente, riducendolo alla forma lineare canonica del BOURLET coll'introdurre le due nuove funzioni incognite $\theta_1 = \frac{\partial \theta}{\partial u_1}$, $\theta_2 = \frac{\partial \theta}{\partial u_2}$, e col tener conto che dalle (F) della prima linea segue per derivazione $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_2} = \text{sen } \theta \text{cos } \theta$. Considerando le quattro funzioni incognite nell'ordine $(\theta_1, \theta_2, \theta, \varphi)$, scriviamo il

sistema (F) sotto la forma equivalente:

$$\left. \begin{aligned}
 * \quad , \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial u_2} = \text{sen } \theta \cos \theta, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial u_3} = -\text{tg } \sigma \cos (\varphi - \theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial u_3}, \\
 \frac{\partial \theta_2}{\partial u_1} = \text{sen } \theta \cos \theta, \quad * \quad , \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial u_3} = -\text{cot } \sigma \cos (\varphi + \theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial u_3}, \\
 \frac{\partial \theta}{\partial u_1} = \theta_1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial u_2} = \theta_2, \quad * \quad , \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = \text{tg } \sigma \text{sen } (\varphi + \theta) - \theta_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = \text{cot } \sigma \text{sen } (\varphi - \theta) + \theta_2, \quad *
 \end{aligned} \right\} (F^*)$$

Esso ha allora appunto la forma lineare canonica ed è completamente integrabile, perchè le condizioni d'integrabilità sono conseguenze delle (F*) stesse. L'integrale generale $(\theta_1, \theta_2, \theta, \varphi)$ dipende da quattro funzioni arbitrarie che si fissano assegnando i valori delle funzioni

$$\theta_1(u_1, 0, 0), \quad \theta_2(0, u_2, 0), \quad \theta(0, 0, u_3), \quad \varphi(0, 0, u_3).$$

Geometricamente questo equivale a dare ad arbitrio: 1.^o la superficie pseudosferica $u_3 = 0$ nel sistema; 2.^o la curva (u_3) uscente dal suo punto $u_1 = u_2 = 0$. Così è rigorosamente dimostrato il teorema generale d'esistenza che al § 2 della Memoria citata si era stabilito mediante considerazioni geometriche infinitesimali. È da osservarsi però che nel caso di σ costante restano solo tre funzioni arbitrarie essenziali, la quarta dipendendo dall'arbitrarietà del parametro u_3 (Cf. § 13).

§ 30.

I CORRISPONDENTI SISTEMI (Ω) GENERALIZZATI.

Supposto che θ, φ soddisfino alle (F), le formole (88), (88*) individuano un corrispondente sistema obliquo di WEINGARTEN. Ora se per ciascun punto della superficie pseudosferica $u_3 = \text{cost.}$ nel sistema tiriamo (nel piano tangente) il raggio coi coseni di direzione

$$\begin{aligned}
 \xi_3 &= \cos \varphi X_1 + \text{sen } \varphi X_2, & \eta_3 &= \cos \varphi Y_1 + \text{sen } \varphi Y_2, \\
 \zeta_3 &= \cos \varphi Z_1 + \text{sen } \varphi Z_2,
 \end{aligned}$$

questi raggi formano una congruenza pseudosferica in cui l'angolo dei due piani focali è $= 2\sigma$. Alla direzione (ξ_3, η_3, ζ_3) associamone altre due (ξ_1, η_1, ζ_1) , (ξ_2, η_2, ζ_2) ortogonali a questa e fra loro, ed inclinate sulla normale alla $u_3 = \text{cost.}$ rispettivamente dell'angolo σ e del suo complemento, onde avremo le formole

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= -\text{sen } \sigma \text{ sen } \varphi X_1 + \text{sen } \sigma \text{ cos } \varphi X_2 + \text{cos } \sigma X_3, \\ \xi_2 &= \text{cos } \sigma \text{ sen } \varphi X_1 - \text{cos } \sigma \text{ cos } \varphi X_2 + \text{sen } \sigma X_3, \\ \xi_3 &= \text{cos } \varphi X_1 + \text{sen } \varphi X_2. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Noi andremo ora a constatare che il triedro trirettangolo formato dalle direzioni (ξ_i, η_i, ζ_i) $i = 1, 2, 3$, assume, al variare di u_1, u_2, u_3 , le orientazioni del triedro principale in una classe di sistemi tripli ortogonali paralleli (u_1, u_2, u_3) . Per questo deriviamo le (89), osservando le (F) e le (88); otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial u_1} &= \text{cos } (\varphi - \theta) \zeta_2 - \frac{\text{sen } (\varphi - \theta)}{\text{cos } \sigma} \zeta_3, & \frac{\partial \xi_1}{\partial u_2} &= -\text{cos } (\varphi + \theta) \zeta_2, \\ & & \frac{\partial \xi_1}{\partial u_3} &= -\text{sen } \sigma \frac{\partial (\varphi + \theta)}{\partial u_3} \zeta_3, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial u_1} &= -\text{cos } (\varphi - \theta) \zeta_1, & \frac{\partial \xi_2}{\partial u_2} &= \text{cos } (\varphi + \theta) \zeta_1 + \frac{\text{sen } (\varphi + \theta)}{\text{sen } \sigma} \zeta_3, \\ & & \frac{\partial \xi_2}{\partial u_3} &= \text{cos } \sigma \frac{\partial (\varphi - \theta)}{\partial u_3} \zeta_3, \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial u_1} &= \frac{\text{sen } (\varphi - \theta)}{\text{cos } \sigma} \zeta_1, & \frac{\partial \xi_3}{\partial u_2} &= -\frac{\text{sen } (\varphi + \theta)}{\text{sen } \sigma} \zeta_2, \\ & & \frac{\partial \xi_3}{\partial u_3} &= \text{sen } \sigma \frac{\partial (\varphi + \theta)}{\partial u_3} \zeta_1 - \text{cos } \sigma \frac{\partial (\varphi - \theta)}{\partial u_3} \zeta_2. \end{aligned}$$

Queste formole dimostrano appunto che si tratta dell'immagine sferica di una classe di sistemi tripli ortogonali, a cui appartengono i seguenti valori per le rotazioni:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{21} &= -\text{cos } (\varphi - \theta), & \beta_{31} &= \frac{\text{sen } (\varphi - \theta)}{\text{cos } \sigma}; \\ \beta_{32} &= -\frac{\text{sen } (\varphi + \theta)}{\text{sen } \sigma}, & \beta_{12} &= -\text{cos } (\varphi + \theta); \\ \beta_{13} &= -\text{sen } \sigma \frac{\partial (\varphi + \theta)}{\partial u_3}, & \beta_{23} &= \text{cos } \sigma \frac{\partial (\varphi - \theta)}{\partial u_3}. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

La classe corrispondente di sistemi tripli ortogonali costituisce la cercata generalizzazione dei sistemi (Ω) . In questi sistemi le superficie $u_3 = \text{cost.}$ hanno ancora la proprietà che la congruenza delle normali è parallela ad una congruenza pseudosferica, e le linee di curvatura corrispondono alle linee asintotiche delle due falde focali, ma l'angolo 2σ dei piani focali è ora variabile con u_3 . Una prima osservazione da farsi sulle formole (90) è che le rotazioni delle due coppie $(\beta_{21}, \beta_{31}), (\beta_{32}, \beta_{12})$ sono ancora legate dalle relazioni quadratiche

$$\beta_{21}^2 + \cos^2 \sigma \beta_{31}^2 = 1, \quad \beta_{12}^2 + \sin^2 \sigma \beta_{32}^2 = 1;$$

però qui σ non è più una costante, ma funzione di u_3 .

Una seconda e più importante osservazione è questa che, in ogni caso, noto il sistema obliquo di WEINGARTEN, si hanno subito *in termini finiti* due corrispondenti sistemi tripli ortogonali coll'assegnata rappresentazione sferica. E infatti, se poniamo una prima volta

$$W_1 = \frac{\partial(\theta - \varphi)}{\partial u_1}, \quad W_2 = \sin(\varphi - \theta), \quad W_3 = \frac{\cos(\varphi - \theta)}{\cos \sigma},$$

ed una seconda volta invece

$$W_1 = -\sin(\varphi + \theta), \quad W_2 = \frac{\partial(\varphi + \theta)}{\partial u_2}, \quad W_3 = \frac{\cos(\varphi + \theta)}{\sin \sigma},$$

veniamo a soddisfare ambedue le volte alle equazioni (B*) § 1. Le corrispondenti formole

$$\bar{x} = W_1 \xi_1 + W_2 \xi_2 + W_3 \xi_3,$$

colle due analoghe, danno quindi i due sistemi tripli ortogonali in questione, pei quali si ha rispettivamente

$$W_2^2 + \cos^2 \sigma W_3^2 = 1, \quad W_1^2 + \sin^2 \sigma W_3^2 = 1.$$

§ 31.

ULTERIORE GENERALIZZAZIONE DEI SISTEMI (Ω).

Le congruenze pseudosferiche non sono che una classe particolare di *congruenze* W dotate della proprietà che nella loro immagine sferica alle asintotiche delle due falde focali corrisponde un sistema ortogonale. Già in una mia Nota del 1893 (*) è osservato che: *Le congruenze* W *a cui appartiene questa proprietà sono tutte e sole quelle le cui falde focali hanno, in punti corrispondenti, eguale curvatura.*

Delle congruenze W di questa specie trattano i §§ 249-250 del Volume II delle *Lezioni*; le loro due falde focali sono caratterizzate dalla proprietà che la curvatura K , espressa pei parametri u, v delle asintotiche, prende la forma

$$K = - \frac{1}{\left\{ \varphi(u) + \psi(v) \right\}^2}. \quad (\text{A})$$

Viceversa ogni superficie S di questa classe (A) è falda focale di ∞^2 congruenze della detta specie, le cui seconde falde focali sono nuovamente superficie della classe (A), e queste diciamo le trasformate di S . Per fissare una superficie trasformata S' basta fissare in un punto di S il segmento focale, in grandezza ed orientazione. Se si fissa soltanto il primo elemento, col dare la costante k da cui dipende, secondo la formola (54) del § 250 delle *Lezioni* (Vol. II, pag. 77), si ottengono ∞^1 superficie S' , che diciamo dedotte da S mediante la trasformazione B_k . Chiamiamo poi *trasformazione infinitesima* $B_k^{(e)}$ il passaggio da una posizione della S' alla successiva nel sistema.

Ciò premesso, consideriamo sulla sfera i sistemi ortogonali (u, v) corrispondenti, nel detto senso, alle asintotiche delle due falde focali di una congruenza W della specie indicata; e le superficie che hanno di tali sistemi (u, v) come immagine sferica delle loro linee di curvatura. Le superficie di questa classe possono alla loro volta associarsi in *famiglie di Lamé*, ed i

(*) *Sulle superficie i cui piani principali hanno costante il rapporto delle distanze da un punto fisso* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Luglio 1894).

corrispondenti sistemi tripli ortogonali danno l'ulteriore generalizzazione dei sistemi (Ω) . Questi sistemi più generali si ottengono da sistemi di ∞^1 superficie della classe (A) che costituiscono la generalizzazione dei sistemi obliqui di WEINGARTEN e vengono generati dalla ripetizione continua di trasformazioni infinitesime $B_k^{(e)}$, precisamente come i sistemi obliqui di WEINGARTEN da una successione di trasformazioni infinitesime di BÄCKLUND. E qui la costante k può essere la stessa per tutte le superficie della serie (S) , oppure variare con S . Il primo caso (particolare) è notevole per ciò che allora le traiettorie descritte dai singoli punti della S sono altrettante curve di BERTRAND, la cui famiglia varia però da traiettoria a traiettoria. In generale, a ciascuna S nel sistema (S) è coordinata una congruenza W della nostra classe, la cui seconda falda focale S' è una superficie della stessa classe (A). Si faccia l'immagine sferica di questa congruenza e si consideri sulla sfera il sistema ortogonale (u, v) corrispondente alle asintotiche di S, S' . Facendo ora percorrere alla S la serie (S) , il sistema (u, v) descrive nella sfera l'immagine sferica di una classe di sistemi tripli ortogonali, che sono appunto i richiesti sistemi (Ω) generalizzati. Notevoli sono fra questi i sistemi ciclici, che si ottengono supponendo fissa S' e prendendo per sistema (S) la serie delle ∞^1 trasformate della S' per una B_k . Gli assi dei cerchi sono i raggi di una congruenza di RIBAUCCOUR che ha S' per superficie generatrice, e la superficie involuppo dei piani di questi cerchi è una superficie *associata* alla S' , su cui le linee (u, v) tracciano un sistema coniugato permanente in una deformazione continua della superficie.

Lizzano in Belvedere, Agosto 1915.

INDICE

PAG.

PREFAZIONE	129
§ 1. I sistemi tripli ortogonali con $a H^2_1 + b H^2_2 = c$	134
§ 2. Il sistema differenziale per le rotazioni nel caso $W^2_1 + c W^2_2 = \text{cost.}$	138
§ 3. Esistenza e proprietà delle soluzioni β_{ik} del sistema (I)	140
§ 4. Gli integrali quadratici del sistema (I)	142
§ 5. Sistemi tripli ortogonali con $k_1 W^2_1 + k_2 W^2_2 + k_3 W^2_3 = \text{cost.}$	144
§ 6. Riduzione del sistema differenziale (I) a forme normali	146
§ 7. Ritorno al problema dei sistemi $W^2_1 + c W^2_2 = \text{cost.}$	149
§ 8. Determinazione dei valori di W_1, W_2, W_3	151
§ 9. Integrazione del sistema differenziale (II)	153
§ 10. Relazione colle congruenze pseudosferiche	155
§ 11. Interpretazione geometrica	157
§ 12. Caso del sistema differenziale (III)	158
§ 13. Verifica delle proprietà dei sistemi $\left(\frac{\Omega\pi}{2} - 2\sigma\right)$	161
§ 14. Sistemi tripli ortogonali (Ω) in generale	163
§ 15. Verifica per i sistemi (Ω)	166
§ 16. Le superficie delle due serie $u_1 = \text{cost.}, u_2 = \text{cost.}$ nei sistemi (Ω)	168
§ 17. Le congruenze pseudosferiche reali a fuochi immaginari	170
§ 18. Proprietà caratteristica dei sistemi (Ω)	175
§ 19. Sistema (Ω) elicoidale a curvatura costante	177
§ 20. Trasformazioni di BÄCKLUND e trasformazioni di LIE dei sistemi (Ω)	179
§ 21. Altro modo di stabilire le trasformazioni di LIE	180
§ 22. Trasformazioni parallele (D) dei sistemi (Ω)	182
§ 23. Trasformazioni parallele (E) e loro inverse	184
§ 24. Inversione delle trasformazioni (D)	186
§ 25. Riduzione del problema ad una quadratura	188
§ 26. Esame del caso eccezionale	190
§ 27. Inversione della trasformazione (D_1) pei sistemi ciclici	192
§ 28. Trasformazioni di RIBAUCOUR pei sistemi (Ω)	194
§ 29. I sistemi generali obliqui di WEINGARTEN in coordinate asintotiche	197
§ 30. I corrispondenti sistemi (Ω) generalizzati	199
§ 31. Ulteriore generalizzazione dei sistemi (Ω)	202

Intorno ad una classe di superficie rigate.

(Di PIETRO TORTORICI, a Piacenza.)

PREFAZIONE.

I teoremi che qui si trovano esposti, riguardano quelle superficie rigate le quali ammettono due asintotiche curvilinee a torsione costante ed uguale.

Lo studio di tali superficie rigate era stato da me iniziato con un metodo che esporrò in altra occasione; il metodo più semplice e più diretto che trovasi qui esposto mi è stato suggerito dal mio maestro prof. BIANCHI, il quale fin dal novembre 1913 mi ha comunicato le formole che stabilisco al § 1 e che portano immediatamente alle considerazioni che io in seguito espongo.

Tutti i risultati di questo lavoro, eccezione fatta di quelli riguardanti le rigate Γ applicabili sull'iperboloide rotondo ad una falda, a me erano noti fin dal dicembre 1913. Tengo a dichiarare questo, non perchè voglia attribuire importanza al mio modesto lavoro, ma perchè le formole del § 1, suggeritemi dal prof. BIANCHI, sono state recentemente ritrovate dal sig. MAURO PICONE, il quale le dà sotto una forma un po' differente ma sostanzialmente identica, e ne fa svariate ed eleganti applicazioni in due suoi lavori citati al § 1.

Rimarrà perciò giustificata qualche piccola coincidenza con i risultati del sig. PICONE, però nel mio lavoro rimane forse ancora abbastanza per essere letto, in quanto che non è stato mio intendimento occuparmi ancora qui delle trasformazioni asintotiche delle curve, ma ho voluto piuttosto dire di una classe di superficie, raccogliendo qualche teorema già noto intorno ad esse ed altri aggiungendone di nuovi, in modo da mettere in chiaro, per tale classe di superficie, dei fatti geometrici che già si riscontrano per altre classi ben note.

§ 1.

FORMULE RELATIVE ALLE TRASFORMAZIONI ASINTOTICHE DELLE CURVE.

1. Data una curva C_i di cui il punto generico P_i abbia le coordinate cartesiane ortogonali x_i, y_i, z_i , indicheremo, come usualmente si fa, con

$$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i; \quad \xi_i, \eta_i, \zeta_i; \quad \lambda_i, \mu_i, \nu_i$$

i coseni direttori rispettivamente della tangente, della normale principale e della binormale alla curva nel punto P_i .

Siano allora C_1 e C_2 due curve che si corrispondano punto a punto e vincolate da una trasformazione asintotica: siano tali cioè da risultare asintotiche sulla rigata luogo delle congiungenti i loro punti corrispondenti ⁽¹⁾; indichiamo poi con

$$P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1); \quad P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$$

due punti corrispondenti sulle due curve, con $t = t(u)$ la distanza fra i punti P_1 e P_2 , con $\vartheta = \vartheta(u)$ l'angolo di inclinazione del segmento $\overline{P_1 P_2}$ sulla tangente a C_1 in P_1 e finalmente con $\sigma = \sigma(u)$ l'angolo dei piani osculanti le due curve in P_1 e P_2 rispettivamente, u essendo una variabile indipendente.

Noi assumiamo per variabile indipendente l'arco della curva C_1 contato da un suo punto fisso.

⁽¹⁾ Intorno all'argomento delle trasformazioni asintotiche delle curve confronta: L. BIANCHI, *Sulle configurazioni mobili di Möbius nelle trasformazioni asintotiche delle curve e delle superficie* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXV (1.° semestre 1908), pp. 291-325]. — P. TORTORICI, *Sulle deformazioni infinitesime delle superficie e sul teorema di permutabilità* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXV (1.° semestre 1913), pp. 289-316]. — M. PICONE, *Sopra una questione di Geometria Cinematica* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1915). — P. TORTORICI, *Sulle trasformazioni asintotiche delle curve e sulle congruenze W a falde focali rigate* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXVIII (2.° semestre 1914)]. — M. PICONE, *Intorno alle trasformazioni asintotiche delle curve e complementi alla Memoria: «Sulle congruenze W »* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXIX (1.° semestre 1915)].

Allora potremo evidentemente scrivere:

$$x_2 = x_1 + t(x_1 \cos \vartheta + \xi_1 \sin \vartheta), \dots \quad (1)$$

$$\lambda_2 = x_1 \sin \sigma \sin \vartheta - \xi_1 \sin \sigma \cos \vartheta + \lambda_1 \cos \sigma, \dots \quad (2)$$

Avuto riguardo alle formole di FRENET si trova:

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{du} = & x_1 \left[1 + \cos \vartheta \frac{dt}{du} - t \sin \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{du} + \frac{1}{\rho_1} \right) \right] + \\ & + \xi_1 \left[\sin \vartheta \frac{dt}{du} + t \cos \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{du} + \frac{1}{\rho_1} \right) \right] - \lambda_1 \frac{t}{T_1} \sin \vartheta, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_2}{du} = & x_1 \left[\cos \sigma \sin \vartheta \frac{d\sigma}{du} + \sin \sigma \cos \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{du} + \frac{1}{\rho_1} \right) \right] + \\ & + \xi_1 \left[\frac{1}{T_1} \cos \sigma - \cos \vartheta \cos \sigma \frac{d\sigma}{du} + \sin \sigma \sin \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{du} + \frac{1}{\rho_1} \right) \right] + \\ & + \lambda_1 \sin \sigma \left[\frac{1}{T_1} \cos \vartheta - \frac{d\sigma}{du} \right], \dots \end{aligned}$$

ove con $\frac{1}{\rho_1}$ e $\frac{1}{T_1}$ si è indicata rispettivamente la flessione e la torsione della curva C_1 .

Se ora scriviamo che è

$$S \lambda_2 \frac{dx_2}{du} = 0,$$

$$S \frac{d\lambda_2}{du} \frac{dx_2}{du} = 0,$$

si trovano le due relazioni differenziali:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{du} + \frac{1}{\rho_1} &= \left(\frac{1}{t} - \frac{\cot \sigma}{T_1} \right) \sin \vartheta, \\ \frac{t^2}{T_1} \left(\frac{d\sigma}{du} - \frac{\cos \vartheta}{T_1} \right) + \sin^2 \sigma \left(\frac{dt}{du} + \cos \vartheta \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

alle quali necessariamente devono soddisfare le funzioni t , ϑ , σ .

Viceversa: se tre funzioni t , ϱ , σ verificano le precedenti relazioni differenziali, le formole (1) e (2) definiscono una trasformata asintotica della curva C_1 .

Si osservi che una delle tre funzioni t , ϱ , σ può assegnarsi arbitrariamente e le equazioni (I) ne forniscono, mediante integrazione, le altre, talmente che ancora qui resta stabilito il teorema:

La determinazione di tutte le curve trasformate asintotiche di una curva data è un problema la soluzione del quale dipende da una funzione arbitraria di una variabile.

2. Alle relazioni (I) conviene aggiungere il legame fra le torsioni $\frac{1}{T_1}$ e $\frac{1}{T_2}$ delle curve C_1 e C_2 in punti corrispondenti ⁽²⁾:

$$\frac{1}{T_1} \cdot \frac{1}{T_2} = \frac{\text{sen}^2 \sigma}{t^2}. \quad (\text{II})$$

Con le formole (I) e (II) possono risolversi numerosi e svariati problemi, come del resto ha già mostrato il sig. PICONE; noi ci intratterremo sopra un solo caso che è quello che più ci interessa allo scopo di introdurre, in un primo modo, le superficie rigate che vogliamo studiare.

Si intende poi che, se si avesse per mira principale uno studio delle asintotiche sulle superficie rigate, si potrebbero assegnare anche, nelle formole testè scritte, arbitrariamente i valori di $\frac{1}{\rho_1}$ e $\frac{1}{T_1}$ e ritenere poi la curva C_1 definita dalle sue equazioni intrinseche.

§ 2.

LE TRASFORMAZIONI ASINTOTICHE DELLE CURVE A TORSIONE COSTANTE.

3. Ricerchiamo se esistono superficie rigate le quali ammettano una coppia di asintotiche curvilinee C_1 , C_2 soddisfacenti alle seguenti due proprietà:

⁽²⁾ Cfr. L. BIANCHI, loc. cit. (1)

1.º sia costante $=t$ la distanza di due punti corrispondenti;

2.º il prodotto delle torsioni in due punti corrispondenti sia pure esso costante:

$$\frac{1}{T_1} \cdot \frac{1}{T_2} = \frac{1}{\tau^2}.$$

Allora la formola (II) fornisce:

$$\operatorname{sen}^2 \sigma = \frac{t^2}{\tau^2}; \quad \sigma = \text{costante}, \quad \operatorname{sen} \sigma = \pm \frac{t}{\tau}$$

e conseguentemente la seconda delle (I) dà:

$$\left[-\frac{t^2}{T_1^2} + \frac{t^2}{\tau^2} \right] \cos \vartheta = 0,$$

onde, per risolvere la questione propositaci, bisognerà distinguere due casi secondo che è:

$$\cos \vartheta = 0 \quad \text{e quindi} \quad \vartheta = \frac{\pi}{2},$$

ovvero:

$$-\frac{t^2}{T_1^2} + \frac{t^2}{\tau^2} = 0.$$

4. Esaminiamo il primo caso.

La prima delle formole (I) dà

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{T_1} \frac{\frac{t}{\tau}}{\sqrt{1 - \frac{t^2}{\tau^2}}} = \frac{1}{\tau^2},$$

e la curva C_1 è allora una curva di BERTRAND⁽³⁾.

La formola (1) dà allora:

$$\frac{x_2 - x_1}{t} = \xi_1, \dots$$

per cui si conclude che le generatrici della nostra rigata sono le normali

⁽³⁾ Cfr. L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria Differenziale*, Vol. I, 2.^a edizione, pag. 50. Pisa, Spoerri, 1902.

principali della curva C_1 e conseguentemente che la curva C_2 è pure essa una curva di BERTRAND i cui raggi di prima e seconda curvatura soddisfano pure alla relazione lineare trovata per la C_1 .

La cosa inversa è immediata.

Se si indica con :

$$\frac{A}{T} + \frac{B}{\rho} + C = 0,$$

la relazione lineare che vincola i raggi di curvatura di due curve C_1 e C_2 di BERTRAND che hanno comuni le normali principali [e che perciò sono asintotiche sulla rigata luogo di queste normali] si trova facilmente, servendosi delle formule date :

$$\frac{1}{T_1} \cdot \frac{1}{T_2} = \frac{C^2}{A^2 + B^2} = \text{costante},$$

e per le flessioni in punti corrispondenti si trova la relazione :

$$\frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{1}{\rho_2} + \frac{C}{B} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) + \frac{C^2}{A^2 + B^2} = 0.$$

5. Nel secondo caso si ha :

$$-\frac{t^2}{T_1^2} + \frac{t^2}{\tau^2} = 0;$$

allora, poichè è anche :

$$\frac{1}{T_1} \cdot \frac{1}{T_2} = \frac{1}{\tau^2},$$

dovrà aversi :

$$T_1 = T_2 = \tau,$$

cioè le due curve C_1 e C_2 hanno la medesima torsione costante.

Esaminiamo attentamente questo caso.

Senza restrizione, potrà supporre, per maggiore semplicità, che sia :

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2} = -1,$$

e allora, *indipendentemente da ogni altra considerazione*, la formula (II) dà :

$$t^2 = \text{sen}^2 \sigma,$$

e la seconda delle (1):

$$\sigma = \text{costante},$$

onde anche:

$$t = \text{costante}.$$

La prima condizione imposta al principio di questo paragrafo è dunque superflua e si ha perciò il teorema:

Se due curve con la medesima torsione costante sono vincolate da una trasformazione asintotica, la distanza di due punti corrispondenti è costante.

La prima delle relazioni (I) esprime poi che la funzione $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(u)$ deve soddisfare alla relazione:

$$\frac{d\mathfrak{S}}{du} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{1 + \cos \sigma}{\sin \sigma} \sin \mathfrak{S}.$$

6. Se, col BIANCHI (*), invece di indicare con σ l'angolo costante che formano i piani osculatori delle curve a torsione costante ed uguale C_1, C_2 in punti corrispondenti, indichiamo tale angolo con $\frac{\pi}{2} - \sigma$, si avrà

$$t = \cos \sigma$$

e

$$\frac{d\mathfrak{S}}{du} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{1 + \sin \sigma}{\cos \sigma} \sin \mathfrak{S},$$

equazione che coincide con quella data dal BIANCHI per le trasformazioni di BÄCKLUND delle curve a torsione costante.

L'espressione della funzione $\omega = \omega(u)$ che, con le formule del BIANCHI, trasforma asintoticamente la C_1 nella C_2 è:

$$\omega(u) = \frac{1 + \sin \sigma}{\cos \sigma} \cos \mathfrak{S}.$$

Nel seguito noi ci riferiremo sempre a questo ultimo aspetto della equazione di trasformazione e per le proprietà delle trasformazioni B_σ delle curve a torsione costante, delle quali ci serviremo, rimandiamo chi legge alla Memoria del BIANCHI più volte citata.

(*) Cfr. L. BIANCHI; loc. cit. (*).

§ 3.

RIGATE Γ , CURVE γ .

7. Una rigata che ammetta due asintotiche curvilinee con la medesima torsione costante sarà chiamata nel seguito *una rigata* Γ .

Senza restrizione supporremo sempre che le due asintotiche in discorso abbiano la torsione $= -1$. Data una curva C_1 a torsione costante e fissato un angolo σ costante esistono, per quanto precede, ∞^1 curve C_2 con la medesima torsione costante, sue trasformate asintotiche e tali che l'angolo dei piani osculanti le due curve in punti corrispondenti sia σ . Tali curve, del resto, non sono altro che tutte le trasformate di BÄCKLUND, per costante σ , della curva data. Si può dire allora che:

Data una curva a torsione costante esistono solo ∞^2 rigate Γ che la contengono come una delle asintotiche a torsione costante.

8. Per determinare dunque una rigata Γ si può dare ad arbitrio una sua asintotica a torsione costante, dopo di che si individua una tale superficie fissando due costanti, una essendo relativa alla trasformazione B_σ della curva data, l'altra essendo il valore dell'angolo ϑ in un punto qualsiasi della curva medesima. Ora poichè la determinazione di una curva a torsione costante dipende da una funzione arbitraria di una variabile si può dire che:

La determinazione delle rigate Γ è un problema la soluzione del quale dipende da una funzione arbitraria di una variabile.

Come significato geometrico di questa funzione si può prendere quello della flessione di una delle asintotiche a torsione costante della rigata Γ che si vuol determinare.

Dalle formole (I) e (II) poi facilmente si deduce che:

Una superficie rigata non può ammettere più di due asintotiche curvilinee con la medesima torsione costante,

e quindi ora si può dire che:

La più generale superficie Γ si ottiene congiungendo i punti corrispondenti di due curve con la medesima torsione costante legate da una trasformazione di Bäcklund.

9. Definite in tal modo le rigate Γ , per mettere in luce qualche loro proprietà, osserviamo qui il seguente teorema relativo alla più generale superficie rigata :

Proprietà caratteristica della linea di stringimento di una superficie rigata è quella di corrispondere per ortogonalità di elementi alla indicatrice sferica delle generatrici.

Mantenendo le notazioni usuali ⁽⁵⁾ e prendendo per direttrice la linea di stringimento della superficie rigata, tanto risulta dalla condizione :

$$N = 0.$$

Da questa osservazione che subito ci servirà, possono dedursi anche, in modo semplice, alcuni teoremi noti ⁽⁶⁾.

⁽⁵⁾ Per comodità di chi legge riportiamo qui in Nota brevemente le notazioni che il BIANCHI adopera nelle sue *Lezioni* per lo studio di una superficie rigata R e che, fatte le modificazioni opportune al caso nostro, sono quelle di cui ci serviamo nei paragrafi che seguono di questa Memoria.

Assunta per direttrice una curva C_1 sulla rigata di cui sia u l'arco contato da un punto fisso, dette x_1, y_1, z_1 le coordinate del punto generico P_1 di C_1 in funzione di u ; detti l, m, n i coseni direttori, ancora in funzione di u , della generatrice per P_1 , detto v il valore algebrico del tratto di generatrice che intercede fra il punto P_1 e un punto $P \equiv (x, y, z)$ di R , le espressioni delle coordinate di P in funzione di u, v sono:

$$x = x_1 + l v, \quad y = y_1 + m v, \quad z = z_1 + n v.$$

L'espressione dell'elemento lineare della superficie è allora :

$$d s^2 = (M^2 v^2 + 2 N v + 1) d u^2 + 2 \cos \mathfrak{S} d u d v + d v^2,$$

essendo :

$$M^2 = S \left(\frac{d l}{d u} \right)^2; \quad N = S \frac{d l}{d u} \frac{d x_1}{d u}; \quad \cos \mathfrak{S} = S l \frac{d x_1}{d u};$$

$$S l^2 = 1; \quad S \left(\frac{d x_1}{d u} \right)^2 = 1.$$

Con queste notazioni l'equazione della linea di stringimento è :

$$M^2 v^2 + N = 0,$$

la quale coincide con la direttrice se $N = 0$.

Cfr. L. BIANCHI, loc. cit. ⁽³⁾, pag. 256.

⁽⁶⁾ I teoremi cui si allude sono i seguenti di cui l'ultimo è un caso particolare del primo :

1.° *Se due curve si corrispondono punto a punto per uguaglianza d'arco e se la distanza*

10. Si abbia una rigata Γ di cui le asintotiche a torsione costante indichiamo ancora con C_1 e C_2 .

Una proprietà delle curve a torsione costante legate da una trasformazione B_σ è la corrispondenza per uguaglianza d'arco (*). Detti dunque $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ due punti corrispondenti su C_1 e C_2 si avrà:

$$S \left(\frac{dx_1}{du} \right)^2 = S \left(\frac{dx_2}{du} \right)^2,$$

relazione equivalente all'altra:

$$S \frac{d}{du} (x_1 + x_2) \cdot \frac{d}{du} (x_1 - x_2) = 0,$$

la quale, per quanto si è avanti osservato, dimostra che:

La linea di stringimento di una rigata Γ è la curva luogo del punto di mezzo della congiungente due punti corrispondenti delle sue asintotiche a torsione costante.

Una tale linea di stringimento è manifestamente una curva particolare e da noi sarà distinta col nome di *curva γ* .

11. Pongasi, con le notazioni solite:

$$\begin{aligned} l &= \alpha_1 \cos \vartheta + \xi_1 \sin \vartheta, \\ m &= \beta_1 \cos \vartheta + \eta_1 \sin \vartheta, \\ n &= \gamma_1 \cos \vartheta + \zeta_1 \sin \vartheta; \end{aligned}$$

di due punti corrispondenti è costante, il luogo dei punti di mezzo delle congiungenti i punti corrispondenti delle due curve è la linea di stringimento della rigata luogo di queste congiungenti.

2.^o *Reciprocamente se, a partire dai punti della linea di stringimento di una superficie rigata, si staccano sulle generatrici, da una parte e dall'altra, segmenti di lunghezza costante, i luoghi degli estremi di questi segmenti sono due curve che si corrispondono per uguaglianza d'arco.*

3.^o *Se due curve piane si corrispondono punto a punto e per distanza costante di punti corrispondenti, le congiungenti questi punti involuppano una terza curva ed ogni involupata ha comune con l'involuppo il suo punto di mezzo.*

Questi teoremi furono dimostrati direttamente dalla signorina C. PAGANUZZI nella sua tesi manoscritta di laurea: *Sulle reti di Tchebicheff*, Pisa, luglio 1912.

(*) Cfr. L. BIANCHI, loc. cit. (*).

l, m, n sono evidentemente i coseni direttori della generatrice generica della rigata Γ che si considera.

Ora, servendosi delle formole (2) il lettore troverà immediatamente :

$$Sl \frac{dx_1}{du} = \cos \mathfrak{S},$$

$$Sl \frac{dx_2}{du} = \cos \mathfrak{S},$$

le quali relazioni segnalano il teorema :

In una rigata Γ le due asintotiche a torsione costante segano ogni generatrice rettilinea secondo angoli uguali in valore assoluto.

Se dunque la C_1 sega una generatrice secondo l'angolo \mathfrak{S} , la C_2 segherà la medesima generatrice secondo l'angolo \mathfrak{S} o secondo l'angolo $2\pi - \mathfrak{S}$.

12. In vista di talune applicazioni è utile considerare l'angolo che la linea di stringimento di una rigata Γ fa con le generatrici.

Le coordinate x_0, y_0, z_0 del punto generico P_0 della linea di stringimento sono date, per quanto fu detto al n.º 10, da :

$$x_0 = \frac{1}{2} (x_1 + x_2), \quad y_0 = \frac{1}{2} (y_1 + y_2), \quad z_0 = \frac{1}{2} (z_1 + z_2).$$

Cominciamo dal costruire l'espressione dell'elemento d'arco ds_0 della linea di stringimento ricordando che è :

$$x_2 = x_1 + l \cos \sigma,$$

$$y_2 = y_1 + m \cos \sigma,$$

$$z_2 = z_1 + n \cos \sigma,$$

e che l'equazione di trasformazione è :

$$\frac{d\theta}{du} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{1 + \sin \sigma}{\cos \sigma} \sin \mathfrak{S},$$

essendo $\gamma = \frac{\pi}{2} - \sigma$ l'angolo dei piani osculanti le curve C_1 e C_2 in punti corrispondenti.

Si ha successivamente:

$$\frac{d x_0}{d u} = \frac{1}{2} \left(\frac{d x_1}{d u} + \frac{d x_2}{d u} \right),$$

$$\left(\frac{d x_0}{d u} \right)^2 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{d x_1}{d u} \right)^2 + \left(\frac{d x_2}{d u} \right)^2 + 2 \frac{d x_1}{d u} \frac{d x_2}{d u} \right],$$

e quindi:

$$\frac{d s_0^2}{d u^2} = S \left(\frac{d x_0}{d u} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(1 + S \frac{d x_1}{d u} \frac{d x_2}{d u} \right).$$

Ma, in ordine alla espressione di $\frac{d x_2}{d u}$ data al § 1, essendo la variabile u l'arco della curva C_1 ed essendo inoltre in questo caso:

$$t = \cos \sigma = \text{costante},$$

si trova:

$$S \frac{d x_1}{d u} \cdot \frac{d x_2}{d u} = 1 - \cos \sigma \operatorname{sen} \vartheta \left(\frac{d \theta}{d u} + \frac{1}{\rho_1} \right),$$

e quindi, in forza della equazione di trasformazione dianzi ricordata:

$$S \frac{d x_1}{d u} \frac{d x_2}{d u} = 1 - (1 + \operatorname{sen} \sigma) \operatorname{sen}^2 \vartheta,$$

onde, sostituendo, ottiensì infine:

$$\frac{d s_0^2}{d u^2} = 1 - \frac{1 + \operatorname{sen} \sigma}{2} \operatorname{sen}^2 \vartheta = 1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta,$$

essendo:

$$k^2 = \frac{1 + \operatorname{sen} \sigma}{2} = \text{costante}.$$

Detto ora φ l'angolo di inclinazione della linea di stringimento sulle generatrici si ha:

$$\cos \varphi = S l \frac{d x_0}{d s_0} = \frac{d u}{d s_0} S l \frac{d x_0}{d u} = \cos \vartheta \frac{d u}{d s_0} = \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}},$$

formula che altrove ci tornerà utile.

13. Considerando sempre una rigata Γ , in vista di una interessante applicazione che ne faremo al § 5, vogliamo stabilire il legame fra le flessioni $\frac{1}{\rho_1}$ e $\frac{1}{\rho_2}$ in punti corrispondenti delle asintotiche C_1 e C_2 .

La C_1 intanto è legata alla C_2 da una certa trasformazione B_1 onde sussiste certo la solita relazione:

$$\frac{d\theta}{du} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{1 + \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma} \operatorname{sen} \mathcal{S}.$$

Ma si osservi ora che la C_2 è legata alla C_1 pure da una trasformazione B_2 e che, conforme a quanto si è detto al n.º 11, essa sega le generatrici della rigata secondo un angolo uguale a \mathcal{S} o a $2\pi - \mathcal{S}$; onde si potrà affermare che, insieme con la precedente, sussiste pure la relazione:

$$\varepsilon \frac{d\theta}{du} + \frac{1}{\rho_2} = - \frac{1 + \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma} \varepsilon \operatorname{sen} \mathcal{S},$$

dedotta da quella cambiando:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \sigma$$

in

$$-\gamma = -\frac{\pi}{2} + \sigma$$

ed essendo $\varepsilon = \pm 1$ secondo che la C_2 sega le generatrici della rigata secondo l'angolo \mathcal{S} o secondo l'angolo $2\pi - \mathcal{S}$.

Moltiplicando quest'ultima relazione differenziale per ε e sommando con la prima si ottiene la relazione cercata fra le flessioni:

$$\frac{1}{\rho_1} + \varepsilon \frac{1}{\rho_2} = -2 \frac{d\theta}{du},$$

ove manifestamente ε va assunto in modo che $\frac{1}{\rho}$ risulti sempre positivo.

