

# DES IMAGES

PAR RÉFLEXION ET PAR RÉFRACTION

---

Extrait\* de la Revue des cours scientifiques.

---

---

Paris. — Imprimerie de L. MARTINET, rue Mignon, 2.

# DES IMAGES

PAR RÉFLEXION ET PAR RÉFRACTION

PAR

**J. GAVARRET**

Professeur de physique à la Faculté de médecine de Paris

---

PARIS

LIBRAIRIE GERMER BAILLIÈRE

RUE DE L'ÉCOLE-DE-MÉDECINE, 17

M DCCC LXVI



# DES IMAGES

## PAR RÉFLEXION ET PAR RÉFRACTION

---

1. Dans la théorie classique des appareils dioptriques si remarquable par l'élégance et la simplicité de ses formules, on admet que les épaisseurs des lentilles sont assez faibles pour qu'on puisse complètement les négliger. On se trouve ainsi conduit à substituer des axes secondaires, ou droites menées par le centre optique, aux rayons lumineux transmis sans déviation, et à compter indifféremment les distances sur l'axe principal à partir de la face antérieure de la lentille, ou de sa face postérieure, ou du milieu de l'intervalle qui sépare ces deux faces, ou enfin du centre optique ; il en résulte que la position des foyers principaux et la valeur de la distance focale restent forcément indéterminées, et que l'erreur commise est de même ordre que l'épaisseur nécessairement finie de la lentille employée. En supposant les lentilles infiniment minces, on enlève donc à leur théorie le caractère de rigueur scientifique, et on laisse planer une indécision fâcheuse sur la valeur des éléments les plus importants de la dioptrique. Ajoutons d'ailleurs que, dans l'étude des phénomènes physiques de la vision, cette hypothèse est complètement inadmissible.

GAVARRET.

1

Dans ses *Recherches dioptriques* (\*), communiquées en décembre 1840 à l'Académie de Göttingue, Gauss a montré que, sans rien enlever à la simplicité des formules, on peut tenir compte de l'épaisseur des lentilles. — Une traduction de ce beau mémoire a été publiée en 1851 par M. Bravais dans le XXXIII<sup>e</sup> volume des *Annales de chimie et de physique*; M. Breton (de Champ) a donné, dans l'introduction de son *Traité du lever des plans et de l'arpentage*, une analyse étendue de ce travail dont l'exposition complète avait déjà été faite par M. Verdet dans ses leçons de l'École normale. — Cependant, malgré son incontestable supériorité, la nouvelle théorie des lentilles n'a encore été adoptée, ni dans l'enseignement de nos lycées, ni dans celui de nos Facultés des sciences. Cela tient sans doute à ce que, dans son mémoire, Gauss a eu recours à des considérations mathématiques d'un ordre trop élevé pour démontrer les propriétés des appareils dioptriques.

Une étude attentive de cette théorie nous a convaincu de la possibilité de l'exposer sans sortir du cadre des notions géométriques les plus élémentaires, et de la mettre à la portée des élèves de nos facultés et même de nos lycées. Nous avons été ainsi conduit à l'introduire dans notre enseignement, et nous le faisons avec d'autant plus d'empressement et de confiance, que la connaissance des résultats des recherches de Gauss est indispensable à tout physiologiste jaloux de se rendre compte de la marche des rayons lumineux à travers les milieux transparents de l'œil.

L'introduction, dans l'étude des propriétés des miroirs sphériques, d'un des éléments fondamentaux de la théorie de Gauss a le double avantage de simplifier beaucoup les formules et de rendre leur démonstration plus facile. Telle est la raison qui nous a déterminé à faire précéder la théorie des images par réfraction de l'exposition de la théorie des images par réflexion. Nous pourrions ainsi, dans le cas très-simple de

(\*) *Abhandlungen der kœniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Gœttingen, tome I<sup>er</sup>.*

la réflexion, nous familiariser avec une partie des considérations que nous aurons à développer dans l'étude des appareils dioptriques.

2. La théorie des appareils catoptriques repose sur les deux lois de la réflexion :

1<sup>o</sup> Les angles d'incidence et de réflexion sont dans un même plan.

2<sup>o</sup> Les angles d'incidence et de réflexion sont égaux.

Il résulte de ces deux lois que, dans le cas d'un miroir plan :

Un point lumineux et son image sont situés sur une même perpendiculaire à la surface réfléchissante, l'un en avant, l'autre en arrière, et à égale distance du miroir.

Un objet et son image sont de même grandeur, symétriques, l'un en avant, l'autre en arrière de la surface réfléchissante.

3. Les lois de la réfraction sont au nombre de trois :

1<sup>o</sup> Les angles d'incidence et de réfraction sont dans un même plan.

2<sup>o</sup> Le rapport du sinus de l'angle d'incidence et du sinus de l'angle de réfraction est indépendant de l'angle d'incidence et constant pour deux mêmes milieux.

3<sup>o</sup> Quand la lumière rebrousse chemin à travers les mêmes milieux, elle repasse par les mêmes points de l'espace.

Le rapport des sinus des angles d'incidence et de réfraction prend la dénomination d'*indice de réfraction*. Quand la lumière passe du *vide* dans une substance quelconque M, ce rapport est l'*indice principal* du milieu M. — L'air est si peu réfringent que, si la substance considérée M est solide ou liquide, on peut, sans erreur sensible, prendre pour son *indice principal* le rapport des sinus des angles d'incidence et de réfraction quand la lumière passe de l'air dans cette substance. — Cela revient à prendre l'indice de réfraction de l'air pour *unité*; c'est ce que nous ferons constamment. — Nous appellerons *indice principal* ou simplement *indice de réfraction* d'une substance quelconque, solide ou liquide, le rapport des sinus

#### 4 DES IMAGES PAR RÉFLEXION ET PAR RÉFRACTION.

de l'angle d'incidence et de l'angle de réfraction, lorsque la lumière passe de l'air dans cette substance.

Considérons deux milieux transparents  $M_0, M_1$ , dont les indices de réfraction soient  $n_0, n_1$ . — L'indice de réfraction de  $M_1$  par rapport à  $M_0$  est  $\frac{n_1}{n_0}$  ou, en d'autres termes, quand la lumière passe de  $M_0$  dans  $M_1$ , le rapport des sinus des angles d'incidence et de réfraction est  $\frac{n_1}{n_0}$ . — L'indice de réfraction de  $M_0$  par rapport à  $M_1$ , c'est-à-dire le rapport des sinus des angles d'incidence et de réfraction quand la lumière passe de  $M_1$  dans  $M_0$  est  $\frac{n_0}{n_1}$ . — Il suit de là que, si la transmission de la lumière se fait à travers un milieu  $M$  d'indice  $n$  et l'air d'indice 1, le rapport des sinus des angles d'incidence et de réfraction est égal à  $n$  dans le cas où la lumière passe de l'air dans le milieu  $M$ , et à  $\frac{1}{n}$  dans le cas contraire où la lumière passe du milieu  $M$  dans l'air.

4. Quand il s'agit de surfaces courbes, la réflexion et la réfraction se passent comme si, au point d'incidence, la surface courbe était remplacée par son plan tangent. Les angles d'incidence, de réflexion et de réfraction, sont donc les angles formés par les rayons incidents, réfléchis et réfractés avec la normale à la surface courbe au point d'incidence. — Dans toute cette étude, les surfaces courbes dont nous nous occuperons seront toujours des calottes sphériques; la normale au point d'incidence sera facile à déterminer, puisqu'elle se confondra avec la droite menée par le point d'incidence et le centre de courbure de la sphère à laquelle appartiendra la surface considérée.

Nous admettrons d'ailleurs, et ces conditions sont toujours réalisées dans la pratique, d'une part que les surfaces sphériques sont d'une très-faible amplitude ou ne comprennent qu'un très-petit nombre de degrés, d'autre part que les rayons

incidents font de très-petits angles avec les normales aux points d'incidence.

Pour plus de commodité et de rapidité dans le langage, nous appellerons *homocentriques* les rayons lumineux dont les directions passent toutes par un même point de l'espace. — Quand il s'agit des rayons incidents, ce point de croisement prend la dénomination de *point lumineux* ; on le dit *réel* quand il est placé en avant de la première surface réfléchissante ou réfringente, sur le *trajet* des rayons incidents ; *virtuel* quand il est sur les prolongements géométriques de ces rayons en arrière de cette première surface. — On donne le nom de *foyer* au point d'entrecroisement des rayons qui ont éprouvé la dernière réflexion ou la dernière réfraction ; on le dit *réel* ou *virtuel* suivant qu'il est sur le trajet de ces rayons lumineux ou sur leurs prolongements géométriques.

---

# PREMIÈRE PARTIE

## DES IMAGES PAR RÉFLEXION

5. Les miroirs courbes employés en optique sont des calottes sphériques (fig. 1) d'une très-faible étendue par rapport à la

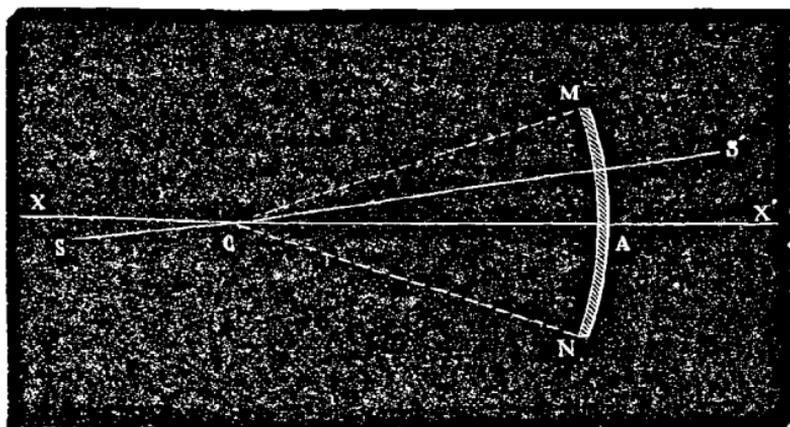


FIG. 1.

surface de la sphère à laquelle elles appartiennent.—A étant le *centre de figure*, le *sommet* ou le *pôle* de la calotte sphérique MN, et C son *centre de courbure*, la droite indéfinie XX' menée par C et par A s'appelle l'*axe principal* du miroir. Toute droite SS' menée par le centre de courbure C est normale à la surface du miroir, et s'appelle *axe secondaire*. L'angle MCN compris entre deux axes secondaires CM, CN tangents aux bords de la calotte sphérique, et compris dans un plan passant par

l'axe principal  $XX'$  mesure l'amplitude du miroir. Pour que les images soient nettes, cette amplitude doit être d'un très-petit nombre de degrés.

## CHAPITRE PREMIER

### MIROIRS CONCAVES.

6. Un miroir concave est une calotte sphérique  $MN$  qui reçoit la lumière incidente du côté de sa concavité.

7. *Foyer principal.* — Soit  $SI$  (fig. 2), un rayon incident quelconque parallèle à l'axe principal. Le rayon réfléchi correspondant  $IR$  fait avec la normale  $CI$  un angle de réflexion  $RIC$

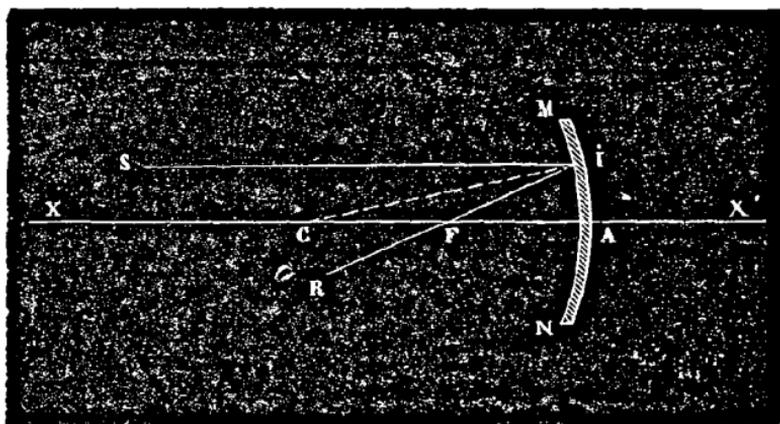


FIG. 2.

égal à l'angle d'incidence  $SIC$ , et coupe l'axe principal au point  $F$  entre le miroir et le centre de courbe  $C$ .  $SI$  étant parallèle à  $AX$ , les angles  $SIC$ ,  $ICA$  sont égaux comme alternes internes; le triangle  $CIF$  est donc isocèle, et les côtés  $IF$ ,  $FC$  sont égaux comme opposés à des angles égaux. En raison de la très-faible amplitude du miroir,  $IF$  est sensiblement égal

à AF; donc  $AF = CF$  et le point F est situé à égale distance du centre de courbure C et du sommet A de miroir. — La même construction et le même raisonnement peuvent s'appliquer à tout autre rayon incident parallèle à l'axe principal et au rayon réfléchi correspondant; il en résulte que tous les rayons réfléchis se croisent en ce même point F lorsque les rayons incidents sont parallèles à l'axe principal.

Ce point F ainsi déterminé est le *foyer principal* du miroir; il est *réel* et situé à égale distance du centre de courbure et du centre de figure du miroir. — La longueur AF est la *distance focale* du miroir; nous la désignerons par la lettre  $\varphi$ . — On convient de considérer cette distance focale comme une quantité *positive* pour indiquer que la longueur AF doit être comptée à partir du point A, en avant du miroir, du côté de la lumière incidente. En appelant  $r$  le rayon de courbure CA du miroir, nous avons donc :

$$\varphi = \frac{r}{2}$$

expression qui détermine la véritable position du *foyer principal* F sur l'axe principal.

Puisque les angles d'incidence et de réflexion doivent toujours être égaux, il est évident que si un point lumineux était placé en F, tous les rayons incidents émanés de ce point lumineux seraient réfléchis parallèlement à l'axe principal.

8. *Plan focal*. — Nous appellerons *plan focal* un plan TT' (fig. 3), perpendiculaire à l'axe principal, mené par le foyer principal F. Les portions de ce plan rapprochées du point F jouissent de propriétés importantes.

1° Soit SI un rayon incident quelconque. L'axe secondaire CG parallèle à SI joue évidemment le rôle d'un axe principal par rapport à ce rayon incident. D'autre part, en raison de la très-faible amplitude du miroir, BG est sensiblement égal à AF. Le point B où l'axe secondaire CG perce le plan focal TT' joue donc le rôle d'un foyer principal par rapport à SI et à tous les rayons incidents qui lui sont parallèles. Il en résulte

que le rayon réfléchi IR, correspondant à SI, passe nécessairement par le point B, et que tout rayon incident parallèle à SI est réfléchi suivant une droite menée par le point d'incidence et par ce point B.

Donc le foyer d'un faisceau de rayons incidents parallèles entre eux et à SI est *réel* et situé sur le plan focal, au point B où ce plan est percé par l'axe secondaire

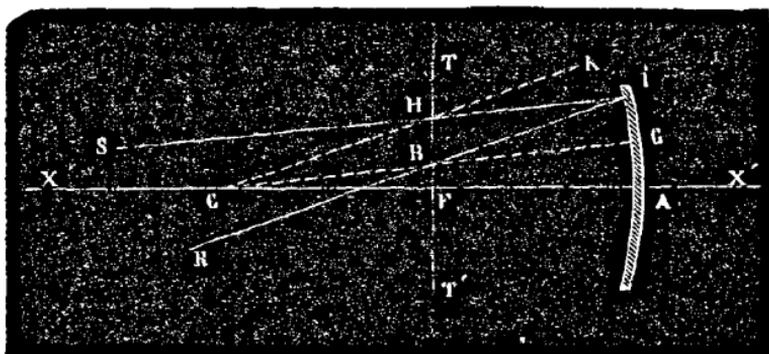


FIG. 3.

parallèle aux rayons incidents. — Dans le cas particulier où les rayons incidents sont parallèles à l'axe principal, le foyer des rayons réfléchis est au foyer principal F.

2° Réciproquement tout rayon incident HI qui passe par un point B du plan focal est réfléchi suivant IS parallèlement à l'axe secondaire CG mené par le point B.

Donc, lorsqu'un point lumineux est situé en un point quelconque B du plan focal, les rayons réfléchis sont tous parallèles entre eux et à l'axe secondaire CG mené par ce point lumineux. — Dans le cas particulier où le point lumineux est au foyer principal F, les rayons réfléchis sont parallèles à l'axe principal.

Il résulte de ces deux propriétés du plan focal qu'un rayon incident quelconque SI et le rayon réfléchi correspondant IR satisfont aux deux conditions suivantes : — Le rayon réfléchi IR passe par le point B où le plan focal est percé par l'axe se-

1.

condaire CG parallèle au rayon incident SI; — le rayon incident pouvant être considéré comme émanant d'un point lumineux situé sur le plan focal au point H où ce plan est percé par SI, le rayon réfléchi IR est nécessairement parallèle à l'axe secondaire CK mené par le point H. — Le rayon incident, le rayon réfléchi et ces deux axes secondaires forment donc un parallélogramme CHIB. — Étant donné un rayon incident quelconque, on peut donc toujours construire géométriquement le rayon réfléchi correspondant.

9. *Foyer d'un point lumineux situé sur l'axe principal.* — Soient P (fig. 4) un point lumineux situé sur l'axe principal, et PI un rayon incident quelconque fourni par ce point lumineux. Le rayon réfléchi correspondant IR passe par le point B où le plan focal est percé par l'axe secondaire CB parallèle à PI, de plus ce rayon réfléchi est parallèle à l'axe secondaire CH. Ce rayon réfléchi IR dont la position est ainsi déterminée coupe l'axe principal en P'.

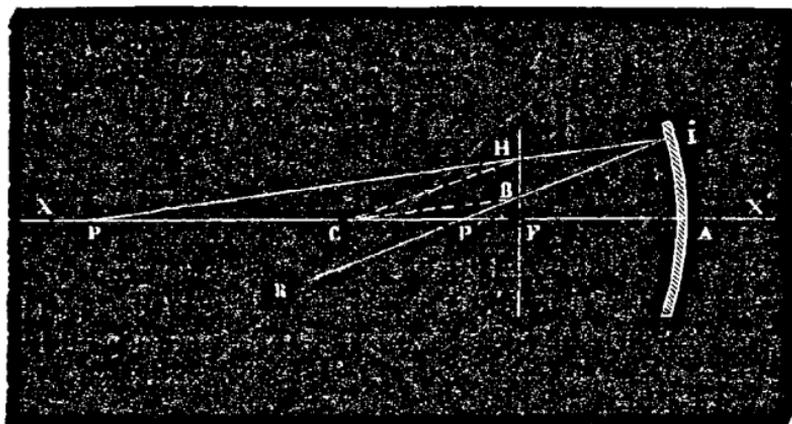


FIG. 4.

Les deux triangles rectangles PHF, CBF sont semblables et donnent :

$$\frac{PF}{CF} = \frac{HF}{BF}$$

D'autre part, les deux triangles rectangles CHF, P'BF sont semblables et donnent :

$$\frac{CF}{P'F} = \frac{HF}{BF}$$

Les seconds membres de ces équations sont identiques, les premiers membres sont donc égaux et nous avons :

$$\frac{PF}{CF} = \frac{CF}{P'F}$$

d'où, en tenant compte de la relation  $CF = AF = \varphi$  :

$$PF \times P'F = \varphi^2.$$

Dans cette équation, la distance focale  $\varphi$  est une quantité constante ; la distance P'F ne dépend donc que de PF et conserve la même valeur quelle que soit l'inclinaison sur l'axe principal du rayon incident émané du point P. Tous les rayons réfléchis se croisent donc sur l'axe principal au même point P' qui est le foyer du point lumineux P.

Lorsque les rayons incidents sont *homocentriques* et que leur point de croisement est sur l'axe principal, les rayons réfléchis sont donc aussi *homocentriques* et s'entrecroisent sur l'axe principal.

Il est évident que si un point lumineux était placé en P', les rayons réfléchis se croiseraient tous sur l'axe principal au point P. — Ces deux points P, P', *réciroques* l'un de l'autre, prennent la dénomination de *foyers conjugués*.

Désignons par les lettres  $l, l'$  les distances PF, P'F du foyer principal F du miroir au point lumineux P et au foyer P' ; nous aurons pour formule générale des foyers conjugués :

$$(1) \quad ll' = \varphi^2.$$

Pour que cette équation de forme très-simple et de discussion très-facile donne, dans tous les cas, la position *réelle* des points P, P' sur l'axe principal, adoptons les conventions suivantes : les distances  $l, l'$  sont comptées à partir du point F, *positivement* à gauche de F, *négativement* dans le sens contraire à droite de F (\*).

(\*) Dans la théorie classique des miroirs concaves, toutes les dis-

De l'équation (1), on tire :

$$v = \frac{\varphi^2}{l}$$

quantité  $\varphi^2$  est nécessairement *positive*, le signe de  $v$  dépend donc uniquement de celui de  $l$ . Par conséquent :

Tant que le point lumineux P est *réel* et à *gauche* du foyer principal F, c'est-à-dire tant que  $l$  est *positif*,  $v$  est aussi *positif* et le foyer P' est aussi à *gauche* de F et *réel*.

Lorsque le point lumineux P *réel* ou *virtuel* passe à *droite* de F,  $l$  devient *négatif*;  $v$  devient aussi *négatif* et le foyer P' passe aussi à *droite* de F, *réel* ou *virtuel* suivant la valeur de  $l$ .

A. Le point lumineux P est à *gauche* du foyer principal F,  $l$  est *positif*. — Dans ce cas,  $v$  est *positif* et P' est *réel*.

Lorsque le point lumineux P est à l'*infini*,  $l = \infty$  et  $v = 0$ ; le foyer P' est donc au foyer principal F. — Il devait en être ainsi puisque, dans ce cas, tous les rayons incidents sont parallèles à l'axe principal.

Si  $l = \varphi$ , le point lumineux est au centre de courbure C;

tances sont comptées à partir du sommet A de la surface réfléchissante, *positivement* à *gauche* de A, *négativement* à *droite* de A. On obtient ainsi une formule des foyers conjugués qui peut facilement être déduite de l'équation (1). En effet, appelons  $p$ ,  $p'$  les distances AP, AP', nous avons :

$$l = PF = AP - AF = p - \varphi$$

$$v = P'F = AP' - AF = p' - \varphi$$

La substitution de ces valeurs de  $l$ ,  $v$  dans l'équation (1) donne :

$$(p - \varphi)(p' - \varphi) = \varphi^2$$

d'où

$$p\varphi + p'\varphi = pp'$$

Et, en divisant tous les termes de cette équation par  $pp'\varphi$  :

$$(a) \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{\varphi}$$

Telle est la formule classique des foyers conjugués dans le cas du miroir concave;  $\varphi$  est une quantité *positive*.

$l = \varphi$  et le foyer  $P'$  est aussi au centre de courbure, superposé au point lumineux  $P$ . — Ce résultat était facile à prévoir, puisque, dans ce cas, tous les rayons incidents sont normaux à la surface du miroir et se réfléchissent nécessairement sur eux-mêmes.

Pour toutes les valeurs de  $l$  plus grandes que  $\varphi$ , le point lumineux  $P$  est *au delà* du centre de courbure ;  $l'$  est plus petit que  $\varphi$  et le foyer  $P'$  est compris entre le centre de courbure  $C$  et le foyer principal  $F$ . — D'ailleurs  $l'$  est d'autant plus petit que  $l$  est plus grand ; par conséquent, à mesure que le point lumineux  $P$  s'éloigne du centre de courbure  $C$  et marche vers *l'infini*, son foyer  $P'$  s'éloigne aussi du centre de courbure et se rapproche du foyer principal  $F$ .

Pour toutes les valeurs de  $l$  plus petites que  $\varphi$ , le point lumineux  $P$  est compris entre le centre de courbure  $C$  et le foyer principal  $F$  ;  $l'$  est constamment plus grand que  $\varphi$  et le foyer  $P'$  est au delà du centre de courbure. — D'ailleurs  $l'$  est d'autant plus grand que  $l$  est plus petit ; par conséquent à mesure que  $P$  s'éloigne du centre de courbure et se rapproche du foyer principal  $F$ , son foyer  $P'$  s'éloigne aussi du centre de courbure  $C$  et marche vers *l'infini*.

Enfin lorsque  $l = 0$ , le point lumineux  $P$  est au foyer principal  $F$  et  $l' = \infty$  ; le foyer  $P'$  est donc à *l'infini*, ce qui indique que les rayons réfléchis sont parallèles à l'axe principal.

B. *Le point lumineux  $P$  est à droite du foyer principal  $F$ ,  $l$  est négatif.* — Nous avons déjà vu que, dans ce cas,  $l'$  est aussi négatif et le foyer  $P'$  à droite de  $F$ .

Tant que  $l$  reste, en grandeur absolue, plus petit que  $\varphi$ , le point lumineux  $P$  est *réel* et compris entre le foyer principal  $F$  et le sommet  $A$  du miroir ;  $l'$  est, en grandeur absolue, supérieur à  $\varphi$ , le foyer  $P'$  est donc situé *derrière* le miroir et par conséquent *virtuel*. — D'ailleurs à mesure que la grandeur absolue de  $l$  diminue ou que le point lumineux *réel*  $P$  s'éloigne du miroir et se rapproche du foyer principal  $F$ , la grandeur absolue de  $l'$  augmente et le foyer *virtuel*  $P'$  marche vers *l'infini* en s'éloignant aussi du miroir.

Si  $l = -\varphi$ , le point lumineux P est au sommet A du miroir ;  $l' = -\varphi$  et le foyer P' est aussi au point A superposé au point lumineux.

Enfin, dans tous les cas où la grandeur absolue de  $l$  est supérieure à  $\varphi$ , le point lumineux P est *virtuel* ou situé derrière la surface réfléchissante ; la valeur absolue de  $l'$  est nécessairement alors inférieure à  $\varphi$ , le foyer P' redevient *réel* et se trouve compris entre le miroir et le foyer principal F. — D'ailleurs l'équation montre que le foyer *réel* P' s'éloigne du miroir et se rapproche du foyer principal F à mesure que le point lumineux *virtuel* P s'éloigne du miroir et marche vers l'*infini*.

Ainsi, dans tous les cas, les foyers conjugués P, P' se déplacent en *sens contraires* le long de l'axe principal.

10. *Foyer d'un point lumineux situé hors de l'axe principal.*  
— Soit S (fig. 5) le point lumineux. L'axe secondaire SCG

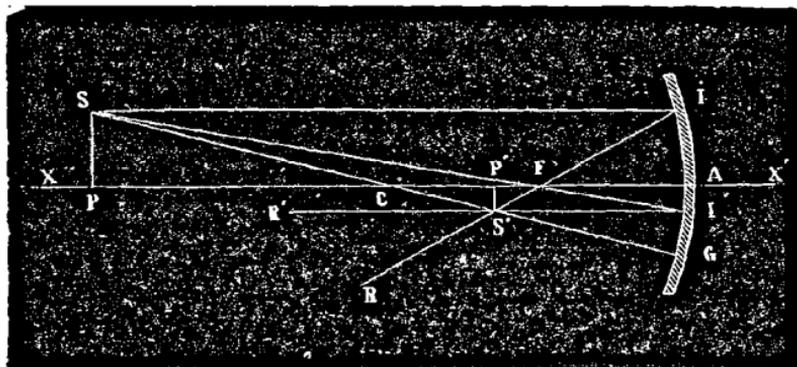


FIG. 5.

mené par le point S joue évidemment par rapport aux rayons incidents le rôle d'un axe principal et le foyer des rayons réfléchis doit se trouver sur la droite SG. — A tout faisceau incident de rayons *homocentriques* correspond donc un faisceau réfléchi de rayons *homocentriques* ; les deux points de croisement, c'est-à-dire le point lumineux et son foyer, sont assujettis à se trouver sur un même axe secondaire.

Le rayon incident  $SI$  parallèle à l'axe principal se réfléchit suivant  $IR$  qui passe par le foyer principal  $F$ , et le rayon incident  $S'I'$  qui passe par  $F$  se réfléchit suivant  $I'R'$  parallèle à l'axe principal. Le foyer du point  $S$  est donc en  $S'$  au point où ces deux rayons réfléchis se coupent sur l'axe secondaire  $SG$ .

Des points  $S$ ,  $S'$  abaissons les perpendiculaires  $SP$ ,  $S'P'$  sur l'axe principal. En raison de la très-faible amplitude du miroir, l'arc  $II'$  se confond sensiblement avec une perpendiculaire à l'axe principal menée en  $A$ . Dès lors nous pouvons poser  $AI = SP$ ,  $AI' = S'P'$ .

Les triangles rectangles  $FSP$ ,  $F'A$  sont semblables et donnent :

$$\frac{PF}{AF} = \frac{SP}{AI'}$$

D'autre part, les triangles rectangles  $FIA$ ,  $FS'P'$  sont semblables et donnent :

$$\frac{AF}{P'F} = \frac{AI}{S'P'}$$

Mais  $AI = SP$  et  $AI' = S'P'$ , les seconds membres de ces deux équations sont donc identiques ; par suite les premiers membres sont égaux et nous avons :

$$\frac{PF}{AF} = \frac{AF}{P'F}$$

D'où, en remplaçant  $AF$  par  $\varphi$ ,

$$PF \times P'F = \varphi^2.$$

Les distances  $PF$ ,  $P'F$  du foyer principal  $F$  aux pieds  $P$ ,  $P'$  des perpendiculaires abaissées du point lumineux  $S$  et de son foyer  $S'$  sur l'axe principal satisfont donc à la formule générale des foyers conjugués.

Mais, en tenant compte de l'égalité  $AI' = S'P'$ , les triangles rectangles semblables  $F'A$ ,  $FSP$ , donnent :

$$\frac{S'P'}{SP} = \frac{\varphi}{PF}$$

Pour déterminer la position du foyer  $S'$ , nous avons donc les deux relations suivantes :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} PF \times P'F = \varphi^2 \\ \frac{S'P'}{SP} = \frac{\varphi}{PF} \end{array} \right.$$

La position du point lumineux  $S$  étant donnée, les distances  $PF$ ,  $SP$  sont nécessairement connues ; la position du foyer  $S'$  est donc déterminée par les équations (2) qui fournissent les valeurs correspondantes de  $P'F$  et de  $S'P'$ .

Dans la figure 5 le point lumineux  $S$  et son foyer  $S'$  sont l'un *au-dessus*, l'autre *au-dessous* de l'axe principal. Ces deux points étant situés sur un même axe secondaire, leur position relative reste évidemment la même dans tous les cas où le centre de courbure  $C$ , c'est-à-dire le point d'entrecroisement de cet axe secondaire et de l'axe principal, se trouve compris dans l'intervalle qui sépare le point lumineux de son foyer.

Les équations (2) montrent que tout point lumineux situé sur la perpendiculaire  $SP$  a nécessairement son foyer sur la perpendiculaire  $S'P'$ . — En raison de la parfaite symétrie des surfaces sphériques, des points lumineux situés sur un plan perpendiculaire à l'axe principal mené par le point  $P$  auraient nécessairement leurs foyers sur un plan perpendiculaire à l'axe principal mené par le point  $P'$  ; de plus ces points lumineux et leurs foyers seraient semblablement distribués sur ces deux plans.

11. *Rapports de position et de grandeur d'un objet et de son image.* — Il résulte de cette dernière considération que si  $SP$  (fig. 6) est un objet plan et perpendiculaire à l'axe principal, le miroir en fournit par réflexion, en  $S'P'$ , une image semblable, plane et perpendiculaire à l'axe. Dès lors les positions relatives de l'objet  $SP$  et de son image  $S'P'$  sont déterminées par la première des équations (2) ; la seconde de ces équations est évidemment l'expression du rapport de leurs dimensions linéaires.

En appliquant à ces deux équations :

$$PF \times P'F = \varphi^2$$

$$\frac{S'P'}{SP} = \frac{\varphi}{PF}$$

le mode de discussion adopté pour la formule générale des foyers conjugués, on arrive facilement aux conclusions suivantes :

A. *L'objet SP est à gauche du plan focal F.* — Dans ce cas, PF est positif, P'F est donc aussi positif et l'image S'P' est à gauche du plan focal et réelle.

Si l'objet est *infinitement* éloigné, PF est *infinitement* grand, P'F est *infinitement* petit ; l'image S'P' *infinitement* petite par rapport à l'objet SP est située sur le plan focal F.

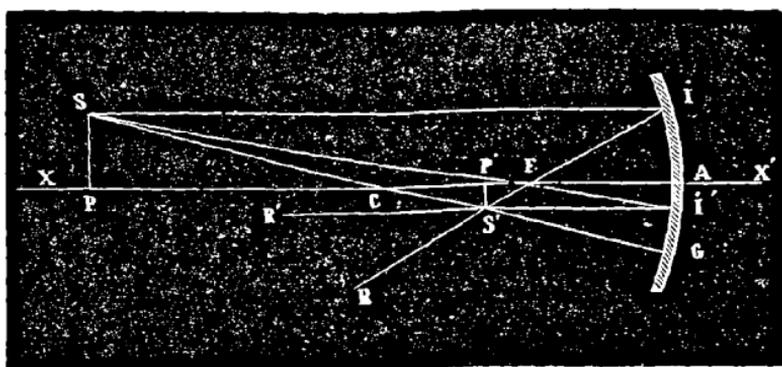


FIG. 6.

A mesure que l'objet SP se rapproche du centre de courbure C, PF diminue et P'F augmente ; l'image S'P', toujours *plus petite* que SP et comprise entre le plan focal F et le centre de courbure C, se rapproche aussi du centre de courbure et *grandit*.

Quand l'objet SP est au centre de courbure C,  $PF = \varphi = P'F$  ; l'image S'P' est aussi au centre de courbure C et de même grandeur que l'objet.

Quand l'objet SP est situé entre le centre de courbure C et

le plan focal F,  $PF$  est *plus petit* que  $\varphi$ ,  $P'F$  est *plus grand* que  $\varphi$ ; l'image *plus grande* que SP passe à gauche du centre de courbure C, *grandit* et s'éloigne vers l'*infini* à mesure que l'objet se rapproche du plan focal F.

Enfin quand l'objet SP est sur le plan focal F,  $PF = 0$ ,  $P'F$  est *infiniment* grand; l'image  $SP'$  est donc *infiniment* éloignée et *infiniment grande* par rapport à l'objet.

Ajoutons que cette image *réelle* est toujours *renversée*, car le centre de courbure C reste constamment dans l'intervalle qui la sépare de l'objet.

B. L'objet SP est à droite du plan focal F. — Dans ce cas,  $PF$  est *néгатif*;  $P'F$  est donc aussi *néгатif* et l'image  $SP'$ , passe à *droite* du plan focal F.

Tant que l'objet SP reste *réel* et par suite compris entre le plan focal F et le miroir,  $PF$  est, en grandeur absolue, plus petit que  $\varphi$  et  $P'F$  est, en grandeur absolue, plus grand que  $\varphi$ ; l'image  $SP'$  est donc située *derrière* le miroir, *virtuelle* et *plus grande* que l'objet. — D'ailleurs plus l'objet se rapproche du plan focal F, plus son image *virtuelle grandit* et s'éloigne derrière le miroir.

Quand l'objet SP est sur le miroir,  $PF = -\varphi$ ,  $P'F = -\varphi$ , l'image  $SP'$  est aussi sur le miroir et de même grandeur que l'objet.

Quand l'objet SP devient *virtuel* et passe derrière le miroir,  $PF$  est, en grandeur absolue, supérieur à  $\varphi$ , et  $P'F$  est, en grandeur absolue, plus petit que  $\varphi$ ; l'image  $SP'$  *réelle* et *plus petite* que l'objet est comprise entre le miroir et le plan focal F. — D'ailleurs, à mesure que l'objet *virtuel* s'éloigne derrière le miroir son image *diminue* et se rapproche du plan focal F.

Ajoutons que cette image *réelle* ou *virtuelle* est toujours *droite*, car le centre de courbure C reste constamment en dehors de l'intervalle qui la sépare de l'objet.

Ainsi donc, en résumé :

1<sup>o</sup> Comme les foyers conjugués, un objet *réel* ou *virtuel* et son image *réelle* ou *virtuelle* se déplacent toujours *en sens contraires* le long de l'axe principal.

2° Un objet  $SP$  et son image  $SP'$ , restant toujours compris tout entiers entre l'axe principal et l'axe secondaire  $SS'$ , sont nécessairement vus sous le même angle par un œil placé au centre de courbure  $C$  du miroir.

## CHAPITRE II

### MIROIRS CONVEXES.

12. Toutes les questions examinées à propos des miroirs concaves se présentent dans l'étude des propriétés des miroirs convexes; les mêmes raisonnements appliqués à des constructions analogues nous en donneront la solution.

13. *Foyer principal.* — Soit  $SI$  (fig. 7) un rayon incident quelconque parallèle à l'axe principal, le prolongement géométrique

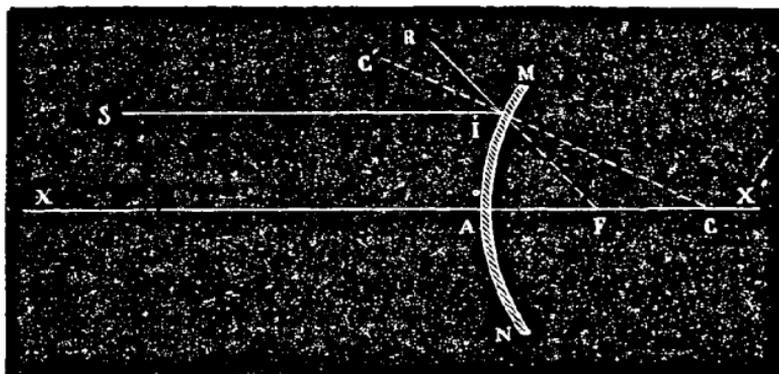


FIG. 7.

que du rayon réfléchi correspondant  $IR$  coupe l'axe principal derrière le miroir en  $F$ . Le triangle  $CIF$  est évidemment isocèle et  $CF = IF$ ; mais, en raison de la très-faible amplitude du miroir,  $IF$  est sensiblement égal à  $AF$ ; donc  $AF = CF$ , et le point  $F$  est situé à moitié distance du centre de courbure  $C$

et du sommet A du miroir. La même construction et le même raisonnement peuvent s'appliquer à tout autre rayon parallèle à l'axe principal et au rayon réfléchi correspondant; il en résulte que les prolongements de tous les rayons réfléchis se croisent en un même point F lorsque les rayons incidents sont parallèles à l'axe principal.

Le point F ainsi déterminé est le *foyer principal* du miroir; il est *virtuel* et situé à égale distance du centre de courbure C et du centre de figure A du miroir. — La longueur AF est la *distance focale* que nous continuerons à désigner par la lettre  $\varphi$ ; on convient de considérer cette distance focale comme une quantité *négative*, pour indiquer que la longueur AF doit être comptée à partir du point A *derrière* le miroir. En appelant  $r$  le rayon de courbure CA du miroir, nous avons donc :

$$\varphi = -\frac{r}{2}$$

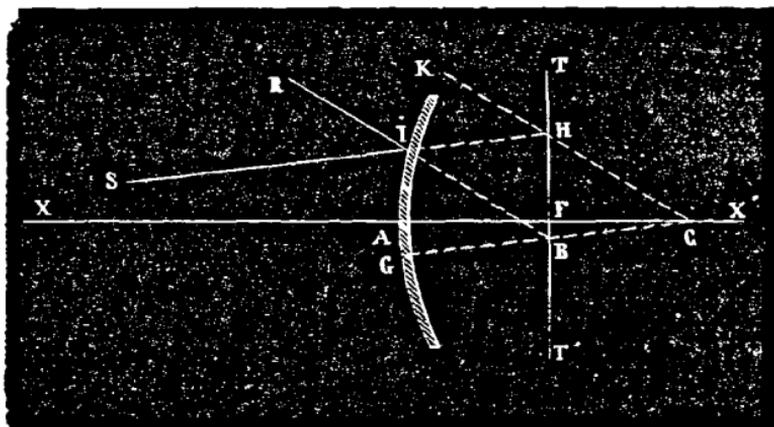
expression qui détermine la véritable position du foyer principal F sur l'axe principal.

En vertu de la réciprocité des phénomènes de la réflexion, il est évident que tout rayon incident dont le prolongement passe par le point F est réfléchi parallèlement à l'axe principal.

14. *Plan focal*. — Nous appellerons *plan focal* un plan TT' (fig. 8) perpendiculaire à l'axe principal, mené par le point F. Les portions de ce plan rapprochées de F jouissent de propriétés importantes.

1° Soient SI un rayon incident quelconque et CG un axe secondaire parallèle à SI. En raison de la très-faible amplitude du miroir, BG est sensiblement égal à AF; par conséquent, l'axe secondaire CG et le point B jouent, par rapport au rayon incident SI et à tous les rayons parallèles à SI les rôles d'un axe principal et d'un foyer principal. Il en résulte que le prolongement du rayon réfléchi IR, correspondant à SI, passe nécessairement par le point B, et que tout rayon inci-

dent parallèle à  $SI$  est réfléchi suivant une droite menée par le point d'incidence et par ce point  $B$ .



F. . . S.

Donc le foyer d'un faisceau de rayons incidents parallèles entre eux est *virtuel* et situé sur le plan focal au point  $B$  où ce plan est percé par l'axe secondaire  $CG$ , parallèle aux rayons incidents. — Dans le cas particulier où les rayons incidents sont parallèles à l'axe principal, leur foyer *virtuel* est en  $F$ .

2° Réciproquement, tout rayon incident  $HI$  dont le prolongement passe par un point  $B$  du plan focal se réfléchit suivant  $IS$  parallèle à l'axe secondaire  $CG$  mené par ce point  $B$ .

Donc lorsqu'un point lumineux *virtuel* est situé en un point quelconque  $B$  du plan focal, tous les rayons réfléchis sont parallèles à l'axe secondaire  $CG$ , mené par le point lumineux  $B$ . — Dans le cas particulier où le point lumineux *virtuel* est en  $F$ , les rayons réfléchis sont parallèles à l'axe principal.

Il résulte de ces deux propriétés du plan focal qu'un rayon incident quelconque  $SI$  et le rayon réfléchi correspondant  $IR$  satisfont aux conditions suivantes : — le prolongement du rayon réfléchi  $IR$  passe par le point  $B$  où le plan focal est percé par l'axe secondaire  $CG$ , parallèle au rayon incident  $SI$  ; — le rayon incident pouvant être considéré comme aboutissant à un point

lumineux *virtuel* situé sur le plan focal au point H où ce plan est percé par le prolongement de SI, le rayon réfléchi IR est nécessairement parallèle à l'axe secondaire CK, mené par le point H.—Le quadrilatère CHIB formé par les prolongements des rayons incident et réfléchi et par ces deux axes secondaires est un parallélogramme.—Un rayon incident quelconque étant donné, on peut donc toujours construire géométriquement le rayon réfléchi correspondant.

15. *Foyer d'un point lumineux situé sur l'axe principal.* — Soient P (fig. 9) un point lumineux situé sur l'axe principal, et PI un rayon incident quelconque fourni par ce point lumineux, et dont le prolongement perce en H le plan focal F. Le rayon réfléchi correspondant IR est parallèle à CH, et son prolongement passe par le point B où le plan focal est percé par la droite CB parallèle au rayon incident SI. Le prolongement de ce rayon réfléchi IR, ainsi déterminé, coupe l'axe principal en P'.

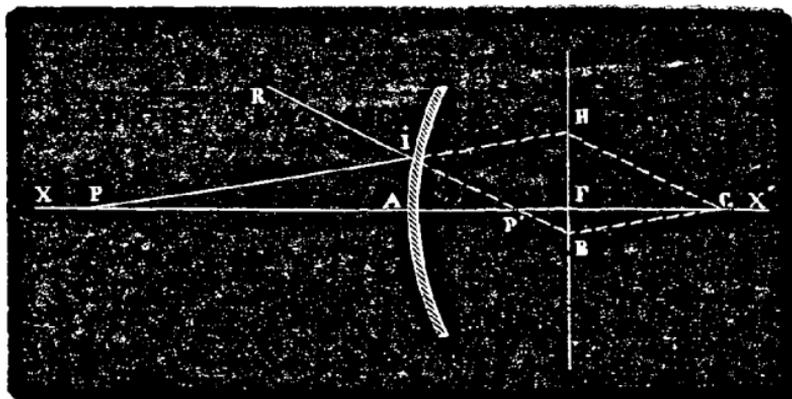


FIG. 9.

Nous avons deux couples de triangles rectangles semblables, PHF, CBF et CHF, P'BF, qui donnent :

$$\frac{PF}{CF} = \frac{CF}{P'F}$$

d'où, en tenant compte de la relation  $CF = AF = \varphi$ , et en représentant  $PF$  et  $P'F$  par les lettres  $l, l'$  :

$$(1) \quad l' = \varphi^2$$

La distance focale  $\varphi$  est constante, la distance  $l'$  ne dépend donc que de  $l$ , et reste la même pour tous les rayons incidents émanés du point  $P$ . Les prolongements de tous les rayons réfléchis se croisent donc sur l'axe principal au point  $P'$ , qui est le foyer du point lumineux  $P$ .

Lorsque les rayons incidents sont *homocentriques* et que leur point de croisement est sur l'axe principal, les rayons réfléchis sont donc *homocentriques* et leurs directions se croisent aussi sur l'axe principal.

Réciproquement, si un point lumineux *virtuel* était situé sur l'axe principal en  $P'$ , les rayons réfléchis se croiseraient tous au point  $P$  de l'axe principal. — Ces deux points  $P, P'$ , *réiproques* l'un de l'autre, sont dits *foyers conjugués*.

Pour que la formule générale des foyers conjugués (1) donne, dans tous les cas, la position réelle des points  $P, P'$ , il suffit de conserver les conventions adoptées à propos des miroirs concaves : les longueurs  $l, l'$  sont comptées à partir du point  $F$ , *positivement* à gauche et *négativement* à droite de  $F$  (\*).

(\*) Comptons toutes les distances à partir du sommet  $A$  du miroir, *positivement* à gauche, *négativement* à droite de  $A$  ; et désignons par les lettres  $p, p'$  les longueurs  $AP, AP'$ . Nous aurons, en tenant compte seulement des valeurs absolues de  $p, p'$  et  $\varphi$  :

$$l = PF = AP + AF = p + \varphi$$

$$l' = P'F = AF - AP' = \varphi - p'$$

La substitution de ces valeurs de  $l, l'$  dans l'équation (1) donne :

$$(p + \varphi) (\varphi - p') = \varphi^2$$

d'où

$$p\varphi - p'\varphi = p\varphi$$

Si nous mettons en évidence les signes négatifs de  $p'$  et de  $\varphi$ , et si

De l'équation (1) on tire :

$$l' = \frac{\varphi^2}{l}$$

La quantité  $\varphi^2$  est nécessairement *positive*, le signe de  $l'$  dépend donc uniquement de celui de  $l$ . Par conséquent :

Tant que le point P, *réel* ou *virtuel*, est à *gauche* du foyer principal F, c'est-à-dire tant que  $l$  est *positif*,  $l'$  est aussi *positif* et le foyer P' est aussi à *gauche* de F, *réel* ou *virtuel* suivant la valeur de  $l$ .

