LES QVINZE LIVRES DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

Traduicts de Latin en François:

Auec vn Sommaire & Abbregé de l'Algébre, qui sert à faciliter l'intelligence du dixiesme Liure.

Par

D. HENRION Mathemat.

A PARIS,
Chez Abraham Pacard, ruë sainct Iacques, à l'Estoille d'or.

M. DC. XV.

Auec Priuilege du Roy.

D. HENRION.

AV LECTEVR.

IL y a quatre ans ou enuiron, que voyant que personne n'auoit encore traduict en nostre langue, tous les Elemens de la Geometrie d'Euclide, le desir de seruir au public, m'excita d'entreprendre ceste traduction: Mais comme ie me resoluois de la mettre au iour, ie fus preuenu de Mõsieur Dounot: ce qui me diuertit pour lors d'effectuer mon dessein, me persuadant que ledit Sieur se seroit contenu dans les bornes d'vne iuste translation: Mais voyant en lisant ladite traduction, que ledit Dounot auoit alteré & changé le vray sens de l'Autheur en plusieurs endroicts, & mesme introduit de nouuelles demonstrations vitieuses & erronees: cela fut cause que ie me proposay de reprendre mes premieres erres: & neantmoins i'vsay de quelque surseance, esperant que par vne seconde impression, ledit Dounot pourroit emander la premiere: Mais voyant qu'en ladite seconde impression il auoit corrigé peu de fautes, & mesme qu'il y en auoit de nouuelles, cela m'a faict resoudre à mettre en lumiere ceste mienne translation, pour le soulagement des François amateurs des disciplines Mathematiques. Or voicy comme ie m'y suis comporté. Ie me suis efforcé de rendre les demonstrations des anciens, & principalement de Theon, lesquelles Proclus asseure estre d'Euclide, quelquesfois plus briefues, autant que la matiere l'a peu permettre, ou pour le moins plus claires & intelligibles, retranchant où il y auoit de la superfluité, & esclaircissant où il y auoit trop de briefueté, suyuant en ce Commandinus & Clauius. Outre cela i'ay adiousté en diuers endroits plusieurs Problemes & Theoremes vtils & dignes d'estre sçeus, lesquels i'ay tirez de diuers bons Autheurs. D'auantage i'ay tasché d'esclaircir les plus obscures definitiõs d'Euclide, qui à faute d'estre bien prises, en ont fait chopper plusieurs; comme l'a tresbien remarqué Clauius. Et d'autant que les doctes Commandinus, Stheuin, & Dibuadius ont estimé que le 10. liure (lequel est tenu par plusieurs fort difficile) seroit rendu beaucoup plus clair & intelligible y ioignant les nombres, ie les ay adioustez aux endroits plus difficils & obscurs, me seruant du trauail des susdits Autheurs. Et finalement voyant que chacun n'entendoit pas les operations des nombres radicaux & sourds, comme estans esloignees de celles de l'Arithmetique vulgaires, lesquelles neantmoins sont necessaires pour l'intelligence de ces demonstrations numerales: i'ay faict preceder ce 10. liure des Elements d'Euclide, vn sommaire & ab-

bregé de l'Algebre, lequel (comme i'eſtime) ne ſera deſaggreable à ceux qui ne ſçauent encore les operations d'icelle, & en deſirent la cognoiſſance, ny trouué mauuais par ceux qui l'ont deſia acquiſe : Ie n'ay voulu à cauſe de briefueté mettre en ce ſommaire les demonſtrations des operations y contenues, leſquelles neantmoins les ſtudieux, & deſireux d'icelles, pourront voir dans Nonius, Stheuin, ou Clauius ; du trauail deſquels ie me ſuis ſeruy en ceſt epitome. Voila donc mon trauail ; reçoys-le (amy Lecteur) attendant que ie te puiſſe bailler la traductiõ des Elemens Spheriques de Theodoſe : le ſecond volume de mes memoires Mathematiques, & autres œuures.

Maintenant parce que ces Elements d'Euclide ſeruent d'entree à toutes les autres diſciplines Mathematiques, i'ay eſtimé qu'il ſeroit bon, auparauãt que nous venions à les interpreter, de reciter ſuccinctement, (comme ont faict Commandin & Clauius) d'où les diſciplines Mathematiques ont pris leur nom : quelle eſt leur diuiſion : par qui elles ont eſté premierement inuentees : & qui ſont ceux par qui elles ont eſté depuis augmentees : combien grande eſt leur excellence, & vtilité, & telles autres choſes qui conuiennent à noſtre ſubiect.

Prolegomene.

Pourquoy les disciplines Mathematiques ont esté ainsi appellees.

Les disciplines Mathematiques, toutes lesquelles ont la quantité pour leur obiect, ont pris leur nom de la diction Grecque μαθημα, ou bien μαθησις, qui signifie discipline, ou doctrine, dont on apporte deux principales raisons. La premiere est que les Pythagoriens, & Platoniciens estimans que les ames raisonnables, estoient contenues en vn nombre certain & determiné, & qu'elles passoient d'vn corps en vn autre, (ce que toutesfois la foy Chrestienne enseigne clairement estre faux) tesmoignent que ces disciplines mathematiques ont eu ce nom, pource que principalement par icelles nous acquerons le ressouuenir & la reminissence de ceste science, de laquelle nostre ame (comme ils estimoient faulcement) estoit informee, & instruite auparauant qu'elle fust entree dans le corps. Mais les autres estiment que ces arts mathematiques obtiennent le nom de science & de doctrine par dessus tous les autres, d'autant que seuls ils retiennent le moyen, & la raison de la science: Car ils procedent tousiours de certains principes cogneus auparauant, pour faire les demonstrations des conclusions; qui est le propre deuoir de la doctrine ou discipline; ce que ne font pas toutes les autres disciplines: car bien souuent elles amenent pour confirmer ce qu'elles veulent monstrer, les choses qui n'ont pas esté assez expliquees ny demonstrees auparauant.

Diuision des disciplines mathematiques.

Les Pythagoriens lesquels ont esté suiuis presque de tous les Mathematiciens, & de plusieurs Philosophes, ont diuisé toutes les disciplines mathematiques en quatre parties, sçauoir Arithmetique, Musique, Geometrie, & Astronomie: Car puis que toute quantité, qui est leur obiect, est ou discrete, soubs laquelle tous les nombres sont compris, ou continue, soubs laquelle sont comprises toutes les grandeurs, & que l'vne & l'autre partie, est consideree, tant selon soy, qu'en comparaison d'vne autre; il leur a semblé raisonnable d'instituer les quatre parties susdites, lesquelles considerassent l'vne & l'autre quantité, selon la double consideration susdite. C'est pourquoy l'Arithmetique traicte de la quantite discrette selon soy, recherchant & expliquant soigneusement toutes les proprietez & passions des nombres. La Musique traicte de la mesme quantite discrette, ou bien d'vn nombre comparé auec vn autre, entend qu'elle considere les accords des sons & harmonies. La Geometrie dispute de la magnitude ou quantité continue, aussi selon soy, comme elle est immobile. Et finablement l'Astronomie considere la grandeur, comme elle est mobile, tels que sont les corps celestes, ainsi qu'ils sont meuz d'vn continuel mouuement. Or à ces quatre sciences mathematiques, desquelles l'Arithmetique, & Geometrie sont appellees pures; mais la Musique, & l'Astronomie mixte: toutes les autres traictant en quelque maniere que ce soit de la quantite, telle qu'est la Perspectiue, la Geographie, & autres semblables, peuuent estre reduites, voire facilement, comme à leurs sources, desquelles elles despendent.

Quelques antiens Geometres diuisent les disciplines mathematiques d'vne autre maniere : car ils disent qu'aucunes d'icelles consistent seulement és choses intellectibles separees de toutes matieres, & aucunes és choses sensibles, de telle sorte qu'elles touchent la matiere subiecte aux sens: du premier genre, ils establissent deux premieres & principales sciences, l'Arithmetique, & la Geometrie : Mais au dernier genre, ils en constituent six, Astrologie, Optique, Geodesie, Canonique ou Musique, Suputatrice, & Mechanique. Ils disent que l'Astrologie, est vne science qui discoure des mouuemens du monde: des magnitudes, figures, & illuminations des corps celestes ; & de leurs distances de la terre, & d'autres choses semblables : Et derechef de ceste science, ils en constituent trois parties: La Gnomonique, laquelle s'exerce en la dimension des heures, par la position des Gnomons: La Metheoroscopique, laquelle enseigne la difference des esleuations, & trouue les distāces des astres, & enseigne plusieurs autres & diuers Theoremes Astrologiques: Et la Dioptrique, laquelle discerne par instrumens Dioptriques les distances des planettes, & autres estoilles. Ils disent que l'Optique est engendree de la Geometrie, pource qu'elle se sert de rayons visuels, comme de lignes, & d'angles qui sont constituez d'iceux rayons: Or elle est diuisee en trois parties: en l'Optique qui est le nom general, Catoptrique, & Sceuographie, ou comme quelques vns ayment mieux Sciagraphie. L'Optique ou Perspectiue, rend la cause des apparances, lesquelles ont de coustume se presenter a nous, autremēt qu'elles ne sont à cause des diuerses scituations, & distances des choses qui tombent soubs la veue, comme de la coincidance de paralleles, & de l'aspect des quarrez, comme si c'estoient cercles : La Catoptrique ou speculaire vniuerselle, a diuerses refractions pour son obiect : Et la Sciagraphie, ou Designatrice des nõbres, monstre par qu'elle maniere se peut faire, que les choses qui paroissent és images, semblent plaisantes & non difformes, pour les distances & hauteurs des choses designees. Ils appellent Geodesie la science, laquelle mesure les choses qui consistent en quantité, comme les tas & monceaux des choses materieles, ainsi que les Cones; & les puits, comme les Cylindres: Ce qu'elle faict, non pas par lignes droictes intellectuelles, comme de la Geometrie, mais seulement par les sensuelles. Ceste Geodosie, comme la Geometrie, est diuisee en la partie qui mesure les plans ; & en celle qui mesure les solides Or quelques vns entre lesquels est Pediasimus cõme rapporte Clauius au commencemẽt du 6. liure de sa Geometrie practique, disent que Geodosie n'est que ceste partie de Geometrie, laquelle enseigne a partir ou diuiser les superficies : comme s'il falloit partir vn champ ou piece de terre, ou autre superficie entre diuerses personnes, cela seroit proprement appellé Geodosie. Ces anciens la appellent Canonique ou Musique, la science qui considere les raisons apparentes des accords des sons, & qui se sert par tout de l'aide des sens, & laquelle comme dit Platon, semble auoir preferé les oreilles a l'entendement. La supputatrice quant a eux, est la mesme que ce que nous appellons Arithmetique pratique: Car elle considere les nombres, non pas comme es choses intellectuelles, mais comme es choses sensuelles. Et finablement la Mechanique, laquelle consiste en la cognoissance des choses sensuelles & conioinctes a la matiere, ils la diuisent en plusieurs manieres: Car il y en a vne qui est effectrice des instrumens de guerre, tels que l'on dict qu'Archimede en auoit construit pour faire resistance a ceux qui auoient assiegé tant par mer, que par terre sa ville de Syracuse. Il y en a vne autre qui est effectrice de choses du tout admirables: Car elle construit certains instrumens, qui par le moyen des vẽts, ou de l'eau, feignent la voix de quelconques animaux, tels que Ctesibe & Heron en ont fabriqué : & d'autres qui par le moyen des pois, & des nerfs, imitent les conuolutions & mouuemens des choses animees, tels qu'Archimede, Architas Tarentin, & autres en ont construit Il y en a vne autre qui est la cognoissance des equilibres, & des choses appellees centroponderantes. Et finablement il y en a vne qui est appellee effectrice des spheres, a l'imitation des circonuolu tiõs celestes, telle qu'Archimede en à aussi fabrique: Et pour dire en vn mot, toute science est mechanique, laquelle à la force de mouuoit la matiere. Or voila comme les anciens diuisoient les disciplines Mathematiques.

Les inuenteurs des disciplines Mathematiques.

Les histoires tesmoignẽt que toutes les disciplines Mathematiques ont tire leur origine de diuers Autheurs, voiremesme que chacunes de ces sciẽces n'ont pas acquis vne perfectiõ des le cõmencement, mais qu'elles ont procede peu à peu des choses imparfaites aux choses plus parfaites: Car on croit que les premiers inuẽteurs de l'Arith. ont este les Pheniciẽs à cause de leurs traffics & cõmerces frequens: laquelle depuis Pythagoras, & ses successeurs, & les Egyptiens, Grecs, & Arabes ont augmentee merueilleusement, & esclaircie de diuers problemes & Theoremes. Quand à la Musique plusieurs historiens ont laisse par escrit, qu'elle a este premierement inuentee par Mercure, laquelle depuis il communiqua & apprit à Orphee Musicien fort estime, & Orphee à Thamyre & a Linus; & Linus à Hercules; & ainsi par successiõ cõtinuelle d'autres Musiciẽs excellens, de tẽps en tẽps elle est paruenue iusqu'à nous. Mais la Geometrie, selon Procle a este trouuee par les Egyptiens, & a tiré son origine du mesurage des terres labourables: car comme l'innondation du fleuue du Nil confondoit & gastoit les bornes des terres, tellement que chacun ne pouuoit pas recognoistre l'estendue des siennes, cela excita les Egyptiens d'appliquer leurs esprits à la maniere de mesurer les terres, afin que par ce moyen on rendist à chacun le sien: Laquelle maniere de mesurer les terres, encore que pour lors elle fut fort rude, & mechanique, si est-ce toutesfois que de là elle prit son nom de Geometrie, qui signifie autant que l'art de mesurer la terre. Or peu à peu la Geometrie cõmença à estre plus polie, & non contente de ses limites, elle s'appliqua aussi a mesurer les corps celestes, & enseigna les principes de l'Astronomie, de l'Optique, & de plusieurs autres disciplines qui depẽdẽt d'icelle cõme des racines. L'on dit que Thales Milesien la transfera d'Egypte en Grece, & depuis plusieurs Philosophes & renommez Mathematiciẽs l'ont enrichie & embellie de plusieurs demonstrations: entre lesquels ceux cy sont les principaux des anciens, Pythagoras, Anaxagoras Clazomenien, Hippocrates de Chios, Platon, Oenopides, Zenodore, Briton, Antiphon, Theodorus, Theætetus, Aristarchus, Eratosthenes, Architas Tarentin, Euclide, Serenus, Hypſicles Alexandrin, Archimede Syracuſien, Appolonius Pergæus, Theodoſe Tripolitain, Mileus Romain, Menelaus, Theon Alexandrin, Ptolomee, Eutocius Aſcalonite, Pappus, Proclus & pluſieurs autres innombrables, leſquels il ſeroit long de rapporter. Finalement, pluſieurs eſtiment que l'Aſtronomie a eſté premierement inuentee par Atlas, d'où ils veulent que la fable a tiré ſon origine, que de ſes eſpaules, il auoit ſouſtenu le ciel à cauſe de l'excellente cognoiſſance qu'il auoit de l'Aſtronomie. Les autres eſtimẽt que les Chaldeens par vne obſeruation ont inuenté la ſcience des aſtres. Les autres ſont les Egyptiens les premiers inuenteurs de ceſte ſcience. Les autres les Aſſyriens. Et finalement les autres eſtiment que ceſte gloire & louange doibt eſtre deferee aux Babyloniens. Or en ceſte ſcience, comme elle eſt tres excellente, auſſi y a-il eu pluſieurs Autheurs excellents qui y ont trauaillé, leſquels nous ne rapporterons icy pour briefueté. Ces 4 principales diſciplines Mathematiques ayans eſté inuentees, toutes autres qui traictent de la quantité en quelque ſorte que ce ſoit, ont eſté facilement deriuees d'icelles, tout ainſi que petits ruiſſeaux d'vne fontaine.

L'excellence des ſciences Mathematiques.

. D'autant que les diſciplines Mathematiques traictent des choſes, leſquelles ſont conſiderees ſans aucune matiere ſenſible, encore qu'elles ne ſoient naturellement ſans matiere, il eſt euident qu'elles tiennent le milieu entre la Metaphiſique, & la ſcience naturelle, ſi nous conſiderons leur ſubiect, comme Procle le prouue fort bien. Car le ſubiect de la Metaphyſique eſt ſeparé de toute matiere tant intellectuelle que ſenſuelle : mais le ſubiect de la Phyſique eſt conioinct à la matiere ſenſible, d'où vient que puis que le ſubiect des diſciplines Mathematiques eſt conſideré hors de toute matiere ſenſuelle, mais non hors de toute matiere intelligible : il eſt euident qu'il eſt moyen entre ces deux-là. Mais s'il faut eſtimer l'excellence d'vne ſcience par la certitude des demonſtrations deſquelles elle vſe, ſans doubte les diſciplines Mathematiques tiennent le premier lieu entre toutes : Car elles demonſtrent toutes choſes deſquelles elles entreprennent la diſpute, par des raiſons tres fermes, & les confirment de telle ſorte, qu'elles engendrent veritablement vne ſcience en l'eſprit de ſes auditeurs, & oſte tous les doubtes : ce qu'a peine pouuons nous attribuer aux autres sciẽces, veu qu'en icelles souuent l'entendement est en suspend & en incertitude par la multitude des opinions, & diuersité des aduis sur la verité des conclusions: ce que tesmoignent ouuertement tant de sectes des Peripateticiẽs, (afin que ie laisse tous les autres Philosophes à part) lesquelles ayant pris leur origine d'Aristote, comme les ruisseaux de leur source ou fontaine, sont tellement en discord, & entr'elles, & quelquesfois auec leur autheur mesme Aristote, qu'on ignore tout à fait ce que veut dire Aristote, d'où vient qu'vne partie suit les interpretes Grecs, cõme guides & conducteurs, les autres les Latins, les autres les Arabes, les autres les Nominaux, & les autres les Philosophes qu'ils apellent Reaux, (tous lesquels toutefois se vantẽt d'estre Peripateticiẽs) laquelle diuersité ie n'estime pas que personne ignore combien est esloignee des demonstrations mathematiques. Car les theoremes d'Euclide, & des autres Mathematiciens retiennent aujourd'huy la mesme pureté de la verité, sa certitude des choses, la force & fermeté des demonstrations qu'elles ont eu par tant de ciecles precedens. A cecy se raporte ce que Platon dict en son dialogue du souuerain bien, que ceste science là est la plus digne, & la plus excelente, laquelle est la plus amatrice de sincerite & verite. Veu donc que les disciplines Math. desirent, ayment, & cultiuent si soigneusement la verite, que non seulement elles n'admettent rien qui soit faux, mais mesme rien qui soit seulement probable, ny rien qu'elle ne confirme & fortifie par demonstrations tres-certaines, il n'y a point de doubte qu'il ne leur faille bailler le premier lieu entre toutes les autres sciences.

Diuerses vtilitez des disciplines Mathematiques.

Les disciplines mathemat. ne doiuent pas estre seulement estimees vtiles, mais aussi fort necessaires, tant pour apprendre les autres arts parfaictement, que pour bien instituer & gouuerner la chose publique: Car comme enseigne fort bien Proclus, il n'y a point d'entree à la Metaphysique, si ce n'est par les Mathematiques. Car si des choses sensibles, lesquelles le Physicien considere, nous voulons esleuer nostre entendement sans aucun milieu, aux choses du tout separees de la matiere sensible, lesquelles le Metaphysicien considere, nous nous aueuglons nous mesmes, tout ainsi qu'il arriue à celuy qui de quelque lieu tenebreux, où il a esté long temps, vient tout soudain paroistre en vne grãde lumiere. C'est pourquoy auparauant que l'entendement monte, des choses Physiques qui sont conioinctes à la matiere subiecte aux sens, aux choses Metaphysiques qui en sont separees, il est necessaire de peur d'estre esblouy de leur clairté, qu'il soit premierement accoustumé aux choses où il n'eschet pas vne si grande abstraction, telles qu'elles sont considerees par les Mathematiciens afin qu'il les puissent plus facilement comprendre. C'est pourquoy Platon asseure que les Mathematiques esleuent l'esprit, & le subtilisent pour la contemplation des choses diuines. Or combien ces disciplines apportent d'vtilitez pour bien entendre les sainctes Escritures, Sainct Augustin, sainct Hierosme, & autres Docteurs nous l'apprennent, en disant qu'il y a beaucoup de choses, qui ne sont pas entendues de plusieurs par l'ignorance des nombres, pource qu'elles ont esté couchees dans l'Escriture mystiquement: Ces mesmes Docteurs disent que la Geographie, & la Geometrie sont grandement vtiles aux Theologiēs. Et S. Basile est grãdement loue par Gregoire Nazianzene, de ce qu'il estoit fort bien verse en l'Astrologie, Geometrie, en la cognoissance des nombres, & autres sciences des Mathemat. Pareillement elles ne seruent pas peu pour acquerir parfaictement la Philosophie naturelle, Morale, la Dialectique, & autres semblables, comme l'enseigne fort bien Proclus. I'adiouste que presque tous les volumes des anciens Philosophes, & nommément d'Aristote & de Platon, lesquels à bon droict sont proposez pour guide, pour bien & sainemēt philosopher, & presque de tous les Interpretes tant Grecs que Latins, sont remplis d'exemples mathematiques, pour ceste raison principalement, afin que les choses qui semblent estre enueloppees de grandes difficultez fussent rendues plus intelligibles par ces exemples plus clairs, lesquels on ne sera point capable d'entendre, si on est du tout destitué de la cognoissance des Mathematiques: d'où vient qu'antiēnement la frequētation du college de Platon estoit interdicte à ceux qui n'estoient pas bien versez es disciplines Mathemat. C'est pourquoy en son Timee, il appelle les Mathematiq. le chemin de toutes vrayes eruditions: voire mesme il dit en son Philebe, que toutes les disciplines sont viles & abiectes sans les Math. Ie pourrois rapporter icy plusieurs autres tels tesmoignages tant de Platon, qu'autres Philosophes excellents, lesquels ie delaisse pour venir aux choses plus cogneues, voire mesme des plus ignorans. Car qui est celuy qui ne sçait l'vtilité & necessité de l'Arithmet. non seulement à ceux qui s'employent au cõmerce, mais presque à toutes sortes de personnes? Qui ne voit l'vtilité de la Geometrie: puis que c'est elle qui cõduit l'Architecte en la structure des maisons & autres bastimens: l'Ingenieur en la construction des forteresses, en l'inuention des machines, tant offensiues, que deffensiues: puis que c'est elle (dis ie) qui monstre à mesurer les longueurs, largeurs, hauteurs & profondeurs; la diuision des terres; a prendre, & representer le plan des villes ou autres lieux: à faire la Carte des Prouinces ou Royaumes à diuiser & cõpasser en vn châp les espaces pour camper vne armee; à celuy qui veut ranger des hommes en bataille, selon qu'elle figure ou forme, il doit râger son armee, afin de faire paroistre le nombre de ses hommes plus grand ou moindre qu'il n'est: Bref qui ne voit combien l'Astrologie est vtile; puis que c'est elle qui enseigne la distinction des temps & des saisons. Et qui est ce qui peut sans l'aide de la Geometrie & Astrologie, courir les mers, aller és contrees lointaines, voir le nouueau monde, & en rapporter tant de richesses que nous auons de ces quartiers-là? Et comment l'Hystorien rapportera il la scituation des climats, les grandeurs, diametres, ou circuits des villes, sans l'aide de la Geometrie & Astronomie? Que dirons nous plus? la cognoissance des nombres ne fust-elle pas tres-vtile a Iosephe Sacrificateur des Iuifs, lors qu'a la prise de la ville de Iotapate, par Vespasien chef de l'armee Romaine, ceste cognoissance & subtilité des nombres, luy sauua la vie. La mesme vtilité apporta la cognoissance de l'Astrologie à Christophle Colomb grand Admiral de l'Ocean Occidental, soubs Dom Ferrand Roy de Castille, premier explorateur du nouueau monde: Car estant paruenu pres de l'Isle qu'on nomme Iamayque, & i'a perdu deux Carauelles que le Roy luy auoit baillee, tellement qu'il estoit sans vaisseau, les habitans d'icelle Isle ne luy voulurent par prieres, force, ou autrement deliurer aucun viure, dont luy & sa compagnie estoient en grande necessité, & par ce moyen lesdits habitans esperoient les pouuoir tous vaincre & saccager: Mais ledit Colomb cognoissant par l'Astrologie qu'vne nuict prochaine, il se feroit vne grande eclypse de Lune, il dict à quelques vns des habitans, que s'il ne luy vendoient des viures, & à sa compagnie, que dans peu de temps ils mourroient tous par pestes, & effusion de sang, & pour tesmoignage que cela aduiẽdroit ainsi, ils verroiẽt en vn tel iour, & a vne telle heure qu'il leur nomma, la Lune toute sanglante: Ce qu'estant aduenu ainsi, lesdits habitans ignorant l'Astrologie, adiousterent foy aux menaces dudict Colomb, & luy demandant pardon, luy apporterent tout ce qu'il demandoit, & le prierent qu'il les mit en la bonne grace de la Lune. Nous adiousterons encore icy que Hieron Roy de Syracuse, ayant faict bastir vne Nauire pour enuoyer à Ptolomee Roy d'Egypte, d vne telle grandeur que tous les Syracusins ensemble ne la pouuoient remuer de sa place, vn seul Archimede par le moyen de la Geometrie, fist que le Roy seul sans aucune peine la remua de son lieu, dont le Roy, & tous les Syracusiens furent grandement esmerueillez. Qui est donc celuy qui ne doiue desirer les disciplines Mathematiques sur toutes les autres sciences, puis qu'elles sont non seulement agreables, mais aussi tres-vtiles & necessaires à la vie humaine?

Recommandation d'Euclide, & de la Geometrie.

Les Autheurs ne sont pas bien d'accord, qui a esté Euclide, qui a composé ces Elemens, & en quel temps il a flory. Car plusieurs pensent que ç'a esté vn Philosophe de la ville de Megare disciple de Socrates, qui institua la secte appellee par luy Megarique. Mais si nous croyons Proclus Autheur excellent, & autres antiens, nostre Euclide a esté depuis celuy de Megare, & aflory au temps de Ptolomee premier, lequel commença à regner en Egypte apres la mort d'Alexandre la 115. Olimpiade, & l'an 399. auparauant la natiuité de nostre Seigneur, comme le rapporte Iean Lucide: Ce qui est plus vray semblable. D'autant que Diogenes Laertius rapportant tous les œuures d'Euclide Megarien, il ne fait aucune mention de cest admirable volume des Elemens Geometriques, par lequel nostre Euclide s'est acquis vne renommee & gloire immortelle. C'est pourquoy nostre Euclide tres-subtil Geometrien, est bien autre que ce Megarien l'à, d'autãt qu'estãt tresbiẽ versé en la doctrine des Academiques, il apliqua sõ esprit aux Mathematiques, esquelles il se rendit si excellent que par le commun consentement de tous il a obtenu le premier lieu entre les Mathemat. Or il a escrit plusieurs volumes concernant les Mathematiques, esquels paroist sa grande diligence, & admirable doctrine, tels que sont ses Optique, Catoptrique, Musique, Phenomenes, & le liure des Donnez, l'œuure des diuisions, que nous estimons estre ce petit liure tressubtil des diuisions des superficies attribué à Machamet Bagdedin, qui depuis peu a esté mis en lumiere par la diligence de Iean Deé, & de Federic Commandin. Pareillemẽt il a escrit les Elemens coniques, comme dit Proclus, leſquels toutesfois ne ſont pas encore paruenus iuſques à nous, & autres petits traictez ſemblables. Mais principalement il a tiſſu ce volume des Elemẽs Geometriques, qui par le conſentement de tous, ne ſera iamais aſſez loué, auec vn ordre ſi admirable, & la remply d'vne ſi grande erudition, qu'il n'y en a pas vn de tous ceux qui ont eſcrit de ſemblables Elemens, (car comme dit Proclus, il y en a pluſieurs qui en ont composé) qui l'ait egalé, tant s'en faut qu'il y en ait quelqu'vn qui l'ait ſurpaſſé, auquel volume comme il a faict paroiſtre la grande ſubtilité de ſon eſprit, ainſi il n'a pas eſtimé qu'il fallut mettre au iour toutes les choſes qui touchent la Geometrie, mais ſeulement les choſes qui luy ont ſemblé vtiles & neceſſaires pour tous, leſquelles il a confirmees & fortifiees d'argumens & raiſons tres-fermes & treſſolides. Or l'on peut recognoiſtre clairement tant des choſes que nous auons deſia repreſentees, que de ce que nous dirons encore preſentement, combien eſt grande l'vtilité & excellence de ces Elemens Geometriques d'Euclide, & conſequẽment de toute la Geometrie. Ces Elemens ſont ainſi appellez d'autant que nous ne pouuons ſans cela entreprẽdre aucunes œuures mathemat. tant s'en faut que nous en puiſſions retirer aucun fruict : Car tous les autheurs des mathemat. cõme Archimede, Appolonius Pergeus, Theodoſe &c. ſe ſeruent en leurs demonſtrations de ces Elemens d'Euclide, comme de principes certains, & deſquels les demonſtrations eſtoient deſia il y auoit lõg temps recogneues & tenues pour conſtantes & aſſeurees de tout le monde. Parquoy il eſt neceſſaire que celuy qui deſire ſçauoir, & ſe rẽdre familiere quelconque partie des mathematiques, appreune auparauant ces Elements Geometriques. Car d'iceux Elemens, comme d'vne fontaine plantureuſe, eſt produite la dimenſion des latitudes, longitudes, altitudes & profondeurs : la diuiſion des terres, montagnes, & isles : l'obſeruation des aſtres du ciel, qui ſe faict par les inſtruments : la compoſition des horologes ſcioteriques : la force des machines : la raiſon des pois : & ceſte diuerſité d'apparences qu'on voit és miroirs, és peintures, és eaux, & en l'air diuerſement illuminé. Par le moyen dis-je de ces Elemens a eſté trouué le milieu & centre de toute ceſte machine du monde ; & ont eſté trouuez les poles, alentour deſquels il ſe tourne continuellement : & a eſté recherchee & trouuee la figure & quantité de toute la terre. Par la force de ceſte ſeule ſcience eſt monſtree, & demonſtree la conuerſion de tout le Ciel, & des aſtres : leur leuer & coucher ; leur aprochemẽt

& esloignement: leur ascention & descention; la varieté du iour & de la nuict, & des temps en toute l'annee, par toute la scituation des endroits de la terre. Pareillement les conionctions des planettes, leurs oppositions, & diuers aspects, sont cogneus si facilement, que les Mathematiciens peuuent dire leurs lieux au ciel & predire asseurement les eclyptes soit de Soleil, soit de la Lune, auparauant qu'elles aduienent pour si long temps qu'il leur plaist. Bref, par le moyen de la Geometrie, nous voyons tout ce grand œuure de Dieu perceptible aux yeux de nostre entendement.

La diuision de la Geometrie, & des Elemens d'Euclide.

La Geometrie est diuisee en la contemplation des plans, qui est appellee du mot general Geometrie; & en la doctrine des solides, laquelle les Mathematiciens appellẽt par vn nom propre & peculier la Stereometrie. Car la Geometrie vniuerselle se propose ce but, qu'elle constitue ou les plans, ou les solides, ou bien estans constituez, elle les compare entr'eux, ou les diuise. Or nostre Euclide voulant laisser vne parfaicte cognoissance en ces Elemens des choses Geometriques, il traicte des plans aux 6 premiers liures; & aux 5 derniers, il dispute fort subtilement des solides, & recherche leurs proprietez les plus excellentes. Et d'autant que toutes les choses Geometriques, & principalement ces cinq corps reguliers, qui ont de coustume d'estre appellez corps Platoniques, ne pouuoient estre traictez parfaictement sans la cognoissance des lignes commensurables & incommensurables. Euclide afin de comprendre dans ces Elemens Geometriques, tous les enseignemens requis pour l'intelligence, & dimension des magnitudes, il a mis son 10 liure deuant sa Stereometrie, auquel il discoure subtilement de ces sortes de lignes la: Et qui plus est, Euclide sçachant que ce traicté des lignes commensurables & incommens. ne se peut bien faire sans la cognoissance des nombres; deuant le 10. liure, il traicte des passions ou proprietez des nombres, és trois liures qui le precedent. C'est pourquoy tout ce volume des Elemens Geometr. cõpris en 15 liures, (desquels les 13 premiers sont attribuez de tous à Euclide sans aucun cõtredit,) mais les 2 derniers sont attribuez à Hypsicle Alexandrin) se pourra à bon droict diuiser en 4. parties; tellement que la premiere partie contenue és 6. premiers liures, traicte des plans: la seconde comprenant les trois liures suiuans, recherche les passions des nombres: La troisiesme partie, laquelle le 10. liure constitue seul, traicte des lignes commẽsurables & incommensurables.

Et finablement la 4. partie contenue aux 5. autres liures, comprend la science des corps ou solides. La premiere partie se diuise derechef en 3: Car aux 4. premiers liures, il est traicté des plans absolument, en recherchant leur egalité & inegalité; mais au 5. liure, il est traicté en general des proportions des magnitudes: & au 6. sont examinees les proportions des figures planes.

Que c'est que Probleme, Theoreme, Proposition, Lemme, Corrollaire, & Scholie, entre les Mathematiciens.

Toute demonstration de Mathematiques, est diuisee par les Antiens Autheurs en Probleme & Theoreme. Ils appellent Probleme, ceste demonstration qui commande & enseigne à construire quelque chose: Et Theoreme, la demonstration laquelle recherche seulement, quelque passion ou proprieté d'vne ou plusieurs quantitez ensemble: Bref les Problemes enseignent à trouuer & cõstruire quelque chose, & les Theoremes demonstrent les affections & proprietez des choses desia faictes & construictes: Et tant le Probleme, que le Theoreme, sont appellez entre les Mathematiciens Proposition, d'autant que l'vn & l'autre nous propose quelque chose. Ils appellent Lemme, quelque Probleme ou Theoreme, lequel estant necessaire à leur demõstration, ils le prennent & prouuent auparauant que venir à leurdite demonstration principale, afin de la faire plus euidente & briefue. Mais ce que nous appellons Corollaire, est vne consequence que nous tirons de ce qui a este demonstre en quelque proposition. Et finablement ce qu'on nomme Scholie, est vne annotation qu'on faict seulement, comme en passant sur quelque proposition.

Des principes des Mathematiciens.

Veu que toute doctrine & discipline est engendree d'vne cognoissance precedente, comme le tesmoigne Aristote, & demonstre ses conclusions de certains principes pris & concedez, & qu'il n'y a aucune science, selon le mesme Aristote, & autres Philosophes, qui demonstre ces principes; les disciplines mathematiques auront aussi leurs principes, desquels estans posez & concedez, elles confirment leurs Problemes

& Theoremes. Or il y a entre les Mathematiciens trois genres de principes. Au premier sont mises les definitions, par lesquelles les mots & termes de l'art sont expliquez, de peur qu'en traictant de la science, estans trompez par l'ambiguité des noms, ou par l'obscurité, nous ne tombions en des paralogismes. Le second genre comprend les petitions ou demãdes, qui sont choses si claires & euidentes en ceste science, qu'elles n'ont besoin d'aucune confirmation, mais requierent seulement le consentement de l'auditeur, afin qu'en faisant la demonstration, il n'y ait aucune hesitation ou difficulté. Au 3. genre sont referez les axiomes, ou communes notions de l'esprit, autrement communes sentences, qui sont choses si manifestes & euidentes, que celuy qui entendra bien les termes, n'y pourra contrarier en façon quelconque. Or Euclide en ce volume des Elemens Geometriques, met deuant les demonstrations de ses conclusions, ces trois genres de principes, lesquels sont facilement entendus de tous, pour tirer d'iceux des Theoremes admirables, ausquels iamais personne ne consentiroit, s'ils n'estoient confirmez par raisons certaines & euidentes. Or voila tout ce que nous nous estions proposé de declarer sur le subiect de ces Elemens d'Euclide, & autres preambules ou prolegomenes qu'on pourroit nommer en François Auant-propos. Nous viendrons donc maintenant a l'exposition des principes d'Euclide.

ELEMENT

ELEMENT PREMIER.

DEFINITIONS.

1. Le poinct, eſt ce qui n'a aucune partie.

Les Phiſiciens diſent que le poinct eſt le moindre obiect de la veuë : & iceluy peut eſtre deſcrit auec ancre ou autre choſe. Mais les Mathematiciens reietant ceſte definition, diſent que le poinct eſt vn obiect de l'intellect ſi ſubtil qu'il ne peut eſtre diuiſé en aucunes parties : Et iceluy ne ſe peut eſcrire ; mais ſeulement entendre & imaginer : bien eſt vray que pour le repreſenter à nos ſens exterieurs, nous nous ſeruons du poinct Phiſique. Le poinct n'a donc aucunes des dimenſions geometriques ; c'eſt à dire qu'il n'a ny longueur, largeur ny eſpoiſſeur, mais bien eſt-il principe d'icelles.

2. La ligne, eſt vne longueur ſans largeur.

Apres le poinct vient la ligne, qui n'eſt autre choſe que le flux ou collement du poinct en longueur, laquelle n'aura aucune largeur, comme dit Euclide ; puis que le poinct du coulement duquel elle eſt produite eſt imaginé n'auoir aucune quantité ; & par conſequent la ligne, qui eſt la premiere eſpece de quantité a ſeulement vne dimenſion, ſçauoir eſt longueur.

A

3. Les extremitez des lignes, ce ſont poincts.

Cecy eſt intelligible, puis que toutes lignes terminees commencent a vn poinct & acheuent auſſi a vn poinct.

4. La ligne droicte, eſt celle qui eſt egallement compriſe entre ſes poincts.

Les Mathematiciens ont diuerſes ſortes de lignes; mais Euclide ne traicte que des deux plus ſimples, ſçauoir eſt de la droicte, & de la circulaire; en ceſte definition il parle de la droicte, laquelle eſt le plus court chemin d'vn poinct iuſques à l'autre: ou comme dit Archimede, c'eſt la plus courte d'entre ſes extremitez.

5. Superficie, eſt ce qui a longueur & largeur tant ſeulement.

Apres la ligne, qui eſt la premiere eſpece de quãtité continuë, & qui a vne ſeule dimenſion, Euclide definit la ſuperficie, qui eſt la ſeconde eſpece de quantité, & a deux dimẽſions, ſçauoir eſt, longueur & largeur; & cõme la ligne eſt produite par le flux ou coullement du poinct, ainſi la ligne ſe mouuant en trauers, produict la ſuperficie.

6. Les extremitez de la ſuperficie, ce ſont lignes.

Il faut icy entendre des ſuperficies bornees, & terminees par lignes droictes: car il y a pluſieurs ſuperficies encloſes d'vne ſeule ligne, comme de la circulaire, & autres dont Euclide ne fait mention en ces Elements cy. Comme donc la ligne commence a vn poinct, & finit a vn autre poinct, ainſi la ſuperficie commence par vne ligne, & finit par vne ligne.

7 Superficie plane, eſt celle qui eſt egalemẽt compriſe entre ſes lignes.

Ceſte definition de la ſuperficie plane ſe raporte a celle de la ligne droicte : Car comme celle-cy est la plus courte d'entre ses extremitez, ainsi aussi la superficie plane est celle qui est la plus courte d'entre ses limites ou extremitez.

8. Angle plan, est l'inclination de deux lignes, l'vne a l'autre se touchant en vn plan non directement.

9. Que si les lignes comprenant l'angle sont droictes, l'angle sera appelé, rectiligne.

Quand deux lignes constituees en quelque superficie plane, concurrent en vn poinct d'icelle superficie, & ne se rencontrent directement, alors l'inclination d'icelles deux lignes, s'appelle angle plan. Or tout angle plan est faict, ou de deux lignes droictes, & alors il se nomme rectiligne: ou de deux lignes courbes, & alors on l'appelle curuiligne: ou bien d'vne ligne droicte, & d'vne courbe, & alors il s'appelle angle mixte. Quelques Geometres (entre lesquels est Dounot, & pource auoit-il changé ceste definition de l'angle plan en la premiere impression de sa traduction d'Euclide) ont estimé qu'afin que deux lignes fassent angle, il estoit necessaire qu'estant continuees du poinct de leur rencontre, elles s'entrecouppent en iceluy, dont s'ensuiuroit que deux cercles s'entretouchant en vn plan, ou qu'vne ligne droicte touchant vn cercle ne feroit angle, ce qui est contre l'intention d'Euclide, ainsi qu'il appert, tant par ceste definition de l'angle plan, que 16. p. 3. & comme la aussi bien demonstré Clauius sur la mesme proposition, ou il refute Pelletier, qui disoit que la ligne droicte touchant le cercle, ne faisoit angle ; c'est pourquoy ceux qui tiennent encore ceste opinion, se moquent bien d'Euclide, de Clauius & autres Geometres, qui disent qu'vne ligne droicte touchant vn cercle, fait vn angle contingent, ou d'attouchement. Or la grandeur d'vn angle plan consiste en la seule inclination des lignes qui le constituent, & non en la longueur d'icelles lignes.

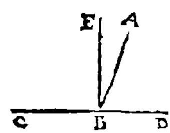
10. Quand vne ligne droicte tombant sur vne autre ligne droicte, faict les angles de part & d'autre egaux entr'eux, les angles sont droicts ; & la ligne tom-

bante, eſt perpendiculaire à celle-là, ſur laquelle elle tombe.

11. Angle obtus, eſt celuy qui eſt plus grand qu'vn droict.

12. Mais l'aigu, eſt celuy qui eſt plus petit qu'vn droict.

Si vne ligne droicte tombant ſur vne autre ligne droicte, ne ſencline pas d'auantage d'vn coſté que de l'autre, mais fait egale inclination, & par conſequent deux angles egaux entr'eux, chacun d'iceux eſt appelé angle droict, & la ligne ainſi tombante, perpendiculaire a celle-là, ſur laquelle elle tombe. Mais quant ceſte ligne tombante ſencline plus d'vn coſté que de l'autre, elle fait deux angles inegaux entr'eux, dont le plus grand eſt appellé obtus, & l'autre aigu. Or d'autant que quelquesfois en vn plan concurrent plus de deux lignes en vn meſme poinct, & par conſequent conſtituent pluſieurs angles, les Geometres ont accouſtumé (pour euiter confuſion) d'exprimer l'angle dont ils parlent par trois lettres, deſquelles celle du milieu monſtre le poinct, auquel les lignes conſtituent l'angle, & celles des extremes ſignifient les commencemens d'icelles lignes, que font iceluy angle: Comme pour exemple en ceſte figure ou les lignes AB & EB concurrent au poinct B de la ligne CD: & EB eſt autant inclinee vers CB qu'a DB, mais AB panche vers la partie DB. Pour donc exprimer ces angles, nous diſons que les deux CBE & DBE ſont droicts,



puis que la ligne EB tombant ſur CD ne panche d'vn coſté ny d'autre, comme fait AB; & par conſequent icelle EB eſt pendiculaire à CD: Mais que l'angle ABC, qui eſt plus grãd que le droict EBC, eſt obtus, & ABD, qui eſt moindre que le droict DBE, eſt aigu. Ce qu'on doit bien noter, afin de cognoiſtre facilement les angles, dont ſera fait mention és demonſtrations ſuiuantes.

13. Terme, eſt l'extremité de quelque choſe.

Ainſi les poincts ſont termes ou extremitez des lignes, les lignes des ſuperficies, & les ſuperficies des corps.

14. Figure, eſt ce qui eſt compris d'vn, ou de pluſieurs termes.

Toute quantité ayant termes, n'eſt pas dicte figure; ains ſeulement celles que les termes enuironnent : ainſi la ligne terminee par deux poincts n'eſt pas dite figure : mais toutes ſuperficies, & ſolides, finis & limitez, ſont nommez figures, pour ce qu'ils ſont enuironnez d'vn ſeul, ou de pluſieurs termes: d'vn ſeul, comme le cercle, l'Ellipſe, la ſphere: de pluſieurs, comme le triangle, le quarré, le cube, &c.

15. Cercle, eſt vne figure plane, contenuë par vne ſeule ligne qu'on appelle circonference; vers laquelle toutes les lignes droictes menees d'vn ſeul poinct de ceux qui ſont en icelle figure, ſont egales.

16. Et ce poinct là eſt appellé centre du cercle.

17. Diametre du cercle, eſt vne ligne droite, menee par le centre du cercle, & finiſſant de part & d'autre à la circonference d'iceluy cercle, le diuiſe en deux egallement.

18. Demi cercle, eſt vne figure compriſe du diametre, & moitié de la circonferẽce.

Toutes ces definitions ſont aiſees; car le cercle, ſa circonference, ſon centre, ſon diametre, le demy cercle declarez en icelles definitions, ſont toutes choſes cognues, voire aux plus ignorans.

19. Section de cercle, eſt vne figure compriſe d'vne ligne droicte, & de partie de la circonference.

Ceste deffinition est repetee au troisiesme liure, auquel lieu elle conuient mieux qu'en cestuy-cy.

20. Figure rectiligne, est celle qui est comprise de lignes droictes.

21. Figure de trois costez, est celle qui est comprise de trois lignes droictes.

22. Figure de quatre costez, est celle qui est comprise, de quatre lignes droites.

23. Figures multilateres ou de plusieurs costez, sont celles qui sont comprises de plus de quatre lignes droictes.

Le nombre des figures rectilignes est infiny: Les Geometres les nôment, tantost par le nombre de leurs costez, tantost par le nombre de leurs angles.

24. Or des figures de trois costez, celle se nomme, Triangle equilateral, qui a les trois costez egaux.

25. Triangle Isoscele, qui a deux costez egaux seulement.

26. Scalene, qui à les trois costez inegaux.

27. Encores des figures de trois costez, celle se nomme triangle rectangle qui a vn angle droit:

28. Ambligone, qui a vn angle obtus.

29. Oxigone, qui a les trois angles aigus.

30. Mais des figures de quatre costez, celle qui a les quatre costez egaux, & les quatre angles droicts, s'appelle quarré.

31. Quarré long, qui a les quatre angles droicts, mais non pas tous les costez egaux.

32. Rhombe, qui a les quatre coſtez egaux, mais non pas les quatre angles droicts.

33. Rhomboide, qui a les angles, & auſſi les coſtez oppoſez egaux entr'eux, ſans eſtre equilaterale ny rectangle.

34. Toute autre figure de quatre coſtez, eſt appellee trapeze.

35. Lignes droictes parallelles, ſont celles qui eſtant ſur vn meſme plan, & prolongees de part & d'autre ne ſe rencontrent iamais.

Icy finiſſent les definitions du premier liure d'Euclide: Mais d'autant qu'en ce meſme liure eſt ſouuent parlé de parallelogramme, lequel Euclide n'a poinct definy, nous adiouſterons icy ſa definition.

36. Parallelogramme, eſt vne figure quadrilatere qui a les coſtez oppoſez parallels ou equidiſtans.

Telle figure eſt touſiours l'vne de ces quatre : Quarré, Quarré long, Rhombe, Rhomboide.

PETITIONS OV DEMANDES.

1. D'vn poinct donné, à vn autre point mener vne ligne droicte.

2. Continuer infiniement vne ligne droicte donnee & terminee.

3. Deſcrire vn cercle de quelque centre & interual que ce ſoit.

Euclide ne ſe ſert en ces Elemẽs cy que de 2. ſortes de lignes ſimples, ſçauoir eſt de la droicte, & de la circulaire ; la deſcription desquelles estant fort facile, il demande qu'il luy soit permis de descrire ou de s'imaginer des lignes droictes de telle longueur qu'il voudra: Pareillement des cercles de tel diametre qu'il voudra, sans qu'il soit contrainct de demonstrer que cela est possible.

COMMVNES SENTENCES.

1. Les choses egales à vne mesme, sont egales entr'elles.
2. Si a choses egales, on adiouste choses egales, les toutz sont egaux.
3. Si de choses egales, on oste choses egales, les restes sont egaux.
4. Si a choses inegalles, on adiouste choses egalles, les touts sont inegaux.
5. Si de choses inegalles, on oste choses egales, les restes sont inegaux.
6. Les choses doubles d'vne autre sont egalles entre elles.
7. Les choses qui sont moitiez d'vne mesme ou de choses egalles, sont egalles entr'elles.

Est aussi manifeste que les choses triples d'vne mesme, ou quadruple, ou quintuple, &c. sont aussi egales entr'elles. Pareillement que les choses qui sont tierces parties d'vne mesme, ou quart, &c. sont aussi egales entr'elles.

8 Les choses qui conuiennent entr'elles, sont egalles entr'elles.

C'est a dire, que deux grandeurs seront egales, si estant posees l'vne sur l'autre, l'vne n'excede l'autre, mais toutes deux ensemble s'adiustent entr'elles, comme deux lignes droictes, seront dictes estre egales, si l'vne estant posee sur l'autre, celle qui est posee dessus s'adjuste à toute l'autre, tellement qu'elle ne l'excede, ny ne soit excedee d'icelle. Ainsi aussi deux angles rectilignes seront égaux, quand le sommet de l'vn, estant posé sur le sommet de l'autre, l'vn n'excede l'autre, c'est à dire que les lignes de l'vn, tombent sur celles de l'autre; car par ainsi les inclinations des lignes seront esgales. Ainsi aussi deux superficies seront égales, quand l'vne estant posee sur l'autre, elle ne l'excede, ny n'est excedee par icelle, mais s'adjustent totalement entr'elles. Or Dounot dit que conuenir, c'est auoir les extremitez sur les extremitez: ce qui n'est pas vray en toutes grandeurs; Car pour exemple vne ligne droite peut bien auoir ses extremitez sur les extremitez d'vne ligne courbe, laquelle neantmoins ne luy sera égale. Ainsi aussi vne ligne courbe peut bien auoir ses extremitez sur les extremitez d'vne autre ligne courbe, laquelle ne luy sera pas pourtãt egale. Or il est manifeste que de cest axiome on peut biẽ conuertir & prẽdre pour principe, *que les lignes droites egales conuiennent.* Pareillement, *Que les angles rectilignes egaux conuiennent.* Semblablemẽt, *Que les superficies planes egales & semblables conuiennẽt* On peut biẽ encore tirer quelques autres conuerses de cest axiome: mais de le vouloir conuertir vniuersellement (comme quelques-vns) c'est se moquer, veu que si on trouue vne ligne courbe égale a vne droite, elles ne conuiendront pas pourtant: & aussi qu'a tout angle rectiligne, il s'en peut bailler vn curuiligne égal; lesquels neantmoins ne conuiendront iamais: voire mesme faire vn quarré égal à vn triangle, ou á quelconque autre figure rectiligne; lesquels pourtant ne peuuent iamais conuenir. Ce qu'a bien recogneu Dounot en cest endroit, & neantmoins il conuertit vniuersellement ce principe au scholie de la 4. p. 1. concluant ainsi: *Car c'est vne necessité geometrique que les choses egales conuiennent, & que celles qui conuiennent soient egales.*

9. Le tout est plus grand que sa partie.

10. Tous les angles droicts sont egaux entre-eux.

De ce principe, nous pouuons conuertir & prendre pour maxime, que tout angle rectiligne egal à vn angle droict, est aussi droict.

11. Si vne ligne droicte tombant sur deux

deux autres lignes droictes , faict les angles interieurs d'vn mesme costé plus petits que deux droicts , icelles estant continuees à l'infini , se rencontreront du costé ou les angles sont plus petits que deux droicts.

12. Deux lignes droictes n'enferment pas vn espace.

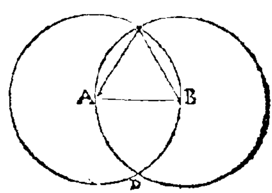
ELEMENT PREMIER.

PROBL. 1. PROP. I.

Sur vne ligne droite donnee & terminee, deſcrire vn triangle equilateral.

SOIT la ligne droicte donnee AB; ſur laquelle il faut faire vn triangle equilateral.

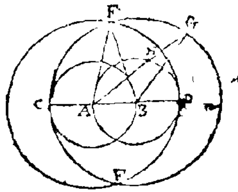
Du centre A, & de l'interualle de AB, ſoit deſcrit le cercle BCD: Item du centre B, & de l'interualle de la meſme AB, ſoit deſcrit vn autre cercle ACD couppant le premier és poincts C & D, de l'vn deſquels, ſçauoir de C, ſoient menees les deux lignes droictes CA & CB. Ie dis que le triangle ABC cōſtruit ſur la ligne droicte donnee AB eſt equilateral.



Car le coſté AC eſt egal au coſté AB par la 15. deff. d'autant qu'ils procedent de meſme centre vers meſme circonference: & par la meſme raiſon, le coſté BA eſt egal au coſté BC. Donc par la 1. com. ſent. les coſtez CA & CB ſeront egaux, eſtant chacun egal à AB: & partant le triāgle ABC deſcrit ſur AB eſt equilateral; qui eſt ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

Quelques Interpretes ont icy enſeigné à deſcrire auſſi ſur vne ligne droicte donnee vn triangle Iſoſcelle, & vn Scalene, ce que nous ferons auſſi en ceſte maniere. Soit vne ligne droicte donnee AB, à l'entour de laquelle des centres A & B, ſoient deſcrits deux cercles, ainſi que deſſus. En apres ſoit prolongee icelle AB, de part & d'autre vers les circonferences iuſques en C & D: puis du centre A, &



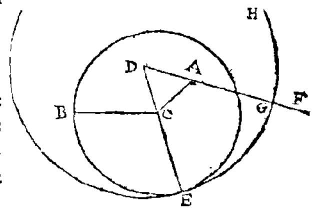
internale AD, soit descrit le cercle DEF : Item du centre B, & internale BC, le cercle CEF, couppant le premier és poincts E & F, de l'vn ou l'autre desquels, qui est de E, soient menez aux poincts A & B, les deux lignes AE, EB. Ie dis que le triangle AEB, faict sur la ligne donnee AB, est Isoscelle, qui est que les deux costez AE, EB, sont egaux entr'eux, & plus grands que AB. Car d'autant que par la 15. def. AE est egal à la ligne AD, & icelle AD est double de AB, d'autant que BA, DB sont egales entr'elles : aussi AE sera double de AB. Derechef parce que BE est egal à BC, & icelle BC est double de AB, aussi BE sera double d'icelle AB. Veu donc que l'vn & l'autre costé AE, BE est double de la mesme AB, ils seront egaux entr'eux par la 6. com. sent. & partant plus grande que la ligne AB. Donc le triangle AEB est Isoscelle. Maintenant si du poinct A, on tire la ligne droicte AG à la circonference EGF, qui ne soit la mesme que AE ou AD, couppant la circonference EHD en H, & de G on meine à B la ligne droicte GB, sera constitué le triangle AGB sur la ligne AB, lequel ie dis estre scalene. Car par la 15. def. tant AH, AD que BG BC sont egales. Mais AD, BC sont doubles de AB, d'icelle seront aussi doubles AH, BG, & partant plus grandes qu'icelle AB. Veu donc que AG est plus grande que AH, ou que BG, le triangle AGB sera scalene.

PROB. 2. PROP. II.

D'vn poinct donné, mener vne ligne droite egalle à vne ligne droite donnee.

Soit le poinct donné A, & la ligne droicte donnee BC, & il faut du poinct A, mener vne ligne droite egalle a icelle donnee BC.

De l'vn ou l'autre extreme de la ligne dõnee BC, sçauoir est de C, comme centre, & de l'internalle de CB, soit descrit le cercle BE: puis du poinct donné A, au centre C, soit menee la ligne droicte AC (sinon que le poinct A fut donné en la ligne BC, par la precedente prop. soit descrit le triangle equilateral ADC & soit continué le costé DE, iusques à ce qu'il rencontre la circonference en E, mais le costé D A tant qu'on voudra en F. En apres du centre D, & de l'interualle de la ligne droicte DE, soit descrit le cercle EGH coupant la ligne DF. Ie dis que la ligne A G qui est menee du poinct donné A, est egale a la ligne droicte donnee BC.

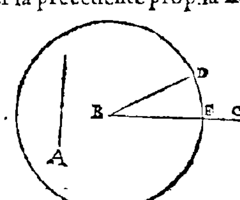


Car DG & DE sont egalles, d'autant qu'elles procedét de mesme centre vers vne mesme circonference, desquelles si on oste D A & D C qui sont egalles, estant D A C triangle equilateral, les restes CE & AG seront egalles par la 3. com. sent. Mais CB est egalle a CE, parce qu'elle procede de mesme centre vers mesme circonference. Donc AG sera egalle à CB, parce que les choses egalles à vne sont egalles entre elles. Nous auons donc du poinct donné A mené la ligne AG egale à la ligne droicte donnee BC. Ce qu il faloit faire.

PROB. 3. PROP. III.

Deux lignes droictes inegalles estants donnees, oster de la plus grande, vne ligne droicte egalle à la plus petite.

Soient les deux lignes inegales A & BC, desquelles BC est la plus grande: & d'icelle il faut oster vne ligne egalle à A. A l'vn ou l'autre des extremes de la plus grande ligne BC, sçauoir est au poinct B, soit posee par la precedente prop. la ligne BD egale à la moindre A: puis du centre B, & de l'interualle BD soit descrit vn cercle couppant BC en E. Ie dis que la ligne B E est esgale à A. Car d'autant que par la 15. def les lignes BD, BE sont egalles, & par la construction BD est egale à A; par la 1. com. sent. BE sera egale à A. Nous auons donc osté de BC, la ligne BE egale à A, ainsi qu'il faloit faire.

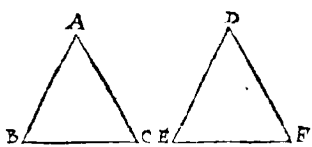


SCHOLIE.

Ceste construction a esté retenuë par tous les Interpretes d'Euclide, excepté Dounot qui l'a chãgee: car à l'extreme de la moindre ligne, il en pose une egale à la plus grande; quoy faisant il aduient que d'icelle plus grande ligne donnee, il n'en couppe pas vne egale à la moindre, comme est requis, ains seulement d'vne egale à icelle.

THEOREME I. PROP. IIII.

Si deux triãgles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien; & l'angle contenu d'iceux, egal à l'angle: la base sera sera egalle à la base; & les autres angles, egaux aux autres angles chacun au sien; & le triangle egal au triangle.

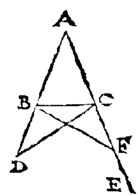


Soient les deux triangles ABC & DEF, desquels le costé AB soit egal au costé DE, & AC à DF, & l'angle A egal à l'angle D: Ie dis que la base BC sera egale à la base EF, & l'angle B egal à l'angle E, & l'angle C à l'angle F, & le triangle au triangle.

Qu'il ne soit ainsi: si on entend le point D estre posé sur le point A, & que DE tombe sur AB, aussi DF tombera sur AC, autrement l'angle A ne seroit pas egal à l'angle D. Et d'autant que les costez AB & AC sont egaux aux costez DE & DF, chacun au sien, ils conuiendront par la 8. com. sent. conuertie, & partant les extremitez B & C, tomberont sur les extremitez E & F. Ainsi les deux bases BC & EF cõuiendront, & seront egalles par la mesme 8. com. sent. Et le triangle conuiendra auec le triangle, & l'angle B conuiendra auec l'angle E, & l'angle C auec l'angle F: partant egaux. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEO. 2. PROP. V.

Les triangles Iſoſceles,ont les angles ſur la baſe egaux : & les coſtez egaux eſtans continuez,les angles exterieurs ſoubs la baſe,ſont egaux.



Soit le triangle Iſoſcele ABC. Ie dis que les angles ABC, & ACB, ſur la baſe BC, ſont egaux.

Qu'il ne ſoit ainſi.Soient prolongez AB & AC, coſtez egaux iuſques en D & E : & ſoit fait AF egalle à AD par la 3.p. 1.& ſoiēt menees les lignes BF & CD. Les deux triangles ADC, & AFB,ayans l'angle A commun, ont les deux coſtez AD & AC egaux aux deux coſtez AF & AB, chacun au ſien;& par la 4.p.1.la baſe BF ſera egalle à la baſe CD, & l'angle ABF egal à l'angle ACD, & l'angle D egal à l'angle F. Item les triangles DCB, & FBC, ayant l'angle D egal à l'angle F, & les deux coſtez DB, & DC eſgaux aux deux coſtez CF & FB. (car BF a eſté prouué tantoſt egal à DC ; & AD AF eſtans egaux ; & AB, AC auſſi eſgaux ; les reſtes BD, & CF ſeront auſſi egaux) par la 4.p.1.la baſe ſera egale à la baſe,& les autres angles egaux aux autres angles,chacun au ſien : ſçauoir l'angle BCD,ſera egal à l'angle CBF. Et qui des angles egaux ABF & ACB, oſte les angles egaux CBF ; & BCD ; les demeurans ABC, & ACB, ſeront egaux.

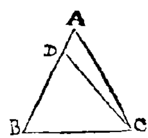
Pour la ſeconde partie. Que les coſtez egaux AB & AC eſtans continuez,les angles exterieurs ſoubs la baſe BC,ſont egaux,ſçauoir DBC à BCF, elle a eſté ſuffiſamment demonſtree, lors qu'on a prouué que les triangles DBC, & CFB, auoient leurs angles egaux,chaſcun au ſien.

SCHOLIE.

Ceſte propoſition eſt auſſi vraye es triangles equilateraux. Car les deux coſtez AB, AC du triangle ABC eſtans egaux entr'eux, ou *l'autre costé CB, est pareillement egal à iceux, comme il aduient au triangle equilateral; ou bien inegal, comme il arriue au triangle Isoscelle; Il s'ensuit necessairement, que les angles de dessus la base BC, sont egaux entr'eux, & ceux de dessous la mesme base aussi egaux entr'eux, comme il apert par la demonstration cy dessus.*

THEO. 3. PROP. VI.

Si vn triangle a deux angles egaux entr'eux; les costez soustendans iceux angles seront aussi egaux entr'eux.



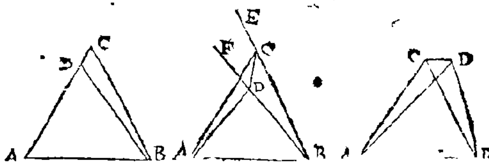
Soit le triangle ABC, duquel les deux angles ABC, & ACB sur la base BC sont egaux. Ie dis que les deux costez AB & AC sont aussi egaux.

Autrement soit AB plus grand que AC, s'il est possible: on en pourra donc retrancher vne partie egalle a AC par la 3.p.1. soit icelle BD egalle a AC, & soit menée la ligne DC: ainsi les triangles DBC, & ACB, ont les deux costez BD, & BC egaux aux deux costez AC, & CB, & l'angle B egal a l'angle ACB, & par la 4.p.1. ils seront egaux, ce qui est impossible: car l'vn est partie de l'autre. Donc les costez AB, & AC n'estoient pas inegaux: ce qu'il faloit demonstrer.

THEOR. 4. PROP. VII.

Si des extremitez de quelque ligne droicte, on meine deux autres lignes droictes, se rencontrant en vn poinct; des mesmes extremités on n'en pourra mener deux autres egales à icelles, chacune à la sienne, & de mesme part, se rencontrant à vn autre poinct.

Soit la



Soit la ligne AB, des extremitez de laquelle ſoiēt menees les deux lignes droictes AC, & BC ſe rencontrant au poinct C. Ie dis que des meſmes extremitez A& B, & de la meſme part que C, on ne peut mener deux autres lignes droictes egales a icelles AC, BC, chacune à la ſiēne, qui ſe rencōtrent à vn autre poinct que C; c'eſt à dire, que ſi de l'extremité A on mene la ligne AD egale à AC, & de l'extremité B, la ligne BD egale à BC, il ne peut eſtre que le poinct de rencontre D, ſoit autre que le poinct de rencontre C.

Car ſi faire ſe peut que le poinct de rencontre D tombe ailleurs qu'au poinct C : ou iceluy poinct D tombera ſur l'vne ou l'autre des lignes AC, BC ; ou dans le triangle ACB ; ou hors iceluy.

Premierement iceluy poinct de rencontre D, ne peut eſtre ſur la ligne AC : car il faudroit que les deux lignes AD, & AC fuſſent egalles entr'elles, ſçauoir eſt la partie au tout : ce qui eſt abſurde; partant la rencontre D, ne ſe fera point ſur AC; ny ſur BC à cauſe de la meſme abſurdité.

Soit donc iceluy poinct de rencontre D dans le triangle ABC : & apres auoir prolongé BC iuſques en E, & BD iuſques en F, ſoit menee CD. Puis que les deux lignes AC, & AD ſont poſees egalles, le triangle ACD ſera Iſoſcele, & par la 5.p.1. les deux angles ACD & ADC ſur la baſe CD ſeront egaux. Mais l'angle ACD eſt moindre que l'angle DCE: (car il n'eſt que partie d'iceluy) donc l'angle ADC eſt auſſi moindre que le meſme angle DCE ; & par conſequent l'angle CDF, qui n'eſt que partie d'iceluy ADC, ſera beaucoup moindre que le meſme angle DCE. Derechef puis que les lignes BC, BD, ſont poſees eſgalles, le triangle CDB doit eſtre Iſoſcele; & partant les angles CDF & DCE ſous la baſe DC ſeront egaux par la 5.p.1. Mais il a eſté demonſtré que l'angle CDF eſt beaucoup moindre que l'angle DCE : donc le meſme angle CDF eſt moindre que l'angle DCE, & auſſi egal à iceluy : ce qui eſt abſurde.

Soit donc finalement iceluy point de rencontre D, hors iceluy triangle ACB, comme en la 3. figure: apres auoir mené la ligne CD, il s'enſuiura que les deux triangles AD & BCD feront Isosceles ; & partant qu'ils feront les angles sur la base CD egaux: sçauoir est ACD à ADC & BCD a BDC. Mais iceluy BCD est plus grand que ADC: donc aussi BCD est plus grand que ACD ; c'est a dire la partie que le tout: ce qui est absurde. Le poinct de rencontre D ne tombera donc pas hors le triangle ABC, ny dedans iceluy, ny sur les lignes AC & BC : Il faut donc qu'iceluy poinct de rencontre D tōbē au premier poinct de rencontre C : ce qu'il faloit demonstrer.

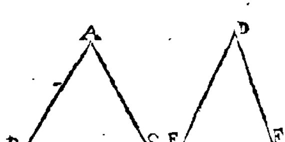
SCHOLIE.

Dounot a traduit ceste proposition ainsi. Si deux lignes droictes menees des extremitez d'vne autre ligne droite se rencontrent en vn poinct, & des mesmes extremitez on en meine deux autres egales aux deux premieres, elles se rencontreront au mesme poinct, pourueu que chacune soit du costé de son egale. Ce qui est fort esloigné de l'intention d'Euclide: car il ne dit pas que les deux lignes se rencontreront (chose qui est euidemment faulse, veu qu'infinies lignes peuuent estre menees, cōme dit est, lesquelles ne se rēcontreront pas.) Mais bien que si elles se rencontrent, ce sera au mesme poinct que les premieres.

THEOR. 5. PROPOS. VIII.

Si deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chascun au sien, & la base egalle à la base, ils auront aussi l'angle egal, compris d'iceux costez egaux.

Soient deux triangles ABC, DEF, desquels le costé AB est egal à DE, AC a DF, & la base BC à la base EF. Ie dis que les angles A & D compris d'iceux costez egaux, sont egaux.



Car puis que la base BC est egalle à la base EF; si on entend icelles estre posees l'vne sur l'autre, elles conuiendront tombant le poinct E sur le poinct B; & F sur C: & par la 7. p. 1. les deux lignes ED & FD, qui sont egalles à BA & CA, se ren-

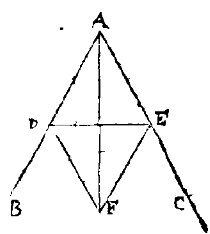
rencontreront au poinct A, & conuiendront auec les lignes BA & CA: partant conuiendront aussi les angles A & D cōtenus d'icelles lignes; & par consequent seront egaux par la 8. com. sent. ce qu'il faloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Puis que la base EF conuient auec la base BC & les costez DE, DF conuiennent aussi auec les costez AB, AC. Il s'ensuit que non seulement l'angle A est egal à l'angle D; mais qu'aussi l'angle E est egal à l'angle B, & l'angle F, egal à l'angle C, & tout le triangle egal à tout le triangle.

PROBL. 4. PROPOS. IX.

Couper en deux egallement vn angle rectiligne donné.



Soit l'angle rectiligne donné BAC, lequel il faut couper en deux egallemēt; c'est à dire en deux angles egaux entr'eux.

Soit de AB, & AC retranché deux parties egales AD & AE: & apres auoir mené la ligne DE, sur icelle, soit descrit le triāgle equilateral DEF par la 1. p. 1. & soit menee la ligne AF. Ie dis que icelle ligne couppe l'angle BAC en deux egallement.

Car les deux lignes AD & AF du triāgle DAF estans egales aux deux lignes AE & AF du triangle EAF, & la base DF esgalle à la base EF (estant DFE triangle equilateral) par la 8. p. 1. l'angle DAF sera egal a l'angle EAF: & partant l'angle BAC est couppé en deux egalement. Ce qu'il faloit faire.

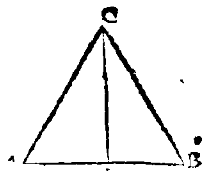
SCHOLIE.

Nous auons enseigné la prat.que de ceste propo. en nostre Geometrie pratique Prob 5. Or il apert parce que dess us qu'on peut aussi couper vn angle rectiligne en 4. parties egales, en 8. en 16. en 32. & ainsi consecutiuement en procedant tousiours par augmentation double.

Car apres qu'vn angle rectiligne est couppé en deux egalement, si on diuise derechef chasque partie en deux egalement, on aura 4. angles egaux. Que si on couppe derechef chacun d'iceux en deux egalement, nous aurons 8. angles egaux, & ainsi consequemment.

PROBL. 5. PROP. X.

Couper en deux egalement vne ligne droite donnee & terminee.



Soit la ligne droite dõnee & terminee AB : laquelle il faut couper en deux egallement.

Soit sur icelle ligne construit le triãgle equilateral ACB par la 1. p. 1. & par la precedente prop. soit l'angle C couppé en deux egalement par la ligne CD. Ie dis que CD coupe AB en deux egallement en D.

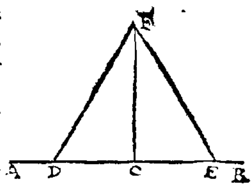
Car puis que les angles du poinct C sont egaux, & le triangle ACB est equilateral, les deux triangles ACD, & BCD, ont deux costez egaux à deux costez, & vn angle egal à vn angle; & partant par la 4. p. 1. la base AD sera egalle à la base DB. Donc AB est couppee en deux egallement en D. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Nous auons enseigné la practique de ceste propo. en nostre Geometrie pratique Prob. 1. Or il apert par ce que dessus qu'on peut aussi coupper vne ligne droicte finie en quatre parties egales, en 8. en 16. en 32. &c. ainsi que nous auons dit en la precedente prop. de la diuision de l'angle rectiligne. Mais comment on peut diuiser vne ligne ligne droicte terminee en tant de parties egales qu'on voudra, nous l'auõs enseigné en nostre Geometrie pratique Prob. 7. & ce tant Geometriquement, que mechaniquement auec le compas de proportion.

PROBL. 6. PROP. XI.

Sur vne ligne droite dõnee, & d'vn poinct en icelle, mener vne ligne perpendiculaire.



Soit la ligne droicte donnee AB, & le poinct en icelle C : d'iceluy poinct il faut mener vne ligne perpendiculaire à icelle AB.

Soient du poinct C prinses les deux lignes egalles CD & CE par la 3.p.1. & sur DE soit faict le triangle equilateral DFE, & de C à F soit menee la ligne CF. Ie dis qu'icelle CF est la ligne perpendiculaire demandee.

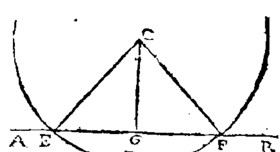
Car les triangles DFC & CFE ayans deux costez egaux à deux costez, chascun au sien, sçauoir DC à CE par la constru-ction, & CF commun, & la base DF egale à la base EF, à cause que le triangle DFE est equilateral ; par la 8.p.1. les angles au poinct C, contenus de costez egaux, seront egaux: & partant par la 10.d. ils sont dits droicts, & la ligne CF perpendiculaire à AB.

SCHOLIE.

La pratique, tant de ceste propo. que de la suiuante est enseignée en nostre Geometrie pratique, Prob. 2. & 3. ou l'apprenty trouuera soulagement à quelque doubte qui luy peuuent arriuer en la pratique de ceste propo.

PROBL. 7. PROP. XII.

Abaisser vne ligne droicte perpendiculaire sur vne ligne droite infinie, & d'vn poinct hors icelle.



Soit la ligne droite donnee & interminee AB, & le poinct hors icelle C, duquel il faut mener vne ligne perpendiculaire sur AB.

Soit pris au delà de la ligne AB quelconque poinct D; puis du centre C, & interualle CD, soit descrit le cercle EDF, coupant la ligne AB és poincts E & F; puis par la 10 p.1. soit coupee EF en deux egalement au poinct G, & soit menee la ligne CG, laquelle ie dis estre perpendiculaire à AB.

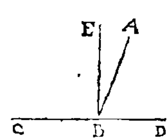
Car estans tirees les lignes droictes CE, CF; les deux costez EG & GC du triangle EGC seront egaux aux deux costez FG, & GC du triangle FGC, vn chacun au sien, & la base CE est egale à la base CF, estans icelles tirees du centre C vers la circonference, & par la 8. p. 1. les angles du poinct G seront egaux; & partant par la 10. d. ils seront droicts, & la ligne CG perpendiculaire à AB: ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

Au lieu de prendre le poinct D, de l'autre costé de la ligne AB, Dounot dit qu'on le prenne à l'aduenture dans icelle AB, & que descriuant vn cercle du centre C & interuale CD, il couppera la ligne AB: ce qui n'est pas vniuersellement vray, car il est manifeste que si le poinct D estoit pris d'auanture en G, le cercle ne coupperoit AB en deux endroits, comme il est necessaire, ains la toucheroit seulement: le poinct D ne doit donc estre pris à l'auanture dans la ligne AB, comme veut Dounot.

THEOR. 6. PROPOS. XIII.

Quand vne ligne droite tombant sur vne autre ligne droite fait deux angles, ou iceux seront droits, ou egaux à deux droits.

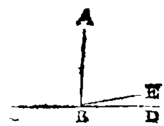


Soit la ligne droite AB, laquelle tombant sur vne autre ligne droite CD, faict les deux angles CBA, & DBA. Ie dis que iceux angles sont droicts, ou egaux à deux droicts.

Car ou icelle ligne AB est perpendiculaire à CD, ou elle ne l'est pas. Si elle est perpendiculaire, les angles sont droicts: Si elle ne l'est pas, soit leuee la perpendiculaire BE par le 11. p. 1. & les deux angles CBE & DBE seront droicts: mais les deux angles CBA & DBA ensemble occupent autant d'espace qu'iceux CBE, DBE, & conuiennent auec eux: Donc par la 8. com. sent. CBA & DBA seront egaux à deux droicts.

THEOR. 7. PROPOS. XIIII.

Si à l'extremité d'vne ligne droite se rencontrent deux autres lignes droites de part & d'autre d icelle faisant deux angles egaux à deux droits, icelles lignes se rencontreront directement.

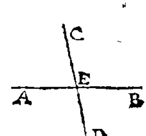


Soit la ligne AB, à l'extremité de laquelle B se rencontrẽt deux autres lignes droites CB, & DB, faisant les deux angles ABC & ABD egaux à deux droicts. Ie dis que CB, & DB se rencontrent directement, c'est à dire que CBD est vne ligne droicte.

Autrement si CBD n'est ligne droite, soit continuee CB directement, tant qu'il sera de besoin : ce qui sera adiousté a CB directement, ou bien tombera au dessous de BD , ou au dessus: soit au dessus, & soit CBE, ligne droite ; les deux angles ABC, & ABE, seront donc egaux à deux droits par la 13.p.1. & les deux ABC & ABD sont aussi egaux à deux droits , & par la 1. com. sent. ils seront egaux aux deux ABC , & ABE, c'est à sçauoir que ABD & ABE seront egaux, le tout à la partie, ce qui est impossible : donc CB , & DB se rencontroient directement.

THEOR. 8. PROPOS. XV.

Si deux lignes droictes se coupent l'vne l'autre , elles feront les angles opposez au sommet egaux.



Soient les deux lignes AB, & CD, se coupans l'vne l'autre au point E. Ie dis que les angles opposez au sommet AEC , & DEB sont egaux.

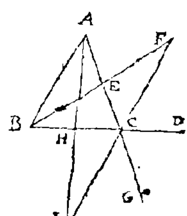
Car d'autant que sur AB tombe la ligne CE, les angles AEC, & BEC, sont egaux à deux droicts par la 13. p.1. Item pour la mesme raison CEB & DEB seront egaux à deux droicts : partant les deux AEC & CEB, sont egaux aux deux CEB & DEB. Que si on oste le commun CEB, le demeurant AEC sera egal au demeurant DEB. Le mesme se peut dire des deux AED & CEB.

COROLLAIRE.

Il s'ensuit de ceste demonstration, que deux lignes droictes s'entre-couppant, font au poinct de leur section quatre angles egaux à quatre angles droicts. Est aussi manifeste qu'estans constituez tant d'angles qu'on voudra alentour d'vn seul & mesme poinct, qu'ils seront seulement egaux à quatre angles droicts : car si de E on meine tant d'autres lignes qu'on voudra, elles diuiseront seulement les quatre angles constitués au poinct E, en plusieurs parties : toutes lesquelles prinses ensemble seront egales aux quatre angles d'iceluy poinct, c'est à dire à quatre droicts.

THEOR. 9. PROP. XVI.

Vn costé d'vn triangle estant prolongé, l'angle exterieur est plus grand que l'vn ou l'autre des opposez interieurement.

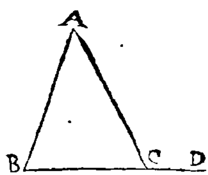


Soit le triangle ABC, duquel le costé BC soit continué iusques en D. Ie dis que l'angle exterieur ACD est plus grãd que l'opposé interieur BAC ; ou que ABC autre opposé interieur.

Qu'ainsi ne soit. Apres auoir couppé AC en deux egalement en E, soit menée la ligne BE continuee iusques en F, & soient faictes BE & EF egalles, & soit menee FC. Les deux triangles AEB & CEF auront les deux costez AE & EB egaux aux deux costez CE & EF, par la construction, & par la precedente prop. l'angle AEB est egal a l'angle CEF: donc par la 4 p. 1. les bases AB, & FC seront egalles, & les autres angles egaux, chascun au sien : & partant l'angle BAE, sera egal à l'angle ECF, qui n'est que partie de l'angle ACD, lequel pour ceste raison sera plus grand que l'opposé BAC. Que si le costé AC est prolongé en G, & BC couppé en deux egalement en H, & on tire la ligne AHI, tellement que HI soit egalé à AH, & soit menee CI. On demonstrera par mesme raison que dessus, que l'angle externe BCG est plus grand que l'interne & opposé ABC. Mais par la prop. precedente à iceluy BCG est egal l'externe ACD: donc iceluy ACD est aussi grand que l'interne & opposé ABC.

THEOR. 10. PROP. XVII.

Tout triangle a deux angles plus petits que deux droits, de quelle façon qu'ils soient pris.

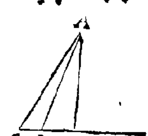


Soit le triangle ABC. Ie dis que les deux angles B, & ACB sont plus petits que deux droicts.

Car apres auoir continué le costé BC iusques en D; Il est euident par la 16.p.1. que l'angle exterieur ACD, est plus grand que l'opposé interieur B. Mais les deux ACD & BCA sont egaux à deux droicts, par la 16.p.1. Partant ABC & BCA sont plus petits que deux droicts. On demonstrera pareillement que les angles A & ACB: Item les angles A & B, en prolongeant vn autre costé, sont moindres que deux droicts.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste que d'vn mesme poinct on ne peut mener plus d'vne ligne perpendiculaire sur vne ligne droicte. Car si faire se peut, soient menees de A sur la ligne droicte BD, deux perpendicul. AD, AB. Donc au triangle ABD, les deux angles internes ABD, ADB seröt egaux à deux droicts, puis qu'ils sont droicts. Ce qui est impossible: Car il a esté demonstré cy dessus que deux angles d'vn triangle sont moindres que deux angles droicts.



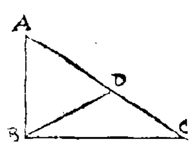
Il s'ensuit aussi de ceste prop. qu'en tout triangle, duquel vn angle est droit, ou obtus, que les autres sont aigus. Car puis qu'il a esté demonstré que deux angles quels qu'ils soiet sont moindres que deux droicts, il est necessaire que s'il y en a vn droict, ou obtus, celuy qu'on voudra des deux autres soit aigu : car autrement en vn triangle seroient deux angles droits, ou plus grands que deux droits.

S'ensuit encore de ceste prop. que si vne ligne droicte AB, fait auec vne autre ligne droicte CD, angles inegaux, sçauoir est ABD aigu, & ABC obtus, & de quelconque poinct d'icelle AB, on tire vne perpendiculaire sur CD, comme AD : icelle perpendiculaire AD tombera du costé de l'angle aigu ABD. Car qu'elle tombe, s'il est possible du costé de l'angle obtus ABC. Donc au triangle ABC, les deux angles ABC, ACB obtus & droict, sont plus grands que deux droicts ; mais aussi moindres que deux droicts par ceste prop. ce qui est absurde. La perpendiculaire tiree de A ne tombera donc pas du costé de l'angle obtus : & partant tombera du costé de l'angle aigu.

Est encore manifeste par ceste prop. que tous les angles d'vn triangle equilateral, & les deux angles de dessus la base d'vn triangle Isoscele, sont aigus. Car puis que deux angles quels qu'ils soient d'vn triangle equilateral, & les deux de dessus la base d'vn Isoscelle sont egaux entr'eux par la 5. p. 1. & tant ces deux cy ensemble, que ces deux là, sont moindres que deux droicts par ceste prop. chacun d'iceux sera moindre qu'vn droict, c'est à dire aigu : car s'il estoit droit ou obtus, tous les deux ensemble seroient, ou egaux à deux droicts, ou plus grands.

THEOR. II. PROP. XVIII.

De tout triangle le plus grand costé soustient le plus grand angle.



Soit le triangle donné ABC, duquel le costé AC est plus grand que le costé AB. Ie dis que l'angle ABC est plus grand que l'angle ACB.

Qu'il ne soit ainsi. Puis que AC est plus grand que AB, soit d'iceluy retranché AD egal à AB. & soit mené BD. Le triangle ABD est Isoscele, & par la 5. p. 1. les deux angles ABD & ADB sur la base BD seront egaux. Or l'angle exterieur ADB est plus grād que l'opposé interieur C, par la 16. p. 1. Mais ABC estant plus grand que ABD, il ſera auſſi plus grand que ſon egal ADB: & à plus forte raiſon ABC ſera plus grand que C. Par meſme raiſon ſi on poſe le coſté AC plus grand que le coſté BC ; on demonſtrera l'angle ABC eſtre plus grand que l'angle BAC; ſçauoir eſt ſi de CA on couppe vne ligne egale à CB, &c. Parquoy le plus grand coſté de tout triangle, ſouſtient le plus grand angle: ce qu'il faloit demonſtrer.

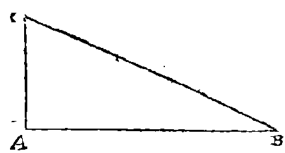
COROLLAIRE.

Il eſt donc manifeſte par ceſte demonſtration que tous les trois angles d'vn triangle ſcalene ſont inegaux.

THEOR. 12. PROPOS. XIX.

En tout triangle le plus grand angle eſt ſouſtenu du plus grand coſté.

Soit le triangle A B C duquel l'angle A eſt plus grand que l'angle C. Ie dis que le coſté BC qui ſouſtient le plus grand angle A, eſt plus grand que le coſté AB; qui ſouſtient vn moindre angle C.

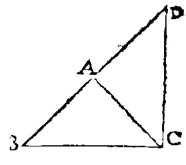


Autrement il ſera egal, ou plus petit. Il ne peut eſtre egal; d'autant que le triãgle ſeroit Iſoſcelle, & par la 5. p. 1. les deux angles A & C ſeroient egaux contre l'hypotheſe. Il ne peut auſſi eſtre plus petit: d'autãt que par la 18. p. 1. l'angle A ſeroit plus petit que l'angle C, qui eſt auſſi contre l'hypoteſe. Il ſera donc plus grand Par meſme raiſon on prouuera le coſté BC eſtre plus grand que le coſté AC, ſi on poſe l'angle A eſtre plus grand que l'angle B. Donc de tout triangle le plus grãd angle eſt ſouſtenu du plus grand coſté : ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 13. PROP. XX.

En tout triangle deux coſtez, de quelle façon

qu'ils soient pris, sont plus grands que le troisiesme.

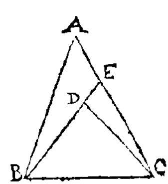


Soit le triangle ABC. Ie dis que deux costez d'iceluy, lesquels on voudra, sçauoir est AB, & AC sont plus grāds ensemble que le troisiesme BC.

Qu'il ne soit ainsi; apres auoir prolongé BA, iusques en D, & faict AD egal à AC, soit menee la ligne DC. Le triangle DAC sera Isoscelle, & par la 5.p.1. les deux angles ADC & ACD sur la base DC, serōt egaux. Mais DCB est plus grand que DCA: aussi sera il plus grand que son egal ADC; & partāt par la 19.p. 1. BD sera plus grād costé que BC. Mais BD est egal aux deux costez AC & BA, dōc Iceux AC & BA seront plus grands que BC. On demonstrera en la mesme maniere que deux autres costez sont plus grāds que l'autre. Parquoy deux costez d'vn triangle pris en quelque sorte que ce soit, sont plus grands que l'autre: ce qu'il faloit demoustrer.

THEOR. 14. PROP. XXI.

Si des extremitez d'vn costé de quelque triangle, on meine deux lignes droites se rencontrans au dedans d'iceluy; icelles seront plus petites que les deux autres costez du triangle, mais elles feront vn plus grand angle.



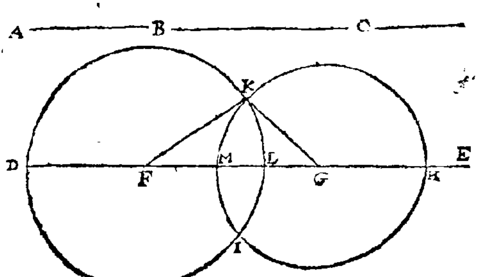
Soit le ttiangle ABC, & des extremitez du costé BC, soient menees interieuremēt deux lignes BD, CD se rencontrans au poinct D, Ie dis qu'icelles lignes sont plus petites que BA, & CA: Mais que l'angle D est plus grand que l'angle A.

Qu'ainsi ne soit: soit continuee BD iusques au poinct E. Donc par la 20.p. 1. les deux coftez BA, & A E du triangle BAE, feront plus grands que le troifiefme BE. Que fi à BA, & A E, plus grands que BE, on adioufte chofe commune EC, les touts CE, EB feront toufiours plus petits que les touts CE, EA, AB; c'eft à dire CA AB. Pareillement les deux coftez CE & ED du triangle CED font plus grands que le troi fiefme CD: aufquels fi on adioufte chofe egale, fçauoir DB, les touts CE, ED, DB, ou CE, EB feront toufiours plus grands que les touts CD & DB. Mais il a efté demonftré que CA, AB font plus grands que CE, EB: donc CA, AB feront beaucoup plus grands que CD, BD. Ce qui eftoit propofé en la premiere partie.

Pour la feconde partie, fçauoir que l'angle D eft plus grand que l'angle A. D'autant qu'il eft exterieur au triangle CED, il fera plus grand que fon oppofé interieurement CED par la 16. p. 1. Mais pour la mefme raifon, iceluy angle CED eft auffi plus grand que fon oppofé interieurement A : donc à plus forte raifon D fera plus grand que A.

PROBL. 8. PROP. XXII.

Faire vn triangle de trois lignes droites, egales à trois autres donnees: mais il faut que deux d'icelles de qu'elle façon qu'elles foient prifes, foient plus grandes que l'autre: D'autant que de tout triangle, les deux coftez de quelque façon qu'ils foient pris, font plus grands que l'autre.



Soient les trois lignes donnees A, B & C, defquelles deux de quelle façon qu'elles foient prifes font plus grandes que la troisiesme. Il faut faire vn triangle d'icelles ou de trois autres egales à icelles.

Soit prise vne ligne droite, tant grande qu'il sera de besoin comme DE, de laquelle soit retranchee DF, egale á A, & du reste, FG egale à B, & GH egale a C: & soit descrit vn cercle du centre F, & interual FD. Item vn autre cercle du centre G, & interual GH, coupant le premier cercle au poinct K duquel soient menees les deux lignes KF, KG. Ie dis que les costez du triangle FKG, sont egaux aux trois lignes donnees A, B, C.

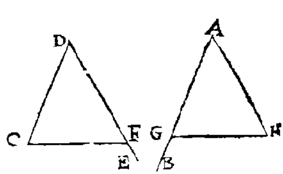
Car FD, FK estans egales par la diff. du cercle: item GK & GH. Il est euident que les trois costez du triangle FKC, sont egaux aux trois lignes FD, FG, GH, lesquelles estants egales aux donnees, aussi les costez du triangle, seront egaux aux lignes donnees.

SCHOLIE.

La pratique tant de ce prob. que du suiuant est enseignee en nostre Geometrie practique Prob. 11. & 4.

PROBL. 9. PROPOS. XXIII.

Sur vne ligne droite donnee, & sur vn poinct donné en icelle, faire vn angle rectiligne egal à vn angle rectiligne donné.



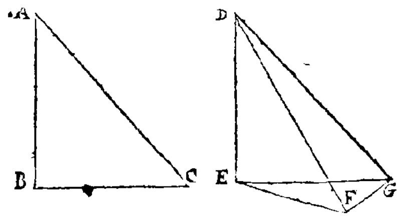
Soit la ligne donnee AB: & le poinct en icelle A, sur lequel il faut faire vn angle rectiligne egal à l'angle rectiligne donné CDE.

Ayant pris és lignes CD, DF quelsconques poincts C & F, soit menee la ligne CF, & sur AB, soit basti par la 22. p. 1. le triangle AGH, ayant les trois costez egaux aux trois costez du triangle CDF, sçauoir est les deux costez GA, HA, aux deux costez CD, FD, & la base GH à la base CF. Il est euident par la 8. p. 1. que l'angle A sera egal à l'angle D. donné.

THEOR. 15. PROPOS. XXIIII.

Si deux triãgles ont deux coſtez egaux à deux coſtez, chaſcun au ſien, & l'angle contenu d'iceux coſtez plus grand que l'angle, ils auront la baſe plus grande que la baſe.

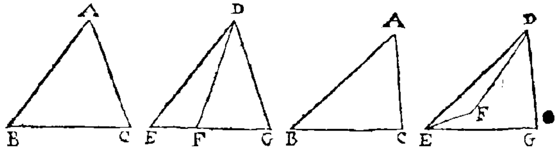
Soient deux triangles ABC & DEF, deſquels les deux co-



ſtez AB, AC, ſont egaux aux deux coſtez DE, DF, chacun au ſien; mais l'angle A eſt plus grand que l'angle E D F. Ie dis que la baſe BC eſt plus grande que la baſe EF.

Qu'ainſi ne ſoit. Sur la ligne DE, & au poinct D, ſoit faict par la precedente prop l'angle EDG egal à l'angle A; (& la ligne droicte DG tombera hors le triangle DEF, puis que l'angle EDF a eſté poſé moindre que l'angle A) & ſoit poſee DG, egale à DF, c'eſt a dire a AC: Soit tiree puis apres la ligne EG, laquelle tombera ou au deſſus de la ligne EF; ou ſur icelle; ou au deſſous d'icelle. Qu'elle tombe premierement au deſſus de EF, & ſoit tiree la ligne FG. D'autant que les coſtez AB, AC, ſont egaux aux coſtez DE, DG, vn chacun au ſien, & l'angle A egal a l'angle EDG par la conſtruction: la baſe BC ſera egale à la baſe EG, par la 4 p 1. Et puis que les deux coſtez DF, DG, ſont egaux entr'eux: les angles DFG, DGF ſeront auſſi egaux entr'eux par la 5.p.1. Mais l'angle DGF eſt plus grand que l'angle EGF: dõc auſſi l'angle DFG ſera plus grand que le meſme angle EGF: parquoy tout l'angle EFG ſera beaucoup plus grand que le meſme angle EGF. Donc au triangle EFG, le coſté EG ſera plus grand que le coſté EF par la 19.p.1. Mais il a eſté demõſtré que EG eſt egale à BC: donc BC ſera auſſi plus grande que EF: ce qui eſtoit propoſé.

Maintenant que EG tombe ſur icelle EF: d'autant que cô-



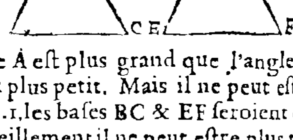
me deſſus la baſe EG, ſera egale à la baſe BC par la 4. p. 1. EG eſt plus grande que EF par la 9. com. ſent. auſſi BC ſ plus grande que EF : ce qui eſtoit propoſé.

En troiſieſme lieu, que EG tombe au deſſous de EF. Il eſt euident que les deux lignes interieures DF, EF ſont plus petites que DG, EG, par la 21. p. 1. Mais par la conſtruction DG eſt egale à DF : donc EG eſt plus grande que EF par la 5. com. ſent. Mais comme deſſus par la 4. p. 1. EG eſt egale à BC : donc auſſi icelle BC ſera plus grande que EF : ce qu'il faloit demonſtrer.

THEOR. 16. PROP. XXV.

Si deux triãgles ont deux coſtez egaux à deux coſtez, chaſcun au ſien, & la baſe plus grande que la baſe ; ils auront auſſi l'angle contenu d'iceux coſtez egaux, plus grand que l'angle.

Soient deux triangles ABC & DEF, deſquels les deux coſtez AB & AC ſont egaux aux deux DE & DF chacun au ſien, Mais la baſe BC eſt plus grande que la baſe EF. Ie dis que l'angle A eſt plus grand que l'angle D.

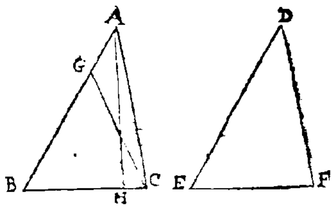


Autrement il ſera egal ou plus petit. Mais il ne peut eſtre egal : d'autant que par la 4.p.1, les baſes BC & EF ſeroient egales contre l'hypoteſe. Pareillement il ne peut eſtre plus petit; d'autant que par la 24. p. 1. la baſe BC ſeroit plus petite que la baſe EF : donc il ſera plus grand.

THEO

THEO. 17. PROP. XXVI.

Si deux triãgles ont deux angles egaux à deux angles, chascun au sien, & vn costé egal à vn costé, sçauoir est, où celuy aux extremitez duquel sont les angles egaux ; ou bien celuy qui soustiét l'vn d'iceux angles egaux; ils auront aussi les autres costez egaux aux autres costez, chacun au sien ; & l'autre angle egal à l'autre angle.



Soient deux triangles ABC & DEF, desquels les angles B, & ACB sõt egaux aux deux E, & F chascun au sien, & soit premierement le costé BC, aux extremitez duquel sont les angles B, & ACB, egal au costé EF, aux extremitez duquel sont les angles E & F. Ie dis que les deux autres costez AB, AC, sont egaux aux deux autres costez, DE, DF, chascun au sien, sçauoir est AB à DE & AC à DF. Et l'autre angle BAC egal à l'autre angle D.

Car si AB n'est egal à DE, soit AB plus grand, duquel soit retrãché BG egalle à DE: puis soit tiree la ligne droicte CG. Donc puis que les costez BC, BG sont egaux aux costez EF, DE, chascun au siẽ, & l'angle B egal à l'angle E, par la 4. p. 1. la base CG sera egalle à la base FD, & les autres angles egaux aux autres angles chacun au sien: c'est à sçauoir que l'angle BCG sera egal à l'ãgle F, auquel est aussi egal l'angle ACB par l'hypothese. Partant les deux angles ACB & GCB seroient egaux, la partie au tout : ce qui est absurde. Dõc le costé, AB n'estoit pas inegal au costé DE, mais egal. Parquoy veu que les costez AB, BC sont egaux aux costez DE, EF, chacun au sien, & l'angle B egal à l'angle E ; là base AC sera egale à la base DF, & l'autre angle BAC egal à l'autre angle D par la 4.

C

p.1.ce qui estoit proposé.

Soient maintenant egaux deux autres costez, sçauoir est AB à DE soustendans angles egaux ACB, & F. Ie dis derechef que les deux autres costez AC, BC sont egaux aux deux autres costez DF, EF, chacun au sien, c'est à dire AC à DF, & BC à EF; & l'autre angle BAC egal a l'autre angle D. Car si le costé BC n'est egal au costé EF, soit le plus grand BC, duquel soit couppé BH egal à EF, puis tiré la ligne AH. Donc puis que les costez AB, BH sont egaux aux costez DE, EF vn chacun au sié, & l'angle B est egal a l'angle E par l hypothese, par la 4.p.1. la base sera egale à la base, & les autres angles egaux aux autres angles, c'est à sçauoir, que l'angle AHB sera egal à l'angle F. Mais par l'hypothese l'angle ACB est aussi egal à l'angle F. Donc l'angle AHB sera aussi egal à l'angle ACB, l'exterieur à son opposé interieur: ce qui est absurde; car il est plus grand par la 16.p.1. Le costé BC n'estoit donc pas plus grand que le costé EF, ains egal. Parquoy les deux costez AB BC sont egaux aux deux costez DE, EF chacun au sien, & par la 4.p 1. l'angle B estãt egal à l'angle E, les bases AC, DF, serõt egales, & les autres angles BAC & D aussi egaux.

COROLLAIRE.

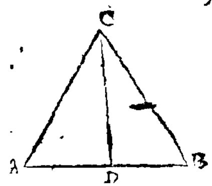
Il est manifeste par la demonstration de ceste proposition, que le triangle est aussi egal au triangle.

SCHOLIE.

Nous demonstrerons icy deux theoremes assez vtils & necessaires en Geometrie : le premier est tel.

En vn triangle equilateral, ou Isoscele, estant menee vne ligne droicte de l'angle contenu des deux costez egaux, laquelle diuise en deux egalement, ou l'angle, ou la base; elle sera perpendiculaire à la base: & si elle couppe l'angle en deux egalement, elle couppera aussi la base en deux egalement: Mais si elle couppe en deux egalemẽt la base, elle couppera pareillement l'angle en deux egalement. Et au contraire estant tiree vne ligne droicte perpendiculaire a la base, elle diuisera en deux egalement, tant la base que l'angle.

Au triangle ABC soient deux costez egaux AC, BC, & la ligne droicte CD diuise premierement l'angle C, en deux egalement. Ie dis



qu'icelle ligne CD est perpendiculaire à la base AB, & la diuise egalement. Car puis que les deux costez AC, CD, sont egaux aux deux costez BC, CD, & les angles qu'ils contiennent aussi egaux, par la 4.p.1 les bases AD. BD seront aussi egales, & les angles au poinct D egaux, & partant droicts.

Que si la ligne droicte CD diuise en deux egalemēt la ligne AB: ie dis que la ligne droicte CD est perpendiculaire à la ligne AB, & que l'angle C est couppé en deux egalement. Car puis que les deux costez AD, DC, sont egaux aux deux costez BD, DC, & la base AC egale à la base BC, par la 8 p.1. les angles du poinct D seront egaux, & partant droicts, & la ligne CD perpendic. & par le corol. de la 8.p.1. les angles qui sont en C seront aussi egaux.

Maintenant soit la ligne droicte CD perpendic. à AB: Ie dis qu'elle couppe aussi la base AB, & l'angle C, en deux egalement. Car par la 5.p.1. les angles A & B seront egaux: parquoy puis que les deux angles A & D du triangle ACD, sont egaux aux deux angles B & D, du triangle BCD, vn chacun au sien, & le costé CD opposé aux angles egaux A & B commun, par la 26.p.1. les autres costez AD, BD, seront aussi egaux, & les autres angles à C pareillement egaux. Ce qu'il faloit demonstrer.

Le second Theoreme est tel.

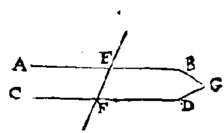
Le triangle auquel vne ligne droicte tiree de l'vn des angles perpendiculaire a la base, diuise ou la base, ou l'angle en deux egalement, a les deux costez comprenant iceluy angle egaux: Et si la base est diuisee en deux egalement, l'angle sera aussi diuisé en deux egalement: Mais si l'angle est diuisé en deux egalement: aussi sera la base diuisee en deux egalement.

Au mesme triangle ABC, soit CD perpendiculaire à la base AB, & la diuise en deux egalement. Ie dis que les costez AC & BC sont egaux, & les angles à C aussi egaux. Car puis que les deux costez AD, DC, sont egaux aux deux costez BD, DC, & les angles qu'ils cōprennent aussi egaux, sçauoir droicts, par la 4 p.1. les bases AC, BC, & les angles à C seront pareillement egaux.

Maintenant que la perpendiculaire CD couppe en deux egalemēt l'angle C: ie dis que les costez AC, BC; & les lignes AD, BD sont egales: Car puis que les deux angles D, C du triangle ACD, sont egaux aux deux angles D, C du triāgle BCD, & le costé CD est commun, par la 26.p.1. les deux costez AC, BC, & les costez AD, BD, seront egaux, ce qu'il faloit demonstrer

THEO. 18. PROP. XXVII.

Si vne ligne droicte tombant sur deux lignes droictes faict les angles opposez alternatiuement egaux, icelles lignes seront parallelles.

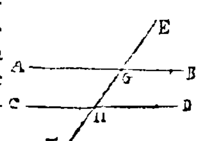


Soient deux lignes droictes AB & CD, sur lesquelles tombant la ligne droicte EF faict les angles BEF, & EFC alternatiuement egaux. Ie dis que AB & CD sont parallelles.

Car si elles ne sont parallelles, estans continuees, elles se rencontreront. Que si elles se rencontroient comme au poinct G, elles feroient vn triãgle auec le costé EF, & l'angle exterieur CFE seroit plus grand que l'opposé interieur FEB par la 16. p. 1. ce qui est contre l'hypothese. Donc les deux lignes AB, & CD ne se rencontreront iamais; & par la derniere def. icelles seront parallelles.

THEO. 19. PROP. XXVIII.

Si vne ligne droicte tombant sur deux lignes droictes, faict l'angle exterieur egal à son opposé interieur du mesme costé; ou bien les deux interieurs de mesme costé egaux à deux droicts; icelles lignes seront parallelles.



Soient deux lignes AB & CD, sur lesquelles tombant vne autre ligne EF, elle faict l'angle exterieur EGA egal à GHC son opposé interieur de mesme costé. Ie dis que AB & CD sont parallelles.

Car puis que l'angle GHC est posé

egal à l'angle EGA, auquel est aussi egal l'angle BGH par la 15.p.1. les angles alternes BGH, GHC seront egaux par la 1. com. sent. partant les lignes AB, CD seront parallelles par la prop. precedente.

Pour la seconde partie. Ie dis que si les deux angles interieurs de mesme costé AGH, & CHG sont egaux à deux droits, que aussi AB & CD seront parallelles. Car par la 13.p.1. les deux angles GHC & GHD sont egaux à deux droits; partãt aussi egaux aux deux AGH & GHC. Que si d'iceux angles egaux on oste le commun GHC, les demeurans AGH & GHD se trouueront alternatiuement egaux, & par la 27.p.1. AB & CD seront parallelles.

THEO. 20. PROP. XXIX.

Si vne ligne droicte tombe sur deux lignes droictes parallelles, elle fera les angles opposez alternatiuement egaux; & l'exterieur egal à son opposé interieur du mesme costé: & les deux interieurs de mesme costé egaux à deux droicts.

Soient deux lignes droictes parallelles AB & *CD*, (en la figure de la precedente proposition) sur lesquelles tombe la ligne droicte EF. Ie dis en premier lieu que les angles AGH & GHD opposez alternatiuement sont egaux. Autremẽt s'ils ne sont egaux, l'vn sera plus grand ou plus petit. Soit donc AGH plus petit s'il est possible, que GHD: & si à iceux angles inegaux on a adiousté chose commune, sçauoir l'angle GHC, les deux AGH & GHC serõt plus petits que les deux GHC & GHD, lesquels par la 13.p.1. estans egaux à deux droicts, AGH & GHC seront plus petits que deux droicts, & par la penult. comm. sent. les deux lignes AB & CD ne sont point parallelles: ce qui est contre nostre hypothese. Donc il falloit que l'angle AGH fust egal à l'angle GHD son alterne opposé.

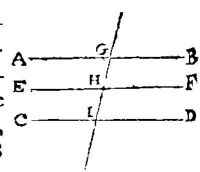
Pour la seconde partie. Ie dis que l'angle exterieur EGB est egal à son opposé interieur de mesme costé GHD: ce qui est manifeste par ce qui a esté demonstré cy dessus, sçauoir que les angles AGH & GHD estoient egaux, estant aussi EGB egal à AGH par la 15. p. 1. & par la 1. com. sentence. EGB & GHD seront egaux : estans tous deux egaux au mesme AGB.

Pour la troisiesme partie : ie dis que les deux interieurs de mesme costé AGH & GHC sont egaux à deux droicts : car s'il estoit autrement les lignes AB & CD ne seroient parallelles par la penult. com sent. contre l'hypothese.

THEOR. 21. PROP. XXX.

Les lignes droictes parallelles à vne mesme ligne droicte, sont parallelles entr'elles.

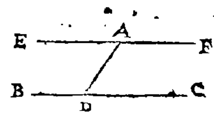
Soient les lignes droictes AB, CD, parallelles a vne mesme ligne droicte EF.



~~Soit AB parallelle à CD, & CD parallelle à EG~~. Ie dis que AB & CD sont parallelles entr'elles. Car d'autant que toutes ces lignes sont posees en vn mesme plan, estant tiree la ligne droicte GHI, elle les couppera toutes, sçauoir est AB en G ; EF en H ; & CD en I. Et puis que AB est posee parallelle à EF, les angles alternes AGH, GHF seront egaux entr'eux par la precedente prop. Derechef puis que CD est aussi posee parallelle à la mesme EF ; l'angle DIH sera aussi egal au mesme angle GHF, c'est à sçauoir l'interne à l'externe. Parquoy les angles AGH & DIH seront egaux entr'eux, lesquels estans alternes, les lignes AB & CD sont paralelles entr'elles par la 27. p. 1.

PROB. 10. PROP. XXXI.

Sur vn poinct donné, mener vne ligne droicte parallelle à vne ligne droicte donnee.



Soit le poinct donné A, duquel faut mener vne ligne parallele à la donnee BC.

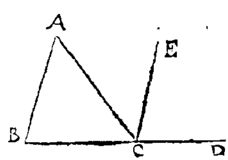
Soit menee la ligne AD faisant auec BC l'angle ADC, & sur icelle AD, & au poinct A soit faict l'angle DAE egal à l'angle ADC. Ie dis que la ligne EA tiree tant qu'on voudra vers F, est parallele à BC. Car puis que par la construction les angles alternes ADC, DAE sont egaux, les lignes BC, FE seront paralleles par la 27. p. 1.

SCHOLIE.

Il est manifeste par ceste construction, que le poinct donné doit estre tellement scitué hors la ligne donnee, qu'icelle estant continuee ne conuienne auec iceluy. Quant à la praticque de ceste prop. nous l'auons enseignée en nos memoires Mathemat. prob 6. de la Geometrie praticque.

THEOR 22. PROP. XXXII.

En tout triangle l'vn des costez estant prolongé, l'angle exterieur est egal aux deux opposez interieurs: & de chacun triangle les trois angles interieurs sont egaux à deux droits.



Soit le triangle ABC, duquel le costé BC, soit prolongé iusques en D. Ie dis en premier lieu que l'angle exterieur ACD, est egal aux deux opposez interieurs A & B.

Qu'il ne soit ainsi, qu'on meine CE parallele à BA par la 31. p. 1. & d'autant que la ligne AC tombe sur les paralleles AB, EC, par la 29. p. les angles BAC, & ACE seront alternatiuemét egaux: item l'exterieur ECD sera egal à son opposé interieur ABC.

Partant il est manifeste que le total ACD, est egal aux deux A & B opposez interieurement.

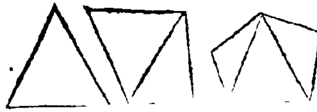
Pour la seconde partie, que les trois angles A, B & C interieurs du triangle ABC sont egaux à deux droits, il est euident, estant ACD egal aux deux A, & B; Mais ACD auec ACB sont egaux à deux droicts par la 13.p.1. Partant les deux A & B auec ACB, seront egaux à deux droits.

SCHOLIE.

De ceste proposition nous pouuons colliger, à cõbien d'angles droicts sont egaux tous les angles internes de quelcõque figure rectiligne: sçauoir par deux manieres, dont la premiere est telle.

Tous les angles de quelconque figure rectiligne sont egaux à deux fois autant d'angles droicts, qu'icelle est entre les figures rectilignes.