§ 4.

CONSEGUENZE PER LE CONGRUENZE PSEUDOSFERICHE.

14. Una conseguenza del teorema stabilito al n.º 5 è che:

Se una congruenza di rette W ha per falde focali due superficie colla medesima curvatura totale costante, la distanza di due punti corrispondenti sulle falde focali è costante.

Dietro il teorema ricordato e dietro un ben noto teorema di ENNEPER la dimostrazione di questo teorema è immediata e la tralasciamo.

15. In particolare, limitandoci a considerare superficie a curvatura totale costante e negativa, siano S_1 ed S_2 due superficie pseudosferiche vincolate da una trasformazione di BÄCKLUND e siano C_1 e C_2 due asintotiche corrispondenti su queste superficie.

La rigata luogo delle congiungenti i punti corrispondenti di C_1 e C_2 è manifestamente una rigata Γ e perciò concludiamo:

Ogni congruenza pseudosferica è sempre decomponibile, ed in due modi diversi, in una semplice infinità di rigate Γ ; il luogo delle linee di stringimento di queste rigate è la superficie media della congruenza.

Questo teorema può anche enunciarsi:

Sulla superficie media di ogni congruenza pseudosferica esiste un doppio sistema di curve γ : quello che corrisponde alle asintotiche delle falde focali.

Con l'aiuto delle formole delle trasformazioni B_σ delle superficie pseudosferiche, si può effettivamente ed in modo facile costruire l'espressione dell'elemento lineare della superficie media di una congruenza pseudosferica riferito al doppio sistema di curve γ esistente su essa. Per i coefficienti dell'elemento lineare si ottengono espressioni simmetriche nelle due funzioni ϑ e φ delle trasformazioni B_σ : ma siccome la sola espressione dell'elemento lineare non ha importanza noi qui non la riportiamo.

§ 5.

LE RIGATE Γ APPLICABILI SULL'IPERBOLOIDE ROTONDO AD UNA FALDA.

16. Premettiamo la seguente osservazione :

La più generale superficie rigata può sempre flettersi in guisa da renderla con una asintotica a torsione costante.

Basta evidentemente prendere sulla rigata, data in modo arbitrario, una linea di ugual curvatura totale :

$$K = \text{costante}$$

e poi, mediante una deformazione, sempre esistente e perfettamente determinata per un teorema di BELTRAMI ⁽⁸⁾, cangiare tale curva in una asintotica della rigata.

17. Sia ora R un iperboloide rotondo ad una falda e consideriamo un parallelo; indichiamo con \mathfrak{S} l'angolo costante di inclinazione di un sistema di generatrici sul parallelo. Fissato il sistema di generatrici che si prende in considerazione, tale angolo \mathfrak{S} , con una opportuna scelta della direzione positiva delle generatrici, può sempre ritenersi, senza restrizione, interno all'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Deformiamo l'iperboloide, mantenendo rigide le generatrici del sistema che consideriamo, in modo da rendere linea asintotica sulla superficie deformata il parallelo fissato: è evidente che il parallelo si sarà cambiato in tal modo in un'elica circolare.

Infatti sull'iperboloide R il parallelo era una linea di curvatura costante per la superficie e a curvatura geodetica pure costante.

Ma di più dimostriamo che :

La deformazione che, mantenendo rigide un sistema di generatrici, cangia un parallelo di un iperboloide rotondo ad una falda in asintotica, cangia l'iperboloide stesso in una rigata Γ .

⁽⁸⁾ Cfr. L. BIANCHI, loc. cit. ⁽⁸⁾, pag. 264.

Ciò si può dimostrare direttamente ovvero, come faremo dapprima, servendosi delle formole avanti stabilite.

Si supponga adunque di avere un'elica circolare C_1 e per ogni suo punto $P \equiv (x_1, y_1, z_1)$ nel piano osculante la curva conducasi la retta inclinata su essa di un angolo costante ed arbitrario \mathfrak{S} compreso nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; si otterrà in tal modo una superficie rigata su cui l'elica circolare è una asintotica.

Proviamo che sulla rigata in tal modo ottenuta, esiste un'altra asintotica C_2 che è parimenti una elica circolare uguale a C_1 .

Sia $\frac{1}{\rho_1} = a$ la flessione dell'elica circolare C_1 , $\frac{1}{T_1} = -1$ la sua torsione: se si sostituiscono tali valori nella equazione delle trasformazioni B_σ delle curve a torsione costante, osservando che in questo caso è $\mathfrak{J} = \text{cost.}$, si ha:

$$a = \frac{1 + \text{sen } \sigma}{\text{cos } \sigma} \text{sen } \mathfrak{S},$$

la quale relazione, risolta rispetto a $\text{cos } \sigma$, fornisce un valore unico e sempre reale:

$$\text{cos } \sigma = \frac{2 a \text{sen } \mathfrak{S}}{a^2 + \text{sen}^2 \mathfrak{S}}$$

tale che, posto:

$$t = \text{cos } \sigma = \frac{2 a \text{sen } \mathfrak{S}}{a^2 + \text{sen}^2 \mathfrak{S}},$$

staccando da ogni punto di C_1 un segmento di generatrice di lunghezza t , ottiensi, come luogo degli estremi, una curva C_2 , certamente asintotica sulla rigata e con la medesima torsione costante $\frac{1}{T_2} = -1$.

Inoltre, la relazione trovata fra le flessioni in punti corrispondenti di due curve a torsione costante legate da una trasformazione B_σ (cfr. § 3, n.º 13) fornisce ora:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2} = \text{costante},$$

cioè, la curva C_2 è un'elica circolare uguale a C_1 .

Il teorema enunciato è con ciò dimostrato; inoltre, astraendo da una omotetia, si può dire:

Esistono ∞^2 rigate Γ sulle quali le asintotiche a torsione costante sono due eliche circolari.

18. Inversamente, assunta una rigata Γ di questa specie, si può dimostrare direttamente ed in vari modi che essa è applicabile sull'iperboloide rotondo ad una falda.

Noi possiamo però, in modo semplice, caratterizzare la classe completa di queste superficie, dopo di che, come il lettore vedrà, in ordine a teoremi noti, seguirà subito l'applicabilità accennata.

Sia dunque r l'asse dell'elica circolare C_1 ; sia s la retta inclinata dell'angolo arbitrario costante ϑ , fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, la quale giace nel piano osculante l'elica C_1 in un suo punto P_1 .

La rigata Γ di cui è parola nel numero precedente, si può generare, com'è evidente, imprimendo alla retta s il medesimo moto elicoidale che deve assumere il punto P_1 intorno ad r per generare l'elica C_1 . Da qui deducesi che una tale superficie Γ è una elicoide rigata la quale, in ordine al teorema di BOUR⁽⁹⁾ è applicabile sopra una superficie di rotazione che, per teoremi ben noti⁽¹⁰⁾, non è altro che l'iperboloide rotondo ad una falda. Concludiamo dunque:

Una rigata Γ applicabile sull'iperboloide rotondo ad una falda è una elicoide rigata.

La più generale di queste superficie si genera conducendo per ogni punto di un'elica circolare, nel suo piano osculatore, la retta inclinata sulla curva di un angolo costante arbitrario ϑ interno all'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

19. La classe delle elicoidi rigate di cui sopra, generate dal moto elicoidale di una retta attorno ad un asse sghembo, è ben nota; noi osserviamo ancora soltanto che i risultati esposti in questo paragrafo completano un elegante risultato del sig. PICONE⁽¹¹⁾ il quale ha dimostrato che:

Oltre al caso, geometricamente evidente, delle asintotiche di conoidi rette, le uniche curve suscettibili di assumere nello spazio due posizioni diverse C_1

⁽⁹⁾ Cfr. L. BIANCHI, *Lezioni*, Vol. I (2.^a ediz.), pag. 235.

⁽¹⁰⁾ Cfr. L. BIANCHI, loc. cit. ⁽⁸⁾, pag. 268.

⁽¹¹⁾ Cfr. M. PICONE, *Sulle trasformazioni asintotiche delle curve e complementi alla Memoria «Sulle congruenze W »* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tom. XXXIX (1.^o semestre 1913)].

e C_2 tali che, sulla rigata luogo delle congiungenti le due posizioni di un medesimo punto, C_1 e C_2 risultino asintotiche, sono le eliche circolari.

È una circostanza degna di nota che tali rigate siano elicoidi ⁽¹²⁾.

§ 6.

TRASFORMAZIONI B_σ DELLE RIGATE Γ E CONGRUENZE Δ .

20. Sia R una rigata Γ , C_1 e C_2 ancora le sue due asintotiche a torsione costante $= -1$.

La curva C_2 si ottiene dalla C_1 mediante una certa trasformazione B_σ definita dalle formole solite:

$$x_2 = x_1 + \cos \sigma (x_1 \cos \vartheta + \xi_1 \operatorname{sen} \vartheta), \dots,$$

$$\frac{d\theta}{du} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{1 + \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma} \operatorname{sen} \vartheta.$$

Si consideri una nuova curva \bar{C}_2 pure a torsione costante $= -1$, vincolata a C_1 da una trasformazione B_σ definita dalle formole analoghe:

$$\bar{x}_2 = x_1 + \cos \bar{\sigma} (x_1 \cos \bar{\vartheta} + \xi_1 \operatorname{sen} \bar{\vartheta}), \dots,$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{d\bar{u}} + \frac{1}{\bar{\rho}_1} = \frac{1 + \operatorname{sen} \bar{\sigma}}{\cos \sigma} \operatorname{sen} \bar{\vartheta},$$

essendo $\bar{P}_2 \equiv (x_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ il punto di \bar{C}_2 corrispondente al punto $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ di C_1 e $\bar{\sigma}$ e $\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}(u)$ essendo due angoli che hanno rispettivamente nella nuova trasformazione il significato che σ e $\vartheta = \vartheta(u)$ avevano nella prima.

Allora esiste, per il teorema di permutabilità relativo alle curve a torsione costante ⁽¹³⁾, una quarta curva C_1 a torsione pure costante $= -1$ legata alla \bar{C}_2 da una trasformazione B_σ e alla C_2 da una trasformazione B_σ ;

⁽¹²⁾ Si potrebbe dimostrare ancora che:

Una superficie Γ applicabile sull'iperboloide rotondo ad una falda ammette una deformazione continua che la conserva sempre superficie Γ .

⁽¹³⁾ Cfr. L. BIANCHI, loc. cit. ⁽¹⁾.

in altre parole, assegnata che sia la rigata R , fissato un angolo $\bar{\sigma}$ costante ad arbitrio, si possono sempre determinare (ed in ∞^1 modi diversi) le due curve \bar{C}_1, \bar{C}_2 legate rispettivamente a C_2 e C_1 da una trasformazione $B_{\bar{\sigma}}$ e vincolate esse stesse da una trasformazione B_{σ} come le C_1 e C_2 .

La superficie rigata \bar{R} , luogo delle congiungenti i punti corrispondenti di \bar{C}_1 e \bar{C}_2 , è manifestamente una nuova rigata Γ che si può chiamare *una trasformata di Bäcklund della rigata R data mediante una trasformazione B_{σ}* .

Allora fissato un angolo arbitrario φ si ha che:

Data una rigata Γ esistono solo ∞^1 rigate Γ vincolate ad essa da una trasformazione B_{φ} .

Da teoremi ben noti poi sulle trasformazioni asintotiche delle curve il lettore facilmente dedurrà che:

Due superficie Γ legate da una trasformazione B_{φ} sono sempre le falde focali di una congruenza W .

Una congruenza W di questa specie gode della proprietà che sulle sue falde focali le asintotiche a torsione costante si corrispondono: una tale congruenza sarà nel seguito indicata brevemente col nome di *congruenza Δ* .

21. Si abbia una congruenza Δ di cui le falde focali R, R' siano vincolate da una trasformazione B_{σ} e su ogni falda le due asintotiche a torsione costante da una trasformazione B_{σ} . Siano $C_1, C_2; C'_1, C'_2$ tali asintotiche su R ed R' rispettivamente e si considerino le due superficie rigate:

$$R_1 \equiv (C_1, C'_2), \quad \bar{R}_1 \equiv (C_2, C'_1);$$

esse manifestamente sono le falde focali di una nuova congruenza Δ , sono vincolate da una trasformazione B_{σ} e su ciascuna d'esse le asintotiche a torsione costante sono vincolate da una trasformazione B_{σ} .

Questa non è poi che una maniera diversa di presentare il teorema di permutabilità per le curve a torsione costante.

22. Con le medesime notazioni, si considerino le due superficie rigate:

$$G_1 \equiv (C_1, C'_1), \quad G_2 \equiv (C_2, C'_2);$$

esse costituiscono una coppia di rigate associate e quindi, per un teorema noto, sono le falde della superficie focale di una congruenza W ⁽¹⁴⁾: su

⁽¹⁴⁾ Cfr. P. TORTORICI, *Sulle trasformazioni asintotiche delle curve e sulle congruenze W a falde focali rigate* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tom. XXXVIII (2.º semestre 1914)].

queste falde focali le curve $C_1, C'_1; C_2, C'_2$ sono caustiche per la congruenza. Dunque :

Esistono quante si vogliono congruenze W a falde focali rigate e che ammettano, su ciascuna falda, due caustiche a torsione costante.

23. Chiamiamo con M_1, M_2, M'_1, M'_2 quattro punti corrispondenti sulle quattro curve C_1, C_2, C'_1, C'_2 ordinatamente; il quadrilatero sghembo che ha per vertici questi quattro punti ha, in ordine a quanto precede, le due coppie di spigoli opposti costantemente uguali al variare dei quattro punti corrispondenti sulle quattro curve.

Chiamiamo ancora con L, L', L_1, L'_1 le quattro linee di stringimento delle quattro rigate Γ

$$R \equiv (C_1, C_2), \quad R' \equiv (C'_1, C'_2), \quad R_1 \equiv (C_1, C'_2), \quad R'_1 \equiv (C_2, C'_1)$$

ordinatamente, esse sono quattro curve γ e chiamando corrispondenti quattro punti di queste curve che siano sulle congiungenti di quattro punti corrispondenti di C_1, C_2, C'_1, C'_2 si ha la proprietà :

Quattro punti corrispondenti delle quattro curve γ sono sempre i vertici di un parallelogramma.

24. Si hanno dei casi in cui il parallelogramma di cui è parola nell'ultimo enunciato è un rettangolo.

Perchè questo accada è sufficiente che la rigata R' sia legata alla R da una trasformazione B_{-s} a costante contraria di quella relativa alla trasformazione che lega le asintotiche a torsione costante di R o di R' .

Supponendo di essere in questo caso, si considerino ancora le due rigate associate

$$G_1 \equiv (C_1, C'_1), \quad G_2 \equiv (C_2, C'_2);$$

esse sono sempre, come si è detto, le falde focali di una congruenza W ; ma il lettore verificherà qui facilmente la proprietà singolare che due generatrici corrispondenti sulle due falde focali sono sempre perpendicolari.

§ 7.

IL TEOREMA DI PERMUTABILITÀ PER LE RIGATE Γ .

25. Passiamo ora a dimostrare il seguente teorema:

Se R_1 ed R_2 sono due rigate Γ , contigue per trasformazioni di Bäcklund B_{σ_1} , B_{σ_2} ad una medesima rigata R pure della classe Γ , esiste una quarta rigata \bar{R} , ancora della classe Γ , perfettamente determinata e contigua alle rigate R_1 , R_2 ma per trasformazioni B_{σ_2} , B_{σ_1} a costanti permutate.

Per dimostrare in modo semplice il teorema, indichiamo qui con:

$$C, C'; C_1, C'_1; C_2, C'_2$$

le tre coppie di asintotiche a torsione costante esistenti su R , R_1 , R_2 rispettivamente; le curve di ciascuna coppia sono vincolate da una trasformazione B_{σ} , mentre le coppie

$$C, C_1; C', C'_1$$

sono vincolate da una trasformazione B_{σ_1} , e le coppie

$$C, C_2; C', C'_2$$

da una trasformazione B_{σ_2} .

Allora, in forza del teorema di permutabilità per le curve a torsione costante, esistono e sono perfettamente determinate due curve \bar{C} , \bar{C}' , con la medesima torsione costante, contigue per trasformazioni B_{σ_2} , B_{σ_1} rispettivamente alle curve C_1 , C_2 e C'_1 , C'_2 : io dimostrerò che le due curve \bar{C} , \bar{C}' sono esse stesse legate da una trasformazione B_{σ} e la rigata \bar{R} luogo delle congiungenti i loro punti corrispondenti è una rigata Γ contigua per trasformazioni B_{σ_2} , B_{σ_1} alle rigate R_1 , R_2 rispettivamente.

Infatti della curva C si considerino le tre trasformate asintotiche:

$$C', C_1, C_2,$$

ottenute da essa mediante certe tre trasformazioni B_{σ} , B_{σ_1} , B_{σ_2} e si osservi che le tre curve:

$$\bar{C}, C'_1, C'_2$$

completano a quaderne di MÖBIUS ordinatamente le tre terne:

$$C, C_1, C_2; C, C', C_1; C, C', C_2.$$

Allora, per il teorema delle otto curve in trasformazione asintotica, esiste ed è perfettamente determinata una ottava curva \bar{C} pure con la medesima torsione costante e contigua per trasformazioni B_{σ} , B_{σ_2} , B_{σ_1} rispettivamente alle tre curve:

$$\bar{C}, C'_1, C'_2.$$

Questa ottava curva è allora quella da noi avanti considerata e non c'è bisogno di ulteriori considerazioni per ritenere stabilito il teorema di permutabilità enunciato.

Il lettore vede che tale teorema in sostanza non è che una maniera diversa di presentare il teorema delle otto curve noto a tutti abbastanza per dovervi insistere.

Dopo di che si ha:

Esistono quante si vogliono configurazioni di Möbius di quattro rigate Γ .

Con una tale configurazione si individuano evidentemente quattro congruenze Δ .

26. Se si considerano otto punti corrispondenti

$$P, P', P_1, P'_1, P_2, P'_2, \bar{P}, \bar{P}'$$

sulle otto asintotiche a torsione costante e i loro otto piani osculatori si ha una configurazione mobile \mathcal{S}_4 di MÖBIUS, le notevoli proprietà della quale sono note a ciascuno.

Il lettore osservi ancora che, data una configurazione di MÖBIUS Γ_8 di otto curve a torsione costante:

$$\Gamma_8 \equiv (C, C_1, C_2, \bar{C}, C', C'_1, C'_2, \bar{C}'),$$

possonsi ripartire le otto curve in tre maniere diverse a coppie in modo da ottenere, per ciascuna ripartizione, una configurazione di MÖBIUS di quattro rigate Γ .

Le tre ripartizioni possibili sono indicate nel seguente specchietto :

$$(C, C_1), (C_2, C), (C', C'_1), (C'_2, C');$$

$$(C, C'), (C_1, C'_1), (C_2, C'_2), (C, C');$$

$$(C, C_2), (C_1, C), (C'_1, C'_2), (C'_1, C).$$

Naturalmente si potrebbe con tutta facilità passare a configurazioni di rigate Γ di ordine superiore.

Taciamo poi delle configurazioni di MÖBIUS di superficie applicabili sul catenoide che facilmente possono dedursi da quelle ora studiate.

Piacenza, 20 Settembre 1915.

INDICE

	PAG.
PREFAZIONE	205
§ 1. Formule relative alle trasformazioni asintotiche delle curve	206
§ 2. Le trasformazioni asintotiche delle curve a torsione costante	208
§ 3. Rigate Γ , curve γ	212
§ 4. Conseguenze per le congruenze pseudosferiche	218
§ 5. Le rigate Γ applicabili sull'iperboloide rotondo ad una falda	219
§ 6. Trasformazioni B_φ delle rigate Γ e congruenze Δ	222
§ 7. Il teorema di permutabilità per le rigate Γ	225

Invarianti proiettivo-differenziali delle curve tracciate su una superficie e definizione proiettivo-differenziale di una superficie.

(Di GUIDO FUBINI, a Torino.)

PRELIMINARI.

In una mia Nota (*) io ho dimostrato che una superficie si può definire mediante una forma differenziale contenente i differenziali secondi delle coordinate curvilinee u, v , in guisa tale che due superficie siano collineari allora e allora soltanto che le forme corrispondenti differiscano al più per un fattore finito.

Ora sopra una superficie esistono tre sistemi di ∞^1 linee, che noi chiameremo di DARBOUX-SEGRE e che sono invarianti per collineazioni. Tanto il DARBOUX (**), che il SEGRE (***) si accontentano di dare le tre direzioni che hanno quelle tre di queste linee che escono da un punto della superficie, usando di coordinate cartesiane od omogenee, senza però studiare l'equazione di tali linee in coordinate curvilinee qualsiasi.

La conoscenza di questa equazione è essenziale per rispondere alla seguente domanda, postami dal prof. SEGRE, che è stata l'origine del presente lavoro :

Basta o non basta che una corrispondenza tra i punti di due superficie faccia corrispondere le linee di Darboux-Segre, perchè tale corrispondenza sia proiettiva ?

E, poichè tale condizione *necessaria* non è, come proveremo, *sufficiente*,

(*) *Definizione proiettivo-differenziale di una superficie.* Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. 49 (1913-14).

(**) DARBOUX [*Bulletin des Sciences mathématiques* (2), tomo 4, 1880, pag. 356].

(***) SEGRE [*Rendic. della R. Accad. dei Lincei* (5), tomo 17₂, 1908, pag. 409-411].

potremo chiederci *se esistono altri sistemi di linee* (tali che per ogni punto della superficie passi un numero *finito* di tali linee), in guisa che *una corrispondenza tra i punti di due superficie sia una collineazione allora e allora soltanto che faccia corrispondere sulle due superficie tali sistemi di linee.*

Questo problema è intimamente connesso all'altro di definire *a meno di una collineazione* una superficie mediante forme differenziali dipendenti dai soli differenziali del *primo* ordine delle u, v ; così come, nella classica teoria di GAUSS, si definisce *a meno di movimenti* una superficie con le due forme

$$G_1 = ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

$$A_1 = D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2.$$

Con l'*indice* indico l'*ordine* della forma differenziale considerata.

Il precedente problema è qui risolto in modo molteplice.

Le linee di DARBOUX-SEGRE saranno definite uguagliando a zero una forma differenziale del *primo* ordine e di *terzo* grado; ed in una Memoria in corso di stampa nel *Circ. Matem. di Palermo* dimostro che tale forma è nello studio della deformazione *proiettiva* di una superficie l'analogo dell'*elemento lineare* G_1 per l'ordinaria deformazione. Non pare però facile calcolare tale forma partendo direttamente dalla definizione delle linee di DARBOUX-SEGRE.

DARBOUX ne definisce le direzioni in un punto O della superficie V come i raggi tripli dell'involuzione ∞^3 di terzo grado generata dalle rette tangenti alle curve C dotate di punto triplo in O , che possono essere intersezione di V con una quadrica.

Il prof. SEGRE definisce due terne di direzioni: una col procedimento che qui sotto esponiamo; l'altra col procedimento duale. Una delle due terne coincide con la terna di DARBOUX; l'altra ne è una terna covariante, su cui avremo occasione di ritornare. Consideriamo gli ∞^1 piani π uscenti da O , tali che se una curva C di V uscente da O ha π come piano stazionario, i piani tangenti a V nel punto O e nei tre punti infinitamente vicini posti su C (e quindi anche su π) si incontrino in uno stesso punto del piano ω tangente a V in O . Tali piani π involuppano un cono di quinta classe; il quale ha ω come piano quintuplo e tocca ω lungo le due tangenti asintotiche uscenti da O e lungo un'altra terna di direzioni; che è appunto la terna che ci eravamo proposti di definire.

Noi per trovare l'equazione di tali linee usiamo in sostanza di un procedimento per tentativi. Per rendere chiara tale ricerca, dobbiamo qui riassumere i risultati della mia Nota citata; ciò che d'altra parte ci sarà utile,

perchè ci permetterà di dare le notazioni di cui ci serviamo nel presente lavoro.

Seguendo le notazioni delle classiche *Lezioni di Geometria differenziale* del prof. L. BIANCHI, indichiamo con $\left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ l \end{smallmatrix} \right\}$ i simboli di CHRISTOFFEL di seconda specie relativi all'elemento lineare G_1 . Porremo

$$\Delta = EG - F^2,$$

$$l = d^2 u + \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} du^2 + 2 \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} du dv + \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} dv^2,$$

$$m = d^2 v + \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} du^2 + 2 \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} du dv + \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} dv^2,$$

$$A_2 = \sqrt{\Delta} (m du - l dv),$$

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} D du + D' dv & D' du + D'' dv \\ E du + F dv & F du + G dv \end{vmatrix}.$$

Indichiamo con $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{T}$, $\frac{1}{R_n}$, $\frac{1}{R_g}$, $\frac{1}{T_g}$ la curvatura, la torsione, la curvatura normale, la curvatura geodetica, la torsione geodetica di una linea posta sulla superficie, e con σ l'angolo che la sua normale principale fa con la normale alla superficie. Cosicchè, fissato opportunamente il segno di σ :

$$\frac{1}{R_n} = \frac{\cos \sigma}{R}, \quad \frac{1}{R_g} = \frac{\sin \sigma}{R}, \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{T_g} + \frac{d\sigma}{ds}.$$

È pure

$$l(E du + F dv) + m(F du + G dv) = \frac{1}{2} dG_1 = ds d^2 s, \quad (1)$$

$$U_1 \sqrt{\Delta} du = A_1 (F du + G dv) - G_1 (D' du + D'' dv), \quad (2)$$

$$U_1 \sqrt{\Delta} dv = -A_1 (E du + F dv) + G_1 (D du + D' dv), \quad (3)$$

$$\frac{1}{R_g} = \frac{\sin \sigma}{R} = A_2 ds^{-3} = A_2 G_1^{-\frac{3}{2}}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{R_n} = \frac{\cos \sigma}{R} = A_1 ds^{-2} = A_1 G_1^{-1}, \quad (5)$$

$$\frac{1}{T_g} = U_1 ds^{-2} = U_1 G_1^{-1}. \quad (6)$$

Poichè se ne deduce

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_g} + \frac{d\sigma}{ds}; \quad \operatorname{tg} \sigma = \frac{A_2}{A_1 G_1^{\frac{1}{2}}}; \quad \frac{1}{R^2} = (A_1 G_1^{-1})^2 + \left(A_2 G_1^{-\frac{3}{2}} \right)^2,$$

si trova che:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{T} \frac{1}{R^2} ds^6 = \\ = U_1 A_1^2 + A_1 dA_2 - A_2 dA_1 - \frac{1}{2} A_2 \frac{A_1 dG_1 - 2U_1 A_2}{G_1} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

La (7), uguagliata a zero, definisce le sezioni piane della superficie; due superficie (loc. cit.) sono collineari soltanto se le corrispondenti forme (7) sono proporzionali.

Sarà bene che adottiamo, per brevità, alcune locuzioni a noi comode. Diremo che un'espressione o una equazione sono *invarianti*, se non mutano, sostituendo a una superficie V un'altra superficie collineare. Un'espressione poi, che dipenda da una superficie V , da un suo punto O , ed eventualmente ancora da una curva C passante per O e posta in V , si dirà *intrinseca*, oppure avente un *significato intrinseco*, se il suo valore non muta cambiando le linee coordinate u, v sulla superficie, ma dipende soltanto da V , dal punto O , ed eventualmente anche da C ; così sono *intrinseche* le curvature media o totale di V in O , le curvature normale o geodetica, o la torsione di C in O ; ma *non sono* intrinseche le curvature delle linee coordinate uscenti da O , l'angolo di tali linee, ecc. Diremo infine che una forma differenziale F è *semi-invariante*, se $F=0$ è equazione invariante, se cioè la F cambia al più per un fattore finito, quando alla superficie si sostituisce una superficie collineare. Tale è p. es. la A_1 (perchè le linee definite da $A_1=0$, cioè le asintotiche, si conservano, com'è noto, per collineazioni). Similmente la (7) è *semi-invariante*. La (7) diventa sviluppata (indicando con $P^{(3)}$ e $Q^{(6)}$ due forme del primo ordine, ma rispettivamente del terzo e del sesto grado):

$$\begin{aligned} & (d^3 v du - dv d^3 u) \sqrt{\Delta} (D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2) + \\ & + P^{(3)} (d^3 v du - dv d^3 u) + Q^{(6)} - 3 (d^2 v du - d^2 u dv) \times \\ & \times \sqrt{\Delta} \left[D du d^2 u + D' (dv d^2 u + du d^2 v) + D'' dv d^2 v \right]. \end{aligned}$$

Le $P^{(3)}$, $Q^{(6)}$ e le espressioni che in questa formola moltiplicano

$$d^3 v du - dv d^3 u \quad \text{o} \quad d^2 v du - dv d^2 u,$$

sono chiaramente *semi-invarianti*, ma non sono *intrinseche*. Si potrà cercare di dedurre delle forme intrinseche, non lasciando arbitrarie le linee coordinate u, v , ma scegliendole in modo intrinseco, p. es. scegliendo a linee coordinate le linee di curvatura, o le asintotiche, ecc., ecc.

Non vi è dubbio che nella attuale ricerca come linee u, v si debbono scegliere le asintotiche; in questo modo si potranno trovare delle quantità intrinseche semi-invarianti o addirittura invarianti. Si tratterà poi di vedere quali termini nell'espressione generale di (7) si riducono alle quantità intrinseche invarianti così determinate. La mia attenzione fu rivolta a determinare una forma del terzo grado e di primo ordine intrinseca invariante, o semi-invariante, nella certezza di poter ottenere così l'equazione generale delle linee di DARBOUX-SEGRE. Riconobbi che a tal fine si doveva concentrare l'attenzione sulla frazione $\frac{A_1 d G_1 - 2 U_1 d A_2}{G_1}$, che compare in (7). Ciò spiega i metodi che noi seguiremo più avanti.

In questo lavoro poi da forme semi-invarianti dedurremo forme invarianti, troveremo gli stretti legami che passano fra le linee di DARBOUX-SEGRE, e il sistema che si ottiene derivando covariantivamente le D, D', D'' .

Vedremo pure altri legami con i primi termini dello sviluppo in serie di una coordinata cartesiana dei punti della nostra superficie; e infine gli ulteriori invarianti che otterremo sono posti in stretta relazione con le linee del WILCZYNSKI (*) così definite. Consideriamo il complesso lineare definito dalla tangente in O a una asintotica e dalle 4 tangenti consecutive; esso interseca il complesso lineare definito in modo analogo dall'altra asintotica uscente da O in una congruenza lineare le cui direttrici sono una posta nel piano tangente in O alla superficie, l'altra esce da O . Al variare di O sulla superficie queste due rette generano due congruenze, le cui sviluppabili si corrispondono. Diconsi linee di WILCZYNSKI sulla superficie le linee a cui corrispondono tali sviluppabili.

Insomma resterà risoluto in modo molteplice il problema di definire a meno di collineazioni una superficie mediante sistemi di linee o mediante forme differenziali del primo ordine e di terzo, od anche soltanto di secondo

(*) *Math. Annalen*, tomo 76, pag. 132 e *Transactions of the American Mathem. Society* (1907-1909) (Seconda Memoria). — Ebbi notizia di questi lavori dal prof. SEGRE dopo che i presenti calcoli erano già finiti; essi ci danno un elegante interpretazione geometrica dei risultati ottenuti.

grado; e si trovano stretti legami di queste forme con gli sviluppi in serie, con proprietà geometriche della superficie, e con le stesse forme di GAUSS.

Molti dei seguenti calcoli si semplificano assai per le superficie rigate. Noi per brevità le escluderemo dai calcoli seguenti insieme a quel loro caso particolare che è dato dalle superficie ad asintotiche coincidenti, cioè dalle sviluppabili.

UN INVARIANTE DEL PRIMO ORDINE E DI TERZO GRADO.

Nella frazione $\frac{A_1 d G_1 - 2 U_1 A_2}{G_1}$ che compare in (7) sostituiamo ad A_2 il suo valore; ricordando le (2), (3) si vede che tale frazione è uguale ad

$$\frac{A_1 d G_1 + 2 l \left\{ G_1 (D d u + D' d v) - A_1 (E d u + F d v) \right\}}{G_1} +$$

$$+ \frac{2 m \left\{ G_1 (D' d u + D'' d v) - A_1 (F d u + G d v) \right\}}{G_1},$$

che, per (1), si trova uguale a

$$\frac{A_1 d G_1 - 2 U_1 A_2}{G_1} = 2 \left\{ l (D d u + D' d v) + m (D' d u + D'' d v) \right\}. \quad (8)$$

Abbiamo così trasformato la nostra frazione in un'espressione libera da denominatori.

La (8) è intrinseca, perchè in virtù di (4), (5), (6) vale

$$2 \left[\frac{1}{R_n} d s d^2 s - \frac{d s^3}{T_g R_g} \right]. \quad (8)_{bis}$$

Cerchiamo di dedurne un'altra espressione intrinseca del solo primo ordine. Basterà sottrarre

$$d A_1 = d \left(\frac{G_1}{R_n} \right) = 2 \frac{d s d^2 s}{R_n} + d s^2 d \left(\frac{1}{R_n} \right).$$

Si trova così che l'espressione *intrinseca* del solo *primo* ordine e di *terzo* grado

$$\begin{aligned}
 -\Omega_1 = 2 \left\{ l(D du + D' dv) + m(D' du + D'' dv) \left\{ -dA_1 \right\} \right. \\
 \left. = -2 \frac{ds^3}{T_g R_g} - ds^2 d \left(\frac{1}{R_n} \right) \right\} \quad (9)
 \end{aligned}$$

La Ω_1 non è ancora la forma cercata. Si può definire questa espressione Ω_1 anche in altro modo molto semplice. Le D, D', D'' costituiscono un sistema covariante a due indici per la forma G_1 di GAUSS (*). Da esso, *derivando covariantivamente*, si deduce un sistema covariante a tre indici. Le equazioni di CODAZZI dimostrano che questo nuovo sistema è simmetrico nei tre indici; che cioè le derivate covarianti di D' rispetto alla u od alla v valgono rispettivamente le derivate covarianti della D rispetto alla v e della D'' rispetto alla u .

Ora $+\Omega_1$ è *precisamente quella forma* $b_{111} du^3 + 3b_{112} du^2 dv + 3b_{122} dudv^2 + b_{222} dv^3$, i cui coefficienti b_{ikl} sono le derivate covarianti dei coefficienti D, D', D'' della seconda forma fondamentale A_1 .

La (9) che ne dà il significato geometrico serve così come verifica al fatto evidente che la forma così determinata è intrinseca.

Per calcolare $-\Omega$, che ha significato intrinseco, possiamo scegliere ad arbitrio le linee coordinate; supponendo le u, v asintotiche, troviamo, osservando che $D = D'' = 0$ e che per le equazioni di GAUSS e CODAZZI è (indicando con K la curvatura totale)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial D'}{\partial u} = \left[\begin{array}{c} 1 \ 1 \\ 1 \end{array} \left\{ - \begin{array}{c} 1 \ 2 \\ 2 \end{array} \right\} \right] D'; \quad \frac{\partial D'}{\partial v} = \left[\begin{array}{c} 2 \ 2 \\ 2 \end{array} \left\{ - \begin{array}{c} 1 \ 2 \\ 1 \end{array} \right\} \right] D', \\
 \frac{\partial \log K}{\partial u} = -4 \left\{ \begin{array}{c} 1 \ 2 \\ 2 \end{array} \right\}; \quad \frac{\partial \log K}{\partial v} = -4 \left\{ \begin{array}{c} 1 \ 2 \\ 1 \end{array} \right\},
 \end{aligned}$$

che $-\Omega_1$ nelle nostre ipotesi si riduce a:

$$\begin{aligned}
 2 D' \left[\begin{array}{c} 2 \ 2 \\ 1 \end{array} \left\{ dv^3 + \begin{array}{c} 1 \ 1 \\ 2 \end{array} \left\{ du^3 \right\} \right\} - \frac{3}{4} (2 D' du dv) d \log K \right. \\
 \left. = 2 D' \left[\begin{array}{c} 2 \ 2 \\ 1 \end{array} \left\{ dv^3 + \begin{array}{c} 1 \ 1 \\ 2 \end{array} \left\{ du^3 \right\} \right\} - \frac{3}{4} A_1 d \log K \right. \right\} \quad (9)_{bis}
 \end{aligned}$$

(*) Si ponga $b_{11} = D; b_{12} = b_{21} = D'; b_{22} = D''$; indicando poi con b_{ik1} e b_{ik2} le derivate covarianti di b_{ik} rispetto alla u od alla v .

Ora $A_1 = \frac{ds^2}{R_n}$ e $\log K$ hanno significato intrinseco; altrettanto avverrà di

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= -\Omega_1 + \frac{3}{4} A_1 d \log K \\ &= -2 \frac{ds^3}{T_g R_g} - ds^2 d \left(\frac{1}{R_n} \right) + \frac{3}{4} \frac{1}{R_n} ds^2 d \log K, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

il quale, se le u, v sono asintotiche diventa:

$$2 D' \left[\begin{array}{c} 2 \quad 2 \\ 1 \end{array} \left\{ dv^3 + \right. \begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 2 \end{array} \left\{ du^3 \right. \right]. \quad (10)_{bis}$$

Ora S_1 è la *forma intrinseca cercata del primo ordine e di terzo grado*.

Non sarà male verificare direttamente dalla (10)_{bis} che S_1 è *intrinseca*; ci serviremo di un procedimento, che ci sarà utile anche nelle seguenti pagine. Nella (10)_{bis} le linee coordinate sono già fissate *in modo intrinseco*; non così i loro parametri u, v , a cui si possono sostituire due funzioni U della sola u e V della sola v . Basterà provare *che, mutando le u, v nelle U, V , la (10)_{bis} resta invariata*. Noi indicheremo con una lineetta sovrapposta i nuovi valori di D' , $\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 2 \end{array}$, $\begin{array}{c} 2 \quad 2 \\ 1 \end{array}$, ecc.; con X la $\frac{du}{dU}$, con Y la $\frac{dv}{dV}$, indicando poi con apici le derivate di X rispetto ad u (non rispetto ad U) e di Y rispetto a v (non rispetto a V). Poichè

$$\bar{D}' dU dV = D' du dv$$

è

$$\bar{D}' = D' X Y. \quad (11)$$

Similmente si trova facilmente:

$$\overline{\begin{array}{c} 2 \quad 2 \\ 1 \end{array}} = \begin{array}{c} 2 \quad 2 \\ 1 \end{array} \left\{ \frac{Y^2}{X} \right\}, \quad \overline{\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 2 \end{array}} = \begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 2 \end{array} \left\{ \frac{X^2}{Y} \right\}. \quad (11)_{bis}$$

Cosicchè, essendo $du = X dU$, $dv = Y dV$, è appunto:

$$2 D' \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 2 \end{array} \left\{ du^3 + \right. \begin{array}{c} 2 \quad 2 \\ 1 \end{array} \left\{ dv^3 \right. \right] = 2 \bar{D}' \left[\overline{\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 2 \end{array}} \left\{ dU^3 + \right. \overline{\begin{array}{c} 2 \quad 2 \\ 1 \end{array}} \left\{ dV^3 \right. \right].$$

Con questo stesso procedimento si verifica che anche

$$\overline{\overline{\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 2 \end{array}}} \left\{ \begin{array}{c} 2 \quad 2 \\ 1 \end{array} \right\} \quad (12)$$

ha significato intrinseco. Come dimostrasi facilmente, la (12) vale infatti $\rho \rho' \operatorname{sen}^3 \omega \sqrt{-K}$, dove K è la curvatura della superficie, le ρ, ρ' sono i raggi di curvatura geodetica oppure ordinaria (ciò che è lo stesso) delle asintotiche, ω è l'angolo delle asintotiche. Troviamo così che hanno significato intrinseco le

$$\Sigma_1 = \frac{1}{\rho \rho' \operatorname{sen}^3 \omega \sqrt{-K}} S_1 \quad \text{e} \quad B_1 = \frac{A_1}{\rho \rho' \operatorname{sen}^3 \omega \sqrt{-K}}. \quad (13)$$

Le (13) si riducono, se le u, v sono le asintotiche, a

$$\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right\} \left\{ \left[\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right\} \right] \right\} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right\} du dv. \quad (13)_{\text{bis}}$$

Ora (loc. cit.) nello studiare la forma (7) quando le u, v sono asintotiche, ho provato che $\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right\}$ e $\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right\}$ (calcolati in tale ipotesi) sono *invarianti*, mentre, come provano le (11), (11)_{bis}, *non hanno significato intrinseco*.