Lorsque le point lumineux P *virtuel* passe à *droite* du foyer principal F,  $l$  est *négalif*;  $l'$  devient aussi *négalif* et le foyer *virtuel* P' passe à *droite* du foyer principal F.

En appliquant à la formule (1) le mode de discussion adopté à propos des miroirs concaves (9), on en déduit, sans difficulté, les conclusions suivantes :

A. Le point lumineux P est à *gauche* du foyer principal F,  $l$  est *positif*. — Dans ce cas,  $l'$  est *positif* et P' à *gauche* de F.

Si le point lumineux P est à *l'infini*, son foyer P' est *virtuel* et coïncide avec le foyer principal F, comme on devait s'y attendre, puisque, dans ce cas, les rayons incidents sont parallèles à l'axe principal.

Tant que le point lumineux P est *réel*, c'est-à-dire placé en avant du miroir, son foyer P' est *virtuel* et situé derrière le miroir, entre le foyer principal F et le sommet A de la surface réfléchissante. — Le point lumineux P et son foyer P' se rapprochent ensemble du point A.

nous divisons tous les termes par l'expression *positive*  $pp'\varphi$ , cette équation donne :

$$(b) \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{\varphi}$$

Telle est la formule classique des foyers conjugués, dans laquelle le second membre est *négalif*, puisque  $\varphi$  est une quantité *négalive*. — Il est facile de voir que, tant que  $p$  est *positif*, c'est-à-dire tant que le point lumineux P est *réel* ou situé *en avant* du miroir,  $p'$  est *négalif*, et le foyer P' est *virtuel* ou situé *en arrière* de la surface réfléchissante.

Si le point lumineux  $P$  est en  $A$ , son foyer  $P'$  est aussi en  $A$  superposé au point lumineux.

Quand le point lumineux  $P$  devient *virtuel*, c'est-à-dire est situé entre le sommet  $A$  du miroir et son foyer principal  $F$ , son foyer  $P'$  passe à *gauche* du point  $A$  et devient *réel*. — D'ailleurs, à mesure que le point lumineux *virtuel*  $P$  s'éloigne de  $A$  et se rapproche de  $F$ , son foyer *réel*  $P'$  s'éloigne aussi de  $A$  et marche vers *l'infini*.

Enfin, quand le point lumineux *virtuel*  $P$  est au foyer principal  $F$ , son foyer  $P'$  est à *l'infini* et les rayons réfléchis sont parallèles à l'axe principal.

B. *Le point lumineux  $P$  est virtuel et situé à droite du foyer principal  $F$ ,  $l$  est négatif.* — Nous avons déjà vu que, dans ce cas,  $l'$  est aussi *négatif* et le foyer  $P'$  est *virtuel* et situé à *droite* de  $F$ .

Tant que le point lumineux *virtuel*  $P$  reste compris entre le foyer principal  $F$  et le centre de courbure  $C$ , son foyer  $P'$  est *virtuel* et situé au delà du centre de courbure. — Le point lumineux et son foyer se rapprochent et s'éloignent ensemble du centre de courbure  $C$ .

Quand le point lumineux *virtuel*  $P$  est au centre de courbure  $C$ , son foyer *virtuel*  $P'$  est aussi en  $C$ ; dans ce cas, en effet, les rayons incidents étant normaux à la surface réfléchissante doivent se réfléchir sur eux-mêmes.

Enfin, quand le point lumineux *virtuel*  $P$  est situé au delà du centre de courbure  $C$ , son foyer *virtuel*  $P'$  est situé entre le centre de courbure  $C$  et le foyer principal  $F$ . — A mesure que ce point lumineux *virtuel* s'éloigne du centre de courbure  $C$  et marche vers *l'infini*, son foyer *virtuel*  $P'$  se rapproche du foyer principal  $F$ .

Ainsi, dans tous les cas, les foyers conjugués  $P, P'$  se déplacent en *sens contraires* le long de l'axe principal.

16. *Foyer d'un point lumineux situé hors de l'axe principal.* — Soit  $S$  (fig. 40) le point lumineux. Le foyer des rayons réfléchis doit évidemment se trouver sur l'axe secondaire  $SC$ , qui

joue, dans ce cas, le rôle d'un axe principal. — A tout faisceau de rayons incidents *homocentriques* correspond donc un faisceau de rayons réfléchis *homocentriques*; les deux points de croisement, c'est-à-dire le point lumineux et son foyer, sont assujettis à se trouver sur un même axe secondaire.

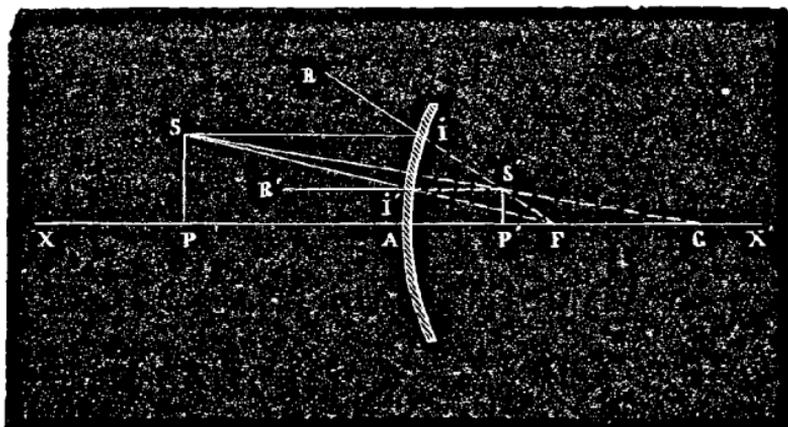


FIG. 10.

Le point S fournit deux rayons incidents, dont l'un SI, parallèle à l'axe principal, se réfléchit suivant IR, qui prolongé passe par le foyer principal F, tandis que l'autre SI', dont le prolongement passe par le foyer principal F, se réfléchit suivant I'R', parallèle à l'axe principal. Le foyer du point lumineux S est donc au point S' où les prolongements de ces deux rayons réfléchis se croisent sur l'axe secondaire SC.

Des points S, S' abaissons les perpendiculaires SP, S'P' sur l'axe principal. En raison de la faible amplitude du miroir, AI = SP, AI' = S'P'. Nous avons ainsi deux couples de triangles rectangles semblables, FSP, F'A et FIA, FS'P', qui donnent :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} PF \times P'F = \varphi^2 \\ \frac{S'P'}{SP} = \frac{\varphi}{PF} \end{array} \right.$$

La première de ces deux équations montre que les pieds P, P' des perpendiculaires abaissées du point lumineux S et de

son foyer  $S'$  sur l'axe principal satisfont à la formule générale des foyers conjugués.

Ces deux équations donnent les valeurs de  $P'F$  et de  $S'P'$ , et, par suite, déterminent la position du foyer  $S'$  d'un point lumineux quelconque  $P$ , dont la position par rapport à la surface réfléchissante est connue.

Dans la figure 10, le point lumineux  $S$  et son foyer *virtuel*  $S'$  sont du même côté de l'axe principal. Ces deux points étant sur un même axe secondaire, leur position relative est toujours la même tant que le centre de courbure du miroir est en dehors de l'intervalle qui les sépare.

Les équations (2) montrent encore que tout point lumineux situé sur la perpendiculaire  $SP$  a nécessairement son foyer sur la perpendiculaire  $S'P'$ . Si donc des points lumineux étaient situés sur un plan perpendiculaire à l'axe principal mené par ce point  $P$ , leurs foyers se trouveraient précisément sur un plan perpendiculaire à l'axe principal mené par le point  $P'$ ; d'ailleurs, ces points lumineux et leurs foyers seraient semblablement distribués sur ces deux plans.

17. *Rapports de position et de grandeur d'un objet et de son image.* — Si  $SP$  (fig. 11) est un objet lumineux ou éclairé rayonnant vers le miroir convexe,  $S'P'$  est nécessairement son image. La première des équations (2) détermine les positions relatives de l'objet  $SP$  et de son image  $S'P'$ , la seconde est l'expression du rapport de leurs dimensions linéaires.

En appliquant à ces formules le mode de discussion adopté pour les miroirs concaves (11), on trouve sans difficulté :

A. *L'objet  $SP$  est à gauche du plan focal  $F$ .* — Dans ce cas, l'image  $S'P'$  est aussi à gauche de  $F$ .

Quand l'objet  $SP$  est *infinitement* éloigné du miroir, son image *virtuelle*  $S'P'$  est sur le plan focal  $F$ , *infinitement* petite par rapport à l'objet.

Tant que l'objet  $SP$  reste *réel*, c'est-à-dire à gauche du miroir, son image  $S'P'$  est *virtuelle*, comprise entre le plan focal  $F$  et le miroir et *plus petite* que l'objet. — A mesure que l'objet se

rapproche du miroir son image *grandit* et se rapproche aussi du miroir.

Quand l'objet  $SP$  est sur le miroir, son image  $S'P'$  est aussi sur la surface réfléchissante, superposée à l'objet et de même grandeur.

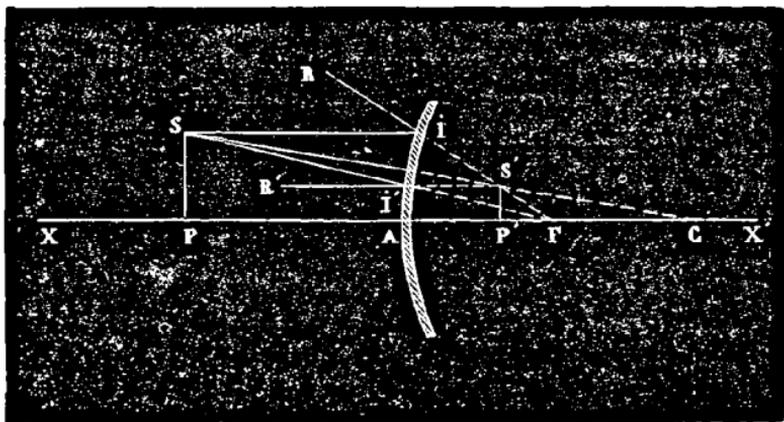


FIG. 11.

Quand l'objet  $SP$  devient *virtuel* et se trouve compris entre le miroir et le plan focal  $F$ , son image  $S'P'$  passe *en avant* du miroir, devient *réelle* et *plus grande* que l'objet. — A mesure que l'objet *virtuel* s'éloigne du miroir et se rapproche du plan focal  $F$ , son image *réelle* s'éloigne du miroir, *grandit* et marche vers l'*infini*.

Enfin, quand l'objet *virtuel*  $SP$  est sur le plan focal  $F$ , son image *réelle*  $S'P'$  est infiniment éloignée en avant du miroir, et *infiniment grande* par rapport à l'objet.

Ajoutons que cette image *réelle* ou *virtuelle* est toujours *droite*, car le centre de courbure est constamment en dehors de l'intervalle qui la sépare de l'objet.

B. L'objet *virtuel*  $SP$  est à droite du plan focal  $F$ . — Dans ce cas l'image  $S'P'$  est toujours *virtuelle* et à droite du plan focal.

Tant que l'objet *virtuel*  $SP$  reste compris entre le plan fo-

cal  $F$  et le centre de courbure  $C$ , son image *virtuelle* est au delà du centre  $C$  et *plus grande* que l'objet. — A mesure que l'objet se rapproche du centre  $C$ , son image se rapproche aussi du centre et *diminue*.

Quand l'objet *virtuel*  $SP$  est au centre de courbure  $C$ , son image *virtuelle*  $S'P'$  est aussi au centre  $C$  et de même grandeur que l'objet.

Enfin, quand l'objet *virtuel*  $SP$  est au delà du centre de courbure  $C$ , son image *virtuelle*  $S'P'$  est *plus petite* que l'objet et comprise entre le centre  $C$  et le plan focal  $F$ . — A mesure que l'objet *virtuel* s'éloigne du centre et marche vers l'*infini*, son image *virtuelle* *diminue* et se rapproche du plan focal  $F$ .

Cette image est toujours *virtuelle* et nécessairement *renversée*, car le centre de courbure  $C$  est constamment compris dans l'intervalle qui la sépare de l'objet.

Ainsi donc, en résumé :

1° Comme les foyers conjugués, un objet *réel* ou *virtuel* et son image *réelle* ou *virtuelle* se déplacent toujours *en sens contraires* le long de l'axe principal.

2° Un objet  $SP$  et son image  $S'P'$ , restant toujours compris tout entiers entre l'axe principal et l'axe secondaire  $SS'$ , sont nécessairement vus sous le même angle par un œil placé au centre de courbure  $C$  du miroir.

---

## DEUXIÈME PARTIE

### DES IMAGES PAR RÉFRACTION

---

18. Dans les appareils dioptriques dont nous nous proposons d'étudier les propriétés, les surfaces réfringentes seront toujours ou des calottes sphériques d'une très-faible amplitude, ou des surfaces planes d'une très-petite étendue. Ajoutons que les centres des calottes sphériques seront tous situés sur une même droite appelée *axe principal* du système, et que les surfaces planes seront perpendiculaires à cet axe.

19. La théorie des appareils dioptriques exposée par Gauss et complétée par M. Listing se déduit facilement des propriétés de *quatre plans* perpendiculaires à l'axe principal, et des propriétés de *six points* appelés *cardinaux*, situés sur l'axe principal dans des positions qui dépendent des indices de réfraction et des épaisseurs des milieux transparents, en même temps que des rayons de courbure des surfaces de séparation de ces milieux.

Les six points cardinaux sont : les *deux foyers principaux*, les *deux points principaux* et les *deux points nodaux*.

Le *premier foyer principal* est le point *réel* ou *virtuel* où doivent se croiser les rayons incidents pour que les rayons émergents correspondants soient parallèles à l'axe principal.— Le *second foyer principal* est le point d'entrecroisement *réel* ou *virtuel* des rayons émergents lorsque les rayons incidents sont parallèles à l'axe principal.

Les *points principaux* jouissent de la propriété suivante :

lorsqu'un rayon incident, prolongé s'il le faut, passe par le *premier point principal*, le rayon émergent correspondant, ou son prolongement, passe par le *second point principal*, mais le rayon incident et le rayon émergent *ne sont pas parallèles*.

Les *point nodaux* sont deux points de l'axe principal tels que, si un rayon incident, ou son prolongement, passe par le *premier point nodal*, le rayon émergent correspondant se confond avec une droite *parallèle* au rayon incident, menée par le *second point nodal*.— Ces deux rayons parallèles, l'un incident, l'autre émergent, s'appellent *lignes de direction* et jouent, dans les appareils dioptriques, le même rôle que les axes secondaires des miroirs courbes.

Les quatre plans perpendiculaires à l'axe principal que présente à considérer tout appareil dioptrique sont : les *deux plans focaux* et les *deux plans principaux*.

Les *plans focaux* passent par les deux foyers principaux ; nous démontrerons que leurs propriétés sont analogues à celles du plan focal des miroirs courbes.

Les *plans principaux* passent par les points principaux et jouissent de la propriété suivante : si par le point où un rayon incident quelconque, ou son prolongement, perce le *premier plan principal*, on mène une parallèle à l'axe principal, le point où cette droite perce le *second plan principal* est nécessairement sur le trajet du rayon émergent correspondant ou sur son prolongement. En d'autres termes, les directions d'un rayon incident quelconque et du rayon émergent correspondant percent le *premier* et le *second plan principal* en deux points situés *du même côté* et à *la même distance* de l'axe principal du système.

La *première distance focale* est l'intervalle qui sépare le *premier point principal* du *premier foyer principal*. — La *seconde distance focale* est l'intervalle qui sépare le *second point principal* du *second foyer principal*.

20. Comme nous le prouverons bientôt, lorsque la lumière n'a à traverser qu'une seule surface sphérique séparant deux

milieux inégalement réfringents, les deux points principaux, et par suite les deux plans principaux, se confondent en un seul, en même temps que les deux points nodaux se superposent; on n'a alors à considérer que quatre points cardinaux et trois plans perpendiculaires à l'axe principal. — Ajoutons enfin que, dans certains appareils dioptriques, les points cardinaux se réduisent à quatre par le fait de la fusion des points nodaux avec les points principaux; nous verrons que c'est le cas d'une lentille placée dans l'air, ou plus généralement de tout système dioptrique dans lequel le premier et le dernier milieu ont le même indice de réfraction.

## CHAPITRE PREMIER

### DES LENTILLES ET DES ASSOCIATIONS DE LENTILLES PLACÉES DANS L'AIR.

21. Tout rayon lumineux qui traverse une lentille éprouve deux réfractions successives et la direction du rayon émergent dépend de l'action de chacune des deux faces de l'appareil. Avant d'aborder l'étude des propriétés des lentilles, il est donc nécessaire de connaître l'influence d'une seule surface réfringente sur la marche de la lumière.

#### ART 1<sup>er</sup>. — ACTION D'UNE SURFACE RÉFRINGENTE DANS LE CAS OU L'AIR EST UN DES DEUX MILIEUX TRANSPARENTS.

22. L'appareil dioptrique le plus simple que l'on puisse considérer se compose d'une surface séparant deux milieux transparents indéfinis dont l'un est l'air et l'autre une substance plus réfringente d'indice de réfraction  $n$ .

Soit MN (fig. 12), la calotte sphérique de très-faible amplitude qui sépare les deux milieux transparents. La droite indéfinie  $XX'$  qui passe par son centre de figure A et son centre de courbure C est l'axe principal. — Un rayon incident

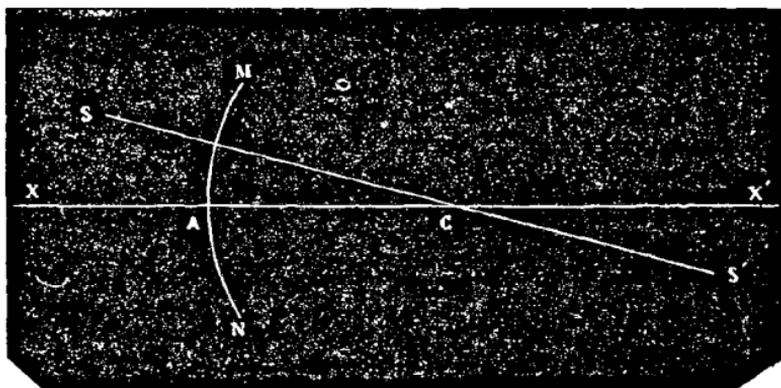


FIG. 12.

qui se meut suivant cet axe est normal à la surface réfringente, et passe sans déviation suivant le prolongement de l'axe lui-même.

En raison de sa très-faible amplitude, la surface MN se confond sensiblement avec le plan tangent à son sommet A. Mais évidemment un rayon incident quelconque et le rayon réfracté correspondant percent *en un même point* la surface MN ou le plan tangent avec lequel elle se confond. Les *deux plans principaux* de ce système se réduisent donc à *un seul* qui est le plan tangent au sommet A de la calotte sphérique; par suite les *deux points principaux* se confondent avec ce même sommet A.

Par le centre de courbure C de la calotte sphérique, menons une ligne droite indéfinie  $SS'$ ; un rayon incident qui se meut suivant cette droite est normal à la surface réfringente, et pénètre sans déviation suivant le prolongement de  $SS'$ . A tout rayon incident dont la direction passe par le centre de courbure C, correspond donc un rayon transmis qui passe

aussi par le centre  $C$  et dont la direction est la même que celle du rayon incident. Les deux points nodaux de ce système se confondent donc avec le centre de courbure  $C$ .

Toute droite  $SS'$  menée par le centre de courbure  $C$ , contenant à la fois un rayon incident et le rayon transmis correspondant est une *ligne de direction*; on l'appelle aussi *axe secondaire*.

Connaissant les points *nodaux* et *principaux*, nous n'avons plus qu'à chercher la position des deux foyers principaux pour compléter la détermination des éléments fondamentaux de ce système dioptrique simple. — Nous aurons plusieurs cas à considérer, car la modification qu'éprouve la direction d'un rayon lumineux varie suivant que la lumière passe de l'air dans le milieu le plus réfringent ou du milieu le plus réfringent dans l'air, et que la transmission s'opère à travers une surface convexe ou une surface concave.

§ 1<sup>er</sup>. — *La lumière passe de l'air dans le milieu le plus réfringent à travers une surface convexe MN.*

23. Un rayon incident quelconque  $SI$  (fig. 13) parallèle à l'axe

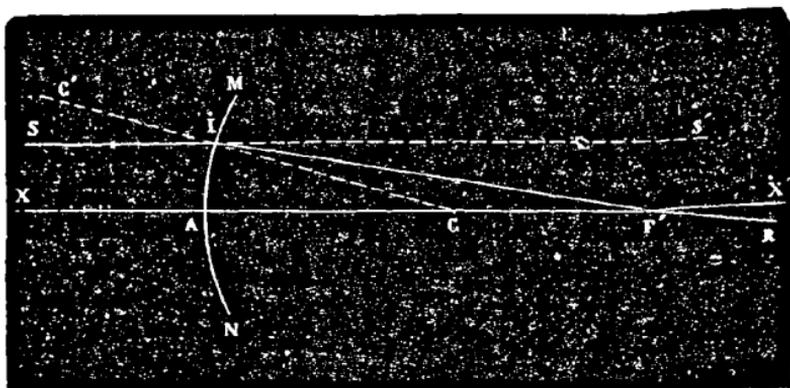


FIG. 13.

principal  $XX'$  pénètre dans le second milieu suivant  $IR$ , en se rapprochant de la normale  $CC'$  au point d'incidence, et coupe

l'axe principal en un point  $F'$  du côté de la lumière transmise ; l'angle de réfraction  $F'IC$  est plus petit que l'angle d'incidence  $SIC'$ .

D'après les lois de la réfraction, le rapport des *sinus* des angles d'incidence et de réfraction est égal à l'indice de réfraction  $n$  du second milieu ; nous avons donc :

$$\frac{\sin SIC'}{\sin F'IC} = n$$

Puisque  $SI$  est parallèle à  $XX'$ , l'angle d'incidence  $SIC'$  et l'angle  $ACI$  sont égaux ; d'ailleurs le *sinus* de l'angle  $ACI$  est égal au *sinus* de son angle *supplémentaire*  $ICF'$  ; nous avons donc :

$$\frac{\sin SIC'}{\sin F'IC} = \frac{\sin ICF'}{\sin F'IC} = n$$

Dans le triangle  $ICF'$ , les *sinus* des angles sont dans le rapport de côtés opposés à ces angles, donc :

$$\frac{\sin ICF'}{\sin F'IC} = \frac{IF'}{CF'}$$

Les premiers membres de ces deux équations sont identiques, les seconds membres sont donc égaux, et nous avons :

$$\frac{IF'}{CF'} = n$$

Mais, en raison de la très-faible amplitude de la surface  $MN$ , nous pouvons, sans erreur sensible, remplacer  $IF'$  par  $AF'$ , d'où :

$$\frac{AF'}{CF'} = n$$

Or,  $CF' = AF' - AC$  ; d'où, en désignant par la lettre  $r$  le rayon de courbure  $AC$ ,  $CF' = AF' - r$  ; ce qui donne en remplaçant :

$$\frac{AF'}{AF' - r} = n$$

D'où :

$$AF' = \frac{nr}{n-1}$$

Tant que la surface réfringente et les milieux qu'elle sépare

ne changent pas,  $r$  et  $n$  sont des quantités constantes, et  $AF'$  conserve la même valeur quelle que soit la position du point d'incidence  $I$  sur  $MN$ . Tous les rayons incidents parallèles à l'axe principal sont donc réfractés dans des directions telles qu'ils passent par un même point  $F'$  de cet axe.

Ce point  $F'$ , foyer des rayons incidents parallèles à l'axe principal, est le *second foyer principal* du système; dans le cas actuel, il est *réel* ou situé du côté de la lumière transmise.

L'intervalle  $AF'$  qui sépare le sommet  $A$  de la surface réfringente du second foyer principal  $F'$  est la *seconde distance focale* du système; nous la désignerons par la lettre  $f'$ . Nous avons donc :

$$f' = \frac{nr}{n-1}$$

La distance  $CF'$  du centre de courbure au second foyer principal est égale à  $AF' - AC = f' - r$ . D'où :

$$CF' = \frac{r}{n-1}$$

24. Soit  $SI$  (fig. 14), un rayon incident tel que le rayon ré-

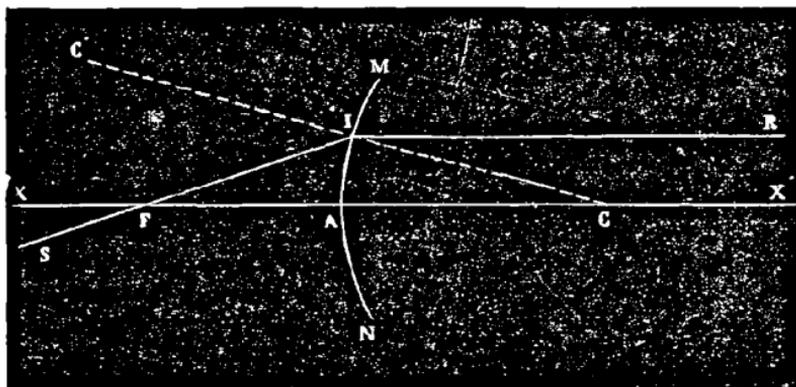


FIG. 14.

fracté correspondant  $IR$  pénètre dans le second milieu parallèlement à l'axe principal  $XX'$ . Ce rayon incident  $SI$  coupe l'axe principal au point  $F$ , en avant de la surface réfringente. Le

rapport des sinus des angles d'incidence et de réfraction  $FIC'$ ,  $RIC$  est égal à l'indice de réfraction  $n$  du second milieu. Mais l'angle  $RIC$  est égal à l'angle  $ICF$ ; de plus, les angles  $FIC'$ ,  $FIC$  sont *supplémentaires*, et par conséquent leurs sinus sont égaux; nous avons donc :

$$\frac{\sin FIC'}{\sin RIC} = \frac{\sin FIC}{\sin ICF} = n$$

Dans le triangle  $FIC$ , les sinus des angles sont dans le même rapport que les côtés opposés, ce qui donne :

$$\frac{\sin FIC}{\sin ICF} = \frac{FC}{FI}$$

Donc :

$$\frac{FC}{FI} = n$$

Mais, en raison de la très-faible amplitude de la surface  $MN$ ,  $FI$  est sensiblement égal à  $AF$ ; de plus  $FC = AF + AC = AF + r$ ; donc en remplaçant dans la dernière équation :

$$\frac{AF + r}{AF} = n$$

D'où :

$$AF = \frac{r}{n - 1}$$

Cette relation étant indépendante de la position du point d'incidence  $I$  sur la surface  $MN$ , il en résulte que tous les rayons incidents émanés du point  $F$  ainsi déterminé sont réfractés parallèlement à l'axe principal.

Ce point  $F$  est le *premier foyer principal* du système; dans ce cas il est *réel*, c'est-à-dire placé du côté de la lumière incidente. —  $AF$  est la *première distance focale*; nous la désignerons par la lettre  $f$ . Nous avons donc :

$$f = \frac{r}{n - 1}$$

La distance  $CF$  du centre de courbure au premier foyer principal est égale à  $AF + AC = f + r$ . D'où :

$$CF = \frac{nr}{n - 1}$$

25. En résumé, dans le cas où la lumière passe de l'air dans un milieu plus réfringent d'indice  $n$ , à travers une surface convexe :

1° Les deux foyers principaux  $F, F'$  sont réels.

2° Les valeurs des distances focales sont :

$$1^{\text{re}} \text{ distance focale : } (1) \quad AF = f = \frac{r}{n-1}$$

$$2^{\text{e}} \text{ distance focale : } (2) \quad AF' = f' = \frac{nr}{n-1}$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{f'}{f} = n$$

Le rapport de la *seconde* à la *première* distance focale est donc égal à l'indice de réfraction du milieu dans lequel se meut la lumière transmise par rapport au milieu dans lequel se meut la lumière incidente.

3° Les distances du *premier* et du *second foyer principal* au centre de courbure de la surface réfringente sont :

$$CF = f' = \frac{nr}{n-1}$$

$$CF' = f = \frac{r}{n-1}$$

La méthode géométrique que nous avons employée ne peut jamais donner que les valeurs absolues des distances focales  $f, f'$ . Pour que les formules indiquent les véritables positions des foyers principaux par rapport au sommet A de la surface réfringente, on convient de considérer les distances focales  $f, f'$  comme *positives* et de les affecter du signe *plus* quand les foyers sont *réels* ; dans le cas de foyers *virtuels*, les distances focales  $f, f'$  sont considérées comme *negatives* et affectées du signe *moins*.

26. *Plans focaux.* — Les plans TT, T'T' (fig. 15) perpendiculaires à l'axe principal, menés par les foyers principaux  $F, F'$ , sont le *premier* et le *second plan focal* ; nous ne considérerons que les parties de ces plans voisines des foyers principaux  $F, F'$ .

Dans ces limites d'étendue, on trouve que ces plans focaux jouissent de propriétés très-importantes.

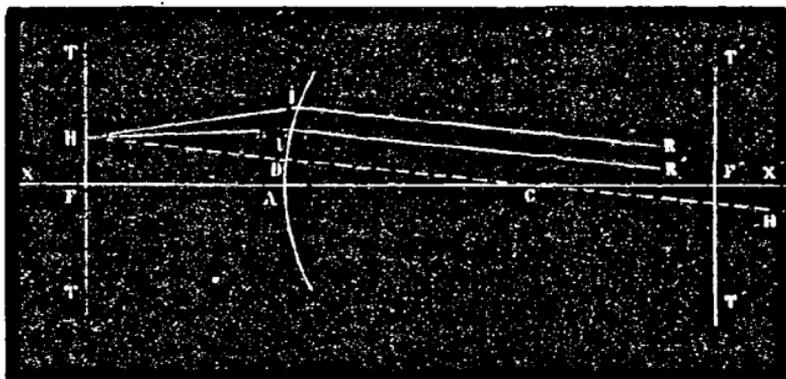


FIG. 15.

1° Soit H (fig. 15) un point lumineux placé sur le premier plan focal. — Par le point H menons la *ligne de direction* ou *axe secondaire* HH'. Cette droite joue évidemment par rapport au point lumineux H le rôle d'un axe principal. De plus, le point lumineux H étant très-rapproché de F, la distance HD est sensiblement égale à la première distance focale AF, et H occupe sur HH' la position d'un premier foyer principal.

Donc, tous les rayons incidents HI, HI', fournis par un point lumineux H pris sur le premier plan focal, sont réfractés suivant IR, I'R' parallèlement à l'axe secondaire HH' mené par ce point lumineux. — Dans le cas particulier où le point lumineux H est au premier foyer principal F, les rayons réfractés sont parallèles à l'axe principal.

2° Soit SI (fig. 16) un rayon incident quelconque peu incliné sur l'axe principal. — L'axe secondaire UE' parallèle à SI joue évidemment le rôle d'un axe principal par rapport à ce rayon incident. En second lieu, la distance DB est sensiblement égale à la seconde distance focale AF', et B occupe sur UE' la position d'un second foyer principal. Donc le rayon réfracté IR correspondant au rayon incident SI passe par le



P (fig. 17), un point lumineux situé sur l'axe principal. Menons un rayon incident quelconque PI; le rayon réfracté correspondant IR est facile à construire. Nous savons, en effet, qu'il est parallèle à l'axe secondaire HC et qu'il passe par le point B où le second plan focal est percé par l'axe secondaire CB parallèle à SI. Ce rayon réfracté coupe l'axe principal au point P'.

Les triangles semblables PHF', CBF' donnent :

$$\frac{PF}{CF'} = \frac{HF}{BF'}$$

D'autre part, les triangles semblables CHF, P'BF' donnent :

$$\frac{CF}{P'F'} = \frac{HF}{BF'}$$

Les seconds membres de ces équations sont identiques, les premiers membres sont donc égaux, d'où :

$$\frac{PF}{CF'} = \frac{CF}{P'F'}$$

D'où :

$$PF \times P'F' = CF' \times CF$$

Mais nous avons vu (25) que  $CF' = AF = f$  et  $CF = AF' = f'$ , donc en substituant :

$$PF \times P'F' = ff'$$

Les distances focales  $f, f'$  sont des quantités constantes, par con-

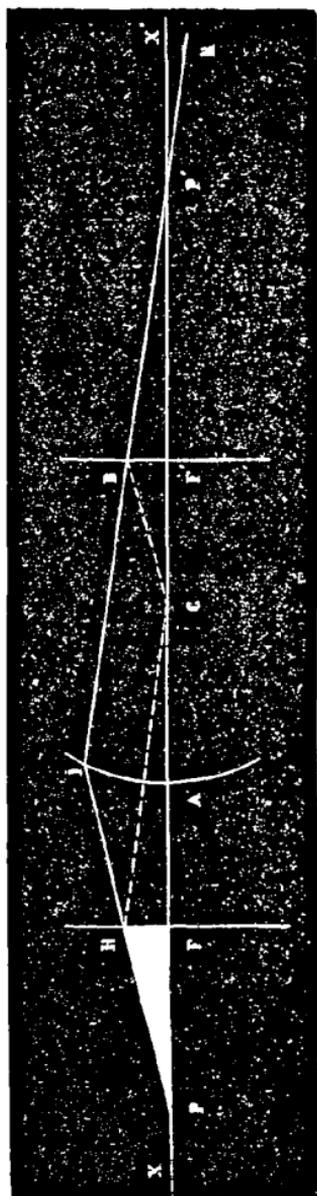


FIG. 17.

séquent la distance  $P'F'$  ne dépend que de  $PF$  et reste la même pour tous les rayons incidents émanés du même point lumineux  $P$ . Le point  $P'$  est donc le foyer des rayons réfractés.

Lorsque la lumière incidente est fournie par un point lumineux  $P$  placé sur l'axe principal, les rayons réfractés sont donc *homocentriques* et leur point de croisement  $P'$  est lui-même sur l'axe principal.

En raison de la réciprocité des phénomènes de la réfraction, il est évident que, si le point lumineux était en  $P'$  dans le milieu le plus réfringent, les rayons réfractés émergeraient dans l'air de manière à converger en  $P$ . — Ces points  $P$ ,  $P'$ , liés par la relation  $PF \times P'F' = ff'$ , sont donc *réciproques* l'un de l'autre ; on les appelle *foyers conjugués*.

Désignons par la lettre  $l$  la distance  $PF$  du point lumineux  $P$  au premier foyer principal  $F$ , et par la lettre  $l'$  la distance  $P'F'$  de son foyer  $P'$  au second foyer principal  $F'$  ; nous aurons en substituant dans la dernière équation :

$$(3) \quad ll' = ff'$$

Telle est la forme la plus simple sous laquelle puisse se présenter la formule générale des foyers conjugués (\*).

Pour que cette formule donne, dans tous les cas, les positions réelles du point lumineux  $P$  et de son foyer  $P'$  sur l'axe principal, il faut adopter les conventions suivantes : — La longueur  $l$  relative à la lumière incidente est comptée à partir

(\*) On peut aussi compter toutes les distances à partir du sommet  $A$  de la surface réfringente. Si l'on désigne par la lettre  $p$  la distance  $AP$  du point lumineux  $P$  au point  $A$ , et par la lettre  $p'$  la distance  $AP'$  du point  $A$  au foyer  $P'$ , on a :

$$l = PF = AP - AF = p - f$$

$$l' = P'F' = AP' - AF' = p' - f'$$

ce qui donne, en substituant dans l'équation (3) :

$$(p - f)(p' - f') = ff'$$

d'où

$$pf' + p'f = pp'$$

du point F *positivement* à gauche et *négativement* à droite de F ;  
— la longueur  $l'$  relative à la lumière transmise est comptée à  
partir de F' *positivement* à droite et *négativement* à gauche de F'.

ou, en remplaçant  $f'$  par sa valeur  $nf$  (25),

$$npf + p'f = pp'$$

Enfin, en divisant tous les termes de cette équation par le produit  $pp'f$ , on obtient :

$$(a) \quad \frac{n}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f} = \frac{n-1}{r}$$

Telle est la formule classique des foyers conjugués. — Pour que cette formule donne, dans tous les cas, les véritables positions des points P, P' sur l'axe principal, on convient de compter  $p$  *positivement* à gauche de A du côté de la lumière incidente, et *négativement* dans le sens contraire ;  $p'$  est compté *positivement* à droite de A dans le sens de la lumière transmise, et *négativement* dans le sens contraire.

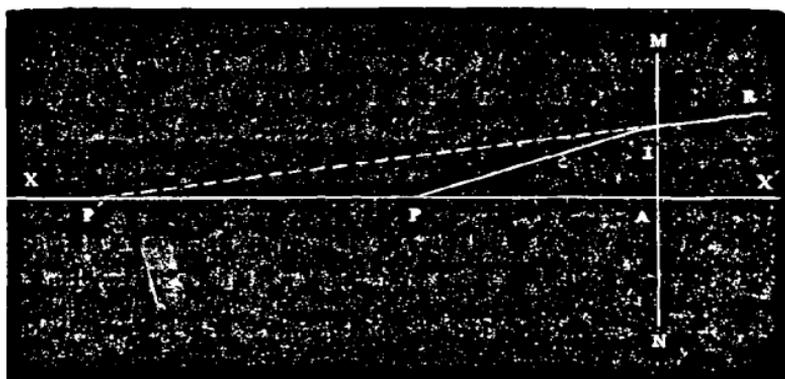


FIG. 18.

*Transmission de la lumière à travers une surface plane.* — Supposons que la lumière passe de l'air dans un milieu d'indice de réfraction  $n$  à travers une surface plane MN (fig. 18) de très-faible étendue. Soient : P, le point lumineux ; XX', une perpendiculaire à la surface réfringente MN, menée par le point lumineux P.

Quelle que soit la valeur du rayon de courbure  $r$  de la surface ré-

Le second membre  $ff'$  de l'équation (3) est évidemment *positif*; le signe de  $l'$  ne dépend donc que de celui de  $l$ , il en résulte que :

Tant que  $l$  est *positif*, c'est-à-dire tant que le point lumineux P est *réel* et à *gauche* du premier foyer principal F,  $l'$  reste *positif* et le foyer P', situé à *droite* du second foyer principal F', est *réel*.

Lorsque  $l$  est *négalif*, c'est-à-dire lorsque le point P, *réel* ou *virtuel*, est à *droite* du premier foyer principal F,  $l'$  devient aussi *négalif*, le foyer P' passe à *gauche* du second foyer principal F' et est *réel* ou *virtuel* suivant la valeur de  $l$ .

En adoptant pour la discussion de la formule (3) la méthode suivie à propos des miroirs concaves (9), on détermine sans difficulté, dans tous les cas possibles, les positions des foyers conjugués P, P' sur l'axe principal.

Cette discussion montre que ces foyers conjugués P, P' se déplacent toujours dans le *même sens*, le long de l'axe principal.

28. *Foyer d'un point lumineux situé hors de l'axe principal.*

— Soit S (fig. 19) un point lumineux quelconque situé hors de l'axe principal. — L'axe secondaire SCG mené par

fringente, la formule (a) représente les positions des deux foyers conjugués; ses indications sont donc encore vraies lorsque  $r$  est *infini*, c'est-à-dire lorsque la surface réfringente est plane. Mais, dans ce cas,  $\frac{n-1}{r} = 0$ . Le foyer P' du point lumineux P (fig. 18) est donc déterminé par la relation :

$$(e) \quad \frac{n}{p'} + \frac{1}{p} = 0 \text{ ou } p' + np = 0$$

dans laquelle  $p = AP$ ,  $p' = AP'$ . — D'ailleurs  $p$  est compté *positivement* à *gauche* de A du côté de la lumière incidente, *négalivement* dans le sens contraire;  $p'$  est compté *positivement* à *droite* de A du côté de la lumière transmise, *négalivement* dans le sens contraire.



$AI' = S'P'$  comme parallèles comprises entre parallèles.

Les triangles rectangles FSP, FIA sont semblables et donnent :

$$\frac{PF}{AF = f} = \frac{SP}{AI' = S'P'}$$

D'autre part les triangles rectangles F'IA, F'S'P' sont semblables et donnent :

$$\frac{AF' = f'}{P'F'} = \frac{AI' = SP}{S'P'}$$

De ces deux équations on tire :

$$PF \times P'F' = ff'$$

Les distances PF, P'F' du premier et du second foyer principal aux pieds P, P' des perpendiculaires abaissées du point lumineux S et de son foyer S' sur l'axe principal satisfont donc à la formule générale (3) des foyers conjugués.

Mais les triangles rectangles semblables FIA, FSP, en tenant compte de l'égalité  $AI' = S'P'$ , donnent :

$$\frac{S'P'}{SP} = \frac{f}{PF}$$

Pour déterminer la position du foyer S' nous avons donc les deux relations suivantes :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} PF \times P'F' = ff' \\ \frac{S'P'}{SP} = \frac{f}{PF} \end{array} \right.$$

La position du point lumineux S étant donnée, les longueurs PF, SP sont nécessairement connues ; la position du foyer S' est donc déterminée par les équations (4) qui fournissent les valeurs correspondantes de P'F' et de S'P'.

Dans la figure 49, le point lumineux S et son foyer S' sont l'un au-dessus, l'autre au-dessous de l'axe principal ; ces deux points étant situés sur un même axe secondaire SG, leur position relative reste évidemment la même dans tous les cas où le centre de courbure C de la surface réfringente se trouve

compris dans l'intervalle qui les sépare ; dans le cas contraire, ces deux points sont du même côté de l'axe principal.

Les équations (4) montrent que tout point lumineux placé sur la perpendiculaire SP a nécessairement son foyer sur la perpendiculaire S'P'. — En raison de la parfaite symétrie des surfaces sphériques, des points lumineux placés sur un plan perpendiculaire à l'axe principal mené par le point P auraient nécessairement leurs foyers sur un plan perpendiculaire à l'axe principal mené par P' ; de plus, les points lumineux et leurs foyers seraient semblablement distribués sur ces deux plans.

29. *Relations de position et de grandeur d'un objet et de son image.* — Il résulte de cette dernière considération, que si SP (fig. 19) est un objet lumineux ou éclairé, S'P' est son image. — Les positions relatives de l'objet et de son image sont donc déterminées par la première des équations (4), et la seconde de ces équations est l'expression du rapport de leurs dimensions linéaires.

L'objet SP et son image S'P' étant tous deux compris entre l'axe principal et l'axe secondaire SG, l'image est *renversée* toutes les fois que le centre de courbure C est placé dans l'intervalle qui la sépare de l'objet ; elle est *droite* dans le cas contraire. — Ajoutons que l'objet et son image sont nécessairement vus sous le même angle par un œil placé au centre de courbure C de la surface réfringente,

§ 2. — *La lumière passe du milieu le plus réfringent dans l'air à travers une surface sphérique concave MN.*

30. Lorsque les milieux transparents et la surface qui les sépare restent les mêmes, la lumière en rebroussant chemin repasse par les mêmes points de l'espace. Ce second cas de transmission de la lumière à travers une surface sphérique est donc *réciproque* de celui que nous venons d'étudier avec détails. Les constructions géométriques et les raisonnements employés

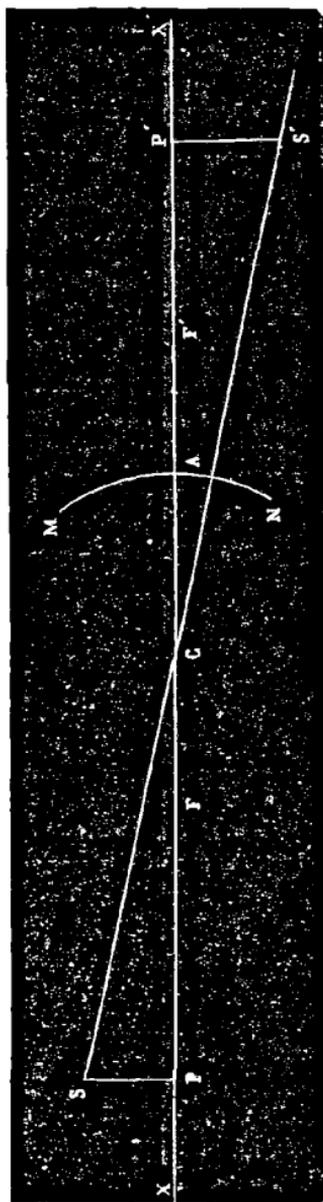


FIG. 20.

dans le cas précédent donnent la solution de toutes les questions relatives à la marche de la lumière à travers ce second appareil dioptrique simple.

MN (fig. 20) étant la surface concave que traverse la lumière en passant du milieu d'indice de réfraction  $n$  dans l'air, on trouve ainsi :

1° Les foyers principaux  $F$ ,  $F'$  sont réels.

2° Les distances focales principales positives ont pour valeur :

1<sup>re</sup> distance focale :

$$(1) \quad AF = f = \frac{nr}{n-1}$$

2<sup>e</sup> distance focale :

$$(2) \quad AF' = f' = \frac{r}{n-1}$$

3° Le rapport de la seconde à la première distance focale :

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{n}$$

est, comme dans le premier cas, égal à l'indice de réfraction du milieu dans lequel se meut la lumière transmise par rapport au milieu dans lequel se meut la lumière incidente.

4° Les plans focaux jouissent des mêmes propriétés que dans le premier cas de transmission de la lumière.

5° Entre un point lumineux quelconque  $P$  placé sur l'axe

principal et son foyer  $P'$ , il existe la même relation que dans le cas précédent (\*):

$$\text{Ou :} \quad PF \times P'F' = ff'$$

$$(3) \quad w' = ff'$$

(\*) En comptant toutes les longueurs à partir du sommet  $A$  de la surface réfringente, en faisant  $AP = p$ ,  $AP' = p'$ , et en procédant comme dans la note (27), on trouve :

$$(b) \quad \frac{1}{p'} + \frac{n}{p} = \frac{n-1}{r}$$

Telle est, dans ce cas, la formule classique des foyers conjugués.

*Transmission de la lumière à travers une surface plane.* — Supposons que la lumière passe du milieu le plus réfringent dans l'air à travers la surface plane  $MN$ . Soient :  $P$  (fig. 21) le point lumineux,  $XX'$  une perpendiculaire à la surface  $MN$  menée par le point  $P$ . — Pour

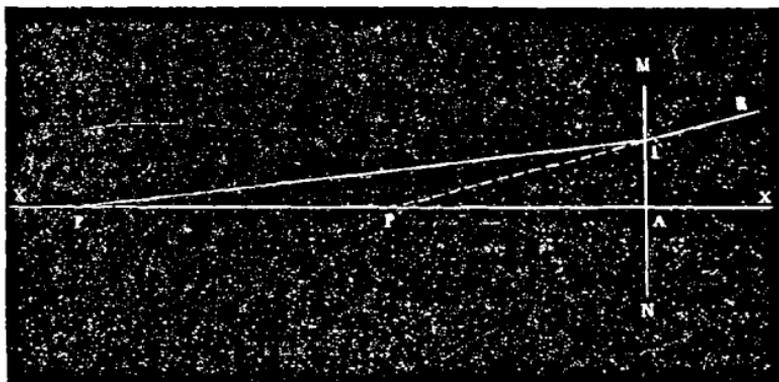


Fig. 21.

trouver la relation qui existe entre le point lumineux  $P$  et son foyer  $P'$ , il suffit de faire  $r$  infini dans la formule (b), ce qui donne :

$$(d) \quad \frac{1}{p'} + \frac{n}{p} = 0 \text{ ou } np' + p = 0$$

Dans cette formule  $p = AP$ ,  $p' = AP'$ . — D'ailleurs les conventions sont toujours les mêmes pour les signes de  $p$  et de  $p'$ .