C'est à dire, que tous les angles de la premiere figure rectiligne sont egaux à deux fois vn droict, c'est à dire à deux droits: Mais les angles de la secõde figure rectiligne, sont egaux à deux fois 2. droicts, sçauoir est à quatre droicts: Mais ceux de la troisiesme figure sont egaux à 2. fois trois droits, c'est à dire à six droicts; & ainsi des autres. Or le lieu qu'obtient chaque figure rectiligne entre les figures rectilignes, est monstré par le nõbre des costez ou des angles, deux d'iceux ostez, d'autant que les lignes droites n'enfermẽt vne superficie, & par consequẽt ne constituent vne figure, mais sont requises au moins trois lignes droites pour construire vne figure rectiligne; d'où vient que le triangle est la premiere figure rectiligne; Car de ses costez, en estans ostez deux, reste vn: ainsi la figure ayant douze costez, ou douze angles, sera la 10. figure, puis que deux estans ostez de 12. restent 10. & ainsi faut-il iuger des autres. Parquoy puis que la figure contenuë de 12 costez est la 10. elle aura 12. angles equiuallens à 20. angles droicts: c'est à sçauoir à deux fois 10. angles droicts. Ainsi aussi tous les 10. angles de la figure contenuë de 10. costez, equiuallent à 16. angles droicts, puis qu'icelle figure est la 8. en ordre entre les figures rectilignes. Or la raison de cecy est, que toute figure rectiligne se diuise en autant de triangles, qu'elle est quantiesme en ordre entre les figures, ou bien qu'elle a d'angles ou costez, deux estans ostez. Car de quelconque angle d'vne figure on peut tirer des lignes droictes à tous les angles opposez: mais aux deux plus prochains on n'en peut tirer. Parquoy la figure sera diuisee en autant de triangles qu'elle a d'angles, deux estans ostez. Ainsi il est euident que le triangle ne se peut diuiser en autres triangles: mais le quadrangle se couppe en deux *le Pentagone en trois, &c. Veu donc que les angles d'iceux triangles constituent tous les angles de la figure proposee, & tous les angles de quelconque triangle sont egaux à deux droicts ; il est manifeste que tous les angles de quelconque figure rectiligne sont egaux à deux fois autant d'angles droits, que est le nombre des triangles esquels elle se diuise, c'est à dire à deux fois autãt d'angles droits, qu'icelle figure est*

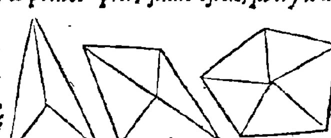


quantiesme en ordre entre les figures rectilignes. Ce qui est veu manifestement és figures proposees.

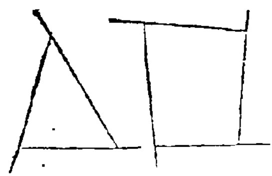
Le second moyen par lequel on sçaura la valleur des angles de quelconque figure rectiligne, est cestuy-cy.

Tous les angles de quelque figure rectiligne, sont egaux à deux fois autant d'angles droicts, quatre estans ostez, qu'il y a en icelle d'angles, ou de costés.

C'est à dire que les angles de chasque triangle sont egaux à deux fois trois droicts, quatre ostez, c'est à sçauoir à deux droits: Ainsi aussi les angles de la figure de 12. costez, vaudroient deux fois 12. angles droits, moins quatre, sçauoir est 20. angles droits, &c. Or la demonstration de cela est telle. Si de quelconque poinct pris dedans la figure on tire des lignes droites à tous les angles, il y aura autant de triãgles en ladite figure, qu'elle a d'angles ou costez. Veu donc que les angles de chasque triangle par la 32. p. 1. sont egaux à deux droits, tous les angles d'iceux triangles sont egaux à deux fois autant de droits, qu'il y a de costez en la figure. Mais il est euident que les angles des mesmes triangles, qui sont à l'entour du point pris dedans la figure, n'appartiennent aux angles de ladite figure proposee : & partant si on oste ces angles là, les autres angles des triangles qui constituent ceux de la figure proposee, seront aussi egaux à deux fois autant de droits, ceux d'alentour le poinct pris, estans ostez, qu'il y a de costez, ou angles à la figure. Mais tous ces angles là d'alentour le poinct pris, sont seulement egaux à quatre droits, ainsi que nous l'auons colligé de la 15. p. 1. Parquoy les angles de quelconque figure rectiligne sont egaux à deux fois autant de droicts, quatre estans ostez, que ladite figure contient d'angles, ou de costez.



Or il appert de ce que dessus, que si chasque costé de quelconque figure rectiligne, est prolongé par ordre vers vne mesme part : tous les angles externes pris ensemble, seront egaux à quatre droicts. Car par la 13 p. 1. les angles interieurs pris auec les exterieurs sont égaux à deux fois autant d'angles droicts, qu'il y a d'angles, ou de costez en la figure. Mais les angles interieurs sont egaux à deux fois autant de droicts, quatre ostez, que ladite figure a d'angles, comme nous auons



monstré cy dessus; partant les exterieurs sont tousiours egaux à quatre droits. Par exemple : En quelconque triangle, les angles interieurs & exterieurs ensemble, sont egaux à six droits : comme en la figure cy dessus. Mais par la 32. p. 1. les internes seuls sont egaux à deux droicts. Donc les seuls exterieurs seront egaux à 4. droicts. En vn quadrangle, les angles exterieurs & les interieurs ensemble, sont esgaux à huict droits. Mais les interieurs seuls sont egaux à 4. droicts, comme nous auons demonstré : les exterieurs seuls seront donc aussi egaux à quatre droits. Toutes lesquelles choses peuuent estre veues és figures apposees. Il y a la mesme raison en toutes autres figures.

COROLLAIRE.

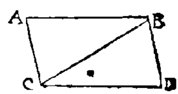
Il resulte de ceste 32. prop. que les trois angles de quelconque triangle, pris ensemble, sont egaux aux trois angles de quelconque autre triangle pris ensemble : Pource que tant ces trois là, que ces trois cy, sont egaux à deux droits D'où vient que si deux angles d'vn triangle sont egaux à deux angles d'vn autre triangle : le 3. de l'vn sera aussi egal au 3. de l'autre, & les triangles seront equiangles.

Il appert aussi que tout triangle Isoscelle, duquel l'angle comprins par les costez egaux, est droit, à chacun des autres angles demy droits. Car les deux restans ensemble font vn droit, puis que par la 32. p. 1. les trois sont egaux à deux droits : & le 3. est posé droict. Parquoy puis que par la 5. p. 1. les deux restans sont egaux entr'eux : chacun *d'iceux sera demy droict. Mais si l'angle contenu des costez egaux estoit obtus, chacun des autres seroit moindre qu'vn demy droict. Car les deux restans ensemble seront moindres qu'vn droict &c. Finalement si ledit angle estoit aigu, chacun des autres sera plusgrãd qu'vn demy droict. Pource que les deux restans ensemble seront plus grands qu'vn droit, &c.*

Il est pareillement manifeste que chasque angle d'vn triangle equilateral, est les deux tierces parties d'vn droit, ou la tierce partie de deux droits. Car deux angles droits, ausquels sont egaux les trois angles d'vn triangle equilateral, diuisez en trois angles egaux, sont les deux tierces parties d'vn droict.

THEO. 23. PROP. XXXIII.

Les lignes droites qui conioignent deux lignes droites egalles & parallelles, & de mesme part, sont aussi egalles & parallelles.



Soient deux lignes droictes AB, & CD, qui conioignent de mesme part les deux autres lignes AC & BD egales & parallelles. Ie dis que AB, & CD, sont aussi egalles & parallelles.

Qu'il ne soit ainsi: soit menee la diagonalle BC. Icelle tombant sur les deux parallelles AC, & BD, fera les angles ACB & CBD alternatiuement egaux par la 29. p. 1. Item AC, & BD estant egalles, les deux triangles CAB & CBD auront deux costez egaux à deux costez, & vn angle egal à vn angle, & par la 4. prop. 1. la base AB sera egalle à la base CD, & l'angle ABC sera egal alternatiuemẽt à l'angle DCB, & par la 27. p. 1. les egalles AB, & CD seront aussi parallelles.

THEOR. 24. PROP. XXXIIII.

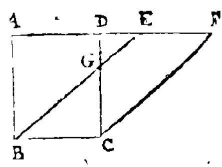
En tout parallellograme, les costez & ses angles opposez, sont egaux entr'eux, & la diagonalle le coupe en deux egallement.

Soit le parallellograme ABCD, en la figure precedente. Ie dis que le costé AB est egal à son opposé CD; AC à BD: Item l'angle A egal à son opposé D, & l'angle ABD egal à l'angle ACD: finalemẽt que iceluy parallellograme ABCD est couppé en deux egalement par la diagonalle BC.

Car puis que ABCD est parallellograme, AB sera parallelle à CD, & AC à BD, & par la 29.p.1. l'ãgle ABC sera alternatiuement egal à l'angle BCD. Item l'angle ACB alternatiuement esgal à l'angle BCD. Ainsi les deux triangles BAC, & DCB auront les angles ABC, & BCA egaux aux angles BCD & CBD chascun au sien, & le costé commun entre iceux angles BC. Et par la 26.p.1. les autres costez AB & AC seront egaux aux autres costez CD, & DB chacun au siẽ, & l'autre angle A egal à l'angle D. Et si il est euidẽt que les deux angles au poinct B ensemble serõt egaux aux deux ensemble au poinct C. Encores par la 4.p.1. les triangles ABC, & CDB seront egaux; & partãt le parallellograme ABCD est couppé en deux egalement par la diagonalle BC; ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 25. PROP. XXXV.

Les parallellogrames constituez sur mesme base, & entre mesmes parallelles, sont egaux entr'eux.

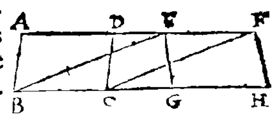


Soient deux parallellogrames ABCD, & BCEF tous deux sur mesme base BC, & entre mesmes parallelles AF, & BC. Ie dis qu'ils sont egaux.

Car par la 34.p.1. les costez opposez des parallellogrames estans egaux, AD & BC seront egaux. Item BC, & EF, & partant AD, & EF egaux, ausquels si on adiouste la ligne commune DE; AE sera egalle à DF. Item AB est egale à DC, lesquelles estãs parallelles, l'angle exterieur CDE sera egal à l'opposé interieur EAB; & par la 4.p.1. les triangles BAE, & CDF seront egaux: desquels si on oste le triangle commun GDE, les demeurans trapezes BADG, & CGEF seront egaux: ausquels si on adiouste le triãgle commun BGC le parallellog. ABCD sera egal au parallellograme BCEF; ce qui estoit à demonstrer.

THEOR. 26. PROP. XXXVI.

Les parallellogrames constituez sur bases egalles, & entre mesmes parallelles, sont egaux entr'eux.

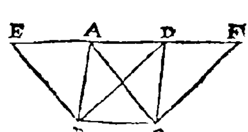


Soient les deux parallellogrames ABCD, & EFGH, ayans les bases BC, & GH egalles, & entre les mesmes parallelles AF, & BH. Ie dis qu'ils sont egaux.

Qu'il ne soit ainsi: soient menees les deux lignes BE, CF, d'autant que BC est posee egale à GH, & par la 34.p.1.la mesme GH est egale à son opposee EF; BC, EF seront egales entr'elles par la 1.com.sentence. Mais elles sont aussi parallelles par l'hypothese: Donc les lignes BE; CF qui les conioignent, seront aussi egales & parallelles par la 33.p.1. & par consequẽt BEFC sera parallellograme, sur mesme base, & entre mesmes parallelles que le parallellog. ABCD, & par la 35.p.1.ils seront egaux; & par la mesme prop. il sera aussi egal au parallellog. EFGH estant sur mesme base EF, auec iceluy, & entre mesmes parallelles AF, BH: Et par la 1. com. sent. les parallellog. ABCD, & EFGH seront egaux entr'eux: ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 27. PROP. XXXVII.

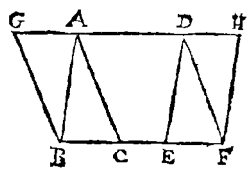
Les triangles qui sont sur mesme base, & entre mesmes parallelles, sont egaux.



Soient deux triangles A B C, & BDC tous deux sur la mesme base BC, & entre mesmes parallelles EF, & BC. Ie dis qu'ils sont egaux. Car si on meine BE parallelle à CA, & CF parallelle à BD, seront accõplis les parallellogrames A E B C, & BCFD, lesquels seront egaux par la 35. p. 1. Mais les triangles dõnez A B C & DBC sont moitiés d'iceux parallellogrames par la 34.p. 1. pource qu'ils sont couppez en deux egalement par les diagonalles AB, DC: donc aussi les triangles ABC & DBC seront egaux, par la 7.com.sent. ce qu'il faloit prouuer.

THEOR. 28. PROP. XXXVIII.

Les triangles constituez sur bases egalles & entre mesmes parallelles, sont egaux entr'eux.

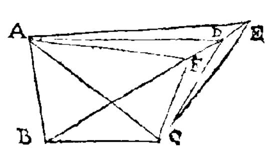


Soient deux triangles A B C, DEF, constitués sur bases egales BC, & EF, & entre mesmes parallelles GH, & BF. Ie dis que ils sont egaux.

Car apres auoir mené BG parallelle à CA, & FH parallelle à D E par la 31.p.1. les deux parallelogrames ACBG, DEFH, estans sur bases egalles, & entre mesmes parallelles, seront egaux par la 36. p.1. aussi egalles seront leurs moitiez, sçauoir les triangles proposez ABC, & DEF par la 34. p. 1. estant les parallellogrames coupez en deux egallement par les diagonalles BA, & DF.

THEOR. 29. PROP. XXXIX.

Les triangles egaux constitués sur mesme base, & de mesme part, sont aussi entre mesmes parallelles.

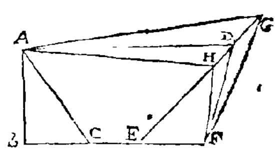


Soient deux triangles egaux ABC, & B C D constituez sur mesme base BC, & de mesme part. Ie dis qu'ils sont entre mesmes parallelles, c'est à dire que si on meine la ligne AD, elle sera parallelle BC.

Autrement du poinct A on en pourra mener vne autre qui sera parallele à BC (si AD ne l'est) par la 31.p.1. Laquelle tombera, ou bien au dessus de AD, ou au dessous; qu'elle tombe premierement au dessus, & soit icelle AE, s'il est possible: & apres auoir continué BD iusques en E, & mené EC. Les deux triãgles BAC, & BEC par la 37.p.1. estans sur mesme base, & entre mesmes parallelles seront egaux. Mais par l'hypothese BAC, & BDC sont aussi egaux; partant BEC, & BDC seroiẽt aussi egaux, la partie au tout; donc AE parallele ne pouuoit tomber par dessus AD. Le mesme inconuenient s'ensuiura si on pose la parallelle AF au dessous de AD: car ayant mené CF; il s'ensuiura que les triangles BFC, & BDC sont egaux, ce qui ne peut estre: Donc du point A on ne menera point d'autre ligne que AD parallelle a BC.

THEOR. 30. PROP. XL.

Les triãgles egaux constituez sur bases egalles, & de mesme part, sont aussi entre mesmes parallelles.

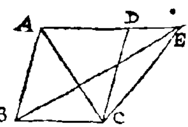


Soient deux triangles egaux ABC, & DEF, constituez sur bases egales BC, & EF, & de mesme part. Ie dis qu'ils sont aussi entre mesmes parallelles; c'est à dire que si on meine vne ligne droite de A, en D, qu'icelle sera parallelle à BF.

Autrement du poinct A on en pourra mener vne autre qui sera parallelle à BF (si AD ne l'est) par la 31 p.1. Laquelle tombera, ou au dessus de AD, ou au dessous. Soit donc premierement au dessus, & soit icelle AG, s'il est possible. Les deux triãgles BAC, & EGF seront egaux par la 38. p.1. Mais par l'hypothese BAC, & EDF sont aussi egaux: partant EGF & EDF seront egaux par la 1. com. sent. la partie au tout; ce qui est impossible: Partãt la parallelle menee du point A ne tombera point au dessus de AD. Le mesme inconuenient s'ensuiura si on la fait tomber au dessous, comme AH, car les triangles EHF, & EDF se trouueroient egaux ; donc du point A ne pourra estre menee autre ligne que AD parallelle à BF.

THEOR. 31. PROP. XLI.

Si vn parallellograme, & vn triangle ont vne mesme base, & sont entre mesmes parallelles, le parallellograme sera double du triangle.

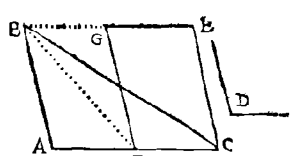


Soit le parellellograme ABCD sur la mesme base BC, que le triangle BCE, & tous deux entre mesmes parallelles AE, & BC. Ie dis que le parallellograme est double du triangle.

Car si on meine la diagonalle AC, le triangle ABC sera la moitié du parallellogr. par la 34. p. 1. lequel sera egal au triangle BEC par la 37. p. 1. partant le parallellograme qui est double de l'vn, sera aussi double de l'autre.

PROBL. 11. PROP. XLII.

Faire vn parallellograme egal à vn triangle donné, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.



Soit le triangle donné ABC auquel il faut faire vn parallellograme egal, ayant vn angle egal à l'angle donné D.

Soit la base du triangle AC coupée en deux egallement en E, faict l'angle CEG egal à l'angle D par la 23. p. 1. puis par la 31. p. 1. soit menee de B, la ligne BF parallelle à AC, laquelle couppe EG en G. Derechef de C soit menee CF parallelle à EG, rencontrant BF en F: & sera constitué vn parallellograme EGFC, lequel ie dis estre egal au triangle donné ABC. Car estant tiree la ligne BE, iceluy parallellograme EGFC sera double du triangle EBC par

la prop

la prop.preced. duquel est aussi double le triangle ABC par la 38.p.1.pource qu'ils sont sur bases egales,& entre mesmes parallelles: le parallellograme EGFC, & le triangle ABC serōt donc egaux entr'eux par la 6. com. sent. & puis qu'iceluy parallellograme à l'angle CEG egal au donné D par la construction, est manifeste ce qui estoit proposé.

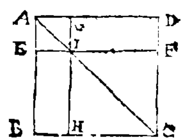
SCHOLIE.

Pelletier adiouste icy la converse de ceste proposition, qui est telle. Faire vn triangle egal à vn parallellograme donné,& qui ait vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Et d'autant que nous avons enseigné ce probleme en nos memoires Mathematiques,prob. 14. *nous n'en ferons icy repetition.*

THEOR. 32. PROP. XLIII.

En tout parallellograme, les supplements des parallellogrames qui sont sur le diametre,sont egaux entr'eux.



Soit le parallellograme ABCD, son diametre AC,à l'entour duquel sont les parallellog.AEIG & IHCF. Ie dis que les parallellogrames GIFD & EBHI qu'on appelle supplements, sont egaux entre eux.

Car d'autant que par la 34.p.1.les triāgles ABC,ADC sont egaux entr'eux: Item les triangles CIH, CFI aussi egaux; si on oste ceux-cy de ceux-la, resteront egaux les trapezes ABHI,ADFI. Mais par la 34. p.1. sont aussi egaux les triāgles AEI,AGI; partant si on les oste des trapezes, demeureront egaux les supplemens EBHI,GIFD. Ce qui estoit à prouuer.

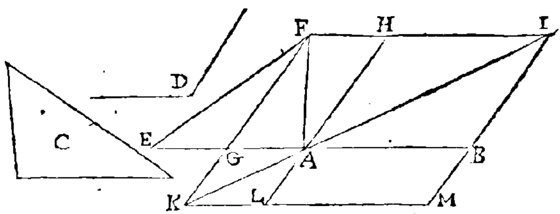
PROB. 12. PROP. XLIIII.

Sur vne ligne droite donnee, descrire vn pa-

D

rallellograme egal à vn triangle donné, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la ligne droicte donnee AB, le triangle donné C, &



l'angle rectiligne donné D. Il faut sur AB descrire vn parallellogramme egal au triangle C, & qui ait vn angle egal au donné D.

Soit prolongee la ligne donnee AB iusques en E, tellemét que AE soit egale à quelconque des costez du triangle C, & soit acheué de construire par la 22 p.1. le triangle AFE, ayant les costez egaux aux costez dudit triangle donné C, lequel lui sera aussi egal par le corol. de la 8.p.1. Soit maintenant construit par la 42.p.1. le parallellograme AGFH, egal au triangle AFE, & ayant l'angle GAH egal au donné D: & apres auoir continué la ligne FH iusques en I, tellement que HI soit egale a AB, soit menee IA iusques à ce qu'elle rencontre FG prolongee en K: ce qui doit arriuer, n'estant IA parallelle à FG, par la 11. com. sent. puis du poinct K, soit menee KM parallelle a GB, iusques à ce qu'elle rencontre IB tiree en M: & finalement soit prolongee HA iusques à ce qu'elle rencontre KM en L. Ie dis que le parallellograme ABML est le requis.

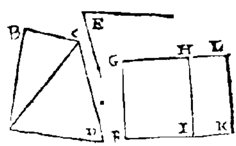
Car il est constitué sur la ligne droicte donnee AB, & à l'angle BAL egal a l'angle donné D, puis que par la 15. p. 1. il est egal à l'angle GAH, qui a esté fait egal à l'angle D: Finablement il est egal au triangle donné C, puis que par la 43.p.1 il est egal au parallellograme AHFG, lequel a esté fait egal au triangle AFE, ou C.

SCHOLIE.

Nous auons enseigné la praticque de ce Prob. en nos memoires Mathemat. Prob.15. & le conuerse d'iceluy au Prob.16. C'est pourquoy nous n'en ferons icy repetition.

PROBL. 13. PROP. XLV.

Faire vn parallellograme egal à vne figure rectiligne donnee, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.



Soit la figure rectiligne donnee ABCD, & l'angle donné E. Et il faut faire vn parallellograme egal à icelle figure rectiligne A B C D, qui ait vn angle egal au donné E. Soit resolue la figure rectiligne donnee en triangles, sçauoir est menant la ligne AC: puis par la 42.p.1.soit faict le parallellograme FGHI egal au triangle ADC, ayant l'angle F, egal à l'angle donné E. Itẽ sur H I soit faict le parallellog. HIKL egal au triangle ABC, ayant vn angle HIK egal au donné E: & sera faict ce qui est requis. Car les deux parallellogrames FH & IL sont construits egaux à la figure rectiligne ABCD, & ont chacun vn angle egal à l'angle donné E; & ces deux parallellog. ensemble en font vn seul. Car d'autant que chacun des angles GFI, HIK, est egal à l'angle donné E, ils le seront aussi entr'eux: ausquels si on adiouste l'angle cõmun FIH, les deux angles GFI, HIF, qui sont egaux à deux droits par la 29.p.1.estant FH, parallellograme; seront egaux aux deux angles HIK, HIF, lesquels partant seront egaux à deux droicts, & par la 14.p.1.les deux lignes FI, KI se rencontreront directement. Pareillement les deux angles GHI, HLK estans egaux par la 34.p.1.car ils sont opposez à angles egaux GFI, HIK: Si à iceux on adiouste l'angle commun IHL, par le mesme discours que cy dessus, les deux lignes GH & LH se rencontreront directement: ainsi FK & GL estans lignes droictes, & conjoignant de mesme part les egalles & parallelles FG & KL ; elles seront aussi egalles & parallelles par la 33.p.1.& partant FGLK sera parallellograme.

SCHOLIE.

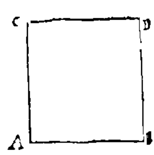
S'il y eust eu d'auantage de triãgles en la figure dõnee, il eust fallu construire sur KL vn troisiesme parallellogramme egal au troisiesme triangle ; puis sur le costé opposé à KL, vn autre parallellogramme egal au 4. triangle, & ainsi proceder de triãgle en triangle iusques à la fin. Et quant à la demonstration, ce sera tousiours la mesme que dessus, repetee autant de fois qu'il sera de besoin. Or Pelletier adiouste icy vn Probleme tres-vtil, qui est, Qu'estans donnees deux figures rectilignes inegales, trouuer l'excez de la plus grande par dessus la moindre. *Mais d'autant que nous l'auons enseigné en suitte de celuy cy dessus, en nostre Geometrie praticque, Prob, 18. nous n'en ferons icy repetition.*

COROLLAIRE.

Il est manifeste par les choses dictes cy dessus, comment on descrira sur vne ligne droicte donnee vn parallellogramme egal à vne figure rectiligne donnee, & qui ait vn angle egal à vn angle rectiligne donné. Car pour exemple, si la ligne droicte FG eust esté donnee, nous eussions par la precedente prop. descrit sur icelle le parallellogramme FGHI; puis sur la mesme ligne FG, ou plustost sur vne egale à icelle HI, le parallellog. HIKL; & ainsi consecutiuement s'il y auoit d'auantage de triangles en la figure rectiligne donnee.

PROBL. 14. PROP. XLVI.

Sur vne ligne droite dõnée, descrire vn quarré.



Soit la ligne droicte dõnee AB, sur laquelle il faut descrire vn quarré. Du poinct A, soit menee AC ligne perpẽdiculaire à AB par la 11.p.1. laquelle soit faite egale à AB; & apres auoir mené CD parallelle à AB, & BD parallell à AC par la 31. p. 1. ie dis que le quadrilatere AD est quarré.

Car d'autant que par la construction il est parallellogramme, les costez, & les angles opposez sont egaux par la 34.p.1. partant AB est egal à CD, & AC à BD: mais AC estát egal à AB par la construction, il est euident que les quatre costez sont egaux. Item l'angle A estant droit par la construction, aussi son opposé D sera droict. Et la ligne AC tõbant sur les deux lignes parallelles AB, CD, les deux angles interieurs A & C sont egaux à deux droicts par la 29.p.1. Mais l'angle A est droict: donc l'angle C sera aussi droict: partant aussi droict son opposé B: ainsi les quatre angles A, B, C, D, seront droits; & par la def. du quarré, la figure AD sera quarree.

SCHOLIE.

Nous auons enseigné la practique de ceste prop. en nostre Geometrie practique Prob. 12.

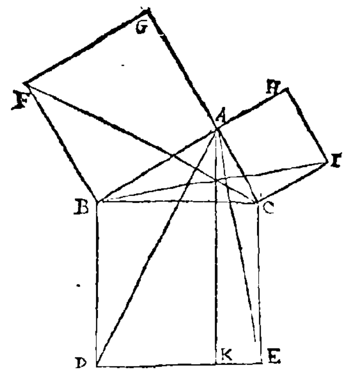
Proclus demonstre icy: Que les quarrez de lignes egales sont egaux: & que de quarrez egaux, les lignes sont egales. *Ce qui est aisé à prouuer par la superposition d'vn quarré sur l'autre; Car les lignes estant egales, si l'vne est posee dessus l'autre, elles conuiendront entr'elles; & les angles estant aussi egaux, c'est à sçauoir droicts, ils conuiendront pareillement entr'eux: & partant tout le quarré conuiendra à tout le quarré. Que si les quarrez sont egaux, ils conuiennent entr'eux, à cause de l'egalité des angles: Donc aussi les lignes, autrement vn quarré seroit plus grand que l'autre. Nous auons laissé la demonstration de Proclus qui est tres-longue, pour suiure celle-cy qui est brefue & facile.*

THEO. 33. PROP. XLVII.

Au triangle rectangle, le quarré du costé qui soustient l'angle droict, est egal aux deux quarrez des deux autres costez.

Soit le triangle rectangle ABC, sur les costez duquel soiet descrits les trois quarrez B C D E, ABFG, AHIC. Ie dis que le quarré B E descrit sur le costé B C, qui soustient l'angle droict BAC, est esgal aux deux quarrez AF & AI descris sur les deux autres costez AB & AC.

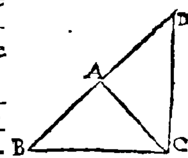
Car soit menee la ligne AK parallelle à BD, ou à CE, & ti-les lignes AD, AE, CF, BI. Et d'autant que par la defini-



tion du quarré, les 4. angles au poinct A sont droicts, les lignes droictes AB, AH se rencontreront directement, & ne feront qu'vne ligne droicte: Item CA, AG par la 14. p. 1. Derechef, puis que les angles ABF, CBD sont egaux, car ils sont droicts, si on leur adiouste le commun ABC, le total FBC sera egal au total ABD. Le triangle ABD à donc les deux costez AB, BD egaux aux deux costez FB, BC du triangle CBF, chacun au sien, & les angles ABD, CBF contenus d'iceux costez, egaux, & par la 4. p. 1. les triangles ABD, CBF seront egaux. Mais le quarré AF est double du triangle FBC par la 41. p. 1. car ils sont sur mesme base BF, & entre mesmes parallelles BF, GC; il sera dōc aussi double de son egal ABD: duquel le rectāgle BK est aussi double par la mesme 41. p. 1. & par consequent le quarré AF sera egal au rectangle BK: car les choses doubles d'vne mesme sont egalles entr'elles. Par mesme discours on prouuera que le rectangle CK est egal au quarré AI: partant les deux ensemble BK, & CK seront egaux aux deux quarrez ensemble AF, & AI. Donc le quarré BE qui est composé d'iceux rectangles BK, CK sera aussi egal aux mesmes quarrez AF, AI: ce qu'il faloit prouuer.

THEOR. 34. PROP. XLVIII.

Si le quarré de l'vn des costez d'vn triangle, est egal aux quarrez des deux autres costez, le triangle sera rectangle.



Soit le triangle donné ABC, & soit le quarré du costé BC egal aux deux quarrez des deux autres costez BA, & AC. Ie dis que l'angle BAC est droict.

Car apres auoir mené AD perpendiculaire à AC, par la 11. p. 1. & fait AD esgalle à AB, soit menee CD. Le triangle CAD sera rectangle, & par la 47. p. 1. le quarré de CD sera egal aux deux quarrez de CA, & AD, lesquels sont egaux aux quarrez de BA, & AC, estans leurs lignes egalles; & par la 1. com sent. le quarré de BC sera egal au quarré de CD: partant la ligne CB egalle à CD. Donc les triangles BAC, & CAD auront deux costez egaux à deux costez chascun au sien, & la base egalle à la base, & par la 8. p. 1. l'angle BAC sera egal à l'angle droit CAD: partant il sera aussi droit.

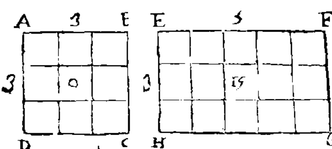
Fin du premier Element.

ELEMENT SECOND.

DEFINITIONS.

1. Tout parallellograme rectangle est dict estre compris des deux lignes droictes qui font l angle droict.

Il a esté dit en la 36. def.1. que c'est que parallellograme, & qu'il y en a de quatre sortes : mais maintenant il faut entendre qu'vn parallellograme est dit rectangle, lors qu'il a tous les angles droicts, & par consequent il y a seulement le quarré, comme ABCD, & le quarré long comme EFGH, qui soient rectangles : car il n'y a que ces



deux parallellog. qui ayent les angles droicts. Est icy à noter, qu'en tout parallellog. si vn seul angle est donné droit, il est necessaire que les trois autres trois soient aussi droicts : comme si l'angle E du parallellograme EFGH est droict : ie dis que les trois autres F, G, H, sont aussi droicts. Car d'autant que les lignes EF, GH sont parallelles, les angles internes E & H sont egaux à deux droicts par la 29.p.1. Mais si l'angle E est droict par l'hypothese : l'angle H sera donc aussi droict : & par la 34.p.1. leurs opposez G & H seront aussi droicts. Parquoy Euclide dit tout parallellog. estre contenu sous deux lignes droictes, *qui comprennent vn seul angle droict : tellement que le parallellog. rectangle EFGH, sera dict estre contenu sous les deux lignes droictes EF, EH: ou sous les deux EF, FG · ou sous FG, GH : ou finalement sous GH, HE : ainsi deux lignes expriment toute la magnitude d'vn parallellograme rectangle : sçauoir l'vne comme EF, ou HG, sa longueur, & l'autre comme EH, ou FG, sa largeur : & par le mouuement imaginaire de l'vne de ces deux lignes en l'autre, se faict iceluy parallellograme. Car si l'esprit conçoit que la ligne EF, en allant en bas au long de la ligne EH, se meuue en trauers, tellement qu'elle face tousiours angle droict auec icelle EH, iusques à ce que le poinct E paruienne au poinct H, & le poinct F, au poinct G : sera descrit tout le parallellog. rectangle EFGH. Le mesme sera faict, si on pose EH se mouuoir en trauers, selon la ligne EF. D'où aduient que si EF est de 5 pieds, & l'autre costé EH de trois : si on multiplie vn nombre par l'autre, sera produit 15. pieds quarrez, pour l'aire ou contenu de tout le parallellograme. Pareillement au rectangle A B C D, le costé A B estant de 3 pieds, & le costé AD aussi de trois pieds : multipliant l'vn par l'autre, seront produits neuf pieds quarrez pour l'aire d'iceluy rectangle, comme monstre la figure cy dessus.*

Et est icy à noter, qu'en ce second liure, & és autres suiuans, Euclide appelle les parallellog. rectangles, simplement rectangles : ce que obseruent aussi les autres Geometres, tellement que par le nom de rectangle, il faut tousiours entendre parallellograme rectangle.

2. En tout parallellograme, l'vn des parallellogrames descrits à l'entour du diametre auec les deux supplemens, est appellé Gnomon.

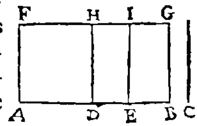
Au parallellograme ABCD (en la figure de la 4. proposition de ce liure) soit menée la diagonale BC, & EF parallelle à AC couppant la diagonale en I, & par iceluy poinct I soit menee GH parallelle à AB : & le parallellograme sera diuisé en 4. parallellog. deux desquels EG, & HF sont dicts estre descrits à l'entour du diametre ou diagonale, mais les autres deux sont appellez supplemens. Or la figure composee d'iceux supplemens & de l'vn ou l'autre des parallellogrames d'alentour la diagonale, sera dicte Gnomon, comme la figure FACDHI, ou EDBAGI.

THEO. 1. PROP. I.

Si de deux lignes droites l'vne est coupee en

tant de parties que l'on voudra, le rectangle compris des deux toutes, est egal au rectangle de la non coupee, & d'vne chascune partie de celle qui est coupee.

Soient les deux lignes AB & C, dont la premiere AB est coupee à l'aduanture en plusieurs parties, sçauoir est en AD, DE, EB. Ie dis que le rectangle compris des deux lignes AB, & C, sera egal aux trois rectangles compris de la ligne C & d'vne chacune partie de AB.



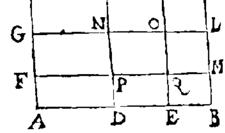
Qu'il ne soit ainsi: Qu'on meine AF perpendiculaire à AB par la 11.p.1. laquelle soit faicte egalle à C, & du poinct F soit menee FG parallelle à AB, & BG parallelle à AF par la 31. p. 1. Il est euident que le rectangle AG sera compris des deux lignes donnees AB & C, puis que AF est egale à C. Item soiét menees les deux lignes DH, & EI parallelles à AF par la 31. p.1. Donc les trois parallellogrames AH, DI, EG seront rectangles compris des lignes AF, DH, EI, & des trois segmēs AD, DE, EB, c'est à dire de la ligne C, & d'iceux trois segmens. Mais iceux trois parallellogrames rectangles ensemble, conuiennent au rectangle AG, compris des lignes donnees : & par la 8. com. sent. ils luy sont egaux.

SCHOLIE.

Commandin demonstre icy deux autres theoremes qui ensuiuent.

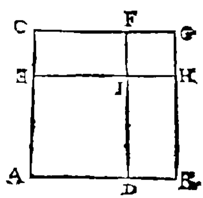
S'il y a deux lignes droictes, l'vne & l'autre desquelles soit couppee en tant de parties qu'on voudra ; le rectangle compris d'icelles deux lignes, est egal aux rectangles contenus de chasque segment de l'vne, & d'vn chacun des segmens de l'autre.

Soient deux lignes droictes AB, AC contenant vn angle droict A: & AB soit couppee és poincts D & E, mais AC és poincts F & G. Ie dis que le rectangle cōtenu sous AB, AC, est egal aux rectangles compris de chasques parties AD, DE, EB & d'vn chascun segment AF, FG, GC, c'est à dire egal aux rectangles contenus



de AD, AF:AD, FG:AD, GC : DE, AF:DE, FG:DE, GC:EB, AF:EB, FG:EB, GC. Car eſtant accomply le rectangle AH, ſoient tirees DI, EK parallelles à AC : Item FM, GL parallelles à AB, qui coupperont les premieres és poincts P, Q, N, O. Veu donc que le rectangle AP eſt contenu ſous AD, AF : & FN ſous AD, FG : & GI ſous AD GC, (pource que par la 34. p. 1. les lignes FP, GN ſont egales à icelle AD.) Item que les rectangles DQ, PO, NK, ſont contenus ſous DE, AF : DE, FG : DE, GC : (car DP, PN, NI ſont egales à icelles AF, FG, GC, & PQ, NO, à icelle DE, par la 34. p. 1.) Et par meſme raiſon les rectangles EM, QL, OH, ſont compris ſous EB, AF : EB, FG: EB, GC. Il eſt euident que le rectangle contenu ſous AB, AC, eſt egal aux rectangles compris ſous chaſques parties AD, DE, EB, & vn chacun des ſegmens AF, FG, GC : ce qui eſtoit propoſé.

S'il y a deux lignes droictes couppees comme on voudra; le rectangle compris ſoubs icelles, auec celuy compris ſoubs vne partie de l'vne d'icelles lignes, & vne partie de l'autre, eſt egal aux rectangles contenus ſoubs les lignes totales & les ſuſdites parties reciproquement, auec le rectangle contenu es deux autres parties.

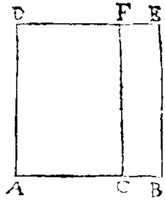


Soient deux lignes droictes AB, AC, faiſant l'angle droict A, leſquelles ſoient coupees comme on voudra en D & E. Ie dis que le rectangle compris ſous AB, AC, auec celuy cõpris ſous les parties AD, EC, eſt egal aux rectangles contenus ſous AB, EC : AC, AD : DB, AE. Car ayant accomply le rectangle AG, ſoit menee DF parallelle à AC, & EH à AB, s'entrecouppans en I. Veu donc que le rectangle AG eſt egal aux rectangles EG, AI, DH : ſi on leur adiouſte le cõmun rectangle EF : les rectangles AG, EF, qui ſont compris ſous les toutes AB, AC, & les parties AD, EC, ſeront egaux aux rectangles EG, AF, DH, compris ſous AB, EC : AC, AD : DB, AE : ce qui eſtoit proposé.

THEOR. 2. PROP. II.

Si vne ligne droite eſt coupee comme on voudra; les rectangles compris de la toute & d'vne chaſcune partie, ſont egaux au quarré de la toute.

Soit la ligne droicte AB, couppee en deux parties telles qu'on voudra au point C. Ie dis que le rectangle de la toute AB & de la partie AC, auec le rectangle de la toutte AB & de l'autre partie CB, sont egaux au quarré de la toutte AB.



Qu'il ne soit ainsi. Sur AB soit descrit le quarré AE, puis de C soit menee CF parallelle à AD, laquelle CF sera egalle à icelle AD, c'est à dire à AB: car icelles AD, AB sont egales par la def. du quarré. Il est donc euident que les deux rectangles AF & CE, sont compris de la toutte AB, ou son egalle CF, & des deux parties AC & CB; & si ils conuiennent auec le quarré AE, & par consequent egaux.

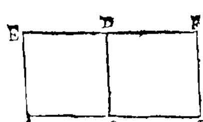
SCHOLIE.

Encore qu'en ce theoreme Euclide propose d'vne ligne diuisee en deux parties seulement, si est-ce toutesfois qu'en la mesme maniere sera demonstré le mesme, si la ligne est diuisee en tant de parties qu'on voudra. Sera aussi demonstré comme dessus que si vne ligne droicte est couppee en tant de parties qu'on voudra; le quarré de la toute est egal aux rectangles contenus soubs chasques segmens & vn chascun segment.

THEOR. 3. PROP. III.

Si vne ligne droite est coupee comme on voudra; le rectangle compris de la toute, & de l'vne des parties, est egal au rectangle compris des parties, & au quarré d'icelle partie premierement prise.

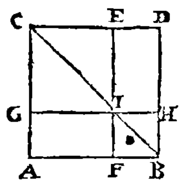
Soit la ligne droite AB couppee à l'aduenture au poinct C. Ie dis que le rectangle compris de la totalle AB, & de l'vne ou l'autre partie, comme AC, est egal aux deux rectangles compris des deux parties AC, & CB, & au quarré de la partie AC, laquelle auoit esté premierement prise.



Qu'il ne soit ainsi. Sur la partie AC soit faict le quarré AD par la 46.p.1. Item soit menee BF parallelle à CD par la 31.p.1. rencontrant ED, prolongee en F. Il est donc euident que AD est le quarré de AC, & CF le rectangle de AC & CB (car CD est egal à AC, par la definition du quarré) & AF le rectã-gle de AB & AC, partie sur laquelle a esté faict le quarré. Or le quarré AD & le rectangle CF ensemble cõuiennent auec le rectangle AF; & par consequent egaux à iceluy.

THEOR. 4. PRO. IIII.

Si vne ligne droite est coupee comme on voudra; le quarre de la toute est egal aux deux quarrez des deux parties, & a deux fois le rectangle d'icelles parties.



Soit la ligne donnee AB, couppee cõme on voudra au point F. Ie dis que les deux quarrez descrits sur les parties AF & FB, auec deux fois le rectangle d'icelles AF & FB sont egaux au quarré de la totalle AB.

Qu'ainsi ne soit. Sur la ligne totalle AB soit descrit le quarré AD, & apres auoir mené la diagonalle BC, & du point F, FE parallelle à AC, coupant la diagonalle BC en I, & derechef par iceluy point I soit menee GH parallelle à AB, le tout par la 31.p.1. ie dis premierement que HF, & EG sont quarrez.

Car des-ja il appert qu'ils sont parallellogrames, estãs descrits entre lignes parallelles. Item puis que AD est quarré, les deux costez AB & AC seront egaux, & le triangle ABC est Isoscele, & par la 5 p.1. les deux angles sur la base BC, sçauoir est ABC & ACB seront egaux. Pareillement la ligne BC tombant sur les deux parallelles AC & FE fera l'angle exterieur FIB egal à l'opposé interieur ACB par la 29. p.1. lequel estant egal à ABC par la 1.comm. sent. ABC & FIB seront egaux, & par la 6.prop.1. les deux costez BF & FI seront egaux: & par la 34.p.1. le parallellograme HF aura les quatre costez egaux: & partant il sera quarré; car l'angle FBH estant droict, les trois autres seront aussi droicts, comme nous auõns demonstré à la 1.def. de ce liure. Par mesme discours on monstrera

GE estre aussi quarré. Maintenant d'autant que AI & ID sont descrits entre lignes parallelles, & les angles A & D sont droicts, il appert qu'ils sont parallellog. rectangles, & egaux entr'eux par la 43. p. 1. & sont compris des deux parties AF FB, estant EI egale à AF, & HI, IF à FB par la 34. p. 1. & def. du quarré. Partant AI & ID sont deux fois le rectangle de AF & FB, lesquels auec les deux quarrez FH & GE conuiennent auec le quarré total AD, & par la 8. comm. sent. ils luy seront egaux.

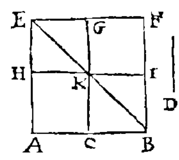
COROLLAIRE.

Il est manifeste par ce que dessus, que les parellellogrames d'crits à l'entour de la diagonale d'vn quarré, sont quarrez. Et aussi que la diagonale couppe en deux egalement les angles du quarré.

SCHOLIE.

Clauius demonstre en ce lieu le theoreme suiuant.

Si vne ligne droicte est double d'vne autre, le quarré de celle là est quadruple du quarré de ceste-cy : & si vn quarré est quadruple d'vn autre quarré : le costé de celuy-là est double du costé de cestuy cy.



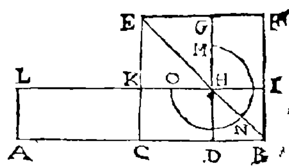
Soient deux lignes droictes AB & D, desquelles AB est double de D. Ie dis que le quarré de AB est quadruple du quarré de D. Car ayant diuisé AB en deux egalement en C, si on faict telle construction qu'en ceste 4. p. il est euident que les 4. parallellogrames AK, CI, HG, KF, seront quarrez & egaux entr'eux. Mais le quarré AF est egal à iceux quatre quarrez : donc le quarré de AB sera quadruple du quarré de AC, c'est à dire de D, qui luy est egale : car AB est double de l'vne & de l'autre.

Pour la seconde partie: Soit le quarré de AB quadruple du quarré de D. Ie dy que AB est double de D. Car AB estant couppee en deux egalement en C, le quarre de AB sera quadruple du quarré de AC, comme il a esté demonstré cy dessus. Mais le quarré de AB a esté posé aussi quadruple du quarré de D: donc les quarrez des lignes AC & D sont egaux, & partant icelles lignes AC & D aussi egales. Mais AB est double de AC; donc aussi double de D.

THEOR. 5. PROP. V.

Si vne ligne droite eſt coupee en deux parties egalles, & en deux inegalles; le rectangle des deux parties inegalles, auec le quarré de la ſection du milieu, ſont egaux au quarré de la moitié de la toute.

Soit la ligne dõnee AB coupee en deux parties egalles au poinct C, & en deux inegales au poinctD. Ie dis que le rectangle compris des deux parties inegalles AD, & DB, auec le quarré de la ſection du milieu CD, ſont egaux au quarré de la moitié CB.

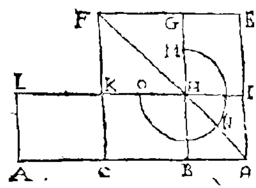


Car ſur la ligne CB, ſoit deſcrit le quarré CF par la 46. p. 1. & apres auoir mené DG parallelle à BF, ſoit menee la diagonalle BE coupant DG au point H, par lequel ſoit mené IKL parallelle à AB, puis AL parallelle a DH couppant KL en L. Donc par le corol. de la preced. prop. DI, KG ſeront quarrez; & partant la ligne DH egale a la ligne DB, & par la 34. p. 1. KH eſt auſſi egale a HG: parquoy le rectangle AH eſt compris des deux ſegmens AD, DB; & KG ſera quarré de la ſection du milieu CD. Il faut donc prouuer que le rectangle AH, auec le quarré KG eſt egal au quarré CF, fait ſur la ligne CB moictié de la toutte AB.

Or le rectangle AK eſt egal au rectãgle CI par la 36. p. 1. d'autant qu'ils ſont ſur baſes egalles AC, & CB, & entre meſmes parallelles AB & LI. Pareillement les ſupplemens CH, & HF ſont egaux par la 43. p. 1. auſquels ſi on adiouſte le quarré cõmun DI, les touts CI, & DF ſeront egaux: & par 1. com. ſent. DF ſera egal à AK, auſquels pareillement ſi on adiouſte le ſuplement commun CH, le gnomon ONM ſera egal au rectangle AH. Mais iceluy gnomon, & le quarré KG, conuiennent auec le quarré CF, & ſont egaux par la 8. com. ſent. Dõc auſſi le rectangle AH, & quarré KG, ſeront egaux au quarré CF par la 1. com. ſent. ce qu'il faloit demonſtrer.

THEOR 6. PROP. VI.

Si vne ligne droite est coupee en deux parties egalles,& on luy adiouste directement quelque autre ligne droite: le rectãgle de la toute & de l'adioustee comme d'vne,& de l'adioustee auec le quarré de la moitié, est egal au quarré qui est faict de la moitié & de l'adioustee comme d'vne.



Soit la ligne droite AB coupee en deux egallemẽt au point C,& à icelle soit adioustee directement BD. Ie dis que le rectãgle compris de la totalle AD, & de l'adioustee BD, auec le quarré de la moitié CB, est egal au quarré de la ligne CD.

Qu'ainsi ne soit: sur la ligne CD soit descrit le quarré CE auec sa diagonalle DF, & apres auoir mené BG parallelle à DE, laquelle coupera la diagonalle au point H : par iceluy point H soit menee IKL parallelle a AD par la 31.p.1. Item AL parallelle à DI, rencontrant IL en L.

Premierement le rectangle AI est compris de la toutte & adioustee comme d'vne AD,& de l'adioustee DI (car elle est egalle à l'adioustee BD, estant BI quarré par le corol. de la 46. p.1.2. Item KG, qui est quarré par le mesme corol. est fait sur HK egal à la moitié CB par la 34. p. 1. Ie dis donc que le rectangle AI,& le quarré KG sont egaux au quarré CE.

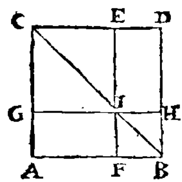
Car les deux supplemens CH, & HE estans egaux par la 43.p.1. Item les deux rectangles AK,& CH aussi egaux par la 36.p.1. d'autant qu'ils sont sur bases egalles, & entre mesmes parallelles,& par la 1.com.sent. AK sera egal à HE, & en adioustant à chascun d'iceux le rectangle commun CI, le Gnomon MNO sera egal au rectangle A I. Mais iceluy Gnomo auec le quarré KG sont egaux au quarré CE: donc le rectangle AI auec le quarré KG sera egal au mesme quarré CE.

THEOR

THEOR. 7. PROP. VII.

Si vne ligne droite est coupee comme on voudra: le quarré de la toute & le quarré de l'vne des parties, sont egaux au quarré de l'autre partie, & deux fois le rectangle compris de la totalle, & de la partie premierement prise.

Soit la ligne AB couppee comme on voudra au poinct F. Ie dis que les deux quarrez de la totalle AB, & de la partie AF, sont egaux au quarré de l'autre partie FB, & au rectangle deux fois, de AB, AF.



Qu'il ne soit ainsi: sur AB soit descrit le quarré AD auec sa diagonalle BC, & apres auoir mené du poinct F, FE parallelle à AC, laquelle couppera la diagonalle BC au poinct I, d'iceluy poinct soit menée GH parallelle a AB par la 31.p.1. Donc FH & GE serôt quarrez par le corol. de la 4 p.2. & puis que par la 34. p.1. GI est egale à AF; GE sera quarré du segmẽt AF. Derechef pour ce que AC est egale à AB, le rectangle AE sera compris sous la toute AB, & le segment AF. Par mesme raison le rectangle GD sera compris sous les mesmes lignes AB, AF: (car CD, CG sont egales à AB, AF, à cause des quarrez AD, GE.) Veu donc que les rectangles AE, ID, auec le quarré FH sont esgaux au quarré AD; si on leur appose le commun quarré EG, les quarrés AD, EG seront egaux aux rectangles AE, GD, (chacun desquels est cõpris de la toute AB & de la partie AF) auec le quarré FH: ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

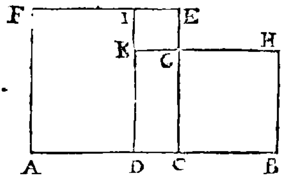
Commandin demonstre en ce lieu le theoreme suiuant.

Si vne ligne droicte est couppee en deux parties inegales; les quarrez d'icelles parties sont egaux au rectãgle contenu deux

E

fois sous icelles parties, & au quarré de la ligne, dont la plus grande partie excede la moindre.

Soit la ligne droicte AB couppee en deux parties inegales, AC, CB, desquelles AC est la plus grande; & d'icelle AC soit prise AD egale à BC, afin que DC soit l excez de la partie AC par dessus BC. Ie dis que les quarrez des parties AC, CB, sont egaux au rectangle contenu deux fois sous AC, CB, & au quarré de DC. Car soient construits les quarrez AE, CH, & mené DI parallele à CE: puis prolongé HG jusques à ce qu'elle rencontre DI en K. Or d'autant que les lignes BC, AD sont egales, leur

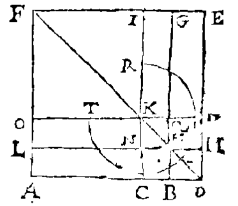


adioustant la commune DC, la toute AC, c'est à dire CE, sera egale à la toute DB. Mais CG est aussi egale à CB: donc aussi le reste GE sera egal au reste DC: & partant puis qu'aussi IE est egale à DC par la 34. p. 1. GE, IE seront egales: & partant IG sera le quarré de l'excez DC. Et d'autant que les rectangles AI, DH, sont contenus sous les parties AC, CB (car AC est egale à l'vne & a l'autre ligne AF, DB: & CB à l'vne & à l'autre AD, BH.) Il est manifeste que les quarrez AE, CH, des parties AC, CB, sont egaux aux rectangles AI, DH, qui sont contenus sous les parties AC, CB, & à IG quarré de l'excez DC: ce qui estoit proposé.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si vne ligne droite est coupée comme on voudra; quatre fois le rectangle compris de la toute & de l'vne des parties, auec le quarré de l'autre partie, est egal au quarré de la toute, & d'icelle partie premierement prise comme d'vne seule ligne.

Soit la ligne donnee AB couppee comme on voudra au poinct C. Ie dis que quatre fois le rectangle compris de AB & de l'vn ou l'autre segment, sçauoir BC, c'est à dire de AB, & BD (si apres auoir prolongé la ligne AB, on fait BD egale à BC) auec le quarré de AC sont egaux au quarré de AD compoſee de la totale A B, & de la partie BC.



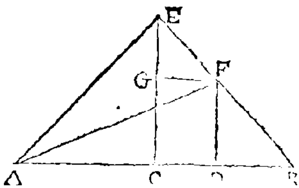
Qu'il ne ſoit ainſi: ſur A D ſoit faict le quarré AE auec ſa diagonale FD, & des deux poincts B & C ſoiēt menees BG & CI parallelles à DE. Item des poincts H & K, auſquels elles coupent la diagonale FD, ſoiēt menees LM & OP parallelles a AD, par la 31 p.1. leſquelles coupēt les premieres parallelles en N, & Q.

Premierement par ce qui reſulte de la 4. p.2. les rectangles OI, NQ, BM, au long de la diagonalle ſeront quarrez. Item d'autant que CB eſt egale à BD; CH & BM ſeront egaux, & quarrez: (eſtant l'vn d'iceux quarré) pareillement NQ & HP auſſi egaux quarrez; ainſi les quatre CH, BM, NQ, HP, ſerōt quarrez & egaux: & par la 43. p.1. les deux ſupplemens LK & KG ſeront auſſi egaux entr'eux, & par la 36. p.1. LK eſt egal à AN; & KG à QE: & par conſequent iceux quatre rectangles ſont auſſi egaux entr'eux. Mais comme aux precedentes, il eſt euident que AH eſt vne fois le rectangle de AB & BH (egale à BD) qui eſt vn des quatre rectangles auec vn des quatre petits quarrez egaux: donc iceux quatre rectangles auec iceux quatre quarrez faiſant le Gnomon RST, ſeront egaux à quatre fois le rectangle de A B & B D, lequel Gnomon auec le quarré de OK (egale à AC par la 34. p.1.) ſçauoir eſt OI, conuiennent auec le quarré AE, & par la 8. com. ſent. ils luy ſerōt egaux: ce qui eſtoit à demonſtrer.

THEO. 9. PROP. IX.

Si vne ligne droite eſt coupee en deux parties egalles, & en deux inegalles; les quarrez des parties inegalles ſeront doubles des quarrez de la moitié, & de la ſection du milieu.

Soit la ligne donnee AB couppee en deux egalement au poinct C, & en deux inegalement en D. Ie dis que les quar-



rez de AD & DB parties inegales, sont doubles des quarrez de AC moitié, & de CD partie du milieu.

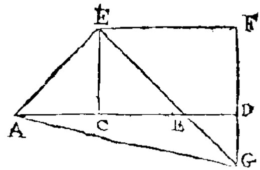
Qu'il ne soit ainsi: au poinct C soit leuee la perpendiculaire CE., qu'on fera egalle á CA; & apres auoir mené AE, & BE, soit leuee la perpendiculaire DF, couppant BE en F, duquel poinct soit menee FG parallelle à AB, couppant CE en G: & finalement soit menee AF.

Premierement, les triangles ACE, & ECB seront Isosceles, & feront les angles sur les bases AE, & EB egaux par la 5. p.1. sçauoir GEF, à FBD, & demy droicts par la 32. p.1. estant l'angle ECB droit pour estre CE perpendiculaire. Item FDB estant droict, & DBF demy droict, aussi par la 32. p.1. DFB sera demy droict, & par la 6. p.1. les costez DB, & DF, du triangle BDF, seront egaux entr'eux. Par le mesme discours sera demonstré que les costez GF, GE du triangle FGE, sont egaux entr'eux. Item il est euident que l'angle AEB sera droict, estát composé des deux demy droicts AEC, BEC.

Maintenant par la 47. p. 1. au triangle rectangle ACE, le quarré de AE, costé qui soustient l'angle droict, est double du quarré de AC, estant egal à tous les deux de AC, & CE. Par le mesme discours EF est double du quarré de GF, ou CD son egale par la 34. p. 1. partant les deux quarrez de AE & EF, serót doubles des deux de AC, & CD. Pareillement le quarré de AF estant egal aux deux de AE, & EF par la 47. p.1. iceluy sera double des deux de AC, & CD Mais par la mesme 47. p.1. le quarré de AF est egal aux deux de AD, & DF, ou DB son egal: donc les deux quarrez de AD & DB seront doubles des deux de AC, & CD; ce qui estoit à demonstrer.

THEOR. 10. PROP. X.

Si vne ligne droite est coupee en deux parties egalles, & on luy adiouste directement quelque autre ligne droite; le quarré de la toute auec l'adioustee comme d'vne, & le quarré de l'adioustee, sont doubles aux quarrez de la moitié,&de celle qui est faicte de la moitié,&de l'adjoustee comme d'vne.



Soit la ligne droite AB coupee en deux egalement au poinct C, a laquelle soit adioustee directemēt BD. Ie dis que les quarrez de AD & BD, sont doubles des quarrez de AC,& CD.

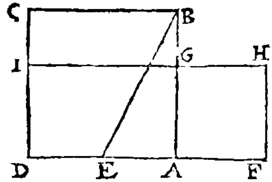
Qu'ainsi ne soit,au poinct C soit leuee la perpendiculaire CE par la 11.p.1.egale à AC:& apres auoir mené les deux lignes AE& EB,soient menees par la 31.p.1.EF parallele à CD,& DF à CE se rencontrant en F,& soient continuees EB, & FD iusques à ce qu'elles se coupent au poinct G. Finablement soit tiree la ligne AG.

Premierement puis que A C & CE sont egaux, aussi par la 5.p.1.les angles EAC,& CEA sont egaux & demy droicts par la 32.p.1.estant l'angle ACE droit. Par mesme discours,les angles CBE & BEC seront aussi demy droicts,& l'angle AEB droict, estant composé de deux demy droicts. Item par la 15. p.1.l'angle DBG sera egal à CBE,& demy droict, & les deux lignes CD & EF estans parallelles,par la 29.p.1. l'angle interieur de mesme costé BEF sera aussi demy droict,& l'angle F, estant droict par la 34.p.1. car il est opposé à vn droict, BGD sera demy droict par la 32.p.1. & par la 6.p.1.les triangles EG F,& BDG seront Isosceles rectangles, & CF parallelogrāme rectangle.

Maintenant par la 47. p. 1. le quarré de AE, costé qui soustient l'angle droict C, est egal aux deux quarrez des deux autres costez AC,CE; partant double du quarré de AC. Par mesme discours EG se trouuera double du quarré de EF, ou de CD qui luy est egale par la 34.p.1.ainsi les deux quarrez de AE,& EG,ou le seul de AG qui leur est egal par la 47.p.1.sera double des deux de AC &CD.Mais par la mesme 47.p.1.il est egal au deux quarrez de AD & DG, ou BD son egal; & par consequent les deux quarrez de AD& BD serōt doubles des deux de AC&CD:ce qu'il faloit prouuer.

PROBL. 1. PROP. XI.

Couper vne ligne droite donnee, tellement que le rectangle de la toute, & de l'vne des parties, soit egal au quarré de l'autre.



Soit la ligne droicte donnee AB, laquelle il faut diuiser selon le requis de la prop.

Apres auoir construit sur icelle le quarré AC, soit diuisee AD en deux egalement au point E, & apres auoir mené EB , & prolongé EA vers F, tellement que EF soit egalle à EB , sur AF soit faict le quarré AH & soit continuee HG iusques en I. Ie dis que la ligne AB est coupee au poinct G, en sorte que le rectangle CG compris de BC egalle à BA , & de BG partie de BA , est egal au quarré de l'autre partie AG, sçauoir à GF.

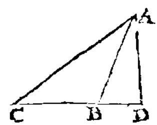
Car la ligne AD estant coupee en deux egallement en E,& ou luy adiouste directement AF, le quarré de la moitié & de l'adioustee comme d'vne, sçauoir EF ou de son egalle EB, est egal au rect. de DF, AF, & au quarré de AE par la 6.p.2. Mais le quarré de EB est egal aux deux de BA,& AE par la 47. p.1. ainsi les deux quarrez de BA, & AE seront egaux au rectangle de DF,AF, & au quarré de AE : ostans donc le quarré de AE commun, les demeurans quarré de AB, sçauoir AC,& le rectangle de DF, AF, sçauoir FI, seront egaux , desquels AC & FI, si on oste le rectangle commun AI, le demeurāt quarré FG, sera egal au demeurant rectangle GC.

SCHOLIE.

Nous auons enseigné en nos memoires Mathematiques Prob. 71 à coupper vne ligne droicte, non seulement comme enseigne icy Euclide, mais aussi en sorte que le rectangle de la toute, & de l'vne des parties soit double, ou triple, ou quadruple &c. ou moitié, ou tiers, ou quart &c. du quarré de l'autre partie : bref qu'iceluy rectangle soit au quarré, selon quelconque raison donnee.

THEOR. 11. PROP. XII.

Aux triangles ambligones, le quarré du coſte qui ſouſtient l'angle obtus, eſt plus grand que les quarrez des deux autres coſtez, de la quantité de deux fois le rectangle, compris du coſté contenãt l'angle obtus, ſçauoir celuy ſur lequel eſtant prolongé tõbe la perpendiculaire, & de la ligne priſe dehors entre la perpendiculaire & l'angle obtus.

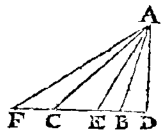


Soit le triangle ambligone ABC, duquel ſoit prolongé le coſté CB iuſques en D, & du poinct A ſoit menee la perpendiculaire AD par la 12.p.1. Ie dis que le quarré du coſté AC qui ſouſtient l'angle obtus ABC, eſt plus grand que les quarrez de AB & CB, de deux fois le rectangle de CB & BD, ſçauoir CB, qui eſt l'vn des coſtez faiſant l'angle obtus, celuy ſur lequel eſtant prolongé tombe la perpendiculaire AD, & BD priſe dehors entre l'angle obtus, & la perpendiculaire; c'eſt a dire que le quarré du coſté AC eſt egal aux deux quarrez des coſtez AB, BC, auec deux fois le rectangle de CB, BD.

Qu'il ne ſoit ainſi: Puis que la ligne CD eſt couppee en B, le quarré d'icelle CD ſera egal aux deux quarrez de CB, BD, & au rectangle compris deux fois ſous CB, BD, par la 4.p 2. Adiouſtant donc le commun quarré de AD, les deux quarrez de CD, DA, ſeront egaux aux trois quarrez de CB, BD, DA, & au rectangle compris deux fois ſous CB, BD. Mais par la 47.p.1.le quarré de AC eſt egal aux quarrez de CD, DA: donc auſſi le quarré de AC ſera egal aux trois quarrez de CB, BD, DA, & au rectãgle compris deux fois ſous CB, BD. Et puis que par la 47.p.1. le quarré de AB eſt egal aux quarrez de BD, DA; le quarré de AC ſera egal aux quarrez de CB, AB, & à deux fois le rectangle de CB, BD: ce qui eſtoit à prouuer.

SCHOLIE.

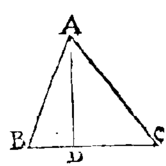
Or que la perpendiculaire tiree de A, doiue tomber ſur le coſté CB prolongé de la part de l'angle obtus, comme l'a pris icy Euclide, *nous* *le demonstrerons ainsi : Soit le triangle ABC ayant l'angle B obtus, & le costé CB prolongé de la part de B. Ie dis que la perpendiculaire*



re de A, tombe hors le triangle sur le costé CB prolongé, comme est la ligne droicte AD. Car si elle tomboit dans le triangle, comme est la ligne AE, les deux angles ABE, AEB seroient plus grands que deux droicts, contre la 17. p. 1. Mais si elle tomboit hors le triangle sur le costé BC prolongé de la part de C, comme est AF, derechef au triangle ABF, les deux angles ABF, AFB seroient plus grands que deux droicts : ce qui est absurde.

THEOR. 12. PROP. XIII.

Aux triangles Oxigones, le quarré du costé qui soustient l'angle aigu, est plus petit que les quarrez des deux autres costez, de deux fois le rectangle de l'vn des costez qui font l'angle aigu, sçauoir celuy sur lequel tombe la perpendiculaire, & de la ligne prise au dedãs entre la perpẽdiculaire, & l'angle aigu.



Soit le triangle ABC, ayant les angles B & C aigus, mais de l'angle A tombe AD perpendiculaire au costé BC. Ie dis que le quarré du costé AB, qui soustient l'angle aigu C, est plus petit que les deux quarrez des deux autres costez AC, & CB de 2. fois le rectangle de BC & CD : sçauoir BC, l'vn des costez qui font l'angle aigu C, sur lequel tõbe la perpendiculaire, & CD prise entre la perpendiculaire & l'angle aigu C.

Car d'autant que la ligne BC est couppee en D, les quarrez de BC, CD sont egaux au quarré de BD, & deux fois le rectangle de BC, CD par la 7. p. 2. ausquels si on adiouste le quarré commun de AD, les trois quarrez de BC, CD, AD, seront egaux aux deux quarrez de BD, AD, & deux fois le rectangle de BC, CD. Mais les deux triangles ADB, ADC estans rectangles, le quarré de AB est egal aux deux quarrez de AD, DB : & le quarré de AC aux deux quarrez de AD, DC par la 47. p. 1. Donc les deux quarrez de AC, BC seront egaux au quarré de AB, & deux fois le rectangle de BC, CD: en ostant donc iceux deux rectangles, le quarré de AB sera d'autant plus petit que les quarrez de AC, BC : ce qu'il falloit prouuer. On demonstrera en la mesme maniere que le quarré du costé AC, qui soustient l'angle aigu B, est plus petit que les deux quarrez des deux autres costez AB, BC, de deux fois le rectangle de CB, BD.

SCHOLIE.

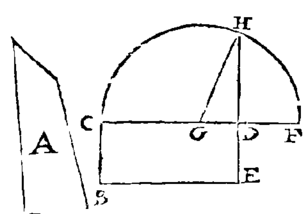
*Or combien qu'*Euclide *propose ce theoreme des triangles oxigones seulement : toutesfois le mesme est aussi veritable és triangles rectangles & ambligones, la perpendiculaire tombant de l'angle droict ou obtus : Car il est manifeste par la 17. ou 32. p. 1. que les deux autres angles sont aigus : & partant la perpendiculaire tombera tousiours dans le triangle, comme* Euclide *l'a pris en la demonstration: ce qui est aussi facile à prouuer. Car si elle tomboit hors le triangle, il s'ensuiuroit qu'vn angle aigu seroit plus grand que le droict : ce qui est absurde.*

PROB. 2. PROP. XIIII.

Faire vn quarré egal à vne figure rectiligne donnee.

Soit donnee la figure rectiligne A, à laquelle il faut faire vn quarré egal.

Soit premierement fait le parallelograme BD egal à la figure A & ayant vn angle droict par la 45. p. 1. puis soit prolongé le costé CD iusques en F, & fait DF egale a DE: & apres auoir couppé CF, en deux egallement au poinct G, & d'iceluy poinct G & interualle GC ou GF, descrit le demy



cercle CHF ſoit continuée ED iuſques en H en la circonfe-
rance du demy cercle. Ie dis que le quarré de DH eſt egal a
la figure rectiligne A.

Car puiſque CB eſt couppée en deux egalement au poinct
G & en deux inegalement au poinct D, le rectangle de CD &
DF, ſçauoir BD, auec le quarré de la ſection du milieu GD, eſt
egal au quarré de la moitié GF par la 5.p.2. ou de ſon egal
GH, lequel eſt egal aux deux quarrez de GD & DH par la
47.p.1. Que ſi on oſte le quarré commun de GD, le demeu-
rant quarré de DH, ſe trouuera egal au demeurant rectangle
BD: & par conſequent a la figure rectiligne donnée A.

Fin du ſecond Element.

ELEMENT TROISIESME.

DEFINITIONS.

CErcles egaux, ſont ceux deſquels les diametres ſont egaux, ou deſquels les lignes menees du centre à la circonference ſont egalles.

2. Vne ligne droite eſt dite toucher le cercle, laquelle touchant le cercle, ſi elle eſt continuee ne le couppe point.

3. Les cercles ſont dits ſe toucher l'vn l'autre, quand en ſe touchant ils ne ſe couppent point.

4. Les lignes droictes ſont dictes eſtre equidiſtantes du centre, lors que les perpendiculaires tirees du centre ſur icelles ſont egales. Mais celle eſt plus eſloignee du centre, ſur laquelle tombe la plus grande perpendiculaire.

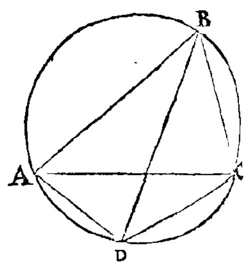
5. Section de cercle, eſt vne figure compriſe d'vne ligne droite, & de la circonferance du cercle.

6. L'angle de la ſectiõ, eſt celuy cõpris d'vne ligne droicte, & de la circonferance du cercle.

7 Vn angle se dit estre en la section, lors que sur vn poinct pris en la circonferẽce, sont menees deux lignes droictes des deux extremitez de la ligne qui sert de base à la section, & c'est l'angle compris d'icelles deux lignes.

8. Mais quand les lignes droictes qui comprennent l'angle embrassent quelque circonference, l'angle est dit estre en icelle.

Euclide definit ez trois precedentes definitions trois sortes d'angles qu'on considere au cercle. En la 6. il dit que l'angle mixte BAC ou BCA, contenu soubs la ligne droicte AC, & la circonference ABC, s'appelle angle de la section. En la 7. def. il dit que si à quelque poinct B, prins en la circonference d'vne section ABC, sont menees deux lignes droictes AB, CB, des extremitez de la ligne droicte AC qui sert de base à la section; l'angle rectiligne ABC, sera dit estre en la section ABC: Ainsi aussi l'angle rectiligne ADC sera dit estre en la section ADC: mais l'angle BAC, en la section BAC. Et en la 8. def Euclide dit qu'estant pris quelque poinct B, en la circonference du cercle ABCD, si on mene d'iceluy les lignes droictes BA, BC, aux deux extremes A & C, de la circonference ADC, laquelle prennent icelles lignes BA, BC; l'angle rectiligne ABC sera dit estre, ou s'appuyer sur la circonference ADC. Ainsi aussi l'angle ABD sera dit s'appuyer sur la circonference AD & l'angle BAD, sur la circonference BCD; mais l'angle BAC, sur la circonference BC.

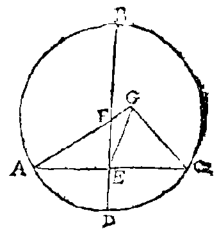


9. Secteur de cercle, est vne figure de deux lignes droictes embrassant quelque circonference, & faisant angle au centre du cercle.

10 Semblables sections de cercle, sont celles qui reçoiuent angles egaux; ou bien esquelles les angles sont egaux entr'eux.

PROBL. 1. PROP. I.

Trouuer le centre d'vn cercle donné.



Soit le cercle donné ABC, duquel il faut trouuer le centre.

Soit tiree la ligne AC à l'aduenture, laquelle par la 10. & 11. p. 1. soit couppee en deux egallement, & à droicts angles par la ligne BD, se terminant à la periphere és poincts B & D; & icelle BD estant couppee en 2. egalement en F. Ie dis que F est le cẽtre du cercle proposé.

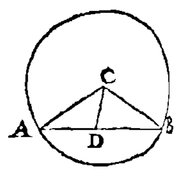
Car en icelle ligne droicte BD, vn autre poinct que F ne sera pas le centre, veu que tout autre poinct la diuise inegalement. Si donc le poinct F n'est le centre; le poinct G hors la ligne BD soit le centre (s'il est possible) duquel soiẽt menees les trois lignes droictes GA, GE, & GC: d'autant que si G estoit le centre, par la def. du cercle AG & GC seront egalles; mais AE & EC sont aussi egalles, & GE commune: donc les deux triangles GEA & GEC ont deux costez egaux à deux costez chacun au sien, & la base AG egale à la base CG, & par la 8 p. 1. les angles AEG & CEG seront egaux, & partant droicts, & la ligne EG perpendiculaire par la 10. def. 1. Mais l'angle BEA par la construction est droict, & tous les angles droicts sont egaux par la 10. commune sentence: donc les 2. angles AEG & BEA seroient egaux, sçauoir le tout à sa partie; ce qui est absurde. Donc le poinct G n'est pas le centre. Le mesme inconuenient s'ensuiura prenant tout autre poinct hors la ligne BD. Partant le poinct F sera le centre du cercle ABC requis à trouuer.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste que si au cercle vne ligne droicte couppe vne autre ligne droicte en deux egalement, & à angles droicts; le centre du cercle sera en icelle couppante. Car il a esté demonstré qu'il est impossible que le centre du cercle ABC soit ailleurs qu'au poinct F *milieu de la ligne BD, laquelle couppe la ligne AC en deux egalement, & à angles droicts en E.*

THEOR. 1. PROP. II.

Si en la circonference d'vn cercle, on prend deux poincts à l'aduenture ; la ligne droicte menee de poinct à autre, tombera dans le cercle.



En la circonference de cercle AB, dont le centre est C, soient pris deux poincts tels qu'on voudra A & B. Ie dis que la ligne droicte AB menee d'vn poinct à l'autre tombe dans iceluy cercle.

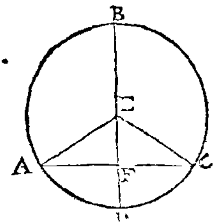
Car soit prins en icelle ligne droicte AB quelconque poinct comme D, entre ses extremes A & B; puis du centre C, soient menees les lignes droictes CA, CD, CB. D'autant que les deux costez AC, BC du triangle ACB sont egaux, les angles BAC, ABC, serót esgaux par la 5. p. 1. Mais l'angle externe ADC est plus grand que l'angle interne ABC par la 16. p. 1. donc le mesme angle ADC sera plus grand que l'angle BAC : & partant par la 19 p. 1. le costé AC sera plus grād que le costé CD : parquoy puis que CA est tiree du centre iusques à la circonference, la ligne droicte CD ne paruiendra iusques à icelle circonference : & par consequent le poinct D tombe dans le cercle. Le mesme sera demonstré de tout autre poinct pris Donc toute la ligne droicte AB tombe dans le cercle : ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, qu'vne ligne droicte touchant vn cercle, le touche seulement à vn poinct: car si elle le touchoit à deux poincts, la partie de la ligne d'entre iceux poincts tomberoit dans le cercle par ceste prop. parquoy elle coupperoit le cercle, contre l'hypothese.

THEO. 2. PROP. III.

Si dans le cercle quelque ligne droicte passe par le centre,& coupe en deux egallement vne autre ligne droicte ne passant point par le centre;elle la couppera à droicts angles: & si elle la couppe à droicts angles, elle la couppera aussi en deux egallement.



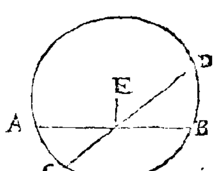
Au cercle ABCD soit la ligne droicte BD,laquelle passant par le centre E, couppe en deux egallemét la ligne droicte AC, laquelle ne passe point par le centre; ie dis que BD coupe aussi AC en angles droicts au poinct F.

Car estans menees les deux lignes CE&AE,les deux triãgles AEF,CEF auront les deux costez AF,FE,egaux aux deux costez CF,EF,chacun au sien,& la base AE egalle à la base EC,& par la 8.p.1. les deux angles au poinct F seront egaux,& partant droicts par la 10.def.1.

Ie dis pareillement que si BD couppe AC en angles droicts au poinct F; qu'elle la couppera aussi en deux egallemét. Car les deux angles au poinct F estans droicts,ils seront egaux,& l'angle A est egal à l'angle C par la 5.p.1. estant AEC Isoscele,& le costé EF cõmun aux deux triangles AEF, CEF, & par la 26.p.1.AF sera egale a CF.

THEOR. 3. PROP. IIII.

Si dans le cercle deux lignes droictes ne passans point par le centre,s'entrecoupent, elles ne se couperont point l'vne l'autre en deux egallement.

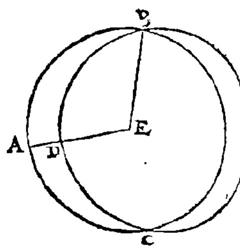


Au cercle ACBD, duquel le centre est E, soient deux lignes AB & CD s'entrecoupans au poinct F, & desquelles ny l'vne ny l'autre ne passe par le centre E. Ie dis que l'vne ou l'autre est coupee inegalement.

Car du centre E estant menee la ligne EF; si icelles lignes AB, CD se coupent en deux egallement au poinct F, EF les couppera au mesme poinct aussi en deux egallement, & à droicts angles par la 3. p. 3. & les angles AFE, EFB seront droits & egaux à CFE EFD aussi droits & egaux : ce qui est impossible, n'estant AFE que partie de CFE: ainsi les lignes AB, CD ne se coupoient pas en deux egalement.

THEOR. 4. PROP. V.

Si deux cercles se coupent l'vn l'autre, ils n'auront pas mesme centre.



Soiet les deux cercles ABC, BCD se coupans l'vn l'autre en B & C. Ie dis qu'ils ne sçauroient auoir vn mesme centre.

Car s'il est possible, soit leur centre commun E, duquel soiét tirees deux lignes droictes : sçauoir EB à la section B, mais EA couppant l'vne & l'autre circonference en A & D. Dóc puis que E est posé centre du cercle BCD la ligne droicte ED sera egale à la ligne droicte EB par la 15 d. 1. Derechef puis que E est aussi posé centre du cercle ABC la ligne droicte EA sera aussi egale à la mesme ligne EB, & par la 1. com. sent. ED, EA seront egales entr'elles, la partie au tout, ce qui est impossible : partát les deux cercles ne pouuoient auoir vn mesme centre.

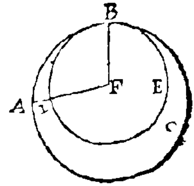
THEOR. 5. PROP. VI.

Si deux cercles se touchent l'vn l'autre au dedans, ils n'auront pas mesme centre.

Soient les deux cercles A B C, & D B E se touchans l'vn l'autre au dedans en B. Ie dis qu'ils n'auront pas mesme centre.

Car s'il

Car s'il est possible, soit leur centre cõmun F, & d'iceluy soient menees les 2. lignes FA & FB : sçauoir est FB à l'attouchement B ; & FA, couppant l'vn & l'autre cercle en D, A, il est euidnt que la mesme absurdité aduiendra qu'en la precedente ; sçauoir que FA, FD seroiét egales : donc F ne pouuoit estre centre commun des cercles proposez.



SCHOLIE.

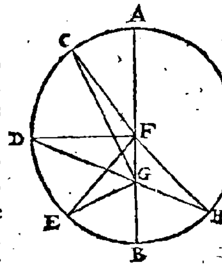
Euclide a proposé ce theoreme des cercles s'entre-touchans seulement au dedans, d'autant que des cercles qui se touchent par dehors il appert assez que leurs centres sont diuers : veu qu'vn des cercles est dehors l'autre, & le centre est tousiours au milieu de son cercle. Ce que Dounot pouuoit icy remarquer, & non pas faire la prop. generale comme il à faict contre l'intention d'Euclide, laquelle il a changée en plusieurs endroits de ce liure, soit ou en changeant les mots dont il a vsé pour s'exprimer, ou en les retranchant, ou y adioustant : Comme pour exemple en la prop. suiuante, au lieu qu'il y a selon Euclide, qui est menee par le centre, *Dounot luy faict dire,* qui couppe le centre *: chose absurde, puis que par les def. le centre du cercle est vn poinct lequel est indiuisible: Il fait encore la mesme faute à la 19. p. 3. & en la 8. de ce mesme liure il a retranché ces mots,* Desquelles l'vne passe par le centre, & les autres où l'on voudra. *Et au lieu que ceste prop. ne contient que 5. parties, il en a adiousté vne à la demonstration : sçauoir est celle qu'il faict la tierce. Item il a retranché les deux dernieres parties de la 31. p. de ce mesme liure.*

THEOR. 6. PROP. VII.

Si au diametre du cercle se prend quelque poinct qui ne soit pas le centre, & d'iceluy poinct tombent quelques lignes droites en la circonference; la plus grande sera celle en laquelle est le centre, & la plus petite celle qui reste: Mais des autres tousiours la plus proche

F

de celle qui est menee par le centre, est plus grande que la plus esloignee : Et deux lignes droictes tant seulement venans d'iceluy poinct de part & d'autre du diametre, sont egales.



Au diametre AB du cercle ACDEB, duquel le centre est F, soit pris quelque poinct G outre le centre, & d'iceluy poinct G tombent tant qu'on voudra de lignes droictes GC, GD, GE, en la circonference. Ie dis en premier lieu, que de toutes les lignes menees de G à la circonference, GA en laquelle est le centre, est la plus grande. Car du centre F estans menees à C, D, & E, les lignes FC, FD, & FE : le triangle G F C aura les deux costez GF, FC, plus grands que le costé GC par la 20. p. 1. Mais les lignes GF, FC sont egales aux lignes GF, FA, c'est à dire à toute la ligne GA : donc GA sera aussi plus grande que GC. Par mesme raison GA sera aussi plus grande que GD, & que GE : parquoy la ligne GA est la plus grande de toutes celles menees de G à la circonference.

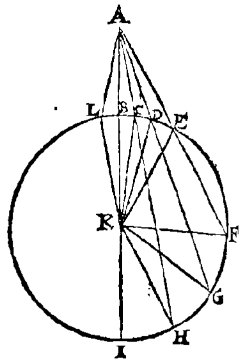
Secondement, ie dis que GB est plus petite que GD, ou autre quelconque : car au triangle DFG, les deux costez DG & GF, seront plus grands que le troisiesme DF par la 20. p. 1. ou que son egale BF. Que si on oste la ligne commune GF, le demeurant G D sera plus grand que le demeurant GB. Par mesme raison G B sera aussi plus petite que GE, & que GC, ou autre quelconque tombant de G à la circonference.

Tiercement, ie dis que GC plus proche de la ligne AG, que GD, est plus grande qu'icelle GD : & pour la mesme raison GD plus grande que GE, & ainsi des autres s'il y en auoit dauantage de tirees de F a la circonference. Car les deux costez GF, FC du triangle GFC, sont egaux aux deux costez GF, FD du triangle GFD, chacun au sien : mais l'angle C F G plus grand que l'angle DFG : & partant par la 24. p. 1. la base GC sera plus grande que la base GD. Pour mesme raison GC sera plus grande que GE : Item GD plus grande que GE. Parquoy la ligne la plus proche de celle qui est menee par le centre, est plus grande que celle qui en est plus esloignee.

Finalement, ayant fait l'angle BFH egal à l'angle BFE, & tiré GH: ie dis que les lignes GE, GH, sont egales entr'elles, & qu'on n'en peut mener de G à la circonference aucune autre egale à icelles. Car d'autant que les costez EF, FG du triangle EFG, sont egaux aux costez HF, FG du triangle HFG, & les angles EFG, HFG aussi egaux: les lignes GH, GE, qui sont de part & d'autre du diametre, sont egales entr'elles: Et il est euident qu'on ne pourra tirer du poinct G vne autre ligne dans le cercle, qui ne s'approche ou recule de la ligne BA tombant de costé ou d'autre de GE, ou GH; & par ce qui a esté mõstré cy dessus, elle sera plus grande ou plus petite que l'vne & l'autre d'icelles GE, GH. Dõc du poinct G à la circonference ne se peuuent tirer plus de deux lignes droictes qui soient egales entr'elles.

THEOR. 7. PROP. VIII.

Si on prend quelque poinct hors le cercle, & d'iceluy soient menees quelques lignes droictes dans la circonference, desquelles l'vne passe par le centre, & les autres où l'on voudra: celle qui passe par le cẽtre sera la plus grãde de toutes celles qui seront menees dans la circõference concaue. Quant aux autres, tousiours la plus proche de celle qui passe par le centre est plus grande que la plus esloignee. Mais de celles qui tombent en la circonference conuexe, la plus petite est celle qui est comprise entre le poinct & le diametre. Quant aux autres, la plus esloignee de la plus petite est plus grande que celle qui en est plus proche; & n'y a que deux lignes droictes qui puissent tomber egales de part & d'autre de la plus petite.



Du poinct A hors le cercle BCDE, le centre duquel est K, soient menees les lignes droictes AF, AG AH, AI couppans le cercle, desquelles AI passe par le centre K, & les autres comment que ce soit. Ie dis que AI qui passe par le centre, est la plus grande de toutes: puis apres que AH qui est la plus proche d'icelle AI, est plus grãde que AG qui en est plus esloignee: Et pour mesme raison AG, plus grande que AF. Et au contraire. Ie dis que AB cõprise entre le poinct A & la circonference conuexe, est la plus petite ligne, de toutes celles qui sont hors le cercle: puis apres que la ligne AC plus prochaine de la plus petite AB, est moindre que AD qui en est plus esloignee: Et par mesme raison icelle AD moindre que AE. Finablement ie dis que de A, on peut seulement mener deux lignes droictes, egales des deux parts de la plus petite AB.

Car du centre K estãt menees aux poincts C, D, E, F, G, H, les lignes droictes KC, KD, KE, KF, KG, KH; les deux costez AK, KH, du triangle AKH, sont plus grands que la ligne AH: Mais les lignes AK, KH sont egales aux lignes AK, KI, c'est à dire à toute la ligne droicte AI: icelle AI sera donc aussi plus grande que AH. Pour la mesme raison AI sera plus grande que AG, & que AF. Parquoy la ligne AI est la plus grande de toutes celles qui tombent de A dans le cercle.

Puis apres, d'autant que les costez AK, KH du triangle AKH sont egaux au costez AK, KG du triangle AKG, chacun au sien, & l'angle AKH, plus grand que l'angle AKG; la base AH sera plus grande que la base AG, par la 24. p. 1. Par mesme raison AH sera plus grande que AF; item AG plus grãde que AF. Parquoy la ligne plus proche de celle qui passe par le cẽtre, est plus grande que celle qui en est plus esloignee.

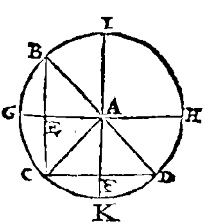
Derechef, puis qu'au triangle ACK la ligne AK est moindre que les deux AC, CK; si on oste les egales BK, CK, demeurera encore AB moindre que AC. Par semblable raison AB sera plus grande que AD, & que AE. Parquoy la ligne AB est la plus petite de toutes celles qui son menees de A a la circõference conuexe.

Derechef, d'autant que dans le triangle ADK tombent deux lignes droictes AC, CK, des extremitez du costé AK; icelles AC, CK seront moindres que AD, DK par la 21. p. 1. desquelles si on oste les egales CK, DK, restera encore AC moindre que AD. Par mesme raison on prouuera que AC est moindre que AE: Item AD moindre que AE. Parquoy la ligne la plus proche de la plus petite AB, est moindre que la plus esloignee.

Finablement, soit faict l'angle AKL egal à l'angle AKC, & soit menee la ligne AL. D'autant que les costez AK, KC du triangle AKC, sont egaux aux costez AK, KL du triangle AKL; & les angles AKC, AKL aussi egaux, les lignes droictes AC, AL de part & d'autre de la moindre AB, seront egales entr'elles par la 4. p 1. Or que nulle autre puisse estre egale à icelles, il est euident; car si on en mene vne autre du poinct A, il faudra qu'elle soit plus proche ou plus esloignee de AB; & par ce qui a esté demonstré cy dessus, elle sera plus grande ou plus petite que l'vne & l'autre d'icelles AC, AL. Donc du poinct A tomberont seulement deux lignes droictes egales de part & d'autre de la moindre AB.

THEOR. 8. PROP. IX.

Si on prend quelque poinct au cercle, & d'iceluy poinct vers la circonference tombent plus de deux lignes droictes egales, le poinct pris est le centre du cercle.

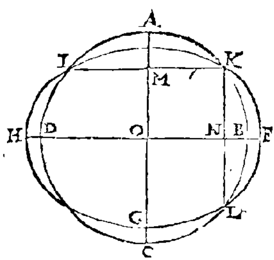


Soit pris le poinct A au cercle BCD, & d'iceluy poinct tombent les trois lignes egales AB, AC, AD. Ie dis que le poinct pris, A est le centre du cercle.

Qu'il ne soit ainsi: soient menees les lignes BC & CD, & apres les auoir couppé en deux egalement aux poincts E & F, d'iceux poincts au poinct A soient menees les deux lignes EA & FA. D'autant que les deux triangles BEA & CEA ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien; & les bases AB, AC aussi egales, les deux angles au poinct E seront egaux; & partant droicts, & par le corol. de la 1. p. 3. le centre du cercle sera en la ligne GAH, puis qu'elle diuise BC en deux egalement, & à angles droicts en E. Par mesme discours le centre du cercle se trouuera aussi en KI. Il faut donc que ce soit à leur commune section A, n'y ayant point d'autre poinct commun.

THEOR. 9. PROP. X.

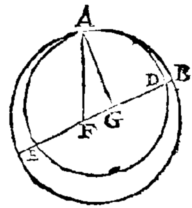
Vn cercle ne couppe pas vn autre cercle en plus de deux poincts.



Soient les deux cercles ABCD & EFGH, se couppans aux trois poincts I, K, & L, s'il est possible. Item soient menees les deux lignes IK, & KL, lesquelles soiēt couppees en deux egalement aux poincts M & N par la 10. p. 1. & soient menees les lignes MC, & NH à droicts angles sur IK, & KL. Il faudra par le corol. de la 1. p. 3. que les deux centres des deux cercles soient en la ligne AC; ils seront aussi en la ligne FH: Ce sera donc au poinct de la commune section O, & en ce faisant les deux cercles auroient mesme centre, contre la 5. p. 3. Donc les cercles ne se pouuoiēt coupper en trois poincts.

THEOR. 10. PROP. XI.

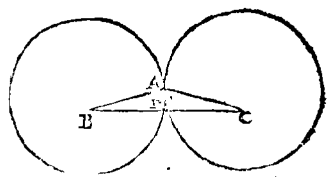
Si deux cercles se touchent l'vn l'autre au dedans, & l'on prend les centres diceux: ayant ioinct iceux centres par vne ligne droicte & produite, elle tombera en l'attouchement des cercles.



Soient deux cercles ABC & ADE se touchans interieurement au poinct A; & F, soit le centre du cercle ABC, & G le cētre du cercle ADE, lesquels centres sont necessairement diuers, puis que par la 6. p.3. deux cercles s'entre-touchant au dedans, ne peuuent auoir vn mesme centre. Ie dis que la ligne droicte menee d'vn centre à l'autre, & produicte, tombera sur le poinct de l'atouchemēt A. Car si elle n'y tōbe, qu'elle coupe l'vn & l'autre cercle és points B, D, E, C, & de l'attouchement A, aux centres F & G, soient menees les lignes AF, AG. D'autant que par la 20. p.1. les deux costez AG FG du triangle AFG, sont plus grands que le costé FA; & FA est egale à la ligne FB (pource que F a esté posé le centre du cercle ABC) aussi AG, GF seront plus grandes que FB: ostant donc FG commune, restera GA, plus grande que GB. Et partant puis que GA est egale à GD; (car G a esté posé centre du cercle ADE) GD sera aussi plus grande que GB, la partie que le tout: ce qui est absurde. Donc la ligne droicte conioignāt les deux centres des cercles ABC, ADE, & produite, ne tombera pas ailleurs qu'à l'attouchement A.

THEOR. II. PROP. XII.

Si deux cercles se touchent l'vn l'autre au dehors, la ligne droicte menee d'vn centre à l'autre, passera par l'attouchement.



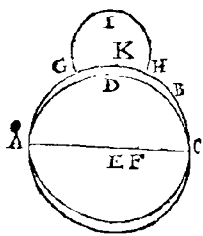
Soient deux cercles se touchās au poinct A, desquels les centres soient B, & C. Ie dis que si d'vn centre à l'autre on meine vne ligne droicte, qu'icelle passera par le poinct d'attouchement A.

Autrement il s'ensuiura absurdité: car si icelle ligne ne passe par le poinct d'attouchemēt, qu'elle passe ailleurs s'il est possible, sçauoir aux poincts

D & E, & du poinct d'attouchemēt A soient menees les deux lignes AB, & AC, lesquelles par la 20. p. 1. seront plus grandes que BC, & par la def. du cercle, il s'ensuit que BD, estant egale à BA, & CE à CA, que les deux lignes BD & CE, seroient plus grandes que BC, la partie que le tout. La ligne droicte menee d'vn centre à l'autre, passera donc par l'attouchement A.

THEOR. 12. PROP. XIII.

Vn cercle ne touche point vn autre cercle à plus d'vn poinct, tant dehors que dedans.



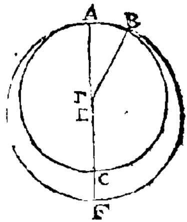
Soient les deux cercles ABC, & ADC se touchans interieurement aux deux poincts A, & C, s'il est possible; & d'autant qu'ils ne peuuēt auoir vn mesme centre par la 6. p. 3. soient les deux centres diuers E, & F, par lesquels estant tiree la ligne droicte EF, & produite de part & d'autre, il faut qu'elle tombe és poincts d'attouchement A & C, & par la def. du cercle, il faut que EA & EC soiēt egales. Itē FA, & FC. Mais FA est plus grande que EA. Partant FC sera aussi plus grande que EC, la partie que le tout: ce qui est impossible: Donc les deux cercles ne se toucheront point en deux poincts au dedans.

Pareillement il est impossible qu'ils se touchent exterieurement à plus d'vn poinct: car si le cercle HIG, le centre duquel est K, pouuoit toucher le cercle ABC en deux poincts, sçauoir H, & G, il faudroit que la ligne droicte menee par les deux centres E & K coupast les deux poincts d'attouchement H, & G. par la 12. p. 3. ce qui estoit impossible: ainsi les cercles ne se touchent point à plus d'vn poinct, tant dehors que dedans.

SCHOLIE.

☞ *Clauius demonstre en ce lieu le theoreme suiuant.*

Si au demy diametre d'vn cercle produit, on prend vn poinct outre *le centre ; le cercle descrit d'iceluy poinct comme centre, par le poinct extreme du demy diametre, touchera le premier cercle en iceluy poinct extreme du semi-diametre, & tombera tout dehors le mesme cercle.*

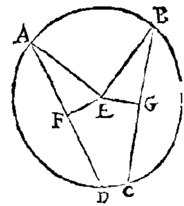


Soit le cercle ABC, duquel le centre est D, & au demy diametre A D prolongé, soit prins quelconque poinct E, duquel & de l'interualle EA soit descrit le cercle A F, lequel ie dis toucher le cercle ABC au seul poinct A. Car ou le poinct E est dans le cercle ABC, ou dehors. S'il est dedans : d'autant que AE est plus grande que AD, c'est à dire que DC, & à plus forte raison que EC; EF qui est egale à EA sera aussi plus grande que EC ; & partant le poinct F est hors le cercle A B C, & le cercle AF hors le mesme cercle pres du poinct F. Iceluy poinct F tombera beaucoup d'auantage hors le cercle ABC, si E est hors le mesme cercle ABC. Si donc le cercle AF ne tombe tout dehors le cercle ABC, tellement qu'il le touche au seul poinct A; que le cercle AF couppe ou touche le cercle ABC, en vn autre poinct B, si faire se peut, & soit tiree la ligne DB. Veu donc qu'au diametre du cercle AF est pris le poinct D, outre le centre E; DA sera la plus petite de toutes les lignes tombātes de D, par la 7 p.3. Donc DA est moindre que DB, ce qui est absurde; car DA, DB tombant du centre D en la circonference d'vn mesme cercle ABC, sont egales. Donc le cercle AF ne couppe ou touche le cercle ABC en vn autre poinct que A, mais tombe tout dehors iceluy, ce qui estoit proposé.

Que si au semi-diametre non produit, on prend vn poinct outre le centre, le cercle descrit d'iceluy poinct comme centre, par le poinct extreme du semi-diametre touchera pareillement le premier cercle, au susdit poinct extreme du demy diametre, & tombera tout dedans le mesme cercle. Comme si au semi-diametre AE, du cercle AF, on prend le poinct D, duquel & interualle DA on descrit le cercle ABC, iceluy tombera tout dedans AF, & le touchera au seul poinct A. Car puis qu'il a esté demonstré cy dessus que le cercle AF tombe tout dehors le cercle ABC, pareillement tout cestuy-cy tombera dedans celuy là, tellement qu'ils s'entre-touchent au seul poinct A.

THEO. 13. PROP. XIIII.

Dans vn cercle les lignes droictes egales sont equidistantes du centre : & les equidistantes du centre sont egales entr'elles.



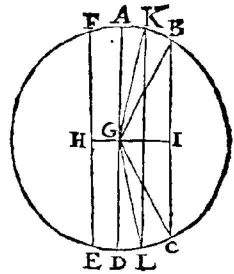
Au cercle ABCD, duquel le centre est E, soient deux lignes droictes, egales AD, & BC. Ie dis qu'elles serōt equidistantes du centre E.

Qu'ainsi ne soit; par la 12 p.1. du cētre E soient menees les deux lignes EF, EG, perpendiculaires aux deux lignes AD, BC: puis soient tirees les deux AE, & BE. Or les deux lignes AD, & BC estans couppees en angles droicts par les perpendiculaires EF, & EG, elles seront aussi couppees en deux egalement par la 3.p.3. & partant AF sera egale a BG. Pareillement AE estant egale a BE par la def. du cercle, & le quarré de AE estant egal aux deux quarrez de AF, FE, par la 47.p.1. & son egal quarré de BE estant aussi egal aux deux quarrez de BG, GE; les deux quarrez de AF, FE sōt egaux aux deux quarrez de BG, GE. Mais le quarré de AF est egal au quarré de BG; & par consequent le quarré de FE est egal au quarré de GE. Parquoy la ligne FE sera egale à la ligne GE, & par la 4.def. du 3. AD, & BC seront equidistantes du centre du cercle proposé.

Quant à la seconde partie. Ie dis que si AD, BC sont equidistantes du centre E, qu'elles seront egales; car avant construit comme dessus, les perpendiculaires EF & EG seront egales par la 4 def. de ce liure, & coupperont AD, BC en deux egalement par la 3. p.3. & par deduction de la 47.p.1. comme cy dessus, AF se trouuera egale a BG, & par consequent aussi leurs doubles AD, & BC seront egales; ce qui estoit à demōstrer.

THEO. 14. PROP. XV.

Dans le cercle la plus grande ligne est le diametre : quant aux autres, tousiours la plus proche du centre, est plus grande que la plus esloignee.



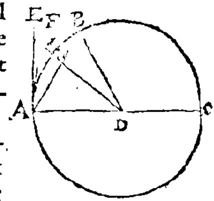
Au cercle ABCDEF, duquel le centre est G, soit le diametre AD, & la ligne FE la plus proche d'iceluy, mais BC la plus esloignee. Ie dis que de toutes ces lignes AD est la plus grande, & que FE est plus grande que BC.

Car soient tirees du centre G les lignes GH, GI perpendicul. aux lignes FE, BC: & pource que BC est plus esloignee du cẽtre que FE, GI sera plus grande que GH, par la 4. def. de ce liure. Soit donc couppé d'icelle GI, la ligne GM egale à GH, & par M soit menee KML perpendiculaire à GI, & soient tirees les lignes GK, GB, GC, GL. Donc puis que les perpendiculaires GM, GH sont egales, les lignes KL, FE seront egalement distantes du centre par la 4. def. 3. & partant egales entr'elles par la prop. precedente. Derechef, puis que GK, GL sont plus grãdes que KL par la 20. p. 1. & icelles GK, GL sont egales au diametre AD; iceluy diametre AD sera aussi plus grand que KL ou FE. Par mesme raison AD sera demonstré plus grand que toutes autres lignes.

Item des triangles GKL & GBC, les costez GK, GL, GB, GC, sont egaux par la definition du cercle, & l'angle KGL est plus grand que BGC, & par la 24 p. 1. la base KL, ou son egale FE, sera plus grande que la base BC; & ainsi des autres.

THEOR. 15. PROP. XVI.

Si à l'extremité du diametre d'vn cercle on leue vne ligne perpendiculaire, icelle tombera dehors le cercle; & entre icelle perpendiculaire & la circonference ne tõbera pas vne autre ligne droicte; & l'angle du demy cercle est plus grand que tout angle rectiligne aigu, & celuy qui reste plus petit.



Du cercle A B C, soit le centre D, le diametre AC, sur l'extremité duquel A soit leuee la ligne perpendiculaire AE, par la 11. p. 1. Ie dis premierement qu'icelle ligne AE tombe hors le cercle.

Car si elle tomboit dans iceluy, ainsi que AB, estant tiree DB, les deux angles DAB, DBA, seront egaux par la 5. p. 1. Mais DAB est droict par la construction, DBA sera donc aussi droict : ce qui est absurde, puis que par la 17. p. 1. deux angles d'vn triangle sont moindres que deux droicts. Donc la perpendiculaire ne tombera pas dans le cercle. Pour la mesme raison, elle ne tombera pas aussi en la circonference, mais dehors, comme est AE.

Maintenant ie dis que de A ne peut tomber entre la perpendiculaire A E, & la circonference AB, vne autre ligne droicte. Car s'il est possible que quelque ligne droicte y tombe comme AF, de D soit menee sur icelle la perpendiculaire DG, couppant la circonference en H, laquelle tombera necessairement de la part de l'angle aigu DAF par le corol. de la 17. p. 1. Veu donc qu'au triangle DAG, les deux angles DAG DGA, sont moindres que deux droicts par la 17. p. 1. & par la constructiõ DGA est droict, l'angle DAG sera moindre qu'vn droict : & partant la ligne D A, ou son egale DH, sera plus grande que DG, par la 19. p. 1 la partie que le tout : ce qui est absurde. Entre la perpendiculaire AE, & la circonference AB ne tombera donc pas vne autre ligne droicte.

Ie dis finalement, que tout l'angle du demy cercle BAC contenu du diam AC, & circonferẽce AB, est plus grand que tout angle rectiligne aigu ; & que celuy qui reste BAE contenu de la ligne droicte AE, & circonference AB, est plus petit que tout angle rectiligne aigu. Car puisque C A E est angle droict diuisé par la seule circonference AB ; & qu'entre icelle circonference AB & la ligne droicte AE ne peut tomber vne autre ligne droicte, l'angle BAE ne peut estre diuisé par aucune ligne droicte, ainsi ne sera diminué par aucune ligne droicte ; ny par consequent l'angle B A C ne sera augmenté par aucune ligne droicte.

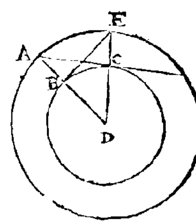
COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste qu'vne ligne droicte tiree perpendicu-

lairement de l'extremité du diametre, touche le cercle en vn seul poinct. Car il a esté demonstré qu'elle tombe hors le cercle: parquoy elle le touche seulement au poinct extreme du diametre. Parquoy s'il estoit requis tirer vne ligne droicte par le poinct A donné en la circôference du cercle, laquelle touche le cercle en A, nous tirerions de A au centre D la ligne droicte AD, & sur icelle seroit eleuee la perpendiculaire AE, laquelle touchera le cercle en A, comme il a esté demonstré.

PROBL. 2. PROP. XVII.

D'vn poinct donné, mener vne ligne droicte qui touche vn cercle donné.



Soit le poinct donné A, duquel il faut mener vne ligne droicte qui touche le cercle donné BC, dont le centre est D.

Soit menee la ligne AD couppant le cercle BC en B: puis du centre D, & interual DA, soit descrit le cercle AE. Et apres auoir leué la perpendiculaire BE au bout du demy diametre BD par la 11.p.1. Soit menee la ligne ED couppant le cercle BC au poinct C, & du poinct dôné A, à iceluy poinct C, soit menee la ligne AC, ie dis qu'elle touche le cercle au poinct C.

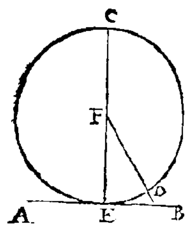
Car les deux triangles ACD & EBD ayans deux costez esgaux, & l'angle D commun, la base AC sera egale à la base EB, & l'angle droict ACD egal à l'angle EBD, qui sera aussi droict. Et par le corol. de la preced. prop. la ligne AC touchera le cercle BC au seul poinct C.

SCHOLIE.

Nous auons enseigné en nostre Geometrie practique Prob. 20. vne autre maniere beaucoup plus facile que celle cy dessus.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si vne ligne droicte touche vn cercle, & du centre à l'attouchement on meine vne ligne droicte, elle sera perpendiculaire à la touchante.

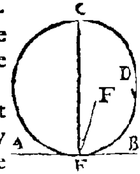


Soit la ligne droicte AB touchant le cercle CDE au poinct E, & d'iceluy poinct soit menee la ligne EC passant par le centre F. Ie dis qu'elle sera perpendiculaire a AB.

Car si elle ne l'est, soit menee FG perpendiculaire à AB couppant la circonference en D. Veu donc qu'au triangle EFG les deux angles FEG, FGE sont moindres que deux droicts par la 17.p.1. & FGE est droict par la construction FEG sera moindre qu'vn droict; & par la 19.p.1. la ligne FE, ou FD son egale sera plus grande que FG, la partie que le tout: ce qui est absurde. Donc FE est perpendic. à AB.

THEO. 17. PROP. XIX.

Si vne ligne droicte touche vn cercle, & au poinct de l'attouchement est leuee vne perpendiculaire; en icelle sera le centre du cercle.

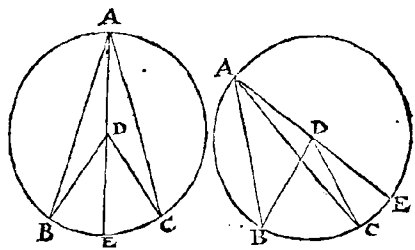


Soit la ligne droicte AB touchant le cercle CDE, au poinct E, & sur iceluy soit leuee la perpendiculaire EC. Ie dis que le centre du cercle sera dans icelle ligne.

Autrement il sera dehors icelle ligne; soit donc au poinct F, s'il est possible, & d'iceluy poinct soit menee la ligne EF au poinct de l'attouchement E, elle sera aussi perpendiculaire à AB par la 18. p.3. ce qui est impossible: car les deux angles AEC, & AEF, seroient droicts, & egaux, la partie au tout: partant le centre du cercle n'estoit pas hors de la ligne EC, ains dedans.

THEOR. 18. PROP. XX.

Dans le cercle, l'angle du centre eſt double de l'angle de la circonference quand iceux angles ont vne meſme circonference pour baſe.



Dans le cercle ABC, ſoient les 2. angles, ſçauoir BAC en la circonference, & BDC au centre, ayant meſme circonference BC, pour baſe. Ie dis que BDC ſera double de BAC.

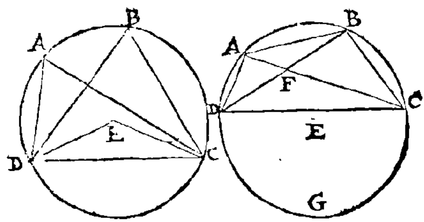
Car premierement ſi les lignes AB, AC encloſent les lignes DB, DC, comme en la premiere figure par le centre D eſtant menee la ligne droicte ADE, & les lignes DA, DB, & DC eſtans egales, les deux triangles ADB, & ADC seront Iſoſceles, & par la 5.p.1. ils auront les angles egaux ſur les baſes AB, & AC. Mais l'angle exterieur BDE par la 32.p.1. eſt egal aux deux angles interieurs DAB, & DBA, qui ſont egaux: partant il ſera auſsi double du ſeul DAB, par meſme diſcours EDC ſe trouuera double de DAC; & par cõſequent les deux enſemble BDC ſeront doubles des deux enſemble BAC.

Que ſi l'angle de la circonference A eſt comme en la ſeconde figure, il s'enſuiura touſiours le meſme, ſçauoir que BDC ſera double de BAC.

Car apres auoir mené la ligne ADE, tout ainſi comme cy deſſus par la 32.p.1. l'angle exterieur BDE ſera egal aux deux oppoſez interieurs ABD, & DAB, & double du ſeul DAB eſtant le triangle Iſoſcele, par meſme diſcours CDE ſera double de CAD, & par les com. ſent. Si de BDE double de BAE on oſte CDE, double de CAE, le demeurant BDC ſera double du demeurant BAC.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Dans le cercle, les angles qui sont en vne mesme section sont egaux entr eux.



Toute section est ou plus grande ou plus petite que le demy cercle. Soit donc premierement au cercle ABCD, le centre duquel est E, vne plus grande section DABC, en laquelle soient les angles DAC & DBC. Ie dis qu'ils sont egaux entr'eux.

Car si du centre E on meine les deux lignes ED, & EC; l'angle du centre DEC sera double de l'angle en la circonference DAC par la 20.p.3. & par la mesme prop. il sera aussi double de l'autre angle DBC. Mais les choses qui sont moitié d'vne mesme, sont egales entr'elles; ainsi les angles A, & B seront egaux entr'eux.

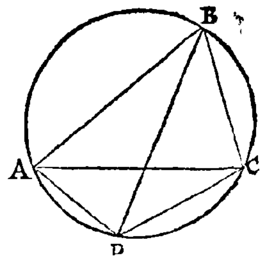
Soit maintenant la section, plus petite que le demy cercle cõme en la 2. figure. Ie dis que les deux angles DAC, DBC estans en la mesme section DABC sont egaux.

Car si on meine la ligne AB, il se fera vne section BGA plus grande que le demy cercle; & comme nous auons demonstré cy dessus les deux angles ADB & BCA, qui sont en vne mesme section AGB seront egaux; pareillement aux deux triangles DAF, & CBF, les angles opposez au poinct F sont egaux par la 15.p.1. & par ce qui a esté demonstré à la 32 p.1. le troisiesme angle DAF sera egal au troisiesme angle CBF, ce qui estoit à prouuer.