Coi risultati qui ottenuti possiamo trasformare il nostro risultato col teorema:

La forma Σ_1 invariante (per collineazioni) ha significato intrinseco (indipendente dalla particolare scelta delle linee coordinate).

Noi abbiamo ottenuto anche un altro risultato:

Alla seconda forma fondamentale di Gauss, che è semi-invariante, si può sostituire la forma proporzionale B_1 , che è addirittura invariante, pure avendo, come A_1 , significato intrinseco (Cfr. anche la forma C_1 a pag. 248).

Notiamo che B_1 è proporzionale allo Hessiano di Σ_1 ; insieme a Σ_1 se ne potrebbe studiare il covariante cubico (Q di CLEBSCH): cioè lo Iacobiano di Σ_1 e del suo Hessiano. Ciò equivale geometricamente a studiare le due terne duali di linee definite dal prof. SEGRE. Dal nostro punto di vista ciò equivale all'osservazione evidente che non soltanto la forma Σ_1 , ma anche l'espressione dedotta della prima delle (13)_{bis}, mutando il segno di dv^3 , è intrinseca invariante.

FORME INTRINSECHE INVARIANTI DEL PRIMO ORDINE E DI SECONDO GRADO.

Nella Σ_1 abbiamo trovato una forma invariante del primo ordine, ma di *terzo* grado; ma con gli stessi metodi con cui abbiamo verificato, partendo da (10)_{bis}, che S_1 è intrinseca, possiamo dedurre da (11) e (11)_{bis} nuove forme ancora del primo ordine, ma di *secondo* grado, che hanno pure significato *intrinseco* e sono invarianti; cosicchè alcune di esse potrebbero sotto molti aspetti sostituire la Σ_1 . Alcune di queste forme hanno poi anch'esse, come vedremo, qualche notevole significato geometrico. Per brevità le studiamo, supponendo le u, v asintotiche. Dalle (11) e (11)_{bis} si trae (*):

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[3]{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{vmatrix}}^2 = X^2 \sqrt[3]{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{vmatrix}}^2, \\ \frac{\partial \log \left[\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{vmatrix} \right]}{\partial U} = X \frac{\partial \log \left[\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{vmatrix} \right]}{\partial u} = \\ = X \frac{\partial \log \left[\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{vmatrix} \right]}{\partial u}, \\ \sqrt[3]{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{vmatrix}}^2 = X \sqrt[3]{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{vmatrix}}^2, \\ \text{ecc., ecc.} \end{aligned} \right\} \quad (11)_{\text{ter}}$$

Se ne deduce che le forme seguenti, tutte invarianti, sono intrinseche perchè non mutano cambiando u, v in U, V

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{vmatrix} \sqrt[3]{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{vmatrix}}^2 \left\{ d u^2 \pm \right\} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{vmatrix} \sqrt[3]{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{vmatrix}}^2 \left\{ d v^2 \right\}, \quad (14)$$

$$\left[\frac{\partial \log \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{vmatrix} \right)}{\partial u} \right]^2 d u^2 \pm \left[\frac{\partial \log \left(\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{vmatrix} \right)}{\partial v} \right]^2 d v^2, \quad (14)_{\text{bis}}$$

(*) Quelle delle seguenti espressioni in cui compaiono radici cubiche dovrebbero essere esaminate più da vicino per le superficie ad asintotiche complesse (a curvatura positiva).

$$\left. \begin{aligned} & \sqrt[3]{\left\{ \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array} \right\}^2} \frac{\partial \log \left(\left\{ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right\}^2 \right)}{\partial u} du^2 \pm \\ & \pm \sqrt[3]{\left\{ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right\}^2} \frac{\partial \log \left(\left\{ \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \right\} \right)^2}{\partial v} dv^2, \end{aligned} \right\} (14)_{ter}$$

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array} \right\} \frac{\partial \log \left(\left\{ \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \right\}^2 \right)}{\partial v} du^2 + \\ & + \left\{ \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right\} \frac{\partial \log \left(\left\{ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right\}^2 \right)}{\partial u} dv^2, \end{aligned} \right\} (14)_{quater}$$

ecc., ecc.

ALCUNI SVILUPPI IN SERIE PRELIMINARI.

Sia z una qualsiasi delle coordinate cartesiane di un punto della superficie; siano le u, v le asintotiche. Sarà, posto per brevità

$$\alpha = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ & 1 \end{array} \right\}; \quad \beta = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ & 2 \end{array} \right\}; \quad \gamma = \left\{ \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ & 1 \end{array} \right\}; \quad \varepsilon = \left\{ \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ & 2 \end{array} \right\}, \quad (15)$$

($\alpha'_v = \varepsilon'_u$)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \alpha \frac{\partial z}{\partial u} + \beta \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \gamma \frac{\partial z}{\partial u} + \varepsilon \frac{\partial z}{\partial v}. \quad (16)$$

Se $z = 0$ è l'equazione del piano tangente in un punto A della superficie, sarà in questo punto $\frac{\partial z}{\partial u} = 0, \frac{\partial z}{\partial v} = 0$. Detto ρ il valore di $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$ in A , potremo con successive derivazioni trarre dalle precedenti equazioni i valori delle derivate terze ecc., della z nel punto A , e dedurne così il seguente sviluppo in serie, dove (supposto $u = v = 0$ in A) sono scritti i termini fino al quarto grado incluso (*)

$$\left. \begin{aligned} \frac{z}{\rho} = & uv + \frac{1}{6} (\beta u^3 + 3\alpha u^2 v + 3\varepsilon u v^2 + \gamma v^3) + \\ & + \frac{1}{24} \left[2(\beta'_u + \alpha\beta) u^4 + 4(\alpha'_u + \beta'_v + \alpha^2 + \beta\varepsilon) u^3 v + \right. \\ & + 6(2\alpha'_v + \beta\gamma + \alpha\varepsilon) u^2 v^2 + \\ & \left. + 4(\varepsilon'_v + \gamma'_u + \varepsilon^2 + \alpha\gamma) u v^3 + 2(\gamma'_v + \varepsilon\gamma) v^4 \right] + \dots \end{aligned} \right\} (16)_{bis}$$

(*) Con β, γ , ecc. indico qui i loro valori nel punto A .

Scegliamo come asse delle x la tangente all'asintotica $v = 0$, come asse delle y la tangente all'asintotica $u = 0$ (questi assi non sono ortogonali). Comunque sia scelto l'asse delle z , sarà nel punto A :

$$\left. \begin{aligned} x = y = \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{E}; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \sqrt{G} \end{aligned} \right\} \text{ nel punto } A \text{ (per } u = v = 0). \quad (17)$$

Noi possiamo ora scegliere l'asse delle z , uscente da A , in guisa che nel punto A sia

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0 \quad \text{per } u = v = 0. \quad (17)_{\text{bis}}$$

[Se fossero già definite le x, y , ciò equivarrebbe a sostituire alle x, y due espressioni $x + hz, y + kz$ con h, k costanti].

Pensiamo ora le x, y come funzioni di u, v ; e viceversa le u, v come funzioni di x, y . Sarà identicamente:

$$y'_u u'_y + y'_v v'_y = 1 \quad y'_u u'_x + y'_v v'_x = 0 \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} x''_{uu} = \alpha x'_u + \beta x'_v \quad y''_{uu} = \alpha y'_u + \beta y'_v, \\ x''_{vv} = \gamma x'_u + \varepsilon x'_v \quad y''_{vv} = \gamma y'_u + \varepsilon y'_v. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Derivando le (18) rispetto x, y si trova:

$$\left. \begin{aligned} u'_y (y''_{uu} u'_x + y''_{uv} v'_x) + y'_u u''_{xy} + v'_y (y''_{uv} u'_x + y''_{vv} v'_x) + y'_v v''_{xy} = 0 \\ u'_y (y''_{uu} u'_y + y''_{uv} v'_y) + y'_u u''_{yy} + (y''_{uv} u'_y + y''_{vv} v'_y) v'_y + y'_v v''_{yy} = 0 \\ u'_x (y''_{uu} u'_x + y''_{uv} v'_x) + y'_u u''_{xx} + (y''_{uv} u'_x + y''_{vv} v'_x) v'_x + y'_v v''_{xx} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Per le (17), (17)_{bis} se ne deduce che in A

$$\left. \begin{aligned} v''_{xx} = -\frac{\beta}{E}; \quad v''_{yy} = -\frac{\varepsilon}{G}; \quad u''_{xx} = -\frac{\alpha}{E}; \quad u''_{yy} = -\frac{\gamma}{G} \\ v''_{xy} = u''_{xy} = 0 \quad (\text{per } u = v = 0). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Così pure, derivando la prima delle (20) rispetto ad y , si trova che nel punto A (in cui sono nulle $x'_v, y'_u, u''_{xy}, v''_{xy}$, ecc.)

$$v'''_{xyy} = -\frac{\varepsilon'_u}{G\sqrt{E}} \quad (\text{per } u = v = 0), \quad (21)_{\text{bis}}$$

Derivando la seconda delle (20) rispetto ad y , e l'ultima delle (20) rispetto alla x , o rispetto alla y , si trova successivamente:

$$\left. \begin{aligned} v'''_{yyy} &= \frac{1}{G\sqrt{G}} (2\varepsilon^2 - \varepsilon'_r); & v'''_{xxx} &= (2\alpha\beta - \beta'_u) \frac{1}{E\sqrt{E}}; \\ v'''_{xy} &= -\frac{1}{E\sqrt{G}} \beta'_r \quad \text{per } u=v=0. \end{aligned} \right\} \quad (21)_{\text{ter}}$$

Dalle (21) si deduce, trascurando i termini di ordine superiore al terzo, e indicando con α, β, \dots i valori di queste quantità nel punto $u=v=0$, che:

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{1}{\sqrt{G}} y - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{E} x^2 + \frac{\varepsilon}{G} y^2 \right) + \\ &+ \frac{1}{6} \left\{ (2\alpha\beta - \beta'_u) \left(\frac{x}{\sqrt{E}} \right)^3 - 3\beta'_v \frac{x^2 y}{E\sqrt{G}} - 3\varepsilon'_u \frac{x y^2}{G\sqrt{E}} + (2\varepsilon^2 - \varepsilon'_r) \left(\frac{y}{\sqrt{G}} \right)^3 \right\} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

E similmente:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{\sqrt{E}} x - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{E} x^2 + \frac{\gamma}{G} y^2 \right) + \\ &+ \frac{1}{6} \left\{ (2\alpha^2 - \alpha'_u) \left(\frac{x}{\sqrt{E}} \right)^3 - 3\alpha'_v \frac{y x^2}{E\sqrt{G}} - 3\gamma'_u \frac{y^2 x}{G\sqrt{E}} + (2\varepsilon\gamma - \gamma'_r) \left(\frac{y}{\sqrt{G}} \right)^3 \right\} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (22)_{\text{bis}}$$

Dalle (16), (18) si deduce il seguente sviluppo che non è forse privo di ogni interesse anche se considerato per sè stesso, e dove è posto

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{E}}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{G}}, \quad z = \frac{z}{\rho}.$$

(\sqrt{E}, \sqrt{G} indicano qui, come dianzi, i loro valori per $u=v=0$).

$$\left. \begin{aligned} z &= \xi \eta - \frac{1}{3} (\beta \xi^3 + \gamma \eta^3) + \\ &+ \left\{ \left(\frac{\alpha\beta}{6} - \frac{\beta'_u}{12} \right) \xi^4 - \frac{1}{3} (\beta'_v + \varepsilon\beta) \xi^3 \eta - \frac{1}{2} \varepsilon'_u \xi^2 \eta^2 - \frac{1}{3} (\gamma'_u + \alpha\gamma) \xi \eta^3 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\varepsilon\gamma}{6} - \frac{\gamma'_v}{12} \right) \eta^4 \right\} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (16)_{\text{ter}}$$

Nel seguito useremo entrambi gli sviluppi (16)_{bis} e (16)_{ter}.

LE LINEE DI DARBOUX-SEGRE E ALTRI SISTEMI ANALOGHI DI LINEE.

Se le u, v sono le asintotiche, le linee $\Sigma_1 = 0$ o, ciò che è lo stesso, le $S_1 = 0$ sono definite dalla $\beta du^3 + \gamma dv^3 = 0$; nel punto A la loro direzione è pertanto definita dalla $\beta \left(\frac{du}{dx}\right)^3 dx^3 + \gamma \left(\frac{dv}{dy}\right)^3 dy^3 = 0$, cioè dalla $\frac{\beta}{E\sqrt{E}} dx^3 + \frac{\gamma}{G\sqrt{G}} dy^3 = 0$, cioè dalla $\beta d\xi^3 + \gamma d\eta^3 = 0$. Confrontando coi teoremi di terzo grado in (13)_{bis} se ne deduce che tali direzioni sono appunto le direzioni di DARBOUX-SEGRE (che hanno definito tali direzioni appunto con coordinate cartesiane). Ciò, essendo vero per il carattere intrinseco della forma Σ_1 in ogni punto della superficie, ne deduciamo:

La $\Sigma_1 = 0$, o, ciò che è lo stesso, la $S_1 = 0$ è la equazione delle linee di Darboux-Segre.

Questo teorema è così importante per noi che vogliamo ritrovarlo per altra via. Siano ancora scelti come assi delle x, y le tangenti alle asintotiche passanti per un punto A della superficie considerata; e l'asse delle z sia la normale alla superficie in A . Avremo, se ω è l'angolo delle asintotiche in A , a meno di infinitesimi del quart'ordine

$$z = 2a_{12}xy + (b_{111}x^3 + 3b_{112}x^2y + 3b_{122}xy^2 + b_{222}y^3) + \dots$$

Assumendo addirittura le x, y come coordinate curvilinee dei punti della superficie (supposto cioè $u = x, v = y$), le forme di GAUSS diventano (posto con MONGE $p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}, r = z''_{xx}, s = z''_{xy}, t = z''_{yy}$)

$$G_1 = ds^2 = (1 + p^2) dx^2 + 2(pq + \cos \omega) dx dy + (1 + q^2) dy^2,$$

$$A_1 = \frac{\text{sen } \omega}{\sqrt{\text{sen}^2 \omega + p^2 + q^2 - 2pq \cos \omega}} (r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2).$$

E i simboli $\left\{ \begin{matrix} i & k \\ & l \end{matrix} \right\}$ sono tutti nulli nell'origine A . Se noi usiamo la espressione di S_1 valida nel caso più generale, troviamo più facilmente che,

nelle attuali ipotesi, essa nel punto A diventa :

$$\begin{aligned}
 & - (dx^2 dD + 2 dx dy dD' + dy^2 dD'') + \\
 & + \frac{3}{4} \operatorname{sen} \omega \frac{4 a_{12} dx dy}{\operatorname{sen} \omega} \times \\
 & \times d \log \frac{36 (b_{111} x + b_{112} y) (b_{221} x + b_{222} y) - \left[2 a_{12} + 6 (b_{112} x + b_{221} y) \right]^2 + \dots}{\left[\operatorname{sen}^2 \omega + 4 a_{12}^2 (x^2 + y^2) - 8 \cos \omega a_{12} x y + \dots \right]} \\
 & = - 6 (b_{111} dx^3 + 3 b_{112} dx^2 dy + 3 b_{221} dx dy^2 + b_{222} dy^3) \\
 & \quad + \frac{3}{4} (4 a_{12} dx dy) \frac{2 (2 a_{12}) 6 (b_{112} x + b_{221} y)}{4 a_{12}^2} + \dots \\
 & = - 6 (b_{111} dx^3 + b_{222} dy^3) + \dots
 \end{aligned}$$

dove i termini trascurati sono nulli per $x = y = 0$. Dunque la $S_1 = 0$ nel punto generico A definisce appunto le direzioni determinate da DARBOUX e SEGRE.

Lo sviluppo (16)_{bis} serve ad illustrare geometricamente anche una delle forme di secondo grado, il cui studio si potrebbe in parte sostituire a quello della Σ_1 : e precisamente la (14)_{quater}. Il DARBOUX (loc. cit.) ha studiato come una proiettività trasforma lo sviluppo della z in serie ordinata secondo le potenze di x, y ; applicando il suo risultato allo sviluppo (16)_{bis} si riconosce che si può trasformare la superficie considerata in una superficie collineare, per cui l'analogo sviluppo in serie si deduce da (16)_{bis}, aggiungendo i termini

$$\begin{aligned}
 & - xy \left(\frac{\beta}{E\sqrt{E}} x^2 h + \frac{\gamma}{G\sqrt{G}} y^2 k \right) + \\
 & + \frac{1}{3} \left(\frac{\beta}{E\sqrt{E}} x^3 + \frac{\gamma}{G\sqrt{G}} y^3 \right) (kx + hy) + lx^2 y^2 + \dots
 \end{aligned}$$

dove h, k, l sono costanti arbitrarie. Ce ne possiamo valere con DARBOUX per annullare i termini in $x^4, x^2 y^2, y^4$. Lo sviluppo (16)_{bis} si trasforma così in

$$\begin{aligned}
 z & = \xi \eta - \frac{1}{3} (\beta \xi^3 + \gamma \eta^3) \\
 & - \frac{1}{6} \xi \eta \left(\gamma \frac{\partial \log [\gamma^2 \beta]}{\partial u} \eta^2 + \beta \frac{\partial \log [\beta^2 \gamma]}{\partial v} \xi^2 \right) + \dots
 \end{aligned}$$

Le direzioni definite in A dai termini del quart'ordine sono perciò le direzioni $\xi = 0$ ed $\eta = \text{cost.}$ delle asintotiche uscenti da A e le due direzioni definite dalla forma (14)_{quater}.

Nel nostro studio *l'esame dei termini di terzo ordine nello sviluppo della z in serie di potenze delle x, y , e lo studio analogo dei termini del quart'ordine portano a considerare gli stessi invarianti* $\beta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{vmatrix}$, $\gamma = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{vmatrix}$.

Mentre *i termini del terzo ordine conducono alla considerazione delle linee di Darboux e Segre, i termini del quart'ordine conducono all'esame delle linee definite dall'annullarsi della forma intrinseca invariante* (14)_{quater}.

Per la illustrazione geometrica di altri invarianti bisognerebbe esaminare nello sviluppo in serie anche i termini di ordine superiore al quarto; noi non lo facciamo perchè le linee di WILCZYNSKI (nella definizione delle quali si tiene appunto conto di tali termini) ci permettono già qualche notevole interpretazione geometrica dei nostri seguenti risultati.

NUOVI INVARIANTI INTRINSECI DI UNA SUPERFICIE.

LE DUE FORME DIFFERENZIALI INDIVIDUANTI UNA SUPERFICIE A MENO DI COLLINEAZIONI.

Nè la forma Σ_1 , nè le forme (14) bastano a caratterizzare a meno di una collineazione una superficie. Nella mia Nota cit. si è visto infatti che due superficie in corrispondenza biunivoca sono collineari allora e allora soltanto che, riferite entrambe alle asintotiche (necessariamente omologhe nella supposta corrispondenza se le superficie sono collineari), le espressioni

$$\left. \begin{aligned} \beta, \gamma, \frac{1}{2} A = \alpha'_u - \frac{1}{2} z^2 - \beta \varepsilon, \quad \frac{1}{2} B = \varepsilon'_r - \frac{1}{2} \varepsilon^2 - \alpha \gamma \\ \left[\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{vmatrix}, \quad \beta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{vmatrix}, \quad \gamma = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{vmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & \end{vmatrix} \right] \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

calcolate per l'elemento lineare di una sono uguali alle quantità omologhe per l'altra. E tali quantità sono legate tra loro dalle sole relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} A'_r - \frac{\partial^2}{\partial v^2} \beta &= -2 \beta \gamma'_u - \beta'_u \gamma, \\ \frac{1}{2} B'_u - \frac{\partial^2}{\partial u^2} \gamma &= -2 \gamma \beta'_r - \gamma'_r \beta; \end{aligned}$$

cosicchè, anche se è data Σ_1 , se cioè sono date le β, γ , restano ancora arbitrarii i valori di A lungo un'asintotica $v = \text{cost.}$, e quelli di B lungo una asintotica $u = \text{cost.}$ (Cosicchè l'essere uguali in punti omologhi le β, γ non basta perchè la corrispondenza supposta sia una collineazione; per un'interpretazione geometrica di questo fatto cfr. l'ultimo teor. della mia Nota citata).

Alle A, B sostituiamo qui le

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{1}{2} A - \beta'_v = \alpha'_u - \beta'_r - \frac{1}{2} \alpha^2 - \beta \varepsilon, \\ M &= \frac{1}{2} B - \gamma'_u = \varepsilon'_v - \gamma'_u - \frac{1}{2} \varepsilon^2 - \gamma \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (23)_{\text{bis}}$$

cosicchè:

$$L'_v = -2\beta \gamma'_u - \gamma \beta'_u; \quad M'_u = -2\gamma \beta'_r - \beta \gamma'_v. \quad (24)$$

Ciò permette di scrivere in modo più semplice ciò che avviene quando alle u, v sostituiamo le U, V (cfr. più sopra per le notazioni; è p. es. $X = \frac{du}{dU}, X' = \frac{dX}{du}, X'' = \frac{d^2 X}{du^2}$, ecc.).

Troviamo, accanto alle (11)_{bis} che qui per chiarezza riscriviamo:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\alpha} &= \alpha X + X'; \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon Y + Y'; \quad \bar{\beta} = \beta \frac{X^2}{Y}; \quad \bar{\gamma} = \gamma \frac{Y^2}{X}, \\ \bar{L} &= X^2 L + \left(X X'' - \frac{1}{2} X'^2 \right); \quad \bar{M} = \gamma^2 M + \left(Y Y'' - \frac{1}{2} Y'^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (11)_{\text{ter}}$$

Formole più complicate si otterrebbero per le \bar{A}, \bar{B} ; ciò che basta a giustificare la considerazione delle L, M . Ma le (11)_{ter} ci dicono che neanche le L, M hanno carattere intrinseco, pur essendo invarianti.

Per porre rimedio a questo inconveniente, cerchiamo di costruire una espressione costruita con le β, γ ; la quale si trasformi come L . Se noi osserviamo che il comportamento di L dipende specialmente da ciò che tra i termini di L vi è l'espressione $\alpha'_u - \frac{1}{2} \alpha^2$, cominceremo a cercare un'espressione φ dipendente dalle sole β, γ ; la quale si trasformi come α .

Troviamo potersi porre

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{\partial \log(\beta \gamma)}{\partial u}, \quad \text{oppure} \quad \varphi = \frac{\partial \log \frac{1}{\gamma}}{\partial u}, \quad \text{oppure} \quad \varphi = \frac{\partial \log \sqrt{\beta}}{\partial u}, \\ \text{oppure} \quad \varphi &= \frac{\partial \log \sqrt[3]{\beta^2 \gamma}}{\partial u}, \quad \text{oppure, ecc.} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Scelta φ , diremo ψ la quantità che se ne ottiene scambiando β con γ ed u con v . È facile riconoscere che, comunque sia scelto φ tra i modi succitati, vale la

$$\bar{\varphi} = X\varphi + X' \quad \text{e analogamente} \quad \bar{\psi} = Y\psi + Y'. \quad (11)_{\text{quater}}$$

Così p. es., se adottiamo la prima delle (25), si trova:

$$\bar{\varphi} = \frac{\partial \log(\bar{\beta}\bar{\gamma})}{\partial U} = X \frac{\partial \log(\beta\gamma)}{\partial u} = X \left(\frac{\partial \log(\beta\gamma)}{\partial u} \right) + X'$$

e così via (*).

Avremo poi

$$\bar{\varphi}'_{\sigma} = X \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u} = X \left[X' \varphi + X \frac{\partial \varphi}{\partial u} + X'' \right],$$

$$\bar{\varphi}^2 = X^2 \varphi^2 + 2 X X' \varphi + X'^2,$$

$$\bar{\varphi}'_{\sigma} - \frac{1}{2} \bar{\varphi}^2 = X^2 \left[\varphi'_u - \frac{1}{2} \varphi^2 \right] + \left(X X'' - \frac{1}{2} X'^2 \right).$$

Posto pertanto

$$P = L - \varphi'_u + \frac{1}{2} \varphi^2, \quad Q = M - \psi'_v + \frac{1}{2} \psi^2, \quad (26)$$

avremo, ricordando di nuovo le più importanti delle (11),

$$\left. \begin{aligned} \bar{P} &= X^2 P; & \bar{Q} &= Y^2 Q; \\ \bar{\beta} &= \beta \frac{X^2}{Y}; & \bar{\gamma} &= \gamma \frac{Y^2}{X}; & \bar{\alpha} &= \alpha X + X'; & \bar{\varepsilon} &= \varepsilon Y + Y'. \end{aligned} \right\} (11)_5$$

Le prime di queste formole dimostrano che

$$F_1 = P du^2 + Q dv^2 \quad [\text{oppure} \quad \Phi_1 = -P du^2 + Q dv^2] \quad (27)$$

è una forma invariante (perchè costruita con le β, γ, L, M) a significato intrinseco.

Date le due forme Σ_1 ed F_1 , la superficie è definita a meno di una colineazione (perchè risultano determinate le β, γ, L, M).

(*) In generale, se θ è un'espressione tale che $\bar{\theta} = \theta X Y^k$ (con $k = \text{cost.}$), allora $\frac{\partial \log \theta}{\partial u}$ si trasforma come α , e si può porre uguale alla φ .

Notiamo anzi che alla forma Σ_1 si può sostituire una delle forme di secondo grado, di cui abbiamo già discorso nelle pagine precedenti, e che la forma F_1 si può scegliere in modo molteplice, corrispondentemente all'indeterminazione che noi abbiamo lasciato alle φ, ψ .

Invece delle forme Σ_1 e F_1 potremmo assegnare la forma Σ_1 e gli invarianti di Σ_1 ed F_1 .

Potremmo cioè dare la forma Σ_1 , il quoziente del discriminante di Σ_1 per il cubo del discriminante di F_1 (che a meno di un fattore numerico vale $\frac{\beta^6 \gamma^6}{P^3 Q^3}$) e infine $\frac{\beta^4 \gamma^2}{P^3} + \frac{\gamma^4 \beta^2}{Q^3}$, che è pure un invariante comune delle due forme (*).

Oppure potremmo assegnare (per determinare a meno di una collineazione la nostra superficie) la forma Σ_1 e gli invarianti che la forma F_2 ha con una delle forme (14) del secondo grado.

P. es. potremmo dare la Σ_1 e gli invarianti intrinseci

$$I_1 = \frac{P}{\beta^3 \sqrt{\beta} \gamma^2}, \quad I_2 = \frac{Q}{\gamma^3 \sqrt{\gamma} \beta^2}, \quad (28)$$

che si deducono dal confronto di F_1 con la prima delle forme (14).

(*) Come invarianti del sistema di due forme

$$\begin{aligned} f &= a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 \\ \varphi &= \alpha_0 x_1^3 + 3 \alpha_1 x_1^2 x_2 + 3 \alpha_2 x_1 x_2^2 + \alpha_3 x_2^3 \end{aligned}$$

(di cui una quadratica, una cubica) possiamo (cfr. CLEBSCH, *Theorie der algebraischen Formen*, p. 209) scegliere i seguenti:

α) L'invariante $\alpha_0 (\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2^2) - \alpha_1 (\alpha_0 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_2) + \alpha_2 (\alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1^2)$ che nel caso nostro è nullo, perchè le direzioni individuate da $F_1 = 0$ dividono armonicamente le asintotiche, le cui direzioni annullano lo Hessiano di Σ_1 ;

β) il quoziente del discriminante di φ per il cubo del determinante della f ;

γ) il quoziente, ottenuto dividendo per il cubo del discriminante di f l'altro invariante simultaneo

$$\begin{aligned} &\alpha_0 (\alpha_0 \alpha_3 - 2 \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1)^2 - \\ &\quad - 2 \alpha_1 (\alpha_0 \alpha_3 - 2 \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1) (\alpha_0 \alpha_2 - 2 \alpha_1 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_0) \\ &\quad + \alpha_2 (\alpha_0 \alpha_3 - 2 \alpha_1 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_0)^2. \end{aligned}$$

Questo ultimo quoziente è appunto l'invariante ora citato nel testo.

Supposto che le linee coordinate siano le asintotiche (cioè le linee che annullano lo Hessiano di Σ_1), le I_1 , I_2 devono soddisfare alle seguenti equazioni [(cfr. le (24) e (26)]:

$$\left. \begin{aligned} (\beta \sqrt[3]{\beta \gamma^2} I_1)'_v + \varphi''_{uv} - \varphi \varphi'_v + 2\beta \gamma'_u + \gamma \beta'_u &= 0, \\ (\gamma \sqrt[3]{\gamma \beta^2} I_2)'_u + \psi''_{uv} - \psi \psi'_u + 2\gamma \beta'_v + \beta \gamma'_v &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (24)_{\text{bis}}$$

La forma F_1 , oltre a queste equazioni cui soddisfano $P = \beta \sqrt[3]{\beta \gamma^2} I_1$ e $Q = \gamma \sqrt[3]{\gamma \beta^2} I_2$, soddisfa, quando sia data Σ_1 , a questa unica condizione di natura algebrica, che cioè le linee definite dalla $F_1 = 0$ dividono armonicamente le linee che annullano lo Hessiano di Σ_1 (le asintotiche) (cfr. la precedente Nota a piè di pagina).

I RISULTATI DI WILCZYNSKI.

Questi risultati, come abbiamo già detto, ci servono per illustrare geometricamente la forma F_1 , o, per meglio dire, un'altra forma intrinseca invariante, che è una combinazione lineare della F_1 e delle altre forme di secondo ordine da noi già determinate. Abbiamo già visto come alla forma A_1 di GAUSS si poteva sostituire la forma B_1 invariante intrinseca; potremmo trovare in molti altri modi una forma invariante intrinseca proporzionale ad A_1 ; per es. quella forma C_1 che, se le u, v sono le asintotiche, si riduce a

$$C_1 = \frac{\partial^2 \log \frac{\beta}{\gamma}}{\partial u \partial v} du dv.$$

Ora osserviamo che le (16), posto $z = \rho t$, dove

$$\frac{\partial \log \rho}{\partial u} = \frac{1}{2} \alpha, \quad \frac{\partial \log \rho}{\partial v} = \frac{1}{2} \varepsilon$$

(ricordo che $\alpha'_v = \varepsilon'_u$) diventano per (23)

$$\begin{aligned} t''_{uu} &= \beta t'_v - \frac{1}{4} A t, \\ t''_{vv} &= \gamma t'_u - \frac{1}{4} B t, \end{aligned}$$

che, con cambiamento di sole notazioni, coincidono con le equazioni date da WILCZYNSKI. Le linee di WILCZYNSKI sono date perciò (cfr. loc. cit.) dall'equazione:

$$\frac{\beta^2 \gamma^2}{4} \left\{ - \left[\frac{1}{4} A - \frac{1}{2} \beta'_v + \frac{1}{2} (\log \gamma)''_{uu} + \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma'_u}{\gamma} \right)^2 \right] du^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \log \frac{\beta}{\gamma}}{\partial u \partial v} du dv + \left[\frac{1}{4} B - \frac{1}{2} \gamma'_u + \frac{1}{2} (\log \beta)''_{vv} + \frac{1}{4} \left(\frac{\beta'_v}{\beta} \right)^2 \right] dv^2 \right\} = 0.$$

Il primo membro resta moltiplicato per $X^2 Y^2$, se noi mutiamo le u, v rispettivamente nelle U, V ; esso si riduce perciò ad una forma intrinseca invariante, quando si sopprima il fattore $\frac{\beta^2 \gamma^2}{8}$. Si trova così la forma intrinseca invariante

$$W_1 = \Phi_1 + C_1 = -P du^2 + Q dv^2 + \frac{\partial^2 \log \frac{\beta}{\gamma}}{\partial u \partial v} du dv,$$

che, uguagliata a zero, definisce le linee di WILCZYNSKI.

In questo calcolo le P, Q sono rimaste determinate, ponendo $\varphi = \frac{\partial \log \frac{1}{\gamma}}{\partial u}$,
 $\psi = \frac{\partial \log \frac{1}{\beta}}{\partial v}$.

ALCUNI PROBLEMI GEOMETRICI.

Espongo ora alcuni dei problemi, che si possono risolvere per mezzo dei precedenti risultati: si tratta dei problemi, che sono stati sostanzialmente l'origine della presente ricerca. Per alcuni mi accontento di dare un breve cenno. Voglio cercare di determinare una superficie a meno di collineazioni per mezzo non già di forme differenziali, ma dando soltanto dei sistemi di linee.

Esaminerò soltanto i casi più semplici: di questo il più notevole è quello che considereremo per ultimo.

È intanto evidente che una superficie non è definita (a meno di una collineazione) dalla sola conoscenza delle linee di DARBOUX-SEGRE e neanche dalla forma Σ_1 ; perchè, assunte a linee coordinate quelle che ne annullano lo Hessiano (le asintotiche) manca ancora alla completa definizione proiettiva della superficie la conoscenza della forma $P du^2 + Q dv^2$, o, ciò che è lo stesso, degli invarianti I_1, I_2 .

Possiamo però chiederci se basta la conoscenza delle sole linee di DARBOUX-SEGRE e di tali invarianti. In tal caso Σ_1 è noto soltanto a meno di un fattore finito; cosicchè, assunte come linee coordinate le asintotiche, saranno noti I_1, I_2 , mentre si conoscono soltanto due quantità b, c proporzionali a β, γ . Potremo fissare le I_1, I_2 in modo molto simmetrico, supponendo $\varphi = \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial u}, \psi = \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial v}$; e moltiplicare le b, c per un tale fattore che risulti $b c = 1$. Posto $\beta = \lambda b, \gamma = \lambda c$, bisognerà determinare il fattore λ in guisa che siano soddisfatte le (24)_{bis} che diventano l'una

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} (I_1 \lambda^2 \sqrt[3]{b^2}) + \frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial v} \log (\lambda^2) - \frac{\partial \log (\lambda^2)}{\partial u} \frac{\partial^2 \log (\lambda^2)}{\partial u \partial v} + 3 \lambda \lambda' + \\ + \lambda^2 \frac{\partial \log c}{\partial u} = 0 \end{aligned}$$

e l'altra ciò che se ne deduce scambiando u con v, b con c, I_1 con I_2 .

Come condizione di integrabilità si trova:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial v^2} (I_1 \lambda^2 \sqrt[3]{b^2}) - \frac{\partial^2}{\partial u^2} (I_2 \lambda^2 \sqrt[3]{c^2}) + \lambda^2 \left[\log \frac{b}{c} \right]''_{uv} + \\ + 2 \frac{\partial \log \lambda}{\partial u} \frac{\partial (I_2 \sqrt[3]{c^2} \lambda^2)}{\partial u} - 2 \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} \frac{\partial (I_1 \sqrt[3]{b^2} \lambda^2)}{\partial v} = 0. \end{aligned}$$

Si ha così un sistema di equazioni da cui si potrebbero dedurre le derivate terze di λ espresse mediante le derivate di ordine inferiore. Questo sistema di equazioni si può studiare con metodi noti, ma lunghi. Ma anche senza eseguire tutti i calcoli possiamo affermare che: *Date le linee di Darboux-Segre e i due invarianti, la superficie è definita tutt'al più a meno di cinque costanti arbitrarie* (i valori iniziali di λ e delle sue derivate prime e seconde legate dalla precedente equazione).

Ad un problema analogo si giunge se si cerca di determinare una su-

perficie assegnandone le asintotiche e la forma W_1 . Ciò equivale infatti ad

assegnare P, Q (dove $\varphi = \frac{\partial \log \frac{1}{\gamma}}{\partial u}$, $\psi = \frac{\partial \log \frac{1}{\beta}}{\partial v}$) e $\frac{\partial^2 \log \frac{\beta}{\gamma}}{\partial u \partial v}$.

Le condizioni (24)_{bis} diventano:

$$\left. \begin{aligned} P'_v - \frac{\partial^3 \log \gamma}{\partial u^2 \partial v} - \frac{\partial \log \gamma}{\partial u} \frac{\partial^2 \log \gamma}{\partial u \partial v} + 2\beta \gamma'_u + \gamma \beta'_u &= 0 \\ Q'_u - \frac{\partial^3 \log \beta}{\partial u \partial v^2} - \frac{\partial \log \beta}{\partial v} \frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u \partial v} + 2\gamma \beta'_v + \beta \gamma'_v &= 0. \end{aligned} \right\} (24)_{ter}$$

Essendo dato $\frac{\partial^2 \log \frac{\beta}{\gamma}}{\partial u \partial v}$, possiamo scrivere $\beta = \lambda b U$, $\gamma = \lambda c V$, dove b, c sono quantità note, λ, U, V funzioni da determinarsi, di cui però U è funzione della sola u , V funzione della sola v . Lo studio di tale sistema *non sembra* breve.

Ancora più complicata sembra la ricerca di tutte le superficie, per cui è soltanto data la forma di WILCZYNSKI.

Ma più notevole geometricamente e più semplice è il problema seguente:

Trovare una superficie, di cui sono assegnate sia le linee di Darboux-Segre che quelle di Wilczynski.

Al solito, se sono date le linee di DARBOUX-SEGRE, sono determinate anche le asintotiche. Assunte queste come linee coordinate u, v , la conoscenza delle linee di DARBOUX-SEGRE determina Σ_1 a meno di un fattore,

cioè determina $\frac{\beta}{\gamma}$, e in particolare $\frac{\partial^2 \log \frac{\beta}{\gamma}}{\partial u \partial v}$. La conoscenza delle linee di WILCZYNSKI determina la forma W_1 a meno di un fattore; ma poichè, come ora vedemmo, è noto il coefficiente di $du dv$ di tale forma, tutta la forma

di WILCZYNSKI risulterà determinata (a meno che sia $\frac{\partial^2 \log \frac{\beta}{\gamma}}{\partial u \partial v} = 0$; caso che

si deve esaminare a parte). Nel caso generale risulteranno perciò determinate le P, Q . Basterà perciò sostituire in (24)_{ter} al posto delle β, γ le $\lambda b, \lambda c$

(dove λ è incognito, b, c sono quantità note) per ridurre il nostro problema alla ricerca della funzione λ , che deve così soddisfare a due equazioni differenziali del terz'ordine, da cui, come prima condizione di integrabilità, si deduce tosto un'equazione del secondo ordine. Anche senza completare i calcoli (di cui si sta occupando uno studente della nostra Università) risulta ben chiaro che λ (e quindi anche la nostra superficie) risulterà determinato tutt'al più a meno di $h \leq 5$ costanti arbitrarie.

Sopra un problema al contorno nella teoria delle funzioni di variabile complessa.

(Di A. SIGNORINI, a Padova.)

Sia S un'area semplicemente connessa del piano complesso

$$z = x + i y,$$

C il suo contorno.

Fissati ad arbitrio $2p + 2$ punti sopra C (p finito, ≥ 0) chiamiamo

$$s_1 \dots s_l \dots s_{2p+2}$$

i $2p + 2$ archi corrispondentemente individuati sulla curva (quando si escluda la considerazione di archi parzialmente sovrapposti) sottintendendo che l'ordine di successione stabilito dagli indici coincida con quello che viene individuato dal verso positivo di C .

Se $p > 0$, non esiste in generale una funzione della z , $w(z)$, regolare dentro S , la cui parte reale e la cui parte immaginaria si riducano rispettivamente sopra gli s_{2m} e gli s_{2m-1} ($m = 1, 2, \dots, p+1$) a funzioni dell'arco di C quantitativamente del tutto arbitrarie: neppure se da un lato si assoggettino tali funzioni a restrizioni qualitative tendenti ad assicurare la regolarità di $w(z)$, e dall'altro non si escluda che la $w(z)$ possa presentare su C qualche singolarità di tipo abbastanza generale. Ciò è stato avvertito per la prima volta dallo SCHWARZ (*), nella sua recensione della Memoria del VOLTERRA (**), nella quale è effettuata la determinazione della nostra $w(z)$ nel caso $p = 0$.