La loi des déplacements des foyers conjugués le long de l'axe principal est donc la même que dans le cas précédent.

6° Étant donnée la position d'un point lumineux S placé hors de l'axe principal, la position de son foyer S' est déterminée par les deux relations déjà connues :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} PF \times P'F' = ff' \\ \frac{S'P'}{SP} = \frac{f}{PF} \end{array} \right.$$

7° Ces deux équations déterminent aussi les rapports de position et de grandeur d'un objet lumineux SP et de son image S'P'.

§ 3. — *La lumière passe de l'air dans le milieu le plus réfringent à travers une surface concave MN.*

31. Soit SI (fig. 22) un rayon incident quelconque parallèle à

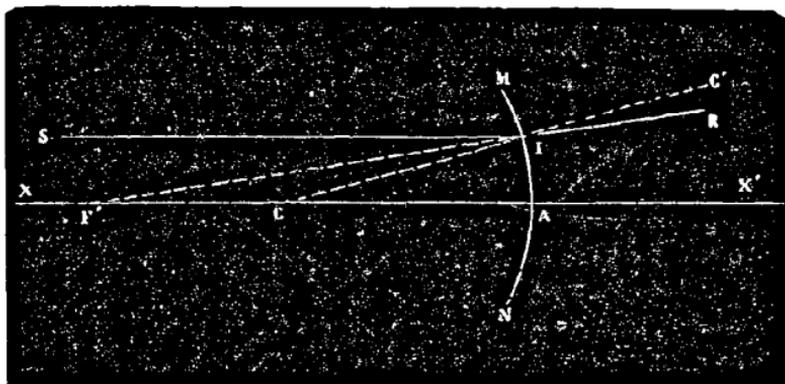


FIG. 23.

l'axe principal ; ce rayon pénètre suivant IR en se rapprochant de la normale CC' et l'angle de réfraction RIC' est plus petit que l'angle d'incidence SIC. Le rayon transmis IR est donc divergent, et son prolongement géométrique coupe l'axe principal en F' du côté de la lumière incidente.

D'après les lois de la réfraction, nous avons :

$$\frac{\sin \text{SIC}}{\sin \text{RIC}'} = n$$

Mais les angles  $\text{RIC}'$ ,  $\text{F}'\text{IC}$  sont égaux ; d'un autre côté l'angle  $\text{SIC}$  est égal à l'angle  $\text{ICA}$ , et le *sinus* de l'angle  $\text{ICA}$  est égal au *sinus* de son angle *supplémentaire*  $\text{ICF}'$  ; nous avons donc :

$$\frac{\sin \text{SIC}}{\sin \text{RIC}'} = \frac{\sin \text{ICF}'}{\sin \text{F}'\text{IC}} = n$$

Dans le triangle  $\text{ICF}'$ , les *sinus* des angles sont dans le même rapport que les côtés opposés, d'où :

$$\frac{\sin \text{ICF}'}{\sin \text{F}'\text{IC}} = \frac{\text{F}'\text{I}}{\text{CF}'}$$

D'où :

$$\frac{\text{F}'\text{I}}{\text{CF}'} = n$$

En raison de la très-faible amplitude de la surface  $\text{MN}$ ,  $\text{F}'\text{I}$  est sensiblement égal à  $\text{AF}'$  ; d'ailleurs,  $\text{CF}' = \text{AF}' - \text{AC} = \text{AF}' - r$  ; nous avons donc en substituant :

$$\frac{\text{AF}'}{\text{AF}' - r} = n$$

D'où :

$$\text{AF}' = \frac{nr}{n-1}$$

Les quantités  $n$  et  $r$  sont constantes ;  $\text{AF}'$  conserve donc la même valeur, quelle que soit la position du point d'incidence  $\text{I}$  sur la surface  $\text{MN}$ , et tous les rayons incidents parallèles à l'axe principal sont réfractés dans des directions telles que leurs prolongements géométriques passent par le point  $\text{F}'$ .

Ce point  $\text{F}'$ , foyer des rayons incidents parallèles à l'axe principal, est le *second foyer principal* du système ; dans le cas actuel, il est *virtuel* ou situé du côté de la lumière incidente.

$AF'$  est la *seconde distance focale*, nous la désignerons par la lettre  $f'$ ; nous aurons donc :

$$f' = \frac{nr}{n-1}$$

La distance  $CF'$  du centre de courbure au second foyer principal est égale à  $AF' - AC = f' - r$ ; d'où :

$$CF' = \frac{r}{n-1}$$

32. Soit  $SI$  (fig. 23) un rayon incident tel que le rayon réfracté correspondant  $IR$  marche parallèlement à l'axe principal. Le prolongement géométrique de ce rayon incident coupe l'axe principal en  $F$  du côté de la lumière émergente.

L'angle de réfraction  $RIC'$  est égal à l'angle  $ICF$ , et le *sinus* de l'angle d'incidence  $SIC$  est égal au *sinus* de son angle *supplémentaire*  $CIF$ , nous avons donc :

$$\frac{\sin SIC}{\sin RIC'} = \frac{\sin CIF}{\sin ICF} = n$$

D'autre part, dans le triangle  $ICF$ , les *sinus* des angles sont dans le rapport des côtés opposés, d'où :

$$\frac{\sin CIF}{\sin ICF} = \frac{CF}{FI}$$

D'où

$$\frac{CF}{FI} = n$$

Mais  $CF = AF + AC = AF + r$ ; de plus, en raison de la très-faible amplitude de la surface réfringente,  $FI$  est sensiblement égal à  $AF$ ; ce qui donne en substituant :

$$\frac{AF + r}{AF} = n$$

D'où :

$$AF = \frac{r}{n-1}$$

Cette relation, indépendante de la position du point d'incidence  $I$  sur la surface  $MN$ , indique que tous les rayons inci-

dents dont les prolongements géométriques passent par le point F pénètrent dans le second milieu parallèlement à l'axe principal.

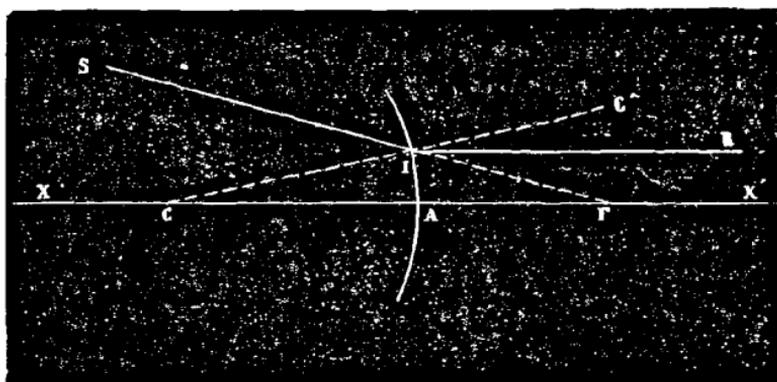


FIG. 23.

Ce point F est le *premier foyer principal* du système ; dans le cas actuel, il est *virtuel* ou du côté de la lumière émergente. — AF est la *première distance focale* ; nous la désignerons par la lettre *f*, et nous aurons :

$$f = \frac{r}{n-1}$$

La distance CF du centre de courbure au premier foyer principal est égale à  $AF + AC = f + r$ , d'où :

$$CF = \frac{nr}{n-1}$$

33. En résumé, dans les cas où la lumière passe de l'air dans un milieu plus réfringent d'indice *n*, à travers une surface concave :

1° Les deux foyers principaux F, F' sont *virtuels*.

2° Les distances focales doivent être considérées comme *negatives* et affectées du signe *moins* ; ce qui donne :

$$1^{\text{re}} \text{ distance focale : } \quad (1) \quad AF = f = - \frac{r}{n-1}$$

$$2^{\circ} \text{ distance focale : } (2) \quad AF' = f' = -\frac{nr}{n-1}$$

D'où l'on déduit :

$$\frac{f'}{f} = n$$

Dans ce cas donc encore, le rapport de la seconde à la première distance focale est égal à l'indice de réfraction du milieu dans lequel se meut la lumière transmise par rapport au milieu dans lequel se meut la lumière incidente.

3° Les distances du premier et du second foyer principal au centre de courbure sont :

$$CF = f' = \frac{nr}{n-1}$$

$$CF' = f = \frac{r}{n-1}$$

34. *Plans focaux.* — Les plans TT, T'T' (fig. 24) perpendiculaires à l'axe principal, menés par les foyers principaux F, F', sont le *premier* et le *second plan focal*; les portions de ces plans voisines des points F, F' jouissent de propriétés fort importantes.

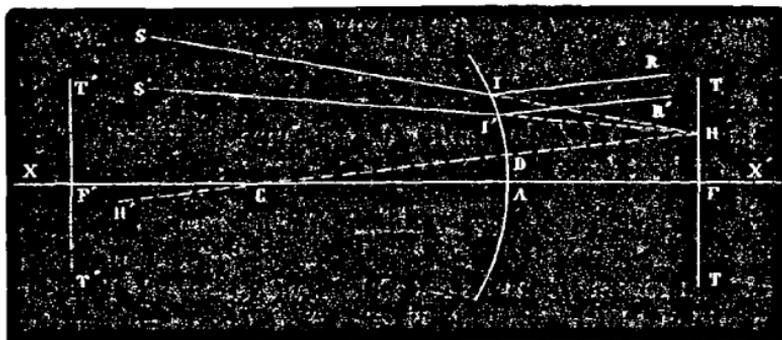


FIG. 24.

1° Considérons un faisceau de rayons incidents SI, S'I' dont les prolongements géométriques passent tous par un même point H (fig. 24) du premier plan focal. L'axe secondaire HH' mené par le point H joue évidemment, par rapport à ces

rayons incidents, le rôle d'un axe principal; de plus, le point H étant très-rapproché de F, la distance HD est sensiblement égale à la première distance focale AF.

Donc, quand un point lumineux *virtuel* est situé sur le premier plan focal, tous les rayons incidents SI, S'I' dont les prolongements géométriques passent par ce point H sont réfractés suivant IR, I'R' parallèles à l'axe secondaire HH' mené par ce point H.— Dans le cas particulier où le point lumineux *virtuel* H est au premier foyer principal F, les rayons réfractés sont tous parallèles à l'axe principal.

2° Soit SI (fig. 25) un rayon incident quelconque peu incliné

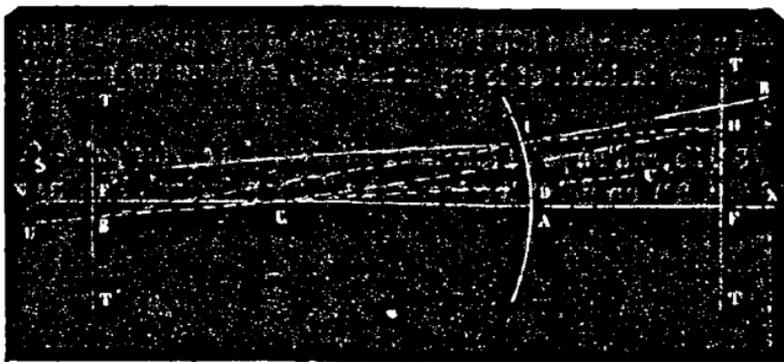


FIG. 25.

sur l'axe principal. L'axe secondaire UU', parallèle à ce rayon incident, joue évidemment par rapport à SI, le rôle d'un axe principal, et l'intervalle BD est sensiblement égal à la seconde distance focale AF'. Donc le prolongement géométrique du rayon réfracté IR correspondant à SI passe nécessairement par le point B, et il en est de même de tous les rayons incidents parallèles à SI.

Donc, lorsque la lumière incidente se compose de rayons parallèles entre eux, les prolongements géométriques des rayons réfractés passent tous par le point B, où le second plan focal est percé par l'axe secondaire parallèle aux rayons incidents. — Dans le cas particulier où les rayons incidents sont paral-

lèles à l'axe principal, les prolongements géométriques des rayons réfractés passent tous par le second foyer principal  $F'$ .

Il résulte de ces deux propriétés des plans focaux, qu'un rayon incident quelconque  $SI$  et le rayon réfracté correspondant  $IR$  satisfont aux conditions suivantes :

Le prolongement géométrique du rayon transmis  $IR$  passe par le point  $B$  où le second plan focal est percé par l'axe secondaire  $UU'$ , parallèle à  $SI$ . — En second lieu, ce rayon incident  $SI$  peut être considéré comme passant par un point lumineux *virtuel*  $H$  situé au point où son prolongement géométrique perce le premier plan focal ; par suite, le rayon transmis  $IR$  doit être parallèle à l'axe secondaire  $CH$  mené par ce point  $H$ . — Le quadrilatère  $CBII$  formé par ces deux axes secondaires, le rayon incident et le rayon réfracté, est donc un parallélogramme.

35. *Foyer d'un point lumineux situé sur l'axe principal.* — Soit  $P$  (fig. 26) un point lumineux sur l'axe principal. Menons un

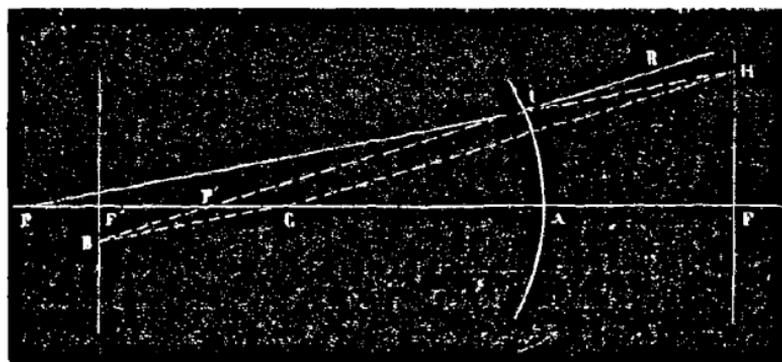


FIG. 26.

rayon incident  $PI$  et prolongeons-le jusqu'à la rencontre du premier plan focal en  $H$ . Le rayon réfracté  $IR$  est nécessairement parallèle à l'axe secondaire  $CH$  et son prolongement géométrique passe par le point  $B$  où le second plan focal est percé par l'axe secondaire  $CB$  parallèle à  $PI$ . — Or nous avons vu (33) que  $CF = AF' = f'$  et que  $CF' = AF = f$ ; cela posé :

Les deux couples de triangles rectangles semblables PHF, CBF' et CHF, P'BF', donnent :

$$\frac{PF}{AF} = \frac{AF'}{P'F'}$$

D'où :

$$PF \times P'F' = AF \times AF' = ff'$$

Donc tous les rayons incidents fournis par le point lumineux P, sont réfractés dans des directions telles que leurs prolongements géométriques passent par le point P' foyer des rayons transmis. — Les points P, P' sont évidemment *réci-proques* l'un de l'autre ; ils s'appellent *foyers conjugués*.

Lorsque la lumière incidente émane d'un point lumineux P placé sur l'axe principal, les rayons transmis sont donc *homo-centriques*, et leur point de croisement P' est lui-même sur l'axe principal.

Désignons par la lettre *l* la distance PF, et par la lettre *l'* la distance P'F', nous aurons en substituant :

$$(3) \quad ll' = ff'$$

pour formule générale des foyers conjugués (\*). — Conformément aux conventions précédemment adoptées, *l* est compté *positivement* à gauche du premier foyer principal F, *négativement* à droite de F ; *l'* est compté *positivement* à droite du second foyer principal F', *négativement* à gauche de F'.

Le second membre *ff'* de l'équation (3) est évidemment *positif*, le signe de *l'* ne dépend donc que celui de *l*. Il en résulte que :

Tant que *l* est *positif*, c'est-à-dire tant que le point lumineux P, *réel* ou *virtuel*, est à gauche du premier foyer principal F, *l'* reste *positif* et le foyer P', *réel* ou *virtuel* suivant la valeur de *l*, est à droite du second foyer principal F'.

(\*) Lorsque l'on compte toutes les distances à partir du sommet A de la surface réfringente, on désigne par la lettre *p* la distance AP, et par la lettre *p'* la distance AP'. — D'ailleurs *p* est compté *positivement* à gauche et *négativement* à droite de A ; *p'* est compté *positivement* à

Lorsque  $l$  est *négalif*, c'est-à-dire lorsque le point lumineux P est *virtuel* et à *droite* du premier foyer principal F,  $l'$  devient *négalif* et le foyer P' est *virtuel* et à *gauche* du second foyer principal F'.

En appliquant à cette formule le mode de discussion adopté pour les miroirs concaves (15) on détermine sans difficulté, dans tous les cas possibles, les positions des foyers conjugués P, P' sur l'axe principal.

D'ailleurs, ces foyers conjugués P, P' se déplacent toujours dans le *même sens* le long de l'axe principal.

*droite* et *négalivement* à *gauche* de A. — En tenant compte seulement des valeurs absolues de ces longueurs on a :

$$l = FP = AP + AF = p + f$$

$$l' = P'F' = AF' - AP' = f' - p'$$

ce qui donne, en substituant dans l'équation (3),

$$(p + f)(f' - p') = ff'$$

d'où

$$p'f' - p'f = pp'$$

ou, en remplaçant  $f'$  par sa valeur  $nf$  (33),

$$npf - p'f = pp'$$

En mettant en évidence le signe *négalif* de  $p'$  et de  $f$ , cette équation devient :

$$npf + p'f = pp'$$

Et enfin, en divisant tous les termes par le produit *positif*  $pp'f$ , nous avons :

$$(c) \quad \frac{n}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f} = -\frac{n-1}{r}$$

Formule classique des foyers conjugués dans ce troisième cas de transmission de la lumière; elle ne diffère de la formule (a) (27. Note) relative au premier cas de transmission que par le signe du second membre.

36. *Foyer d'un point lumineux situé hors de l'axe principal.* — Soit S (fig. 27) un point lumineux hors de l'axe principal. — Son foyer se trouve nécessairement sur l'axe secondaire SG, qui joue par rapport à S le rôle d'un axe principal. — Au faisceau de rayons incidents *homocentriques* fourni par le point lumineux S, correspond donc un faisceau de rayons transmis *homocentriques* dont le point de croisement est sur l'axe secondaire SG. — Mais le rayon incident SI parallèle à l'axe principal se réfracte suivant IR dont le prolongement géométrique passe par le second foyer principal F', et le rayon incident SI' dont le prolongement géométrique passe par le premier foyer principal F se réfracte suivant I'R' parallèle à l'axe principal. Le foyer du point lumineux S est donc en S' au point où les prolongements géométriques de ces deux rayons réfractés IR, I'R' se coupent sur l'axe secondaire SG; ce foyer est *virtuel*.

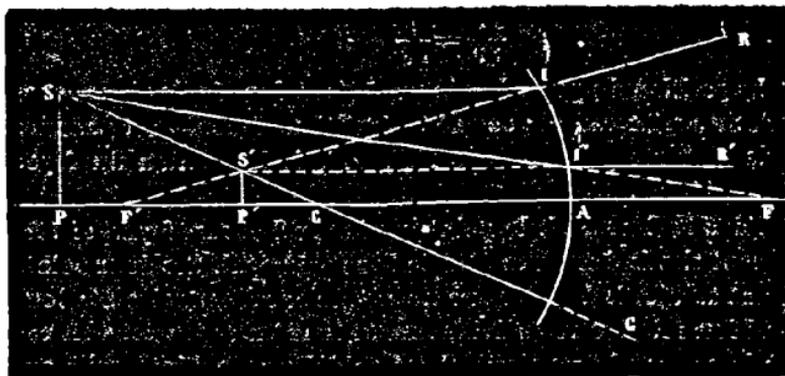


FIG. 27.

Des points S, S' abaissons les perpendiculaires SP, S'P' sur l'axe principal. — En raison de la très-faible amplitude de la surface réfringente, l'arc AI se confond avec le perpendiculaire à l'axe principal menée en A; nous avons donc  $AI = SP$  et  $AI' = S'P'$ . En tenant compte de ces relations :

Les deux couples de triangles rectangles semblables FSP, F'A et F'A, F'S/P' donnent :

$$\frac{PF}{AF} = \frac{AF'}{P'F'}$$

D'où :

$$PF \times P'F' = AF \times AF' = ff'$$

Les distances PF, P'F' du premier et du second foyer principal aux pieds P, P' des perpendiculaires abaissées du point lumineux S et de son foyer S' sur l'axe principal satisfont donc à la formule générale des foyers conjugués.

Mais les triangles rectangles semblables I'FA, SFP, en tenant compte de l'égalité AI' = S'P', donnent :

$$\frac{S'P'}{SP} = \frac{f}{PF}$$

Pour déterminer la position du foyer S', nous avons donc les deux relations suivantes :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} PF \times P'F' = ff' \\ \frac{S'P'}{SP} = \frac{f}{PF} \end{array} \right.$$

La position du point lumineux S étant donnée, les longueurs PF, SP sont connues ; ces deux équations fournissent donc les valeurs correspondantes de P'F', S'P', et la position du foyer S' est déterminée.

Dans la figure 27, le point lumineux S et son foyer *virtuel* S' sont situés du même côté de l'axe principal. Ces deux points étant assujettis à rester sur un même axe secondaire SG, leur position relative reste évidemment la même dans tous les cas où le centre de courbure C est en dehors de l'intervalle qui les sépare.

Les équations (4) montrent que tout point lumineux situé sur la perpendiculaire SP a nécessairement son foyer sur la perpendiculaire S'P'. — Des points lumineux situés sur un plan perpendiculaire à l'axe principal mené par le point P, auraient évidemment leurs foyers sur un plan perpendiculaire à l'axe en P'; d'ailleurs ces points lumineux et ces foyers seraient semblablement distribués sur ces deux plans.

37. *Relations de position et de grandeur d'un objet et de son image.* — Il résulte de cette dernière considération que si  $SP$  (fig. 27) est un objet lumineux ou éclairé,  $SP'$  est son image. Les positions relatives de l'objet et de l'image, et le rapport de leurs dimensions linéaires sont déterminés par les équations (4).

L'objet et son image étant toujours compris entre l'axe principal et l'axe secondaire  $SG$ , l'image est *droite* toutes les fois que le centre de courbure  $C$  est en dehors de l'intervalle qui la sépare de l'objet. — Ajoutons que l'objet et son image sont toujours vus sous un même angle par un œil placé au centre de courbure  $C$  de la surface réfringente.

§ 4. — *La lumière passe du milieu le plus réfringent dans l'air à travers une surface convexe  $MN$ .*

38. Ce quatrième cas de transmission de la lumière à travers une surface sphérique est évidemment *réci-proque* du

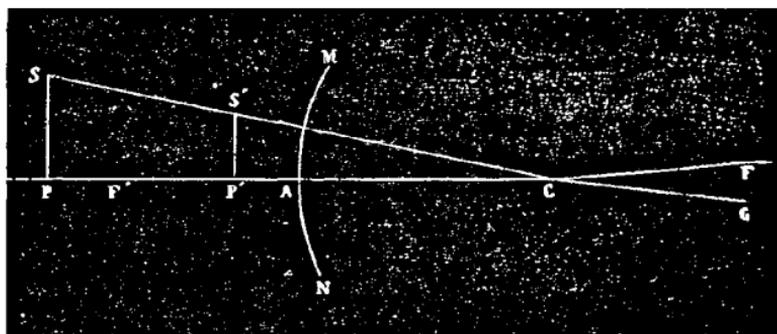


FIG. 28.

troisième. En reprenant les constructions géométriques et les raisonnements employés dans le cas précédent, on trouve (fig. 28) :

1<sup>o</sup> Les foyers principaux  $F, F'$  sont *virtuels*.

GAVARRET.

2° Les distances focales sont *négligatives* et ont pour valeur :

$$1^{\text{re}} \text{ distance focale : } (1) \quad AF = f = -\frac{nr}{n-1}$$

$$2^{\text{e}} \text{ distance focale : } (2) \quad AF' = f' = -\frac{r}{n-1}$$

3° Le rapport de la seconde à la première distance focale

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{n}$$

est toujours égal à l'indice de réfraction du milieu dans lequel se meut la lumière transmise par rapport au milieu dans lequel se meut la lumière incidente.

4° Les plans focaux jouissent des mêmes propriétés que dans le troisième cas de transmission de la lumière.

5° Les lois générales des foyers conjugués sont les mêmes que dans le troisième cas. — Entre un point lumineux P placé sur l'axe principal et son foyer P', il existe toujours la relation :

$$(3) \quad W = ff'$$

6° Étant donnée la position d'un point lumineux S hors de l'axe principal, la position de son foyer S' est déterminée par les deux relations connues :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} PF \times P'F' = ff' \\ \frac{S'P'}{SP} = \frac{f}{PF} \end{array} \right.$$

7° Ces deux équations déterminent les relations de position et de grandeur d'un objet lumineux quelconque SP et de son image S'P'.

8° De l'équation générale des foyers conjugués  $W = ff'$ , on déduit facilement la formule classique moins simple :

$$(d) \quad \frac{1}{p'} + \frac{n}{p} = -\frac{n-1}{r}$$

Cette dernière formule et la formule (b) (30. Note) relative au second cas de transmission ne diffèrent que par le signe du second membre.

## ART. II. — DES LENTILLES PLACÉES DANS L'AIR.

39. On donne le nom de lentille à tout bloc de substance réfringente terminé par deux surfaces dont une au moins est courbe. — Nous appellerons  $n$  l'indice de réfraction de la substance transparente plus réfringente que l'air dont la lentille est composée; les rayons incidents et les rayons émergents de la lentille se meuvent dans l'air.

Lorsque le faisceau incident est *homocentrique*, les rayons réfractés par la première surface concourent tous vers un même point, *réel* ou *virtuel*, qui joue le rôle de point lumineux *réel* ou *virtuel* pour la seconde surface dont l'action sur ces rayons déjà réfractés par la première les fait nécessairement tous concourir en un même point *réel* ou *virtuel*. — Tout faisceau incident *homocentrique* est donc transformé par la lentille en un faisceau émergent *homocentrique*. — Le point de concours des rayons émergents est le foyer *réel* ou *virtuel* du point lumineux, c'est-à-dire du point de croisement *réel* ou *virtuel* des rayons incidents.

La forme de la lentille dépend des positions relatives des deux surfaces sphériques ou de la surface sphérique et de la surface plane qui la terminent; il en existe six espèces qui se divisent en deux groupes distincts (fig. 29).

Le premier groupe comprend trois espèces de lentilles: — A, la lentille *biconvexe*; — B, la lentille *plan-convexe*; — C, le *ménisque convergent*, dans lequel le rayon de courbure de la surface concave est plus grand que celui de la surface convexe. — Ces trois lentilles sont toutes plus épaisses au centre qu'aux bords; on les appelle *lentilles à bords tranchants*.

Le second groupe comprend aussi trois espèces: — D, la lentille *biconcave*; — E, la lentille *plan-concave*; — F, le *ménisque divergent*, dans lequel le rayon de courbure de la face concave est plus petit que celui de la face convexe. — Ces trois len-

tilles sont plus minces au centre qu'à la périphérie; on les appelle lentilles à bords mousses.

Nous démontrerons plus loin que les trois lentilles du pre-

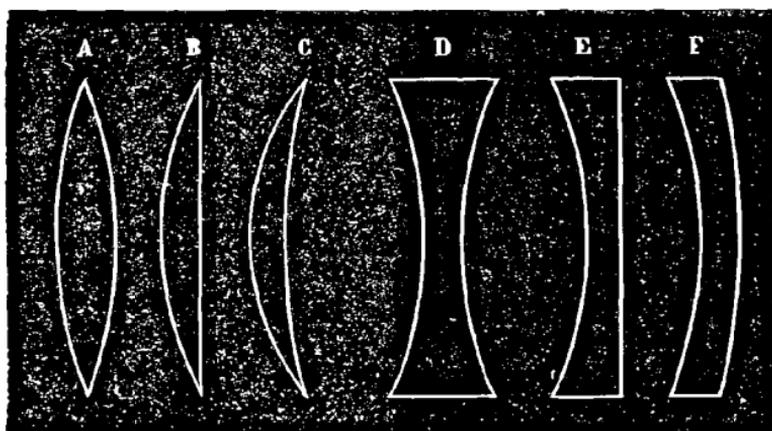


FIG. 29.

mier groupe ont leurs foyers principaux réels; ce sont des lentilles convergentes. — Les trois lentilles du second groupe sont divergentes; leurs foyers principaux sont virtuels.

Lorsqu'une lentille est placée dans l'air, les deux points nodaux se confondent avec les deux points principaux. Nous n'aurons donc à déterminer que quatre points cardinaux : les deux foyers principaux et les deux points nodaux. — Les plans à considérer sont au nombre de quatre : les deux plans focaux et les deux plans principaux; ces derniers passent nécessairement par les points nodaux qui se superposent aux points principaux.

#### § 1. — Lentille biconvexe.

40. Soient : MN (fig. 30) une lentille biconvexe, C, C' les centres de courbure de sa première et de sa seconde face MAN, MA'N; la droite indéfinie XX', qui passe par les deux centres de courbure C, C', est l'axe principal du système; les points A, A', où cet axe perce les deux faces de la lentille sont leurs

sommets, pôles ou centres de figure.— Nous désignerons toujours par les lettres  $r, r'$  les rayons de courbure CA, C'A'; ces rayons peuvent être égaux ou inégaux.

Il est évident que tout rayon incident qui arrive suivant XA est normal à la première surface réfringente, pénètre dans la lentille suivant AA', est normal à la seconde surface et émerge de l'appareil suivant A'X' sans avoir éprouvé aucune modification dans sa marche.

Nous supposons que la lumière pénètre dans la lentille par la face A et en émerge par la face A'. — Les foyers principaux de la première face convexe A sont nécessairement *réels*, puisque la lumière la traverse en passant de l'air dans un milieu plus réfringent; les distances focales, que nous désignerons par les lettres  $f_0, f'_0$ , sont nécessairement *positives*. — La lumière traverse la seconde face concave A' en passant du milieu le plus réfringent dans l'air; les foyers principaux sont donc *réels* et les distances focales, que nous désignerons par les lettres  $f_1, f'_1$ , sont *positives*.

Pour la première face A, nous avons (25) formules (1) et (2) :

$$1^{\text{re}} \text{ distance focale : } f_0 = \frac{r}{n-1}$$

$$2^{\text{e}} \text{ distance focale : } f'_0 = \frac{nr}{n-1}$$

Pour la seconde face A', nous avons (30) formules (1) et (2) :

$$1^{\text{re}} \text{ distance focale : } f_1 = \frac{nr'}{n-1}$$

$$2^{\text{e}} \text{ distance focale : } f'_1 = \frac{r'}{n-1}$$

Entre la seconde distance focale  $f'_0$  de la première face A et la première distance focale  $f_1$  de la seconde face A', il existe donc la relation suivante :

$$(d) \quad \frac{f'_0}{f_1} = \frac{nr}{n-1} : \frac{nr'}{n-1} = \frac{r}{r'}$$

41. *Centre optique. — Points nodaux. — Points et plans principaux.* — Par les centres de courbure  $C$ ,  $C'$  (fig. 30) menons les deux rayons parallèles  $CI$ ,  $C'I'$ ; la droite  $II'$  coupe l'axe principal dans l'intérieur de la lentille en un point  $O$ , qui jouit de propriétés spéciales et qui s'appelle *centre optique*.

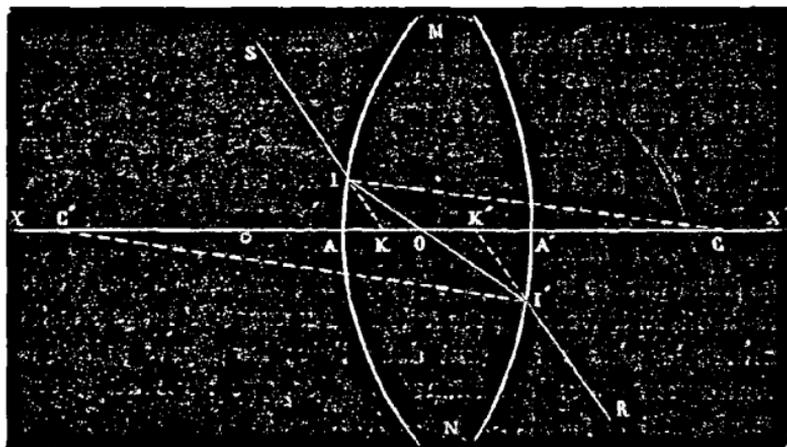


FIG. 30.

Les plans tangents aux surfaces réfringentes en  $I$ ,  $I'$  sont nécessairement parallèles, puisqu'ils sont perpendiculaires aux droites parallèles  $CI$ ,  $C'I'$ . — Si donc le rayon incident  $SI$  rencontre la première face  $A$  dans une direction telle qu'il pénètre suivant  $II'$ , le rayon émergent correspondant  $I'R$  est parallèle au rayon incident  $SI$ , car évidemment, dans ce cas, la lumière a traversé en réalité un milieu transparent terminé par deux faces parallèles.

Puisque  $CI$ ,  $C'I'$  sont parallèles, les triangles  $CIO$ ,  $C'O$  sont équiangles et semblables; nous avons donc :

$$\frac{CI}{CO} = \frac{C'I'}{C'O}$$

d'où

$$\frac{CI - CO}{CI} = \frac{C'I' - C'O}{C'I'}$$

Mais  $CI = CA = r$  et  $C'I' = C'A' = r'$ .

Donc  $CI - CO = AO$  et  $C'I' - C'O = A'O$ .

d'où en remplaçant :

$$\frac{AO}{A'O} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{r}{r'}$$

Le point  $O$  se trouve ainsi déterminé indépendamment de toute hypothèse sur l'inclinaison des rayons de courbure  $CI$ ,  $C'I'$  sur l'axe principal, sa position est donc la même pour tout autre couple de rayons de courbure parallèles entre eux.

Donc tout rayon incident réfracté par la première face de la lentille de manière à passer par le centre optique  $O$ , émerge de l'appareil parallèlement à sa direction primitive.

Prolongeons le rayon incident  $SI$  et le rayon émergent  $I'R$  jusqu'à la rencontre de l'axe principal en  $K$ ,  $K'$ . — Puisque le rayon incident  $SK$  pénètre suivant  $IO$ , les points  $K$  et  $O$  sont foyers conjugués par rapport à la première face  $A$  de la lentille. — D'autre part, le rayon intérieur  $IOI'$  émerge suivant  $K'R$ , donc  $O$  et  $K'$  sont foyers conjugués par rapport à la seconde face  $A'$ . — En d'autres termes, les points  $K$ ,  $K'$  sont les images du centre optique  $O$  regardé successivement à travers la face  $A$  et la face  $A'$  de la lentille. — La position des points  $K$ ,  $K'$  ne dépend donc que de celle du centre optique  $O$ ; tout rayon incident dont le prolongement passe par  $K$  pénètre donc suivant une droite qui passe par  $O$  et émerge nécessairement de la lentille suivant une ligne menée par  $K'$  parallèlement au rayon incident. — Les points  $K$ ,  $K'$  sont donc les *points nodaux* de la lentille; ils sont situés tous les deux dans l'intérieur de l'appareil.

Le point  $K$  par lequel doit passer le prolongement du rayon incident pour que le rayon émergent lui soit parallèle est le *premier point nodal*; le point  $K'$  par lequel passe le prolongement du rayon émergent parallèle au rayon incident est le *second point nodal*.

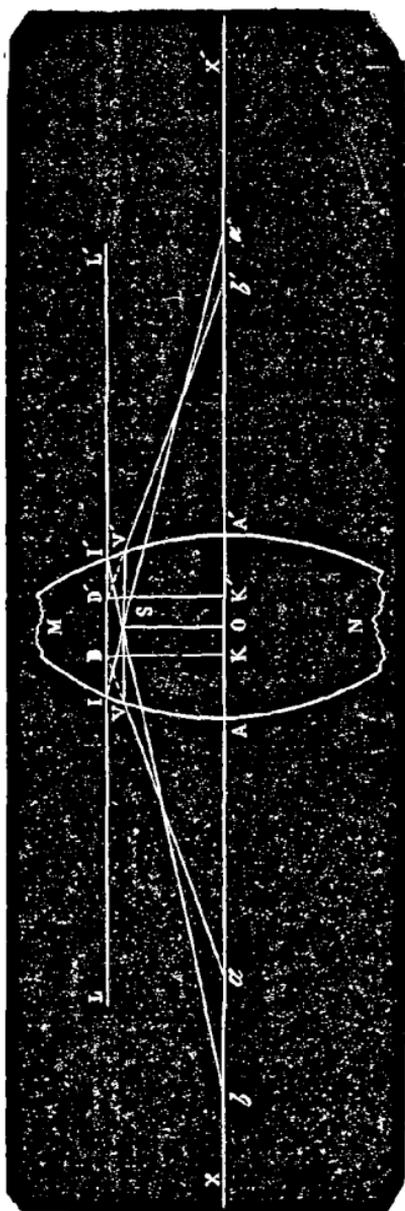


FIG. 34.

La position du centre optique  $O$  est telle que :

$$\frac{AO}{A'O} = \frac{r}{r'}$$

Mais nous avons (40) d'après l'équation (d) :

$$\frac{f'_0}{f_1} = \frac{r}{r'}$$

Il résulte de ces deux équations que les distances  $AO$ ,  $A'O$  du centre optique  $O$  aux sommets  $A$ ,  $A'$  des faces de la lentille satisfont à la relation suivante :

$$\frac{AO}{A'O} = \frac{f'_0}{f_1}$$

42. Cette nouvelle relation permet de déterminer géométriquement les positions du *centre optique*  $O$ , des *points nodaux*  $K$ ,  $K'$  et des *points principaux* de la lentille.

En effet, soient :  $a$ ,  $a'$  le premier et le second foyer principal de la première face  $A$  de la lentille  $MN$  (fig. 34),  $b$ ,  $b'$  le premier et le second foyer principal de la seconde face  $A'$  de la lentille.

Nous aurons pour la première face A :

$$1^{\text{re}} \text{ distance focale : } \quad Aa = f_0 = \frac{r}{n-1}$$

$$2^{\text{e}} \text{ distance focale : } \quad Aa' = f'_0 = \frac{nr}{n-1}$$

Pour la seconde face A' :

$$1^{\text{re}} \text{ distance focale : } \quad A'b = f_1 = \frac{nr'}{n-1}$$

$$2^{\text{e}} \text{ distance focale : } \quad A'b' = f'_1 = \frac{r'}{n-1}$$

Cela posé, menons une droite LL' parallèle à l'axe principal ; elle perce les deux faces de la lentille en I, I'. En raison de leur très-faible amplitude, ces faces se confondent sensiblement avec les plans perpendiculaires à l'axe principal en A et A', par suite les arcs AI, A'I' peuvent être considérés comme des perpendiculaires à l'axe principal et  $AI = A'I'$ .

Si LI est un rayon incident, la face A le réfracte suivant Ia', qui passe par son second foyer principal a'. — Si L'I' est un rayon incident, la face A' le réfracte suivant I'b, qui passe par son premier foyer principal b. — Du point S, où se coupent ces deux rayons réfractés, abaissons la perpendiculaire SO sur l'axe principal ; O est le centre optique de la lentille. En effet :

Les deux triangles rectangles a'IA, a'SO sont semblables et donnent :

$$\frac{AI}{SO} = \frac{Aa'}{Oa'}$$

D'autre part, les deux triangles rectangles bI'A', bSO sont semblables et donnent :

$$\frac{A'I'}{SO} = \frac{A'b}{Ob}$$

d'où, puisque  $AI = A'I'$ , on tire :

$$\frac{Aa'}{Oa'} = \frac{A'b}{Ob}$$

d'où

$$\frac{Aa' - Oa'}{Aa'} = \frac{A'b - Ob}{A'b}$$

ou enfin :

$$\frac{AO}{A'O} = \frac{Aa'}{A'b}$$

Le point O ainsi déterminé est donc le *centre optique* de la lentille.

43. Considérons la perpendiculaire SO comme un objet lumineux. — Le point S rayonne vers la face A; un des rayons incidents, SI prolongé, passe par le foyer principal  $a'$  et émerge suivant IL parallèle à l'axe principal; un autre rayon incident SV, parallèle à l'axe principal, émerge suivant Va qui passe par le foyer principal  $a$ . L'image de S est donc en D au point d'entrecroisement des prolongements de ces deux rayons émergents; DK est l'image de SO regardé à travers la face A de la lentille; le pied K de la perpendiculaire DK est l'image de O, et, par suite, le *premier point nodal* de la lentille.

Le point S rayonne aussi vers la face A'; les rayons incidents SI' qui, prolongé, passe par le foyer principal  $b$ , et SV' parallèle à l'axe principal, émergent suivant I'L' parallèle à l'axe principal, et V'b' qui passe par le foyer principal  $b'$ . L'image de S est donc en D' au point d'entrecroisement des prolongements de ces deux rayons émergents; D'K' est l'image de SO regardé à travers la face A' de la lentille; le pied K' de la perpendiculaire D'K' est l'image de O et, par suite, le *second point nodal* de la lentille.

Mais, par construction, les points I, D, D', I' sont sur une même parallèle LL' à l'axe principal, par conséquent nous avons : AI = KD = K'D' = A'I'. Il suit de là que les images KD, K'D' de SO, regardé successivement à travers les faces A, A' de la lentille, sont du même côté de l'axe principal et de même hauteur. Tous les rayons incidents qui, prolongés, passent par le point D de la perpendiculaire DK sont donc réfractés par la face A, de manière à passer par le point S, rencontrent la face A' comme s'ils émanaient de S et émergent de la lentille suivant des lignes qui passent par le point D' de la perpendiculaire

laire  $D'K'$ . Les prolongements de ces rayons incidents et des rayons émergents correspondants rencontrent donc les perpendiculaires  $DK, D'K'$  du même côté et à égale distance de l'axe principal. — Cette dernière relation existe évidemment entre deux points quelconques pris sur les perpendiculaires  $DK, D'K'$  du même côté et à la même distance de l'axe principal. — En raison de la parfaite symétrie des surfaces sphériques, les plans perpendiculaires à l'axe principal menés par  $K$  et  $K'$  sont nécessairement percés du même côté et à la même distance de l'axe principal par les prolongements d'un rayon incident quelconque et du rayon émergent correspondant.

Les plans perpendiculaires à l'axe principal menés par  $K$  et  $K'$  sont donc les deux *plans principaux*, et les points  $K, K'$  sont à la fois les *points nodaux* et les *points principaux* de la lentille.

44. Dans le cas de la lentille biconvexe, le *centre optique*  $O$  et les deux *points nodaux*  $K, K'$  sont donc situés dans l'intérieur de la lentille. Il nous reste à calculer leurs distances aux sommets  $A, A'$  des deux faces de la lentille.

Désignons par la lettre  $e$  l'épaisseur  $AA'$  de la lentille; nous avons, d'après les conventions précédemment adoptées (42) :

$$\begin{aligned} AA' &= e \\ Aa &= f_0 & A'b &= f_1 \\ Aa' &= f'_0 & A'b' &= f'_1 \end{aligned}$$

Pour ce qui regarde le *centre optique*  $O$ , nous avons (fig. 31) :

$$AO + A'O = AA' = e$$

et, d'après la relation précédemment démontrée :

$$\frac{AO}{A'O} = \frac{Aa'}{A'b} = \frac{f'_0}{f_1}$$

De ces deux équations on tire facilement :

$$AO = \frac{ef'_0}{f'_0 + f_1} \quad A'O = \frac{ef_1}{f'_0 + f_1}$$

Ces deux relations font connaître les distances du centre op-

tique O aux sommets A, A' des faces de la lentille, lorsqu'on connaît les distances focales de ces faces, c'est-à-dire leurs rayons de courbure et l'indice de réfraction de la lentille elle-même.

Pour déterminer la position du *premier point nodal* K, nous avons (fig. 31) deux triangles rectangles semblables aDK, aVA, qui donnent :

$$\frac{DK}{AV} = \frac{aK}{Aa}$$

Mais DK = AI et AV = SO comme parallèles comprises entre parallèles, de plus aK = Aa + AK, donc en substituant :

$$\frac{AI}{SO} = \frac{Aa + AK}{Aa} = \frac{f_0 + AK}{f_0}$$

D'autre part, les triangles rectangles semblables a'AI, a'OS donnent :

$$\frac{AI}{SO} = \frac{Aa'}{Oa'} = \frac{Aa'}{Aa' - AO} = \frac{f'_0}{f'_0 - AO}$$

Les premiers membres de ces deux équations sont identiques, les seconds membres sont donc égaux et

$$\frac{f_0 + AK}{f_0} = \frac{f'_0}{f'_0 - AO}$$

Ce qui donne en remplaçant Ao par sa valeur  $\frac{ef'_0}{f'_0 + f_1}$  :

$$\frac{f_0 + AK}{f_0} = \frac{f'_0}{f'_0 - \frac{ef'_0}{f'_0 + f_1}}$$

d'où l'on tire facilement :

$$AK = \frac{ef'_0}{f'_0 + f_1 - e}$$

Pour déterminer la position du *second point nodal* K' nous avons (fig. 31) les deux triangles rectangles semblables b'D'K', b'V'A' et les triangles rectangles semblables bA'I', bOS. En leur appliquant les raisonnements précédents, nous trouvons :

$$A'K' = \frac{ef'_1}{f'_0 + f_1 - e}$$

Les positions des *points nodaux* K, K' de la lentille sont donc déterminées par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} 1^{\text{er}} \text{ point nodal K : } & \quad AK = \frac{ef_0}{f'_0 + f_1 - e} \\ 2^{\text{e}} \text{ point nodal K' : } & \quad A'K' = \frac{ef'_1}{f'_0 + f_1 - e} \end{aligned}$$

Pour le *centre optique* O et pour les *points nodaux* K, K', les distances sont toujours comptées à partir des sommets A, A' des faces de la lentille. — Quand le sommet A est le point de départ, on convient de compter les distances *positivement à droite* de A, *négativement à gauche* de A. — Pour le point A', les distances sont comptées *positivement à gauche* de A', *négativement à droite* de A'. — Dans le cas actuel, toutes les longueurs sont *positives*.

A tout faisceau incident *homocentrique* correspond un faisceau émergent *homocentrique*; d'autre part, à tout rayon incident qui, prolongé, passe par le *premier point nodal* K correspond un rayon émergent parallèle dont le prolongement passe par le *second point nodal* K'. Il en résulte que les droites qui joignent un point lumineux au premier point nodal K et son foyer au second point nodal K' sont parallèles; ces lignes parallèles s'appellent *lignes de direction*.

45. *Foyers principaux*. — *Distances focales*. — Connaissant la position sur l'axe principal des deux points nodaux K, K' de la lentille et sachant que les deux *plans principaux* passent par les points K, K', il est facile de déterminer géométriquement la position de ses deux foyers principaux F, F'.