PROBL. 20. PROP. XXII.

Les figures de quatre costez inscrites au cerc.

cercle, ont les angles opposez egaux à deux angles droits.

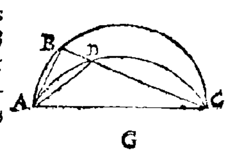


Soit la figure de quatre costez inscrite au cercle ABCD. Ie dis que les angles opposez ABC, ADC, item BAD, BCD, sont aussi egaux à deux droicts.

Car si on meine les deux lignes AC, & BD, les deux angles ACD, & ABD estans en vne mesme section ABCD, serōt egaux par la 21.p.3. Pareillemēt DBC, & CAD, estans en vne mesme section DABC, seront egaux : donc les deux angles sous le poinct B seront egaux aux deux DAC, & DCA, lesquels auec les deux du poinct D, sont egaux à deux droicts par la 32 p.1. partant aussi les deux sous le poinct B auec les deux sous le poinct D, c'est à dire le total ABC, auec le total ADC seront egaux à deux droicts. Nous demonstrerons en la mesme maniere, que les deux angles BAD, BCD, sont egaux à deux droicts. Car derechef les deux angles ABD, ACD, sont egaux. Item les deux BCA, BDA; & partant tout l'angle BCD sera egal aux deux ABD, ADB, lesquels auec BAD sont egaux à deux droicts par la 32. p. 1. Donc aussi les deux BCD, BAD seront egaux a deux droicts.

THEO. 21. PROP. XXIII.

Deux sections de cercles semblables & inegales, ne se mettront pas dessus vne mesme ligne droicte, & de mesme part.



Car si faire se peut soient deux sectiōs de cercles semblables, & inegales ABC, & ADC sur la ligne droicte AC, & de mesme costé. Il est euident qu'elles s'entre-coupperont seulement és

Poincts A & C, puis que par la 10.p.3. vn cercle ne couppe pas vn cercle en plus de deux poincts ; & partant la circonferen-ce d'vne section sera toute dehors la circonference de l'autre. Soit donc menee la ligne droicte CB couppant les circonfe-rẽces en D & B, & tirees les deux lignes BA, & DA: par la de-finition des semblables sectiõs, les deux angles ABC, & ADC seront egaux, ce qui est absurde : car par la 16.p. 1. l'angle ex-terieur ADC doit estre plus grand que l'opposé interieur B donc les deux sections ABC, & ADC estans semblables, & inegales, ne se pouuoient mettre sur la mesme ligne AC, & de mesme part.

THEOR. 22. PROP. XXIIII.

Semblables sections de cercle estans constituees sur lignes droictes egales, sont egales entr'elles.

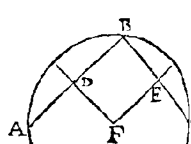
Soient deux sections de cercles semblables ABC, & DEF constituees sur lignes egales AC, & DF. Ie dis qu'elles sont egales.

Autrement, si elles estoient inegales, il s'ensuiuroit que semblables sections & inegales pourroient estre posees sur lignes droictes egales contre la 23. p. 3. donc les deux sections seront egales.

PROB. 3. PROP. XXV.

La section d'vn cercle estant donnee, descrire le cercle duquel elle est section.

Soit la section de cercle ABC, de laquelle il faut trouuer le cẽtre pour acheuer le cercle d'icelle section.

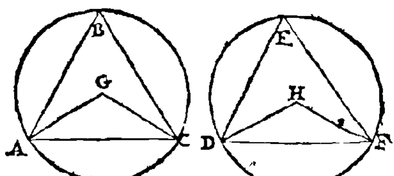


Soient pris trois poincts à l'aduanture en icelle section A, B, C : & apres auoir mené les deux lignes AB & BC & icelles couppees en deux egalemẽt en D & E, d'iceux poincts soient leuees les perpendiculaires DF, & EF se rencontrans au poinct F. Ie dis que F est le centre cherché pour acheuer le cercle.

Car par le corol. de la 1. p. 3. le centre sera à la ligne DF. Il sera aussi eu EF : ce sera donc au poinct F, qui leur est commun.

THEOR. 23. PROP. XXVI.

Aux cercles egaux, les angles egaux s'appuyent sur circonferences egales, soit qu'ils s'appuyent estans constituez aux centres, ou aux circonferences.

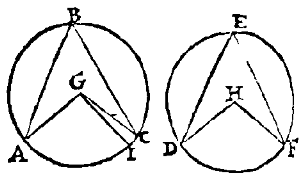


Soient les cercles egaux A B C & DEF, desquels les centres sont G & H, & les angles dans iceux egaux, sçauoir aux circōferences, B egal à E, & aux centres, G egal à H. Ie dis que les circonferences AC, & DF, sur lesquelles iceux angles s'appuyent, sont egales.

Car d'autāt que les cercles sont egaux, les lignes tirees du cētre à la circōference seront egales par la 1. d. 3. Ainsi les 2. triāgles AGC, & DHF ont deux costez egaux à 2. costez, chacun au sien, & l'āgle G egal à l'angle H, & par la 4. p. 1. la base AC sera egale à la base DF. Pareillement l'angle B estant egal à l'angle E, la section ABC sera semblable à la section D E F, par la 10. def. 3. & par la 24. p. 3. elles seront egales; & qui de cercles egaux oste sections egales, sçauoir ABC & DEF, le demeurant AC sera egal au demeurant DF : ainsi les angles egaux s'appuyeront dessus circonferences egales.

THEOR. 24. PROP. XXVII.

Aux cercles egaux, les angles qui s'appuyēt dessus circonferences egales, sont egaux entr'eux, soit qu'ils s'appuyent estans constituez aux centres, ou aux circonferences.



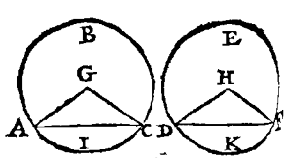
Soient deux cercles egaux ABC & DEF, les centres desquels sōt G & H, & sur les circonferences egales AC & DF soient les angles A B C & DEF tous deux en la circonference. Item AGC & DHF au centre; ie dis que les angles G & H seront egaux.

Autrement l'vn d'iceux sera plus grand ou plus petit. Soit donc AGC plus grand que DHF, s'il est possible, il faudra par la 23 p.1. sur AG faire l'angle AGI egal à DHF, & par la 26 p.3. les circonferences AI & DF seront egales: ce qui est cōtre nostre hypothese; car nous auions posé AC egale à DF. Il faudroit dōcques que AG & AI fussent egales contre la 8. cōmune sentence. Donc l'angle AGC n'estoit point plus grand que l'angle DHF.

L'egalité des angles du centre estant prouuee, les angles de la circonference sont entēdus egaux, puis qu'ils sont moitiez d'iceux par la 20.p.3.

THEOR. 25. PROP. XXVIII.

Aux cercles egaux les lignes droictes egales prennent circonferences egales, sçauoir la plus grande à la plus grande, & la plus petite à la plus petite.



Soient les deux cercles egaux ABC, & DEF, desquels les centres soient G & H, & dans iceux deux lignes droictes egales AC, & DF. Ie dis que les circonferēces qu'elles couppent sont egales, sçauoir la petite AIC à la petite DKF, & la grande ABC, à la grande DEF.

Qu'il ne soit ainsi, des centres G, & H, soient menees les lignes GA, GC, HD, HF, qui seront egales par la premiere def. 3. estant les cercles egaux, & la ligne droicte AC estant egale à la ligne droicte DE, les deux triangles AGC, & DHF auront les 3. costez egaux aux 3. costez, chacun au sien, & par la 8. p. 1. l'angle G sera egal à l'angle H, & par la 26. p. 3. ils s'appuyerōt dessus circonferences egales AIC, DKF, & qui de cercles egaux oste icelles circonferences egales, resteront les circonferences ABC, DEF aussi egales.

THEOR. 26. PROP. XXIX.

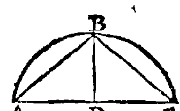
Aux cercles egaux, les circonferences egales soustendent lignes droictes egales.

Es cercles egaux ABC, & DEF (en la precedente figure) desquels les centres sont G & H, soient les circonferences ABC DEF egales soustenduës des lignes droictes AC & DF. Ie dis qu'icelles soustendantes sont egales.

Qu'ainsi ne soit, des centres G, & H soient menees les lignes droictes GA, GC, HD, HF. Or d'autāt que l'on pose les circonferences ABC, DEF egales les angles G & H (qui s'appuyent dessus circonferences egales, seront egaux par la 27. p. 3. pareillement les costez GA, & GC, estans egaux aux costez HD & HF, par la 1. def. 3. la base AC sera egale à la base DF, par la 4. p. 1. ce qui estoit à prouuer.

PROB. 4. PROP. XXX.

Coupper vne circonference en deux egalement.



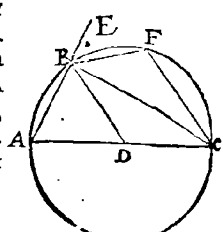
Soit la circonference donnee ABC, laquelle il faut coupper en deux egalement.

Soit menee la ligne droicte AC, laquelle soit couppee en deux egalement au poinct D, duquel poinct il faut mener la perpendiculaire DB. Ie dis que la circonference ABC est coupee en deux egalement en B.

Qu'il ne soit ainsi: il faut mener les lignes AB, & BC, & pour autant que les deux costez AD, & DB du triangle ADB sont egaux aux deux costez CD, & DB du triangle CDB, & les deux angles au poinct D egaux par la 4.p.1. la base AB sera egale à la base BC, & par la 28.p.3. les circõferences AB, & BC seront egales.

THEOR. 27. PROP. XXXI.

Au cercle, l'angle qui est au demy cercle est droit: & celuy qui est en la plus grande section est plus petit qu'vn droict: Mais celuy qui est en la plus petite est plus grand qu'vn droict. Et d'auantage l'angle de la plus grande section est bien plus grand qu'vn droict: mais l'angle de la plus petite section est plus petit qu'vn droict.



Au cercle ABC duquel D est centre & AC diametre, soit constitué l'angle ABC, dans le demy cercle ABC; & en la plus grande section BAC, l'angle BAC; mais en la moindre section BFC, l'angle CFB. Ie dis en premier lieu que l'angle ABC au demy cercle est droict.

Car apres auoir mené la ligne BD & continué AB iusques en E, il est euident que les triãgles ABD, & CBD sont Isosceles, & par la 5.p.1. ils auront les angles sur la base egaux, sçauoir BAD à ABD, & CBD à BCD; & partant les deux ensemble ABD & CBD seront egaux aux deux ensemble BAD & BCD. Mais par la 32.p.1. l'exterieur CBE est egal à iceux deux angles BAD, BCD: & partant les deux au poinct B, faisans le seul ABC, seront aussi egaux a l'exterieur CBE, & par la 10. def.1. ABC & CBE seront tous deux angles droicts.

Ie dis en second lieu que l'angle BAC qui est en la plus grande section CAB est plus petit qu'vn droict : ce qui est aisé à prouuer par la 32.p.1. d'autant que l'angle ABC, estant droict, les deux autres ensemble ne vaudront qu'vn droict; ainsi l angle BAC est plus petit qu'vn angle droict, & ainsi des autres.

Ie dis tiercemẽt que l'angle BFC qui est en la petite section CFB est plus grãd qu'vn droict: car par la 22.p 3. la figure de 4. costés ABFC inscrite au cercle, à les deux angles oposez egaux à deux droicts; sçauoir A & F. Mais nous auons prouué A estre plus petit qu'vn droict, par consequent F sera plus grand.

Ie dis en quatriesme lieu que l'angle de la plus grande section, compris de la ligne droicte BC, & de la periphere BAC est plus grand qu'vn angle droict: ce qui est euident, car l'angle droict ABC n'est que partie d'iceluy angle mixte CBA.

Finablement ie dis que l'angle de la petite section, compris de la ligne droicte BC & circonference BFC, c'est a dire l'angle mixte CBF, est moindre qu'vn droict, car iceluy n'est que partie de l'angle droict CBE.

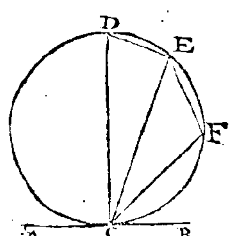
COROLLAIRE.

De ce que dessus est manifeste qu'vn angle d'vn triangle estant egal aux deux autres, est droict.

THEOR. 28. PROP. XXXII.

Si quelque ligne droicte touche le cercle, & de l'attouchement on meine quelque ligne droicte couppant le cercle: les angles qu'elle faict à la touchante sont egaux à ceux qui sont aux sections alternes du cercle.

Soit la ligne droicte AB touchant le cercle CDE, au poinct C, & d'iceluy poinct soit menee CE, couppant le cercle en deux sections inegales. Ie dis que l'angle ECB est egal à tout angle qui peut estre faict en la plus grande section CDE, & que ECA est egal à tout angle qui peut estre fait en la plus petite section CFE.

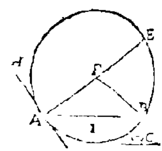


Qu'il ne soit ainsi, apres auoir mené par le centre le diametre CD, soient menees les lignes DE, EF, FC. Maintenant par la 31.p.3. l'angle DEC dans le demy cercle est droict, & par la 32.p.1. les deux autres D, & ECD sont egaux à vn droict c'est à dire à DCB, lequel est droict par la 18. p. 3. desquels si on oste l'angle commun ECD, le demeurant ECB sera egal au demeurant D. Pareillement par la 22.p.3. la figure de 4. costez inscrite au cercle CFED aura les angles opposez F, & D egaux à deux droicts: c'est à dire aux deux ECA, ECB, desquels si on oste choses egales, c'est a sçauoir les angles D, & ECB egaux, les demeurans F, & ECA seront egaux.

Que si la ligne couppant le cercle estoit le diametre d'iceluy, tous les angles tant en l'vn qu'en l'autre demy cercle, seroient droicts par la 31.p.3.

PROBL. 5. PROP. XXXIII.

Dessus vne ligne droicte donnee, descrire la section d'vn cercle capable d'vn angle egal à vn angle rectiligne donné.



Soit la ligne donnee AB, & l'angle rectiligne C, il faut sur icelle ligne descrire vne section de cercle comprenant vn angle egal à l'angle donné C.

Soit construit l'angle BAD egal à l'angle donné C par la 23. p. 1. & du poinct A leué la perpendiculaire AE, sur la ligne AB, & au poinct B, soit faict l'angle ABF egal à l'angle BAE par la 23. p. 1. rencôtrant la perpédiculaire AE au poinct F: donc par la 6.p 1. FA, FB seront egaux: Partant le cercle descrit du centre F & interual FA passera aussi par le poinct B; & apres auoir mené la ligne BE, l'angle BAD qui est egal à l'angle C, sera egal à l'angle E, descrit dans la section AEB; par consequent l'angle E sera egal à l'angle C, ainsi nous auons descrit vne section de cercle sur la ligne donnee AB, capable d'vn angle egal à vn angle donné C.

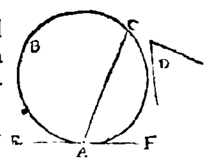
Que si l'angle donné eust esté obtus comme G, il eust fallu construire l'angle BAH egal à iceluy, & chercher le centre F comme dessus, pour descrire le cercle AEBI, & par la 32. p.

5. la plus petite section AIB eust compris vn angle egal à l'angle G.

Que si l'angle donné eust esté droict, ne falloit que descrire vn demy cercle sur la ligne donnee.

PROBL. 6. PROP. XXXIV.

D'vn cercle donné, oster vne section capable d'vn angle egal à vn angle rectiligne donné.



Soit le cercle donné ABC, duquel il faut oster vne section capable d'vn angle rectiligne egal à l'angle donné D.

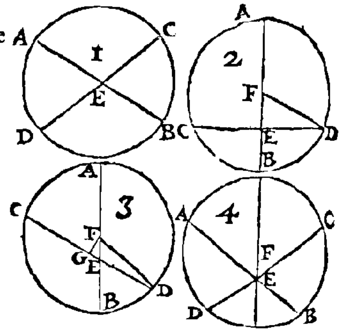
Soit menee la ligne droicte EF touchant le cercle en A : puis par la 23. p. 1. soit faict sur icelle ligne, & au poinct A l'angle rectiligne FAC egal au donné D : faisant que la ligne droicte AC couppe le cercle en deux sections. Ie dis que tout angle qui sera faict en la section ABC, sera egal au donné D. Car il sera egal à l'angle FAC par la 32. p. 3. lequel est egal à D par la construction.

THEO. 29. PROP. XXXV.

Si dans vn cercle deux lignes droictes se couppent l'vne l'autre, le rectangle contenu des deux pieces de l'vne, est egal au rectangle compris des deux pieces de l'autre.

Soient deux lignes droictes AB, CD dans le cercle ACBD, s'entre-coupant en E. Ie dis que le rectangle compris des deux pieces AE, & EB, est egal au rectangle contenu des deux pieces CE & ED.

Or les lignes qui se couppent dans le cercle, ou elles pas-



sent toutes deux par le centre, ou bien l'vne d'icelles seulement, ou ny l'vne ny l'autre. Que si elles passoient toutes deux par le centre, cõme en la premiere figure, les quatre parties seront egales, & par ainsi la proposition est euidente.

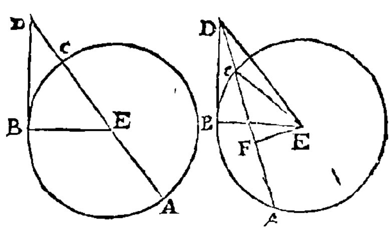
Que si la seule AB, passe par le centre F, & diuise DC en deux egalement comme en la 2. figure; elle la diuisera aussi à droicts angles, par la 3.p.3. Et apres auoir mené FD, il est euident par la 5.p.2. que le rectangle de AE & EB auec le quarré de EF, seront egaux au quarré de FB ou FD, (car la ligne AB est couppee en deux egalement au poinct F, & en deux inegalement en E) & par la 47.p.1. le quarré de FD estant egal aux deux quarrez de FE & ED, en ostant le quarré commun de FE, le demeurant rectangle de AE & EB se trouuera egal au quarré de ED, comme il a esté demonstré à la 14.p.2. ou au rectangle de CE, ED.

Que si ligne AB passant par le centre F (comme en la troisiesme figure (diuise inegalement CD, ne passant point par le centre, il s'ensuiura la mesme chose. Car apres auoir mené la perpendiculaire FG, & la ligne droicte FD : pourautant que AB est couppee en deux egalement en F, & en deux inegalement en E., le rectangle de AE & EB auec le quarré de EF, sera egal au quarré de FB, ou de son egale FD par la 5. pro.2, Mais le quarré de FE est egal aux deux de FG, & GE par la 47 p.1. Pareillemẽt le quarré de FD est egal aux deux de FG & GD par la 47.p.1. Donc aussi le rectangle de AE & EB, auec les deux quarrez de FG & GE sera egal aux deux quarrez de FG, & GD: & partant en ostant le quarré cõmun de FG, le demeurãt quarré de GD sera egal au rectãgle de AE & EB, & quarré de GE. Par mesme discours & par la mesme 5. p.2. le quarré de GD est egal au rectangle de CE & ED, & quarré de GE, en ostant donc le quarré commun de GE, le rectangle de AE & EB se trouuera egal au rectangle de CE, & ED.

Que si ny l'vne ne l'autre des deux lignes ne passe par le centre F, il s'ensuiura le mesme : car si on meine le diametre HI, passant par le poinct commun E de la 4. figure, le rectangle de IE & EH, sera egal au rectangle de CE, & ED, cõme cy dessus a esté dit ; & par mesme raison aussi au rectangle de AE & EB ; & par la 1. com. sent. les deux rectangles de AE & EB, item de CE & ED seront egaux.

THEOR. 30. PROP. XXXVI.

Si dehors le cercle on prend quelque poinct, & d'iceluy vers le cercle tombent deux lignes droictes, l'vne desquelles couppe le cercle & l'autre le touche ; le rectangle contenu de toute la couppante, & de sa partie prise dehors entre le poinct & la circonference conuexe, est egal au quarré de la touchante.



Hors le cercle ABC soit pris le point D, duquel soit menee la ligne DA, couppant le cercle en C & la ligne DB touchant iceluy cercle en B. Ie dis que le rectangle de la toute AD, & de la partie CD prise entre le poinct donné, & le cercle, est egal au quarré de la touchante BD.

Qu'il ne soit ainsi : du centre E au poinct d'attouchement B, soit menee la ligne EB, laquelle par la 18. p. 3. sera perpendiculaire à icelle touchante BD : & pour autant que la ligne AC est couppee en deux egalement au poinct E, & à icelle est adioustée directemẽt CD, le rectangle de la totale AD, & de sa partie CD auec le quarré de CE, ou BE son egale, est egal au quarré de DE par la 6. p. 2. ou aux deux de DB & BE par la 47. p. 1. Que si on oste le quarré commun de BE, le demeurant quarré de BD sera egal au demeurant rectangle de AD, & CD par la 2. com. sent.

Que si la ligne AD ne passoit par le centre du cercle proposé comme en la seconde figure, faudra demõstrer en ceste for-

te: Du centre E soient menees les lignes EB, EC, ED, & l
perpendiculaire EF, laquelle couppera AC en deux egalem
par la 3. p. 3. Et par la 6. p. 2. comme cy dessus, le rectangle d
AD & CD auec le quarré de CF, sera egal au quarré de D
ausquelles choses egales si on adiouste le quarré cõmun de E
le rectangle de AD & DC auec les deux quarrez de CF, & FE
ou le seul de CE, par la 47. p. 1. sera egal aux deux quarrez de D
F, & FE, ou au seul de DE par la 47. p. 1. ou aux deux de DB &
BE par la mesme 47 p 1. Que si on oste les quarrez egaux d
CE, & BE, les demeurans quarré de DB, & le rectangle de A
& CD seront egaux.

COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste que si d'vn poinct pris hors le cercle tirees plusieurs lignes couppant le cercle; les rectangles compris so chacune d'icelles & sa partie exterieure, seront egaux entr'e.. pource que chacun de ces rectãgles sera egal au quarré de la lig touchante.

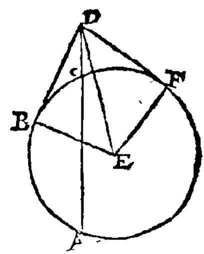
Appert aussi que deux lignes droictes tirees d'vn mesme poinct, e touchant le cercle, sont egales entr'elles: puis que le quarré de cha cune d'icelles sera egal au rectangle de la ligne tiree du mesme poi & couppant le cercle, & de la partie exterieure d'icelle.

Est aussi euident que d'vn mesme poinct pris hors le cercle peut estre seulement tirees deux lignes droictes qui touchent le cercle: C il faudroit qu'elles fussent toutes egales entr'elles; & partant poinct D pourroiët estre menees plus de deux lignes egales de part d'autre de DE, contre la 8. p. 3.

THEOR. 31. PROP. XXXVII.

Si dehors le cercle on prend quelqu poinct, & d'iceluy poinct tombent deux lignes droictes au cercle, l'vne desquelles coup pe le cercle, & l'autre l'atteint: Si le rectangl compris de toute la coupante, & de la part prise entre le poinct & la circonference co uexe, est egal au quarré de celle qui attei celle qui atteint touchera le cercle.

Hors le cercle ABC soit pris le poinct D, & d'iceluy soit menee la ligne droicte DA qui couppe le cercle au poinct C, & la ligne DB qui atteint le cercle au poinct B; & soit le rectangle de la toute AD, & de la partie CD, egal au quarré de DB. Ie dis que DB, touche le cercle en B.



Car du poinct D estant menee la ligne DF touchant le cercle au poinct F, & du centre E les lignes EB, ED, EF. par la 36.p.3. le quarré de DF sera egal au rectangle de AD & CD. Mais par hypothese le quarré de DB, est aussi egal à iceluy rectangle : & partant les quarrez & les lignes DF & DB seront egales. Item EF, & EB sont aussi egales par la def. du cercle, & ED á soy-mesme: ainsi les deux triangles DBE, & DFE, ayans les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien, les angles B, & F serõt egaux par la 8.p. 1. & F estant droict par la 18.p.3. aussi B sera droict; & par le coroll. de la 16. p.3. la ligne DB touchera le cercle.

Fin du troisiesme Element.

ELEMENT QVATRIESME.

DEFINITIONS.

VNe figure rectiligne se dict estre inscrite en vne figure rectiligne, lors qu'vn chacun des angles de la figure inscrite, touche vn chacun costé de la figure en laquelle elle est inscrite.

2 Semblablement aussi la figure se dict estre circonscrite à vne figure, quand vn chascun costé de la circonscrite touche vn chascun angle de l'inscrite.

3 Mais la figure rectiligne se dit estre inscrite au cercle, quand vn chacun angle de la figure inscrite, touche la circonference du cercle.

4 Et la figure rectiligne se dit estre circonscrite au cercle, quand vn chacun des costez de la figure circonscrite, touche la circonference du cercle.

5 Semblablement aussi le cercle se dit estre

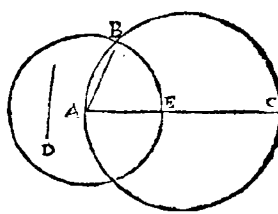
inſcrit en vne figure rectiligne, quand la circonference du cercle touche vn chacun coſté de la figure en laquelle il eſt inſcrit.

6. Mais le cercle ſe dit eſtre circonſcrit à vne figure, quand la circonference du cercle touche vn chacun des angles d'icelle figure á l'entour de laquelle il eſt deſcrit.

7 Vne ligne droicte ſe dit eſtre accõmodee dans le cercle, quand les extremitez d'icelle ſont en la circonference du cercle.

PROBL. 1. PROP. I.

Au cercle donné, accommoder vne ligne droicte egale à vne ligne droicte donnee, laquelle ne ſoit pas plus grande que le diametre du cercle.



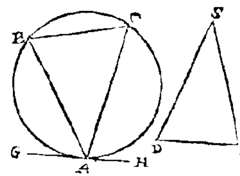
Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut accõmoder vne ligne droicte egale à la ligne droicte donnee D, qui n'eſt pas plus grãde que AC diametre d'iceluy cercle.

Soit du diametre AC couppee AE portion egale à la ligne D. En apres du centre A, & interual AE ſoit deſcrit le cercle BE couppant le cercle donné au poinct B, & ſoit menee la ligne droicte AB. Ie dis que AB eſt egale à D.

Car par la def. du cercle AB & AE ſont egales, & par la cõſtruction icelle AE eſt egale à D, & par la 1. com. ſent. AB & D seront egales.

PROB. 2. PROP. II.

Dans vn cercle donné inſcrire vn triangle equiangle à vn triangle donné.



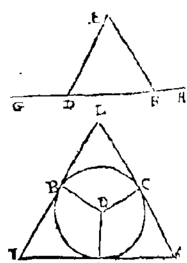
Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut inſcrire vn triangle equiangle au donné DSF.

Soit menee la ligne GH, qui touche le cercle au poinct A, auquel poinct ſoient faits les deux angles GAB egal a l'angle D, & HAC egal à l'angle F par la 23.p.1. Puis ſoit mené BC. Ie dis que le triangle inſcrit ABC eſt equiangle au donné DSF.

Car puis que la ligne AB couppe le cercle en deux ſections, l'angle C en la grande ſection ſera egal à l'angle de l'attouchement GAB; & par conſequent à l'angle D par la 32.p.3 & par la meſme raiſon, la ligne AC coupant le cercle, l'angle B ſe trouuera auſſi egal a l'angle F, & par la 32.p.1. le troiſieſme A ſera auſſi egal à l'angle S; & par conſequent les triangles ſeront equiangles.

PROB. 3. PROP. III.

A l'entour d'vn cercle donné, deſcrire vn triangle equiangle à vn triangle donné.



Soit le cercle donné ABC, à l'entour duquel il faut deſcrire vn triangle equiangle au triangle donné DEF.

Soit prolongé le coſté DE de part & d'autre iuſques en G, & H, & du centre D ſoit menee à l'aduanture la ligne DA, ſur laquelle au poinct D ſoient conſtruits les deux angles ADB egal à EDG, & ADC egal à l'angle HFE par la 23.p.1 & aux trois lignes DA, DB, DC, ſoient menees les trois lignes perpendiculaires IK, IL, KL, leſquelles toucheront le cercle és poincts A, B, C, par le coroll. de la 16.p.3

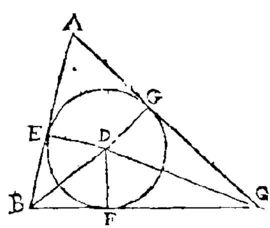
& icelles

& icelles se rencontrant aux trois poincts I, K, L, feront le triangle IKL, lequel ie dis estre le triangle demandé.

Car il appert desia qu'il est circonscrit au cercle, puis que tous les costez d'iceluy le touchẽt és poincts A, B, C. Et d'autant que toute figure de quatre costez a les quatre angles egaux à 4. angles droicts (comme nous auons demonstré à la 32. p. 1.) le trapeze A D B I aura les 4. angles egaux a quatre droicts. Mais les deux A & B estans droicts par la constructiõ, les deux autres D & I seront egaux a 2. droicts c'est a dire egaux aux deux GDE & FDE, qui sont egaux à deux angles droicts par la 13. p. 1. & par construction ADB est egal á GDE: donc l'angle I sera egal à l angle EDF. Par mesme discours l'angle K se trouuera egal à l'angle DFE. Et par la 32. p. 1. le troisiesme L sera egal au troisiesme E: ainsi les triangles circonscrits & donnez seront equiangles.

PROBL. 4. PROP. IIII.

Dans vn triangle donné descrire vn cercle.



Soit le triangle donné ABC, dans lequel il faut descrire vn cercle.

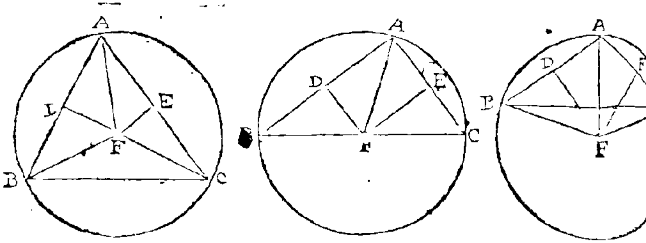
Soient les deux angles B & C couppez en deux egalement par la 9. p. 1. par les deux lignes B D & CD, se rencontrans au poinct D: Item d'iceluy poinct de rencontre D, soient menees les trois perpendiculaires DE, DF, DG, par la 12. p. 1. & du centre D, & interual DE soit descrit le cercle EFG. Ie dis qu'iceluy cercle est inscrit au triangle donné ABC.

Car l'angle D E B estant droit, il sera egal à l'angle DFB, qui est pareillemẽt droict, & le total B estant couppé en deux egalement, les deux D E B & D B E, seront egaux aux deux DFB, & FBD, & le costé DB estant commun, le costé FD sera egal au costé DE par la 26. p. 1. Par mesme discours DG se prouuera egale à DF, & par la 1. com. sent. les trois lignes D E D F, D G, seront egales: ainsi le cercle E F G descrit de l'interualle DE, sera aussi de l'interualle des deux autres: & partãt il passera par les poincts E, F, G, & en iceux touchera les trois costez du triangle par le corol. de la 16.p.3.pource qu'à iceux costez sont perpēdiculaires les demy diametres DE,DF,DG. Donc par la 5.d.4.le cercle EFG sera inscrit au triangle donné : ce qu'il faloit faire.

PROB. 5. PROP. V.

A l'entour d'vn triangle donné, descrire vn cercle.

Soit le triangle donné A B C, à l'entour duquel il faut descrire vn cercle.



Soient couppez egalement les deux costez AB au poinct D & AC au poinct E par la 10.p.1.& par la 11.p.1.d'iceux poincts D, & E soient leuees les perpendiculaires DF, EF, se rencontrans au poinct F, lequel sera ou dans le triangle, ou au costé BC, ou hors le triangle : & apres auoir mené les trois lignes FA,FB.FC, les deux triangles A D F, B D F auront les costez AD & BD egaux, & DF cōmun, & les deux angles au poinct D egaux, pour estre droicts. donc les bases AF, BF seront egales par la 4. p.1. par mesme discours AF,CF f rōt aussi egales,&par la 1.com.sent.les trois lignes FA,FB,FC,seront egales : & partant le cercle descrit de F & interualle F A, passera aussi par les poincts B & C. Nous auons donc descrit vn cercle a l'entour du triangle donné : ce qu'il faloit faire.

COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste que si le centre tombe dans le triangle les trois angles sont aigus : car ils sont tous en vne grande [...] cercle : mais s'il tombe en l'vn des costez, l'angle opposé à iceluy [...]

droict : si finalement il tombe hors le triangle, l'angle opposé sera obtus, car il sera en vne moindre section de cercle.

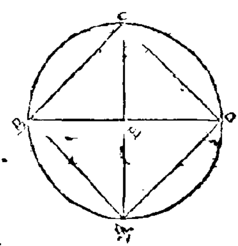
Et au contraire est euident que si le triangle est oxigone, le centre tombera dedans iceluy : mais s'il est rectangle, il tombera au costé opposé à l'angle droict : & finalement s'il est ambligone, le centre tombera dehors.

SCHOLIE.

On peut aussi colliger de ce probl. la maniere de descrire vn cercle par trois poincts donnez, lesquels ne soient en vne ligne droicte : car ayant ioinct iceux poincts par lignes droictes, on aura vn triangle, à l'entour duquel faudra descrire vn cercle comme est enseigné en ce Prob. Cecy se practique aussi plus facilement, comme nous auons enseigné en nostre Geometrie practique Prob. 21.

PROB. 6. PROP. VI.

Dans vn cercle donné, descrire vn quarré.



Soit le cercle donné A B C, dans lequel il faut descrire vn quarré.

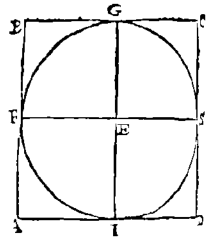
Soient menez les deux diametres AC, & BD se couppans au centre E en angles droicts, & soient menees les quatre lignes AB, BC, DC, & DA. Ie dis que A B C D est quarré inscrit au cercle donné.

Car d'autant que les 4. angles au poinct E sont droicts & egaux par la construction, les quatre arcs ausquels ils insistent serōt egaux par la 26.p.3. & partāt les lignes droictes soustēdās iceux seront aussi egales par la 29.p.3. donc tous les costez du quadrilatere A B C D seront egaux entr'eux. Mais les angles d'iceluy sont aussi droicts par la 31 p. 3. puis qu'ils sont tous au demy cercle : donc le quadrilatere A B C D est quarré inscrit au cercle proposé.

PROB. 7. PROP. VII.

A l'entour d'vn cercle donné, descrire vn quarré.

Soit le cercle donné FGSI, à l'entour duquel il faut descri-re vn quarré.



Soient menez les deux diametres FS & GI se couppans au centre E à droicts angles, & sur les poincts G & I, soient menees les deux lignes BC, AD paralleles a FS: Ité par les deux poincts F & S soient menees les deux lignes AB, DC paralleles à GI par la 31. p. 1. icelles quatre lignes paralleles se rencontrans aux poincts A, B, C, D. Ie dis que le quadrilatere ABCD est le quarré demandé.

Car en premier lieu il est euident par la construction q... est parallelográme, & par la 34. p. 1. les quatre costez sero... egaux, estans egaux a l'vn ou l'autre des deux diametres FS GI, qui sont egaux entr'eux. Pareillement par la mesme ... p. 1. les 4. angles A, B, C, D, sont egaux aux quatre qui sont ... poinct E chacun à son opposé, d'autant que ce sont paral... logrãmes. Mais iceux estans droicts, aussi les quatre A, B, C, D seront chascun droicts; & par consequent le parallelográm... ABCD, aura les 4. costez egaux, & les quatre angles droi... & sera quarré, les costez duquel touchent le cercle és poin... F, G, S, I, par le corol. de la 16. p. 3.

PROBL. 8. PROP. VIII.

Dans vn quarré donné, descrire vn cercl...

Soit le quarré donné ABCD, dans lequel il faut desc... vn cercle.

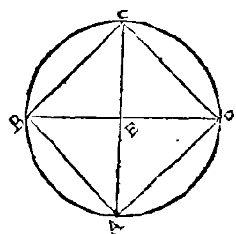
Soient les quatre costez couppez en deux egalement a... poincts F, G, S, I: & apres auoir mené les deux lignes FS & ... se rencontrans au poinct E, d'iceluy poinct E, & interual... si on descrit vn cercle, ce sera le demandé.

Car par la 33 p. 1. IG sera egale & parallele à AB: & FS à B... ainsi le quarré donné sera diuisé en quatre parallelográ... lesquels par la 34. p. 1. auront les costez opposez egaux, ... AF, & IE seront egaux; Item FE, & AI; FB & EG; ID & E... mais toutes icelles moitiez des costez du quarré sont eg...

partant EF, EG, ES, EI, seront aussi egales, & comme elles touchent le quarré aux poincts F, G, S, I, aussi le cercle descrit de l'interual de l'vne d'icelles, touchera le quarré aux mesmes poincts.

PROBL. 9. PROP. IX.

A l'entour d'vn quarré donné, descrire vn cercle.



Soit le quarré donné ABCD, à l'entour duquel il faut descrire vn cercle.

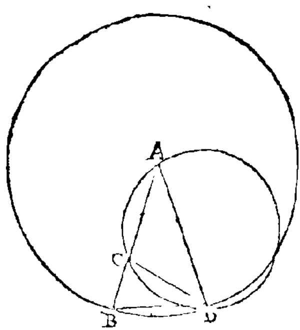
Soient menees les deux diagonales AC & BD, s'entrecouppans au poinct E, & du centre E, & interual EA soit descrit le cercle ADCB. Ie dis qu'il sera le demandé: c'est à dire qu'il touchera les quatre angles du quarré.

Car le costé AB estant egal à AD, le triangle BAD sera Isoscele, & par la 5.p.1. les angles sur la base BD seront egaux & seront chacun demy droicts par la 32.p.1. estant l'angle BAD droict. Par mesme discours nous demonstrerõs que tous les autres angles des poincts A, B, C, D, seront aussi demy droicts: & partant egaux entr'eux; ainsi les deux angles EAD & EDA seront egaux, & par consequent les lignes EA, ED aussi egales par la 6.p.1. & par mesme discours ED sera egal à EC, & EC à EB: & les 4. lignes EA, ED, EC, EB; estans egales, il est aisé de conclurre comme aux precedentes, que le cercle descrit de l'interual de l'vne d'icelles, passera par l'extremité des autres, qui sont les angles du quarré donné.

THEOR. 10. PROP. X.

Descrire vn triangle Isoscele, ayant vn chacun des angles de la base double de l'autre.

Soit la ligne AB, couppee en C, comme enseigne la 11. p 2. & du centre A & interuale AB soit descrit vn cercle dans lequel soit accommodee la ligne DB egale à AC, & apres soit menee la ligne AD. Ie dis que ABD est le triangle Isoscele demandé.



Car apres auoir mené CD, si à l'entour du triãgle ACD, on descrit le cercle ACD comme il a esté enseigné cy-dessus; puisque la ligne AB a esté couppee en C, comme enseigne la 11. p. 2. le rectagle de AB & BC, sera egal au quarré de CA, ou de son egale DB; & par la 37 p. 3. la ligue DB touchera le cercle en D, & l'angle CAD sera egal à l'angle C D B, par la 32. p. 3. & si à iceux on adiouste l'angle commun ADC, les touts seront egaux, sçauoir le total ADB, aux deux CAD & ADC: mais l'angle exterieur DCB, est aussi egal aux deux CAD & ADC, par la 32. p. 1 partant il sera aussi egal à l'angle ADB, ou à son egal ABD par la 5. p. 1. (car le triangle est Isoscele) & par la 6. p. 1. le triangle de DCB sera aussi Isoscele, & le costé DC egal à DB, partant aussi egal à CA; & le triangle DCA estant Isoscele, il aura les deux angles sur la base AD egaux par la 5. p. 1. & l'angle exterieur DCB (qui est egal a tous les deux) sera double du seul A: aussi sera son egal B; & partant aussi son autre egal ADB: voila donc ABD triangle Isoscele ayant les angles de la base doubles du troisiesme.

COROLLAIRE.

Pource [illegible] les trois angles du triãgle ABD, sõt egaux à deux droicts, c'est à [illegible] e à 5. cinq [illegible] ∫mes de deux droi[illegible]ts: Il e[illegible] euident que l'angle A est la 5. [illegible] de d[illegible] droi[illegible] [illegible] chacun des autres B & D, les deux c[illegible]quie[illegible] parties: [illegible] A estre les d[illegible] quintes d'vn droict chacu[illegible] D [illegible] que tous les trois sont egaux à deux droicts, c'est à dire à 10. quintes, d'vn droict.

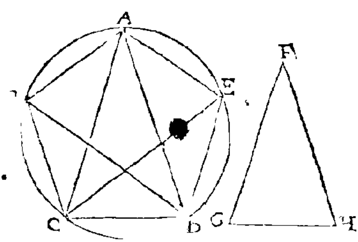
SCHOLIE.

Or par quelle maniere on doit construire vn triangle Isoscelé, ayant vn chacun des angles de la base, non seulement double de l'autre, comme faict icy Euclide, *mais aussi selon quelconque raison donnee, nous l'auons enseigné (apres Pappus & Clauius) en nostre Geometrie practique Prob. 37. & Scholie du 126.*

PROBL. II. PROP. XI.

Dans vn cercle donné, descrire vn pentagone equiangle & equilateral.

Soit le cercle donné ABCDE, dans lequel il faut inscrire le pentagone demandé.



Dans iceluy cercle il faut inscrire le triangle ACD equiangle au triágle FGH, lequel ait esté construict selon le requis de la precedente proposition; & apres auoir mené les deux lignes CE & DB couppant les deux angles ACD & ADC, en deux egalement par la 9. p. 1. soient menees les lignes CB, BA, AE, ED. Ie dis que ABCDE, est le pétagone inscrit equiangle & equilateral.

Car puisque le triangle FGH a esté construit selon le precepte de la precedente proposition, les deux angles sur la base GH seront doubles au troisiesme F, & par consequent le triangle ACD qui est equiangle à iceluy FGH aura aussi chacun des angles de dessus la base CD double du troisiesme A, lesquels estans couppez en deux egalement par les lignes CE & DB, les cinq angles ADB, BDC, CAD, DCE, ACE sont egaux, & par la 26. p. 3. ils auront circonferences egales pour bases, mais les egales circonferences comprennent lignes droictes egales par la 29. p. 3. donc tous les cinq costez estans egaux, le pentagone sera equilateral.

Auſſi ſera-il bien aiſé de prouuer qu'il eſt equiangle par la 27.p.3. d'autant que chacun angle eſt ſouſtenu de circonferences egales, ſçauoir de trois arcs comprenans trois coſtez du pentagone, veu que nous auōs prouué que tous iceux arcs ſont egaux.

COROLLAIRE.

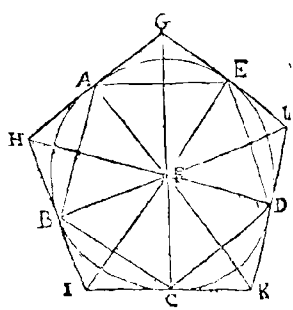
De cecy il s'enſuit que l'angle du pentagone equilateral & equiangle comprend les trois cinquieſmes parties de deux droicts, ou 6. quintes d'vn droict. Car puis que les trois angles BAC, CAD, DAE ſont egaux par la 27.p.3. & CAD eſt le quint de deux droicts ou les deux quintes d'vn droict; Car puiſque les trois angles ſont egaux par la 27.p.3. le total BAE ſera les trois quintes de deux droicts, ou les 6. quintes d'vn droict.

SCHOLIE.

Clauius enſeigne en ce lieu cy deux manieres pour deſcrire vn pentagone equilateral & equiangle ſur vne ligne droicte donnee & terminee; la plus facile deſquelles nous auons enſeignee en noſtre Geometrie praticque Prob.38. c'eſt pourquoy nous n'en ferons icy repetition.

PROB. 12. PROP. XII.

A l'entour d'vn cercle donné, deſcrire vn pentagone equiangle & equilateral.



Soit le cercle donné ABCDE, à l'entour duquel il faut deſcrire le pentagone demandé.

Dans iceluy ſoit deſcrit le pentagone ABCDE par la precedẽte; & apres auoir mené du centre F les cinq lignes FA, FB, FC, FD, FE, ſoient menees ſur icelles les cinq lignes perpendiculaires GH, HI, IK, KL, LG par la 11.p.1. ſe rencontrans aux cinq poinctsG, H, I, K, L. Ie dis que GHIKL est le pentagone demandé equiangle, & equilateral.

Car il est euidemment circonscrit, puis que par le coroll. de la 16. p. 3. les lignes GH, HI, IK, KL, LG touchent le cercle ès poincts A, B, C, D, E: en apres si on meine les cinq lignes FG, FH, FI, FK, FL; d'autant que les angles FAG, FEG sont droicts par la 47. p. 1. le quarré de FG sera egal aux deux quarrez de FA, AG, il sera aussi egal aux deux de FE, EG, & par consequent les deux quarrez de FA, AG, seront egaux aux deux de FE, EG Mais les quarrez de FA, FE sont egaux: (estans descrits sur lignes egales:) Donc ceux de AG & EG serõt aussi egaux, & les lignes AG & EG seront egales: donc les deux costez AF, FG du triangle AGF sont egaux aux deux costez EF, FG du triangle EGF, chacun au sien, & la base AG egale à la base GE: & par la 8. p. 1. les angles AFG, EFG serõt egaux; & AFE double de AFG. Par mesme discours aussi AFG egal à AFB, (car ils ont egales circonferences pour bases) sera double de AFH, & par consequent AFG & AFH seront egaux: Donc les triangles AGF, AHF ont deux angles egaux chacun au sien, & le costé AF commun: & par la 26. p. 1. AG sera egale à AH. Par mesme discours GE & EL se trouuerõt egales: mais AG & EG estans egales, aussi leurs doubles G E & GL seront egales. Par mesme discours on prouuera tous les autres costez estre egaux, & le pentagone sera equilateral.

Qu'il soit aussi equiangle, il est euident: car nous auons monstré que les angles des triangles AGF, EGF sont egaux: sçauoir est les angles AGF, EGF: Item AGF, AHF: & qu'on en pouuoit dire autant des autres: donc les deux angles sous le poinct G, seront egaux aux deux angles sous le poinct H: ainsi des autres, par ainsi le pentagone sera equiangle & equilateral.

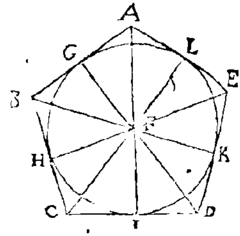
PROB. 13. PROP. XIII.

Dans vn pentagone equiangle & equilateral, descrire vn cercle.

Soit le pentagone equiangle & equilateral ABCDE, dans lequel il faut inscrire vn cercle.

Soient couppez en deux egalement chacun des angles A,

& B, par les lignes AF, & BF par la 9.p.1.se rencontrans au poinct F, & par la 12.p.1.du poinct F soiét menees les perpendiculaires FG, FH, FI, FK, FL, & du centre F, & interual FG soit descrit le cercle GHIKL. Ie dis que c'est le cercle demandé.

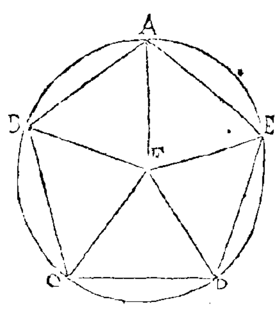


Car puisque par construction les deux angles soubs le poinct A sont egaux, ayant esté le total couppé en deux egalement, & l'angle droict G egal à l'angle droict L, & le costé FA commun aux deux triangles AGF, ALF, par la 26.p.1. les deux autres costez seront egaux, sçauoir AG à AL, & FG a FL : par mesme discours FH, FI, FK, se trouueront egales : & partant le cercle descrit de F & internalle FG passe par les poincts G, H, I, K, L, esquels il touche les costez du pentagone proposé par le coroll. de la 16 p.3. le cercle G H I K L est donc inscrit au pentagone donné.

PROB. 14. PROP. XIIII.

A l'entour d'vn pentagone equiangle & equilateral, descrire vn cercle.

Soit le pentagone equiangle & equilateral ABCDE, à l'entour duquel il faut descrire vn cercle.



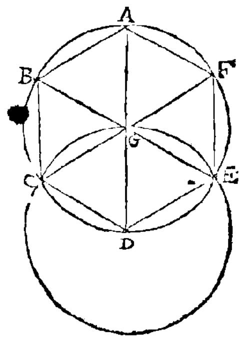
Soient couppez les cinq angles A, B, C, D, E, en deux egalement par la 9. p. 1. auec les lignes AF, BF, CF, DF, EF se rencontrans au poinct F, & d'iceluy poinct F & interual de l'vne d'icelles cinq lignes, soit descrit le cercle AB CDE. Ie dis qu'il sera circonscrit au pentagone.

Car puis que le pentagone est equiangle, & chacun angle d'iceluy coupé en deux egalemẽt, les deux angles sur la base

BA serōt egaux, & par la 6 p.1. les deux costez AF & BF, serōt aussi egaux, & par le mesme discours BF, & FC seront aussi egales, ainsi des autres, & par la 1. commune sentence il est euident qu'icelles cinq lignes seront egales entr'elles, & que partant le cercle descrit de l'interual de l'vne d'icelles passera par les extremitez des autres, qui sont aussi les cinq angles du pentagone donné.

PROB. 15. PROP. XV.

Dans vn cercle donné, inscrire vn hexagone equiangle, & equilateral.



Soit le cercle donné ABCDEF, dans lequel il faut inscrire l'hexagone demandé equiangle & equilateral.

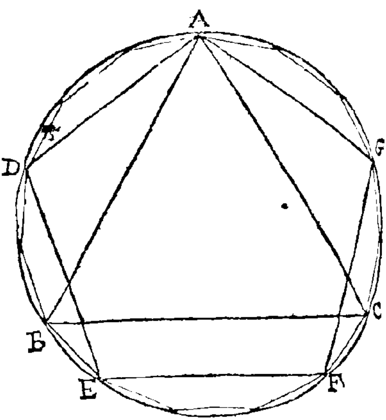
Soit mené le diametre AD, & du centre D & interual DG, soit descrit vn autre cercle GCE coupant le donné aux poincts C & E, desquels poincts soient menees les deux lignes CGF, EGB: Finablement soient menees les lignes AB, BC CD, DE, EF, FA. Ie dis que ABCDEF est l'hexagone demandé, Car il est euident en demonstrāt comme en la 1. p.1. que les deux triangles CDG, DEG sont equilateraux, & par le corol. de la 5. p.1. ils seront aussi chacun equiangles, & par la 32. p.1. vn chacun de leurs angles voudra le tiers de deux angles droicts, & l'angle A G B par la 15. p.1. vaudra le tiers de 2. angles droicts: ainsi par la 13. & 15. p.1. tous les angles au poinct G, seront egaux, valant chacun vn tiers de deux angles droicts, partant les six bases AB, BC, CD, DE, EF, FA, seront egales, & les angles sur icelles aussi egaux par la 4. p.1. Donc l'hexagone sera equilateral, & aussi equiangle. Car puis que tous les angles des six triangles sont egaux, les deux du poinct A seront egaux aux deux du poinct B; & ainsi des autres.

COROLLAIRE.

Par cecy est manifeste que le costé de l'hexagone est egal au demy diametre du cercle : car le costé de l'hexagone DC, est egal au semi-diametre DG par la def. du cercle.

PROB. 16. PROP. XVI.

Dans vn cercle donné, descrire vn quindecagone equiangle & equilateral.



Soit le cercle donné A B C, dans lequel il faut inscrire vn quindecagone equiangle & equilateral.

Soit premierement descrit dans iceluy le triangle equilateral A B C par la 2. p. 4. les 3. costez estás egaux, la circonference sera diuisee en trois egalement par les 26. & 28. p. 3. pareillement, soit en iceluy cercle inscrit le pentagone ADEFG par la 11. p. 4. ayant l'vn des angles sur le poinct A. Ie dis que ayant mené la ligne droicte BE, ce sera le costé du quindecagone demandé.

Car comme il a esté dit, l'arc ADB est le tiers de la circonference, partant doit contenir cinq costez du quindecagone. Item AD costé du pentagone soustient l'arc AD cinquiesme partie de la circonference; partant doit contenir trois cost du quindecagone, & les deux arcs AD, & DE contiendroi six costez du quindecagone. Mais l'arc ADB en contie cinq : donc l'arc BE sera la quinziesme partie de toute circonference; partant la ligne droicte BE sera le costé du quindec. & si par la 1.p. 4. on accommode au cercle encores quatorze lignes egales à icelle BE, sera inscrit au cercle vn quindecagone equilateral; & aussi equiangle, puis que tous ces angles soustendent arcs egaux, c'est a sçauoir composez de 15.arcs egaux.

Pareillement aussi, tout ainsi qu'au pentagone, si par les quinze poincts des diuisions egales du cercle, nous tirons des lignes droictes qui se touchent, se descrira vn quindecagone equilateral & equiangle à l'entour dudit cercle; & d'auantage nous descrirons & circonscrirons vn cercle à vn quindecagone equilateral & equiangle donné, suyuant la mesme methode praticquee au pentagone.

Fin du quatriesme Element.

ELEMENT CINQVIESME.

DEFINITIONS.

PArtie est vne grandeur tiree d'vne plus grande, lors que la plus petite mesure la plus grande.

C'est à dire que lors qu'vne grandeur en mesure vne autre plus grande, elle est dicte partie d'icelle, comme A qui est contenu 3. fois en B, est dit partie d'iceluy. Or entre les Mathematiciens il y a de deux sortes de parties: car il y en a vne qui mesure son tout, comme A, lequel repeté 3 fois constitue son tout B: & l'autre sorte ne mesure pas son tout, mais prise ie ne sçay cobien de fois excede iceluy, ou deffaut au mesme, comme A, lequel estāt pris 3. fois excede C, mais estāt pris seulemēt 2 fois il est excedé par le mesme C: Or la premiere est dite partie aliquote, & l'autre partie aliquāte de ceste là seulement parle icy Euclide, puis que ceste-cy ne mesure son tout, & aussi ne l'appelle-il pas partie au 7. liure, mais parties.

A. B. C.
3. 9. 7.

2. Multiplice est vne grandeur plus grande qu'vne plus petite, quand la plus grāde est mesuree de la plus petite.

C'est à dire que si A est mesuree par B moindre grandeur qu'icelle A, est dite multiplice de B. Ainsi aussi C, qui est mesuré 4. fois par D, est dicte multiplice d'icelle D. A 12. B 4. C 20 D 5.

Or quand deux moindres grandeurs en mesurent egalement deux autres plus grandes, c'est à dire qu'une moindre est contenue autant de fois en une plus grande, qu'une autre moindre en une autre plus grande, ces deux plus grandes-là sont dictes equemultiplices d'icelles moindres. Et le mesme se doit entendre, si plusieurs moindres mesurent egalement plusieurs grandes.

3. Raison, est vne habitude de deux grandeurs de mesme genre, comparees l'vne à l'autre selon la quantité.

C'est à dire que quand deux quantitez de mesme genre, comme deux nombres, deux lignes, deux superficies, deux solides, &c. sont comparez entr'eux selon la quantité, c'est à dire selon que l'une est plus grande que l'autre, ou moindre, ou egale, telle comparaison est appelee raison, & par quelqu'uns proportion: Parquoy on ne peut pas dire qu'il y ait quelque raison d'une ligne à une superficie; ou d'un nombre à une ligne, pource que ny la ligne, & superficie, ny le nombre & la ligne ne sont pas quantitez de mesme genre. Semblablement si on confere une ligne auec une ligne selon la qualité, c'est à dire selon que l'une est blanche, & l'autre noire, ou bien que l'une est chaude, & l'autre froide, &c. encore que l'une & l'autre soient de mesme genre, ceste comparaison n'est pas dicte raison, pource qu'elle n'est pas faicte selon la quantité.

Or jaçoit que la raison se trouue proprement ez seulles quantitez, si est ce toutesfois que toutes autres choses, qui en quelque maniere prennent la nature de la quantité, cōme sont les tēps, les sons, les voix, les lieux, les mouuemēs, les pois, & les puissāces, sont aussi dictes auoir raison si l'habitude d'iceux est considerée selon la quātité, comme quād nous disons un temps estre plus grand qu'un autre temps, ou moindre, ou deux temps estre egaux, &c. telle habitude sera dite raison: pource qu'alors les temps sont considerez ainsi que certaines quantitez.

En toute raison ceste quantité-là, qui est referee à une autre, est dicte par Euclide *& autres Geometres, antecedant de la raison, & celle là à laquelle elle est referee, est dicte consequent d'icelle raison: Comme en la raison de A à B; A est dict antecedant de la raison, &*

B consequent : Que si au contraire B est comparé à A ; B sera appellé antecedant, & A consequent. A. B. 8. 10.

Or ceste raison definie par Euclide est diuisee en raison rationelle, & irrationelle.

La rationelle est celle qui se peut exprimer en nombres : comme la raison d'vne ligne de 10. *pieds à vne autre de* 5. *pieds , laquelle est exhibee par ces nombres* 10. & 5. *Mais l'irrationelle est ceste raison là qui ne se peut exprimer en nombres : comme la raison du diametre d'vn quarré au costé d'iceluy, laquelle ne se peut trouuer ny exprimer en nombre, comme est demonstré par Euclide, en la derniere proposition du* 10. *liure.*

Autres disent que la raison ou proportion rationelle , est celle qui a les deux quantitez commensurables , c'est à dire qui ont vne commune partie aliquote, ou biē qui sont mesurees par vne mesme commune mesure: comme la raison d'vne ligne de 20. *pieds à vne autre de* 8. *pieds: car vne ligne de* 4. *pieds ou de* 2. *est partie aliquote de l'vne & l'autre, & par consequent mesure icelles. Mais la raison ou proportion irrationelle , est celle (disent ils) qui a les deux quantitez incommensurables, c'est à dire qui n'ont nulle partie aliquote, ou desquelles on ne peut trouuer aucune commune mesure. Comme la raison du costé d'vn quarré a sa diagonalle , & de plusieurs autres lignes dont est traicté au* 10. *liure.*

Ceste raison se diuise aussi en raison d'egalité, & d'inegalité : La raison d'egalite est quand deux quantitez egales se comparent entr'elles, comme 10. *à* 10 ; *vne ligne de* 12. *pieds à vne ligne de* 12 *pieds, &c. Mais la raison d'inegalité, est quand deux quantitez inegales se comparent entr'elles, comme* 10. *à* 4. *est raison d'inegalité: telle est aussi celle de* 5. *à* 9; *celle d'vne ligne de* 7 *.pieds à vne autre de* 15 *.pieds, &c.*

Ceste raison d'inegalité est subdiuisee en raison d'inegalité maieure, & d'inegalité mineure. La raison d'inegalité maieure, est quand la plus grande quantité est comparee à la moindre: comme la raison de 8. *à* 5 *.est dicte raison d'inegalité maieure : item la raison d'vne ligne de* 10. *pieds à vne de* 4. *&c. Mais la raison d'inegalité moindre , est quand on compare la moindre quantité à la plus grande comme la raison de* 7 *.pieds à* 9 *s'appelle raison de moindre inegalité item celle d'vne ligne de* 9. *pieds à vne de* 12 *pieds , &c.*

La raison rationelle d'inegalité maieure est diuisee en 5. *genres, sçauoir raison multiple, superparticuliere, superpartiente , multiple superparticuliere, & multiple superpartiente, les trois premieres desquelles sont simples, & les deux dernieres composees d'icelles premieres.*

La raison multiple, est quand la plus grande quantité contient la

moindre

moindre plusieurs fois precisémẽt: & ceste raison contient sous soy diuers gẽres. Car si la plus grãde quantite cõtient la moindre deux fois precisément, elle est dite double : si trois fois, triple : si 4. quadruple : si dix, decuple : &c. Comme la raison de 20. à 4. est dite quintuple, pource que 20 contient 4. cinq fois ; & la raison d'vne ligne de 18. pieds à vne de 3. pieds est dite sextuple, d'autant que 18. contient 3. six fois, & ainsi des autres.

La raison superparticuliere, est quand la plus grande quantité cõtient la moindre vne fois, & en outre vne partie aliquote d'icelle moindre : & ceste raison a diuers genres. Car si ceste partie aliquote est moitié d'icelle moindre quantité; est constituée vne raison sesquialtere, comme la raison de 3. à 2. en laquelle 3. maieure quantité cõtient la moindre 2 vne fois & encore $\frac{1}{2}$ d'icelle ; si elle est tierce partie, sesquitierce : si vne quarte partie, sesquiquarte, &c. commençant tousiours le nom de ladite raison par sesqui, & se terminant par le denominateur de la partie aliquote.

La raison superpartiente, est quand la plus grande quantité contient la moindre vne fois, & en outre plus d'vne partie aliquote d'icelle : & a aussi ceste raison plusieurs especes. Car si la plus grande quantité contient la moindre vne fois, & encore $\frac{2}{3}$ parties d'icelle, est constituée vne raison superbipartiente tierces, comme la raison de 20. à 12 en laquelle le nombre 20. contient 12. vne fois & $\frac{2}{3}$ d'iceluy si $\frac{3}{4}$ sera constitué vne raison supertripartiente quarte, comme la raison d'vne ligne de 63 pieds à vne de 36. & ainsi des autres, le nom d'icelles commençant tousiours par super, & prenant à son milieu le numerateur de la partie aliquote, & le denominateur à la fin d'iceluy.

La raison multiple superparticuliere, est quand la plus grãde quantité contient la moindre plusieurs fois, & encore vne partie aliquote d'icelle : ceste-cy est composee de la premiere & de la deuxiesme ; & tout ainsi que chacune d'icelles cõtient plusieurs genres, aussi fait cellecy. Car si la plus grande quantité contient la moindre 2 fois, & encore $\frac{1}{2}$ d'icelle, ceste raison sera appellee double sesquialtere, comme la raison de 5. à 2. en laquelle 5. contient 2. deux fois & $\frac{1}{2}$ d'iceluy : si $\frac{1}{3}$ d'icelle, comme celle d'vne ligne de 7. pieds à vne de 3. pieds, ceste raison s'appellera double sesquitierce : & la raison de 29. à 7. s'appellera quadruple sesquiseptuple, d'autant qu'en 29. 7. est contenu 4 fois & $\frac{1}{7}$ d'iceluy, & ainsi des autres.

La raison multiple superpatiente, est quãd la plus grãde quãtité contient la moindre plusieurs fois & plusieurs parties aliquotes d'icelle. ceste raison est cõposee de la 1. & 3. & tout ainsi que chacune d'icelles contient sous soy plusieurs genres, aussi fait ceste-cy ; comme si la plus grande quantité contient la moindre 2. fois, & encore $\frac{2}{3}$ parties d'icelle, ceste raison sera appellee double superbipartiente tierce, comme est la raison de 8. à 3. mais si elle la contient 3. fois, & encore $\frac{3}{4}$ d'icelle elle s'appellera triple supertripartiente quarte, comme est la raison de 15. à 4. si elle la contient 4. fois & encore $\frac{6}{7}$ d'icelle, elle sera dite quadruple supersextupartiente septuple, comme est la raison de 34. à 7 & ainsi des autres.

Or tout ce qui a esté dit cy dessus des 5. especes de raison rationelle d'inegalité maieure, se doit aussi entendre aux 5. especes de l'inegalité mineure, excepté qu'il faut tousiours apposer ceste syllabe sub, disant submultiple au lieu de multiple, subsuperparticuliere, au lieu de superparticuliere, & ainsi des autres.

Pour ce que les denominateurs des raisons rationelles cy dessus exposees sont vtils, nous enseignerons icy par quels nombres elles se denomment. Nous appellons denominateur le nombre qui exprime distinctement & apertement l'habitude ou raison d'vne quantité à l'autre : comme le denominateur de la raison quintuple est 5. pource que ce nombre là monstre que la quantité maieure contient 5. fois la mineure. Semblablement le denominateur de la raison sesquiquarte est 1 $\frac{1}{4}$, pource qu'iceluy nombre signifie que la plus grande quantité contient la moindre vne seule fois & $\frac{1}{4}$ d'icelle : & ainsi des autres. C'est pourquoy, comme i'estime Euclide au 6. liure, & autres Mathematiciens, appellent le denominateur de quelconque raison la quantité d'icelle ; car il denomme, comme nous auons dit, combien vne quantité est en vne autre auec laquelle elle est conferee, ainsi qu'il appert par les exemples proposez.

Or de ces choses on peut facilement colliger le denominateur de quelconque raison. Car le denominateur de la raison multiple, est vn nombre entier contenant autant d'vnitez, que la plus grande quantité de la raison contient la moindre. Comme le denominateur de la raison double est 2. de la sextuple, 6. de la centuple, 100. &c. Mais le denominateur de quelconque raison submultiple, est vn nombre rompu, duquel le numerateur est tousiours l'vnité : mais le denominateur est le nombre denommant la raison multiple correspondante. Comme le denominateur de la raison subdouble est $\frac{1}{2}$: de la subsextuple, $\frac{1}{6}$: de la subcentuple $\frac{1}{100}$, &c. Il est donc facile de trouuer le denominateur de quelcõque raison multiple ou submultiple, puis que la prolation monstre le denominateur de la raison, comme il est euident par les exemples proposez.

Le denominateur de quelconque raison superparticuliere est l'vnité auec la partie aliquote que la maieure quantité doit comprendre outre la moindre. Comme le denominateur de la raison sesquialtere est 1 $\frac{1}{2}$: de sesquitierce 1 $\frac{1}{3}$, &c. Il n'est donc pas difficile de trouuer le denominateur d'vne raison superparticuliere, puis que la pr lation d'icelle raison exprime le denominateur, par sa partie aliquote, comme il appert par les exemples proposez. Et le denominateur de quelconque raison subsuperparticuliere est un nombre rompu, duquel le numerateur est moindre que le denominateur seulement d'une unité. Comme le denominateur de la raison subsesquialtere, est $\frac{2}{3}$: subsesquitierce, $\frac{3}{4}$, &c. Donc le denominateur de telle raison sera aisement trouvé : car il n'y a qu'à prendre pour numerateur de la fraction, le denominateur de la partie aliquote ; & pour le denominateur d'icelle fraction, le nombre plus grand de l'unité. Comme le denominateur de la raison sesquiquinte est $\frac{5}{6}$.

Le denominateur de quelque raison superpartiente, est une unité auec les parties aliquotes que la plus grande quantité doit contenir outre la moindre. Comme le denominateur de la raison supertripartiente quartes est $1\frac{3}{4}$: de superquadripartiente quintes, est $1\frac{4}{5}$. Les denominateurs de telles raisons sont faciles à trouuer, pource que la prolation de la raison exhibe le propre denominateur, comme il apert és exemples cy dessus. Mais le denominateur de quelconque raison subsuperpartiente, est vn nõbre rompu, duquel le numerateur est moindre que le denominateur, d'autant d'unitez que la plus grande quantité contient de parties aliquotes par dessus la moindre. Comme le denominateur de la raison subsupertripartiente quarte est $\frac{4}{7}$ de subsuperquadripartiente quinte, est $\frac{5}{9}$, &c. On trouuera donc le denominateur de telles raisons, si pour le numerateur de la fraction on prend le denominateur des parties aliquotes exprimees en la raison, auquel si on adiouste le nombre d'icelles parties, on aura le denominateur d'icelle fraction : comme le denominateur de la raison subsupertripartiente quinte, est $\frac{5}{8}$, pource que le numerateur de ceste fraction est le nombre denommant les quintes, sçauoir 5. auquel est adiousté le nombre 3. des trois parties, afin de faire 8. denominateur de la fraction.

Le denominateur de quelconque raison multiple superparticuliere est le nombre entier, denommant la multiple raison, auec la partie que la plus grande quantité doit contenir outre la moindre. Comme le denominateur de la raison triple sesquiseptiesme est $3\frac{1}{7}$: de quadruple sesquiquinte, $4\frac{1}{5}$ &c. Le denominateur de telle raison est aisé à exhiber, pourceque la prolation de la raison exprime distinctement tant le denominateur de la multiple raison, que la partie aliquote, comme se voit és exemples proposez. Et le denominateur de quelconque raison submultiple superparticuliere est une fraction dõt le numerateur est le nombre denõmant les parties aliquotes obtenue en la raison. Cõme le denomin. de la raison subtriple sesquiquarte est $\frac{4}{13}$: de subquintuple sesquisixiesme, $\frac{9}{46}$ &c. On trouuera donc le denomin. de telle raisõ, si pour le numerateur de la fractiõ on prẽd le denominateur *de la partie aliquote, & iceluy estant multiplié par le denominateur de la raison multiple, si on adiouste 1. au produit, on aura le denominateur de la fraction, comme il est manifeste par les exemples cy-dessus.*

Le denominateur de quelconque raison multiple superpartiente, est nombre entier, denommant la raison multiple obtenue en icelle, auec les parties aliquotes que doit comprendre la plus grande quantité de moindre. Côme le denominateur de la raison triple superbipartiete tierces, est $3\frac{2}{3}$ de quadruple supertripart ète quin tes, $4\frac{3}{5}$ &c. Il est facile à trouuer le denominateur de telles raisons, pour ce que la prolation exprime distinctemêt, tât le denominateur de la raisô multiple, que les parties aliquotes, côme apert ez exêples cy dessus, & le denominateur d'une raison submultiple superpatiente, est une fraction, dont le numerateur, le nôbre denommant les parties aliquotes d'icelle raison: comme le denominateur de la raison subtriple superbipartiente tierces, est $\frac{3}{11}$ de subquadruple subtripartiête quintes, est $\frac{5}{23}$ &c. Le denominateur de telles raisons sera trouué, si pour le numerateur de la fraction on prêd le denominateur des parties aliquotes: lequel estât multiplié par le denominateur de la raison multiple, & au nombre produit adiousté le nombre des parties aliquotes, viendra le denominateur de la fraction, ainsi qu'il appert ez exemples posés cy dessus.

Finablemêt le denominateur de la raison d'egalité est tousiours l'vnité pour ce que les quantitez d'icelle raison sont egales entr'elles; & partant l'vne contient l'autre vne fois precisement.

4. Proportion, est vne similitude de raisons

Tout ainsi que la comparaison de deux quantitez entr'elles est dicte raison, ainsi la comparaison de deux ou plusieurs raisons entr'elles, dicte proportion: comme si la raison de A à B, est semblable à la raison de C à D, l'habitude d'entre ces raisons sera dicte proportion. Or ceste proportion est côtinue ou discrete: la continuë est celle de laquelle les grandeurs entre-moyennes sont prises deux fois, tellement qu'il ne se faict nulle interruption de raisons, ains chaque quantité entre-moyenne est antecedant & consequêt, sçauoir antecedant de la quantité subsequente, mais consequent de la quantité antecedante: comme si on dict, que telle qu'est la raison de A à B, telle est celle de B à C, où la quantité B est antecedant de la quantité C, mais consequent de la quantité A. Mais proportion discrette ou non côtinuë, est celle en laquelle chasque quantité entremoyenne est prinse seulement vne fois, tellement qu'il se faict interruption de raisons, & aucune quantité n'est antecedant & consequent, mais seulement antecedant ou consequent: comme si on dict que la raison de A à B, est comme celle de C à D.

A.	B	C.
8.	12.	18.

5. Les grandeurs sont dictes auoir raison l'vne à l'autre, lesquelles estans multipliées se peuuent exceder l'vne l'autre.

Euclide ayant en la 3. def. appellé raison l'habitude de deux grandeurs de mesme genre, il explique en ceste cy quelle chose requierent deux quantitez de mesme genre, afin qu'elles soient dites auoir raison, sçauoir est que l'vne ou l'autre d'icelles estant multipliée, elle s'augmẽte en sorte, que finablement elle surpasse l'autre : ainsi il y a raison entre le costé d'vn quarré, & le diametre d'iceluy, puis que le coste multiplié par 2. c'est à dire pris deux fois, excede le diametre. Car d'autant que deux costez du quarré & le diametre constituent vn triangle Isoscele, par la 20 p. 1 les deux costez du quarré seront plus grands que le diametre. Ainsi pareillement entre la circonference d'vn cercle & le diametre d'iceluy il y a raison (laquelle toutesfois n'est encore cogneuë) puis que le diametre multiplie par 4. c'est à dire pris 4. fois, excede la circõference: car toute la circonference, comme il est demonstré par Archimede, ne contient que trois fois le diametre, & encore vne particule peu moindre qu'vne septiesme partie d'iceluy diametre. Mais il s'en suit de ceste def. qu'vne ligne finie n'aura raison à vne infinie, encores qu'icelles deux lignes soient de mesme genre de quantité : car en quelque sorte que soit multipliee la ligne finie, elle ne pourra surpasser l'infinie. S'ésuit aussi qu'il n'y a point de raison entre vn angle rectiligne, & vn angle contingent. Car il apert de la 16. p. 3. qu'iceluy angle contingent, ne peut iamais exceder vn angle rectiligne.

6. Les grandeurs sont dictes estre en mesme raison, la premiere à la seconde, comme la troisiesme à la quatriesme, quand les equemultiplices de la premiere & troisiesme, aux equemultiplices de la seconde & quatriesme, en quelque multiplication que ce soit, defaillent ensemble, sont egales, ou excedent, vn chacun à vn chacun, prenant celles-là qui s'entre-respondent.

Ayant esté dit par Euclide que c'est que raison, & quelles grandeurs sont dites auoir raison l'vne à l'autre, maintenant il declare quelle con-

dition requierent les grandeurs pour estre en mesme raison, sçauoir est que les equemultiplices de la premiere & troisiesme grandeur excedent, soient egales, ou defaillent aux equemultiplices de la 2. & 4. en quelque multiplication que soient prises icelles equemultiplices; comme appert en ces 4. quantitez A, B, C, D, où les equemultiplices de A, & C premiere & 3 sont E, & F, & les equemultiplices de B & D. 2. & 4. quantitez sont G, & H; tellement qu'il se voit qu'ayant mult plié A, & C, par vn mesme nombre & B, D par quel onque mesme nõbre; si la multiplice E excede la multiplice G qui luy correspond, aussi la multiplice F excede la multiplice H; si elle est egale, l'autre sera aussi egale; si elle defaut, aussi fera l'autre, & ce en quelque multiplica ion qu'on prenne les equemultiplices: & partant il y a mesme raison de A premiere quantité à B seconde, que de C 3. à D 4.

A.	B.	C.	D.
6.	3.	4.	2.
E,	G.	F.	H.
24.	15.	16.	10.
30.	30.	20.	20.
12.	21	8.	14.

Par la conuerse de ceste def. s'il y a telle raison de la premiere à la seconde, que de la 3 à la 4. il s'ensuit que les equemultiplices de la 1. & 3. excedent, sont egales, ou defaillent aux equemultiplices de la 2. & 4. engendrees de quelque multiplication que ce soit.

Et aussi s'il n'y a mesme raison de la premiere à la 2. que de la 3. à la 4. il s'ensuiura que les equemultiplices de la 1. & 3. n'excederont, ne seront egales, ou ne defaudront aux equemultiplices de la 2. & 4. produites de quelque multiplication que ce soit.

Or ce qui est dit icy de 4. grandeurs se doit aussi entendre de trois, prenant celle du milieu 2. fois, afin qu'il y en ait 4.

7. Les grandeurs qui sont en mesme raison, sont appellees proportionnelles.

Comme si des grandeurs A, B, C, D, il y a mesme raison de A à B, que de C à D, icelles grandeurs sont dites proportionnelles.

A.	B.	C.	D.
12.	8.	6.	4.

Et les grandeurs E, F, G, lesquelles sont en proportion cõtinuë, sont aussi dites continuellement proportionnelles.

E.	F.	G.
12.	6.	3.

8. Quand des equemultiplices, celuy de la premiere grãdeur excede celuy de la secõde, & le multiplice de la troisiesme n'excede celuy de la quatriesme, lors il y aura plus grande raison de la premiere grandeur à la seconde, que de la troisiesme à la quatriesme.

Euclide declare icy quelle condition doiuent auoir 4 grandeurs, afin que la premiere soit dite auoir plus grande raison à la secõde que la tierce à la 4. disant qu'ayant pris les equemultiplices de la premiere & de la 3. & les equemultiplices de la 2. & 4. si la multiplice de la premiere excede la multiplice de la 2. mais la multiplice de la 3 n'excede la multiplice de la 4 il y aura plus grande raison de la premiere à la seconde, que de la 3. à la 4. comme il appert en l'exemple icy posé, auquel sont prinses E. & F, doubles de A & C, 1. & 3. grandeur, mais G & H triples de B & D 2. & 4. grandeur : & pource que E multiplice de A 1. est plus grande que G multiplice de B 2. & F multiplice de C 3. n'est pas plus grande que H multiplice de D 4. la raison de A premiere grandeur à B 2. est dite plus grande que la raison de C 3. à D 4.

A.	B.	C.	D.
6.	2.	4.	3.
E.	G.	F.	H.
12	6	8.	9.

Or afin que quatre grandeurs soient dites estre en mesme raison, il est necessaire que les equemultiplices d'icelles, prises selon quelconques multiplications, excedẽt, soient egales, ou defaillent, comme il a esté exposé en la 6. def. Mais afin que la premiere grandeur soit dicte auoir plus grande raison à la 2. que la 3. à la 4. c'est assez, que des equemultiplices prises selon quelque multiplication, celle de la 1. grandeur excede celle de la 2. & la multiplice de la 3 n'excede celle de la 4. encore que selon plusieurs autres multiplications ces equemultiplices ne soient telles. Parquoy pour conclure en quelque demonstration, qu'il y a plus grande raison d'vne grandeur à vne autre, que d'vne 3. à vne 4. il suffira de demonstrer que selon quelque multiplication, la multiplice de la 1. grandeur excedãt celle de la seconde, la multiplice de la 3. n'excede celle de la 4.

Et cõuertissant ceste 8. def. s'il y a plus grande raison de la premiere grandeur à la 2. que de la 3. à la 4. la multiplice de la 1. excedant celle de la 2. il se peut faire quelque multiplication par laquelle la multiplice de la 3. n'excede celle de la 4.

Que si au contraire d'icelle def. la multiplice de la premiere grandeur ne surmonte celle de la 2. & la multiplice de la 3. excede celle de la 4. la premiere grandeur sera dite auoir moindre raison à la 2. que la 3. à la 4. La conuerse a aussi lieu.

9. Proportion ne peut estre constituee sur moins de trois termes.

Puis qu'il a esté dit en la 3 def que raison est l'habitude de deux quantitez, & que proportion par la 4 def. est vne similitude de deux ou plusieurs raisons : il s'ensuit qu'il n'y peut auoir moins de trois quantitez ou termes en vne proportion, si elle est proportion continue, *mais en faut quatre au moins, si elle est proportion discrette.*

10 Quand trois grandeurs sont proportionnelles, la premiere est dite auoir à la troisiesme la raison doublee de la premiere à la seconde: s'il y en a quatre; la premiere est dite estre à la quatriesme, en raison triplee de la premiere à la seconde: & tousiours d'vn mesme ordre vne plus, iusques à ce que la proportion soit acheuée.

Comme si les grandeurs A, B, C, D, E, sont continuellement proportionelles, la premiere quantité A est dite auoir à la 3. quantité C, la raison doublee de celle de A à la seconde B, pource qu'entre A & C sont deux raisons, qui sont egales à la raison de A à B, sçauoir est la raison de A à B, & celle de B à C, tellement que la raison de A à C prend par ce moyen la raison doublee de A à B, c'est à dire posee deux fois d'ordre. Mais la raison de la premiere grandeur A à la 4. D, est dicte triplee de celle de A à B, pource qu'entre A & D se trouuent trois raisons, lesquelles sont egales à celle de A à B: c'est à sçauoir la raison de A à B, celle de B à C, & celle de C à D: & partant la raison de A à D enclost par ce moyen la raison triplee de A à B, c'est à dire posee trois fois d'ordre. Et ainsi pareillement la raison de A à E, est dicte quadruplee de la raison de A à B, pource qu'entre A & E sont encloses 4. raisons qui sont egales à celle de A à B, &c.

A.	B.	C.	D.	E.
16.	24.	36.	54.	81.

Dounot a retranché de ceste def. ces mots: Et tousiours d'vn mesme ordre vne plus, iusques à ce que la proportion soit finie.

11. Les grandeurs sont dites homologues, ou de semblables raisons, les antecedans aux antecedans, & les consequens aux consequens.

C'est à dire que si plusieurs quantitez sont proportionnelles, comme A, B, C, D, sçauoir que comme A est à B, ainsi C est à D, les quantitez A, & C, antecedantes de chasque raison, seront dictes Homologues, ou de semblable raison, com-

A.	B.	C.	D.
4.	2.	6.	3.

me auſſi les quantitez conſequentes B & D. Ainſi pareillement ſi les quantitez E, F, G, ſont proportionnelles aux quantitez H, I, K: les termes E, & H, ſeront dicts Homologues ou de ſemblable raiſon: comme auſſi le terme F ſera dict Homologue au terme I: & auſſi G à K: ainſi les coſtez des figures eſtans comparez entr'eux, on entend quels coſtez doiuent eſtre antecedans des raiſons, & quels conſequens.

E.	F.	G.
2.	4.	8.
H.	I.	K.
3.	6.	12.

12. Raiſon alterne, eſt prendre l'antecedant comparé à l'antecedant, & le conſequent au conſequent.

Euclide explique en ceſte def. & ès ſuiuantes, aucuns moyens d'argumenter ès proportions, deſquels l'vſage eſt fort frequent en la Geometrie. Il dict donc icy que la raiſon alterne ou permutée, eſt quand de 4. grandeurs proportionnelles propoſees, comme A, B, C, D, ſçauoir que comme A eſt à B, ainſi C eſt à D; on vient à conclure qu'il y a meſme raiſon de l'antecedant A à l'antecedant C, que du conſequent B au conſequent D: & ceſte maniere d'argumenter ſe couche ordinairement ainſi: comme A eſt à B, ainſi C eſt à D: donc en permutant, comme A ſera à C, ainſi B à D. Or il eſt neceſſaire qu'en ceſte maniere d'argumenter, les 4. grandeurs ſoient de meſme genre. Car le nombre A eſtant au nombre B, comme vne ſuperficie E eſt à vne ſuperficie F; de vouloir inferer comme a faict Dounot en pluſieurs endroicts, & notamment es 17. p. 5. 29. 48 & 85. p. 10. qu'en permutant le nombre A eſt à la ſuperficie E, comme le nõbre B à la ſuperficie F, c'eſt ſe mocquer; puis qu'il n'y a nulle raiſon du nombre à la ſuperficie, comme il appert par les 3. & 5 def. Ceſte maniere d'argumenter eſt demonſtrée en la 16. p. de ce liure.

A	B.	C.	D.
4.	6.	2.	3.

13. Raiſon inuerſe ou tranſpoſee, eſt lors qu'on prend le conſequent comme antecedãt pour le comparer à l'antecedant, comme ſi c'eſtoit le conſequent.

Comme ſi A eſt à B, ainſi que C à D, nous infererons que par raiſon inuerſe, comme B eſt à A, ainſi D eſt à C, c'eſt à dire les conſequens aux antecedãs. En ceſte ſorte d'argumenter les autheurs parlẽt preſque ainſi: comme A eſt à B, ainſi C eſt à D: donc en changeant, ou au contraire, B ſera à A, comme D à C.

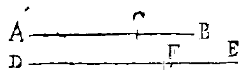
A	B.	C.	D.
4.	6.	2.	3.

Ceste maniere d'argumenter sera demonstrée au coroll. de la 4. p. de ce liure.

Ceste def. a esté tellement traduicte par Dounot, que le sens d'Euclide n'y peut estre recogneu.

14 Composition de raison, est lors qu'on prend l'antecedēt auec le consequent, comme vne seulle chose pour le comparer au mesme consequent.

Comme si AC est à CB, comme DF à FE: & on vient à conclure que la toute AB est à CB, comme la toute DE à FE; c'est à dire que la composée de l'antecedant AC & du consequent CB, est au mesme consequent CB, comme la composée de l'antecedant DF & du consequent FE est a iceluy consequent FE: ceste maniere d'argumenter sera dicte composition de raison: & se prononce ainsi: comme AC est à CB, ainsi DF à FE: donc en composant AB sera a CB, comme DE à FE: laquelle sorte d'argumentation sera demonstré en la 18. p. de ce liure.



A ce moyen d'argumenter, par la composition de raison, en peuuent estre adioustez deux autres: le premier peut estre dict composition conuerse de raison: sçauoir quand on prend l'antecedent & consequent comme vn seul, pour le comparer à l'antecedant. Comme si AC est à CB, comme DF à FE; & nous inferons, donc comme AB composee de l'antecedant, & du consequent, est à l'antecedant AC, ainsi DE composée de l'antecedant & du consequent est a l'antecedant DF: laquelle argumentation nous demonstrerons estre valide sur la 18 p. 5.

L'autre moyen d'argumenter peut estre dict composition contraire de raison; c'est à sçauoir quand l'antecedant est comparé à l'antecedant & consequent comme vn seul. Comme si AC est a CB, ainsi que DF à FE, & nous inferons par composition contraire de raison: donc comme AC l'antecedant sera à la toute AB composee de l'antecedant & du consequent, ainsi DF antecedant sera à la toute DE composée de l'antecedant & du consequent. Nous demonstrerons sur la 18. p de ce liure que ceste forme d'argumentation est vallable.

15. Diuision de raison est lors qu'on prend l'excez par lequel l'antecedant surpasse le consequent, pour le comparer à iceluy mesme consequent.

Comme si on dit qu'il y a telle raison de AB à CB, si ie verse la p...

cedente figure) que de DE à FE: donc aussi AC excez par lequel l'antecedant surpasse le consequent, sera à CB consequent, comme DF excez par lequel l'antecedant excede le consequent, sera à FE consequẽt. Or les autheurs concluent ordinairement auec ceste raison ainsi: comme AB est à CB, ainsi DE est à FE: donc en diuisant AC sera aussi à CB, comme DF à FE. Ce qui sera demonstré en la 17 p. de ce liure.

A ce moyen d'argumenter en peuuent aussi estre adioustez deux autres: le premier peut estre appellé diuision conuerse de raison, c'est à sçauoir quand le consequent est compare à l'excez par lequel l'antecedant surpasse le consequent. Comme si AB est à CB, comme DE, à FE, & nous inferons: donc aussi par diuision conuerse de raison, comme CB consequent sera à AC excez, par lequel l'antecedant surmonte le consequent, ainsi FE consequent sera a DF excez par lequel l'antecedant surpasse le consequent: laquelle maniere d'argumentation nous demonstrerons pouuoir estre sur la 17. p. Il est manifeste qu'en l'vne & l'autre d'icelles argumentations, par diuision de raison, l'antecedant doit estre plus grand que le consequent.

L'autre moyen d'argumenter peut estre dit diuision contraire de raison, c'est à sçauoir quand l'antecedãt est conferé à l'excez, par lequel le consequent excede l'antecedãt. Comme quand on dit, AC estre à AB, cõme DF à DE: Donc aussi par diuision contraire de raison AC antecedant sera à CB, excez par lequel le consequent surmonte l'antecedant, comme DF antecedant sera à FE, excez par lequel le consequent surpasse l'antecedant: lequel moyen d'argumenter nous demonstrerons sur la 17. p. de ce liure.

Il est euident qu'en ceste diuision contraire de raison, le consequent doit estre plus grand que l'antecedant.

16. Conuersion de raison est comparer l'antecedant à l'excez, par lequel l'antecedant surpasse le consequent.

Comme si on dit, que comme AB est à CB, ainsi DE à FE: & on vient à conclure que AB antecedãt sera aussi à AC, soit veuë la figure de la 14. def. excez, par lequel il surmonte le consequent, comme DE antecedant sera à DF, excez par lequel l'antecedãt excede le consequent, cela sera dit conuersion de raison. En ceste sorte d'argumenter les autheurs parlent ordinairement ainsi: comme AB est à CB ainsi DE est à FE: Donc par conuersion de raison AB sera à AC, comme DE à DF: laquelle sorte d'argumenter sera demonstree au coroll. de la 19. p. de ce liure. Ceste 16. def. a esté retranchee par Dounot.

17. Raison egalle est lors qu'il y a plusieurs grandeurs d'vn costé, & autant de l'autre en

multitude, priſe de deux en deux en meſme raiſon, & que la premiere des premieres grandeurs, eſt à la derniere des meſmes, comme la premiere des ſecondes eſt à la derniere des meſmes.

Autrement c'eſt lors qu'on prend les extremes par la ſouſtraction des moyennes.

Comme s'il y a d'vn coſté quatre quantitez, A, B, C, D; & autant d'vn autre E, F, G, H, leſquelles ſoient priſes deux à deux en meſme raiſon, c'eſt à dire que A ſoit à B comme E à F; & B à C, comme F à G; & C à D comme G à H; ſi on infere que cõme A eſt à D premiere & derniere des premieres grãdeurs, ainſi E à G premiere & derniere des ſecondes. Ceſte maniere d'argumentation eſt dite raiſon egale, ou bien d'egalité. Et d'autant que ceſte maniere d'argumenter ſe prend ordinairemẽt en deux ſortes ſçauoir eſt, quãd les grãdeurs qui ſont en meſme raiſon ſont priſes d'ordre, & quãd l'ordre eſt peruerty. Euclid. explique és deux def. ſuiuantes que c'eſt que proportion ordonnee & perturbee.

A	B	C	D
2	4	8	16
E	F	G	H
3	6	12	24

18. Proportion ordonnee eſt quand l'antecedent eſt au conſequent comme l'antecedãt eſt au conſequent de l'autre: & ainſi que l'vn des conſequens eſt à quelque autre, l'autre conſequent ſoit auſſi à quelque autre.

Cecy eſt aiſé à entendre par l'exemple de la def. precedente, où nous auõs poſé A eſtre à B cõme E à F, & B à C, cõme F à G; & C à D, comme G à H. Car ainſi les termes des 4. premieres quantitez ſont pris d'vn meſme ordre, que ceux des quatre dernieres; & partant ceſte proportion eſt dicte ordonnee. Or que le moyen d'argumenter par raiſon d'egalité, la proportion d'ordre eſtant obſeruee, ſoit bon, il ſera demonſtré en la 22. p. de ce liure.

19. Proportion troublee eſt quand trois

grandeurs estans d'vn costé, & autant d'vn autre, la premiere est à la seconde, comme la cinquiesme à la sixiesme,& comme la seconde à la troisieme;ainsi la quatriesme à la cinquiesme.

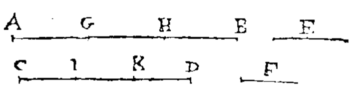
Comme si A est à B, ainsi que E est à F; & comme B est à C, ainsi D a E: ceste proportion sera dicte troublee ou perturbee d'autant qu'vn mesme ordre n'est pas gardé en la comparaison des premieres grandeurs entr'elles, qu'és secondes aussi entr'elles. Car es premieres quantitez, la premiere est comparee à la seconde, & ceste cy à la 3 mais és secondes quantitez la 2. est comparee à la 3 & la premiere à la 2. Or que le moyen d'argumenter par raison egale, la proportion troublee estant gardee, soit bon, il sera demonstré en la 23 p. de ce liure.

A.	B.	C.
12.	8.	4.
D	E	F.
12.	6.	4.

THEOR. 1. PROP. I.

S'il y a tãt de grandeurs qu'on voudra equemultiplices d'autant d'autres grandeurs, chacune à la sienne, comme l'vne sera multiplice de l'vne, ainsi les toutes seront multiplices des toutes.

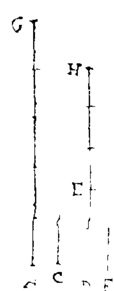
Soient tant de grandeurs qu'on voudra AB & CD, equemultiplices d'autant d'autres grandeurs E& F. Ie dis que les grandeurs AB & CD ensemble, seront autant multiplices de E& F ensemble, comme AB est de E ou CD de F.



Car puis que AB est multiplice de E E mesurera AB certain nombre de fois par la 2.def. 5. qu'elle la mesure donc trois fois,& soit icelle AB couppee en trois parties egales AG GH, HB, qui seront chacune egale a E, Le mesme se peut dire de la grandeur CD, laquelle on couppera aussi en trois parties egales CI, IK, KD, estant chacune d'icelles egale à F: mais qui à choses egales, sçauoir a AG,& E adiouste choſes egales, ſçauoir CI, & F, les toutes AG, CI enſemble, ſeront egales aux toutes E &, F enſemble. Par meſme raiſon C H & IK enſemble, ſeront egales a icelles E & F enſemble pareillement HB & KD, aux meſmes E & F. Autant donc qu'il y a de grandeurs en AB, egales a E; & en CD egales a F; autant y en a-il en AB & CD priſes enſemble, qui ſont egales à E, & F priſes enſemble : Parquoy les deux AB & CD enſemble, ſeront triples des deux enſemble E & F, comme la ſeule AB eſt triple de la ſeule E, ou la ſeule CD de la ſeule F ce qu'il faloit demonſtrer.

THEOR. 2. PROP. II.

Si la premiere eſt autant multiplice de la ſeconde, que la troiſieſme de la quarte ; & la cinquieſme autant multiplice de la ſeconde, que la ſixieſme, de la quarte ; la compoſee de la premiere & cinquieſme ſera autant multiplice de la ſeconde, comme la compoſee de la troiſieſme & ſixieſme, de la quarte.

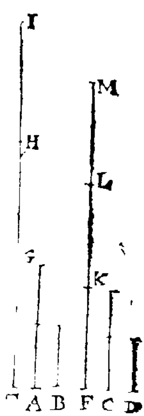


Soit la premiere grandeur AB, autant multiplice de la ſeconde C, comme la 3. DE l'eſt de la 4. F. & ſoit la 5. B G autant multiplice de la 2. C, comme la 6. EH, de la 4 F: Ie dis que la 1. & 5. enſemble AB, & BG, ſeront autant multiplices de la 2. C. comme la 3. & 6. DE & EH enſemble, ſeront de la 4 F.

Car puis que AB eſt autant multiplice de C, cõme DE de F, il y a en AB autant de grandeurs egales à C, qu'il y en a en DE d'egales a F. Par meſme raiſon, il y aura auſſi en B G autant de grandeurs egales a C, comme il y en a en EH d'egales a F. Il y aura donc en AG autant de grandeurs egales a C, qu'il y en a en D H d'egales à F: parquoy AG compoſee de la premiere & eſt autant multiplice de la ſeconde C, comme DH compoſee de la 3 & 6. l'eſt de la 4. F. ce qu'il faloit demonſtrer.

THEOR. 3. PROP. III.

Si la premiere est autant multiplice de la seconde, comme la tierce de la quarte; & on prend des equemultiplices de la premiere, & troisiesme: la multiplice de la premiere sera aussi autant multiplice de la seconde, que la multiplice de la 3. le sera de la quarte.



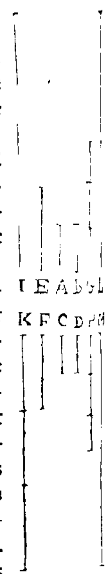
Soit A autant multiplice de B, comme C est de D, & de la 1. & 3. A & C, soient prises les equemultiplices E & F. Ie dis que E sera autant multiplice de B, que F. de D.

Car puis que E est autant multiplice de A, que F l'est de C; E contiendra autant de parties egales a A, comme F de parties egales à C. Soit donc E diuisee en EG, GH, & HI, chacune egale à A: Item F diuisee en FK, KL & LM chacune egale à C; & d'autant que EG & FK sont egales à A & C, lesquelles sont equemultiplices de B & D par l'hypothese; aussi EG & FK seront equemultiplices des mesmes B & D. Par mesme raison GH & KL, item HI & LM seront equemultiplices d'icelles B & D. Veu donc que EG premiere grandeur est autant multiplice de la seconde B, que FK 3. l'est de D. 4. item GH 5. autant multiplice de la mesme seconde B, que KL 6. de la 4. D; aussi EH composee de la 1. & 5. sera autant multiplice de la 2. B, que FL composee de la 3 & 6 l'est de la 4. D par la precedente prop. Derechef puis que EH premiere grãdeur est autãt multiplice de la seconde B. que FL 3 l'est de D 4. & HI 5. est aussi autant multiplice de la seconde B, que LM 6. l'est de la 4. D; EI composee de la 1. & 5. sera aussi autant multiplice de la 2. B, que FM composee de la 3 & 6. l'est de D 4. par la 2. p. 5. ce qu'il faloit demonstrer.

THEOR. 4. PROP. IIII.

Si la premiere est à la seconde, en mesme raiſon que la tierce à la quarte : auſſi les eque multiplices de la premiere & tierce auront meſme raiſon aux equemultiplices de la ſecõde & quarte, en quelque multiplication que ce ſoit, ſi elles ſont priſes ainſi qu elles s'entre-reſpondent.

Soit A à B en meſme raiſon que C à D, & ſoient priſes E & F equemultiplices de A premiere & C 3. Item G & H equemultiplices de B 2. & D. 4. ſelon quelque multiplication que ce ſoit. Ie dis qu'il y a meſme raiſon de E à G, que de F à H.



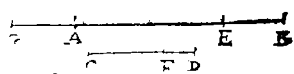
Car ſi on prend I & K equemultiplices de E & F; pareillement L & M equemultiplices de G & H; d'autant que E premiere eſt autant multiplice de A 2. que F 3. l'eſt de C 4. & I, K ſont prinſes equemultiplices d'icelles E, F premiere & tierce, auſſi par la 3. p 5. I, & K ſeront equemultiplices de A, & C ſeconde & quarte. Par meſme raiſon L & M ſeront auſſi equemultiplices de B & D : & puis que A eſt à B comme C à D; & d'icelles A & C 1. & 3. ont eſté demõſtrées I & K equemultiplices, mais de B & D 2. & 3. autres equemultiplices L & M, par la conuerſe de la 6. def. 5. ſi I deffaut eſt egal, ou plus grãde que L, auſſi K deffaudra, ſera egal, ou plus grande que M, ſelon quelconques multiplications qu'icelles equemultiplices ſoient priſes. Et pour autant que I & K, ſont equemultiplices de E & F; pareillement L & M de G & H, par la meſme def. 5. il y aura meſme raiſon de E a G, comme de F, à H, ce qu'il faloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

Par cecy eſt manifeſte la preuue de la raiſon inuerſe, qu'Euc. a expliquee en la 13. def. de ce liure, ſçauoir eſt, que ſi 4. grand. ſont proportionnelles, elles le ſeront auſſi eſtans priſes à rebours, *à dire que E estant à G comme F à H, aussi en changeant G sera à E comme H à F. Car puis qu'il a esté demonstré que si I defaut, est egale, ou plus grande que L, aussi K defaudra, sera egale, ou plus grande que M; selon quelconque multiplic. Il apert aussi que si L defaut, est egale, ou plus grande que I, aussi M defaudra, sera egale ou plus grande que K, selon quelconque multiplication: Et partant par la 6. def. il y aura mesme raison de G à E que de H à F.*

THEOR. 5. PROP. V.

Si vne grandeur est autant multiplice d'vne grandeur, que la retranchee de la retranchee; aussi le reste sera autant multiplice du reste, que la toute de la toute.



Soit la toute AB, autant multiplice de la toute CD, comme la retranchee AE, de la retranchee CF: Ie dis que le reste EB, sera autant multiplice du reste FD, que la toute AB est de la toute CD.

Car A G estant faicte autant multiplice de F D, comme AE est de CF, ou comme la toute AB l'est de la toute CD: d'autant que AE, AG sont equemultiplices de CF, FD: par la 1. p. 5. la toute GE, sera autant multiplice de la toute C D, comme AE, de CF: Mais aussi AB, estoit autât multiplice de CD côme AE de CF: donc GE: AB, sont equemultiplices de CD; & partant egales entr' elles par la 6. com. sent. Parquoy en ostât ce qui est de cômun AE, demeureront egales GA, EB; & partant equemultiplices de FD, puis que GA a esté posée multiplice d'icelle FD, & autant comme AB de C D: donc aussi le reste EB sera autant multiplice du reste FD, que la toute AB l'est de la toute CD, ce qu'il faloit demonstrer.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux grandeurs sont equemultiplices de deux autres grâdeurs, & d'icelles on retranche des equemultiplices : ou les restes seront egaux aux mesmes, ou equemultiplices d'icelles.

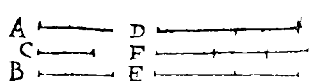
Soient les grandeurs AB, CD, equemultiplices des grandeurs E, F ; & les retranchées AG, CH aussi equemultiplices des mesmes E, F. Ie dis que les restes GB, HD seront ou egales aux mesmes E, F, ou equemultiplices d'icelles.

Car d'autant que AB & CD, sont equemultiplices de E & F en AB il y aura autant de grãdeurs egales à E comme en CD de grandeurs egales a F. Pareillement d'autant que la retranchée AG est autant multiplice de E, que la retranchée CH l'est de F ; AG contiẽdra autant de grandeurs egales a E, que CH de grandeurs egales a F, par la 1. & 2. def. 5. Si donc d'egales multitudes de grandeurs AB, & CD, on oste egales multitudes de grandeurs AG, CH, les multitudes demeurante GB, HD seront egales· c'est a dire que GB contiendra autant de fois E, comme HD contiendra F, ou bien si GB est egale a E, aussi HD sera egale a F, & si BG est multiplice de E, aussi HD sera autant multiplice de F.

THEOR. 7. PROP. VII.

Les grandeurs egales ont mesme raison à vne mesme ; & ceste-cy aura mesme raison aux grandeurs egales.

Soient deux grandeurs egales A & B, & vne autre quelle qu'elle soit C. Ie dis que A & B ont mesme raison l'vne que l'autre a C ; & que C aura mesme raison à A que a B



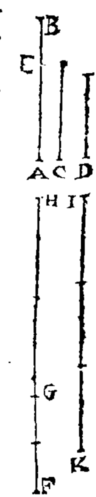
Qu'il ne soit ainsi ; soient pris D & E equemultiplices de A & B, soit aussi pris F quelconque multiplice de C ; donc pour autant que D est autant multiplice de A, que E est multiplice de B, & que A & B sont egales ; aussi D, & E seront egales

les par la 6. com. sent Si donc D est plus grande, egale, ou plus petite que F, aussi E sera plus grande, egale, ou plus petite que la mesme F, & par la 6. def. 5. Il y aura telle raison de A à C, comme de B à la mesme C.

Quant à l'autre partie, elle se prouue tout de mesme par la 6. def. 5. en prenant les mesmes equemultiplices, & monstrant l'excez, &c. ou bien plus facilement par la raison inuerse. Car puis qu'il a esté demonstré que A est à C, comme B à C, en changeant C sera à A, comme C à B par le corol. de la 4. p. 5.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Des grandeurs inegales, la plus grande a plus grande raison à vne mesme, que la plus petite; & vne mesme a plus grande raison à la plus petite, qu'à la plus grande.



Soient deux grandeurs inegales AB, & C, desquelles AB est la plus grande, & vne troisiesme quelle qu'elle soit D. Ie dis que AB a plus grande raison à la troisiesme D, que non pas C, item, que D a plus grande raison à C, qu'à AB.

Qu'il ne soit ainsi; soit entenduë AB premiere grandeur, D 2. C 3. D. 4. & d'autant que AB est plus grande que C, soit retranchée AE egale a icelle C, & soient trouuées les equemultiplices, à sçauoir FG de BE, & GH de EA, en sorte que FG, & GH soient plus grandes chacune que D: & puis que les deux F G, GH, sont equemultiplices des deux BE, EA, par la 1. p. 5. HF sera autant multiplice de AB, comme HG de AE, ou de C son egale: Maintenant soit prise IK aussi multiplice de D, en sorte qu'elle soit plus petite que HF, mais plus grande que H G (ce qui est facile, d'autant que D est plus petit que ny FG, ny GH; si bien qu'il faut seulement adiouster tant de fois la grandeur D, iusques à ce que l'on ait ce que l'on cherche) d'autant que FH, GH sont equemultiplices de AB premiere, & C troisiesme, & IK est prise pour l'equemultiplice, tant de D seconde, que

D quatrieſme, il eſt euident que HF multiplice de AB pre-miere, eſtant plus grande que IK multiplice de D 2. HG multiplice de C 3. n'eſt pas plus grande que IK multiplice de D 4. & partant par la huictieſme def. 5. il y aura plus grande raiſon de AB à D, que de C à la meſme D.

Quant a la ſeconde partie, dautant que IK multiplice de la premiere D (car il faut maintenant poſer D premiere & troiſieſme, & C ſeconde, & AB quatrieſme) eſt plus grande que HG multiplice de la ſeconde C, & IK multiplice de la troiſieſme D, eſt moindre que FH multiplice de AB quatrieſme; Il y aura plus grande raiſon de D à C, que de D à AB par la 8. def. 5.

THEOR. 9. PROP. IX.

Les grandeurs qui ont meſme raiſon à vne meſme, ſont egales entr'elles: & celles là auſſi ſont egales, auſquelles vne meſme grandeur a meſme raiſon.

Soient premierement deux grandeurs A & B, leſquelles ont meſme raiſon l'vne que l'autre à la troiſieſme C. Ie dis qu'elles ſont egales entr'elles.

Car ſi elles n'eſtoient egales, il faudroit que l'vne ou l'autre fuſt plus grande: & par la 8. p. 5. icelle plus grande auroit plus grande raiſon à C, que la plus petite: ce qui eſt contre l'ypotheſe: donc A & B ne ſont pas inegales, mais egales.

Soient maintenant A & B, à chacune deſquelles C a vne meſme raiſon. Ie dis qu'icelles A & B ſont auſſi egales entr'elles. Car autrement il faudroit que l'vne fuſt plus petite que l'autre: & par la 8. p. 5. à icelle plus petite, C auroit plus grande raiſon qu'à la plus grande: ce qui eſt contre l'hypotheſe: A & B ne ſont donc pas inegales, mais egales.

THEOR. 10. PROP. X.

Des grandeurs qui ont raiſon à vne meſme grandeur, celle qui a plus grande raiſon eſt la plus grande: & celle à laquelle la meſme a plus grande raison, est la plus petite.

Soient trois grandeurs A,B,C,& la raison de A à C soit plus grande que de B à la mesme C. Ie dis que A sera plus grãde que B: itẽ si C a plus grande raison à B que non pas a A. Ie dis que B sera plus petite que A.

Autrement pour la premiere partie: si A n'estoit plus grãde que B, elle seroit egale, ou plus petite; ce qui est impossible: car si elles estoient egales, elles auroient mesme raison l'vne que l'autre à C, par la 7. p. 5. ce qui seroit contre la supposition; si aussi elle estoit plus petite, elle auroit plus petite raison a C que non pas B, par la 8. p. 5. ce qui est pareillement contre l'hypothese. Donc A sera plus grande que B.

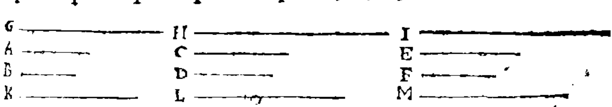
Quant a la seconde partie, si B n'estoit moindre que A, elle seroit egale ou plus petite, ce qui est impossible: car si elles estoient egales, C auroit mesme raison a l'vne qu'à l'autre par la 7. p. 5. ce qui est contre nostre hypothese: si ausi elle estoit plus grande, C auroit plus grande raison à A qu'à B par la 8. p. 5. ce qui est ausi contre l'hypothese. Donc B sera moindre que A.

THEOR. II. PROP. XI.

Les raisons qui sont de mesme à vne, sont aussi de mesme entr'elles.

Soit A à B, comme C à D; & comme C à D, ainsi E à F: Ie dis que comme A à B, ainsi E sera à F.

Qu'il ne soit ainsi, de toutes les antecedantes A,C,E, soient prises quelcõques equemultiplices, G,H,I: Pareillement des

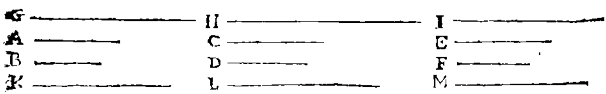


consequentes B,D,F, quelconques equemultiplices, K,L,M. Pour autant donc que A est à B comme C à D, par la conuerse de la 6. def. 5. si G multiplice de A est egale, plus grande, ou plus petite que K multiplice de B; aussi H multiplice de C sera egale, plus grande, ou plus petite que L multiplice de D. Item puis que comme C a D, ainsi E à F, si H multiplice de C est egale, plus grande, ou plus petite que L, multiplice de D, aussi I multiplice de E sera egale, plus grande, ou plus petite que M multiplice de F: Parquoy si G multiplice de A premiere est plus grande, egale, ou plus petite que K multiplice de B 2. aussi I multiplice de E 3. sera plus grande, egale, ou plus petite que M multiplice de F 4. & par la 6. def. 5. comme A sera à B, ainsi E sera à F.

THEOR. 12. PROP. XII.

Si tant de grandeurs qu'on voudra sont proportiõnelles; comme l'vne des antecedantes sera à l'vne des cõsequentes, ainsi toutes les antecedantes seront à toutes les consequentes.

Soient six grandeurs proportiõnelles A, B, C, D, E, F, sçauoir que A soit a B comme C est à D, & E à F: Ie dis que comme l'vne des antecedantes est à vne des consequentes, sçauoir est A a B, ainsi toutes les antecedantes ensemble A, C, E, seront à toutes les consequentes ensemble B, D, F.