Mi propongo di stabilire in questa Memoria, subordinatamente ad opportune restrizioni qualitative per le funzioni che intervengono nella questione, le

(*) V. *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, Bd. XV (Berlin, 1886), pagg. 361-365.

(**) VOLTERRA, *Sopra alcune condizioni caratteristiche per le funzioni di variabile complessa* [Questi *Annali*, Tomo XI, Serie 2.^a (1883), pagg. 1-55], §§ IV, V.

condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza della $w(z)$, e insieme (la sua unicità e) un gruppo di formole, ciascuna delle quali è atta a rappresentarla.

Il procedimento cui mi atterrò fornisce anche una nuova dimostrazione del teorema di KOEBE (*) sull'esistenza di una funzione di x e y , armonica in S , che sugli s_{2m} prenda valori prefissati e sugli s_{2m-1} abbia derivata normale pure prefissata: e al tempo stesso permette la costruzione effettiva di una tale funzione. Ulteriormente, esso si presta pure a stabilire le condizioni necessarie e sufficienti affinché non solo la $w(z)$, ma anche la sua derivata, siano regolari in tutto S (contorno incluso).

Per semplicità supporrò sostituita, mediante una rappresentazione conforme, l'area generica S con un semipiano. Risolta la questione in questo caso, il trasporto al caso generale si effettua senza alcuna modificazione sostanziale degli enunciati.

ENUNCIATI.

1. Adottiamo la notazione

$$W(z) = U(x, y) + i V(x, y) \quad (U, V \text{ reali})$$

per rappresentare una qualunque funzione della variabile complessa z , che sia monodroma, finita e continua, insieme alla sua derivata, in ogni punto interno al semipiano positivo: e generalmente finita e continua anche sull'asse reale, ove, al più, possa presentare degli infiniti d'ordine < 1 corrispondentemente a un certo numero (finito) di valori x_* (tutti quanti finiti) della x .

Conformemente a quanto abbiamo fatto più avanti, fissati ad arbitrio $2p + 2$ punti sull'asse reale, diciamo

$$e_1 \dots e_l \dots e_{2p+2}$$

le loro ascisse, intendendo che sia

$$e_1 < \dots < e_l < \dots < e_{2p+2},$$

e rappresentiamo con s_l ($l = 1, 2, \dots, 2p + 2$) l'intervallo (e_l, e_{l+1}) oppure l'in-

(*) KOEBE, *Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven* [Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 138 (1910), pagg. 192-253], § 4.

sieme dei due intervalli (e_{2p+2}, ∞) e $(-\infty, e_1)$ secondochè $l = 2p + 2$ oppure $l = 2p + 2$.

Supposti i valori delle e_i tutti quanti finiti, sia $W^*(z)$ una qualunque combinazione lineare a coefficienti reali delle $p + 1$ funzioni

$$W_s(z) = \frac{z^s}{\prod_1^{2p+2} \sqrt{z - e_i}} \quad (s = 0, 1, \dots, p),$$

che intenderemo precisate anche in segno in base alla convenzione, da mantenersi costantemente in seguito, che al radicale $\sqrt{z - e_i}$, per ogni valore di i , sia attribuita per z reale e $> e_i$ la sua determinazione positiva.

Siano infine

$$\begin{aligned} & u_2(x) \dots u_{2m}(x) \dots u_{2p+2}(x) \\ e & v_1(x) \dots v_{2m-1}(x) \dots v_{2p+1}(x) \end{aligned}$$

$2p + 2$ funzioni (reali) di x definite rispettivamente in

$$\begin{aligned} & s_2 \dots s_{2m} \dots s_{2p+2} \\ e \text{ in} & s_1 \dots s_{2m-1} \dots s_{2p+1} \end{aligned}$$

colla condizione che:

1.° la $u_{2p+2}(x)$ all'infinito sia infinitesima di ordine non inferiore a qualche numero positivo;

2.° tanto le funzioni in questione, che le loro derivate prime, siano, nei relativi intervalli s_{2m} e s_{2m-1} , generalmente finite e continue, e, ove presentino delle singolarità, queste non siano altro che delle discontinuità di prima specie.

Vale allora il seguente

Teorema I. *Se esiste una $W(z)$,*

$$W_{uv}(z) = U_{uv} + i V_{uv},$$

che soddisfi le eguaglianze (*)

$$\left. \begin{aligned} U_{uv}(x) &= u_{2m}(x) && \text{in } s_{2m} \\ V_{uv}(x) &= v_{2m-1}(x) && \text{in } s_{2m-1} \end{aligned} \right\} \quad (m = 1, 2, \dots, p + 1), \quad (x)$$

(*) Naturalmente va fatta eccezione per gli eventuali punti di discontinuità delle u_{2m} e v_{2m-1} .

essa è necessariamente rappresentabile mediante la formola

$$W_{uv}(z) = \frac{1}{\pi i W^*(z)} \left\{ \sum_{s=0}^{p+1} \int_{s_{2m}} \frac{u_{2m}(x') W^*(x') dx'}{x' - z} + \right. \\ \left. + i \sum_{s=0}^{p+1} \int_{s_{2m-1}} \frac{v_{2m-1}(x') W^*(x') dx'}{x' - z} \right\}, \quad (I)$$

qualunque sia la $W^*(z)$ considerata. Condizione necessaria e sufficiente per la sua effettiva esistenza è che le $u_{2m}(x)$ e $v_{2m-1}(x)$ siano legate dalle p relazioni, mutuamente indipendenti,

$$\sum_{s=0}^{p+1} \int_{s_{2m}} u_{2m}(x') W_s(x') dx' + \\ + i \sum_{s=0}^{p+1} \int_{s_{2m-1}} v_{2m-1}(x') W_s(x') dx' = 0 \quad (s = 0, 1, \dots, p-1). \quad (II)$$

Subordinatamente a ciò, la $W_{uv}(z)$ risulta regolare in tutto il semipiano positivo, fatta solo eccezione per gli eventuali punti di discontinuità delle u_{2m} e v_{2m-1} , ove presenta degli infiniti logaritmici.

È appena necessario avvertire che questo teorema, e le sue ulteriori conseguenze, valgono, senza alcuna modificazione sostanziale, anche quando non si voglia supporre fin da principio che i valori delle x e e , siano tutti finiti, che nel punto all'infinito sia assegnato il valore della parte reale di $W_{uv}(z)$ (invece che quello della sua parte immaginaria) e che la u_{2p+2} all'infinito sia zero.

2. In base al teor. I, condizione necessaria e sufficiente affinché, supposte soddisfatte le condizioni di esistenza per la W_{uv} , essa risulti finita e continua in tutto il semipiano positivo, è che le $u_{2m}(x)$ e $v_{2m-1}(x)$ non ammettano alcun punto di discontinuità. Quando ciò si verifichi e le proprietà qualitative supposte per le funzioni $u'_{2m}(x)$ e $v'_{2m-1}(x)$ valgano anche per le $u''_{2m}(x)$ e $v''_{2m-1}(x)$, le condizioni di regolarità per la W'_{uv} restano stabilite dal

Teorema II. *La W'_{uv} sarà finita e continua in ogni punto del semipiano positivo, allora e allora soltanto che :*

1.° *le $u'_{2m}(x)$ e $v'_{2m-1}(x)$ non ammettano alcun punto di discontinuità;*

2.º valgono le $2p + 2$ relazioni — indipendenti tra di loro e dalle (II) —

$$\left. \begin{aligned} & \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m}} \frac{u_{2m}(x') - u_{\lambda+\varepsilon}(e_\lambda)}{x' - e_\lambda} W_0(x') dx' + \\ & + i \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m-1}} \frac{v_{2m-1}(x') - v_{\lambda-1+\varepsilon}(e_\lambda)}{x' - e_\lambda} W_0(x') dx' = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, 2p + 2), \end{aligned} \right\} \text{(III)}$$

ove è $\varepsilon = 0$ oppure $\varepsilon = 1$ secondochè λ è pari o dispari (*).

. 3. Per poter dare una forma semplice e al tempo stesso precisa all'enunciato del teorema di KOEBE, denominiamo $\Phi(xy)$ una qualunque funzione armonica di x, y che nel semipiano positivo possa considerarsi come la parte reale di una $W(x)$, tale cioè che, chiamando $\Psi(xy)$ la funzione armonica coniugata a $\Phi(xy)$, possa porsi

$$W(z) = \Phi(xy) + i\Psi(xy).$$

Convenuta tale denominazione, siano

$$\varphi_1(x) \dots \varphi_{2m-1}(x) \dots \varphi_{2p+1}(x)$$

$p + 1$ funzioni (reali) definite rispettivamente in

$$s_1 \dots s_{2m-1} \dots s_{2p+1},$$

che nei relativi intervalli godano delle proprietà qualitative prima supposte per le $v_{2m-1}(x)$. Al teorema di KOEBE può darsi allora la forma seguente:

Teorema III. *Esiste una ed una sola $\Phi(xy)$, $\Phi_{u\varphi}(xy)$, che soddisfi alle*

(*) Supposto che la W'_{uv} sia finita e continua in ogni punto del semipiano positivo, aggiungiamo alla W_{uv} , ad es., il prodotto di i per l'integrale iperellittico di 1.ª specie

$$\int_{e_1}^x \frac{dz'}{\prod_1^{2p+2} \sqrt{z' - e_l}}.$$

Con ciò la W_{uv} si cambia in una funzione dello stesso tipo che in $z = e_1$ ha derivata necessariamente infinita, senza che le funzioni $u_{2m}(x)$ e $v_{2m-1}(x)$ cessino di possedere le proprietà qualitative per esse supposte, e senza neppure che si alterino per $x = e_1$ i valori della $u_{2p+2}(x)$ (della $v_1(x)$) e di tutte le sue derivate sinistre (destre). Ciò basta per rendere evidente che le condizioni di regolarità richieste nel testo non possono involgere soltanto il comportamento locale delle $u_{2m}(x)$ e $v_{2m-1}(x)$.

condizioni (*)

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{u\varphi}(x, 0) &= u_{2m}(x) && \text{in } s_{2m} \\ \frac{\partial}{\partial y} \Phi_{u\varphi}(x, 0) &= \varphi_{2m-1}(x) && \text{in } s_{2m-1} \end{aligned} \right\} \quad (\beta) \quad (m = 1, 2, \dots, p+1),$$

e si mantenga finita in ogni punto del semipiano positivo.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA I.

4. Ammessa l'esistenza di una $W(z)$ che soddisfi alle condizioni (α), prendiamo a considerare il suo prodotto $W_{uv} W^*$ per una W^* scelta ad arbitrio.

Fissato un punto z interno al semipiano positivo, rappresentiamo con \bar{z} — in base ad una notazione consueta cui ci atterremo sempre — l'affissa del punto ad esso simmetrico rispetto all'asse reale. Con un ragionamento ben noto (**), — tenuto conto del comportamento di W_{uv} e W^* all'infinito e nei punti x_* ed e_l , — dalla formola e dal teorema di CAUCHY si deducono le due eguaglianze

$$\left. \begin{aligned} 2\pi i W_{uv}(z) W^*(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_{uv}(x') W^*(x') dx'}{x' - z}, \\ 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_{uv}(x') W^*(x') dx'}{x' - \bar{z}}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

la seconda delle quali può anche scriversi

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{W_{uv}(x')} \overline{W^*(x')} dx'}{x' - z}. \quad (2)$$

(*) Qui pure va fatta eccezione per gli eventuali punti di discontinuità delle funzioni assegnate negli s_{2m} e s_{2m-1} , e, in rispetto al secondo gruppo delle condizioni (β), almeno in generale, anche per i punti $z = e_l$ (cfr. Teor. II).

(**) Cfr. ad es. A. SIGNORINI, *Sull'inizio dell'efflusso dei liquidi* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XLI (1.° sem. 1916)], § 1.

Ogni $W^*(z)$ essendo puramente reale negli s_{2m} e puramente immaginaria negli s_{2m-1} (*), si ha :

1.° in s_{2m} ($m = 1, 2, \dots, p + 1$)

$$\overline{W^*(x')} = W^*(x');$$

2.° in s_{2m-1} ($m = 1, 2, \dots, p + 1$)

$$\overline{W^*(x')} = -W^*(x').$$

In conseguenza la (1) sommata colla (2) dà

$$\begin{aligned} W_{uv}(z) &= \frac{1}{\pi i W^*(z)} \left\{ \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m}} \frac{U_{uv}(x') W^*(x') dx'}{x' - z} + i \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m-1}} \frac{V_{uv}(x') W^*(x') dx'}{x' - z} \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi i W^*(z)} \left\{ \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m}} \frac{u_{2m}(x') W^*(x') dx'}{x' - z} + i \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m-1}} \frac{v_{2m-1}(x') W^*(x') dx'}{x' - z} \right\}, \end{aligned}$$

cioè la formola (I).

Potendosi evidentemente assumere

$$W_{uv}(z) = i,$$

dalla formola ora stabilita discendono in particolare le seguenti $p + 1$ identità

$$1 = \frac{1}{\pi i W_s(z)} \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m-1}} \frac{W_s(x') dx'}{x' - z} \quad (s = 0, 1, \dots, p). \quad (3)$$

Ulteriormente, essendo in base alla formola di CAUCHY

$$W_s(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m}} \frac{W_s(x') dx'}{x' - z} + \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m-1}} \frac{W_s(x') dx'}{x' - z} \right\} \quad (s = 0, 1, \dots, p),$$

(*) È facile provare che, viceversa, ogni $W(z)$ che sia puramente reale negli s_{2m} e puramente immaginaria negli s_{2m-1} , e che all'infinito abbia nulla almeno la sua parte reale, è necessariamente una $W^*(z)$. Consideriamo infatti il prodotto di una tale $W(z)$ per $\frac{2p+2}{1} \sqrt{z - \epsilon}$.

Esso deve, in ogni caso, essere puramente reale su tutto l'asse reale, e quindi prolungabile per riflessione analitica nel semipiano negativo, dando luogo ad una funzione uniforme in tutto il piano complesso e dotata, evidentemente, di sole singolarità polari: cioè ad una funzione razionale di z . Onde l'asserto si presenta come un'immediata conseguenza del fatto che la $W(z)$ non può ammettere infiniti d'ordine ≥ 1 e all'infinito deve avere parte reale nulla.

appaiono manifeste anche le identità

$$1 = \frac{1}{\pi i} \frac{1}{W_s(z)} \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m}} \frac{W_s(x') dx'}{x' - z} \quad (s = 0, 1, \dots, p). \quad (4)$$

5. Dal teorema di CAUCHY — sempre tenuto conto delle nostre ipotesi rispetto a W_{uv} e W^* — segue anche (scrivendo che è nullo l'integrale del prodotto $W_{uv}(z) W^*(z)$ esteso al contorno di un semicerchio del semipiano positivo, di raggio qualunque R , avente il centro in $z=0$, e passando al limite per $R = \infty$)

$$\pi V_\infty \lim_{z=\infty} (z W^*(z)) = \int_0^\infty \left\{ W_{uv}(x') W^*(x') + W_{uv}(-x') W^*(-x') \right\} dx',$$

ove V_∞ rappresenta il coefficiente dell'immaginario in $W_{uv}(\infty)$ (cioè $\frac{W_{uv}(\infty)}{i}$).

In conseguenza, considerando la parte reale del secondo membro, si trova

$$\begin{aligned} \pi V_\infty \lim_{z=\infty} (z W^*(z)) &= \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m}} U(x' 0) W^*(x') dx' + i \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m-1}} V(x' 0) W^*(x') dx' = \\ &= \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m}} u_{2m}(x') W^*(x') dx' + i \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m-1}} v_{2m-1}(x') W^*(x') dx', \end{aligned}$$

ovvero — ciò che è perfettamente equivalente data la definizione delle $W^*(z)$ —

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m}} u_{2m}(x') W_s(x') dx' + \\ + i \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m-1}} v_{2m-1}(x') W_s(x') dx' = 0 \quad (s = 0, 1, \dots, p-1) \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

$$\sum_1^{p+1} \int_{s_{2m}} u_{2m}(x') W_p(x') dx' + i \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m-1}} v_{2m-1}(x') W_p(x') dx' = \pi V_\infty. \quad (5)$$

Con ciò la necessità delle relazioni (II) per l'esistenza di una $W(z)$ soddisfacente alle condizioni (x), resta dimostrata.

6. Nel completare la dimostrazione del nostro teorema, potremo evidentemente limitarci a prendere in esame, nel semipiano positivo, il com-

portamento della funzione

$$\frac{1}{\pi i W_0(z)} \left\{ \sum_{s_{2m}}^{p+1} \int \frac{u_{2m}(x') W_0(x') dx'}{x' - z} + i \sum_{s_{2m-1}}^{p+1} \int \frac{v_{2m-1}(x') W_0(x') dx'}{x' - z} \right\} = \left. \right\} \quad (6)$$

$$= w(z) = u(x, y) + i v(x, y), \quad (u, v \text{ reali}).$$

È manifesto che in ogni punto interno al semipiano positivo la $w(z)$ è monodroma, finita e continua (insieme alla sua derivata). Inizieremo lo studio del suo comportamento sull'asse reale, dimostrando che in ogni punto $z = X$ di tale asse, distinto dal punto all'infinito e dagli eventuali punti $z = x_*$ ove una delle u_{2m} o una delle v_{2m-1} è discontinua, la $w(z)$ è finita e continua, ed è soddisfatta la corrispondente eguaglianza (α).

Supposto dapprima X interno ad uno degli intervalli s_{2m} — che chiameremo $s_{2\mu}$ — prendiamo a considerare la differenza

$$w(z) - u_{2\mu}(X).$$

Per la (6) e per la prima delle (3), potremo evidentemente porre

$$w(z) - u_{2\mu}(X) = \frac{1}{\pi i W_0(z)} \left\{ \sum_{s_{2m}}^{p+1} \int \frac{u_{2m}(x') - u_{2\mu}(X)}{x' - z} W_0(x') dx' + \right.$$

$$\left. + i \sum_{s_{2m-1}}^{p+1} \int \frac{v_{2m-1}(x') W_0(x') dx'}{x' - z} \right\}.$$

Basta allora osservare che al tendere di z ad X il secondo membro di questa relazione ha come limite il valore, finito e puramente immaginario (*), dell'espressione

$$\frac{1}{\pi i W_0(X)} \left\{ \sum_{s_{2m}}^{p+1} \int \frac{u_{2m}(x') - u_{2\mu}(X)}{x' - X} W_0(x') dx' + i \sum_{s_{2m-1}}^{p+1} \int \frac{v_{2m-1}(x') W_0(x') dx'}{x' - X} \right\},$$

per concludere che in $z = X$ la $w(z)$ è finita e continua, e di più è

$$u(X, 0) = u_{2\mu}(X),$$

$$v(X, 0) = \frac{-1}{\pi W_0(X)} \left\{ \sum_{s_{2m}}^{p+1} \int \frac{u_{2m}(x') - u_{2\mu}(X)}{x' - X} W_0(x') dx' + \right.$$

$$\left. + i \sum_{s_{2m-1}}^{p+1} \int \frac{v_{2m-1}(x') W_0(x') dx'}{x' - X} \right\}.$$

(*) Si tenga presente:

- 1.° quanto abbiamo ammesso riguardo alle $u'_{2m}(x)$;
- 2.° che negli intervalli s_{2m} (s_{2m-1}) ogni $W^*(z)$ è sempre puramente reale (immaginaria).

In modo analogo si prova che se X è interno ad $s_{2\mu-1}$ ($\mu = 1, 2, \dots, p+1$) in $z = X$ la $w(z)$ è ancora finita e continua e si ha

$$u(X0) = \frac{1}{\pi i W_0(X)} \left\{ \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m}} \frac{u_{2m}(x') W_0(x') dx'}{x' - X} + \right. \\ \left. + i \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m-1}} \frac{v_{2m-1}(x') - v_{2\mu-1}(X)}{x' - X} W_0(x') dx' \right\},$$

$$v(X0) = v_{2\mu-1}(X).$$

Se invece è

$$X = e_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \dots, 2p+2),$$

per giungere all'asserto basterà prendere in esame l'espressione

$$w(z) = \frac{\left\{ u_{\lambda+\varepsilon}(e_\lambda) + i v_{\lambda-1+\varepsilon}(e_\lambda) \right\}}{\sqrt{z - e_\lambda}},$$

ove è $\varepsilon = 0$ oppure $\varepsilon = 1$ secondo che λ è pari o dispari. Dalla (6), dalla prima delle (3) e dalla prima delle (4) si ricava

$$\left. \frac{w(z) - \left\{ u_{\lambda+\varepsilon}(e_\lambda) + i v_{\lambda-1+\varepsilon}(e_\lambda) \right\}}{\sqrt{z - e_\lambda}} = \frac{\prod_1^{\lambda-1} \sqrt{z - e_i} \prod_1^{2p+2} \sqrt{z - e_i}}{\pi i \prod_1^{\lambda+1}} \left\{ \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m}} \frac{u_{2m}(x') - u_{\lambda+\varepsilon}(e_\lambda)}{x' - z} W_0(x') dx' + \right. \right. \\ \left. \left. + i \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m-1}} \frac{v_{2m-1}(x') - v_{\lambda-1+\varepsilon}(e_\lambda)}{x' - z} W_0(x') dx' \right\}. \right\} \quad (7)$$

In conseguenza della (7), posto

$$\left. \begin{aligned} \Pi_\lambda &= \frac{\prod_1^{\lambda-1} \sqrt{e_\lambda - e_i} \prod_1^{2p+2} \sqrt{e_\lambda - e_i}}{\prod_1^{\lambda+1}}, \\ \pi i W^{(\lambda)} &= \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m}} \frac{u_{2m}(x') - u_{\lambda+\varepsilon}(e_\lambda)}{x' - e_\lambda} W_0(x') dx' + \\ &+ i \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m-1}} \frac{v_{2m-1}(x') - v_{\lambda-1+\varepsilon}(e_\lambda)}{x' - e_\lambda} W_0(x') dx', \end{aligned} \right\} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, 2p+2)$$

— con che $W^{(\lambda)}$ sarà sempre finito e puramente immaginario — si trova

$$\lim_{z=e_\lambda} \frac{w(z) - \left\{ u_{\lambda+\varepsilon}(e_\lambda) + i v_{\lambda-1+\varepsilon}(e_\lambda) \right\}}{\sqrt{z - e_\lambda}} = \Pi_\lambda W^{(\lambda)} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, 2p + 2).$$

Ciò evidentemente è sufficiente a provare l'asserto e al tempo stesso fornisce le eguaglianze

$$\lim_{z=e_\lambda} \frac{w(z) - w(e_\lambda)}{\sqrt{z - e_\lambda}} = \Pi_\lambda W^{(\lambda)} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, 2p + 2) \quad (8)$$

che ci saranno utili in seguito.

7. Sia $z = x_*$ uno degli eventuali punti interni ad $s_{2\mu}$, ove si presenti per la $u_{2\mu}(x)$ una discontinuità di prima specie k_* . È facile provare che nell'intorno di $z = x_*$ la $w(z)$, a meno di una funzione additiva finita e continua, si comporta come la funzione

$$\frac{i k_*}{\pi} \log(x_* - z).$$

Invero, essendo identicamente

$$\begin{aligned} -\frac{i k_*}{\pi} \log(x_* - z) &= \frac{k_*}{\pi i} \int_{e_{2\mu}}^{x_*} \frac{d x'}{x' - z} + \frac{k_*}{\pi i} \log(e_{2\mu} - z) = \\ &= \frac{1}{\pi i W_0(z)} \int_{e_{2\mu}}^{x_*} \frac{k_* W_0(x') d x'}{x' - z} - \frac{k_*}{\pi i W_0(z)} \int_{e_{2\mu}}^{x_*} \frac{W_0(x') - W_0(z)}{x' - z} d x' + \frac{k_*}{\pi i} \log(e_{2\mu} - z), \end{aligned}$$

ricorrendo alla (6) si ottiene subito

$$\begin{aligned} w(z) - \frac{i k_*}{\pi} \log(x_* - z) &= \frac{1}{\pi i W_0(z)} \left\{ \left(\sum_1^{\mu-1} + \sum_{\mu+1}^{p+1} \right) \int_{s_{2\mu}} u_{2m}(x') \frac{W_0(x') d x'}{x' - z} + \right. \\ &\quad \left. + i \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m-1}} v_{2m-1}(x') \frac{W_0(x') d x'}{x' - z} \right\} + \\ &+ \frac{1}{\pi i W_0(z)} \left\{ \int_{e_{2\mu}}^{x_*} \frac{u_{2\mu}(x') + k_*}{x' - z} W_0(x') d x' + \int_{x_*}^{e_{2\mu+1}} \frac{u_{2\mu}(x') W_0(x') d x'}{x' - z} \right\} - \\ &- \frac{k_*}{\pi i W_0(z)} \int_{e_{2\mu}}^{x_*} \frac{W_0(x') - W_0(z)}{x' - z} d x' + \frac{k_*}{\pi i} \log(e_{2\mu} - z). \end{aligned}$$

D'altra parte, ponendo

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{2\mu}^*(x) = u_{2\mu}(x) + k_* \quad \text{per } e_{2\mu} \leq x < x_* \\ u_{2\mu}^*(x_*) = u_{2\mu}(x_* - 0) + k_* = u_{2\mu}(x_* + 0) \\ u_{2\mu}^*(x) = u_{2\mu}(x) \quad \text{per } x_* < x \leq e_{2\mu+1}, \end{array} \right.$$

la $u_{2\mu}^*(x)$ in tutto l'intervallo $s_{2\mu}$ risulta finita e continua insieme alla sua derivata prima, fatta al più eccezione per un numero finito di punti ove la derivata potrà presentare delle discontinuità di prima specie: onde (Cfr. paragrafo precedente) la funzione di z

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i W_0(z)} \left\{ \int_{e_{2\mu}}^{x_*} \frac{u_{2\mu}(x') + k_*}{x' - z} W_0(x') dx' + \int_{x_*}^{e_{2\mu+1}} \frac{u_{2\mu}(x')}{x' - z} W_0(x') dx' \right\} = \\ = \frac{1}{\pi i W_0(z)} \int_{s_{2\mu}} \frac{u_{2\mu}^*(x') W_0(x')}{x' - z} dx' \end{aligned}$$

in $z = x_*$ sarà finita e continua.

Vuol dire che nell'intorno di tale punto anche la funzione

$$v(z) - \frac{i k_*}{\pi} \log(x_* - z)$$

è finita e continua: ciò che prova quanto abbiamo affermato.

In modo analogo si proverebbe che nell'intorno di un punto ove una delle $v_{2\mu-1}$ sia discontinua, la $v(z)$, sempre a meno di una funzione additiva finita e continua, si comporta come la funzione

$$- \frac{k_*}{\pi} \log(x_* - z)$$

(x_* e k_* riferendosi, naturalmente, al punto attualmente considerato)(*).

8. Le proprietà finora dimostrate per la $v(z)$ derivano soltanto dalle proprietà qualitative ammesse per le funzioni u_{2m} e v_{2m-1} , e non dall'essere

(*) I risultati ottenuti nei §§ 6 e 7 si potrebbero anche considerare come delle semplici conseguenze delle proprietà degli integrali del tipo $\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x') dx'}{x' - z}$, ove la $f(x')$ gode delle proprietà qualitative da noi ammesse per la u_{2p+2} (V. A. SIGNORINI, loc. cit. ante, §§ 3-6).

tali funzioni vincolate o meno dalle (II). Il sussistere di queste eguaglianze è invece (sempre subordinatamente alle nostre ipotesi sul comportamento delle u_{2m} e v_{2m-1}) condizione necessaria e sufficiente affinché la $w(z)$ sia finita e continua in $z = \infty$.

Per provarlo, basterà che, in base all'identità

$$\frac{1}{x' - z} = - \sum_0^p \frac{x'^s}{z^{s+1}} + \frac{1}{x' - z} \frac{x'^{p+1}}{z^{p+1}},$$

sostituiamo la (6) colla seguente

$$\begin{aligned} & \pi i w(z) W_0(z) z^{p+1} = \\ & = - \sum_0^p z^{p-s} \left\{ \sum_1^{p+1} \int_{S_{2m}} u_{2m}(x') W_0(x') x'^s dx' + i \sum_1^{p+1} \int_{S_{2m-1}} v_{2m-1}(x') W_0(x') x'^s dx' \right\} + \\ & + \sum_1^{p+1} \int_{S_{2m}} \frac{u_{2m}(x') W_0(x') x'^{p+1} dx'}{x' - z} + i \sum_1^{p+1} \int_{S_{2m-1}} \frac{v_{2m-1}(x') W_0(x') x'^{p+1} dx'}{x' - z} = \\ & = - \sum_0^p z^{p-s} \left\{ \sum_1^{p+1} \int_{S_{2m}} u_{2m}(x') W_s(x') dx' + i \sum_1^{p+1} \int_{S_{2m-1}} v_{2m-1}(x') W_s(x') dx' \right\} + \\ & + \sum_1^{p+1} \int_{S_{2m}} \frac{u_{2m}(x') W_0(x') x'^{p+1} dx'}{x' - z} + i \sum_1^{p+1} \int_{S_{2m-1}} \frac{v_{2m-1}(x') W_0(x') x'^{p+1} dx'}{x' - z}. \end{aligned} \quad (9)$$

Essendo evidentemente

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(W_0(z) z^{p+1} \right) = 1,$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left\{ \sum_1^p \int_{S_{2m}} \frac{u_{2m}(x') W_0(x') x'^{p+1} dx'}{x' - z} + i \sum_1^{p+1} \int_{S_{2m-1}} \frac{v_{2m-1}(x') W_0(x') x'^{p+1} dx'}{x' - z} \right\} = 0$$

e avendosi anche (*)

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \int_{S_{2p+2}} \frac{u_{2p+2}(x') W_0(x') x'^{p+1} dx'}{x' - z} = 0,$$

la (9) rende manifesto che $w(z)$ sarà finita e continua in $z = \infty$, allora e

(*) Cfr. A. SIGNORINI, loc. cit. ante, § 7.

allora soltanto che sia

$$\begin{aligned} & \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m}} u_{2m}(x') W_s(x') dx' + \\ & + i \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m-1}} v_{2m-1}(x') W_s(x') dx' = 0 \quad (s = 0, 1, \dots, p-1), \end{aligned}$$

cioè allora e allora soltanto che siano verificate le (II). Al tempo stesso si trova, conformemente alla (5),

$$\begin{aligned} \pi w(\infty) = i \pi v_\infty = i \left\{ \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m}} u_{2m}(x') W_p(x') dx' + \right. \\ \left. + i \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m-1}} v_{2m-1}(x') W_p(x') dx' \right\}, \end{aligned}$$

designando, naturalmente, v_∞ il coefficiente dell'immaginario in $w(\infty)$.

Con questo, perchè il teor. I sia completamente dimostrato, resta soltanto da provare che le relazioni (II) sono mutuamente indipendenti: ciò che verrà fatto al § 15.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA II.

9. La necessità delle condizioni stabilite dall'enunciato del teorema II per la regolarità della W'_{uv} appare evidente, solo che si osservi, per quanto riguarda il verificarsi delle (III), che la λ esima di esse, in base alla corrispondente (8), equivale all'eguaglianza

$$\lim_{z=e_\lambda} \frac{W_{uv}(z) - W_{uv}(e_\lambda)}{\sqrt{z - e_\lambda}} = 0.$$

Anzi, potendo darsi benissimo che una W_{uv} soddisfi questa eguaglianza per $2p+1$ valori dell'indice λ e non per il rimanente (*), resta senz'altro provata la mutua indipendenza delle (III) e la loro indipendenza dalle (II).

(*) Ciò ad es. si verifica quando risulti

$$W_{uv}(z) = \frac{\sqrt{z - e_l}}{z - n},$$

n essendo l'affissa di un qualunque punto interno al semipiano negativo.

Per stabilire la sufficienza delle condizioni enunciate, dedurremo dalla (6) e dalle (8) un'espressione di W'_{uv} valevole in generale, che ci porterà immediatamente al risultato voluto, e insieme ci servirà a porre in evidenza quale è in generale il comportamento della W'_{uv} sull'asse reale.

10. Siano

$$C_1 \dots C_l \dots C_{2p+2}$$

$2p+2$ semicirconferenze del semipiano positivo, aventi rispettivamente per centri i punti di ascisse

$$e_1 \dots e_l \dots e_{2p+2}$$

e per raggi dei segmenti

$$r_1 \dots r_l \dots r_{2p+2}$$

tali che due qualunque di esse non abbiano alcun punto in comune: conveniamo inoltre di rappresentare con s^* , ($l=1, 2, \dots, 2p+2$) l'intervallo $(e_l+r_l, e_{l+1}-r_{l+1})$ oppure l'insieme dei due intervalli $(-\infty, e_l-r_l)$ e $(e_{2p+2}+r_{2p+2}, \infty)$ secondochè è $l=1$ oppure $l=2p+2$.

Dalla formola di CAUCHY segue, in ogni punto z interno al semipiano positivo:

$$\begin{aligned} 2\pi i W(z) W'_0(z) &= \lim \left\{ \sum_1^{2p+2} \int_{s^*_l} \frac{W_{uv}(x') W'_0(x') dx'}{x'-z} + \right. \\ &+ \sum_1^{2p+2} \int_{C_l} \frac{W_{uv}(z') W'_0(z') dz'}{z'-z} \left. \right\} = \lim \left\{ \sum_1^{2p+2} \int_{s^*_l} \frac{W_{uv}(x') W'_0(x') dx'}{x'-z} - \right. \\ &- \frac{1}{2} \sum_1^{2p+2} \int_{C_l} \frac{W_{uv}(z') - W_{uv}(e_l)}{\sqrt{z'-e_l}} \frac{dz'}{(z'-z)(z'-e_l) \prod_1^{l-1} \sqrt{z'-e_l} \prod_{l+1}^{2p+2} \sqrt{z'-e_l}} + \\ &\left. + \sum_1^{2p+2} W_{uv}(e_l) \left[\frac{W_0(e''_l)}{e''_l-z} - \frac{W_0(e'_l)}{e'_l-z} \right] \right\}, \end{aligned}$$

intendendosi il limite preso al decrescere indefinito di tutti i segmenti r_l e avendo posto, per semplicità,

$$e'_l = e_l - r_l, \quad e''_l = e_l + r_l \quad (l=1, 2, \dots, 2p+2).$$

Successivamente, tenuto conto delle (8), si trova

$$2 \pi i W(z) W'_0(z) = \lim \left\{ \sum_1^{2p+2} \int_{s^*_{2i}} \frac{W_{uv}(x') W'_0(x') dx'}{x' - z} + \right. \\ \left. + \sum_1^{2p+2} W_{uv}(e_i) \left[\frac{W_0(e''_i)}{e''_i - z} - \frac{W_0(e'_i)}{e'_i - z} \right] \left\{ - \frac{\pi i}{2} \sum_1^{2p+2} \frac{W^{(i)}}{z - e_i} \right. \right. \quad (10)$$

Analogamente dal teorema di CAUCHY si deduce:

$$0 = \lim \left\{ \sum_1^{2p+2} \int_{s^*_{2i}} \frac{W_{uv}(x') W'_0(x') dx'}{x' - \bar{z}} + \right. \\ \left. + \sum_1^{2p+2} W_{uv}(e_i) \left[\frac{W_0(e''_i)}{e''_i - \bar{z}} - \frac{W_0(e'_i)}{e'_i - \bar{z}} \right] \left\{ - \frac{\pi i}{2} \sum_1^{2p+2} \frac{W^{(i)}}{\bar{z} - e_i} \right. \right. \quad (11)$$

Sommando la (10) colla (11), dopo avere cambiato in quest'ultima i in $-i$, si perviene, ricordando che le quantità $W^{(i)}$ sono tutte puramente immaginarie, alla relazione seguente:

$$\pi i W_{uv}(z) W'_0(z) = \lim \left\{ \sum_1^{p+1} \int_{s^*_{2m}} \frac{u_{2m}(x') W'_0(x') dx'}{x' - z} + \right. \\ \left. + i \sum_1^{p+1} \int_{s^*_{2m-1}} \frac{v_{2m-1}(x') W'_0(x') dx'}{x' - z} + \right. \\ \left. + \sum_1^{p+1} \left[\frac{u_{2m}(e''_{2m}) W_0(e''_{2m})}{e''_{2m} - z} - \frac{i v_{2m-1}(e'_{2m}) W_0(e'_{2m})}{e'_{2m} - z} \right] + \right. \\ \left. + \sum_1^{p+1} \left[\frac{i v_{2m-1}(e''_{2m-1}) W_0(e''_{2m-1})}{e''_{2m-1} - z} - \frac{u_{2m-2}(e'_{2m-1}) W_0(e'_{2m-1})}{e'_{2m-1} - z} \right] \left\{ - \right. \\ \left. - \frac{\pi i}{2} \sum_1^{2p+2} \frac{W^{(i)}}{z - e_i} \right. \quad (12)$$

ove, naturalmente, è $u_0(x) \equiv u_{2p+2}(x)$.

11. Derivando la (6) rispetto a z , si ottiene

$$\pi i W'_{uv}(z) W_0(z) + \pi i W_{uv}(z) W'_0(z) = \\ = - \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m}} u_{2m}(x') W_0(x') \frac{d}{dx'} \left(\frac{1}{x' - z} \right) dx' - i \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m-1}} v_{2m-1}(x') W_0(x') \frac{d}{dx'} \left(\frac{1}{x' - z} \right) dx'.$$

Se ne deduce, mediante delle integrazioni per parti,

$$\begin{aligned} & \pi i W'_{uv}(z) W_0(z) + \pi i W_{uv}(z) W'_0(z) = \\ & = \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m}} \frac{u'_{2m}(x') W_0(x') dx'}{x' - z} + i \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m-1}} \frac{v'_{2m-1}(x') W_0(x') dx'}{x' - z} + \\ & + \lim \left\{ \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m}} \frac{u_{2m}(x') W'_0(x') dx'}{x' - z} + i \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m-1}} \frac{v_{2m-1}(x') W'_0(x') dx'}{x' - z} - \right. \\ & - \left. \sum_1^{p+1} \left[\frac{u_{2m}(e'_{2m+1}) W_0(e'_{2m+1})}{e'_{2m+1} - z} - \frac{u_{2m}(e''_{2m}) W_0(e''_{2m})}{e''_{2m} - z} \right] - \right. \\ & \left. - i \sum_1^{p+1} \left[\frac{v_{2m-1}(e'_{2m}) W_0(e'_{2m})}{e'_{2m} - z} - \frac{v_{2m-1}(e''_{2m-1}) W_0(e''_{2m-1})}{e''_{2m-1} - z} \right] \right\} \end{aligned}$$

intendendo che sia $e'_{2p+3} = e'_1$.