Soient : a' (fig. 32) le second foyer principal de la première face A de la lentille et SI, un rayon incident quelconque parallèle à l'axe principal. Ce rayon incident SI est réfracté par la face A suivant Ia' et rencontre la seconde face A' en I'; le point I' appartient au rayon émergent de la lentille. — Mais puisque les plans perpendiculaires à l'axe principal menés par K et K' sont les plans principaux de la lentille, si

nous prolongeons le rayon incident jusqu'au point D où il perce le premier plan principal, et si, par le point D, nous menons la droite DD' parallèle à l'axe principal, le point D',

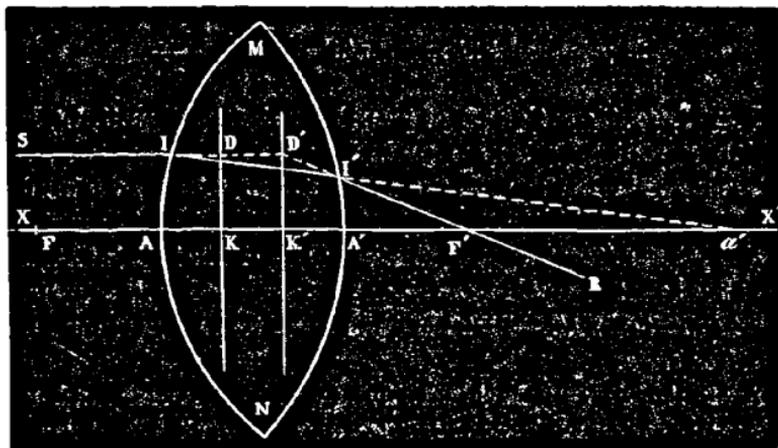


FIG. 32.

où cette droite perce le second plan principal, appartient nécessairement à la direction du rayon émergent.—Au rayon incident SI correspond donc un rayon émergent D'VR déterminé de position par les points D', V qui sont sur sa direction ; ce rayon émergent coupe l'axe principal en F'.

Ce point F' ainsi géométriquement déterminé est le point de concours de tous les rayons émergents correspondants à des rayons incidents parallèles à l'axe principal. C'est le *second foyer principal* de la lentille, et ce foyer est *réel*.

Une construction semblable servirait à déterminer le *premier foyer principal* F de la lentille.

Dans le cas actuel, les points principaux étant confondus avec les points nodaux, les *distances focales* de la lentille sont KF et K'F'.

Les triangles rectangles semblables a'AI, a'A'I' donnent :

$$\frac{Aa'}{A'a'} = \frac{AI}{A'I'}$$

D'autre part, les triangles rectangles semblables  $F'K'D'$ ,  $F'A'I'$  donnent :

$$\frac{K'F'}{A'F'} = \frac{K'D'}{A'I'}$$

° Mais nécessairement  $AI \Rightarrow K'D'$ , puisque le rayon incident  $SI$  est parallèle à l'axe principal ; les seconds membres de ces deux équations sont donc identiques, et l'on obtient, en égalant leurs premiers membres :

$$\frac{K'F'}{A'F'} = \frac{Aa'}{A'a'}$$

Or,  $A'F' = K'F' - A'K'$  et  $A'a' = Aa' - AA' = Aa' - e$  ; ce qui donne, en substituant :

$$\frac{K'F'}{K'F' - A'K'} = \frac{Aa'}{Aa' - e} = \frac{f'_0}{f'_0 - e}$$

En remplaçant  $A'K'$  par sa valeur, cette équation devient :

$$\frac{K'F'}{K'F' - \frac{ef'_1}{f'_0 + f_1 - e}} = \frac{f'_0}{f'_0 - e}$$

D'où l'on tire, pour la valeur de la *seconde distance focale*  $K'F'$  de la lentille :

$$K'F' = \frac{f'_0 f'_1}{f'_0 + f_1 - e}$$

Une construction analogue et les mêmes raisonnements donneraient, pour la valeur de la *première distance focale*  $KF$  de la lentille :

$$KF = \frac{f_0 f_1}{f_0 + f_1 - e}$$

Mais il résulte des valeurs des distances focales  $f_0, f'_0, f_1, f'_1$  (40) que  $f_0 f_1 = f'_0 f'_1$ . Par conséquent, les deux distances focales  $KF, K'F'$  sont égales ; si nous les désignons sur la lettre  $\varphi$ , nous aurons :

$$\varphi = KF = K'F' = \frac{f'_0 f'_1}{f'_0 + f_1 - e} = \frac{f_0 f_1}{f_0 + f_1 - e}$$

Comme cela devrait être, puisque les foyers principaux sont réels, ces distances focales sont positives; KF doit être porté à gauche du point K du côté de la lumière incidente, K'F' à droite du point K', du côté de la lumière émergente.

46. En résumé, les éléments fondamentaux de la lentille biconvexe sont :

1° Pour le centre optique O :

$$(1) \quad \begin{cases} AO = \frac{ef'_0}{f'_0 + f_1} \\ A'O = \frac{ef_1}{f'_0 + f_1} \end{cases}$$

2° Pour les points nodaux K, K', qui sont en même temps les points principaux :

$$(2) \quad \begin{cases} AK = \frac{ef'_0}{f'_0 + f_1 - e} \\ A'K' = \frac{ef_1}{f'_0 + f_1 - e} \end{cases}$$

3° Pour la valeur commune des distances focales :

$$(3) \quad \varphi = KF = K'F' = \frac{f_0 f_1}{f'_0 + f_1 - e}$$

Toutes ces longueurs sont positives; ce qui indique que le centre optique O et les deux points nodaux sont situés dans l'intérieur de la lentille, et que les foyers principaux F, F' sont réels.

47. *Plans focaux.* — Les plans focaux de la lentille sont (fig. 33) les plans perpendiculaires à l'axe principal menés par les foyers principaux F, F'; ils jouissent des mêmes propriétés que ceux d'une simple surface réfringente. En effet :

1° Soit H un point lumineux situé sur le premier plan focal F. Le rayon incident HI, parallèle à l'axe principal, prolongé dans l'intérieur de la lentille, perce les plans principaux en D, D'. Le point D' et le second foyer principal F' sont sur la direction du rayon émergent correspondant I'R. Mais le rayon

incident  $HK$ , dont le prolongement passe par le premier point nodal  $K$ , émerge suivant  $K'R'$ , parallèle à  $HK$  et le foyer de  $H$  est nécessairement sur la ligne de direction  $K'R'$ . Le foyer du point  $H$  est donc au point de rencontre des deux rayons émergents  $I'R$ ,  $K'R'$ . Par construction  $KF = K'F'$  et  $HF = K'D'$ , donc les triangles rectangles  $KFH$ ,  $F'K'D'$  sont égaux.  $D'R$  est donc parallèle à  $HK$  et, par suite, à  $K'R'$ . Le foyer du point  $H$ , qui est le point de croisement de  $D'R$  et de  $K'R'$  est donc à l'infini; en d'autres termes :

Quand un point lumineux  $H$  est situé sur le premier plan

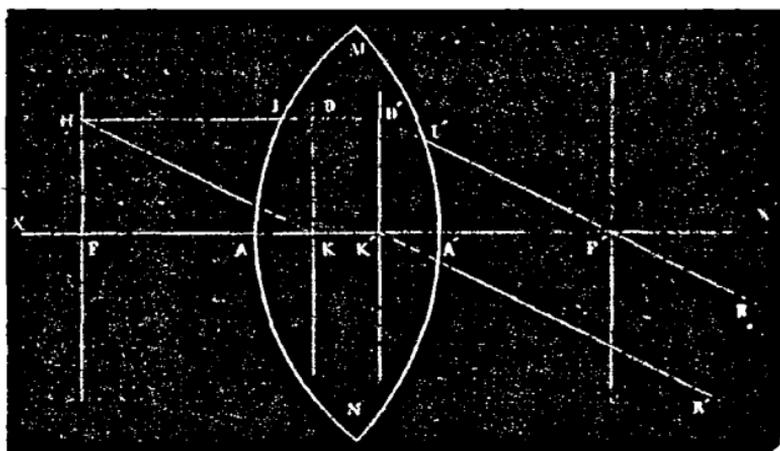


FIG. 33.

focal  $F$ , les rayons émergents sont tous parallèles entre eux et à la ligne de direction qui joint le point lumineux  $H$  au premier point nodal  $K$ . — Dans le cas particulier où  $H$  est au premier foyer principal  $F$ , les rayons émergents sont parallèles à l'axe principal.

2° Soit  $SI$  (fig. 34) un rayon incident quelconque. Par le point  $D$ , où son prolongement perce le premier plan principal, menons une parallèle à l'axe principal qui perce le second plan principal en  $D'$ ; ce point  $D'$  appartient à la direction du rayon

émergent. Mais le rayon incident  $SI$  peut être considéré comme émané d'un point lumineux placé au point  $H$  où il perce le premier plan focal; le rayon émergent  $I'R$  est donc parallèle aux lignes de direction  $HK$ ,  $K'H'$  et son prolongement passe par  $D'$ . — La droite  $K'B$ , qui joint le second point nodal au point  $B$  où le rayon émergent perce le second plan focal, est parallèle au rayon incident  $SI$ . En effet, menons la droite  $GK$  parallèle à  $SI$ .  $GH = KD$  comme parallèles comprises entre parallèles, et, par la même raison,  $BH' = K'D'$ , donc  $GH = BH'$ . Mais les lignes de direction  $HK$ ,  $K'H'$  sont parallèles, et  $KF = K'F'$ , donc les

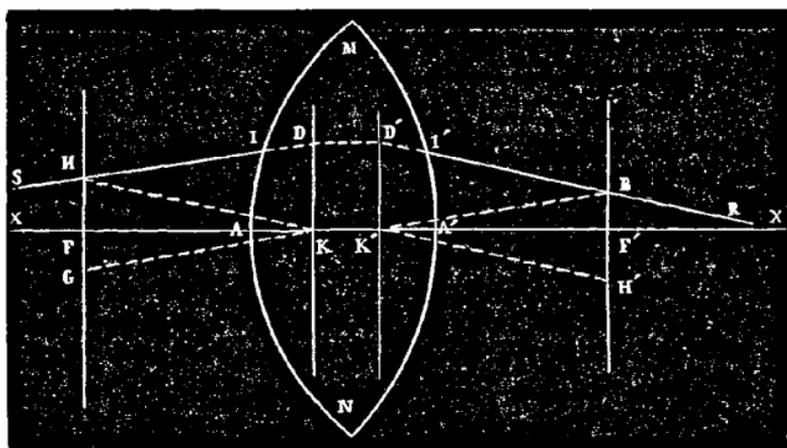


FIG. 34.

triangles  $KFH$ ,  $K'F'H'$  sont égaux et  $FH = F'H'$ . Il résulte nécessairement de cette dernière égalité que  $FG = F'B$ . Dès lors les triangles rectangles  $K'BF'$ ,  $KGF$  sont égaux, donc  $K'B$  est parallèle à  $GK$  et, par conséquent, au rayon incident  $SI$ . — Cette construction est indépendante de la distance du point d'incidence  $I$  à l'axe principal; tous les rayons incidents parallèles à  $SI$  émergent donc de la lentille suivant des droites qui se croisent au point  $B$ .

Donc le foyer de tout faisceau des rayons incidents parallèles entre eux est sur le second plan focal, au point  $B$  où ce plan

est percé par la ligne de direction parallèle aux rayons incidents, menée par le second point nodal  $K'$ . — Dans le cas particulier où les rayons incidents sont parallèles à l'axe principal, leur foyer est au second foyer principal  $F'$ .

Il résulte de ces deux propriétés des plans focaux que les directions d'un rayon incident quelconque  $SI$  et de son rayon émergent correspondant  $I'R$  satisfont aux deux conditions suivantes : — Le rayon émergent est parallèle à la ligne de direction  $HK$ , qui joint le point  $H$  où le rayon incident perce le premier plan focal au premier point nodal  $K$ ; — ce rayon émergent passe par le point  $B$  où le second plan focal est percé par la ligne de direction  $K'B$  menée par le second point nodal  $K'$  parallèlement au rayon incident  $SI$ . — Étant donné un rayon incident quelconque, il est donc toujours facile de construire géométriquement le rayon émergent correspondant.

48. *Foyer d'un point lumineux situé sur l'axe principal.* — Soit  $P$  (fig. 35) un point lumineux situé sur l'axe principal. Menons un rayon incident quelconque  $PI$  dont le prolongement perce en  $D$  le premier plan principal, et  $DD'$  parallèle à l'axe principal; le point  $D'$  du second plan principal et le point  $B$  où le second plan focal est percé par la ligne de direction  $K'B$  parallèle à  $PI$ , appartiennent à la direction du rayon émergent  $I'R$ , et déterminent sa position; de plus ce rayon émergent est parallèle à la ligne de direction  $HK$  menée par le point  $H$  où le rayon incident perce le premier plan focal. — Ce rayon émergent  $I'R$  coupe l'axe principal en un point  $P'$  dont il faut déterminer la position.

Les triangles rectangles  $PFH$ ,  $K'F'B$  sont semblables et donnent :

$$\frac{PF}{K'F'} = \frac{HF}{BF'}$$

D'autre part, les triangles rectangles  $KFH$ ,  $P'F'B$  sont semblables et donnent :

$$\frac{KF}{P'F'} = \frac{HF}{BF'}$$

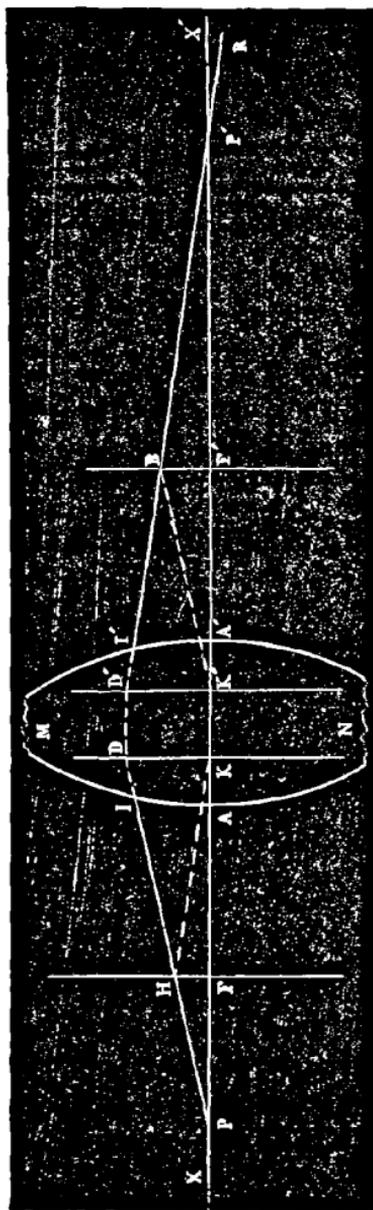


FIG. 35.

D'où :

$$\frac{PF}{K'F'} = \frac{KF}{P'F'}$$

Mais les distances focales  $KF$ ,  $K'F'$  sont égales, et nous les désignons par la lettre  $\varphi$  ; nous avons donc, en faisant disparaître les dénominateurs :

$$PF \times P'F' = \varphi^2$$

Dans cette équation, la distance  $P'F'$  du point  $P'$  au second foyer principal  $F'$  est indépendante de l'inclinaison du rayon incident sur l'axe principal ; elle reste donc la même pour tous les rayons incidents émanés du point  $P$ , et  $P'$  est le foyer du point lumineux  $P$ .

Si un point lumineux était placé en  $P'$ , les rayons émergents convergeraient évidemment tous en  $P$ . Les points  $P$ ,  $P'$  sont donc *réciroques* l'un de l'autre ; ce sont deux *foyers conjugués*.

Désignons par les lettres  $l$ ,  $l'$  les distances  $PF$ ,  $P'F'$  du point lumineux  $P$  et de son foyer  $P'$  au premier et au second foyer principal de la lentille ; nous aurons pour formule générale des foyers conjugués : .

$$(4) \quad ll' = \varphi^2$$

Pour que cette formule donne, dans tous les cas, les positions relatives du point lumineux P et de son foyer P', nous conserverons les conventions déjà énoncées (27).  $l$  est compté à partir de F *positivement* à gauche, *négativement* à droite de F;  $l'$  est compté à partir de F' *positivement* à droite, *négativement* à gauche de F' (\*).

L'équation (4) donne pour valeur de  $l'$  :

$$l' = \frac{\varphi^2}{l}$$

(\*) De l'équation (4), il est facile de tirer la formule classique, moins simple et moins facile à discuter, des foyers conjugués. Nous avons en effet :

$$\begin{aligned} l &= PF = PK - KF \\ l' &= P'F' = P'K' - K'F' \end{aligned}$$

Si nous désignons par les lettres  $p$ ,  $p'$  les distances PK, P'K', et si nous remplaçons KF et K'F' par  $\varphi$ , nous aurons.

$$\begin{aligned} l &= p - \varphi \\ l' &= p' - \varphi \end{aligned}$$

ce qui donne, en substituant dans l'équation (4),

$$(p - \varphi)(p' - \varphi) = \varphi^2$$

d'où

$$p\varphi + p'\varphi = pp'$$

et enfin, en divisant tous les termes par le produit  $pp'\varphi$ ,

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{\varphi}$$

Telle est la formule classique des foyers conjugués dans laquelle  $p$  est compté à partir du point K, *positivement* à gauche et *négativement* à droite de K;  $p'$  est compté à partir du point K', *positivement* à droite et *négativement* à gauche de K'.

La quantité  $\varphi^2$  est nécessairement positive, par conséquent le signe de  $l'$  ne dépend que de celui de  $l$ .

Tant que  $l$  est *positif*, c'est-à-dire tant que le point lumineux P est situé à *gauche* de F,  $l'$  est aussi *positif*, le foyer P' est à *droite* de F' et *réel*.

La distance  $l'$  devient *négative* en même temps que  $l$ ; par conséquent quand le point lumineux passe à *droite* de F, le foyer P' passe à *gauche* de F' et reste *réel* ou devient *virtuel* suivant la valeur de  $l$ .

A. — Le point lumineux P est à gauche du premier foyer principal F,  $l$  est positif. — Nous savons que, dans ce cas,  $l'$  est positif et le foyer P' à droite du second foyer principal F'.

Lorsque le point lumineux P est *infiniment* éloigné,  $l = \infty$ ,  $l' = 0$ ; le foyer P' est donc au second foyer principal F'. — Il devait en être ainsi, puisque, dans ce cas, les rayons incidents sont tous parallèles à l'axe principal.

A mesure que le point lumineux P se rapproche du premier foyer principal F, la valeur de  $l$  diminue, celle de  $l'$  augmente et le foyer P' toujours *réel* s'éloigne à *droite* du second foyer principal F'. — Pour le cas particulier où  $l = \varphi$ , nous avons  $l' = \varphi$ ; lors donc que le point lumineux P est à une distance du premier point nodal K égale à deux fois la distance focale  $\varphi$ , la distance de son foyer P' au second point nodal K' est aussi égale à deux fois la distance focale  $\varphi$ .

Enfin lorsque  $l = 0$ , le point lumineux P est au premier foyer principal F,  $l' = \infty$  et le foyer P' est *infiniment* éloigné; ce qui indique, comme on devait s'y attendre, que les rayons émergents sont tous parallèles à l'axe principal.

B. — Le point lumineux P est à droite du premier foyer principal F;  $l$  est négatif. — Nous savons que, dans ce cas,  $l'$  est négatif et le foyer P' à gauche du second foyer principal F'.

Tant que le point lumineux P, *réel* ou *virtuel*, est situé entre le premier foyer principal F et le premier point nodal K, la grandeur absolue de  $l$  est inférieure à  $\varphi$ , la grandeur absolue de  $l'$  est supérieure à  $\varphi$ , le foyer P' est donc *virtuel* et situé à

*gauche* du second point nodal  $K'$ . — D'ailleurs la valeur absolue de  $l'$  est d'autant plus grande que celle de  $l$  est plus petite; par conséquent le foyer *virtuel*  $P'$  s'éloigne à *gauche* de  $K'$  et marche vers *l'infini* à mesure que le point lumineux  $P$  se rapproche du premier foyer principal  $F$ .

Si  $l = -\varphi$ , le point lumineux *virtuel*  $P$  est au premier point nodal  $K$ ,  $l' = -\varphi$  et le foyer  $P'$ , *virtuel* aussi, est au second point nodal  $K'$ .

Enfin, dans le cas où la valeur absolue de  $l$  est supérieure à  $\varphi$ , le point lumineux *virtuel*  $P$  est à *droite* du premier point nodal  $K$ , la valeur absolue de  $l'$  est inférieure à  $\varphi$  et le foyer  $P'$  est compris entre le second point nodal  $K'$  et le second foyer principal  $F'$ . — D'ailleurs, à mesure que le point lumineux *virtuel*  $P$  s'éloigne à *droite* de  $K$  et marche vers *l'infini*, la grandeur absolue de  $l'$  diminue et le foyer  $P'$  se rapproche du second foyer principal  $F'$ . — Pour une certaine position du point lumineux *virtuel*  $P$ , la valeur absolue de  $l'$  est égale à  $A'F'$ , et le foyer  $P'$  est au sommet de la seconde face de la lentille; à partir de cette position, le foyer  $P'$  est *réel* et se rapproche du second foyer principal  $F'$  à mesure que le point lumineux *virtuel*  $P$  s'éloigne à *droite* du premier point nodal  $K$ .

Ainsi, dans tous les cas, les foyers conjugués  $P, P'$  se déplacent dans le *même sens* le long de l'axe principal de la lentille.

49. *Foyer d'un point lumineux situé hors de l'axe principal.* — Soit  $S$  (fig. 36) un point lumineux quelconque hors de l'axe principal. Le rayon incident  $SI$  parallèle à l'axe principal perce le second plan principal en  $D'$  et émerge suivant  $D'F'R$ ; le rayon incident  $SF'I'$  émerge suivant  $B'R'$  parallèle à l'axe principal; le rayon incident  $SK$  émerge parallèlement à lui-même suivant  $K'S'$ . Le point  $S'$  où ces trois rayons émergents se coupent est donc le foyer du point lumineux  $S$ . — Abaissons les perpendiculaires  $SP, S'P'$  sur l'axe principal.

En tenant compte des relations  $SP' = BK$ ,  $SP = D'K'$ ,  $KF = K'F' = \varphi$ , les deux couples de triangles semblables  $FSP,$

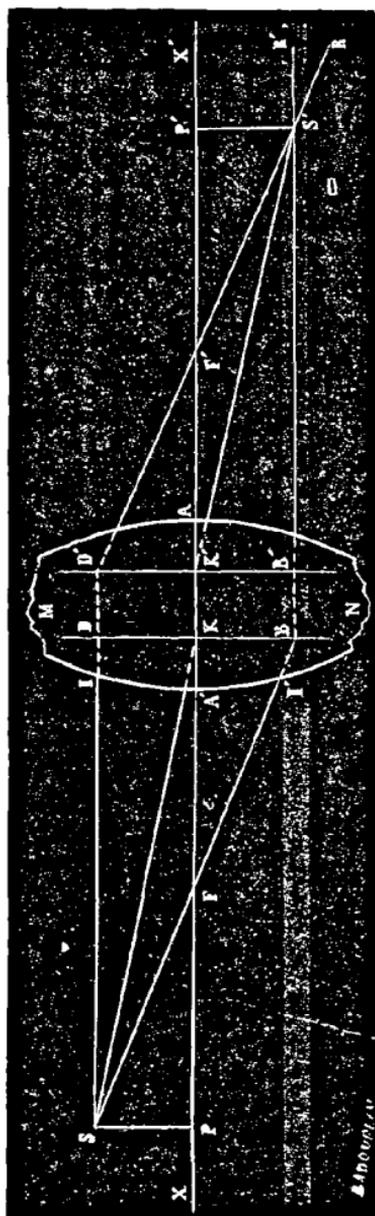


FIG. 36.

FBK, et  $F'D/K'$ ,  $F'S/P'$  donnent facilement :

$$(5) \begin{cases} PF \times P'F' = \varphi^2 \\ \frac{S'P'}{SP} = \frac{\varphi}{PF} \end{cases}$$

Étant donnée la position du point lumineux S, ces deux formules déterminent la position de son foyer S'. — La première montre que les pieds P, P' des perpendiculaires abaissées du point lumineux S et de son foyer S' sur l'axe principal satisfont à la formule générale des foyers conjugués.

Dans la figure 36 le point lumineux S et son foyer S' sont l'un *au-dessus*, l'autre *au-dessous* de l'axe principal. Ces deux points devant toujours se trouver sur les lignes de direction parallèles SK, K'S', leur position relative reste évidemment la même dans tous les cas où les deux points nodaux K, K' sont compris dans l'intervalle qui sépare P de P'.

50. *Rapports de position et de grandeur d'un objet lumineux et de son image.* — Les formules (5) montrent que si des points lumineux sont placés sur un plan perpendicu-

laire à l'axe principal mené par SP, leurs foyers sont nécessairement situés sur un plan perpendiculaire à l'axe principal mené par S'P'; il est évident d'ailleurs que ces points lumineux et leurs foyers sont semblablement distribués sur ces deux plans.

Si donc SP (fig. 37) est un objet lumineux ou éclairé, S'P' est nécessairement son image semblable. — La première des formules (5) détermine leurs positions relatives; la seconde est l'expression du rapport de leurs dimensions linéaires.

En appliquant à ces deux équations le mode de discussion adopté pour la formule générale des foyers conjugués (48), on arrive facilement aux conclusions suivantes :

A. *L'objet SP est à gauche du premier plan focal F.* — Dans ce cas PF est positif, P'F' est donc aussi positif, et l'image S'P' est à droite du second plan focal F'. L'objet et son image sont tous les deux réels.

Si l'objet SP est infiniment éloigné, PF est infiniment grand, P'F' est infiniment petit; l'image S'P', infiniment petite par rapport à l'objet SP, est sur le second plan focal F'.

Quand l'objet SP est à une distance du premier plan principal K double de la distance focale  $\varphi$ ,  $PF = \varphi$ ,  $P'F' = \varphi$ . L'image S'P' est aussi à une distance du second plan principal K' double de la distance focale  $\varphi$ ; de plus l'objet et son image sont de même grandeur. — A mesure que l'objet s'éloigne du premier plan focal F, l'image diminue et se rapproche du second plan focal F'; à mesure que l'objet se rapproche du premier plan focal F, son image grandit, s'éloigne du second plan focal F' et s'avance vers l'infini.

Enfin, quand l'objet SP est sur le premier plan focal F,  $PF = 0$ , P'F' est infiniment grand, l'image S'P' est donc infiniment éloignée et infiniment grande par rapport à l'objet.

D'ailleurs, dans tous les cas, l'image réelle est renversée, car les points nodaux K, K' sont constamment compris dans l'intervalle qui la sépare de l'objet.

B. — *L'objet est à droite du premier plan focal F.* — Dans ce

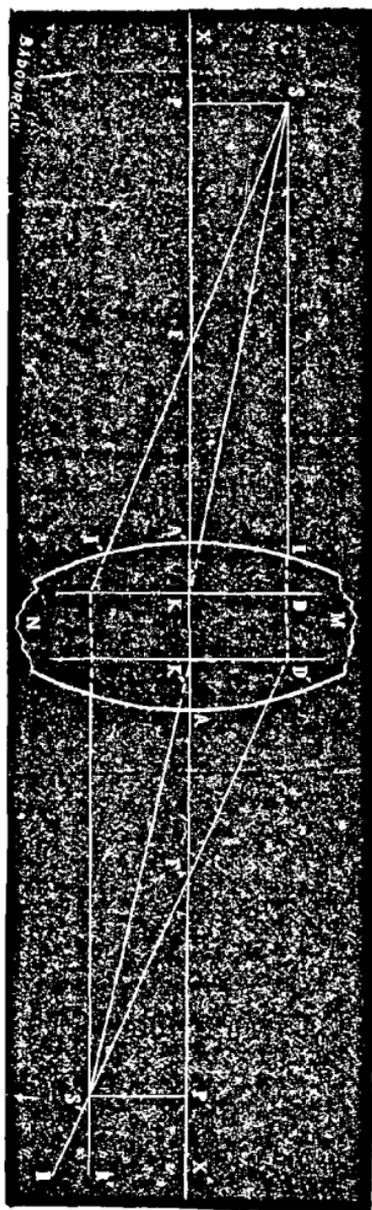


Fig. 37.

cas  $PF$  est négatif,  $P'F'$  est donc aussi négatif et l'image  $S'P'$  passe à *gauche* du second plan focal  $F'$ . — L'objet reste *réel* tant qu'il est placé entre le premier plan focal  $F$  et la première face  $A$  de la lentille, et devient *virtuel* quand il passe à droite de cette face  $A$ . — L'image est *virtuelle* quand elle est située à gauche de la seconde face  $A'$  de la lentille et devient *réelle* quand elle est comprise entre cette face  $A'$  et le second plan focal  $F'$ .

Tant que l'objet  $SP$ , *réel* ou *virtuel*, est compris entre le premier plan focal  $F$  et le premier plan principal  $K$ , la grandeur absolue de  $PF$  est inférieure à  $\varphi$ , celle de  $P'F'$  est supérieure à  $\varphi$ ; l'image  $S'P'$  est donc à *gauche* du second plan principal  $K'$ , *virtuelle* et plus grande que l'objet. — D'ailleurs l'image  $S'P'$ , toujours *virtuelle*, grandit et s'éloigne vers l'*infini* à mesure que l'objet se rapproche du premier plan focal  $F$ .

Si l'objet *virtuel*  $SP$  est sur le premier plan principal  $K$ , son image  $S'P'$ , *virtuelle* et de même grandeur, est sur le second plan principal  $K'$ .

Pour une certaine position

de l'objet *virtuel*  $SP$ , son image  $S'P'$  est sur la seconde face  $A'$  de la lentille.— A partir de cette position, à mesure que l'objet *virtuel* s'éloigne vers l'*infini*, son image *réelle*  $S'P'$  est plus petite que l'objet, diminue et se rapproche du second plan focal  $F'$ .

En tenant compte de la position des points nodaux  $K, K'$  par rapport à l'objet  $SP$  et à son image  $S'P'$ , il est facile de voir que, dans tous ces cas, l'image *réelle* ou *virtuelle*  $S'P'$  est nécessairement *droite*.

Ainsi donc en résumé dans la lentille biconvexe :

1° Comme les foyers conjugués, un objet et son image se déplacent toujours dans le *même sens* le long de l'axe principal.

2° Un objet  $SP$  et son image  $S'P'$  étant compris tout entiers entre l'axe principal et les deux lignes de direction  $KS, K'S'$  parallèles entre elles, un œil qui regarderait successivement l'objet du premier point nodal  $K$  et l'image du second point nodal  $K'$  les verrait nécessairement sous le même angle.

## § 2. — Lentille plan convexe.

51. Dans la lentille plan-convexe (fig. 38) la détermination des points cardinaux est très-simple.

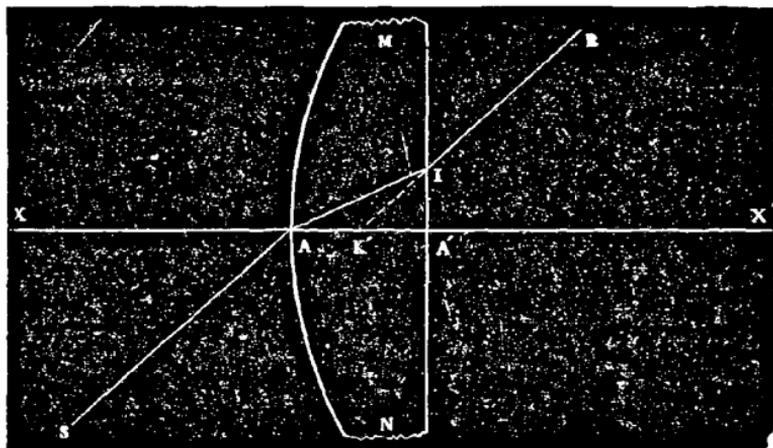


FIG. 38.

Le plan tangent au sommet  $A$  de la première face de la lentille est parallèle à la seconde face  $A'$ , par conséquent

tout rayon SA qui passe par A pénètre suivant AI et émerge suivant IR parallèle à SA. Le sommet A de la première face est donc le *centre optique* de la lentille.

52. Si nous prolongeons le rayon émergent IR jusqu'au point K' où il rencontre l'axe principal, K' est le foyer du point A rayonnant vers la seconde face A'; c'est l'image de A regardé à travers cette seconde face. — Tout rayon incident qui passe par A émerge donc de la lentille suivant une droite qui lui est parallèle, et dont le prolongement passe par K'. A et K' sont donc les *deux points nodaux* de la lentille.

D'ailleurs puisque les rayons incidents partis de A émergent à travers la face plane A' d'un milieu d'indice de réfraction  $n$  dans l'air, la formule (é) (30 note) donne, en ne tenant compte que des valeurs absolues :

$$A'K' = \frac{AA'}{n}$$

Et, en désignant toujours AA' par la lettre  $e$  :

$$A'K' = \frac{e}{n}$$

53. Il est facile de voir, en outre, que les plans perpendiculaires à l'axe principal menés par A et par K' sont des plans principaux. En effet, dans le voisinage de l'axe principal, la face A de la lentille se confond avec son plan tangent en A qui est perpendiculaire à cet axe ; un rayon incident quelconque SI (fig. 39) perce donc en *un même point* I cette face A et son plan tangent, et la parallèle IG à l'axe principal est sensiblement égale à AA'. Mais SI pénètre suivant II', et émerge suivant I'R dont le prolongement rencontre la ligne IG en un point D' tel que :

$$GD' = \frac{IG}{n} = \frac{AA'}{n} = \frac{e}{n} = A'K'$$

Le point D' qui appartient à la direction du rayon émergent I'R est donc situé sur le plan perpendiculaire à l'axe principal mené par K', c'est le point où ce plan est percé par la paral-

lèle à l'axe principal menée par le point d'incidence I, c'est-à-dire par le point où le rayon incident perce le plan tangent en A à la première face de la lentille.

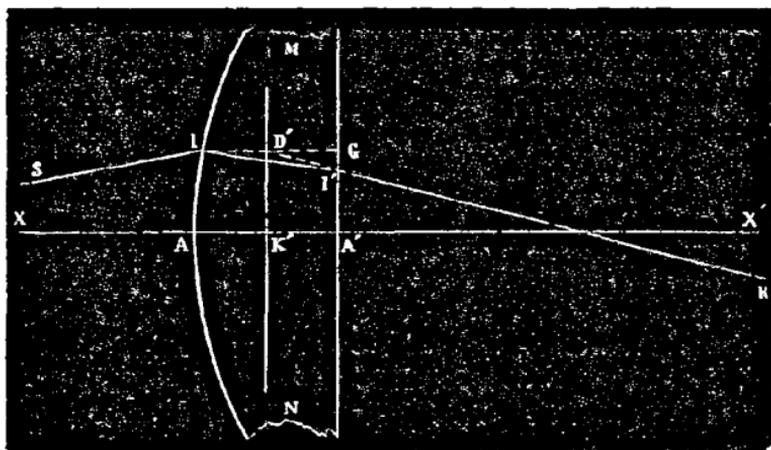


FIG. 39.

Donc le sommet A de la première face est à la fois le *premier point nodal* et le *premier point principal* de la lentille ; le point K' est son *second point nodal* et son *second point principal* ; enfin les *plans principaux* sont les plans perpendiculaires à l'axe principal menés par les points A et K'.

54. Soient  $a, a'$  (fig. 40) les foyers principaux réels de la première face A. Ses distances focales sont *positives* et en désignant par  $r$  son rayon de courbure, nous avons, d'après les résultats obtenus (25) formules (1) et (2) :

$$1^{\text{re}} \text{ distance focale : } \quad Aa = f_0 = \frac{r}{n-1}$$

$$2^{\text{e}} \text{ distance focale : } \quad Aa' = f'_0 = \frac{nr}{n-1}$$

Tout rayon incident parti du point  $a$  est réfracté par la première face A parallèlement à l'axe principal, est normal à la seconde face A' et émerge de la lentille parallèlement à l'axe

principal. Le point  $a$  est donc le *premier foyer principal*  $F$  de la lentille ; donc la *première distance focale* est :

$$AF = f_0$$

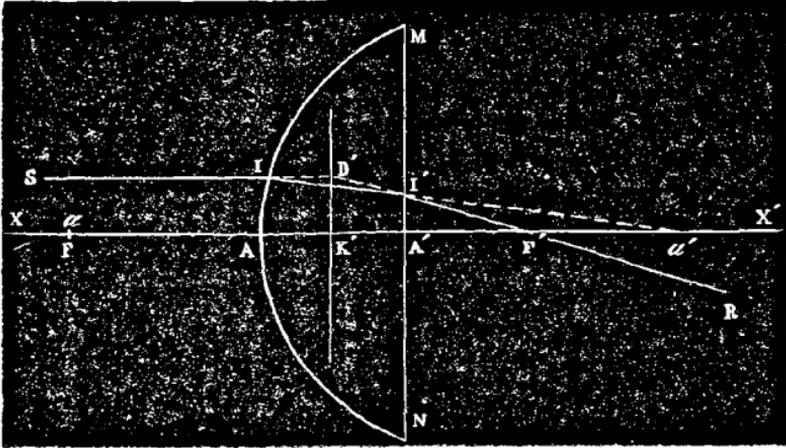


FIG. 40.

Soit maintenant  $SI$  un rayon incident parallèle à l'axe principal dont le prolongement rencontre en  $D'$  le second plan principal. La première face  $A$  réfracte ce rayon incident suivant  $Ia'$ , qui passe par le second foyer principal  $a'$  de cette face et qui rencontre en  $I'$  la seconde face  $A'$  de la lentille. Les points  $D', I'$  appartiennent donc à la direction du rayon émergent  $I'R$  dont la position est ainsi déterminée. — Le point  $F'$  où ce rayon émergent coupe l'axe principal est donc le *second foyer principal* de la lentille.

Les triangles rectangles semblables  $a'A, a'I'A'$  donnent :

$$\frac{Aa'}{A'a'} = \frac{AI}{A'I'}$$

D'autre part, les triangles rectangles semblables  $F'D'K', F'I'A'$  donnent :

$$\frac{K'F'}{F'A'} = \frac{D'K'}{A'I'}$$

Mais, par construction,  $AI = D'K'$ , donc :

$$\frac{Aa'}{A'a'} = \frac{K'F'}{A'F'}$$

Mais  $Aa' = f'_0 = nf_0$ ,

$$A'a' = f'_0 - e = nf_0 - e,$$

$$A'F' = K'F' - A'K' = K'F' - \frac{e}{n}$$

nous avons donc en substituant :

$$\frac{nf_0}{nf_0 - e} = \frac{K'F'}{K'F' - \frac{e}{n}}$$

D'où l'on tire facilement :

$$K'F' = f_0$$

Dans la lentille plan-convexe, les foyers principaux  $F, F'$  sont donc réels, et les distances focales positives  $AF, K'F'$  sont égales.

55. En résumé, les éléments fondamentaux de la lentille plan-convexe sont déterminés par les relations suivantes :

1° Le centre optique, le premier point principal et le premier point nodal se confondent au sommet  $A$  de la face convexe de la lentille.

2° Le second point principal et le second point nodal se confondent au point  $K'$  situé dans l'intérieur de la lentille et déterminé par l'équation :

$$A'K' = \frac{e}{n}$$

3° Les distances focales sont positives et ont pour valeur commune :

$$f = AF = K'F' = f_0$$

Pour déduire les éléments fondamentaux de la lentille plan-convexe des équations (46) qui déterminent ceux de la lentille biconvexe, il suffit de remarquer que dans ces équations

les valeurs de  $f_1, f'_1$  sont *infinies*, car le rayon de courbure  $r'$  de la seconde face  $A'$  de la lentille est *infini*.

Il est évident d'ailleurs que dans la lentille plan-convexe :

1° Les plans focaux jouissent des mêmes propriétés que ceux de la lentille biconvexe.

2° Les foyers conjugués ainsi que les rapports de position et de grandeur d'un objet et de son image sont déterminés par les mêmes formules que dans la lentille biconvexe.

### § 3. — *Ménisque convergent.*

56. Soient : MN (fig. 41) un ménisque convergent, C, C' les centres de courbure de ses deux faces, CA =  $r$  le rayon de courbure de la première face convexe A *plus petit* que le rayon de courbure C'A' =  $r'$  de la seconde face concave A'. — Nous supposons toujours que la lumière pénètre dans la lentille par la face A.

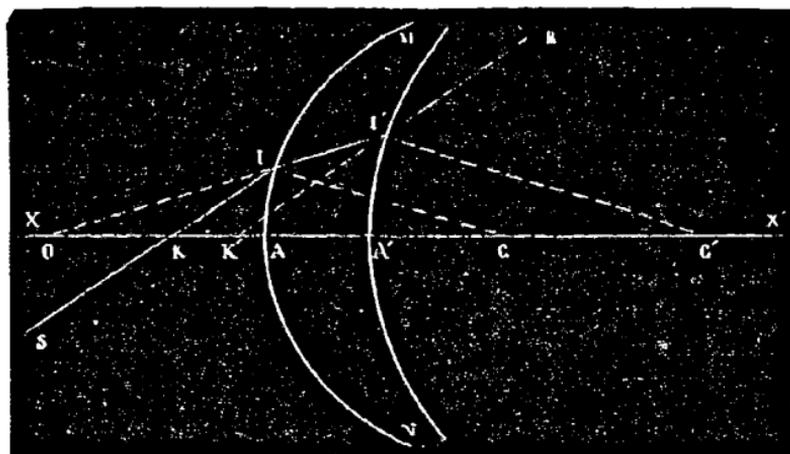


FIG. 41.

Les foyers principaux de la première face A sont *réels*, et ses distances focales *positives* sont (25), formules (1) et (2) :

$$1^{\text{re}} \text{ distance focale : } f_0 = \frac{r}{n - 1}$$

$$2^{\text{e}} \text{ distance focale : } f'_0 = \frac{nr}{n-1}$$

Les foyers principaux de la seconde face  $A'$  sont *virtuels*, et ses distances focales *négligatives* sont (38), formules (1) et (2) :

$$1^{\text{re}} \text{ distance focale : } f_1 = -\frac{nr'}{n-1}$$

$$2^{\text{e}} \text{ distance focale : } f'_1 = -\frac{r'}{n-1}$$

En ne tenant compte que des valeurs absolues des distances focales, nous avons donc :

$$(d) \quad \frac{f'_0}{f_1} = \frac{nr}{n-1} : \frac{nr'}{n-1} = \frac{r}{r'}$$

57. *Centre optique.* — *Points nodaux.* — *Points et plans principaux.* — Par les centres de courbure  $C, C'$  (fig. 41) menons les deux rayons parallèles  $CI, C'I'$ , et la droite  $II'$  dont le prolongement coupe l'axe principal en  $O$ . — Ce point  $O$  est le *centre optique* de la lentille. Car les plans tangents en  $I, I'$  sont parallèles ; par suite, le rayon incident  $SI$  qui pénètre suivant  $II'$  dont le prolongement passe par  $O$ , émerge nécessairement suivant  $I'R$  parallèle à  $SI$ . En outre, la position du point  $O$  est indépendante de toute hypothèse sur les angles que font les rayons de courbure parallèles  $CI, C'I'$  avec l'axe principal. En effet :

D'une part, des triangles rectangles semblables  $C'I'O, CIO$  on tire facilement :

$$\frac{AO}{A'O} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{r}{r'}$$

D'autre part, en désignant par la lettre  $e$  l'épaisseur  $AA'$  de la lentille, on a :

$$A'O - AO = AA' = e$$

Ces deux équations déterminent la position du *centre optique*  $O$  sur l'axe principal.

Le point  $K$  où le rayon incident  $SI$  coupe l'axe principal et le centre optique  $O$  sont *foyers conjugués* par rapport à la première face  $A$  ; le point  $K'$  où le prolongement du rayon émer-

gent l'R coupe l'axe principal et le centre optique O sont foyers conjugués par rapport à la seconde face A'. — Donc la position des points K, K' ne dépend que de celle du centre optique O; à tout rayon incident passant par K correspond un rayon émergent parallèle au rayon incident et dont le prolongement passe par K'; les points K, K' sont donc les *points nodaux* du ménisque.

Le premier point nodal K est le foyer d'un faisceau de rayons lumineux qui, venant de l'intérieur de la lentille, rencontrent la face A par sa concavité et dont les prolongements concourent en O. — Le second point nodal K' est le foyer d'un point lumineux placé en O dans le milieu de la lentille indéfiniment prolongé et rayonnant vers la convexité de la face A'.

Nous avons trouvé que  $\frac{AO}{A'O} = \frac{r}{r'}$ ; mais d'autre part, en ne tenant compte que des valeurs absolues des distances focales des faces de la lentille, nous avons (56) d'après la formule (d)  $\frac{f'_0}{f_1} = \frac{r}{r'}$ , donc les distances du centre optique O aux sommets A, A' de la lentille satisfont à la relation suivante :

$$\frac{AO}{A'O} = \frac{f'_0}{f_1}$$

58. Cette dernière relation permet de déterminer géométriquement la position sur l'axe principal du centre optique O en même temps que celle des deux points nodaux K, K'.

Soient :  $a, a'$  (fig. 42) le premier et le second foyer principal, tous les deux réels, de la première face A;  $b, b'$  le premier et le second foyer principal, tous les deux virtuels, de la seconde face A' de la lentille MN.

Nous avons pour la première face A :

$$1^{\text{re}} \text{ distance focale : } \quad Aa = f_0 = \frac{r}{n-1}$$

$$2^{\text{e}} \text{ distance focale : } \quad Aa' = f'_0 = \frac{r \cdot nr}{n-1}$$

Pour la seconde face  $A'$  :

1<sup>re</sup> distance focale :

$$A'b = f_1 = -\frac{nr'}{n-1}$$

2<sup>o</sup> distance focale :

$$A'b' = f_1' = -\frac{r'}{n-1}$$

La parallèle  $LL'$  à l'axe principal perce en  $I, I'$  les faces de la lentille ; en raison de la très-faible amplitude de ces faces,  $AI = A'I'$ . Menons les droites  $Ia', I'b$  dont les prolongements se coupent en  $S$ , et abaissons la perpendiculaire  $SO$  sur l'axe principal ; le pied  $O$  de cette perpendiculaire est le centre optique du ménisque. En effet :

Les deux couples de triangles rectangles semblables  $a'SO, a'IA'$ , et  $bSO, bI'A'$  donnent facilement :

$$\frac{AO}{A'O} = \frac{Aa'}{A'b}$$

Le point  $O$  est donc le centre optique de la lentille.

Nous avons en outre :

$$A'O - AO = e$$

De ces deux équations on tire facilement :

$$AO = \frac{e \times Aa'}{A'b - Aa'}$$

$$A'O = \frac{e \times A'b}{A'b - Aa'}$$



FIG. 42.

59. Considérons SO comme un objet *virtuel* par rapport à la première face A. — Le point S est à l'entrecroisement des prolongements du rayon incident S'V parallèle à l'axe principal et du rayon incident a'I qui émane du second foyer principal a' de la face A; ces rayons incidents sont réfractés, le premier suivant Va qui passe par le premier foyer principal a de cette face, le second suivant IL parallèle à l'axe principal. L'image du point S est donc en D au point d'entrecroisement de ces deux rayons transmis, la perpendiculaire DK est l'image de SO, K est l'image de O et par suite le *premier point nodal* de la lentille.