Car estant prises de A, C, E, les equemultiplices G, H, I: item de B, D, F, les equemultiplices K, L, M; toutes les trois multiplices ensemble G, H, I, seront autant multiplices des trois ensemble A, C, E, comme la seule G est multiplice de la seule A par la 1. p. 5. Pareillemẽt par la mesme raison toutes les trois K, L, M ensemble, seront autant multiplices des trois B, D, F ensemble, comme K sera multiplice de B: Partant puis que A, B, C, D, E, F sont proportiõnelles, si G equemultiplice de A premiere, est plus grande, egale, ou plus petite que H, equemultiplice de C 3. aussi K equemultiplice de B deuxiesme, sera plus grande, egale, ou plus petite que L, equemultiplice de D quatriesme, par la conuerse de la 6. def. 5. & ainsi des deux autres: Partant si G est plus grande, egale, ou plus petite que

K, le composé des trois G, H, I, sera aussi plus grand, egal, ou plus petit que le composé des trois K, L, M. Donc par la mesme 6. def. 5 comme A sera a B, ainsi les trois A, C, E, ensemble seront aux trois B, D, F ensemble: ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si la premiere est à la seconde comme la tierce à la quarte; mais la tierce a plus grande raison à la quarte que la cinquiesme à la sixiesme; aussi la premiere aura plus grande raison à la seconde, que la cinquiesme à la sixiesme.

Soit A premier à B 2. (en la precedente figure) comme C 3 à D 4. & qu'il y ait plus grande raison de C 3. a D 4. que de E 5. à F 6. Ie dis qu'il y aura aussi plus grande raison de A 1. à B 2. que de E 5 à F. 6.

Car estans prises de A. C. E, les equemultiplices G, H, I, & de B, D, F aussi les equemultiplices K, L, M, pour autant que A est à B comme C à D, si G multiplice de A est egale, plus grande, ou plus petite que K multiplice de B, aussi par la conuerse de la 6. def 5. H multiplice de C, sera egale, plus grande ou plus petite que L multiplice de D. Pareillement, d'autant qu'il y a plus grande raison de C a D, que de E a F si H multiplice de C, est plus grande que L multiplice de D, il n'est pas necessaire que I multiplice de E, excede M multiplice de F, par la 8. def. 5. conuertie: donc aussi si G excede K, il n'est pas necessaire que I excede M, & partant par la 8. def. 5. il y a plus grande raison de A à B, que de E a F.

SCHOLIE.

Que si la tierce C a moindre raison à la quarte D que la cinquiesme E, à la 6. F; aussi la 1. A aura moindre raison a la seconde B, que la 5. E, a la sixiéme F. Car si la raison de C à D est moindre que celle de E à F, c'est à dire, que la raison de E 1. à F seconde estant plus grande que celle de C 3. à D 4. si I excede M, il n'est pas necessaire que H excede L, car quelquesfois elle defaut, ou est egale a icelle par la 8. def.

5. conuertie. Mais si H defaut ou est egale a L, aussi G defaudra, ou sera egale a K par la 6. def 5. conuertie, parce qu'on a posé C 1. estre a D 2. comme A 3. à B 2. Parquoy si I excede M, il n'est pas necessaire que G excede K: & partant par la 8. def 5 il y aura plus grãde raison de E a F que de A a B, c'est a dire que la raison de A a B sera moindre que de E a F, ce qui estoit proposé.

En la mesme mainere sera demonstré, que s'il y a plus grande raison de la 1. à la seconde, que de la tierce à la quarte; mais la tierce a plus grande raison a la quarte, que la 5. a la 6. pareillement la 1. aura beaucoup plus grande raison a la seconde que la 5. a la 6. Que si la 1. a moindre raison a la 2. que la 3 a la quarte, & la tierce a moindre raison à la 4 que la a la 6. Aussi la 1. aura beaucoup moindre raison a la seconde, que la cinquiesme a la sixiesme.

THEOR. 14. PROP. XIV.

Si la premiere est à la seconde, comme la tierce à la quarte; & que la premiere soit plus grande que la tierce, aussi la seconde sera plus grande que la quarte: & si egale, egale: si plus petite, plus petite.

Soit A à B, comme C est à D, & que A premiere soit plus grande, egale, ou plus petite que C 3. Je dis que B 2. sera aussi plus grãde, egale, ou plus petite que D 4.

Soit premierement A plus grande que C: il y aura donc plus grande raison de A a B, que de C à la mesme B, par la 8. p. 5. & par consequent plus grande raison de C à D que de C à B, estant icelle la mesme raison que de A à B, & par la 10. p. 5. B sera plus grande que D.

Soit puis apres A egale à C; & par la 7. p. 5. A sera à B, comme C à B, & puis que les raisons de C à D, & C à B, sont les mesmes que de A à B; les raisons de C à D, & de C à B, serõt de mesme entr'elles par la 11. p. 5 & partant par la 9. p. 5. B & D seront egales. Finablemẽt soit A moindre que C; & par la 8. p. 5. il y aura plus grande raison de C à D, que de A à D; & par consequent plus grande raison de A à

B, que de A à D, puis qu'il y a mesme raison de A à B, que de C à D, & par la 10. p. 5. B sera moindre que D.

SCHOLIE.

Que si la seconde est plus grande, ou egale, ou moindre que la quarte aussi la premiere sera plus grande, ou egale, ou moindre que la tierce. Car puis que A est à B comme C à D, en changeant B sera à A comme D à C par le coroll. de 4. p. 5. Donc si B est plus grande, ou egale, ou moindre que D, aussi A sera plus grande, ou egale, ou moindre que C par la 14 p. 5.

Or Euclide n'a pas demonstré que si la premiere est plus grande, egale, ou plus petite que la seconde; aussi la tierce sera plus grande egale, ou moindre que la quarte. pource que cela est euident a cause de la similitude des raisons. Ce que nous pourrions neantmoins demonstrer apres Commandin; mais d'autant que sa demonstration ne compete qu'aux grandeurs de mesme genre, nous nous tiendrons à ce que la nature des proportions nous monstre, encore que les grandeurs soient de diuers genres.

THEOR. 15. PROP. XV.

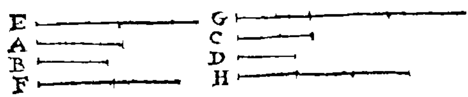
Les grandeurs sont entr'elles, comme sont leurs equemultiplices entr'elles.

Soit AB autant multiplice de C comme DE est multiplice de F. Ie dis que AB sera a DE, cõme C à F. Car puisque AB & DE sont equemultiplices, il y aura en AB autant de parties egales à C, comme DE contient de parties egales à F, soit donc diuisee AB ez parties AG, GB, egales à C, & DE és parties DH, HE egales a F; & par la 7. p. 5 vne chacune partie de AB, sera a vne chacune partie de DE, comme C est à F, & par la 12. p. 5. toutes les antecedantes AB, seront à toutes les consequentes DE, comme AG l'vne des antecedantes, est a DH, l'vne des consequentes, c'est à dire comme C a F, puis que c'est la mesme raison.

THEOR. 16. PROP. XVI.

Si quatre grandeurs sont proportiõnelles, elles le seront aussi estans permutees.

Soit A à B, comme C à D. Ie dis qu'en permutant A sera

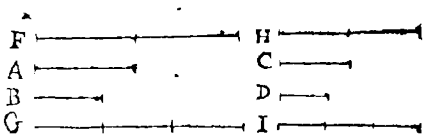


à C, comme B à D. Car si on prend E & F equemultiplices de A & B, item G & H equemultiplices de C & D; E sera a F, cõme A à B par la propo. precedente, & G à H comme C a D; & par consequent E estant à F, & C à D, en mesme raison que A à B, elles sont de mesme entr'elles par la 11.p.5. Derechef puis que les raisons de E a F, & G a H sont les mesmes que de C a D, elles serõt aussi de mesme entr'elles par la susdite 11.p. 5. c'est a dire, que comme E premiere est a F seconde, ainsi sera G tierce a H quarte: parquoy par la 14.p.5. si E premiere est plus grande, egale, ou moindre que G tierce, aussi F seconde sera plus grande, egale, ou moindre que H quatriesme, en quelconque multiplication que soient prises les equemultiplices; & par la 6.def.5. A sera à C, comme B a D (puisque E & F sont equemultiplices de A premiere & B troisiesme; & G & H equemultiplices de C seconde & D 4. & celles la defaillent, sont egales, ou excedent celles-cy, &c.): ce qui estoit à prouuer.

SCHOLIE.

Or la demonstration de ceste proposition a seulement lieu quand les quatre grandeurs sont de mesme genre. Car si les deux A & B estoient d'vn genre, & les deux C & D d'vn autre; aussi les equemultiplices E & F seroient d'vn genre, sçauoir est duquel sont A & B; & les equemultiplices G & H d'vn autre genre, c'est a sçauoir de celuy auquel sont C & D: Parquoy on ne pourroit pas dire E estre *plus grande, egale ou moindre que G; & partant rien ne se concluroit par la 6. def. de ce liure. La raison permutee a donc seulement lieu quand les 4. grandeurs sont d'vn mesme genre: Ce que Dounot n'a pas recogneu, puis qu'il vsurpe icelle, les grandeurs estans de diuers genres, en plusieurs propositions, tant de ce liure que du 10.*

Ledit Dounot a aussi reietté ceste demonstration des anciens, & au lieu d'icelle s'est imaginé la suyuante. Soit A a B comme C est a D. Ie dis aussi, que A sera alternatiuement a C comme



B est a D. Car si on prend F & H equemultiplices de A & C, item G, & I equemultiplices de B & D, par la 4. p. 5. F, G, H, I, seront proportionnelles, & par la 14. p. 5. comme F, sera plus grande, egale, ou plus petite que G; aussi H sera plus grande, egale, ou plus petite que I: (ce qui ne se peut prendre de ladite 14. p. 5. car par icelle la premiere F estant plus grande &c. que H 3. la seconde G seroit plus grande &c. que I 4. mais bien pouuoit-il tirer cela de la nature des proportions, comme nous auons dit au scholie de ladite 14. p. 5.) *Et par la 6. def. 5. A sera à C comme B à D*: ce qui est euidemment faux: car pour estre A a C comme B a D, il faudroit, selon ladite 6. def. 5. que F & G multiplices de A premiere & B troisiesme, item H & I multiplices de C 2. & D. 4. fussent equemultiplices, & elles ne le sont pas. Dounot n'a donc peu rien conclure de la 6. def. 5. & partant sa pretenduë demonstration de ceste 16. prop. doit estre rejettee, & celle des anciens suiuie.

THEOR. 17. PROP. XVII.

Si les grandeurs composees sont proportionelles, icelles diuisees seront aussi proportionnelles.

Soient les grandeurs composees AB, CB & DE, FE proportiõnelles, c'est à dire que AB soit à CB, comme DE à FE. Ie dis que les mesmes diuisees sont aussi proportiõnelles, c'est à dire que comme AC est à CB, ainsi DF est à FE.

Car d'icelles AC, CB, DF, FE soient prises les equemultiplices GH, HL, IK KM, chacune à chacune, & par la 1. p. 5. GL sera autant multiplice de AB, que GH de AC, c'est à dire comme IK de DF. Mais icelle IK est autant multiplice de DF, que IM de DE par la mesme 1. p. 5. donc GL IM sont equemultiplices de AB, DE. Derechef soient prises LN, MO equemultiplices de CB, FE. Pour autant que HL premiere est autant multiplice de CB 2. que KM tierce de la quarte FE, & LN 5. autant multiplice de CB 2. que MO 6. de la quarte FE, par la 2. p. 5. HN sera autant multiplice de CB 2. que KO de FE 4. Et puisque AB est à CB comme DE à FE: & ont esté prises GL, IM equemultiplices de AB, DE: mais HN, KO de CB, FE, par la 6. d. 5. conuertie si GL multiplice de AB premier excede, est egale ou moindre que HN multiplice de CB 2. aussi IM, multiplice de DE 3. excedera, sera egale ou moindre que KO multiplice de FE 4. ostant donc les choses communes HL, KM, si GH excede LN, aussi IK excedera MO, & si egale, egale; & si moindre, moindre. Et d'autãt que GH, IK sont equemultiplices de AC premiere & DF tierce. Item LN, MO equemultiplices de CB 2. & FE 4. & il a esté demonstré (en quelcõque multiplicatiõ qu'ayét esté prises icelles equemultiplices) que les equemultiplices de la premiere & 3. excedét, sont egales, ou moindres que les equemultiplices de la 2. & 4. par la 6. d. 5. AC sera à CB, comme DF à FE: ce qui estoit à prouuer.

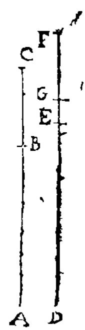
SCHOLIE.

Nous demonstrerons icy ce moyen-là d'argumenter, lequel en la 15. d. nous auons dit conuerse de la raison diuisee: c'est à dire que si AB, est à CB, comme DE à FE: aussi CB sera à AC, côme FE à DF. Car d'autant que comme AB à CB, ainsi DE à FE, en diuisant par la 17 p. 5. cõmme AC sera à CB, ainsi DF à FE: & en changeant comme CB sera à AC, ainsi FE sera à DF: ce qui estoit proposé.

Par mesme maniere sera demonstré ce moyen-là d'argumenter, lequel en la mesme 15. def. nous auons appellé contraire diuision de raison : c'est à dire que si AC est à AB , comme DF à DE : aussi AC sera à CB, ainsi que DF a FE. Car puis que AC est a AB come DF DE : en changeant comme AB sera a AC, ainsi DE a DF : donc en diuisant par la 17. p. 5. comme CB a AC, ainsi FE a DF: & en changeant derechef, comme AC a CB, ainsi DF a FE : ce qui estoit a demonstrer.

THEO. 18. PROP. XVIII.

Si les grandeurs diuisees sont proportionnelles, icelles composees seront aussi proportionnelles.



Soient les grandeurs diuisees AB, BC , & DE, EF proportiõnelles. Ie dis qu'en composant AC est a CB comme DF a EF

Car si comme AC est à BC, ainsi DF n'est à EF; DF aura a quelque grandeur moindre ou plus grande que EF, mesme raison que AC a BC. Soit donc premierement DF a GF moindre queEF, en mesme raison que AC à BC, s'il est possible: & en diuisant par la 17. p. 5. DG sera a GF comme AB à BC. Mais comme AB à BC , ainsi DE est à EF: donc aussi comme DG sera à GF, ainsi DE sera à EF par la 11. p. 5. Mais DG premiere est plus grande que DE ; donc par la 14. p. 5. GF seconde sera aussi plus grande que EF quatriesme, la partie que le tout, ce qui est absurde Il n'y aura donc pas deDF à GF moindre que EF, mesme raison que de AC à BC.

Par mesme discours on demõstrera que DF n'aura pas à vne grandeur plus grande que EF, mesme raison que AC à BC. Donc comme AC est à BC, ainsi DF est a EF, puisque DF ne peut estre à vne grandeur moindre ou plus grande que EF, en mesme raison que AC à BC.

SCHOLIE.

Dounot s'estant licentié de changer la 17. p. a la 18. a aussi rejetté *ceste demonstration des anciens, laquelle a lieu en toutes sortes de grandeurs, soit qu'elles soient de mesme genre ou non : & celle qu'il a mise au lieu d'icelle, a seulement lieu quand les grandeurs sont de mesme genre, d'autant qu'en icelle il vsurpe la raison permutee, laquelle nous auons monstré au scholie de la 16.p.5. ne pouuoir conuenir qu'aux grandeurs de mesme genre : & partant doit estre preferee la demonstration vniuerselle des anciens a la particuliere de Dounot.*

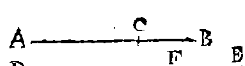
Nous demonstrerons icy cès deux moyens là d'argumenter és proportions, lesquels nous auons descrits en la 14. def 5. Quãt au premier que nous auons nommé conuerse composition de raison : soit comme AB a BC ainsi DE a EF. Ie dis, que comme AC est a AB, ainsi DF a DE. Car puis que comme AB est a BC, ainsi DE a EF, en changeant comme BC sera a AB, ãinsi EF a DE : donc en composant par la 18.p.5. comme AC sera a AB, ainsi DF a DE : ce qu'il falloit prouuer.

Quant a l'autre moyen que nous auons appellé contraire composition de raison : soit derechef comme AB a BC, ainsi DE a EF : Ie dis que par le contraire de composition de raison, comme AB a AC, ainsi DE a DF. Car puis que comme AB est a BC, ainsi DE a EF, en changeant comme BC sera a AB, ainsi EF a DE : donc aussi en composant par la 18.p.5. comme AC sera a AB, ainsi DF a DE : & partant en changeant derechef comme AB sera a AC, ainsi DE sera a DF : ce qui estoit proposé a prouuer.

THEO. 19. PROP. XIX.

Si le tout est au tout, comme le retranché au retranché, le reste sera aussi au reste, comme le tout est au tout.

Soit la toute AB, a la toute DE, comme le retranché AC, au retranché DF. Ie dis que le reste CB est au reste FE, comme la toute AB a la toute DE.



Car puisque AB est a DE, comme AC a DF, aussi en permutant par la 16.p.5. AB sera a AC, comme DE a DF : & par la 17. p.5. en diuisant comme CB a AC, ainsi FE a DF : parquoy en permutant derechef par la 16.p.5. CB sera a FE, comme AC a DF, c'est a dire comme la toute AB a la toute DE, puis que AB, DE, & AC, DF ont esté posees en mesme raison.

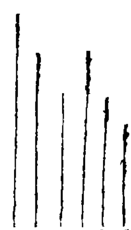
SCHOLIE.

Nous demonstrerons icy ce moyen-la d'argumenter ès proportions, qui est pris par la conuersion de raison. Car soit comme AB a CB, ainsi DE a FE. Ie dis par conuersion de raison AB estre aussi a AC comme DE a DF. Car puisque comme AB a CB, ainsi DE a FE, en diuisant par la 17 p 5 comme AC a CB, ainsi DF a FE : donc aussi en changeant comme CB a AC, ainsi EF a DF : & partant en composant par la 18 p. 5. comme AB a AC, ainsi DE a DF, ce qui estoit proposé.

THEO. 20. PROP. XX.

Si trois grandeurs d'vn costé, & trois d'vn autre, estans prises de deux en deux, sont en mesme raison, & qu en raison egale la premiere soit plus grande que la troisiesme, aussi la quatriesme sera plus grande que la sixiesme; & si egale, egale ; si plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs d'vn costé A, B, C, & trois d'vn autre D, E, F, & comme A a B, ainsi D a E, & comme B a C, ainsi E a F : & que A soit plus grande que C 5. Ie dis que D 4. sera plus grande que F 6.



Car puisque A est plus grande que C, il y aura plus grande raison de A a B que de C a B par la 8.p 5 Mais comme A a B ainsi D a E, & par la 13 p.5 il y aura plus grande raison de D a E, que de C a B. Item comme C est a B, ainsi F a E (car puisque B est a C, comme E a F, en changeant comme C sera a B, ainsi F a E) Il y aura donc aussi plus grande raison de D a E, que de F a E, & par la 10.p 5 D sera plus grande que F.

Que si A est egale a C, ie dis aussi que D sera egale a F. Car puisque A est egale a C, par la 7.p 5. A sera a B comme C a B, Mais comme A est a B, ainsi D a E : & par la 11. p. 5. D sera a

E, comme C a B : & comme C est a B, ainsi F a E. Donc D sera aussi a E comme F a E ; & partant D & F seront egales par la 9. p. 5.

En troisiesme lieu, si A est moindre que C, ie dis aussi que D est moindre que F. Car puisque A est moindre que C, il y aura moindre raison de A a B, que de C a B par la 8. p. 5. Mais cóme A est a B, ainsi D est a E ; il y aura donc aussi moindre raison de D a E, que de C a B, par la 13. p. 5. Mais en changeant comme dessus, C est a B, comme F a E. Il y a donc pareillement moindre raison de D a E, que de F a E : & partant par la 10. p. 5. D sera moindre que F.

THEOR. 21. PROP. XXI.

Si trois grandeurs d'vn costé, & trois d'vn autre, prises de deux en deux sont en mesme raison, estant leur proportion sans ordre, & qu'en raison egale la premiere soit plus grande que la troisiesme, aussi la quatriesme sera plus grande que la sixiesme ; & si egale, egale ; si plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs d'vn costé A, B, C, (en la precedente figure) & trois d'vn autre D, E, F, lesquelles prises de deux a deux soient en mesme raison, estāt leur proportion troublée, sçauoir que comme A à B, ainsi E a F, & comme B a C, ainsi D à E. Ie dis que comme A sera egale, plus grande, ou plus petite que C, aussi D sera egale, plus grande, ou plus petite que F.

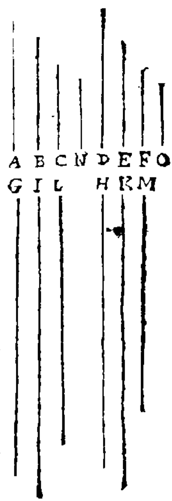
Car si A est plus grande que C, il y aura plus grande raison de A a B, que de C a B par la 8. p. 5. Mais comme A a B, ainsi E a F, il y aura donc plus grande raison de E a F, que de C à B par la 13. p. 5. Et d'autant que comme B est a C, ainsi D est à E, en changeant comme C sera a B, ainsi E a D. Il y aura donc aussi plus grande raison de E a F, que de E a D : & partant par la 10. p. 5. D sera plus grande que F

On peut prouuer comme en la precedente, si A est egale ou plus petite que C, D estre aussi egale, ou moindre que F.

THEOR.

THEOR. 22. PROP. XXII.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, & autant d'autres, lesquelles estant prises de deux en deux soient en mesme raison; icelles en raison egale seront proportionneles.



Soient trois grandeurs d'vn costé A,B,C, & trois d'vn autre D,E,F,& soit A à B comme D à E, & B à C, comme E à F. Ie dis qu'en raison egale, comme A à C, ainsi D a F.

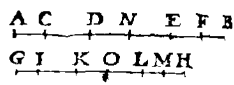
Car estans prises G, H equemultiplices de A,D : item I,K,equemultiplices de B,E: Item L, M equemultiplices de C, F : puisque A est à B,comme D à E, aussi G multiplice de A premiere sera à I multiplice de B 2.comme H multiplice de D 3. a K multiplice de E 4. par la 4. p. 5. Par mesme raison I sera a L, comme K a M. Veu dōc que les trois grādeurs G,I,L, & les trois autres H,K,M, estans prises de deux en deux sont en mesme raison, par la 20. p. 5. si G excede L, aussi H excedera M ; & si egale, egale, & si plus petite,plus petite: & partant puisque G, H, equemultiplices de A & D deffaillēt, sōt egales ou excedent L , M, equemultiplices quelconques de C &F, par la 6. d. 5. A sera à C, cōme D à F : ce qu'il faloit prouuer.

Maintenant soient plus de trois grandeurs, tellement que C soit aussi a N, comme F a O. Ie dis que A est encore à N, comme D à O. Car puisque nous venons de demonstrer que A est a C, comme D à F ; & on a posé C à N, comme F à O, il y aura trois gradeurs A, C, N, & trois autres D,F,O, lesquels sont pris de deux en deux en mesme raison. Donc comme il a esté demonstré és trois grandeurs cy dessus, A sera derechef à N, comme D à O. En la mesme maniere sera demonstré en tant de grandeurs qu'on voudra.

SCHOLIE.

Le tres-docte Steuin en la 19. def. de ses prob. geomet. explique vn sorte d'argumenter és proportions, qu'il appelle proportion transfor mee, qui peut estre reduite en vn tel theoreme que le suiuant.

S'il y a deux grandeurs, desquelles chacune soit couppee en tant de parties qu'on voudra, egales en multitude, & proportionneles: la composee de tant de parties qu'on voudra de la premiere grandeur sera à la composee des parties restãtes, en mesme raison que la composee d'autant de parties de la posterieure grandeur sera à la composee des parties restantes d'icelle. Et si quelconque partie de l'vne est couppee en deux autres parties, & la partie de l'autre correspondante à ceste partie là, est aussi couppee en deux autres parties proportionneles à ces deux là: les totales grandeurs seront aussi couppees proportionnelement.



Soit vne grandeur AB couppee en tant de parties qu'on voudra AC, CD, DE, EF, FB; & vne autre grandeur GH, couppee en autãt de parties que AB, sçauoir est és cinq GI, IK, KL, LM, MH, proportionneles à celles-la de AB. Ie dis que AD composee des deux parties AC, CD, est à DB composee des trois parties restantes, comme GK composee des deux parties GI, IK, est à KH composee des trois autres parties restantes. Car puis que comme AC est à CD, ainsi GI est à IK en composant par la 18. p 5. AD sera à CD, comme GK à IK. Mais comme CD à DE, ainsi IK à KL: donc par la 22. p 5. en raison egale, comme AD sera à DE, ainsi GK sera à KL. Derechef, pource qu'en changeant, BF est à FE, comme HM à ML, aussi en composant BE sera à FE, comme HL à ML. Mais FE est à ED, comme ML à LK: donc en raison egale, BE sera à ED, comme HL à LK; & en composant, BD sera à ED, comme HK à LK, & en changeant, DE à DB, comme KL à KH. Parquoy puis qu'il a esté demonstré que AD est à DE, cõme GK à KL, & DE est à DB, comme KL à KH, par la 22. p. 5. en raison egale comme AD sera à DB, ainsi GK sera à KH.

Nous demonstrerons en la mesme maniere que comme AC est à CB ainsi GI est à IH. Car derechef en changeant, composant, & par egalité de raison, comme BC sera à DC, ainsi HI, à KI: & en changeant, comme CD sera à CB, ainsi IK sera à IH. Veu donc que comme AC est à CD, ainsi GI est à IK, & comme CD à CB, ainsi IK à IH: en raison egale, comme AC sera à CB, ainsi GI sera à IH.

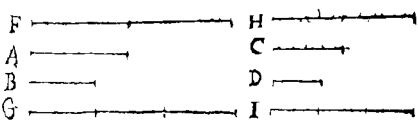
Par mesme raison, comme AF sera à FB, ainsi GM sera à MH. Car derechef en composant, & par egalité de raison, comme AF sera à FB, ainsi GM sera a MH. Car derechef en composant, & par egalité de raison, comme AF sera a E , ainsi GM sera a LM. Mais aussi comme EF est a FB, ainsi LM a MH : Donc en raison egale, comme AF est a FB, ainsi GM est a MH, & ainsi des autres : appert donc ce qui estoit premierement proposé.

Maintenant soit couppee, (comme pour exemple) la troisiesme partie DE en deux quelconques parties DN, NE; & aussi la 3. KL en deux parties KO, OL proportionneles a celles-là. Ie dis que comme AN a NB, ainsi GO a OH. Car en changeant, comme EN sera a ND, ainsi LO a OK; & en composant par la 18. p. 5. comme ED sera a DN, ainsi LK a KO. Parquoy puisque comme CD est a DE, ainsi IK a KL; & comme DE a DN, ainsi KL a KO: par la 22. p. 5. en raison egale, comme CD sera a DN, ainsi IK a KO : ainsi les parties AC, CD, DN sont proportionneles aux parties GI, IK, KO. Derechef pource qu'en changeant, comme FE est a ED, ainsi ML a LK · & en composant comme DE a NE, ainsi KL a OL: en raison egale, comme F sera a EN ainsi ML a LO, & en changeant, comme NE a EF, ainsi OL a LM : & partant toutes les parties AC, CD, DN, NE, EF FB sont proportioneles a toutes les parties GI, IK, KO, OL, LM, MH. Donc comme il a esté demonstré en la premiere partie, AN sera a NB, comme GO a OH : appert donc ce qui estoit proposé en second lieu.

Clauius demonstre encore en ce lieu cy le theoreme suyuant.

Si la premiere est a la seconde en mesme raison que la tierce à la quarte: les equemultiplices de la premiere & troisiesme auront aussi vne mesme raison à la seconde & 4. Item les equemultiplices de la seconde & quatriesme auront vne mesme raison à la premiere & 3. Et au contraire la seconde & 4. auront vne mesme raison aux equemultiplices de la premiere & 3. Item la premiere & 3. auront vne mesme raison aux equemultiplices de la 2. & 4.

Soit A a B comme C a D, & soient F, H equemultiplices de A,



C: item G, I, equemultiplices de B, D. Ie dis que F est a B, comme H a D: item que G est a A, comme I a C. Et au contraire que B est a F comme D a H: item A a G, comme C a I. Car puisque F est autant *multiplice de A, que H l'est de C, comme F est a A, ainsi H a C, & par l'hypothese A est a B, comme C a D; donc en raison egale par la 22. p. 5. comme F sera a B, ainsi H sera a D. Derechef, pource que G est a B, comme I a D, & comme B a A, ainsi D a C: (car puisque A est a B cõme C a D par l'hypothese, en changeant comme B a A, ainsi D a C) en raison egale, comme G sera a A, ainsi I a C par la 22. p. 5.*

Maintenant pource que B est a A, comme D a C par raison inuerse & comme A a F, ainsi C a H: en raison egale, comme B sera a F, ainsi D a H. Derechef puis que A est a B, comme C a D: & comme B est a G, ainsi D a I; en raison egale, comme A sera a G, ainsi C a I, par la 22. p. 5. ce qui estoit proposé.

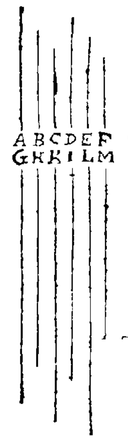
Par cecy est manifeste vn moyen d'argumenter, dont les Geometres s'aident souuent, principalement Archimedes, Apolonius Pergeus, & autres: sçauoir est comme A a B, ainsi C est a D: donc comme F double, ou triple, ou quadruple &c. de A, est a B, ainsi aussi H double, ou triple, ou quadruple &c. de C, est a D: Item comme A est a B, ainsi C a D: donc comme A est au double, triple, ou quadruple &c. de B sçauoir est a G, ainsi aussi C sera au double, triple, ou au quadruple &c de D, sçauoir est a I.

THEOR. 23. PROP. XXIII.

Si trois grandeurs, & autant d'autres, prises de deux en deux sont en mesme raison, & en proportion troublee: icelles en raison egale seront proportionneles.

Soient trois grandeurs A, B, C, & trois autres D, E, F, & soient prises de deux en deux en mesme raison, estant la proportion troublee, sçauoir que comme A a B, ainsi E a F, & comme B à C, ainsi D à E. Ie dis que A sera à C, comme D à F.

Car estans prises G, H, I equemultiplices de A, B, D: & K, L, M, quelconques autres equemultiplices de C, E, F. Par 15. p 5. comme A sera a B, ainsi G a H, puisque G, H, sont equemultiplices d'icelles A, B Mais comme A a B, ainsi est E a F: donc par la 11. p. 5. comme G est a H, ainsi E est a F. Mais comme E est a F, ainsi aussi L est a M par la 15 p. 5. pource que L, M, sont equemultiplices d'icelles E, F: donc aussi comme G est a H, ainsi L est a M, par la 11. p. 5. & puisque comme est a C, ainsi D a E, par la 4. p. 5. comme H multiplice de la premiere B, sera a K multiplice de la seconde C, ainsi I multiplice de la 3. D, sera a L multiplice de la 4. E : donc les trois grādeurs G, H, K, & les trois autres I, L, M, estans prises de deux en deux sont en mesme raison, & la proportion d'icelles sans ordre, puis qu'il a esté demonstré que comme G est a H, ainsi L est a M, & comme H est a K, ainsi I a L ; & partant par la 21. p. 5. si G est plus grande, egale, ou moindre que K, aussi I sera plus grande, egale, ou moindre que M, & par la 6. def. 5. comme A sera a C, ainsi sera D a F : ce qu'il falloit demonstrer.

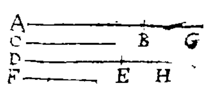


THEOREME 24.

PROP. XXIIII.

Si la premiere est à la seconde, comme la troisiesme à la quatriesme, & la cinquiesme à la seconde, comme la sixiesme à la quatriesme ; la composee de la premiere & cinquiesme, sera à la seconde, comme la composee de la troisiesme & sixiesme, sera à la quatriesme.

Soit la premiere AB a la 2. C, comme la 3. DE est a la 4. F ; & la 5. BG a la 2. C, comme la 6. EH a la 4. F. Ie dis que la toute AG, sera a C, comme la toute DH a F.



Car puisque comme BG a C, ainsi EH a F, aussi en changeant, comme C sera a BG, ainsi F a EH. Veu donc que AB est a C, comme DE a F, & C a BG, comme F a EH, en raison egale, AB sera a BG, comme DE a EH, par la 22. p. 5. & en cōposant, comme la toute AG sera a BG, ainsi la toute DH sera a EH, par la 18. p. 5. & derechef puis que AG est a BG, comme DH a EH, & BG a C, comme EH a F, en raison egale, AG sera a C, comme DH a F : ce qui estoit a prouuer.

THEOR. PROP. XXV.

Si quatre grandeurs ſont proportionneles; la plus grande & la plus petite, ſont plus grandes que les deux autres.

Soient quatre grandeurs proportionnelles AB, CD, E, F. Ie dis que la plus grande & la plus petite AB & F enſemble, ſont plus grandes que les 2. autres CD & E enſemble.

Car ſi de AB on retranche AG egale a E, & de CD on retranche CH egale a F: AG ſera a CH, comme E a F, c'eſt a dire comme AB a CD, & par la 19. p. 5. le reſte GB ſera plus grand que le reſte HD, comme le tout AB eſt plus grand que le tout CD. Et pour autant que AG & F, ſont egales a E & CH; ſi on adiouſte a icelles les grandeurs inegales GB & HD, il eſt euident que AB & F enſemble, seront plus grandes que E & CD enſemble, puis que GB eſt plus grande que HD. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Fin du cinquieſme Element.

ELEMENT SIXIESME.

DEFINITIONS.

SEmblables figures rectilignes, sont celles qui ont les angles egaux, vn chacun au sien, & les costez qui sont au long des angles egaux proportionnaux.

2. Les figures sont reciproques, quand les termes antecedans & consequens des raisons, sont en l'vne, & en l autre figure.

C'est à dire que s'il y a deux figures semblables ou non, dont le premier & dernier des termes proportionnaux soient en l'vne des figures, & le second & 3. en l'autre; icelles figures seront dictes reciproques.

3 Vne ligne droicte est dite estre diuisee en la moyenne & extreme raison, quand la toute est au plus grand segment, comme le plus grand segment est au moindre.

4 La hauteur d'vne chacune figure, est la perpendiculaire tiree du sommet à la base.

5 Vne raison est dite estre composee de raisons, quand les quantités des raisons multipliees entr'elles font quelque raison.

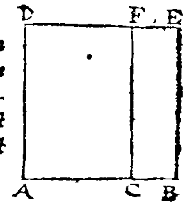
C'est à dire que quand les quantitez de deux ou plusieurs raisons multipliees entr'elles, produisent quelque quantité de raison : icelle raison est dite estre cõposee de celles là. Or la quantité d'vne raison est le denominateur d'icelle : tellement que la quantité de la raison triple est 3; mais de la subtriple, c'est $\frac{1}{3}$, &c. Ainsi la raison trigecuple se dit estre composee des double, triple, & quintuple. Car les denominateurs d'icelles, sçauoir est 2 3 & 5. multipliés entr'eux produisent 30. denominateur d'icelle raison trigecuple. Pareillement la raison double se dit estre composee de la sesquialtere, & de la sesquitierce, pource que les denominateurs d'icelle, sçauoir est $1\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{3}$ estant multipliees entr'eux produisent 2. denominateur de la raison double. Parquoy estant posees tant de grandeurs qu'on voudra par ordre, la raison des extremes sera composee des raisons des moyẽnes: comme pour exemple, soit A à B en raison sesquialtere; B à C en raison double, & C à D en raison superbipartiente tierce : Il est euident que multipliant le denominateur de la raison de A à B par celuy de B à C sçauoir $1\frac{1}{2}$ par 2 viendront 3. & partant A est à C en raison triple, & multipliant 5 par le denominateur de la raison de C à D prouiennent 5, & partant A est à D en raison quintuple.

A.	B	C.	D
30	20.	10.	6

Quelques interpretes afin de rendre plus intelligibles, tant les 27 28. & 29 propo. de ce liure, que plusieurs du 10 adioustent icy ceste definition.

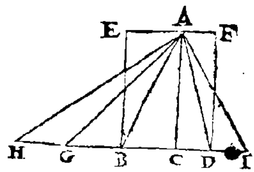
6. Vn parallelogramme appliqué selon quelque ligne droicte, est dict defaillir d'vn parallelogramme, lors qu'il ne peut occuper entierement la ligne; mais exceder, quãd il occupe vne plus grãde ligne que celle selon laquelle il est appliqué ; en telle sorte toutesfois que le parallelogramme deffaillant, ou excedant ait vne mesme hauteur que le parallelogrãme appliqué, & constitué auec iceluy vn seul parallelogramme.

Comme le parallelogramme AF appliqué selon la ligne AB, est dit defaillir du parallelogramme CE, lequel est appellé defaut: Mais le parallelogramme AE appliqué selon la ligne AC, est dict exceder du parallelogramme CE, lequel est dict l'excez.



THEOR. 1. PROP. I.

Les triangles, & les parallelogrãmes de mesme hauteur, sont l'vn à l'autre comme leurs bases.



Soient deux triangles ABC & ACD, de mesme hauteur, sur les bases BC & CD: soient aussi deux parallelogrammes CE, CF de mesme hauteur, les bases desquels soient les mesmes BC, CD. Ie dis premierement que le triangle ABC, est au triangle ACD, comme la base BC, est a la base CD: c'est à sçauoir que si on pose pour premiere grandeur la base BC, pour seconde la base pour troisiesme le triangle ABC, pour quatriesme le CD, triangle ACD; les equemultiplices de la premiere & troisiesme seront plus petites, egales, ou plus grandes que les equemultiplices de la seconde & quatriesme, ainsi que le requiert la 6. definition 5.

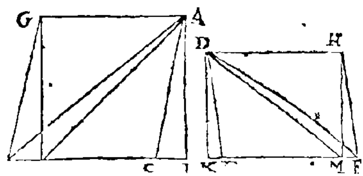
Qu'il ne soit ainsi; qu'on prolonge BD de part & d'autre, & apres auoir couppé BG & GH, egales à BC d'vn costé: item DI, egale à CD de l'autre, soiét menees les lignes AG, AH, AI. Donc par la 38. p. 1. les trois triangles ABC, ABG, AGH, estans sur bases egales & entre mesmes paralleles, seront egaux; aussi par les mesmes raisons les deux triangles ACD & ADI seront egaux; ainsi il est euident qu'autant de fois que la base HC contiendra BC, autant de fois le triangle ACH contiendra le triangle ABC. Pareillement autant de fois que CI contiendra CD, autant de fois le triangle ACI contiendra le triangle ACD. Que si la base CH est egale à CI, le triangle ACH sera egal au triangle ACI, par la 38.p.1 Que si la base est plus grande, il sera plus grand ; si plus petite, plus petit; & par la 6.def. 5. comme la base BC, à la base CD, ainsi le triangle ABC, sera au triangle ACD : ce qui estoit a demonstrer pour la premiere partie.

Quant a la seconde partie touchant les parallelogrammes CE, CF; le mesme se peut dire que des triangles, parce que iceux parallelogrammes sont doubles des triãgles ABC, ACD par la 41.p.1.& par la 15.p.5. ce qui est prouué d'iceux triãgles s'entendra des parallelogrammes.

SCHOLIE.

Commandin adiouste en ce lieu cest autre theoreme.

Les triangles & parallelogrammes, desquels les bases sont egales, ou vne mesme, sont entr'eux comme leurs hauteurs.

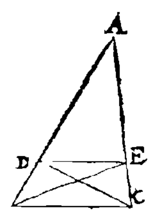


Soient deux triangles ABC, DEF, & les parallelogrãmes AGBC, DEFH, ayant les bases BC, EF egales Ie dis que le triangle ABC est au triangle DEF, & le parallelogramme AGBC au parallelogramme DEFH, cõme la hauteur AI est a la hauteur DK. Car si on prẽd les lignes IL, KM egales aux bases BC, EF, & on tire les lignes LA, MD le triangle ALI sera egal au triangle ABC par la 38. p.1. puis qu'ils sont sur base egales LI, BC, & entre mesmes paralleles AG, IB Par mesme raison le triangle de DKM sera egal au triangle DEF. Parquoy par la 7.p.5. comme ABC sera a DEF, ainsi ALI sera a DKM. Mais par la 1.p.6. comme ALI est a DKM, ainsi AI a DK. (car si AI, DK sont posees les bases, les lignes droictes egales LI, KM seront les hauteurs.) Donc aussi ABC sera a DEF, comme AI a DK.

Et d'autant que par la 15 p.5. comme ABC est a DEF, ainsi le parallelogramme AGBC au parallelogramme DEFH; (car iceux parallelogrammes sont doubles des triangles par la 41.p. 1.) aussi AGBC sera a DEFH, comme AI a DK. Le mesme s'ensuiura si les triangles, & les parallelogrammes ont vne mesme base.

THEOR. 2. PROP. II.

Si l'on meine vne ligne parallele à l'vn des costez d'vn triangle ; icelle couppera les autres costez d'iceluy triangle proportiōnelement : & si les costez sont couppez proportionnelement, la ligne couppante sera parallele à l'autre costé.



Soit le triangle ABC, dans lequel soit menee DE parallele a BC, couppant les deux autres costez AB & AC aux poincts D, & E. Ie dis que AD sera a DB, comme AE, a EC.

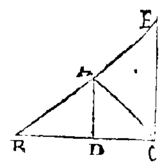
Car estant menees les deux lignes BE & CD. par la 39 p. 1. les deux triangles DEB & EDC, estans sur mesme base, & entre mesmes paralleles, sont egaux, & par la 7. p. 5. ils auront mesme raison l'vn comme l'autre au troisiesme ADE. Mais par la 1. p. 6. les triangles DEB, & DEA estans de mesme hauteur, sont l'vn a l'autre comme la base BD, a la base DA ; & par la mesme proposition, le triangle CDE, estant de mesme hauteur que le triāgle EDA, ils seront l'vn a l'autre comme CE est a EA ; & partant par la 11. p. 5. BD sera a DA, comme CE a EA (puisque ces deux raisons sont les mesmes que du triangle BED au triangle DEA, & du triangle CDE au mesme triangle DEA.) Ce qui estoit propose.

Pour la seconde partie : ie dis que si DB est a DA, comme CE a EA, qu'aussi DE sera parallele a BC.

Car les triangles DEB, & DEA, seront par la 1. p 6. l'vn a l'autre, comme DB a DA. Item les deux autres CDE, EDA, seront aussi l'vn a l'autre, comme CE, a EA ; & par la 11. p. 5. le triangle DEB sera au triangle DEA, comme le triangle CDE est au mesme triangle DEA ; & par la 9. p. 5. les deux triangles BED, & EDC seront egaux, lesquels estans sur mesme base DE, par la 39. p. 1. ils seront entre mesmes paralleles ; & partant DE sera parallele a BC.

THEOR. 3. PROP. III.

Si l'angle d'vn triangle est couppé en deux egalement par vne ligne droicte, la quelle coupe aussi la base; les segmens de la base seront l'vn à l'autre comme les autres costez du triangle: Et si les segmens de la base sont l'vn à l'autre comme les autres costez; la ligne droicte tiree du sommet à la section de la base, couppe l'angle en deux egalement.



Au triangle ABC, soit l'angle B A C couppé en deux egalement par la ligne AD Ie d s qu'il y a mesme raison de BD a DC, comme de AB a AC.

Qu'il ne soit ainsi: apres auoir du poinct C mené CE parallele a DA, soit continuee BA directement iusqu'a ce qu'elle rencontre CE (Or BA, CE se rencontreront, d'autant que les deux angles B & BCE sont moindres que deux droicts, estans egaux aux deux B & BDA, qui sont moindres que deux droicts par la 17.p.1) & parce que DA & CE sont paralleles, l'angle CAD sera egal a son alterne ACE par la 29.p 1. Et si l'exterieur DAB sera egal a l'opposé interieur AEC. Mais BAD, CAD estans egaux par l'hypothese, aussi par les com sent. AEC, ACE seront egaux; & partant par la 6.p.1 les costez AE & AC seront egaux Mais par la 2 p.6. BA est à AE, comme BD à DC, (estant AD parallele a CE & par consequent BA sera aussi à AC (egale à AE) comme BD à DC.

Pour la seconde partie: ie dis que si BA est à AC, comme BD à DC, que l'angle CAB sera couppé en deux egalement par la ligne droicte AD

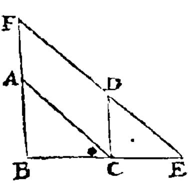
Car apres auoir construit comme dessus, BA sera à AE, cõme BD a DC, par la precedente prop. Et partant par la 11.p. BA sera à AE, comme le mesme BA à AC, & par la 9.p.5. AE & AC seront egaux; & partant par la 5. p. 1. les deux angles AEC, ACE, seront aussi egaux; & par la 29.p.1. ils sont egaux l'vn a DAB, & l'autre a DAC, lesquels par ce moyen seront aussi egaux; ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 4. PROP. IIII.

Des triangles equiangles, les costez qui sont au long des angles egaux, sont proportionnaux; & les costez qui soustiennent les angles egaux, sont de mesme raison.

Soient deux triangles ABC, DCE, equiangles: c'est à dire que l'angle ABC soit egal a l'angle DCE, & l'angle ACB à l'angle E, & le troisiesme au troisiesme. Ie dis que comme AB a BC, ainsi DC a CE, & comme BC a CA, ainsi CE a ED, & finablement comme AB a AC, ainsi DC a DE. Car ainsi les costez d'alentour les angles egaux, sont les proportiōnaux, & les costez homologues, sont ceux la, qui soustiénét les angles egaux, c'est a dire que tous les antecedans, & semblablement les consequens regardent les angles egaux.

Soient constituez les costez BC, CE selon vne ligne droicte, tellement que l'angle externe DCE soit egal a l'interne ABC, & pareillement l'externe ACB a l'interne DEC: & d'autant que par la 17. p. 1. les deux angles ABC, ACB sont moindres que deux droicts, & l'angle DEC est egal a l'angle ACB, aussi les angles B & E seront moindres que deux droicts; & partant les lignes BA & ED estans produictes de la part de A & D, se rencontreront: Qu'elles soient donc prolongees & conuiennent en F. Il est euident que l'angle exterieur ECD, estant, par l'hypothese egal a son opposé interieur CBA; DC sera parallele a FB par la 28. p. 1. Pareillement l'angle exterieur ACB estant egal a son opposé interieur DEC, aussi par la mesme 28. p. 1. CA, & EF, seront paralleles. Partant ACDF sera parallelogramme, & par la 34. p. 1. il aura les angles, & les costez opposez egaux. Mais AC estant parallele a EF par la 2. p. 6. AB sera a AF, ou CD sont egale, comme BC a CE, & en changeant par la 16. p. 5. AB sera a BC, cōme DC a CE. Pareillemét CD estant parallele a BF, comme BC sera a CE, ainsi FD, ou

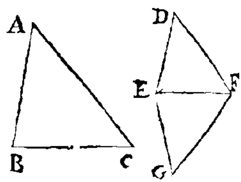


CA son egale, sera a ED par la 2.p.6.& en changeant BC sera a AC, comme CE a ED.

Veu donc que AB est a BC, comme DC a CE, & BC a CA comme CE a ED, aussi en raison egale AB sera a AC, comme DC a ED. ce qu'il faloit prouuer.

THEOR. 5. PROP. V.

Si deux triangles ont les costez proportionnaux, ils seront equiangles, & auront les angles egaux, soubs lesquels les costez de mesme raison seront subtendus.



Soient deux triangles ABC, & DEF, ayans les costez proportiõnaux, & soit AB a BC comme DE a EF, & BC a CA comme EF a FD, & encore AB a AC comme DE a DF. Ie dis que les triangles sont equiangles, sçauoir l'angle A estre egal a l'angle D, & l'angle B a l'angle E, & l'angle C a l'angle F; car ainsi les angles egaux regardent les costez de mesme raison.

Qu'il ne soit ainsi: sur la ligne EF, & aux deux poincts E, & F soient construits les deux angles FEG egal à B, & EFG egal à C, & conuiennent les lignes EG, FG en G: par la 2.p.1 le troisiesme angle G sera egal au tiers A: & partant les triangles ABC, GEF sont equiangles; parquoy comme AB a BC, ainsi GE à EF par la 4.p.6. Mais comme AB a BC, ainsi a esté posé DE à EF: donc par la 11.p.5. comme GE à EF, ainsi DE a la mesme EF: & partant par la 9.p.5. GE, DE seront egales. Et d'autant que par la 4.p.6 comme BC a CA, ainsi EF a FG, & par l'hypothese comme BC à CA, ainsi EF à FD; par la 11.p.5. comme EF sera à FG, ainsi la mesme EF sera a FD; & par la 9. p.5. FG, FD seront egales. Veu donc que les costez EG, FG du triangle GEF sont egaux aux costez DE, DF du triangle DEF, chacun au sien, & la base EF commune, les angles G & D seront egaux par la 8.p.1 & partant par la 4 p.1. les autres angles GEF, GFE seront aussi egaux aux autres DEF, DFE, chacun au sien. Parquoy l'angle G estant egal à l'angle A, aussi l'angle D sera egal au mesme angle A : & ainsi l'angle DEF sera egal à l'angle B, & l'angle DFE à l'angle C. Ce qu'il faloit prouuer.

THEO. 6. PROP. VI.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & les costez au long d iceux angles egaux proportiónaux; ils seront equiangles, & auront les angles egaux soubz lesquelz les costez de mesme raison sont subtendus.

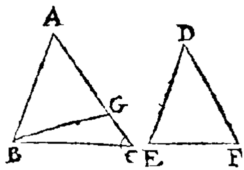
Soient les deux triangles ABC & DEF (en la figure de la precedente proposition) ayās l'angle B egal à l'angle E & cōme AB à BC, ainsi DE à EF. Ie dis que les triangles sont equiangles, sçauoir que l'angle A est egal à l'angle D, & l'angle C à l'angle F.

Qu'il ne soit ainsi ; sur la ligne EF soit construit, comme en la precedente, le triangle GEF, equiangle au triangle ABC: & par la 4 p.6. GE sera à EF, cōme AB à BC, ou DE a EF, (car ils sont en la mesme raison) & par la 9. p 5. GE & DE (qui ont vne mesme raison à EF) seront egales ; & les deux triangles GEF & DEF, auront deux costez egaux à deux costez, sçauoir GE, EF, à DE, EF, & les deux angles au poinct E, egaux (car ils sont chacun egal à l'angle B) & par la 4. p.1. ils auront la base egale à la base, & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au sien, & seront equiangles. Mais l'vn d'iceux triangles GEF est equiangle à ABC par construction ; aussi sera donc l'autre DEF, par les communes sentences.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & les costez au long d'vn autre angle, proportiónaux, estans les troisiesmes angles de mesme espece: Iceux triangles seront equiangles, & auront les angles egaux, au long desquels les costez seront proportionaux.

Soient deux triangles ABC, & DEF, desquels les deux angles A & D soient egaux, & les costez AB, BC d'alentour l'angle ABC, proportionnaux aux costez DE, EF d'alentour l'angle E, c'est à



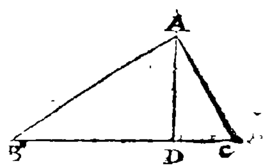
dire que cōme AB est à BC, ainsi DE soit à EF; mais les autres angles C & F soient de mesme espece, c'est à dire aigus, droicts ou obtus, & soient premierement aigus. Ie dis que les triangles sont equiangles, sçauoir les angles ABC & E a l'entour desquels sont les costez proportionnaux, & les angles C & F estre egaux.

Car l'angle B sera egal, ou non à l'angle E; si egal, aussi par la precedente les triangles seront equiangles. Si inegal, comme si B estoit plus grand que E, soit fait ABG egal a E par la 23. p 1 le troisiesme angle AGB, sera egal au troisiesme F, & partat aigu comme iceluy, & les deux triangles ABG, & DEF seront equiangles; & par la 4. p 6. comme AB, a BG, ainsi DE à EF. Mais par l'hypothese, comme AB à BC, ainsi DE à EF donc par la 11. p. 5. comme AB sera à BG, ainsi la mesme AB sera a BC; & partat par la 9. p. 5. BG, BC seront egales: & par la 5. p. 1. les deux angles C & BGC sur la base C G serōt egaux & tous deux aigus, & par consequent l'angle AGB sera plus grand qu'vn droict, puis que par la 13 p. 1. les deux BGC, AGB sont egaux à deux droicts: Mais l'angle AGB a esté demonstré egal a l'angle F: donc F seroit aussi plus grand qu'vn droict, & on l'a posé aussi moindre: ce qui est absurde. Maintenant tant l'angle C, que F ne soit aigu; & comme devant l'ang. C sera egal a l'angle BGC; & partat iceluy BGC ne sera aussi aigu, & les deux C & BGC ne seroiēt moindres que deux droicts, mais egaux ou plus grands que deux droicts: ce qui est absurde: car par la 17 p. 1. ils sont moindres que 2. droicts. Les angles ABC & E ne sont donc pas inegaux, ains egaux & partant par la 32. p. 1. le troisiesme C sera aussi egal au troisiesme F. Ce qu'il faloit prouuer.

THEOR

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si de l'angle droict d'vn triangle rectangle on tire vne perpendiculaire sur la base, les triangles au long de la perpendiculaire sont semblables au tout, & entr'eux.



Soit le triangle rectangle ABC, & l'angle droict A, duquel soit menee a la base BC la perpendiculaire AD. Ie dis que les triangles ABD, & ADC sont equiangles au total BAC, & entr'eux, & par consequent semblables. Qu'ainsi ne soit: d'autant que AD est perpendiculaire, l'angle BDA est droict, & egal a l'angle droict BAC, du triagle total, & l'angle B est commun a tous les deux triangles BAD & BCA, & par la 32. p. 1. le troisiesme angle BAD, est egal au troisiesme ACB: & partant les deux triangles BAD, & BAC, seront equiangles; & par la 4. p. 6. ils auront les costez au long des angles egaux proportionnaux, c'est a dire, que comme CB sera a AB, ainsi AB a BD; & comme BA a AC, ainsi BD a DA; & comme BC a CA, ainsi BA a AD; & partant par la 1. d. 6. les triangles ABC, ABD seront semblables.

Par mesme discours on prouuera que les deux triãgles BAC & ADC, font aussi equiangles, & semblables: car l'angle C estãt commun a tous les deux, & l'angle droict egal a l'angle droict, le troisiesme CAD sera egal au troisiesme B, par la 32. p. 1. & par la 4. p. 6. comme BC sera a CA, ainsi CA est a CD; & comme CA a AB, ainsi CD a DA; & comme CB a BA, ainsi CA a AD.

On demonstrera en la mesme maniere les triangles ADB, ADC estre semblables entr'eux, puisque les angles au poinct D sont droicts, & les angles ABD, CAD, & BAD, ACD ont esté demonstrez egaux; & partant par la 4. p. 6. comme BD ainsi DA a DC; & comme DA a AB, ainsi DC a CA; & à DA, cõme AB a BD, ainsi CA a AD.

COROLLAIRE.

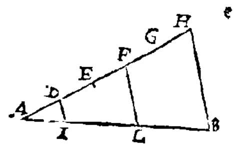
De cecy est manifeste que la perp ndiculaire tiree de l'angle droict d'vn triangle rectangle à la base, est moyenne proportiõnel entre les deux segmens de la base : & cha un des costez comprenant l'angle droict, est aussi moyen propo tiõnel entre toute la base & le segment qui le touche.

Car il a esté demonstré que c mme BD est a DA, ainsi DA a DC, & partant DA est moyenne prop. entr BD & DC; item que comme CB està BA, ainsi BA a BD, & par ainsi BA est moyenne prop. entre CB, & BD: finablement que comme BC a CA ainsi CA a CD, & partant CA estre moyenne proportionnele entre BC & CD.

PROB. 1. PROP. IX.

D'vne ligne droicte donnee, oster la partie demandee.

Soit la ligne donnee AB, de laquelle il faut oster la cinquiesme partie, ou telle autre qu'on voudra.



Du poinct A soit menee la ligne AC, faisant angle auec AB, & en icelle AC, soient prises a l'aduanture cinq parties egales (car il faut qu'icelle ligne soit tant grande qu'il sera de besoin) & soient icelles AD, DE, EF, FG, GH, & apres auoir mené la ligne BH, du poinct D soit menée DI, parallele a HB : Ie dis que AI est la cinquiesme partie de AB.

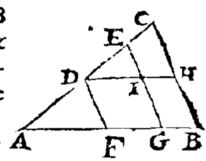
Car puis qu'au triangle ABH, la ligne DI est parallele au costé HB, par la 2.p.6. comme HD sera a DA, ainsi BI a IA: & en composant par la 18.p.5 comme HA sera a DA, ainsi BA a IA: mais par la construction HA est quintuple de AD: donc aussi BA sera quintuple de AI:& partant AI sera la cinquiesme partie de AB, laquelle auoit esté demandee.

SCHOLIE.

Que si de AB il faloit oster plusieurs parties, comme pour exemple les trois cinquiesmes, il est euident par ce qui a esté demonstré qu'estant tiree la ligne FL parallele a HB, le segment AL sera les trois cinquiesmes de AB, tout ainsi que AF est les trois cinquiesmes de AH.

PROBL. 2. PROP. X.

Coupper semblablement vne ligne droicte donnee non couppee, à vne autre ligne droicte donnee & couppee.



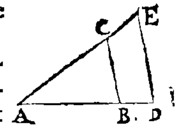
Soient donnees les lignes droictes AB AC, desquelles AC est couppee en D & E : & il faut couper AB en parties semblables & proportionneles a celles de AC.

Soient accommodees icelles lignes donnees en sorte qu'elles facent l'angle BAC ; & apres auoir mené BC, de D & E, soient menees DF, EG paralleles a icelle BC par la 31.p.1. Ie dis que la ligne AB est semblablement couppee en F & G, comme est coupee AC en D & E. Car par la 2.p.6. comme AD est a DE, ainsi AF a FG. Que si on tire DH parallele a AB couppant EG en I. Derechef par la 2. p. 6. comme DE sera a EC, ainsi DI a IH, c'est a dire ainsi, FG a GB, pource que par la 34. p.1. FG est egale a DI & GB a IH. Parquoy les parties FG, GB seront aussi proportionneles aux parties DE, EC. Les trois parties AF, FG, GB, sont donc proportioneles aux trois parties AD, DE, EC: & partant AB est coupee semblablement a AC, ainsi qu'il falloit faire.

PROB. 3. PROP. XI.

A deux lignes droictes donnees, trouuer la troisiesme proportionnele.

Soient deux lignes donnees AB, & AC, ausquelles il faut trouuer la troisiesme proportionnele.



Soient disposees icelles lignes en vn angle CAB; & apres auoir prolongé AB iusques en D, soit faicte BD egale a AC & apres auoir mené CB du poinct D, soit tiree DE parallele a BC rencontrant AC prolongee en E. Ie dis que CE est la troisiesme proportiónele, c'est a dire que comme AB est a AC, ainsi AC a CE. Car puis qu'au triangle ADE, la ligne droicte BC est parallele au costé DE, par la 2 p 6. cóme AB sera a BD, ainsi AC a CE : mais par la 7. p. 5. comme AB est a BD, ainsi la mesme AB est a AC egale a icelle BD. Donc comme AB est a AC, ainsi AC a CE.

PROB. 4. PROP. XII.

A trois lignes droictes donnees, trouuer la quatriesme proportionnele.

Soient les trois lignes donnees (en la precedente figure) AB, BD, AC, ausquelles il faut trouuer la quatriesme proportionnele.

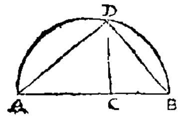
Soient disposees les deux premieres AB, BD, selon vne ligne droicte AD; & la 3. AC face auec la premiere AB vn angle A: puis apres soit menee BC, & de D, la ligne DE parallele à icelle BC, rencontrant AC prolongee en E. Ie dis que CE est la 4. proportiónele requise. Car par la 2. p. 6. comme AB est à BD, ainsi AC est á CE.

PROB. 5. PROP. XIII.

Entre deux lignes droictes donnees, trouuer la moyenne proportionnele.

Soient les deux lignes donnees AC & CB, ausquelles il fau trouuer la moyenne proportionnele.

Soient icelles disposees en vne ligne droicte AB, sur laquelle soit descrit vn demy cercle ADB; & apres auoir du poinct C leué la perpendiculaire CD; Ie dis que icelle est la moyenne proportionnele demandee.



Car estans menees les deux lignes AD & BD, l'angle ADB dans le demy cercle sera droict par la 31.p.1. Veu donc que de l'angle droict ADB du triangle rectangle ADB, est tiree DC perpendiculaire à la base AB, par le corol. de la 8.p.6. CD sera moyenne proportionnele entre AC, CB.

SCHOLIE.

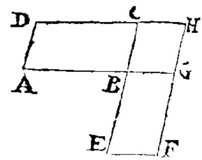
De cecy est euident qu'vne ligne droicte tiree perpendiculairement de quelconque poinct du diametre d'vn cercle, iusques à la circonference, est moyenne proportion. entre les segmens du diametre faicts par icelle perpendiculaire. Car de quelque poinct pris au diametre AB, estant leuee vne perpendiculaire iusques à la circonference, par les mesmes raisons que dessus, icelle perpend. sera moyenne propo. entre les deux segmens du diametre AB.

THEOR. 9. PROP. XIV.

Des parallelogrãmes egaux qui ont vn angle egal a vn angle; les costez au long des angles egaux sont reciproques : & les parallelogrammes qui ont vn angle egal a vn angle, & les costez au long des angles egaux reciproques, sont aussi egaux.

Soient deux parallelogrammes egaux AB CD, & BE FG, desquels les deux angles ABC & EBG soient egaux : Ie dis que les costez qui sont au long d'iceux angles egaux sont reciproques : c'est à dire que AB est a BG, comme EB a BC.

Car les parallelogrãmes AC, BF, estans disposez de telle façon que AB & BG, facent vne ligne droicte, soient prolongez DC, FG, iusques à ce qu'ils se rencontrent en H. Puis donc que les deux parallelogrammes AC, EG sont egaux, ils auront vne mesme raison au parallelogrāme BH, par la 7. p. 5. Mais la raison des parallelogrāmes AC, BH, est par la 1. p. 6. comme celle de la base AB à la base BG. Item celle des parallelogrammes EG, BH est comme celle de EB à BC; & partant par la 11. p. 5. comme AB à BG, ainsi EB a BC.

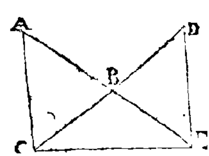


Pour la seconde partie, si AB est à BG, comme EB à BC, & que les angles ABC & EBG soient egaux: Ie dis que les parallelogrammes AC & EG seront aussi egaux.

Car demeurant la mesme construction, on prouuera par la 1. p 6. & 11. p. 5. qu'il y a mesme raison du parallelogramme AC, au parallelogrāme BH, que de la base AB à BG: pareillement qu'il y a mesme raison du parallelogrāme EG, au parallelograme BH, que de EB à BC: mais les raisons des bases sont posees semblables: donc aussi les raisons des parallelogrāmes AC & EG, au troisiesme BH seront semblables par la 11. p. 5. & partant par la 9. p. 5. ils seront egaux.

THEO. 10. PROP. XV.

Les triangles egaux ayans vn angle egal à vn angle; ont les costez au long des angles egaux reciproques: & les triangles qui ont vn angle egal à vn angle, & les costés au long des angles egaux reciproques, sont aussi egaux.



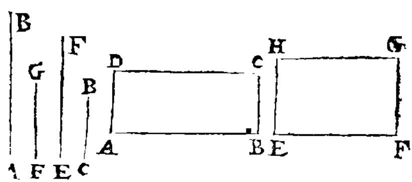
Soient deux triangles egaux ABC & DBE, ayans les angles au poinct B egaux. Ie dis que les costez qui sont au long des angles egaux sont reciproques: c'est à dire que comme AB a BE, ainsi DB a BC.

Car les triangles estans disposez en sorte que les deux lignes AB & BE se rencontrent directement, soit menee la ligne CE. Pour autant que les deux triangles ABC & DBF sōt egaux, ils auront vne mesme raison au triangle BEC par la 7. p 5 mais par la 1. p. 6. la raison du triangle ABC, au triangle EBC, (estant de mesme hauteur) est comme de la base AB a la base BE; pareillement par la mesme 1. p. 6. le triangle DBE sera au triangle ECB, comme DB a BC; & partant par la 11. p. 5. AB sera a BE, comme DB a BC.

Pour la seconde partie elle se prouuera comme en la precedente, en retrogradant par la 1. p. 6. 11. p. 5. & 9. p. 5.

THEOR. 11. PROP. XVI.

Si quatre lignes sont proportionneles; le rectangle compris des extremes, est egal à celuy des moyennes; & si le rectangle compris des extremes, est egal au rectangle compris des moyennes; les quatre lignes sont proportionneles.



Soient quatre lignes proportiōnelles AB, FG, EF BC, sçauoir est que AB soit a FG comme EF a BC & soit le rectangla ABCD compris des extremes AB, BC; & le rectangle EFGH compris sous les moyenes EF, FG. Ie dis que les rectangles AC, EG sont egaux.

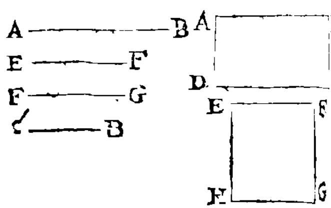
Car puis que les angles droicts B & F sont egaux; & comme AB est a FG, ainsi EF a BC; les costez au long des angles egaux B & F, seront reciproques par la 2. def 6. & partant par la 14. p. 6. les parallelogrammes AC & EG seront egaux.

Quant a la seconde partie, soient les rectangles AC, EG egaux. Ie dis que les quatre lignes AB, FG, EF, BC, sont proportionneles; c'est a dire que comme AB est a FG, ainsi EF est BC. Car puis que les rectangles sont egaux, & ont les angles B & F aussi egaux, sçauoir droicts, ils auront les costez au long d'iceux angles egaux reciproques par la 14. p. 6. sçauoir est que comme AB est a FG ainsi EF a BC : ce qu'il faloit prouuer.

THEOR. 12. PROP. XVII.

Si trois lignes droictes sont proportionneles, le rectangle compris des extremes, sera egal au quarré faict de la moyenne : & si le rectangle compris des extremes est egal au quarré descrit de la moyenne; les trois lignes seront proportionneles.

Soient trois lignes proportionneles AB, EF, BC ; & soit le rectangle ABCD compris soubs les extremes AB, BC, & le quarré de la moyenne EF soit EFGH. Ie dis que le rectangle AC est egal au quarré EG.



Car estant prise FG egale a EF, les quatre lignes AB, EF, FG, BC, seront proportionneles, & le quarré EG sera cõpris soubs les moyẽnes EF, FG, a cause de l'egalité d'icelles. Parquoy par la precedẽte pro. le rectangle AC cõpris des deux extremes AB BC est egal au quarré EG, c'est a dire au rectangle des moyẽnes EF, FG.

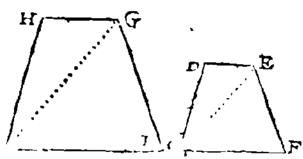
Pour la seconde partie, le rectangle AC soit egal au quarré EG. Ie dis que comme AB est a EF, ainsi EF a BC. Car puisque les rectangles AC, EG sont egaux, par la 16. p 6. cõme AB sera a EF, ainsi FG a BC : mais par la 7. p. 5. comme FG est a BC, ainsi EF egale a icelle FG, est a la mesme BC : & partant comme AB est a EF, ainsi EF est a BC ; ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Il est manifeste par la derniere partie de ce theoreme, qu'une ligne *droicte est moyenne pro ortio nele entre deux autres lignes droictes, qui compr nnent vn rectangle egal .u quarré d'icelle igne. Car p ur ce oue le rectangle de AB, BC est egal au qu rré de EF, il a esté demonstré, ue comme AB a EF, ainsi* EF *a* BC; *& partant* EF *est moyenn prop. entre AB & BC.*

PROBL. 6. PROP. XVIII.

Sur vne ligne droicte donnee, descrire vne figure rectiligne semblable, & semblablement posee à vne figure rectiligne donnee.



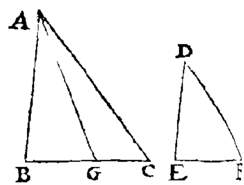
Soit la ligne droicte dōnee AB, sur laquelle il faut cōstruire vne figure semblable, & semblablement posee a la figure rectiligne donnee CDEF.

Soit diuisee la figure donnee en deux triangles, par la ligne CE: & apres auoir par la 23. p 1. descrit sur la ligne AB, & aux poincts A & B, les deux angles BAG, ABG, egaux, l'vn à l'angle FCE, & l'autre a l'angle CFE Il est euident par la 32. p.1. que le troisiesme sera egal au troisiesme, & les triangles CEF, AGB seront equiangles, & auront les costez au long des angles egaux proportionnaux par la 4. p.6. Pareillement sur la ligne AG, & aux deux poincts A & G, soient descrits les deux angles HAG, & AGH, egaux aux deux DCE & CED, chacun au sien; aussi par la 32.p.1. le troisiesme H sera egal au troisiesme D, & les trīagles CDE & AHG seront equiangles, & par la 4 p.6 ils auront les costez au long des angles egaux proportionnaux: ainsi l'angle D estant egal a l'angle H, & l'angle F à l'angle B, les deux de C aux deux de A, & les deux de E aux deux de G; les deux figures CDEF. ABGH, seront equiangles: & pour autant qu'elles sont composees de triangles equiangles, lesquels ont les costez au long des angles egaux proportionnaux, comme CF sera à FE, ainsi AB a BG: item comme CF est a CE, ainsi AB à AG, & comme CE à CD, ainsi AG à AH, & en raison egale comme CF sera à CD, ainsi AB sera à AH; ainsi les costez au long des angles egaux FCD, BAH, seront aussi proportionnaux, & ainsi des autres. Parquoy les figures C D E F, AHGB seront semblables, & semblablement descrites.

Que si la figure donnee auoit plus de 4. costez, il la faudra diuiser en plusieurs triangles, & operer sur chacun triangle, comme il a esté dit cy dessus.

THEOR. 13. PROP. XIX.

Les triangles semblables, sont l'vn à l'autre en raison doublee de leurs costez de mesme raison.



Soient deux triangles semblables ABC & DEF. Ie dis qu'ils serōt l'vn à l'autre en raison doublee de leurs costez de mesme raison B C & E F: c'est à dire que si à B C & E F on trouue la troisiesme proportionnele B G; le triangle ABC sera au triangle DEF, comme la ligne BC est a la troisiesme proportiōnele BG: car telle est la raison doublee par la 10. def. 5.

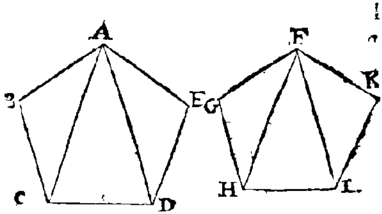
Car estant tiree la ligne AG; d'autant que les triangles ABC, DEF sont semblables, & que comme AB est à BC, ainsi DE est à EF; en changeant par la 16. p. 5. comme AB sera à DE, ainsi BC sera à EF: mais comme BC est a E F, ainsi EF est a B G par la construction. Donc comme A B sera a DE, ainsi E F sera a BG par la 11. p. 5. & par ainsi les deux triangles ABG, DEF auront les costez au long des angles egaux B & E, reciproques; & par la 15. p. 6. iceux triāgles ABG, DEF, seront egaux entr'eux, & partant cōme le triāgle ABC sera au triang. DEF, ainsi sera le mesme triang. ABC au triang. ABG par la 7. p. 5. Mais comme le triangle ABC est au triangle ABG de mesme hauteur, ainsi est la base BC a la base BG par la 1. p 6 Donc cōme le triangle ABC est au triangle DEF, ainsi est BC a BG. Mais BC, EF, BG estans continuellement proportionelles, BC est a BG en raison doublée de BC a EF par la 10. def. 5. dōc aussi le triangle ABC est au triangle DEF en raison doublée du costé BC au costé EF, ce qu'il faloit demonstrer.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, qu'estant trois lignes droictes proportiõneles, comme la premiere sera a la troisiesme, ainsi le triangle descrit sur la premiere sera au triangle semblable, & semblablement posé sur la seconde. Car il a esté demonstré que comme BC est a BG, ainsi le triangle ABC au triangle DEF.

THEOR. 14. PROP. XX.

Les polygones semblables peuuent estre diuisez en nombre egal de triangles semblables entr'eux, & proportionaux à leur tout: & les polygones sont l'vn à l'autre en raison doublee de leurs costez de mesme raison.



Soient deux polygones semblables ABCDE & FGHIK. Ie dis premierement qu'ils peuuent estre diuisez en nombre egal de triãgles semblables.

Car apres auoir mené les lignes AC, AD, FH, FI, il est euident que l'vne des figures est diuisée en autant de triangles que l'autre. Et pour autant que les figures sont semblables, l'angle B sera egal a l'angle G, & comme BA sera a BC, ainsi GF sera a GH, & par la 6. p. 6. les triangles ABC & FGH seront equiangles, & par la 4. p. 6. ils auront les costez au long des angles egaux proportiõnaux, & seront semblables : par mesme discours, les triangles AED & FKI, seront aussi semblables. Pareillement par ce qui a esté dit cy dessus AC est a CB, comme FH a HG: mais BC est a CD comme GH a HI: car ce sont costez de figures semblables; donc en raison egalle par la 22. p 5. AC sera a CD, comme FH a HI: & d'autãt que les angles BCD, GHI sont egaux, & les angles BCA, GHF aussi egaux; iceux estãs ostez, les restans ACD, FHI, seront pareillement egaux ; &

partant par la 6 p. 6. les triangles ACD & FHI, seront equiangles, & par consequent semblables.

Ie dis secondement, qu'iceux triangles sont proportionaux a leur tout. Car les trois triangles de l'vne des figures estans semblables aux trois triangles de l'autre, chacun a sien, & par la 19. p. 6. ils sont l'vn a l'autre, en raison doublée de leurs costez de mesme raison; les triangles ABC, & FGH, seront l'vn a l'autre en raison doublée de AC a FH: aussi en la mesme raison doublee seront les triangles ACD, FHI: & troisiesme AED estant au troisiesme FKI, en raison double de AD a FI, qui est la mesme que de AC a FH, estans costez de triangles semblables; aussi les triangles AED, FKI, seront l'vn à l'autre en raison doublee de AC a FH: & par la 12. p. tous les triangles du premier polygone, seront à tous les triangles de l'autre polygone, comme l'vn des triangles de l'vn d'iceux, a son respondant de l'autre.

Ie dis tiercement, que le polygone est au polygone, en raison doublee des costez CD & HI: car puisque toute la figure ABCDE, est à toute la figure FGHIK, comme l'vn des triangles de l'vne ACD, est à l'vn des triangles de l'autre FHI lesquels par la 19. p. 6. sont en raison doublee de CD a HI par la 11 p. 5 le polygone sera au polygone, en raison double des costez de mesme raison CD & HI.

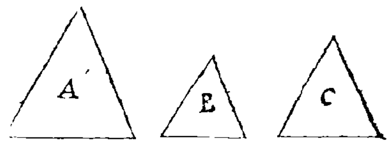
COROLLAIRE.

Par cecy est manifeste qu'estans trois lignes droictes proportionelles, comme la premiere sera à la tierce, ainsi sera le polygone descrit sur la premiere au polygone semblable & semblablement descrit sur la seconde; puis qu'il a esté demonstré que les polygones sont entr'eux en raison doublee de leurs costez de mesme raison, c'est à dire comme le costé du premier a vne troisiesme proportionnele ausdits costez de mesme raison.

THEOR. 15. PROP. XXI.

Les figures rectilignes semblables à vne sont aussi semblables entr'elles.

Soit la figure A semblable à la figure B, & la figure C

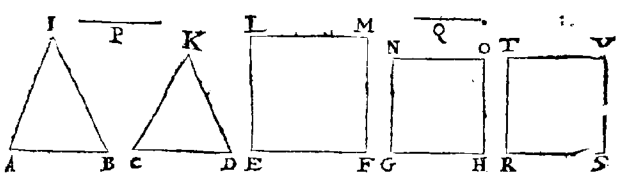


blable aussi à la mesme B : Ie dis que A, & C seront semblables entr'elles.

Car d'autant que chacune d'icelles A & C est semblable à B, elle a les angles egaux aux angles de B par la 1. d 6. & partãt par la 1. com. sent les angles de A, seront aussi egaux aux angles de C, & par la 4. p. 6. A & C auront les costez au long des angles egaux proportionnaux ; & par la 1. def. 6. elles seront semblables : ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 16. PROP. XXII.

Si quatre lignes sont proportionneles; les figures rectilignes semblables, & semblablemẽt descrites sur icelles, seront proportionneles: & si icelles figures ainsi descrites sont proportiõneles ; icelles lignes seront aussi proportionneles.



Soient 4. lignes proportionneles AB, CD, EF, GH ; & sur AB, & CD soient constituees deux quelconques rectilignes ABI, CDK semblables, & semblablement descrits : item sur EF & GH deux autres quelconques rectilignes semblables & semblablement descrits EFML, GHON. Ie dis premierement que ces 4. rectilignes sont proportionnaux, c'est à dire que comme ABI est à CDK, ainsi EFML à GHON.

Qu'il ne soit ainsi : aux deux lignes AB, & CD, soit trouuee P troisiesme proportionnele par la 11 p. 6. & aux deux EF, & GH, soit trouuee Q aussi troisiesme proportionnele : & d'autant que AB est à CD, comme EF est à GH. Item CD à P, comme GH à Q: en raison egale AB sera à P, comme EF à Q par la 22.p.5. Mais comme AB est a P, ainsi le rectiligne ABI est au rectiligne CDK par le corol.de la 19. ou 20. p.6. Item comme EF est à Q, ainsi le rectiligne EM est au rectiligne GO. Donc comme ABI est à CDK, ainsi EM est à GO par la 11.p.5.

Ie dis pour la seconde partie, que si icelles figures semblables, & semblablement descrites sont proportionneles, que les lignes sur lesquelles elles sont descrites, seront aussi proportionneles.

Car soit trouuée RS 4. proportionnele aux trois AB, CD, EF; puis sur icelle RS descrit le rectiligne RV semblable au rectiligne EM & semblablement posé par la 18.p.6. & partant aussi semblable au rectiligne GO par la 21.p 6.& d'autant que comme AB est a CD, ainsi EF est à RS, comme il a esté demonstré cy dessus le rectiligne ABI sera aussi rectiligne CDK, côme le rectiligne EM au rectiligne RV. Mais comme ABI est à CDK, ainsi aussi a esté posé EM à GO: donc par la 11.p.5. côme EM sera a RV, ainsi EM sera a GO; & partant par la 9.p 5. RV, GO seront egaux; lesquels estans semblables & semblablement descrits, consistent necessairement (comme nous demonstrerons incontinent) sur lignes droictes egales RS, GH. Parquoy par la 7.p.5. comme EF sera a RS, ainsi EF sera a GH. Mais par l'hypothese EF est a RS, comme AB a CD: dôc par la 11 p.5. côme AB sera a CD, ainsi aussi EF sera a GH. ce qu'il faloit demonstrer.

LEMME.

Or que les rectilignes egaux semblables & semblablement descrits tels que sont GO, RV, consistent sur lignes droictes egales, on le prouuera ainsi. Si les lignes GH, RS peuuent estre inegales, soit GH la plus grande: & puis que les rectilignes sont semblables, côme GH est à HO, ainsi RS à SV, & GH ayant esté posee plus grande que RS, par la 14.p.5. HO sera aussi plus grande que SV; & partant le rectiligne GO plus grand que le rectiligne RV; puis que cestuy cy peut estre constitué dans celuy-là: ce qui est absurde, ayans esté posez egaux. Les lignes GH, RS ne sont donc pas inegales, mais egales: ce qui estoit proposé.

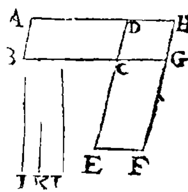
SCHOLIE.

Il est euident, que s'il y a aussi trois lignes droictes proportionne-

les,les rectilignes ſemblables, & ſemblablement deſcrites ſur icelles, ſeront pareillement proport. &c. Car la ligne moyenne & ſon rectiligne eſtant priſe deux fois, on aura quatre lignes proportionneles. donc auſſi quatre rectilignes proportionnaux, comme il a eſté cy deſſus demonſtré. Veu donc que le rectiligne qui ſera deſcrit ſur la ſecõde ligne, ſera egal à celuy deſcrit ſur la 3. eſt manifeſte: ce qui eſtoit propoſé.

THEOR. 17. PROP. XXIII.

Les parallelogrammes equiangles ſont l'vn à l'autre en raiſon compoſee de leurs coſtez.



Soient deux parallelogrãmes equiãgles ABCD, & CEFG, ayant les deux angles BCD, ECG egaux: Ie dis que la raiſon de l'vn a l'autre eſt compoſee de leurs coſtez, ſçauoir eſt compoſee de la raiſon que BC a à CG & de celle que DC a à CE.

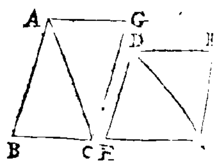
Car ayant diſpoſé les deux parallelogrammes, en ſorte que BC, & CG, ſe puiſſent rencontrer directement, & ne faſſent qu'vne ligne droicte, comme auſſi DC, CE vne autre ligne droicte, ſoit paracheué le parallelogrãme DCGH; & ſoit priſe quelcõque ligne droicte I; puis aux 3. BC, CG & I, ſoit trouué la 4. proport. K. Itẽ aux 3. DC, CE, & K, la 4. prop. L. Veu dõc que par la 1. p. 6. cõme BC eſt a CG, ainſi AC à DG; & comme BC à CG, ainſi auſſi I eſt a K par l'hypotheſe; pareillement comme AC ſera à DG, ainſi ſera I à K par la 11. p. 5. Le meſme ſe peut dire de DG à CF, qu'ils ſont l'vn à l'autre comme K à L, par la 1. p. 6. & 11. p. 5. Donc en raiſon egale comme AC ſera à CF, ainſi I ſera à L par la 22. p. 5 Mais la raiſon de I à L eſt compoſee de la raiſon de BC à CG, & de celle de DC a CE par la 5. def. 6. Donc auſſi eſt compoſee d'icelles raiſons, la raiſon du parallelogramme AC au parallelogramme CF: ce qu'il faloit prouuer.

SCHOLIE.

Il eſt facile à colliger de ceſte demonſtration comment on compoſe *vne raison de deux ou de d'auantage. Car des raisons de BC à CG, & DC à CE a esté composee la raison de I à L. Que s'il faut composer vne raison de trois, ayant trouué celle composee de deux, &c. & de la 3. nous en composerons vne autre en la mesme maniere, laquelle sera composee de trois : & ainsi consequemment des autres.*

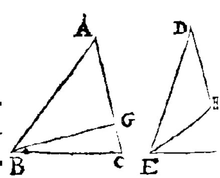
Clauius demonstre en ce lieu cy (apres Commandin) quelques autres propositions assez utiles : c'est pourquoy nous les adiousterons aussi icy.

Les triangles ayans vn angle egal à vn angle, sont en raison composee des costez comprenant l'angle egal.



Soient les triangles ABC, DEF ayans l'angle B egal à l'angle E. Ie dis que le triangle ABC est au triang. DEF en raison composee des costez cōprenāt les angles B & E. Car ayāt acheué les parallelog. BG, EH, ils serōt equiāgles; & partant par la 23 p. 6. la raison d'iceux sera composee de celle de leurs costez. Veu donc les triangles ABC, DEF, desquels ils sont moitiez par la 34 p. 1. en la mesme raison qu'iceux par la 15. p. 5 aussi iceux triangles sont l'vn à l'autre en icelle raison composee des costez.

Les triangles qui ont vn angle a vn angle, sont l'vn à l'autre, en la mesme raison que les rectangles compris sous les costez qui contiennent l'angle egal.

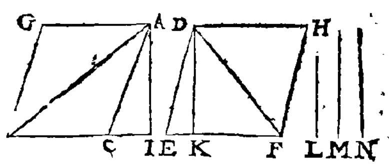


Soient les triangles ABC, DEF ayans l'angle A egal à l'angle D. Ie dis que le triangle ABC est au triangle DEF, comme le rectangle de AB, AC est au rectangle de DE, EF. Car estans tirees sur AC, DF, les perpendiculaires BG, EH; les triangles ABG, DEH seront equiangles, comme appert par le corol. de la 32. p. 1. donc par la 4. p. 6. comme GB est à BA ainsi HE à ED. Mais par la 1. p. 6. comme GB à BA, ainsi le rectangle de BG, AC, au rectangle de BA, AC, pource que posant GB, BA bases, la hauteur d'iceux rectangles sera vne mesme, sçauoir AC. Semblablement comme HE à ED, ainsi est le rectangle de EH, DF au rectangle de DE, DF. Donc par la 11. p. 5. le rectangle de BG, AC est au rectangle de AB, AC, comme, le rectangle de EH, DF au rectangle de DE, DF; & en permutant le rectangle de BG, AC, au rectangle de EH, DF, comme le rectangle de AB, AC au rectangle de DE, DF. Mais le rectangle de BG, AC est au rectangle de EH, *ainsi que le triangle ABC, au triangle DEF par la 15 p. 5. pource que ces triangles sont moitiez d'iceux rectangles par la 41. p 1. (Car ils ont mesmes bases qu'iceux AC, DF; & mesmes hauteurs BG, EH; & partant entre mesmes paralleles) donc aussi le triangle ABC sera au triangle DEF, comme le rectangle de AB, AC, est au rectangle de DE, DF: ce qui estoit proposé.*

COROLLAIRE.

De cecy resulte que les parallelogrammes equiangles sont aussi entr'eux, en la mesme raison que les rectangles compris sous les costez des angles egaux, puis qu'ils sont doubles d'iceux triangles.

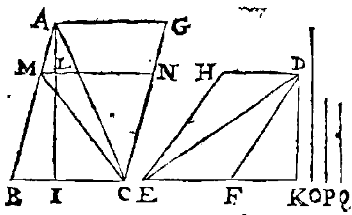
Les triangles & les parallelogrammes sont entr'eux en la raison composee de la raison des bases, & de celle des hauteurs.



Soient les triangles ABC, DEF; & les parallelogrammes CG, EH, les hauteurs d'iceux soient AI, DK. Ie dis que la raison d'iceux triangles, & parallelogrammes est composee de la raison de la base BC à la base EF, & de celle de la hauteur AI à la hauteur DK. Car premierement soient les hauteurs egales, mais les bases ou aussi egales, ou inegales: & soit faict comme BC à EF, ainsi L à M; & comme AI à DK, ainsi M à N; lesquelles seront egales, puis que AI, DK sont posees egales: & partant par la 7. p. 5. L sera à N comme L à M, c'est à dire comme BC à EF. Mais par la 1. p. 6. comme BC est à EF, ainsi est le triangle ABC, au triangle DEF; & le parallelogrãme CG au parallelogrãme EH; Donc par la 11. p. 5. cõme L sera à N, ainsi le triãgle au triangle & le parallelogrãme au parallelogramme: Mais la raison de L à N est cõposee de la raison de L à M, c'est à dire de la raison de BC à EF, & de la raison de M à N, c'est à dire de AI à DK: donc la raison du triãgle ABC au triangle DEF, & du parallelog. CG au parallelog. EH, est composee des mesmes raisons.

Soient maintenant les hauteurs AI, DK inegales, & AI la plus grande, mais les bases BC, EF ou egales, ou aussi inegales. Soit faict comme AI à DK, ainsi O à P; & comme BC à EF, ainsi P à Q: & ayant couppé IL egale à DK, par L soit tiree MN parallele à BC, & soinct CM. D'autant que le triangle ABC est au triangle MBC; &

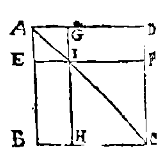
N



le parallelogramme BG au parallelog. BN, comme la hauteur AI à la hauteur IL ou DK qui luy est egale, c'est à dire comme O à P par le Scholie de la 1.p. 6. & comme le triangle ABC au triãgle DEF, & le parallelogramme BN au parallelog FH, ainsi est la base BC à la base EF, (pource qu'ils sont de mesme hauteur) c'est à dire ainsi P à Q: en raison egale ABC sera à DEF, & BG à FH, comme O à Q. Parquoy puis que la raison de O à Q est composee de la raison de O à P, c'est à dire de AI à DK, & de la raison de P à Q, c'est à dire de la base BC à la base EF: la raison du triangle ABC au triangle DEF, & du parallelog. BG au parallelog. FH, sera composee des mesmes raisons. Ce qui estoit proposé.

THEOR. 18. PROP. XXIIII.

En tout parallelogramme; les parallelogrãmes qui sont à l'entour du diametre, ayans vn angle commun au total, sont semblables entr'eux, & au total.

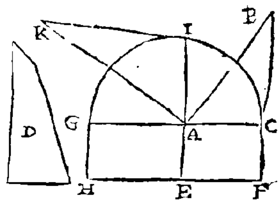


Soit le parallelogramme ABCD, duquel le diametre est AC: Ie dis que les deux parallelogrammes GE & FH descrits sur iceluy diametre, ayans les angles A & C communs auec le total, sont semblables entr'eux, & au total ABCD.

Car d'autant que les lignes AD, EF, BC sont paralleles, sur lesquelles tombent AC & GH, elles ferõt les angles alternatiuement egaux, par la 29. p. 1. ainsi les triãgles AIG, & ICF, seront equiãgles entr'eux, & au total ACD, & par la 4 p. 6. ils auront les costez au long des angles egaux proportionnaux. Le mesme se peut dire des trois autres triangles AIE, ICH & ACB, lesquels sont egaux aux trois premiers, chacun au sien par la 34. p. 1. ainsi le parallelogramme EG, ayant les costez AE & EI proportionnaux à AB & BC costez du parallelogramme BD, & aux costez IH & HC du parallelogrãme FH &c. Il est euidént par la 1. d. 6. qu'iceux parallelogrammes EG, HF, seront semblables entr'eux, & au tout BD.

PROB. 7. PROP. XXV.

Descrire vne figure rectiligne, semblable à vne autre donnee, & egale à vne autre proposee.



Soient deux figures rectilignes ABC, & D : il faut faire vne autre figure rectiligne egale à D, & semblable à ABC.

Sur la ligne A C, soit faict le rectangle ACFE egal à la figure ABC : Item sur la ligne AE, soit construit GE rectangle egal à la figure donnee D, le tout par la 44. & 45. p. 1. & apres auoir trouué AI, moyenne proportionnele entre GA & AC, Sur icelle AI, soit descrite la figure A I K semblable & semblablement posee à la figure ACB, par la 18. p 6. Ie dis qu'elle sera aussi egale à la figure donnee D.

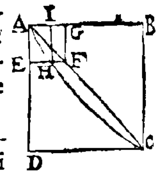
Car puisque par la construction le rectangle GE est egal à D, & AF à ABC, & que par la 1.p. 6. AF est à GE, comme CA à AG: Pareillement que les deux figures semblables ABC & AKI, sont l'vne à l'autre en raison doublee de AC à AI, par le corol. de la 19. ou 20. p. 6. sçauoir comme CA à la 3. proport. AG, aussi par la 11.p.5. ACB sera à IKA, comme AF à GE : & en changeant ACB, sera à AF, comme IKA à GE, par la 16.p. 5. & partant ACB estant egal à AF, aussi IKA sera egal à GE, & par consequent egal a D ; & par la construction, iceluy rectiligne IKA est aussi semblable & semblablement posé au rectiligne ABC. Il est donc le requis.

THEOR. 19. PROP. XXVI.

Si d'vn parallelogrãme on oste vn paral-

lelogrãme semblable & semblablement posé au tout, ayant vn angle commun auec le tout; l'osté sera auec le tout sur vn mesme diametre.

Soit le parallelogramme A B C D, duquel on retranche AEFG parallelogramme qui luy est semblable & semblablemẽt posé, ayans l'angle A commun auec le total : Ie dis qu'ils sont sur mesme diametre AFC.

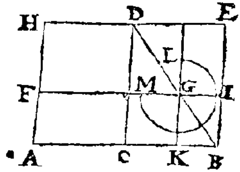


Autrement s'ils ne sont sur mesme diametre, soit vn autre diametre AHC, qui ne soit commun à tous les deux parallelogrammes, mais coupe le costé EF en H, & d'iceluy poinct soit menee HI parallele à AE, par la 31.p.1. donc le parallelog. IE estant sur vn mesme diametre auec le total, sera semblable à iceluy, par la 24. p.6. auquel total GE est aussi semblable par hypothese; & partant par la 21.p.6. GE & IE seront semblables, & par la 1. p.6. AE sera à EF, comme AE à EH : mais AE estant egale à soy-mesme, il faudroit aussi par la 14. p.5. que EF 2. fust egale à EH 4.&c.ce qui est absurde; donc les parallelogrãmes BD & GE, total & retranché, estoient sur mesme diametre; car il aduiendra tousiours mesme absurdité, si on dict que le diametre de BD passe par quelconque autre poinct, soit du costé EF ou FG, du parallelogramme retranché GE.

THEOR. 20. PROP. XXVII.

De tous les parallelogrãmes applicquez selon vne mesme ligne droicte, & defaillans à icelle, de parallelogrãmes semblables & semblablemẽt posés à vn autre descrit sur la moictié de la mesme ligne; le plus grand est celuy qui est descrit sur l'autre moitié de la ligne, & semblable au defaillant.

Soit la ligne AB couppee en deux egalement en C, & sur CB moitié d'icelle soit constitué le parallelogramme BCDE, duquel le diametre est BD. Si dõc on accomplit tout le parallelogramme ABEH, le parallelog. AD estant sur la moitié AC appliqué selon la ligne AB, sera

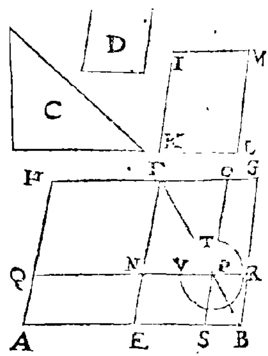


defaillant du parallelogramme CE & semblable à iceluy CE. Ie dis que de tous les parallelogrames appliquez sur icelle ligne AB, & defaillans d'vne figure semblable a CE, le plus grand est AD, qui est descrit sur la moitié AC, & defaillant du parallelog. CE.

Car estant pris au diametre BD quelconque poinct G, & tirées par iceluy poinct les lignes FGI, KG, paralleles aux lignes AB, BE, le parallelogramme AKGF appliqué selon la ligne AB, sera defaillant du parallelogramme KI, lequel par la 24.p.6. est semblable & semblablement posé à CE. Et d'autãt que par la 43.p.1. les complemens CG, GE, sont egaux, si on leur adiouste KI commun, aussi CI, KE seront egaux. Mais CI, CF estans sur bases egales, sont pareillement egaux par la 36.p.1. donc aussi CF, KE seront egaux, & leur adioustant CG commun, le parallelogramme AG sera egal au gnomon LM. Parquoy puisque CE est plus grand qu'iceluy gnomon, LM (car CE outre le gnomon contient encore le parallelog. DG) aussi AD qui est egal à CE par la 36. p.1. sera plus grand que le parallelogramme AG, du mesme parallelog. DG. Et en la mesme maniere sera demonstré que AD est plus grand que tous autres parallelog. qui seront apliquez selon la mesme ligne droicte AB, & defaillans de figures parallelogrammes semblables à CE.

PROB. 8. PROP. XXVIII.

Sur vne ligne droicte donnee, appliquer vn parallelogrãme egal à vne figure rectiligne donnee, & defaillant d'vn parallelogrãme semblable à vn autre donné; mais il faut que la figure rectiligne donnee ne soit plus grande que le parallelogramme, qui estant appliqué sur la moictié de la ligne donnee, est semblable au parallelogramme donné.



Soit la ligne donnee AB, sur laquelle il faut appliquer vn parallelogramme egal a la figure rectiligne donnee C, defaillant d'vn parallelogrã-me semblable au parallelog. donné D.

Ayant couppé AB en deux egalement en E, sur la moitié EB soit descrit le parallelogramme EFGB semblable & semblablement posé à iceluy D, par la 18.p. 6. Puis apres auoir acõply le parallelog. AHGB, soit tiree la diagonale BF.

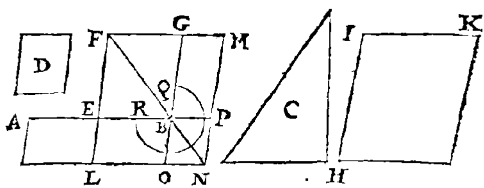
Maintenant si AF est egal à C, on a ce que l'on demande: car il est apliqué sur AB & defaut du parallelog. EG. Mais si C est plus petit que AF (car par l'hypothese il ne peut estre plus grand) il sera aussi plus petit que EG egal à iceluy AF: soit donc trouué l'excez de EG par dessus C (ceste egalité ou inegalité & excez sera cogneuë par ce que nous auons dit à la 45. p. 1.) lequel excez par la 25.p. 6. soit reduit en parallelog. IKLM, semblable & semblablement posé a EG: & veu que EG est plus grand que KM, il est euident que les costez EF, FG seront aussi plus grands que les costez KI, IM; parquoy d'iceux EF, FG soient couppez FN, FO, egaux a iceux KI, IM, afin qu'estant accomply le parallelog. NFOP, il soit egal à KM, & semblable & semblablement posé au mesme KM; & partant aussi à EG; & par consequent qu'estant tiré le diametre BF, iceux parallelog. EG, NO, soient au long d'iceluy diametre par la 26.p.6. & apres auoir continué les costez NP OP, tant qu'il sera debesoin: Ie dis que AP est le parallelog. demandé.

Car il est defaillant du parallelog. SR, lequel par la 24.p.6 est semblable à EG, partant aussi a D. Itẽ puis que IL est l'excez par lequel EG excede C, & qu'à iceluy excez est egal NO Il est euident que le gnomon TV sera egal à la figure C. Mai il est aussi egal à AP, comme il a esté prouué à la precedente: donc aussi AP sera egal a C, & defaudra à la ligne donnee AB du parallelog SR semblable au donné D.

PROB. 9. PROP. XXIX.

Sur vne ligne droicte donnée, appliquer vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnée, excedant d'vn parallelogramme semblable à vn autre donné.

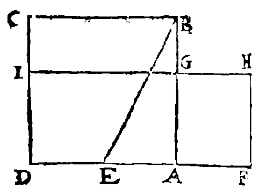
Soit la ligne droicte donnee AB, sur laquelle faut descrire vn parallelogramme egal au rectiligne donné C, mais excedant d'vn parallelogramme semblable au parallelogramme donné D.



Soit couppee en deux egalement AB au poinct E, & sur la moitié EB soit descrit le parallelogramme EFGB semblable & semblablement posé à D par la 18.p.6. En apres soit descrit le parallelogramme HK egal aux deux figures C & EG, & semblable & semblablement posé à EG par la 25. p. 6. & partant à cause de la similitude d'iceux parallelogrammes HK, EG, comme HI à IK, ainsi EF à FG; & par consequent HK estant plus grand que EG, aussi les costez HI, IK seront plus grands que les costez EF, FG: estans donc prolongez les costez FE, FG, tellement que FL, FM soient egales aux lignes IH, IK, & acheué le parallelogramme LFMN, il sera semblable & semblablement posé à EG. Parquoy par la 26.p.6. LM, EG seront au long d'vn mesme diametre, qui soit FN. Maintenant estans prolongez AB, GB, iusques en P & O; & acheué le parallelogramme LA; le parallelogrãme AN sera appliqué à la ligne AB, l'excedant du parallelogramme OP, qui est semblable à EG par la 24.p.6. & partant a D. Ie dis donc que le parallelogramme AN est egal au rectiligne C: Car puisque par la 36 p.1. AL, EO sont egaux, & par la 43.p.1. EO est egal au complement BM, aussi AL sera egal à iceluy BM; leur adioustant donc LP commun, AN sera egal au gnomon QR, lequel est egal au rectiligne C. (car puisque HK, c'est à dire LM est egal au rectiligne C & à EG ensemble: si on oste EG cõmun, resteront le gnomõ QR & le rectiligne C egaux; donc aussi AN sera egal au rectiligne C. A la ligne droite AB a donc esté appliqué le parallelogramme AN egal au rectiligne C, excedant du parallelogramme OP, qui est semblable a vn autre donné D: ce qu'il faloit faire.

PROB. 10. PROP. XXX.

Coupper vne ligne droite donnee en la moyenne & extreme raison.



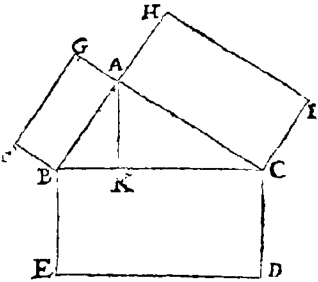
Soit la ligne droite dõnee AB laquelle il faut coupper en la moyẽne & extreme raison. Soit donc icelle couppee au poinct G, de telle façon que le quarré de la partie AG soit egal au rectangle de la toute AB, & de la partie GB, comme il a esté enseigné en la 11. p. 2. Ie dis que en G, AB sera couppee en la moyenne & extreme raison.

Car puis que le quarré de AG est egal au rectangle de AB & GB, les trois lignes AB, AG, & GB, serõt continuellement proportionneles, par la 17. p. 6. c'est a dire que la toute AB sera au plus grand segment AG, comme AG au plus petit segment GB; & par la 3. d. 6. AB est couppee en G, en la moyenne & extreme raison.

THEOR. 21. PROP. XXXI.

Aux triangles rectangles, la figure descrite sur le coste qui soustient l'angle droict, est egale aux deux autres figures qui luy sont semblables, & semblablement posées sur les deux autres costez.

Soit le triangle rectangle ABC, ayant l'angle BAC droict. Ie dis que la figure descrite sur le costé BC qui soustiẽt l'angle droict, est egale aux deux autres figures semblables, & semblablement posees sur les deux autres costez AB, & AC.

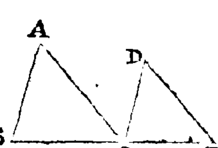


Car si du poinct A, qui faict l'angle droict, on mene la perpendiculaire AK, par la 8. p. 6. elle fera deux triangles equiangles entr'eux, & au total: ainsi les trois triangles BAK, CAK, & A B C seront semblables par la 4. p. 6. & 1. d 6. & par la 19. p. 6. ils seront l'vn à l'autre en raison doublee des costez de mesme raisõ AB, BC, CA. Pareillement par la 20. p. 6. les trois figures AF, BD & AI estãs semblables & semblablement posees, elles seront aussi l'vne à l'autre en raison doublee de leurs costez de mesme raison AB, BC, CA, qui sont les mesmes costez des triangles, & par la 11. 5. les rectilignes AF, BD, AI, seront entr'eux, comme les triangles BAK, BAC, CAK entr'eux : mais le triangle BAC, est egal aux deux autres : donc la figure BD descrite sur BC, sera aussi egale aux deux autres : ce qu'il faloit demonstrer.

THEOR. 22. PROP. XXXII.

Si deux triangles ont deux costez proportiõnaux à deux costez, & sont dispofez faisãt vn angle, tellement que les costez de mesme raison soient parallelz; les deux autres costez se rencontreront directement.

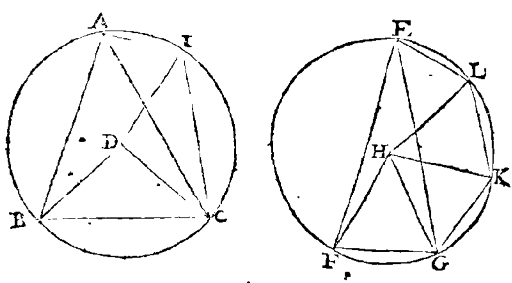
Soient deux triangles ABC, & CDE, ayans les costez BA & AC proportiõnaux aux costez CD & DE, dispofez de telle façon qu'ils facẽt l'angle AC D, & que BA soit parallele à CD, & AC à DE: ie dis que BC & CE se rencontreront directement.



Car BA& CD estans paralleles, l'angle ACD sera egal à son alterne A, par la 29. p. 1. aussi AC estant parallele à DE, l'angle D sera egal à son alterne ACD : ainsi l'angle D sera egal à l'angle A, & par la 6. p. 6. les deux triangles seront equiangles; donc l'angle ACD estant egal à l'angle A, l'angle DCE à l'angle B, il est euident que les trois angles au point C, seront egaux aux trois angles du triangle BAC, c'est à dire à deux droits par la 32. p. 1. & par la 14. p. 1. les deux lignes BC, CE se rencontreront directement : ce qu'il falloit prouuer.

THEO. 23. PROP. XXXIII.

Aux cercles egaux, les angles tant au centre qu'en la circonference, sont entr'eux, comme les circonferences qui les soustiennét. Les secteurs sont aussi de mesme entr'eux.



Soient deux cercles egaux ABC, & EFG, desquels les centres sont D, & H, & soient les deux angles au centre BDC, & FHG, ou en la circonference BAC, & FEG; ie dis que comme la circonference BC est à la circonference FG, ainsi l'angle BDC est à l'angle FHG, & l'angle BAC à l'angle FEG.

Qu'il ne soit ainsi, soient pris les deux arcs GK & KL egaux à FG: item CI egal à BC, & soient menées les lignes IA, ID, KH, HL, KE, LE, les trois angles FHG, GHK & KHL sont egaux entr'eux, par la 27. p. 3. ainsi l'arc FGKL est autãt multiplice de l'arc FG, cõme l'angle FHL l'est de FHG: & par le mesme discours, l'arc BCI est autant multiplice de l'arc BC, comme l'angle BDI, l'est de BDC: partant si l'arc BCI est egal a l'arc FGLK, l'angle BDI sera egal à l'angle FHL par la 27. p. 3. si plus grand, plus grand, si plus petit plus petit; & par ainsi BCI, BDI estans equemultiplices de BC premiere grandeur, & BDC 3. & FGKL, FHL equemultiplices de FG, FHG 2. & 4. par la 6. d. 5. comme l'arc BC à l'arc FG, ainsi l'angle BDC a l'angle FHG: le mesme discours est des angles en la circonference.

Pour la seconde partie. Ie dis aussi, que le secteur BDC est au secteur FHG, comme l'arc BC est a l'arc FG.

Car on prouuera aisement (demeurant la mesme construction) que les deux arcs BC, CI estans esgaux que leurs cordes seront egalles, & les deux sections egalles: mais les deux triangles BDC, CDI sont aussi egaux par la 4. p. 1. lur adioustant donc les deux segmens egaux; par les communes sentences, les deux secteurs BDC, CDI seront egaux, & l'arc BCI sera autant multiplice de l'arc BC, que le secteur BDI le sera du secteur BDC: & par mesme discours, l'arc FGKL sera autãt multiplice de l'arc FG que le secteur FHL le sera du secteur FHG; la cõclusion est aisée par la 6. d. 5 comme en la premiere partie.

COROLLAIRE.

De cecy s'ensuit que comme le secteur est au secteur, ainsi l angle est à l'angle. Car l'vne & l'autre à la mesme raison que l'arc a l'arc; & partant par la 11. p. 5. ils seront aussi entr'eux en la mesme raison.

Il est aussi euident que comme vn angle au centre, est a quatre angles droits, ainsi est l arc soustendant iceluy angle, a toute la circõference, & au contraire que comme quatre angles droits sont à vn angle au centre, ainsi toute la circonference est a l'arc soustendant iceluy angle.

Car comme vn angle au centre est a vn angle droit au centre, ainsi l'arc qui soustient iceluy angle, est au quadrant qui soustient l'angle droit par la 33. p. 6. Parquoy comme l'angle au centre sera au quadruple de l'angle droit, c'est a sçauoir a 4. angles droits, ainsi l'arc soustendãt iceluy angle, sera au quatruple du quadrant, sçauoir est a toute la circonference, par les choses que nous auons demon-

ſtrées a la fin du ſcholie de la 22.p.5. Puis apres d'autãt qu'vn angl au centre eſt a quatre angles droits, comme l'arc qui ſouſtient icelu angle, eſt a toute la circonference; auſſi en permutant comme quatr angles droits ſeront a vn angle au centre, ainſi toute la circonferen ſera a l'arc ſouſtendant l'angle du centre: ce qui a eſté propoſé.

Fin du ſixieſme Element.

ELEMENT SEPTIESME.

DEFINITIONS.

VNité, eſt ſelon laquelle toutes choſes qui ſont, eſt appellee vne.

Euclide ayant traicté és 6. liures precedents de la premiere partie de Geometrie, ſçauoir eſt de celle là qui conſidere les plans, auparauant que venir à l'autre partie, laquelle traicte des ſolides; il explique en ce 7. liure & ës deux ſuiuans les proprietez & affections des nombres, pour puis apres traicter au 10. liure des lignes commenſurables & incommenſurables, neceſſaires pour auoir entiere & parfaicte cognoiſſance des proprietez des ſolides. Euclide definit donc icy que c'eſt qu'vnité, & dict que c'eſt cela ſelon quoy toute choſe qui eſt ſe nomme vne: & eſt à noter que tout ainſi que en la Geometrie le poinct n'a aucune partie, auſſi és nombres l'vnité ne reçoit aucune diuiſion.

2. Nombre, eſt vne multitude d'vnitez aſſemblees.

C'eſt à dire qu'eſtans aſſemblees pluſieurs vnitez enſemble, leur aggregé s'appelle nombre.

3. Partie eſt vn petit nombre tiré d'vn plus

grand, lors que le petit mesure le plus grand

C'est à dire que lors qu'vn nombre en mesure vn plus grand, il est dit partie d'iceluy : & ceste partie est appellee aliquotte ; tellement que 2. est dit partie aliquote de 4. & se nomme $\frac{1}{2}$; & 5. est dict $\frac{1}{3}$ de 15. pource que 5. mesure 15. par 3. ainsi 4. qui mesure 28. par 7. est dit $\frac{1}{7}$, &c.