Il confronto di questa formola colla (12) porta immediatamente alla formola definitiva

$$W'_{uv}(z) = \frac{1}{\pi i W_0(z)} \left\{ \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m}} \frac{u'_{2m}(x') W_0(x') dx'}{x' - z} + \right. \\ \left. + i \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m-1}} \frac{v'_{2m-1}(x') W_0(x') dx'}{x' - z} \right\} + \frac{1}{2 W_0(z)} \sum_1^{2p+2} \frac{W^{(\lambda)}}{z - e_\lambda} \quad (13)$$

12. La funzione

$$\frac{1}{2 W_0(z)} \sum_1^{2p+2} \frac{W^{(\lambda)}}{z - e_\lambda}$$

è puramente immaginaria negli intervalli s_{2m} , puramente reale negli intervalli s_{2m-1} , finita e continua in ogni punto del semipiano positivo distinto dai punti $z = e_\lambda$. In conseguenza di ciò, la (13), in base alle considerazioni svolte ai §§ 6, 7 e all'osservazione iniziale del § 8, permette di asserire che la $W'_{uv}(z)$:

1.° in ogni punto a distanza finita interno ad $s_{2\mu}$ (ad $s_{2\mu-1}$) e distinto dagli eventuali punti di discontinuità della $u'_{2\mu}(x)$ (della $v'_{2\mu-1}(x)$) è finita e continua e la sua parte reale (la sua parte immaginaria) coincide col valore corrispondente di $u'_{2\mu}(x)$ (di $v'_{2\mu-1}(x)$);

2.° nei punti di discontinuità delle $u'_{2m}(x)$ e $v'_{2m-1}(x)$ presenta degli infiniti logaritmici;

3.° nell'intorno di $z = e_\lambda$ ($\lambda = 1, 2, \dots, 2p + 2$) si comporta, a meno di

una funzione additiva finita e continua, come la funzione

$$\frac{1}{2} \frac{\Pi_\lambda W^{(\lambda)}}{\sqrt{z - e_\lambda}}.$$

Il comportamento all'infinito di W'_{uv} può, senza bisogno di calcoli diretti, esser messo in evidenza mediante l'osservazione seguente. In base all'identità

$$\frac{1}{x' - z} = - \sum_0^p \frac{x'^s}{z'^{s+1}} + \frac{1}{x' - z} \frac{x'^{p+1}}{z'^{p+1}}$$

il secondo membro della (13) può trasformarsi (cfr. § 8) in un polinomio di grado p in z , aumentato di una funzione della stessa variabile, che per $z = \infty$ ha come limite lo zero. D'altra parte per $z = \infty$ la W'_{uv} si mantiene finita. Vuol dire che tutti i coefficienti di quel polinomio saranno nulli e si avrà in ogni caso

$$\lim_{z=\infty} W'_{uv}(z) = 0.$$

13. Le proprietà ora rilevate in generale per la W'_{uv} , rendono evidente che le condizioni del teor. II sono, non soltanto necessarie, ma anche sufficienti perchè essa sia finita e continua in ogni punto del semipiano positivo.

In base alla (13), in tal caso si avrà semplicemente

$$W'_{uv}(z) = \frac{1}{\pi i W_0(z)} \left\{ \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m}} \frac{u'_{2m}(x') W_0(x') dx'}{x' - z} + i \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m-1}} \frac{v'_{2m-1}(x') W_0(x') dx'}{x' - z} \right\},$$

ciò che in particolare rende manifesto che le condizioni

$$\sum_1^{p+1} \int_{s_{2m}} u'_{2m}(x') W_s(x') dx' + i \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m-1}} v'_{2m-1}(x') W_s(x') dx' = 0 \quad (s=0, 1, \dots, p-1),$$

sono necessarie (*) per la regolarità della W'_{uv} .

(*) L'insufficienza di tali condizioni, quando pure siano combinate colle (II), risulta evidente dall'osservare che, sia esse che le (II), sono verificate dal prodotto dell'unità immaginaria per un qualunque integrale iperellittico di 1.^a specie, che abbia come punti di diramazione i punti $z = e_l$ ($l = 1, 2, \dots, 2p + 2$), senza che la derivata di tale prodotto si mantenga sempre finita.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA III.

14. Dedurremo il teorema di KOEBE dal teorema I, servendoci di una conseguenza immediata del seguente

Lemma. *Se una $W(z)$ soddisfa a relazioni del tipo*

$$\left\{ \begin{array}{ll} U(x0) = 0 & \text{in } s_{2m} \\ V(x0) = k_{2m-1} & \text{in } s_{2m-1} \end{array} \right. \quad (m = 1, 2, \dots, p+1),$$

ove $k_1 \dots k_{2m-1} \dots k_{2p+1}$ sono delle costanti (reali), essa non può differire da una costante (puramente immaginaria): e quindi è

$$k_1 = \dots = k_{2m-1} = \dots = k_{2p+1}.$$

Rilevato che la $W(z)$ in questione deve necessariamente essere finita e continua in tutto il semipiano positivo, rappresentiamo con U_M il massimo valore assoluto preso dalla sua parte reale sull'asse reale, tenendo presente che, per una ben nota proprietà delle funzioni armoniche, U_M rappresenterà anche il massimo valore assoluto di $U(xy)$ in tutto il semipiano positivo.

Se non vogliamo ammettere senz'altro il lemma enunciato, dovremo supporre che il valore U_M venga assunto da $|U(x0)|$ in uno o più punti interni agli intervalli s_{2m-1} .

Sia P uno di tali punti, ed appartenga, ad es., all'intervallo $s_{2\mu-1}$.

La differenza

$$W(z) - i k_{2\mu-1}$$

ci dà una funzione di z regolare in tutto il semipiano positivo, puramente reale ed eguale a $U(x0)$ in $s_{2\mu-1}$. Immaginando di prolungare tale funzione nel semipiano negativo, mediante la riflessione analitica sul segmento $s_{2\mu-1}$, giungeremo dunque alla conclusione che esiste una funzione armonica, regolare in un'area includente P e avente un massimo o un minimo in questo punto.

Ciò è in contraddizione colla proprietà già ricordata delle funzioni armoniche: onde il nostro lemma risulta dimostrato.

In base al teor. I, possiamo allora evidentemente asserire che il sistema

Ammissa l'esistenza della $\Phi_{u\varphi}$, sia $W_{u\varphi}(z)$ una $W(z)$ (evidentemente determinata solo a meno di una costante additiva puramente immaginaria) la cui parte reale coincida in tutto il semipiano positivo colla $\Phi_{u\varphi}$. Per la $W_{u\varphi}$, in s_{2m} ($m = 1, 2 \dots p+1$) la parte reale coinciderà colla $u_{2m}(x)$, in

$$s_{2m-1} \quad (m = 1, 2 \dots p+1)$$

il coefficiente dell'immaginario non potrà differire dalla $v_{2m-1}^*(x)$ altro che per una costante reale k_{2m-1} : invero se la parte immaginaria della $W_{u\varphi}$ presentasse in s_{2m-1} delle discontinuità (di prima specie), queste avrebbero come conseguenza necessaria altrettanti infiniti per $\Phi_{u\varphi}$ (Cfr. § 7).

Viceversa, se esiste una $W(z)$ che soddisfi a condizioni del tipo

$$\begin{cases} U(x, 0) = u_{2m}(x) & \text{in } s_{2m} \\ V(x, 0) = v_{2m-1}^*(x) + k_{2m-1} & \text{in } s_{2m-1} \end{cases} \quad (m = 1, 2 \dots p+1)$$

la sua parte reale darà senz'altro la cercata $\Phi_{u\varphi}$.

Con questo la dimostrazione del teor. III viene ridotta a provare che, assunto

$$v_{2m-1}(x) = v_{2m-1}^*(x) + k_{2m-1} \quad (m = 1, 2 \dots p+1)$$

e scelto ad arbitrio il valore di una delle k , le (II) individuano per le rimanenti p delle k , valori (reali) finiti e perfettamente determinati. Ciò che si fa nel modo più semplice osservando:

1.º che le (II) forniscono per le k il sistema di p equazioni lineari (a coefficienti reali)

$$\begin{aligned} \sum_1^{p+1} k_{2m-1} i \int_{s_{m-1}} W_s(x') dx' &= - \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m}} u_{2m}(x') W_s(x') dx' - \\ &- i \sum_1^{p+1} \int_{s_{2m-1}} v_{2m-1}^*(x') W_s(x') dx'; \quad (s = 0, 1 \dots p-1); \end{aligned}$$

2.º che la matrice di questo sistema ha, come abbiamo visto al paragrafo precedente, tutti i suoi minori d'ordine p diversi da zero.

Al tempo stesso resta messo in evidenza che le (II) stabiliscono, tra le funzioni $u_{2m}(x)$ e $v_{2m-1}(x)$, p relazioni mutuamente indipendenti: infatti se ciò non accadesse, almeno una, delle p equazioni ora considerate per le k , dovrebbe essere una conseguenza delle rimanenti.

Sopra alcuni polinomi approssimativi.

(Di LEONIDA TONELLI, a Parma.)

Alcuni anni or sono, E. LANDAU e CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN ⁽¹⁾, l'uno indipendentemente dall'altro, riprendendo un integrale che già era stato considerato da STIELTJES, in una lettera scritta a HERMITE, mostrarono come esso si presti in modo molto conveniente alla rappresentazione, mediante polinomi, delle funzioni di una variabile reale. Detta $f(x)$ una funzione data nell'intervallo (a, b) , tale che sia $0 < a < b < 1$, e ivi integrabile, e posto $f(x) = f(a)$ in $(0, a)$, $f(x) = f(b)$ in $(b, 1)$, si consideri il polinomio in x

$$P_n(x) = \frac{k_n}{2} \int_0^1 f(z) \left\{ 1 - (z-x)^2 \right\}^n dz,$$

dove è

$$\frac{1}{k_n} = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$$

con n numero intero positivo. Il LANDAU e il DE LA VALLÉE POUSSIN dimostrarono che, se la $f(x)$ è continua, $P_n(x)$ converge verso di essa, per $n \rightarrow \infty$, uniformemente in tutto (a, b) . Il DE LA VALLÉE POUSSIN studiò anche il caso delle funzioni discontinue ed i suoi risultati furono poi completati da F. RIESZ ⁽²⁾, il quale giunse alla seguente proposizione: Supposta la $f(x)$ solamente integrabile, nel senso del LEBESGUE, in (a, b) (ipotesi necessaria per la costruzione stessa di $P_n(x)$), $P_n(x)$ converge verso di essa quasi dap-

⁽¹⁾ E. LANDAU, *Ueber die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion* [Rend. Circolo Matem. di Palermo, t. XXV (1908), pp. 337-345]; CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynômes et des suites limitées de Fourier* (Bulletins de la classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique, 1908, pp. 193-254); idem, *Cours d'Analyse*, T. II (2.° édit.).

⁽²⁾ F. RIESZ, *Ueber die Approximation einer Funktion durch Polynome* [Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. XVII (1908), pp. 196-211].

pertutto ⁽³⁾. Oltre alla rappresentazione della funzione $f(x)$, il DE LA VALLÉE POUSSIN considerò pure quella delle derivate $f^{(n)}(x)$, e per limitarmi ad uno solo degli interessanti risultati da lui stabiliti, rammenterò che, se in un punto x di (a, b) esiste la derivata $f^{(n)}(x)$, questa si ottiene come limite della derivata $P_n^{(n)}(x)$, per $n \rightarrow \infty$.

Cercando di estendere i risultati sopra ricordati alle funzioni di più variabili, fui condotto, in una Memoria: *Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali* ⁽⁴⁾; a rilevare alcune proprietà dei polinomi $P_n(x)$, non ancora notate dagli Autori citati. E precisamente mostrai che, se la funzione $f(x)$ è limitata, l'integrale del polinomio $P_n(x)$ tende, per $n \rightarrow \infty$, a quella della $f(x)$; e che, se la $f(x)$ è continua e la derivata $f'(x)$ esiste quasi dappertutto, restando sempre, in modulo, inferiore ad un numero fisso, la lunghezza della curva $y = P_n(x)$ tende, per $n \rightarrow \infty$, a quella della $y = f(x)$.

Nel presente lavoro, mi propongo di riprendere lo studio delle proprietà dei polinomi $P_n(x)$, dando, da una parte, maggior generalità a quelle già notate, e aggiungendone, dall'altra, delle nuove.

Dimostrerò che sempre l'integrale di $P_n(x)$ tende a quello della $f(x)$, per $n \rightarrow \infty$, per modo tale che, a questo riguardo, i polinomi $P_n(x)$ godono della stessa proprietà delle somme parziali delle serie di Fourier, serie che, come è ben noto, sono sempre integrabili termine a termine, siano o no convergenti. Per altro il risultato si ottiene qui in forma più generale, in quanto che, mentre la proposizione relativa alle serie di Fourier contempla solo l'integrazione su intervalli, nel caso attuale l'integrazione può essere estesa ad un qualsiasi insieme di punti misurabile.

Farò poi vedere che, supposta la $f(x)$ assolutamente continua, i polinomi $P_n(x)$ sono tutti equiassolutamente continui, così che, nell'ipotesi fatta, l'integrale della derivata $P_n'(x)$, esteso ad un qualsiasi insieme misurabile, tende sempre all'integrale corrispondente della $f'(x)$.

Mi occuperò poi della variazione totale della $f(x)$, sia questa supposta continua o no, giungendo al risultato che, escluse per la $f(x)$ certe speciali discontinuità, la sua variazione totale è sempre il limite delle variazioni totali dei polinomi $P_n(x)$; e questo stesso fatto mostrerò che si presenta anche per la lunghezza della curva $y = f(x)$. Considerazioni analoghe svilupperò per l'area della superficie di rivoluzione generata dalla rotazione della curva

⁽³⁾ Vale a dire, dappertutto eccettuato al più un insieme di misura nulla.

⁽⁴⁾ *Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo*, t. XXIX (1910), pp. 1-36.

$y = f(x)$ attorno all'asse delle x , e per altri numeri dipendenti dalla stessa curva, ed anche per curve date, non più nella forma $y = f(x)$, ma in quella parametrica.

Tutto ciò mostra come i polinomi $P_n(x)$ uniscano, alla grande semplicità con cui sono costruiti, delle notevoli qualità che li rendono molto utili nella rappresentazione delle funzioni e delle curve.

§ I.

INTEGRAZIONE.

1. Supponiamo che la funzione $f(x)$ sia, in (a, b) , integrabile nel senso del LEBESGUE e consideriamo del polinomio

$$P_n(x) = \frac{k_n}{2} \int_0^1 f(z) \left\{ 1 - (z-x)^2 \right\}^n dz$$

l'integrale esteso all'intervallo (a, b) :

$$\int_a^b P_n(x) dx.$$

Per studiare il comportamento di questo integrale, quando n tende all' ∞ , è opportuno trasformare alcun poco l'espressione di $P_n(x)$. Facendo il cambiamento di variabile indicato da

$$z - x = t,$$

otteniamo

$$P_n(x) = \frac{k_n}{2} \int_{-x}^{1-x} f(x+t) (1-t^2)^n dt. \quad (1)$$

Indichiamo con ε un numero positivo minore tanto di a quanto di $1-b$ ⁽⁵⁾, e scriviamo

$$P_n(x) = \frac{k_n}{2} \left\{ \int_{-x}^{-\varepsilon} f(x+t) (1-t^2)^n dt + \int_{\varepsilon}^{1-x} \dots \left\{ + \frac{k_n}{2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t) (1-t^2)^n dt. \right\} \right\} \quad (2)$$

⁽⁵⁾ $0 < a \leq x \leq b < 1$.

Prima di proseguire, osserviamo che si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_{-x}^{-\varepsilon} f(x+t) (1-t^2)^n dt \right| &\leq (1-\varepsilon^2)^n \int_{-x}^{-\varepsilon} |f(x+t)| dt = \\ &= (1-\varepsilon^2)^n \int_0^{x-\varepsilon} |f(z)| dz \end{aligned}$$

e analogamente

$$\left| \int_{\varepsilon}^{1-x} f(x+t) (1-t^2)^n dt \right| \leq (1-\varepsilon^2)^n \int_{x+\varepsilon}^1 |f(z)| dz.$$

E poichè è

$$\frac{1}{k_n} = \int_0^1 (1-t^2)^n dt > \int_0^1 (1-t^2)^n t dt = -\frac{1}{2} \int_0^1 (1-t^2)^n d(1-t^2) = \frac{1}{2(n+1)},$$

si ha

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{k_n}{2} \left\{ \int_{-x}^{-\varepsilon} f(x+t) (1-t^2)^n dt + \int_{\varepsilon}^{1-x} \dots \right\} \right| < \\ < (n+1) (1-\varepsilon^2)^n \int_0^1 |f(z)| dz, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ove il secondo membro tende a zero, per $n \rightarrow \infty$, indipendentemente da x .

Integrando ambo i membri della (2) fra i limiti a e b , otteniamo

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b P_n(x) dx &= \int_a^b \left[\frac{k_n}{2} \left\{ \int_{-x}^{-\varepsilon} f(x+t) (1-t^2)^n dt + \int_{\varepsilon}^{1-x} \dots \right\} \right] dx + \\ &+ \frac{k_n}{2} \int_a^b dx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t) (1-t^2)^n dt. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Dalla (3) si deduce subito un limite superiore per il modulo del primo integrale del secondo membro di questa uguaglianza:

$$\left. \begin{aligned} \left| \int_a^b \left[\frac{k_n}{2} \left\{ \int_{-x}^{-\varepsilon} f(x+t) (1-t^2)^n dt + \int_{\varepsilon}^{1-x} \dots \right\} \right] dx \right| < \\ < (n+1) (1-\varepsilon^2)^n (b-a) \int_0^1 |f(z)| dz. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Occupiamoci ora del secondo integrale del 2.^o membro di (4), ossia di

$$\int_a^b dx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t) (1-t^2)^n dt. \quad (6)$$

2. Poniamo $f(x+t) = \varphi(x, t)$ e consideriamo questa funzione delle due variabili x e t nel campo A definito dalle disuguaglianze

$$A: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -x \leq t \leq 1-x, \end{cases}$$

il quale campo è un parallelogrammo avente due lati di lunghezza 1, paralleli a quell'asse del sistema cartesiano ortogonale scelto su cui si contano i valori di t , e gli altri due inclinati sui primi a 45° e di lunghezza $\sqrt{2}$.

Su ogni segmento di A parallelo a questi ultimi lati, la $\varphi(x, t)$ conserva un valore costante. Si ha poi che $\varphi(x, 0) = f(x)$ è integrabile linearmente, rispetto alla x . Dico che la $\varphi(x, t)$ è integrabile superficialmente in tutto il campo A .

Comincerò col mostrare che la $\varphi(x, t)$ è superficialmente misurabile. Preso un numero qualunque M , indicherò con E l'insieme dei punti di A in cui è $\varphi(x, t) \leq M$, e con E_x quello dei punti di A che si trovano sull'asse x e nei quali è $\varphi(x, t) \leq M$. Poichè $\varphi(x, 0) = f(x)$ è integrabile rispetto alla x , e quindi misurabile, E_x è linearmente misurabile. Questo E_x fa parte di E , il quale insieme è formato da tanti segmenti (tutti di lunghezza $\sqrt{2}$, e tutti paralleli fra loro e inclinati a 45° sull'asse delle x) ciascuno dei quali contiene un punto di E_x . Siano E'_x, Δ_x rispettivamente un insieme chiuso contenuto in E_x , e un sistema numerabile d'intervalli, non sovrappoventisi, ricoprenti interamente E_x . Per la misurabilità (lineare) di E_x , è possibile di scegliere E'_x e Δ_x in maniera che la differenza fra le loro misure, $m(\Delta_x) - m(E'_x)$, sia piccola a piacere. Da questi insiemi lineari si deducono due insiemi superficiali E', Δ , di A , nello stesso modo come E si deduce da E_x . E' sarà chiuso, come è chiuso E'_x , e Δ sarà un sistema di parallelogrammi ciascuno dei quali avrà due lati paralleli all'asse t e gli altri due inclinati a 45° sui primi. E' e Δ risultano pertanto superficialmente misurabili e si ha (poichè i lati di A paralleli all'asse t hanno una lunghezza uguale all'unità)

$$m(E') = m(E'_x)$$

$$m(\Delta) = m(\Delta_x),$$

ove devono intendersi come misure superficiali quelle dei primi membri, come misure lineari quelle dei secondi. La differenza

$$m(\Delta) - m(E') = m(\Delta_x) - m(E'_x)$$

può dunque rendersi piccola a piacere e l'insieme E , che contiene E' ed è

contenuto in Δ , risulta misurabile superficialmente e di misura eguale a $m(E_x)$. Con ciò resta provato che la $\varphi(x, t)$ è superficialmente misurabile. Di più, è anche superficialmente integrabile. Ed infatti, detto E_M l'insieme dei punti di A nei quali è $|\varphi(x, t)| \leq M$ (con M numero positivo), la φ è integrabile su E_M ed è, per un teorema di G. FUBINI^(*) sullo sdoppiamento di un integrale superficiale in due integrali lineari successivi,

$$\iint_{E_M} |\varphi(x, t)| dx dt = \int_0^1 dx \int_{E_M(x)} |\varphi(x, t)| dt,$$

dove l'integrazione rispetto a t va estesa al componente $E_M(x)$ di E_M che si trova sulla parallela all'asse t alla distanza x da esso, e quella rispetto ad x va estesa da 0 a 1. Ora il componente $E_M(x)$ è uguale al componente $E_{M,x}$ di E_M che si trova sull'asse delle x , e nei punti di $E_M(x)$ e $E_{M,x}$ che si trovano su una stessa retta inclinata a 45° sull'asse delle x , la φ ha lo stesso valore. L'integrale di $|\varphi|$ rispetto alla t è dunque, per ogni x di $(0, 1)$, uguale a

$$\int_{E_{M,x}} |\varphi(x, 0)| dx = \int_{E_{M,x}} |f(x)| dx,$$

e si ha

$$\iint_{E_M} |\varphi(x, t)| dx dt = \int_{E_{M,x}} |f(x)| dx.$$

Ricordando che la $f(x)$ è integrabile, si ha, per $M \rightarrow \infty$,

$$\int_{E_{M,x}} |f(x)| dx \rightarrow \int_0^1 |f(x)| dx.$$

Dunque, per $M \rightarrow \infty$,

$$\iint_{E_M} |\varphi(x, t)| dx dt \rightarrow \int_0^1 |f(x)| dx,$$

e la $\varphi(x, t)$ risulta integrabile superficialmente su A .

3. Ritornando all'integrale (6), abbiamo che, essendo $(1 - t^2)^n$ una funzione continua in tutto il campo A , il prodotto $f(x+t)(1 - t^2)^n = \varphi(x, t)(1 - t^2)^n$ risulta, nel medesimo campo, superficialmente integrabile.

(*) G. FUBINI, *Sugli integrali multipli* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie V, vol. XVI, 1.º semestre 1907, pp. 608-614).

Detto, perciò, B il campo, contenuto in A , definito dalle disuguaglianze

$$\begin{aligned} a &\leq x \leq b \\ -\varepsilon &\leq t \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

si ha, per il teorema del FUBINI già ricordato,

$$\begin{aligned} \iint_B f(x+t)(1-t^2)^n dx dt &= \int_a^b dx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t)(1-t^2)^n dt \\ &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (1-t^2)^n dt \int_a^b f(x+t) dx, \end{aligned}$$

ossia, posto

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx,$$

$$\int_a^b dx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t)(1-t^2)^n dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left\{ F(b+t) - F(a+t) \right\} (1-t^2)^n dt. \quad (7)$$

Essendo poi $F(x)$ una funzione continua, si ha

$$F(b+t) - F(a+t) = F(b) - F(a) + \eta(t),$$

con $\eta(t)$ infinitesimo per $t \rightarrow 0$, e

$$\begin{aligned} \int_a^b dx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t)(1-t^2)^n dt &= \left\{ F(b) - F(a) \right\} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (1-t^2)^n dt + \\ &+ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta(t)(1-t^2)^n dt = \left\{ F(b) - F(a) \right\} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (1-t^2)^n dt + \\ &+ \bar{\eta} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (1-t^2)^n dt, \end{aligned}$$

con $\bar{\eta}$ infinitesimo per $t \rightarrow 0$, ed anche

$$= 2 \left\{ F(b) - F(a) + \bar{\eta} \right\} \int_0^1 (1-t^2)^n dt - 2 \left\{ F(b) - F(a) + \bar{\eta} \right\} \int_{\varepsilon}^1 (1-t^2)^n dt.$$

Sostituendo in (4) e tenendo conto del valore di k_n e della (5), si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b P_n(x) dx - \left\{ F(b) - F(a) \right\} \right| &< |\bar{\eta}| + k_n |F(b) - F(a) + \bar{\eta}| \int_{\varepsilon}^1 (1-t^2)^n dt + \\ &+ (n-1)(1-\varepsilon^2)^n (b-a) \int_0^1 |f(z)| dz, \end{aligned}$$

ed essendo

$$\int_{\varepsilon}^1 (1-t^2)^n dt < (1-\varepsilon^2)^n$$

e

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx,$$

e prendendo ε abbastanza piccolo perchè sia $\frac{1}{n} < \sigma$, dove σ è un numero positivo, scelto ad arbitrio, si può scrivere

$$\left| \int_a^b P_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| < \sigma + \left\{ 2 F(b) - F(a) \right\} + 2\sigma + \\ + (b-a) \int_0^1 f(z) dz \left\{ (n+1)(1-\varepsilon^2)^n \right\}.$$

Per $n \rightarrow \infty$, resta, nel secondo membro, σ ; e poichè il σ è arbitrario, risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b P_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

4. Nell'uguaglianza ora dimostrata si può evidentemente sostituire l'intervallo (a, b) con un altro qualunque (α, β) tale che sia $a \leq \alpha < \beta \leq b$, e si può scrivere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} P_n(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

5. Riprendiamo l'uguaglianza (4) applicandola all'intervallo (α, β) , soddisfacente alla condizione detta sopra: è

$$\int_{\alpha}^{\beta} P_n(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{k_n}{2} \int_{-x}^{-\varepsilon} f(x+t) (1-t^2)^n dt + \int_{\varepsilon}^{1-x} \dots \right] dx + \\ + \frac{k_n}{2} \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t) (1-t^2)^n dt,$$

e tenendo conto della (7)

$$\int_{\alpha}^{\beta} P_n(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{k_n}{2} \int_{-x}^{-\varepsilon} f(x+t) (1-t^2)^n dt + \int_{\varepsilon}^{1-x} \dots \right] dx + \\ + \frac{k_n}{2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left\{ F(\beta+t) - F(\alpha+t) \right\} (1-t^2)^n dt. \quad (8)$$

Richiamiamo qui la definizione di *funzione assolutamente continua* ⁽⁷⁾. Una funzione $F(x)$ si dice *assolutamente continua* nell'intervallo (a, b) se, preso arbitrariamente un numero positivo σ , è possibile di determinarne un altro $\delta > 0$ tale che, essendo $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_p, \beta_p)$ un qualsiasi gruppo d'intervalli non sovrappoventisi di (a, b) , in numero qualunque e soddisfacenti alla disuguaglianza $\sum_{r=1}^p (\beta_r - \alpha_r) < \delta$, si abbia sempre

$$\sum_{r=1}^p \left| F(\beta_r) - F(\alpha_r) \right| < \sigma. \quad (9)$$

Notiamo anche, per il seguito, che in questa definizione può sostituirsi alla differenza $F(\beta_r) - F(\alpha_r)$ il suo valore assoluto. Ricordiamo poi che una funzione integrale è assolutamente continua ⁽⁸⁾.

Dopo ciò, poichè è per definizione

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx,$$

preso ad arbitrio un $\sigma > 0$, possiamo determinare un $\delta > 0$ in modo da avere sempre soddisfatta, sotto le condizioni dette per gli (α_r, β_r) , la (9). Se ora osserviamo che dalla disuguaglianza $\sum_{r=1}^p (\beta_r - \alpha_r) < \delta$ scende l'altra

$$\sum_{r=1}^p \left| (\beta_r + t) - (\alpha_r + t) \right| < \delta,$$

e viceversa, abbiamo anche

$$\left| \sum_{r=1}^p \left| F(\beta_r + t) - F(\alpha_r + t) \right| \right| < \sigma.$$

Applichiamo l'uguaglianza (8) all'intervallo (α_r, β_r) e sommiamo da 1 a p :

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^p \int_{\alpha_r}^{\beta_r} P_n(x) dx &= \sum_{r=1}^p \int_{\alpha_r}^{\beta_r} \left[\frac{k_n}{2} \int_{-x}^{-\varepsilon} f(x+t) (1-t^2)^n dt + \int_{\varepsilon}^{1-x} \dots \right] dx + \\ &+ \frac{k_n}{2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left[\sum_{r=1}^p \left| F(\beta_r + t) - F(\alpha_r + t) \right| \right] (1-t^2)^n dt; \end{aligned}$$

⁽⁷⁾ G. VITALI, *Sulle funzioni integrali* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, Vol. XL (1904-905)].

⁽⁸⁾ V. loc. cit. ⁽⁷⁾.

tenendo conto dell'ultima disuguaglianza scritta e della (5) applicata all'intervallo (α_r, β_r) , abbiamo

$$\left| \sum_{r=1}^p \int_{\alpha_r}^{\beta_r} P_n(x) dx \right| < (n+1) (1-\varepsilon^2)^n \left\{ \sum_{r=1}^p (\beta_r - \alpha_r) \left| \int_0^1 |f(z)| dz + \right. \right. \\ \left. \left. + \sigma \frac{k_n}{2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (1-t^2)^n dt \right. \right.$$

Prendendo il δ , di cui sopra, minore di σ e ricordando il valore di k_n , possiamo scrivere

$$\left| \sum_{r=1}^p \int_{\alpha_r}^{\beta_r} P_n(x) dx \right| < \sigma \left\{ (n+1) (1-\varepsilon^2)^n \int_0^1 |f(z)| dz + 1 \right\}.$$

Per ogni n maggiore di un certo \bar{n} , è

$$(n+1) (1-\varepsilon^2)^n \int_0^1 |f(z)| dz < 1,$$

onde, per ogni $n > \bar{n}$,

$$\left| \sum_{r=1}^p \int_{\alpha_r}^{\beta_r} P_n(x) dx \right| < 2\sigma.$$

Il numero δ possiamo prenderlo sufficientemente piccolo in modo che si abbia anche, per gli stessi intervalli $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)$, sopra indicati, e per $n = 1, 2, \dots, \bar{n}$,

$$\left| \sum_{r=1}^p \int_{\alpha_r}^{\beta_r} P_n(x) dx \right| < 2\sigma.$$

Questa disuguaglianza è dunque valida per tutti gli n da 1 all' ∞ e prova che gli integrali

$$\int_0^x P_n(x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

sono, in (a, b) , equiassolutamente continui.

Applichiamo allora il seguente teorema, dovuto a G. VITALI⁽⁹⁾: «Se $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ è una successione di funzioni integrabili in (a, b) , convergenti verso una funzione f , e se gli integrali delle f_n sono tutti equias-

⁽⁹⁾ G. VITALI, *Sull'integrazione per serie* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXIII, 1907).

solitamente continui nell'intervallo detto, è

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx,$$

dove E indica un qualsiasi gruppo misurabile di (a, b) . Da questo teorema si ha immediatamente:

Se E è un insieme misurabile qualsiasi di (a, b) , è

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E P_n(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

6. La precedente proposizione si può ottenere anche in modo diretto, senza far uso del teorema d'integrazione per serie sopra ricordato. Occorre però premettere il seguente

LEMMA. Se E è un insieme misurabile di (a, b) , è

$$\int_E f(x+t) dx \rightarrow \int_E f(x) dx$$

per $t \rightarrow 0$: in altre parole, la funzione di t , $\int_E f(x+t) dx$, è continua.

Preso ad arbitrio un $\sigma > 0$, determiniamo $\delta > 0$ in modo che, per ogni insieme misurabile I , di (a, b) , di misura $m(I) < \delta$, sia

$$\int_I |f(x)| dx < \sigma. \quad (10)$$

Ciò fatto, rinchiudiamo l'insieme E in un sistema numerabile di intervalli, non sovrappoventisi, $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_r, \beta_r), \dots$, di misura complessiva $\sum_r (\beta_r - \alpha_r) < m(E) + \delta$, e scegliamo un intero p sufficientemente

grande affinché si abbia $\sum_{r=p+1}^{\infty} (\beta_r - \alpha_r) < \delta$. Allora negli intervalli $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_p, \beta_p)$ è contenuta, di E , una parte E' di misura $m(E') > m(E) - \delta$; inoltre è

$$\sum_{r=1}^p (\beta_r - \alpha_r) < m(E) + \delta < m(E') + 2\delta.$$

Poniamo $\varepsilon = \frac{\delta}{p}$. Con ciò, per ogni t tale che sia $|t| \leq \varepsilon$, le parti degli intervalli $(\alpha_1 + t, \beta_1 + t), \dots, (\alpha_p + t, \beta_p + t)$ esterne agli intervalli $(\alpha_1, \beta_1), \dots$

..., (α_p, β_p) hanno una somma $\leq \delta$ (perchè la parte di $(\alpha_r + t, \beta_r + t)$ esterna a (α_r, β_r) è $\leq \varepsilon$). Indichiamo con E_t l'insieme che si deduce da E con una traslazione lungo l'asse delle x , individuata dal numero t : in altri termini, E_t è l'insieme dei punti di ascissa $x + t$, dove x è l'ascissa del punto generico di E . Indichiamo poi con E'_t la parte di E_t che corrisponde a E' . È $m(E) = m(E_t)$, $m(E') = m(E'_t)$ e E'_t è tutto contenuto negli intervalli $(\alpha_1 + t, \beta_1 + t), \dots, (\alpha_p + t, \beta_p + t)$. Ne viene che la parte di E'_t esterna agli intervalli $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_p, \beta_p)$ ha una misura $\leq \delta$, mentre quella interna ha una misura $\geq m(E') - \delta$. Dunque la parte E''_t comune a E' e E'_t ha una misura $m(E''_t) > m(E') - 3\delta$.

Osserviamo ora che si ha

$$\int_E f(x+t) dx = \int_{E_t} f(x) dx = \int_{E''_t} f(x) dx + \int_{E_t - E''_t} f(x) dx,$$

$$\int_E f(x) dx = \int_{E''_t} f(x) dx + \int_{E - E''_t} f(x) dx,$$

donde

$$\int_E f(x+t) dx - \int_E f(x) dx = \int_{E_t - E''_t} f(x) dx - \int_{E - E''_t} f(x) dx.$$

Se è $|t| \leq \varepsilon$, è

$$m(E - E''_t) = m(E) - m(E''_t) < m(E) - m(E') + 3\delta < 4\delta$$

e

$$m(E_t - E''_t) = m(E_t) - m(E''_t) = m(E) - m(E''_t) < 4\delta;$$

onde, per la (10),

$$\left| \int_E f(x+t) dx - \int_E f(x) dx \right| < \int_{E_t - E''_t} |f(x)| dx + \int_{E - E''_t} |f(x)| dx < 8\sigma.$$

Poichè σ è arbitrario, il lemma è dimostrato.

7. Ciò premesso, consideriamo l'integrale di $P_n(x)$ esteso all'insieme E . È, per la (2)

$$\int_E P_n(x) dx = \int_E \frac{k_n}{2} \left| \int_{-x}^{-x} f(x+t) (1-t^2)^n dt + \int_x^{1-x} \dots \right| dx +$$

$$+ \frac{k_n}{2} \int_E dx \int_{-x}^x f(x+t) (1-t^2)^n dt,$$

con (analogamente a (5))

$$\begin{aligned} \left| \int_E \frac{k_n}{2} \right\} \int_{-x}^{-\varepsilon} f(x+t)(1-t^2)^n dt + \int_{\varepsilon}^{1-x} \dots \left\{ dx \right. &< \\ &< (n+1)(1-\varepsilon^2)^n m(E) \int_0^1 f(z) dz < \\ &< (n+1)(1-\varepsilon^2)^n \int_0^1 f(z) dz. \end{aligned}$$

È poi, per l'integrabilità superficiale di $f(x+t)(1-t^2)^n$, già stabilita nel n. 3, e quindi per l'invertibilità delle integrazioni,

$$\int_E dx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t)(1-t^2)^n dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (1-t^2)^n dt \int_E f(x+t) dx,$$

ed anche, per il lemma dimostrato,

$$\int_E dx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t)(1-t^2)^n dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left\{ \int_E f(x) dx + \eta(t) \right\} (1-t^2)^n dt$$

con $\eta(t)$ infinitesimo con ε . Se questo ε lo prendiamo come lo si è determinato nella dimostrazione del lemma, abbiamo $|\eta(t)| < 8\sigma$ e

$$\int_E dx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t)(1-t^2)^n dt = \left\{ \int_E f(x) dx + \bar{\eta} \right\} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (1-t^2)^n dt$$

con $|\bar{\eta}| < 8\sigma$. Procedendo come al n. 3, si giunge a

$$\begin{aligned} \left| \int_E P_n(x) dx - \int_E f(x) dx \right| &< 8\sigma + \left\{ 2 \left| \int_E f(x) dx + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 16\sigma + \int_0^1 |f(z)| dz \right\} (n+1)(1-\varepsilon^2)^n, \end{aligned}$$

da cui si ha, per $n \rightarrow \infty$, ed osservando che σ è arbitrario,

$$\int_E P_n(x) dx \rightarrow \int_E f(x) dx.$$

8. Dall'equiassoluta continuità degli integrali $\int_0^x P_n(x) dx$, dimostrata al n. 5, scende quella degli integrali $\int_0^x P_n(x) dx$, onde, avendosi quasi

dappertutto in (a, b) , $P_n(x) \rightarrow f(x)$, è, per il teorema sull'integrazione per serie del VITALI,

$$\int_E |P_n(x)| dx \rightarrow \int_E |f(x)| dx$$

per $n \rightarrow \infty$ e per qualsiasi insieme misurabile E di (a, b) .

OSSERVAZIONE. Da

$$P_n(x) = \frac{k_n}{2} \int_0^1 f(z) \left\{ 1 - (z-x)^2 \right\}^n dz$$

si deduce

$$|P_n(x)| \leq \frac{k_n}{2} \int_0^1 |f(z)| \left\{ 1 - (z-x)^2 \right\}^n dz.$$

Ora, il secondo membro di questa disuguaglianza non è altro che il polinomio $P_n(x)$ relativo alla funzione $|f(x)|$, e tende perciò, per $n \rightarrow \infty$, quasi dappertutto in (a, b) verso $|f(x)|$. Ma a $|f(x)|$ tende quasi dappertutto in (a, b) anche $|P_n(x)|$, onde si ha che la differenza

$$\frac{k_n}{2} \int_0^1 |f(z)| \left\{ 1 - (z-x)^2 \right\}^n dz - |P_n(x)|$$

tende, per $n \rightarrow \infty$, quasi dappertutto a zero, in (a, b) . Inoltre, l'integrale di questa differenza, esteso ad un qualsiasi gruppo misurabile E , tende a zero per $n \rightarrow \infty$, perchè l'integrale del suo primo termine e quello del secondo tendono entrambi all'integrale della $|f(x)|$.

§ II.

EQUIASSOLUTA CONTINUITÀ.