Mais l'objet SO, supposé dans le milieu de la lentille prolongé, rayonne vers la face A'. — Du point S part un rayon incident SV' parallèle à l'axe principal et un second rayon incident SI' dont le prolongement passe par le premier foyer principal b de la face A'; ces rayons incidents sont réfractés, le premier suivant VR dont le prolongement V'b' passe par le second foyer principal b' de la face A', le second suivant I'L' parallèle à l'axe principal. L'image de S est donc en D' au point d'entrecroisement des prolongements de ces deux rayons transmis, D'K' est l'image de SO, K' est l'image de O et par suite le *second point nodal* de la lentille.

Il est d'ailleurs évident, que les deux images DK, D'K' de SO ainsi obtenues sont droites et de même grandeur. Les plans perpendiculaires à l'axe principal menés par K, K' sont donc les deux *plans principaux* de la lentille, et les points K, K' sont à la fois ses *points nodaux* et ses *points principaux*.

60. Pour déterminer la position du premier point nodal K, nous avons deux couples de triangles rectangles semblables aVA, aDK, et a'SO, a'IA. En tenant compte des relations SO = AV et DK = AI, on obtient :

$$\frac{Aa}{Aa - AK} = \frac{Aa' + AO}{Aa'}$$

Ce qui donne en remplaçant AO par sa valeur  $\frac{e \times Aa'}{A'b - Aa'}$ ,

$$AK = \frac{e \times Aa}{A'b - Aa' + e}$$

Pour déterminer la position du second point nodal  $K'$ , on a les deux groupes de triangles rectangles semblables  $b'V'A'$ ,  $b'D'K'$  et  $bSO$ ,  $bI'A'$ .

En tenant compte des relations  $SO = A'V'$ ,  $D'K' = A'I'$ , on obtient facilement :

$$A'K' = \frac{e \times A'b'}{A'b - Aa' + e}$$

61. *Foyers principaux.* — *Distances focales.* — De la position des points nodaux et des plans principaux, il est facile de déduire la position des foyers principaux et la valeur des distances focales de la lentille.

Soit  $SI$  (fig. 43) un rayon incident parallèle à l'axe principal; la première face  $A$  le réfracte suivant  $Ia'$  qui passe par son second foyer principal  $a'$  et qui perce en  $I'$  la seconde face  $A'$  de la lentille. Le point  $I'$  appartient donc au rayon émergent de la lentille. Mais le rayon incident perce en  $D$  et en  $D'$  le premier et le second plan principal; le point  $D'$  appartient donc à la direction du rayon émergent qui se confond avec la droite  $D'I'R$ .

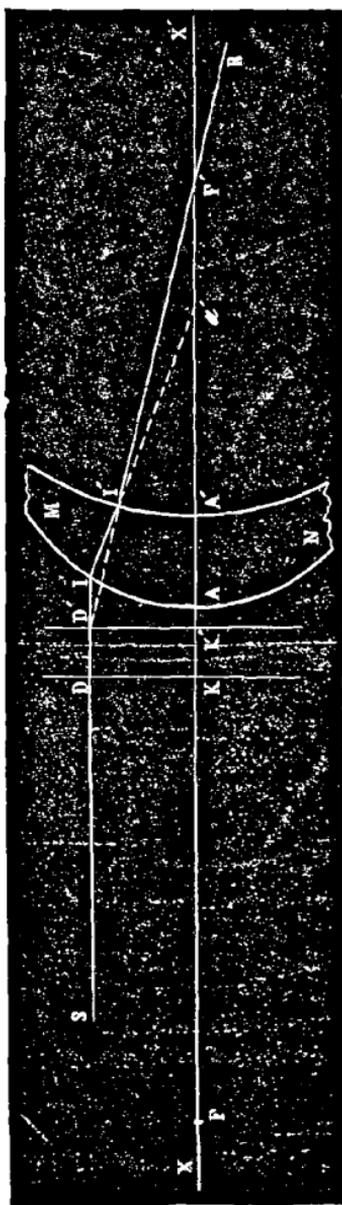


FIG. 43,

Le *second foyer principal* de la lentille est donc en  $F'$ , au point où le rayon émergent  $I'R$  coupe l'axe principal, et  $K'F'$  est la *seconde distance focale*.

En tenant compte de la relation  $D'K' = AI$ , les deux couples de triangles rectangles semblables  $a'IA, a'I'A'$  et  $F'D'K', F'I'A'$  donnent :

$$\frac{K'F'}{K'F' - A'K'} = \frac{Aa'}{Aa' - e}$$

En remplaçant  $A'K'$  par sa valeur  $\frac{e \times A'b'}{A'b' - Aa' + e}$ , cette équation donne pour valeur de la seconde distance focale  $K'F'$  de la lentille :

$$K'F' = \frac{Aa' \times A'b'}{A'b' - Aa' + e}$$

En suivant la même marche, on déterminerait la position du *premier foyer principal*  $F$  et la valeur de la *première distance focale*  $KF$  de la lentille :

$$KF = \frac{Aa \times A'b}{A'b - Aa' + e}$$

Mais il résulte des valeurs des distances focales des faces de la lentille (58) que  $Aa' \times A'b' = Aa \times A'b$ . Donc les distances focales  $KF, K'F'$  du ménisque sont égales, et en désignant par  $\varphi$  leur valeur commune, nous avons :

$$\varphi = KF = K'F' = \frac{Aa \times A'b}{A'b - Aa' + e} = \frac{Aa' \times A'b'}{A'b - Aa' + e}$$

62. *Formules définitives.* — La méthode géométrique que nous avons suivie n'a pu donner que les valeurs absolues des éléments fondamentaux du ménisque. Il résulte des conventions adoptées (44), que  $A'K'$  est *positif*, tandis que le centre optique  $O$  et le premier point nodal  $K$  étant en dehors de la lentille du côté de la convexité, les distances  $AO, AK$  sont *néglatives*; en mettant en évidence les signes de ces longueurs et aussi les signes *néglatifs* des distances focales  $A'b,$

A'*b'* de la seconde face A' de la lentille, nous obtiendrons des formules générales qui indiqueront les valeurs réelles de toutes les longueurs et les positions vraies des points cardinaux sur l'axe principal. On a ainsi :

1° Pour le centre optique O :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} AO = \frac{ef'_0}{f'_0 + f_1} \\ A'O = \frac{ef_1}{f'_0 + f_1} \end{array} \right.$$

2° Pour les deux points nodaux K, K' qui sont en même temps les points principaux :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} AK = \frac{ef_0}{f'_0 + f_1 - e} \\ A'K' = \frac{ef'_1}{f'_0 + f_1 - e} \end{array} \right.$$

3° Pour la valeur commune des deux distances focales :

$$(3) \quad \varphi = KF = K'F' = \frac{f_0 f_1}{f'_0 + f_1 - e}$$

En premier lieu, il est facile de voir que,  $f_1$  et  $f'_1$  étant des quantités négatives, les valeurs absolues des dénominateurs et des numérateurs, n'ont pas changé dans cette transformation. — En second lieu, puisque nous avons pris  $r'$  plus grand que  $r$ , la valeur absolue de la quantité négative  $f_1$  est nécessairement plus grande que celle de la quantité positive  $f'_0$ , par conséquent tous les dénominateurs sont négatifs.

Les quantités  $f_0, f'_0$  étant positives et les quantités  $f_1, f'_1$  négatives, les numérateurs  $ef'_0, ef_0$ , sont positifs et les numérateurs  $ef_1, ef'_1$  négatifs; donc les distances AO, AK sont négatives, les distances A'O, A'K' positives, et les indications des formules sont parfaitement d'accord avec les positions des points O, K, K', par rapport aux faces de la lentille. — Enfin le numérateur  $f_0 f_1$  est nécessairement négatif, et les distances focales KF, K'F' sont positives, ce qui devait être, puisque les foyers principaux F, F' sont réels.

Il suffit donc de donner aux distances focales des deux faces A, A' de la lentille leurs valeurs *réelles* pour que les mêmes formules générales donnent les éléments fondamentaux de la lentille biconvexe et ceux du ménisque convergent.

Ajoutons d'ailleurs que, dans le ménisque convergent :

1° Les plans focaux jouissent des mêmes propriétés que ceux de la lentille biconvexe.

2° Les foyers conjugués et les rapports de position et de grandeur d'un objet et de son image sont déterminés par les mêmes formules que dans la lentille biconvexe.

63. *Remarque.* — Pour que les foyers du ménisque soient *réels*, il suffit et il faut que la valeur  $\frac{f_0 f_1}{f_0 + f_1 - e}$  de ses distances focales soit *positive*. Or, le numérateur étant essentiellement *négatif*, le dénominateur doit l'être aussi ; ce qui donne la condition :

$$f'_0 + f_1 - e < 0$$

Ou, en remplaçant  $f'_0$  et  $f_1$  par leurs valeurs absolues :

$$\frac{nr}{n-1} - \frac{nr'}{n-1} - e < 0$$

D'où l'on tire :

$$r' > r - \frac{n-1}{n} e$$

Telle est la condition nécessaire et suffisante à laquelle doit satisfaire les rayons de courbure  $r$ ,  $r'$  de la première et de la seconde face, et l'épaisseur  $e$  de la lentille pour que les foyers soient *réels*.

Pour que le ménisque soit *convergent*, il n'est donc pas nécessaire que le rayon de courbure  $r'$  de la face concave soit *plus grand* que le rayon de courbure  $r$  de la face convexe, il suffit que ce rayon  $r'$  soit *plus grand* que  $r - \frac{n-1}{n} e$ .

## § 4. — Lentille biconcave.

64. Soient : MN (fig. 44) une lentille biconcave,  $C_1$ ,  $C'$  les centres de courbure,  $CA = r$ ,  $C'A' = r'$  les rayons de courbure de ses deux faces.

Les foyers principaux de la première face A sont *virtuels* et ses distances focales *negatives* sont (33), formules (1) et (2) :

$$1^{\text{re}} \text{ distance focale : } f_0 = -\frac{r}{n-1}$$

$$2^{\text{e}} \text{ distance focale : } f'_0 = -\frac{nr}{n-1}$$

Les foyers principaux de la seconde face A' sont *virtuels* et ses distances focales *negatives* sont (38), formules (1) et (2) :

$$1^{\text{re}} \text{ distance focale : } f_1 = -\frac{nr'}{n-1}$$

$$2^{\text{e}} \text{ distance focale : } f'_1 = -\frac{r'}{n-1}$$

Ce qui donne :

$$(d) \quad \frac{f'_0}{f_1} = \frac{nr}{n-1} : \frac{nr'}{n-1} = \frac{r}{r'}$$

65. *Centre optique.* — *Points nodaux.* — *Points et plans principaux.* — Menons (fig. 44) les deux rayons de courbure parallèles CI, C'I' et joignons II'. Le point O, où la droite II' coupe l'axe principal, est le *centre optique* de la lentille. Car, d'une part, les plans tangents en I et I' sont parallèles, et le rayon incident SI, qui pénètre suivant II', émerge nécessairement suivant I'H parallèle à SI. D'autre part, le point O est déterminé de position indépendamment des angles que font les rayons de courbure CI, C'I' avec l'axe principal.

En effet nous avons :

$$AO + A'O = AA' = e,$$

et des triangles semblables CIO, C'I'O on tire facilement :

$$\frac{AO}{A'O} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{r}{r'}$$

Ces deux équations déterminent la position du centre optique O sur l'axe principal.

Le point K où le prolongement du rayon incident SI coupe l'axe principal et le centre optique O sont *foyers conjugués*

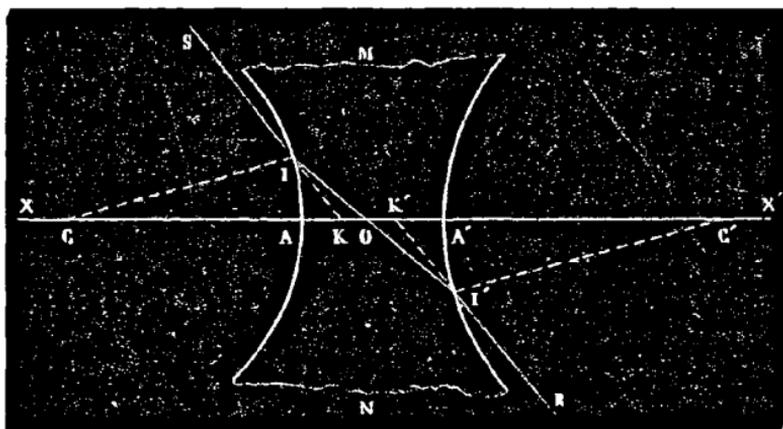


FIG. 44.

par rapport à la première face A ; le point K' où le prolongement du rayon émergent I'R coupe l'axe principal et le centre optique O sont aussi *foyers conjugués* par rapport à la seconde face A'. Donc la position des points K, K' ne dépend que de celle du centre optique O ; à tout rayon incident dont le prolongement passe par K, correspond un rayon émergent parallèle dont le prolongement passe par K', et les points K, K' sont les *points nodaux* de la lentille.

Le *premier point nodal* K est l'image du centre optique O regardé à travers la première face A ; le *second point nodal* K' est l'image du centre optique O regardé à travers la seconde face A' de la lentille.

Nous avons trouvé  $\frac{Ao}{A'O} = \frac{r}{r'}$ , mais, d'autre part, nous avons (64), formule (d)  $\frac{f'_0}{f_1} = \frac{r}{r'}$  ; donc les distances du centre opti-

que O aux sommets A, A' des deux faces de la lentille satisfont à la relation suivante :

$$\frac{AO}{A'O} = \frac{f'_0}{f_1}$$

66. Cette dernière relation permet de déterminer géométriquement la position du centre optique O sur l'axe principal, et en même temps celle des deux points nodaux et des deux points principaux de la lentille.

Soient :  $a, a'$  (fig. 45) le premier et le second foyer principal virtuels de la première face A de la lentille MN;  $b, b'$  le premier et le second foyer principal virtuels de sa seconde face A'.

Nous avons, pour la première face A :

$$1^{\text{re}} \text{ distance focale : } Aa = f_0 = -\frac{r}{n-1}$$

$$2^{\text{e}} \text{ distance focale : } Aa' = f'_0 = -\frac{nr}{n-1}$$

Pour la seconde face A' :

$$1^{\text{re}} \text{ distance focale : } A'b = f_1 = -\frac{nr'}{n-1}$$

$$2^{\text{e}} \text{ distance focale : } A'b' = f'_1 = -\frac{r'}{n-1}$$

La parallèle LL' à l'axe principal perce en I, I' les faces de la lentille; en raison de la très-faible amplitude de ces deux faces, AI = A'I'. Menons les droites Ia', I'b dont les prolongements se coupent en S et abaissons la perpendiculaire SO sur l'axe principal; le pied O de cette perpendiculaire est le centre optique. En effet :

D'une part, les triangles a'SO, a'IA sont semblables; d'autre part, les triangles bSO, b'A' sont aussi semblables. Ces deux couples de triangles semblables, en tenant compte de la relation AI = A'I', donnent facilement :

$$\frac{AO}{A'O} = \frac{Aa'}{A'b}$$

Donc le point O est le centre optique de la lentille.

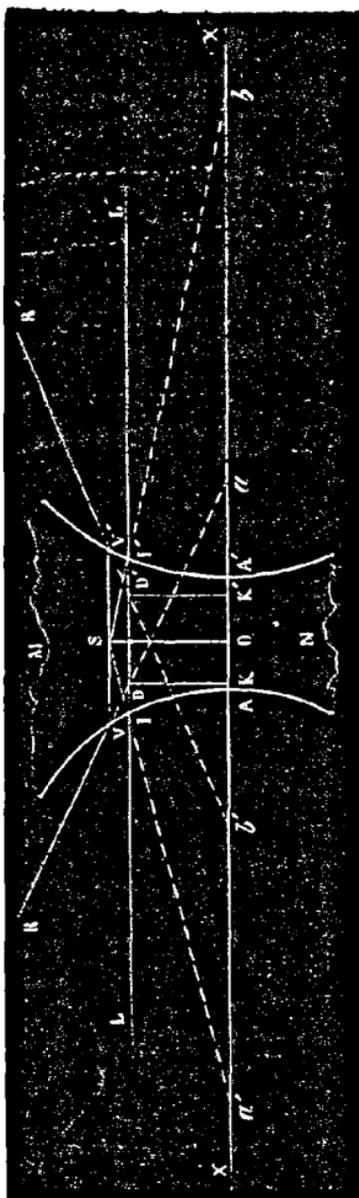


Fig. 45.

Mais, en faisant  $AA' = e$ , nous avons en outre :

$$AO + A'O = e$$

De ces deux dernières équations on tire :

$$AO = \frac{e \times Aa'}{Aa' + A'b}$$

$$A'O = \frac{e \times A'b}{Aa' + A'b}$$

67. Considérons  $SO$  comme un objet lumineux qui rayonne à la fois vers les deux faces de la lentille.

La première face  $A$  reçoit du point  $S$  un rayon incident  $SI$  dont le prolongement passe par le second foyer principal  $a'$ , et un rayon incident  $SV$  parallèle à l'axe principal. Le premier émerge suivant  $II$  parallèle à l'axe principal, le second suivant  $VR$  dont le prolongement passe par le premier foyer principal  $a$ . Le point d'entrecroisement  $D$  de ces deux rayons émergents est l'image de  $S$  et la perpendiculaire  $DK$  est l'image de  $SO$ , donc  $K$  est l'image de  $O$  et le premier point nodal de la lentille.

La seconde face  $A'$  reçoit de  $S$  un rayon incident  $SI'$  dont le prolongement passe par le premier foyer principal  $b$ , et un rayon incident  $SV'$  parallèle à

l'axe principal. Le premier émerge suivant  $I'L'$  parallèle à l'axe principal, le second suivant  $V'R'$  dont le prolongement passe par le second foyer principal  $b'$ . Le point d'entrecroisement  $D'$  des prolongements de ces deux rayons émergents est l'image de  $S$  et la perpendiculaire  $D'K'$  est l'image de  $SO$ ; donc  $K'$  est l'image de  $O$  et le *second point nodal* de la lentille.

Mais les deux images  $DK$ ,  $D'K'$  de  $SO$  ainsi obtenues sont droites et de même grandeur. Les plans perpendiculaires à l'axe principal menés par  $K$ ,  $K'$  sont donc les *deux plans principaux* de la lentille, et les points  $K$ ,  $K'$  sont à la fois ses *points nodaux* et ses *points principaux*.

68. Pour déterminer la position du premier point nodal  $K$  sur l'axe principal, nous avons : d'une part, les deux triangles semblables  $a'SO$ ,  $a'IA$  et, d'autre part, les deux triangles semblables  $aVA$ ,  $aDK$ . En tenant compte des relations  $AV = SO$ ,  $AI = DK$  et  $AO = \frac{e \times Aa'}{Aa' + A'b}$ , ces deux couples de triangles semblables donnent sans difficulté :

$$AK = \frac{e \times Aa}{Aa' + A'b + e}$$

Pour déterminer la position du second point nodal  $K'$  sur l'axe principal, nous avons : d'une part, les deux triangles semblables  $b'SO$ ,  $b'A'A'$  et, d'autre part, les deux triangles semblables  $b'V'A'$ ,  $b'D'K'$ . En tenant compte des relations  $A'V' = SO$ ,  $A'I' = D'K'$  et  $A'O = \frac{e \times A'b}{Aa' + A'b}$ , ces deux couples de triangles semblables donnent :

$$A'K' = \frac{e \times A'b'}{Aa' + A'b + e}$$

69. *Foyers principaux. — Distances focales.* — De la position des points nodaux et des plans principaux, il est facile de déduire la position des foyers principaux et la valeur des distances focales de la lentille.

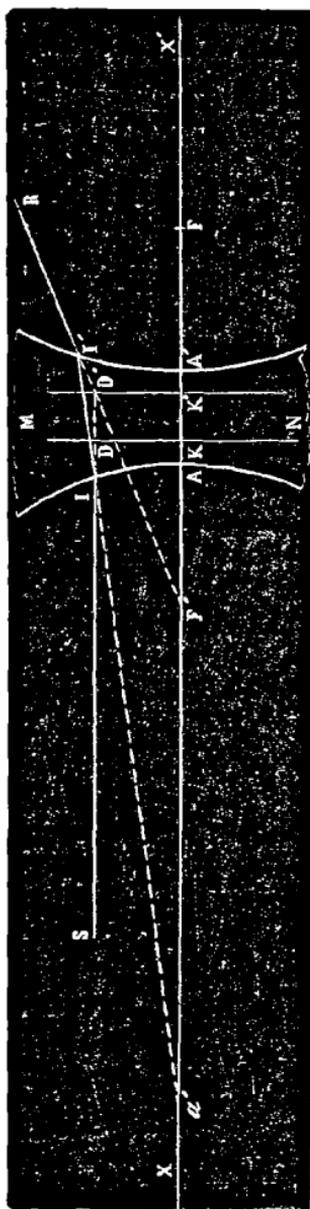


FIG. 46.

Soit SI (fig. 46) un rayon incident parallèle à l'axe principal; la première face A le réfracte suivant  $I'I'$  dont le prolongement passe par son second foyer principal  $a'$ . Le point  $I'$ , où ce rayon réfracté rencontre la seconde face  $A'$ , appartient au rayon émergent de la lentille; mais, d'autre part, le point  $D'$  où le rayon incident SI prolongé perce le second plan principal, appartient aussi à la direction de ce rayon émergent  $I'R$  dont la position est déterminée par ces deux points  $I'$ ,  $D'$  et dont le prolongement coupe l'axe principal en  $F'$ .

$F'$  est donc le *second foyer principal* de la lentille, et ce foyer est *virtuel*. La seconde distance focale est *négative* et égale en grandeur absolue à  $K'F'$ .

Les triangles  $F'I'A'$ ,  $F'D'K'$  sont semblables; d'autre part, les triangles  $a'I'A'$ ,  $a'IA$  sont semblables. En tenant compte des relations  $A'K' = \frac{e \times A'b'}{Aa' + A'b + e}$ ,  $D'K' = AI$ , et  $AA' = e$ , ces deux couples de triangles semblables donnent, pour la valeur de la *seconde distance focale*  $K'F'$  de la lentille :

$$K'F' = \frac{Aa' \times A'b'}{Aa' + A'b + e}$$

En suivant la même marche, on déterminerait la position du premier foyer principal virtuel F de la lentille, et l'on trouverait pour valeur de sa première distance focale négative KF :

$$KF = \frac{Aa \times A'b}{Aa' + A'b + e}$$

Mais il résulte des valeurs des distances focales des faces de la lentille (66) que  $Aa \times A'b = Aa' \times A'b'$ . Donc les distances focales KF, K'F' de la lentille sont égales et, en désignant par la lettre  $\varphi$  leur valeur commune, nous avons :

$$\varphi = KF = K'F' = \frac{Aa \times A'b}{Aa' + A'b + e} = \frac{Aa' \times A'b'}{Aa' + A'b + e}$$

70. *Formules définitives.* Les expressions précédentes déterminées par la méthode géométrique fournissent les valeurs absolues des longueurs AO, A'O, AK, A'K', KF, K'F', mais n'indiquent pas les positions réelles des points O, K, K', F, F' sur l'axe principal. Pour obtenir des formules qui fournissent les valeurs réelles des éléments fondamentaux de la lentille, il suffit de se rappeler que les distances focales de ses faces sont toutes négatives et de faire dans les expressions précédentes,  $Aa = -f_0$ ,  $Aa' = -f'_0$ ,  $A'b = -f_1$ ,  $A'b' = -f'_1$ , ce qui donne :

1° Pour la position du centre optique :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} AO = \frac{ef'_0}{f'_0 + f_1} \\ A'O = \frac{ef_1}{f'_0 + f_1} \end{array} \right.$$

2° Pour la position des points nodaux :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} AK = \frac{ef_0}{f'_0 + f_1 - e} \\ A'K' = \frac{ef'_1}{f'_0 + f_1 - e} \end{array} \right.$$

3° Pour la valeur commune des deux distances focales :

$$(3) \quad \varphi = KF = K'F' = \frac{f_0 f'_1}{f'_0 + f_1 - e}$$

Il est facile de voir que ces formules, dans lesquelles les quantités  $f_0, f'_0, f_1, f'_1$  sont toutes *néglatives*, donnent les véritables positions des points O, K, K', F, F' sur l'axe principal. En effet :

Le centre optique O et les points nodaux K, K' étant dans l'intérieur de la lentille, les distances AO, A'O, AK, A'K' doivent, d'après les conventions adoptées (44), être *positives*. Or, il est facile de voir que dans les formules (1) et (2) les numérateurs et les dénominateurs sont *néglatifs*, et par suite les expressions sont *positives*.

Les foyers principaux F, F' sont *virtuels*, les distances focales de la lentille sont donc *néglatives*. Or, dans la formule (3), le numérateur est *positif*, le dénominateur est *néglatif*, par conséquent la valeur de  $\varphi$  est *néglative*.

Pour passer des formules de la lentille biconvexe à celles de la lentille biconcave, il suffit donc de changer les signes des distances focales des deux surfaces réfringentes.

71. *Plans focaux.* — Les plans focaux de la lentille sont les deux plans perpendiculaires à l'axe principal menés par les foyers principaux F, F'; ils jouissent des propriétés suivantes :

1° Soit H (fig. 47) un point lumineux *virtuel* situé sur le premier plan focal F. Parmi les rayons incidents qui prolongés concourent en H, le rayon SH parallèle à l'axe principal perce le second plan principal en D' et émerge suivant D'R dont le prolongement passe par le second foyer principal F'; le rayon incident S'H qui passe par le premier point nodal K, émerge suivant K'R' parallèle à S'H. Or HF = D'K' comme parallèles comprises entre parallèles, et les deux distances focales KF, K'F' sont égales; donc les triangles rectangles D'F'K', HKF sont égaux et les droites F'R, S'H sont parallèles. Les deux rayons émergents D'R, K'R' sont donc parallèles, et le foyer du point lumineux virtuel H est à l'infini. En d'autres termes :

Quand tous les rayons incidents prolongés concourent en un point H du premier plan focal, les rayons émergents correspondants sont parallèles entre eux et à la

ligne de direction KH menée par le premier point nodal K et le point de concours H des prolongements des rayons inci-

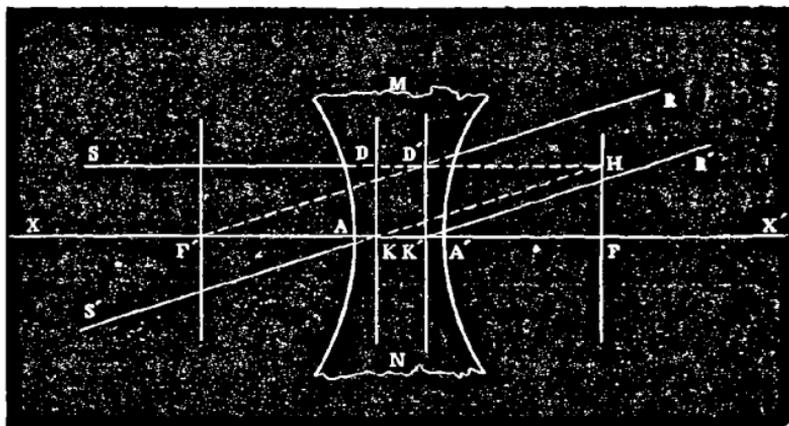


FIG. 47.

dents. — Dans le cas particulier où le point de concours H des prolongements des rayons incidents est au premier foyer principal F, les rayons émergents sont parallèles à l'axe principal.

2° Soit SI (fig. 48) un rayon incident quelconque dont le prolongement perce le premier plan principal en D et le premier plan focal en H. Menons DD' parallèle à l'axe principal, le point D' appartient nécessairement à la direction du rayon émergent qui, de plus, est parallèle à la ligne de direction KH. Le rayon émergent I'R est donc déterminé; son prolongement perce en B le second plan focal F'. — La ligne K'B, qui joint ce point B au second point nodal K', est parallèle au rayon incident SI. En effet, menons K'H' parallèle au rayon émergent BR et KG parallèle au rayon incident SI.  $BH' = K'D'$  comme parallèles comprises entre parallèles; par la même raison  $GH = KD$ ; donc  $BH' = GH$ . Mais  $KF = K'F'$  et par construction K'H' est parallèle à KH, donc les deux triangles rectangles KHF, K'H'F' sont égaux et  $HF = H'F'$ . Il résulte de cette dernière égalité que  $BF' = GF$ . Dès lors les triangles rectangles K'BF', KGF sont

égaux ; d'où il suit que  $K'B$  est parallèle à  $KG$  et, par suite, au rayon incident  $SI$ . Cette construction est indépendante de la distance du point d'incidence  $I$  à l'axe principal, tous les rayons incidents parallèles à  $SI$  émergent donc de la lentille suivant des droites dont les prolongements se croisent au point  $B$ .

Donc le foyer de tout faisceau de rayons incidents parallèles entre eux est sur le second plan focal au point  $B$ , où ce plan est percé par la ligne de direction  $K'B$ , parallèle aux rayons incidents, menée par le second point nodal  $K'$ . — Dans le cas

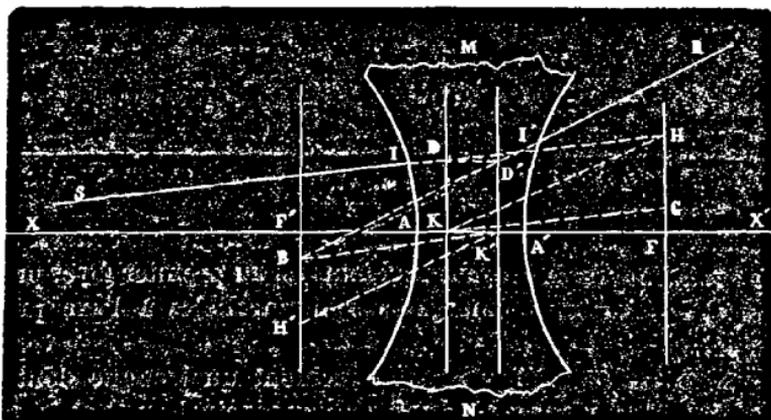


FIG. 48.

particulier où les rayons incidents sont parallèles à l'axe principal, leur foyer *virtuel* est au second foyer principal  $F'$ .

Il résulte de ces deux propriétés des plans focaux que les directions d'un rayon incident quelconque  $SI$  et du rayon émergent correspondant  $I'R$  satisfont aux deux conditions suivantes : — le rayon émergent est parallèle à la ligne de direction  $HK$  menée par le premier point nodal  $K$  et le point  $H$  où le rayon incident prolongé perce le premier plan focal ; — ce rayon émergent prolongé passe par le point  $B$  où le second plan focal est percé par la ligne de direction  $K'B$  menée par le second point nodal  $K'$  parallèlement au rayon incident  $SI$ . — Étant

donné un rayon incident quelconque, il est donc toujours facile de construire géométriquement le rayon émergent correspondant.

72. *Foyer d'un point lumineux situé sur l'axe principal.* — Soient : P (fig. 49) un point lumineux sur l'axe principal et PI un rayon incident quelconque dont le prolongement perce en D le premier plan principal K et en H le premier plan focal F. Ce rayon émerge suivant la ligne D'R parallèle à HK ; son prolongement coupe l'axe principal en P' et perce en B le second

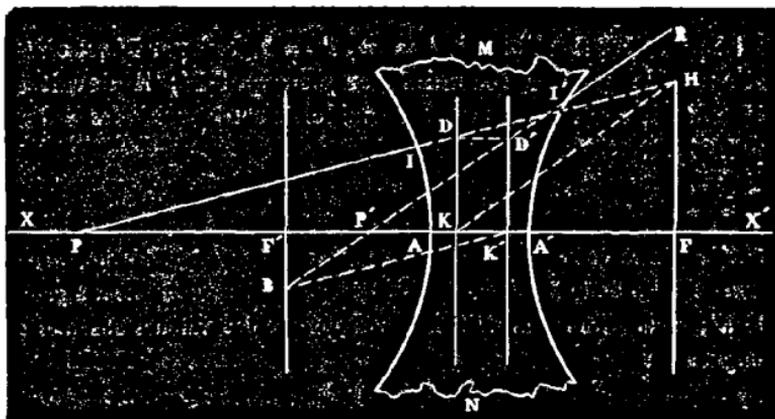


FIG. 49.

plan focal F'. Nous savons que BK' est nécessairement parallèle au rayon incident PI.

Nous avons deux couples de triangles rectangles qui sont semblables par construction PHF, K'BF' et KHF, P'BF', et qui donnent :

$$PF \times P'F' = KF \times K'F' = \varphi^2$$

Le point P', ainsi déterminé indépendamment de l'inclinaison du rayon incident sur l'axe, est le foyer *virtuel* du point lumineux P. Si nous continuons à désigner par les lettres  $l, l'$  les longueurs PF, P'F', et si nous conservons les conventions

de signes adoptées (48), nous aurons pour formule générale des foyers conjugués (\*) P, P' :

$$(4) \quad l' = \varphi^2$$

Le second membre  $\varphi^2$  de cette équation étant une quantité positive, le signe de  $l'$  ne dépend que de celui de  $l$ . En appliquant à cette formule le mode de discussion déjà adopté (48), on en déduit facilement les conclusions suivantes :

A — le point lumineux P, réel ou virtuel, est à gauche du premier foyer principal F;  $l$  est positif. — Dans ce cas  $l'$  est positif et le foyer P', virtuel ou réel, est à droite du second foyer principal F'.

Le point P est à l'infini,  $l = \infty$ ,  $l' = 0$ , le foyer P' est virtuel et coïncide avec le second foyer principal F'; il devait en être ainsi, car tous les rayons incidents sont parallèles à l'axe principal.

(\*) Comptons les longueurs à partir des points K, K', faisons  $PK = p$ ,  $P'K' = p'$ , et convenons de prendre  $p$  positivement à gauche, négativement à droite de K,  $p'$  positivement à droite et négativement à gauche de K'; nous aurons, en ne tenant compte que des valeurs absolues des longueurs :

$$\begin{aligned} l &= p + \varphi \\ l' &= \varphi - p' \end{aligned}$$

D'où, en substituant dans l'équation (4) :

$$\begin{aligned} (p + \varphi)(\varphi - p') &= \varphi^2 \\ p\varphi - p'\varphi &= pp' \end{aligned}$$

Or,  $p'$  et  $\varphi$  sont des quantités négatives; si nous mettons leurs signes en évidence, et si nous divisons tous les termes de l'équation par le produit essentiellement positif  $pp'\varphi$ , nous aurons :

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{\varphi}$$

Telle est l'équation classique des foyers conjugués dans le cas de la lentille biconcave; le second terme est négatif, car  $\varphi$  est une quantité négative.

A mesure que le point lumineux  $P$  se rapproche du premier point nodal  $K$ ,  $l$  diminue,  $l'$  augmente et le foyer  $P'$  *virtuel* s'éloigne du second foyer principal  $F'$  et se rapproche du second point nodal  $K'$ .

Si le point lumineux *virtuel*  $P$  est en  $K$ ,  $l = \varphi$ ,  $l' = \varphi$ , le foyer  $P'$ , toujours *virtuel*, est au second point nodal  $K'$ .

Tant que le point lumineux *virtuel*  $P$  est compris entre le premier point nodal  $K$  et le premier foyer principal  $F$ ,  $l$  est plus petit que  $\varphi$ ,  $l'$  est plus grand que  $\varphi$  et le foyer  $P'$  est à droite du second point nodal  $K'$ .—Pour une certaine valeur de  $l$ ,  $l' = F'A'$ , le foyer  $P'$  est au sommet  $A'$  de la seconde face de la lentille; pour les valeurs plus petites de  $l$ ,  $l'$  est plus grand que  $F'A'$ , le foyer  $P'$  devient *réel* et s'éloigne vers l'*infini*, à droite de  $A'$ , à mesure que le point lumineux *virtuel* se rapproche du premier foyer principal  $F$ .

Enfin, quand le point lumineux *virtuel*  $P$  est au premier foyer principal  $F$ ,  $l = 0$ ,  $l' = \infty$ , le foyer  $P'$  est à l'*infini*, les rayons émergents sont tous parallèles à l'axe principal.

B. Le point lumineux  $P$  est *virtuel* et à droite du premier foyer principal  $F$ ;  $l$  est négatif.—Dans ce cas,  $l'$  est aussi négatif, et le foyer  $P'$  *virtuel* est à gauche du second foyer principal  $F'$ .

Les valeurs absolues de  $l$  et de  $l'$  variant en sens contraires, le foyer *virtuel*  $P'$  se rapproche du second foyer principal ou s'en éloigne, à mesure que le point lumineux *virtuel*  $P$  s'éloigne ou se rapproche du premier foyer principal  $F$ . — Dans le cas particulier où  $l = -\varphi$ , on a  $l' = -\varphi$ ; le point lumineux *virtuel*  $P$  étant à une distance du premier point nodal  $K$  double de la distance focale  $\varphi$ , son foyer *virtuel*  $P'$  est aussi à une distance du second point nodal  $K'$  double de la distance focale.

Ainsi, dans tous les cas, les foyers conjugués  $P$ ,  $P'$  se déplacent dans le même sens le long de l'axe principal de la lentille.

73. Foyer d'un point lumineux situé hors de l'axe principal.

— Soit S (fig. 50) un point lumineux quelconque situé hors de l'axe principal. Les trois rayons incidents, SD parallèle à l'axe principal, SB dont le prolongement passe par le premier foyer principal F, SK qui passe par le premier point nodal K, émergent suivant D'R dont le prolongement passe par le second foyer principal F', B'R' parallèle à l'axe principal, K'G parallèle à SK. Le foyer *virtuel* du point lumineux S est donc en S', au point d'intersection des prolongements de ces trois rayons émergents.—Des points S, S' abaissons les perpendiculaires SP, S'P' sur l'axe principal.

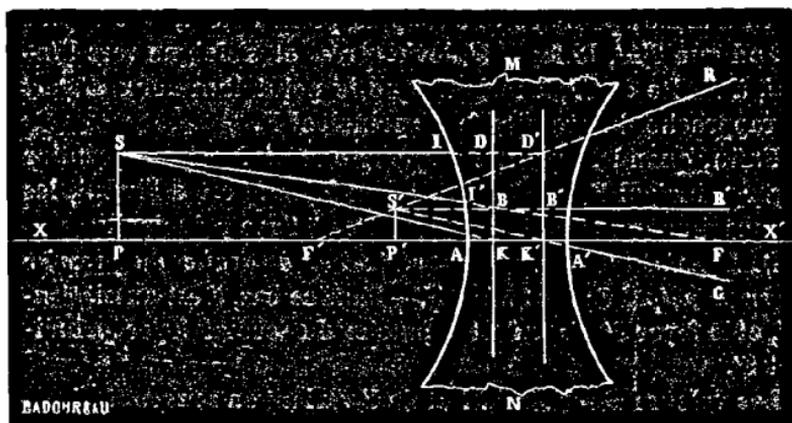


FIG. 50.

En tenant compte des relations  $SP = D'K'$ ,  $S'P' = BK$ ,  $KF = K'F' = \varphi$ , les deux couples de triangles rectangles semblables FSP, FBK et F'D'K', F'S'P' donnent :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} PF \times P'F' = \varphi^2 \\ \frac{S'P'}{SP} = \frac{\varphi}{PF} \end{array} \right.$$

Étant donné le point lumineux S, ces deux formules déterminent la position de son foyer S'. — La première montre que les pieds P, P' des perpendiculaires abaissées du point lumi-

neux S et de son foyer S' sur l'axe principal satisfont à l'équation générale des foyers conjugués.

Dans la figure 50, le point lumineux S et son foyer *virtuel* S' sont du même côté de l'axe principal. Ces deux points étant assujettis à se trouver sur les lignes de direction parallèles SK, S'K', leurs positions relatives restent évidemment les mêmes dans tous les cas où les points nodaux K, K' sont situés en dehors de l'intervalle qui sépare P de P'.

74. *Rapports de position et de grandeur d'un objet lumineux et de son image.* — Les formules (5) montrent que si des points lumineux sont situés sur un plan perpendiculaire à l'axe principal mené par SP (fig. 51), leurs foyers se trouvent sur un plan perpendiculaire à l'axe principal mené par S'P'; il est évident, d'ailleurs, que ces points lumineux et leurs foyers sont semblablement distribués sur les deux plans.

Si SP est un objet lumineux ou éclairé, S'P' est donc nécessairement son image semblable. La première des formules (5) détermine leurs positions relatives; la seconde est l'expression des rapports de leurs dimensions linéaires.

La discussion de ces deux formules conduit sans peine aux conclusions suivantes :

A. — L'objet SP, *réel ou virtuel*, est à gauche du premier plan focal F; PF est positif. — Dans ce cas, P'F' est aussi positif, et l'image S'P', *virtuelle ou réelle*, est à droite du second plan focal F'.

Quand l'objet SP est infiniment éloigné, PF est infiniment grand, P'F' est infiniment petit; l'image S'P' est sur le second plan focal F', infiniment petite par rapport à l'objet.

Tant que l'objet, *réel ou virtuel*, SP est à gauche du premier plan principal K, PF est plus grand que  $\varphi$ , P'F' est plus petit que  $\varphi$ , l'image *virtuelle* S'P' est entre le second plan focal F' et le second plan principal K', et plus petite que l'objet SP.

Quand l'objet *virtuel* SP est sur le premier plan principal K, son image S'P' est de même grandeur, *virtuelle* et sur le second plan principal K'.

Pour une certaine position de l'objet *virtuel*  $SP$  à droite du premier plan principal  $K$ , son image  $S'P'$  est sur la seconde face de la lentille et plus grande que l'objet. — A partir de cette position, à mesure que l'objet *virtuel*  $SP$  s'éloigne du premier plan principal  $K$  et se rapproche du premier plan focal  $F$ , son image *réelle*  $S'P'$  grandit, s'éloigne à droite de la lentille et marche vers l'infini.

Enfin quand l'objet *virtuel*  $SP$  est sur le premier plan focal

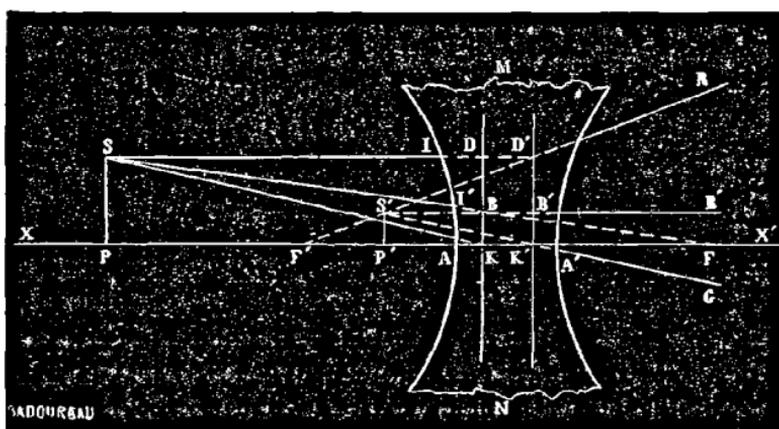


FIG. 51.

$F$ , son image *réelle*  $S'P'$  est infiniment éloignée et infiniment grande par rapport à l'objet.

Dans tous ces cas, d'ailleurs, l'image  $S'P'$ , *virtuelle* ou *réelle*, est droite par rapport à l'objet  $SP$  *réel* ou *virtuel*.

B. — L'objet *virtuel*  $SP$  est à droite du premier plan focal  $F$ ;  $PF$  est *négligé*. — Dans ce cas  $P'F'$  est aussi *négligé*, et l'image  $S'P'$  est *virtuelle* et à gauche du second plan focal  $F'$ .

Les valeurs absolues de  $PF$  et de  $P'F'$  variant en sens contraires, l'image *virtuelle*  $S'P'$  se rapproche du second plan focal  $F'$  on s'en éloigne à mesure que l'objet *virtuel* s'éloigne ou se rapproche du premier plan focal  $F$ . — Dans le cas particulier où on a  $PF = -\varphi$ ,  $P'F' = -\varphi$ ; l'objet *virtuel*  $SP$  étant à une distance

du premier plan principal double de la distance focale  $\varphi$ , son image virtuelle  $S'P'$  est de même grandeur et à une distance du second plan principal double de la distance focale  $\varphi$ .—L'image est plus grande ou plus petite que l'objet suivant que la grandeur de  $PF'$  est plus petite ou plus grande que la distance focale  $\varphi$ .

Dans tous ces cas, d'ailleurs, l'image virtuelle  $S'P'$  est renversée par rapport à l'objet virtuel  $SP$ .

Ainsi donc, en résumé, dans la lentille biconcave :

1<sup>o</sup> Comme les foyers conjugués, un objet et son image se déplacent toujours dans le même sens le long de l'axe principal ;

2<sup>o</sup> Un objet  $SP$  et son image  $S'P'$  étant tout entiers compris entre l'axe principal et les lignes de direction  $SK$ ,  $K'S'$  parallèles entre elles, un œil qui regarde successivement l'objet du premier point nodal  $K$  et son image du second point nodal  $K'$  les voit nécessairement sous le même angle.

### § 5. — Lentille plan-concave.

75. Dans le cas de la lentille plan-concave  $MN$  (fig. 52), les foyers principaux de la première face  $A$  sont virtuels, et ses distances focales négatives ont pour valeur (33), formules (1) et (2) :

$$1^{\text{re}} \text{ distance focale : } f_0 = -\frac{r}{n-1}$$

$$2^{\text{e}} \text{ distance focale : } f'_0 = -\frac{nr}{n-1}$$

En reprenant les constructions et les raisonnements employés pour la lentille plan-convexe, on trouve facilement que dans la lentille plan-concave :

1<sup>o</sup> Le sommet  $A$  de la première face est à la fois le centre optique, le premier point nodal et le premier point principal de la lentille ;

2<sup>o</sup> Le point  $K'$  situé dans l'intérieur de la lentille à une dis-

tance de la seconde face  $A'K' = \frac{e}{n}$  est à la fois le *second point nodal* et le *second point principal* de l'appareil ;

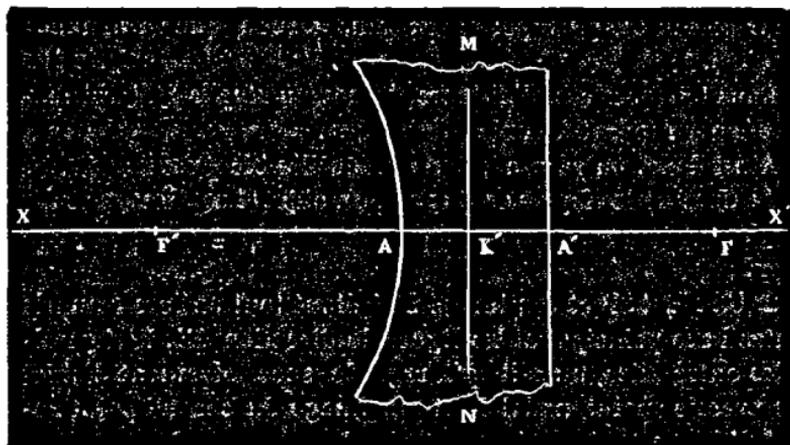


Fig. 52.