4. Et parties, est lors que le plus petit ne mesure pas le plus grand.

C'est à dire que lors qu'vn petit nombre n'en mesure pas vn plus grand, il n'est pas dict partie d'iceluy, mais parties Comme 6. est dit parties de 9 : Car il ne le mesure pas precisément, mais est 2. parties d'iceluy, sçauoir est $\frac{2}{3}$, ainsi 12. est parties de 16. sçauoir $\frac{3}{4}$ pource que 4. qui mesure l'vn & l'autre nombre est 3. fois en 12. & 4. fois en 16. aussi 15. est parties de 24. sçauoir est $\frac{5}{8}$, puis que 3. qui est commune mesure, est 5. fois en 15. & 8. fois en 24. &c.

5. Multiplice, est vn grand nombre composé d'vn petit, lors que le plus petit mesure le plus grand.

6. Nombre pair, est celuy qui peut estre diuisé en deux egalement.

7. Mais l'impair, est celuy qui ne peut estre diuisé en deux egalement : ou bien celuy qui est different du nombre pair de l'vnité.

8. Nombre pairement pair, est celuy qu'vn nombre pair mesure par vn nombre pair.

Comme 32. lequel 8. mesure par 4. est dict nombre pairement pair.

9. Et pairement impair, est celuy qu'vn nombre impair mesure par vn nombre pair.

Comme 42. lequel 7. mesure par 6. est dit nombre pairement impair

10. Mais nombre impairement impair, eſt celuy qui eſt meſuré d'vn nombre impair par vn nombre impair.

Comme 15. lequel eſt meſuré de 5. par 3. eſt dit nombre impairement impair.

11. Nombre premier, eſt celuy qui eſt meſuré par la ſeule vnité.

C'eſt à dire, que ſi vn nombre n'eſt meſuré par aucun autre nombre, mais ſeulement par l'vnité, il eſt nombre premier, & tels ſont tous ceux-cy 2.3.5.7.11.13.17.19.23.29.31. &c. Car la ſeule vnité meſure iceux.

12. Nombres premiers entr'eux, ſont ceux-là qui n'ont autre commune meſure que l'vnité.

13. Nombre compoſé, eſt celuy qui eſt meſuré par quelque nombre.

14. Mais les nombres compoſez entr'eux, ſont ceux-là qui ont autre commune meſure que l'vnité.

15. Vn nombre eſt dit multiplier vn autre, lors que le multiplice eſt autant de fois compoſé, qu'il y a d'vnitez au multipliant.

16. Lors que deux nombres ſe multiplient l'vn l'autre, le produict eſt appellé plan, & les multiplians ſont les coſtez d'iceluy plan.

17. Lors que trois nombres ſe multiplient l'vn l'autre, le produict eſt appellé ſolide, & les multiplians ſont les coſtez d'iceluy.

17. Nombre quarré, eſt celuy qui eſt egalement egal: ou bien c'eſt le produict de deux nombres egaux.

19. Nombre cube, est celuy qui est egalement egal: ou bien c'est le produit de trois nombres egaux.

20. Les nombres sont proportionnaux, lors que le premier est autant multiplice, ou mesme partie, ou mesmes parties du second, comme le troisiesme du quatriesme.

Selon ceste vulgaire def. d'Euclide ne sont point compris ès nombres prop. ceux qui sont en raison superparticuliere, superpartient multiple superparticuliere, & multiple superpartiente. Car en toutes ces proportions, le premier nombre n'est pas autant multiplice du second, que le 3. du 4. ny aussi mesme partie, ou parties: Mais le premier contient autant le 2. que le 3. le 4. & en outre une mesme partie ou parties d'iceluy: comme il est euident par les choses que nous auons enseignees à la 4. d. 5. C'est pourquoy Clavius (& à bon droict) a estimé que ceste vulgaire def. d'Euclide a esté corrompuë, puis qu'elle est manque & imparfaite: laquelle imperfection Dounot a encore augmentee en sa traduction, en ostant equemultiplice, *tellement que selon sadite traduction, on ne peut pas conclurre que les nombres qui sont en raison multiple soient proportionnaux, comme veut la vulgaire def. Pour donc rendre ceste 20. def. generale a tous genres de proportions, comme a faict Clauius, nous la poserons telle que s'ensuit.* Les nõbres sont proportiõs, lors que le premier est autant multiple, ou bien mesme partie, ou mesmes parties du 2. que le 3. du 4. Ou bien quand le premier cõtient egalemẽt le 2. & le 3. le 4. & en outre une mesme partie, ou mesmes parties d'iceluy. *Ainsi ces nombres 6.2.9.3. sont proportionnaux, puis que le premier est autant multiple du second que le 3. l'est du 4. c'est à sçavoir triple: Item ceux cy 4.12.3.9; car le premier est la mesme partie du second que le 3. du 4. sçauoir est le tiers: item ceux cy 6.8.9.12. pour ce que le premier est mesmes parties du second que le 3. du 4. Sont aussi proportionnaux ces nombres cy 7.6.14.12. & 7.4.14.8. & 11.5.22.10. & 12.5 24.10. Car au premier exemple le premier & 3. nombre contient une seule fois le 2. & 4. & en outre une mesme partie, sçauoir est* $\frac{1}{6}$*: mais au second; une seule fois & en outre mesmes parties sçauoir est les* $\frac{3}{4}$*: & au 3. deux fois, & encores une mesme partie, à sçauoir* $\frac{1}{5}$*: & au dernier, deux fois, & encores mesmes parties sçauoir est les* $\frac{2}{5}$*. Que si le premier nõbre n'est autant multiplice ou mesme parti* me partie, ou parties du secõd que le 3. du 4. Ou bien que le premier ne contienne autant de fois le second que le troisiesme contient le 4. & en outre vne mesme partie, ou mesmes parties d'iceluy; les nombres proposez ne pourront estre appellez proportionnaux. Parquoy si 4. nombres sont posez proportionnaux, il est necessaire d'accorder que le premier est autant multiple, &c.

Or Euclide definit seulement les nombres proportionnaux, qui ont vne mesme raison d'inegalité: Car de la raison d'egalité, il est euident que le premier estant egal au second, aussi le 3. doit estre egal au 4. afin que les nombres soient dicts proportionnaux.

Or de ceste def. resulte apertemẽt, que les nombres egaux ont mesme raison à vn mesme, & au contraire qu'vn nõbre a aussi mesmẽ raisõ à deux egaux: item que les nõbres ayãt mesme raison à vn mesme, ou ausquels vn mesme nombre à mesme raison, sont egaux. Car puis que les nombres egaux sont, ou equemultiplice, ou mesme partie, ou mesmes parties d'vn mesme nombre; ou contiennent egalement vn mesme nombre, & en outre vne mesme partie, ou parties d'iceluy. Item qu'vn mesme nombre est ou equemultiplices, ou mesme partie, ou mesmes parties de nombres egaux; ou bien qu'il les contient egalement, & en outre vne mesme partie, ou parties d'iceux: il est euidẽt par ceste def. que les nombres egaux ont mesme raison à vn mesme nombre, ou vn mesme à des egaux. Ce qui a esté demonstré és grãdeurs à la 7. p. 5.

Derechef pource que les nombres ayans mesme raison à vn mesme nombre, sont ou equ multiplices d'iceluy, ou mesme partie, ou parties: ou bien ils le contiennent egalement, & en outre vne mesme partie, ou mesmes parties d'iceluy: Item puis que vn mesme nombre ayant mesme raison a quelqu'vns, est ou equemultiplice d'iceux, ou la mesme partie, ou parties; ou bien il les contient egalement, & en outre vne mesme partie, ou mesmes parties d'iceux; selon ceste def. il est manifeste que les nombres qui ont mesme raison à vn mesme nombre, ou ausquels vn mesme nombre à mesme raison, sont egaux entr'eux. Ce qui à aussi esté demonstré en toutes sortes de grandeurs en la 9. p. 5.

Par mesme raison on collige, que de deux nombres inegaux, le plus grand a plus grande raison à vn mesme nombre, que le plus petit: & au contraire qu'vn mesme nombre à plus grande raison à vn petit nombre, qu'à vn plus grand. Item que des nombres inegaux, celuy qui a plus grande raison à vn mesme, est le plus grand: & celuy auquel vn mesme nombre a plus grande raison, est le plus petit: Toutes lesquelles choses sont claires, & euidentes, si ceste def. est bien entenduë. Cecy a aussi esté demonstré és grandeurs au 5. liure prop. 8, & 10.

O

21. Les nombres semblables plans ou solides, sont ceux qui ont les costez proportionnaux.

Comme 24. & 6 sont nombres plãs semblables, pource que 6. & 4. costez de cestuy là sont proportionnaux à 3. & 2. costez de celuy-cy ainsi aussi 192. & 24. sont nombres solides semblables, pource que 8.6.4 costez de cestuy-là sont prop. à 4.3.2. costez de celuy cy.

22. Nombre parfaict, est celuy qui est egal à toutes ses parties aliquotes.

Comme 6. est dict nombre parfaict, pource que les parties aliquotes d'iceluy, sçauoir 1. 2. 3. prises ensemble, luy sont egales. Ainsi aussi 28. duquel les parties aliquotes, sçauoir est 1. 2. 4. 7. 14. estans prises ensemble, luy sont egales; sera dict nombre parfaict.

COMMVNES SENTENCES.

1. Les nombres equemultiplices de nombres egaux, ou d'vn mesme nombre, sont egaux entr'eux.

2. Et ceux desquels vn mesme nombre est equemultiplice, ou desquels les equemultiplices sont egaux, sont aussi egaux entr'eux.

3. Mais les nombres qui sont vne mesme partie, ou mesmes parties de nombres egaux, ou d'vn mesme, sont egaux entr'eux.

4. Et ceux desquels vn mesme nombre, ou nombres egaux, sont mesme partie, ou mesmes parties; sont aussi egaux entr'eux.

5. L'vnité mesure tout nombre par les vnitez qui sont en iceluy, c'est à dire par le mesme nombre.

6. Tout nombre mesure soy-mesme par l'vnité.

7. Si vn nombre multipliant vn nombre, en produit quelqu'vn, le multipliant mesurera le produit par le multiplié : mais le multiplié par le mesme multipliant.

8. Si vn nombre mesure vn nombre ; aussi celuy par lequel il le mesure, mesurera le mesme par les vnitez qui sont au mesurant, c'est à dire par iceluy nombre mesurant.

9. Si vn nombre mesurant vn nombre, multiplie celuy par lequel il le mesure, ou est multiplié par iceluy, sera produit celuy lequel est mesuré.

10. Le nombre qui en mesure deux ou d'auãtage, mesure aussi le composé d'iceux.

11. Mais celuy qui mesure le mesureur, mesure aussi le mesuré.

12. Et celuy qui mesure le tout, & le retranché, mesure aussi le reste.

THEOR. 1. PROP. I.

Si de deux nombres inegaux proposez, on soustraict tousiours alternatiuemẽt le plus petit du plus grand, & que le petit residu ne mesure iamais le plus grand iusques à ce qu'on ait pris l'vnité; les nombres proposez au commencement, seront premiers entr'eux.

A....5 F..2 G.1 B
C...3 H..2 D
E..2

Soient deux nombres inegaux AB, & CD, si on soustraict continuellement le plus petit du plus grand, & que le plus petit residu ne mesure iamais le plus grand, iusques a ce qu'on ait pris l'vnité : Ie dis qu'iceux nõbres AB, & CD seront premiers entr'eux.

Autrement s'ils ne sont premiers, ils seront composez, & par la 14 d. 7. ils seront mesurez par quelque nombre: soit iceluy E commune mesure à tous les deux : ainsi CD plus petit nombre estant soustraict de AB, soit le reste FB plus petit que CD. Item FB estant soustrait de CD, soit le reste HD plus petit que FB. Pareillement HD estant soustrait de FB, soit le reste GB, vnité. Puis donc que E mesure CD, il mesurera aussi AF; & d'autant qu'il mesure le tout AB, par la 11 com. sent. il mesurera aussi le residu FB, lequel mesure CH: & partant par la 11. com. sent. E mesurera aussi CH; & puis qu'il mesure le tout CD, par la 12. com. sent. il mesurera aussi le reste HD, & par consequent FG : mais il mesure aussi FB; E mesurera donc pareillement l'vnité restante GB, sçauoir le tout la partie : ce qui est impossible. Donc AB & CD ne peuuent estre mesurez par aucun nombre, ains par l'vnité seulement : & partant ils sont nombres premiers entr'eux par la 12. d. 5.

SCHOLIE.

Commandin ayant demonstré la conuerse de ceste prop. vient à la suiuante.

Estans proposez deux nombres composez entr'eux, si on soustrait tousiours alternatiuement le moindre du plus grand, la soustraction ne paruiendra iusques à l'vnité.

Ce qui est euident, car si on paruenoit à l'vnité, les nombres proposez seroient premiers entr'eux, comme il a esté demonstré en la prop. cy dessus : & ils sont posez composez.

Or il est manifeste par ces choses, qu'estans proposez deux nombres nous cognoistrons facilement s'ils sont premiers entr'eux, ou non. Car estant faicte la soustraction, comme dit est, si on paruient iusques à l'vnité, esdits nombres proposez seront premiers entr'eux : mais si on n'y paruient, ils seront composez.

PROB. 1. PROP. II.

Trouuer la plus grande commune mesude deux nombres proposez non premiers entr'eux.

Soient deux nombres non premiers AB, & CD, desquels il faut trouuer la plus grande commune mesure.

Soit soustrait le plus petit CD, tant de fois que faire se pourra du plus grād AB: s'il reste quelque chose comme EB, soit soustraict continuellement le plus petit du plus grand, iusques a ce qu'on paruienne à vn nombre qui mesure le precedent; ce qui aduiendra necessairemēt: car si on paruenoit iusques à l'vnité, les nombres AB, CD, par la 1.p.7. seroient premiers entr'eux, contre l'hypothese. Donc FD mesurant EB, il ne reste rien. Ie dis que FD est la plus grande commune mesure de AB & CD.

A........ 9 E...... 6 B
C...... 6 F... 3 D
G.... 4

Qu'ainsi ne soit. Ie dis en premier lieu que FD mesure AB, & CD: Car mesurant EB, il mesure aussi CF; & d'autant qu'il se mesure soy-mesme par la 10. com. sent. il mesure le tout CD: Pareillement il mesurera AE; & puis qu'il mesure aussi EB, il mesurera le tout AB; ainsi il mesure tous les deux AB, & CD.

Ie dis secondement que FD est la plus grande commune mesure de AB, & CD. Autrement soit vn plus grand nombre, sçauoir G, qui mesure tous les deux nombres AB, & CD: & puis qu'il mesure CD, il mesurera aussi AE, & mesurant le tout AB par la 12. com. sent. il mesurera aussi le residu EB; & par consequent il mesurera CF. Item mesurant le tout CD, il mesurera aussi le reste FD, sçauoir vn plus grand nombre mesurera vn plus petit: ce qui est impossible. Donc FD est la plus grande commune mesure entre AB, & CD.

COROLLAIRE.

De cecy est euident que qui mesure deux nombres, il mesure aussi leur plus grande commune mesure, puis qu'il a esté demonstré que si G mesure AB & CD, il mesurera aussi FD leur plus grande commune mesure.

SCHOLIE.

Par les choses cy dessus dictes, nous cognoistrons facilement si trois *ou d'auantage de nombres ſont premiers entr'eux, ou non. Car ſoit les trois nombres A,B C. Premierement donc ſoit veu par ce qui eſt dit à la 1 p.7. ſi les deux nombres A & B ſont premiers entr'eux, ou non : Que s'ils ſont premiers, il eſt euident que les trois nombres A,B,C, ne ſeront composez entr'eux. Mais ſi A & B eſtoient composez entr'eux, ſoit trouuee par la 2 p.7. leur plus grande commune meſure D, que ſi elle meſure auſſi le nombre C, il eſt manifeſte que les trois nombres A,B,C ſont composez entr'eux, puis qu'ils ont le nombre D pour commune meſure.*

A.......... 12
B........9
C......6
D...3

Que ſi D plus grande commune meſure de A & B, ne meſure C; C & D ſeront premiers entr'eux, ou non: S'ils ſont premiers, les trois nombres A, B, C, ne ſeront composez entr'eux, mais premiers : Car s'ils eſtoient composez, ils auroient vne commune meſure, laquelle meſureroit auſſi le nõbre D plus grande commune meſure de A & B, par le corol. de ceſte prop. & partãt C & D ne ſeroient premiers entr'eux, contre l'hypotheſe. Mais ſi C & D ne ſont premiers entr'eux, les trois nombres A,B,C ſeront cõposez entr'eux. Car eſtant trouuée par la 2.p.7. E plus grande commune meſure de C & D ; iceluy nombre E meſurera auſſi A & B par la 11. com.ſent. puis que D les meſure. Parquoy veu que le meſme E meſure auſſi C; il meſurera les trois A,B,C; & partant iceux ſeront composez entr'eux. Ce qui eſtoit proposé.

A.......9
B......6
C.....5
D...3

A............12
B........8
C.....6
D.... 4 E..2

En la meſme maniere ſera cogneu ſi d'auantage de nombres que trois ſont premiers entr'eux ou non. Car s'il y a 4. nombres donnez, il en faudra eſprouuer premierement trois ; ſi cinq, quatre, &c. & acheuer comme nous auons dict, de trois nombres propoſez.

PROB. 2. PROP. III.

Trouuer la plus grande commune meſure de trois nombres propoſez, non premiers entr'eux.

Soient trois nombres non premiers entr'eux A, B, C, deſquels il faut trouuer la plus grã de commune meſure.

A............ 12 D....4
B........8 E..2
C......6 F...3

Soit tiree la plus grande commune mesure des deux A,& B, par la 2 p.7. sçauoir D. Si D mesure aussi C, nous auons ce que nous demandons: Car si vn plus grand nombre que D mesure A,B,C; par le corol. de la prop. preced. il mesureroit aussi D, plus grande mesure de A, & B, sçauoir est vn grand nõbre, vn moindre: ce qui est absurde. Que si D ne peut mesurer C, si est-ce que D & C seront composez entr'eux, tant par l'hypothese que par le corol. de la 2 p.7. donc par icelle mesme proposition soit trouuee E plus grande commune mesure entre C & D. Il est euident par la 11. com. sent. que E mesurera tous les trois nombres, A,B,C, d'autant qu'elle mesure C,& D, lequel mesure B,& A. Ie dis d'auantage que E est aussi la plus grande mesure cõmune. Autremẽt si elle n'est la plus grande, en soit vne autre plus grande, sçauoir F s'il est possible: Or mesurant A,& B, elle mesurera aussi D, leur plus grande commune mesure par le corol. de la 1. p. 7. & par la mesme raison mesurant C,& D, elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure E, sçauoir le plus grand, le plus petit, ce qui est impossible. Donc E sera la plus grande commune mesure des trois nombres A,B,C.

COROLLAIRE.

Par cecy est manifeste qu'vn nombre qui en mesure trois, mesurera aussi la plus grande commune mesure d'iceux.

En la mesme maniere, estans donnez plus de trois nombres non premiers entr'eux, sera trouuee leur plus grande commune mesure, & aura aussi lieu le mesme corol.

THEOR. 2. PROP. IIII.

Tout nombre moindre, est partie ou parties de tout nombre plus grand.

C'est à dire que de deux nombres inegaux le plus petit est partie aliquote, ou aliquante du plus grand.

A......6	B....4
B...3	B.....5

Soient deux nombres A, & B inegaux. Ie dis que B plus petit, est ou partie aliquote, ou aliquante de A.

Car ou B mesure A, ou non. S'il le mesure, il est partie aliquote par la 3.d.7. s'il ne le mesure pas, ou bien A & B, seront entr'eux composez, ou premiers: si composez, ils auront vne commune mesure par la 4.d.7. si premiers, ils auront l'vnité pour commune mesure par la 12.d.7. ainsi B contiendra certain nombre d'vnitez semblables aux vnitez qui sont en A.

THEOR. 3. PROP. V.

Si de quatre nombres, le premier est telle partie du second, que le tiers du quart; le premier & tiers ensemble, seront telle partie du second & du quart ensemble, qu'est le premier du second.

A...3
B. 3 G...3 C
D....4
E....4 H....4 F

Soient quatre nombres A, B C, D & EF, desquels A est telle partie de BC, que D est de EF. Ie dis que A & D ensemble sont telle partie de BC & EF ensembles, comme A l'est de BC.

Car puis que A est telle partie de BC, que D de EF, BC contiendra A autant de fois, comme EF contiendra D par la 3.d.7. Soit donc BC diuisé en autant de parties qu'il contient de fois A, sçauoir en BG & GC; EF se diuisera aussi en autant de parties egales à D, sçauoir en EH & HF: & d'autant que BG est egal a A, & EH a D; si à choses egales on adiouste choses egales, sçauoir A & BG, à D & EH; A & D ensemble, seront egaux a BG & EH ensemble: le mesme se dira de A, GC, D, & HF; & partant autant de fois que BC contient A, autant de fois BC & EF ensemble, contiendront A & D ensemble: ce qu'il faloit prouuer.

THEOR. 4. PROP. VI.

Si de quatre nombres, le premier contient telles parties du second que le tiers du quart: le premier & tiers ensemble, seront telles parties du second & quart ensemble, que le premier du second.

Soient quatre nombres AB, C, DE, & F desquels le premier AB contient autant de parties du second C, que le 3. DE est du 4. F. Ie dis que AB, & DE ensemble, contiennent autant de parties de C & F ensemble, que AB de C.

A ... 3 G ... 3 B
C 9
D ... 4 H .... 4 E
F 12

Car pour autant que AB contient telles parties de C, que DE en contient de F; estans AB & DE diuisez aux parties de C & F, il y aura autant de parties de C en AB, comme de F en DE, & par la 5. p. 7. AG, & DH ensẽble, seront telle partie de C & F ensemble, comme AG est de C. Item GB & HE ensemble, seront telle partie de C & F ensemble, comme GB seul est de C seul; ainsi AB & DE seront ensemble deux fois telle partie de C, & F ensemble, comme AB estoit de C : ce qu'il falloit demonstrer.

THEO. 5. PROP. VII.

Si vn nombre est telle partie d'vn autre nombre, que le retranché du retranché; le reste sera aussi telle partie du reste, comme le tout est du tout.

Soit AB telle partie de CD, que le retranché AE est du retranché CF. Ie dis que le reste EB, sera telle partie du reste FD, que le tout AB est du tout CD.

A .... 4 E .. 2 B
G .... 4 C .... 8 F .... 4 D

Car estant pris le nombre GC, de telle façon que telle partie le retranché AE est du retranché CF, telle partie le reste EB soit d'iceluy GC, par la 5. p. 7. les deux AE & EB ensemble seront telle partie de GC & CF ensemble, qu'est AE de CF, c'est à dire qu'est le tout AB du tout CD : & partant puisque AB est telle partie du nombre GF que de CD : iceux nombres GF, CD seront egaux entr'eux par la 4. com. sent. en ostant donc le nombre commun CF, les demeurans GC & FD seront egaux ; & partant le reste EB sera telle partie du reste FD, que de GC : c'est à dire que le tout AB du tout CD, puisque EB a esté posé telle partie de GC, que AE de CF, qui par l'hypothese est la mesme que AB de CD.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si vn nombre contient telles parties d'vn autre nombre, que le retranché du retranché, aussi le reste contiendra telles parties du reste, que le tout du tout.

G.. 2 A......6 E..1 B
C.........9 F...3 D

Si le nombre total AB contient telles parties du total CD, que le retranché AE du retranché CF: Ie dis que le reste EB contiendra telles parties du reste FD, que le total AB, du total CD.

Car si on pose GA contenir telles parties de FD, que AE de CF, ou AB de CD, par la 6.p.7. les deux nombres GA, AE ensemble seront telles parties des deux CF, FD ensemble (c'est à dire le tout GE du tout CD) que GA de FD, ou AB de CD: & partant puis que GE & AB contiennent telles parties de CD, l'vn que l'autre, ils seront egaux; parquoy en ostant le nombre commun AE, resteront GA & EB egaux. Mais GA contient telles parties de FD, que AB de CD: Donc aussi EB contiendra telles parties d'iceluy FD, que AB de CD, ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 7. PROP. IX.

Si de quatre nombres, le premier est telle partie du second que le tiers du quart, aussi en changeant le premier sera telle partie, ou telles parties du tiers, que le second du quart.

A... 3
B...3 G...3 C
D.... 4
E....4 H....4 F

Soit A telle partie de BC que D est de EF. Ie dis qu'en changeant, A sera telle partie, ou cõtiendra telles parties de D, que BC de EF, pourueu que A & BC soient plus petits que D & EF chacun au sien.

Car d'autant que par l'hypothese A est telle partie de BC comme D de EF; BC contiendra autant de parties egales à A que EF d'egales à D: soit donc diuisé le nombre BC en par-ties BG, GC egales a A; & le nombre EF en parties EH, HF egales a D. Et puis que A est posé moindre que D, par la 4. p. 7. A est partie de D, ou contient parties d'iceluy, & conse-quemment tous les autres BG de EH, & GC de HF: mais par ce que BG est egale a GC, & EH à HF; BG sera telle ou tel-les parties de EH, que GC de HF; & partant par la 5. ou 6. p. 7 BG, GC ensemble, c'est a dire BC, sera telle ou telles parties de EH, HF ensembles, sçauoir EF, que BG de EH, c'est à dire que A de D. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. X.

Si de quatre nombres, le premier contient telles parties du second, que le tiers du quart, aussi en changeant le premier contiendra telle ou telles parties du tiers, que le second du quart.

Soient 4. nombres A B, C, D E, & F, des-quels AB contienne telles parties de C, que DE de F. Ie dis qu'en changeant, AB sera telle ou telles parties de D E, que C est de F, moyennant que AB & C soient plus petits que DE & F, comme en la precedente.	A..2 G..2 B C...... 6 D.....5 H.....5 E F 15

Car AB estant diuisé en AG, GB parties de C; & DE en D H, HE parties de F; AB sera diuisé en autāt de parties que DE, & tant AG que GB sera telle partie de C, que DH & HE de F: Donc en changeant par la 9. p. 7. AG sera telle partie ou par-ties de DH, & GB de HE, que C de F; & partant AG sera tel-le partie, ou parties de DH, que GB de HE. Donc par la 5 ou 6. p. 7. AG, GB ensemble, sçauoir est AB, sera aussi telle par-tie, ou parties de D H, HE ensemble, c'est à dire DE, que C de F: ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 9. PROP. XI.

Si le tout est au tout, comme le retranché au retranché; aussi le reste sera au reste, comme le tout au tout.

Si le tout AB est au tout CD, comme le retranché AE est au retrãché CF: ie dis que le reste EB sera au reste FD, comme le tout AB au tout CD.

A....4 E...2B
C......6F...3D

Car puis que AB est à CD, comme AE, à CF; AB la plus petite, sera telle ou telles parties de CD, que AE de CF, & par la 7. ou 8. p. 7. le reste EB sera telle ou telle parties du reste FD, que le tout du tout: & partant par la 20. d. 7. le reste EB sera au reste FD, comme le tout AB au tout CD. ce qu'il faloit prouuer.

PROB. 10. PROP. XII.

Si autant de nombres qu'on voudra sont proportiõnaux; comme l'vn des antecedans sera à l'vn des consequens, ainsi tous les antecedans seront à tous les consequens.

Soient tant de nombres qu'on voudra proportiõnaux A, B; C, D; E, F; c'est à sçauoir qu'il y ait telle raison de A à B, que de C à D & que de E à F. Ie dis que tous les antecedans A, C, E, ensemble, seront a tous les consequens B, D, F ensemble, comme A l'vn des antecedans à B l'vn des consequens.

A......6C....4 E..2
B.........9D......6F..3

Car puis que les susdits nombres sont proportiõnaux, & A, C, E, sont moindres que B, D, F; par la 20. d. 7. A sera telle, ou telles parties de B, que C de D, & E de F; & par la 5. ou 6. p. 7. A & C ensemble seront telle, ou telles parties de B & D ensemble, que A de B, ou E de F. Derechef puis que A, C ensemble comme vn seul, est telle partie, ou parties de B, D, ensemble comme vn seul, que E de F, aussi par les mesmes prop. A, C ensemble auec E, seront telle ou telles parties de B, D ensemble auec F, que A de B; parquoy par la 20. d. 7. tous les antecedans A, C, E ensemble, auront mesme raison à tous les consequens B, D, F ensemble, que A a B. ce qu'il faloit prouuer.

THEOR. 11. PROP. XIII.

Si quatre nombres sont proportiōnaux : aussi en changeant ils seront proportionnaux.

Soient 4. nombres proportionnaux A, B, C, D, sçauoir qu'il y ait telle raison de A à B, que de C à D : Ie dis qu'en changeant, il y aura telle raison de A à C, que de B à D.	A.......... 12 B....... 8 C....... 9 D..... 6

Car puis que comme A est à B ainsi C à D par la 20. d. 7. D plus petit sera telle ou telles parties de C, que B est de A, & partant en changeant par la 9. ou 10. p. 7. D. sera telle ou telles parties de B, que C est de A, & par la 20. d. 7. conuertie, il y aura mesme raison de A à C que de B à D. Ce qu'il faloit demonstrer.

THEOR. 12. PROP. XIV.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra d'vn cōsté, & autant d'vn autre, qui se prēnent deux à deux, & en mesme raison ; iceux en raison egale, seront aussi en mesme raison.

Soient d'vne part tant de nombres qu'on voudra A, B, C, & autant d'autre part D, E, F, & que de deux en deux il y ait telle	A......... 9 B...... 6 C... 3	D.... 6 E.... 4 F.. 2

raison de A à B, que de D à E, & de B à C que de E à F. Ie dis qu'en raison egale, il y aura telle raison de A à C, que de D à F.

Car puis que comme A est à B, ainsi D à E, en changeant par la 13. p. 7. comme A sera à D, ainsi B à E : semblablement aussi puis que comme B est à C, ainsi E a F, en changeant cōme B sera a E, ainsi C à F. Donc comme A sera a D, ainsi C sera à F (car puis que A est à D, & C à F, en mesme raison que B à E, aussi A sera à D en la mesme raison que C à F, comme sera incontinent demonstré) & partant en changeant, comme A sera à C, ainsi D sera à F : ce qu'il falloit prouuer.

LEMME.

Or que A estant à D, & C à F, en mesme raison que B à E, ils soient de mesme raison entr'eux, nous le demonstrerons ainsi. D'autant que comme A est à D, ainsi B à E; E plus petit sera telle ou telles parties de B, que D de A: Derechef puis que comme B à E, ainsi C à F; F moindre sera telle, ou telles parties de C, que E de B: parquoy F sera aussi telle ou telles parties de C, que D de A & partant par la 20.d.7. conuertie, comme A sera à D, ainsi C sera à F. Donc les raisons des nombres qui sont de mesme a vne, sont aussi de mesme entr'elles.

SCHOLIE.

Ce Lemme respond à la 11.p 5. Dounot se sert d'icelle 11.p. 5. & d'autres prop du mesme liure pour appuyer les demonstrations des 7. 8. & 9. liures: mais il est euident qu'Euclide a voulu distinguer le nombre d'auec la grandeur, puis que plusieurs propositions demonstrees és grandeurs au 5. liure, sont derechef demonstrees en nombres és 7. 8. & 9. liures: & partant ne se doiuent appuyer les demonstrations des prop. de ceux cy sur celles de celuy-là. Ce qu'a bien aussi recogneu Dounot sur la premiere prop. du 7.

THEOR. 13. PROP. XV.

Si l'vnité mesure quelque nombre autant de fois qu'vn tiers mesure vn quart; aussi en changeant le second mesurera le quart autant de fois que l'vnité mesure le tiers.

A. 1
B. 1 G. 1 H. 1 C
D.. 2
E.. 1 I.. 2 K.. 1 F

Soit l'vnité A mesurant autant de fois BC, que D mesure EF: Ie dis qu'en changeant BC mesurera EF, comme A mesure D.

Car par l'hypothese BC estant diuisé par vnitez, & EF par la partie de D, icelle partie D sera autant de fois en EF, comme A en BC, & chacune partie de EF sera egale a D, comme chacune de BC a l'vnité, donc l'vnité BG est à la partie EI, comme GH à IK, & HC à KF : & partant par la 12. p 7. tous les antecedents BC seront à tous les consequents EF, cõme BG à EI, ou leur egaux A à D: ce qui estoit a prouuer.

THEO. 14. PROP. XVI.

Si deux nombres se multiplient l'vn l'autre; leurs produicts seront egaux entr'eux.

Soient deux nombres A, & B, & que A multipliant B produise C, & B multipliant A produise D : Ie dis qu'iceux deux produicts C & D sont egaux entr'eux.

Car puis que A multipliant B produit C : B sera autant dans C, que l'vnité est en A, par la 15. d. 7. & par la 15 p 7 en changeant A sera autant de fois dans C, que l'vnité est en B Item B multipliant A, & produisant D; A sera autant de fois dedans D, qu'il y a d'vnitez en B par la mesme 15. d. 7. & nous auons prouué que A estoit autant en C, que l'vnité en B ; donc A est autant en C qu'en D ; & partant par la 4. com sent. C & D seront egaux entr'eux : ce qu'il falloit demonstrer.

Vnité.
A...3 B.... 4
C........... 12
D........... 12

THEOR 15. PROP. XVII.

Vn nombre multipliant deux autres, les produicts seront entr'eux en mesme raison que les multipliez.

Soit le nombre A lequel multipliant les nombres B & C face D & E: Ie dis que les deux produicts D, & E, sont entr'eux, comme B à C.

Vnité.
A.. 2
B... 3 C.... 4
D...... 6
E........ 8

Car par la 15. def. 7. B multiplié par A est autant de fois dans son produict D, que l'vnité est en A, & C dans son produict E comme la mesme vnité en A : par consequent il y aura telle raison tant de B a D, que de C à E comme de l'vnité a A. P : quoy par le Lemme de la 14 p. 7. B sera a D, comme C a E, & en changeant par la 13 p. 7. comme B sera a C, ainsi D sera a E. Ce qu'il faloit prouuer.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Deux nombres multiplians vn autre, les produicts seront entr'eux, en mesme raison que les multiplians.

A.. 3		B... 4
	C.. 2	
D......6		E........

Soient deux nombres A & B, multiplians C, & soient les deux produicts D & E: Ie dis qu'iceux D & E seront l'vn à l'autre comme A est à B.

Car puisque A multipliant C produict D, aussi C multipliant A produira le mesme D par la 16. p. 7. & par la mesme raison puisque B multipliant C produict E, aussi C multipliāt B produira le mesme E: ainsi A & B multipliant C, c'est comme si C multiplioit A & B. Or C multipliant A & B, les deux produicts D & E, seront l'vn a l'autre comme A est a B, par la 17 p. 7. qui estoit à prouuer.

S C H O L I E.

Clauius a accommodé (apres Campanus) tant ceste propo. que precedente a tant de nombres qu'on voudra, en ceste sorte.

Si vn nombre multiplie tant de nombres qu'on voudra : ou quelconques nombres en multipliant quelque autre; les produicts seront entr'eux en mesmes raisons que les multipliez ou multiplians.

	A... 3	
B.. 2	C ...3	D 4
E...... 6	F......... 9	G......

Car le nombre A multipliant les nombres B, C, D, ou estant multiplié par iceux, soient produicts les nombres E, F, G. Ie dis que E, F, G, sont entr'eux

con

comme les nombres multipliez ou multiplians B,C,D; c'est à dire qui comme B est à C, ainsi E à F; & comme C à D, ainsi F à G. Car puis que E,F sont produicts de A multipliant B,C, ou de B,C, multipliez par A, comme B sera à C, ainsi E sera à F par la 17. ou 18 p. 7. Semblablement pource que F,G, sont produicts de A en C, D, ou de C,D par A, aussi comme C sera à D, ainsi F à G, & ainsi des autres.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Si quatre nombres sont proportionnaux; le produict du premier & quart, sera egal au produict du second & tiers. Et si le produict du premier & quart, est egal au produict du secōd & tiers; iceux quatre nombres sont proportionnaux.

A ...... 6 B 4
C ... 3 D .. 2
E 12
F 12
G 18

Soient 4 nombres proportionnaux A,B, C, D, & que le premier A multiplie par le dernier D produise E, & le second B par le tiers C produise F. Ie dis que E & F sont egaux.

Qu'ainsi ne soit. Soit multiplié A par C, & le produict soit G: d'autant que A multiplié par C & D, produict G & E, il y aura telle raison de G à E, que de C à D, par la 18.p.7. Pareillement d'autant que C multipliant A & B, produict G & F, il y aura telle raison de G à F, que de A à B, par la 17.p. 7. ou de C à D, qui sont en mesme raison que A & B. Parquoy G estat à E, & G à F en mesme raison que C à D, par le lemme de la 14.p.7.cōme G sera à E, ainsi G sera à F; parquoy G aura mesme raison à E qu'à F; & partant E & F seront nombres egaux, ainsi que nous auons dit en la 20.def.

Pour la seconde partie, soit E produict de A multiplié par D, egal à F, produit de B multiplié par C: Ie dis que A est à B comme C est à D.

Car si G est produict de A multiplié par C; E & F nōbres egaux auront mesme raison à G, comme nous auons dit en la 20.def. Mais il y a telle raison de G à E, comme de C à D, par la 18.p.7. & telle raison de G à F, comme de A à B, par la 17. p.7. & partant par le lemme de la 14. p. 7. A sera à B, comme

C à D : ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si trois nombres sont proportionnaux, le produict des extremes est egal au produict du milieu : & si le produict des extremes est egal à celuy du milieu ; iceux trois nombres seront proportionnaux.

Ceste proposition est aisee à demonstrer : car en posant le nombre du milieu deux fois, afin qu'il y ait 4. nombres proportionnaux, desquels le second & tiers soient egaux ; par la precedente le produict du premier & quart, sera egal au produict du second & tiers, c'est à dire au produict du second par soy mesme &c.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont la mesme raison auec iceux, mesurent egalement les nombres qui ont la mesme raison, sçauoir le plus grãd, le plus grand, & le plus petit, le plus petit.

A ... 3 B 4
C ...... 6 D .... [illegible]

Soient deux nombres les plus petits en leur raison A & B, & deux autres nombres plus grands C & D en mesme raison qu'iceux A & B : Ie dis que de mesme façon que A mesure C, aussi B mesure D.

Car puisque iceux A, B, C, D, sont proportionnaux, ils le seront aussi en changeant par la 13. p. 7. A sera donc à C, comme B à D & A & B plus petits que C & D, & par la 20. d. 7. sera mesme partie ou parties d'iceux C & D. Or ils ne peuuent estre parties : car ils ne seroiẽt les plus petits nombres de leur raison, comme il est aisé de prouuer par la 20. def. & 13. p. 7.

Donc A eſt meſure partie de C, que B de D: & partant A meſure C, autant de fois que B meſure D : ce qu'il falloit demonſtrer.

THEO. 20. PROP. XXII.

S'il y a trois nombres d'vn coſté, & autant d'vn autre, leſquels pris de deux en deux ſoiẽt en meſme raiſon, la proportion eſtant troublee; en raiſon egale, ils ſeront proportionnaux.

A.... 4	D............ 12
B... 3	E........ 8
C.. 2	F...... 6

Soient trois nombres d'vn coſté A, B, C, & trois d'vn autre D, E, F, & qu'en proportion troublee A ſoit à B, comme E à F, & B à C, comme D à E: Ie dis qu'en raiſon egale A ſera à C, comme D à F.

Car A eſtant à B, comme E à F, le produict de A multiplié par F, ſera egal au produict de B multiplié par E, par la 19. p. 7. Item B eſtant à C, comme D à E, le meſme produict de B multiplié par E, ſera egal au produict de C multiplié par D, par la meſme prop. & partant le produict de A par F, ſera egal au produict de C par D, & par la 19. p. 7. il y aura telle raiſon de A à C, comme de D à F: ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

D'autant que de ſix moyens d'argumenter ès proportions, leſquels Euclide a expliqué en grandeur, & demonſtré au 5. liure, il en demonſtre en celuy-cy ſeulement deux en nombres. Il ne ſera hors de propos de demonſtrer auſſi en nombres les 4. autres moyens, comme ont faict pluſieurs Interpretes.

I.

Si quatre nombres ſont proportionnaux; par raiſon inuerſe, ou en changeant, ils ſeront auſſi proportionnaux.

Soit A à B comme C à D. Ie dis qu'en changeant comme B à A, ainſi D à C. Car

A...... 6.	*C... 3*
B.... 4	*D.. 2*

puis que comme A à B, ainsi C à D, en permutant par la 13.p.7 comme A sera à C, ainsi B a D. Derechef puis que B est a D comme A à C, par la mesme prop. B sera a A comme D a C. Ce qui estoit propose.

II.

Si les nombres composez sont proportionnaux; iceux diuisez seront aussi proportionnaux.

Soit AB à CB comme DE à FE. Ie dis qu'aussi en diuisant comme AC à CB, ainsi DF à FE. Car puis que comme AB à CB, ainsi DE à FE. en permutant par la 13.p.7. comme le tout AB au tout DE, ainsi le retranché CB au retranché FE: & partant par la 11.p.7. comme le tout AB au tout DE, ainsi le reste AC sera au reste DF: c'est à dire AC à DF comme CB à FE: donc en permutant comme AC sera à CB, ainsi DF sera à FE. Ce qui estoit proposé.

A ...... 6 C ... 3
D .... 4 F .. 2

Par la mesme maniere nous demonstrerons comme au liure 5. la diuision conuerse & contraire de raison. Car soit premierement comme AB à CB, ainsi DE à FE. Ie dis que par diuision conuerse de raison, comme CB à AC, ainsi FE à DF. Car puis que comme AB à CB, ainsi DE à FE: en diuisant comme AC sera a CB, ainsi DF à FE: & en changeant comme CB sera à AC, ainsi FE sera a DF.

Soit maintenant comme AC à AB, ainsi DF a DE. Ie dis par diuision contraire de raison, que comme AC est a CB, ainsi DF à FE. Car puis que comme AC a AB, ainsi DF à DE: en changeant comme AB sera à AC, ainsi DE a DF. Donc en diuisant comme CB à AC, ainsi FE a DF: & en changeant comme AC sera a CB, ainsi DF a FE. Ce qui estoit propose.

III.

Si les nombres diuisez sont proportionnaux: iceux composez seront aussi proportionnaux.

Soit AB a BC, comme DE a EF. Ie dis qu'en composant comme AC est a BC, ainsi DF a EF. Car puis que comme AB a BC, ainsi DE a EF: en permutant par la 13 p. 7. comme AB a DE, ainsi BC a EF: & partant par la 12.p.7. comme AB, BC ensemble a DE, EF ensemble, c'est a dire la toute AC a la toute DF, comme BC a EF: & en permutant par la 13.p.7. comme AC a BC, ainsi DF a EF. Ce qui estoit propose.

A ...... 6 B ... 3
D .... 4 E .. 2

Semblablement nous demonstrerons icy comme au 5. liure la composition conuerse & contraire de raison. Car soit premierement comme AB a BC, ainsi DE a EF. Ie dis par composition conuerse de raison, que comme AC est a AB, ainsi DF a DE. Car veu que AB a BC, comme DE a EF: en changeant comme BC sera a AB, ainsi EF a DE: & en composant côme AC sera a AB, ainsi DF sera a DE

Maintenant soit derech f AB a BC, comme DE a EF. Ie dis que par composition contraire de raison comme AB est a AC, ainsi DE a DF: car puisque comme AB à BC, ainsi DE à EF: en changeant comme BC sera a AB, ainsi EF a DE. Donc en composant comme AC a AB, ainsi DF a DE, & en changeant comme AB sera a AC, ainsi DE a DF.

IIII.

Si les nombres composez sont proportionnaux; ils le seront aussi par conuersion de raison.

Soit comme AB a CB, ainsi DE a FE. Ie dis que par conuersion de raison, comme AB est a AC, ainsi DE a DF. Car puis que comme AB a CB, ainsi DE a FE: en permutant par la 13.p.7. comme le tout AB sera au tout DE, ainsi le retranché CB sera au retranché FE: & partant par la 11.p.7. comme le tout AB au tout DE, ainsi le reste AC, au reste DF. Donc en permutant comme AB sera a AC, ainsi DE a DF. ce qui estoit proposé.

A ...... 6 C ... 3 B
D .... 4 F .. 2 E

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Les nombres premiers entr'eux, sont les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison auec iceux.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B. Ie dis qu'ils sont les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison qu'eux.

A ...... 6 B 5
C .... 4 D ... 3 F .. 2

Car s'il n'est ainsi, soient C & D plus petits en la mesme raison, s'il est possible, par la 21.p.7. ils mesureront A & B, l'vn comme l'autre: qu'ils les mesurent donc par le nombre E. Donc E sera commune mesure entre A & B: ainsi ils ne seroiét point premiers entr'eux, mais composez contre l'hypothese. A & B sont donc les plus petits de tous ceux qui sont en mesme raison qu'eux.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont vne mesme raison, sont premiers entr'eux.

Soient les nombres A & B, les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison : Ie dis qu'ils sont premiers entr'eux.

A ...... 6 D ..
C ..
B ..... 5 E ...

Autremẽt s'ils ne sont premiers, que C les mesure tous deux s'il est possible, sçauoir A autant de fois qu'il y a d'vnitez en D ; & B autant de fois qu'il y a d'vnitez en E. Veu donc que C mesure A par les vnitez qui sont en D ; & B par les vnitez qui sont en E ; C multipliant D & E, produira A & B par la 9. com. sent. Parquoy par la 17. p. 7. il y aura mesme raison de A & B que de D à E : & partant puis que D & E sont parties d'iceux A & B, ils sont moindres : ainsi A & B ne seront pas les plus petits nombres de tous ceux qui ont la mesme raison : ce qui est contre nostre hypothese. A & B sont donc nombres premiers entr'eux.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, celuy qui en mesurera l'vn sera premier à l'autre.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, l'vn ou l'autre desquels, sçauoir A, soit mesuré par le nombre C. Ie dis que C est premier à l'autre B.

A ...... 6 B 5
C ... 3 D .. 2

Autrement si B & C ne sont premiers entr'eux, que D les mesure tous deux, s'il est possible. Veu donc que D mesure C, & C mesure A, par la 11. com. sent. D mesurera aussi A : mais il mesure pareillement B. Donc A & B ne sont premiers entr'eux, contre l'hypothese. C est donc premier à B. Si quelque nõbre mesure B, on prouuera en la mesme maniere qu'il sera premier à l'autre A.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Si deux nombres sont premiers à quelque autre, le produit des deux sera premier à cest autre.

Soient deux nombres A & B, tous deux premiers à C; & que A multiplié par B produise D. Ie dis que D est premier à C.

A..2 B...3 C.....5
D......6 E..2 F...3

Autrement si D & C ne sont premiers entr'eux, qu'ils soiēt composez, & que E les mesure tous deux, sçauoir D par le nombre F: Donc E multipliant F, produict D par la 9. com. sent. cōme aussi A par B: ainsi A, E, F, B, seront proportionnaux par la 19. p. 7. Item A & C sont premiers: donc E mesurant C sera premier à A par la 25. p. 7. & par la 23. p. 7. A & E estans premiers, ils seront les plus petits de leur raison: ainsi ils mesureront F & B qui sont en la mesme raison, sçauoir A mesurera F, & E mesurera B par la 21. p. 7. Mais il mesure aussi C: B & C ne seroient donc pas premiers, contre l'hypothese. D sera donc premier à C.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, le produict de l'vn d'iceux multiplié par soy, est premier au restant.

Soient deux nombres premiers A, & B, & que l'vn ou l'autre d'iceux sçauoir est A, multiplié par soy produise C. Ie dis que B, & C sont premiers entr'eux.

A...3 B....4
C.........9 D...3

Car si on prend D, egal à A; B sera aussi premier à D. Ainsi A & D estans premiers à B, par la 26. p. 7. A multiplié par D, c'est à dire par soy-mesme, produira C premier au mesme B. Ce qu'il faloit prouuer.

THEOR. 26. PROP. XXVIII.

Si deux nombres sont premiers à deux autres; (l'vn & lautre à l'vn & à lautre) leurs produicts seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres A, & B premiers à deux autres C, & D, & que E soit le produict de A mul-

A..2 B...4
C...3 D.....5
E........8 F...............15

tiplié par B, & F produict de C multiplié par D: Ie dis que E, & F sont premiers entr'eux.

Car A, & B estans premiers à C, leur produict E sera aussi premier au mesme C: par la 26 p. 7. par le mesme discours E sera aussi premier à D; ainsi C & D estans premiers a E, leur produict F sera aussi premier à E par la 26.p.7.

THEOR. 27 PROP. XXIX.

Si deux nombres premiers entr'eux sont multipliez chascun par soy; leurs produicts seront premiers entr'eux: Et si iceux deux produicts sont encore multipliez par les nombres premiers proposez au commencemẽt; les produicts sont encores premiers entr'eux, & tousiours enuiron les extremes aduiendra la mesme chose.

A..2 B...3
C....4 D.........9
E........8 F.............................27
G 16 H 81.

Soient deux nombres premiers entr'eux A, & B, & que A multiplié par soy mesme produise C, mais B multiplié par soy produise D. Ie dis que C, & D, seront premiers entr'eux. Item si A multipliant C produict E; & B multipliant D produict F. Ie dis que E & F seront premiers entr'eux.

Car par la 2 .p 7. A & B estas premiers, C produict de A multiplié par soy, sera premier a B restant: par la mesme raison B & C estans premiers entr'eux, D sera aussi premier à C. De rechef puis que A & B sont premiers, par la 27. p. 7. C sera aussi premier a B; & D à A: Mais il a esté demonstré que C est aussi premier à D: parquoy l'vn & l'autre nõbre A, C, sera premier a l'vn & a l'autre nombre B, D; & partant par la 28 p. 7. E produict de A en C sera premier a F produict de B, par D

Que si encore A multipliant E produict G; & B multipliant F produict H: G & H seront aussi premiers entr'eux. Car pu que A & C sont premiers à B, leur produict E sera aussi premier à B par la 26. p.7. Par la mesme raison F sera aussi premier à A. Ainsi les deux A, E, seront premiers aux deux B, F, sçauoir l'vn & l'autre, à l'vn & à l'autre; & partant par la 28. p. 7. G produict de A en E, sera aussi premier à H produict de B en F, & ainsi a l'infiny.

THEOR. 28. PROPO. XXX.

Si deux nombres premiers entr'eux sont adioustez ensemble; le produict sera premier à tous deux: & si le produict est premier à iceux deux nombres; ils seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres premiers entr'eux AB, & BC: Ie dis que le composé des deux AC, sera premier à tous deux.

Car s'ils ne sont premiers, soit D leur commune mesure s'il est possible: si dõc D mesure le tout AC, & la partie AB; il mesurera aussi le reste BC, par la 12. com. sent. ainsi AB, & BC ne seroient premiers entr'eux contre l'hypothese.

A...3 B....4 C

D..2

Secondement, si le tout AC est premier à AB, & à BC. Ie dis que AB, & BC seront premiers entr'eux. Autrement que D les mesure s'ils ne sont premiers; il mesurera aussi le composé des deux AC, par la 10. com. sent. ainsi AC ne seroit premier à AB, & BC, ce qui est contre l'hypothese. AB & BC sõt donc premiers entr'eux.

COROLLAIRE.

Il s'ensuit de cecy que si vn nombre composé de deux, est premier à l'vn d'iceux, il sera aussi premier a l'autre. Car si AC est premier a AB; AB, BC seront premiers entr'eux par la seconde partie de ceste propo. Donc aussi AC sera premier a BC par la premiere partie de la mesme prop. ce qui a esté proposé.

THEOR. 29. PROP. XXXI.

Tout nombre premier eſt premier à tout autre qu'il ne meſure pas.

Ceſte propoſition eſt aiſee à demonſtrer : car s'ils n'eſtoient premiers, ils auroient vne commune meſure autre que l'vnité ; ainſi pas vn des deux ne ſeroient premiers contre l'hypotheſe.

THEO. 30. PROP. XXXII.

Si deux nombres ſe multiplient l'vn l'autre, & que quelque nombre premier meſure leur produict ; il meſurera auſſi l'vn d'iceux deux nombres.

Soient deux nombres A, & B, de la multiplication deſquels ſoit produict C, & que D nombre premier meſure iceluy C.

A .... 4 B 6
C .... 24 D ... 3 E 8

Ie dis qu'il meſurera auſsi l'vn ou l'autre de A ou B.
Autrement s'il ne meſure l'vn ny l'autre, qu'il meſure C par le nombre E : Si donc D ne meſure A, par la 31.p.7. il ſera premier à iceluy, & par la 23.p.7. ils ſeront les plus petits de leur raiſon. Mais pour autant que D par E faict C, auſsi bien que A multiplié par B, par la 19.p.7. A ſera à D, comme E, à B, & par la 21.p.7. D meſurera B ; ce qui eſtoit à prouuer.

THEOR. 31. PROP. XXXIII.

Tout nombre composé eſt meſuré par

quelque nombre premier.

Soit le nombre composé A. Ie dis qu'il sera mesuré par quelque nombre premier.

Car puis qu'il est composé, il sera mesuré de quelque nombre par la 13. p. 7. & soit de B, lequel sera composé ou non : s'il est premier, la prop. est manifeste : mais s'il est composé, il sera mesuré par vn autre nombre, & soit C, lequel sera premier ou non : s'il est premier, puis qu'il mesure B ; & B mesure A, aussi C mesurera A par la 11 com. sent. Mais si C est composé, il sera mesuré par quelque autre nombre : Et pource qu'vn nombre ne se diminue infiniemẽt, nous viendrons finablement à quelque nombre que nul autre ne mesurera ; & partant à vn nombre premier, lequel mesurãt tous les precedents, mesurera aussi le composé A. Ce qu'il faloit prouuer.

A.......8
B....4
C..2

THEOR. 32. PROP. XXXIV.

Tout nombre est premier, ou bien mesuré par quelque nombre premier.

Ceste demõstration est euidente : car si vn nombre n'est premier, il est composé, & par la precedente tout nombre composé, est mesuré par quelque nombre premier.

PROB. 3. PROP. XXXV.

Tant de nombres qu'on voudra estans donnez, trouuer les plus petits de tous ceux qui auront mesme raison.

Soient donnez tant de nombres qu'on voudra A, B, C : & faut trouuer les plus petits en la mesme raison.

A......6 B....4 C........8
D.. 2
E...3 F.. 2 G....4
H..2 I.. K... L..

Si A, B, C sont premiers entr'eux, on a ce que l'on cherche par la 23. p. 7. s'ils sont composez, soit trouué D plus grande commune mesure d'iceux A,B,C,par la 3 p.7.laquelle mesure A selon E; B selon F,& C selon G. Ie dis que E,F & G sont les plus petits nombres qui soient en la raison de A,B, & C.

Car il est euident qu'iceux E,F,G sont és mesmes raisons que A,B, C,d'autant que D mesurant iceux A,B,C par les nóbres E,F,G;D multipliant iceux E,F,G,seront produicts A,B, C,par la 9.com.sent. & par ce que nous auons demonstré à la 18.p.7. E,F,G,auront la mesme raison que les multipliez A, B,C. Et qu'ils soient les plus petits, on le demonstrera ainsi. S'ils ne sont tels, soient H,I,K les plus petits nombres ayans mesme raison qu'iceux A, B, C : ils les mesureront donc egalement par la 21.p.7. & soit par le nombre L, ce qu'estant,par la 9.com sent.L multipliant H,I,K, seront produits les nombres A,B,C.Veu dõc que D multipliãt E,fait A;& L multipliãt H, faict le mesme A; par la 19. p.7.il y aura telle raison de D à L,que de H à E: mais H est moindre que E: donc D sera aussi moindre que L: Et puis que H,I,K mesurẽt A,B,C,par L; L mesurera aussi iceux A,B,C,par la 8 cõ.sent.& ainsi D ne sera la plus grande commune mesure d'iceux A, B, C: ce qui est contre l'hypothese. Il n'y a donc point d'autres nombres moindres que E, F, G, qui soient en mesme raison, que les proposez A,B,C.

COROLLAIRE.

Il appert icy que la plus grande commune mesure de quelconques nombres,mesure iceux par les nombres qui sont les plus petits de tous ceux qui sont en la mesme raison qu'iceux proposez.

SCHOLIE.

Par ces choses appert le moyen de trouuer les deux plus petits nombres qui ont la mesme raison,que tant de nombres qu'on voudra dóner continuellemẽt proportiõnaux. Comme si on propose les nombres A,B,C,continuellement proport.nous trouuerons les deux moindres en la mesme raison,si par ce prob.nous prenons E & F en la mesme raison des deux A & B, c'est à sçauoir ces nombres là,par lesquels D plus grande commune mesure d'iceux A & B,mesure iceux. Car par le corol.cy dessus, E & F seront les plus petits de tous ceux qui sont en la mesme raison que A à B: c'est à dire en la raison des continuellement proportionnaux A,B,C.

PROBL. 4. PROP. XXXVI.

Trouuer le plus petit nombre que peuuẽt mesurer deux nombres donnez.

Soient les nombres donnez A & B : il faut trouuer le plus petit nõbre mesuré par iceux.

A..3 B....4
C............12
D.......... 10
E... F..

Si le plus petit mesure le plus grand, iceluy plus grãd sera le nombre que nous cherchõs ; que si l'vn ne mesure l'autre, ou A & B seront premiers entre eux, ou non; si premiers, soit C produit de A, multiplié par B. Je dis que C est le plus petit nombre mesuré par A, & par B. Car par la 7. com. sent. il est euident que C sera mesuré par l'vn & par l'autre; & s'il n'est le moindre nombre mesuré par iceux A, B; en soit vn autre plus petit D, s'il est possible, lequel A mesure selon le nombre E; & B selon le nombre F. Ce qu'estant, D sera produit tant de A multiplié par E, que de B par F par la neufiesme commune sentence, & partant par la 19. p. 7. A sera à B cõme F à E. Item A, & B, estans premiers, ils seront les plus petits de leur raison par la 23. p. 7. & A mesurera F par la 21 p. 7. & d'autant que B multipliant A produict C, & multipliant F produict D, il y aura telle raison de C à D, que de A à F, par la 17. p. 7. Mais nous auons monstré que A mesuroit F. donc C mesurera aussi D, sçauoir le plus grand mesurera le plus petit, ce qui est impossible C estoit donc le moindre nombre que peuuent mesurer A & B.

Soient maintenant les deux nombres A, & B composez, & par la 35. p. 7. soient trouuez C, & D les plus petits nombres de la mesme raison; par la 19. p. 7. E produit de A multiplié par D, sera egal au produict de B multiplié par C: ainsi E sera mesuré par B, & par A ; & par le mesme discours de la precedente demõstration, on monstrera qu'il est le plus petit nombre mesuré par A, & par B.

A.... 4 B...... 6
C..2 D...3 E............12

THEOR. 33. PROP. XXXVII.

Si deux nombres mesurent vn autre nombre: le plus petit qu'ils mesurent, mesurera aussi iceluy autre.

Soient deux nombres A, & B qui mesurent vn autre CD, & que le plus petit nombre qu'ils mesurent soit E. Ie dis que E mesurera aussi CD.

A..2 B...3
C.......7F....5D
E......6

Autrement, si E ne mesure CD ; apres auoir mesuré CF, qu'il laisse FD plus petit que soy : A & B mesurans E, ils mesurerõt aussi CF par la 11.com.sen. Mais ils mesurẽt le tout CD par la 12.com.sen. ils mesurerõt dõc aussi le reste FD plus petit que C; ce qui est impossible, estant le plus petit qu'ils mesurent. Parquoy E mesurera CD : ce qu'il falloit prouuer.

PROB. 5. PROP. XXXVIII.

Trouuer le plus petit nombre que peuuent mesurer trois nombres donnez.

Soient trois nombres donnez A, B, C, il faut trouuer le plus petit nombre qu'ils mesurent.

B ..2 B ...3 C......4
D 6
E ....

Soit trouué D plus petit nombre que peuuent mesurer A & B, par la 36. p.7. Or C mesure aussi D, ou il ne le mesurera pas : s'il le mesure : ie dis qu'il est aussi le plus petit qu'iceux A, B, C peuuent mesurer : car s'il ne l'est, en soit quelque autre plus petite E, s'il est possible, lequel tous les trois A, B, C mesurent. D'autant que A & B mesurent E moindre que D, iceluy D, ne sera le moindre que A & B mesurent, ce qui est contre l'hypothese. D est donc le moindre nombre que peuuent mesurer les nombres proposez A, B C.

Que si D n'est aussi mesuré par C : par la mesme 36. p.7. soit trouué E plus petit nombre mesuré par C & D: Ie dis que E sera le plus petit nombre mesuré par A, B, C.

A..2 B..C.3 4
D......6
E 12
F ....

Car premierement E est mesuré par A, B, C: d'autant que C, & D, le mesurent & A & B mesurant D, par la 11.com sent. ils mesureront aussi E mesuré par D. Que si E n'est le plus petit mesuré par A, B, C, soit F plus petit, s'il est possible : A & B donc mesurant F; D le plus petit mesuré par eux, mesurera aussi F par la 37. p.7. Mais C mesure aussi F; (car A, B, & C le mesurent) donc C, & D mesureront F. Et par la 37. p.7. E plus petit mesuré par C & D, mesurera aussi F ; le plus grand vn plus petit ce qui est impossible. Donc E estoit le plus petit nombre mesuré par A, B, C.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, que si trois nombres en mesurent quelque autre, le plus petit qu'ils mesurerōt, mesurera aussi cest autre. Car il a esté demonstré que A, B, C, mesurant F; aussi E le plus petit mesuré par A, B, C, mesure le mesme nombre F.

SCHOLIE.

Par mesme raison estans donnez plus de trois nombres, nous trouuerons le plus petit nombre qu'ils mesurent. Car si 4. nombres sont donnez, il faudra trouuer le moindre que trois mesurēt: si 5. il faudra trouuer le plus petit que 4. mesurēt &c. procedant au reste tout ainsi qu'il a esté dict de trois nombers.

THEOR. 34. PROP. XXXIX.

Si vn nombre mesure vn autre nombre; le mesuré aura vne partie denommee par le mesurant.

Vnité.

A...3 B......6 C..2

Soit le nombre A, lequel mesure le nombre B. Ie dis que iceluy B contiendra vne partie denommée par A.

Qu'ainsi ne soit; que A mesure B selon C, c'est à dire autant de fois qu'il y a d'vnitez en C; par la 15. p. 7. C mesurera B autant de fois, que l'vnité mesure A: & C sera telle partie de B que l'vnité de A. Mais l'vnité est vne partie de A, denommée par iceluy A, comme nous auons dict en la 2. d. 7. donc aussi C sera vne partie de B denommée par A.

THEOR. 35. PROP. XL.

Si vn nombre a vne partie quelle elle soit; le nombre nommant ceste partie le mesurera.

Soit le nombre A, ayant la partie B denommee par le nombre C. Ie dis que C mesure A.

A 12
B...3 C....4

Car puis que B est partie denommée par C ; & l'vnité est partie de C. denommée par le mesme C; comme l'vni é mesure C, ainsi B mesure A: & par la 5. p. 7. en changeant comme l'vnité mesurera B, ainsi C mesurera A.

PROB. 6. PROP. XLI.

Trouuer le plus petit nombre qui ayt les parties donnees.

A *deuxiesme*	D. 2
B *tiers*	E. 3.
C *quart.*	F... 4
G............ 12	
H..........	

Soient les parties donnees A, B, C; il faut trouuer le plus petit nombre qui ait icelles parties.

Soient pris les trois nombres, D, E, F, denommez par icelles parties A, B, C; & par la 38 p. 7. soit trouué G, le plus petit nombre que peuuent mesurer D, E. F: Ie dis que D contient les parties A, B, C

Car puis que D, E, F mesurent G; par la 39. p. 7. G aura les parties denommees par D, E, F, c'est a dire les parties A, B, C. Ie dis aussi que G est le plus petit nombre qui ait icelles parties. Car s'il ne l'est, soit H plus petit, s'il est possible, ayant icelles parties Et H sera mesuré par les nombres D, E, F denommées par les parties A, B, C par la 40. p 7. & partant puis que H est moindre que G; iceluy nombre G mesurera le plus petit que peuuent mesurer les nombres D, E, F, contre l'hypothese. G est donc le moindre nombre ayant les parties donnees A, B, C.

Fin du septiesme Element.

HVICTIESME

ELEMENT HVICTIESME.

THEO. 1. PROP. I.

Si tant de nombres qu'on voudra sont cõtinuellement proportionnaux, & les extremes sont premiers entr'eux; ils seront les plus petits de leur raison.

SOIENT A.4. B.6. C.9. trois nõbres continuellement proportionnaux A, B, C, & que les extremes A, & C, soient premiers entr'eux: Ie dis que A, B, C, sont les plus petits qui soient en la mesme raison.

Autrement soient D, E, F, plus petits en la mesme raison, s'il est possible. En raison egale, D sera à F, comme A est à C par la 14. p. 7. & par ce que A, & C sont premiers entr'eux, ils seront les plus petits de leur raison, par la 23 p. 7. & par la 22. p. 7. ils mesurerõt D, & F: ce qui est impossible, pour estre plus petits qu'iceux. Donc A, B, C, estoient les plus petits en la mesme raison.

D.3. E.5. F.8.

PROB. 1. PROP. II.

Trouuer tant de nombres qu'on voudra

continuellement proportionnaux, les plus petits en la raison donnee.

		F. 8.
	C. 4.	
A. 2.		G. 12.
	D. 6.	
B. 3.		H. 18.
	E. 9.	
		I. 27.

Soiēt les deux nombres A, & B les plus petits de tous ceux qui ont mesme raisō: il faut trouuer le requis.

Que A multiplié par soy produise C; A par B produise D; B par soy produise E. Ie dis premierement que C, D, E, sont continuellement proportionnaux en la raison de A à B. Car puis que A multipliāt A & B a produict C & D; comme A sera à B, ainsi C à D par la 17. p. 7. Derechef, puis que B multipliant A & B produit D & E, comme A sera à B, ainsi D sera a E: Parquoy C, D, E, seront cōtinuellement proportionnaux en la raison de A à B. Ie dis aussi qu'ils sont les plus petits d'icelle raison dōnee. Car parce que par la 24. p. 7. A & B sont premiers, aussi par la 29. p. 7. C, & E seront premiers: & par la 1. p. 8. C, D, E, seront les plus petits en la raison donnee de A à B.

Que si on en vouloit quatre. Que A multiplié par C produise F; A par D produise G; B par D produise H; B par E produise I: Ie dis que F, G, H, I sont les nombres requis. Car par le mesme discours de la 17. & 18. p. 7. les nombres seront cōtinuellement proportionnaux, & par la 24. & 29. p. 7. F & I seront premiers entr'eux: & par la 1. p. 8. F, G, H, I, seront les plus petits qui ayent la mesme raison qu'iceux extremes F & I. Et en ceste façon on en trouuera tant que l'on voudra.

COROLLAIRE.

Il resulte de cecy que trois nombres continuellemēt proportionnaux, estans les plus petits de leur raison; les extremes seront quarrez: s'il y en a quatre qu'iceux extremes seront Cubes. Car des trois C, D, E, les extremes C, & F, ont esté produicts de A & B multipliez par eux mesmes, & des 4. F, G, H, I, les extremes F & I ont esté produicts de la multiplication de A & B par leurs quarrez C & E.

Il resulte encore que les extremes des nombres continuellement proportionnaux trouuez selon ceste prop. sont premiers entr'eux. Car il a esté demonstré par les 24 & 29 p 7 que les extremes C, E; & F, I sont premiers entr'eux.

THEOR. 2. PROP. III.

Si tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux, sont les plus petits de tous ceux qui ont mesme raison : les extremes seront premiers entr'eux.

A. 8.			L. 8.
		H. 4.	
B. 12.	F. 2.		M. 12.
		I. 6.	
C. 18.	G. 3.		N. 18.
		K. 9.	
D. 27			O. 27.

Soient quatre nombres continuellement proportionnaux, les plus petits de tous ceux qui sont en la mesme raison, A, B, C, D: Ie dis que les extremes A, & D sont premiers entr'eux.

Car soient trouuez par la 35. p. 7. les plus petits qui soient en la raison de A à B, sçauoir F, & G, ils serōt premiers entr'eux, par la 23. p. 7. & cōme il a esté enseigné en la preced. soient trouuez 4. nōbres continuellemēt proportiōnaux, & les plus petits en la raison de F à G, sçauoir premierement les trois H, I, K. Puis apres les quatre L, M, N, O. Iceux estās les plus petits en la raison de F à G, ils seront egaux aux quatre A, B, C, D, qui sont aussi les plus petits en la mesme raison. Et comme les extremes L, & O sont premiers entr'eux par le corol. de la preced. seront aussi premiers entre eux A, & D. Ce qu'il falloit prouuer.

PROB. 2. PROP. IIII.

Estans dōnees tant de raisons qu'on voudra en nombres les plus petits d'icelles raisons, trouuer tant de nombres qu'on voudra les les petits continuellement proportionnaux selon les raisons donnees.

Soient donnees les deux raisons de A à B, & de C à D, aux plus petits termes d'icelles : il faut trouuer trois nombres en continuelle proportion, les plus petits de ceux qui sont selon les raisons donnees.

A. 2.	
	G. 8. L. 7.
B. 3.	
	F. 12. M. 11.
C. 4.	
	H. 15. N. 13.
D. 5.	

Soit trouué F le plus petit nombre qui soit mesuré par B, & par C, par la 36. p. 7. en apres soit trouué G, autant de fois mesuré par A que F, par B. Pareillement H autant de fois mesuré par D que F par C. Ie dis que les trois nombres G, F, H, sont les nombres requis.

Car il est euident qu'ils sont continuellement proportionaux en la raison donnee, d'autant que A mesure autant de fois G, que B mesure F ; & par consequent A & B multiplians vn mesme nombre (sçauoir celuy par lequel ils mesurent G & F) ont produict G & F : par la 18. p. 7. G est à F, en mesme raison que A à B. Et par mesme discours F sera à H, comme C à D.

On prouuera aussi qu'ils sont les plus petits, selon les raisons donnees : d'autant que s'il n'est ainsi, en soient trouuez de plus petits L, M, N, s'il est possible, & qui respondent aux raisons donnees comme les trois G, F, H : il est euident que B & C doiuent mesurer M, à cause des semblables raisons, par la 21. p. 7. Mais F est le plus petit nombre mesuré par B & par C, & par la 37. p. 7. F mesurera M, sçauoir est, le plus grand, le plus petit : ce qui est impossible. Partant G, F, H, estoient les plus petits selon les raisons donnees.

Que si trois raisons estoient donnees aux plus petits termes A à B ; C à D, & F à G, selon lesquelles il fallut trouuer quatre nombres tels que requiert la proposition : on procedera en ceste sorte.

Soient trouuez les trois nombres I, H, K, cõme dessus : ce faict ou F mesurera K, ou non. S'il le mesuroit, faudroit prendre L autant de fois mesuré par G, que K par F ; & par la precedente demonstration, il est euident qu'on auroit satisfaict. Que si F ne mesure K, soit trouué O le plus petit nombre mesuré par F, & par K, par la 36. p. 7. Et que G mesure autant de fois P, que F mesure O. Item que comme K mesure O, ainsi H mesure N ; & I mesure M. Ie dis que M, N, O, P sont les quatre nombres requis.

A. 2.	
	I. 8. M. 16
B. 3.	
	H 12. N. 24
C. 4.	
	K. 15. O. 30
D. 5.	
F. 6.	
	L. P. 35
G. 7.	

La demonſtration ſe fera de meſme que la precedente.
En la meſme maniere ſera procedé ſi 4. ou d'auantage de raiſons ſont donnees aux plus petits termes.

THEOR. 3. PROP. V.

Les nombres plans ſont l'vn à l'autre en raiſon composee de leurs coſtez.

Soient les deux nombres plans A, & B, les coſtez de A, ſoient C, & D, & les coſtez de B, ſoiēt E, & F. Ie dis que le plan A eſt au plan B, en raiſon composee de C à E, & de D à F.

C. 3.
A. 12.
D. 4.
G. 8.
E. 2.
B. 18.
F. 9.

Qu'il ne ſoit ainſi. Que D multiplié par E produiſe G. Donc D multipliant C & E, produira A & G en meſme raiſon que C & E, par la 17. p. 7. Et par meſme raiſon E multipliant D & F, produira G & B en meſme raiſon que D & F: ainſi la raiſon de A à G, & de G à B, ſera comme de C à E, & de D à F. Et par la 5, d. 6. la raiſon de A à B eſtant composee de A à G, & de G à B, la raiſon du nombre plan A au nombre plan B, ſera composee de la raiſon des coſtez C à E, & D à F: ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 4. PROP. VI.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que le premier ne meſure le ſecond, ny pas vn autre ne meſurera pas vn autre.

Soient tant de nombres que l'on voudra cōtinuellement proportionnaux A, B, C, D; Et que le premier A, ne meſure point le ſecond B. Ie dis que pas vn autre n'en meſurera pas vn autre,

A. 8. B. 12. C. 18. D 27.
E. 4. F. 6. G. 9.

Car premierement, comme A ne meſure point B, ainſi B ne mesurera C; ny C ne mesurera D, d'autant qu'ils sont en mesme raison: que si on vouloit dire qu'en passant quelqu'vn, les extremes se pourroient mesurer, comme si A pouuoit mesurer C, soient trouuez trois nombres E, F, G, les plus petits en la raison de A, B, C par la 37 p. 7. ainsi A estant à B comme E à F, & comme B à C, ainsi F à G : en raison egale A sera à C comme E a G, par la 14. p. 7. & comme E ne mesure point G, estans iceux premiers par la 3. p. 8. aussi A ne mesurera point C. Par le mesme discours on prouuera de tous les autres.

THEOR. 5. PROP. VII.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra cótinuellement proportionnaux, & que le premier mesure le dernier, il mesurera aussi le second.

A. 3. B. 9. C. 12. D. 24.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C, D, & que le premier A mesure le dernier D. Ie dis qu'il mesurera aussi le second B.

Car par la precedente, si A ne mesuroit B, aussi pas vn autre ne mesureroit pas vn autre, & par consequent A ne mesureroit pas D, contre l'hypothese. A mesurera donc B : ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si entre deux nombres tombent quelques nombres moyens proportionnaux; il en tombera autant entre deux autres estans en la mesme raison.

A 3.	C 9.	D 27.	B 81.
G 1.	H 3.	I 9.	K 27.
E 2.	L 6.	M 18.	F 54.

Soient les nombres A & B, entre lesquels tombent C & D cótinuellement proportionnaux : & qu'il y ait telle raison de E à F, que de A à B. Ie dis qu'entre E & F se trouueront autant de nombres moyens continuellement proportionnaux, qu'entre A & B.

Qu'il ne soit ainsi. Soient trouuez par la 2. p. 8. les quatre nombres, G, H, I, K, continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison de A, B, C: en raison egale comme A sera à D, ou E à F (car c'est la mesme raison) ainsi G à K par la 14. p. 7. Mais G & K sõt premiers entr'eux par la 3. p. 8. & par la 21. p. 7. ils mesureront egalement E & F. Que si autãt de fois que G & K mesureront E & F; H & I mesurent autres nombres L & M, tellement que les nombres G, H, I, K, mesurent egalement les nombres E, L, M, F, par la 9. com. sent. G, H, I, K, multiplians le nombre par lequel ils mesurent E, L, M, F, produisent iceux E, L, M, F, lesquels seront entr'eux cõme G, H, I, K, ainsi que nous auons demonstré à la 18. p. 7. Mais G, H, I, K sont continuellement proportionnaux: donc aussi E, L, M, F, seront continuellement prop. & partant puis que la multitude E, L, M, F, est egale à la multitude A, C, D, B. il tombera autant de moyens proportionnaux entre E & F, qu'entre A & B: ce qu'il faloit prouuer.

SCHOLIE.

De ceste demonstration appert non seulement, qu'il tombe autant de moyens prop. entre E & F, qu'entre A & B, mais aussi, que la proportion des nombres E, L, M, F, est la mesme que des nombres A, C, D, B. Car il a esté demonstré que la proportion de E, L, M, F. est la mesme que celle des nombres G, H, I, K: Mais iceux sont par la construction en la mesme prop. que A, C, D, B. donc aussi E, L, M, F, sont en mesme proportion que A, C, D, B.

Il appert aussi de ce Theoreme, qu'entre nombres de raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente, ne peut tomber vn nombre moyen proportiõnel. Car puis que la raison double, és moindres nombres, est trouuée entre le binaire & l'vnité; mais la superparticuliere, entre nombres differens seulement de l'vnité; & la superbipartiente, entre les nombres, desquels la difference est le binaire: si entre deux nombres de raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente, tombe vn moyen prop. il en tombera pareillement vn (par ce theor.) entre le binaire & l'vnité, ou entre les nombres differens de la seule vnité, ou du binaire; c'est à sçauoir entre les plus petits nombres qui ont la mesme raison que ceux-là, ce qui est impossible. Car il est tout euident qu'entre le binaire & l'vnité, ny entre 2. nõbres differens seulement de l'vnité, ne peut tomber aucun nombre moyen prop. Et quant aux nombres differens seulement du binaire, tombe seulement vn nombre, qui differe à l'vn & à l'autre de l'vni-

té : lequel nous demonstrerons ne pouuoir estre milieu prop. entre iceux. Soient les nombres A B, & C D, differens du binaire, entre lesquels tombe le nombre E F moindre que A B de l'vnité, mais plus grand que C D, aussi de l'vnité. Ie dis que E F n'est moyen prop. entre A B, C D. Car si on dit que comme A B à E F, ainsi E F à C D : estant osté de A B, le nombre A G egal à E F, afin qu'il reste l'vnité G B; & de E F, le nombre E H egal à C D, afin qu'il reste aussi l'vnité H F; pareillement comme A B sera à E F, ainsi le retranché A G sera au retranché E H. Donc aussi le reste G B sera au reste H F; c'est à dire l'vnité à l'vnité, comme le tout A B au tout E F, le plus grand au moindre : Ce qui est absurde; donc E F n'est pas moyen prop. entre A B & C D.

A..... 6G.B   A..G.E.
E ..... 5 H.F   E.H.F.
C .... 5 D   C.D

Parquoy entre les nombres de raison triple ne peut tomber vn nombre moyen prop. Autrement il en tomberoit aussi vn entre 3 & 1. les plus petits nombres de la raison triple qui different entr'eux du binaire : Ce qui est impossible comme nous venons de demonstrer.

Par mesme raison, ne peut aussi tomber vn moyen prop. entre deux nombres de quintuple raison. Car s'il y en tomboit vn, il en tomberoit aussi vn (par ce theor.) entre 5 & 1. les petits nombres de la raison quintuple: ce qui ne se peut faire. Car s'il est possible qu'entre le binaire A B & l'vnité C, tombe vn moyen prop binaire, ou ternaire D; tellement que A B soit à D, comme D à C : en changeant C sera à D comme D à A B. Et pource que l'vnité C mesure D, aussi D mesurera A B. Mais le binaire, ou ternaire D mesure pareillement le senaire A E : donc D mesurera le tout A E, & le retranché A B; & partant par la 11. com. sent. aussi D mesurera le reste vnité B E. Ce qui est absurde. La mesme absurdité aduiendra tousiours, si on dit qu'vn nombre quaternaire soit moyen prop entre iceluy quinaire A B, & l'vnité C. Il ne tombera donc point de milieu prop. entre 5 & 1. & par consequent entre quelconques nombres de raison quintuple.

A.....B.E
D..D..
C.

THEOR. 7. PROP. IX.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, autant de nombres continuellement proportionnaux qui tomberont entre iceux, autant en tombera-il entre chascun d'iceux, & l'vnité.

A.8.	C.12.	D.18	B.27.
	Vnité.		
	E 2.	F 3.	
	G 4.	H 6.	I 9.
K8.	L 12.	M 18.	N.27

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, entre lesquels tombent quelques nõbres continuellement proportionnaux C & D. Ie dis qu'entre chacun d'iceux A, B, & l'vnité, il tombera autant de nombres continuellement proportionnaux, qu'entre A & B.

Car ayant posé l'vnité, soient pris E & F, les plus petits nõbres qui soient en la raison de A à C, par la 35.p.7. puis par la 2 p.8. soient trouuez les trois plus petits en la mesme raison G, H, I : puis les quatre K, L, M, N ; & ainsi consequemment iusques à ce que la multitude des pris soit egale à la multitude A, C, D, B. D'autant que les extremes A, B, sont premiers entr'eux, par la 1.p.8. A, C, D, B, seront les plus petits en la raison de E a F : Mais leurs egaux en multitude K, L, M, N, sont aussi les plus petits en la mesme raison par la constructiõ. Dõc K, L, M, N, sont egaux à iceux A, C, D, B, chacun au sien, comme K à A & N a B. Et pource que (comme il appert par la demonstration de la 2.p.8.) E multipliãt soy mesme a produict G; & multipliant G a faict K, par la 7.com. sent. E mesurera G par E ; & G iceluy K par le mesme E ; mais par la 5. com. sent. l'vnité mesure iceluy E par E, Donc l'vnité mesurera egalement E ; & E iceluy G ; & G iceluy K : & partant l'vnité sera mesme partie de E, que E de G, & G de K. Donc par la 20.d.7. l'vnité & les nombres E, G, K, sont continuellement proport. Par mesme discours l'vnité & les trois nombres F, I, N, seront aussi prouuez continuellement proportiõnaux. Et puis que tant la multitude E, G, K, que F, I, N, auec l'vnité, est egale à la multitude K, L, M, N, ou A, C, D, B ; il s'ensuyura qu'entre l'vnité & le nombre K ou A, qui luy est egal ; & aussi entre l'vnité & le nombre N ou B, tomberont autant de nombres continuellement proportionnaux, qu'entre les nombres A & B : ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8, PROP. X.

Autant de nombres qui tomberont continuellement proportionnaux entre l'vnité &

chacun de deux nombres propoſez; autant en tombera-il entre iceux deux nombres.

A 8. I 12. K 18. B 27
E 4. H 6. G 9.
D 2. F 3.
C 1.

Soient deux nombres propoſez A & B, & qu'entre l'vnité C, & chacun d'iceux, tombent quelques nõbres continuellement proportionnaux, comme D & E, entre C & A: Item F, & G, entre C & B. Ie dis qu'auſsi il en tombera deux continuellement proportionnaux entre A & B.

Car ſi on acheue a multiplier comme en la 2.p.8. pour trouuer les trois nombres, H, I, K, c'eſt a ſçauoir que H ſoit le produict de D multiplié par F; I le produict de D, par H: & K, le produict de F par H. Puiſque comme C à D, ainſi D à E, & E à A; & que par la 5.cõ.ſen C vnité meſure D, par les vnitez qui ſont en D; auſsi D meſurera E, par les vnitez qui ſont en D, & E meſurera A, par les meſmes vnitez de D; ainſi il eſt euidẽt queB multiplié par ſoymeſme produictE; & E multiplié par B, a produict A. Par meſme diſcours ſe prouuera que F par ſoymeſme, a produict G, & que G par F a produict B.

Maintenant puis que D multiplié par ſoy-meſme, & par F, a produict E & H, par la 17.p.7. comme D à F, ainſi E à H. Pareillement F multiplié par D, & par ſoy-meſme, produict H & G; auſsi H ſera à G comme D à F: Parquoy les trois nombres E, H, G, ſeront en continuelle proportion. D'auantage D multipliant E, & H, produict A & I; comme E ſera à H, ainſi A ſera à I: & puis que D, & F multiplient H, & produiſent I & K; I ſera à K, comme D à F. Par meſme diſcours K ſera à B à la meſme raiſon, eſtans les produicts de H, & G multipliez par F, le tout par la 17. & 18. p.7. Il eſt donc euidẽt que A, I, K, B, ſont continuellement proportionnaux, & que partant les deux nombres I & K ſont tombez en continuelle proportion entre A & B: ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 9. PROP. XI.

Entre deux nombres quarrez tombe vn moyen proportionnel; & le quarré eſt au quarré en raiſon doublee du coſté au coſté.

Soient deux nombres quarrez A4. E6. B9.
A & B, desquels les costez soiët C2. D3.
C & D. Ie dis qu'entre iceux tombera vn moyen proportionnel.

Car puis que C est le costé de A ; C multiplié par soy-mesme produira A : pareillement D par soy-mesme produira B. Maintenant soit trouué E, produict de C multiplié par D: Et par la 17.p.7. comme C à D, ainsi A à E, & E a B. Partant E est moyen proportionnel entre A & B.

Pour la seconde partie. il est euident que le quarré A, est au quarré B en raison doublee du costé C au costé D. Car A, E, B estans continuellement proportionnaux, A est a B en raison doublee de A a E par la 10.d.5. qui est la mesme raison de C a D.

THEOR. 10. PROP. XII.

Entre deux nombres cubes tombent deux moyés proportionnaux: & le cube est au cube en raison triplee du costé au costé.

Soient deux nombres A27. H36. I48. B64.
cubes A, & B, desquels les E9. G12. F16
costez soient C & D. Ie dis C3. D4.
que entre iceux tomberont deux moyens proportionnaux.

Qu'il ne soit ainsi. Que C se multipliant soy-mesme produise E; D par soy produise F; mais C & D l'vn par l'autre produise G; & iceluy G multiplié par l'vn & l'autre C & D, produiset H & I. Puis que A, & B sont cubes, ils seront les produicts de C multiplié par E, & de D multiplié par F: il est donc euidét que la construction est semblable à celle de la 2.p. 8. & par la demóstration de la mesme, A, H, I, B seront cótinuellement proportionnaux selon la raison de C à D. Partant H & I, seront deux moyens proportionnaux entre les nombres cubes A & B.

Quant à la seconde partie, que le cube A, est au cube B en raison triplee du costé C au costé D, ou de A à H : (car c'est la mesme raison) cela est clair par la 10.d 5.

THEOR. 11. PROP. XIII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux ; iceux estans multipliez chascun par soy, leurs produicts seront aussi continuellement proportionnaux : & si chascun multiplie encores son produit ; les derniers produicts seront aussi continuellement proportionnaux : & cela aduiendra tousiours enuiron les extremes.

Soiẽt trois nombres continuellement proportionnaux A, B, C : Et qu'iceux se multipliant chascun par soy produisent D, E, F. Item que les mesmes multiplians chascun son produict facent G, H, I. Ie dis que D, E, F, & G, H, I, sont entr'eux continuellement proportionnaux.

		A2.	B4.	C8.		
	D4.	N8.	E16.	O32.	F64	
G8.	P16.	Q32.	H64.	R128	S256.	I512

Qu'il ne soit ainsi : Que N soit le produict de A multipliẽ par B ; & O, de B par C : Pareillement que P soit le produict de A par N ; Q, de A par E ; R, de B par O ; S, de B par F par la 17. p.7. A se multipliant, & multipliant B, les produicts D & N seront en la mesme raison de A à B : & par mesme discours B multipliant A & soy-mesme, les produicts N, & E serõt aussi en la mesme raison, & ainsi des autres : Partant D, N, E, O, F, seront continuellement proportiõnaux en la raison de A à B ainsi D, N, E ; & E, O, F, sont continuellement prop. en vne mesme raison ; & en raison egalle comme D sera à E, ainsi E a F : parquoy D, E, F, seront continuellement proportionnaux.

Pareillement d'autant que A multipliant D, N, E a faict G, P, Q : par ce que nous auons demonstré à la 18. p.7. G, P, Q seront entr'eux, comme les proportiõnaux D, N, E c'est à dire comme A à B. Item pource que A & B multipliant E ont produit Q & H, par la 18. p.7 comme aussi A sera a B, ainsi Q à H. Donc G, P, Q, H, sont proportiõnaux en la raison de A à B. Par mesme discours H, R, S, I, seront prouuées proportiõnaux en la mesme raison de A a B : & partant en raison egale comme G sera a H ainsi H à I : parquoy G, H, I seront continuellement proportionnaux : ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 12. PROP. XIIII.

Si vn nombre quarré mesure vn nombre quarré; aussi le costé mesurera le costé: que si le costé mesure le costé, aussi le quarré mesurera le quarré.

A 4. E 12. B 36.
C 2. D 6.

Soit le nombre quarré A qui mesure le nombre quarré B, & d'iceux quarrez les costez soient C, & D. Ie dis que le costé C mesurera aussi le costé D. Car ayant multiplié C par D, il est euidẽt par la 11.p.8. que le produict E est moyen proport. entre A & B, en la raison de C à D : mais l'extreme A mesure B : donc par la 7.p. 8. il mesurera aussi E. Parquoy puis que cõme A à E, ainsi C à D: aussi le costé C mesurera le costé D.

Pour la seconde partie : Si le costé C mesure le costé D, aussi le quarré A mesurera le quarré B. Car comme dessus A, E, & B seront continuellement proportionnaux en la raison de C à D : Et puisque C mesure D, aussi A mesurera E ; & E mesurera B; & par cõsequẽt A mesurera aussi B, parce que qui mesure le mesureur, mesure aussi le mesuré, par la 11. com. sent.

THEOR. 13. PROP. XV.

Si vn nombre cube mesure vn nombre cube: aussi le costé mesurera le costé : & si le costé mesure le costé; aussi le cube mesurera le cube.

Ceste demonstration est aisee : d'autant que par la 12. p.8. entre deux cubes y a deux moyens proportionnaux ; & le cube est au cube en raison triplee du costé au costé, c'est à dire que le costé est au costé comme l'vn des cubes est à son prochain moyen proportionnel, lequel il mesurera par la 7.p.8. & par consequent le costé mesurera aussi le costé. Pour la seconde partie, si le costé mesure le costé, aussi le cube mesurera son prochain moyen prop. lequel mesurera l'autre moyen prop. & iceluy l'autre cube ; & par consequent le cube mesurera l'autre cube, par la 11. com. sent. repetee.

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si vn nombre quarré ne mesure pas vn nõbre quarré ; aussi le costé ne mesurera le costé: que si le costé ne mesure le costé, aussi le quarré ne mesurera le quarré.

Ceste demonstration se faict par l'impossible de la 14. p. 8. Car par icelle, si le costé mesuroit le costé, aussi le quarré mesureroit le quarré. Pour la secõde partie. Si le quarré mesuroit le quarré ; aussi le costé mesureroit le costé par la susdite 14. p. 8.

THEO. 15. PROP. XVII.

Si vn nombre cube ne mesure point vn nõbre cube ; aussi le costé ne mesurera le costé: que si le costé ne mesure le costé, aussi le cube ne mesurera le cube.

Ceste demonstration se faict aussi par l'impossibile de la 15. p. 8. Car par icelle, si le costé mesuroit le costé, ausi le cube mesureroit le cube. Et pour le second. Si le cube mesuroit le cube, ausi le costé mesureroit le costé.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Entre deux nombres plans semblables, il y a vn moyen proportionnel: & le plan est au plã en raison doublee des costez de semblable raison.

Soient les deux nombres plans semblables A & B, & leurs costez soient C, D, & E, F. Ie dis qu'entre iceux plans A & B se trouuera vn

A 12. G 18. B 27
C 6. D 2. E 9. F 3.

moyen proportiõnel; & que A est a B en raison doublee de C a E, costez de mesme raison.

Car puis que les plans A & B sont semblables, C sera a D comme E par F; & si A sera le produict de C par D. Item B le produit de E par F, par la 17. d. 7. Maintenant que D multipliant E produise G, par la 17. p. 7. puis que D multipliant C & E produict A, & G; A sera a G, comme C a E, ou D a F (car puis que comme C a D, ainsi E a F; en changeant comme C a E, ainsi D à F.) Item E multipliant D, & F; produict G & B; iceux seront l'vn à l'autre comme D à F: ainsi A, G, B seront continuellemnt proportionnaux, & G sera vn moyen proportionnel entre A & B.

THEO. 17. PROP. XIX.

Entre deux nombres solides semblables, tombent deux moyens proportionnaux: & le solide est au solide, en raison triplee des costez de semblable raison.

Soient deux nombres solides sembla-	A30.		M60.		N120	B240.
		I6.		L12.		K24.
bles A & B, desquels	C2. D3.		E5.		F4. G6.	H10.

les costez soient C, D, E, & F, G, H. Ie dis qu'entre A, & B, on trouuera deux moyens proportionnaux; & que A est à B en raison triplee de C à F costez de mesme raison.

Car I soit le produict de C multiplié par D; K le produict de F par G; L le produict de F par D; & M & N produicts de I par E & H.

Maintenãt puisque C, D, E, sont l'vn a l'autre cõme F, G, H: aussi en changeant, comme C sera a F, ainsi D sera a G, & E a H. Et par la 17 p. 7. puis que D multipliant C & F, produict I & L, iceux I & L seront l'vn a l'autre comme C a F, c'est a dire comme D a G, ou E a H. Par mesme discours F multipliant D & G, produict I & K, iceux seront aussi l'vn a l'autre comme D a G; & partant I, L, K, sont continuellement proportionnaux en la raison de D a G, ou C a F, ou E a H. Pareillement puis que le solide A est le produict des trois nombres C, D, E; & I, le produict de C par D, aussi A sera le produict de I par

E: & par mesme discours B sera le produict de K par H; & par la 17.p.7. E multipliant I,& L, produict A & M, en la raison de I à L: & par mesme discours L multipliant E,&H, produict M & N en la raison de E à H, qui est la mesme que de I à L; aussi H multipliant L & K, les produits N & B seront aussi en la raison de L à K, qui est la mesme que de I a L. Et partant les quatre nombres A, M, N, B, sont continuellement proportionnaux en la raison de I a L, c'est a dire de C a F; & M, N seront deux moyens proportionnaux entre A & B.

Pour la seconde partie elle est euidente, puis que les quatre nombres ont esté prouuez continuellement proportionnaux en la raison de C à F (estant A a B en raison triplee de A a M par la 10.d.5) A estre a M, comme C a F.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si entre deux nombres, tombe vn moyen proportionnel: iceux seront nõbres plans semblables.

A 12.	C 18.	B 27	
D 2.	E 3.	F 6.	G 9.

Soient deux nombres A, & B, entre lesquels tombe C, moyen proportionnel. Ie dis que A & B sont nombres plans semblables.

Car ayant pris D,& E les plus petits termes en la raison de A, C, B; iceux D,& E mesureront A & C l'vn comme l'autre, par la 21.p.7. Ils mesureront aussi egalement C & B, qui sont en la mesme raison. Donc que D & E mesurent A,& C selon le nombre F; & qu'ilz mesurẽt aussi C, & B selon le nõbre G. Parquoy F multipliant D & E sera produict A & C, par la 9 com. sent. Item G multipliant les mesmes D & E, sont produicts C & B. Veu donc que E multipliant F & G faict C & B comme C sera à B, ainsi F a G par la 17 p. 7. Mais comme C est a B, ainsi estoit D a E. Donc comme D sera a E, ainsi F sera a G; & en changeant comme D sera a F, ainsi E a G. Et puis que F multipliant D, a faict A; iceluy A sera vn plan duquel les costez sont D, F. Item pource que G multipliant E a faict B; B sera le plan duquel E, G sont costez. Mais ces costez ont esté demon-

demonstrez proportionnaux, c'est à dire D estre à F, comme E à G Donc par la 1.d.7. A & B seront plans semblables ; ce qui estoit a prouuer.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Si entre deux nombres, tombent deux moyens continuellement proportionnaux; iceux seront nombres solides semblables.

Soient les deux nombres A & B, entre lesquels tombent deux moyens continuellement proportionnaux C & D. Ie dis qu'ils sont nombres solides semblables.

Qu'il ne soit ainsi. Soient trouuez par la 2 p.8. les trois nõbres E,F,G, les plus petits en la raison de A, C, D,B. Veu donc qu'entre E & G tombe vn moyen proportionnel F, par la 20.p.8 E & G seront plans semblables: Soient leurs costez H,I ;& K,L, lesquels seront proportionnaux par la 21 d.7. & puisque E, F,G sont les plus petits en la raison de A,C, D ils les mesurerõt egalement par la 11.p 7. soit selon le nombre M: c'est à dire que E,F,G, estãs multipliez par M produisent A,C, D: item par le mesme discours E,F,G, mesureront egalement les trois nõbres C,D,B, chascun le sien: soit selon le nombre N, c'est à dire que N multipliant E,F,G, produise C,D,B. Il est donc euident, que A & B sont nombres solides, desquels les costez sont H,I,M; & K,L,N. Mais pour autant que M, & N multiplians F, produisent C & D, par la 18. p. 7. M sera à N en la raison de C à D. & C est à D en mesme raison que E à F par la 17.p.7. pour ce que N multipliant E & F a produict iceux C & D ; mais aussi E est à F en la mesme raison que H à K, ou I à L. Donc aussi H sera à K, ou I a L comme M à N ; & en changeant H à I, comme K a L ; & I a M comme L à N: & partant les costez H,I,M sont proportionnaux aux costez K, L, N, & par la 21.d.7. A & B seront nombres solides semblables : ce qu'il falloit prouuer.

A 16.	C 24.	D 36.	B 54.
E 4.	F 6	G 9.	
H 2. I 2.	M 4	K 3. L.3.	N 6.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Si trois nombres sont continuellemẽt proportionnaux, & que le premier soit quarré, le troisiesme sera aussi quarré.

Ceste demonstration est aisee : car par la 20.p.8. les extremes seront plans semblables, & l'vn d'iceux quarré, partant aussi l'autre.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si quatre nombres sont continuellement proportionnaux, & que le premier soit cube; aussi le quart sera cube.

Ceste demonstration est aussi aisee: car par la 21.p.8. les extremes seront solides semblables : mais l'vn est cube, & partant aussi sera l'autre.

THEOR. 22. PROP. XXIIII.

Si deux nombres sont l'vn à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré, & que l'vn d'iceux soit quarré, aussi sera l'autre.

A 16.	F 24.	B 36
C 4.	E 6.	D 9.

Soient deux nombres A & B, lesquels soient entr'eux, comme le quarré C au quarré D, & soit A quarré. Ie dis que B est aussi quarré.

Car puisque A est à B comme C à D ; & par la 11.p.8. il tombe entre C & D , vn moyen proportionnel, sçauoir est E, il en tombera aussi vn entre A & B, par la 8.p.8. & soit F. Veu donc que les trois nombres A, F, B, sont continuellement proportionnaux ; & le premier A est quarré ; aussi le troisiesme B sera quarré : ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

Il appert des choses cy dessus dictes, que la raison de quelque nombre quarré que ce soit à quelconque nombre non quarré, ne peut estre *exhibee en deux nombres quarrez: Car si elle y estoit exhibee, par la 24.8. p. les deux premiers nõbres ayant la mesme raison que les quarrez de la raison exhibee seroient aussi quarrez, puis que l'vn est posé quarré. Ce qui est absurde: car l'vn est posé non quarré. D'où vient que les nombres ayant la raison double, ne sont comme nombre quarré à nombre quarré. Car tous ces nombres cy 4.8.16.32, &c. seroient quarrez; d'autant que 4. estant quarré, par la 24.p.8. aussi 8. seroit quarré: donc aussi 16. & 32. &c. ce qui est absurde. Car entre 4. & 8. & entre 8. & 16.; & entre 16. & 32, &c. tomberoit vn moyen prop. s'ils estoient quarrez par la 11.p.8 & nous auons demonstré au Scholie de la 8.p. 8. qu'il ne peut tomber de moy en prop. entre quelconques nombres de la raison double.*

Semblablement les nombres en raison quintuple, ne sont aussi cõme nombre quarré à nombre quarré. Car s'ils y estoient, par la 11.p. 8. il tomberoit entre iceux vn milieu propo. donc aussi entre 5. & 1. les plus petits nombres de la raison quintuple par la 8.p. 8. Ce qui est impossible, comme nous auons demonstré au Scholie de la 8.p.8.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si deux nombres sont l'vn à l'autre comme nombre cube à nombre cube; & que l'vn d'iceux soit cube, aussi sera l'autre.

Ceste demonstration est aisee: d'autant que par la 8. p. 8. il tombera deux moyens proportionnaux entre iceux deux nõbres, ainsi qu'entre les cubes de semblable raison, par la 12.p. 8. & par la 23.p.8. l'vn d'iceux nombres estant cube, aussi sera l'autre.

COROLLAIRE.

Il appert aussi des choses cy dessus, que la raison de quelque nombre cube que ce soit à quelconque nombre non cube, ne se peut exhiber par deux nombres cubes.

THEO. 24. PROP. XXVI.

Nombres plans semblables, sont l'vn à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré.

Soient les deux nombres plans semblables A & B. Ie dis que A sera à B cōme nombre quarré a nombre quarré.	A 10. C 30. B 45. D 4. E 6. F 9.

Car par la 18 p.8. il tombera entre A & B vn moyen prop. & soit C : si donc on prend les trois nombres D, E, F, les plus petits en la raison continue de A, C, B, les extremes D & F seront quarrez par le corol. de la 2.p.8. Parquoy puis qu'en raison egale A est à B, comme D a F, il est manifeste que A est à B comme nombre quarré a nombre quarré, c'est a sçauoir comme le nombre quarré D au nombre quarré F.

SCHOLIE.

Clauius a demonstré la conuerse de ceste propo. c'est à sçauoir: Que les nombres qui sont l'vn à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré, sont plans semblables.

Car les nombres A & B estans entr'eux, comme les quarrez D & F: par la 11.p.8. Il tombera vn moyen prop. entre iceux quarrez & aussi vn entre A & B, par la 8.p 8. & partant A & B sont plans semblables. Et par cecy est manifeste que les nombres plans qui ne sont semblables, ne sont entr'eux, comme nombre quarre à nombre quarré.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Nombres solides semblables, sont l'vn à l'autre comme nombre cube à nombre cube.

Soient les nombres solides semblables A, & B. Ie dis que A sera à B, comme nombre cube à nombre cube.	A 16. C 24. D 36. B 54. E 8. F 12. G 18. H 27.

Car par la 16.p.8. tomberont entre A & B deux moyens proportionnaux, & soient iceux C & D. Que si on prend les plus petits termes de la raison de A a C, & qu'en la raison d'iceux on trouue, par la 2.p 8. les quatre nombres en continuelle proportion E, F, G, H; les extremes E & H seront cubes par le corol de la 2.p.8. & en raison egale comme E à H, ainsi A à B : ce qui estoit a demonstrer.

SCHOLIE.

Clauius demonstre aussi la conuerse de ceste prop. sçauoir est:

Queles nõbres qui sont l'vn à l'autre comme nombre cube à nõbre cube, sont solides semblables. Car les nombres A & B, estans entr'eux, comme les cubes E & H.; par la 11.p.8. Il tõbera deux moyens prop. entre les nombres cubes E & H, Il en tombera aussi deux entre A & B par la 8.p.8. & partant par la 21.p.8 A & B sont solides semblables.

Il est euident par toutes les choses cy dessus dictes, qu'aucuns nombres ayans raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente, ne sont plans, ou solides semblables Car s'ils estoient plans semblables, par la 18.p.8. vn moyen prop tomberoit entr'eux, ce qui ne se peut faire, comme il a esté demonstré au Scholie de la 8.p. 8. Ils ne seront aussi solides semblables, puis qu'entre iceux ne peuuent tomber deux moyens prop car autrement il en tomberoit aussi deux entre les plus petits nombres des mesmes raisons par la 8.p.8. Ce qui ne se peut faire, pource qu'iceux sont seulement distans entr'eux de l'vnité ou du binaire, comme il a esté dict au susdit Scholie, entre lesquels il est certain, que deux nombres moyens prop. ne peuuent tomber.

Semblablement deux nombres premiers, quels qu'ils soient, ne peuuent estre plans, ou solides semblables, pource qu'ils ne peuuent auoir les costez proportionnaux. Car quelque nombre plan que ce soit estant nombre premier, a seulement soy-mesme & l'vnité pour costez, encore improprement. Comme ces nombres plans 7. & 13. desquels les costez sont 7.1. & 13.1. puis qu'ils sont produits de la multiplication d'iceux costez, lesquels appert n'estre proportionnaux. Et le nombre solide, qui aussi est nombre premier, a seulement pour costez soy mesme, & deux vnitez, & par consequent il est manifeste qu'ils ne peuuent estre prop.

Pareillement deux nombres premiers entr'eux, n'estans quarrez, ou cubes, ne peuuent estre plans ou solides semblables: Car s'ils estoiẽt tels, par la 18. ou 19. p.8. tomberoit entre iceux, vn ou deux moyens prop. & puis que les extremes sont posez premiers entr'eux; tous les trois, ou les quatre seront premiers entr'eux, pource que aucun nombre ne sera commune mesure d'iceux, les extremes n'en ayans point: Parquoy il est euidẽt par la 23.p.7. qu'ils seront les plus petits en leur prop. Et partant par le corol de la 2.p.,8. les deux extremes seront quarrez, ou cubes. Ce qui est absurde: car ils ont esté posez n'estre quarrez ny cubes.

De ces choses s'ensuit que s'il y a deux nombres plans, ou solides semblables, desquels le moindre soit premier, il mesurera le plus grand. Car autrement par la 31.p.7. iceux deux nombres proposez seroient premiers entr'eux: & partant (comme nous venons de prouuer) ils ne seroient plans ou solides semblables. Ce qui est absurde: car ils ont esté posez tels.

De cecy est euident que deux nombres premiers entr'eux, desquels le moindre est premier; ne peuuent estre plans, ou solides semblables. Car s'ils l'estoient, le moindre mesureroit le plus grand, comme appert cy-dessus. Veu donc qu'il se mesure aussi soy mesme, il ne seroient premiers entr'eux, mais composez: Ce qui est contre l'hypothese.

Parquoy il est facile de trouuer deux nombres plans, ou solides non semblables. Car si on prend deux nombres ayans raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente; ou certainement deux nombres premiers, ou deux premiers entr'eux, desquels l'vn ny l'autre soit quarré, ou cube; il est euident parce que dessus, qu'ils seront plans, ou solides dissemblables.

Derechef, s'il y a deux nombres, desquels l'vn soit quarré, & l'autre non quarré, comme 16. & 20. ils ne sont plans semblables. Car autrement par la 26.p.8. ils seroient comme quarré a quarré: & 16. estant quarré, par la 24.p.8. 20. seroit aussi quarré, contre l'hypothese. Par mesme raison, si de deux nombres, l'vn est cube, & l'autre ne l'est pas; comme 27 & 40. ils ne sont pas solides semblables. Car s'ils l'estoient, par la 27.p.8. ils seroient comme cube à cube & 27. estant cube par la 25.p.8. 40. seroit aussi cube, contre l'hypothese.

Fin du huictiesme Element.

ELEMENT NEVFIESME.

THEOR. 1. PROP. I.

Si deux nombres plans ſemblables ſe multiplient l'vn l'autre, le produict ſera quarré.

A 4. B 9.
D 16. E 24. C 36.

Soient deux nombres plans ſemblables A & B, leſquels ſe multiplians mutuellement, produiſent C. Ie dis que C eſt quarré. Car A ſe multipliant ſoy-meſme produict D quarré. Et puiſque A multipliant A & B a produict D & C, comme A ſera à B, ainſi D à C, par la 17. p. 7. Mais A & B eſtans plans ſemblables, il tombera entr'eux vn moyen proportionnel par la 18. p 8. Il en tombera donc auſsi vn entre D & C, par la 8. p. 8. & ſoit E. Et puiſque des trois nombres continuellement proportionnaux D, E, C, le premier D eſt quarré par la conſtruction; le tiers C ſera auſsi quarré par la 22. p. 8. ce qui eſtoit à prouuer.

THEOR. 2. PROP. II.

Si deux nombres ſe multiplians l'vn l'autre produiſent vn nombre quarré; iceux ſeront plans ſemblables.

Soient deux nombres A & B qui se multiplians l'vn l'autre, produisent C quarré. Ie dis que A & B sont plans semblables.

A 4. B 9.
D 6. C 36.

Car que A se multipliant soy-mesme produise D quarré. Veu donc que A multipliant A & B a produict D & C, comme A sera à B, ainsi D à C par la 17.p 7. Et par la 11.p.8. entre les quarrez D & C tombe vn moyen proportionnel ; Il en tôbera donc aussi vn entre A & B, par la 8. p. 8. & partant par la 20.p.8. A & B seront plans semblables ; ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 3. PROP. III.

Si vn nombre cube se multiplie soy-mesme; le produict sera cube.

Soit le nombre cube A, lequel se multipliant soy-mesme produise B Ie dis que B est nombre cube.

A 8.
E 6. D 4.
F 52. C 2.
B 64 *Vnité.*

Car soit C costé du cube A : & de C multiplié en soy, soit produict D; il est manifeste que C multipliant D, produict le cube A. Veu donc que C multipliant soy mesme a faict D, par la 7.com.sent. C mesurera D par C. Mais par la 5 com sent. l'vnité mesure aussi C par . L'vnité sera donc mesme partie de C, que C de D; & partant comme l'vnité est a C, ainsi C a D par la 20.d.7 derechef puisque C multipliant D a faict A par la 7. com. sent. D mesurera A par C Mais aussi C mesure D par C. Donc C est mesme partie de D, que D de A ; & partãt comme C a D, ainsi D à A : mais comme C à D, ainsi estoit l'vnité a C. Donc cõme l'vnité à C, ainsi C a D, & D a A : ainsi entre l'vnité & le nombre A tombent deux moyens proportionnaux C & D. Derechef pource que A mesure B par A (car B a esté faict de A multiplié en soy) & que l'vnité mesure aussi A par A ; l'vnité sera mesme partie de A, que A de B : & partant comme l'vnité sera a A, ainsi A sera a B. Parquoy puis qu'entre l'vnité & le nombre A tombent deux moyens proportionnaux C & D, par la 8. p. 8. il en tombera aussi deux entre A & B, & soient iceux E & F. Et veu que les 4 nombres A, E, F B sont continuellement proportionnaux, & que A premier est cube; aussi B quatriesme sera cube : ce qui estoit a prouuer.

THEOR. 4. PROP. IIII.

Si vn nombre cube multiplie vn nombre cube; le produict sera cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant le nombre cube B, produise C. Ie dis que C est aussi nombre cube.