9. Riprendiamo la forma (1) del polinomio $P_n(x)$, vale a dire,

$$P_n(x) = \frac{k_n}{2} \int_{-x}^{1-x} f(x+t) (1-t^2)^n dt,$$

e indicato con (z, β) un qualsivoglia intervallo di (a, b) , consideriamo la dif-

ferenza dei valori di $P_n(x)$ nei suoi estremi. È

$$\begin{aligned} P_n(\beta) - P_n(\alpha) &= \frac{k_n}{2} \left\{ \int_{-\beta}^{1-\beta} f(\beta+t)(1-t^2)^n dt - \int_{-\alpha}^{1-\alpha} f(\alpha+t)(1-t^2)^n dt \right\} = \\ &= \frac{k_n}{2} \int_{-\alpha}^{1-\beta} \left\{ f(\beta+t) - f(\alpha+t) \right\} (1-t^2)^n dt + \\ &+ \frac{k_n}{2} \left\{ \int_{-\beta}^{-\alpha} f(\beta+t)(1-t^2)^n dt - \int_{1-\beta}^{1-\alpha} f(\alpha+t)(1-t^2)^n dt \right\}, \end{aligned}$$

e prendendo il modulo

$$\begin{aligned} |P_n(\beta) - P_n(\alpha)| &\leq \frac{k_n}{2} \int_{-\alpha}^{1-\beta} |f(\beta+t) - f(\alpha+t)| (1-t^2)^n dt + \\ &+ \frac{k_n}{2} \left\{ (1-\alpha^2)^n \int_{-\beta}^{-\alpha} |f(\beta+t)| dt + \left(1 - (1-\beta)^2\right)^n \int_{1-\beta}^{1-\alpha} |f(\alpha+t)| dt \right\}, \end{aligned}$$

ed anche, supposto ε minore tanto di α quanto di $1-\beta$,

$$\begin{aligned} |P_n(\beta) - P_n(\alpha)| &\leq \frac{k_n}{2} \int_{-\alpha}^{1-\beta} |f(\beta+t) - f(\alpha+t)| (1-t^2)^n dt + \\ &+ \frac{k_n}{2} (1-\varepsilon^2)^n \left\{ \int_0^{\beta-\alpha} |f(z)| dz + \int_{1-(\beta-\alpha)}^1 |f(z)| dz \right\}. \end{aligned}$$

Introduciamo l'ipotesi che la $f(x)$ sia limitata in tutto (α, β) : allora lo è anche in tutto $(0, 1)$ e si ha, per un numero positivo M conveniente,

$$|f(x)| < M,$$

per ogni x di $(0, 1)$. Con questa ipotesi, la disuguaglianza sopra scritta può essere sostituita dall'altra

$$\begin{aligned} |P_n(\beta) - P_n(\alpha)| &< \frac{k_n}{2} \int_{-\alpha}^{1-\beta} |f(\beta+t) - f(\alpha+t)| (1-t^2)^n dt + \\ &+ k_n (1-\varepsilon^2)^n M (\beta - \alpha). \end{aligned}$$

Ponendo $f(x) = f(0)$ in $(-1, 0)$ e $f(x) = f(1)$ in $(1, 2)$, si può anche scrivere

$$\begin{aligned} |P_n(\beta) - P_n(\alpha)| &< \frac{k_n}{2} \int_{-\beta}^{1-\alpha} |f(\beta+t) - f(\alpha+t)| (1-t^2)^n dt + \\ &+ k_n (1-\varepsilon^2)^n M (\beta - \alpha). \end{aligned}$$

Da questa disuguaglianza si deduce, se

$$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_r, \beta_r), \dots$$

è una successione qualsiasi di intervalli di (a, b) tale che $\sum_r (\beta_r - \alpha_r)$ e $\sum_r |f(\beta_r + t) - f(\alpha_r + t)|$ siano convergenti,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{r=1}^{\infty} P_n(\beta_r) - P_n(\alpha_r) &< \frac{k_n}{2} \int_{-b}^{1-a} \sum_{r=1}^{\infty} |f(\beta_r + t) - f(\alpha_r + t)| \left\{ (1-t^2)^n dt + \right. \\ &\left. + k_n (1-\varepsilon^2)^n M \sum_{r=1}^{\infty} (\beta_r - \alpha_r) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

la quale vale dunque nell'ipotesi che la f sia integrabile e limitata.

10. Supponiamo la $f(x)$ assolutamente continua in (a, b) , il che porta, per le costruzioni fatte, che sia tale anche in $(-1, 2)$. Preso pertanto un numero arbitrario $\sigma > 0$, è possibile di determinare un $\delta > 0$ (che prenderemo anche $< \sigma$) in modo che, se $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_p, \beta_p)$ è un qualsiasi gruppo di intervalli non sovrappoventisi di $(-1, 2)$, di lunghezza complessiva $\sum_{r=1}^p (\beta_r - \alpha_r) < \delta$, si abbia sempre

$$\sum_{r=1}^p |f(\beta_r) - f(\alpha_r)| < \sigma.$$

Sia ora $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_p, \beta_p)$ un gruppo di intervalli non sovrappoventisi di (a, b) , tali che $\sum_{r=1}^p (\beta_r - \alpha_r) < \delta$: per la precedente disuguaglianza e per la (11) si ha

$$\sum_{r=1}^p |P_n(\beta_r) - P_n(\alpha_r)| < \frac{k_n}{2} \sigma \int_{-b}^{1-a} (1-t^2)^n dt + k_n (1-\varepsilon^2)^n M \sigma,$$

e per essere

$$\int_{-b}^{1-a} (1-t^2)^n dt < 2 \int_0^1 (1-t^2)^n dt = \frac{2}{k_n}$$

e (n. 1) $k_n < 2(n+1)$,

$$\sum_{r=1}^p |P_n(\beta_r) - P_n(\alpha_r)| < \sigma \left\{ 1 + 2M(n+1)(1-\varepsilon^2)^n \right\},$$

e da un certo \bar{n} in poi,

$$\sum_{r=1}^p |P_n(\beta_r) - P_n(\alpha_r)| < 2\sigma.$$

Prendiamo il numero δ , oltre che soddisfacente alle condizioni poste, anche tale da rendere soddisfatta questa disuguaglianza per i valori $1, 2, \dots, \bar{n}$ di n e per tutti i sistemi di intervalli non sovrappoventisi di $(a, b) : (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_p, \beta_p)$, di lunghezza complessiva $< \delta$. Allora tale disuguaglianza vale per tutti i sistemi detti e per tutti i valori di n , e si conclude:

Se la $f(x)$ è in (a, b) assolutamente continua, i polinomi $P_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ sono tutti, nello stesso intervallo, equiassolutamente continui.

11. Se osserviamo che si ha

$$\int_{\alpha}^{\beta} P'_n(x) dx = P_n(\beta) - P_n(\alpha)$$

e che la $f(x)$, essendo assolutamente continua, ha derivata finita quasi dappertutto, e se ricordiamo infine il risultato ottenuto dal DE LA VALLÉE POUSSIN sul limite di $P'_n(x)$, vale a dire, che in ogni punto ove esiste la $f'(x)$ è

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P'_n(x) = f'(x),$$

abbiamo, per il teorema sull'integrazione per serie già ricordato al n. 5, che

Se E è un insieme misurabile qualsiasi di (a, b) e se la $f(x)$ è assolutamente continua, è, per $n \rightarrow \infty$,

$$\int_E P'_n(x) dx \rightarrow \int_E f'(x) dx.$$

Dall'equiassoluta continuità degli integrali $\int_0^x P'_n(x) dx$ (che, all'infuori di costanti, coincidono coi $P_n(x)$) scende quella degli integrali $\int_0^x |P'_n(x)| dx$, onde

Se E è un insieme misurabile qualsiasi di (a, b) e se la $f(x)$ è assolutamente continua, si ha, per $n \rightarrow \infty$,

$$\int_E |P'_n(x)| dx \rightarrow \int_E |f'(x)| dx.$$

12. Supposto dimostrato, in modo diretto, senza ricorrere all'integrale, che una funzione assolutamente continua ha quasi dappertutto derivata finita (¹⁰), la prima delle due proposizioni del numero precedente fornisce una nuova dimostrazione di questo teorema (LEBESGUE-VITALI): « se la $f(x)$ è assolutamente continua, si ha

$$f(\beta) - f(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx. »$$

Ed invero, per la proposizione menzionata, si ha

$$\int_{\alpha}^{\beta} P'_n(x) dx \rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx$$

per $n \rightarrow \infty$, ossia

$$P_n(\beta) - P_n(\alpha) \rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx.$$

Per la continuità della $f(x)$, si ha poi

$$P_n(\beta) \rightarrow f(\beta), \quad P_n(\alpha) \rightarrow f(\alpha)$$

e quindi

$$f(\beta) - f(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx.$$

§ III.

VARIAZIONE TOTALE.

13. Supponiamo ancora la $f(x)$ assolutamente continua in (a, b) . Come è noto, in tale ipotesi, la *variazione totale* della $f(x)$, in un qualsiasi intervallo (α, β) di (a, b) , è data dall'integrale di $|f'(x)|$. Detta $V(x)$ la variazione totale della $f(x)$ in (a, x) , si ha così

$$V(\beta) - V(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} |f'(x)| dx.$$

(¹⁰) Vedi: L. TONELLI, *Sulla ricerca delle funzioni primitive* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1916).

Indichiamo con $V_n(x)$ la variazione totale di $P_n(x)$ in (a, x) : avremo

$$V_n(\beta) - V_n(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} |P'_n(x)| dx$$

e, per la seconda proposizione del n. 11,

$$V_n(\beta) - V_n(\alpha) \rightarrow V(\beta) - V(\alpha)$$

per $n \rightarrow \infty$. Dunque

Supposta la $f(x)$ assolutamente continua, la sua variazione totale, in un intervallo qualunque di (a, b) , è il limite della variazione totale corrispondente del polinomio $P_n(x)$.

Questa proposizione vale anche se, invece della variazione totale in un intervallo (α, β) , si considera quella relativa ad una successione di intervalli (α_r, β_r) ($r = 1, 2, \dots$) non sovrappoventisi di (a, b) . Ed invero, avendosi

$$\begin{aligned} \sum_r \left\{ V(\beta_r) - V(\alpha_r) \right\} &= \sum_r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} |f'(x)| dx, \\ \sum_r \left\{ V_n(\beta_r) - V_n(\alpha_r) \right\} &= \sum_r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} |P'_n(x)| dx, \end{aligned}$$

per la proposizione del n. 11 già ricordata, il secondo membro della seconda uguaglianza tende, per $n \rightarrow \infty$, al secondo membro della prima.

14. La proposizione del numero precedente, relativa ad un intervallo (α, β) di (a, b) , vale anche se la $f(x)$ non è assolutamente continua.

Supponiamo che la $f(x)$ sia a *variazione limitata*: essa, allora, se è discontinua, ha soltanto discontinuità di 1.^a specie. Supporremo, inoltre, che $f(x)$ sia sempre compresa fra $f(x-0)$ e $f(x+0)$. La $f(x)$ risultando limitata, vale per essa la disuguaglianza (11)

$$\sum_r |P_n(\beta_r) - P_n(\alpha_r)| < \frac{k_n}{2} \int_{-b}^{1-a} \left\{ \sum_r |f(\beta_r + t) - f(\alpha_r + t)| \left\{ (1-t^2)^n dt + \right. \right. \\ \left. \left. + k_n (1-\varepsilon^2)^n M \sum_r (\beta_r - \alpha_r), \right\} \right. \quad (11')$$

la quale sussiste per qualsiasi successione d'intervalli di (a, b) , tale che le serie $\sum_r (\beta_r - \alpha_r)$, $\sum_r |f(\beta_r + t) - f(\alpha_r + t)|$ siano convergenti.

Dividiamo l'intervallo (α, b) in un numero arbitrario di parti, mediante

i punti $a = x_0 < x_1 < \dots < x_p = b$. Detta V la variazione totale della $f(x)$ in (a, b) , è, per la stessa definizione di variazione totale,

$$\sum_{r=1}^p |f(x_r) - f(x_{r-1})| \leq V.$$

Detto poi t un qualsiasi valore compreso fra $-b$ e $1-a$, gli intervalli $(x_{r-1} + t, x_r + t)$, ($r = 1, 2, \dots, p$) costituiscono un sistema di divisione in parti dell'intervallo $(a + t, b + t)$, e queste parti sono rispettivamente uguali a quelle nelle quali è stato diviso (a, b) . La somma

$$\sum_1^p |f(x_r + t) - f(x_{r-1} + t)|$$

è minore o uguale alla variazione totale della $f(x)$ in $(a + t, b + t)$; e poichè la $f(x)$ fuori di (a, b) (essendo costante) ha una variazione totale nulla, possiamo dire che è

$$\sum_1^p |f(x_r + t) - f(x_{r-1} + t)| \leq V.$$

Dalla (11') si ha così

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^p |P_n(x_r) - P_n(x_{r-1})| &< \frac{k_n}{2} V \int_{-b}^{1-a} (1-t^2)^n dt + k_n (1-\varepsilon^2)^n M(b-a) < \\ &< \frac{k_n}{2} V \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt + k_n (1-\varepsilon^2)^n M < \\ &< V + 2M(n+1)(1-\varepsilon^2)^n. \end{aligned}$$

Siccome tale disuguaglianza vale qualunque sia il sistema delle parti (x_{r-1}, x_r) nelle quali è stato diviso (a, b) , e poichè, inoltre,

$$\sum_1^p |P_n(x_r) - P_n(x_{r-1})|$$

tende alla variazione totale V_n di $P_n(x)$ in (a, b) , al tendere a zero della massima delle parti (x_{r-1}, x_r) , si ha

$$V_n \leq V + 2M(n+1)(1-\varepsilon^2)^n,$$

disuguaglianza valida qualunque sia n . Per $n \rightarrow \infty$, è $(n+1)(1-\varepsilon^2)^n \rightarrow 0$,

onde

$$\text{Mass. Lim}_{n \rightarrow \infty} V_n \leq V. \quad (12)$$

D'altra parte, osserviamo che i punti di discontinuità della $f(x)$ non possono costituire che un insieme numerabile⁽¹¹⁾ e che, per essere sempre $f(x-0) \leq f(x) \leq f(x+0)$, ad ogni divisione di (a, b) in parti (x_{r-1}, x_r) , se ne può sempre sostituire un'altra, in cui tutti i punti di divisione siano punti di continuità per la $f(x)$, e in modo che la somma $\sum f(x_r) - f(x_{r-1})$ non diminuisca.

Ed infatti, se l'estremo x_r comune alle due parti contigue (x_{r-1}, x_r) , (x_r, x_{r+1}) , è un punto di discontinuità, sostituendo a tali parti le tre seguenti: (x_{r-1}, x'_r) , (x'_r, x''_r) , (x''_r, x_{r+1}) , dove x'_r e x''_r sono punti di continuità per la $f(x)$, tali che sia $x_{r-1} < x'_r < x_r < x''_r < x_{r+1}$, si ha che, nella somma $\sum |f(x_r) - f(x_{r-1})|$, ai due termini $|f(x_r) - f(x_{r-1})|$, $|f(x_{r+1}) - f(x_r)|$ vengono ad essere sostituiti i tre $|f(x'_r) - f(x_{r-1})|$, $|f(x''_r) - f(x'_r)|$, $|f(x_{r+1}) - f(x''_r)|$. E siccome in ogni intorno di x_r , tanto a destra quanto a sinistra di x_r , esistono sempre infiniti punti di continuità per la $f(x)$, e poichè inoltre $|f(x'_r) - f(x_{r-1})| + |f(x''_r) - f(x'_r)| + |f(x_{r+1}) - f(x''_r)|$ tende, al tendere di x'_r e x''_r a x_r , a

$$\begin{aligned} & |f(x_r - 0) - f(x_{r-1})| + |f(x_r + 0) - f(x_r - 0)| + |f(x_{r+1}) - f(x_r + 0)| = \\ & = \left\{ |f(x_r - 0) - f(x_{r-1})| + |f(x_r) - f(x_r - 0)| \right\} + \\ & \quad + \left\{ |f(x_r + 0) - f(x_r)| + |f(x_{r+1}) - f(x_r + 0)| \right\} > \\ & > |f(x_r) - f(x_{r-1})| + |f(x_{r+1}) - f(x_r)|, \end{aligned}$$

l'osservazione fatta risulta provata. Tenendo conto del fatto che in ogni punto di continuità per la $f(x)$ è $P_n(x) \rightarrow f(x)$, si ha poi che, fissato ad arbitrio un $\sigma > 0$, ad ogni divisione di (a, b) in parti (x_{r-1}, x_r) mediante punti ove la $f(x)$ è continua corrisponde un intero \bar{n} tale da rendere

$$\sum_r |P_n(x_r) - P_n(x_{r-1})| > \sum_r |f(x_r) - f(x_{r-1})| - \sigma,$$

per ogni $n > \bar{n}$. Ricordiamo ora che, date le ipotesi fatte sulla $f(x)$, la somma

⁽¹¹⁾ Cfr. L. TONELLI, *Discontinuità di 1.^a specie e gruppi di punti* (Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Serie II, Vol. XLI, 1908, pagg. 773-778).

$\sum_r |f(x_r) - f(x_{r-1})|$ tende alla variazione totale V quando la massima delle parti (x_{r-1}, x_r) tende a zero. Se dunque le parti in cui (a, b) è diviso sono sufficientemente piccole, si ha, tenendo presente la disuguaglianza

$$\begin{aligned} \sum_r |P_n(x_r) - P_n(x_{r-1})| &\leq V_n, \\ V_n &> V - 2\sigma, \end{aligned}$$

la quale vale per ogni $n > \bar{n}$. Da essa scende immediatamente

$$\text{Min. Lim}_{n \rightarrow \infty} V \cong V. \quad (13)$$

Questa disuguaglianza, unita alla (12), dà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = V, \quad (14)$$

vale a dire:

Se la $f(x)$ è in (a, b) a variazione limitata, e se è sempre

$$f(x-0) \leq f(x) \leq f(x+0),$$

la variazione totale del polinomio $P_n(x)$ tende, per $n \rightarrow \infty$, alla variazione totale della $f(x)$.

15. La proposizione ora stabilita è relativa alla variazione totale della $f(x)$ e di $P_n(x)$ nell'intervallo (a, b) ; ma però si estende anche ad un qualsiasi intervallo (α, β) di (a, b) . Infatti, le variazioni totali della $f(x)$ e di $P_n(x)$ sono date, in (α, β) , rispettivamente da

$$V(\beta) - V(\alpha) \quad \text{e} \quad V_n(\beta) - V_n(\alpha),$$

dove $V(x)$ e $V_n(x)$ indicano, come al n. 13, le variazioni totali della $f(x)$ e di $P_n(x)$ in (a, x) , ed è, per la (13) applicata all'intervallo (α, β) ,

$$\text{Min. Lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ V_n(\beta) - V_n(\alpha) \right\} \cong V(\beta) - V(\alpha). \quad (15)$$

Supponiamo che esista una successione di interi positivi, crescenti, $n_1, n_2, \dots, n_r, \dots$, tale che sia

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ V_{n_r}(\beta) - V_{n_r}(\alpha) \right\} > V(\beta) - V(\alpha). \quad (16)$$

Dovendo essere

$$\text{Min. Lim}_{r \rightarrow \infty} \left\{ V_{n_r}(x) - V_{n_r}(a) \right\} \cong V(x) - V(a)$$

ed anche

$$\text{Min. Lim}_{r \rightarrow \infty} \left\{ V_{n_r}(b) - V_{n_r}(\beta) \right\} \cong V(b) - V(\beta),$$

si ha, sommando le tre ultime disuguaglianze,

$$\text{Min. Lim}_{r \rightarrow \infty} \left\{ V_{n_r}(b) - V_{n_r}(a) \right\} > V(b) - V(a),$$

il che contraddice alla (14). Non può dunque sussistere la (16), e deve essere necessariamente, per la (15),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ V_n(\beta) - V_n(\alpha) \right\} = V(\beta) - V(\alpha).$$

16. Più generalmente, ferme restando le ipotesi fatte sulla $f(x)$ al n. 14, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^p \left\{ V_n(\beta_r) - V_n(\alpha_r) \right\} = \sum_{r=1}^p \left\{ V(\beta_r) - V(\alpha_r) \right\},$$

dove $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_p, \beta_p)$ è un sistema qualsiasi di un numero finito di intervalli di (a, b) .

17. Togliamo la condizione relativa alle discontinuità della $f(x)$.

Supponiamo soltanto che la $f(x)$ sia integrabile in (a, b) (ipotesi che, come già abbiamo osservato, è indispensabile alla costruzione stessa di $P_n(x)$). Abbiamo allora che se, per $n \rightarrow \infty$, è $V_n \rightarrow \infty$, la variazione totale della $f(x)$ è infinita. Ed infatti, nel caso contrario, la $f(x)$ sarebbe a variazione limitata e avrebbe solamente delle discontinuità di 1.^a specie; epperò, definita la funzione $\bar{f}(x)$ uguale alla $f(x)$ ove questa è continua o compresa fra $f(x-0)$ e $f(x+0)$, e uguale a $f(x-0)$ altrove, questa $f(x)$ risulterebbe distinta dalla $\bar{f}(x)$ in un'infinità numerabile di punti al più e il polinomio $P_n(x)$ ad essa relativo coinciderebbe necessariamente con quello della $\bar{f}(x)$. Ne verrebbe così che V_n dovrebbe tendere, per $n \rightarrow \infty$, alla variazione totale \bar{V} di $\bar{f}(x)$ (n. 14), variazione che è inferiore alla \bar{V} .

Invece, se V_n tende, per $n \rightarrow \infty$, ad un limite finito, la variazione totale della $f(x)$ può essere tanto finita quanto infinita.

Se poi si suppone che la variazione totale della $f(x)$ sia finita, V_n tende (per quello che si è detto or ora) ad un limite finito $\leq V$, e si ha

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n + 2 \sum \delta_x,$$

dove δ_x è il minore dei due moduli $|f(x) - f(x-0)|$, $|f(x) - f(x+0)|$ ⁽¹²⁾.

18: Occorre stabilire la seguente proposizione di carattere generale:

Se $f(x)$ è una funzione a variazione limitata in (a, b) , la sua variazione totale V è data da

$$V = \int_a^b |f'| dx + V_1, \quad (17)$$

dove V_1 indica la variazione totale della $f(x)$ nell'insieme E dei punti nei quali la $f'(x)$ non esiste o è infinita.

Supponiamo dapprima che la $f(x)$, la quale, per l'ipotesi fatta, può avere soltanto discontinuità di 1.^a specie, resti, in ogni punto, compresa fra $f(x-0)$ e $f(x+0)$ (estremi inclusi). L'insieme E dell'enunciato è necessariamente di misura nulla. Rinchiudiamolo con una successione d'intervalli $\{\Delta_n\}$, non sovrappoventisi, di (a, b) , di lunghezza complessiva $\sum \Delta_n < \varepsilon$, dove ε indica un numero positivo, scelto ad arbitrio. La successione $\{\Delta_n\}$ sia presa in modo che ogni punto di E , distinto da a e b , risulti o interno ad un Δ_n o l'estremo comune di due Δ_n contigui. Corrispondentemente a questa successione $\{\Delta_n\}$, definiamo una funzione $\varphi(x)$ nel seguente modo: sia $\varphi(x) = f(x)$ in ogni punto di (a, b) esterno a tutti i Δ_n ed anche nelle estremità di questi intervalli, e sia

$$\varphi(x) = \varphi(\alpha_n) + \frac{\varphi(\beta_n) - \varphi(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} (x - \alpha_n)$$

nell'interno di ogni $\Delta_n \equiv (\alpha_n, \beta_n)$. Questa funzione $\varphi(x)$ risulta evidentemente continua in tutto (a, b) (si osservi che i punti di discontinuità della $f(x)$ sono interni ai Δ_n oppure sono estremi comuni di due Δ_n contigui) ed anche a variazione limitata, perchè la sua variazione totale non può superare quella della $f(x)$. Inoltre, essa ammette in ogni punto di (a, b) (fatta naturalmente eccezione per l'estremo b) la derivata destra $D^* \varphi$, finita. Ciò è evidente per i punti interni ai Δ_n e per i primi estremi α_n di questi intervalli. Supponiamo

⁽¹²⁾ Poichè i punti di discontinuità della $f(x)$ costituiscono al massimo un'infinità numerabile, i δ_x sono anch'essi in un'infinità numerabile, al più.

che x sia o il secondo estremo β_n di un Δ_n oppure un punto esterno a tutti i Δ_n . Si possono presentare due casi: 1.º se esiste un numero positivo h tale che in $(x, x+h)$ non cadano punti dei Δ_n , distinti da x , allora in quell'intervallo $(x, x+h)$ è sempre $\varphi(x) = f(x)$, e poichè in x esiste, finita, la derivata $f'(x)$ di $f(x)$ è $D^*\varphi = f'(x)$; 2.º se, comunque si scelga $h > 0$, in $(x, x+h)$ esistono sempre infiniti Δ_n , allora, avendosi

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

nel caso di $x+h$ non interno a qualche Δ_n , e $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$ compreso fra $\frac{f(\alpha_n) - f(x)}{\alpha_n - x}$ e $\frac{f(\beta_n) - f(x)}{\beta_n - x}$ nel caso di $x+h$ interno a $\Delta_n \equiv (\alpha_n, \beta_n)$, si vede anche qui che, per l'esistenza in x della derivata $f'(x)$, nel punto detto vi è pure la $D^*\varphi$, uguale a $f'(x)$. Si può dunque affermare che la $D^*\varphi$ esiste finita dappertutto (escluso b), e, di più, che fuori dei Δ_n è $D^*\varphi = f'$. Per il primo di questi due fatti, la φ , che è a variazione limitata, risulta assolutamente continua in (a, b) , per guisa tale che, detta V_φ la sua variazione totale, si ha

$$V_\varphi = \int_a^b |\varphi'(x)| dx.$$

Indichiamo con C_A l'insieme dei punti che restano in (a, b) quando si tolgano tutti quelli che appartengono ai Δ_n . Possiamo scrivere con ciò

$$V_\varphi = \int_{C_A} |\varphi'(x)| dx + \sum_n \int_{\Delta_n} |\varphi'(x)| dx,$$

e per quanto si è veduto or ora

$$V_\varphi = \int_{C_A} |f'(x)| dx + \sum_n \int_{\Delta_n} |\varphi'(x)| dx.$$

Negli intervalli Δ_n la φ è lineare e nei loro estremi coincide con la $f(x)$: è dunque (se $\Delta_n \equiv (\alpha_n, \beta_n)$)

$$\int_{\Delta_n} |\varphi'(x)| dx = |\varphi(\beta_n) - \varphi(\alpha_n)| = |f(\beta_n) - f(\alpha_n)|$$

e perciò

$$V_\varphi = \int_{C_A} |f'(x)| dx + \sum_n |f(\beta_n) - f(\alpha_n)|. \quad (18)$$

Come già abbiamo osservato, è $V_{\varphi} \leq V$; d'altra parte, quando la somma $\Sigma \Delta_n$ tende a zero, $\varphi(x)$ tende quasi dappertutto in (a, b) alla $f(x)$ (perchè $\varphi(x)$ coincide con la $f(x)$ fuori dei Δ_n e quindi in un insieme di misura $(b - a) - \Sigma \Delta_n$) e la sua variazione totale ha un minimo limite $\cong V$. È dunque, al tendere a zero di $\Sigma \Delta_n$, $V_{\varphi} \rightarrow V$. Pure al tendere di $\Sigma \Delta_n$ a zero, è

$$\int_{C_A} |f'(x)| dx \rightarrow \int_a^b |f'(x)| dx$$

e se ne conclude, per la (18), che $\Sigma_n |f(\beta_n) - f(\alpha_n)|$ tende anch'essa ad un limite determinato e finito, indipendentemente dal modo con cui si scelgono i Δ_n , purchè contengano sempre l'insieme E nel modo detto, ed anche da quello con cui si fa tendere a zero la $\Sigma \Delta_n$. Questo limite è la variazione totale V_1 della $f(x)$ nell'insieme E : infatti, indicatolo con V'_1 , si ha da (18)

$$V = \int_a^b |f'(x)| dx + V'_1,$$

formula valida nell'intervallo (a, b) . In ogni intervallo parziale (a, x) di (a, b) si ha una formula corrispondente

$$V(x) = \int_a^x |f'(x)| dx + V'_1(x),$$

tutti i termini della quale sono funzioni non decrescenti della x . Ricordiamo ora che V_1 è, per definizione, il massimo limite delle somme $\Sigma |f(b_n) - f(a_n)|$, per $\Sigma (b_n - a_n) \rightarrow 0$, dove (a_r, b_r) ($r = 1, 2, \dots$) rappresenta una successione qualsiasi di intervalli non sovrappoventisi di (a, b) , i quali ricoprono interamente l'insieme di punti Σ . Abbiamo, evidentemente,

$$|f(b_n) - f(a_n)| \leq V(b_n) - V(a_n) = \int_{a_n}^{b_n} |f'(x)| dx + V'_1(b_n) - V'_1(a_n),$$

$$\Sigma |f(b_n) - f(a_n)| \leq \Sigma \int_{a_n}^{b_n} |f'(x)| dx + \Sigma \left\{ V'_1(b_n) - V'_1(a_n) \right\}.$$

E poichè, per l'assoluta continuità di $\int_0^x |f'(x)| dx$, è, al tendere a zero di $\Sigma (b_n - a_n)$,

$$\Sigma \int_{a_n}^{b_n} |f'(x)| dx \rightarrow 0,$$

mentre si ha sempre, per essere $V'_1(x)$ non decrescente,

$$\Sigma \left\{ V'_1(b_n) - V'_1(a_n) \right\} \leq V'_1,$$

così risulta

$$\text{Mass. Lim } \Sigma |f(b_n) - f(a_n)| \leq V'_1$$

e $V_1 \leq V'_1$. Ma V'_1 , per la sua definizione, deve essere $\leq V_1$, dunque è dimostrato che è $V_1 = V'_1$.

La (17) è così stabilita nell'ipotesi supplementare che la $f(x)$ resti sempre compresa fra $f(x-0)$ e $f(x+0)$.

Liberiamoci da questa condizione. Supponiamo dunque la $f(x)$ soltanto a variazione limitata e indichiamo con $\bar{f}(x)$ una nuova funzione coincidente con la $f(x)$ in tutti i punti in cui questa è continua o rimane compresa fra $f(x-0)$ e $f(x+0)$ e uguale a $f(x-0)$ altrove. Applicando la (17) alla $f(x)$, cosa lecita per quanto sopra è dimostrato, abbiamo

$$\bar{V} = \int_a^b |f'(x)| dx + \bar{V}_1,$$

e siccome è quasi dappertutto $f(x) = \bar{f}(x)$,

$$\bar{V} = \int_a^b |f'(x)| dx + \bar{V}_1. \quad (19)$$

Per ogni punto x ove la $f(x)$ è discontinua senza essere compresa fra $f(x-0)$ e $f(x+0)$, consideriamo, come alla fine del n. 17, il minore dei due moduli $|f(x) - f(x-0)|$, $|f(x) - f(x+0)|$, e indichiamolo con δ_x . È

$$V = \bar{V} + 2 \Sigma \delta_x,$$

ed anche

$$V_1 = \bar{V}_1 + 2 \Sigma \delta_x;$$

dunque, per la (19),

$$V = \int_a^b |f'(x)| dx + V_1,$$

come dovevasi dimostrare.

OSSERVAZIONE. La formula (17) ha valore per ogni intervallo parziale di (a, b) : è cioè

$$V(x) = \int_a^x |f'(x)| dx + V_1(x), \quad (20)$$

e $V_1(x)$ risulta anch'essa funzione non mai decrescente della x .

19. Dalla proposizione ora dimostrata si può dedurre questa conseguenza:

Supposta la $f(x)$ a variazione limitata in (a, b) e preso arbitrariamente un $\sigma > 0$, è possibile di determinare un $\delta > 0$ in modo che si abbia, se (α_r, β_r) ($r = 1, 2, \dots$) è una successione qualsiasi d'intervalli non sovrappontisi di (a, b) , soddisfacenti alla $\Sigma(\beta_r - \alpha_r) < \delta$,

$$\Sigma \left\{ V(\beta_r) - V(\alpha_r) \right\} < V_1 + \sigma. \quad (21)$$

Dalla (20) si ha infatti

$$\Sigma \left\{ V(\beta_r) - V(\alpha_r) \right\} = \Sigma \int_{\alpha_r}^{\beta_r} |f'(x)| dx + \Sigma \left\{ V_1(\beta_r) - V_1(\alpha_r) \right\}.$$

Poichè la $V_1(x)$ è non decrescente, è $\Sigma \left\{ V_1(\beta_r) - V_1(\alpha_r) \right\} \leq V_1$; d'altra parte, prendendo δ convenientemente piccolo $\Sigma \int_{\alpha_r}^{\beta_r} |f'(x)| dx$ può rendersi sempre $< \sigma$ (per l'assoluta continuità di $\int_0^x f'(x) dx$). La proposizione è dunque dimostrata.

20. Riprendiamo la disuguaglianza (11), applicandola ad una successione d'intervalli non sovrappontisi (α_r, β_r) ($r = 1, 2, \dots$), di (a, b) , tali che sia $\Sigma(\beta_r - \alpha_r) < \delta$, dove questo δ è quello della proposizione del numero precedente. Osservato che $f(\beta_r + t) - f(\alpha_r + t) \leq V(\beta_r + t) - V(\alpha_r + t)$ e che $\Sigma \left\{ (\beta_r + t) - (\alpha_r + t) \right\} = \Sigma(\beta_r - \alpha_r)$ si ha, per la (21),

$$\begin{aligned} \Sigma_r |P_n(\beta_r) - P_n(\alpha_r)| &< \frac{k_n}{2} (V_1 + \sigma) \int_{-b}^{1-a} (1-t^2)^n dt + k_n (1-\varepsilon^2)^n M \cdot \delta < \\ &< V_1 + \sigma + 2(n+1)(1-\varepsilon^2)^n M \cdot \delta. \end{aligned}$$

Si ha, pertanto:

Se la funzione $f(x)$ è, in (a, b) , a variazione limitata, preso ad arbitrio un $\sigma > 0$, è possibile di determinare un $\delta > 0$ tale che, per qualsiasi successione d'intervalli non sovrappontisi di (a, b) , (α_r, β_r) ($r = 1, 2, \dots$), soddisfacenti alla $\Sigma(\beta_r - \alpha_r) < \delta$, e per qualsiasi n , si abbia

$$\Sigma_r |P_n(\beta_r) - P_n(\alpha_r)| < V_1 + \sigma,$$

ed anche

$$\Sigma \left\{ V_n(\beta_r) - V_n(\alpha_r) \right\} < V_1 + \sigma. \quad (22)$$

§ IV.

LUNGHEZZA.

21. Passiamo alla lunghezza della curva

$$y = f(x), \quad (a \leq x \leq b).$$

Supponiamo dapprima la $f(x)$ assolutamente continua. In tale ipotesi, la lunghezza L della nostra curva è data da ⁽¹³⁾

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Indichiamo con L_n la lunghezza della curva

$$y = P_n(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

È anche qui

$$L_n = \int_a^b \sqrt{1 + P'_n(x)^2} dx.$$

Osserviamo che si ha

$$\sqrt{1 + P'_n(x)^2} \leq 1 + |P'_n(x)|,$$

$$\int_{\alpha_r}^{\beta_r} \sqrt{1 + P'_n(x)^2} dx \leq (\beta_r - \alpha_r) + \int_{\alpha_r}^{\beta_r} |P'_n(x)| dx,$$

$$\sum_{r=1}^p \int_{\alpha_r}^{\beta_r} \sqrt{1 + P'_n(x)^2} dx \leq \sum_1^p (\beta_r - \alpha_r) + \sum_1^p \int_{\alpha_r}^{\beta_r} |P'_n(x)| dx.$$

Per l'equiassoluta continuità degli integrali $\int_0^x |P'_n(x)| dx$ (n. 11), preso

⁽¹³⁾ L. TONELLI, *Sulla rettificazione delle curve* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XLIII (1908)]. — Idem, *Sulla lunghezza di una curva* [idem, XLVII (1912)].

Assumeremo come definizione della lunghezza, la seguente: dicesi lunghezza della curva $\gamma = f(x)$, ($a \leq x \leq b$), il limite superiore delle lunghezze delle poligonali in essa inscritte, e tali che in ciascuna di esse i vertici si susseguano nell'ordine stesso delle loro ascisse.

un $\sigma > 0$, a piacere, è possibile di determinare un $\delta > 0$ tale che, per ogni sistema $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_p, \beta_p)$ di intervalli non sovrappoventisi di (a, b) , soddisfacenti alla $\sum_1^p (\beta_r - \alpha_r) < \delta$ e per ogni n , si abbia

$$\sum_1^p \int_{\alpha_r}^{\beta_r} |P'_n(x)| dx < \sigma;$$

si ha dunque, per gli stessi sistemi, se è anche $\delta < \sigma$,

$$\sum_1^p \int_{\alpha_r}^{\beta_r} \sqrt{1 + P'_n(x)^2} dx < 2\sigma,$$

e ciò per ogni n . Questo prova che anche gli integrali $\int_a^b \sqrt{1 + P'_n(x)^2} dx$ sono equiassolutamente continui in (a, b) . Dal teorema sull'integrazione per serie, già più volte ricordato (n. 5), si ha quindi, per $n \rightarrow \infty$,

$$\int_a^b \sqrt{1 + P'_n(x)^2} dx \rightarrow \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx,$$

poichè, come si è già detto più volte, è $P'_n(x) \rightarrow f'(x)$ in tutti i punti sui quali la $f'(x)$ esiste.

In parole, si ha: *se la $f(x)$ è in (a, b) assolutamente continua, la lunghezza L_n della curva $y = P_n(x)$ tende, per $n \rightarrow \infty$, a quella L della $y = f(x)$.*

Si ha pure, se (α_r, β_r) ($r = 1, 2, \dots$) è un sistema qualsiasi di intervalli non sovrappoventisi di (a, b) ,

$$\sum_r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} \sqrt{1 + P'_n(x)^2} dx \rightarrow \sum_r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx,$$

e più generalmente, se E è un insieme misurabile qualsiasi di (a, b) ,

$$\int_E \sqrt{1 + P'_n(x)^2} dx \rightarrow \int_E \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

22. Nella proposizione dimostrata nel numero precedente la condizione che la $f(x)$ sia assolutamente continua non è necessaria. Per vederlo, occorre premettere il seguente lemma:

Se la $f(x)$ è a variazione limitata in (a, b) , la lunghezza L della curva $y = f(x)$, ($a \leq x \leq b$), è data da

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx + V_1 \tag{23}$$

dove V_1 indica la variazione totale della $f(x)$ nell'insieme E dei punti nei quali la $f'(x)$ o non esiste o non è finita (vale a dire, è quello stesso della proposizione del n. 18).

Supponiamo dapprima che la $f(x)$ soddisfi ovunque alla condizione di essere compresa fra $f(x-0)$ e $f(x+0)$, e riprendiamo la funzione $\varphi(x)$ definita al n. 18. Indicando con L_φ la lunghezza di $y = \varphi(x)$, ($a \leq x \leq b$), si ha, essendo la $\varphi(x)$ assolutamente continua,

$$L_\varphi = \int_a^b \sqrt{1 + \overline{\varphi'(x)^2}} dx = \int_{c_A} \sqrt{1 + \overline{\varphi'(x)^2}} dx + \sum_n \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \sqrt{1 + \overline{\varphi'(x)^2}} dx.$$

Negli intervalli (α_n, β_n) la $\varphi(x)$ è lineare e si ha

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \sqrt{1 + \overline{\varphi'(x)^2}} dx &= \sqrt{(\beta_n - \alpha_n)^2 + \left\{ \varphi(\beta_n) - \varphi(\alpha_n) \right\}^2} = \\ &= \sqrt{(\beta_n - \alpha_n)^2 + \left\{ f(\beta_n) - f(\alpha_n) \right\}^2}, \end{aligned}$$

perchè negli estremi α_n e β_n è $\varphi(x) = f(x)$. Si ha pertanto

$$|f(\beta_n) - f(\alpha_n)| < \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \sqrt{1 + \overline{\varphi'(x)^2}} dx \leq (\beta_n - \alpha_n) + |f(\beta_n) - f(\alpha_n)|,$$

onde

$$\sum_n \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \sqrt{1 + \overline{\varphi'(x)^2}} dx = \sum_n |f(\beta_n) - f(\alpha_n)| + \theta \sum_n (\beta_n - \alpha_n),$$

con $|\theta| \leq 1$, e

$$L_\varphi = \int_{c_A} \sqrt{1 + \overline{f'(x)^2}} dx + \sum_n |f(\beta_n) - f(\alpha_n)| + \theta \sum_n (\beta_n - \alpha_n).$$

Facciamo tendere a zero $\sum (\beta_n - \alpha_n)$: è $L_\varphi \rightarrow L$,

$$\begin{aligned} \int_{c_A} \sqrt{1 + \overline{f'(x)^2}} dx &\rightarrow \int_a^b \sqrt{1 + \overline{f'(x)^2}} dx, \\ \sum_n |f(\beta_n) - f(\alpha_n)| &\rightarrow V_1 \end{aligned}$$

e la (23) è dimostrata. Come al n. 18, si passa dal caso qui considerato a quello generale.