3° Le *premier plan principal* est un plan perpendiculaire à l'axe principal mené par le point A, et se confond sensiblement avec la face concave A ; le *second plan principal* et le plan perpendiculaire à l'axe principal mené par le second point nodal K' ;

4° Le premier foyer principal F et le second foyer principal F' de la lentille sont *virtuels* ;

5° Les distances focales AF, K'F' sont *néglatives*, égales et ont pour valeur commune :

$$\varphi = AF = K'F' = f_0$$

Pour déduire ces éléments fondamentaux de la lentille plan-concave des équations qui déterminent ceux de la lentille biconvexe, il suffit de remarquer que dans ces équations les valeurs de  $f_1, f'_1$  sont *infinies* puisque le rayon de courbure  $r'$  de la seconde face A' de la lentille est *infini*. Il faut, en outre, affecter du signe *néglatif* les distances focales  $f_0, f'_0$  de la première face A.

Ajoutons d'ailleurs que dans la lentille plan-concave :

1° Les plans focaux jouissent des mêmes propriétés que ceux de la lentille biconcave.

2° Les foyers conjugués ainsi que les rapports de position et de grandeur d'un objet et de son image sont déterminés par les mêmes formules que dans la lentille biconcave.

### § 6. — *Ménisque divergent.*

76. Soient : MN (fig. 53), un ménisque divergent, A le sommet de la première face convexe, A' le sommet de la seconde face concave, et C, C' les centres de courbure des deux faces. — Le centre de courbure C de la première face est plus éloigné que le centre de courbure C' de la seconde, par suite le rayon de courbure CA = r de la première face est plus grand que le rayon de courbure C'A' = r' de la seconde face.

Les foyers principaux de la première face A sont réels, ses distances focales sont positives et ont pour valeur (25), formules (1) et (2).

$$1^{\text{re}} \text{ distance focale : } f_0 = \frac{r}{n-1}$$

$$2^{\text{e}} \text{ distance focale : } f'_0 = \frac{nr}{n-1}$$

Les foyers principaux de la seconde face A' sont virtuels, ses distances focales sont négatives et ont pour valeur (38), formules (1) et (2) :

$$1^{\text{re}} \text{ distance focale : } f_1 = -\frac{nr'}{n-1}$$

$$2^{\text{e}} \text{ distance focale : } f'_1 = -\frac{r'}{n-1}$$

En ne tenant compte que des valeurs absolues des distances focales, nous avons donc :

$$(d) \quad \frac{f'_0}{f_1} = \frac{nr}{n-1} : \frac{nr'}{n-1} = \frac{r}{r'}$$

77. *Centre optique. — Points nodaux. — Points et plans prin*

*cipaux.* — Par les centres  $C, C'$  des deux faces (fig. 53), menons deux rayons de courbures parallèles  $CI, C'I'$  et la droite  $II'$  qui, prolongée, coupe l'axe principal en  $O$ . — Ce point  $O$  est le centre optique de la lentille. — Car d'une part le rayon incident  $SI$  qui pénètre suivant  $II'$  émerge nécessairement suivant  $I'R$  parallèle à  $SI$ ; d'autre part la position du point  $O$  est déterminée par les relations :

$$AO - A'O = e$$

$$\frac{AO}{A'O} = \frac{r}{r'}$$

Le point  $K$  où le rayon incident  $SI$  prolongé coupe l'axe

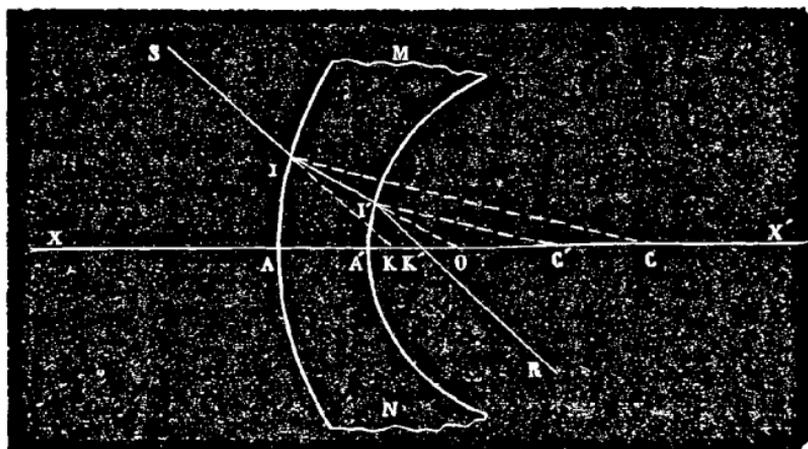


FIG. 53.

principal est évidemment l'image du point  $O$  regardé à travers la première face  $A$ . — Le point  $K'$  où le rayon émergent  $I'R$  coupe l'axe principal est l'image formée par la seconde face  $A'$  du point  $O$  considéré comme point lumineux *virtuel* par rapport à cette face. — La position des points  $K, K'$  ne dépend donc que de celle du point  $O$ ; à tout rayon incident dont le prolongement passe par  $K$  correspond un rayon émergent parallèle qui passe par  $K'$ ; ces points  $K, K'$  sont donc le *premier* et le *second point nodal* de la lentille.

Il résulte évidemment de l'équation (d) (76) que les distances du centre optique O aux sommets A, A' des deux faces du ménisque satisfont à la relation suivante :

$$\frac{AO}{A'O} = \frac{f'_0}{f_1}$$

78. Cette nouvelle relation donne le moyen de déterminer géométriquement la position du centre optique O en même temps que celle des deux points nodaux K, K' de la lentille.

Soient :  $a, a'$  (fig. 54) le premier et le second foyer principal, tous les deux réels, de la première face A de la lentille ;  $b, b'$  le premier et le second foyer principal, tous les deux virtuels, de sa seconde face A'.

Nous avons pour la première face A :

$$1^{\text{re}} \text{ distance focale : } Aa = f_a = \frac{r}{n-1}$$

$$2^{\text{e}} \text{ distance focale : } Aa' = f'_a = \frac{nr}{n-1}$$

Pour la seconde face A' :

$$1^{\text{re}} \text{ distance focale : } A'b = f_b = -\frac{nr'}{n-1}$$

$$2^{\text{e}} \text{ distance focale : } A'b' = f'_b = -\frac{r'}{n-1}$$

Par les points I, I' où la droite LL' parallèle à l'axe principal perce les deux faces, menons les lignes Ia', I'b ; du point S où ces deux droites se coupent abaissons la perpendiculaire SO sur l'axe principal ; le pied O de cette perpendiculaire est le centre optique. En effet :

Les triangles a'IA, a'SO sont semblables, et les triangles bI'A', bSO sont aussi semblables. En tenant compte de la relation AI = A'I', ces deux couples de triangles semblables donnent :

$$\frac{AO}{A'O} = \frac{Aa'}{A'b}$$

Donc le point O ainsi déterminé est le centre optique de la lentille.



Mais les deux images DK, D'K' de SO, ainsi obtenues, sont droites et de même grandeur. Les plans perpendiculaires à l'axe principal menés par K, K' sont donc le *premier* et le *second plan principal* de la lentille, et les points K, K' sont à la fois ses *points nodaux* et ses *points principaux*.

80. Pour déterminer la valeur de la distance AK, nous avons les deux triangles semblables  $a'IA$ ,  $a'SO$  et les deux triangles semblables  $aDK$ ,  $aVA$ . — En tenant compte des relations  $AI = KD$ ,  $AV = SO$  et  $AO = \frac{e \times Aa'}{Aa' - A'b'}$ , ces deux couples de triangles semblables donnent :

$$AK = \frac{e \times Aa}{Aa' - A'b' - e}$$

Pour déterminer la valeur de la distance A'K', nous avons les deux triangles semblables  $bI'A'$ ,  $bSO$  et les deux triangles semblables  $b'D'K'$ ,  $b'V'A'$ . — En tenant compte des relations  $A'I' = D'K'$ ,  $A'V' = SO$  et  $A'O = \frac{e \times A'b'}{Aa' - A'b'}$ , ces deux couples de triangles semblables donnent :

$$A'K' = \frac{e \times A'b'}{Aa' - A'b' - e}$$

81. *Foyers principaux. — Distances focales.* — De la position des points nodaux et des plans principaux de la lentille, il est facile de déduire la position de ses foyers principaux F, F' et la valeur des distances focales KF, K'F'.

Le rayon incident SI (fig. 55), parallèle à l'axe principal, prolongé perce le second plan principal en un point D' qui appartient au rayon émergent de la lentille. Ce rayon incident est réfracté par la première face A suivant la' qui perce la seconde face en un point I' qui appartient aussi au rayon émergent; le prolongement du rayon émergent I'R ainsi déterminé coupe l'axe principal en F'.

F' est donc le *second foyer principal* de la lentille et ce foyer

est *virtuel*. La seconde distance focale est *négative* et égale à  $K'F'$ .

Les triangles  $F'I'A'$ ,  $F'D'K'$  sont semblables ainsi que les triangles  $a'IA$ ,  $a'I'A'$ . En tenant compte des relations  $D'K'=AI$ ,  $AA'=e$ ,  $A'K'=\frac{e \times A'b'}{Aa'-A'b-e}$ , ces deux couples de triangles semblables donnent pour valeur de la seconde distance focale  $K'F'$  de la lentille :

$$K'F' = \frac{Aa' \times A'b'}{Aa' - A'b - e}$$

En suivant la même marche, on déterminerait la position du *premier foyer principal virtuel*  $F$  de la lentille, et on trouverait pour valeur de sa *première distance focale négative*  $KF$  :

$$KF = \frac{Aa \times A'b}{Aa' - A'b - e}$$

Mais il résulte des valeurs des distances focales des faces de la lentille (78) que  $Aa \times A'b = Aa' \times A'b'$ . Donc les distances focales  $KF$ ,  $K'F'$  de la lentille sont égales et, en désignant par la lettre  $\varphi$  leur valeur commune, nous avons :

$$\varphi = KF = K'F' = \frac{Aa \times A'b}{Aa' - A'b - e} = \frac{Aa' \times A'b'}{Aa' - A'b - e}$$

82. *Formules définitives.* — Les expressions précédentes, déterminées par la méthode géométrique, donnent les valeurs absolues des distances  $AO$ ,  $A'O$ ,  $AK$ ,  $A'K'$ ,  $KF$ ,  $K'F'$ ; mais n'indiquent pas les positions *réelles* des points  $O$ ,  $K$ ,  $K'$ ,  $F$ ,  $F'$  sur l'axe principal. — Pour obtenir des formules qui fournissent les valeurs *réelles* des éléments fondamentaux de la lentille, il suffit de se rappeler que les distances focales de la première face  $A$  sont *positives*, tandis que celles de la seconde face  $A'$  sont *négatives*, de faire dans les expressions précédentes  $Aa = f_0$ ,  $Aa' = f'_0$ ,  $A'b = -f_1$ ,  $A'b' = -f'_1$ , et de mettre en évidence les signes *négatifs* dont doivent être affectées les longueurs évidemment *négatives*,  $A'O$ ,  $A'K'$ ,  $KF$ ,  $K'F'$ ; ce qui donne :

1° Pour la position du centre optique :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} AO = \frac{ef'_0}{f'_0 + f_1} \\ A'O = \frac{ef_1}{f'_0 + f_1} \end{array} \right.$$

2° Pour la position des points nodaux.

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} AK = \frac{ef_0}{f'_0 + f_1 - e} \\ A'K' = \frac{ef'_1}{f'_0 + f_1 - e} \end{array} \right.$$

3° Pour la valeur commune des distances focales :

$$\varphi = KF = K'F' = \frac{f_0 f_1}{f'_0 + f_1 - e}$$

Il est facile de voir que ces formules, dans lesquelles les quantités  $f_0, f'_0$  sont *positives* et les quantités  $f_1, f'_1$  *négatives*, donnent les véritables positions des points O, K, K', F, F' sur l'axe principal.

Les dénominateurs sont tous *positifs*, et par suite le signe des expressions dépend *uniquement* de celui des numérateurs.

Le centre optique O étant à droite de A', d'après les conventions adoptées (44) AO est *positif* et A'O est *négatif*. Or, il est facile de voir que dans les formules (1), le numéra-

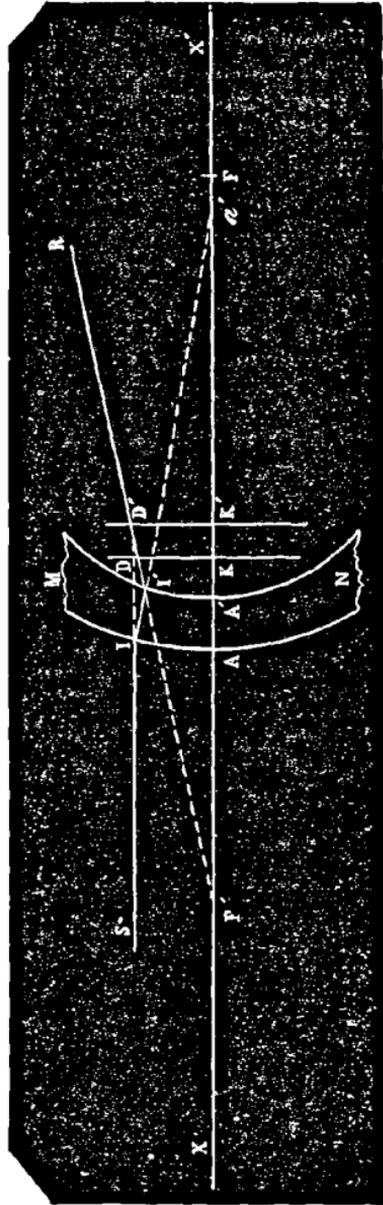


FIG. 55.

teur de la première est *positif* et le numérateur de la seconde *négalif*.

Le premier point nodal K est à droite de A, donc AK doit être *positif* et, en effet, le numérateur de la première des formules (2) est *positif*. — Le second point nodal K' étant à droite de A', la distance A'K' doit être *négalive* et, en effet, le numérateur de la seconde des formules (2) est *négalif*.

Les foyers principaux F, F' sont *virtuels*, les distances focales de la lentille sont donc *négalives*. Or, dans la formule (3) le numérateur est évidemment *négalif*.

Pour passer des formules de la lentille biconvexe à celles du ménisque divergent, il suffit donc de changer les signes des distances focales de la seconde face A' de la lentille.

Ajoutons d'ailleurs que dans le ménisque divergent :

1° Les plans focaux jouissent des mêmes propriétés que ceux de la lentille biconcave.

2° Les foyers conjugués ainsi que les rapports de position et de grandeur d'un objet et de son image sont déterminés par les mêmes formules que dans la lentille biconcave.

83. *Remarque.* — Pour que les foyers du ménisque soient *virtuels*, il suffit et il faut que la valeur  $\frac{f_0 f_1}{f'_0 + f_1 - e}$  de ses distances focales soit *négalive*. Or, le numérateur étant essentiellement *négalif*, le dénominateur doit être *positif*, ce qui donne :

$$f'_0 + f_1 - e > 0$$

Ou, en remplaçant  $f'_0, f_1$ , par leurs valeurs :

$$\frac{nr}{n-1} - \frac{nr'}{n-1} - e > 0$$

D'où l'on tire :

$$r' < r - \frac{n-1}{n} e$$

Telle est la condition nécessaire et suffisante à laquelle doivent satisfaire les rayons de courbure  $r, r'$  de la première

et de la seconde face et l'épaisseur  $e$  de la lentille pour que les foyers soient *virtuels*.

Pour que le ménisque concavo-convexe soit *divergent*, il ne suffit donc pas que le rayon de courbure  $r'$  de la face concave soit plus petit que le rayon de courbure  $r$  de la face convexe, il faut que ce rayon  $r'$  soit plus petit que  $r - \frac{n-1}{n} e$ .

Lorsque  $r' = r - \frac{n-1}{n} e$ , on a  $f'_0 + f_1 - e = 0$ ,  $\varphi = \infty$ , et les distances focales ont une valeur infinie; en d'autres termes, le ménisque se conduit comme un milieu réfringent terminé par des faces parallèles, et les rayons émergents sont parallèles aux rayons incidents.

### § 7. — *Lentille infiniment mince.*

84. Pour passer du cas de la lentille d'épaisseur finie  $e$  à celui de la lentille assez mince pour que son épaisseur comptée sur l'axe principal soit complètement négligeable; il suffit de faire  $e = 0$  dans les formules générales des points cardinaux de l'appareil; ce qui donne :

$$AO = 0 \quad A'O = 0 \quad AK = 0 \quad A'K' = 0$$

En même temps que les *sommets* A, A' de ses deux faces, son *centre optique* O et ses deux *points nodaux* K, K' se superposent au point Q où l'axe principal perce la lentille; ce point Q devient l'origine de toutes les longueurs. — Les deux *plans principaux* se confondent en un *seul* mené par le point Q perpendiculairement à l'axe principal, et tout rayon incident qui passe par ce point Q est transmis sans déviation suivant le prolongement de sa direction.

Les deux distances focales ont pour valeur commune :

$$\varphi = QF = QF' = \frac{f_0 f_1}{f'_0 + f_1}$$

Si nous remplaçons  $f_0$ ,  $f'_0$  et  $f_1$  par leurs valeurs en fonc-

tion de l'indice de réfraction  $n$  et des rayons de courbure  $r, r'$  des faces de la lentille, nous avons :

1° Pour les trois lentilles convergentes :

$$\text{Lentille biconvexe} \dots \varphi = \frac{rr'}{(n-1)(r+r')}$$

$$\text{Lentille plan-convexe} \dots \varphi = \frac{r}{n-1}$$

$$\text{Ménisque convergent} \dots \varphi = \frac{rr'}{(n-1)(r'-r)}$$

Ces distances focales sont *positives* et les foyers principaux sont *réels*, car  $r$  et  $r'$  sont des quantités numériques, et dans le ménisque convergent  $r'$  est plus grand que  $r$ .

2° Pour les trois lentilles divergentes :

$$\text{Lentille biconcave} \dots \varphi = -\frac{rr'}{(n-1)(r+r')}$$

$$\text{Lentille plan-concave} \dots \varphi = -\frac{r}{n-1}$$

$$\text{Ménisque divergent} \dots \varphi = -\frac{rr'}{(n-1)(r-r')}$$

Ces distances focales sont *négatives* et les foyers principaux sont *virtuels*, car  $r, r'$  sont des quantités numériques, et dans le ménisque divergent  $r$  est plus grand que  $r'$ .

D'ailleurs, les foyers conjugués ainsi que les rapports de position et de grandeur d'un objet et de son image sont déterminés par les mêmes formules que dans les cas d'une lentille d'épaisseur finie.

85. *Propriété remarquable des plans principaux.* — Soient (fig. 56)  $K, K'$  les points nodaux,  $TT, TT'$ , les plans principaux,  $F, F'$ , les foyers principaux d'une lentille quelconque  $M$  d'épaisseur finie. — Supprimons la lentille  $M$  et plaçons au premier point nodal  $K$  une lentille infiniment mince, qui se confonde avec le premier plan principal  $TT$  et dont les distances focales soient égales à celles de la lentille  $M$ . — Dès lors  $F$  sera à la fois le premier foyer principal de la lentille infiniment mince et de la lentille  $M$ , et le second foyer princi-

pal de la lentille infiniment mince sera en un point  $F'$  tel que  $F'F'_1 = KK'$ . — Remarquons, en outre, que  $UU$  sera à la fois le premier plan focal de la lentille infiniment mince et de la lentille  $M$ .

Cela posé, soit  $SD$  un rayon incident quelconque qui perce en  $H$  le plan focal  $UU$ . D'après les propriétés connues des plans focaux, la lentille infiniment mince réfracte ce rayon suivant  $DR$  parallèle à  $HK$ , et la lentille  $M$  l'aurait réfracté suivant  $D'R'$  parallèle à la même ligne de direction  $HK$ . — Ces deux rayons  $DR$ ,  $D'R'$  correspondants au même rayon incident  $SD$  et transmis le premier par la lentille infiniment mince placée en  $K$ , le second par la lentille primitive  $M$ , sont donc parallèles entre eux et coupent l'axe principal en des points  $B$ ,  $B'$ , de manière que  $BB' = DD' = KK'$ .

Étant donnée une lentille quelconque  $M$  d'épaisseur finie placée dans l'air, on peut donc toujours la remplacer par une lentille infiniment mince placée à son premier point nodal  $K$  et de même longueur focale que la lentille  $M$ . — Les

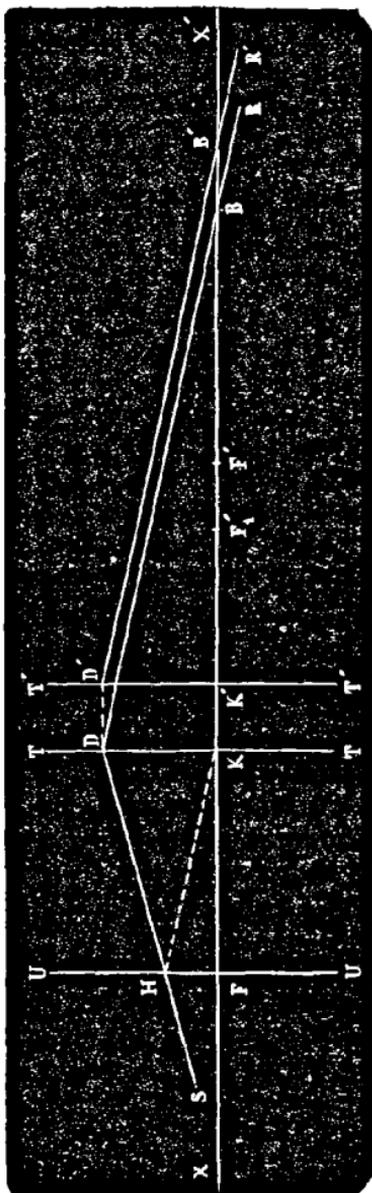


Fig. 50.

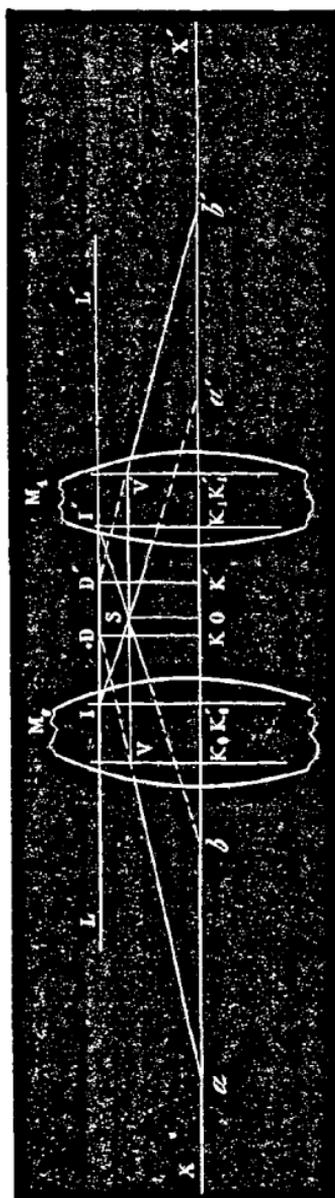


FIG. 57.

rayons transmis par cette lentille infiniment mince sont parallèles à ceux qu'aurait transmis la lentille  $M$ ; pour déterminer la position réelle des rayons transmis par la lentille  $M$  d'épaisseur finie, il suffit de transporter parallèlement à eux-mêmes et d'une distance  $BB'$ , comptée sur l'axe principal, égale à l'intervalle  $KK'$  des deux points nodaux, les rayons transmis par la lentille infiniment mince.

#### ART. III. — DES ASSOCIATIONS DE LENTILLES PLACÉES DANS L'AIR.

86. Les éléments fondamentaux d'un système dioptrique composé d'un nombre quelconque de lentilles centrées sur un même axe principal et placées dans l'air sont les mêmes que ceux d'une simple lentille; la méthode géométrique que nous avons adoptée permet de les déterminer. Nous étudierons avec détails le cas de l'association de deux lentilles; cela suffira pour indiquer la marche à suivre dans la recherche des points cardinaux de systèmes dioptriques plus compliqués.

§ 1<sup>er</sup>. — Association de deux lentilles.

87. Soient :  $M_0, M_1$  (fig. 57), deux lentilles centrées sur un même axe principal  $XX'$ ;  $a, a'$  les foyers principaux,  $K_0, K'_0$  les points nodaux,  $\varphi_0 = K_0 a = K'_0 a'$  les distances focales de la première lentille  $M_0$ ;  $b, b'$  les foyers principaux,  $K_1, K'_1$  les points nodaux,  $\varphi_1 = K_1 b = K'_1 b'$  les distances focales de la lentille  $M_1$ ;  $e = K'_0 K_1$  la distance du second point nodal  $K'_0$  de la lentille  $M_0$  au premier point nodal  $K_1$  de la lentille  $M_1$ .

88. *Points principaux. — Plans principaux du système.* — La droite  $LL'$  (fig. 57) parallèle à l'axe principal perce en  $L$  le second plan principal de la lentille  $M_0$  et en  $L'$  le premier plan principal de la lentille  $M_1$ . Les lignes  $la', l'b$  se coupent en  $S$ ;  $SO$  est perpendiculaire à l'axe principal.

Les deux triangles rectangles  $a'IK'_0, a'SO$  sont semblables, ainsi que les deux triangles rectangles  $b'l'K_1, b'SO$ ; ces deux couples de triangles semblables donnent :

$$\frac{K'_0 O}{K_1 O} = \frac{K'_0 a'}{K_1 b} = \frac{\varphi_0}{\varphi_1}$$

D'autre part :

$$K'_0 O + K_1 O = e$$

D'où :

$$K'_0 O = \frac{e\varphi_0}{\varphi_0 + \varphi_1}$$

$$K_1 O = \frac{e\varphi_1}{\varphi_0 + \varphi_1}$$

Ces deux équations déterminent la position du point  $O$  sur l'axe principal; le point  $O$  partage la distance  $K'_0 K_1$  en deux parties  $K'_0 O, K_1 O$  proportionnelles aux distances focales  $\varphi_0, \varphi_1$ , des deux lentilles.

Considérons la perpendiculaire  $SO$  comme un objet lumineux rayonnant à la fois vers les deux lentilles  $M_0, M_1$ , et menons par le point  $S$  la droite  $VV'$  parallèle à l'axe principal.

Les perpendiculaires DK, D'K' sont les images de SO regardé successivement à travers la lentille M<sub>0</sub> et à travers la lentille M<sub>1</sub>; ces deux images sont *droites* et de *même grandeur*.

Donc, si DK est un objet, le système des deux lentilles en forme une image *droite* et de *même grandeur* en D'K'. Il en résulte que les plans perpendiculaires à l'axe principal menés par DK et D'K' sont percés à la même hauteur et du même côté de l'axe principal par la direction d'un rayon incident quelconque et par la direction du rayon émergent correspondant. — DK, D'K', sont donc le *premier* et le *second plan principal* et K, K' le *premier* et le *second point principal* de ce système de deux lentilles.

Pour déterminer la position du premier point principal K, nous avons les deux couples de triangles rectangles semblables a'IK'<sub>0</sub>, a'SO et aDK, aVK<sub>0</sub>. En tenant compte des relations IK'<sub>0</sub> = DK, VK<sub>0</sub> = SO, K'<sub>0</sub>O =  $\frac{e\varphi_0}{\varphi_0 + \varphi_1}$ , ces triangles donnent :

$$K_0K = \frac{e\varphi_0}{\varphi_0 + \varphi_1 - e}$$

Pour déterminer la position du second point principal K', nous avons aussi deux couples de triangles rectangles semblables bIK<sub>1</sub>, bSO et b'D'K', b'V'K'<sub>1</sub> qui, en tenant compte des relations V'K<sub>1</sub> = D'K', V'K'<sub>1</sub> = SO, K<sub>1</sub>O =  $\frac{e\varphi_1}{\varphi_0 + \varphi_1}$  donnent :

$$K_1K' = \frac{e\varphi_1}{\varphi_0 + \varphi_1 - e}$$

89. *Foyers principaux. — Distances focales du système.* — Étant connue la position des points principaux K, K' et des plans principaux du système, il est facile de déterminer la position de ses foyers principaux.

Soit, en effet, SI (fig. 58) un rayon incident parallèle à l'axe principal dont le prolongement perce en I le second plan principal K'<sub>0</sub> de la première lentille M<sub>0</sub>, et en D' le second

plan principal  $K'$  du système.  
— Soit, en outre,  $a'$  le second foyer principal de la première lentille  $M_0$ .

La première lentille  $M_0$  réfracte le rayon incident  $SI$  suivant  $Ia'$  qui perce en  $C$  le premier plan principal  $K_1$  de la seconde lentille  $M_1$ . Si donc nous menons par  $C$  une parallèle à l'axe principal qui perce en  $C'$  le second plan principal  $K'_1$  de la lentille  $M_1$ , le rayon  $Ia$  est réfracté par la lentille  $M_1$ , suivant une droite qui passe par  $C'$ .

Le point  $C'$  appartient donc à la direction du rayon émergent du système correspondant au rayon incident  $SI$ . Mais déjà  $D'$  appartient à la direction de ce rayon émergent, puisque  $D'$  est le point où le second plan principal du système est percé par le prolongement de  $SI$  parallèle à l'axe principal. Donc la droite  $D'C'R$  détermine la position du rayon émergent du système des deux lentilles correspondant au rayon incident  $SI$  parallèle à l'axe principal.

Le point  $F'$  où cette droite  $D'R$  coupe l'axe principal est

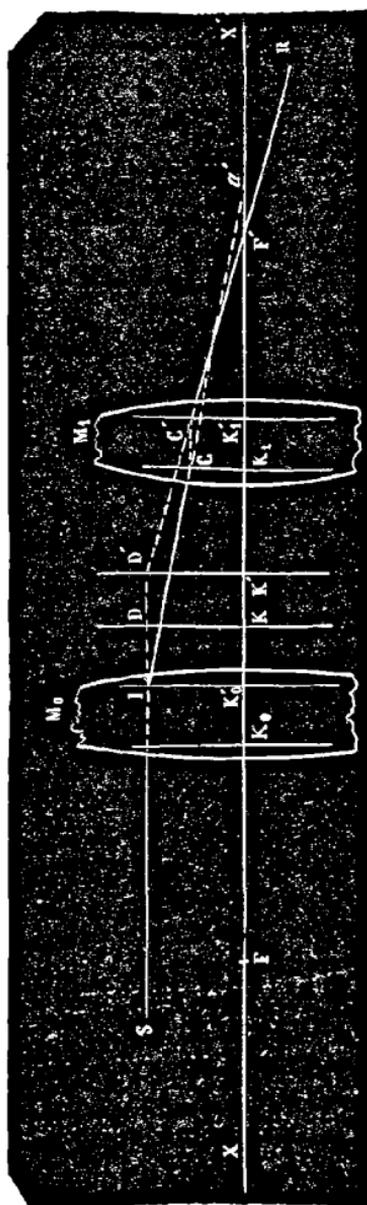


FIG. 53.

donc le *second foyer principal*, et  $K'F'$  est la *seconde distance focale* du système des deux lentilles.

Pour déterminer cette distance focale  $K'F'$  et par suite la position du second foyer principal, nous avons deux couples de triangles rectangles semblables,  $a'IK'_0$ ,  $a'CK_1$  et  $F'D'K'$ ,  $F'CK'_1$ . En tenant compte des relations  $IK'_0 = D'K'$ ,  $CK_1 = CK'_1$ ,

$K'_1K' = \frac{e\varphi_1}{\varphi_0 + \varphi_1 - e}$ , ces triangles donnent facilement :

$$K'F' = \frac{\varphi_0\varphi_1}{\varphi_0 + \varphi_1 - e}$$

On déterminerait de la même manière la position du *premier foyer principal*  $F$  et la *première distance focale*  $KF$  du système, et l'on trouverait :

$$KF = \frac{\varphi_0\varphi_1}{\varphi_0 + \varphi_1 - e}$$

Les deux distances focales de ce système de deux lentilles  $M_0$ ,  $M_1$ , placées dans l'air, sont donc égales, et en désignant par la lettre  $\varphi$  leur valeur commune nous avons :

$$\varphi = KF = K'F' = \frac{\varphi_0\varphi_1}{\varphi_0 + \varphi_1 - e}$$

90. *Points nodaux du système.* — Il est facile de démontrer que les points principaux  $K$ ,  $K'$  de ce système des deux lentilles  $M_0$ ,  $M_1$  placées dans l'air, sont en même temps ses *points nodaux*, c'est-à-dire que tout rayon incident dont la direction passe par le point  $K$  émerge suivant une droite menée par  $K'$  parallèlement au rayon incident.

Soient : en effet,  $K$ ,  $K'$  (fig. 59) les points principaux et  $F$ ,  $F'$  les deux foyers principaux du système. Les plans perpendiculaires à l'axe principal  $XX'$  menés par  $F$ ,  $K$ ,  $K'$  sont le premier plan focal et les deux plans principaux.

Prenons un point lumineux quelconque  $S$  hors de l'axe principal. — Les deux rayons incidents,  $SD$  parallèle à l'axe principal,  $SC$  qui passe par le premier foyer principal  $F$ , émer-

gent du système suivant  $D'R$  qui passe par le second foyer principal  $F'$  et suivant  $C'R'$  parallèle à l'axe principal. — Le foyer du point  $S$  est donc au point d'intersection  $S'$  de ces deux rayons émergents, et le rayon incident  $SK$  émerge nécessairement suivant  $K'S'$ . — Il faut démontrer que  $K'S'$  est parallèle à  $SK$ .

Pour cela, abaissons les perpendiculaires  $SP$ ,  $S'P'$  sur l'axe principal. — Par le point  $H$  où  $SK$  perce le premier plan focal  $F$  du système, menons le rayon incident  $HB$  parallèle à l'axe principal; le rayon émergent correspondant passe nécessairement par  $B'$  et par  $F'$  et ce rayon  $B'F'$  rencontre en  $G$  la perpendiculaire  $S'P'$ .

Puisque les distances focales  $KF$ ,  $K'F'$  sont égales, les triangles rectangles  $KHF$ ,  $F'B'K'$  sont égaux, et les droites  $B'G$ ,  $SK$  sont parallèles.

En tenant compte des relations  $SP = D'K'$ ,  $CK = S'P'$ , les deux couples de triangles semblables  $FSP$ ,  $FCK$  et  $F'D'K'$ ,  $F'S'P'$  donnent :

$$\frac{SP}{CK} = \frac{D'K'}{S'P'} = \frac{PF}{KF} \text{ et } \frac{D'K'}{S'P'} = \frac{K'F'}{P'F'}$$

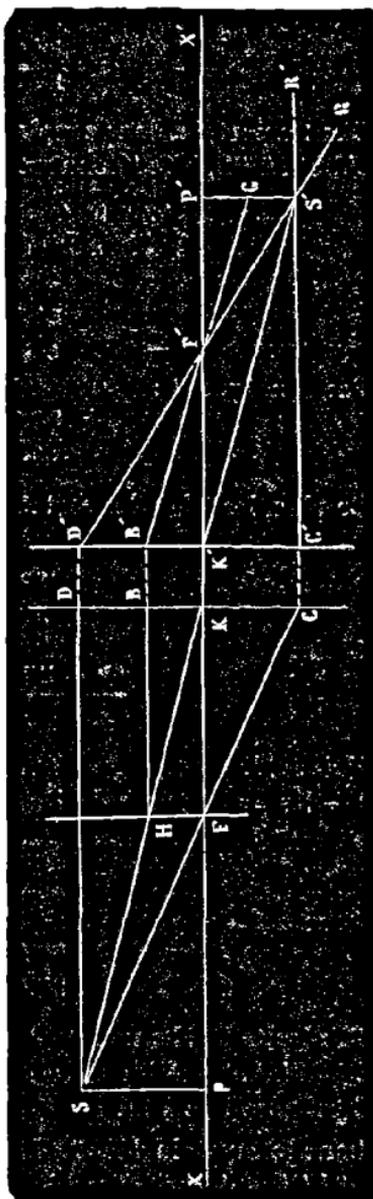


FIG. 59.

D'où :

$$\frac{PF}{KF} = \frac{K'F'}{P'F'}$$

D'autre part, les deux couples de triangles semblables  $F'D'B'$ ,  $F'S/G$  et  $F'B'/K'$ ,  $F'GP'$  donnent :

$$\frac{F'B'}{F'G} = \frac{D'B'}{S'G} \quad \text{et} \quad \frac{F'B'}{F'G} = \frac{K'F'}{P'F'}$$

D'où :

$$\frac{D'B'}{S'G} = \frac{K'F'}{P'F'}$$

Par conséquent :

$$\frac{D'B'}{S'G} = \frac{PF}{KF}$$

De plus, les triangles rectangles semblables  $KSP$ ,  $KHF$  donnent :

$$\frac{SP}{HF} = \frac{KP}{KF}$$

D'où :

$$\frac{SP - HF}{HF} = \frac{KP - KF}{KF}$$

Mais évidemment  $SP = D'K'$ ,  $HF = B'K'$ ,  $SP - HF = D'B'$  et  $KP - KF = PF$ ; en substituant, nous avons donc :

$$\frac{D'B'}{B'K'} = \frac{PF}{KF}$$

Donc enfin :

$$\frac{D'B'}{B'K'} = \frac{D'B'}{S'G}$$

Il résulte évidemment de cette dernière relation que  $S'G = B'K'$  et que les droites  $B'G$ ,  $K'S'$  sont parallèles. — Mais  $B'G$  est parallèle à  $SK$  :

Donc le rayon incident  $SK$  et le rayon émergent correspondant  $K'S'$  sont parallèles; donc les points  $K$ ,  $K'$  sont à la fois les *points principaux* et les *points nodaux* du système.

91. *Centre optique du système.* — Nous avons vu (88), fig. 57, que les points  $K, K'$  sont les images du point  $O$  regardé à travers les lentilles  $M_0, M_1$ ; ce point  $O$  est donc en réalité le centre optique du système des deux lentilles associées.

92. *Plans focaux du système.* — En recourant aux constructions et aux raisonnements déjà employés (47), on démontrerait facilement que les plans focaux de ce système de deux lentilles associées jouissent des mêmes propriétés que les plans focaux d'une lentille simple.

93. Il résulte des constructions et déterminations précédentes que l'action sur la lumière d'un système de deux lentilles  $M_0, M_1$  placées dans l'air (fig. 57 et 58) est la même que celle d'une lentille dont les éléments fondamentaux sont donnés par les relations suivantes :

1° Centre optique  $O$  du système :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} K'_0 O = \frac{e\varphi_0}{\varphi_0 + \varphi_1} \\ K_1 O = \frac{e\varphi_1}{\varphi_0 + \varphi_1} \end{array} \right.$$

2° Points nodaux  $K, K'$  du système qui sont en même temps ses points principaux :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_0 K = \frac{e\varphi_0}{\varphi_0 + \varphi_1 - e} \\ K'_1 K' = \frac{e\varphi_1}{\varphi_0 + \varphi_1 - e} \end{array} \right.$$

3° Valeur commune des deux distances focales  $KF, K'F'$  du système :

$$(3) \quad \varphi = KF = K'F' = \frac{\varphi_0 \varphi_1}{\varphi_0 + \varphi_1 - e}$$

En résumé, ces relations font connaître les éléments fondamentaux du système dioptrique de deux lentilles placées dans l'air. — Pour déterminer le rayon émergent correspondant

à un rayon incident quelconque, le foyer d'un point lumineux situé sur l'axe principal ou hors de cet axe, les rapports de position et de grandeur d'un objet et de son image, en un mot pour résoudre les problèmes relatifs à la transmission de la lumière à travers ce système dioptrique, il suffira donc de recourir aux constructions géométriques et aux formules employées dans l'étude de la lentille simple.

Conformément à ce que nous avons précédemment établi (44), on doit compter les longueurs  $K_1O$ ,  $K_0K$  *positivement* à droite et *négativement* à gauche des points  $K_0$ ,  $K_0$ ; les longueurs  $K_1O$ ,  $K_1K'$  *positivement* à gauche et *négativement* à droite des points  $K_1$ ,  $K_1$ ; la première distance focale  $KF$  *positivement* à gauche, *négativement* à droite du point  $K$ ; enfin la seconde distance focale  $K'F'$  *positivement* à droite, *négativement* à gauche du point  $K'$ .

Ces conventions faites, il suffit de donner aux distances focales  $\varphi_0, \varphi_1$  des lentilles associées des valeurs *positives* ou *négatives* suivant qu'elles sont convergentes ou divergentes, pour que les formules précédentes représentent les éléments fondamentaux d'un système de deux lentilles quelconques associées et plongées dans l'air (\*).

94. *Distance des points nodaux du système.* — La distance  $KK'$  des deux points nodaux du système (fig. 57) est :

$$KK' = K_0K_1' - (K_0K + K_1K')$$

Or,

$$K_0K' = (K_0K_0' + K_1K_1') + e$$

Et (93) formules (2),

$$K_0K + K_1K' = \frac{e(\varphi_0 + \varphi_1)}{\varphi_0 + \varphi_1 - e}$$

D'où, en substituant :

$$KK' = (K_0K_0' + K_1K_1') + e - \frac{e(\varphi_0 + \varphi_1)}{\varphi_0 + \varphi_1 - e}$$

(\*) La marche que nous avons adoptée permet de déterminer les éléments fondamentaux d'un système dioptrique composé d'un nombre

Et enfin,

$$KK' = (K_0 K'_0 + K_1 K'_1) - \frac{e^2}{\varphi_0 + \varphi_1 - e}$$

Si  $e$  est une quantité très-petite, comme par exemple dans le cas où l'on juxtapose deux lentilles pour avoir un système achromatique, le terme en  $e^2$  peut être négligé et l'on a :

$$KK' = K_0 K'_0 + K_1 K'_1.$$

Dans ce cas, la distance des points nodaux ou des plans principaux du système est égale à la somme des écartements des points nodaux des lentilles composantes.

95. *Simplification.* — D'après ce que nous avons dit (85) des propriétés des plans principaux, on peut au système des deux lentilles  $M_0, M_1$  substituer une lentille infiniment mince

quelconque de lentilles associées et placées dans l'air. Soient : en effet,  $M_0, M_1, M_2$  (fig. 60), trois lentilles associées ( $K_0, K'_0$ ), ( $K_1, K'_1$ ),

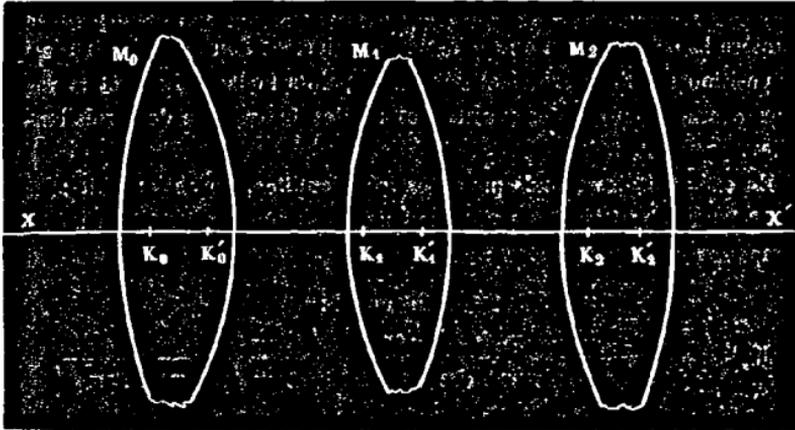


FIG. 60.

( $K_2, K'_2$ ) les points nodaux,  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$  les distances focales de ces lentilles. Appelons  $e$  la distance  $K'_0 K_1$  et  $e'$  la distance  $K'_1 K_2$ .

Les deux lentilles  $M_0, M_1$  peuvent être remplacées par une seule lentille dont les éléments fondamentaux ne dépendent que des distances

placée au premier point nodal  $K$  du système (fig. 59) et dont les distances focales soient égales entre elles et à  $KF$ .

Les rayons transmis par cette lentille infiniment mince sont parallèles à ceux qu'aurait transmis le système lui-même, et pour avoir la position réelle des rayons transmis par le système des deux lentilles  $M_0, M_1$ , il suffit de transporter parallèlement à eux-mêmes et d'une distance, comptée sur l'axe principal, égale à l'intervalle  $KK'$  des points nodaux du système, les rayons transmis par la lentille infiniment mince placée en  $K$ .

### § 2. — De la lunette astronomique.

96. La lunette astronomique est un appareil destiné à donner des images nettes et exactes des objets très-éloignés.

focales  $\varphi_0, \varphi_1$  des lentilles  $M_0, M_1$  et de la distance connue  $K'_0K_1 = e$ . En combinant cette lentille avec la troisième  $M_2$ , on déterminerait les éléments fondamentaux de la lentille unique capable de produire sur la lumière la même action que le système entier, et l'on connaîtrait ainsi la position sur l'axe principal des deux points nodaux  $K, K'$  et la valeur commune  $\varphi$  des deux distances focales du système des trois lentilles.

En exécutant les calculs pour ces trois lentilles, on obtiendrait :

1° Pour la position des points nodaux du système qui sont en même temps ses points principaux :

1<sup>er</sup> point nodal :

$$K_0K = \frac{\varphi_0(e\varphi_1 + e\varphi_2 + e'\varphi_1 - ee')}{\varphi_0\varphi_1 + \varphi_0\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 - e\varphi_0 - e\varphi_2 - e'\varphi_0 - e'\varphi_1 + ee'}$$

2<sup>e</sup> point nodal :

$$K'_2K' = \frac{\varphi_2(e\varphi_1 + e'\varphi_0 + e'\varphi_1 - ee')}{\varphi_0\varphi_1 + \varphi_0\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 - e\varphi_0 - e\varphi_2 - e'\varphi_0 - e'\varphi_1 + ee'}$$

2° Pour la valeur commune des deux distances focales du système :

$$\varphi = KF = K'F' = \frac{\varphi_0\varphi_1\varphi_2}{\varphi_0\varphi_1 + \varphi_0\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 - e\varphi_0 - e\varphi_2 - e'\varphi_0 - e'\varphi_1 + ee'}$$

Elle se compose (fig. 61) de deux lentilles convergentes placées dans l'air. La première  $M_0$  prend le nom d'*objectif*, reçoit les rayons émanés de l'objet extérieur  $ST$ , et en forme une image réelle et renversée  $S'T'$  entre la seconde lentille  $M_1$  qui prend le nom d'*oculaire*, et son premier foyer principal  $F_1$ . L'oculaire agit sur cette image réelle  $S'T'$  comme une loupe et forme de l'objet  $ST$  une image virtuelle et renversée  $S''T''$ .