A. 8. B. 27.
D. 64. C. 216.

Car si on prend D, produict de A multiplié par soy mesme par la 3. p. 9. il sera cube; & pource que A multipliant B, & soy mesme, a produict C & D; il y aura telle raison de D a C, que de A à B par la 17. p. 7. Et par la 1 . p. 8. il tombera deux moyés proportionnaux entre A & B: il en tombera donc aussi deux entre D & C, par la 8. p. 8. Et partant D estant cube, par la 23. p. 8. C sera aussi cube: ce qui estoit a prouuer.

THEO. 5. PROP. V.

Si vn nombre cube multipliant quelque autre nombre, produict vn nombre cube; le multiplié sera aussi cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant quelque nombre B, produise le nombre cube C. Ie dis que B multiplié est aussi nombre cube.

A. 8. B. 27.
D 64. C. 216.

Car si on prend D, produict de A multiplié par soy mesme, comme en la precedente: A sera a B comme D a C, & par la 8. p. 8. entre A & B se trouueront deux moyens proportiõnaux, comme entre les deux nombres cubes D & C. Et par la 23. p. 8. B multiplié sera nombre cube: ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vn nombre se multipliant soy mesme

produict vn nombre cube ; iceluy nombre sera aussi cube.

Soit le nombre A, lequel multiplié par soymesme produise le nombre cube B. Ie dis que A est aussi nombre cube.

A. 8. B. 64. C. 512.

Car si on prend C, produict de A multiplié par B, il sera cube par la definition de nombre cube; & par la 5.p.9. A sera aussi cube.

THEOR. 7. PROP. VII.

Vn nombre composé estant multiplié par quelque autre; le produict sera solide.

Soit le nombre composé A, lequel estant multiplé par quelque nombre B, produise C. Ie dis que C est nombre solide,

A 6. B 5. C 30.
D 2. E 3.

Car puisque A est composé, quelque nombre outre l'vnité le mesurera par la 13.d.7. Que D mesure dõc A par E. Ce qu'estant posé, D multipliant iceluy E produira A par la 9. com. sent. Et puisque B multipliant A a produict C; iceluy C sera Procreé de la mutuelle multiplication des trois nombres D, E, B; & partant par la 17.d.7. il sera nombre solide, duquel les costez sont D, E, B : ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROPO. VIII.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'õ voudra continuellement proportionnaux; le troisiesme depuis l'vnité sera quarré, & tous les autres qui en laisseront vn: Mais le quatriesme sera cube, & tous les suyuans qui en laisseront deux: & le septiesme sera cube & quarré ensemble, & tous les suiuans qui en laisseront cinq

Vnité.	A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux depuis l'vnité, A, B, C, D, E, F. Ie dis que le troisiesme B sera quarré, ensemble tous les autres qui en laisseront vn de l'ordre, comme D & F: en apres que le quatriesme C est cube, & tous les autres en laissant deux nombres, comme F. Pareillement que le septiesme F est cube & quarré ensẽble, & d'autres qui pourroient suiure en laissant cinq nombres.

Pour la premiere partie : puis que les nombres sont continuellement proportionnaux, comme l'vnité mesure A selon les vnitez qui sont en A, par la 5. cō. sent. ainsi chacun mesurera son suiuant selon les vnitez de A : partant B troisiesme qui sera en ce faisant le produict de A multiplié par soy, sera quarré: & par la 22. p. 8. puis que B, C, D, sont continuellement proportionnaux, & B est quarré, aussi D sera quarré. Par mesme discours F sera quarré; & ainsi de tous les autres.

Pour la seconde partie; puis que A multiplié par soy produict B, & B par A produict C; Il est euident par les definitions du 7. que C sera cube, & par la 23 p. 8. C, D, E, F, estans continuellement proportionnaux, F sera aussi cube. Ainsi de tous les autres en laissant deux.

Pour la troisiesme partie. Il est euident par les deux precedentes parties que F a esté prouué & quarré & cube; il en sera ainsi de tous les autres.

THEOR. 9. PRO. IX.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'ō voudra continuellement proportionnaux, & que celuy qui suit l'vnité soit quarré; aussi tous les autres seront quarrez: que s'il estoit cube: aussi les autres seront cubes.

Vnité	A.	B.	C.	D.
1.	4.	16.	64.	256.

Vnité.	A.	B.	C.	D.
1.	8.	64.	512.	4096.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux depuis l'vnité A, B, C, D. Ie dis que si le premier A est quarré, que tous les autres seront aussi quarrez: Que si le premier A est cube, que tous les autres seront aussi cubes.

Pour la premiere partie: il est euident comme en la precedente, que puis que les nombres sont continuellement proportionnaux, comme l'vnité mesurera A par les vnitez qui sont en A, ainsi A mesurera B par les vnitez qui sont en A; & par consequent B sera nombre quarré: mais A est aussi quarré par l'hypothese; & par la 22.p.8. C sera aussi quarré: & par la mesme raison B estant quarré, aussi sera D. Et ainsi de tous les autres

Pour la seconde partie: Si A est cube, aussi tous les autres seront cubes: Car il est euident que A mesurera B par soymesme comme en la premiere partie: C'est à dire que A multiplié par soy produira B, lequel estant cube, B sera aussi cube par la 3.p.9 Mais tous les suiuans sont en la raison de A à B, & par la 25.p 8. Ils seront tous cubes.

THEOR. 10. PROP. X.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy qui suit l vnité, ne soit nombre quarré: aussi pas vn autre ne sera quarré, sinon le troisiesme depuis l'vnité, & tous les autres qui en l'ordre en laissent vn. Que si celuy qui suit l'vnité n'est nombre cube: aussi pas vn autre ne sera cube, sinon le quatriesme depuis l'vnité, & tous les autres qui en l'ordre en laissent deux.

Soient tant de	*Vnité.*	A.	B.	C.	D.	E.	F.
nombres qu'on	1.	3.	9.	27.	81.	243.	729

voudra continuellement proportionnaux depuis l'vnité A, B, C, D, E, F, & que A qui suit l'vnité, ne soit nombre quarré. Ie dis pour la premiere partie, que pas vn autre ne sera quarré, sinon le troisiesme B, ou D, ou F en laissant C & E.

Car par la 8.p.9. B, D, F sont quarrez: Que si quelqu'vn veut dire qu'il y en ayt d'autres comme C, il faudroit par la 22 p.8. que A fust aussi nombre quarré (estans C, B, A, continuellement proportionnaux & C quarré) ce qui est contre l'hypothese. Par mesme discours on monstrera que pas vn autre ne peut estre quarré sinon ceux qui ont esté exceptez.

Pour la seconde partie: si A n'est cube; aussi pas vn autre sera cube, sinon C & F, & tous les autres qui en laisseront deux.

Car par la 8.p.9. C & F sont cubes: que si quelqu'vn veut dire que D soit aussi cube; il faudroit par la 23.p.8. que A le soit, contre l'hypothese. Par mesme deduction on monstrera tous ceux qui ne peuuent estre cubes.

THEOR. 11. PROP. XI.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellemẽt proportiõnaux: le plus petit mesure le plus grand selon quelqu'vn de ceux qui sont entre les proportionnaux.

Depuis l'vnité A soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, B, C, D, E, F. Ie dis que B mesurera F par le nombre E.

A.B.C.D.E. F.
1. 3. 9. 27. 81. 243.

Ceste demonstration est aisée. Car en raison egale l'vnité A sera à E, comme B est à F. Et par les def du 7. comme l'vnité A mesure E par E: ainsi B mesurera F par E.

THEOR. 12. PROP. XII.

Si depuis l'vnité y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportiõnaux: Autant de nombres premiers mesureront le nõbre d'apres l'vnité, qu'il y en aura qui mesureront le dernier.

Soient depuis l'vnité A, tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, B, Ç, D, E. Ie dis qu'autant de nombres premiers se trouueront mesurer le dernier E, qu'il y en a qui mesurent B, lequel suit l'vnité	A.B.C.D.E.F. 1. 3. 9. 27. 81. 3.

Car si F nombre premier mesurant E dernier, ne mesure pas aussi B; B & F seront premiers par la 31.p.7. Et d'autant que B multiplié par soy produict C; C & F serõt premiers par la 27. p.7. Item B multipliant C produict D; D & F seront premiers par la 26.p.7. Pareillement B multipliant D produict E; partant E & F seroient aussi premiers contre l'hypothese; Donc F mesuroit aussi B.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nõbres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy qui suit l'vnité soit premier: Le plus grand ne sera mesuré par aucun autre nõbre, sinon par ceux qui sont entre les proportionnaux.

Depuis l'vnité A soient tant de	A.1.	B.3.	C.9.	D.27.	E.81.
		K.00.	L.00.	H.00.	G.80.

nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux B, C, D, E, & que B qui suit l'vnité soit premier. Ie dis que le plus grand E ne sera mesuré par aucun autre que l'vn d'iceux B, C, D.

Autrement, s'il est possible, que G mesure E; G ne peut estre autre nombre premier que B, autrement il faudroit par la 12.p.9. qu'il mesurast B, qui a esté posé nombre premier; G sera donc composé, & mesuré par quelque nombre premier par la 33.p.7. qui ne peut estre autre que B; d'autant qu'il mesurera E, par la 11. com. sent. & par la 12.p 9. Il faudroit qu'il mefurast aussi B nombre premier : ce qui est absurde. Il n'y a dōc point d'autre nōbre premier que B, qui mesure G. Que maintenant B mesure G par H : & puis que B multipliant D & H produict E & G, par la 17. p. 7 comme E à G, ainsi D à H : mais G mesure E; donc aussi H mesurera D. On prouuera comme dessus, qu'il ne peut estre premier ny mesuré par vn autre nōbre premier que B : Car si H estoit premier, mesurant D, il mesureroit aussi B : ce qui ne se peut faire, ayant esté posé premier. Que si H est composé, celuy nombre premier qui le mesurera sera B, ou si c'est vn autre, cest autre mesurera aussi D, & celuy qui mesure D, c'est à sçauoir B, par la 11. com. sent. ce qui est absurde. Il n'y a donc que le nombre premier B qui mesure H; & posant que ce soit par le nombre I. On prouuera aussi comme dessus, que comme H mesure D, ainsi I mesure C, & que I ne peut estre nombre premier, ny mesuré par aucun autre nombre premier sinon B. Donc que I mesure C par le nombre K : par mesmes raisons, comme I mesure C, ainsi K mesurera B nombre premier; il faut donc qu'à tout le moins il luy soit egal; ce qui est impossible; d'autant que B est moyen proportionnel entre K & I, par la 20. p. 7. puis que c'est produict de K multiplié par I, & qu'il est aussi le produict de B multiplié par soy-mesme. Partant aucun nombre ne mesurera E, sinon B, C, D, qui le mesurent, par la 11. p. 9. ce qu'il falloit prouuer.

THEO. 14. PROP. XIIII.

Le plus petit nombre de tous ceux qui peuuent estre mesurez par certains nombres premiers, ne sera mesuré par aucun autre nōbre premier, que ceux qui le mesuroient au commencement.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
30.	2.	3.	5.	00.	00.

Soit A le plus petit nombre de tous ceux qui peuuent estre mesurez par les 3. nombres premiers B, C, D. Ie dis qu'aucun nombre premier autre que B, ou C, ou D ne mesurera A. Autrement, s'il est possible que E autre nombre premier mesure A par F : donc E multiplié par F produira A, lequel est mesuré par B,C,& D ; & par la 32.p.7.B,C,D,mesureront l'vn ou l'autre de E, ou F : Ils ne mesureront pas E autre nombre premier que pas vn d'iceux, ils mesureront donc F, lequel estant plus petit que A,iceluy A ne seroit le plus petit de ceux qui peuuent estre mesurez par B, C, D. Donc E ne pouuoit mesurer A.

SCHOLIE.

Nous demonstrerons icy (apres Commandinus & Clauius) en nombres, les 10 premiers theoremes, lesqu ls sont demonstrez en lignes au second liure.

I.

S'il y a deux nombres, l'vn ou l'autre desquels soit couppé en tant de parties qu'on voudra ; le nombre plan cópris sous iceux deux nombres, est egal aux nombres plans contenus du nombre indiuisé & de chasque partie de celuy qui est couppé.

Soient deux nombre AB & C desquels AB est diuisé en AD, DE, EB; & soit faict F, de C en AB : Item GH, de C en AD; & HI, de C en DE ; & IK, de C en EB. Ie dis que F est egal aux nombres GH, HI, IK, c'est à dire à tout le nombre GK composé d'iceux. Car puis ue C multipliant AB, a produict F : AB mesurera F par C, c'est à dire que AB sera la partie d'iceluy F, denommee par C. Par la mesme raison AD era la partie de GH : & DE de HI : & EB de IK, d nõmee par C, sçauoir est la mesme que AB de F. Mais il est euident par la 5 p 7. que AB est la mesme partie de GK, que AD de GH parquoy aussi AB sera mesme partie de GK, que AB de F : & partant par la 4.com sent. F & GK sont egal entr'eux. Ce qui est it proposé.

A...D.. E B C..
F............ I2
G...... H....I..K

II.

Si vn nombre est couppé en deux parties; les nombres plans compris soubs le tout, & vne chacune partie, sont egaux au nombre quarré du tout.

Car le nombre AB soit diuisé en AC, CB. Ie dis que les nõbres qui seront produicts du total AB, és parties AC, CB, seront ensemble egaux au quarré de AB. Car estãt pris le nombre D egal à AB, par le 1. theo le nombre faict de D, c'est à dire de AB en AB, sçauoir est le quarre d celuy AB, sera egal aux nombres qui seront produicts de D, c'est à dire de AB en AC, & en CB : ce qui estoit proposé.

A.... C..B
D .....

Le mesme sera demonstré, si AB est couppé en plus de deux parties

comme

comme on peut veoir par la seconde figure apposee. *A...C..D.B*
Car par la mesme raison, le nombre faict de E, c'est *E......*
à dire de AB en AB, c'est à sçauoir le quarré de AB sera egal aux nõbres, qui seront produicts de E, c'est à dire de AB, en chasque partie AC, CD, DB.

III.

Si vn nombre est couppé en deux parties; le nombre plan compris du total, & de l'vne des parties, est egal à celuy-là contenu des parties, & au quarré faict d'icelle partie premierement prise.

Soit le nombre AB diuisé en AC, CB. Ie dis *A....C......B*
que le nombre plã produict de AB en la partie AC, *D....*
est egal à celuy faict des parties AC, CB, & au quarré d'icelle partie AC. Car estant pris le nombre D egal à AC, CB, & au quarré d'icelle partie AC. Car estant pris le nombre D egal à AC; par le 1. theo le nombre faict de D, c'est à dire de AC en AB; ou (qui est le mesme) de AB en AC, sera egal aux nombres faits de D, c'est à dire de AC en CB, & de D, c'est à dire de AC en AC, sçauoir est le quarré de AC. Ce qui estoit proposé.

IIII.

Si vn nombre est diuisé en deux parties; le quarré faict du tout est egal aux deux quarrez faicts des deux parties, & a deux fois le nombre plan contenu d'icelles parties.

Soit le nombre AB diuisé en AC, CB. Ie dis que le *A....., C....B*
nombre quarré faict de AB, est egal aux quarrez des parties AC, CB, auec deux fois le nombre plan faict de AC en CB. Car par le 1. theo. le nombre quarré de AB, est egal aux nombres faicts de AB en AC, & en CB. Mais par le 3. theo. le nombre faict de AB en AC, est egal au nombre produict de AC en CB, & au quarré d'iceluy AC: Item le nombre produict de AB en CB est par mesme raison egal au nõbre produict de AC en CB, & au quarré de CB. Donc le nombre quarré faict de AB, est pareillement egal aux nombres quarrez des parties AC, CB, & a deux fois le nombre faict d AC en CB. Ce qui estoit proposé.

V.

Si vne ligne droicte est diuisee en deux parties egales, & en deux inegales; le nombre plan contenu des parties inegales, auec le quarré du nombre qui est entre les deux sections, est egal au quarré faict de la moictié du nombre total.

Soit le nombre AB, couppé en deux parties egales AC, CB, & en deux inegales AD, DB. Ie dis que le nombre plan compris des parties inegales AD, DB, auec le quarré du nombre CD, est egal au quarré du nombre BC. Car puisque par le theo. pre- *A..... C...D.. B* *ced. le nombre quarré de CB, est egal aux quarrez des parties CD, DB, auec deux fois le nombre faict de CD, DB; & par le 3. theo. le nombre plan compris de CD, DB, ensemble auec le quarré de DB, est egal au nombre produict de CB en DB; sera faict que si ce nombre faict de CB, en DB, est pris pour le quarre de DB, auec le nombre faict de CD en DB, aussi le nombre quarré de CB, est egal à l'autre quarré de CD, ensemble a l'autre nombre faict de CD, en DB, & au nombre produict de CB, c'est a dire de AC en DB: & partant par le 1. theor. le nombre faict du total AD en DB, est egal aux nombres produicts de CD en DB, & de AC en DB. Donc le quarré de CB, sera egal au quarré de CD, & au nombre faict de AD en DB. Ce qui estoit proposé.*

VI.

Si vn nombre est diuisé en deux parties egales, & à iceluy est adiousté quelque autre nombre; le nombre qui est faict du tout auec l'adiousté en l'adiousté, auec le quarré de la moitié du nombre, est egal au quarré du nombre composé de la moictié de l'adiousté.

Soit le nombre AB couppé en deux parties egales AC, CB; & à iceluy soit adiouste le nombre BD. Ie dis que le nombre faict du tout AB & de l'adiouste BD, comme vn seul, sçauoir est de AD, en l'adiouste BD, auec le quarré de la moictie CB, est egal au quarré faict de la moictie CB & adiouste BD, comme vn seul, c'est à dire au quarre de CD. Car puis que par le 4. theo. le quarré de CD est egal aux quarrez des parties CB, BD, auec deux fois le nombre plan compris de CB, BD, c'est à dire aux quarrez des parties CB, BD, & aux nombres contenus de CB, BD, & de AC, BD: Mais par le premier theo. le nombre faict de AD en BD est egal aux nombres contenus sous CB, BD, & sous AC, BD, & sous AD, BD c'est à dire au quarré de BD Donc prenant le nombre faict de AD, en DB, pour le quarré de la partie BD, auec les nõbres faicts de CB en BD, & de AC en BD; le quarré de CD sera egal à l'autre quarré de CB, ensemble auec le nombre faict de AD en BD: c'est à dire que le nombre faict de AD en BD, auec le quarré de CB, est egal au quarre de CD: ce qui esloit proposé.

A... C... B. D

VII.

Si vn nombre est diuisé en deux parties; le quarré du tout auec le quarré de l'vne des parties, est egal à deux fois le nõbre faict du tout en icelle partie, ensemble auec le quarré de l'autre partie.

Soit le nombre AB couppé és parties AC, CB. Ie dis que le quarré de AB, auec celuy de la partie CB, est egal à deux fois le nombre faict de AB en CB, ensemble auec le quarré de l'autre

A ..... C ... B

partie AC. Car puisque par le 4. theor. le quarré de AB est egal aux quarrez des parties AC, CB, & a deux fois le nombre faict d'icelles AC, CB; si on adiouste le commun quarré de CB, les quarrez de AB, CB, seront ensemble egaux aux quarrez de AC, CB, DB, auec deux fois le nombre produict de AC en CB: mais par le 3. theor. le nombre faict de AC en CB auec le quarré de CB, est egal au nombre produict de AB en CB; & partant le double de l'vn est egal au double de l'autre. Donc si pour le double du nōbre faict de AC en CB, & quarré de CB, on prend le double du nōbre produict de AB en CB, les quarrez des nombres AB, CB seront ensemble egaux à deux fois le nombre de AB en CB, auec le quarré de l'autre partie AC. Ce qui estoit proposé.

VIII.

Si vn nombre est diuisé en deux parties; quatre fois le nombre faict du tout en vne partie, auec le quarré de l'autre partie, est egal au quarré du nombre composé du tout & de la partie premierement prise.

Soit le nombre AB couppé ès parties AC, CB. A....C...B...D
Ie dis que le nombre faict de AB en la partie CB, ensemble auec le quarré de l'autre partie AC, est egal au quarré du nombre composé de AB & de la partie CB. Car estant adiousté le nombre BD egal à CB, par le 4. theor. le quarré du tout AD est egal aux quarrez des nombres AB, BD, ensemble auec le nombre double de AB en BD; c'est à dire aux quarrez des nombres AB, CB, ensemble auec deux fois le nombre de AB, en CB: Mais par le 7. theor. les quarrez de AB, CB, sont egaux à deux fois le nombre contenu de AB, CB, auec le quarré de AC: donc si pour les quarrez de AB, CB, on prend le nombre double de AB, en CB, & le quarré de AC; le quarré faict de AD est egal à 4. fois le nōbre faict de AB en CB, ensemble auec le quarré de l'autre partie AC: ce qui estoit proposé.

IX.

Si vn nombre est couppé en deux parties egales, & en deux inegales; les quarrez faicts des parties inegales, sont doubles des quarrez faicts de la moictié, & de la section du milieu.

Soit le nombre AB diuisé ès parties egales AC A.....C...D..B
CB; & ès inegales AD, DB. Ie dis que les quarrez des parties inegales AD, DB, sont doubles des quarrez de la moictié AC, & du nōbre entre-moyen CD. Car puisque par le 4. theo. le quarré du nombre AD est egal aux quarrez des nombres AC, CD ensemble auec deux fois le nombre faict de AC en CD; si on adiouste le commun quarré de DB, les quarrez des parties AD, DB, seront egaux aux quarrez des parties AC, CD, DB, ensemble auec deux fois le nombre produict

de AC en C,D c'est à dire de, CB en CD. Mais par le 7. theor. les quarrez de CB, c'est à dire de AC, & CD sont egaux au quarré de DB & à deux fois le nombre de CB en CD. Donc si pour le quarré de DB, & deux fois le nombre faict de CB en CD; on prend les quarrez de AC, CD, les quarrez de AD, DB seront egaux au double des quarrez des parties AC, CD ; & partant ces quarrez la sont doubles de ceux-cy. Ce qui estoit proposé.

X.

Si vn nombre est diuisé en deux parties egales, & a icelvy on adiouste quelque autre nombre ; le quarré du nombre cõposé d'iceux, & le quarré de l'adiousté, sont ensemble doubles des quarrez de la moictié, & de celuy faict du nombre composé d'icelle moictié & de l'adiousté.

Soit le nombre AB diuisé en deux parties egales AC, CB, & à icelu soit adiousté le nombre BD. Ie dis que le quarré du nombre AD composé du tout AB, & de l'adiousté BD, & le quarré d'icelluy nõbre adiousté BD, sont ensimble doubles des quarrez faicts de la moictié AC, & de CD composé de la moictié CB & de l'adiousté BD. Car puisque par le 4. theo le quarré de AD est egal aux quarrez de AC, CD, & a deux fois le nombre produict de AC, c'est à dire de CB en CD ; si on adiouste le commun quarré du nombre BD, les quarrez des nombres AD, BD seront egaux aux quarrez des parties AC, CD, BD, ensemble auec deux fois le nõbre produict de CB en CD. Mais par le 7. theor. les quarrez de CB, ou AC, & CD sont egaux au quarré de BD, & a deux fois le nombre faict de CB en CD. Donc si pour le quarré de BD, & deux fois icelvy nombre produict de CB en CD, on prend les quarrez des nõbres CB, CD, c'est à dire des nombres AC, CD : les quarrez des nombres AD, BD seront egaux a deux fois les quarrez des nombres AC, CD : & partant ceux-la sont doubles de ceux-cy : ce qui estoit proposé.

A......C....B...D

THEOR. 15. PROP. XV.

Si trois nombres sont continuellement proportiõnaux, & les plus petits de tous ceux qui ont mesme raison auec iceux : le composé de deux tels que l'on voudra, sera premier à l'autre.

Soient les trois nombres continuellement proportiõnaux A, B, C, les plus petits qui soient en la mesme raison : Ie dis que les deux ensemble A & B sont premiers a C; ou bien A & C sont premiers à B.

A.9. B.12. C.16.
D.3. E.4.

Car si on prend D & E les plus petits qui soient en la mesme raison par le scholie de la 35. p.7. il est euident par ce qui a esté demonstré à la 2. p. 8. que A & C sont les quarrez de D & E, & que B est le produict de D multiplié par E: & par le 3. theo. du scholie precedent D & E comme vn seul nombre multiplié par D, produira A & B côme vn seul nombre. Mais D & E estans premiers entr'eux par la 24. p.7. aussi tous deux ensemble, seront premiers au seul E, par la 30. p.7. ou à son quarré C, par la 27. p.7. Et par la mesme proposition D sera premier a C, & par la 26. p.7. le produict de D & E comme vn seul nombre multiplié par D (sçauoir A & B ensemble) sera premier à D. Par mesme discours on prouuera que B & C ensemble sont premiers à A.

Pour la seconde partie, ie dis que A & C ensemble sont premiers à B produict de D multiplié par E. Car D & E estãs premiers entr'eux par la 24. p 7. & premiers au composé des deux par la 30. p. 7. leur produict B sera premier au composé des deux par la 26. p.7. & par la 27. p.7. le produict de D E côme vn seul nôbre, multiplié par soy, sera premier à B. Mais par le 4. theo. du scholie precedent, iceluy produict de DE comme vn seul nombre multiplié en soy, est egal à A & C & deux fois B ensemble: donc A & C auec deux fois B, sont premiers à B. Or en ostant les deux fois B; il est manifeste que le reste A & C sera premier à B. Car autrement ils seroient composez & leur commune mesure mesureroit aussi deux fois B; & par consequent aussi le côposé de A & C & deux fois B, qui ne seroit en ce faisant premier à B, contre ce qui a esté demonstré cy dessus. Donc le composé de A & C est premier a B, ce qui estoit a prouuer.

THEO. 16. PROP. XVI.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, il ne sera pas côme le premier au second, ainsi le second à quelque autre.

Soient deux nombres premiers entr'eux. A.5.B. C. oo. A& B. Ie dis que cõme A est à B, ainsi B n'est pas a quelque autre, c'est à dire qu'à A, & B on ne peut trouuer vn troisiesme proportionnel.

Autrement, s'il est possible, soit comme A à B ainsi B à vn autre, c'est à sçauoir a C. Par la 23. p. 7. A& B estans premiers, ils seront les plus petits qui soient en la mesme raison, & par la 21. p. 7. A mesurera B, & B mesurera C. Mais aussi A mesure soy mesme; donc A mesure iceux A & B: Ainsi A & B ne seroient premiers, contre l'hypothese. Donc il n'est pas cõme A à B, ainsi B a C. Par mesme raison, il ne sera pas cõme B à A, ainsi A, à quelque autre.

THEOR. 17. PROP. XVII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux, desquels les extremes soient premiers entr'eux; il ne sera pas comme le premier au second, ainsi le dernier à quelque autre.

Soient A, B, C continuellement proportionnaux, desquels les extremes A & C soient premiers entr'eux. Ie dis qu'il ne se peut faire que comme A est B, ainsi C soit à quelque autre. A.3. B.4. C.5. D.oo

Car s'il est possible, comme A est à B, ainsi soit C à D. En changeant comme A sera a C, ainsi B à D: & par la 23 p. 7. A& C estans premiers, ils seront les plus petits en leur raison: & par la 21. p. 7. ils mesureront egalement B & D; sçauoir est A iceluy B, & C iceluy D. Et pource que comme A à B, ainsi B à C; & A mesure B, aussi B mesurera C: & par la 11. com. sent. A mesurera aussi C; & iceluy A mesurant soy-mesme; il mesurera iceux A & C premiers entr'eux: ce qui est absurde. A n'est donc pas a B, comme C à D. Par mesmes raisons, il ne sera pas comme C à B, ainsi A à quelque autre.

PROB. 1. PROP. XVIII.

Deux nombres estans donnez, considerer

si on pourra trouuer vn troisiesme proportiõnel à iceux.

La demonstration de ceste proposition est aisee. Car il n'y à qu'à considerer si le produict du second nombre multiplié par soy mesme, peut estre mesuré, c'est à dire diuisé par le premier: car s'il peut estre mesuré ou diuisé, il est euidẽt par la 20. p 7. que le quotient sera troisiesme nombre proportionnel; sinõ, on n'en trouuera point, puis que par la susdite 20. p. 7 trois nombres estans prop. le produit des extremes doit estre egal au produict du milieu.

PROB. 2. PROP. XIX.

Estans donnés trois nombres, considerer si on pourra trouuer vn quatriéme proportiõnel à iceux.

La demonstration de ceste pro. est aussi aisee. Car il faut seulement considerer si le produit des second & troisiesme peut estre mesuré par le premier; s'il peut estre mesuré ou diuisé, il est euident par la 19. p. 7. que le quotient sera 4. prop. sinon, on n'en trouuera point, puis que par la susdite 19. p. 7. 4. nombres estans prop. le produict du second & troisiesme doit estre egal au produict du premier & quatriesme.

THEOR. 18. PROP. XX.

Quelque multitude de nombres premiers qu'on propose, il s'en trouuera encores d'autres.

Soit multitude quelcõque de nombres premiers A, B, C. Ie dis qu'il s'en trouuera encores d'autres.

A..2. B...3 C.....5
D................E.F.
G ....

Car si on troue le nombre DE le plus petit de tous ceux qui peuuent estre mesurez par les trois nombres A, B, C, par la 38. p. 7. & a iceluy on adiouste l'vnité EF, le tout DF sera premier ou non : S'il est premier, on a vn autre nombre premier que pas vn des proposez : s'il n'est premier, il sera mesuré par quelque nombre premier, par la 34. p. 7. Soit donc mesuré par G : il est euident que G ne peut estre pas vn des trois A, B, C : car s'il estoit quelqu'vn d'iceux, il mesureroit DE, & le tout DF : Partant par la 11. com. sent. il mesureroit aussi l'vnité EF, luy qui est vn nombre. Donc G est autre nombre premier que pas vn des proposez. Et en ceste façon on en trouuer ainfiniement d'autres.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Si tant de nombres pairs que l'on voudra sont adioustez, le tout sera pair.

Ceste demonstration est aisée : d'autant que, par la 6. d. 7. le nõbre pair peut estre diuisé en deux parties egalles; partant les moictiez de chacun des proposez feront ensemble la moitié du tout : Et par consequent le tout sera pair, puis qu'il peut estre diuisé en deux egallement, par la susdicte 6. d. 7.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Si plusieurs nombres impairs sont adioustez, & que le nombre d'iceux soit pair ; le tout sera pair.

Ceste demonstration est aussi aisee : d'autant que si de chacun d'iceux nombres impairs on oste l'vnité, on les rendra pairs, & par la 21. p 9. leur tout sera pair : Et pourautant que leur multitude est en nombre pair, les vnitez retranchees feront vn nombre pair, lequel auec tout le reste, qui est desia nombre pair, le tout sera pair par la 21. p. 9.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si plusieurs nõbres impairs sont adioustez,

& que le nombre d'iceux soit impair ; le tout sera impair.

Ceste demonstration est aussi aisee. Car si on retranche vn nombre impair, tout le reste sera vn nombre pair par la precedente : Et si du restant impair on oste l'vnité ; ce qui restera sera pair, lequel adiousté à tout le reste sera vn nombre pair par la 21.p.9. Partant il est euident, que si on adiouste l'vnité restant, que le tout sera impair.

THEO. 22. PROP. XXIIII.

Si d'vn nombre pair, on oste vn nombre pair, le reste sera pair.

Ce qui est euident : Car si le reste n'estoit pair, en ostant l'vnité on le rendroit pair : Et le retranché auec iceluy feroit aussi vn nombre pair par la 21.p.9. & partant adioustant l'vnité ostee, le tout seroit impair, ce qui est absurde ; puis qu'il a esté posé pair.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si d'vn nombre pair, on oste vn nombre impair, le reste sera impair.

Cela est euident : Car si le reste estoit pair, & le tout aussi pair, le retranché ne pourroit estre impair par la 24. p.9.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Si d'vn nombre impair, on oste vn nombre impair, le reste sera pair.

La demonstration de ceste prop. est aussi euidente: Car si le reste estoit impair ; le reste & le retranché feroient vn nombre pair par la 22. p.9. contre l'hypothese.

THEOR. 25. PRO. XXVII.

Si d'vn nombre impair on oste vn nombre impair, le reste sera impair.

Cecy est aussi aysé à demonstrer : Car si le reste estoit pair, le reste & le retranché feroient vn nombre pair, par la 21.p.9. contre l'hypothese.

THEOR. 26. PROP. XXVIII.

Si vn nombre impair multiplie vn nombre pair, le produit sera pair.

La demonstration de ceste prop. est aussi euidente: Car par les def. de 7. le produit contiendra autant de fois le multipliant, qu'il y a d'vnitez au multiplié nombre pair : Et par ainsi le produit fera la somme de plusieurs nombres impairs, desquels la multitude est en nombre pair ; & partant par la 22. p.9. le produit sera pair.

SCHOLIE.

On demonstrera en la mesme maniere, que si vn nombre pair multiplie vn nombre pair ; le produit sera aussi pair.

THEOR. 27 PROP. XXIX.

Si vn nombre impair multiplie vn nombre impair ; le produit sera impair.

Cela est aussi euident: Car comme en la precedente, le produit sera vne addition de plusieurs nombres impairs, desquels la multitude sera en nombre impair ; & partant par la 23.p.9. le tout, ou le produit sera impair.

SCHOLIE.

Clauius demonstre en cest endroit apres Campanus les deux theoremes suiuans.

Vn nombre impair mesurant, vn nombre pair, il se mesure par vn nombre pair.

A... 3. C.. 2.
B...... 6.

Soit le nombre impair A, lequel mesure le nombre pair B par C. Ie dis que C est pair. Car s'il est impair; B produict de A impair multiplié par C impair, sera impair, par la 29.p.9. ce qui est absurde: car il a esté posé pair. Donc C est pair.

Vn nombre impair mesurant vn nombre impair, il le mesure par vn nombre impair.

A...3 C....5
B................15

Soit le nõbre impair A, qui mesure le nombre impair B par C. Ie dis que C est impair. Car s'il est pair; B faict de A impair par C pair, sera pair par la 28.p.9. ce qui est contre l'hypothese, donc C est impair.

Tout nombre qui mesure vn nombre impair, est aussi impair.

A................15
B.....5 C...3

Soit le nombre impair A, lequel B mesure par C. Ie dis que B est impair. Car C estant multiplié par B produira A par la 9.com. sent. & si B n'est impair, mais pair, le produict A sera pair par la 28. p.9. ce qui est absurde, puis qu'il a esté posé impair. Donc B qui mesure A impair, n'est pas nombre pair, mais impair.

THEOR. 28. PROP. XXX.

Si vn nombre impair mesure vn nombre pair, il mesurera aussi sa moitié.

Soit le nombre impair A, qui mesure le nõbre pair B. Ie dis qu'il mesurera aussi sa moictié C.

A...3 D....4 E..2
B..............12
C...... 6

Car puis que A mesure B, soit par le nombre D; iceluy sera pair: d'autant que s'il estoit impair, estant multiplié par A impair, leur produict seroit aussi impair par la 29. p.9. contre l'hypothese; D sera donc pair; & partant se pourra diuiser en deux egalement par la 9.def. du 7. E soit donc la moitié de D. Parquoy comme D sera à sa moictié E, ainsi B sera à sa moitié C: & en changeant, comme D sera à B, ainsi E sera à C. Mais A mesurant B par D: aussi D mesurera B par A par la 8. com.

sent. & partant D sera la partie de B denommee par A: dôc aussi E sera la partie de C denommee par le mesme A: & partant A mesurera C, par la 47.p.7. ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 29. PROP. XXXI.

Si vn nombre impair est premier à quelque nombre, il sera aussi premier à son double.

A ...3 B.... 4
C........ 8 D00

Soit le nombre impair A, premier à quelque nombre B, duquel le double soit C. Ie dis que A est aussi premier à C. Car si A & C ne sont premiers entr'eux, quelque nombre mesurera iceux, & soit D, lequel sera impair, comme nous auons demonstré au scholie de la 29.p.9. Et puis qu'il mesure le nombre pair C (car C est pair, puis qu'il a moitié B) il mesurera aussi sa moitié B par la prop. precedente. Mais il mesure aussi A. Donc D mesure iceux A & B, premiers entr'eux: ce qui est absurde. Il n'y aura donc point de nombre qui mesure A & C; & partant ils seront premiers entr'eux.

THEOR. 30. PROP. XXXII.

Tous les nombres qui suiuent le binaire en progression double, sont seulement pairement pairs.

Vnité. A 2. B 4. C 8. D 16. E 32

Soient depuis le binaire A tant de nombres qu'on voudra B, C, D, E, continuellement proportionnaux en raison double. Ie dis qu'ils sont tous pairement pairs, & qu'il n'y en a point d'autres.

Qu'il ne soit ainsi. Soit prise l'vnité, & puisque depuis l'vnité A, B, C, D, E, sont cõtinuellement prop. le plus petit mesurera le plus grand selon quelqu'vn de ceux qui sont entre les proport. par la 11.p.9 lesquels estans tous pairs, il est euident par les def. du 7. que B, C, D, E, seront pairement pairs, & tous les autres qui pourroient suiure en la mesme progresſion. Mais pour autant que A prochain de l'vnité, est nombre premier, par la 13.p.9. aucun autre nombre ne mesurera aucun de tous ceux qui sont en la progresſion, ſinon ceux de la meſme progresſion, leſquels eſtans tous pairs, iceux nombres ſeront pairement pairs ſeulement.

THEOR. 31. PROP. XXXIII.

Si la moitié d'vn nombre eſt impair, iceluy nombre ſera ſeulement pairement impair.

Soit le nombre A duquel la moitié B eſt impair, ie dis que A ſera pairement impair ſeulement.

A. 30.	
B. 15.	C. 2.
D. 00.	E. 00.

Car puiſque B eſt moitié de A, il le meſurera par C nombre binaire, & par les def.7. A ſera pairemẽt impair: Mais qu'il ſoit ſeulement pairement impair on le prouuera ainſi. S'il eſtoit pairement pair, vn nõbre pair comme D le meſureroit par quelque nombre pair, comme E. Et par la 9. com. ſent. A eſt faict de D en E: mais le meſme A eſt auſsi faict de ſa moitié B par le binaire C. Parquoy par la 19.p.7. le produict de C par B, eſtant egal au produict de E en D, comme C ſera à E, ainſi D à B. Mais C nombre binaire meſure E: il faudroit donc auſsi que D pair meſuraſt B, qui eſt vn nombre impair: ce qui eſt impoſsible. Dõc A eſtoit nombre pairement impair ſeulement.

Si vn nombre pair n'eſt de ceux qui ſont doubles depuis le binaire, & que ſa moitié ne ſoit nombre impair, il ſera pairement pair, & pairement impair.

Ceſte demonſtration eſt aiſee. Car ſa moitié eſtant pair, il ſera meſuré par vn nombre pair ſelon le binaire qui eſt auſsi pair. Et pour autant qu'il n'eſt de ceux qui ſont doubles depuis le binaire; ſi on le diuiſe touſiours en deux egalement, on viendra à vne moitié impaire auparauant que paruenir iuſques au binaire, & par consequent il sera mesuré par vn nõbre impair: & par les def. 7. il sera pairement pair, & pairement impair.

THEOR. 33. PROP. XXXV.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra cõtinuellement proportionnaux, & que du second & dernier on soustraict le premier; cõme le reste du second sera au premier, ainsi le reste du dernier sera à tous les precedens.

A........ 8
B .... 4 F......... 8 G
C 18
D 9. H 6. I 4. K 8. L

Soient quatre nombres continuellement proportionnaux A, B, C, D, & du second B on retranche FG egal au premier A: Et du dernier D l'on retrãche KL aussi egal à A: Ie dis que comme le reste BF sera à A, ainsi l'autre reste DK sera à tous les trois A, B, C ensemble.

Car si de DL on retranche LI egal à BG, il est euident que KI sera egal à BF, (estant KL egal a FG) & si on retrãche LH egal à C; comme les quatre nombres D, C, B, A, sont continuellement proportiõnaux, aussi seront leurs egaux DL, HL, IL, KL · & en diuisant DH sera à HL, cõme HI à IL, ou IK à KL; & partant par la 12. p. 7. tous les antecedans DH, HI, IK, (c'est à dire DK) seront à tous les consequents HL, IL, KL, (c'est à dire A, B, C,) comme l'vn des antecedans IK, est à l'vn des consequens KL, ou leurs egaux BE a A, ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 34. PROP. XXXVI.

Si depuis l'vnité on prend tant de nombres qu'on voudra continuellemẽt proportiõnaux en raison double, iusques à ce que le tout soit nombre premier: iceluy tout multiplié par le dernier produira vn nombre parfaict.

Soient depuis l'vnité A,B,C,D, continuellement doubles, la somme desquels & de l'vnité soit E nombre premier. Ie dis que si E est multiplié par le dernier D, que le produict F G sera nombre parfaict.

Car si on prend HI double de E; K double de HI; & L double de K, ainsi des autres; E, HI, K, L, seront continuellement proportionnaux en la raison de A,B,C,D; & en raison egale A sera à D comme E à L, & par la 19.p.7. A multiplié par L, sera le produict de D par E, sçauoir F G : mais A estant binaire, FG sera double de L; ainsi E, HI, K, L, FG, seront continuellement proportionnaux. Maintenant de HI soit retranché HM egal à E; & de F G soit retranché FN, aussi egal à E : par la 35. p.9. comme HM est egal à E (d'autant que H I estoit double de E) ainsi NG sera egal à E, HI, K, L ensemble. Mais FN egal à E, est aussi egal à l'vnité & a A, B, C, D ensẽble: Et par cõsequent FG sera egal à l'vnité, & à A, B, C, D, E, HI, K, L, ensemble: & puis que FG a esté faict de E multiplié par D, par la 7. com. sent. D mesurera FG, & partant par la 11. com. sent. l'vnité, & les nombres A, B, C, qui par la 11.p.9. mesurent D, mesurerõt le mesme FG. Derechef puis que L mesure FG; aussi par la 11. com. sent. les nombres E, HI, K, lesquels par la 11. p. 9. mesurent L à cause de la raison double; mesureront le mesme FG: ainsi l'vnité & tous les nõbres A, B, C, D, E, HI, K, L mesurent iceluy FG. Parquoy si FG ne peut estre mesuré par aucun autre nombre que ceux-cy, par la 22. def. du 7. Il sera nombre parfaict estant egal à toutes ses parties aliquotes.

Vnité.		
A..2		
B....4		
C........8		
D................16		
E. 31.		
H.31.	M 31	I
K.124.		
L 248.		
F. 31.	N .465.	G
O. oo.	P. oo.	

Que si on pense qu'il puisse estre mesuré par quelque autre nõbre autre que les deuant dits; que D le mesure s'il est possible, selon P: donc D multipliant P produira FG par la 9. com. sent. Mais le mesme FG est aussi produict de E en D. Donc vn mesme nombre est faict de E premier par D 4. & de P second en O 3; & partant comme E à P, ainsi O à D par la 19.p. 7. & puis que A, B, C, D depuis l'vnité sont continuellement proportionnaux, & A proche de l'vnité est premier, par la 13. p.9. nul autre nombre que A, B, C, mesurera le dernier D: & O est posé n'estre le mesme qu'aucuns d'iceux A, B, C; O ne mesurera donc pas iceluy D. Mais comme O à D, ainsi estoit E à P: Donc aussi E ne mesurera P: & puis quẽ E est premier, par la 31. p.7. E & P seront premiers entr'eux; & partant les moindres en leur raison par la 23.p.7. & par la 21.p. 7. E mesurera O, comme P mesurera D. Mais nul autre que A,B,C mesure iceluy D. Donc P sera le mesme que l'vn d'iceux A,B, C. Soit donc le mesme que B: & d'autant que B,C,D, & E,H I,K,sont continuellement proportionnaux en raison double, par raison egale comme B sera à D,ainsi E à K, & partant par la 19.p.7. le produict de B par K, sera egal au produict de D en E. Mais le produict de D en E est egal a iceluy de P en O. Donc vn mesme nombre sera faict de P en O,que de B en K,& partant par la 19.p.7. comme P sera à B,ainsi K à O. Mais P estoit le mesme que B: Donc aussi K sera le mesme que O. Ce qui est absurde,car O a esté posé autre que tous ceux cy A,B, C,D,E,HI,K,L. Il n'y aura donc point d'autres nombres que A,B,C,D,E,H,I,K,L qui mesurent FG. Iceluy est donc nombre parfaict,ainsi qu'il a esté demonstré.

Fin du neufiesme Element.

SOMMAIRE

DE L'ALGEBRE.

Que c'est qu'Algebre ; qui en est l'inuenteur; de qu'elles figures & caracteres on se sert en icelle, & leur signification.

CHAPITRE. I.

ALGEBRE est vne Arithmetique de nombres figurez : ou bien parlant plus intelligiblement ; c'est vne science par laquelle on peut rendre manifeste & cogneue vne quantité incogneue.

Quant a l'inuenteur de ceste science, il est incertain : car les vns l'attribuent à Geber Arabe; les autres à vn Mahomet fils de Moyse Arabe ; & les autres a Diophante d'Alexandrie.

Et quant aux figures d'icelle science ; outre les figures numerales de l'Arithmetique vulgaire, il y a plusieurs autres figures & caracteres, dont on se sert en ceste science, lesquels sont figurez, & nommez diuersemẽt par les autheurs qui ont escrit d'icelle science: mais entre ceste diuersité de caracteres, nous auons choisi les suiuans, les iugeant plus propres & aisez à representer ce qu'ils signifient qu'aucuns autres.

N. ℞. *q.* *c.* *qq.* *ß.* *qc.* *bß.* *qqq.* *cc.* *qß.* *cß.* *qqc.* *dß.* *qbß.* &c.

Le premier caractere N, à l'appellation du nombre absolu & simple, tellement que le nombre auquel ledict caractere sera apposé, est absolu & simple: comme 4 N, ne signifie autre chose que 4 vnitez simples; toutesfois ce caractere N defaut le plus souuent aux nombres simples, c'est pourquoy les nombres ausquels est apposé ledict caractere N, ou bien ausquels il n'y à aucun signe doiuét estre pris pour simples & absolus.

Le second caractere ℞. s'appelle racine; tellement que le nombre auquel est apposé ledict caractere, sera denommé par racine, comme 7 ℞. signifient 7 racines.

Le 3. caractere *q.* represente quarré; tellement que 5 *q* signifient 5 quarrez.

Le 4. caractere *c.* signifie cube; comme 7 *c.* signifient 7 cubes.

Le 5. caractere *qq.* signifient quarré de quarré, comme 8 *qq.* s'appellent 8 quarrez de quarré.

Le 6. *ß.* denotte sursolide; tellement que 4 *ß.* signifient 4 sursolides.

Le 7. caractere *qc.* denotte quarré du cube, comme 7 *qc.* signifient 7 quarrez de cube.

Le 8. *bß.* s'appelle second sursolide, tellement que 4 *bß.* signifient 4 second sursolide.

Le 9. caractere *qqq* denotte quarré quarré de quarré: comme 3 *qqq.* signifient trois quarrés de quarré de quarré.

Le 10. *cc.* signifie cube de cube; tellement que 8 *cc* signifient 8. cubes de cube. Et ainsi faut il entendre des autres caracteres en l'ordre cy-dessus, lesquels sont appellez signes ou caracteres cosiques.

Il y a encore ce caractere √, par lequel sont notez certains nombres qu'on appelle radicaux, irradicaux, ou sourds, dont sera parlé cy-apres; comme aussi de quelques autres signes ou caracteres.

Des nombres cosiques ou denommez.

CHAP. II.

LEs nõbres vsitez en l'Algebre sont de trois genres: Ceux du premier genre sont nommez nombres cosiques ou denommez: ceux du second sont appellez nombres radicaux, ou irrationaux : & les troisiesmes sont nommez nombres radicaux cossiques. Quant aux nombres cossiques ou denommez; ce sont tous nombres de quelconque progression geometrique, commençant à l'vnité: pour l'intelligẽce desquels doiuent estre diligemment considerees les deux progressions suyuantes, au milieu desquelles sont posez les caracteres cossiques cy-dessus declarez.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	&c.
N.	℞.	*q.*	*c.*	*qq.*	*ß.*	*qc.*	*bß.*	*qqq.*	*cc.*	*qß.*	*cß.*	*qqc.*	&c.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	250.	512.	1024.	2048.	4096.	&c

Le premier ordre est la progression naturelle des nombres commençant à 0, lesquels s'appellent exposans tant des signes cossiques descrits au dessous, que des termes de la progression geometrique commençant a l'vnité; tellement que le premier terme de ladite progression naturelle, qui est 0, au dessous duquel est N & 1. est exposant du nombre simple, & absolu: Le second terme 1, au dessous duquel est ℞ & 2, monstre le second terme de la progression geometrique, estre la premiere denomination és nombres cossiques; & s'appelle racine; Le tiers terme 2, expose que le tiers nombre de la progression geo. est la secõde denomination, & s'appelle quarré: ainsi pareillement 6 demonstre la sixiesme denomination estre le nombre quarré de cube; & ainsi des autres.

Puis apres les mesmes nombres exposans de la progressiõ naturelle des nombres enseignent combien il y a de raisons entre chacun nombre de la prog. geo. & l'vnité, comme 1 qui est au dessus de ℞ & 2, signifie qu'entre 2, ou bien la racine de la prog. geo. & l'vnité il y a la seule raison de 2 à 1. & 2 qui est au dessus de *q* & 4, monstre qu'entre 4, ou bien le quarré, & l'vnité doiuent estre 2 raisons, comme 4 a 2, & 2 a 1: de mesme 3 qui est au dessus de *c* & 8, monstre qu'entre le cube, ou 8 & l'vnité, sont les trois raisons 8 a 4; 4 a 2; & 2 a 1; & ainsi des autres.

D'auantage chasque deux nombres exposans multipliez entr'eux, produisent l'exposant du caractere cossique qui sera composé des caracteres desdits deux exposans multipliez entr'eux, comme 2 estant multiplié par 3 faict 6. exposant du caractere *qc.* qui est composé de *q.* & de *c.* De mesme, 4 estant multiplié par 3 faict 12. exposant du caractere *qqc*, qui est cõposé de *qq.* & de *c.* & ainsi des autres.

Pareillement estant diuisé quelque nombre exposant par vn autre moindre, le quotient monstrera, s'il est nombre entier, l'exposant du caractere cossique qui restera, si du caractere du nombre exposant diuisé, est osté le caractere du nōbre exposant par lequel est faict la diuision: comme si 6. exposant du caractere *qc.* est diuisé par 2 exposant du caractere *q.* le quotient sera 3 exposant du caractere *c.* qui restera si du caractere *qc.* exposant de 6, est osté le caractere *q.* de l'exposant 2. De mesme si le 12. nombre exposant du caractere *qqc.* est diuisé par 4. exposant du caractere *qq.* le quotient sera 3. exposant du caractere *c.* lequel restera si de *qqc.* est osté *qq.* & ainsi des autres

Derechef ceste figure 2 qui est posee sur 4 & *q.* enseigne que le quarré, ou bien la 2. denomination est produicte de la multiplication de la racine deux fois posee: car si la racine 2 est posee deux fois, en ceste maniere 2. 2. & soit faite la multiplication de 2 par 2, sera procreé le quarré 4. En la mesme maniere ceste figure 3, qui est posee sur 8 & *c.* signifie le cube, ou bien la 3. denomination estre produicte de la racine, 3 fois posee & multipliee: Car si la racine 2, est posee 3 fois comme icy 2.2.2. & soit fait la multiplication de 2 par 2, & du nombre produict par 2, viendra le cube 8. & y a mesme raison de tous les autres.

Or par ces choses seront facilement definis les nombres cossiques. Car si pour exemple est demandé que c'est que vn nombre second sursolide, nous dirons estre vn nombre, lequel est engendré par quelque nombre sept fois posé & multiplié, comme 128, est engendré de la multiplication de ceste racine 2, posee 7 fois en ceste maniere 2.2.2.2.2.2.2. Semblablement le quarré de quarré sera vn nombre, lequel est engendré par quelque nombre, quatre fois posé & multiplié, comme 16 est procreé de la multiplication de la racine 2; 4 fois posee, ainsi 2.2.2.2. & ainsi des autres. Mais tousiours le nombre tant de fois posé, lequel engendre quelque nombre par sa multiplication, est dict racine du nombre produict, comme 2 estant posé 6 fois en ceste manidre 2.2.2.2.2 2. & multiplié, faict ce nombre 64, qui est *qc.* partant 2 est dict racine quarrée cubique de ce nombre 64. & ainsi faut-il entendre des autres.

Or non seulement sont quelquesfois produicts les nombres de la progression geo. posez par la multiplication de la racine, comme est cy dessus dict, mais aussi par la multiplication des autres nombres entr'eux, ainsi que les signes cossi ques d'iceux demonstrent: comme ce nombre quarré de sursolide 1024. est procreé de la racine 10 fois posee en ceste maniere 2.2.2.2.2.2.2.2.2.2. ainsi que monstre son exposant 10: toutesfois pource que son signe cossique $q\beta$ est composé de ces deux signes cossiques q & β, les exposans desquels sont 2 & 5. partant si la mesme racine 2 est deux fois posee en ceste maniere 2, 2, a cause de 2 exposant du signe q, & soit multiplié, afin que 4 soit produict, & ce produict 5 fois posé en ceste maniere 4, 4, 4, 4, 4, à cause de 5, exposant du signe β, soit multiplié; sera procreé le mesme nombre 1024. Par la mesme maniere si la racine 2, est posee 5 fois, à cause du signe β, & pareillement multiplié, & le nōbre 32 produict, soit posé deux fois, à cause du signe q, sera procreé le mesme nombre: Car la racine ainsi multipliee 2, 2, 2, 2, 2, faict 32: mais ce nombre cy ainsi multiplié 32, 32 procree 1024. Le mesme doit estre dict des autres, si les signes cossiques d'iceux sont composez de plusieurs signes cossiques.

Pareillement és superieures progressions, est bien considerable que l'addition des nombres de la progression Arith. respond a la multiplication des nombres de la progresion geo. & la substraction à la diuision. Car pour exemple, ainsi que 2 & 5 font 7, si on les adiouste ensemble, ainsi pareillemēt q & β, desquels 2 & 5 sont exposans, c'est à sçauoir 4 & 32, estās multipliez entr'eux produisent 128, c'est a dire $b\beta$, l'exposant duquel est 7. Item ainsi que 3 & 9 adioustez ensemble font 12, ainsi aussi c & cc: c'est à sçauoir 8. & 512. les exposans desquels sont 3 & 9, multipliez entr'eux produisent 4096, c'est à dire qqc, duquel l'exposant est 12: & ainsi des autres.

Derechef tout ainsi qu'en substrayant 5 de 7 reste 2, ainsi en diuisant $b\beta$, c'est à sçauoir 128, duquel 7 est exposant, par β, c'est à dire par 32, duquel l'exposant est 5, prouient 4: c'est à sçauoir q, duquel l'exposant est 2. semblablement ainsi qu'en soustrayant 3 de 12 restent 9, ainsi aussi en diuisant qqc, c'est à dire 4096, duquel l'exposant est 12. par c. c'est à dire par 8, duquel l'exposant est 3, prouiēt cc: c'est à sçauoir 512, duquel l'exposant est 9. & ainsi des autres.

Or ce qui a esté dict iusques à present de la progression geometrique de double proportion qui commence à l'vnité, le mesme doit estre entēdu en quelque autre progression geometrique que ce soit, le commencement de laquelle est l'vnité.

Reste à monstrer par quelle raison tous les nombres proposez de quelconque progression geo. commençant à l'vnité, doiuent estre denommez, ou (ce qui est le mesme) quels signes cossiques doiuent estre attribuez & inscrits ausdits nõbres: ce que nous monstrerons facilement, si premierement nous denommons les nombres, desquels les exposans sont nõbres premiers; de laquelle sorte sont les suyuans auec leurs caracteres cossiques.

2.	3.	5.	7.	11.	13.	17.	19.	23.	29.	31.	37.	41.	43.	47.	53.	59.	&c.
q.	*c.*	*ß.*	*bß.*	*cß.*	*dß.*	*eß.*	*fß.*	*gß.*	*hß.*	*iß.*	*kß.*	*lß.*	*mß.*	*nß.*	*oß.*	*pß.*	&c.

Or les lettres de l'alphabet apposees aux caracteres de *ß* sont au lieu de chifres, comme *bß* signifie 2*ß*; *cß*, 3*ß*; *dß*, 4*ß* &c, & ce d'autant qu'iceux chiffres apporteroient de la confusion.

Sçachant donc ainsi que dessus les nombres premiers & leurs caracteres, nous trouuerons les caracteres des autres nombres cossiques, desquels les exposans ne sont nombres premiers, ains composez, en resoluant l'exposant du nombre composé, dont la denomination & caractere est desiree en ses parties aliquottes incomposees, lesquelles estans multipliees par ordre entr'elles, constituent & produisent iceluy, ce que vous ferez en ceste maniere.

Diuisez premierement le nombre composé donné par le moindre nombre premier, par lequel il se peut diuiser, semblablement le quotient, s'il est nombre composé; & derechef soit diuisé ce quotient par le moindre nombre, & ainsi consequemment soit faicte continuellement la diuision, iusques à ce que le quotient soit nombre premier, c'est à sçauoir n'ayant aucune partie aliquotte; & tous les diuiseurs, ensemble le dernier quotient, seront parties aliquottes incomposees, lesquelles estans multipliees par ordre entr'elles produiront le nombre composé donné, & les caracteres de chacunes d'icelles parties aliquottes ioincts ensemble, feront le caractere dudit nombre composé donné. Comme pour exemple, si vous voulez trouuer le caractere de ce nombre composé 24. vous diuiserez iceluy par 2, qui est le moindre nombre premier, & viendra 12 au quotient, lequel quotient vous diuiserez derechef par 2, & viendra 6 au quotient, que vous diuiserez encore derechef par 2, & viendra 3 au quotient, qui est nombre premier: tellement que vous aurez pour les parties incomposees de 24, ces quatre nombres 2, 2, 2, 3. dont les caracteres sont *q. q. q. c.* & partant le caractere appartenant à ce nombre composé 24 sera *qqqc*. Et cest exposant 30. (duquel les parties incomposees sont 2. 3. 5) sera ce signe *qcß*, & ainsi des autres.

On fera encore la mesme chose, prenant deux quelsconques nombres qui multipliez entr'eux, produisent le nombre exposant proposé : ar les signes cossiques d'iceux, composent le signe cossique dudit nombre exposant proposé. Comme 3 & 4, desquels les signes cossiques sont *c*. & *q*. multipliez entr'eux produisent 12, dont le signe cossique sera *qqc*.

Or le contraire de ce que dessus, se fera rendant a chasque caractere incomposé son exposant; puis multipliant iceux exposans ensemble. Comme pour exemple, si nous voulons auoir l'exposant de *qqc*. nous rendrons a chasque caractere son exposant particulier, c'est a sçauoir 2,2,3, lesquels multipliez ensemble font 12, qui sera l'exposant dudit signe cossique *qqc*. & ainsi faut-il entendre des autres.

De la numeration des nombres cossiques.

CHAP. III.

La numeration des nombres cossiques est facille, les choses cy-deuant dictes estans bien entendues : Car quand ils sont posez seuls, comme 5 ℞, ou 8*q*. ou 20 *c*. &c. ils s'expriment ainsi, 5 racines ou 8 quarrez, ou 20 cubes &c; mais quāt ils sont proposez cōioincts entr'eux par ce signe + au milieu, ou par celuy cy —; cōme 5℞ + 8*q*; ou 8*q* — 5℞; ou 20*c* + 8*q* — 5: lesquels deux signes + & — ont leur signification cōtraire: car cestuy-cy +, est dict signe d'adiouster, & signifie plus; mais celuy-cy —, est appelé signe de soustraire, & denote moins; & les nombres ausquels est interposé le signe +, sont dicts cōposez; mais ceux ausquels interuient le signe —, sont nommez diminuez; & finablement ceux ausquels l'vn & l'autre signe est interposé, sont appellez mixtes, jaçoit que tous pourroient estre dits composez : Partant donc ce composé 5 ℞ + 8*q*. s'exprime 5 racines plus 8 quarréz; mais ce diminué 8*q* — 5℞; 8 quarrez moins 5 racines : & ce myxte cy 20*c* + 8*q* — 5 20 cubes plus 8 quarrez moins 5 vnitez : car comme il a esté dict, le nombre qui n'a point de caractere cossique apres soy, signifie vn nombre absolu composé d'vnitez.

Or ces signes + & — sont tousiours referez aux nombres qui les suiuent, & le nombre qui precede n'est a l'vn ny a l'autre desdits signes. Or le sens des nombres composez, diminuez, ou mixtes est facile : car quād nous disōs 5 ℞ + 8q. nous entendons 5 racines ensemble auec 8 quarrez, c'est à dire 42 vnitez, si la racine est 2, & le quarré 4. ainsi aussi quand nous disons 8q — 5 ℞ nous entēdons que de 8 quarrez, sont ostez 5. racines ; c'est à dire que le nombre proposé est 12 vnitez, si la racine est 2, & le quarré 4. & le mesme faut-il dire des autres.

De l'addition & soustraction des nombres cossiques.

CHAP. IIII.

QVand il faut adiouster vn nombre cossique à vn nombre cossique d'autre denomination ou caractere, l'addition se faict mettant ce signe + au milieu, & vient vn nombre cōposé; comme ces deux nombres 6 ℞, & 8 adioustez ensemble font 6 ℞ + 8. de mesme 6 ℞ & 8 c. font 6 ℞ + 8c. &c.

Mais quand il faut adiouster vn nombre cossique à vn autre nombre cossique de mesme appellation ou caractere, les nōbres se doiuent adiouster, & à la somme apposer le mesme caractere cossique: comme ces nōbres 4q & 9q adioustez ensemble, font 13q; de mesme 5 ℞ & 4 ℞, font 9 ℞ &c.

Par mesme raison quand il faut soustraire vn nombre co. d'vn nombre co. d'autre denomination, la soustraction se fait mettant ce signe — au milieu, & faict vn nombre diminué: comme pour exemple ce nombre 6 ℞ osté de 8q, reste 8q — 6 ℞; de mesme 12 de 6 ℞, restent 6 ℞ — 12. &c.

Mais quand il faut soustraire vn nomb. co. d'vn autre nōb. co. de mesme caractere, on doit soustraire le nomb. du nombre, & au reste apposer le mesme caractere : comme 4 ℞ de 9 ℞, restent 5 ℞ ; & 9 c. de 20 c. restent 11 c &c.

Mais quand il faut adiouster des nombres cos. composez, diminuez, & mixtes, ou oster l'vn de l'autre, il les faut poser l'vn au dessous de l'autre, tellement que les nomb. de mesme appellation se respondent entr'eux. Que si en l'vn ou l'autre d'iceux n'est trouué vn nomb. respondant à quelqu'vn, sera posé au lieu de sa figure o, auec le signe +, & estans ainsi cõstituez, seront adioustez les nombres de mesme appellation, ou ostez l'vn de l'autre, & les sommes, ou nõbres restez, souscrits en leurs propres lieux, auec les mesmes signes + ou —, qui seront trouuez és nombres adioustez, ou soustraits.

Exemples d'Additions.

℞.	N.
6 +	8.
7 +	10.
13 +	18.

q.	℞.	N.
7. +	8 —	5.
3. +	9 —	8.
10 +	17. —	13.

c.	N.	q.
7. +	8 —	3
4 +	11 —	5
11 +	19 —	8

c.	q.	℞.	N.
4 +	11 +	0 —	6.
3 +	0 +	8 —	4.
7 +	11 +	8 —	10.

ß.	qq.	℞.	N.	q.
7 +	0 +	8 —	5 +	4.
4 +	9 +	6 —	9 +	0.
11 +	9 +	14 —	14 +	4.

Exemples de soustraction.

c.	q.	℞.	N.
7 +	11 +	8 —	10.
3 +	0 +	8 —	4.
4 +	11 +	0 —	6.

c.	N.	q.
11 +	19 —	8.
4 +	11 —	5.
7 +	8 —	3.

ß.	qq.	℞.	N.	q.
11 +	9 +	14 —	14 +	4
7 +	0 +	8 —	5 +	4.
4 +	9 +	6 —	9 +	0.

q.	℞.	N.
10 +	17. —	13.
7 +	8 —	5.
3 +	9 —	8.

Quand il reste + o, ou — o, il n'en faut tenir compte, cõme au premier exemple où il reste 4 *c* + 11 + o — 6 N, sera seulement 4 *c* + 11 *q* — 6.

Que si en l'addition ou soustraction, l'vn des nombres a-uoit le signe +, & l'autre —, il faut changer d'espece, c'est à dire qu'en l'addition, il faut soustraire le moindre du plus grand, & au nombre restant donner le signe du plus grand nombre duquel a este faicte la soubstraction.

Exemples.

q.	R.
6	+ 8.
2	— 10
8	— 2.

qc.	β.	qq.	c.	R.	N.
7	+ 0	+ 8	+ 0	— 4	+ 8.
7	+ 5	— 11	— 11	+ 0	+ 8
14	+ 5	— 3	— 11	— 4	+ 8.

Mais s'il falloit adiouster ces deux nombres 6q — 8 R, & 11 R — 3q, il les faudroit poser comme ensuit.

q.	R.
+ 6.	— 8.
— 3	+ 11
3	+ 4.

Mais en la soustraction, il faut adiouster les nombres ensemble, & donner á la somme le signe du nombre superieur, duquel doit estre faicte la soustraction.

Exemples.

q.	R.
8	— 2.
6	+ 8.
2	— 10.

qc.	β.	qq.	c.	R.	N.
14	+ 5	— 3	— 11	— 4	+ 8.
7	+ 0	+ 8	+ 0	+ 4	+ 8.
7	+ 5	— 11	— 11	— 0	+ 0.

Que s'il aduenoit qu'és deux nombres de la soustraction fussent mesme signe, & que le nombre a soustraire fust plus grand que celuy duquel il faut soustraire, il faudroit faire la soustraction du petit du plus grand, & au reste donner le signe contraire, comme il appert és exemples suyuans.

l. ℞.	q. ℞. N.	c. q. N.
6 + 8.	9. + 4 — 5.	6 + 5 + 3.
2 + 10.	4 + 7 — 8.	7 — 9 + 10.
4 — 2.	5 — 3 + 3.	— 1 + 4 — 7.

qui ſe doiue eſcrire 4q — 1 c — 7, d'autant que le ſigne — n'eſt pas bien diſpoſé au premier nombre.

Or tous les preceptes de l'addition & ſouſtraction enſeignez cy deſſus, au regard des ſignes + & —, peuuent eſtre retenus en memoire par les deux regles ſuiuantes.

1. A meſmes ſignes on doit poſer le meſme ſigne ; ſinon en la ſouſtraction, quand les nombres ſont poſez à rebours : car alors le ſuperieur eſt ſouſtraict de l'inferieur, & de + eſt faict —: mais de — eſt faict +.

2. Les ſignes diuers changent l'eſpece de l'operation : & en l'addition eſt poſé le ſigne du plus grand nombre : mais en la ſouſtraction eſt poſe le ſigne du nombre ſuperieur.

Quant à la preuue de l'addition & ſouſtraction, elle ſe fait en deux manieres : la premiere, l'addition preuue la ſouſtraction, & la ſouſtraction l'addition, tout ainſi qu'on faict ès nombres abſolus.

Exemples de la preuue des trois dernieres additions & ſouſtractions.

q. ℞.	qc. ſ. qq. c. ℞. N.	q. ℞.
8 — 2.	14 + 5 — 3 — 11 — 4 + 8.	+ 3 + 4.
2 — 10.	7 + 5 — 11 — 11 + 0 + 0.	— 3 + 12.
6 + 8.	7 + 0 + 8 + 0 — 4 + 8.	6 — 8.

Preuue de la ſouſtraction.

l. ℞.	q. ℞. N.	c. q. N.
4 — 2.	5 — 3 + 3.	— 1 + 4 — 7
2 + 10	4 + 7 — 8.	+ 7 — 9 + 10
6 + 8.	9 + 4 — 5.	6 — 5 + 3.

Pour faire autrement ladicte preuue, il faut construire vne table auec quelques progressions geo. commençant a l'vnité, comme il appert cy dessous.

N	℞	q.	c.	qq.	ß	qc.	bß	qqq.
1	2	4	8	16	32	64	128	256
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561
1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$

Par apres il faut resoudre les nombres cossiques à adiouster selon aucunes d'icelles progressions en nombres absolus, puis les adiouster ensemble, ou soustraire l'vn de l'autre, selon les signes + ou —, & puis apres soient semblablement resouls, les nombres cossiques de la somme recueillie ; & si l'addition a esté bien faicte, lesdits nombres resouls de la somme recueillie, seront egaux aux nombres resouls à adiouster ensemble ; comme pour exemple, nous auons trouué cy deuāt que 6 q + 8 ℞ adioustez auec 2 q — 10 ℞ font 8 q — 2 ℞ pour en faire donc la preuue, nous resoudrons en nombres absolus les deux nombres à adiouster, sçauoir est 6 q + 8 ℞, & 2 q — 10 ℞, & prenant la resolution en la progression dont la racine est 2, 6 q font 24, & 8 ℞ font 16, lesquels 24 & 16 joincts ensemble, à cause du signe + font 40: de mesme 2 q font 8, qui adioustez à 40 (car le signe + est tousiours entendu estre au nombre qui n'a nul signe apposé) font 48, & 10 ℞ font 20, qui soustrais de 48, à cause du signe —, reste pour la somme de l'addition 28. & resoluant 8 q — 2 ℞, qui est la somme recueillie de l'addition, viendront aussi 28: & partant l'addition a esté bien faicte.

Quant à la preuue de la soustraction, elle se faict en la mesme maniere : car les nombres cossiques d'icelles estans reduis en nombres absolus, & les nombres à soustraire, estans adioustez aux restans, doiuent estre egaux aux nombres dōt la soustraction a esté faicte: comme pour exemple, nous auōs cy deuant trouué que 7 c — 9 q + 10 N. soustrais de 6 c — 5 q

+3 N. laissent 4q — 1c — 7N. donc 7c. — 9q + 10 N, resouls en nombres absolus selon la progression dont la racine est 3, font 118; & 4q — 1c — 7, font 2, qui adioustez à 118, font 120; & 6o — 5q + 3 N font aussi 120: & partant la soustractiō a esté bien faicte.

De la multiplication & diuision des nombres cossiques.

CHAP. V.

Quand vn nombre cossique est multiplié, ou diuisé par vn nombre absolu, le produict a mesme denomination cossique; comme pour exemple 4 ℞. ou 8 q. estans multip. par 3. prouiennent 12 ℞. ou 24 q &c. Item 12 q. ou 24 ℞. estans diuisez par 4. viennent 3 q. ou 6 ℞.

Mais quant le nombre cossique est multiplié, ou diuisé par vn nombre cossique, le produict est d'autre denomination, sçauoir est de celle qui se faict des exposans joincts ensemble, quant a la multiplication: comme pour exemple 4 ℞. multipliez par 7 ℞. font 28 q car l'exposant de ℞. est l'vnité. Donc les 2 sont exposans de q, & 4 ℞. multipliez par 5 q font 20 c. car 1 est exposant de ℞, & 2 de q, lesquels adioustez ensemble, font 3 exposans de c. Et quant a la diuision, le quotient à la denomination du nombre restant, l'exposant du diuiseur estant osté de l'exposant du diuisé: Comme pour exemple 36 qc, diuisé par 4 qq le quotient est 9 q. Car 4 exposant de qq estant osté de 6 exposant de qc. reste 2 exposant de q. & 18 qq. par 3 c, vient 6 ℞: & 8 q par 8 q, vient 1 N, &c.

Quand le nombre cossique composé ou diminué, est multiplié ou diuisé par vn nombre absolu ou cossique, tant simple que composé ou diminué, outre ce qui est dict cy dessus, il faut sur tout auoir egard aux signes + & —: Car quand les nombres se multiplians ou diuisans ont vn mesme signe, il faut apposer au produict le signe +; mais quand l'vn d'iceux est +, & l'autre —, il faut donner au produit le signe —. Ce qui est aisé à retenir en memoire par la regle suiuante.

Aux signes semblables faut poser +, mais aux dissemblables faut poser —.

Exemples de la multiplication.

7 q — 4 ℞.
9.

---

63 q — 36 ℞.

7 q + 4 ℞.
9 N.

---

63 q + 36 ℞.

7 q — 4 ℞.
9 ℞.

---

63 c — 36 q.

8 q + 9.
8 q + 9.

---

72 q + 81.
64 qq + 72 q

---

64 qq + 144 q + 81.

8 q — 9.
8 q — 9.

— 72 q + 81.
64 qq — 72 q

---

64 qq — 144 q + 81.

6 q + 8 ℞ — 6 N.
2 q — 4 N.

— 24 q — 32 ℞ + 24 N.
12 qq + 16 c — 12 q.

---

12 qq + 16 c. — 36 q. — 32 ℞ + 24 N.

9 q + 8 N — 3 ℞.
7 c — 4 qq. — 8 q

— 72 qq. — 64 q + 24 c
— 36 qc — 32 qq + 12 ß.
63 ß + 56 c. — 21 qq.

— 36 qc + 75 ß — 125 qq + 80 c — 64 q.

Et d'autant que comme il a desia esté dict, le signe — n'est bien au commencement, on doit colloquer le produict ainsi

75 ß — 36 qc. — 125 qq. + 80 c — 64 q.

Exemples de la diuision.

Diuiser 36 ℞ + 24 [9 ℞ + 6
par 4 4

Plus 45 c + 36 q + 27 ℞ [5 q + 4 ℞ + 3 N
par 9 ℞ 9 ℞ 9 ℞

Plus 45 c + 36 q — 27 ℞ [5 5/8 q + 4 1/2 ℞ — 3 3/8 N
par 8 ℞ 8 ℞ 8 ℞

— 40
Plus 30 q — 58 ℞ + 24. [6 ℞ — 8 N.
par 5 ℞ — 3 N
5 ℞ — 3 N.

12
Plus 12 qq + 16 c — 36 q — 32 + 24 N [6q + 8 ℞ — 6N.
par 2 q + 0 ℞ — 4N
2q + 0 ℞ — 4N.
2q + 0 ℞ — 4N.

— 1 + 1
Plus 1c + 0q + 0 ℞ + 1 [1 q — 1 ℞ + 1.
par 1 ℞ + 1
1 ℞ + 1
1 ℞ + 1

Et conuient noter qu'en toutes diuisions des nombres cossiques, les denominations doiuent estre cõtinuees d'ordre;& partant quand il y a quelque denomination de mãque, il faut poser o au lieu d'icelle, comme il appert és deux precedentes exemples, la derniere desquelles i'ay faict en ceste maniere: I'ay posé 1℞ + 1 au dessoubs de 1 c + 0q, & trouue que 1℞ est en 1c; 1q que ie pose au quotient,& multiplie ledit 1q par mon diuiseur, & vient 1c + 1q que i'oste de 1c + 0q, & reste de tout le nombre á diuiser — 1q + 0 ℞ + 1: puis apres i'aduãce mon diuiseur soubs — 1q + 0 ℞. & trouue qu'il y est — 1℞, que ie pose au quotient,& multiplie ladite 1 ℞ par ledit diuiseur, & vient — 1q — 1℞, que ie soustraits de — 1 q + 0℞, & reste de tout le nombre á diuiser 1 ℞ + 1, soubs lequel ie pose le diuiseur, & trouue qu'il y est 1 N precisément.

Or quand le diuiseur est nombre composé ou diminué, & qu'il ne peut diuiser precisément, alors il faut seulement interposer vne ligne entre-deux, ainsi qu'és fractions, comme és deux exemples suyuans.

8ß par 2q + 4 N   8q — 9 ℞. par 4 ℞ + 3 N

Les quotiens sont

$$\frac{8\text{ß}}{2q + 4N} \qquad \frac{8q - 9\text{℞}}{4\text{℞} + 3N}$$

Il faut faire en la mesme maniere, quand vn nombre cossique simple ou composé doit estre diuisé par vn nombre cossique simple de plus grande denomination : comme 8q diuisez par 2qc constituent ceste fraction $\frac{8q}{2qc}$ De mesme 9q + 4 estãs diuisez par 3c. font $\frac{9q+4}{3c}$ &c.

Reste à enseigner à faire la preuue de la multiplication & diuision : laquelle se faict en deux manieres. Premierement la diuision preuue la multiplication ; & la diuision se preuue par la multiplication, tout ainsi qu'en l'arithmetique vulgaire.

L'autre sorte de preuue se faict par la resolution des nombres cossiques, selon quelque racine des progressions geometriques contenuës au chapitre precedent. Car les nõbres cossiques resouts, estans multipliez entr'eux, doiuent produire vn mesme nombre que le produict des nombres cossiques aussi resoult selon la mesme racine : & le nombre cossique qu'il faut diuiser resoult, doit produire autant diuisé par le diuiseur resoult, que le quotient aussi resoult. Cõme pour exemple nous auons trouué cy-deuant que 6q + 8℞ — 6N multipliez par 2q — 4 N, produisent 12qq + 16c — 36q — 32℞ + 24 N. pour en donc faire la preuue, nous resoudrons les deux nombres cossiques en nombres absolus, & viendront (selon la progression dont 2 est racine) 34, & 4, qui multipliés entr'eux produisent 136 : mais la resolution du produict 12qq + 16 c — 36q — 32 ℞ + 24 N, est aussi 136 : & partant la multiplication a esté bien faicte. Nous auons aussi trouué que 1c + 1, diuisez par 1℞ + 1. Le quotient est 1q — 1℞ + 1, lequel quotient donne 3 par la resolution de la progression dont la racine est 2 : mais les deux nombres cossiques resolus par la mesme progression, sont 9 & 3; & 3 diuisant 9, le quotient est aussi 3 : & partant la diuision a esté bien faicte.

Des fractions des nombres cossiques.

CHAP. VI.

EN l'Algorithme des fractions cossiques, les operations sont presque sẽblables qu'es fractions vulgaires : il n'y a

qu'a

qu'à adiouster ce qui concerne les caracteres cossiques, & les signes +— & —. Et premierement quand a la numeration, ceste fraction $\frac{3}{8\,R}$ signifie 3 vnitez estre diuisees par 8 R; & $\frac{7q}{9}$ denotte 7 quarrez estre diuisez par 9 vnitez: Item $\frac{9qq +- 8q.}{6c.}$ signifie que ce nombre $9qq +- 8q$. est diuisé par $6.c.$ &c.

L'abbreuiation se faict en deux manieres: Car ou les nombres seront abbreuiez, comme és fractions vulgaires, sans toucher aux caracteres cossiques; ou bien seront aussi abbreuiez les caracteres cossiques: comme ceste fraction $\frac{15}{5\,R}$, quād aux nombres, elle sera reduicte à ceste-cy $\frac{3}{1\,R}$: Item $\frac{9q +- 36}{81}$ sera reduicte à $\frac{1q +- 4}{9}$: Item $\frac{35\,R +- 28}{7q +- 14}$ sera reduicte a $\frac{5\,R +- 4}{1q +- 2}$: Item $\frac{18q - 9\,R}{6\,R +- 3q}$ sera reduicte a $\frac{6q - 3\,R}{2\,R +- 1q}$ &c.

Et quand a l'abbreuiation des caracteres cossiques, elle est faicte soustraiant l'exposant du moindre caractere, des exposans des autres caracteres; car si aux nombres restans, sont posez les propres caracteres, l'abbreuiation sera acheuée quand aux caracteres. Comme ceste fraction $\frac{8q}{2qc}$ quand aux caracteres, sera reduitte en celle-cy $\frac{8}{2qq}$; puis apres quād aux nombres, a ceste-cy $\frac{4}{1qq}$: Item $\frac{18q - 9\,R}{6\,R +- 3q}$ quand aux nombres & caracteres, sera reduicte a $\frac{6\,R - 3}{2 +- 1\,R}$, &c.

Quand à la reduction des fractions cossiques à vn mesme denominateur, elle s'obtient multipliant en croix les numerateurs par les denominateurs, & les denominateurs entr'eux;

tout ainsi qu'és fractions vulgaires : comme ces fractions $\frac{3\text{℞}}{4q}$ & $\frac{4c}{5qc}$ estans reduites en mesme denomination, seront $\frac{15b\beta}{20qqq}$ & $\frac{16\beta}{20qqq}$ &c.

Que s'il faut reduire quelque nombre entier, & vne fractiõ a mesme denomination ; il faudra supposer l'vnité estre denominateur du nombre entier, & poursuiure ainsi que dessus. Comme 6 & $\frac{4\text{℞}}{7q}$ seront posez ainsi $\frac{6}{1}$ & $\frac{4\text{℞}}{7q}$; puis estans reduites comme dessus, elles seront $\frac{42q}{7q}$ & $\frac{4\text{℞}}{7q}$: Item $\frac{5q}{1}$ & $\frac{4c}{3q}$ seront reduictes a $\frac{15qq}{3q}$ & $\frac{4c}{3q}$ &c.

Mais si aux entiers est ioincte quelque fraction, il faudra premierement reduire les entiers en icelle fraction ; ce qui se fait multipliãt les entiers par le denominateur de la fraction, & adioustant au produict le numerateur. Comme si nous voulons reduire $4q + \frac{2\text{℞}}{1c}$ & $\frac{3q}{1\beta}$ a vne mesme denomination, nous multiplierons premierement $4q$ par $1c$, afin que nous ayõs ces deux fractions $\frac{4\beta + 2\text{℞}}{1c}$ & $\frac{3q}{1\beta}$ lesquelles nous reduirons à ces deux cy $\frac{4q\beta + 2qc}{1qqq}$ & $\frac{3\beta}{1qqq}$; & ainsi des autres.

Quant aux autres 4 operations des fractions cosiques, sçauoir est, addition, soustraction, multiplication & diuision, elles ne different à celles que nous auons enseignees és fractions de nostre Arithmetique, sinon à raison des caracteres cosiques, & des signes $+$ & $-$. Parquoy nous mettrons seulement icy des exemples de chaque operation.

Exemples de l'addition.

Adioustant $\frac{3\text{℞}}{2}$ auec $\frac{4q}{3c}$ viendront $\frac{9qq + 8q}{6c}$, c'est à dire $\frac{9q+8}{6\text{℞}}$: Item $\frac{48}{7q}$ auec $\frac{48}{12\text{℞}-3q}$ font $\frac{192q+576\text{℞}}{84c-21qq}$: Itē $\frac{9\text{℞}+2q}{36c}$ adiouſtez auec $\frac{21qq-8q}{36c}$ font $\frac{21qq-6q+9\text{℞}}{36c}$ qui reduis font $\frac{7c-2q+3}{12q}$: Item $\frac{5q-3\text{℞}}{7c-2}$ adiouſtez auec $\frac{3c+1}{2qq+4\text{℞}}$ font $\frac{3qc-6ß+21c-12q-2}{14bß+24qq-8\text{℞}}$.

Exemples de la ſouſtraction.

Si on oſte $\frac{3\text{℞}}{2N}$ de $\frac{9qq+8q}{6c}$ reſteront $\frac{16q}{12c}$, c'eſt à dire $\frac{4}{3\text{℞}}$: Item $\frac{1}{2q}$ de $\frac{3\text{℞}}{4N}$, reſteront $\frac{6c-4}{8q}$: Item $\frac{2\text{℞}-3}{4N}$ de $\frac{4}{2\text{℞}+3}$, reſteront $\frac{25-4q}{8\text{℞}+2}$: Item $\frac{9q+8\text{℞}}{2c-6N}$ de $\frac{11c+16q+8\text{℞}}{2c-6N}$ reſteront $\frac{11c+7q}{2c-6N}$.

Exemples de la multiplication.

Multipliant $\frac{3}{4\text{℞}}$ par $\frac{1}{2\text{℞}}$ viennent $\frac{3}{8q}$: Item $\frac{1}{2q}$ par $\frac{1\text{℞}}{4}$, viennent $\frac{1\text{℞}}{8q}$: Item $\frac{3\text{℞}}{4q}$ par $\frac{1q}{2c}$, viendront $\frac{3c}{8ß}$: Item $\frac{1\text{℞}}{3}$ par $1\text{℞}-5$, viendront $\frac{1q-10\text{℞}}{3}$: Item $\frac{3\text{℞}+2}{4q-1\text{℞}}$ par $\frac{2\text{℞}-4}{1q+3}$, viendront $\frac{6q-8\text{℞}+8}{4qq-1c+12q-3\text{℞}}$: Item $\frac{7q+8\text{℞}}{5c-18}$

par $\frac{4\text{℞}}{5q}$ — 8N, viendront $\frac{32q — 180qq — 192c}{25ß — 55q}$.

Exemples de la diuision.

Diuisant $\frac{3}{8q}$ par $\frac{1}{2\text{℞}}$, viendront $\frac{6\text{℞}}{8q}$ ou $\frac{3}{4\text{℞}}$: Item $\frac{1\text{℞}}{8q}$ par $\frac{1}{4\text{℞}}$, viendront $\frac{4q}{8q}$ ou $\frac{1}{2}$: Item $\frac{3c}{8ß}$ par $\frac{3\text{℞}}{4q}$, viendront $\frac{12ß}{24qc}$ ou $\frac{1}{2\text{℞}}$: Item $\frac{1q — 10\text{℞}}{3}$ par $\frac{2\text{℞}}{3}$, viendront 1℞ — 5: Item $\frac{6q — 8\text{℞} + 8}{4qq — 1c + 12q — 3\text{℞}}$ par $\frac{2\text{℞} — 4}{1q + 3}$, viendront $\frac{3\text{℞} + 2}{4q — 1\text{℞}}$.

Quant à la preuue de ces 4 operations, elle se faict en la mesme maniere que celle des entiers.

De la regle d'Algebre.

CHAP. VII.

Estant proposee quelcue question, soit posé pour le nombre incognu 1℞, (on peut aussi quelquesfois poser plusieurs racines, comme deux ou trois, ou d'auantage pour la commodité de la question proposee) laquelle soit examinee selon la teneur de la question, iusques à ce qu'on ait trouué quelque equation: Soit icelle reduicte, s'il en est besoing puis apres par le nombre du plus grand caractere cossique soit diu[isé] l'autre nombre de lequation. Car ou le quotient sera le nombre q[ui] estoit cherché; sçauoir est la valeur de la racine posee au cõmencem[ent] *ou quelque racine du quotient rendra cogneu le nombre cherché. Or le diuiseur demonstrera par son caracte-e cossique, quand & quelle racine il faudra extraire du quotient.*

Ceste regle à 4 parties, dont il y en a seulement deux du tout necessaires : sçauoir est la premiere & troisiesme : & quant aux deux autres, il n'en est pas tousiours besoing. Et auant que de traicter particulierement de chacune d'icelles, nous les exposerons icy, proposant ce probleme.

Trouuer vn nombre, duquel la tierce & quarte partie estans ostez, le nombre restant soit 10.

Ie pose le nombre incogneu estre 1℞; c'est à dire que ie pose 1℞ estre egale au nombre incogneu que nous cherchõs. I'examine donc 1℞ selon la teneur de la question, c'est à dire que ie prends d'icelle $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, sçauoir est $\frac{1}{3}$ ℞ & $\frac{1}{4}$ ℞, qui font ensemble $\frac{5}{12}$ ℞, que i'oste de 1℞, & restent $\frac{1}{12}$ ℞. Maintenant ie ratiocine ainsi : puisque 1℞ est posee egale à tout le nombre incogneu, $\frac{1}{3}$ ℞ sera egal au tiers d'iceluy, & $\frac{1}{4}$ ℞ egal au quarré du mesme ; & puisque la tierce & quarte partie du nõbre total est soustraict, le nombre restant est 10, il s'ensuit que $\frac{1}{3}$ ℞ & $\frac{1}{4}$ ℞, c'est à dire $\frac{7}{12}$ ℞, estans ostez de 1℞, le nombre restant $\frac{5}{12}$ ℞ estre egal au nombre restant 10, pource que si de choses egales sont ostees choses egales, les restes sont egaux. Est donc trouuee equation, ou bien egalité entre $\frac{5}{12}$ ℞ & ce nombre 10 : car equation n'est autre chose qu'vne egalité de valeur entre deux quantitez, ou choses diuersement denommees : & voila quant à la premiere partie de la regle cy dessus. Et pour le regard de la seconde partie, qui est la reduction, il n'en est besoin en l'equation de nostre exemple : mais nous monstrerons cy apres, quand & comment l'equation se doit reduire. Et pour le regard de la diuision, qui est la 3. partie de la regle : en nostre equation trouuee entre $\frac{5}{12}$ ℞ & 10 N, le plus grãd caractere cossique est ℞ : c'est à dire que ℞ à plus grand exposant que N : parquoy ie diuise ce nombre 10 par $\frac{5}{12}$, reste du caractere ℞, & vient au quotient 24, qui est le nõbre cherché. Parquoy la 4. partie de la regle d'Algebre n'a lieu en nostre exemple ; mais quand, & quelle racine du quotient manifestera le nõbre incogneu, il sera enseigné cy-apres. Maintenant si du nombre trouué 24 on prend $\frac{1}{3}$, sçauoir est 8 : puis $\frac{1}{4}$, sçauoir est 6 ; icelles deux parties font ensemble 14, qui ostez des 24, reste le nombre 10, ainsi qu'il estoit requis en la proposition.

De la reduction d'equation.

CHAP. VIII.

POur l'intelligence de la reduction des equations, eſt à noter, que ſi on adiouſte ou ſouſtraict choſes egales de chaſque terme de l'equation, ou bien qu'on les multiplie ou diuiſe par vn meſme nombre, qu'il y aura pareillement equation entre les produicts. Comme pour exemple, s'il y a equation entre 12 ℞, & 72; oſtant 4 ℞ de chaſque terme, reſtera encore equation entre 8 ℞, & 72—4 ℞: car puiſque 12 ℞ ſont egales à 72; 1 ℞ ſera egale à 6, & partant 8 ℞ ſeront egales à 48, & 4 ℞ à 24, qui oſtez de 72, reſtera auſſi 48. Item ſi à chaſque terme de l'equation d'entre 8 ℞, & 72—4 ℞, on adiouſte 10, viendra equation entre 8 ℞, + 10, & 82—4 ℞. Car il eſt manifeſte que chaſque terme vaut 58. Item s'il y a equation entre 3 ℞ + 12, & 72—7 ℞; multipliant chaſque terme par 2, viendra auſſi equation entre 6 ℞ + 24, & 144—14 ℞: car l'vn & l'autre terme faict 60. Ainſi auſſi ſi nous diuiſons par 6 chaſque terme de ceſte derniere equation, ſera produict equation entre 1 ℞ + 4, & 24—2 $\frac{1}{3}$ ℞: car l'vn & l'autre terme faict 10.

Maintenant quand en la ſolution de quelque queſtion on eſt paruenu à l'equation; ſi le plus grand caractere coſſique, par le nombre duquel (ſelon la regle d'Algebre) on doit diuiſer l'autre terme de l'equation n'eſt poſé ſeul en l'vn & l'autre terme d'icelle equation, ou qu'eſtant ſeul en l'vn il ne le ſoit en l'autre, alors la diuiſi ne ſe peut faire. Comme pour exemple ſi l'equation eſt trouuee entre 9 ℞ + 12, & 78—2 ℞; la diuiſion ne ſe peut faire, pource qu'en chaſque terme eſt trouué ce caractere ℞, & ceſtuy-cy N. Semblablement ſi l'equation eſt trouuee entre 9 ℞—12, & 42: tu vois que la diuiſion ne ſe peut faire par 9 nombre du plus grand caractere coſſique ℞, pource que 9 ℞ ne ſont pas poſees ſeules, ains 9 ℞—12.

Ainſi auſſi ſi l'equation eſt trouuee entre 9 ℞, & 72—3 ℞: Item entre 1 q—3 ℞, & 108: Item entre 1 q—48, & 8 ℞: Item entre 108 + 8 ℞, & 2 q—12 ℞ + 60, &c. en toutes leſquelles il eſt manifeſte que la diuiſion ne ſe peut faire comme requiert la regle d'Algebre. Parquoy aduenant ſemblables equations, elles doiuent estre reduictes en autres, esquelles le plus grand caractere cossique soit seul en vn terme de l'equation, & ne soit repeté en l'autre, & esquelles aucun caractere cossique ne soit posé deux fois. Or ceste reduction se fera ainsi qu'il ensuit :

Si vne particule de l'equation a le signe —, il la faut transposer, c'est à dire adiouster à l'autre terme : comme si vne equation est trouuee entre 9℞ — 12, & 42 : nous adiousterons 12 à 42, & nous aurons l'equation entre 9℞, & 54 : Item l'equation estant trouuee entre 9℞, & 72 — 3℞, adioustant 3℞ à chasque terme, nous aurons l'equation entre 12℞, & 72 : item l'equation estant entre 2*q* — 3℞, & 104, adioustant 3℞ à chasque terme, l'equation sera entre 2*q*, & 3℞ + 104 : Item l'equation estant entre 5*q* — 40, & 10℞, adioustant — 40, nous aurõs vne equation entre 5*q*, & 10℞ + 40. Mais quãd vne particule a le signe +, il la faut soustraire : comme si l'equation est trouuee entre 11℞ + 12, & 78, nous soustrairons + 12, & restera l'equation entre 11℞, & 66 : Item l'equation estãt trouuee entre 3℞ + 6, & 24; ostant + 6, restera l'equation entre 3℞, & 18 : Item si vne equation est trouuee entre 5*q* + 20, & 100, nous osterons + 20, & restera l'equation entre 5*q*, & 80 : Item vne equation estant entre 3*q* + 2℞, & 56; ostant + 2℞, l'equatiõ restera entre 3*q*, & 56 — 2℞. Que si l'vn & l'autre signe + & — sont en vne equation, il faut adiouster la particule du signe —, mais soustraire celle du signe +. Comme si vne equatiõ est trouuee entre 9℞ + 12, & 78 — 2℞ : nous adiousterons premierement — 2℞, & l'equation sera entre 11℞ + 12, & 78; puis soustraiant d'icelle + 12, restera l'equation entre 11℞, & 66 : Item si vne equation est entre 5*q* — 3℞, & 3*q* + 20; nous adiousterons 3℞, & l'equation sera entre 5*q*, & 3*q* + 3℞ + 20; & ostant de ceste-cy 3*q* restera l'equation entre 2*q*, & 3℞ + 20 : Item si vne equation est trouuee entre 108 + 8℞, & 2*q* — 12℞ + 60, nous adiousterons premierement 12℞, & l'equation viẽdra entre 108 + 20℞, & 2*q* — 60; & d'icelle estans ostez 60, restera l'equation enrre 2*q*, & 20℞ + 48. Que s'il aduient quelque equation, comme entre 6℞ — 10, & 10℞ — 34, en laquelle les nombres 10, & 34 ont mesme signe —, il faut oster 10 de chasque terme, & restera l'equation entre 6℞, & 10℞ — 24; & d'autant qu'en icelle les nombres 6℞ & 10℞ ont aussi vn mesme +, il faut oster le moindre 6℞ du plus grand 10℞, & restera l'equation entre 0℞, & 4℞ — 24; & adioustant 24 à chasque terme d'icelle, viendra l'equation entre 24, & 4℞. Soit derechef equation entre 54 + 4℞, & 2*q* — 6℞ + 30;

Premierement pource que $+ 4$ ℞, & $- 6$ ℞ ont signes diuers, il faut adiouster 4 ℞ a 6 ℞, & viendront $- 10$ ℞, & sera equation entre 54, & $1q - 10$ ℞ $+ 30$; puis apres d'autant que 54, & 30, ont vn mesme signe $+$, il faut soustraire 30 de 54, & restera equation entre 24, & $1q - 10$ ℞: tiercement ie transpose $- 10$ ℞, afin que l'equation soit entre $1q$, & 10 ℞ $+ 24$: & ainsi des autres.

Quant à la reduction des equations qui sont trouuees en fractions, elle se faict la reduisant en equation d'entier par la multiplication en croix. Comme si vne equation est trouuee entre $\frac{3℞ + 12}{5}$ & $\frac{369 - 198℞}{3℞}$; multipliant ces fractions en croix, sçauoir est le numerateur de la premiere par le denominateur de la 2. mais le numerateur de la 2. par le denominateur de la premiere, sera faict equation entre $9q + 36℞$, & $180q - 990℞$; c'est à dire entre $1℞ + 4$, & $20℞ - 110$, qui estant reduite, comme dit est cy dessus, l'equation sera entre 19 ℞, & 114: Item vne equatiȯn estant trouuee entre $\frac{4℞ + 18}{1℞}$, & $\frac{12℞ - 58}{2}$; estant reduitte par la multiplication en croix, viendra equation entre $8℞ + 36$, & $12q - 58℞$, qui reduite par transposition sera entre $66℞ + 36$, & $12q$.

Que si vne equation est trouuee entre vne fraction, & quelque autre chose: comme entre $\frac{5}{4 + 1℞}$, & vn escu, ou vn degré, ou vne heure, ou vne minutte &c. Il faut poser vne vnité pour ceste chose, ainsi $\frac{1}{1}$, afin que l'equation soit entre $\frac{5}{4 + 1℞}$, & $\frac{1}{1}$, laquelle par la multiplication en croix, sera reduicte a l'equation d'entre 5, & $4 + 1℞$.

Quant à la reduction d'equation d'entre nombres cossiques irrationaux, & nombre absolu, nous l'enseignerons à la fin du chapitre 23.

S'il se rencontre aussi quelque equation en laquelle il n'y ait aucun nombre absolu, il faudra abbreuier les caracteres cossiques: Comme pour exemple, l'equation d'entre $2q$, & 12 ℞ sera reduicte a l'equation d'entre 2 ℞ & 12: Item l'equation d'entre $1qq$, & $1\beta + 2qq$ sera reduite à l'equation d'entre $1q$, & $1℞ + 2$, &c. Mais ceste reduction n'est du tout necesfaire deuant l'extraction des racines des nombres cossiques simples, comme nous dirons au chap. 10.

De la diuision que requiert la regle d'Algebre.

CHAP. IX.

LA reduction estant faicte, la regle d'Algebre dict que par le nombre du plus grand caractere cosique (laissant iceluy caractere) on diuise l'autre nombre de l'equation : comme si l'equation est trouuee entre 7℞ & 42; diuisant 42 par 7, nombre du caractere cosique ℞, viendra au quotient 6, qui sera la valleur d'vne racine : Item vne equation estant trouuee entre 12*q*, & 66℞+−36 : diuisant 66℞+−36 par 12, le quotient donnera $5\frac{1}{2}$℞+−3, pour la valleur d'vn quarré : Item si vne equation est entre $\frac{1}{3}$*q*, & 6℞+−$13\frac{1}{3}$, nous diuiserons 6℞ +−$13\frac{1}{3}$ par $\frac{1}{3}$, & le quotient donnera 18℞+−40, pour la valleur d'vn quarré : Item vne equation estant entre 3*qc*, & 9*c*+−120, nous diuiserons 9*c*+−120 par 3, & le quotient donnera 3*c*+−40 pour la valleur d'vn quarré de cube &c.

De l'extraction des racines dont faict mention la regle d'Algebre.

CHAP. X.

AYant faict la reduction des caracteres cosiques, si le plus grand caractere cosique est ℞, le quotient de la diuision mentionnee cy dessus manifestera le nombre que vaut vne seule racine, comme il a esté dict au chap. precedent : ou bien toutes & quantefois que le nombre cosique de la plus grāde denomination sera egal au nombre cosique de la plus prochaine moindre denomination, estat diuisé le nombre de la moindre denomination par le nombre de la plus grande, le quotient donnera la valleur d'vne seule racine, encore que l'abbreuiation des caracteres ne soit faicte. Comme si 5*ß* sont egaux à 30*qq*; 30 estans diuisez par 5, le quotient 6 sera la valeur d'vne seule racine. Mais si le plus grand caractere cossique, estant seul d'vne part de l'equation, est plus grand que racine, & de l'autre part soit vn nombre absolu, il faudra extraire du quotient la racine qu'iceluy caractere signifie: côme si le carectere est *q*, il faudra extraire la racine quarree; si *c*, la cubique; si *qq*, la quarree de quarree, &c. laquelle sera la valleur d'vne seule racine. Comme pour exemple, si vne equation est entre 5*q*, & 520; ayant faict la diuision, il faudra chercher la racine quarree du quotient 144: Item si 10 *c* sont egaux à 270, il faudra ayant faict la diuision extraire la racine cubique du quotient 27: Semblablement si 8*c* sont egaux à 24℞+−144, il faudra trouuer la racine cubique du quotient. Et afin qu'on sçache generalement quelle racine il faut tirer du quotient, quand deux nombres cossiques non collateraux sont egaux entr'eux, desquels l'vn ny l'autre est nombre absolu, il faut abbreuier les caracteres, afin que l'equation se face entre N, & nombre cossique: comme si vne equation est entre 10*qc*, & 80*q*, soit reduicte icelle à l'equation d'entre 10*c*, & 80: estant donc faict la diuision, il faudra tirer la racine cubique du quotient 8, & ainsi des autres.

Or la maniere d'extraire les racines des nombres absolus est enseignee en plusieurs Arithmetiques vulgaires: c'est pourquoy nous enseignerons seulement icy la maniere d'extraire les racines des nombres cossiques. Si donc il faut extraire quelque racine d'vn nombre cossique simple, soit prise la racine d'iceluy nombre, delaissant le caractere, l'exposant duquel soit diuisé par l'exposant du caractere qui denomme la racine qu'il faut extraire, & viendra l'exposant du caractere par lequel sera denommé la racine cherchee. Comme s'il faut trouuer la racine quarree de ce nombre 144*q* ayât pris la racine quarree d'iceluy nombre 144, qui est 12, soit diuisé l'exposant de ce caractere *q*, par l'exposant du caractere *q*, sçauoir est 2 par 2, & viendra 1, qui est exposant du caractere ℞: 12℞ est donc racine quarree du nombre 144*q*. Car si ce nombre 12℞ est multiplié en soy sera produict le nombre proposé 144*q*.

Derechef qu'il faille trouuer la racine quarree de 144*qc*: ayant pris la racine quarree d'iceluy, qui est 12, soit diuisé l'exposant de ce caractere *qc*, sçauoir est 6, par l'exposant de racine quarree, qui est 2, & viendra 3, exposant du caractere *c*: donc 12*c* est racine quarree du nombre 144*qc*. Ainsi aussi la racine cubique de ce nombre 64*c*, sera 4℞. Car la racine cubique du nombre 64 est 4, & l'exposant du caractere cube, sçauoir est 3, estant diuisé par 3, produict l'vnité, exposant de ℞.

Item la racine quarree de ce nombre 25qq, sera 5q.
Et la racine quarree de quarree de ce nombre 16qqq, sera 2q.
Et la racine sursolide de ce nombre 32 qβ, sera 2q.
Mais la racine quarree de quarree de ce nombre 81qq, sera 3℞, &c.

Que si vn nombre n'a la racine cherchee, ou par la diuision des exposans, n'est produict vn nombre exposant entier, le nombre cossique proposé n'a pas la racine desiree.

Quand à l'extraction des racines de nombres cossiques composez & diminuez, il est à noter qu'on n'a point encore troué (au moins que ie sçache) de maniere certaine pour ce faire, sinon que les exposans des trois nombres cossiques de l'equation ayent vn mesme excez entr'eux, c'est à dire qu'ils soient en proportion Arithmetique; telles sont les equations suiuantes.

1q.	6℞+72.	les exposans sont	2.	1.	0.
1q.	72—6℞.	les exposans sont	2.	0.	1.
1q.	14℞—48.	les exposans sont	2.	1.	0.
1qq.	18q+648	les exposans sont	4.	2.	0.
1qq.	725—4q.	les exposans sont	4.	0.	2.
1qq.	433q—41616.	les exposans sont	4.	2.	0.
1qc.	200c+3455.	les exposans sont	6.	3.	0.
1qc.	5120—16c.	les exposans sont	6.	0.	3.
1qc.	800c—156751.	les exposans sont	6.	3.	0.
1qqq.	2000qq+185076881.	les exposans sont	8.	4.	0.
1qqq.	214651701—20qq.	les exposans sont	8.	0.	4.
1qqq.	20000qq—78461119.	les exposans sont	8.	4.	0.
1qβ.	80β+39609.	les exposans sont	10.	5.	0.
1qβ.	7424—200β.	les exposans sont	10.	0.	5.
1qβ.	2000β—999424.	les exposans sont	10.	5.	0.

&c.

Quand les exposans gardant la progression Arithmetique sont tous plus grands que 0, il les faut abbreuier par la soustraction du moindre nombre exposant. Comme les suiuantes equations.

1cβ.	725bβ—4cc.	les exposans sont	11.	7.	9.
1cβ.	2000qqq+3456β	les exposans sont	11.	8.	5.
1qβ.	200qc+143136q.	les exposans sont	10.	6.	2.

Seront reduites à celles-cy.

1qq.	725—4q.	les exposans sont	4.	0.	2.
1qc.	200c+3457.	les exposans sont	6.	3.	0.

1.qqq. 200qq+—14336. les exposans sont 8. 4. 0.

Et ainsi faut-il faire de toutes autres, afin de cognoistre qu'elle racine il faut extraire.

Or pour extraire la racine quarree de tels nombres cossiques; prenez premierement la moitié du nombre des racines; puis au quarré d'icelle moitié, adioustez-y le nombre absolu, s'il à le signe +—, ou l'ostez s'il à le signe —: & finablemét à la racine quarree de ce produict, adioustez la moictié du nombre des racines, si elles ont le signe +—, ou l'ostez si elles ont le signe —: & ce qui viendra donnera l'estimation & valleur d'vne seule racine quarree. Comme pour exemple, vne equation estant trouuee entre 1q. & 72—6℞; la diuision estant faicte de 72—6℞, par 1, comme veut la regle d'Algebre, vient le mesme nombre pour la valeur d'vn quarré, duquel il faut trouuer la racine. Premierement donc ie prend la moitié du nombre des racines, sçauoir 3; puis au quarré d'icelle moitié, sçauoir est a 9, i'adiouste le nombre absolu 72, à cause du signe +— & viennent 81; dont ie prend la racine quarree, qui est 9; & d'icelle i'oste 3, moitié du nombre des racines, & reste le nombre 6, pour la valeur de la racine cherchee.

Soit derechef vne equation trouuee entre 1q. & 6℞+—72; & il faut trouuer la racine quarree de ce nombre 6℞+—72. Ie prends premierement la moictié du nombre des racines, sçauoir est 3: puis au quarré d'icelle moitié, qui est 9, i'adiouste 72 à cause du signe +—, & font 81: dont la racine quarree est 9, à laquelle i'adiouste 3 moitiés du nombre des racines, & font 12, qui est la valleur d'vne racine.

Soit encore vne equation entre 1q. & 18℞—72: & il faut trouuer la racine d'iceluy nombre 18℞—72.

Ie prends donc la moictié des racines, sçauoir est 9; puis du quarré d'icelle moitié qui est 81, ie soustraits 72, à cause du signe —, & restent 9, dont la racine quarree est 3, à laquelle i'adiouste la moitié des racines, sçauoir est 9, à cause du signe +—, & font 12 pour la valleur d'vne racine.

Mais il est a noter que tels nombres cosiques diminuez, esquels le nombre absolu à le signe —, ont double racine, sçauoir est, l'vne grande & l'autre petite; la grande est trouuee comme dit est cy-dessus: mais on aura la moindre, si la racine quarree du reste de la soustraction est ostee de la moictié du nombre des racines: comme au dernier exemple proposé, si 3, racine quarree du reste 9, est osté de 9 moitié du nóbre des racines, resteront 6, pour l'autre & moindre racine d'iceluy nombre cosique 18℞—72. Et faut noter que l'vne &

l'autre racine n'est pas tousiours propre à la solutiõ d'vn probleme, ains seulement l'vne ou l'autre : c'est pourquoy advenant tels nombres, si l'examen faict par l'vne d'icelles racines ne respond à la question, il faudra prendre l'autre racine.

Or il y a encore vne autre maniere d'extraire la racine des nombres cosiques composez, laquelle est fort commode, quand le nombre des racines est impair ou rompu : laquelle extraction se faict ainsi : Au quarré du nombre des racines, adioustez le quadruple du nombre absolu, s'il a le signe +, ou l'ostez s'il a le signe —: puis à la racine quarree de ce produit adioustez ou soustraiez le nombre des racines, selon qu'il sera noté, & viendra l'estimation ou valleur du double de la racine quarree, parquoy la moitié sera la valleur d'vne seule racine. Comme pour exemple, qu'il faille extraire la racine de ce nombre cosique 72—6℞ : Au quarré du nombre des racines, qui est 36, i'adiouste 288, quadruple du nombre absolu 72, & viennent 324, dont la racine quarree est 18 ; de laquelle i'oste le nombre des racines, sçauoir est 6, & restent 12, pour la valleur de deux racines ; & partant vne racine vaudra 6.

Pour le regard de l'extraction des racines des nõbres cosiques, qui constituent equation, ayans les exposans constituez en telle progression Arith. que ceux-cy, 4, 2, 0 ; ou 4, 0, 2 ou 6, 3, 0 ; ou 6, 0, 3 ; ou 8, 4, 0 ; ou 8, 0, 4 ; ou 10, 5, 0 ; ou 10, 0, 5, &c. esquels le plus grand caractere est tousiours composé de q, & d'vn autre caractere cosique : il faut premierement extraire la racine quarree, à cause du caractere *q*, selon qu'il est enseigné cy dessus, accommodant au nombre qui est affecté au caractere cosique, en ceste partie-là de l'equation, de laquelle il faut tirer la racine, tout ce que nous auons dict du nombre des racines, comme si l'equation estoit entre trois nombres cosiques affectez aux caracteres *q*. ℞. & N. puis apres de ceste racine quarree trouuee, soit qu'elle soit rationelle ou irrationelle, il en faut tirer vne autre racine selõ l'autre partie du plus grand caractere cosique, ce caractere *q* estant osté. Comme si vne equation est trouuee entre 1*qq*. & 18*q*—648. Il faudra extraire la racine quarree de ce nombre 18*q*—648, à cause de la premiere partie du signe cosique *q*, tout ainsi que si l'equation estoit trouuee entre 1*q*, & 18℞—648. laquelle racine quarree sera 36 ; & d'icelle il faut derechef tirer la racine quarree qui sera 6 : parquoy 6 sera la racine du nombre cosique proposé.