23. Ciò premesso, ricordiamo che $P'_n(x)$ tende a $f'(x)$ in tutti i punti ove questa derivata esiste, cioè quasi dappertutto, perchè noi supponiamo qui che la $f(x)$ sia a variazione limitata. Per un noto teorema del LEBESGUE⁽¹⁴⁾, scelto ad arbitrio un $\sigma > 0$, l'insieme $E(\sigma, n)$ dei punti nei quali o manca la $f'(x)$ o è $|P'_n(x) - f'(x)| > \sigma$ ha una misura $m[E(\sigma, n)]$ che tende a zero con $\frac{1}{n}$. Prendiamo n_1 in maniera che, per ogni $n > n_1$ sia $m[E(\sigma, n)] < \delta$, dove il δ è quello stesso che serve a render soddisfatta la disuguaglianza (22). Supporremo anche $\delta < \sigma$. Rinchiudiamo $E(\sigma, n)$ in un sistema d'intervalli non sovrappoventisi di (a, b) : (α_r, β_r) , $(r = 1, 2, \dots)$, tali che sia $\sum(\beta_r - \alpha_r) < \delta$ (questo sistema cambia evidentemente col numero n), e indichiamo con $C(\sigma, n)$ la parte di (a, b) che resta fuori di tali intervalli: in essa è $|P'_n(x) - f'(x)| \leq \sigma$. Abbiamo

$$L_n = \int_a^b \sqrt{1 + P'_n(x)^2} dx = \int_{C(\sigma, n)} \sqrt{1 + P'_n(x)^2} dx + \sum_r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} \sqrt{1 + P'_n(x)^2} dx,$$

e per (23)

$$L = \int_{C(\sigma, n)} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx + \sum_r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx + V_1,$$

onde

$$L_n - L \leq \left. \begin{aligned} & \int_{C(\sigma, n)} \left| \sqrt{1 + P'_n(x)^2} - \sqrt{1 + f'(x)^2} \right| dx + \\ & + \sum_r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} \sqrt{1 + P'_n(x)^2} dx - V_1. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Osserviamo qui che è

$$\left| \sqrt{1 + P'_n(x)^2} - \sqrt{1 + f'(x)^2} \right| = \frac{|P'_n{}^2 - f'^2|}{\sqrt{1 + P'_n{}^2} + \sqrt{1 + f'^2}} \leq |P'_n - f'|$$

e

$$\int_{C(\sigma, n)} \left| \sqrt{1 + P'_n(x)^2} - \sqrt{1 + f'(x)^2} \right| dx \leq \sigma \int_{C(\sigma, n)} dx \leq \sigma(b - a),$$

ed anche, essendo la lunghezza della curva $y = f(x)$ non maggiore della

⁽¹⁴⁾ Cfr. CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse*, T. I (3.^e édit.), 1914, p. 71.

variazione totale della $f(x)$ aumentata dell'intervallo in cui varia la x ,

$$\int_{\alpha_r}^{\beta_r} \sqrt{1 + P'_n(x)^2} dx \leq \left\{ V_n(\beta_r) - V_n(\alpha_r) \right\} + (\beta_r - \alpha_r),$$

dalla quale si trae, sommando rispetto ad r e tenendo conto della (22),

$$\sum_r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} \sqrt{1 + P'_n(x)^2} dx < V_1 + \sigma + \delta < V_1 + 2\sigma.$$

Sostituendo in (24), si ottiene

$$L_n - L \leq \sigma(b - a) + V_1 + 2\sigma - V_1 = \sigma(b - a + 2)$$

e questa disuguaglianza vale per ogni $n > n_1$. Siccome σ è arbitrario, si deduce

$$\text{Mass. Lim}_{n \rightarrow \infty} L_n \leq L.$$

D'altra parte, come si vede con un ragionamento analogo a quello del n. 14, è

$$\text{Min. Lim}_{n \rightarrow \infty} L_n \geq L,$$

se la $f(x)$ soddisfa alla condizione di restare sempre compresa fra $f(x-0)$ e $f(x+0)$: se ne conclude:

Se la $f(x)$ è in (a, b) a variazione limitata e resta sempre compresa fra $f(x-0)$ e $f(x+0)$, la lunghezza della curva $y = P_n(x)$, ($a \leq x \leq b$), tende per $n \rightarrow \infty$ a quella della $y = f(x)$, ($a \leq x \leq b$).

24. Osserviamo che la condizione di essere la $f(x)$ a variazione limitata è equivalente a quella di avere la $y = f(x)$ lunghezza finita. Notiamo anche che, se la $y = f(x)$ ha lunghezza infinita e soddisfa alla condizione di avere la $f(x)$ sempre compresa fra $f(x-0)$ e $f(x+0)$, il minimo limite di L_n per $n \rightarrow \infty$ deve essere infinito, come risulta da un ragionamento analogo a quello del n. 14. Abbiamo così:

Se la $f(x)$ ha soltanto discontinuità di 1.^a specie ed è tale che in ogni punto il suo valore è compreso fra $f(x-0)$ e $f(x+0)$, la lunghezza L_n della curva $y = P_n(x)$, ($a \leq x \leq b$) tende sempre, per $n \rightarrow \infty$, alla lunghezza (finita o no) della $y = f(x)$, ($a \leq x \leq b$).

Ed anche:

Supposta per la $f(x)$ verificata la condizione di cui sopra, condizione ne-

cessaria e sufficiente affinché la curva $y = f(x)$, ($a \leq x \leq b$), abbia lunghezza finita è che la lunghezza della $y = P_n(x)$, ($a \leq x \leq b$), resti, qualunque sia n , inferiore ad un numero fisso.

25. Togliamo la condizione relativa alle discontinuità della $f(x)$. Analogamente a quanto è stato detto al n. 17, si ha: Se per $n \rightarrow \infty$ è $L_n \rightarrow \infty$, la lunghezza della curva $y = f(x)$, ($a \leq x \leq b$) è infinita.

Se L_n tende, per $n \rightarrow \infty$, ad un limite finito, la lunghezza della $y = f(x)$, ($a \leq x \leq b$), può essere tanto finita quanto infinita.

Supposta finita la lunghezza L della $y = f(x)$, ($a \leq x \leq b$), L_n tende ad un limite finito $\leq L$, ed è

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n + 2 \sum \delta_x,$$

dove δ_x è il minore dei due moduli, $|f(x) - f(x-0)|$, $|f(x) - f(x+0)|$.

§ V.

AREA DELLA SUPERFICIE DI RIVOLUZIONE.

26. Sia $F(x, y, y')$ una funzione delle tre variabili x, y, y' , definita e continua per ogni punto del campo determinato dalle disuguaglianze

$$\begin{aligned} a &\leq x \leq b \\ m &\leq y \leq M \\ -\infty &< y' < +\infty. \end{aligned}$$

Inoltre, sia tale che, scelto ad arbitrio un numero $l > 0$, in tutti i punti del nuovo campo definito da

$$\begin{aligned} a &\leq x \leq b \\ m &\leq y \leq M \\ |y'| &\geq l \end{aligned}$$

si abbia

$$|F(x, y, y')| < L |y'|,$$

dove L è un numero positivo, dipendente soltanto da l .

Relativamente a questa funzione $F(x, y, y')$ dimostriamo la proposizione che segue:

Supposta la $f(x)$ assolutamente continua in (a, b) e tale che sia sempre $m \leq f(x) \leq M$, è, per $n \rightarrow \infty$,

$$\int_a^b F(x, P_n(x), P'_n(x)) dx \rightarrow \int_a^b F(x, f(x), f'(x)) dx,$$

essendosi qui posto $F(x, f, f') = 0$ là dove la f' non esiste finita.

Indichiamo con $E^{(r)}$ l'insieme dei punti nei quali la $f'(x)$ esiste ed è in modulo non superiore al numero intero, positivo, $r > l$. In $E^{(r)}$ la $F(x, f(x), f'(x))$ risulta limitata, epperò esiste l'integrale $\int_{E^{(r)}} F(x, f(x), f'(x)) dx$; nel complementare $C(E^{(r)})$ di $E^{(r)}$ è, per l'ipotesi fatta sulla F , $|F(x, f(x), f'(x))| < L|f'|$, e poichè la $|f'(x)|$ è integrabile in (a, b) e quindi anche in $C(E^{(r)})$, su questo insieme è integrabile pure la $F(x, f(x), f'(x))$. Così esiste, finito, l'integrale $\int_a^b F(x, f(x), f'(x)) dx$. È poi manifesta l'integrabilità di $F(x, P_n(x), P'_n(x))$, per essere questa una funzione continua di x .

A cagione dell'equiassoluta continuità degli integrali dei moduli $|P'_n(x)|$ (n. 11), preso ad arbitrio un $\sigma > 0$, possiamo determinare un $\delta > 0$ e $< \sigma$ tale che, per ogni insieme misurabile I di (a, b) , di misura $m(I) < \delta$; e per tutti gli $n = 1, 2, \dots$, si abbia ⁽¹⁵⁾

$$\int_I |P'_n(x)| dx < \sigma \quad (25)$$

ed anche

$$\int_I |f'(x)| dx < \sigma. \quad (26)$$

Ciò fatto, osservando che per $r \rightarrow \infty$ è $m(E^{(r)}) \rightarrow b - a$, possiamo deter-

⁽¹⁵⁾ Si osservi che I può rinchiudersi in una successione (α_r, β_r) , ($r = 1, 2, \dots$), d'intervali non sovrappontendosi di (a, b) , di lunghezza complessiva $< \delta$, e che, avendosi per l'equiassoluta continuità,

$$\sum_r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} |P'_n(x)| dx < \sigma$$

è anche

$$\int_I |P'_n(x)| dx \leq \sum_r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} |P'_n(x)| dx < \sigma.$$

minare r_1 , in modo da avere $m(E^{(r_1)}) > (b-a) - \frac{\delta}{2}$. Poi, per la convergenza di $P'_n(x)$ verso $f'(x)$, in tutti i punti ove la seconda derivata esiste e quindi quasi dappertutto, determiniamo n_1 in maniera che, per ogni $n > n_1$, l'insieme $E_n^{(r_1)}$ dei punti di $E^{(r_1)}$ nei quali è $|P'_n(x) - f'(x)| \leq \sigma$, soddisfi alla disuguaglianza

$$m(E_n^{(r_1)}) > m(E^{(r_1)}) - \frac{\delta}{2} \quad (16).$$

Il complementare $C(E_n^{(r_1)})$ di $E_n^{(r_1)}$ ha allora una misura $< \delta$ e si ha, per ogni $n > n_1$,

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x, P_n(x), P'_n(x)) dx - \int_a^b F(x, f(x), f'(x)) dx &= \\ &= \int_{E_n^{(r_1)}} \left\{ F(x, P_n, P'_n) - F(x, f, f') \right\} dx + \\ &+ \int_{C(E_n^{(r_1)})} F(x, P_n, P'_n) dx - \int_{C(E_n^{(r_1)})} F(x, f, f') dx \end{aligned}$$

e, indicando con N il massimo modulo di F nel campo $\{a \leq x \leq b, m \leq y \leq M, |y'| \leq l\}$,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b F(x, P_n(x), P'_n(x)) dx - \int_a^b F(x, f(x), f'(x)) dx \right| &< \\ &< \int_{E_n^{(r_1)}} |F(x, P_n, P'_n) - F(x, f, f')| dx + \\ &+ L \int_{C(E_n^{(r_1)})} |P'_n| dx + L \int_{C(E_n^{(r_1)})} |f'| dx + 2N\delta, \end{aligned}$$

ed anche per le (25), (26) e per essere $\delta < \sigma$

$$< \int_{E_n^{(r_1)}} |F(x, P_n, P'_n) - F(x, f, f')| dx + 2(L+N)\sigma.$$

Per la uniforme continuità della $F(x, y, y')$ nel campo definito dalle disuguaglianze

$$\begin{aligned} a &\leq x \leq b \\ m &\leq y \leq M \\ |y'| &\leq 2r_1, \end{aligned}$$

(16) Cfr. loc. cit. (14).

preso un numero $\eta > 0$, possiamo determinare il σ in modo che sia $< \eta$ e che si abbia sempre, in questo campo,

$$|F(x, y, y') - F(x, \bar{y}, \bar{y}')| < \eta$$

tutte le volte che è $|y - \bar{y}| \leq \sigma$, $|y' - \bar{y}'| \leq \sigma$. Scegliamo un $n_2 > n_1$ così da avere, per ogni $n > n_2$, $|f(x) - P_n(x)| < \sigma$, il che è possibile per la convergenza uniforme di $P_n(x)$ verso $f(x)$, in tutto (a, b) .

È allora, in tutti i punti di $E_n^{(r)}$ e per ogni $n > n_2$,

$$\left| F\left(x, P_n(x), P'_n(x)\right) - F\left(x, f(x), f'(x)\right) \right| < \eta.$$

Si ha dunque

$$\left| \int_a^b F\left(x, P_n(x), P'_n(x)\right) dx - \int_a^b F\left(x, f(x), f'(x)\right) dx \right| < \eta + 2(L + N)\eta;$$

e la proposizione è dimostrata.

OSSERVAZIONE. La dimostrazione precedente prova anche che, se E è un insieme misurabile qualunque di (a, b) , è per $n \rightarrow \infty$

$$\int_E F\left(x, P_n(x), P'_n(x)\right) dx \rightarrow \int_E F\left(x, f(x), f'(x)\right) dx.$$

27. Supponiamo che sia, in tutto (a, b) , $f(x) \geq 0$, la $f(x)$ essendo una funzione continua o con sole discontinuità di 1.^a specie, tali che si abbia $f(x-0) \leq f(x) \leq f(x+0)$ oppure $f(x-0) \geq f(x) \geq f(x+0)$. Indichiamo con S la superficie di rivoluzione generata dalla rotazione, attorno all'asse delle x , della curva $y = f(x)$, ($a \leq x \leq b$), ed assumiamo, come area A della superficie S , il limite delle aree delle superficie di rivoluzione, analoghe ad S , generate dalle poligonali inscritte in $y = f(x)$, aventi i vertici che si susseguono nello stesso ordine delle loro ascisse — limite ottenuto facendo tendere a zero la massima delle proiezioni, sull'asse x , dei lati di questo poligono⁽¹⁷⁾. Si dimostra facilmente (basta ripetere i ragionamenti fatti per stabilire le proposizioni analoghe sulla lunghezza delle curve) che, se la $f(x)$

⁽¹⁷⁾ L'esistenza di questo limite si prova con ragionamenti analoghi a quelli svolti da L. SCHEEFFER (*Allgemeine Untersuchungen über Rectification der Curven*. Acta Mathematica, T. V, 1884-85, p. 48).

è a variazione limitata, l'area A è finita, e che tale area è data, se la $f(x)$ è anche assolutamente continua, dalla formula classica

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Se la $f(x)$ è soltanto a variazione limitata, la formula che dà l'area è (confronta col n. 22)

$$A = 2\pi \left\{ \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx + A_1 + \frac{1}{2} A_2 \right\}$$

essendo qui A_1 e A_2 due numeri positivi definiti come segue: detta (α_r, β_r) , ($r = 1, 2, \dots$), una successione qualsiasi d'intervalli non sovrappontendosi di (a, b) , ricoprenti interamente l'insieme E dei punti nei quali la $f'(x)$ o non esiste o non è finita, si formi la sommatoria $\sum_r f_r \cdot |f(\beta_r) - f(\alpha_r)|$ ⁽¹⁸⁾, dove f_r è il limite inferiore della $f(x)$ in (α_r, β_r) ; il massimo limite di questa sommatoria, quando $\sum_r (\beta_r - \alpha_r)$ tende a zero, è per definizione A_1 . A_2 poi è definito dall'eguaglianza

$$A_2 = \Sigma \left(f(x) - f(x-0) \right)^2 + \Sigma \left(f(x) - f(x+0) \right)^2,$$

le somme essendo estese a tutte le possibili differenze non nulle che in esse figurano (differenze che sono al più in una infinità numerabile).

28. Se applichiamo il teorema del n. 26 alla funzione

$$F(x, y, y') = y \sqrt{1 + y'^2},$$

abbiamo immediatamente:

Supposta la $f(x)$, in (a, b) , assolutamente continua e ≥ 0 , l'area della superficie di rivoluzione generata dalla rotazione attorno all'asse delle x della curva $y = f(x)$, ($a \leq x \leq b$), è il limite, per $n \rightarrow \infty$, di quella della superficie analoga generata dalla $y = P_n(x)$, ($a \leq x \leq b$).

Ragionando come si è fatto al n. 22 per la lunghezza della curva $y = f(x)$,

⁽¹⁸⁾ Questa sommatoria può essere sostituita dall'altra $\sum_r \sqrt{(\beta_r - \alpha_r)^2 + \{f(\beta_r) - f(\alpha_r)\}^2}$.

($a \leq x \leq b$)⁽¹⁹⁾, si vede che la proposizione precedente vale anche se la $f(x)$, sempre ≥ 0 , è a variazione limitata e tale da rimanere sempre compresa fra i valori $f(x-0)$ e $f(x+0)$.

§ VI.

CURVE IN FORMA PARAMETRICA.

29. Siano $x(\theta)$, $y(\theta)$ due funzioni date in un intervallo (a, b) , che supporremo ancora tale da aversi $0 < a < b < 1$, ed ivi integrabili nel senso del LEBESGUE. Formiamo i polinomi approssimativi $P_n(\theta)$, relativi a queste due funzioni, e indichiamoli rispettivamente con $X_n(\theta)$ e $Y_n(\theta)$. Avremo cioè

$$X_n(\theta) = \frac{k_n}{2} \int_0^1 x(z) \left\{ 1 - (z - \theta)^2 \right\}^n dz,$$

$$Y_n(\theta) = \frac{k_n}{2} \int_0^1 y(z) \left\{ 1 - (z - \theta)^2 \right\}^n dz.$$

La curva

$$C_n: \quad x = X_n(\theta), \quad y = Y_n(\theta) \quad (a \leq \theta \leq b)$$

la diremo la *curva approssimativa* (dell'ordine n) della curva

$$C: \quad x = x(\theta), \quad y = y(\theta) \quad (a \leq \theta \leq b)^{(20)}.$$

Indichiamo con $M_n(\theta)$ il punto della C_n di coordinate $X_n(\theta)$, $Y_n(\theta)$, con $M(\theta)$ quello corrispondente della C . Per la convergenza quasi dappertutto, in (a, b) , di $X_n(\theta)$ e $Y_n(\theta)$ rispettivamente verso $x(\theta)$ e $y(\theta)$, si ha che, ad eccezione al più dei punti di (a, b) di un insieme di misura nulla, per tutti gli altri il punto $M_n(\theta)$ converge verso $M(\theta)$, per $n \rightarrow \infty$. Questo fatto lo esprimeremo dicendo che *quasi tutti i punti $M_n(\theta)$ convergono, per $n \rightarrow \infty$, verso i corrispondenti $M(\theta)$* .

Se le funzioni $x(\theta)$, $y(\theta)$ sono continue, vale a dire, se la curva C è

(19) Ci si può anche giovare del risultato del n. 22, deducendo da esso la proposizione attuale.

(20) Date le ipotesi generalissime fatte sulle $x(\theta)$, $y(\theta)$, la curva C non è che un insieme ordinato di punti.

continua, $X_n(\theta)$ e $Y_n(\theta)$ convergono per tutti i valori di θ verso $x(\theta)$ e $y(\theta)$, e convergono anche uniformemente; cosicchè abbiamo: *Se la curva C è continua, i punti $M_n(\theta)$ convergono tutti uniformemente verso i corrispondenti $M(\theta)$; vale a dire, la distanza fra $M(\theta)$ e $M_n(\theta)$, al tendere di n all' ∞ , tende a zero uniformemente per ogni θ di (a, b) . Diremo anche, più brevemente, se la curva C è continua, la sua curva approssimativa C_n converge ad essa uniformemente.*

30. Supponiamo che, per il valore θ del parametro, esistano le due derivate $x'(\theta)$ e $y'(\theta)$, non ambedue infinite, e tali da verificare la disuguaglianza $x'^2 + y'^2 > 0$. Nel punto $M(\theta)$ esiste allora la tangente alla curva C . Ed infatti, supposto, per es., $x' \neq 0$, l'angolo $\alpha(h)$, che la corda $M(\theta)M(\theta+h)$ (percorsa dall'estremo relativo al minor valore del parametro all'altro) forma con la direzione positiva dell'asse delle x , ha per tangente trigonometrica

$$\frac{y(\theta+h) - y(\theta)}{x(\theta+h) - x(\theta)} = \frac{\frac{y(\theta+h) - y(\theta)}{h}}{\frac{x(\theta+h) - x(\theta)}{h}}$$

e questa tangente, per le ipotesi fatte, ha un limite ben determinato $\left(\frac{y'}{x'}\right)$ al tendere di h allo zero. Dunque ha un limite anche $\alpha(h)$, ossia ha una posizione limite la corda $M(\theta)M(\theta+h)$.

Indichiamo con $t(\theta)$ la tangente in $M(\theta)$ alla C ; con $t_n(\theta)$ la tangente alla C_n nel punto $M_n(\theta)$, corrispondente al valore del parametro θ che determina $M(\theta)$. Poichè le derivate $X'_n(\theta)$, $Y'_n(\theta)$ tendono per $n \rightarrow \infty$ rispettivamente a $x'(\theta)$ e $y'(\theta)$, se è $x'(\theta) \neq 0$, il rapporto $\frac{Y'_n(\theta)}{X'_n(\theta)}$ tende a $\frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}$, e, nel caso contrario, $\frac{X'_n(\theta)}{Y'_n(\theta)}$ tende a $\frac{x'(\theta)}{y'(\theta)}$. Dunque:

Fatta l'ipotesi che per il valore θ del parametro esistano le due derivate $x'(\theta)$, $y'(\theta)$, non ambedue infinite e non ambedue nulle, la tangente $t_n(\theta)$ alla curva approssimativa C_n nel punto $M_n(\theta)$ tende, per $n \rightarrow \infty$, a quella $t(\theta)$ alla C in $M(\theta)$.

31. Le funzioni $x(\theta)$, $y(\theta)$ siano, in (a, b) , assolutamente continue. Esistono allora, quasi dappertutto, le derivate $x'(\theta)$, $y'(\theta)$, finite; la curva C ha

una lunghezza finita L e si ha ⁽²¹⁾

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta.$$

Detta L_n la lunghezza della C_n , si ha pure

$$L_n = \int_a^b \sqrt{X'_n(\theta)^2 + Y'_n(\theta)^2} d\theta.$$

Si ha poi, se (α, β) è un qualsivoglia intervallo di (a, b) ,

$$\int_a^\beta \sqrt{X'_n(\theta)^2 + Y'_n(\theta)^2} d\theta \leq \int_a^\beta |X'_n(\theta)| d\theta + \int_a^\beta |Y'_n(\theta)| d\theta;$$

e, se $(\alpha_r, \beta_r), \dots, (\alpha_p, \beta_p)$ è un qualsiasi sistema di intervalli non sovrappontenti di (a, b) ,

$$\sum_r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} \sqrt{X'_n(\theta)^2 + Y'_n(\theta)^2} d\theta \leq \sum_r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} |X'_n(\theta)| d\theta + \sum_r \int_{\alpha_r}^{\beta_r} |Y'_n(\theta)| d\theta.$$

Dalla equiassoluta continuità degli integrali delle $|X'_n(\theta)|, |Y'_n(\theta)|$, ($n = 1, 2, \dots$), risultante dalla ammessa assoluta continuità delle $x(\theta), y(\theta)$ (vedi n. 11), scende così l'equiassoluta continuità degli integrali delle $\sqrt{X'_n(\theta)^2 + Y'_n(\theta)^2}$, onde, per la convergenza quasi dappertutto di X'_n e Y'_n rispettivamente a x' e y' , e per la proposizione sull'integrazione per serie ricordata al n. 5, si ha

$$\int_a^b \sqrt{X'_n(\theta)^2 + Y'_n(\theta)^2} d\theta \rightarrow \int_a^b \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta,$$

per $n \rightarrow \infty$. In parole:

Se le $x(\theta), y(\theta)$ sono funzioni assolutamente continue, la lunghezza L_n della curva approssimativa C_n tende, per $n \rightarrow \infty$, a quella della C .

Questa proposizione può estendersi anche a casi in cui manca l'assoluta continuità delle funzioni $x(\theta), y(\theta)$. Così per esempio, è facile vedere che essa vale per la curva C :

$$x = (2 - \cos \theta) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{2n+1}}, \quad y = \sin \theta, \quad (-2\pi \leq \theta \leq 2\pi),$$

(21) Loc. cit. (13).

la quale rappresenta l'insieme dell'origine e di due circonferenze uguali, di raggio 1 e di centri $(-2, 0)$ e $(2, 0)$. La lunghezza L ⁽²²⁾ di questa curva è data dalla somma delle lunghezze delle due circonferenze, più la minima distanza fra tali circonferenze, vale a dire è $L = 4\pi + 2$; ed è $L_n \rightarrow L$.

⁽²²⁾ Si ricordi che la definizione di lunghezza qui accettata (confr. ⁽¹⁹⁾) è la seguente: la lunghezza della curva $C: x = x(\theta), y = y(\theta), (\alpha \leq \theta \leq b)$, è il limite superiore delle lunghezze delle poligonali in essa inscritte, aventi per vertici successivi punti corrispondenti a valori crescenti del parametro θ .

Sulle pluritangenti di una ipersuperficie algebrica generale (*).

(Di EUGENIO BRAMBILLA, a Parma.)

Nel suo libro di geometria numerativa (**) lo SCHUBERT ha calcolato il numero delle rette che toccano una superficie algebrica generale dello spazio ordinario in *uno o più punti* e soddisfano inoltre ad assegnate condizioni (fondamentali). Lo SCHUBERT stesso in altre due Memorie (***) ha trattata la questione analoga per il caso di uno spazio ad n dimensioni, limitandosi però alla ricerca del numero delle rette che toccano in un sol punto una data ipersuperficie (algebrica) generale e soddisfano inoltre a condizioni imposte al punto di contatto.

In questo lavoro, generalizzando il metodo adottato dallo SCHUBERT per lo spazio ordinario, e valendomi delle formole trovate dallo stesso per il caso di uno spazio ad n dimensioni, ho risolto il problema generale: calcolare il numero delle rette che in uno spazio ad n dimensioni toccano una data ipersuperficie (algebrica) generale d'ordine qualunque in *più* punti, avendo in essi molteplicità di contatto assegnate, e soddisfacenti inoltre a condizioni (fondamentali) imposte sia ad esse rette che ai punti di contatto.

Dopo avere nei primi paragrafi (1-2) riportate le regole e le formole di geometria numerativa necessarie allo sviluppo dell'argomento, nei paragrafi

(*) Estratto dalla tesi presentata per la laurea in matematiche pure alla Facoltà di Scienze della R. Università di Pavia nel luglio 1914.

(**) *Kalkul der abzählenden Geometrie*, § 33.

(***) *Die n-dimensionale Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raums*, Mathematische Annalen, Band XXVI, S. 26; *Die n-dimensionale Verallgemeinerung der Anzahlen für die vielpunktig berührenden Tangenten einer punkttallgemeinen Fläche m-ten Grades*, Ib., S. 52.

Nel seguito, dovendo riferirci a detti lavori, li indicheremo, per brevità, con *Fund. Anz.* e *Vielf. Tang.*

successivi (3-5) tratto il caso generale anzidetto, e trovo alcune formole mediante le quali il numero delle rette pluritangenti si calcola in funzione del numero delle rette tangenti in un sol punto all'ipersuperficie data. Infine (§ 6) mi occupo di alcuni esempi numerici e di casi particolari nei quali si ottiene facilmente una semplice formola esplicita.

Rivolgo qui al prof. G. GIAMBELLI i più vivi ringraziamenti per avermi suggerito il tema ed essermi stato gentilmente largo di schiarimenti.

§ 1.

NOTAZIONI SIMBOLICHE PER LO SPAZIO AD n DIMENSIONI.

PRODOTTO DI PIÙ CONDIZIONI.

FORMOLE DI INCIDENZA E DI COINCIDENZA.

1. Assunto come spazio ambiente uno spazio lineare di punti ad n dimensioni, S_n , ed indicati con S_a, S_b, \dots , spazii lineari di punti di dimensioni a, b, \dots , in esso contenuti, converremo che (*):

per un punto p il simbolo p^a , dove è $0 \leq a \leq n$, rappresenti la condizione fondamentale, di dimensione a , che il punto stia in un S_{n-a} dato;

per una retta g il simbolo (a, b) , dove è $0 \leq a < b \leq n$, rappresenti la condizione fondamentale, di dimensione $2n - 1 - a - b$, che la retta stia in un dato S_b e tagli in un punto un dato S_a contenuto in S_b ;

e che in particolare la condizione (di dimensione 2) che la retta stia in un S_{n-1} dato si rappresenti indifferentemente con l'uno o l'altro dei due simboli: g_a oppure $(n-2, n-1)$; e la condizione (di dimensione $a-1$) che la retta tagli un S_{n-a} assegnato si rappresenti con l'uno o l'altro dei due simboli g_a (oppure $(n-a, n)$).

(*) Dovendo nel presente lavoro occuparci di condizioni fondamentali imposte solo a punti o a rette, è preferibile, per la maggior chiarezza delle formole, sostituire alcuni dei simboli adottati dallo SCHUBERT per S_n con simboli analoghi a quelli adottati dallo stesso per lo spazio ordinario.

Convenendo, come al solito, di eguagliare a 0 oppure ad 1 ogni simbolo rappresentante rispettivamente condizioni non imponibili o identicamente soddisfatte, se ne deduce

$$p^a = 0 \text{ per } a > n; \quad g_0 = (n, n) = 0; \quad g_1 = (n-1, n) = 1, \\ p^0 = 1 \quad \quad \quad g_a = (n-a, n) = 0 \text{ per } a > n.$$

2. Il prodotto di s condizioni fondamentali $p^{a_1}, p^{a_2}, \dots, p^{a_s}$ imposte al punto p si esprime con un'unica condizione fondamentale imposta al punto mediante la formola (*):

$$p^{a_1} p^{a_2} \dots p^{a_s} = p^{a_1+a_2+\dots+a_s}. \tag{I}$$

Il prodotto di due condizioni fondamentali imposte a una retta si esprime con una somma di condizioni fondamentali imposte alla retta mediante la seguente regola (**):

date due condizioni $(p, \pi), (q, k)$ imposte a una retta, e posto $p = a, \pi = \alpha; q = b, k = \beta$; oppure $q = a, k = \alpha; p = b, \pi = \beta$; oppure indifferentemente una o l'altra delle due posizioni, a seconda che $p+k$ è minore, maggiore o uguale di $q+\pi$, si ha la seguente formola:

$$(a, \alpha) (b, \beta) = (a + \beta - n, \alpha + b - n + 1) + \\ + (a + \beta - n - 1, \alpha + b - n + 2) + \dots \quad \left. \vphantom{(a, \alpha) (b, \beta)} \right\} \tag{II}$$

dove l'ultimo termine del secondo membro sarà $(a + b - n + 1, \alpha + \beta - n)$; a meno che si giunga prima al termine $(0, a + b + \alpha + \beta - 2n + 1)$, nel qual caso questo sarà l'ultimo.

L'applicazione ripetuta di questa regola conduce alla formola (**)

$$(n-2, n)^p = g_2^p = (n-p-1, n) + p \cdot \frac{p-1}{p} \cdot (n-p, n-1) + \\ + \frac{p-3}{p-1} \binom{p}{2} \cdot (n-p+1, n-2) + \dots \quad \left. \vphantom{(n-2, n)^p} \right\} \tag{II'}$$

nel secondo membro della quale si procederà fino a trovare un termine privo di significato.

Più in generale, date $p+1$ condizioni fondamentali imposte a una retta

(*) SCHUBERT, *Fund. Anz.*, § 4.

(**) SCHUBERT, *Fund. Anz.*, § 5.

$(a_0, b_0), (a_1, b_1), \dots, (a_p, b_p)$, tali che la somma delle loro dimensioni non superi $2n-2$, il loro prodotto si esprime come somma di condizioni imposte alla retta mediante la seguente regola (*):

Si riduca l'espressione

$$\left. \begin{aligned} & \delta_0^{n-a_0} \delta_1^{n-b_0} \delta_0^{n-b_1} \delta_1^{n-a_1} \left(\frac{\delta_0^{b_1-a_1} - \delta_1^{b_1-a_1}}{\delta_0 - \delta_1} \right) \delta_0^{n-b_2} \delta_1^{n-a_2} \left(\frac{\delta_0^{b_2-a_2} - \delta_1^{b_2-a_2}}{\delta_0 - \delta_1} \right) \dots \\ & \dots \delta_0^{n-b_p} \delta_1^{n-a_p} \left(\frac{\delta_0^{b_p-a_p} - \delta_1^{b_p-a_p}}{\delta_0 - \delta_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III})$$

alla forma $\sum A_{c_0 c_1} \delta_0^{n-c_0} \delta_1^{n-c_1}$, essendo c_0, c_1 una delle due permutazioni di c_0, c_1 (dove $c_0 < c_1$). Il prodotto delle $p+1$ condizioni date è allora eguale a

$$\sum A'_{c_0 c_1} (c_0, c_1)$$

dove

$$A'_{c_0 c_1} = A_{c_0 c_1} - A_{c_1 c_0}$$

e dove sono da omettere i termini per i quali non sia $0 \leq c_0$.

3. Dato un sistema formato da un punto p e da una retta g che si appartengono, sussiste in S_n la seguente *formola d'incidenza* (**):

$$p(n-a, n) = p^a + (n-a, n-1). \quad (\alpha)$$

Essa vale per $2 \leq a \leq n$; ma può ritenersi valida per $a=1$, giacchè per essere $(n-1, n) = 1$ ed $(n-1, n-1) = 0$, in tal caso si riduce ad una identità.

Inoltre vogliamo adottare una convenzione che permetta di ritenerla valida anche per $a=0$, il che ci sarà utile in seguito. Precisamente daremo un significato al simbolo illusorio $(n, n-1)$ ponendo

$$(n, n-1) = -1. \quad (\beta)$$

Ricordando allora che $(n, n) = 0$, la (α) per $a=0$ si riduce all'identità:

$$p(n, n) = p^0 + (n, n-1) = 1 - 1$$

e può quindi ritenersi valida anche per $a=0$.

(*) Vedi G. GIAMBELLI, *Risoluzione del problema degli spazi secanti*, § 11 (Mem. Acc. Reale Torino, 1902). La regola suesposta è un caso particolare di quella ivi enunciata.

(**) SCHUBERT, *Vielf. Tang.*, § 1.

Osservando inoltre che

$$(n - a, n - 1) = \left(n - \left\{ a - 1 \right\}, n \right) \cdot (n - 2, n - 1) = g_{a-1} g_e \quad (\gamma)$$

la (α) può porsi sotto la forma definitiva

$$p g_a = p^a + g_{a-1} g_e; \quad (IV)$$

formola valida per $0 \leq a \leq n$ qualora si convenga di porre, come dalle (β) e (γ) ,

$$g_{-1} g_e = (n, n - 1) = -1.$$

4. Dato un sistema di coppie di punti arbitrariamente infinito la condizione ε_2 che due punti p_1 e p_2 di una coppia coincidano, pur restando determinata la loro congiungente g , si esprime mediante condizioni fondamentali imposte ai punti p_1 e p_2 e alla retta g facendo uso della *formola di coincidenza* (*)

$$\varepsilon_2 = p_1 + p_2 - g_2. \quad (V)$$

§ 2.

RETTE TANGENTI IN UN PUNTO A UNA IPERSUPERFICIE GENERALE DI S_n .

5. Sia F^m una ipersuperficie generale d'ordine m di S_n ; e sia ε_{i+1} la condizione (di dimensione i) che $i + 1$ degli m punti d'intersezione di F^m con una retta di S_n coincidano in uno, cioè, come suol dirsi, che la retta abbia con F^m un contatto $(i + 1)$ -punto. Il numero delle rette soddisfacenti alla ε_{i+1} e ad ulteriori condizioni fondamentali imposte alla retta e al punto di contatto p (tali che la condizione risultante sia di dimensione $2n - 2$) si esprime in funzione dell'ordine m mediante la formola (**)

$$\varepsilon_{i+1}(a, \alpha) p^{a+\alpha-i-1} = f(m, i, i - \alpha) - f(m, i, i - \alpha), \quad (I)$$

(*) SCHUBERT, *Vielf. Tang.*, § 2.

(**) SCHUBERT, *Vielf. Tang.*, § 5. Indicheremo, secondo l'uso comune, il numero delle rette soddisfacenti a una condizione di dimensione $2n - 2$ col simbolo rappresentante la condizione stessa.

dove $f(m, r, s)$ è il prodotto di $r!m$ per la somma di tutti i possibili prodotti di s fra gli r numeri $m-1, \frac{m-2}{2}, \frac{m-3}{3}, \dots, \frac{m-r}{r}$ e dove si deve porre

$$f(m, r, 0) = r!m; \quad f(m, r, s) = 0 \text{ per } s < 0.$$

La (I) può scriversi sotto la forma seguente (*), spesso più utile nella pratica

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{i+1}(a, \alpha) p^{a+\alpha-i-1} = & \left[\varphi(i, a) m^{i-a+1} - \binom{a+1}{a} \varphi(i, a+1) m^{i-a} + \dots \right. \\ & \dots + (-1)^{i-a} \binom{i}{a} \varphi(i, i) m \left. \right] - \left[\varphi(i, \alpha) m^{i-\alpha+1} - \right. \\ & \left. - \binom{\alpha+1}{\alpha} \varphi(i, \alpha+1) m^{i-\alpha} + \dots + (-1)^{i-\alpha} \binom{i}{\alpha} \varphi(i, i) m \right], \end{aligned} \right\} \quad (I')$$

dove $\varphi(i, k)$ rappresenta la somma di tutti i possibili prodotti di k fra i primi i numeri della serie naturale, e dove si deve porre $\varphi(i, 0) = 1$.

La $\varphi(i, k)$ gode della proprietà espressa dalla relazione

$$\varphi(i, k) = i \cdot \varphi(i-1, k-1) + \varphi(i-1, k),$$

che permette di calcolarne praticamente il valore numerico.

§ 3.

RETTE TANGENTI IN PIÙ PUNTI A UNA IPERSUPERFICIE GENERALE DI S_n .

6. Venendo ora ad occuparci delle rette tangenti in più punti a una ipersuperficie F^m generale d'ordine m di S_n , indichiamo con $p_1 p_2 \dots p_m$ gli m punti d'intersezione di una retta g con F^m e consideriamo il sistema di coppie di punti ottenuto accoppiandoli in tutti i modi possibili. Allora per la (V) del n. 4, se due di tali punti, per es. p_1 e p_2 , coincidono, cioè se g è tangente ad F^m , sarà soddisfatta la condizione $p_1 + p_2 - g_2$. Similmente se

(*) SCHUBERT, *Vielf. Tang.*, § 6.

§ 4.

NUMERO DEI SISTEMI SODDISFACENTI ALLA CONDIZIONE $(a, h) p_1 p_2 \dots p_l$
DI DIMENSIONE $2n - 2$.