97. *Anneau et point oculaires.* — Soit  $IAI'$  l'étendue découverte de la face antérieure de l'objectif  $M_0$  par laquelle la lumière incidente peut pénétrer dans l'appareil. Chacun des points de l'objet  $ST$  (\*) recouvre cette surface  $IAI'$  d'un cône

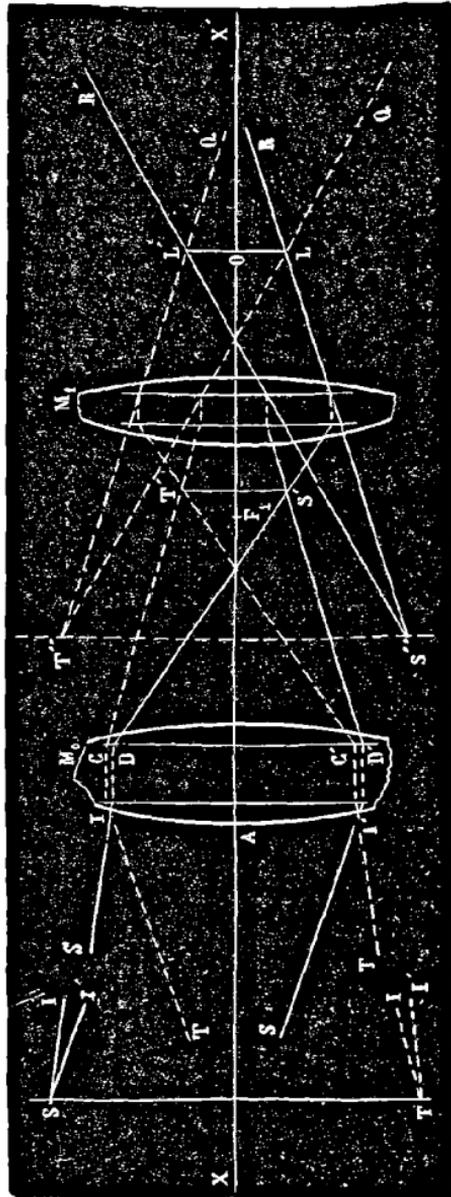


FIG. 61.

(\*) Dans les figures 61 et 62, l'objet, extrêmement éloigné, a dû être

lumineux, et le faisceau de lumière incidente qui pénètre dans l'appareil est évidemment limité par les cônes  $ISI'$ ,  $ITV'$ . — Le cône incident  $ISI'$  est transformé par l'objectif  $M_0$  en un nouveau cône  $DS'D'$  qui, sous l'influence de l'oculaire  $M_1$ , devient le cône émergent de l'appareil  $RS''R'$ ; de même le cône incident  $ITV'$  émerge de la lunette suivant le cône  $QT''Q'$ . Ces deux cônes émergents limitent à leur tour le faisceau lumineux qui sort de l'appareil à travers l'oculaire.

Le faisceau émergent de la lunette éprouve donc en  $LL'$  un véritable étranglement, et cette section  $LL'$  de *minimum* d'étendue, sorte d'*anneau* que la lumière émergente traverse en éprouvant la plus forte condensation, est évidemment, comme l'indique la marche des rayons lumineux, l'image de la partie découverte  $IAI'$  de la face antérieure de l'objectif  $M_0$ .

Le point  $O$  image du sommet  $A$  de la première face de l'oculaire, et la surface  $LL'$  image de cette première face  $IAI'$ , ont reçu les dénominations de *point oculaire* et *anneau oculaire*. — Dans la lunette astronomique dont l'oculaire est convergent, l'anneau oculaire  $LL'$  est *réel*; c'est en  $O$  que l'observateur doit placer son œil pour recevoir le plus de lumière possible et voir l'image  $S''T''$  dans toute son étendue.

97. La connaissance de l'anneau oculaire est précieuse en ce qu'elle permet de déterminer le rayon émergent correspondant à un rayon incident quelconque dans un cas fort important auquel ne s'applique pas la théorie de Gauss.

Supposons qu'une lunette astronomique soit ajustée (fig. 62) de manière à faire coïncider en  $U$  le second foyer principal de l'objectif  $M_0$  et le premier foyer principal de l'oculaire  $M_1$ ,  $TT'$  est à la fois le second plan focal de l'objectif  $M_0$  et le pre-

transporté parallèlement à lui-même, pour que tous les éléments de la démonstration pussent être mis sous les yeux du lecteur. — Des rayons incidents on n'a pu ainsi conserver que les extrémités représentées par des droites parallèles marquées des mêmes lettres.

mier plan focal de l'oculaire  $M_1$ . — En continuant à désigner par la lettre  $e$  l'intervalle  $K_0K_1$ , nous avons :

$$e = K_0'U + K_1U = \varphi_0 + \varphi_1$$

d'où :

$$\varphi_0 + \varphi_1 - e = 0$$

Il en résulte que, dans ce système, les valeurs (93) des longueurs  $K_0K$ ,  $K_1K'$ , et  $\varphi$ , deviennent infinies; en d'autres termes, les points nodaux et les foyers principaux de ce système dioptrique se reculent à l'infini, et les équations qui nous ont servi à déterminer les rapports de position et de grandeur linéaire d'un objet de son image ne sont plus applicables à ce cas-ci, puisque ces équations irréductibles contiennent la distance focale  $\varphi$ .

Soit  $SP$  un objet; le rayon incident  $SD$ , parallèle à l'axe principal, pénètre suivant  $D'U$ , la ligne de direction  $SK_0$  pénètre suivant  $K_0'C$  parallèle à  $SK_0$ ; ces deux rayons transmis se coupent en  $S'$ , et  $S'P'$  est l'image réelle de  $SP$  formée par l'objectif. —

GAVARRET.

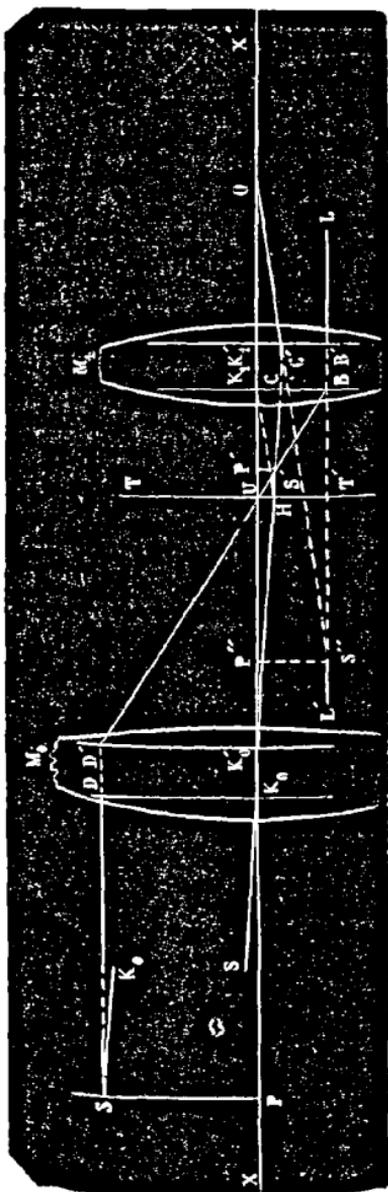


FIG. 62.

Cette image  $S'P'$  rayonne à son tour vers l'oculaire  $M_1$ ; le rayon incident  $S'B$  venant du premier foyer principal  $U$  émerge suivant  $B'L$  parallèle à l'axe principal; le rayon incident  $S'C$  qui a percé le premier plan focal de l'oculaire en  $H$  émerge suivant  $C'O$  parallèle à  $K_1H$ ; les prolongements de ces deux rayons se coupent en  $S''$ , et  $S''P''$  est l'image virtuelle définitive de  $SP$ . Or il résulte de la construction que :

1° L'image définitive est toujours comprise entre l'axe principal et la droite  $LL'$  qui lui est parallèle. Mais cette droite  $LL'$  reste évidemment à la même distance de l'axe principal, quelle que soit la position de l'objet  $SP$  par rapport à l'objectif. — Tant que l'objet  $SP$  reste le même, la grandeur de son image définitive  $S''P''$  reste donc *constante* quelle que soit la distance de l'objet  $SP$  à l'objectif  $M_0$  de la lunette. — D'ailleurs  $S''P'' = BK_1$ ,  $SP = D'K'_0$ , et les deux triangles rectangles  $D'UK'_0$ ,  $BUK_1$  sont semblables; nous avons donc :

$$(4) \quad \frac{S''P''}{SP} = \frac{K_1U}{K'_0U} = \frac{\varphi_1}{\varphi_0}$$

Telle est l'expression du grossissement linéaire *constant* de la lunette astronomique dans cet état d'ajustement, et comme la distance focale  $\varphi_1$  de l'oculaire est toujours plus petite que la distance focale  $\varphi_0$  de l'objectif, il en résulte que l'image définitive  $S''P''$  est toujours plus petite que l'objet  $SP$ .

2° L'œil placé en  $K_0$  et regardant l'objet  $SP$  sans le secours de la lunette doit faire décrire à son axe un angle égal à  $SK_0P = HK'_0U$  pour amener successivement les rayons envoyés par l'objet dans la direction de la visibilité. — Quand, au contraire, l'œil placé en  $O$  regarde l'objet à travers l'instrument, les rayons envoyés par le bord extrême de l'objet lui arrivent sous l'angle  $S''OP'' = HK_1U$ . — Mais les tangentes des angles  $HK'_0U$ ,  $HK_1U$  sont  $\frac{HU}{K'_0U} = \frac{HU}{\varphi_0}$  et  $\frac{HU}{K_1U} = \frac{HU}{\varphi_1}$ , donc :

$$(5) \quad \frac{\text{tang } HK_1U}{\text{tang } HK'_0U} = \frac{\varphi_0}{\varphi_1}$$

Telle est l'expression du grossissement angulaire de la lu-

nette astronomique dans cet ajustement. — Ce grossissement est d'ailleurs *constant* et indépendant de la position de l'objet.

3° Il résulte de ces deux expressions que le grossissement angulaire et le grossissement linéaire sont inverses l'un de l'autre.

L'avantage de la lunette astronomique n'est donc pas de donner une image de dimensions linéaires supérieures à celles de l'objet. Mais, en augmentant le diamètre apparent de l'objet, elle permet de distinguer des points de cet objet qui se confondraient à l'œil nu.

98. Dans la lunette astronomique ainsi ajustée, la position et la grandeur de l'anneau oculaire sont faciles à déterminer. — En effet, U (fig. 63) étant toujours le lieu où se confondent le second foyer principal de l'objectif  $M_0$  et le premier foyer principal de l'oculaire  $M_1$ ,  $F_0$  sera le premier foyer principal de l'objectif et  $F'_1$  le second foyer principal de l'oculaire;  $TT'$  sera à la fois le second plan focal de l'objectif et le premier plan focal de l'oculaire.

L'objectif  $M_0$  forme une image de sa première face  $II'$  dont il est facile de déterminer la position.  $II'$  est à droite du premier foyer principal  $F_0$  et à une distance  $AF_0$  de ce foyer; son image est donc (50) à gauche de U et à une distance  $V$  de U dont la grandeur absolue est donnée (48) formule (4) par la relation :

$$V = \frac{\varphi_0^2}{AF_0}$$

$AF_0$  étant plus petit que  $\varphi_0 = K_0 F_0$ ,  $V$  est supérieur à  $\varphi_0 = K'_0 U$ ; cette image est donc virtuelle et droite. — A son tour, cette image de  $II'$  rayonne vers l'oculaire  $M_1$ , qui en forme en  $LL'$  une image réelle et renversée qui est évidemment l'anneau oculaire de l'appareil. La distance  $OF'_1$  de cette image  $LL'$  au second foyer principal  $F'_1$  de l'oculaire  $M_1$  est donnée par la relation :

$$V \times OF'_1 = \varphi_1^2$$

d'où en remplaçant  $V$  par sa valeur :

$$(6) \quad OF'_1 = \frac{\varphi_1^2}{\varphi_0^2} \times AF_0 = \frac{\varphi_1^2}{\varphi_0} \times \frac{AF_0}{\varphi_0}$$

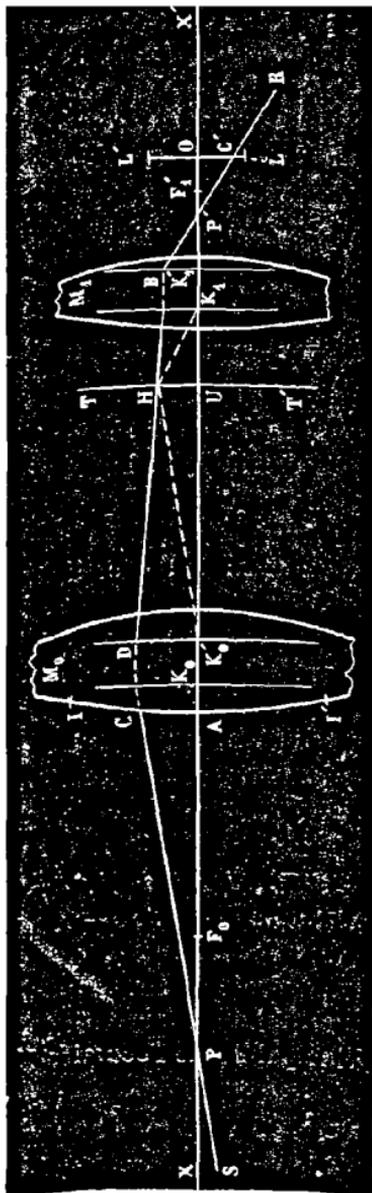


FIG. 63.

Or, comme  $AF_0$  diffère très-peu de  $\varphi_0$  la distance  $OF_1'$  de de l'anneau oculaire  $LL'$  au second foyer principal  $F_1'$  de l'oculaire  $M_1$  est sensiblement égale à  $\frac{\varphi_1^2}{\varphi_0}$ .\*

Quant à la grandeur de l'anneau oculaire  $LL'$ , d'après les rapports établis (97) formule (4) elle est évidemment donnée par la relation :

$$\frac{LL'}{IV'} = \frac{\varphi_1}{\varphi_0}.$$

99. La position et la grandeur de l'anneau oculaire  $LI'$  étant ainsi déterminées, soit  $SC$  un rayon incident quelconque qui fait avec l'axe principal un angle  $CPA$  et perce en  $C$  la première face de l'objectif. D'après les propriétés connues des plans focaux (47), ce rayon émerge de l'objectif suivant  $DH$  mené par le point  $H$  où le plan focal  $TT'$  est percé par la ligne de direction  $K_0'H$  parallèle au rayon incident  $SC$ , et finale-

(\*) Il est facile de voir que cette expression  $\frac{\varphi_1^2}{\varphi_0}$  est la valeur de la distance du second foyer principal  $F_1'$  de l'oculaire  $M_1$  à l'image du premier point nodal  $K_0$  de l'objectif  $M_0$ .

ment émerge de l'oculaire suivant BR parallèle à la ligne de direction  $K_1H$ . — Le point  $C'$  où ce rayon émergent BR perce l'anneau oculaire  $LI'$  est évidemment l'image du point d'incidence  $C$ .

$OC'$  est donc l'image renversée de  $AC$ , et la position du point  $C'$  sur l'anneau oculaire est déterminée par la relation :

$$(7) \quad \frac{OC'}{AC} = \frac{\varphi_1}{\varphi_0}$$

En second lieu, l'angle  $C'P'O$  est égal à l'angle  $HK_1U$ , et l'angle  $HK'_0U$  est égal à l'angle  $CPA$ , donc :

$$(8) \quad \frac{\text{tang } C'P'O}{\text{tang } CPA} = \frac{\text{tang } HK_1U}{\text{tang } HK'_0U} = \frac{\varphi_0}{\varphi_1}$$

Il résulte de ces deux dernières équations que, la position de l'anneau oculaire  $LI'$  étant connue, il est facile de déterminer le rayon émergent BR correspondant à un rayon incident donné quelconque  $SC$ . En effet, l'équation (7) donne le point  $C'$  où le rayon émergent perce le plan de l'anneau oculaire, et l'équation (8) fait connaître l'angle  $C'P'O$  compris entre ce rayon émergent et l'axe principal. — D'ailleurs, tant que le point  $P$  où le rayon incident  $SC$  coupe l'axe principal est à gauche de  $A$ , le point  $P'$  où le rayon émergent BR coupe l'axe principal est aussi à gauche du point oculaire  $O$ . Dans le cas où le rayon incident coupe l'axe principal à droite de  $A$ , le rayon émergent coupe ce même axe à droite de  $O$ .

. 100. L'ajustement dont nous nous occupons est précisément celui de la lunette astronomique lorsque l'œil de l'observateur est normal, c'est-à-dire assez bien constitué pour que son foyer principal soit sur la rétine. — Dans ce cas, l'astre sur lequel la lunette est braquée est assez éloigné pour que les rayons envoyés par chacun de ses points à l'objectif puissent être considérés comme parallèles entre eux; dès lors l'objectif forme de cet astre une image excessivement petite située sur son second plan principal. Cette image à son tour rayonne vers l'oculaire et les rayons fournis par chacun de

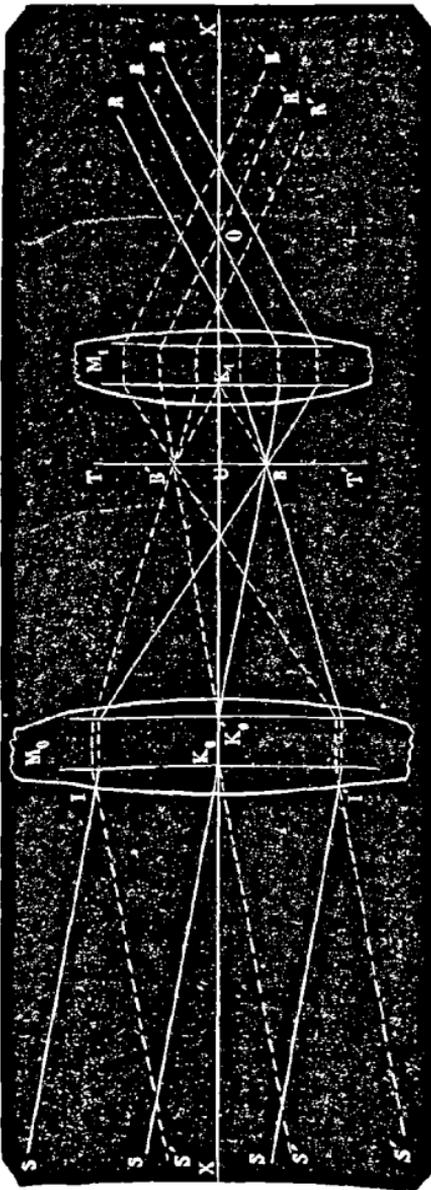


FIG. 64.

ses points émergent nécessairement parallèles entre eux. En effet :

Soit :  $SI, SK_0, S'I'$  (fig. 64) le faisceau des rayons parallèles fournis par le bord supérieur de l'astre ; tous ces rayons convergent en  $B$  sur le second plan focal  $TT'$  de l'objectif  $M_0$ . De même, tous les rayons incidents parallèles  $S'I', S'K_0, S'I$  fournis par le bord inférieur de l'astre convergent en  $B'$  sur le plan  $TT'$ . —  $BB'$  est l'image renversée de l'astre formé par l'objectif  $M_0$ .

Le point  $B$  rayonne à son tour vers l'oculaire  $M_1$  et comme ce point est sur le premier plan focal de  $M_1$ , les rayons émergents  $R, R, R$  sont tous parallèles entre eux et à la ligne de direction  $BK_1$ . Pour la même raison, aux rayons incidents fournis par le point  $B'$  correspond un faisceau de rayons émergents  $R', R', R'$  parallèles entre eux et à la ligne de direction  $B'K_1$ .

En réalité donc, l'oculaire  $M_1$  ne forme pas une image de l'astre. Mais, pour l'œil de l'observateur placé au point O, l'astre est vu à travers la lunette sous l'angle  $BK_1B'$ , tandis que, sans le secours de la lunette, l'astre était vu sous l'angle  $SK_0S' = BK'_0B'$ . Le grossissement angulaire, dans ce cas, est donc, comme nous l'avons déjà dit plus haut (97) formule (5) :

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_1}$$

101. *Lunette de Galilée.* — Tout ce que nous avons dit de la lunette astronomique s'applique à la lunette de Galilée ajustée pour un œil normal et pour un objet très-éloigné. — Dans ce cas, l'oculaire est une *lentille divergente* dont le premier foyer principal coïncide avec le second foyer principal de l'objectif, et comme la distance focale  $\varphi_1$  de l'oculaire est *négative*, nous avons toujours :

$$\varphi_0 + \varphi_1 = 0$$

Les grossissements linéaire et angulaire de la lunette sont *constants*, indépendants de la distance de l'objet visé, et inverses l'un de l'autre ; le premier a pour valeur  $\frac{\varphi_1}{\varphi_0}$  et le second  $\frac{\varphi_0}{\varphi_1}$ .

La position et les dimensions de l'anneau oculaire se déterminent de la même manière. Seulement cet anneau oculaire est *virtuel* ; l'œil de l'observateur ne peut pas l'atteindre et doit se rapprocher le plus possible de l'oculaire  $M_1$  de la lunette pour recevoir la plus grande somme de lumière émergente,

Quand l'objet visé est très-éloigné, chacun de ses points envoie à l'objectif un faisceau de rayons parallèles entre eux que l'oculaire transforme en un faisceau de rayons émergents également parallèles. — Le grossissement angulaire de la lunette, ou le rapport des tangentes des angles sous lesquels l'objet est vu à travers l'instrument et à l'œil nu, est donné par l'expression  $\frac{\varphi_0}{\varphi_1}$ .

## CHAPITRE II.

DES APPAREILS DIOPTRIQUES DANS LESQUELS LA LUMIÈRE INCIDENTE ET LA LUMIÈRE ÉMERGENTE SE MEUVENT DANS DES MILIEUX INÉGALEMENT RÉFRINGENTS.

102. Nous nous occuperons d'abord de l'action d'une surface réfringente séparant deux milieux transparents quelconques ; puis nous étudierons les propriétés des lentilles placées entre deux milieux d'indices de réfraction différents ; enfin nous déterminerons les points cardinaux d'un système de lentilles associées et séparées par des milieux transparents de nature différente.

ART. I. — ACTION D'UNE SURFACE RÉFRINGENTE PLACÉE ENTRE DEUX MILIEUX TRANSPARENTS QUELCONQUES.

103. Soient : MN (fig. 65) une calotte sphérique de très-faible amplitude placée entre deux milieux transparents quelconques, C son centre de courbure, A son centre de figure, XX' l'axe principal du système. — Appelons  $n_0$  l'indice de réfraction du premier milieu dans lequel se meut la lumière incidente,  $n_1$  l'indice du second milieu dans lequel se meut la lumière transmise. — L'indice de réfraction du second milieu par rapport au premier sera  $\frac{n_1}{n_0}$ . Nous supposerons, dans la figure 65, que la lumière pénètre par la convexité de la calotte sphérique MN et que  $n_1$  est plus grand que  $n_0$ . Nous continuerons à désigner par la lettre  $r$  le rayon de courbure de la surface réfringente MN.

Comme nous l'avons établi (22), les deux points principaux de ce système se superposent au sommet A de la surface réfringente, par suite les deux plans principaux se confondent

avec le plan tangent en A et avec la surface réfringente elle-même. — Tout rayon incident dont la direction passe par le centre de courbure C est normal à la surface réfringente et pénètre sans déviation ; par conséquent les deux points nodaux du système se confondent avec le centre de courbure C. — Nous n'avons donc à chercher que les *foyers principaux* de ce système dioptrique simple, pour compléter la détermination de ses éléments fondamentaux.

104. *Second foyer principal.* — Soient : SI (fig. 65) un rayon incident parallèle à l'axe principal et IR le rayon réfracté

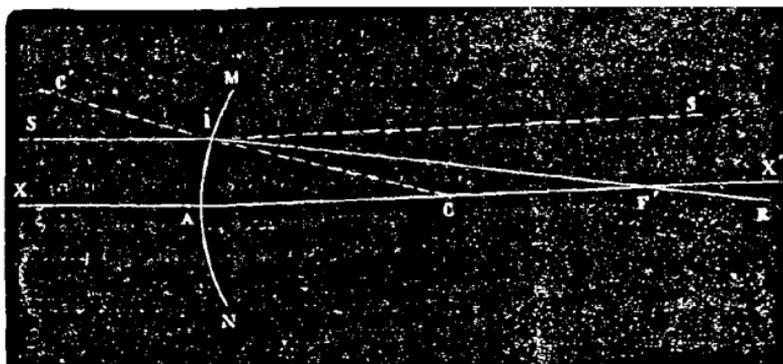


FIG. 65.

correspondant qui coupe en F' l'axe principal XX'. Nous avons d'après les lois de la réfraction :

$$\frac{\sin \angle SIC'}{\sin \angle F'IC} = \frac{n_1}{n_0}$$

Mais, par construction, l'angle SIC' est égal à l'angle ICA, de plus les angles ICA, ICF' sont *supplémentsaires*, donc :

$$\frac{\sin \angle ICF'}{\sin \angle F'IC} = \frac{n_1}{n_0}$$

D'autre part, dans le triangle ICF', les sinus des angles sont dans le rapport des côtés opposés, ce qui donne :

$$\frac{\sin \text{ICF}'}{\sin \text{F'IC}} = \frac{\text{F'I}}{\text{F'C}} = \frac{\text{F'I}}{\text{AF}' - r}$$

Donc :

$$\frac{\text{F'I}}{\text{AF}' - r} = \frac{n_1}{n_0}$$

Mais, en raison de la très-faible amplitude de la surface MN, F'I est sensiblement égal à AF'. En substituant, nous avons :

$$\text{AF}' = \frac{n_1 r}{n_1 - n_0}$$

La valeur de AF' étant indépendante de la position du point d'incidence I sur la surface réfringente, tous rayons incidents parallèles à l'axe principal sont nécessairement réfractés de manière à concourir au même point F'.

Le point F' ainsi déterminé est donc le *second foyer principal*, et la longueur AF' que nous désignerons par la lettre *f'* est la *seconde distance focale* du système, ce qui donne :

$$f' = \frac{n_1 r}{n_1 - n_0}$$

Mais nous avons aussi CF' = AF' - CA = f' - r, donc :

$$\text{CF}' = \frac{n_0 r}{n_1 - n_0}$$

405. *Premier foyer principal.* — Soient : SI (fig. 66) un rayon incident tel que le rayon réfracté correspondant IH pénètre dans le second milieu parallèlement à l'axe principal, et F le point où ce rayon incident coupe l'axe principal, nous avons :

$$\frac{\sin \text{FIC}'}{\sin \text{RIC}} = \frac{n_1}{n_0}$$

Mais l'angle d'incidence FIC' est *supplémentaire* de l'angle FIC, l'angle de réfraction RIC est égal à l'angle ICF et dans le

triangle FCI les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés, donc :

$$\frac{FC}{FI} = \frac{n_1}{n_0}$$

Mais  $FC = AF + AC = AF + r$ , et FI est sensiblement égal à AF. En substituant, nous avons :

$$AF = \frac{n_0 r}{n_1 - n_0}$$

La valeur de AF est indépendante de la position du point

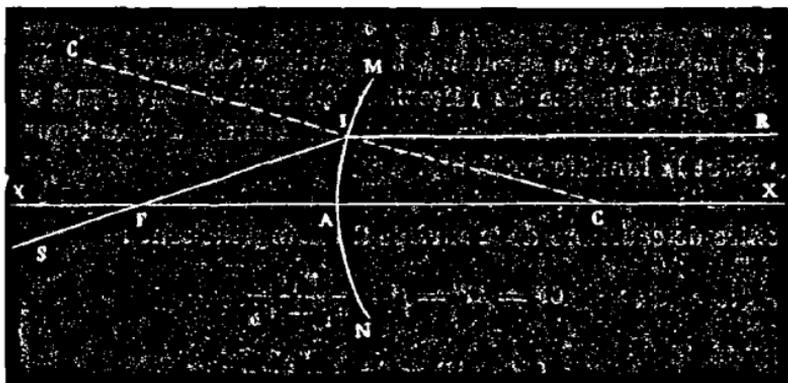


FIG. 66.

d'incidence I sur la surface réfringente, donc tous les rayons incidents qui passent par le point F pénètrent dans le second milieu parallèlement à l'axe principal.

Le point F ainsi déterminé est donc le *premier foyer principal* et AF que nous désignerons par la lettre *f* est la *première distance focale* du système, ce qui donne :

$$f = \frac{n_0 r}{n_1 - n_0}$$

Mais nous avons  $CF = AC + CA = AF + r$ , donc :

$$CF = \frac{n_1 r}{n_1 - n_0}$$

106. En résumé, dans le cas d'une surface sphérique placée entre deux milieux transparents d'indices  $n_0$ ,  $n_1$ , la position des foyers principaux est déterminée par les deux relations suivantes :

$$1^{\text{re}} \text{ distance focale : } (1) \quad \text{AF} = f = \frac{n_0 r}{n_1 - n_0}$$

$$2^{\text{e}} \text{ distance focale : } (2) \quad \text{AF}' = f' = \frac{n_1 r}{n_1 - n_0}$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{f'}{f} = \frac{n_1}{n_0}$$

Le rapport de la seconde à la première distance focale est donc égal à l'indice de réfraction du milieu dans lequel se meut la lumière transmise, par rapport au milieu dans lequel se meut la lumière incidente.

Les distances du premier et du second foyer principal au centre de courbure de la surface C réfringente sont :

$$\text{CF} = \text{AF}' = f' = \frac{n_1 r}{n_1 - n_0}$$

$$\text{CF}' = \text{AF} = f = \frac{n_0 r}{n_1 - n_0}$$

Les distances focales  $f$ ,  $f'$  sont *positives* quand les foyers principaux sont *réels*, et *négatives* quand ces foyers sont *virtuels*. — Pour que les formules (1), (2) représentent les valeurs *réelles* de  $f$ ,  $f'$  et indiquent les véritables positions des foyers principaux sur l'axe principal dans tous les cas possibles, quelles que soient les valeurs des indices  $n_0$ ,  $n_1$  et la position de la surface réfringente par rapport à la lumière incidente, il suffit de convenir que le rayon de courbure  $r$  est une quantité *positive* ou *négative* suivant que le centre de courbure C est situé du côté de la lumière *transmise* ou du côté de la lumière *incidente*.

107. *Plans focaux*. — Les plans focaux sont les plans perpendiculaires à l'axe principal menés par les foyers princi-

paux  $F, F'$ . — Ils jouissent des mêmes propriétés que dans le cas où l'air est un des deux milieux réfringents (26) et (34); on le démontrerait de la même manière.

108. *Foyer d'un point lumineux situé sur l'axe principal.* — Soit (fig. 67)  $P$  un point lumineux placé sur l'axe principal. — Les propriétés des plans focaux permettent de construire son foyer  $P'$  situé aussi sur l'axe principal. — Ces points  $P, P'$  réciproques l'un de l'autre, sont des *foyers conjugués*; les considérations développées (27) et (35) montrent qu'ils satisfont à la relation suivante :

$$PF \times P'F' = ff'$$

En faisant  $PF = l$  et  $P'F' = l'$ , la formule générale de foyers conjugués (\*) est donc :

$$(3) \quad ll' = ff'$$

109. *Foyer d'un point lumineux situé hors de l'axe principal.* — Soit  $S$  (fig. 69) au point lumineux quelconque situé hors de l'axe principal; son foyer est évidemment sur l'axe secondaire  $SCG$  mené par le point lumineux. — Les considérations développées

(\*) En procédant comme dans la note (27) et (35), on passe facile-

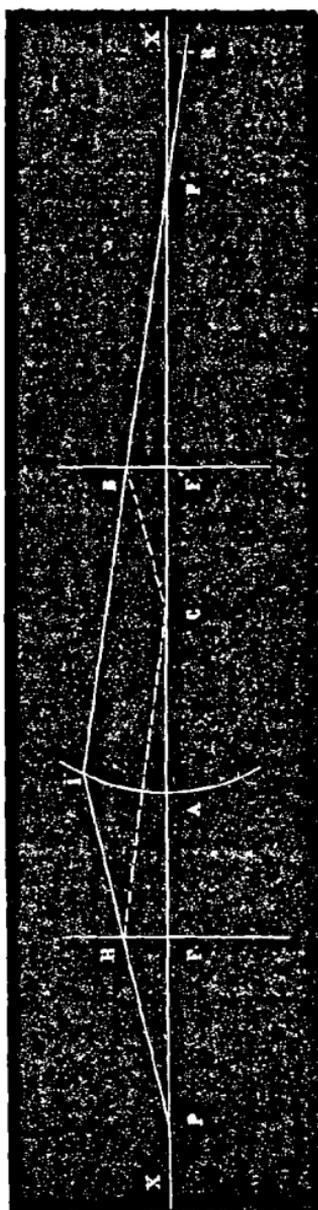


FIG. 67.

(28) et (36) serviraient à démontrer que le point lumineux  $S$  et son foyer  $S'$  satisfont aux deux relations suivantes :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} PF \times P'F' = ff' \\ \frac{S'P'}{SP} = \frac{f}{PF} \end{array} \right.$$

Lorsque les rayons incidents sont *homocentriques*, les rayons transmis le sont donc aussi. — Le point lumineux et son foyer

ment de l'équation (3) à la formule classique des foyers conjugués :

$$(a) \quad \frac{n_1}{p'} + \frac{n_0}{p} = \frac{n_0}{f} = \frac{n_1 - n_0}{r}$$

dans laquelle  $p, p'$  sont les distances  $AP, AP'$  du point lumineux  $P$  et de son foyer  $P'$  au sommet  $A$  de la surface réfringente.

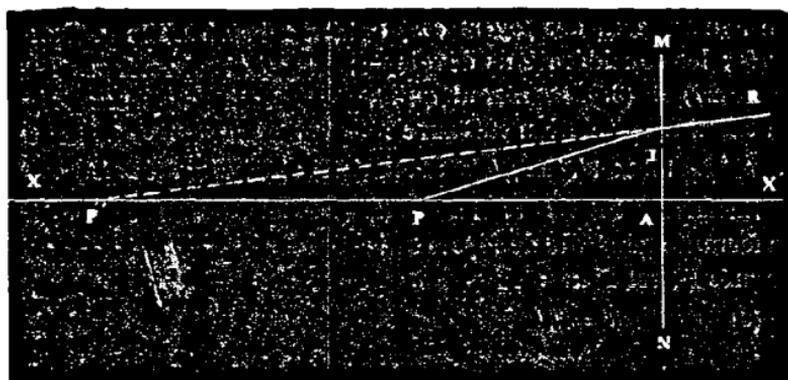


FIG. 68.

*Transmission de la lumière à travers une surface plane MN.* — Dans ce cas (fig. 68)  $r = \infty$ , ce qui donne pour formule générale des positions d'un point lumineux  $P$  et de son foyer  $P'$  :

$$(c) \quad \frac{n_1}{p'} + \frac{n_0}{p} = 0$$

$p, p'$  sont les distances  $AP, AP'$  du point lumineux  $P$  et de son foyer  $P'$  à la surface réfringente plane, comptées sur la perpendiculaire  $XX'$  à cette surface menée par le point lumineux  $P$ .



placées dans l'air qu'en ce que les *points nodaux* ne se confondent pas avec les *points principaux*. — Nous aurons donc à considérer, dans ces systèmes dioptriques, *six points cardinaux*; la méthode suivie jusqu'ici nous permettra de déterminer leur position sur l'axe principal. — Nous avons vu (109) qu'une surface réfringente placée entre deux milieux quelconques fait concourir les rayons transmis en un même point, lorsque les rayons incidents sont *homocentriques*. Il en résulte évidemment qu'un faisceau incident *homocentrique* émerge *homocentrique* d'un système composé d'un nombre quelconque de surfaces séparées par des milieux transparents quelconques.

Étant donnée la lentille MN (fig. 70), les lettres  $n_0, n_1, n_2$  désignent les indices de réfraction du premier milieu dans lequel se meut la lumière incidente, de la substance de la lentille, et du dernier milieu dans lequel émerge la lumière. — Pour fixer les idées, nous supposerons  $n_1$  plus grand que  $n_0$  et que  $n_2$ ;  $n_0$  n'est pas égal à  $n_2$ . — Si nous appelons  $r, r'$  les rayons de courbure de la première face A et de la deuxième face A' de la lentille MN, nous aurons (106) formules (1) et (2) :

Pour la première surface réfringente A :

$$1^{\text{re}} \text{ distance focale : } f_0 = \frac{n_1 r}{n_1 - n_0}$$

$$2^{\text{e}} \text{ distance focale : } f'_0 = \frac{n_1 r}{n_1 - n_0}$$

Pour la seconde surface réfringente A' :

$$1^{\text{re}} \text{ distance focale : } f_1 = \frac{n_2 r'}{n_2 - n_1}$$

$$2^{\text{e}} \text{ distance focale : } f'_1 = \frac{n_2 r'}{n_2 - n_1}$$

Dans ces formules, les rayons de courbure  $r, r'$  sont *positifs* ou *negatifs* suivant que le centre de courbure est du côté de la lumière émergente ou du côté de la lumière incidente.

113. *Points principaux. — Plans principaux.* — Soit MN

(fig. 70) la lentille placée entre deux milieux transparents de nature différente. — Prenons sur l'axe principal  $Aa = f_0$ ,  $Aa' = f'_0$  les deux distances focales de la première face A de la lentille, et  $A'b = f_1$ ,  $A'b' = f'_1$  les deux distances focales de la seconde face A'. — Menons la droite LL' parallèle à l'axe principal et joignons les points I, I' où cette droite perce les deux faces de la lentille aux points a' et b. — Enfin du point S où les deux droites Ia', Ib se coupent, abaissons la perpendiculaire SO sur l'axe principal. — On prouverait par les considérations développées (42) que le pied O de cette perpendiculaire partage l'épaisseur  $AA' = e$  de la lentille en deux parties qui satisfont aux conditions suivantes :

$$\frac{AO}{A'O} = \frac{Aa'}{A'b} = \frac{f'_0}{f_1}$$

et

$$AO + A'O = e$$

d'où l'on tire :

$$AO = \frac{ef'_0}{f'_0 + f_1}$$

$$A'O = \frac{ef_1}{f'_0 + f_1}$$

Construisons les images DE, D'E' de la ligne SO regardée

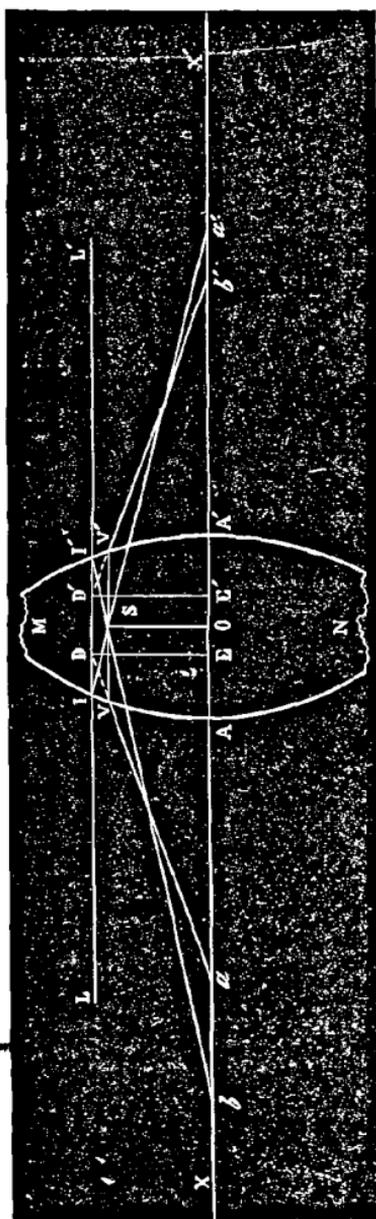


FIG 70.

successivement à travers les faces A, A'. Il résulte évidemment de la construction que ces deux images sont droites et de même grandeur. Donc :

1<sup>o</sup> Les plans perpendiculaires à l'axe principal menés par DE, D'E' sont le *premier* et le *second plan principal* de la lentille.

2<sup>o</sup> Les deux points E, E' images du point O sont le *premier* et le *second point principal* de la lentille.

D'ailleurs en suivant la marche précédemment adoptée (44), on démontrerait que la position de ces points principaux est déterminée par les deux relations suivantes :

$$AE = \frac{ef_0}{f'_0 + f_1 - e} \quad A'E' = \frac{ef'_1}{f'_0 + f_1 - e}$$

44. *Foyers principaux. — Distances focales.* — Connaissant la position des points et des plans principaux, il est facile de déterminer la situation des foyers principaux sur l'axe principal et la valeur des distances focales.

Soient (fig. 71) : E, E' les deux points principaux de la lentille,  $a'$  le second foyer principal de la première face A, SI un rayon incident parallèle à l'axe principal dont le prolongement perce en D' le second plan principal de la lentille. — Ce point D' appartient nécessairement à la direction du rayon émergent correspondant au rayon incident SI. — Mais la première face A réfracte le rayon incident SI suivant Ia' qui perce la seconde face A' en un point I' évidemment situé sur le rayon émergent. — D'I'R est donc le rayon émergent, et le point F' où il coupe l'axe principal est le *second foyer principal* de la lentille.

En suivant la marche précédemment adoptée (45) on trouve facilement pour la valeur de la *seconde distance focale* de la lentille  $E'F' = \varphi'$  :

$$\varphi' = \frac{f'_0 f'_1}{f'_0 + f_1 - e}$$

Une construction analogue donnerait pour valeur de la *première distance focale* de la lentille  $EF = \varphi$  :

$$\varphi = \frac{f_0 f_1}{f'_0 + f_1 - e}$$

Dans ce cas donc, les distances focales de la lentille ne sont pas égales. Mais d'après les relations établies (112)

$f'_0 = \frac{n_1}{n_0} f_0$ ,  $f'_1 = \frac{n_2}{n_1} f_1$ . — La substitution dans ces valeurs dans l'expression de  $\varphi'$ , donne :

$$\varphi' = \frac{n_2}{n_0} \times \frac{f_0 f_1}{f'_0 + f_1 - e}$$

d'où l'on tire :

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{n_2}{n_0}$$

Lors donc qu'une lentille est placée entre deux milieux de nature différente, le rapport de la seconde à la première distance focale est égal au rapport de l'indice de réfraction du milieu dans lequel se meut la lumière émergente à celui du milieu dans lequel se meut la lumière incidente.

Quand ce premier et ce dernier milieu sont de même nature  $n_2 = n_0$ ,  $\frac{\varphi'}{\varphi} = 1$ , les deux distances focales de la lentille sont égales.

• 115. *Points nodaux.* — Avant de procéder à la détermination des points nodaux, prouvons que les rayons incidents four-

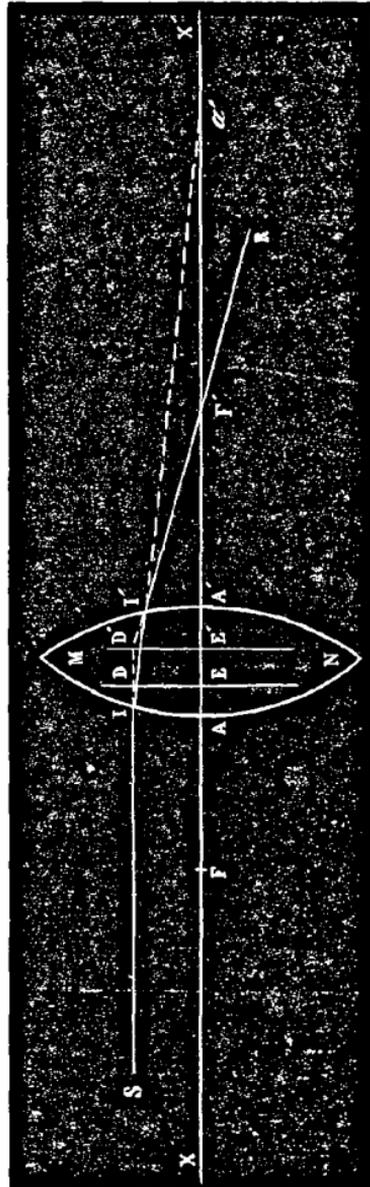


FIG. 71.

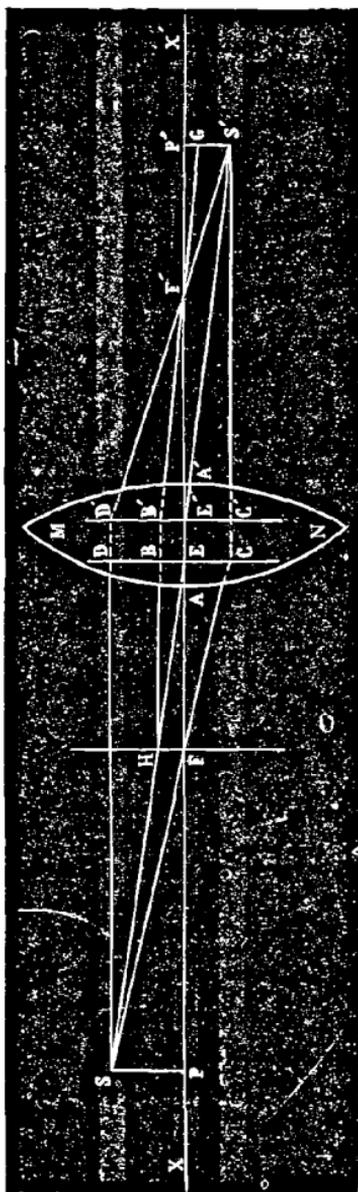


FIG. 72.

nis par un point lumineux  $H$  placé sur le premier plan focal  $F$  émergent parallèles entre eux.

116. Le point lumineux  $H$  (fig. 72) fournit un rayon  $HB$  parallèle à l'axe principal qui émerge nécessairement suivant la ligne  $B'G$  qui passe par le second foyer principal  $F'$ . — Du point  $H$  part un second rayon incident  $HE$  dont le prolongement passe par le premier point principal  $E$ ; le second point principal  $E'$  appartient à la direction du rayon émergent correspondant. Pour déterminer un second point de ce rayon émergent, prenons pour point lumineux un point quelconque  $S$  du prolongement de  $HE$ .

L'image du point  $S$  est nécessairement en  $S'$  au point d'entrecroisement des rayons émergents  $D'S'$ ,  $C'S'$  correspondants aux rayons incidents  $SD$ ,  $SC$ . —  $E'S'$  est donc le rayon émergent correspondant au rayon incident  $SE$ . — Il s'agit de démontrer le parallélisme des deux rayons émergents  $B'G$ ,  $E'S'$  correspondants aux deux rayons incidents  $HB$ ,  $HE$  qui se croisent au point  $H$  du premier plan focal  $F$ .

Les deux triangles rectangles  $F'D'E'$ ,  $F'S'P'$  sont semblables par construction et donnent :

$$\frac{E'D'}{S'P'} = \frac{E'F'}{P'F'}$$

Par la même raison, les triangles rectangles  $FSP$ ,  $FCE$  donnent :

$$\frac{SP}{CE} = \frac{PF}{EF}$$

Donc :

$$\frac{PF}{EF} = \frac{E'F'}{P'F'}$$

Les deux couples de triangles semblables  $F'D'B'$ ,  $F'S'G$  et  $F'B'E'$ ,  $F'GP'$  donnent :

$$\frac{B'D'}{S'G} = \frac{B'F'}{F'G} = \frac{E'F'}{P'F'}$$

D'où :

$$\frac{B'D'}{S'G} = \frac{PF}{EF}$$

Mais les triangles  $ESP$ ,  $EHF$  sont aussi semblables, et

$$\frac{SP}{HF} = \frac{EP}{EF}$$

Ou :

$$\frac{SP - HF}{HF} = \frac{B'D'}{B'E'} = \frac{EP - EF}{EF} = \frac{PF}{EF}$$

D'où :

$$\frac{B'D'}{S'G} = \frac{B'D'}{B'E'}$$

Et :

$$S'G = B'E'$$

Donc enfin les deux rayons émergents  $E'S'$ ,  $B'G$  sont parallèles, le foyer du point lumineux  $H$  est à l'*infini* et tous les rayons émanés d'un point  $H$  situé sur le premier plan focal  $F$  émergent parallèlement entre eux.