En la mesme maniere, si vne equation est entre 1*qc*, & 5120

—16c : il faudra prendre la racine quarree du nombre 5120—16c ; & de ceste-cy prendre la racine cubique. Ainsi aussi, si l'equation est entre 1qqq, & 10000qq—7846119. il faudra premierement prendre la racine quarree : & puis apres de ceste-cy la racine quarree de quarree. Et ainsi des autres.

Des secondes racines.

CHAP. II.

D'Autant qu'en plusieurs operations sont cherchez deux, ou trois, ou d'auantage de nombres soubs vne proportion incertaine, il est necessaire pour euiter confusion, qu'ayant posé 1℞ pour le premier nombre, on ne pose derechef 1℞ pour le second, & encore 1℞ pour le 3. C'est pourquoy on a excogité les secondes racines, lesquelles sont nómees, & figurees diuersement par les autheurs ; mais suiuant Stifel, Pelletier & Clauius, nous retiendrons le nom de secondes racines, & les notterons ainsi: 1 A, signifie 1℞ seconde; 1B, denotte 1℞ tierce ; 1 C, signifie 1℞ quarte; &c. Et quand vn nombre a deux signes, il faut entendre que le nombre auec le premier signe a esté multiplié par l'vnité du signe posterieur; Comme 1℞ A, signifie 1℞ multipliee par 1A; & 3℞A, signifie 3℞ multipliees par 1A: ainsi 1qAq, monstre que 1q a esté multiplié en 1 A q; &c.

Or ces racines ont leur Algorithme particulier, aussi bien que les premieres racines. Et premierement quand à l'addition elle est aisee: car si elles sont de mesme genre, faut seulement adiouster les nombres entr'eux, & au produit apposer le mesme caractere d'icelles racines. Comme 3A, & 4A, font ensemble 7A: Item 5B, & 3 B, font 8B. Mais quand icelles racines ne sont de mesme genre l'addition se fait par le signe +. Comme 3 A, & 4B, font 3A + 4B: Item 3℞, & 4A, font 3℞ + 4 A.

La soustraction est aussi aisee : Car quand les racines sont de mesme genre, il n'y à qu'a soustraire vn nombre de l'autre, & apposer au reste le mesme caractere. Comme 3A ostez de 5A, restent 2 A: Item 2B ostez de 5B, restent 3B. Mais quand icelles sont de genres differens, la soustraction se faict par le signe —: comme 3A ostez de 4B, restent 4B — 3A.

Pour le regard de la multiplication elle se faict ainsi: Si vn nombre de racine premiere, doit estre multiplié auec vn nombre de racine seconde, ayant seulement la lettre A ou B &c. Il faut multiplier les nombres entr'eux, & apposer au produit les mesmes signes. Comme 2℞ multipliees par 2A, font 4℞A; c'est à dire 4℞ multipliees par 1A: Item 2A par 2℞, font 4A℞; c'est à dire 4A multipliez par 1℞: Item 3q multipliez par 4B, font 12qB; c'est à dire 12q multipliez par 1B.

Mais quand vn nombre absolu est multiplié auec vn nombre de seconde racine, il faut apposer au produict le signe de la seconde racine. Comme 6 multipliant 4B, le produict est 24 B: Item 5C multipliant 7, le prpduict est 35 C.

Que si vn nombre de seconde racine doit estre multiplié par vn nombre de seconde racine de mesme lettre, il faut multiplier les nombres entr'eux, & au produict apposer la mesme lettre auec le caractere q. Comme 3 A multipliez par 4 A, feront 12A q.

Quand vn nombre de seconde racine est multiplié en soy quarrément, ou cubiquement, &c. Il faut apposer au produict la mesme lettre auec le caractere q, ou c, &c. Comme 2 A multipliez en soy quarrément, le produict est 4Aq; mais cubiquement est produict 8Ac: Item 2℞A par 2℞A, font 4qAq; c'est à dire 4q de premiere racine multipliez par 1q de seconde racine.

Mais quand vn nombre de seconde racine est multiplié en vn autre de la mesme racine seconde, qui a aussi vn caractere cosique; il faut imaginer que le premier nombre ait pareillement le signe cosique ℞. Comme 1A multiplié par 1Aq, le produict est 1 Ac: Item 3B, par 4 Bc, font 12 Bqq.

Que si vn nombre cosique simple sans lettre de seconde racine, doit estre multiplié auec vn nombre marqué de lettre, & signe cosique; il faut multiplier les nombres entr'eux, & au produict apposer les mesmes signes. Commé 2c multipliez par 4 Aq, feront 8c Aq; c'est dire 8c multipliez en 1Aq: Item 1c multiplié par 1℞Aq, faict 1qqAq; c'est à dire 1qq multiplié par 1Aq: Autant faict aussi 1qA multiplié en soy: Car 1q multiplié en soy faict 1qq; & 1A en soy faict 1Aq.

Quand vn nombre ayant apres la lettre de seconde racine vn signe cosique, est multiplié par vn nombre qui a pareillement apres la lettre de seconde racine vn signe cosique, le produict doit auoir outre la lettre, ou les lettres de seconde racine, le caractere cosique que donnent les exposans des caracteres. Comme 2 Aq, en 5 Ac, produisent 10 Aß: Item 3 A multipliez par 4 Bc, feront 12 ABß.

Mais vn nõbre ayant vn caractere cossique apres la lettre de seconde racine, est multiplié par vn nombre, qui apres le caractere cossique a aussi la lettre de seconde racine, il faut apposer au produict le dernier caractere cossique, suiuy par la lettre de secõde racine puis aussi du caractere cossique produit du premier caractere cossique multiplié par la lettre de secõde racine, comme si elle auoit ce signe ℞. Comme 1 Ac multiplié par 1 q A, fera 1 q Aqq: qui sera aussi produict de 1 ℞ Aq multipliee en soy: Item 3 Aq multipliez par 4 c A, feront 12 c Ac, c'est a dire 12 c. multipliez par 1 Ac.

Quant à la diuision des secondes racines: soit fait premierement reduction des signes cossiques par la soustraction des signes semblables. Comme pour diuiser 8 c Aq par Aq: Ie soustraits les signes semblables Aq, & restent 8 c, & 4: puis ie diuise 8 c par 4, & viennent 2 c, pour le quotient de 8 c Aq diuisez par 4 Aq: ainsi 8 c Aq diuisez par 4 c, le quotient est 2 Aq.

Mais diuisant vn nombre ℞ par vn nombre des secondes racines, le quotient sera nombre rompu. Comme 2 ℞ diuisees par 4 A, le quotient est $\frac{2\ ℞}{4\ A}$.

Quant à l'extraction des racines, il faut tirer la racine du nombre s'il en a, & apposer à icelle la lettre de seconde racine, reiettant le caractere cossique. Comme la racine quarree du nombre 25 Aq, est 5 A: Item la racine cubique du nombre 27 Ac. est 3 A; & la racine quarree du nombre 16 Dqq, est 1 D.

Mais si le nombre n'a telle racine, ou le caractere n'est de mesme appellation que la racine qu'il faut extraire. Il faut seulement apposer à iceluy nombre, lettre & caractere, le signe radical. Comme la racine cubique du nombre 3 Aq, est √c 3 Aq. Item la racine quarree du nombre 4 Ac, est √4 Ac.

Quant à la preuue des operations de cest Algorithme des secondes racines, elle se fera tout ainsi qu'és premieres racines; sçauoir est que l'addition & soustraction, se prouueront l'vne l'autre: comme aussi la multiplication & diuision: ou bien plus intelligiblement par les progressions geometriques commençant à l'vnité, mises à la page 300. prenant celle de la raison double pour les premieres racines: mais celles de la raison triple pour les secondes racines: tellement que ℞ vale 2: mais 1 A, 3: 1 q, 4; 1 Aq, 9; 1 Ac, 27; 1 ℞ A, 6; 1 ℞ Aq. 18, &c.

Des nombres

Des nombres irrationaux, ou sourds.

CHAP. XII.

NOmbres irrationaux ou sourds sont les racines des nõbres, lesquelles ne se peuuent exprimer par nombres ; tellement que pour expliquer telles racines on se sert de ces signes √, √c, √√, √ß, √qc, &c. Comme la racine quarree de 5, est dicte sourde ou irrationelle, pource qu'on ne peut trouuer aucun nombre qui multiplié en soy produise 5 : tellement que ceste racine quarree de 5, sera marquee ainsi, √5 : ou ainsi √q5. Item la racine cubique de 7 sera marquee ainsi √c7. Item la racine quarree de quarree de 12, ainsi √√12. ou ainsi √qq12. & ainsi des autres.

Est toutesfois à noter que tout nombre qui a le signe √, n'est pas pourtant irrationel : car quelquesfois pour la commodité de l'operation, au lieu de tirer la racine de quelque nombre, on luy appose seulement le signe de la racine requise.

Or il y a deux genres de racines sourdes : car les vnes sont simples : comme √q. de quelque nombre non quarré : √c de quelque nombre non cube &c. & ces racines simples sont aussi appellees par quelqu'vns nombres mediaux. Les autres racines sourdes, sont composees par l'interpositiõ des signes + & — : & icelles sont appellees par aucuns multinomies radicales ; & par d'autres nombres irrationaux composez, ou diminuez : composez quand les nombres sont liez par le signe +, comme √7 + √10 : mais diminuez quand les nombres sont liez par le signe — : comme √5 — √13, ou √10 — √c7.

De la reduction des racines simples à vne mesme denomination.

CHAP. XIII.

AFin que les simples racines sourdes se puissent multiplier & diuiser entr'elles, il est necessaire qu'elles soient reduites en vne mesme denomination, si elles sont de diuerses : laquelle reduction se faict presque en la mesme maniere, que la reduction des fractions de diuerses denominations à vne mesme : Car ayant posé les signes radicaux, chacun sous leur nombre, il faut multiplier vn chacun nombre en soy, selon le signe radical de l'autre : puis apres multiplier les exposans des signes entr'eux, afin d'auoir l'exposant du signe commun. Comme pour exemple, soiēt les deux racines √ 7, & √ c5. qu'il faut reduire en racines de mesme espece. Ayant posé ces deux racines ainsi qu'il appert icy ; ie multiplie 7 cubiquement à cause du signe *c*. & viennent 343 au lieu de 7 ; puis ie multiplie 5 quarrément à cause du signe √ du nombre 7, & viennent 25, pour & au lieu de 5 : & finalemēt ie multiplie les exposans des signes √ & √ *c* entr'eux : sçauoir est 2, par 3, & viennent 6, qui est exposant du caractere *qc* : tellement que √ 7, & √ *c*5 seront reduites à √ *qc* 343, & √ *qc* 25. Ainsi aussi √ *c*2, & √√ 3. estās reduictes à mesme espece ou denominatiō, serōt 32*qqc*, & 27*qqc*, cōme il appert en ceste fig.

343		25
7	X	5
√		√c
2	—	3
	6	

32		27
2	X	3
√c		√√
3	—	4
	12	

Il y a quelques abbreuiations en ceste operation, comme quand il faut reduire vn nombre absolu, & vn radical en mesme espece : car alors il n'y a qu'à multiplier en soy quarrément ou cubiquement &c. le nombre absolu, & au produict apposer le signe radical de la racine. Comme 6, & √ 5, estans reduicts à mesme espece feront √ 36, & √ 5. Item 2 & √ *c*4, serōt √ *c*8, & √ *c*4.

Item voulant reduire ces deux racines √ *c*8, & √√ 25. Ie prēds de 8 la racine cubique 2 : puis apres la racine quarree de 25, qui est 5, à laquelle i'appose le signe radical restant √, ainsi √ 5. I'ay donc maintenant pour les deux racines proposees vn nombre absolu 2, & vn nombre radical √ 5, qui reduis comme dict est cy dessus, font √ 4 & √ 5.

Item voulant reduire ces deux racines √ *c*2 & √ *qc*6, en mesme espece ie multiplie 2 en soy quarrément à cause du signe *q*, qui est en l'autre racine outre le signe *c*, & faict 4. auquel i'appose le signe *q*, & sera faicte la reduction à √ *qc*4, & √ *qc*6.

Itē voulant reduire √√ 19, & √ 3 en mesme denomination. Ie multiplie le nōbre de la moindre denominatiō, sçauoir est 3, en soy quarrémēt, à cause du signe √, qui est en la plus grāde denomination outre √, & viennent √√ 19, & √√ 9 pour la reduction en mesme espece des deux racines proposees. Ainsi √qc8, & √9, seront reduites a √qc8, & √qc729. multipliant le nombre 9 de la moindre denomination en soy cubiquement, à cause du caractere *c*, qui outre *q*, est en la plus grande denomination.

Or auparauant que venir à l'Algorithme d'icelles racines sourdes, il est necessaire que nous enseignions le probleme suyuant.

Cognoistre si deux racines sourdes sont commensurables, ou incommens. & quelle raison elles ont entr'elles.

Soit diuisé le nombre de la plus grande racine, par celuy de la moindre, (icelles estans reduictes en mesme espece si elles n'y sont) & si au quotient vient vn nombre qui ait la racine denotee par le signe radical d'icelles racines proposees, elles serōt commens. entr'elles, autremēt non : & aurōt telle raison l'vne à l'autre, que le quotient à l'vnité, ou si le quotient est vne fraction, elles seront entr'elles comme le numerateur au denominateur. Comme √12 & √3, sont commens. entr'elles. Car 12 estans diuisez par 3, le quotient est 4, dont la racine quarree est 2, & seront l'vne à l'autre comme 2 à 1. Item √c320 & √c135 sont commens. car 320 estans diuisez par 135, le quotient est $2\frac{10}{27}$ ou √c$\frac{64}{27}$, c'est à dire $\frac{4}{3}$: & leur raison est comme 4 à 3. Item √qc64 & √c27 sont commens. & leur raison est comme 3 à 2 : car icelles estans reduictes en mesme espece, seront √qc64 & √qc729, & la diuision faicte le quotient sera √qc$11\frac{25}{64}$ ou √qc$\frac{729}{64}$, c'est à dire $\frac{3}{2}$.

De la multiplication & diuision des racines simples.

CHAP. XIV.

QVand deux racines de mesme genre doiuent estre multipliees ou diuisees entr elles, il faut multiplier ou diuiser entr'elles, il faut multiplier ou diuiser les nombres entr'eux, & apposer au nombre produict le mesme signe radical. Comme pour exemple voulant multiplier √7. par √10. Je multiplie 7 par 10, & viennent 70, ausquels i'appose le signe radical, & sont √70. Ainsi √3 par √12, produict √36, c'est à dire 6. Ainsi $\surd\, 2\frac{1}{4}$ par $\surd\, 8$, le produict est $\surd\, 18$. Ainsi $\surd\, c3$ par $\surd\, c7$, viennent $\surd\, c21$. Ainsi $\surd\surd\, 4$, par $\surd\surd\, 8$, viennent $\surd\surd\, 32$. Mais pour diuiser $\surd\, 70$, par $\surd\, 10$. Ie diuise 70 par 10, & viennent 7, ausquels i'appose le signe radical, & sont $\surd\, 7$. Ainsi $\surd\, 18$ par $\surd\, 8$ le quotient sera $\surd\, 2\frac{1}{4}$, c'est à dire $\frac{3}{2}$ ou $1\frac{1}{2}$. Ainsi $\surd\, c21$ par $\surd\, c3$, le quotient sera $\surd\, c7$.

Mais quand les deux racines proposees sont de differente espece, il les faut reduire à vne mesme : puis apres faire la multiplication ou diuision comme dessus. Comme pour exéple, voulant multiplier $\surd\, 3$ par 4. Ie reduis le nombre absolu 4, & sont $\surd\, 16$: puis ie les multiplie comme dessus, & viennent $\surd\, 48$. Ainsi $\surd\, 5$ multipliee par $\surd\, c\, 10$. le produict sera $\surd\, qc12500$. Ainsi aussi $\surd\, \frac{1}{2}$ par $\surd\surd\, \frac{2}{3}$, produict $\surd\surd\, \frac{2}{12}$. Mais diuisant $\surd\, 48$ par 4, le quotient sera $\surd\, 3$. Ainsi $\surd\, qc\, 12500$ diuisee par $\surd\, c10$, le quotient sera $\surd\, 5$.

Mais si quelque racine doit estre multipliée en soy quarrément, ou cubiquement &c. selon le signe radical qui luy sera apposé, il faut seulement prendre le mesme nombre pour le produict, delaissant le signe radical. Comme $\surd\, 3$ estant multipliee quarrément produira 3. Et $\surd\, c5$ multipliee en soy cubiquement fera 5.

De l'addition des racines simples.

CHAP. XV.

SI les racines sont commensurables ; ayant diuisé la plus grande par la moindre, soit adiousté vne vnité au quotient rationel, & la somme estant multipliee par la moindre racine, sera donnee la somme de l'addition des deux racines proposees. Comme pour exemple, soient proposees à adiouster $\surd\, 18$ & $\surd\, 8$. Diuisant la plus grande par la moindre, le quotient est $\surd\, 2\frac{1}{4}$, c'est à dire $\frac{3}{2}$, & adioustant 1, c'est $\frac{5}{2}$, qui multipliez par $\surd\, 8$, le produict est $\surd\, 50$, pour la somme des deux racines proposees. Ainsi $\surd\, 12$ adioustez à $\surd\, 3$, la somme est $\surd\, 27$. Item $\surd\, c\, 320$ adioustée a $\surd\, c135$, faict la somme $\surd\, c1715$: Item $\surd\, 4$ adioustee a $\surd\, c8$, faict 4: Item $\surd\, \frac{1}{2}$ adioustee a $\surd\, \frac{8}{9}$, faict $\surd\, \frac{49}{18}$.

Que si les racines proposees sont incommens. faut seulement interposer entre deux le signe $+$; comme $\surd\, 6$ adioustee a $\surd\, 11$, faict $\surd\, 6 + \surd\, 11$.

Or il y a encore plusieurs autres manieres d'adiouster les racines cómenf. desquelles la suiuăte me sēble aisee. Ayant trouué raison des racines proposees, soit posé au premier terme d'vne regle de trois, l'vn des nombres d'icelle raison; au second terme, la somme d'iceux nombres de la raison; & au . la racine correspondante au terme de la raison posé au premier terme; & faisant la regle comme il appartient, le quatriesme nombre qui viendra sera la somme des racines proposees. cōme au premier exemple cy dessus, la raison des racines, a esté trouuee comme 3 à 2: posant donc 3, ou 2 au premier terme de la regle de trois, mais 5 au second, & √ 8, ou √ 8 au 3. le 4. sera √ 50: & se faict la regle de trois ainsi qu'il appert cy dessoubs.

Si 3 donnent 5 que donnerōt √ 18, ou si 2 donn. 5 combien √ 8.

√ 9. √ 25. 25 √ 4 √ 25

25	25
18	8
90	200
36	
450	~~200~~ [√ 50.
	~~44~~

0
~~450~~ [√ 50. somme des racines √ 18 & √ 8. propo. à adiouster.
~~99~~

De la soustraction des racines simples.

CHAP. XVI.

SI les racines sont incommenf. il n'y a qu'à interposer le signe —. Comme √ 3 ostee de √ 10, restera √ 10 — √ 3. Item √ c20, ostee de √ c50, reste √ c50 — √ c20.

Mais quand les racines sont commenf. Ayant diuisé la plus grande par la moindre, soit osté du quotient rationel vne vnité; puis le reste soit multiplié par la moindre racine, & le produict sera le reste desiré. Comme pour exemple qu'il faille soustraire √ 8 de √ 50. Ie diuise donc 50 par 8, le quotient est $6\frac{1}{4}$, dont la racine quarree est $2\frac{1}{2}$, de laquelle i'oste vn entier, & reste $1\frac{1}{2}$, que ie multiplie par √ 8, & vient √ 18, pour le reste desiré. Item qui de $\sqrt{27}$ oste $\sqrt{3}$, reste $\sqrt{12}$. Ainsi qui de $\sqrt{c1715}$ osté $\sqrt{c320}$, reste $\sqrt{c135}$. Ainsi aussi qui de $\sqrt{\frac{49}{16}}$ oste $\sqrt{\frac{1}{4}}$, reste $\sqrt{\frac{25}{16}}$.

Ceste operation se faict aussi par la regle de trois, mettant au premier & 3 terme les nombres specifiez au chap. preced. mais au 2. la difference des termes de la raison, comme il appert cy dessous.

Si 5 donnent 3 combien $\sqrt{50}$: ou si 2 donnent 3, combien $\sqrt{8}$.

$\sqrt{25}$.	$\sqrt{9}$.	9	$\sqrt{4}$.	$\sqrt{9}$.	9
		450			72
		~~4~~			
		~~20~~		~~3~~	
		~~450~~ [$\sqrt{18}$		~~72~~ [$\sqrt{18}$ reste; $\sqrt{8}$ estant	
		~~255~~		~~44~~ osté de $\sqrt{50}$.	
		~~2~~			

De l'addition des nombres irrationaux composez, & diminuez.

CHAP. XVII.

POur adiouster nombres irrationnaux composez & diminuez, il les faut disposer l'vn au dessoubs de l'autre; puis adiouster chasques racines simples, comme il a esté dict en l'Algorithme precedant, obseruat les regles de +& —, que nous auons enseignez au chap. 4; c'est a sçauoir qu'aux signes semblables il faut adiouster sans chager le signe; mais qu'aux dissemblables, il faut soustraire, & poser le signe du plus grād nombre.

Or d'autant qu'il ne se faict rien en ceste operation, qui n'ait desia esté enseigné cy deuant, la chose sera assez manifeste par exemples sans d'auantage de discours.

$6 + \sqrt{18}$.	$\sqrt{27} + \sqrt{8}$.	$\sqrt{162} - 2$.	$\sqrt{50} + 3$.
$4 + \sqrt{8}$.	$\sqrt{12} + \sqrt{2}$.	$\sqrt{200} - 3$.	$\sqrt{32} - 5$.
$10 + \sqrt{50}$.	$\sqrt{75} + \sqrt{18}$.	$\sqrt{722} - 5$.	$\sqrt{162} - 2$.

$\sqrt{50}-3.$	$8-\sqrt{50}.$	$\sqrt{50}+6.$	$\sqrt{c216}-\sqrt{\sqrt{405}}.$
$\sqrt{32}+5.$	$\sqrt{242}-12.$	$24-\sqrt{242}.$	$\sqrt{c64}-\sqrt{\sqrt{80}}.$
$\sqrt{162}+2.$	$\sqrt{72}-4.$	$30-\sqrt{72}.$	$10-\sqrt{\sqrt{3125}}.$

$\sqrt{\sqrt{256}}-\sqrt{c27}.$
$\sqrt{\sqrt{81}}+\sqrt{c8}.$
$7-1.$

Et eſt à noter pour briefueté, que les deux particules d'vn nombre compoſé, ſe rencõtrant totalement egales aux deux particules d'vn nombre diminué, il n'y a qu'à doubler la premiere particule de l'vn d'iceux nombres. Comme pour adiouſter $15+\sqrt{8}$ à $15-\sqrt{8}$: Ie double ſeulement 15 & font 30. pour la ſomme de l'addition. Item $\sqrt{20}+6$ adiouſtez à $\sqrt{20}-6$ font $\sqrt{80}$. & ce d'autant que les dernieres particules ſe deſtruiſent l'vne l'autre à cauſe des ſignes $+$ & $-$.

De la ſouſtraction des nombres irrationnaux composez & diminuez.

CHAP. XVIII.

POur ſouſtraire tels nombres, il les faut diſpoſer l'vn audeſſus de l'autre, puis ſouſtraire chaſques racines comme il a eſté dict au chap. 16. obſeruant les regles des ſignes $+$ & $-$ enſeignees au chap. 4. ſçauoir eſt qu'aux ſignes ſemblables, il faut ſouſtraire, (ſi faire ſe peut) ſans changer le ſigne: mais ſi on ne peut ſouſtraire, il faudra oſter le ſuperieur de l'inferieur, & changer le ſigne. Mais aux ſignes diſſemblables il faut adioutter, & apoſer le ſigne ſuperieur.

Ceſte operation peut eſtre facilement entendue par les exemples ſuiuans, ſans autres preceptes.

$\sqrt{50}-5$	$\sqrt{\sqrt{1875}}+\sqrt{\sqrt{1250}}.$	$\sqrt{50}+2.$	$\sqrt{50}-2.$
$\sqrt{8}-2$	$\sqrt{\sqrt{243}}+\sqrt{\sqrt{162}}.$	$\sqrt{18}+4.$	$\sqrt{18}-4.$
$\sqrt{18}-3$	$\sqrt{\sqrt{48}}+\sqrt{\sqrt{32}}.$	$\sqrt{8}-2.$	$\sqrt{8}+2.$

√ 162 + 2.	√ 162 — 2.	√ 72 — 4.	30 — √ 72.	√ 0 + 16.
√ 50 — 3.	√ 50 + 3.	8 — √ 50.	√ 50 + 6.	√ 320 — 8.
√ 32 + 5.	√ 52 — 5.	√ 242 — 32.	24 — √ 242	24 — √ 320.

√√ 2401 — √c 1.	√c 1000 + √√ 3125.	√ 180 + 0
√√ 256 — √c 27.	√c 216 — √√ 405.	√ 320 — 8
√√ 81 + √c 8.	4 + √√ 20480	8 — √ 20

Et est à noter pour briefueté, que les deux particules d'vn nombre composé se rencontrans du tout egales á deux particules d'vn nombre diminué, il faut seulement doubler la derniere particule de l'vn des nõbres. Comme pour soustraire √ 12 — 5, de √ 12 + 5. Ie double la derniere particule 5, & vient le nombre 10, pour reste de la soustractiõ. Ainsi 10 — √ 4, ostez de 10 + √ 4 resteront √ 16, c'est á dire 4 : Item √ 1 — √ 5 ostee de √ 12 + √ 5, restent √ 20. Et ce d'autant que + destruit + ; mais + & — se doiuent adiouster.

De la multiplication des nombres irrationaux composez & diminuez.

CHAP. XIX.

POur faire ceste operation, & aussi la suiuante, il faut retenir la regle de + & — enseignee au chap. 5. sçauoir est qu'aux signes semblables faut poser +, mais aux dissemblables —. Ayant donc posé l'vn des deux nombres au dessous de l'autre, soit faite la multiplication comme és nombres absolus, obseruant toutesfois ce que nous auons dict au chap. 14. de la multiplication des racines simples, & au chap. 15. de l'addition & soustraction des mesmes racines. Ce qui sera enseigné és exemples descrits cy dessous. Comme en l'exemple suyuant — √ 45 en — √ 20, faict + √ 900, c'est á dire + 30. & —

$\sqrt{}45$ par $+-6$, c'est à dire en $+-\sqrt{}36$, faict $-\sqrt{}1620$. & $-\sqrt{}20$ par $+-8$, c'est a dire par $+-\sqrt{}64$, faict $-\sqrt{}1280$. Et finalement $+-8$ en $+-6$, faict $+-48$: Et partant tout le nombre produict sera $48-\sqrt{}1280-\sqrt{}1620+-30$, qui reduit par additiō de $+-48$ à 30; & de -1280 à 1620; sera $78-\sqrt{}5780$.

Multiplicande $6-\sqrt{}20$.
Multiplicateur $8-\sqrt{}45$.

Pr. $48-\sqrt{}1280-\sqrt{}1620+-30$

qui par reduction sera $78-\sqrt{}5780$.

En cest autre exemple, ie multiplie $-\sqrt{}\sqrt{}648$ par $-\sqrt{}\sqrt{}162$, & vient $+-\sqrt{}\sqrt{}104976$, c'est à dire $+-18$: & $+-\sqrt{}\sqrt{}288$ par $-\sqrt{}\sqrt{}162$, faict $-\sqrt{}\sqrt{}46656$, c'est à dire $-\sqrt{}216$: & $-\sqrt{}\sqrt{}648$ par $+-\sqrt{}\sqrt{}128$, faict $-\sqrt{}\sqrt{}82944$, c'est à dire $-\sqrt{}288$: & finalement $+-\sqrt{}\sqrt{}288$ par $+-\sqrt{}\sqrt{}128$ faict $+-\sqrt{}\sqrt{}36864$, c'est à dire $+-\sqrt{}192$; & partant tout le nombre produict sera $\sqrt{}192-\sqrt{}288-\sqrt{}216+-18$. ou bien $18+-\sqrt{}192-\sqrt{}288-\sqrt{}216$.

Multiplicande $\sqrt{}\sqrt{}288-\sqrt{}\sqrt{}648$.
Multiplicateur $\sqrt{}\sqrt{}128-\sqrt{}\sqrt{}162$.

Produit $\sqrt{}192-\sqrt{}288-\sqrt{}216+-18$.

ou $18.+-\sqrt{}192-\sqrt{}288-\sqrt{}216$.

En cest exemple nous reduisons premieremēt $\sqrt{}\beta 6$, & $\sqrt{}3$ en vne mesme denomination, c'est a sçauoir à $\sqrt{}q\beta 36$, & $\sqrt{}q\beta 243$, & ces deux nombres multipliez entr'eux, le produit est $+-\sqrt{}q\beta 8748$: puis apres nous reduisons $\sqrt{}c7$, & $\sqrt{}3$ a $\sqrt{}qc49$ & $\sqrt{}qc27$ de mesme espece, & ces deux-cy estans multipliez entr'eux, le produit est $\sqrt{}qc1323$.

Multiplicande $\sqrt{}c7+-\sqrt{}\beta 6$.
Multiplicateur $\sqrt{}3$.

Produit $\sqrt{}qc1323+-\sqrt{}q\beta 8748$.

Au premier de ces deux exemples est multiplié vn nōbre composé en soy, dont le produit est $49+-\sqrt{}245+-\sqrt{}245+-5$, c'est à dire $54+-\sqrt{}980$, pource que 49 & $+-5$, font 54, & $\sqrt{}245$ auec $\sqrt{}245$, c'est à dire le double de $\sqrt{}245$, faict $\sqrt{}980$. Mais au 2. exemple est multiplié vn nombre diminué en soy, dont le produit est $49-\sqrt{}245-245+-5$, c'est à dire $54-\sqrt{}980$. Or pour briefuement faire telle multiplication, c'est à dire multiplier vn nombre composé

$7+-\sqrt{}5$	$7-\sqrt{}5$.
$7+-\sqrt{}5$	$7-\sqrt{}5$.
$49+-\sqrt{}245+-245+-5$.	$49-\sqrt{}245-245+-5$.

en soy, ou par vn autre egal, il ne faut qu'adiouster ensemble les quarrez des particules, puis à ceste somme adiouster le double du produit d'vne particule en l'autre. Comme és deux exemples cy dessus, les quarrez des particules sont 54, & le produit d'vne particule en l'autre est $\sqrt{245}$, ou $-\sqrt{145}$, dont le double est $\sqrt{980}$, ou $-\sqrt{980}$. Tout le produit est donc $54+\sqrt{980}$, ou $54-\sqrt{980}$.

Mais multipliant vn nombre composé, comme $6+\sqrt{8}$ par son respondant contraire, c'est à dire par $6-\sqrt{8}$, viendra au produit vn simple nombre 28, comme il appert en l'operation. Car $+\sqrt{288}$ ruine $-\sqrt{288}$; & partant reste $36-8$, qui sont 28. Ce produit sera encore trouué plus facilement & promptement. Car 8, quarré de la derniere particule $\sqrt{8}$, estant osté de 36, quarré de la premiere particule 6, restera le mesme produit 28.

$$\begin{array}{r} 6+\sqrt{8}. \\ 6-\sqrt{8}. \\ \hline 36+\sqrt{288}-\sqrt{288}-8 \end{array}$$

Ainsi aussi $\sqrt{10}+\sqrt{2}$ estant multiplié par son respondant contraire $\sqrt{10}-\sqrt{2}$, le produit sera $10+\sqrt{20}-\sqrt{20}-2$, c'est à dire 8 : lequel nombre 8 est aussi produit par la soustraction de 2, quarré de la derniere particule, de 10 quarré de la premiere particule.

Pareillement si on multiplie $\sqrt{3}+\sqrt{2}+1$, par son respondant $\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$, où tu vois que le signe $+$ de la derniere particule est changé en $-$, le produit sera $4+\sqrt{24}$: lequel produit estant derechef multiplié par son respondant contraire $-4+\sqrt{24}$, donne produit simple nombre 8. Ce dernier produit sera encore trouué plus facilemẽt & prõptement comme ensuit. Soient multipliees les deux premieres particules entr'elles, & seront $\sqrt{6}$, qui doublee sera $\sqrt{24}$; puis de la somme des deux nõbres d'icelles particules, sçauoir est 5, soit osté le nõbre de la derniere particule, & restera 4, dont le quarré 16 soit osté du nõbre 24, & resteront 8 comme dessus.

$$\begin{array}{lr} & \sqrt{3}+\sqrt{2}+1. \\ & \sqrt{3}+\sqrt{2}-1. \\ \hline & -\sqrt{3}-\sqrt{2}-1 \\ & +\sqrt{6}+2+\sqrt{2} \\ & 3+\sqrt{6}+\sqrt{3} \\ \hline \text{produit} & 4+\sqrt{24} \\ & -4+\sqrt{24} \\ \hline & -16-\sqrt{384}+\sqrt{384}+24 \end{array}$$

Ainsi aussi si on multiplie $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$ par son respondant

$\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{6}$, sera produit $\sqrt{60} + 2$ qui multipliez par $\sqrt{60} - 2$, le produit sera simple nombre 56: lequel produit on aura aussi auec la mesme briefueté que dessus

Et par ceste maniere peuuent estre reduits tous tels nombres composez en simple nom : sçauoir est multipliant tousjours par le respondant contraire, ainsi que dict est cy dessus, iusques à ce que l'on soit paruenu à vn simple nombre.

De la diuision des nombres irrationaux composez & diminuez.

CHAP. XX.

Pour diuiser vn nombre irationel composé par vn simple nombre radical, il faut diuiser chasque particule par ledit simple nombre radical, obseruant la regle de + & de −. Comme pour diuiser $\sqrt{24} + \sqrt{9}$ par $\sqrt{6}$, ie diuise chasque particule du diuidende par le diuiseur 6, & le quotient est $\sqrt{4} + \sqrt{\frac{9}{6}}$, ou $2 + \sqrt{1\frac{1}{2}}$.

$$\sqrt{\cancel{24}} + \sqrt{\cancel{9}}^{\,3} \quad [\ \sqrt{4} + \sqrt{1\tfrac{1}{2}}$$
$$\cancel{6} \qquad \cancel{6}$$

Ainsi diuisant $\sqrt{c28} + \sqrt{c20}$. par $\sqrt{c4}$, vient au quotient $\sqrt{c7} + \sqrt{c5}$.

Mais pour diuiser vn simple nombre par vn composé; comme pour exemple, 42 par $\sqrt{25} + \sqrt{4}$, il faut multiplier l'vn & l'autre nombre par $\sqrt{25} - \sqrt{4}$, le respondant contraire du diuiseur, & viendront $\sqrt{44100} - \sqrt{7056}$, & 21 ou $\sqrt{441}$; puis apres soit diuisé $\sqrt{44100} - \sqrt{7056}$ par $\sqrt{441}$, & viendront $\sqrt{100} - \sqrt{16}$, c'est à dire 6, qui sera le quotient de 42 diuisé par $\sqrt{25} + \sqrt{4}$.

Que si tant le diuidande que diuiseur, sont nombres composez, il faut reduire le diuiseur en simple nombre, comme il a esté dict au chap. precedent : puis multiplier le diuidãde par les mesmes nombres par lesquels on aura multiplié le diuiseur pour le conuertir à simple nombre, & ce qui viendra soit diuisé par le simple nombre trouué comme dict est cy dessus, & ainsi qu'il appert en l'exemple cy dessous.

Soit proposé à diuiser $\sqrt{41}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$ par $\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

Multipliant le diuiseur $\sqrt{5}+\sqrt{2}$
par $\sqrt{5}-\sqrt{2}$

Le produict sera 3.

Multipliant le diuidande $\sqrt{41}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$.
par $\sqrt{5}-\sqrt{2}$.

Le produict sera $\sqrt{205}+\sqrt{15}-\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{4}$. Lequel il faut diuiser par 3. c'est a dire par $\sqrt{9}$. & le quotient sera $\sqrt{22\frac{7}{9}}+\sqrt{1\frac{6}{9}}-\sqrt{1\frac{1}{9}}-\sqrt{9\frac{1}{9}}-\sqrt{\frac{6}{9}}+\frac{2}{3}$, ou bien $\sqrt{\frac{205}{9}}+\sqrt{\frac{15}{9}}-\sqrt{\frac{10}{9}}-\sqrt{\frac{82}{9}}-\sqrt{\frac{6}{9}}+\sqrt{\frac{4}{9}}$.

Or il est à noter que les particules estans denommees de diuerses racines, il les faut reduire à vne mesme denomination auparauant que proceder à l'operation.

Est pareillement à noter que l'on peut donner le quotient de la diuision en fraction, faisant numerateur le nombre diuidande ; & denominateur le nombre diuiseur. Comme le quotient de la derniere operation cy dessus, se peut donner ainsi $\frac{\sqrt{41}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$. Sẽblablement s'il faut diuiser $\sqrt{48}+\sqrt{c\,3}$ par $\sqrt{15}+\sqrt{c\,6}-\sqrt{3}$, le quotiẽt sera ceste fractiõ $\frac{\sqrt{48}+\sqrt{c\,3}}{\sqrt{15}+\sqrt{c\,6}-\sqrt{3}}$.

Or d'autant qu'il est quelquefois necessaire de cognoistre quel de deux nombres irrationnaux cõposez est le plus grand, nous enseignerons icy la maniere de ce faire, lors que la chose sera douteuse. Soit pour exemple les deux nombres composez $3+\sqrt{8}$, & $8-\sqrt{5}$, le plus grand desquels ie desire sçauoir. Ie soustrais 3 de chaque nombre, & restent $\sqrt{8}$; & $5-\sqrt{5}$, desquels ie prend les quarrez, & sont 8; & $30-\sqrt{500}$, de chacun desquels i'oste 8, & restent 0; & $22-\sqrt{500}$; & à chacun d'iceux i'adiouste $\sqrt{500}$, & viennent $\sqrt{500}$; & 22, c'est à dire $\sqrt{484}$, qui sont moindre que $\sqrt{500}$: & partant ie dis que $3+\sqrt{8}$ est plus grand que $8-\sqrt{5}$.

Des racines vniuerselles, & de leur Algorithme.

CHAP. XXI.

LA racine d'vn nombre composé ou diminué est appellee racine vniuerselle : Comme la racine quarree de ce nombre composé $\surd 9+22$, est dicte racine vniuerselle, d'autant que de tout le nombre il faut extraire la racine, laquelle sera 5; car $\surd 9$, qui est 3 estant adioustee à 22 faict 25, dont la racine quarree est 5. Ainsi aussi par la racine vniuerselle de cest autre nõbre composé $10+\surd 7$, il faut entendre que la racine quarree du nombre 7, si elle se peut auoir, estant adioustee a 10, on doit prendre la racine de tout nombre.

Or ces racines sont notees diuersement par les autheurs; mais nous les figurerons apposans le signe radical $\surd$, ou $\surd c$ au deuant du nombre dont la racine deura estre extraicte, & enfermant tout ledict nombre entre deux parentheses, en ceste maniere, $\surd(\surd 9+22)$ ou ainsi qui est le mesme, $\surd(22+\surd 9.)$ Itẽ $\surd c(10+\surd 7.)$ Item $\surd(49+18.)$ Item $\surd 10+\surd 16+3+\surd 64.)$ Item $\surd c(\surd 25-\surd 4+24.)$ Ite $\surd(10+\surd 36)+\surd(70+\surd 121)$, laquelle vaut 13.

Or le quarré de la racine quarree de quelque nombre composé, est le mesme nombre, estant delaissé le signe radical $\surd$. Comme le quarré de $\surd(11+\surd 9+\surd 4,)$ est $11+\surd 9+\surd 4$, c'est à dire 16; tellement qu'icelle racine valoit 4. Le quarré de $\surd(\surd c216+\surd c27)$ est $\surd c216+\surd c27$, c'est à dire 9, dont la racine est 3. Le quarré de $\surd(\surd c216-\surd c27)$ est $\surd c216-\surd c27$, c'est à dire 3, & la valeur de sa racine est $\surd 3$. Et semblablement le cube de la racine cubique d'vn nombre composé est le mesme nombre, estant osté le signe radical $\surd c$. Comme le cube de $\surd c(\surd 25+\surd 9)$ est $\surd 25+\surd 9$, c'est à dire 8, tellement que ceste racine là valoit 2. Le cube de $\surd c(\surd 25-\surd 9)$ est $\surd 25-\surd 9$, c'est à dire 2, & la racine d'icelluy est $\surd c2$. Le cube de $\surd c64+\surd c27)$ est $\surd c64+\surd c27$, c'est à dire 7, dont la racine est $\surd c7$. Et faut entendre le mesme de quarré de quarrez, & sursolides &c. En ceste maniere on multiplie la racine de quelconque nombre composé en soy, c'est à dire qu'on à le produict de son quarré ou cube &c.

Mais pour multiplier la racine d'vn nombre composé, par vne racine simple, ou par vn nombre simple, ou composé, ou finablement par vne autre racine de nombre composé, il faut reduire l'vn & l'autre nombre a quarré ou cube ; puis faire la multiplication comme dit est cy dessus. Comme pour exemple soit $\sqrt{(7+\sqrt{3})}$ qu'il faut multiplier par 2. Les quarrez sōt $7+\sqrt{3}$; & 4. Multipliant donc 7 par 4 viendront 28 ; mais $\sqrt{3}$ par 4, c'est a dire par $\sqrt{16}$, viendront $\sqrt{48}$. Donc tout le nombre produict est $\sqrt{(28+\sqrt{48})}$.

$$\begin{array}{r} 7+\sqrt{3}. \\ 4. \\ \hline 28+\sqrt{48}. \end{array}$$

Item $\sqrt{c}(\sqrt{c}64+\sqrt{c}27)$ multipliée par 2, le produ ct est $\sqrt{c}(\sqrt{c}32768+\sqrt{c}13824)$ ou $\sqrt{c}(32+24,)$ c'est à dire $\sqrt{c}56$.

$$\begin{array}{r} \sqrt{c}64+\sqrt{c}27. \\ 8. \\ \hline \sqrt{c}32768+\sqrt{c}13824 \end{array}$$

Item soit $\sqrt{(7+\sqrt{4})}$ qu'il faut multiplier par $\sqrt{9}$. Les quarrez des nombres sont $7+\sqrt{4}$; & 9. Ie multiplie donc $\sqrt{4}$ par 9, c'est à dire par $\sqrt{81}$, & vient $\sqrt{324}$; puis 7 par 9, & font 63. Donc le nōbre produit sera $\sqrt{(63+\sqrt{324})}$ c'est à dire $\sqrt{81}$, ou 9.

$$\begin{array}{r} 7+\sqrt{4} \\ 9 \\ \hline 63+\sqrt{324} \end{array}$$

Soit aussi $\sqrt{(6+\sqrt{9})}$ qu'il faut multiplier par le nombre composé $\sqrt{4+\sqrt{16}}$. Le quarré du premier nombre est $6+\sqrt{9}$; & du posterieur $0+\sqrt{56}$. estant donc faite la multiplicatiō, comme il se voit icy, le produict sera $\sqrt{(\sqrt{9216}+\sqrt{3600}+\sqrt{2304}+120)}$, c'est à dire $\sqrt{324}$, ou 18.

$$\begin{array}{r} 6+\sqrt{9} \\ \sqrt{0}+\sqrt{256} \\ \hline \sqrt{9216}+\sqrt{2304} \\ 120+\sqrt{3600} \\ \hline \sqrt{9216}+\sqrt{3600}+\sqrt{2304}+120 \end{array}$$

Item qu'il faille multiplier $\sqrt{(13+\sqrt{9})}$ par $\sqrt{16})$ c'est à dire 4 par 3. Les quarrez des nombres sont $13+\sqrt{9}$, & $5+\sqrt{16}$: & multipliant $\sqrt{9}$ par $\sqrt{16}$, est faict $\sqrt{144}$; & 13, c'est a dire $\sqrt{169}$ par $\sqrt{16}$, vient $\sqrt{2704}$; puis apres $\sqrt{9}$ par 5, c'est à dire par $\sqrt{25}$, est faict $\sqrt{225}$; & 13 par 5, dōnent 65. Dōc tout le nōbre produit est $\sqrt{(\sqrt{2704}+\sqrt{225}+77)}$ c'est à dire 12. Car la racine de $\sqrt{2704}$ est 52, & celle de $\sqrt{225}$ est 15 ; & ces trois nōbres 77, 52 & 15 adioustez ensemble font 144, dont la racine quarree est 12.

$$\begin{array}{r} 13+\sqrt{9}. \\ 5+\sqrt{16}. \\ \hline \sqrt{2704}+\sqrt{144}. \\ 65+\sqrt{225}. \\ \hline \sqrt{2704}+\sqrt{225}+77 \end{array}$$

Or quand il faut multiplier la racine quarree d'vn nombre composé ensemble auec la racine quarree d'vn nombre diminué semblable en soy-mesme, cõme $\sqrt{}(12+\sqrt{}6)+(12-\sqrt{}6)$; soit posé le nõbre 2 fois, ainsi qu'il appert icy, & soiẽt pris les quarrez des parties, lesquels seront $12+\sqrt{}6$, & $12-\sqrt{}6$, qui font ensemble 24 (car $+\sqrt{}6$ ruine $-\sqrt{}6$.) Et soit multipliee vne partie par l'autre, & sera faict $\sqrt{}138$, (pource que 6, quarré de $\sqrt{}6$, osté de 144, quarré du nombre 12, reste 138, auquel faut apposer le signe $\sqrt{}$) dont le double est $\sqrt{}552$: & $24+\sqrt{}552$ sera le nombre produict cherché.

$$\begin{array}{c} \sqrt{}(12+\sqrt{}6)+\sqrt{}(12-\sqrt{}6. \\ \sqrt{}(12+\sqrt{}6)+\sqrt{}(12-\sqrt{}6. \\ \hline 12+\sqrt{}6 \quad + \quad 12-\sqrt{}6. \\ \sqrt{}138. \\ \sqrt{}138. \\ \hline \sqrt{}552. \\ 24+\sqrt{}552. \end{array}$$

Or la racine de ce produict est aussi la somme des deux racines $\sqrt{}(12+\sqrt{}6)$ & $\sqrt{}(12-\sqrt{}6)$ recueillie en vne seule somme. Car quand là somme de deux nombres est multipliee en soy, la racine quarree du nombre produict est la somme des mesmes deux nombres : & partant puisque les deux racines proposees ensemble, multipliees en soy, font $24+\sqrt{}552$, la racine de ce produict, sçauoir est $\sqrt{}(24+\sqrt{}552)$ sera la somme de ces deux racines-la. Ce que nous rendrons manifeste par vn autre exemple en nombres rationaux. Soit $\sqrt{}(10+\sqrt{}36]$ $+\sqrt{}[10-\sqrt{}36]$ c'est à dire 6, qu'il faut multiplier en soy. Il est euident que le nombre qui sera produict doit estre 36.

Soient donc trouuez les quarrez des parties, lesquels seront $10+\sqrt{}36$, & $10-\sqrt{}36$, qui adioustez ensemble font 20 & soit multipliee vne partie en l'autre, & viendra $\sqrt{}64$, dont le double sera $\sqrt{}256$, c'est à dire 16 : & partant le nombre produict est $20+16$, c'est à dire 36. & la racine de ce nombre, sçauoir est 6, est pareillement la somme de l'additiõ de ces deux racines là proposees, comme il est manifeste.

$$\begin{array}{c} \sqrt{}(10+\sqrt{}36)+\sqrt{}(10-\sqrt{}36 \\ \sqrt{}(10+\sqrt{}36)+\sqrt{}[10-\sqrt{}36. \\ \hline 10+\sqrt{}36+\quad 10-\sqrt{}36. \\ \sqrt{}64 \\ \sqrt{}64 \\ \hline \sqrt{}256 \\ 20+\sqrt{}256. \end{array}$$

Or quand il faut multiplier vn nombre composé de racine simple, & de racine vniuerselle, par vn nombre diminué semblable ; à aussi lieu le compendium que nous auons enseigné au chap. 19. Comme pour exemple, s'il faut multiplier le nombre $\sqrt{20} + \sqrt{(20 - \sqrt{5})}$ par le nombre $\sqrt{20} - \sqrt{(20 - \sqrt{5}:)}$ Il n'y a qu'a soustraire $20 - \sqrt{5}$, quarré de la derniere particule du nombre composé ou diminué, de 20 quarré de la premiere particule, & le reste $\sqrt{5}$, sera le produict de la multiplication.

Semblablement s'il faut multiplier $\frac{1}{2}q + \sqrt{[\frac{1}{4}qq + 1q]}$ par $\frac{1}{2}q - \sqrt{[\frac{1}{4}qq - 1q]}$: Il n'y a qu'à soustraire le quarré de la derniere particule, du quarré de la premiere particule, sçauoir est $\frac{1}{4}qq + 1q$, de $\frac{1}{4}qq$, & le reste $- 1q$, sera le produit de la multipl.

Pour faire la diuision des racines vniuerselles, soit reduit à quarré, tant le nombre diuidande que diuiseur: puis apres soit faicte la diuision comme il a esté enseigné cy deuant, & la racine du nombre produict sera le quotient. Comme pour exemple, soit $\sqrt{[13 + \sqrt{7}]}$ qu'il faut diuiser par $\sqrt{5}$. Les quarrez des nombres sont $13 + \sqrt{7}$, & 5. Ie diuise donc 13 par 5, & vient $2\frac{3}{5}$: & $\sqrt{7}$ par 5, c'est à dire par $\sqrt{25}$, & vient $\sqrt{\frac{7}{25}}$: tellement que tout le quotient est $\sqrt{(2\frac{3}{5} + \sqrt{\frac{7}{25}})}$.

$$\frac{13 + \sqrt{7}}{5 \quad \sqrt{25}} \left[2\tfrac{3}{5} + \sqrt{\tfrac{7}{25}}\right.$$

Itē soit $\sqrt{(432 + \sqrt{7776})}$ qu'il faut diuiser par 6. Les quarrez des nombres sont $432 + \sqrt{7776}$, & 36. estans diuisez 432 par 36, viennent 12: & $\sqrt{7776}$ estant diuisee par 36, c'est à dire par $\sqrt{1296}$, vient $\sqrt{6}$: & partant tout le quotient sera $\sqrt{(12 + \sqrt{6})}$.

$$\frac{432 + \sqrt{7776}}{36 \quad 1296} \left[12 + \sqrt{6}\right.$$

Item soit $\sqrt{15}$, qu'il faut diuiser par $\sqrt{(3 + \sqrt{5})}$. Afin de trouuer vn nouueau diuiseur nous multiplierõs $\sqrt{(3 + \sqrt{5})}$ par $\sqrt{(3 - \sqrt{5})}$ & viendra vn nouueau diuiseur $\sqrt{4}$. Que si le diuidende $\sqrt{15}$, est aussi multiplié par $\sqrt{(3 - \sqrt{5})}$ nous aurons vn nouueau diuidande $\sqrt{(45 - \sqrt{1125})}$: le quarré d'iceluy sera $45 - \sqrt{1125}$, & le quarré du nouueau diuiseur sera 4. Si donc on diuise 45 par 4, le quotiēt sera $11\frac{1}{4}$: & si nous diuisons $- \sqrt{1125}$, par 4, c'est à dire par $\sqrt{16}$, le quotient sera $- \sqrt{70\frac{5}{16}}$. Donc tout le quotient est $\sqrt{(11\frac{1}{4} - \sqrt{70\frac{5}{16}})}$.

Item soit diuisé 20 par $(10 - \sqrt{5})$. Nous multiplierons l'vn & l'autre nombre par $\sqrt{(10 + \sqrt{5})}$ afin d'auoir vn nouueau diuidende $\sqrt{(4000 + \sqrt{800000})}$ & vn nouueau diuiseur $\sqrt{95}$. les quarrez d'iceux nombres sont $4000 + \sqrt{800000}$, & 95. Si donc on partit 4000 par 95, seront donnez $42\frac{2}{19}$: & de la diuision de $\sqrt{800000}$ par 95, c'est à dire par $\sqrt{9025}$, sera produict $\sqrt{88\frac{232}{361}}$. Donc tout le quotient de la diuision est $\sqrt{(42\frac{2}{19} + \sqrt{88\frac{232}{361}})}$.

Item

Item soit diuisee $\sqrt{c}\,(\sqrt{c}\,32768 + \sqrt{c}\,13824)$ par 2. Les cubes de ces nombres sont $\sqrt{c}\,32768 + \sqrt{c}\,13824$, & 8. Ie diuise dõc $\sqrt{c}\,32768$ par 8, c'est a dire par $\sqrt{c}\,512$, & vient au quotient $\sqrt{c}\,64$: & de la diuision de $\sqrt{c}\,13824$ par 8, c'est à dire par $\sqrt{c}\,512$, vient $\sqrt{c}\,27$. Tout le quotient est donc $\sqrt{c}\,(\sqrt{c}\,64 + \sqrt{c}\,27)$ c'est à dire $\sqrt{c}\,7$.

Item soit $\sqrt{}(588 + \sqrt{}34848)$ qu'il faut diuiser par $\sqrt{}(12 + \sqrt{}8)$ Les quarrez des nõbres sont $588 + \sqrt{}34848$, & $12 + \sqrt{}8$. Nous multiplierons l'vn & l'autre nombre par $12 - \sqrt{}8$, afin d'auoir nouueau nombre diuidende, & diuiseur: le diuidende sera $\sqrt{}(7056 + \sqrt{}5018112 - \sqrt{}2765952 - \sqrt{}278784)$, ou plustost par reduction $\sqrt{}(6528 + \sqrt{}332928)$, & le diuiseur sera 136. Si donc on diuise 6528, par 136, viendront 48: & $\sqrt{}332928$ par 136, c'est à dire par $\sqrt{}18496$, viendront $\sqrt{}18$: & partant tout le quotiét sera $\sqrt{}(48 + \sqrt{}18)$.

Nous auons dit cy dessus comment il faut adiouster vne racine vniuerselle à vne semblable ayant le signe contraire: comme $\sqrt{}(2 + \sqrt{}3)$ auec $\sqrt{}(2 - \sqrt{}3)$ dont la somme est $\sqrt{}6$. Mais telles racines se peuuent encore adiouster ensemble cõme ensuit.

Le quarré de la derniere particule de l'vne ou l'autre d'icelles racines soit osté du quarré de la premiere particule, & à la racine quarree du reste soit adioustee la premiere particule; puis soit doublé ce qui viendra, & la racine de ce double-là, sera la somme de l'addition. Comme en l'exemple cy dessus, le quarré de la derniere particule est 3, lequel i'oste de 4 quarré de la premiere particule, & reste 1, que i'adiouste à icelle premiere particule, & sont 3, dont le double est 6, & la racine de 6, est $\sqrt{}6$, & autant est la somme de l'addition des deux racines proposees.

Mais quand les deux racines qu'il faut adiouster sont dissemblables, il faut diuiser la plus grande par la moindre, & au quotient adiouster par regle vne vnité; (sinon que lesdites racines fussent incommens. car alors l'addition d'icelles se fera plus commodément par l'interposition du signe +) puis par le produict soit multipliée la plus petite racine; & le produict de la multiplication sera la somme de l'addition. Comme pour exemple: soit $\sqrt{}(84 + \sqrt{}48)$ à laquelle il faut adiouster $\sqrt{}(2 + \sqrt{}3.)$ Ie diuise celle lá par ceste cy, & vient au quotiét $\sqrt{}4$, c'est à dire 2, auquel i'adiouste 1, & sont 3, par lesquels ie multiplie $\sqrt{}(2 + \sqrt{}3)$ & vient $\sqrt{}(18 + \sqrt{}243)$ pour la somme des deux racines proposees a adiouster.

Item soit $\sqrt{}(10 + \sqrt{}36)$ qu'il faut adiouster à $\sqrt{}(11 + \sqrt{}25.)$

Y

Ie diuise ceste-cy par celle-la, & vient 1 au quotient, auquel i'adiouste vne vnité, & sont 2, par lesquels ie multiplie √ (10 + √36) & vient √64, c'est à dire 8, pour la somme de l'addition des deux racines proposees.

Maintenant si d'vne racine vniuerselle de nombre composé, il en faut soustraire vne autre semblable de nombre diminué: Le quarré de la derniere particule soit osté du quarré de la premiere, & la racine du reste soit ostee d'icelle premiere particule; puis soit doublé ce dernier residu, & la racine de ce double sera le reste requis. Comme pour exemple, soit √ (12 + √6) de laquelle il faut soustraire √(12 — √6.) Le quarré de la premiere particule est 144, duquel i'oste 6, quarré de la derniere particule, & reste 138, dont la racine est √ 138, que √ soustrais de la premiere particule 12, & reste 12 — √138, que ie double, & viennent 24 — √552, dont la racine est √(24 — √552) qui est le reste requis.

Mais si les racines sont dissemblables; pour faire la soustraction, il faut diuiser la plus grande par la moindre, & du quotient oster 1 par regle; (sinon que les racines proposees fussent incommens. Car alors la soustraction se fera plus cómodement par l'interposition du signe —.) Puis par le reste soit multipliée la moindre racine, & le produict sera le reste requis. Comme pour exemple, soit √ (2 + √3) qu'il faut soustraire de √ (8 + √48.) Ie diuise ceste cy par celle-là, & viét au quotient √4, c'est à dire 2, dont i'oste vne vnité, & reste 1, par lequel ie multiplie la moindre racine √ (2 + √3) & vient la mesme √(3 + √3) pour le reste de la soustraction.

Item soit √(486 — √162) de laquelle faut soustraire √(√6 — √2) ie diuise celle-la par celle-cy, & viét au quotient √9, c'est à dire 3, dont i'oste 1, & reste 2, par lesquels ie multiplie la moindre racine √ (√6 — √2) & vient au produict √(√96 — √32) pour le reste de la soustraction requis.

Des fractions des nombres irrationaux, & de leur Algorithme.

CHAP. XXII.

LA numeration d'icelles fractions est facile: Car quand le signe radical est posé deuãt le milieu de la fractiõ, icelle signe est referé à l'vn, & à l'autre terme, c'est à sçauoir, tant au numerateur, qu'au denominateur. Comme ceste fraction $\surd\frac{9}{16}$, signifie $\surd 9$ estre diuisee par $\surd 16$; & vaut $\frac{3}{4}$. Ainsi $\surd c\frac{8}{27}$, signifie $\surd c\,8$ estre diuisee par $\surd c\,27$; & icelle equiuale à $\frac{2}{3}$. Ainsi aussi $\surd\frac{6}{81}$, denote $\surd 6$ estre diuisee par $\surd 81$.

Mais quand le signe radical est posé deuant vn nombre entier auec la fraction, il faut reduire tout le nombre à vne seule fraction, afin de pouuoir exprimer sa valeur. Comme $\surd c\,1\frac{67}{125}$ sera reduit a $\surd c\frac{192}{125}$, & signifie $\surd c\,192$ estre diuisee par $\surd c\,125$, c'est à dire par 5, & peut estre representee ainsi $\frac{\surd c\,192}{5}$, tellement qu'il signifie $\surd c\,192$ estre diuisee par 5. Que si les termes de ceste fraction $\surd c\frac{192}{125}$ sont multipliez par vn mesme nombre, c'est à sçauoir par $\surd c\,192$, sera produit la fraction $\surd c\frac{36864}{24000}$ equiuallant à la fraction $\frac{192}{125}$. Et si derechef les termes produicts de la fraction sont multipliez par la mesme $\surd c\,192$, sera produict la fraction $\surd c\frac{7077888}{4608000}$ c'est à dire $\frac{192}{\surd c\,4608000}$, & signifie le cube 192 (qui est produict de $\surd c\,192$ multiplié en soy cubiquemét) estre diuisé par $\surd c\,4608000$; pource que la racine cubique du numerateur 7077888 est 192. Derechef la fraction $\surd\frac{16}{64}$, signifie $\surd 16$, c'est à sçauoir 4, estre diuisee par $\surd 64$, c'est à dire par 8; & est equiualente à $\frac{1}{2}$. Et la fraction $\frac{\surd 16}{64}$ signifie $\surd 16$, c'est à dire 4 estre diuisé par 64; & est equiualente à $\frac{4}{64}$, ou $\frac{1}{16}$. Ainsi $\frac{16}{\surd 64}$, signifie que le nombre 16 est diuisé par $\surd 64$, c'est à dire par 8; & est equiualente au nombre 2.

Quand la raison des numerateurs aux denominateurs est vne mesme, les fractions sont egales, tout ainsi qu'és fractions vulgaires: Parquoy toutes ces fractions $\surd\frac{64}{4}$, $\frac{\surd 64}{2}$, $\frac{64}{\surd 256}$, sont de mesme valeur; pource qu'en toutes le numerateur est quadruple du denominateur.

Les fractions irrationelles se reduisent à minimes termes (quand elles peuuent estre reduites,) tout ainsi qu'es fractions vulgaires. Comme ceste fraction $\sqrt{qc}\,\frac{4}{8}$ se reduira à ceste-cy $\sqrt{qc}\,\frac{1}{2}$: & $\sqrt{\frac{144}{36}}$ à $\sqrt{\frac{4}{1}}$. Elles peuuent aussi estre quelquesfois reduites à moindres signes radicaux; Comme $\sqrt{qc}\,\frac{4}{8}$ se reduit à $\frac{\sqrt{c\,2}}{\sqrt{2}}$. Pource que le numerateur 4 à racine quarree 2, mais elle n'a pas racine cubique: Et le denominateur 8 à racine cubique 2, mais elle n'a pas la quarree. Or que ces fractions $\sqrt{qc}\,\frac{4}{8}$ & $\frac{\sqrt{c\,2}}{\sqrt{2}}$ soient egales, on le peut prouuer par la multiplication en croix.

Or l'addition & substraction se faict en ceste maniere. Si le denominateur est vn mesme, soient adioustez les numerateurs, comme il a esté dict cy deuant, ou soit soustrait l'vn de l'autre, & à la somme, ou au reste, soit apposé le denominateur commun, ainsi qu'il appert és exemples suiuans.

Addition

$\frac{\sqrt{4}}{7}$ adioustez à $\frac{\sqrt{9}}{7}$

font $\frac{\sqrt{25}}{7}$ ou $\frac{5}{7}$

Substraction

$\frac{\sqrt{4}}{7}$ ostee de $\frac{\sqrt{9}}{7}$

reste $\frac{\sqrt{1}}{7}$ ou $\frac{1}{7}$

Mais quand les denominateurs sont diuers, soit faicte la reduction à vn mesme denominateur par la multiplication en croix, ainsi qu'és fractions vulgaires : puis soit faict comme dessus, comme apert és formules cy dessus,

Reduction

$\frac{\sqrt{144}.\quad \sqrt{196}}{\sqrt{\frac{16}{49}} \ \& \ \sqrt{\frac{4}{9}}}$

$\sqrt{441}$.

Addition

$\sqrt{\frac{144}{441}}$ & $\sqrt{\frac{196}{441}}$

font $\sqrt{\frac{676}{441}}$ ou $1\frac{5}{21}$

Subtraction

$\sqrt{\frac{144}{441}}$ de $\sqrt{\frac{196}{441}}$

reste $\sqrt{\frac{4}{441}}$ ou $\frac{2}{21}$

En la mesme maniere s'il faut adiouster $\frac{\sqrt{50}+\sqrt{c\,24}}{5}$ à $\frac{\sqrt{c\,24}+\sqrt{8}}{2}$

on reduira premierement icelles fractions à mesme denomination, c'est à sçauoir à $\frac{\sqrt{200} + \sqrt{c\,19}}{10}$ & $\frac{\sqrt{c\,3000} + \sqrt{200}}{10}$: puis apres adioustãt les numerateurs on aura $\frac{\sqrt{800} + \sqrt{c\,8232}}{10}$: Mais si on soustraict la moindre d'icelles fractions de la plus grande restera $\frac{\sqrt{c\,648}}{10}$.

Quand les numerateurs sont incommensurables, l'addition d'iceux se faict par l'interposition du signe $+$, mais la subtraction par l'interiection du signe $-$. Comme la somme de $\sqrt{\frac{7}{8}}$ & $\sqrt{\frac{5}{8}}$ est $\sqrt{\frac{7}{8}} + \sqrt{\frac{5}{8}}$. Et $\sqrt{\frac{5}{8}}$ ostee de $\sqrt{\frac{7}{8}}$ reste $\sqrt{\frac{7}{8}} - \sqrt{\frac{5}{8}}$.

En la multiplication & diuision des fractions irrationelles il faut seulement les reduire à mesme signe radical, & acheuer comme és fractions vulgaires. Parquoy multipliant $\frac{\sqrt{3}}{4}$ par $\frac{\sqrt{6}}{7}$ viendra $\frac{\sqrt{18}}{28}$. Et $\frac{\sqrt{36}}{3}$ diuisee par $\frac{\sqrt{c\,27}}{2}$ fera $\frac{4}{3}$: & aussi $\frac{\sqrt{3}}{4}$ diuisee par $\frac{\sqrt{6}}{7}$, viendra $\sqrt{\frac{147}{96}}$ c'est à dire $\sqrt{1\frac{51}{96}}$.

Quant à la preuue de chacune de ces operations, elle se faict par sa contraire, c'est à dire que l'addition se preuue par la substraction; & la substraction par l'addition, &c.

Des nombres cossiques irrationaux, & de leur Algorithme.

CHAP. XXIII.

Tout ainsi que les nombres absolus se font irrationaux, estans precedez de signes radicaux : comme de 5, se faict

V c p o Ainsi aussi les nombres cossiques se font irrationaux, quand on leur prepose quelqu'vn d'iceux signes radicaux: Comme de 20 ℞, se faict √ 20 ℞, nombre cossique irrationel, qui se prononce, la racine quarree de 20 racines: Item de 6 c, se faict √ 6 c; qui signifie, la racine quarree de 6 c. Item de 9 ℞, se faict √√ 9 ℞. &c. Or tels nombres peuuent estre quelquesfois rationaux, & quelquesfois irrationaux selon la valeur d'vne racine. Car si 1 ℞ vaut 5, 20 ℞ vaudront 100, duquel la racine quarree est 10: partant √ 20 ℞ est vn nombre rationel equiuallant 10: Et √c 20 ℞ sera irrationel, puis que 100 n'a pas racine cubique. Il est donc euident qu'on ne peut iuger si tels nombres sont rationaux ou irrationaux, iusques à ce que l'estimation & valeur d'vne seule racine apparoisse.

Or l'addition & soustraction d'iceux nombres se faict par l'interpositiō des signes + & — Comme √ 36 ℞ adioustée a √ 12 q, faict √ 36 ℞ + √ 12 q, ou √ 12 q + √ 36 ℞. Et 36 estant ostez de √ 36 ℞, restera √ 36 ℞ — 36: & ainsi des autres.

Que si les signes cossiques sont semblables, & les nombres irrationaux (considerez sans leurs signes cossiques) sont cōmensurables; l'addition & subtraction se feront en la mesme maniere des racines simples, enseignee ês chap. 15 & 16. apposant apres l'operation le mesme signe cossique. Ainsi √ 8 ℞ adioustee à √ 18 ℞, fera √ 50 ℞. Mais ostant √ 8 ℞ de √ 18 ℞, restera √ 2 ℞.

La preuue sera facile & euidente, si on pose la valleur d'vne seule racine estre quelque nombre, comme 2. Car 8 ℞ seront 16, dont la racine quarree est 4: & 18 ℞ seront 36, dont la racine quarree est 6: Or 4 & 6 font 10: comme aussi √ 50 ℞, puis que 50 ℞ font 100, dont la racine est 10. Mais 4 ostez de 6, reste 2, valleur de √ 2 ℞, puisque 2 ℞ font 4, dont la racine est 2.

Mais afin que les nōbres cossiques irrationaux soiēt multipliez entr'eux, ou diuisez, ils doiuent estre premierement reduits à mesme signe radical, comme nous auons enseigné au chap. 13. Comme s'il faut multiplier √c 4 ℞ par √ 8 ℞: icelles estans reduites à mesme signe radical, seront √qc 16 q, & √qc 512 c: lesquels deux nombres multipliez entr'eux produisent √qc 8192 ß: mais √qc 512 c diuisee par √qc 16 q, le quotient sera √qc 32 ℞.

La preuue se fera, posant la valleur d'vne racine, comme dict est cy-dessus; ou bien chasque operation par sa contraire.

Q 4

Quant aux autres nōbres rompus, il n'est besoin d'en traidict particulierement, pource qu'ils suiuent l'Algorithme de leurs entiers, joinct à celuy des nombres communs.

Or vne equation se rencontrant entre vn nombre cossique irrationel & vn nombre absolu, il la faudra reduire en ceste maniere. Soit pour exemple vne equation entre √24R & 12. Il y aura pareillement equation entre 24R & 144 leurs quarrez: soit donc diuisé 144 par 24, & sera produit 6 au quotiēt pour la valleur d'vne racine: ce qui est manifeste, puis que 24R font 144, dont la racine quarree est 12.

Item s'il y a equation entre √10q & 20: il y aura aussi equation entre 10q. & 400: diuisant donc 400 par 10, viendront 40 pour la valleur d'vne racine. Finalement si vne equation est trouuee entre √c12q. & 30: il y aura aussi equatiō entre 12q & 27000, les cubes d'iceux: parquoy diuisāt 27000 par 12, viendront 2250 pour la valleur d'vne seule racine.

Que si quelqu'vn proposoit vne equation estre √c 8. & 3. il y auroit aussi equation entre leurs cubes 8 & 27. Ce qui est impossible. Parquoy en ces equations il est necessaire que le nombre absolu soit la racine du nombre auec lequel est le signe radical: telle qu'est l'equation d'entre √c8 & 2. Item entre √c64 & 4: Item entre √81 & 9. &c. Autrement l'equatiō sera impossible.

De l'extraction des racines des binomes & residus.

CHAP. XXIIII.

QVand deux quelconques nombres sont conioincts par le signe +, ils sont ordinairement nommez Binome: comme √12+√3: & √18+√8. Mais estans accouplez par le signe —, ils sont appellez Apoteme ou Residu: Comme √12—√3: & √18—√8. Et plus de deux nombres ainsi accouplez, sont nommez Trinome, Quatrinome, &c. Comme √17+√10+√3: ou √17—√10+√3, sont dicts Trinome: & √17+√10+√3+√2: ou √17—√10+√3+√2, sont appellez Quatrinome, &c. Mais Euclide au 10. liure prop. 37 & 74 appelle seulement Binome, ou residu, quand les deux nombres conioincts par le signe+ ou —, sont rationels commensurables en puissance seulement: il constitue de six sortes de binome, & autant de residu: chacun desquels il definit, & enseigne à trouuer au mesme liure. Or pour extraire la racine quarree

mes & residus, il y a diuerses manieres, deux des-
s enseignerons icy, & au prealable le probleme

*n nombre donné en deux parties, telles que le nombre
elles soit egal à vn nombre donné, qui ne soit plus grand
de la moictié d'iceluy nombre proposé à diuiser, ou(qui
que la quatriesme partie du quarré dudit nombre.*

lle coupper le nombre 20 en deux parties, telles
iees entr'elles, leur produict soit 75, qui est moin-
), quart du quarré d'iceluy nombre proposé 20,
de 100, quarré de la moitié de 20, & resteront 25,
is la racine quarree, laquelle sera 5, & soit icelle
10, moictié du nombre proposé à diuiser, & vien-
era le plus grand nombre cherché, mais icelle ra-
t ostee d'icelle moitié 10, resteront 5, qui sera le
mbre requis : tellement donc que les deux nom-
, sont parties du nombre 20, telles que multipliees
lles produisent 75, ainsi qu'il estoit requis.

iant soit le binome $38+\sqrt{}288$, duquel il faut ex-
ine quarree. Soit couppé le plus grand nom 38
rties, telles que leur produict soit le nombre 72
partie du quarré du moindre nom, sçauoir de 288,
arties seront trouuees par le prob. cy dessus, estre
ceux deux nombres soient prises les racines quar-
lles seront 6 & $\sqrt{}2$, qui conioinctes par le signe +
$\sqrt{}2$, qui sera la racine quarree du binome proposé.
s racines 6 & $\sqrt{}2$ estans accouplees par le signe —
$\sqrt{}2$, qui sera la racine quarree du residu $38-\sqrt{}288$.
ine quarree du binome $\sqrt{}32+\sqrt{}24$, sera trouuee en
naniere estre $\sqrt{}\sqrt{}18+\sqrt{}\sqrt{}2$. Car $\sqrt{}32$ plus grãd nom
nome estant coupé en deux parties, telles que leur
oit 6, quatriesme partie de 24, quarré du moindre
es parties seront trouuees estre $\sqrt{}18$, & $\sqrt{}2$, dont
conioinctes par le signe +, sont $\sqrt{}\sqrt{}18+\sqrt{}\sqrt{}2$.

rement extraire la racine quarree du binome 38+
it du quarré du plus grand nom, oster le quarré du
om, & resteront 1156, desquels soit pris le quart,
9, duquel soit pris la racine quarree, laquelle sera
ut adiouster, & soustraire de la moitié du plus grãd
oir de 19, & viendront 36, & 2, desquels deux nom-
prises les racines quarrees, & seront 6, & $\sqrt{}2$, qui
s par le signe +, serõt $6+\sqrt{}2$ pour la racine quar-
me $38+\sqrt{}288$, comme deuant. Par la mesme ma-

siete la racine quarree du residu $\sqrt{60} - \sqrt{12}$ sera trouuee estre $\sqrt{(\sqrt{15} + \sqrt{12})} - \sqrt{(15 - \sqrt{12})}$.

Quant à la preuue, elle se faict comme en l'extraction des nombres absolus, sçauoir est multipliant la racine trouuee par soy-mesme.

Or voila sommairement les operations vsitees en l'Algebre: Et afin de donner à l'apprenty tant plus de cognoissance en la practique d'icelles operations, nous finirons ce traicté par quelques questions, & solutions d'icelles.

1. *Trouuer deux nombres, desquels l'excez soit donné, & en raison donnee.*

Soit donné l'excez 20, & la raison quintuple donnee. Soit posé le moindre nombre estre 1℞. Donc le plus grand sera 5℞, sçauoir est le quintuple d'iceluy: l'excez d'iceux est 4℞. Il y a donc equation entre 4℞. & 20. & diuisant 20 par 4, viendra 5 pour 1℞. Parquoy le moindre sera 5, & le plus grād 25, qui est quintuple d'iceluy 5, & l'excede de 20.

2. *Estans donnez deux nombres, en trouuer vn autre, auquel estant adiousté l'vn des donnez, & soustraict l'autre, la somme soit au reste en raison donnee.*

Les nombres donnez soient 100 & 20: & il faut premierement trouuer vn nombre auquel si on adiouste 100, & du mesme on oste 20, la somme soit triple du reste. Soit posé ce nōbre là estre 1℞. & la somme sera 1℞ + 100: mais le reste 1℞ — 20. Afin donc que ceste somme là soit triple de ce residu, l'equation sera entre 1℞ + 100. & 3℞ — 60. Et adioustant à chacun 60, elle sera entre 1℞ + 160, & 3℞. & ostant 1℞, icelle equation sera entre 160 & 2℞. Diuisant donc 160 par 2, sera trouué 80 pour 1℞, qui est le nombre cherché. Car si à iceluy on adiouste 100, on aura 180; mais si on en oste 20, resterōt 60; & 180 est à 60 en raison triple.

Qu'il faille maintenant trouuer vn nombre, auquel si on adiouste 20, & du mesme on soustraict 100, ceste somme-là soit triple de ce reste cy. Soit posé ce nombre là estre 1℞, & sera faict la somme 1℞ + 20, & reste 1℞ — 100. Afin donc que ceste somme soit triple de ce reste, l'equation sera entre 1℞ + 20. & 3℞ — 300. Et adioustant 300 à chacun, elle sera entre 1℞ + 320. & 3℞. & ostant 1℞ de chacun, l'equation sera entre 320. & 2℞. Diuisant donc 320 par 2, viendra pour 1℞. 160, nombre cherché. Car si à iceluy on adiouste 20, on aura 180, & si on oste 100, resteront 60, & entre 180 & 60 est la raison triple.

3. *Trouuer deux nombres en raison donnee, & qui multipliez en-*

tr'eux facent vn nombre ayant raison donnee à la somme d'iceux.

Qu'il faille donc trouuer deux nombres en raison sesquialtere, tels que leur produit soit duodecuple de la somme d'iceux. Soient posez les deux nombres estre 4℞, & 6℞. qui est raison sesquialtere. Estans multipliez entr'eux ils font 24q. & leur somme est 10℞. Afin donc que 24q. ayent raison duodecuple à 10℞; l'equation sera entre 24q. & 120℞. Diuisant donc 120 par 24, viendra 5 pour la valeur de 1℞. pource que les denominations cossiques q. & ℞. sont collaterales. Veu donc que le premier nombre a esté posé 4℞, & le second 6℞ celuy-là sera 20, & cestuy-cy 30, & iceux multipliez entr'eux font 600, qui est duodecuple de 50 somme d'iceux.

4. *Trouuer deux nombres tels que le nombre produict de la multiplication d'iceux, estant diuisé par leur difference, le quotient soit egal à vn nombre donné.*

Qu'il faille trouuer deux nombres, tels que leur produict estant diuisé par leur difference, le quotient soit 30. Soit posé pour le moindre nombre, quelconque nombre moindre que le quotient donné 30, sçauoir est 20, & soit posé le plus grand estre 20+1℞. afin que la difference d'iceux soit 1℞. de 20, en 20+1℞. sera faict le nombre 400+20℞ lequel diuisé par 1℞ difference d'iceux, le quotient est $\frac{400+20℞}{1℞}$, egal au nombre proposé 30. Ceste equation sera reduicte par la multiplicatiõ en croix, à l'egalité d'entre 30℞. & 400+20℞. ostant donc 20℞ de chacun, l'equatiõ sera entre 10℞ & 400. & 400 estans diuisez par 10, viendront 40 pour la valleur de 1℞ difference des nombres cherchez. veu donc que le moindre est 20, le plus grãd sera 60, c'est à sçauoir 20+1℞ Maintenant 60 multipliez par 20, font 1200, qui diuisez par 40 difference d'iceux nombres, le quotient est 30.

5. *Estans donnez deux nombres inegaux, en trouuer deux autres en raison donnee, tels que le plus grand osté du plus grand donné, & le moindre du moindre, les restes soient egaux.*

Soient deux nombres donnez 100. & 60. & il en faut trouuer deux autres en raison septuple, & que le plus grand osté de 100, & le moindre de 60, les restes soient egaux.

Soient posez pour les nombres en raison septuple, 1℞. & 7℞. Les nombres egaux restans seront 100—7℞ & 60—1℞. Adioustant donc 7℞ à chacun, l'equation sera entre 100. & 60+6℞. & ostant 60 de chacun, elle sera entre 40. & 6℞. Et diuisant 40 par 6, viendra pour 1℞, $6\frac{2}{3}$ moindre nombre, & le plus grand septuple de cestuy-cy sera 46 $\frac{2}{3}$. Et ostant celuy-là de 60, & celuy-cy de 100 : les nombres restans seront egaux, sçauoir 53 $\frac{1}{3}$.

6. *Trouuer deux nombres en raison donnee, & que le quarré du plus grand soit au moindre aussi en raison donnee.*

Que les nombres cherchez ayẽt la raison triple, & le quarré du plus grand ait au moindre la raison sextuple. Soit posé le moindre 1℞. & le plus grand 3℞. Le quarré du plus grand, sçauoir 9q. doit auoir raison sextuple au moindre 1℞ : Donc l'equation sera entre 9q. & 6℞. Et diuisant 9 par 6, viendra $\frac{2}{3}$ pour 1℞. pource que les nombres cossiques sont collateraux. Les nombres cherchez sont donc $\frac{2}{3}$ & 2, ayans raison triple, & le quarré du plus grand, sçauoir 4, est en raison sextuple au moindre, sçauoir à $\frac{2}{3}$.

7. *Estant donné vn nombre composé de deux quarrez, le diuiser en deux autres quarrez.*

Soit le nombre donné 34, composé des deux quarrez 9 & 25, qu'il faut diuiser en deux autres quarrez. Les costez des quarrez dõnez sont 3 & 5 : soit posé le costé du premier quarré cherché estre 1℞+3, sçauoir vne racine plus que le costé du premier quarré donné : mais le costé du second quarré cherché, soit posé quelconque nombre de racines moindre que le costé du secõd quarré donné, sçauoir 2℞—5. Les quarrez d'iceux costez seront 1q+6℞+9. & 4q—20℞+25, qui adioustez ensemble font 5q+34—14℞. egal au nombre donné 34. adioustant donc 14℞ à chacun, l'equation sera entre 5q+34. & 14℞+34. & ostant 34 de chacun, restera l'equatiõ entre 5q & 14℞. Diuisant donc 14 par 5, viendront $\frac{14}{5}$ pour 1℞, pource que les nombres cossiques sont collateraux. Donc le costé du premier quarré, lequel nous auons posé estre 1℞+3, sera $\frac{29}{5}$: & le costé du second quarré, lequel a esté posé de 2℞—5, sera $\frac{28}{5}$—5, c'est à dire $\frac{3}{5}$. Les quarrez d'iceux costez trouuez sont $\frac{841}{25}$ & $\frac{9}{25}$, qui font ensemble $\frac{850}{25}$, c'est à dire 34 nombre donné.

8. *Coupper vn nombre donné en trois parties, telles que la premiere diuisee par vn nombre donné ; & la seconde multipliee par vn autre nombre donné : & la tierce diuisee par quelque autre nombre, prouiennent trois nombres egaux.*

Soit le nombre donné 178, qu'il faut diuiser en trois parties, telles que la premiere diuisee par 5, vienne autant que de la seconde multipliee par 8, & autant que de la tierce diuisee par 6. Soit posé la premiere partie 1℞, laquelle diuisee par 5, le quotient sera $\frac{1}{5}$ ℞. Et pource que la secõde partie en 8, doit faire autant, nous diuiserons $\frac{1}{5}$℞ par 8. Car le quotient $\frac{1}{40}$℞

sera la 2. partie, qui multipliee par 8 faict $\frac{1}{5}$℞. Et pource que la 3. partie diuisee par 6 doit faire autant, nous multiplierons $\frac{1}{5}$℞ par 6; & le produict $\frac{6}{5}$℞, sera icelle 3. partie, qui diuisee par 6, le quotient est $\frac{1}{5}$℞. Maintenant reste que ces trois parties 1℞, $\frac{1}{40}$℞ & $\frac{6}{5}$℞, fussent 178 nombre donné. Or elles font $2\frac{9}{40}$℞. Dōc l'equatiō sera entre 178. & $2\frac{9}{40}$℞. Et si on diuise 178 par $2\frac{9}{40}$, viendra 80 pour 1℞. qui est la premiere partie; & la seconde sera 2, & la tierce sera 96. lesquelles parties font 178 nombre donné: & la premiere diuisee par 5, mais la seconde multipliee par 8, & la tierce diuisee par 6, est tousiours produict vn mesme nombre 16.

9. *Diuiser vn nombre donné en trois parties continuellement proportionneles, telles que le produit de la premiere en la tierce ait vne raison donnee au produit de la premiere en la seconde.*

Soit le nombre donné 30, qu'il faut diuiser en trois parties continuellement proport. tellement que le produit de la premiere multipliee par la tierce, soit au produit d'icelle premiere en la seconde, en raison quadruple. Soit posé la seconde partie estre 1℞: & partant la somme de la premiere & tierce 30—1℞. Et pource que 1℞ en soy faict 1q la premiere en la tierce sera aussi 1q. Veu donc que ce produit doit estre quadruple du produit de la premiere en la seconde, sera produit $\frac{1}{4}q$ de la premiere en la seconde, sçauoir en 1℞. Si donc on diuise $\frac{1}{4}q$ par 1℞. le quotient sera $\frac{1}{4}$℞, qui multiplié par 1℞ nombre diuisant, faict $\frac{1}{4}q$ nombre diuisé: & partant la premiere partie sera $\frac{1}{4}$℞. qui auec la seconde faict $1\frac{1}{4}$℞, laquelle somme ostee du nombre donné 30, restera la tierce partie 30—$1\frac{1}{4}$℞. Maintenant pource que la premiere en la tierce doit faire 1q, c'est à sçauoir vn nombre egal à celuy de la moyenne 1℞ en soy-mesme: si on diuise 1q. par la premiere, c'est à dire par $\frac{1}{4}$℞. le quotient sera 4℞, qui multiplié par $\frac{1}{4}$℞, produit 1q. & partant la tierce partie sera 4℞. egales à l'autre tierce partie trouuee 30—$1\frac{1}{4}$℞. Adioustant donc $1\frac{1}{4}$℞ à chacun, l'egalité sera entre $5\frac{1}{4}$℞. & 30. & diuisant 30 par $5\frac{1}{4}$, viendra $5\frac{5}{7}$ pour la valeur de 1℞. sçauoir est pour la seconde partie: donc la premiere partie, laquelle nous auions trouuée estre $\frac{1}{4}$℞, sera $1\frac{3}{7}$: & la tierce partie, qui a esté trouuee de 30—$1\frac{1}{4}$℞, sera $22\frac{6}{7}$. Et ces trois parties $1\frac{3}{7}$, $5\frac{5}{7}$, $22\frac{6}{7}$ font ensemble 30 nōbre donné: & la premiere $1\frac{3}{7}$ multipliee par la tierce $22\frac{6}{7}$, fait $32\frac{32}{49}$, qui est quadruple de $8\frac{8}{49}$, faict de la premiere partie en la seconde. Et il est euident qu'icelles trois parties sont continuellement prop. puis qu'vn mesme nombre est produit de la premiere en la tierce, que de la moyenne en soy, c'est à sçauoir $32\frac{32}{49}$.

10 *Trouuer trois nombres continuellement proportionnaux, en vne raison dõnee, desquels les quarrez ensembles fassent vn nombre dõné.*

Qu'il faille trouuer trois nombres continuellement en raison sesquitierce, desquels les quarrez fassent 4329. Soiẽt posez les nõbres cherchez estre 9℞. 12℞. 16℞. qui sont en proportion sesquitierce. Les quarrez d'iceux, sçauoir 81q. 144q. 256q. font ensemble 481q. egaux à 4329. Diuisant donc 4329 par 481, viendra 9 pour la valeur de 1q, & par consequent 1℞ sera 3. Donc le premier nombre posé 9℞. sera 27. le second 36. & le tiers 48, desquels les quarrez 729. 1296. 2304. font ensemble 4329.

11 *Estant donnez deux nombres, en trouuer vn autre, qui adiousté à l'vn d'iceux, & la somme multipliee par iceluy trouué, produise le quarré de l'autre nombre donné.*

Soient les deux nombres donnez 10 & 12; & il en faut trouuer vn autre qui adiousté au premier 10, fasse vn nombre, qui multiplié par iceluy adiousté, produise le quarré de l'autre nombre 12, sçauoir 144. Soit posé le nombre cherché 1℞. l'adioustant à 10, viendra 1℞ + 10, qui multiplié par 1℞, faict 1q + 10℞, lequel doit estre egal à 144. Ostant donc 10℞ de chacun, l'equation sera entre 1q. & 144 — 10℞. laquelle se resoudra ainsi: La moitié du nombre des racines 5, faict le quarré 25, auquel adioustant 144, vient 169, dont la racine quarree est 13, de laquelle soit ostee la susdite moitié 5, à cause du signe —, & restera la valeur de 1℞, sçauoir 8 nombre cherché. Car iceluy estant adiousté à 10, faict 18, qui multipliez par 8, le produict est 144, quarré de l'autre nombre 12.

12. *Coupper vn nombre donné en deux parties, telles que le nombre produict de l'vne en l'autre, multiplié par le quarré du nombre donné, fasse vn autre nombre donné.*

Soit le nombre donné 20, qu'il faut coupper en deux parties, telles que le nombre procreé de la multiplication d'icelles, estant multiplié par 400, quarré du nombre donné soit 300. Soit posé l'vne d'icelles parties estre 1℞, & l'autre 20 — 1℞. icelles multipliees entr'elles, viendra 20℞ — 1q: & ce nõbre multiplié en 400, faict 8000℞ — 400q. qui doit estre egal à 300. adioustãt 400q à chacun, l'equatiõ sera entre 8000℞. & 300 + 400q. & ostãt 300, restera equatiõ entre 400q. & 8000℞ — 300. & diuisãt par 400, l'equatiõ sera entre 1q. & 20℞ — $\frac{3}{4}$. La moitié des racines est 10, dõt le quarré est 100, ou $\frac{400}{4}$ desquels ostant $\frac{3}{4}$ resteront $\frac{397}{4}$, qui adioustez à la susdite moictié 10, la plus grande racine sera 10 + $\sqrt{\frac{397}{4}}$; & ostant les mesmes $\frac{397}{4}$ d'icelle moictié, restera la moindre racine 10 — $\sqrt{\frac{397}{4}}$, qui sõt les parties requises. Car l'vne multipliee par l'autre faict $\frac{3}{4}$; & $\frac{3}{4}$ en 400, quarré du nombre donne 20. faict $\frac{1200}{4}$, c'est à dire 300.

Or és 12 questions cy dessus, les nombres sont abstrais de la matiere, mais és 12 suiuantes les nombres sont accordez aux choses materieles.

13 *Il y à vn rectangle duquel les costez sont en raison septuple, & les quarrez d'iceux pris ensemble, ont raison centuple à la somme d'iceux costez: Trouuer les costez, l'aire & le diametre dudict rectangle.*

Soit pose le moindre costé 1℞. & le plus grand 7℞. desquels la somme sera 8℞. & leurs quarrez 1q & 49q. adioustez ensemble feront 50q. centuple de 8℞. Donc l'equation est entre 50q. & 800℞. Et diuisant 800 par 50, viendra 16, pour 1℞. moindre costé: le plus grand qui est en raison septuple sera donc 112. & l'aire sera 1792 produit d'vn costé par l'autre. Et le diametre sera $\sqrt{12800}$. Car les quarrez des costez sont 256, & 12544, la somme desquels est 12800, centuple de 128. qui est la somme d'iceux costez, & partant le quarré du diametre sera 12800, dōt la racine quarree, sçauoir est $\sqrt{12800}$ sera ledit diametre.

14. *Il y à vne columne quadrangulaire rectangle, de laquelle la base à les costez en raison sesquitierce, & sa hauteur est au plus grand costê de la base en raison double superbipartiente tierce; & la solidité d'icelle columne cōtient 93312 toises: il faut trouuer chacune dimensions.*

Le moindre costé de la base soit posé 3℞. & le plus grand 4℞. mais la hauteur 10 $\frac{2}{3}$ ℞. afin qu'elle soit au plus grand costé 4℞. en raison double superbipartiente tierce, & le plus grand costé au moindre en raison sesquitierce. Ces trois nombres multipliez entr'eux produisent 128c. egal a 93312 solidité de la columne Diuisant donc 93312 par 128. viennēt 726 pour 1c. & 9 pour 1℞ donc le moindre costé de la base, lequel nous auons posé estre 3℞. sera 27. & le plus grand 4℞. sera 36. & la hauteur 10 $\frac{2}{3}$ ℞ sera 96. Et ces trois dimensions multipliees entr'elles produisent la solidite 93312.

15. *Il y a vn rectangle duquel l'aire est 30, & les costez d'iceluy sont en raison sesquialtere, il faut trouuer iceux costez, & le diametre.*

Soit pose le moindre costé 2℞. & partāt le plus grand 3℞. sesquialtere a iceluy: de la multiplication des costez entr'eux, sera produict 6q. egaux à 30 aire donné. Diuisant donc 30 par 6, 1q sera 5. & 1℞. $\sqrt{5}$. Et pource que nous auons posé le moindre costé estre 2℞. iceluy sera $\sqrt{20}$, nombre double de-

√5.& le plus grand costé 3℞. sera √45. nombre triple de √5. Et pource que les quarrez des costez 20 & 45, sont ensemble egaux au quarré du diametre : le quarré d'iceluy diametre sera 65, & iceluy dia. √65.

16. *Il y a vne armee composee de François, Allemans & Anglois: les François sont 25000 : les Allemans sont moitié des François & Anglois. & les Anglois sont la 8. partie des François & Allemans: il faut trouuer le nombre des Allemans & des Anglois : & combien il y a d'hommes en toute l'armee.*

Soit posé 1℞ pour les Allemans : donc les François & les Anglois ensemble seront 2℞. & toute l'armee sera 3℞. Et puis que les Anglois sont la 8 partie des Frrnçois, & des Allemans ensemble : & que les Allemans & François sont ensemble 1℞ +25000 : les Anglois seront $\frac{1}{8}$℞+3125. Parquoy veu que les François sont 25000; les Allemans 1℞. & les Anglois $\frac{1}{8}$ ℞+3125. toute l'armee sera $1\frac{1}{8}$℞+28125 egale a 3℞. Ostant donc $1\frac{1}{8}$℞ de chacun l'equation sera entre 28125, & $1\frac{7}{8}$℞. & diuisant 28125 par $1\frac{7}{8}$, le nombre 15000 sera la valeur de 1℞, qui est le nombre des Allemans ; & partant les François & Allemans seront ensemble 40000, dont la 8 partie est 5000 pour le nõbre des Anglois : & toute l'armee sera de 45000 hommes.

17. *Il y a vn quarré duquel le diametre, & le costé ensemble sont 6: trouuer iceux costé & diametre.*

Soit posé le costé 1℞.& partant le diametre 6— 1℞. Et pource que le quarré du diametre est double du quarré du costé : & le quarré du costé est 1*q*. & le qnarré du diamerre est 36—12℞+1*q*, il y aura equation entre 2*q* & 36—12℞+1*q*.& ostant 1*q* de chacun demeurera equatiõ entre 1*q*.& 36—12℞.maintenant la moitié, du nombre des racines est 9, dont le quarré est 36 qui adioustez à 36, viennent 72, dont la racine est √72, de laquelle estant ostee la susdite moitié 6, restera √72—6. pour la valeur de 1℞ & autant sera le costé du quarré: lequel ostant de 6, restera 12— √72 pour le diametre.

18 *Il y à vn quarré duquel le diametre surpasse le costé de 3: trouuer lesdits costé & diametre.*

Le coste soit pose de 1℞. & partant le diametre sera 1℞+3. Et pource que le quarre du diametre est double du quarre du coste; & le quarre du coste est 1 *q*. & le quarre du diametre 1*q*+6℞+9. L'equation sera entre 2*q*.& 1*q*.+6℞+9. & ostant 1*q*.de chacun, restera l'equatiõ entr 1*q* & 6℞+9 La moitie au nombre des racines est 3, dont le quarre est 9, qui adiouste a 9, faict 18, dont la racine est √18, à laquelle soit adiouste la susdite moitie 3, & sera √18+3 valeur de 1℞ qui est pour le costé : & partant le diametre sera √18+−6.

19. *Il y a vn quarré duquel le costé multiplié par le diametre faict 10 : trouuer lesdits costé & diametre.*

Soit posé le costé de 1℞. & partant le diametre sera $\frac{10}{1℞}$. Car 1℞ multipliee par $\frac{10}{1℞}$ faict 10 : lequel nombre est quotient, si 10 est diuisé par 1℞. Et ainsi le quotient multiplié par le diuiseur 1℞, produit le nombre diuisé 10. Et pource que le quarré du diametre est double du quarré du costé, sçauoir est de q. & le quarré du diametre est $\frac{100}{1℞}$. Il y aura equation entre 2q. & $\frac{100}{1℞}$, laquelle par la multiplication en croix sera reduitte à celle d'entre 2qq. & 100. Diuisant donc 100 par 2, viendra 50, valeur de 1qq, & 1℞ sera √√50. pour le costé. Et pource que le diametre a esté posé $\frac{10}{1℞}$, c'est à dire 10 diuisez par 1℞ : si on diuise 10 par √√50, sçauoir est par la valeur de 1℞, viendra au quotient √√200 pour le diametre.

20. *Il y a vn rectangle, duquel l'aire est 80, & la difference des costez est 2 : trouuer le diametre, & les costez d'iceluy rectangle.*

Soit posé le moindre costé de 1℞ ; & partant le plus grand de 1℞+−2. Ces costez multipliez entr'eux font l'aire 1q+−2℞ egal à l'aire donné 80. Ostant donc 2℞ de chacun, l'equatió sera entre 1q. & 80—2℞. La moitié du nombre des racines est 1, dont le quarré est 1, qui adiousté à 80, sera 81, dont la racine quarree est 9, de laquelle ostant la susdite moitié 1, restera 8, estimation de 1℞. pour le moindre costé Donc le plus grád sera 10, excedant iceluy de 2. Iceux costez multipliez entre-eux produisent 80 aire donné, & les deux quarrez des costez sont 64 & 100, egaux au quarré du diametre : & partant le quarré du diametre sera 164, & iceluy dia. √164.

21. *Il y a vn rectangle duquel le diametre est 30, & la somme des costez 42 : trouuer iceux costez, & l'aire du rectangle.*

Soit posé vn costé de 1℞. & partant l'autre 42—1℞. Leurs quarrez seront 1q.& 1764—84℞+−1q qui sont ensemble egaux au quarré du diametre. Parquoy l'equation sera entre 2q+−1764—84℞ & 900. Et adioustant 84℞ à chacun, elle sera entre 84℞+−900, & 2q.+−1764. Et ostant 900 de chacun, restera equara equation entre 84R. & 2q. +- 864. Et derechef ostant 864 de chacun, elle sera entre 2q. & 84R—864. Et diuisant tout par 2, l'equation viendra entre 1q. & 42R—432. La moitié du nombre des racines est 21, dont le quarré est 441, duquel ostāt 432, restera 9, dont la racine quarree est 3, qui adioustee à la susdite moitié 21, viendra 24 pour le plus grand costé : & partant restera 18 pour le moindre : & iceux costez multipliez entr'eux produisent 432 pour faire du rectangle.

11. *Il y à vn quarré duquel le costé multiplié par la difference d'entre iceluy costé, & le diametre faict 15: trouuer le diametre, & le costé dudit quarré.*

Soit posé le costé de 1R, & partant la difference d'entre le costé & le diametre sera $\frac{15}{1R}$, laquelle est trouuee diuisant 15 par 1R, sçauoir est afin que le quotient multiplié par le diuiseur 1R produise le nombre diuisé 15 par 1R; sçauoir est afin que le quotient multiplié par le diuiseur 1R, produise le nombre diuisé 15. Et pource que le diametre excede le costé de ceste difference, le diametre sera $1R +- \frac{15}{1R}$. Et d'autant que le quarré du diametre est double du quarré du costé; & le quarré d'iceluy costé est 1q, & le quarré du dia. est $\frac{1qq +- 30q +- 225.}{1q}$

Il y aura equation entre 2q, & $\frac{1qq +- 30q +- 225}{1q.}$ qui par multiplication en croix sera reduite à l'equation d'entre 2qq. & 1qq +- 30q +- 225. Ostant donc 1qq. de chacun, l'equation sera entre 1qq. & 30q +- 225. La moictié du nombre des quarrez est 15, dont le quarré est 225, qui adiousté à 225, vient 450, dont la racine quarree est √ 450, à laquelle adioustant la susdicte moictie 15, viendra √450 +- 15 pour 1q, & partant 1R. sera √(√450 +- 15) & autant est le coste requis, dont le quarré √450 +- 15. estant doublé donnera √1800 +- 30, quarré du diametre; & partant iceluy diametre sera √ (√1800 +- 30) duquel estant soustrait le costé, restera la difference √ (√1800 +- 30) — √(450 +- 15) qui multipliee par le costé √(√450 +- 15) sera produict le nombre 15.

12. *Deux hommes mettans leur argent ensemble, la somme est 200 escus, mais diuisant l'argent du second par celuy du premier le quo-*

tient est $1\frac{1}{2}$ *: Il faut trouuer l'argent de chacun.*

Soit pose 1℞ pour le premier, & pour le second 1A: il faut donc resoudre la seconde racine en premiere, ainsi. Pource que les deux ensemble ont 200 escus; il y aura equatiõ entre 1℞ +- 1A, & 200. Ostant 1℞ de chacun restera l'equation entre 1A, & 200—1℞. donc 1A sera reduite en 200—1℞. Parquoy ie pose derechef le nombre du premier estre 1℞, & celuy du second 200—1℞, qui font ensemble 200 escus. Ie diuise maintenant le nombre du second par celuy du premier, & viẽt

$$\frac{200—1℞}{1℞} \text{ egal a } \frac{3}{2},$$

laquelle equation par la multiplication en croix sera reduite à l'equation d'entre 400—2℞. & 3℞. Et adioustant 2℞ a chacun, l'equation sera entre 400 & 5℞. diuisant dõc 400 par 5, le quotiẽt sera 80 pour le nombre du premier. & partant le second aura 120, qui diuisez par 80, le quotient est $1\frac{1}{2}$.

24. *Trois hommes ayans de l'argent, le premier dict aux deux autres, que s'il auoit encore* 100 *escus, il auroit autant qu'eux: le second dit aussi aux deux autres, que s'il auoit encore* 100 *escus, il auroit le double de leur argent: pareillement le troisiesme dit aux deux autres, que s'il auoit encore* 100 *escus, il auroit le triple de leur argent: sçauoir combien à chacun.*

Soit pose l'argent du premier estre 1℞. donc auec 100, il aura 1℞+-100, & autant sera la somme du second & tier, & tous les trois auront 2℞+-100. Soit posé la somme du secõd estre 1A. Donc auec 100 il aura 1A+-100, lequel nombre est double de la somme du premier & tier, laquelle est 2℞+-100—1A. (Pource que ayans tous trois 2℞+-100, si on oste 1A, c'est à sçauoir l'argent du second, restera 2℞+-100—1A pour la somme du premier & tier; & partant il y aura equation entre 1A+-100, & 4℞+-200—2A. Et adioustant 2A à chacun, l'equation sera entre 3A+-100. & 4℞+-200. & ostant 100 de chacun, demeurera l'equation entre 3A, & 4℞+-100. Si donc les touts sont diuisez par 3, l'equation viendra entre 1A, & $\frac{4}{3}$℞+-$\frac{100}{3}$: & partant puis que le second est posé auoir 1A, sa somme sera $\frac{4}{3}$℞+-$\frac{100}{3}$ finalement la somme du tier soit posée estre 1B. Donc auec 100, il aura 1B+-100, qui est nombre triple de la somme du premier & second, laquelle est $\frac{7}{3}$℞+-$\frac{100}{3}$, composee de 1℞ somme du premier, & $\frac{4}{3}$℞+-$\frac{100}{3}$ somme du second: Il y aura donc equation entre 1B+-100 & $\frac{21}{3}$℞+-$\frac{300}{3}$, c'est à dire entre 1B+-100, & 7℞+-100, & ostant 100 de chacun, l'equatiõ sera entre 1B, & 7℞. & partãt la somme du tier qui a esté posee 1B sera 7 ℞. Parquoy puis que le premier á 1 ℞. le second $\frac{1}{3}$ ℞ + $\frac{100}{3}$, & le tier 7 ℞. tous les trois ensemble auront 9 $\frac{1}{3}$ ℞ + $\frac{100}{3}$. Mais tous les trois avoient aussi 1 ℞ + 100: Il y a donc equation entre 9 $\frac{1}{3}$ ℞ + $\frac{100}{1}$ & 2 ℞ + 100: & ostant 2 ℞ de chacun, restera equation entre 7 $\frac{1}{3}$ ℞ + $\frac{100}{3}$, & 100: & ostant derechef $\frac{100}{3}$, c'est á dire 33 $\frac{1}{3}$ *de chacun*, demeurera equatiõ entre 7 $\frac{1}{3}$ ℞ & *66* $\frac{2}{3}$: diuisãt dõc 66 $\frac{2}{3}$ par 7 $\frac{1}{3}$, *viendra* 9 $\frac{1}{11}$ pour 1 ℞ sõme du premier: & le secõd ayãt 1 $\frac{1}{3}$ ℞ + 33 $\frac{1}{3}$, aura 45 $\frac{5}{11}$: & le tier ayant 7 ℞, aura 63 $\frac{7}{11}$. Car ainsi le premier auec 100 aura 109 $\frac{1}{11}$, egale á la somme du second & tier; & le second auec 100, aura 145 $\frac{5}{11}$, qui est le double de la somme du premier & tier: & finablement le tier auec 100, aura 163 $\frac{7}{11}$, qui est le triple de la somme du premier & second.

Fin du sommaire de l'Algebre.

ELEMENT DIXIESME.

DEFINITIONS.

1. COMMENSVRABLES grandeurs, sont celles mesurees par vne mesme mesure.

2. Incommensurables grandeurs, sont celles qui n'ont aucune commune mesure.

Telles grandeurs sont le diamettre de quelque quarré, & le costé d'iceluy; car icelles n'ont nulle commune mesure, comme sera demonstré à la derniere prop. de ce liure. Il y a encores plusieurs autres lignes incommensurables, sçauoir est ausquelles on ne peut donner aucune commune mesure, beaucoup desquelles seront expliquees en ce liure; & enseigné par quelles manieres elles peuuent estre trouuees: derechef, les superficies sont dictes incommensurables, & les solides incommensurables, qui n'ont aucune commune mesure.

3. Lignes droites commensurables par puissance, sont celles desquelles les quarrez peuuent estre mesurez par vne mesme superficie.

4. Lignes droictes incommensurables en puissance, sont celles desquelles les quarrez n'ont aucune commune superficie qui les puisse mesurer.

5. Cela estant ainsi, il est euident que à toute ligne droicte proposee, on trouuera infinies lignes droictes commensurables, & infinies incommensurables: les vnes en longitude & puissance, les autres en puissance seulement. Or vne ligne droicte proposee, est appellee rationele.

Si on propose quelque ligne droicte de grandeur cogneuë & determinee, icelle est appellee rationele, pource que c'est selon elle que nous ratiocinons.

Dounot a estimé que ceste definition ne debuoit auoir lieu; & partant l'a reiettee. Ce que i'estime qu'il n'a deub faire, veu qu'il se sert presque à tous propos de ceste ligne rationelle mentionnee en ceste definition.

6 Les lignes commensurables à vne ligne rationele, soit en longitude & puissance, soit en puissance seulement, sont appellees rationeles.

7 Et les lignes incommensurables à vne ligne rationele, sont irrationeles.

Si cõparant quelque ligne droicte, à la ligne prinse pour rationele, & sur laquelle nous ratiocinons, elle est trouuee commensurable à icelle rationele, soit en longueur & puissance, soit en puissance seulement, telle ligne est aussi dicte rationele; mais si elle est incommensurable à icelle ligne rationele proposee, tant en longitude qu'en puissanc, ceste dicte ligne est appellee irrationele.

8. Le quarré descrit sur vne ligne rationele, est appellé rationel.

Tout ainsi que ceste ligne là, laquelle est cognuë & determinee de certaine quantité est dite rationele ; ainsi aussi le quarré descrit sur icelle ligne, est appellé rationel, pour ce qu'iceluy est certain & cognu : & les superficies comparees à iceluy quarre, sont aussi dictes rationeles, ou bien irrationeles, selon quelles seront trouuees commensurables à iceluy quarré rationel, ainsi qu'il est dit és deux definitions suiuantes.

9. Les figures commensurables au quarré rationel, sont aussi rationeles.

10. Et celles qui sont incommensurables au quarré rationel, sont irrationeles & sourdes.

11. Et les lignes qui peuuent icelles figures irrationeles, sont irrationeles & sourdes.

Or vne ligne est dicte pouuoir vne figure quand le quarré descrit sur icelle est egal à icelle figure, d'autant que tout quarré est la puissance de sa racine où de son costé. Ainsi il a esté dit cy-dessus que deux lignes sont commensurables en puissance, lors que non pas les lignes, mais les quarrez d'icelles lignes, peuuent estre mesurez par vne mesme superficie.

Or a ces definitions nous adiouterons (apres Clauius) vne demande, & quelques communes sentences, dont l'vsage sera trouué en ce liure.

DEMANDE.

Qu'on puisse multiplier quelconque grandeur tant de fois qu'elle excede quelconque grandeur de mesme genre.

COMMVNES SENTENCES.

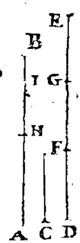
1. Vne grandeur mesurant tant de grandeurs qu'on voudra, mesure aussi la composee d'icelles.

2. Vne grandeur mesurant quelconque grandeur, mesure pareillemẽt toute grandeur que celle-là mesure.

3. Vne grandeur qui mesure toute vne grandeur, & vne ostee, mesure aussi le reste.

THEOR. 1. PROP. I.

Estans proposees deux grandeurs inegales, si on retranche de la plus grande plus de la moitié, & encores du residu plus de la moitié, & en continuãt tousiours ainsi : Il demeurera à la fin vne grandeur plus petite que la plus petite des deux proposees.



Soient proposees deux grandeurs inegales AB & C, estant C la plus petite : Ie dis que si on retranche plus de la moitié de AB, & du residu encores plus de la moitié, & en continuant tousiours ainsi, on trouuera à la fin vn residu plus petit que C.