8. La condizione ε_{l+1} può, per la (a') del n. 6, scriversi sotto la forma:

$$\varepsilon_{l+1} = (p_1 + p_{l+1} - g_2) (p_2 + p_{l+1} - g_2) \dots (p_l + p_{l+1} - g_2),$$

dalla quale segue

$$\begin{aligned} \varepsilon_{l+1} &= p_1 p_2 \dots p_l + l \cdot (p_{l+1} - g_2) p_1 p_2 \dots p_{l-1} + \\ &+ \sum_{u=0}^{u=l-2} \binom{l}{u} \cdot (p_{l+1} - g_2)^{l-u} p_1 p_2 \dots p_u = (l+1) \cdot p_1 p_2 \dots p_l - \\ &- l \cdot g_2 p_1 p_2 \dots p_{l-1} + \sum_{u=0}^{u=l-2} \binom{l}{u} \cdot (p_{l+1} - g_2)^{l-u} p_1 \dots p_u. \end{aligned}$$

Ma per la (IV) del n. 3, tenendo conto delle convenzioni ivi fatte, si ha:

$$\begin{aligned} (p_{l+1} - g_2)^{l-u} &= \sum_{v=0}^{v=l-u} (-1)^{l-u-v} \binom{l-u}{v} \cdot p_{l+1}^v g_2^{l-u-v} = \\ &= \sum_{v=0}^{v=l-u} (-1)^{l-u-v} \binom{l-u}{v} \cdot p_{l+1} g_v g_2^{l-u-v} - \\ &- \sum_{v=0}^{v=l-u} (-1)^{l-u-v} \binom{l-u}{v} \cdot g_{v-1} g_v g_2^{l-u-v}. \end{aligned}$$

Sostituendo nella precedente, si avrà

$$\begin{aligned} \varepsilon_{l+1} &= (l+1) \cdot p_1 p_2 \dots p_l - l \cdot g_2 p_1 p_2 \dots p_{l-1} + \\ &+ \sum_{u=0}^{u=l-2} \sum_{v=0}^{v=l-u} (-1)^{l-u-v} \binom{l}{u} \binom{l-u}{v} \cdot g_2^{l-u-v} g_v p_1 p_2 \dots p_u p_{l+1} - \\ &- \sum_{u=0}^{u=l-2} \sum_{v=0}^{v=l-u} (-1)^{l-u-v} \binom{l}{u} \binom{l-u}{v} \cdot g_2^{l-u-v} g_{v-1} g_v p_1 \dots p_u; \end{aligned}$$

e scambiando nella prima doppia sommatoria l'indice u in $u - 1$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{l+1} = & (l+1) \cdot p_1 p_2 \dots p_l - l \cdot g_2 p_1 p_2 \dots p_{l-1} + \\ & + \sum_{u=1}^{u=l-1} \sum_{v=0}^{v=l-u+1} (-1)^{l-u-v+1} \binom{l}{u-1} \binom{l-u+1}{v} \cdot g_2^{l-u-v+1} g_v p_1 p_2 \dots p_u + \\ & + \sum_{u=0}^{u=l-2} \sum_{v=0}^{v=l-u} (-1)^{l-u-v+1} \binom{l}{u} \binom{l-u}{v} \cdot g_2^{l-u-v} g_{v-1} g_v p_1 p_2 \dots p_u. \end{aligned}$$

Osservando infine che il termine generale della prima doppia sommatoria è costantemente nullo per $u=0$ perchè contiene il fattore $\binom{l}{-1}$; e che, avendo convenuto di porre $g_{-1} g_0 = -1$, il termine $l \cdot g_2 p_1 p_2 \dots p_{l-1}$ può considerarsi ottenuto dal termine generale della doppia sommatoria per $u=l-1$, si può scrivere

$$\begin{aligned} \varepsilon_{l+1} = & (l+1) \cdot p_1 p_2 \dots p_l + \\ & + \sum_{u=0}^{u=l-1} \left\{ \sum_{v=0}^{v=l+1-u} (-1)^{l-u-v+1} \binom{l}{u-1} \binom{l+1-u}{v} \cdot g_2^{l+1-u-v} g_v + \right. \\ & \left. + \sum_{v=0}^{v=l-u} (-1)^{l+1-u-v} \binom{l}{u} \binom{l-u}{v} \cdot g_2^{l-u-v} g_{v-1} g_v \right\} p_1 p_2 \dots p_u. \end{aligned}$$

Posto

$$\psi(l, u) = \left. \begin{aligned} & \sum_{v=0}^{v=l+1-u} (-1)^{l+1-u-v} \binom{l}{u-1} \binom{l+1-u}{v} \cdot g_2^{l+1-u-v} g_v + \\ & + \sum_{v=0}^{v=l-u} (-1)^{l+1-u-v} \binom{l}{u} \binom{l-u}{v} \cdot g_2^{l-u-v} g_{v-1} g_v, \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

ed osservando che

$$\psi(l, l) = \sum_{v=0}^{v=1} (-1)^{1-v} \binom{l}{l-1} \cdot g_2^{1-v} g_v - \binom{l}{l} \cdot g_{-1} g_0 = l+1,$$

si ha infine

$$\varepsilon_{l+1} = \sum_{u=0}^{u=l} \psi(l, u) p_1 p_2 \dots p_u, \quad (II)$$

formola che esprime la ε_{l+1} mediante condizioni contenenti i simboli p con esponenti non maggiori di uno. Essa vale per $l=1, 2, \dots, 2n-2$.

e moltiplicando ambo i membri della (b) per una condizione (α, b) di dimensione $2n - 2 - l$

$$b) p_1 p_2 \dots p_i = \frac{1}{(l+1)!} \cdot (\alpha, b) \begin{pmatrix} \varepsilon_{l+1} - \psi(l, 0) & \psi(l, l-1) & \psi(l, l-2) & \dots & \psi(l, 2) & \psi(l, 1), \\ \varepsilon_l - \psi(l-1, 0) & l & \psi(l-1, l-2) & \dots & \psi(l-1, 2) & \psi(l-1, 1), \\ \varepsilon_{l-1} - \psi(l-2, 0) & 0 & l-1 & \dots & \psi(l-2, 2) & \psi(l-2, 1), \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_3 - \psi(2, 0) & 0 & 0 & \dots & 3 & \psi(2, 1), \\ \varepsilon_2 - \psi(1, 0) & 0 & 0 & \dots & 0 & 2, \end{pmatrix} \quad (III)$$

dove lo sviluppo del secondo membro conduce a una somma di condizioni del tipo $(\alpha, \beta) \varepsilon_i$ di dimensione $2n - 2$ (*).

10. Sostituendo ora a ogni termine $(\alpha, \beta) \varepsilon_i$, ottenuto con tale sviluppo, il suo valore dato in funzione dell'ordine m di F^m dalla (I) del n. 5, si passa dalla condizione $(\alpha, b) p_1 p_2 \dots p_i$ al numero dei sistemi di rette e punti ad essa soddisfacenti. Osserviamo però che essendo ε_{l+1} una condizione di coincidenza imposta ad $l+1$ degli m punti d'intersezione di una retta con F^m , la ε_l imposta ad l punti, ecc., bisognerà riferirsi sempre al medesimo numero di punti, e precisamente almeno ad $l+1$ punti. Riferiamoci, per fissar le idee, a $q \geq l+1$ punti. Ciò equivale a dire che se k_i è il numero delle rette soddisfacenti alla $(\alpha, \beta) \varepsilon_i$, si dovrà sostituire nello sviluppo suddetto al simbolo $(\alpha, \beta) \varepsilon_i$ non il numero k_i , ma il numero

$$k_i (m - i) (m - i - 1) \dots (m - l) \dots (m - q + 1),$$

perchè su ogni retta soddisfacente alla $(\alpha, \beta) \varepsilon_i$ si può prendere l' $(i+1)^{mo}$ punto da considerarsi in $m - i$ modi; l' $(i+2)^{mo}$ in $m - i - 1$ modi, ..., il q^{mo} in $m - q + 1$ modi. Il risultato così ottenuto sarà naturalmente relativo a q punti.

Tenendo presente la (I) del n. 5 possiamo enunciare la seguente regola:

Data in S_n un'ipersuperficie F^m generale d'ordine m , il valore numerico del simbolo $(\alpha, b) p_1 p_2 \dots p_i$ corrispondente alla condizione $(\alpha, b) p_1 p_2 \dots p_i$ di dimensione $2n - 2$ e relativo a q dei punti di intersezione di una retta

(*) Dalla (I) del n. 8 risulta che la $\psi(l, u)$ è di dimensione $l - u$. Ne segue che il determinante che figura al 2.º membro della (III) sviluppato dà luogo a una somma di condizioni di dimensione l .

con F^m si ottiene dalla (III) del n. 9 sostituendo nello sviluppo del 2.° membro a ogni termine $(\alpha, \beta) \varepsilon$, l'espressione

$$\left[f(m, i-1, i-\alpha-1) - f(m, i-1, i-\beta-1) \right] (m-i)(m-i-1) \dots \\ \dots (m-q+1),$$

dove $f(m, p, q)$ indica il prodotto di $p!m$ per la somma di tutti i possibili prodotti di q fra i p numeri $m-1, \frac{m-2}{2}, \dots, \frac{m-p}{p}$, e dove si deve porre

$$f(m, p, 0) = p!m \\ f(m, p, q) = 0 \text{ per } q < 0.$$

Osservazione. La regola ora enunciata permette di calcolare il valore del simbolo $(a, b) p_1 p_2 \dots p_l$ senza conoscere il valore dei simboli contenenti un minor numero di fattori p . In pratica, però, dovendosi calcolare il valore di tutti i possibili simboli relativi a un certo spazio converrà adoperare la (II) del n. 8 dopo averne moltiplicato ambo i membri per la condizione (a, b) in modo che risultino di dimensione $2n-2$, e, procedendo per valori ordinatamente crescenti dell'indice l , calcolare ogni simbolo contenente un certo numero di fattori p mediante quelli che ne contengono un numero minore.

§ 5.

FORMOLA GENERALE PER LE RETTE PLURITANGENTI A UNA IPERSUPERFICIE DI S_n .

11. Applichiamo alla espressione

$$b_{i+1}^a \varepsilon_{i+1} = p_{i+1}^a (p_1 + p_{i+1} - g_2) (p_2 + p_{i+1} - g_2) \dots (p_l + p_{i+1} - g_2)$$

un procedimento analogo a quello tenuto al n. 8. Avremo

$$\left. \begin{aligned} b_{i+1}^a \varepsilon_{i+1} &= p_{i+1}^a (p_1 + p_{i+1} - g_2) (p_2 + p_{i+1} - g_2) \dots (p_l + p_{i+1} - g_2) = \\ &= p_1 p_2 \dots p_l p_{i+1}^a + \sum_{u=0}^{u=l-1} \binom{l}{u} \cdot (p_{i+1} - g_2)^{l-u} p_{i+1}^a p_1 p_2 \dots p_u. \end{aligned} \right\} (\tilde{a})$$

Ma in virtù della (IV) del n. 3, tenendo conto delle convenzioni ivi fatte, si ha

$$\begin{aligned} p_{i+1}^* (p_{i+1} - g_2)^{l-u} &= \sum_{v=0}^{v=l-u} (-1)^{l-u-v} \binom{l-u}{v} \cdot p_{i+1}^{v+a} g_2^{l-u-v} = \\ &= \sum_{v=0}^{v=l-u} (-1)^{l-u-v} \binom{l-u}{v} \cdot p_{i+1} g_{v+a} g_2^{l-u-v} - \\ &- \sum_{v=0}^{v=l-u} (-1)^{l-u-v} \binom{l-u}{v} \cdot g_{v+a-1} g_2^{l-u-v}. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (a) ed applicando la formola d'incidenza anche al primo termine del secondo membro, ne segue

$$\begin{aligned} b_{i+1}^* \varepsilon_{i+1} &= g_a p_1 p_2 \dots p_i p_{i+1} - g_{a-1} g_0 p_1 p_2 \dots p_i + \\ &+ \sum_{u=0}^{u=l-1} \sum_{v=0}^{v=l-u} (-1)^{l-u-v} \binom{l}{u} \binom{l-u}{v} \cdot g_{v+a} g_2^{l-u-v} p_1 p_2 \dots p_u p_{u+1} + \\ &+ \sum_{u=0}^{u=l-1} \sum_{v=0}^{v=l-u} (-1)^{l-u-v+1} \binom{l}{u} \binom{l-u}{v} \cdot g_{v+a-1} g_2^{l-u-v} p_1 p_2 \dots p_u. \end{aligned}$$

Cambiamo nella prima doppia sommatoria l'indice u in $u-1$; osserviamo che dopo tale scambio il termine generale di essa è, per $u=0$, costantemente nullo perchè contiene il fattore $\binom{l}{-1}$, e quindi tale sommatoria potrà considerarsi estesa da 0 ad l . Conveniamo infine di porre $\binom{0}{0} = 1$. Il secondo termine del secondo membro può considerarsi allora come ottenuto dall'ultima doppia sommatoria qualora si estenda quest'ultima da 0 ad l . Avremo così:

$$\begin{aligned} b_{i+1}^* \varepsilon_{i+1} &= g_a p_1 p_2 \dots p_i p_{i+1} + \\ &+ \sum_{u=0}^{u=l} \left\{ \sum_{v=0}^{v=l+1-u} (-1)^{l+1-u-v} \binom{l}{u-1} \binom{l-u+1}{v} \cdot g_{v+a} g_2^{l-u-v+1} + \right. \\ &+ \left. \sum_{v=0}^{v=l-u} (-1)^{l+1-u-v} \binom{l}{u} \binom{l-u}{v} \cdot g_{v+a-1} g_2^{l-u-v} \right\} p_1 p_2 \dots p_u. \end{aligned}$$

Poniamo

$$\chi(l, u, a) = \left. \begin{aligned} &\sum_{v=0}^{v=l+1-u} (-1)^{l+1-u-v} \binom{l}{u-1} \binom{l-u+1}{v} \cdot g_{v+a} g_2^{l-u-v+1} + \\ &+ \sum_{v=0}^{v=l-u} (-1)^{l+1-u-v} \binom{l}{u} \binom{l-u}{v} \cdot g_{v+a-1} g_2^{l-u-v}. \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Ridotto mediante la (III) del n. 2 ogni termine dell'ultimo membro a una somma di termini del tipo $(\alpha, \beta) p_1 p_2 \dots p_j$, il valore numerico di ciascuno di questi ultimi è dato in funzione dell'ordine m di F^m dalla regola del n. 10. Ne deduciamo quindi la seguente regola:

Data in S_n una ipersuperficie generale d'ordine m , il numero delle rette soddisfacenti alla condizione (di dimensione $2n - 2$)

$$Q b_{1,i+1}^\lambda b_{2,k+1}^\mu \dots b_{s,l+1}^\nu \varepsilon_{i+1,k+1,\dots,l+1}$$

si ottiene in funzione dell'ordine m sostituendo a ciascun termine dell'ultimo membro della (III) il suo valore numerico calcolato mediante la regola del n. 10 e dividendo il risultato così ottenuto per ρ' .

Osservazione. Il risultato della sostituzione è certamente divisibile per ρ' .

Ricordiamo infatti il significato attribuito nel n. 6 a $\rho' = \alpha'! \beta'! \dots$ e poniamo $i + k + \dots + l = r$; $\alpha' + \beta' + \dots = j$.

Sarà evidentemente $j \leq s$. Agli j punti corrispondenti ad esponenti nulli della serie λ, μ, \dots, ν corrispondono nella (III) altrettante sommatorie estese effettivamente non da 0 a $i + 1, k + 1$, ecc., ma da 0 a i, k , ecc., come appare dalla (δ). Ne segue che nello sviluppo dell'ultimo membro della (III) il termine contenente il massimo numero di simboli p ne contiene al più $r + (s - j)$, mentre il numero dei punti che figurano complessivamente nei contatti è $r + s$. L'applicazione della regola del n. 10 fa quindi comparire in ogni termine il fattore

$$\left[m - (r + s - j) \right] \left[m - (r + s - j) - 1 \right] \dots \left[m - (r + s) + 1 \right],$$

cioè il prodotto di j numeri consecutivi, che è certamente divisibile per $\rho' = \alpha'! \beta'! \dots$ dove $\alpha' + \beta' + \dots = j$.

§ 6.

ESEMPI IN S_4 . CASI PARTICOLARI.

12. Ci occuperemo in questo numero di alcuni esempi numerici, limitandoci, per brevità di calcolo, allo spazio a quattro dimensioni. In S_4 , ricordando che $g_3 = 0$ e $g_6 = 0$, e ricorrendo alle formole (II), (II') e (III)

del n. 2 per il prodotto di più condizioni imposte alla retta, si ottiene facilmente la seguente tabella dei valori della $\psi(l, u)$ (v. (I) n. 8) corrispondenti ai valori di l compresi fra 1 e 6:

$$\left. \begin{array}{llll} \psi(1, 0) = -g_2 & \psi(2, 1) = -3g_2 & \psi(3, 2) = -6g_2 & \\ \psi(2, 0) = g_3 & \psi(3, 1) = 4g_3 & \psi(4, 2) = 10g_3 & \psi(4, 3) = -10g_3 \\ \psi(3, 0) = -g_4 & \psi(4, 1) = -5g_4 & \psi(5, 2) = -15g_4 & \psi(5, 3) = 20g_4 \\ \psi(4, 0) = 0 & \psi(5, 1) = 0 & \psi(6, 2) = 0 & \psi(6, 3) = -35g_4 \\ \psi(5, 0) = 0 & \psi(6, 1) = 0 & \psi(5, 4) = -15g_2 & \\ \psi(6, 0) = 0 & \psi(6, 5) = -21g_2 & \psi(6, 4) = 35g_3 & \end{array} \right\} (a)$$

Calcoliamo in funzione dell'ordine m di F^m il valore di tutti i possibili simboli del tipo $(\alpha, \beta) p_1 p_2 \dots p_r$ relativi a S_4 , cioè dei simboli:

$$\left. \begin{array}{l} p_1(0, 2); \quad p_1 p_2(0, 3); \quad p_1 p_2(1, 2); \quad p_1 p_2 p_3(0, 4); \quad p_1 p_2 p_3(1, 3); \\ p_1 p_2 p_3 p_4(1, 4); \quad p_1 p_2 p_3 p_4(2, 3); \quad p_1 p_2 p_3 p_4 p_5(2, 4); \quad p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6. \end{array} \right\} (b)$$

Ora il valore numerico di quelli fra i simboli (b) nei quali si impone alla retta la condizione di stare in uno spazio di dimensioni ≤ 3 è lo stesso che per lo spazio ordinario. Infatti il simbolo $(1, 3) p_1 p_2 p_3$, per esempio, non è che il numero delle rette giacenti nell' S_3 della condizione $(1, 3)$, appoggiantisi a una data retta ed aventi tre dei punti d'intersezione con F^m su tre dati iperpiani. Lo stesso numero si ottiene evidentemente considerando l' S_3 della condizione $(1, 3)$, la superficie intersezione di tale S_3 con F^m , e i piani intersezione di S_3 con gli iperpiani suddetti; cioè calcolando il valore di $(1, 3) p_1 p_2 p_3$ relativo allo spazio a tre dimensioni. In base a questa osservazione potremo scrivere la seguente tabella di valori, identici a quelli calcolati dallo SCHUBERT per lo spazio ordinario (*), riferendoci a q punti:

$$\left. \begin{array}{l} (0, 1) = p_1(0, 2) = p_1 p_2(0, 3) = m(m-1)(m-2) \dots (m-q+1); \\ p_1 p_2(1, 2) = m^2(m-2) \dots (m-q+1); \\ p_1 p_2 p_3(1, 3) = m^2(2m-3)(m-3) \dots (m-q+1); \\ p_1 p_2 p_3 p_4(2, 3) = m^2(2m^2-6m+3)(m-4) \dots (m-q+1). \end{array} \right\} (c)$$

Passiamo al calcolo dei rimanenti fra i simboli (b). Dalle (I) e (I') del

(*) Vedi SCHUBERT, *Kalkul der abzählenden Geometrie*, § 33.

n. 5 otteniamo

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_2(0, 2) &= m(m-1) & \varepsilon_4(1, 3) &= 2m(m-3)(3m-2) \\ & & \varepsilon_5(1, 4) &= 10m(m-4)(m^2-3m+3) \\ \varepsilon_3(0, 3) &= m(m-1)(m-2) & \varepsilon_5(2, 3) &= 5m(m-4)(7m-12) \\ & & \varepsilon_6(2, 4) &= 5m(m-5)(17m^2-50m+24) \\ \varepsilon_3(1, 2) &= 3m(m-2) & \varepsilon_4(0, 4) &= m(m-1)(m-2)(m-3) \\ & & \varepsilon_7 &= 35m(m-6)(7m-12)(3m-10). \end{aligned} \right\} (d)$$

Applicando la regola del n. 11 al calcolo di (2, 4) $p_1 p_2 p_3 p_4 p_5$ otteniamo:

$$6! g_2 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 = g_2 \begin{vmatrix} \varepsilon_6 & -15g_2 & 20g_3 & -15g_4 & 0 \\ \varepsilon_5 & 5 & -10g_2 & 10g_3 & -5g_4 \\ \varepsilon_4 + g_4 & 0 & 4 & -6g_2 & 4g_3 \\ \varepsilon_3 - g_3 & 0 & 0 & 3 & -3g_2 \\ \varepsilon_2 + g_2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 120 \cdot \varepsilon_6 g_2 + 360 \cdot \varepsilon_5(1, 4) + 360 \cdot \varepsilon_5(2, 3) + 1200 \cdot \varepsilon_4(1, 3) + 1200 \cdot \varepsilon_3(1, 2) +$$

$$+ 300 \cdot \varepsilon_4(0, 4) + 1200 \cdot \varepsilon_3(0, 3) + 1500 \cdot \varepsilon_2(0, 2) + 600 \cdot (0, 1),$$

da cui, in virtù delle (d), riferendoci a q punti

$$g_2 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 = 5m^2(m-5)(m-2)(m^2-4m+2)(m-6)\dots(m-q+1).$$

In particolare, per cinque punti si ha

$$g_2 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 = 5m^2(m-2)(m^2-4m+2),$$

cioè: le rette di S_4 che tagliano una data ipersuperficie generale d'ordine m in modo da avere cinque diversi punti d'intersezione su cinque iperpiani dati formano una rigata d'ordine $5m^2(m-2)(m^2-4m+2)$.

Per il calcolo dei rimanenti fra i simboli (b) ci serviremo, in base all'osservazione fatta al n. 10, della (II) del n. 8, cioè della

$$\varepsilon_{l+1} = (l+1) p_1 p_2 \dots p_l + \sum_{u=0}^{u=l-1} \psi(l, u) p_1 p_2 \dots p_u. \quad (e)$$

Posto $l=3$, moltiplicando ambo i membri per (0, 4) si ha in virtù delle

(a), (c) e (d), sempre riferendosi a q punti

$$\begin{aligned}\varepsilon_4(0, 4) &= 4 \cdot (0, 4) p_1 p_2 p_3 - 6 \cdot (0, 3) p_1 p_2 + 4 \cdot (0, 2) p_1 - (0, 1) \\ (0, 4) p_1 p_2 p_3 &= m(m-1)(m-2) \dots (m-q+1).\end{aligned}$$

Posto $l=4$ e moltiplicando ambo i membri della (e) per $(1, 4)$, si ha similmente

$$\begin{aligned}\varepsilon_5 g_3 &= 5 \cdot (1, 4) p_1 p_2 p_3 p_4 - 10 \cdot (0, 4) p_1 p_2 p_3 - 10 \cdot (1, 3) p_1 p_2 p_3 + \\ &+ 10 \cdot (0, 3) p_1 p_2 + 10 \cdot (1, 2) p_1 p_2 - 5 \cdot (0, 2) p_1,\end{aligned}$$

da cui

$$(1, 4) p_1 p_2 p_3 p_4 = m^2 (3m^2 - 12m + 11) (m-4) (m-5) \dots (m-q+1).$$

Infine per $l=6$ si ha dalla (e)

$$\varepsilon_7 = 7 \cdot p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 - 21 g_2 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 + 35 g_3 p_1 p_2 p_3 p_4 - 35 g_4 p_1 p_2 p_3,$$

da cui

$$p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 = 5 m^2 (m^4 - 9 m^3 + 26 m^2 - 27 m + 8) (m-6) \dots (m-q+1).$$

Riassumendo, scriveremo la seguente tabella

$$\left. \begin{aligned}(0, 1) &= (0, 2) p_1 = (0, 3) p_1 p_2 = (0, 4) p_1 p_2 p_3 = m(m-1)(m-2) \dots \\ &\dots (m-q+1), \\ (1, 2) p_1 p_2 &= m^2 (m-2) \dots (m-q+1); \\ (1, 3) p_1 p_2 p_3 &= m^2 (2m-3)(m-3) \dots (m-q+1), \\ (2, 3) p_1 p_2 p_3 p_4 &= m^2 (2m^2 - 6m + 3)(m-4) \dots (m-q+1); \\ (1, 4) p_1 p_2 p_3 p_4 &= m^2 (3m^2 - 12m + 11)(m-4) \dots (m-q+1), \\ (2, 4) p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 &= 5 m^2 (m-2)(m^2 - 4m + 2)(m-5) \dots \\ &\dots (m-q+1), \\ p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 &= 5 m^2 (m^4 - 9 m^3 + 26 m^2 - 27 m + 8) (m-6) \dots \\ &\dots (m-q+1).\end{aligned} \right\} \quad (I)$$

L'ultima di queste formule dà, per $q=6$, il seguente risultato:

il numero delle rette di S_4 che tagliano una data ipersuperficie generale d'ordine m in modo da avere sei degli m punti d'intersezione sopra sei dati, iperpiani è $5 m^2 (m^4 - 9 m^3 + 26 m^2 - 27 m + 8)$.

In particolare per $m = 5$, queste rette avendo sei punti a comune con la ipersuperficie; stanno su di essa; cioè:

Una ipersuperficie generale di quinto ordine in S_4 contiene

$$5 \cdot 5^2 (5^4 - 9 \cdot 5^3 + 26 \cdot 5^2 - 27 \cdot 5 + 8) = 2875 \text{ rette (*)}.$$

13. La tabella (I) permette di calcolare il numero delle rette soddisfacenti alle condizioni $b_{i,i+1}^{\lambda} b_{i,k+1}^{\mu} \dots b_{i,i+1}^{\nu} Q \varepsilon_{i+1,k+1,\dots,i+1}$ relative allo spazio a quattro dimensioni.

Vogliasi, p. es., calcolare il numero delle rette soddisfacenti alla $(2, 4) \varepsilon_{4,3}$:

Posto $i = 3, k = 2$ nella (III) del n. 11 e ricordando le (α) e (γ) dello stesso numero, si ha

$$\begin{aligned} (2, 4) \varepsilon_{4,3} &= \sum_{u_1=0}^{u_1=4} \sum_{u_2=0}^{u_2=3} (2, 4) \cdot \chi(3, u_1, 0) \chi(2, u_2, 0) = p_1 p_2 \dots p_{u_1+u_2} = \\ &= \sum_{u_1=0}^{u_1=3} \sum_{u_2=0}^{u_2=3} (2, 4) \psi(3, u_1) \psi(2, u_2) p_1 p_2 \dots p_{u_1+u_2}, \end{aligned}$$

da cui per le (a) e (l) del numero precedente, posto $q = 4 + 3$,

$$\begin{aligned} (2, 4) \varepsilon_{4,3} &= - (0, 1) + 11 \cdot (0, 2) p_1 - 48 \cdot (1, 2) p_1 p_2 - 39 \cdot (0, 3) p_1 p_2 + \\ &+ 52 \cdot (1, 3) p_1 p_2 p_3 + 34 \cdot (0, 4) p_1 p_2 p_3 - 30 \cdot (1, 4) p_1 p_2 p_3 p_4 - \\ &- 30 \cdot (2, 3) p_1 p_2 p_3 p_4 + 12 \cdot (2, 4) p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 = \\ &= m(m-6)(m-5)(m^4 + 8m^3 + 67m^2 - 250m + 120), \end{aligned}$$

cioè: *le rette di S_4 che hanno con una data ipersuperficie generale d'ordine m due contatti, l'uno tripunto, l'altro quadripunto, formano una rigata d'ordine $m(m-6)(m-5)(m^4 + 8m^3 + 67m^2 - 250m + 120)$.*

14. Veniamo ora ad occuparci di un interessante caso particolare.

Si è visto (n. 12, (I)) che riferendosi a q punti, si ha:

$$\begin{aligned} (0, 1) &= (0, 2) p_1 = (0, 3) p_1 p_2 = (0, 4) p_1 p_2 p_3 = \\ &= m(m-1)(m-2) \dots (m-q+1). \end{aligned}$$

(*) Allo stesso risultato era giunto per altra via lo SCHUBERT. Vedi: *Vielf. Tang.*, § 7.

Vogliamo generalizzare questo risultato dimostrando che
 in S_n il valore del simbolo $(0, k+1) p_1 p_2 \dots p_k$ relativo a q punti ($q \geq k$)
 è, per qualsiasi valore di k compreso fra 1 ed $n-1$, eguale a $m(m-1) \dots$
 $(m-q+1)$.

La proposizione è vera per $k=1, 2, 3$; supponendola vera per $k=l-1$,
 dimostriamo che vale anche per $k=l$.

Sia dunque per ipotesi

$$(0, k+1) p_1 p_2 \dots p_k = m(m-1) \dots (m-q+1) \quad (a)$$

per $k=1, 2, \dots, l-1$.

Moltiplichiamo ambo i membri della (II) del n. 8 per $(0, l+1)$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{l+1} (0, l+1) &= (l+1) \cdot (0, l+1) p_1 p_2 \dots p_l + \\ &+ \sum_{u=0}^{u=l-1} (0, l+1) \cdot \psi(l, u) p_1 p_2 \dots p_u. \end{aligned} \right\} (b)$$

Ma per la (I) del n. 8 è

$$\begin{aligned} (0, l+1) \psi(l, u) &= \sum_{v=1}^{v=l+1-u} (-1)^{l+1-u-v} \binom{l}{u-1} \binom{l-u+1}{v} \cdot g_v g_2^{l+1-u-v} (0, l+1) + \\ &+ (-1)^{l-u} \binom{l}{u} \cdot g_2^{l-u} (0, l+1) + \\ &+ \sum_{v=2}^{v=l-u} (-1)^{l+1-u-v} \binom{l}{u} \binom{l-u}{v} \cdot g_{v-1} g_v g_2^{l-u-v} (0, l+1), \end{aligned}$$

od anche, essendo, per la (II) del n. 2, $g_v(0, l+1) = 0$:

$$\left. \begin{aligned} (0, l+1) \psi(l, u) &= (-1)^{l-u} \binom{l}{u} \cdot g_2^{l-u} (0, l+1) + \\ &+ \sum_{v=1}^{v=l-u+1} (-1)^{l-u+1-v} \binom{l}{u-1} \binom{l+1-u}{v} \cdot g_v g_2^{l+1-u-v} (0, l+1). \end{aligned} \right\} (c)$$

Inoltre (v. n. 2, (II'))

$$\begin{aligned} g_2^{l+1-u-v} &= (u-l+u+v-2, u) + (l-u-v) \cdot \\ &\cdot (u-l+u+v-1, u-1) + \dots \end{aligned}$$

da cui

$$g_2^{l+1-u-v} (0, l+1) = (0, u+v),$$

$$g_r g_2^{l+1-u-v} (0, l+1) = (0, u+v) (u-v, u) = (0, u+1).$$

Similmente

$$g_2^{l-u} (0, l+1) = (0, u+1).$$

Sostituendo nella (c)

$$(0, l+1) \psi (l, u) = (-1)^{l-u} \binom{l}{u} \cdot (0, u+1) +$$

$$+ \sum_{v=1}^{v=l+1-u} (-1)^{l+1-u-v} \binom{l+1-u}{v} \binom{l}{u-1} \cdot (0, u+1) =$$

$$= \left\{ (-1)^{l-u} \binom{l}{u} + \binom{l}{u-1} \sum_{v=1}^{v=l+1-u} (-1)^{l+1-u-v} \binom{l+1-u}{v} \right\} \cdot (0, u+1). \quad (d)$$

Per la nota identità

$$\sum_{j=0}^{j=h} (-1)^{h-j} \binom{h}{j} = 0,$$

è anche

$$\sum_{v=1}^{v=l+1-u} (-1)^{l+1-u-v} \binom{l+1-u}{v} = \sum_{v=0}^{v=l+1-u} (-1)^{l+1-u-v} \binom{l+1-u}{v} -$$

$$- (-1)^{l+1-u} = (-1)^{l-u},$$

e quindi la (d) diventa

$$(0, l+1) \psi (l, u) = \left\{ (-1)^{l-u} \binom{l}{u} + (-1)^{l-u} \binom{l}{u-1} \right\} \cdot (0, l+1),$$

e infine la (b)

$$\varepsilon_{(l+1)} (0, l+1) = (l+1) \cdot (0, l+1) p_1 p_2 \dots p_l +$$

$$+ \sum_{u=0}^{u=l-1} \left\{ (-1)^{l-u} \binom{l}{u} + (-1)^{l-u} \binom{l}{u-1} \right\} \cdot (0, u+1) p_1 \dots p_u. \quad (e)$$

Ma per la (I) del n. 5 è

$$\varepsilon_{l+1} (0, l+1) = m (m-1) \dots (m-l),$$

quindi riferendoci a q punti e tenendo conto delle (a), deduciamo dalla (e)

$$m(m-1)\dots(m-q+1) = (l+1) \cdot p_1 p_2 \dots p_l + \\ + \left\{ \sum_{u=0}^{u=l-1} \left[(-1)^{l-u} \binom{l}{u} + (-1)^{l-u} \binom{l}{u-1} \right] \right\} m(m-1)\dots(m-q+1).$$

Ed essendo, per le note identità

$$\sum_{j=0}^{j=h} (-1)^{h-j} \binom{h}{j} = 0, \quad \binom{h}{j} + \binom{h}{j+1} = \binom{h+1}{j+1},$$

anche

$$\sum_{u=0}^{u=l-1} \left[(-1)^{l-u} \binom{l}{u} + (-1)^{l-u} \binom{l}{u-1} \right] = \sum_{u=0}^{u=l-1} (-1)^{l-u} \binom{l+1}{u} = \\ = - \sum_{u=0}^{u=l-1} (-1)^{l-u+1} \binom{l+1}{u} = \\ = - \left\{ \sum_{u=0}^{u=l+1} (-1)^{l-u+1} \binom{l+1}{u} + (l+1) - 1 \right\} = -l,$$

otteniamo infine

$$(0, l+1) p_1 p_2 \dots p_l = m(m-1)(m-2)\dots(m-q+1), \quad (\text{II})$$

che è quanto volevasi dimostrare.

In particolare per $q=l$ si ha:

Il numero delle rette che giacciono in un dato S_{l+1} , passano per un punto dato e tagliano una data ipersuperficie generale d'ordine m in modo da avere l degli m punti d'intersezione su l iperpiani assegnati è eguale a

$$m(m-1)(m-2)\dots(m-l+1).$$

15. La (II) del numero precedente permette di ricavare una semplice formola esplicita che dà il numero delle rette soddisfacenti alla condizione

$$(0, s+1) b_1 b_2 \dots b_{2a-1} \varepsilon_{1 \ 2 \ \dots \ 2}^{2 \ 2 \ \dots \ 2}_{s-a}.$$

Senza ricorrere alla formola generale del § 5, dalla (I) del n. 7 dedu-

ciamo immediatamente, per $\alpha \leq \frac{s}{2}$

$$\begin{aligned}
 (s - 2\alpha)! \cdot (0, s + 1) b_1 b_3 \dots b_{2\alpha-1} \epsilon_{1 \ 2 \ \dots \ 2}^{2 \ 2 \ \dots \ 2} &= \\
 &= (0, s + 1) p_1 (p_1 + p_2 - g_2) \cdot p_3 (p_3 + p_4 - g_2) \dots \\
 \dots p_{2\alpha-1} (p_{2\alpha-1} + p_{2\alpha} - g_2) (p_{2\alpha+1} + p_{2\alpha+2} - g_2) \dots (p_{2(s-\alpha)-1} + p_{2(s-\alpha)} - g_2) &= \\
 &= (0, s + 1) (p_1 p_2 - g_e) (p_3 p_4 - g_e) \dots \\
 \dots (p_{2\alpha-1} p_{2\alpha} - g_e) (p_{2\alpha+1} + p_{2\alpha+2} - g_2) \dots (p_{2(s-\alpha)-1} + p_{2(s-\alpha)} - g_2) &= \\
 &= (0, s + 1) \left\{ p_1 p_2 \dots p_{2\alpha} - \alpha \cdot g_e p_1 p_2 \dots p_{2\alpha-2} + \right. \\
 &\quad \left. + \binom{\alpha}{2} \cdot g_e^2 p_1 p_2 \dots p_{2\alpha-4} - \dots + (-1)^\alpha g_e^\alpha \right\} \cdot \\
 &\cdot \left\{ 2^{s-2\alpha} \cdot p_{2\alpha+1} \dots p_s - 2^{s-2\alpha-1} (s - 2\alpha) \cdot g_2 p_{2\alpha+1} \dots p_{s-1} + \right. \\
 &\quad \left. + 2^{s-2\alpha-2} \binom{s-2\alpha}{2} \cdot g_2^2 p_{2\alpha+1} \dots p_{s-2} + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + (-1)^{s-2\alpha-1} 2 \binom{s-2\alpha}{s-2\alpha-1} \cdot g^{s-2\alpha-1} p_{2\alpha+1} + (-1)^{s-2\alpha} g_2^{s-2\alpha} \right\}. \tag{a)
 \end{aligned}$$

Ma dalle (II) e (II') del n. 2 segue

$$\begin{aligned}
 g_e^\alpha (0, s + 1) &= (n - \alpha - 1, n - \alpha) (0, s + 1) = 0, \\
 g_2^\alpha &= (n - \alpha - 1, n) + (\alpha - 1) \cdot (n - \alpha, n - 1) + \dots
 \end{aligned}$$

e di qui, per $\alpha \leq s$

$$g_2^\alpha (0, s + 1) = (0, s - \alpha + 1).$$

Tenendo conto di tali relazioni, dalla (a) si deduce

$$\begin{aligned}
 (s - 2\alpha)! \cdot (0, s + 1) b_1 b_3 \dots b_{2\alpha-1} \epsilon_{1 \ 2 \ \dots \ 2}^{2 \ 2 \ \dots \ 2} &= \\
 = 2^{s-2\alpha} \cdot (0, s + 1) p_1 p_2 \dots p_{2\alpha} p_{2\alpha+1} \dots p_s - \\
 - 2^{s-2\alpha-1} (s - 2\alpha) \cdot (0, s) p_1 p_2 \dots p_{s-1} + 2^{s-2\alpha-2} \binom{s-2\alpha}{2} \cdot (0, s - 1) p_1 \dots p_{s-2} - \\
 \dots + (-1)^{s-2\alpha-1} 2 (s - 2\alpha) \cdot (0, 2) p_1 + (-1)^{s-2\alpha} \cdot (0, 1),
 \end{aligned}$$

dalla quale, per la (II) del numero precedente, posto $q = 2(s - a)$, si deduce

$$\begin{aligned} & (s - 2a)! \cdot (0, s + 1) b_1 b_3 \dots b_{2a-1} \varepsilon_{1 \frac{1}{2} \dots \frac{1}{2} s-a} = \\ & = \left[2^{s-2a} - 2^{s-2a-1} (s - 2a) + 2^{s-2a-2} \binom{s - 2a}{2} - \right. \\ & \left. \dots + (-1)^{s-2a-1} 2 (s - 2a) + (-1)^{s-2a} \right] \cdot m(m-1) \dots (m - 2(s-a) + 1). \end{aligned}$$

Infine per la nota identità

$$2^{s-2a} - 2^{s-2a-1} (s - 2a) + \dots + (-1)^{s-2a} = 1,$$

si ha

$$b_1 b_3 \dots b_{2a-1} \varepsilon_{1 \frac{1}{2} \dots \frac{1}{2} s-a} = \frac{1}{(s - 2a)!} m(m-1) \dots (m - 2(s-a) + 1),$$

cioè:

le rette giacenti in un dato S_{s+1} , passanti per un punto dato ed aventi $(s - a)$ contatti bipunti con una data ipersuperficie generale d'ordine m in modo che a dei punti di contatto stieno su a dati iperpiani, sono in numero di

$$\frac{1}{(s - 2a)!} m(m-1) \dots (m - 2(s-a) + 1).$$

In particolare per $a = 0$, $s = n - 1$, si ha:

per ogni punto di S_n passano $\frac{1}{(n-1)!} m(m-1) \dots (m - 2n + 3)$ rette aventi con l'ipersuperficie data $n - 1$ contatti bipunti.

Affinchè tali rette esistano deve essere $m - 2n + 3 > 0$, cioè $m > 2n - 3$; il che concorda col fatto che, se per $m \leq 2n - 3$ per ogni punto di S_n passassero rette tangenti all'ipersuperficie in $n - 1$ punti, tali rette starebbero per intero su di essa, cioè per ogni punto di S_n passerebbero rette della ipersuperficie; il che è assurdo.

Parma, gennaio 1916.