117. Cela posé, il est facile de construire géométriquement

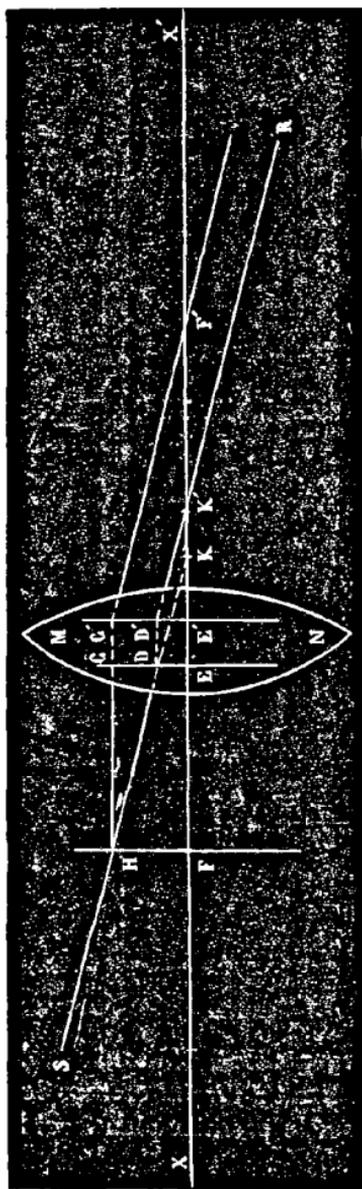


FIG. 73.

les deux points nodaux de la lentille. — A partir du premier foyer principal  $F$ , prenons (fig. 73) sur l'axe principal une distance  $FK = E'F'$ , et menons le rayon incident  $SK$  dont le prolongement passe par le point  $K$  ainsi déterminé.

Ce rayon incident perce en  $D$  le premier plan principal, le point  $D'$  du second plan principal appartient donc à la direction du rayon émergent correspondant. Mais ce rayon incident  $SK$  peut être considéré comme fourni par le point  $H$  où il perce le premier plan focal  $F$ , le rayon émergent correspondant  $D'R$  est donc parallèle à  $C'F'$ .

Or  $KF$  a été pris égal  $E'F'$  et par construction  $HF = C'F'$ , donc les triangles rectangles  $KHF$ ,  $F'C'E'$  sont égaux et  $C'F'$  est parallèle au rayon incident  $SK$ . Il en résulte que le rayon incident  $SK$  et le rayon émergent correspondant  $D'R$  sont parallèles et que  $KK' = DD' = EE'$ , nous avons donc :

$$FK = F'E'$$

$$KK' = E'E$$

D'où en ajoutant membre à membre  $FK' = F'E$ .

Donc  $K'F' = EF$ .

Le point  $K'$  se trouve ainsi déterminé indépendamment de toute hypothèse sur l'inclinaison du rayon incident  $SK$ , les points  $K, K'$  sont donc des foyers conjugués et tout rayon incident dont la direction passe par  $K$  émerge suivant une droite parallèle au rayon incident menée par  $K'$ ; les points  $K, K'$  sont le *premier* et le *second point nodal* de la lentille.

118. Les éléments fondamentaux de la lentille placée entre deux milieux de nature différente se trouvent donc complètement déterminés par les relations suivantes :

1° Pour la position des deux points principaux  $E, E'$  ;

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} AE = \frac{ef_0}{f'_0 + f_1 - e} \\ A'E' = \frac{ef'_1}{f'_0 + f_1 - e} \end{array} \right.$$

2° Pour les valeurs des deux distances focales  $EF, E'F$  ;

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{f_0 f_1}{f'_0 + f_1 - e} \\ \varphi' = \frac{f'_0 f'_1}{f'_0 + f_1 - e} \end{array} \right.$$

Nous savons d'ailleurs (114) que le rapport de la seconde à la première distance focale est égal au rapport de l'indice  $n_2$  du dernier milieu réfringent à l'indice  $n_0$  du premier ;

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{n_2}{n_0}$$

3° Les deux points nodaux  $K, K'$  satisfont aux deux conditions :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} KF = E'F' = \varphi' \\ K'F' = EF = \varphi \end{array} \right.$$

En continuant à admettre les conventions déjà adoptées pour les signes des quantités  $AE, A'E', \varphi, \varphi'$  et des rayons de courbure des surfaces réfringentes, ces formules restent vraies quelles que soient les valeurs des indices de réfraction  $n_0, n_1, n_2$  des trois milieux transparents que la lumière traverse, et représentent les éléments fondamentaux d'une lentille de forme quelconque placée entre deux milieux d'indices quelconques.

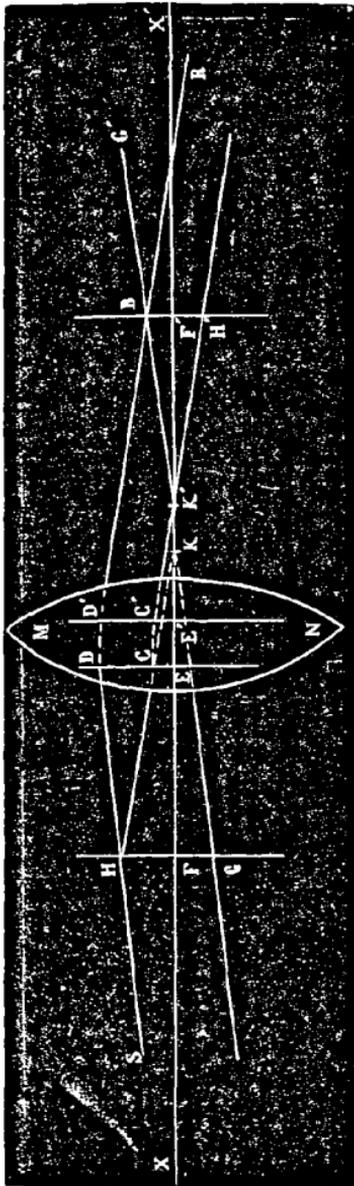


FIG. 74.

119. *Plans focaux.* — Les propriétés des plans focaux sont les mêmes que celles des plans focaux d'une lentille placée dans l'air. En effet :

1° Nous avons vu (116) que tous les rayons incidents qui se croisent en un point H (fig. 74) du premier plan focal F émergent parallèlement entre eux. Mais il est un de ces rayons incidents dont la direction passe par le premier point nodal K et qui émerge suivant une parallèle au rayon incident mené par le second point nodal K'.

Donc lorsqu'un point lumineux est sur le premier plan focal, les rayons émergents sont tous parallèles à la ligne de direction qui joint le point lumineux au premier point nodal. — Dans le cas particulier où le point lumineux est au premier foyer principal F, les rayons émergents sont tous parallèles à l'axe principal.

2° Soit SD (fig. 74) un rayon incident quelconque qui perce en H le premier plan focal F, et en D le premier plan principal E, le point D' du second plan principal E' appartient à la direction du rayon émergent. — Menons un rayon incident

GK parallèle à SD et qui passe par le premier point nodal K ; ce rayon émerge suivant K'G' parallèle à GK. — La droite D'R menée par D' et par le point B où K'G' perce le second plan focal F' est le rayon émergent correspondant au rayon incident SD. — En effet, ce rayon incident SD, perçant le premier plan focal en H, doit émerger parallèlement aux lignes de direction HK, K'H'. — Or, par construction, les lignes K'B, KG sont parallèles ainsi que les lignes K'H', KH, les deux triangles KHG, K'H'B sont donc semblables et nous avons :

$$\frac{HG}{BH'} = \frac{KF}{K'F'} = EF$$

Mais, d'autre part, HD étant parallèle à GK, les deux triangles KHG, HCD sont semblables et donnent :

$$\frac{HG}{CD} = \frac{KH}{C'D'} = \frac{KF}{CH} = \frac{KF}{EF}$$

D'où :

$$\frac{HG}{C'D'} = \frac{HG}{BH'}$$

Donc C'D' = BH', D'B est parallèle à C'H' et, comme il fallait le démontrer, D'R rayon émergent correspondant au rayon incident SD passe par le point B du second plan focal. — Or, le point B ainsi déterminé reste évidemment le même pour tous les rayons incidents parallèles à SD.

Donc le foyer d'un faisceau de rayons incidents parallèles entre eux est sur le second plan focal F' au point B où ce plan est percé par la ligne de direction parallèle aux rayons incidents menée par le second point nodal K'. — Dans le cas particulier où les rayons incidents sont parallèles à l'axe principal, le foyer des rayons émergents est au second foyer principal F'.

Un rayon incident quelconque SD et le rayon émergent correspondant D'R, doivent donc satisfaire aux conditions suivantes : — La ligne de direction HK menée du point où le rayon incident perce le premier plan focal F au premier point nodal K est parallèle au rayon émergent D'R ; — le rayon in-

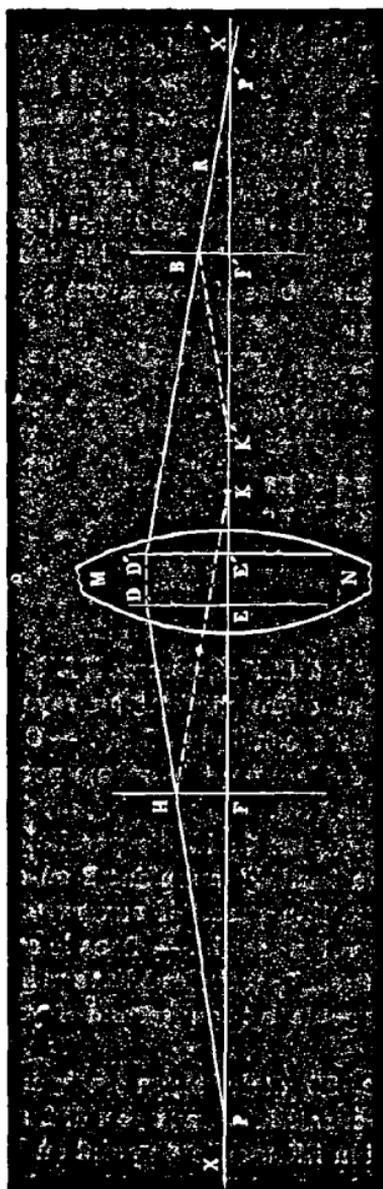


Fig. 75.

cident  $SD$  est parallèle à la ligne de direction  $K'B$  qui joint le second point nodal  $K'$  au point où le rayon émergent  $D'R$  perce le second plan focal  $F'$ . — Il est donc toujours facile de construire géométriquement le rayon émergent correspondant à un rayon incident quelconque.

120. *Foyer d'un point lumineux placé sur l'axe principal.* — Soit  $P$  (fig. 75) un point lumineux quelconque situé sur l'axe principal. Le rayon incident quelconque  $PD$  émerge suivant la ligne  $D'R$  telle que  $HK$  est parallèle à un rayon émergent  $D'R$  et  $K'B$  au rayon incident  $PD$ .

Les triangles rectangles semblables  $PHF$ ,  $K'BF'$  donnent :

$$\frac{PF}{K'F'} = \frac{HF}{BF'}$$

D'autre part, les triangles rectangles semblables  $KHF$ ,  $P'BF'$  donnent :

$$\frac{KF}{P'F'} = \frac{HF}{BF'}$$

D'où :

$$PF \times P'F' = EF \times E'F' = \varphi\varphi'$$

Le point  $P'$  ainsi déterminé indépendamment de l'incli-

raison du rayon incident sur l'axe principal est le foyer des rayons émergents.

Si nous continuons à faire  $PF=l$ ,  $P'F'=l'$ , nous aurons pour formule générale (\*) des foyers conjugués P, P' :

$$(A) \quad l' = \varphi\varphi'$$

121. *Foyer d'un point lumineux situé hors de l'axe principal.* — Soit S (fig. 76) un point lumineux quelconque situé hors de l'axe principal. Le rayon incident SK dont le prolongement passe par le premier point nodal, émerge suivant K'S' parallèles à SK. Les deux lignes parallèles SK, K'S' sont les *lignes de direction* et le foyer du point lumineux S est nécessairement sur K'S'. — Le point S fournit en outre deux rayons incidents : SD parallèle à l'axe principal, SC qui passe par le premier foyer principal F ; le premier émerge suivant D'S' qui passe par le second foyer principal F', et le second suivant C'S' parallèle à l'axe principal. — Le foyer du point lumineux S est donc au point S' où ces deux rayons émergents se coupent sur la ligne de direction K'S'.

Du point S et de son foyer S' abaissons les deux perpendi-

(\*) En comptant les longueurs à partir des points principaux E, E', et en faisant  $PE=p$ ,  $P'E'=p'$ , on a :

$$l = p - \varphi$$

$$l' = p' - \varphi'$$

D'où en substituant :

$$(p - \varphi)(p' - \varphi') = \varphi\varphi'$$

$$p\varphi' + p'\varphi = pp'$$

En tenant compte de la relative  $\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{n_2}{n_0}$ , on obtient pour formule générale des foyers conjugués :

$$\frac{n_2}{p'} + \frac{n_0}{p} = \frac{n_0}{\varphi}$$

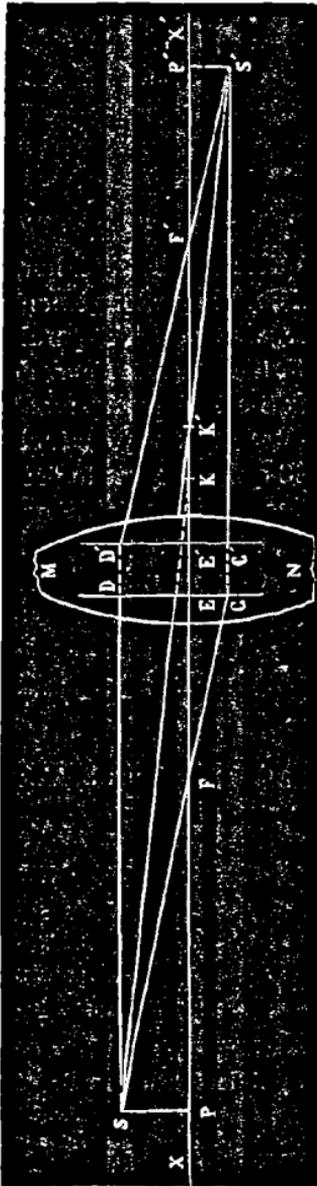


FIG. 76.

culaires  $SP$ ,  $S'P'$  sur l'axe principal; nous avons deux couples de triangles semblables  $FSP$ ,  $FEC$  et  $F'D'E'$ ,  $F'S'P'$  qui donnent :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} PF \times F/F' = \varphi\varphi' \\ \frac{S'P'}{SP} = \frac{\varphi}{PF} \end{array} \right.$$

Ces deux relations déterminent la position du foyer  $S'$  du point lumineux  $S$  situé hors de l'axe principal.

Ces deux relations montrent, en outre, que si des points lumineux sont placés sur un plan perpendiculaire à l'axe principal mené par  $SP$ , leurs foyers seront sur le plan perpendiculaire à l'axe principal mené par  $S'P'$ . Enfin il est facile de voir que ces points lumineux et leurs foyers seront semblablement distribués sur ces deux plans.

122. *Rapports de position et de grandeur d'un objet et de son image.* — Prenons  $SP$  (fig. 76) pour un objet lumineux ou éclairé, il résulte des considérations précédentes que  $S'P'$  est son image. — L'objet étant donné, la position de son image est déterminée par la première des équations (5), et la seconde de ces équations exprime le rapport de grandeur de l'image et de l'objet.

123. *Propriété remarquable des plans principaux.* — Soient : (fig. 77) E, E' les points principaux, TT, T'T' les plans principaux, K, K' les points nodaux, F, F' les foyers principaux d'une lentille quelconque M placée entre un milieu d'indice  $n_0$  et un milieu d'indice  $n_2$ . Supprimons la lentille M et séparons les deux milieux d'indice  $n_0, n_2$  par une surface sphérique dont le sommet soit en E au premier point principal, et le centre en K au premier point nodal. — Cette surface réfringente de rayon de courbure  $r = KE$  se confond sensiblement avec le plan principal TT dans le voisinage de l'axe principal XX'.

Si nous continuons à désigner par les lettres  $\varphi, \varphi'$  les distances focales EF, E'F' de la lentille M, nous aurons par construction :

$$KE = FK - FE = \varphi' - \varphi$$

Mais, d'autre part, nous savons que :

$$\varphi' = \frac{n_2}{n_0} \varphi$$

Ce qui donne pour valeur de rayon de courbure de la

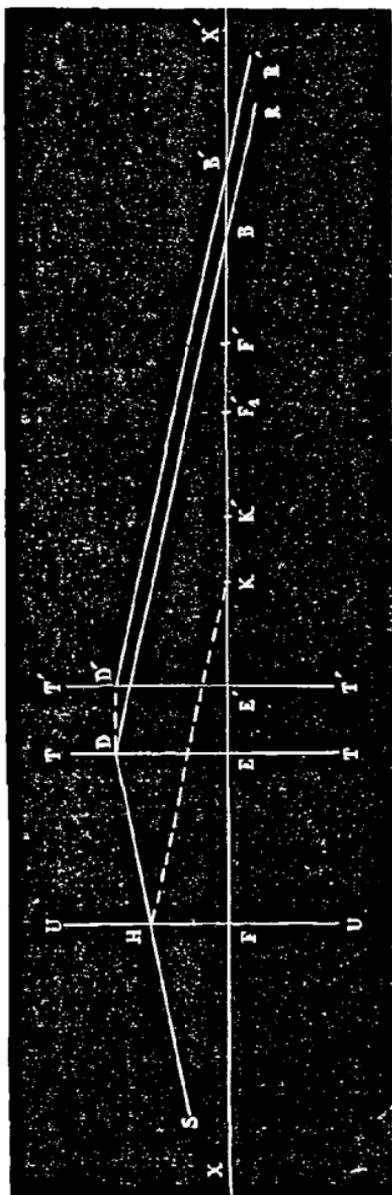


FIG. 77.

surface sphérique dont le sommet est en E et le centre en K.

$$r = KE = \varphi' - \varphi = \frac{n_2 - n_0}{n_0} \varphi$$

Où encore :

$$r = KE = \varphi' - \varphi = \frac{n_2 - n_0}{n_2} \varphi'$$

Si nous appelons  $f$ ,  $f'$  les distances focales de cette surface sphérique placée entre les milieux d'indices  $n_0$ ,  $n_2$ , nous avons :

$$f = \frac{n_0 r}{n_2 - n_0} \quad f' = \frac{n_2 r}{n_2 - n_0}$$

La substitution des valeurs de  $r$  dans ces deux équations donne :

$$f = \varphi \quad f' = \varphi'$$

Les distances focales de la surface sphérique sont donc égales à celles de la lentille M qu'elle remplace. Le point F est à la fois le premier foyer principal de la lentille et de la surface sphérique et UU est leur premier plan focal commun. Le second foyer principal de la surface sphérique est en F'<sub>1</sub> point tel que F'<sub>1</sub>F' = EE' = KK'.

Cela posé, soit SD un rayon incident quelconque qui perce en H le plan focal UU. — D'après les propriétés des plans focaux, la surface sphérique réfracte ce rayon suivant DR parallèle à HK, et la lentille M l'aurait réfracté suivant D'R' parallèle à la même ligne de direction HK. — Ces deux rayons DR, D'R', correspondants au même rayon incident SD et transmis le premier par la surface sphérique de rayon  $r = KE$ , le second par la lentille M, sont donc parallèles entre eux et coupent l'axe principal XX' en des points B, B' tels que BB' = DD' = EE' = KK'.

Étant donnée une lentille M placée entre deux milieux d'indices  $n_0$ ,  $n_2$ , on peut donc remplacer cette lentille par une simple surface sphérique dont le sommet soit au premier point principal E et le centre au premier point nodal K. — Les rayons transmis par la surface sphérique sont parallèles

à ceux qu'aurait transmis la lentille M; pour déterminer les positions réelles des rayons transmis par la lentille, il suffit de transporter parallèlement à eux-mêmes et d'une distance  $BB'$ , comptée sur l'axe principal, égale à l'intervalle  $EE'$  des deux points principaux, les rayons transmis par la surface sphérique de rayon KE.

ART. III. — DES ASSOCIATIONS DE LENTILLES SÉPARÉES PAR DES MILIEUX TRANSPARENTS QUELCONQUES.

124. La marche adoptée dans l'étude des associations de lentilles placées dans l'air permettrait évidemment de déterminer les points principaux, les foyers principaux, les distances focales et par conséquent les points nodaux d'un système de deux lentilles séparées par des milieux quelconques et cette détermination pourrait être successivement étendue au cas de trois et quatre lentilles associées. Nous nous contenterons de montrer comment, sans s'écarter de la méthode géométrique, on peut résoudre toutes les questions relatives au trajet de la lumière à travers un appareil dans lequel sont réalisées les conditions optiques de l'organe de la vision.

125. Soit  $M_1$  (fig. 78) une lentille biconvexe d'indice de réfraction  $n_2$  plongée dans un milieu transparent d'indice  $n_1 < n_2$ ; ce milieu est indéfiniment prolongé en arrière de la seconde face  $A''$  de la lentille; en avant de la première face  $A'$  de la lentille, ce milieu est terminé par une surface convexe  $M_0$ . Cette surface  $M_0$  et la lentille  $M_1$  sont centrées sur une même droite  $XX'$  qui est l'axe principal du système; le centre de courbure de la surface  $M_0$  se confond avec le sommet  $A''$  de la seconde face de la lentille ou du moins est excessivement rapproché de ce point  $A''$ . — La lumière incidente se meut dans l'air et pénètre par la surface convexe  $M_0$ ; la lumière émergente se meut dans le milieu transparent d'indice de réfraction  $n_1$ .

Appelons  $r, r', r''$  les rayons de courbure des surfaces réfringentes  $A, A', A''$ ; d'après les conventions précédemment adoptées (106), les deux premiers rayons de courbure  $r, r'$  sont *positifs*, le troisième  $r''$  est *négalif*. — Les foyers principaux de ces trois surfaces réfringentes sont *réels* et leurs distances focales sont déterminées par les relations suivantes :

1<sup>re</sup> surface réfringente  $A$ .

$$1^{\text{re}} \text{ distance focale : } f_0 = \frac{r}{n_1 - 1}$$

$$2^{\text{e}} \text{ distance focale : } f'_0 = \frac{n_1 r}{n_1 - 1}$$

2<sup>e</sup> surface réfringente  $A'$ .

$$1^{\text{re}} \text{ distance focale : } f_1 = \frac{n_1 r'}{n_2 - n_1}$$

$$2^{\text{e}} \text{ distance focale : } f'_1 = \frac{n_2 r'}{n_2 - n_1}$$

3<sup>e</sup> surface réfringente  $A''$ .

$$1^{\text{re}} \text{ distance focale : } f_2 = \frac{n_2 r''}{n_1 - n_2}$$

$$2^{\text{e}} \text{ distance focale : } f'_2 = \frac{n_1 r''}{n_1 - n_2}$$

Les foyers principaux de la lentille  $M_1$  sont réels, puisque son indice  $n_2$  est plus grand que l'indice  $n_1$  du milieu dans lequel elle est placée; ses distances focales sont positives et égales, nous désignons leur valeur commune par la lettre  $\psi$ . En faisant  $A'A'' = \varepsilon$ , nous avons :

$$(1) \quad \psi = \frac{\varepsilon f_1 f_2}{f'_1 + f_2 - \varepsilon}$$

La position des points  $N, N'$ , qui sont à la fois les points principaux et les points nodaux de la lentille  $M_1$  est déterminée par les relations :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} A'N = \frac{\varepsilon f_1}{f'_1 + f_2 - \varepsilon} \\ A''N' = \frac{\varepsilon f'_2}{f'_1 + f_2 - \varepsilon} \end{array} \right.$$

126. *Points et plans principaux du système.* — Soient : (fig. 78)  $a, a'$  les foyers principaux de la première surface réfringente  $M_0$ ,  $b, b'$  les foyers principaux de la lentille  $M_1$ . — La droite  $LL'$ , parallèle à l'axe principal, perce en  $I$  la surface  $M_0$ , en  $I'$  le premier plan principal  $N$  de la lentille  $M_1$ . Du point  $S$ , où se coupent les droites  $la', l'b$ , abaissons une perpendiculaire sur l'axe principal.

En raison de la très-faible amplitude de la surface  $M_0$ , l'arc  $AI$  se confond avec la perpendiculaire en  $A$  à l'axe principal, et l'on peut, sans erreur sensible, faire  $AI = I'N$ . Cela posé, des deux couples de triangles semblables,  $a'IA, a'SO, b'I'N, b'SO$ , on tire :

$$\frac{AO}{NO} = \frac{Aa'}{Nb} = \frac{f'_0}{\psi}$$

Si nous faisons  $AN = e$ , nous avons :

$$AO + NO = e$$

D'où :

$$AO = \frac{ef'_0}{f'_0 + \psi}$$

$$NO = \frac{e\psi}{f'_0 + \psi}$$

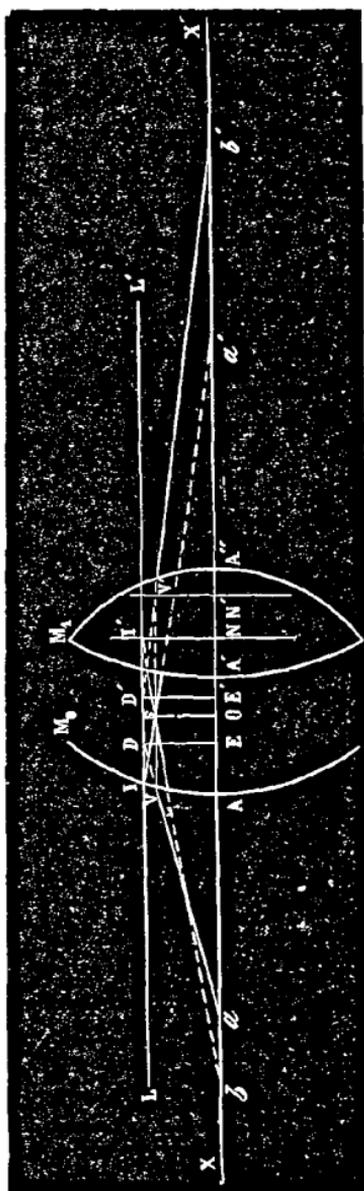


FIG. 78.

Le point O étant ainsi déterminé, prenons la perpendiculaire SO pour un objet qui rayonne à la fois vers la surface réfringente  $M_0$  et vers la lentille  $M'_1$ . Le point S fournit un rayon parallèle à l'axe principal SV, qui rencontre en V la surface  $M_0$ , et est réfracté suivant Va; ce point S fournit aussi un rayon parallèle à l'axe principal, dont le prolongement perce en V' le second plan principal de la lentille  $M_1$ , et qui est réfracté suivant V'b'. — DE est l'image de SO regardé à travers la surface  $M_0$ ; D'E' est l'image de SO regardé à travers la lentille  $M_1$ . Ces deux images de SO sont droites et de même grandeur. Les plans perpendiculaires à l'axe principal menés par DE, D'E' sont donc les *plans principaux* du système, et les points E, E', images du point O, sont ses *points principaux*.

Pour déterminer la position du point E, nous avons les deux couples de triangles rectangles semblables, a'IA, a'SO et aDE, aVA, qui donnent, en tenant compte des relations

$$IA = DE, VA = SO \text{ et } AO = \frac{ef'_0}{f'_0 + \psi} :$$

$$AE = \frac{ef_0}{f'_0 + \psi - e}$$

Pour déterminer la position du point E', nous avons les deux couples de triangles rectangles semblables, b'IN, b'SO et b'D'E', b'V'N', qui donnent, en tenant compte des relations

$$IN = D'E', V'N' = SO \text{ et } NO = \frac{e\psi}{f'_0 + \psi} :$$

$$N'E' = \frac{e\psi}{f'_0 + \psi - e}$$

La distance du point N' au sommet A' de la seconde face de la lentille  $M_1$  étant donnée par la seconde des équations (2), les positions sur l'axe principal des deux points principaux du système se trouvent ainsi déterminées.

127. *Foyers principaux.* — *Distances focales.* — Ces dernières relations permettent de déterminer géométriquement la po-

sition des foyers principaux et la valeur des distances focales du système.

Soit, en effet,  $SI$  (fig. 79), un rayon incident parallèle à l'axe principal, dont le prolongement perce en  $D'$  le second plan principal  $E'$  du système; ce point  $D'$  appartient nécessairement à la direction du rayon émergent. Soit, en outre,  $a'$  le second foyer principal de la première surface  $M_0$  de l'appareil.

La première surface  $M_0$  réfracte  $SI$  suivant  $Ia'$ , qui perce en  $C$  le premier plan principal  $N$  de la lentille  $M_1$ ; le point  $C'$  appartient donc aussi à la direction du rayon émergent correspondant au rayon incident  $SI$ . Le rayon émergent  $D'C'R$ , ainsi déterminé, coupe l'axe principal au point  $F'$ , qui est nécessairement le *second foyer principal* du système dont  $E'F'$  est la *seconde distance focale*.

Pour déterminer cette seconde distance focale  $E'F' = \phi'$  nous avons les deux couples de triangles semblables  $a'IA$ ,  $a'CN$ , et  $F'D'E'$ ,  $F'C'N'$ .

En tenant compte des re-

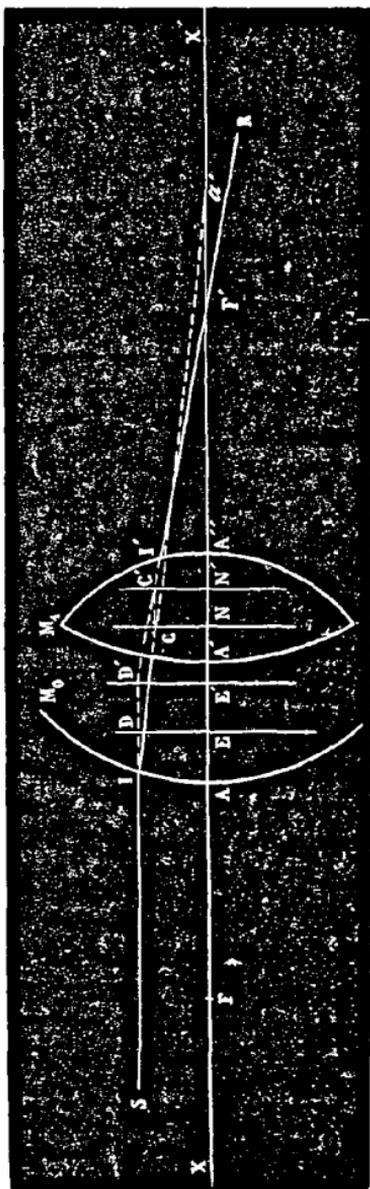


FIG. 79

lations  $IA = D'E'$ ,  $CN = C'N'$ , et  $N'E' = \frac{e\psi}{f'_0 + \psi - e}$ , on obtient facilement :

$$\varphi' = E'F' = \frac{f'_0\psi}{f'_0 + \psi - e}$$

Une construction analogue donnerait pour valeur de la première distance focale  $EF = \varphi$  du système :

$$\varphi = EF = \frac{f_0\psi}{f_0 + \psi - e}$$

Les positions sur l'axe principal des deux foyers principaux  $F$ ,  $F'$  du système et les valeurs de ces deux distances focales  $EF = \varphi$ ,  $E'F' = \varphi'$  sont ainsi complètement déterminées, et nous avons :

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{f'_0}{f_0} = n_1$$

Dans ce cas donc, comme toujours, le rapport de la seconde à la première distance focale est égal au rapport de l'indice de réfraction du milieu dans lequel se meut la lumière émergente à l'indice du milieu dans lequel se meut la lumière incidente.

128. *Points nodaux.* — En suivant la marche adoptée (115), (116) et (117), on démontrerait que les points  $K, K'$  de l'axe principal (fig. 80) déterminés par les relations  $KF = F'F' = \varphi'$ ,  $K'F' = EF = \varphi$  sont le premier et le second point nodal du système.

129. L'action de ce système dioptrique sur la lumière est donc la même que celle d'une lentille dont les éléments fondamentaux sont déterminés par les relations suivantes :

1° Pour les deux points principaux  $E, E'$  :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} AE = \frac{ef_0}{f_0 + \psi - e} \\ N'E' = \frac{e\psi}{f'_0 + \psi - e} \end{array} \right.$$

2° Pour la valeur des deux distances focales  $EF, E'F'$  :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = EF = \frac{f_0 \psi}{f'_0 + \psi - e} \\ \varphi' = E'F' = \frac{f'_0 \psi}{f'_0 + \psi - e} \end{array} \right.$$

D'où l'on tire pour le rapport de la seconde à la première distance focale :

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{f'_0}{f_0} = n_1$$

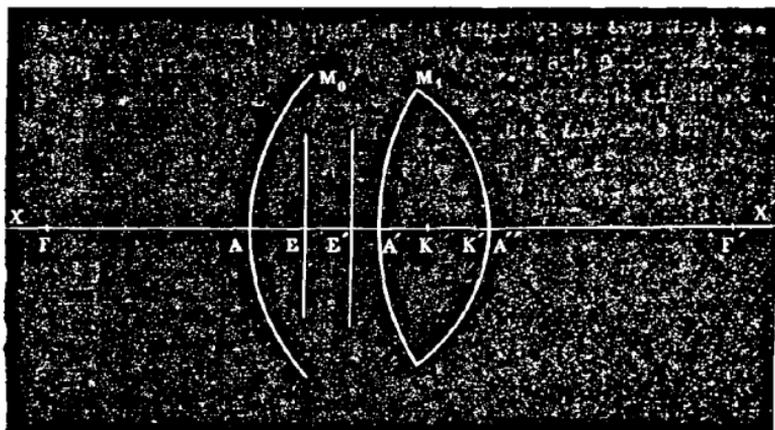


FIG. 80.

3° Pour les deux points nodaux K, K' :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} KF = E'F' = \varphi' \\ K'F' = EF = \varphi \end{array} \right.$$

130. En reprenant les constructions et les raisonnements développés (119), (120), (121) et 122), on démontrerait sans peine que, dans ce système dioptrique :

1° Les plans focaux ont les mêmes propriétés que ceux d'une lentille simple ;

2° Les foyers conjugués et les rapports de position et de grandeur d'un objet et de son image sont déterminés par les formules des lentilles simples.

131. *Simplification.*—D'après ce que nous avons dit (123) des propriétés des plans principaux, on peut (fig. 80) supprimer la surface  $M_0$  et la lentille  $M_1$ , et remplacer le système réfringent par une simple surface sphérique, dont le sommet serait au premier point principal  $E$ , et le centre de courbure au premier point nodal  $K$ ; cette surface sphérique serait ainsi placée entre l'air, qui est le premier milieu transparent, et le dernier milieu transparent d'indice  $n_1$ . Les rayons transmis par cette surface sphérique sont parallèles à ceux qu'aurait transmis le système lui-même, et pour déterminer la position réelle des rayons transmis par le système dioptrique il suffit de transporter parallèlement à eux-mêmes et d'une distance comptée sur l'axe principal, égale à la distance  $EE'$  des deux points principaux, les rayons transmis par la surface sphérique de rayon  $KE$ .

FIN.

# TABLE DES MATIÈRES

---

Préliminaires.....	1
Lois de la réflexion.....	3
Lois de la réfraction.....	3
Indice de réfraction.....	3
Rayons homocentriques.....	5

## PREMIÈRE PARTIE.

### Des images par réflexion.

Sommet. — Axe principal. — Axes secondaires — Amplitude du miroir courbe.....	6
---	---

CHAPITRE PREMIER. — MIROIRS CONCAVES.....	7
---	---

Foyer principal. — Distance focale.....	7
---	---

Plan focal et ses propriétés.....	8
-----------------------------------	---

Foyer d'un point lumineux situé sur l'axe principal.....	10
--	----

Formule générale des foyers conjugués.....	11
--	----

Formule classique des foyers conjugués (note).....	11
--	----

Discussion de la formule des foyers conjugués.....	12
--	----

Foyer d'un point lumineux situé hors de l'axe principal.....	14
--	----

Rapports de position et de grandeur d'un objet et de son image.....	16
---	----

Discussion des formules qui déterminent ces rapports.....	17
---	----

CHAPITRE II. — MIROIRS CONVEXES.....	19
--------------------------------------	----

Foyer principal. — Distance focale.....	19
---	----

Plan focal. — Ses propriétés.....	20
-----------------------------------	----

Foyer d'un point lumineux situé sur l'axe principal.....	22
--	----

Formule générale des foyers conjugués.....	23
--	----

Formule classique des foyers conjugués (note).....	23
--	----

Discussion de la formule des foyers conjugués.....	25
--	----

Foyer d'un point lumineux situé hors de l'axe principal.....	25
--	----

Rapports de position et de grandeur d'un objet et de son image.....	27
---	----

Discussion des formules qui déterminent ces rapports.....	27
---	----

## DEUXIÈME PARTIE.

### Des images par réfraction.

Points cardinaux.....	30
-----------------------	----

Foyers principaux.....	30
------------------------	----

Points principaux.....	30
------------------------	----

Points nodaux.....	31
Lignes de direction.....	31
Plans focaux.....	31
Plans principaux.....	31
Distances focales.....	31
<b>CHAPITRE PREMIER. — DES LENTILLES ET DES ASSOCIATIONS DE</b>	
<b>LENTILLES PLACÉES DANS L'AIR.....</b> 32	
<i>Article premier.</i> — Action d'une surface transparente dans le cas où l'air est un des deux milieux transparents..... 32	
Axe principal. — Sommet de la surface réfringente..... 33	
Les deux points principaux se confondent avec le sommet de la surface réfringente, et les deux plans principaux avec le plan tangent au sommet de cette surface..... 33	
Les deux points nodaux se confondent avec le centre de courbure..... 34	
Lignes de direction, axes secondaires..... 34	
§ 1. — La lumière passe de l'air dans le milieu le plus réfringent à travers une surface convexe..... 34	
Second foyer principal. — Seconde distance focale... 34	
Premier foyer principal. — Première distance focale. 36	
Formules générales..... 38	
Propriétés des plans focaux..... 38	
Foyer d'un point lumineux placé sur l'axe principal... 40	
Formule générale des foyers conjugués..... 42	
Formule classique des foyers conjugués (note)..... 42	
Transmission de la lumière à travers une surface plane (note)..... 43	
Foyer d'un point lumineux situé hors de l'axe principal. 43	
Rapports de position et de grandeur d'un objet et de son image..... 47	
§ 2. — La lumière passe du milieu le plus réfringent dans l'air à travers une surface concave..... 47	
Foyers principaux. — Distances focales..... 48	
Formule générale des foyers conjugués..... 49	
Formule classique des foyers conjugués (note)..... 49	
Transmission de la lumière à travers une surface plane (note)..... 49	
Foyer d'un point lumineux situé hors de l'axe principal.. 50	
Rapports de position et de grandeur d'un objet et de son image..... 50	
§ 3. — La lumière passe de l'air dans le milieu le plus réfringent à travers une surface concave..... 50	
Second foyer principal. — Seconde distance focale... 50	
Premier foyer principal. — Première distance focale.. 52	
Formules générales..... 53	

Propriétés des plans focaux . . . . .	54
Foyer d'un point lumineux situé sur l'axe principal . . .	56
Formule générale des foyers conjugués . . . . .	57
Formule classique des foyers conjugués (note) . . . . .	57
Foyer d'un point lumineux situé hors de l'axe principal.	58
Rapports de position et de grandeur d'un objet et de son image . . . . .	60
§ 4. — La lumière passe du milieu le plus réfringent dans l'air à travers une surface convexe . . . . .	61
Formules générales . . . . .	62
<i>Article II.</i> — Des lentilles placées dans l'air . . . . .	63
Six espèces de lentilles formant deux groupes . . . . .	63
§ 1. — Lentille biconvexe . . . . .	64
Centre optique. — Points nodaux. — Points et plans principaux . . . . .	66
Construction géométrique du centre optique, des points nodaux et des points principaux . . . . .	68
Les points principaux se confondent avec les points nodaux. — Plans principaux . . . . .	69
Détermination de la position sur l'axe principal du centre optique, des points nodaux et principaux . . . .	71
Conventions de signes relatives à la position du centre optique et des points nodaux . . . . .	73
Lignes de direction . . . . .	73
Foyers principaux. — Distances focales . . . . .	73
Formules générales des éléments fondamentaux de la lentille . . . . .	76
Propriétés des plans focaux . . . . .	76
Foyer d'un point lumineux situé sur l'axe principal . . .	79
Formule générale des foyers conjugués. — Discussion de cette formule . . . . .	81
Formule classique des foyers conjugués (note) . . . . .	81
Foyer d'un point lumineux situé hors de l'axe principal.	83
Rapports de position et de grandeur d'un objet et de son image. — Discussion des formules . . . . .	84
§ 2. — Lentille plan-convexe . . . . .	87
Centre optique. — Points nodaux. — Points et plans principaux . . . . .	87
Foyers principaux. — Distances focales . . . . .	87
Éléments fondamentaux de la lentille . . . . .	91
§ 3. — Ménisque convergent . . . . .	92
Centre optique. — Points nodaux. — Points et plans principaux . . . . .	93
Construction géométrique du centre optique, des points nodaux et des points principaux . . . . .	94

Les points principaux se confondent avec les points nodaux. — Plans principaux. . . . .	96
Détermination de la position sur l'axe principal du centre optique, des points nodaux et principaux. . . . .	96
Foyers principaux. — Distances focales. . . . .	97
Formules définitives des éléments fondamentaux de la lentille. . . . .	98
Condition nécessaire et suffisante pour que le ménisque soit convergent. . . . .	100
§ 4. — Lentille biconcave. . . . .	101
Centre optique. — Points nodaux. — Points et plans principaux. . . . .	101
Construction géométrique du centre optique, des points nodaux et des points principaux. . . . .	103
Les points principaux se confondent avec les points nodaux. — Plans principaux. . . . .	104
Détermination de la position sur l'axe principal du centre optique, des points nodaux et principaux. . . . .	105
Foyers principaux. — Distances focales. . . . .	105
Formules définitives des éléments fondamentaux de la lentille. . . . .	107
Propriétés des plans focaux. . . . .	108
Foyer d'un point lumineux situé sur l'axe principal. . . . .	111
Formule générale des foyers conjugués. — Discussion de cette formule. . . . .	112
Formule classique des foyers conjugués (note) . . . . .	112
Foyer d'un point lumineux situé hors de l'axe principal. . . . .	113
Rapports de position et de grandeur d'un objet et de son image. — Discussion des formules. . . . .	115
§ 5. — Lentille plan-concave. . . . .	117
Éléments fondamentaux de la lentille. . . . .	117
§ 6. — Ménisque divergent. . . . .	119
Centre optique. — Points nodaux. — Points et plans principaux. . . . .	119
Construction géométrique du centre optique, des points nodaux et des points principaux. . . . .	121
Les points principaux se confondent avec les points nodaux. — Plans principaux. . . . .	123
Détermination de la position sur l'axe principal du centre optique, des points nodaux et principaux. . . . .	123
Foyers principaux. — Distances focales. . . . .	123
Formules définitives des éléments fondamentaux de la lentille. . . . .	124
Condition nécessaire et suffisante pour que le ménisque soit divergent. . . . .	126

§ 7. — Lentille infiniment mince.....	127
Éléments fondamentaux de la lentille infiniment mince.	127
Propriété remarquable des plans principaux.....	128
<i>Article III.</i> — Association de lentilles placées dans l'air....	130
§ 1. — Association de deux lentilles.....	131
Points principaux. — Plans principaux du système...	131
Foyers principaux. — Distance focale du système....	132
Points nodaux du système.....	134
Les points nodaux et les points principaux se confondent.....	136
Centre optique du système.....	137
Plans focaux du système.....	137
Formules générales des éléments fondamentaux du système.....	137
Association de trois lentilles (note).....	138
Distance des points nodaux du système.....	138
Simplification.....	139
§ 2. — De la lunette astronomique.....	140
Anneau et point oculaires.....	141
Cas auquel ne s'applique pas la théorie de Gauss.....	142
Grossissements linéaire et angulaire de la lunette astronomique.....	144
Position et grandeur de l'anneau oculaire.....	145
Construction du rayon émergent correspondant à un rayon incident quelconque.....	146
Directions des rayons émergents de la lunette astronomique.....	147
Lunette de Galilée.....	148
<b>CHAPITRE II.</b> — DES APPAREILS DIOPTRIQUES DANS LESQUELS LA LUMIÈRE INCIDENTE ET LA LUMIÈRE ÉMERGENTE SE MEUVENT DANS DES MILIEUX INÉGALEMENT RÉFRINGENTS.....	150
<i>Article premier.</i> — Action d'une surface réfringente placée entre milieux transparents quelconques.....	150
Action d'une surface réfringente sphérique.....	150
Second foyer principal. — Seconde distance focale.....	151
Premier foyer principal. — Première distance focale.....	152
Formules générales.....	154
Conventions sur les signes du rayon de courbure.....	154
Propriétés des plans focaux.....	154
Foyer d'un point lumineux situé sur l'axe principal.....	155
Formule générale des foyers conjugués.....	155
Formule classique des foyers conjugués (note).....	155
Transmission de la lumière à travers une surface plane (note).....	156

Foyer d'un point lumineux situé hors de l'axe principal. . .	155
Relations de position et de grandeur d'un objet et de son image . . . . .	157
Des formules de ce cas général on peut déduire les formules des quatre cas particuliers étudiés dans le chapitre 1 <sup>er</sup> . .	157
<i>Article II. — Des lentilles placées entre deux milieux transparents quelconques et de nature différente. . . . .</i>	
Conventions sur les signes des rayons de courbure $r, r'$ . . .	158
Points principaux. — Plans principaux. . . . .	158
Foyers principaux. — Distances focales. . . . .	160
Points nodaux. . . . .	161
Formules générales des éléments fondamentaux. . . . .	165
Plans focaux . . . . .	166
Foyer d'un point lumineux situé sur l'axe principal. . . . .	168
Formule générale des foyers conjugués . . . . .	169
Foyer d'un point lumineux situé hors de l'axe principal. . .	169
Rapports de position et de grandeur d'un objet et de son image . . . . .	170
Propriété remarquable des plans principaux. . . . .	171
<i>Article III. — Des associations de lentilles séparées par des milieux transparents quelconques. . . . .</i>	
Étude d'un appareil dioptrique dans lequel sont réalisées les conditions optiques de l'œil. . . . .	173
Plans et points principaux du système. . . . .	175
Foyers principaux. — Distances focales. . . . .	176
Points nodaux du système. . . . .	178
Formules générales des éléments fondamentaux du système. .	178
Plans focaux . . . . .	179
Foyers conjugués. — Rapports de position et de grandeur d'un objet et de son image . . . . .	179
Simplification. . . . .	180

FIN DE LA TABLE.

Paris. — Imprimerie de E. MARTINET, rue Mignon, 2.