Qu'il ne soit ainsi. Soit la grandeur C multipliee tant de fois qu'elle excede la plus grande AB, & soit la produite d'icelle multiplication DE, laquelle sera multiplice de C, & plus grande que AB : qu'elle soit donc diuisee en parties egales à C, comme en DF, FG, & GE : Item soit osté de AB plus de la moitié, sçauoir AH, & du residu HB plus de la moictié, sçauoir HI, & en continuant tousiours cecy iusques à ce que AB soit diuisee en autant de parties que DE, sçauoir en AH, HI, & IB, comme DE est diuisee en DF, FG, & GE. Pour autant que DE est plus grande que AB, & que le retranché DF n'est plus grãd que la moitié de DE ; comme le retranché AH est plus grand que la moitié de AB, le reste FE sera plus grand que le reste HB : semblablement si du plus grand residu FE, on oste FG, qui n'est pas plus que la moitié, & du plus petit residu HB on oste plus de la moitié HI ; le reste IB sera plus petit que le reste GE egal à C ; & par consequent IB derniere partie de

AB, ſera plus petit que C: ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 2. PROP. II.

Si de deux grandeurs inegales propoſees, on retranche touſiours alternatiuement la plus petite de la plus grande, ſans que le reſidu meſure la grandeur precedente; telles grandeurs ſont incommenſurables

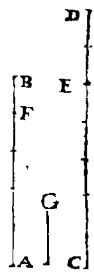
Soient propoſees deux grandeurs inegales AB& CD: ſi on retranche continuellement & alternatiuement la plus petite de la plus grande, & que le reſidu ne meſure iamais ſa grandeur precedẽte, c'eſt à dire que le plus petit reſidu ne meſure iamais le plus grand reſidu; Ie dis que AB & CD ſont incommenſurables.

Autrement il faudra qu'elles ſoient commenſurables: Partant auſſi qu'elles ayent vne commune meſure, ſoit donc icelle E, s'il eſt poſſible. Maintenant, de la plus grande CD ſoit retranchee CF egale à AB, Et s'il ſe peut faire, ſoit continué ce retranchement iuſques à ce que le reſte DF ſoit plus petit que AB. Donc E commune meſure, meſurera la toute CD & la retrãchee CF, egale à AB, ou multiplice d'icelle, par la 2. com. ſent. & elle doit auſſi meſurer le reſte DF par la 3. com. ſent. Item ſoit retranchee DF de AB tant de fois que faire ſe pourra, iuſques à ce que le reſte GB ſoit plus petit que E, qui meſure FD, & par conſequent ſa multiplice AG, par la 2. com. ſent. donc auſſi le reſte GB, par la 3. com. ſent. ce qui eſt abſurde. Partant AB & CD n'auoient point de commune meſure; partant incommenſurables; ce qu'il falloit demonſtrer.

PROBL. 1. PROP. III.

Eſtans donnees deux grandeurs commenſurables, trouuer la plus grande commune meſure d'icelles.

Soient donnees deux grandeurs commensurables AB, CD, & il faut trouuer leur plus grande commune mesure. Or AB, qui est moindre que CD, mesurera icelle, ou elle ne la mesurera point : si elle la mesure, il est euident qu'elle sera la plus grande commune mesure. Si elle ne la mesure point, soit alternatiuement retranchee la plus petite de la plus grande iusques à ce que le reste mesure le reste : (ce qui doit aduenir d'autant que les grandeurs donnees sont commensurables) donc que AB soit retranchée de CD, & que le reste ED mesure AB. Ie dis qu'icelle ED sera la plus grande commune mesure d'icelles grandeurs AB, CD.



Car puis qu'elle mesure AB, elle mesurera aussi CE son egale : & se mesurant soy-mesme, elle mesurera aussi la toute BE, par la 1. com. sent. Que si on nie qu'elle soit la plus grande commune mesure, qu'on en trouue vne autre plus grande, sçauoir G, (s'il est possible) donc par les com. sent. G mesurera AB, CD, & le retranché CE egal a AB, & par consequent le reste FG, qui est plus petit : ce qui est impossible : donc vne plus grande grandeur que ED, n'est commune mesure d'icelles AB, CD ; Partant ED estoit la plus grande commune mesure.

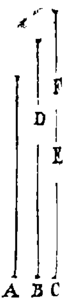
COROLLAIRE.

De cecy est manifeste que si vne grandeur mesure deux grandeurs, qu'elle mesurera aussi la plus grande commune mesure d'icelles. Car il a esté demonstré que si G mesure AB & CD, qu'elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure ED.

PROBL. 2, PROP. IIII.

Trois grandeurs commensurables estans donnees, trouuer la plus grande cõmune mesure d'icelles.

Soient donnees trois grandeurs commensurables A, B, C, desquelles il faut trouuer la plus grande commune mesure. Soit trouuee D plus grãde commune mesure entre A & B par la 3.p.10. Si D mesure aussi C, il est manifeste que D est la plus grande commune mesure de toutes les trois grandeurs A,B,C. Car si vne plus grande grandeur que D mesure les grandeurs A, B, C, par le coroll. de la precedente prop. elle mesurera aussi la plus grãde commune mesure d'icelles A & B, c'est à dire D, qui est moindre grandeur, ce qui est impossible. Que si D ne mesure pas C, au moins D, C, seront commensurables: car veu que A, B, C sont cõmensurables, quelque mesure commune d'icelles, mesurera D plus grande mesure d'icelles A, B, par le corol. de la 3.p.10. mais ceste mesme mesure la mesurera aussi C: donc D & C, seront commensurables. Soit donc trouuee par la 3.p.10 E plus grande commune mesure d'icelles D, C: & icelle E sera la plus grande mesure des grandeurs donnees A, B, C. Car d'autant que E mesure D & C; & D mesure A & B, par la 2.com. sent. E mesurera aussi icelles A & B. Mais elle mesure aussi C: donc E est mesure commune d'icelles A, B, C. Que si on nie qu'elle soit la plus grande commune mesure, qu'on en trouue vne autre plus grande, sçauoir F, s'il est possible. Donc puis que F mesure A & B, par le corol. de la 3. p. 10. elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure D. Mais elle mesure aussi C: donc F mesurant D & C, mesurera pareillement E plus grande mesure d'icelles: ce qui est absurde. Donc vne plus grande grandeur que E ne mesure pas les grandeurs A, B, C: & partant E est la plus grande commune mesure d'icelles.



COROLLAIRE.

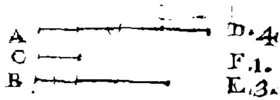
Par cecy est euident que si vne grandeur mesure trois grandeurs, qu'elle mesure aussi la plus grande commune mesure d'icelles. Car il a esté demonstré que si F mesure A,B,C, qu'elle mesurera pareillement E plus grande commune mesure d'icelles.

Par semblable maniere, estans donnees plus de trois grandeurs commensurables, nous trouuerons leur plus grande commune mesure, & ce mesme corollaire aura lieu.

THEOR. 3. PROP. V.

Grandeurs commensurables, sont entr'elles comme nombre à nombre.

Soient deux grandeurs commensurables A & B. Ie dis qu'elles sont entr'elles comme nombre à nombre.

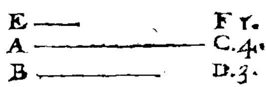


Car puis qu'elles sont commẽsurables, elles auront vne commune mesure, soit icelle C: donc C mesurera A selon quelque nombre, comme selon D: il mesurera aussi B selon quelque autre nombre, comme selon E: ainsi puis que C est autant de fois en A, comme l'vnité F est en D, & C en B, comme F en E. A, C, B, seront l'vne à l'autre comme D, F, E, & en raison egale A sera à B, comme le nõbre D est au nombre E, par la 22. p. 5. ce qu'il falloit demonstrer.

THEO. 4. PROP. VI.

Si deux grandeurs sont l'vne à l'autre comme nombre à nombre, elles seront commensurables.

Soient deux grandeurs A & B, qui soient l'vne à l'autre comme le nombre C est au nombre D: Ie dis qu'elles seront commensurables.



Car soit diuisee A en autant de parties egales qu'il y a d'vnitez au nombre C, & l'vne d'icelles parties soit egale à E: donc E est à A, ainsi que l'vnité est au nombre C. Mais par l'hypothese A est à B, comme le nombre C est au nombre D. dõc en raison egale, E sera à B, comme l'vnité à D, par la 22 p. 5. Mais l'vnité mesure D; donc aussi E mesure B: mais E mesure pareillement A. Donc E est commune mesure de A & B; & partant par la deff. de ce liure A & B sont commensurables, ce qu'il falloit demonstrer.

COROLAIRE.

Par cecy est euident qu'estant proposez deux nombres comme C & D, & vne ligne droicte comme A qu'il sera aisé de trouuer vne au-

tre ligne droicte, à laquelle soit A comme le nombre C est au nombre D: Car diuisant A en autant de parties egales qu'il y a d'vnitez au nombre C; & on prend vne ligne droicte B, contenant autant d'icelles parties qu'il y a d'vnitez au nombre D: alors A sera à B, comme le nombre C au nombre D, ainsi qu'il est manifeste parce qui a esté demonstré.

De cecy appert derechef, par quelle maniere on peut (estans donnez deux nombres, & vne ligne droicte,) trouuer vne autre ligne droicte, le quarré de laquelle soit au quarré de la dõnee comme nombre à nombre. Car s'il faut trouuer vne ligne droicte, au quarré de laquelle soit le quarré de la ligne A, comme le nombre C est au nombre D; Il faudra trouuer ainsi que dessus la ligne B, à laquelle soit A comme le nombre C est au nombre D, puis soit trouuee par la 13. p. 6. la moyenne prop. entre icelles A & B: & le quarré de A sera au quarré d'icelle moyenne prop. comme le nombre C au nombre D. Car le quarré de A sera (par le corol. de la 20. p, 6.) au quarré de la dite moyenne prop. comme A à B; & partant comme le nombre C au nombre D.

THEOR. 5. PROP. VII.

Grandeurs incommensurables, ne sont entre elles comme nombre à nombre.

Ceste demonstration est aisee. Car si les grandeurs données estoient entr'elles comme nombre à nombre, elles seroient commensurables par la 6. p. 10, ce qui est contre l'hypothese.

THEOR. 6. PROP. VIII.

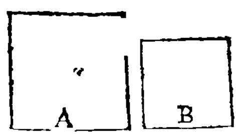
Si deux grandeurs ne sont entr'elles comme nombre à nombre, elles seront incommensurables.

Ceste demonstration est aussi facile. Car si les grandeurs données estoiét commensurables, il faudroit qu'elles fussent comme nombre à nombre par la 5. p. 10. ce qui est contre nostre hypothese.

THEOR. 7. PROP. IX.

Les quarrez descrits sur lignes commensurables en longitude, sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré : Et les quarrez qui sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ont les costez commensurables en longitude. Mais les quarrez descrits sur lignes incommensurables en longitude, ne sont entre eux comme nombre quarré à nombre quarré : Et les quarrez n'estans entre eux comme nombre quarré à nombre quarré, ont les costez incommensurables en longitude.

Soient les lignes A & B commensurables en longitude : Ie dis que leurs quarrez sont entr'eux cõme nombre quarré à nõbre quarré.



C. 4. D. 3.
E. 16. F. 9.

Car puis que les lignes A & B sont commens. en longitude, elles seront entr'elles comme nombre à nombre, par la 5. p. 10. Soit donc A à B, comme le nombre C au nombre D, & les quarrez d'iceux C & D soient E & F. Or les quarrez de A & B sont en raison doublee de leurs costez, par la 20. p. 6. Itẽ les nombres quarrez E & F sont aussi en raison doublee de leurs costez, par la 11. p. 8. Donc le quarré de A est au quarré de B, comme le nombre quarré E est au nombre quarré F: C'est à sçauoir en raison doublee des costez A & B, ou des nombres C & D, qui sont en la mesme raison que les lignes A & B.

Pour la seconde partie. Soit le quarré de A au quarré de B, comme le nombre quarré E au nombre quarré F : Ie dis que les lignes A & B seront commens. en longitude. Car par la 20. p. 6. & 11. p. 8. la raison des quarrez aux quarrez, est la raison doublee de leurs costez, & partant cõme le costé A au costé B, ainsi le nombre C au nombre D, puis que leurs raisons doublees sont egales. Donc par la 6. p. 10. A & B sont commensurables en longitude.

Pour la 3. partie soient les lignes droictes A & B incommensurables en longitude. Ie dis que leurs quarrez ne sont entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré. Car si les quarrez de A & B estoient ainsi que nombre quarré à nombre quarré, icelles A & B seroient commensurables en longitude contre l'hypothese.

Finablement les quarrez de A & B n'estans entr'eux côme nombre quarré à nombre quarré. Ie dis qu'elles sont incommensurables en longitude. Car autrement leurs quarrez seroient (par la premiere partie) comme nombre quarré à nôbre quarré, contre l'hypothese.

COROLAIRE.

Il est manifeste par les choses cy dessus demonstrees, que les lignes commensurables en longitude, le sont aussi en puissance : mais que celles qui sont commensurables en puissance, ne le sont pas tousiours en longitude. Que les incommensurables en longitude, ne le sont pas pourtant en puissance : & que celles incommens. en puissance, le sont aussi en longitude.

Car d'autant que les quarrez d'icelles lignes commens. en longitude sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, c'est à dire simplement comme nombre à nombre : iceux quarrez seront commensurables par la 6. p. 10. & partant les lignes commensurables en longit. le sont aussi en puissance.

Puis apres veu que les lignes dont les quarrez ne sont entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré, mais seulement comme nombre à nombre, sont commens. en puissance (car leurs quarrez sont commens. par la 6. p. 10.) & non en longit. comme il a esté demonstré : il appert que les lignes commens. en puissance, ne le sont pas pourtant en longit. sinon que les quarrez d'icelles lignes soient entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré.

Derechef puis que les lignes desquelles les quarrez ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, mais toutesfois comme nombre à nombre sont incommensurables en long. & commensurables en puissance : il appert que les lignes incommens. en longit. ne le sont pas tousiours en puissance : ains qu'il n'y a que celles dont les quarrez ne sont entr'eux comme nombre à nombre, qui soient aussi incommens. en puissance, veu que leurs quarrez sont incommens. par la 8. p. 10.

Finalement est manifeste que les lignes incommens. en puissance, le sont aussi en longitude : car si elles estoient commens. en long. elles le seroient aussi en puissance, comme appert par la premiere partie de ce corol. ce qui est contre l'hypothese.

SCHOLIE.

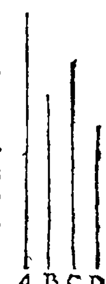
Il est à noter qu'ès deux premieres parties de ceste proposition s'entend aussi des lignes inexplicables par nombres, pourveu qu'elles soient commensurables en longitude; comme si les quarrez de A & B estoient 12 & 3. Leurs costez seroient $\sqrt{12}$. & $\sqrt{3}$. qui sont inexplicables par nombres, toutefois commens. Car par la 20. p.6. 12. seroit à 3. en raison double de $\sqrt{12}$. à $\sqrt{3}$. Mais 12. est quadruple de 3. Ainsi le costé A sera double du costé B, par la 10. d.5. Car la double raison doublee est quadruple.

THEO. 8. PROP. X.

Si quatre grandeurs sont proportionneles, & la premiere est commensurable à la secōde, la troisiesme sera aussi commensurable à la quatriesme. Que si la premiere est incommēsurable à la seconde, la troisiesme sera aussi incommensurable à la quatriesme.

Soient quatre grandeurs proport. A, B, C, D: & A est commensurable à B, Ie dis que C sera aussi commens. à D.

Car si A est commensurable à B, ils seront entr'eux comme nombre à nombre, par la 5. p. 10: Mais comme A à B, ainsi C à D; Partāt C est à D, comme nombre à nombre; & par consequent cōmens. par la 6 p.10. Que si A estoit incommens. à B: Ie dis que C seroit aussi incommensurable à D: Car A & B ne seroient pas comme nombre à nōbre par la 7.p.10. Mais comme A à B, ainsi C à D: donc C n'est pas à D comme nombre à nombre, & par consequent incommens. par la 8.p.10.



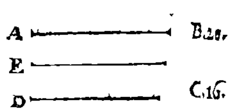
L'EMME.

Trouver deux nombres plans dissemblables, c'est à dire, qui ne soient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré.

Soit pris qu lconque nombre quarré A, & vn autre B non quarré. Ie dis qu'iceux nombres A & B sont plans dissemblables. Car s'ils estoient plans semblables, ils seroient comme nombre quarré à nombre quarré, par la 26.p.8. & partant A estant nombre quarré, aussi B seroit quarré par la 24 p.8. contre l'hypothese. Donc A, B, ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré. A.16. B.20

PROB. 3. PROP. XI.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables à vne ligne rationele proposée, sçauoir vne en longitude seulement, & l'autre en longitude & puissance.



Soit la ligne rationelle proposée A, à laquelle il faut trouuer deux autres lignes incommensurables, l'vne seulement en longitude, & l'autre en longitude & puissance.

Soient trouuez par le lemme precedent deux nombres B, & C, qui ne soient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré : Item par le coroll. de la 6. p. 10. soit trouuee la ligne D, de laquelle le quarré soit au quarré de la ligne A, comme le nombre C est au nombre B. Or d'autant qu'iceux quarrez de A & D sont comme nombre à nombre, ils seront commens. entr'eux par la 6. p. 10. Mais n'estans pas comme nombre quarré à nombre quarré, ils n'auront pas les costez A & D commens. en longitude, par la 9. p. 10. Donc les lignes droictes A & D sont commensurab en puissance seulement : la ligne D est donc la premiere requise.

Maintenant soit trouuee la ligne E moyenne prop. entre A & D, par la 13. p. 6. & icelle E sera la seconde ligne demandee : car puis que par le corol. de la 20. p. 6. le quarré de A est au quarré de E comme A à D, & icelles A & D sont incommens. en longitude, comme il a esté demonstré : le quarré de A sera aussi incommensurable au quarré de E, par la 10. p. 10. parquoy les lignes A & E sont incommens. en puissance, & par le corol. de la 9. p. 10. elles sont aussi incommens. en longitude.

SCHOLIE.

SCHOLIE.

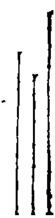
Soit A 5. donc la ligne D sera $\sqrt{20}$, laquelle il appert estre incommens. en longitude à A, mais commens. en puissance. Mais E estant moyenne prop. entre A 5, & D $\sqrt{20}$: sera $\sqrt{\sqrt{500}}$, qui est incommen. tant en longit. que puissance à A 5.

Dounot ayant delaissé le lemme precedent, se sert neantmoins d'iceluy en la construction cy dessus.

THEOR. 9. PROP. XII.

Les grandeurs commeusurables à vne autre sont aussi commensurables entr'elles.

Soient les deux grandeurs A & B, commens. chacune à la grandeur C. Ie dis qu'elles sont commensurables entr'elles.



A C B

D, 10. E, 8.
F, 2. G, 3.
H, 5. I, 4. K, 6.

Car puisque A & C sont commens. icelles seront comme nombre à nombre par la 5.p.10. & soit comme le nombre D au nombre E. Derechef puis que C & B sont commens. C sera à B, comme nombre à nombre, & soit comme le nõbre F au nombre G. Soient pris par la 4.p.8 les trois nombres H, I, K, les plus petits continuellement proportionnaux, selon les raisons de D à E, & F à G : tellement que H soit à I comme D à E, c'est à dire comme A à C, & I à K comme F à G, c'est à dire comme C à B. Donc puis que A est à C, comme H à I ; & C à B, comme I à K, par raison egale A sera à B, comme H à K, c'est à dire comme nombre à nombre: & partant A & B sont commens. par la 6.p.10. ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 10. PROP. XIII.

Si de deux grandeurs l'vne est commensurable à vne troisiéme, mais l'autre incommenſ. icelles grandeurs ſeront incommenſ. entr'elles.

Soient deux grandeurs A & B, (en la precedente figure) deſquelles A ſoit commenſ. à C; & B incommenſ. à la meſme C. Ie dis que A & B ſont incommenſ. entr'elles. Car ſi B eſtoit cõmenſ. à A, lequel A eſt poſé auſſi commenſ. à C, par la 12. p. 10. B & C ſeroient commenſ. contre l'hypotheſe. Donc A & B ne ſont commenſ. ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 11. PROP. XIV.

Si de deux grandeurs commenſ. l'vne eſt incommenſ. à vne tierce; auſſi ſera l'autre à la meſme.

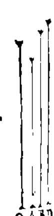
Soient deux grandeurs commenſ. A & B, & que A ſoit incommenſ. à la tierce C : Ie dis que B & C ſõt auſſi incommenſurables.

Autrement, ſi B eſt commenſ. à C, il ſera auſſi commenſ à A, par la 12. p. 10 contre noſtre hypotheſe : donc B eſt incommenſ. à C : ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Les Interpretes d'Euclide colligent de ceſte prop. le theoreme ſuiuãt, vtile aux choſes demonſtrees en ce liure.

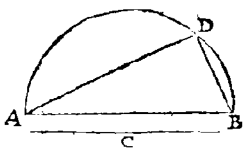
Les grandeurs commenſurables à des incommenſurables, ſont auſſi incommenſ. entr'elles.



Soient deux grandeurs A & B incommenſurables, auſquelles C & D ſoient commenſ. ſçauoir eſt C à A, & D à B. Ie dis que C & D ſont incommenſ. entr'elles. Car puis que A & C ſont poſeés commenſ. & A incommenſ. à B, l'autre C ſera auſſi incom. à A par la 14. p. 10. Derechef puis que D & B ſont poſees commenſ. & B a eſté demonſtree incommenſ. à C; D ſera auſſi incommenſ. à la meſme C par la 14 p. 10. ce qui eſtoit proposé.

LEMME.

Estans donnees deux lignes droictes inegales, trouuer cõbien la plus grande peut plus que la plus petite.



Soient donnees les deux lignes droictes inegales AB & C, desquelles AB est la plus grande : & il faut trouuer combien la ligne AB peut plus que la ligne C. Soit descrit sur AB le demy cercle ADB, & dans iceluy soit accõmodee AD egale à C, par la 1.p. 4. & soit menee DB. Ie dis que AB peut plus que C du quarré de BD. Car d'autant que l'angle D est au demy cercle, il est droict par la 31.p.3. & par la 47.p.1. le quarré de AB sera egal aux quarrez de AD, DB ; & partant AB pourra plus que AD, c'est à dire que C, du quarré de BD.

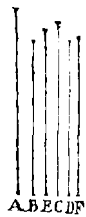
Semblablement estans donnees deux lignes droictes, en trouuer vne autre pouuant icelles.

Soient donnees les deux lignes droictes AD, BD: & il faut trouuer vne ligne droicte qui puisse icelles. Soient posees icelles AD, BD à angle droict D, & tiré AB. Il est euident qu'icelle AB peut AD & BD, puis que par la 47.p.1. le quarré d'icelle AB, est egal aux quarrez de AD, BD.

THEOR. 12. PROP. XV.

Si quatre lignes sont proportionnelles, & la premiere peut plus que la seconde du quarré d'vne ligne qui luy est cõmensurable en longitude: aussi la troisiesme poura plus que la quatriesme du quarré d'vne ligne qui luy sera commensurable en longitude. Que si la premiere peut plus que la seconde du quarré d'vne ligne qui luy soit incommensurable en longitude: aussi la troisiesme pourra plus que la quatriesme du quarré d'vne ligne qui luy sera incommensurable en longitude.

Soient 4. lignes proport. A, B, C, D, & que A puisse plus que B du quarré de E, & C plus que D du quarré de F. Ie dis que cõme A sera commens. ou incommens. à E, ainsi C sera commensurable, ou incommensurable à F.



Car puis que A, B, C, D, sont proportionneles, comme le quarré de A sera au quarré de B, ainsi le quarré de C sera au quarré de D, par la 22. p. 6. Mais le quarré de A est egal aux quarrez de B, E, par l'hypothese, & le quarré de C aux quarrez de D, F: donc aussi les quarrez de B, E, serōt au quarré de B, comme les quarrez de D, F, au quarré de D: & en diuisant comme le quarré de E sera au quarré de B, ainsi le quarré de F au quarré de D; & par la 22. p. 6. comme la ligne E sera à la ligne B, ainsi la ligne F à la ligne D; & en changeāt comme B à E, ainsi D à F. Donc puis que comme A à B, ainsi C à D, & comme B à E ainsi D à F, par raison egale comme A sera à E, ainsi C à F: Et par la 10. p. 10. si A est commens. ou incommens. à E, aussi C sera commens. ou incommens. à F: ce qu'il falloit demonstrer.

THEO. 13. PROP. XVI.

Si deux grandeurs commens. sont iointes, la composee sera commens. à chacune de ses parties: Et si la composee est commensurable à vne de ses parties, icelles seront commens. entr'elles.

Soient iointes deux grãdeurs commens. AB & BC: Ie dis que la composee AC, est commensurable à AB, & à BC parties d'icelle.

Car puis que AB & BC sont commensurables, elles auront vne commune mesure, laquelle mesurant AB & BC, mesurera aussi la toute AC, par la 1. com. sent. Partant la toute AC est commens. à ses parties.

Pour la seconde partie. Si la toute AC est commens. à vne de ses parties, icelles seront commensurables entr'elles. Car si AC & AB, sont commens. elles auront vne commune mesure, laquelle mesurant le tout & le retranché, mesurera aussi le reste par la 3. comm. sent. Partant le retranché & le reste seront commens. d'autant qu'ils ont vne commune mesure.

COROLLAIRE.

De cecy resulte que si vne grandeur composee de deux, est commensurable à l'vne d'icelles, qu'elle le sera aussi à l'autre. Comme si AC est commensurable à AB, elle le sera aussi à BC. Car par la seconde partie de ceste prop. AB, BC sont commens. donc par la premiere partie AC sera commens. a chasques parties AB, BC.

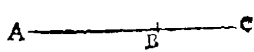
SCHOLIE.

Soit AB $\sqrt{18}$. & BC $\sqrt{8}$, lesquelles sont commens. La composee AC sera $\sqrt{50}$. laquelle est commens. tant à $\sqrt{18}$. que à $\sqrt{8}$. Car $\sqrt{50}$ est à $\sqrt{18}$. comme 5 à 3, & à $\sqrt{8}$, comme 5 à 2.

THEOR. 14. PROP. XVII.

Si on conioinct deux grandeurs incommensurables, la composee sera incommens. à chacune de ses parties: Et si la composee est incommens. à l'vne de ses parties, Icelles parties seront incommens. entr'elles.

Soient conioinctes deux grandeurs incommens. AB & BC: Ie dis que la toute AC est incommens. à vne chacune de ses parties.



Autrement, si AC estoit commens. à AB, elle le seroit aussi à BC, car la commune mesure qui mesureroit AC & le retranché AB, mesureroit aussi le reste BC, par la 3. com. sent Et partant AB & BC seroient commens. (ce qui est contre l'hypotese.) Donc AC & AB sont incommens. Il s'ensuiura le mesme inconuenient si on nie que AC & BC soient incommensurables.

Pour la seconde partie: Ie dis que si AC & BC, sont incommens. que AB & BC seront aussi incommens. Autrement si elles estoient commensurables. La toute AC seroit aussi commensurables à sa partie BC par la 16.p.10. contre nostre hypotese. Donc AB & BC sont incommens. Par mesme argument nous demonstrerons que si AC & AB sont incommens. que AB & BC sont aussi incommens.

COROLAIRE.

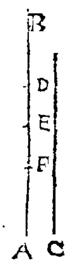
Il resulte de ces choses que si vne grandeur composee de deux, est incommensurable à l'vne d'icelles, qu'elle le sera aussi à l'autre. Comme si AC composee de AB & BC est incommens. à AB, elle le sera aussi à BC Car si AC estoit commens. à icelle BC, elle le seroit aussi à AB par le corol. de la preced. prop. ce qui est contre l'hypotese. Donc AC & BC ne sont commens. mais incommensurables.

SCHOLIE.

Soit AB 8, & BC $\sqrt{28}$. lesquelles sont incommensurables. La composee AC sera 8 + $\sqrt{28}$. incommensurable à chacune d'icelles AB 8, BC $\sqrt{28}$.

THEOR. 15 PROP. XVIII.

S'il y a deux lignes droictes inegales, & sur la plus grande on aplique vn rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, deffaillât d'vne figure quarrée, & que le rectâgle diuise icelle plus grande ligne en parties commens. en longitude; la plus grâde ligne pourra plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy sera commens. en longitude: Et si la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy soit commens. en longitude, estât apliqué vn rectangle sur la plus grande ligne, egal au quart du quarré de la plus petite, & defaillant d'vne figure quarree ; le rectangle diuiſera icelle plus grande ligne en parties commenſ. en longitude.



Soient deux lignes inegales AB & C, & par la 28. p. 6. ſur la plus grande A B ſoit appliqué vn rectangle egal au quart du quarré de C, defaillant d'vne figure quarree (c'eſt à dire d'vne ligne egale à ſon autre coſté.) Et ſoit iceluy rectangle contenu de AD & DB. Ie dis que ſi AD & DB ſont commenſ. en longitude, que AB pourra plus que C du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſ. en longitude.

Qu'il ne ſoit ainſi. Soit la ligne AB couppee en deux egalement en E, & ſoit faicte EF egale à ED. Il eſt euident que AF ſera egale à DB, puis que les toutes AE, EB ſont egales, & auſſi les retranchees EF, ED. Maintenãt, puis que AB eſt couppee en deux egalement en E, & en deux inegalement en D, par la 5. p. 2. le rectangle de AD & DB auec le quarré de ED, ſeront egaux au quarré de BE, lequel n'eſtant par l'hypotheſe que le quart du quarré de AB, quatre fois le rectãgle de AD & DB, & quatre fois le quarré de ED, ſont egaux au quarré de AB. Mais quatre fois le rectangle de AD & DB valent le quarre de C, d'autant que par l'hypotheſe le rectangle de AD, & DB eſt le quart du quarré de C. Donc le quarré de AB eſt plus grand que le quarré de C, de quatre fois le quarré de ED, ou du ſeul FD egal à iceux, par le ſcholie de la 4. p. 2. puiſque FD eſt double de ED. Il faut donc demonſtrer que AB & FD ſont commenſurables en longitude: D'autant que AD & DB ſont poſees commenſ. en longitude, la toute AB ſera auſſi cõmenſ. en longitude à ſa partie DB par la 16. p. 10. Et partant a ſon egale AF, & à toutes les deux ioinctes en vne: Et par conſequent au reſte de la ligne FD par la meſme 16. p. 10. Donc la ligne droicte AB peut plus que C, du quarré de FD qui luy eſt commenſurable en longitude.

Pour la ſeconde partie, ſans rien changer à la conſtruction: ſi AB peut plus que C du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſ. en longitude. Ie dis que AD & DB ſeront auſſi commenſ. en longitude. Car il ſera demonſtré ainſi que deſſus que AB peut plus que C du quarré de FD. Mais AB a eſté poſee pouuoir plus que C du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longitude: & partant AB ſera commenſ. en longitude à icelle FD. Et puis que AB compoſee de FD, de AF, DB comme d'vne, eſt commenſurable en lõgitude à la partie FD; la meſme AB ſera auſſi commenſ. en longitude à l'autre partie compoſee de AF, DB par le coroll. de la 16. p. 10. Mais icelle compoſee de AF, DB, eſt auſſi commenſ. en longit. à DB, puis qu'elle eſt double d'icelle: donc puis que chacune d'icelles AB, DB eſt commenſ. en longit. à la compoſee de AF, DB; auſſi AB, DB ſeront commenſ. entr'elles en longitude par la 12. p. 10. & partant veu que la toute AB cõpoſee de AD, DB eſt commenſ. en longit. à icelle DB; auſſi icelles AD, DB ſeront commenſ. en longit. entr'elles par la 16. p. 10. ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Soit AB 30, & C 24. donc les ſegmens AD, & DB, ſeront 24 & 6, deſquels le produict, c'eſt à dire le rectangle eſt 144, qui eſt égal au quart de 576, quarré de C 24, & deffaillant du quarré de DB 6, c'eſt à dire 36: & ſont icelles parties AD 24, DB 6, commenſ. en lõgitude: car l'vne eſt quadruple de l'autre. Ainſi FD, qui peut dans C le quarré de AB, ſera 18: car le quarre de AB eſt 900, & celuy de C 576; & partant reſte pour le quarré de FD 324, dont la racine quarree eſt 18, commenſ. en longitude à AB. L'autre partie ſera auſſi euidente par l'addaption des nombres cy deſſus.

La propoſition ſuiuante ſera auſſi facilement entenduë, ſi on poſe AB 12, & C √96: car les ſegmens AD, DB, ſeront 6 + √12. & 6 — √12; & FD √48, qui eſt à 12 incommenſ. en longit. &c.

THEOR. 16. PROP. XIX.

S'il y a deux lignes droictes inegales, & ſur la plus grande on applique vn rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, & defaillant d'vne figure quarree, & que le rectangle diuiſe icelle plus grande ligne en parties incõmenſ. en longitude; la plus grãde ligne pourra plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy sera incommens. en lõgitude. Que si la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy soit incommens. en longitude, estant appliqué vn rectangle sur la plus grande ligne, egal au quart du quarré de la plus petite, & defaillant d'vne figure quarree; le rectangle diuisera la plus grande ligne en parties incommens. en longitude.

Soient deux lignes inegales AB & C, & sur la plus grande AB soit appliqué (par la 28. p 6.) vn rectangle egal au quart du quarre de C, defaillant d'vne figure quarree: & soit iceluy rectangle contenu sous AD, DB incommensurables en longitude. Ie dis que AB peut plus que C du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude. Car ayãt construit comme en la precedente prop. nous demonstrerõs semblablement que AB peut plus que AC du quarré de FD. Il faut donc demonstrer que AB & FD sont incommens. en longit. D'autant que les lignes AD, DB sont posees incommens. en longit. la toute AB sera aussi incommens. en long. à la partie DB par la 17. p. 10. Mais DB est commensurab. en longitude à la composee de AF, DB, veu que ceste-cy est double de celle là: donc puis que de ces deux lignes commens. icelle DB est incommens. en longitude à AB; la composee de AF, DB sera aussi incommens. en long. à la mesme AB par la 14. p. 10. Et pour autant que AB composee de AF, DB comme vne, & de FD, est incommens. en long. à la composee de AF, DB; la mesme AB sera aussi incommens. en long. à FD, par le corol. de la 17. p. 10. Donc AB peut plus que C du quarre de FD, qui luy est incommens. en longitude.

Maintenant si AB peut plus que C du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude, & sur icelle AB est appliqué vn rectangle egal au quart du quarré de C, & defaillãt d'vne figure quarree, lequel rectangle diuise AB es parties AD, DB. Ie dis qu'icelles AD, DB sont incommens. en long.

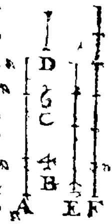
Car nous demonstrerons comme deuant (les mesmes choses estans construictes) que AB peut plus que C du quarré de FD, & qu'icelles AB & FD sont incommens. en longitude: & puis que AB est composee de FD & de AF, DB ioinctes en vne. icelle AB sera aussi incommens. en longitude à la composee de AF, DB par le corol. de la 17. p. de ce liure. Mais la composee de AF, DB est commens. en long. à icelle DB, puis que celle là est double de ceste-cy Donc puis que AB est incommens. en longit. à la composee de AF, DB, icelle AB sera aussi incommens. en longit. a DB, par la 14. p. 10. Et partant puis que AB composee de AD, DB est incommens. en long. à DB, icelles AD, DB seront aussi incommensurables en longitude entr'elles par la 17. p. 10. ce qu'il falloit demonstrer.

LEMME.

Puis qu'il a esté demonstré que les lignes commens. en longitude, le sont aussi en puissance, mais que celles commens. en puissance ne le sont pas tousiours en longitude: il est manifeste que s'il y a quelque ligne commens. en longitude à vne proposee rationele: elle doit estre appellee rationele & commensurable à icelle, non seulement en longitude, mais aussi en puissance: car les lignes commens. en long. le sont tousiours aussi en puissance. S'il y a aussi quelque ligne droicte commens. en puissance & longitude à l'exposee rationele, elle sera aussi dite rationele commens. en longitude & puissance. Que si derechef il y a quelque ligne commens. en puissance à icelle, mais incommens. en longitude, elle sera aussi dicte rationele commens. à icelle en puissance seulement.

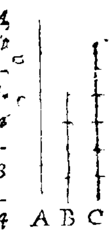
SCHOLIE.

Il appert par ce que dessus, qu'il y à de trois sortes de lignes rationeles commens. entr'elles en longitude. Car de deux lignes rationeles commens. entr'elles en longitude, ou l'vne est egale à l'exposee rationele; & partant l'vne & l'autre commens. en longitude à la rationele: ou l'vne ny l'autre n'est egale à l'exposee rationele, & toutesfois commens. en longitude à icelle: ou finablement l'vne & l'autre est commens. à l'exposee rationele en puissance seulement. Or nous trouuerons ces trois genres de lignes rationeles en ceste maniere. Soit vne rationele proposee A diuisee en quatre parties egales; c'est à sçauoir en autant qu'il y a d'unitez au nombre B: puis apres estât pris quelque autre nombre C, la ligne D soit vne partie de A ; & autant de fois que D mesure A, autant de fois elle mesure quelque ligne E. Item autant de fois que l'vnité est en C, qu'autant de fois la mesme D mesure quelque autre ligne F. Donc puis que A & E sont composees de parties egales en nombre, qui sont egales à D ; elles seront egales. Derechef puis que D mesure toutes les trois lignes A, E, F ; elles seront commens. en longitude, parquoy E & F sont rationeles commens. en longitude à la rationele A: mais elles ont esté demonstrees estre aussi commens. entr'elles en longitude. Nous auons donc trouué deux rationeles E & F commens. en longitude, tant entr'elles qu'à la rationele exposee A, & desquelles vne, sçauoir est E, est egale à A.

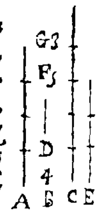


Or maintenant que D mesure deux lignes C & E par deux nombres F & G differens de B, tellement que l'vne & l'autre ligne C & E soit inegale à A. Donc comme dessus les trois lignes A, C, E, ayans D pour mesure commune, seront commens. en longitude; parquoy C & E sont rationeles commens. en longitude à la rationele A: mais elles le sont aussi entr'elles. Nous auõs donc trouué deux rationeles C & E commens. en longitude, tant entr'elles qu'à la rationelle proposee A, l'vne ny l'autre desquelles n'est egale à icelle A.

Finablement par la 11. p. 10. à l'exposee rationele A soit trouuee la ligne B, incommens. en longitude seulemẽt laquelle soit couppee en tant de parties egales qu'on voudra, & soit prise C, composee de quelconque nombre d'icelles parties de B : & icelles B & C seront commens. en longitude. Ie dis qu'elles sont aussi commens. en puissance seulement à l'exposee rationele A. Car puis que A & B sont commens. en puissance ; le quarré de A sera commens. au quarré de B: Mais au mesme quarré de B, est aussi commens. le quarré de C, pource que B, C estans commens. en longitude, elles le sont aussi en puissance. Donc par la 12. p. 10. les quarrez de A & C, sont pareillement commens. entr'eux. Parquoy C est commens. en puissance à icelle A. Et pource que des deux lignes B & C commens. en longitude, B est incommens. en longitude à A; par la 14. p. 10. C sera aussi incommens. en longitude à la mesme A. Donc C est commens. à A seulement en puissance. Et pource que B & C, commens. en puissance à l'exposee rationele A, sont rationeles; elles seront deux rationeles commens. en longitude entr'elles, mais en



puissance seulement à l'exposee rationele A : elles sont donc les deux lignes requises à trouuer.

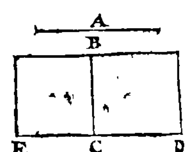


Que si quelqu'vn desire trouuer tant qu'on voudra de lignes rationeles commens. en longitude entr'elles, cela se fera ainsi: Soit pris quelconque mesure D, & soient cõposées autant qu'on voudra de lignes A,C,E, d'autant de parties egales à icelle D, qu'il y à d'vnitez en autant de nombres inegaux B, F, G, car les lignes A,C,E ayant la commune mesure D, seront commens. en longitude.

Or il est aussi euident que toutes lignes rationeles, sont commens. non seulement à vne exposee raionele, mais aussi entr'elles. Car puis que par la 6. d.10. les lignes rationeles sont celles qui sont commens à l'exposee rationele, soit en longitude & puissance, ou en puissance seulement, & que par la 12.p.10. les commens. à vne mesme, sont aussi commens. entr'elles; il est manifeste que toutes lignes rationeles, sont commens. entr'elles.

THEOR. 17. PROP. XX.

Le rectangle compris de deux lignes rationeles commens. en longitude selon quelqu'vne des manieres cy deuant dites, est rationel.



Soit vne exposee rationele A, & le rectangle BD compris sous BC, CD rationeles commens. en longitude, selon quelqu'vne des manieres cy dessus dites : Ie dis qu'iceluy rectangle est rationel.

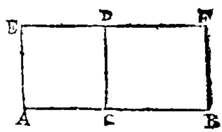
Car si sur BC on faict le quarre BE, il sera commens. au quarre de la rationele A par la 3.d.10. puis que BC est rationele commens. à la rationele exposee A, ou en longitude & puissance, ou en puissance seulement. Et puis que BC ou EC, CD sont commens. en longitude (car BC CD ont esté posees rationeles commens. en longit. entr'elles) & par la 1.p.6. comme EC est à CD, ainsi EB à BD, par la 10.p.10. EB, BD seront aussi commens tellement donc que le quarré de A, & le rectangle BD sont commens. au quarré EB ; & partant commens. entr'eux par la 12. p. 10. Mais le quarré de A est rationel par la 8.d.10. Donc par la 9. d. 10. le rectangle BD sera aussi rationel : ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soit BC 3. CD 4. doc le rectangle BD sera 12. Derechef soit BC√3, & CD√12. Le rectangle BD sera √36. c'est à dire 6. Et derechef si BC est √8 & CD √18. Le rectangle BD sera √144. c'est à dire 12. Ainsi iceluy rectangle est rationel.

THEOR. 18. PROP. XXI.

Si vn rectangle rationel a l'vn des costez rationel, il aura aussi l'autre costé rationel : & iceux seront entr'eux commens. en longitude.



Soit le rectangle rationel DB ayant le coste CD rationel : ie dis que BC sera aussi rationel commens. en longitude à CD.

Car sur DC, soit faict le quarre AD, lequel sera rationel par la 8. d. 10. Et comme le rectangle au quarré, ainsi CB à CA par la 1. p. 6. Mais le quarré & le rectangle sont rationaux, & partant commens. Donc par la 10. p. 10. CB & CA ou CD son egale, seront rationeles & commens. en longit.

SCHOLIE.

Soit le rectangle DB 6, & la ligne CD √3 : BC sera donc √12. qui est commens. en longitude à √3. Car elle est double d'icelle. Soit derechef DB 12, & la ligne droicte CD √8, l'autre costé BC sera √18, qui est commens. en longitude à CD √8. Car si on diuise √18, par √8, prouiendra √$2\frac{1}{4}$, c'est à dire √$\frac{9}{4}$ qui est $\frac{3}{2}$: & partant √18 est à √8. comme 3 à 2, c'est à dire comme nombre à nombre ; & par consequẽt commens. en longitude.

LEMME.

Trouuer deux lignes droictes rationeles commensurables en puissance seulement.

Soit trouué par la 11.p.10. quelque ligne droicte incommensurable en longitude seulement à vne ligne droicte rationele proposee, & icelles seront les requises : car puis qu'elles sont commens. en puissance seulement par la construction, elles seront aussi rationeles par la 6. d.10.

Que si à la ligne trouuee, on en trouue encore vne autre, moindre ou plus grande que la proposee rationele, il est manifeste par la 12.p. 10. que toutes les trois seront commens. entr'elles en puissance seulement, & partant rationeles.

THEOR. 19. PROP. XXII.

Le rectangle cōpris de deux lignes droites rationeles commens. en puissance seulement, est irrationel: & la ligne droite qui peut iceluy est irrationele. Soit icelle appelee Mediale.

Soit le rectangle CF, (en la figure de la prop. precedente) compris de deux lignes rationeles DC & BC commens. en puissance seulement. Ie dis que le rectangle est irrrtionel: & la ligne qui peut iceluy, pareillement irrationele, qui doit estre appellee mediale.

Car si sur la rationele CD on descrit le quarre AD, il sera rationel, & sera au rectangle CF, comme AC ou CD son egale, est à BC, par la 1.p.6. Mais AC & BC sont incommens. en longitude: donc par la 10.p.10. le quarré AD, & le rectangle CF seront incommens. Or le quarre est rationel: donc par la 10.d.10. le rectangle sera irrationel; & par la 11.d 10. la ligne qui peut iceluy sera aussi irrationele; & soit icelle ligne appellee mediale, pource que le quarré d'icelle est egal au rectangle compris sous les rationeles DC, CB commens. entr'elles en puissance seulement, & par consequent moyenne prop. entre icelles rationelles par la 17.p.6.

SCHOLIE.

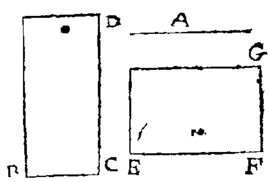
Pour donc facilement definir la ligne mediale, nous dirons icelle estre vne ligne irrationele, moyenne proportionele entre deux lignes raitoneles, entr'elles commensurables en puissance seulement. Ou bié *telle qui peut vn rectangle contenu soubs deux lignes rationeles commensurables entr'elles en puissance seulement.*

Et faut noter que le quarré d'icelle ligne mediale, ou le rectangle irrationel qu'elle peut, est aussi nommé medial, pour ce qu'il est moyẽ prop. entre les quarrez d'icelles lignes rationeles commens. entr'elles en puissance seulement, non qu'il faile pourtant entendre que tout rectangle medial soit tousiours contenu sous deux lignes droictes irrationeles commens. en puissance seulement, tel qu'est le medial CF: car il en aduient quelquefois autrement, comme se verra cy-apres.

La ligne DC soit 2, & BC √ 8. Le rectangle BD sera √ 32. qui est irrationel; & sera dict medial, mais la ligne pouuãt iceluy est √ √ 32. laquelle on appele mediale.

THEOR. 20. PROP. XXIII.

Le quarré d'vne ligne mediale appliqué sur vne ligne rationele, faict l'autre costé rationel commens. en puissance seulement à la ligne à laquelle se faict l'application.



Pour appliquer sur vne ligne rationele vn rectangle egal au quarré d'vne ligne mediale autrement & plus facilement que par la 45. p. 1. Il faut en premier lieu poser quelconque ligne rationele, en second lieu la mediale, & chercher la tierce proportionnele, laquelle sera l'autre coste du rectangle: car par la 17. p 6. le quarré de la moyenne est egal au rectangle des extremes.

Soit la mediale A, le quarre de laquelle soit applique sur la ligne rationele BC, faisant le rectangle BD: Ie dis que BC & CD, sont rationeles commens. en puissance seulement.

Car A estant mediale, elle peut vn rectangle compris de deux lignes rationeles commens. en puissance seulement, autrement elle ne seroit dicte mediale: Soit donc iceluy rectangle EG, contenu sous les rationeles EF, FG commens. en puissance seulement. Et pource que A, par l'hypotese peut aussi le rectangle BD: Iceux rectangles BD, EG seront egaux,

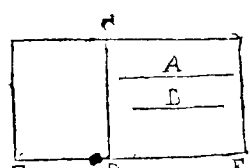
& par la 14.p.6.ils auront les costez reciproques, sçauoir que comme BC à EF, ainsi FG à CD, & par la 22.p.6.les quarrez d'icelles lignes seront proport. Mais le quarré de BC ligne rationele, est commens. au quarré de EF aussi ligne rationele: donc par la 10.p.10. le quarré de FG sera aussi commens. au quarré de CD; & partant les lignes FG, CD seront commens. aumoins en puissance, & le quarré de FG estant rationel, le quarré de CD sera aussi rationel; & par consequent les lignes CB & CD seront rationeles. Or qu'icelles BC & CD soient commens. en puissance seulement. Il est euident par ce qui a esté demonstré à la 21.p.10. Car si elles estoient commensurables en longitude, le rectangle BD seroit rationel, & nous l'auons posé medial, c'est à dire egal au quarré de la mediale A. Donc les lignes BC & CD sont incommens. en longitude.

SCHOLIE.

Soit le quarré de AB √ 40, mais BC soit 2. Si donc à BC on applique √ 40, l'autre costé CD sera √ 10. qui est incommens. en longitude à BC, mais commens. en puissance. Que si BC est √ 5: CD sera √ 8, aussi commens. en puissance seulement. Mais si la mediale A estoit √√ 35, & BC √ 5: le quarré de A seroit √ 35: & CD √ 7. commens. en puissance seulement à BC.

THEOR. 21. PROP. XXIV.

Vne ligne droicte commẽsurable à vne ligne mediale, est aussi mediale.



Soit la mediale A, à laquelle soit commensurable la ligne droicte B. Ie dis qu'icelle B est aussi mediale.

Car soit proposee la rationele CD, & sur icelle appliqué le rectangle CE egal au quarré de A: Item sur la mesme rationele CD soit appliquee le rectangle CF egal au quarré de B. D'autant que le quarré de la mediale A, est appliqué sur la rationele CD, l'autre costé DE est rationel commensurable en

puissance

puissance seulement à CD, par la 23.p.10. Mais A & B estans commensurables, leurs quarrez (ou leurs egaux rectangles CE, & CF) seront aussi commens. Mais par la 1.p.6. comme CE est à CF, ainsi la ligne droicte ED est à la ligne droicte DF: Donc par la 10.p.10.ED, DF, seront commens. en longitude. Mais la ligne ED est rationele, & incommens. en longitude à la ligne CD: donc aussi DF est rationele & commens. en longitude à la mesme CD, par la 14.p.10 & partant puis qu'icelles CD, DF sont rationeles, elles seront commensurables en puissance seulement, & par la 22. p.10. le rectangle CF compris soubs icelles CD, DF sera medial, & la ligne B qui peut iceluy rectangle, sera aussi mediale: ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

De cecy resulte que toute figure commensurable à une figure mediale, est aussi mediale: d'autant que les quarrez egaux à icelles figures seront aussi commensurables, & par consequent commens. les lignes qui les pourront, à tout le moins en puissance, & l'une d'icelle estant mediale, l'autre qui luy sera commens. sera aussi mediale par ceste proposition.

SCHOLIE.

Soit A $\sqrt{}\sqrt{}$ 200. B $\sqrt{}\sqrt{}$ 128, CD 4. Donc DE sera $\sqrt{}$ $12\frac{1}{2}$ & DF $\sqrt{}$ 8 commens entr'elles: car elles sont comme 5 à 4. & DF est commens. en puissance seulement à CD; & par consequent le rectangle CF, qui est $\sqrt{}$ 128, est medial, & la ligne B $\sqrt{}\sqrt{}$ 128, qui peut iceluy, aussi mediale.

LEMME I.

Or ce qui a esté dit des lignes rationeles au lemme de la 19.p. de ce livre, nous le dirons aussi des mediales: sçavoir est que les lignes droites commens. en long. à une mediale, est dite mediale, & com. à icelle, non seulement en long. mais aussi en puissance. Car universellement les lignes droictes commens. en longit. le sont aussi en puissance. Et s'il y a quelque ligne com. en puissance & long. à une mediale, elle sera pareillement dite mediale, & à icelle commens. en long. & puissance. Que si derechef il y a quelque ligne commens. en puiss. à une mediale, mais incom. en long. elle sera aussi dite mediale com. à icelle en puissance seulement.

Bb

LEMME 2.

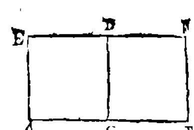
Trouuer deux lignes mediales commensurables en longitude : Item deux commensurables en puissance seulement.

Soient trouuees les deux lignes A & B commens. à la mediale C, c'est à sçauoir A en long & B en puissance seulement: & chacune d'icelles A & B seront aussi mediales par la 24 p.10. Veu donc que A & C sont commens. en long. & B, C en puissance seulement, est manifeste ce qui estoit proposé.

Or il est à noter qu'encore que toute ligne droite commen. à vne mediale, soit mediale, neantmoins toute ligne mediale n'est pas commens. à quelque mediale que ce soit. Car deux mediales se peuuent donner incommens. en long. & puissance, comme apparoistra par la 36.p. de ce liure, où nous enseignerons aussi a trouuer deux telles lignes mediales.

THEO. 22. PROP. XXV.

Le rectangle cõpris de deux lignes mediales commensurables en longitude, est aussi medial.



Soit le rectangle DB, compris des deux mediales commensurables en longitude DC & BC: Ie dis qu'il est medial.

Car si sur la ligne DC on descrit le quarré DA, il sera medial estant descrit sur vne ligne mediale: & par la 1.p.6. comme AC est à CB, ainsi AD à DB: mais CD, ou CA son egale est commensurable en longitude a BC : Partant par la 10. p. 10. le quarré medial AD, sera commensurable au rectangle DB: & par le corolaire de la 24.p.10. iceluy rectangle sera medial: ce qu'il falloit demonstrer.

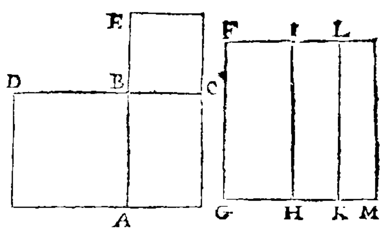
SCHOLIE.

Si les mediales DC, CB commens. en longitude sont $\sqrt{}\sqrt{}2$ & $\sqrt{}\sqrt{}32$: le rectangle d'icelles, sçavoir DB, sera $\sqrt{}\sqrt{}64$. c'est à dire $\sqrt{}8$, qui est medial.

THEOR. 23. PROP. XXVI.

Le rectangle compris de deux lignes mediales commensurables en puissance seulement, est rationel ou medial.

Soient les deux mediales commẽsurables en puissance seulement AB & BC, comprenant le rectangle AC: Ie dis qu'iceluy rectangle est rationel ou medial.



Qu'ainsi ne soit. Sur AB & BC soient faicts les quarrez AD & CE, lesquels comme estans faicts sur lignes mediales seront mediaux. Maintenant soit proposee la ligne rationele F G, & sur icelle soient descrits les trois rectãgles FH, IK, LM, egaux aux trois figures AD, AC, CE, par la 45.p.1. Et d'autant que les quarrez AD & CE sont mediaux, leurs egaux rectangles FH, LM seront mediaux: lesquels appliquez sur la rationele FG, leurs autres costez GH & KM, seront rationaux commens. en puissance seulement à FG par la 23.p.10. Mais d'autant que les quarrez AD & CE sont commens. (estans faicts sur lignes commens. en puissance) leurs egaux rectangles FH & LM seront aussi commens. mais par la 1.p.6. comme FH est à LM, ainsi la ligne droicte GH est à la ligne droicte KM: donc par la 10 p.10. GH & KM seront commens. en longitude; & par la 20.p.10. le rectangle de GH & KM sera rationel. Et pource que AB, BD sont egales, & BC, BE aussi egales, comme DB eſt à BC, ainſi AB à BE. Mais comme DB à BC, ainſi AD à AC par la 1.p.6. & comme AB eſt à BE, ainſi AC à CE : donc comme AD a AC, ainſi AC à CE · & partant AD, AC, CE ſont proportionaux : & par conſequent leurs egaux FH, HL, LM ſeront auſſi proportionaux. Mais par la 1.p.6. les lignes GH, HK, KM ſont entr'elles, comme les rectangles FH, HL, LM : elles ſeront donc proportioneles : & par la 17.p.6. le rectangle de GH, KM, ſera egal au quarré de HK. Or le rectangle d'icelles GH, KM a eſté demonſtré rationel. donc auſſi le quarré de HK ſera rationel : & par conſequent la ligne HK ſera auſſi rationele : & par la 6.d.10. elle ſera pareillement commenſ. à la rationele propoſee FG, ou à ſon egale HI, ſoit en longitude & puiſſance, ou en puiſſance ſeulement : Si en longitude, le rectangle HL contenu ſoubs icelles HI, HK, ou le rectangle AC qui luy eſt egal, ſera rationel par la 20.p.10 : mais ſi HK eſt commenſ. en puiſſance ſeulement a HI, iceluy rectangle HL ou AC ſera medial par la 22.p.10. ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

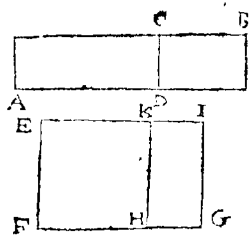
Soient les mediales AB & BC, √√8, & √√2 : (deſquelles les puiſſances ſont commenſurables, car elles ſont en raiſon double.) Le rectangle d'icelles AC ſera √√16, c'eſt à dire 2, qui eſt rationel. Mais ſi AB eſt √√12, & BC √√3, (deſquelles les puiſſances ſont comm. eſtant en raiſon double.) Le rectangle AC ſera √√36, c'eſt à dire √6, qui eſt un medial.

THEOR. 24. PROP. XXVII.

Vne figure mediale, n'eſt pas plus grande qu'vne figure mediale, d'vne figure rationele.

Soit la figure mediale AB qui excede le medial AC du rectangle *DB* : ie dis que DB n'eſt pas figure rationele.

Qu'il ne ſoit ainſi : Sur la propoſée rationelle EF ſoient faicts les rectangles EG & EH, egaux aux rectangles AB & AC par la 45.p.1. tellement que HI ſera egal a DB : partant iceux rectangles EG, EH ſerõt mediaux, leſquels eſtans appliquez ſur la rationẽlle EF, les autres coſtez FG & FH ſe-



sont lignes rationelles commens. en puissance seulement à EF par la 23.p.10.

Maintenant si on dit que HI est rationel ; estant appliqué sur la rationele KH, l'autre costé GH sera rationel commẽs. en longitude à KH par la 21.p.10. mais FH est incom. en long. à KH, ou EF: dõc par la 14.p.10. FH & GH seròt incom. en longitude: mais comme FH à GH, ainsi le rectangle de FH & GH au quarré de GH par la 1. p. 6. (car ils sont de mesme hauteur) Partant par la 10. p. 10. le quarré de GH est incommens. au rectangle de FH & GH. Il le sera aussi à deux fois le rectangle de FH & GH par la 14.p 10. Item le mesme quarré de GH est commens. au quarré de FG qui est aussi rationel ; & par la 16. p. 10. les deux quarrez de FH & GH, ensemble seront commẽs. au quarré de GH: mais iceluy quarré est incommensurable à deux fois le rectangle de FH & GH: donc par la 13.p.10. les deux quarrez de FH & GH seront incommens. à deux fois le rectangle de FH & GH. Mais iceux deux quarrez, & deux fois le rectangle de FH, & GH sont egaux au quarré de FG par la 4.p.2. donc par 17.p. 10. le quarré de FG sera incommens. aux deux quarrez de FH & GH ensemble: lesquels estans rationaux (car ils sont faits sur lignes rationeles) il faudra que le quarré de FG soit irrationel, par la 10. d. 10. & par consequent la ligne FG irrationele; laquelle cy dessus nous auons monstré estre rationele. Ce qui est absurde: donc le rectãgle HI, ou son egal DB n'estoit pas rationel.

SCHOLIE.

Soit le rectangle medial AB √ 50. & le rectangle AD √ 18: le rectangle restant DB sera √ 8. qui est medial. Derechef AB estant √ 32. & AD √ 10; le restant DB sera √ 32—√ 20. qui n'est pas rationel.

PROBL. 4. PROP. XXVIII.

Trouuer deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectãgle rationel.

Soient deux lignes rationeles commens. en puissance seulement A & B, (trouuées par le lemme qui precede la 22. p. de ce liure) entre lesquelles (par la 13. p. 6) soit trouuee la moyenne proportionele C; puis (par la 12. p. 6.) aux trois A, B, C, soit trouuee la quatriesme proportionele D. Ie dis que C & D sont les deux lignes demandees.

Car puis que C est moyenne proport. entre A & B, le rectangle de A & C (lequel par la 22. p. 10. est medial) sera egal au quarré de C par la 17. p. 6. & par la 22. p. 10. C qui peut le rectangle medial, est medialle: Item puis que comme A a B, ainsi C a D, mais A est commens. en puissance seulement a B, aussi sera C a D. par la 10. p. 10. & par la 24. p. 10. D. sera ligne mediale (pour estre commens. en puissance a la mediale D) Voila donc les deux lignes commens. en puissance seulement qui sont trouuees. Reste a prouuer que leur rectangle est rationel.

D'autant que comme A est a B, ainsi C a D, & en permutant comme A à C ainsi B a D; & comme A à C, ainsi C à B; pareillement comme C sera a B, ainsi B sera à D par la 11. p. 5. parquoy B est moyenne prop. entre C & D; & par la 17. p. 6. le quarré d'icelle B sera egal au rectangle de C & D. Mais iceluy quarré de B est rationel: donc le rectangle comprins de C & D est aussi rationel. Nous auons donc trouué C & D mediales commens. en puissance seulement qui comprenent vn rectangle rationel, ce qu'il faloit faire.

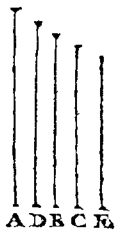
SCHOLIE.

Soit A $\sqrt{20}$, & B $\sqrt{12}$. donc la moyenne prop. C sera $\sqrt{\sqrt{240}}$. & puis que cōme A à B, ainsi C à D; D sera $\sqrt{\sqrt{86\frac{2}{5}}}$, Or les puissances de $\sqrt{\sqrt{240}}$. & $\sqrt{\sqrt{86\frac{2}{5}}}$ sont commens. car elles sont comme 5 à 3: & le rectangle contenu d'icelles est $\sqrt{\sqrt{20736}}$, c'est à dire 12, egal au quarré de $\sqrt{12}$, qui est aussi 12. & partant iceluy rectangle de C & D commens. en puissance seulement est rationel.

PROB. 5. PROP. XXIX.

Trouuer deux lignes mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial.

Soient trois lignes rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement A, B, C, trouuees comme il eſt enſeigné au lemme qui precede la 22. p. 10. & par la 13. p. 6. entre A & B ſoit trouuee la moyenne proportionele D : puis par la 12. p. 6. ſoit faict comme B à C ainſi D à E: Ie dis que D & E ſont les deux mediales demandees.



Car en premier lieu, il eſt euident que D eſt mediale par la 22. p. 10. d'autant que par la 17. p. 6. elle peut le rectangle irrationel de A & B; mais comme B à C, ainſi D à E, & B eſt commenſ. en puiſſance ſeulement à C, auſſi par la 10. p. 10. D ſera commenſurable en puiſſance ſeulement a E: Et par la 24. p. 10. D eſtant mediale, E ſera auſſi mediale commenſ. en puiſſance ſeulement à D.

D'auantage, ie dis que le rectangle des deux mediales D & E eſt auſſi medial. Car puis que comme B à C, ainſi D à E, en changeant B ſera à D comme C à E: mais B eſt à D comme D a A; partant comme D eſt a A, ainſi C eſt a E ; & par la 16. p. 6. le rectangle des extremes D & E ſera egal au rectangle des moyennes A & C. Mais le rectangle de A & C, rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement, eſt medial par la 22. p. 10. Donc parce qui reſulte de la 24. p. 10. le rectangle de D & E ſera auſſi medial.

SCHOLIE. 1.

Soit A 20, B $\sqrt{200}$, & C $\sqrt{80}$. Donc la moyenne prop. D, ſera $\sqrt{\sqrt{80000}}$. Et puis que comme B à C, ainſi D à E; icelle E ſera $\sqrt{\sqrt{12800}}$. Or les puiſſances de D & E, ſont commenſurables, car elles ſont comme 5 à 2: & le rectangle d'icelles eſt $\sqrt{\sqrt{1024000000}}$, c'eſt à dire $\sqrt{32000}$, egal au rectangle de A & C; qui eſt $\sqrt{32000}$.

Or és choſes ſuiuantes nous aurons beſoin de ce probleme cy.

Trouuer deux nombres plans ſemblables.

Soient pris quatre nombres proportionnaux A B, C, D, c'eſt à dire que comme A eſt à B, ainſi C ſoit à D. Mais A & B ſe multiplians entr'eux faſſent E: Item C & D ſe multipliant faſſent F.	*A.* 6. *B.* 4. E. 24.	C. 12. D. 8. *F.* 96.

Donc E & F ſeront nombres plans ſemblables, puis qu'ils ont les coſtez proportionnaux.

Or d'autant qu'il a eſté demonſtré és 28. & 29. p. 9. que ſi on multiplie vn nõbre impair ou pair par vn pair, eſt produit vn nõbre pair; mais vn impair, ſi on multiplie vn impair par vn impair ; il appert *par quelle maniere peuuent estre trouuez deux plans semblables, l'vn & l'autre desquels soit pair ou impair ; ou vn seul pair, & l'autre impair : Car si les costez prins sont nombres pairs, les plans d'iceux seront aussi pairs ; mais si les nombr s sont impairs, les plans d'iceux seront aussi impairs. Que si les costez de l'vn sont nombres impairs, mais de l autre pairs, le plan de ceux là sera impair, mais de ceux cy pair : Semblablement les plans seront, si chacun à vn costé nombre pair, mais l'autre impair, &c.*

LEMME. I.

Trouuer deux nombres quarrez, tels que le composé d'iceux soit aussi quarré.

Soient trouuez par les choses cy-dessus dictes deux plans semblables AB & C, vn chacun desquels soit pair ou impair. Et d'autant que par les 24. & 26 p 9 si on oste d'vn pair, vn pair, ou bien vn impair d'vn impair, le reste est pair ; estant osté BD egal aC de A B. Le reste AD sera pair ; & iceluy AD estant diuisé en deux egalement en E ; Ie dis que le nõbre faict de A B en BD (qui est vn qarré par la 1. p. 9) auec le quarré du nombre ED, faict vn quarré. Car puis que le nombre AD est diuisé en deux egalement en E, & à iceluy est adiousté DB ; le nombre qui est faict de AB en BD, ensemble auec le quarré du nombre D E, sera egal au quarré du nombre EB, par le 6. theo. de ceux que nous auons demonstré à la 14. p. 9. Parquoy les deux quarrez, sçauoir celuy faict de AB en BD, & celuy du nombre DE composez feront vn quarré, sçauoir celuy qui sera produict de BE. Ce qui estoit proposé.

A..... E..... D....... B

C........

COROLLAIRE.

De ces choses est manifeste que quand AB & C sont semblables, estre trouuez en la mesme maniere les deux nombres quarrez des nombres BE, ED, desquels l'excez, sçauoir le nõbre faict de AB en BD, est aussi quarré.

Que si les nombres AB & C ne sont prins semblables, l'vn & l'autre toutesfois pair, ou impair, seront trouuez en la mesme maniere les deux quarrez des nombres BE, ED, desquels l'excez, sçauoir le nombre faict de AB en BD n'est quarré. Car s'il estoit quarré, par la 1. p. 9. les nombres AB, BD, c'est à dire AB & C, seroient plans semblables. Ce qui est absurde, puis qu'ils ont esté posez dissemblables.

SCHOLIE. 2.

Parquoy s'il faut trouuer deux nombres quarrez, desquels l'excez soit aussi nombre quarré, nous prendrons comme cy-dessus, deux plans semblables, desquels l'vn & l'autre soit pair ou impair, sçauoir AB & C, & acheuerons comme il est dict au prochain lemme.

Que s'il faut trouuer deux quarrez, desquels l'excez ne soit quarré, il faudra prendre deux nombres plans dissemblables, & paracheuer comme dessus. Ce qu'on obtiendra plus facilement, diuisant vn nombre quarré en deux nombres, l'vn desquels soit quarré, & l'autre non. Comme 16 en 4 & 12: ou 36 en 16 & 20; & ainsi des autres.

LEMME. 2.

Trouuer deux nombres quarrez, tels que le composé d'iceux ne soit quarré.

A..H..I.E.F.G..D.......B
C.......

Soient deux nombres plans semblables AB, & C pairs, ou impairs, & soit faict mesme construction qu'au lemme preced. tellement que le quarré faict de la multiplication des nombres semblables AB, DB entr'eux, ensemble auec le quarré de DE, soit egal au quarré de BE: en apres de DE soit ostee l'vnité EF. Donc le quarré de DF sera moindre que le quarré de DE, à cause de l'inegalité des costez. Ie dis que le nombre composé des nombres quarrez, desquels l'vn est faict de AB en BD, & l'autre de DF en soy, n'est pas quarré. Car si ce composé estoit nombre quarré, il sera plus grand, ou egal, ou moindre que le quarré de BF: Soit premierement plus grand; & partant le costé d'iceluy sera plus grand que le coste BF; Donc le costé d'iceluy sera, ou egal, ou plus grand que le nombre BE: (car il ne sera moindre, pource qu'entre BE, BF, nombres differens de l'vnité: ne tombe aucun milieu, & le susdit costé seroit milieu entre iceux, s'il estoit posé plus grand que BF, mais moindre que BE) Si on dict qu'il est egal, tellement qu'au quarré de BE, soit egal le nõbre quarré composé du quarré de AB en BD, & du quarré de DF, puis qu'au mesme quarré de BE, il a esté demonstré au lemme precedent, estre egal le nombre faict de AB en BD, ensemble auec le quarré de DE; celuy faict de AB en BD, ensemble auec le quarré de DF, sera egal à celuy là faict de AB en BD, ensemble auec le quarré de DE. Ostant donc le commun faict de AB en DB, le reste quarré de DF, sera egal *au reste quarré de DE; & partant le costé DF aussi egal au costé DE, la partie au tout: ce qui est absurde. Donc le costé du quarré composé des quarrez, desquels l'un est faict de AB en BD, & l'autre de DE en soy, n'est pas egal au nombre BE. Mais il n'est pas plus grand. Car si faire se peut, le costé d'iceluy soit egal au nombre BI, qui est plus grand que BE. Donc puis que le quarré de BI plus grand costé, est plus grand que le quarré de BE moindre costé; pareillement le composé des quarrez, desquels l'un est faict de AB en BD, & l'autre de DF en soy, (puis que ce composé est posé egal au quarré de BI) sera plus grand que le quarré de BE. Mais au precedent lemme le quarré de BE a esté demonstré egal au nombre faict de AB en BD, ensemble au quarré de DE: ostant donc le commun nombre faict de AB en BD, restera le quarré de DF, plus grand que le quarré de DE; & partant le costé DF plus grand que le coste DE, la partie que le tout. Ce qui est absurde. Donc le costé du quarré composé des quarrez, desquels l'un est faict de AB en BD, & l'autre de DF en soy, n'est pas plus grand que le costé BE: mais il a esté demonstré qu'il n'est pas aussi egal, ny moindre. Donc iceluy quarré composé n'est pas plus grand que le quarré de BF.*

Soit maintenant si faire se peut, le nombre faict de AB en BD, ensemble auec le quarré de DF, egal au quarré de BF; & soit posé AH double de l'unité EF. Donc puis que le tout AD est double du tout ED, (car AD a esté diuisé en deux egalement en E) & l'osté AH double de l'osté EF, aussi le reste HD sera double du reste FD par la 7. p. 7. & partant HD est diuisé en deux egalement en F: Parquoy par le 6. theo. de ceux que nous auons demonstré sur la 14 p. 9. le nombre faict de HB en BD, ensemble auec le quarrè de DF, sera egal au quarrè de BF: Mais au mesme quarré de BF, est posé egal le nombre faict de AB en BD ensemble auec le quarrè de DF. Donc le nombre faict de HB en BD, ensemble auec le quarrè de DF est egal à celuy faict de AB en DB, ensemble auec le quarré de DF. Ostant donc le commun quarré de DF, restera le nombre faict de HB en BD, egal à celuy fait de AB en DB. Parquoy puis que HB, AB multiplians le mesme BD, produisent nombre egaux, & par la 18. p. 7. les multiplians ont mesme raison que les produis; HB sera egal à AB, la partie au tout. Ce qui est absurde. Dõc le nombre faict de AB en BD, ensemble auec le quarré de DF, n'est pas egal au quarré de BF.

Soit finalement, si faire se peut, le nombre faict de AB en BD, ensemble auec le quarré de DF, moindre que le quarré de BF; & partant le costé d'iceluy, moindre que le costé BF, lequel soit BG, tellemẽt que le nombre faict de AB en BD, ensemble auec le quarré de DF, soit egal au quarré de BG: Soit pris AI double d'iceluy EG. Donc puis que le tout AD est double du tout FD, & l'osté AI double de l'osté EG; par la 7. p. 7. le reste ID sera aussi double du reste GD; &

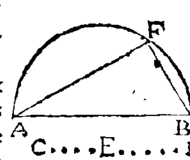
partant ID est diuisé en deux egalement en G. Parquoy par le 6. theor. demonstré sur la 14.p.9, le nombre faict de IB en BD.ensemble auec le quarrè de DG est egal au quarrè de BG. Mais au mesme quarrè de BG a estè posè egal le nombre faict de AB en BD, ensemble auec le quarrè de DF: Donc le nõbre faict de IB en BD, ensemble auec le quarré de DG est egal a celuy faict de AB en BD, ensemble auec le quarrè de DF. Ostant donc les quarrez de DG & DF, desquels celuy de DG est moindre, restera le nombre faict de IB en BD, plus grand que celuy faict de AB en BD, la partie que le tout. Ce qui est absurde. Donc le nombre faict de AB en BD, ensemble auec le quarrè de DF, n'est pas moindre que le quarrè de BF: mais il a esté demonstré qu'il n'est pas aussi plus grand, ny egal. Donc le nombre produict de AB en BD, ensemble auec le quarrè de DF, n'est pas quarrè. Ce qui estoit proposè à demonstrer.

SCHOLIE. 3.

Par cecy nous trouuerons facilement deux nombres, tels que le composê d'iceux ne soit à l'vn ny à l'autre comme nombre quarrè à nombre quarrè. Car si par le Lemme precedent on trouue deux quarrez, tels que le composé d'iceux ne soit quarrè, ce composé non quarrè ne sera a l'vn ny a l'autre d'iceux, comme nombre quarrè à nombre quarrè. Nous obtiendrons le mesme, diuisant quelque nombre quarre en deux non quarrez: Car ainsi le quarrè total ne sera à l'vn ny à l'autre d'iceux nombres esquels il est diuise, en raison de nombre quarré à nombre quarré,

PROB. 6 PROP. XXX.

Trouuer deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement, & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude.



Soit proposee la rationele AB, & soient trouuees (comme il a esté enseigné au 2. scholie de la preced. prop.) les deux nombres quarrez CD, CE, l'excez desquels DE ne soit quarré; puis par le corol. de la 6. p. 10. soit trouuee AF, au quarré de laquelle soit le quarré de AB, comme le nombre CD est au nombre DE; & apres auoir descrit vn demy cercle sur AB, soit accommodee en iceluy AF: & ioinct BF. Ie dis que AB & AF sont les deux lignes requises.

Car d'autant que le quarré de AB est au quarré de AF comme nombre à nombre, ils seront commens. par la 6. p. 10. & partant aussi leurs costez AB & AF au moins en puissance, mais AB est rationele, & par consequent aussi rationele AF qui luy est commens. mais les quarrez de AB & AF n'estans entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, par la 9. p. 10. les lignes AB & AF seront incommens. en longitude: elles seront donc rationeles commens. en puissance seulement.

Maintenant veu que l'angle F au demy cercle est droit par la 31. p. 3. le quarré de AB sera egal aux deux quarrez de AF & FB, c'est a dire que la ligne AB peut plus que AF, du quarre de FB. Et d'autant que comme CD a DE, ainsi le quarré de AB sera au quarré de AF, par conuersion de raison, comme le nombre quarre CD sera au nombre quarre CE, ainsi le quarré de AB sera au quarré de FB. (car ainsi que CD excede DE du quarré de CE, ainsi aussi le quarré de AB surpasse le quarré de AF du quarré de FB) parquoy les lignes droictes AB, FB sont commens. en longitude par la 9. p. 10. Nous auons donc trouué deux rationeles AB, AF commens. en puissance seulement, & la plus grande AB peut plus que AF du quarré de la ligne FB, qui luy est commens. en longitude: ce qu'il falloit faire.

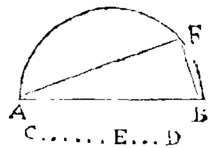
SCHOLIE.

La rationele AB soit 6: AF sera $\sqrt{20}$: & partant BF sera 4. commens. en longitude à AB.

La construction & demonstration tant de ceste prop. que de plusieurs autres de ce liure, sont tellement deffectueuses en l'edition de Dounat, que ceux qui la verront pourront eux-mesmes (ayans bien entendu ce que nous auons dict iusques icy) recognoistre facilement les deffauts d'icelle: c'est pourquoy nous ne nous arresterons à les remarquer.

PROBL. 7. PROP. XXXI.

Trouuer deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement, & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude.



Soit exposee la rationele AB & soient trouuez (comme il a este enseigne au lemme 2. de la prop. 29. de ce liure) deux nombres quarréz tels que le composé d'iceux ne soit quarré, ou plustost soit diuisé quelque nombre quarré CD, en deux nombres non quarrez CE, ED, afin que le tout CD ne soit a l'vn ou a l'autre d'iceux CE, ED, comme nombre quarré a nombre quarré: puis sur AB soit descrit le demy cercle AFB; & par le corol. de la 6.p.10. soit trouuee la ligne droicte AF, au quarré de laquelle soit le quarré de AB, comme le nombre CE au nombre CD: & finalement soit menee BF. Ie dis que AB & AF sont les deux lignes demandees.

Car on prouuera tout ainsi qu'à la precedente, que AB & AF sont rationeles commens. en puissance seulement (d'autãt que leurs quarrez ne sont entr'eux comme nombre quarré a nombre quarré) & que AB peut plus que AF du quarré de BF. Et d'autant que comme CE est a CD, ainsi le quarré de AB est au quarré de AF: par conuersion de raison comme CE sera à DE, ainsi le quarré de AB sera au quarré de BF. Mais CE n'est pas à DE comme nombre quarré a nombre quarré: dõc le quarré de AB ne sera pas aussi au quarré de BF comme nõbre quarré a nombre quarré. Parquoy les lignes droictes AB, BF ne seront incommens. en longitude, par la 9.p.10. Nous auons donc trouué deux rationeles AB, AF commens. en puissance seulement, tellement que la plus grande AB peut plus que AF, du quarré de la ligne BF, qui luy est incommens. en longitude: ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Si la rationele AB est 3: AF sera $\sqrt{6}$, & BF$\sqrt{3}$.

PROB. 8. PROP. XXXII.

Trouuer deux mediales commẽsurables en

puissance seulement, comprenant vn rectãgle rationel; & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude.

Soient trouuees par la 30 p.10 deux lignes rationeles A & B commens. en puissance seulement, & que la plus grande A puisse plus que la plus petite B du quarre d'vne ligne qui luy soit commens. en longitude : Item, par la 13.p.6. soit trouuee C moyenne proportionele entre A & B; & finablement par la 12.p.6. aux trois lignes A, B, C, soit trouuee la 4. proportionele D. Ie dis que C & D sont les deux lignes demandees.

Car puis que A & B sont rationeles commensurables en puissance seulement, par la 22 p.10. le rectangle d'icelles A & B sera irrationel, & la ligne C pouuant iceluy (car elle est moyenne prop. entre A & B) sera mediale. Et d'autant que cõme A a B, ainsi C a D ; & A est commens. en puissance seulement a B, aussi C sera commens. en puissance seulement a D, par la 10.p.10. Mais puis que C est mediale, par la 24. p. 10. D sera aussi mediale. Et d'autant que comme A est à B, ainsi C à D : & en changeãt comme A a C, ainsi B a D : mais comme A est a C, ainsi C à B : pareillement comme C sera a B, ainsi B sera a D : & partant le rectangle de C & D sera egal au quarré de B, par la 17 p.6. & puis que le quarré de la rationele B est rationel, le rectangle compris soubs C & D sera aussi rationel. Et veu que comme A est a B, ainsi C a D ; & A peut plus que B du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude, aussi par la 15.p.10. C pourra plus que D du quarré d'vne ligne qui luy sera commens. en longitude. Nous auons donc trouué C & D, deux mediales commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel, C pouuant plus que D du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude : ce qu'il falloit faire.

Qui si on vouloit que C peut plus que D du quarré d'vne ligne qui luy fust incommensurable en longitude, il ne faudroit que trouuer A & B, telles qu'elles sont requises par la precendente prop au lieu que cy dessus, elles ont este trouuees par la 30.p.10. & acheuer le tout comme dessus.

SCHOLIE.

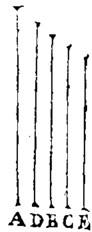
Soit A 8, B√ 28 : le rectangle d'icelles sera √1792, & la ligne C√√1792, qui est mediale. Et puis que comme A8, est à B√28, ainsi C√√1792 est à D, icelle sera √√343 : donc C & D sont deux mediales commens. en puissance seulement, lesquelles contiennent vn rationel 28. & la plus grande C peut plus que la moindre D, d'vne ligne qui luy est commens. en longit. Car si du quarré d'icelle C, on oste le quarré de D, restera √567, & seront commens. en long. les deux mediales √√1792 & √√567. Car elles sont comme 4 à 3. Derechef soit A8, & B√20 : le rectãgle d'icelles sera √1280, & la ligne C√√1280 & partant D sera √√125 : donc C & D sont mediales comprenant vn rationel 20, & C peut plus que D du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude.

PROB. 9. PROP. XXXIII.

Trouuer deux mediales commensurables en puissance seulemẽt, comprenant vn rectangle medial, & que la plus grãde puisse plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude.

Soient trouuees trois lignes rationeles commens. en puissance seulement A, B, C, (en la figure qui est de l'autre part) & que B puisse plus que du quarré d'vne ligne qui luy soit cõmens. en longitude : (ce qu'on obtiendra trouuant premierement par la 30. p. 10. les deux rationeles B & C commensurables en puissance seulement, & que B puisse plus que C du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude : puis à C & B soit trouuee A commens. en puissance seulement par ce qui est enseigné au lemme qui precede la 22. p. 10.) Item par la 13. p. 6. soit trouuee D moyenne prop. entre A & B : puis par la 12. p. 6. soit faict comme B à D, ainsi C à E. Ie dis que D & E sont les deux lignes demandees.

Car puisque D est moyenne prop. entre A & B, par la 17. p. 6. elle peut le rectãgle d'icelles A & B, qui est irrationel, & par consequent D est mediale par la 22. p. 10. Mais d'autant que



comme B à D, ainsi C à E, en changeant comme B à C, ainsi D à E, & B, C estant commensurables en puissace seulement, & par la 24. 10. D estans mediale, E le sera aussi. Et d'autant que comme B à D, ainsi C à E, & D à A; comme D à A, ainsi C sera à E, & par la 16. p. 6. le rectangle des extremes D & E sera egal au rectangle des moyens. Mais par la 22. p. 10. le rectangle de A & C rationeles commens. en puissance seulement est medial: Donc par le corol. de la 24. p. 10. le rectangle de D & E sera aussi medial. Finablement puis que comme B à C, ainsi D à E; & B peut plus que C du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude, par la 15 p. 10. D pourra aussi plus que E du quarré d'vne ligne qui luy sera commensurable en longitude. Nous auons donc trouué deux mediales D & E commensurables en puissance seulement, &c. Ce qu'il falloit faire.

Que si on troue A, B, C rationeles commens. en puissance seulement, tellement que B puisse plus que C du quarre d'vne ligne qui luy soit incommensurable en longitude, & on acheue de construire comme dessus; on demonstrera semblablement que D & E sont mediales, commensurables en puissance seulement comprenant vn rectangle medial, & que la plus grande D, peut plus que E du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en long.

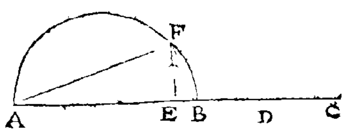
SCHOLIE.

Soit A 8. B $\sqrt{48}$. & C $\sqrt{28}$: le rectangle compris de A & B sera donc $\sqrt{3072}$. & la ligne droicte D $\sqrt{\sqrt{3072}}$, qui est mediale, & A estant à C, comme D à E, icelle sera $\sqrt{\sqrt{588}}$. Donc D & E, sont mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn medial, & la plus grande D peut plus que la moindre E du quarre d'vne ligne, qui luy est commensurable en longitud. Car si du quarre d icelle D, on oste le quarre de E, le reste sera $\sqrt{972}$. qui est commensurable en longitude à icelle D $\sqrt{\sqrt{3072}}$. Derechef si A est 8, B $\sqrt{48}$, & C $\sqrt{20}$; D sera encore $\sqrt{\sqrt{3072}}$, mais E sera $\sqrt{\sqrt{300}}$. Donc D & E sont deux mediales commensurables en puissance seulement, qui contiennent vn medial, & la plus grande D, peut plus que la moindre E, du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude.

PROB.

PROB. 10. PROP. XXXIV.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables en puissance, qui facent le composé de leurs quarrez rationel; mais le rectangle contenu d'icelles, medial.



Soient deux lignes rationeles commensurable en puissance seulement AB & BC, & que la plus grãde AB puisse plus que la plus petite BC du quarré d'vne ligne qui luy soit incommensurable en longitude, trouuees cõme il a esté enseigné en la 31 p. 10. & apres auoir couppé en deux egalement CB au poinct D, soit appliqué vn rectangle sur BA egal au quarré de BD, defaillant d'vne figure quarree par la 28, p. 6. & soit iceluy rectangle compris de AE & EB : & apres auoir faict le demy cercle sur la ligne BA, & mené la perpendiculaire EF, soient menees BF & FA : Ie dis qu'icelles lignes sont les lignes demandees.

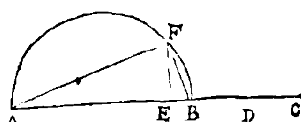
Car puis que AB & BC sont inegales, & que la plus grande AB peut plus que la plus petite BC du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude, & que le rectangle de AE, EB appliqué sur AB, & defaillant d'vne figure quarree, est egal au quart du quarré de BC (c'est à dire au quarré de DB: car nous auons demonstré au scholie de la 4. p. 2. que le quarré de BC est quadruple du quarré de BD.) les deux lignes AE & EB seront incommens. en longitude par la 19. p. 10. Mais par le scholie de la 13. p. 6. EF est moyenne proport. entre icelles AE, EB ; & partant comme il a esté demonstré à la 11. p. 10. elle sera incommensurable en puissance à EA. Mais cõme FE à EA, ainsi BF à FA par la 4. p. 6. (car iceux triangles sont equiangles par la 8. p. 6.) donc puis que FE, EA sont incommens. en puissance, par la 10. p. 10. BF & FA seront aussi incommens. en puissance. Item le quarré de AB, est egal aux deux de BF & FA par la 47. p 1. lequel quarré de BA est rationel, estant la ligne AB rationele ; partant le cõposé des quarrez de BF & FA, sera aussi rationel. Et d'autant que par l'hypothese le rectangle de AE EB, est egal au quarré de BD, & qu'il est aussi egal au quarré de la moyenne proport. EF par la 17. p. 6. le quarré de EF sera egal au quarré de BD : partant EF egale à BD : & par la 16. p. 6. le rectangle de BF & FA sera egal au rectangle de BA & EF ou BD son egale, (car par la 8. & 4. p 6. AB est à BF comme FA à EF.) Or par la 1. p. 6. le rectangle de AB & DC est double du rectangle de AB & BD, (car la base BC est double de la base BD.) Mais le rectangle de AB & BC est medial par la 22. p. 10. donc aussi sa moitié rectangle de AB & BD : & par consequent medial son egal rectangle de BF & FA. Nous auons donc trouué les deux lignes AF, FB, incommens. en puissance, qui font le composé de leurs quarrez rationel: mais le rectangle compris d'icelles, medial : ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Si AB est 6, & BC $\sqrt{}$ 12. *BD ou DC sera* $\sqrt{}$ 3: *& par consequent AE sera* 3 + $\sqrt{}$ 6, *&* EB 3 — $\sqrt{}$ 6 : *& puis que le quarré de AF est egal aux quarrez de AE*, EF : *icelle AF sera* $\sqrt{}$ (18 + $\sqrt{}$ 216) *: mais BF sera* $\sqrt{}$ (18 — $\sqrt{}$ 216). *Donc icelles AF, FB sont incommens. en puissance, & le composé de leurs quarrez, sçauoir est 36 est rationel, mais le rectangle compris d'icelles, sçauoir est* $\sqrt{}$ 108, *est medial.*

PROB. II. PROP. XXXV.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables en puissance, qui facent le composé de leurs quarrez, medial : mais qu'elles comprenent vn rectangle rationel.



Soient deux mediales commens. en puissance seulement AB & BC, cóprenant vn rectangle rationel, & que AB puisse plus que BC du quarré d'vne ligne qui luy soit incommensurable en longitude trouuees comme il a esté enseigné en la 32. p. 10. & soit acheuee la construction comme en la precedente. Ie dis que BF & FA sont les deux lignes demandees.

Car nous demonstrerons ainsi qu'en la precedente prop. qu'icelles BF & FA sont incommens. en puissance : & le quarré de BA est medial, estant descrit sur vne ligne mediale, & egal aux deux de BF & FA par la 47.p.1. Partant le composé des deux quarrez de BF & FA est medial. Et d'autant que le rectangle de AB, BC (comme il a esté demonstré en la preced. prop.) est double du rectangle de AB, BD ; & qu'il est rationel par la construction, aussi iceluy rectangle de AB, BD sera rationel. Mais il a esté demonstré en la precedente qu'il est egal au rectangle de BF & FA : & par consequent iceluy est aussi rationel. Nous auons donc trouué deux lignes AF & BF incommens. en puissance, qui font le composé de leurs quarrez medial : mais le rectangle compris d'icelles rationel: ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Si AB est $\sqrt{}\sqrt{}\,432$, & BC $\sqrt{}\sqrt{}\,48$: BD ou EF sera $\sqrt{}\sqrt{}\,3$, & AF $\sqrt{}(\sqrt{}\,108 + \sqrt{}\,72)$, mais BF est $\sqrt{}(\sqrt{}\,108 - \sqrt{}\,72)$: & partant icelles AF, BF sont incommens. en puissance, & le composè de leurs quarrez, sçauoir est $\sqrt{}\,432$, est medial : mais le rectangle compris d'icelles, sçauoir est $\sqrt{}\,36$, c'est à dire 6, est rationel.

PROB. 12. PROP. XXXVI.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables en puissance, qui facent le composé de leurs quarrez medial, & aussi le rectangle d'icelles, medial, & incommensurable au composé de leurs quarrez.

Soient deux mediales commens. en puissance seulement AB & BC, comprenant vn rectangle medial, & que la plus grande AB puisse plus que la plus petite BC du quarré d'vne ligne qui luy soit incommens. en longitude, trouuees comme nous auons enseigné à la fin de la 33.p.10. & apres auoir acheué la construction comme en la 34. p. 10. Ie dis que BF & FA sont les lignes demandees.

Car premierement elles sont incommensurables en puissance : comme en la demonstration de la 34. p. 10. & le quarré de BA estant medial comme en la precedente, le composé des quarrez de BF & FA sera aussi medial : Item le rectangle de AB & BC estant medial par hypothese, le rectangle de AB & BD (ou EF son egale) qui est sa moitié, sera aussi medial par ce qui resulte de la 24. p. 10. & par consequent medial le rectangle de BF & FA qui luy est egal, comme il a esté demõstré en la 34. prop. 10. Et d'autant que par l'hypothese AB est incommensurable en longitude a BC, mais à icelle BC est commensurable en longitude sa moitié BD : Donc par la 13. p. 10. BD sera aussi incõmensurable en longitude à AB, & par la 1. p. 6. le quarré de AB sera au rectangle de AB & BD (d'autant qu'ils sont tous deux de la hauteur de AB) comme AB à BD, c'est à dire incommensurable, par la 10. q 10. & par consequent le rectangle de BF, & FA egal au rectangle de AB & BD, sera incommensurable au quarré de BA, c'est a dire au composé des quarrez de BF & FA. Nous auons donc trouué deux lignes droictes AF, BF incommensurables en puissance, faisant le composé de leurs quarrez, medial, & le rectangle contenu soubs icelles medial, & incommensurable au cõposé d'iceux quarrez : ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Si AB est $\sqrt{}\sqrt{192}$, & BC $\sqrt{}\sqrt{48}$; BD ou son egale EF sera $\sqrt{}\sqrt{3}$. & AF $\sqrt{}(\sqrt{48} + \sqrt{24})$ & BF $\sqrt{}(\sqrt{48} - \sqrt{24})$ Parquoy icelles AF. BF soit incommens. en puissance, & le composé de leurs quarrez, sçauoir est $\sqrt{192}$, est medial incommens. à $\sqrt{24}$, rectangle medial compris d'icelles AF, BF.

Or de ce probleme est manifeste le suiuant.

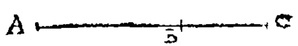
Trouuer deux mediales incommensurables en longitude & puissance.

Car puis que tant le cõposé des quarrez des lignes AF, BF, que le rectangle compris d'icelles, est medial, & qu'iceluy rectangle est incommensurable à ce composé, a si les lignes pouuans iceluy composé, & rectangle, seront pareillement mediales incom. tant en longitude qu'en puissanc. Car si elles estoient commens. en puissance, aussi les quarrez d'icelles, c'est à dire le composé des quarrez des lignes AF, BF, & le rectangle soubs icelles AF, FB, seroient commensurable. Ce *qui n'est pas. Parquoy si on prend AB pouuant le composé des lignes AF, FB; & vne autre ligne pouuant le rectangle d'icelles AF, FB, c'est à dire vne moyenne proportionnele entre AF, FB, seront trouuees deux mediales incommens. en longitude & puissance.*

ICY COMMENCENT LES sixaines des lignes irrationelles par la composition,

THEOR. 25. PROP. XXXVII. Six. I.

Si deux lignes rationelles commensurables en puissance seulement sont assemblees, la toute sera irrationelle: soit icelle appellee Binome.



Soient assemblees deux lignes rationeles commens. en puissance seulement AB & BC trouuees par le lemme qui precede la 22. p. 10. Ie dis que la toute AC est irrationele.

Car par la 1. p. 6. le rectangle de AB & BC est au quarré de BC, comme AB à BC : mais AB, BC sont incommens. en longitude par l'hypothese. Donc par la 10. p. 10. le rectangle de AB, BC sera incommens. au quarré de BC : & partant par la 14. p. 10 deux fois le rectangle de AB & BC sera incommens. au quarré de BC. Mais d'autant que les lignes AB, & BC sont rationeles commens. en puissance seulement, leurs quarrez seront commensurables entr'eux, & le composé de tous deux sera commensurable au seul de BC par la 16. p. 10. & partant par la 14. p, 10. les deux quarrez de AB & BC seront incommens. à deux fois le rectangle de AB & BC, & par la 17. p. 10. le composé de deux fois le rectangle & des deux quarrez, c'est à dire le quarré de la toute AC (car par la 4. p. 2. ce quarré est egal aux quarrez de AB, BC, & deux fois le rectangle d'icelles AB, BC) est incommens. aux deux quarrez de AB & BC, lesquels estans rationaux, & le composé d'iceux rationel, le quarré de AC qui luy est incommẽsurable sera irrationel, par la 10. d. 10. & par consequent la ligne AC irrationelle : icelle sera donc appellee binome.

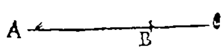
SCHOLIE.

Soit AB 2, & BC $\sqrt{3}$: la toute AC sera $2+\sqrt{3}$, & son quarré est $7+\sqrt{48}$.

Or il appert de ce que dessus, que de deux lignes rationeles com. en puissance seulement, sont procrees deux lignes irrationeles. Car la ligne moyenne prop. entre icelles rationeles est irrationele par la 21. de ce liure, laquelle est appellee mediale. Et la composee d'icelles, par la 37. p. 10. est vne irrationele, qui est dite binome.

THEOR. 26. PROP. XXXVIII.

Si deux lignes mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectágle rationel sont assemblees, la toute sera irrationelle: soit icelle appellee bimedialle premiere.



Soient assemblees deux mediales AB & BC commensurables en puissance seulement, cõprenant vn rectangle rationel, trouuees par la 28. p. 10. Ie dis que la toute AC est irrationele.

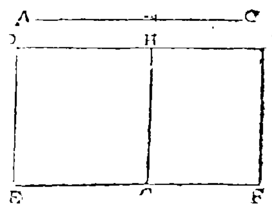
Car par la mesme demonstration de la precedente prop. le quarré de AC se trouuera incommens. à deux fois le rectangle de AB & BC : lequel estant rationel, (puis qu'vn seul rectangle de AB, BC est rationel par hypothese) le quarré de AC qui luy est incommensurable par la 14. p. 10. sera irrationel par la 10. d 10. & par la 11. d. 10. la ligne AC sera aussi irationelle, laquelle sera appellee bimediale premiere.

SCHOLIE.

Soit AB $\sqrt{\sqrt{54}}$, & BC $\sqrt{\sqrt{24}}$: La toute AC sera $\sqrt{\sqrt{54}}+\sqrt{\sqrt{24}}$ irrationele nommee bimediale premiere.

THEOR. 27. PROP. XXXIX.

Si deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial sont assemblees, la toute sera irrationelle: soit icelle appellee bimediale seconde.



Soient assemblees les deux mediales AB & BC commensurables en puissance seulemēt comprenant vn rectangle medial, trouuees par la 29 p 10. Ie dis que la toute AC est irrationelle.

Car soit vne ligne rationele proposee DE, sur laquelle soit appliqué le rectangle DF egal au quarré de AC, & le rectangle DG egal au composé des quarrez de AB & BC par la 45. p.1. Et d'autant que par la 4.p.2. le quarré de AC, c'est à dire le rectangle DF, est egal aux deux quarrez de AB, BC ensemble auec deux fois le rectangle de AB, BC; le rectangle HF sera egal à deux fois le rectangle de AB, BC: & puis que par l'hypothese le rectangle de AB, BC, est medial, par le corol. de la 24.p.10. le double rectangle de AB,BC,qui luy est commens. c'est à dire le rectangle HF, sera aussi medial. Derechef puis que les quarrez des mediales AB, BC sont commens. le composé d'iceux, c'est à sçauoir le rectangle DG sera aussi commensur. à vn chacun d'iceux par la 16.p.10. Mais chacun d'iceux quarrez des mediales AB, B C, est medial: Donc par le coroll. de la 24.p.10. le rectangle DG sera aussi medial: Ainsi les deux rectangles D G & HF estans mediaux, & appliquez sur la rationele DE, (car GH est egale à la rationele DE,) leurs autres costez EG & FG seront rationaux commensurables en puissance seulement à D H, par la 23.p.10. Maintenant le rectangle de AB & B C est au quarré de BC comme AB est à BC, par la 1.p. 6. c'est à dire incommensurable par la 10.p 10. & partant le double du rectangle de AB & BC sera aussi incommens. au quarré de BC: & les deux quarrez de AB & BC estans commensurables entr'eux, les deux ensemble seront commensurables au seul de BC, par la 16.p.10. & par la 14.p. 10. les deux quarrez de AB & BC seront incommensurables a deux fois le rectangle de AB & BC : & par consequent aussi leurs egaux rectangles DG & HF : & par la 1.p.6.& 19.p 10. EG & FG lignes rationeles seront incommensurables en longitude : elles seront donc commensurable en puissance seulement ; (car autrement elles ne seroient rationeles si elles estoient incommensurables,) & par la 37. p. 10. la toute composee EF sera irrationele : & le rectangle DF sera irrationel : car s'il estoit rationel la ligne DE estant rationele, il faudroit par la 21. p. 10. que l'autre costé EF fut aussi rationel, ce qui n'est pas. DF est donc irrationel: & partant aussi irrationel son egal quarré de AC ; & par consequent la ligne AC irrationele, qui sera appellee bimediale seconde.

COROLAIRE.

Il est manifeste par cecy que le rectangle compris d'une ligne rationele & d'une irrationele est aussi irrationel. Car il a esté demonstré que le rectangle DF compris de la rationele DE, & irrationele EF, ne peut estre rationel.

SCHOLIE.

Soit AB $\sqrt{}\sqrt{}$ 18, & BC $\sqrt{}\sqrt{}$ 8 : La toute AC sera $\sqrt{}\sqrt{}$ 18 + $\sqrt{}\sqrt{}$ 8. qui est irrationele appellee bimediale seconde.

THEOR. 28. PROP. XL.

Si deux lignes incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial, mais le composé de leurs quarrez est rationel sont assemblees, la toute sera irrationele : & soit icelle appelee ligne maieure.

Soient assemblees les deux lignes AB & BC incommenſurables en puiſſance, comprenant vn rectangle medial &. le compoſé de leurs quarrez rationel trouuees par la 34.p,10. Ie dis que la toute eſt irrationele.

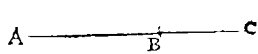
Car par hypotheſe le rectangle de AB & BC eſtant medial, deux fois le meſme rectangle ſera auſſi medial par le corollaire de le 24.p.10. & partant irrationel. Mais par hypotheſe le compoſé des quarrez de AB & BC eſt rationel : partant incommenſurable à deux fois le rectangle de AB & BC. Et par la 17.p.10. le compoſe des deux rectangles, & des deux quarrez (qui eſt le quarré de AC par la 4.p.2.) ſera incomméſurable au cōpoſe des deux quarrez de AB & BC qui eſt rationel: partant le quarré de AC ſera irrationel & ſon coſté AC auſſi irrationel: lequel ſera appellé ligne maieure.

SCHOLIE.

Soit AB $\sqrt{(18+\sqrt{216})}$ & BC $\sqrt{(18-\sqrt{216})}$: La toute AC ſera donc $\sqrt{(18+\sqrt{216})}+\sqrt{(18-\sqrt{216})}$, qui eſt irrationele nommee ligne maieure.

THEOR. 29. PROP. XLI.

Si deux lignes incommenſurables en puiſſance, comprenant vn rectangle ractionel, & le compoſé de leurs quarrez medial, ſont aſſēblees ; la toute ſera irrationele : ſoit icelle appelee ligne pouuant vn rationel & vn medial.



Soient aſſemblees les deux lignes AB & BC, de telle nature que demāde la propoſ. & qu'en ſeigne à trouuer la 35.p.10. Ie dis que la toute AC eſt irrationele.

Car puis que le compoſe des quarrez de AB & BC eſt medial, & leur rectangle rationel, deux fois iceluy rectangle ſera auſſi rationel, & incommenſurable au compoſé des quarrez de AB & BC, lequel eſtant medial, par la 16 p. 10. le compose des deux quarrez, & des deux rectangles, sçauoir le quarre de AC par la 4.p.2. sera incommensurable à deux fois le rectangle de AB & BC, lequel est rationel : Ainsi par la 10.d. 10. le quarre de AC sera irrationel : & par consequent la ligne AC aussi irrationele : laquelle sera appellee ligne pouuãt vn rationel & vn medial.

SCHOLIE.

Soit AB √ (√108 +- √72), & BC √ (√108 — √72:) La toute AC sera donc √ (√108 +- √72) +- √ (√108 — √72.)

THEOR. 30. PROP. XLII.

Si deux lignes incommensurables en puissance, comprenant vn rectãgle medial, incommensurable au composé de leurs quarrez aussi medial, sont assemblees, la toute sera irrationelle : Soit icelle appelee ligne pouuant deux mediaux.

Soient assemblees les deux lignes AB & BC (comme en la figure de la prop. 39.) de telle nature que demande la prop. & qu'enseigne à trouuer la 36.p.10. Ie dis que la toute AC est irrationele.

Soit exposee la rationele DE, sur laquelle soit faicte mesme construction qu'en la 39. p. 10. sçauoir que le rectangle D H soit egal au quarré de AC ; DG aux deux quarrez de AB & BC, lequel sera medial, comme le composé d'iceux quarrez, & incommens. au rectangle HF, egal a deux fois le rectãgle de AB & BC, aussi medial, ainsi qu'il a esté demonstré en la 39.p.10. & par la 1.p.6.& 10. p.10. EG & GF seront aussi incommens. en longitude. Mais les deux rectangles DG & HF estans mediaux, & appliquez sur la rationele DE, feront les deux autres costez EG & FG rationaux par la 23. p. 10. Ainsi EG & FG seront rationeles commens. en puissance seulement & par la 37.p.10. la toute EF sera irrationele. Mais DE estant rationele, le rectangle DF sera irrationel par le coroll. de la

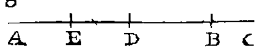
39.p.10. Partant la ligne qui peut iceluy rectangle, sçauoir AC sera irrationele: laquelle on appellera ligne pouuant deux mediaux.

SCHOLIE.

Soit AB $\sqrt{(\sqrt{48} + \sqrt{24})}$ *&* *BC* $\sqrt{(\sqrt{48} - \sqrt{24})}$: *Donc la toute AC sera* $\sqrt{(\sqrt{48} + \sqrt{24})} + \sqrt{(\sqrt{48} - \sqrt{24})}$

LEMME. I.

Si vne ligne droicte est couppee en deux inegalement en vn poinct, & derechef en deux inegalemẽt en vn autre poinct, & les parties de l'vne des diuisions sont inegales aux parties de l'autre diuision, chacune à la sienne: les quarrez des deux lignes de la plus inegale diuision sont plus grands, que les quarrez des lignes de la moins inegale.

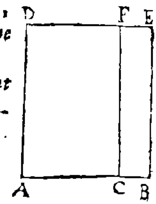


Soit la ligne droicte AC diuisee inegalement en B: & encores inegalement en E, & les premieres parties AB, BC soient plus inegales que les posterieures CE, AE: (c'est à dire que AE soit plus grande que BC.) Ie dis que les quarrez de AB & BC, sont plus grands que ceux de AE & EC.

Car si AC est couppee en deux egalement en D; d'autant que AB, & BC sont plus inegales que CE, AE, & que AE est plus grande que BC, il appert que ED sera plus petite que BD: or par la 5.p.2. le rectangle de AB & BC, auec le quarré de DB, est egal au quarré de DC: Item le rectangle de AE & EC, auec le quaré de DE, est aussi egal au quarré de DC: partant le rectangle de AE & EC auec le quarré DE, est egal au rectangle de AB & BC, auec le quarré de BD. Et en ostant les quarrez inegaux des lignes inegales DE, BD, le rectangle de AE & EC demeurera plus grand que le rectangle de AB & BC: & partant son double sera aussi plus grand que le double du rectangle de AB & BC. Maintenant les deux quarrez de AB & BC, & deux fois le rectangle de AB & BC, sont egaux au quarré de AC par la 4.p.2. auquel sont aussi egaux les deux quarrez de AE & EC, & deux fois le rectangle de AE & EC: & par consequent les composez des quarrez, & rectangles sont egaux entr'eux: mais les deux rectangles de AE & EC, ont esté demonstrez plus grands que les deux de AB & BC: partant les deux quarrez de AB & BC sont plus grands que les deux quarrez de AE & EC: Ce qui estoit proposé.

LEMME 2.

Vne figure rationele excede vne figure rationele, d'vne figure rationele.

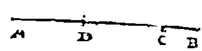


Soient les deux figures rationeles AE & AF, estant AE plus grande que AF de CE: Ie dis que CE est figure rationele.

Car AE & AF estans rationeles, elles seront aussi commens. & par la 16. p. 10. AF & CF seront commens. entr'elles, & par consequent rationeles.

THEOR. 31. PROP. XLIII.

La ligne binome ne peut estre diuisee en ses noms, qu'en vn poinct seulement.



Soit le binome AB diuisé en ses noms au poinct C: tellement que AC, CB, soiét rationeles commens. en puissance seulement, comme veut la 37. p 10. Ie dis qu'on ne peut diuiser AB en ses noms en vn autre poinct, sçauoir est que les lignes soient rationeles commens. en puissance seulement.

Car s'il se peut faire, soit diuisee derechef AB en ses noms au poinct D. Or il appert que AB n'est couppee en deux egalement és poincts C & D. Car AC, CB, ou AD, DB seroiét commens. en longit contre l'hypotese: il faut donc que AD & DB soient plus grandes ou plus petites que AC & CB, chacune à la sienne: car si elles estoient egales, elles seroient diuisees sur vn mesme poinct. Si AD & DB sont parties plus grandes que AC & CB, par le lemme qui suit la 42. p. 10. le composé des quarrez de AC & CB sera plus grand que le cõposé des quarrez de AD & DB: Et d'autant qu'iceux composez sont rationaux (car ce sont quarrez bastis sur lignes rationeles) leurs excez sera aussi rationel par le lemme preced. Or est il que le cõposé des quarrez de AC & CB, auec deux fois le rectangle de AC & CB, est egal au composé des quarrez de AD & DB, auec deux fois le rectangle de AD DB : (car iceux sont chacun egaux au quarré de AB par la 4.p.2.) Il faudra donc que d'autant que les quarrez de AC & CB, sont plus grands que les quarrez de AD & DB, d'autant les rectangles de AC & CB, soient plus petits que les rectangles de AD & DB : mais il a esté demonstré que l'excez des quarrez est rationel : donc l'excez des rectangles sera aussi rationel : (puis que ces excez sont egaux) qui est contre la 27.p.10. Car iceux rectangles par la 22.p.10. sont mediaux, d'autant que les lignes AC & CB, ou AD & DB, sont rationeles commens. en puissance seulement. Donc le binome AB n'a peu estre diuisé en ses noms qu'en C : car en quelque autre poinct qu'on le diuise, il s'ensuiura la mesme absurdité.

SCHOLIE.

Il est à noter qu'és cinq sortes de lignes irrationeles qui suyuent, iamais les deux noms d'icelles ne peuuent estre egaux : car comme il a esté dict cy dessus, ils seroient commens. en longit. & ils ont esté demonstrez incommens. en long. faut aussi remarquer que quand on dict qu'icelles lignes ne peuuent estre diuisees en leurs noms qu'au poinct proposé, faut entendre que le contredisant apportant vne autre diuision, les parties d'icelle doiuent estre inegales aux parties de la proposee.

THEOR. 32. PROP. XLIIII.

La bimediale premiere est diuisee en ses noms en vn poinct seulement.

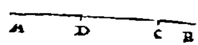
Soit la bimedialle premiere AB, diuisee en ses noms au poinct C en sorte que AC & BC soient mediales commens. en puissance seulement comprenant vn rectangle rationel, comme veut la 38. p.10. Ie dis qu'on ne la peut diuiser en ses nõs en vn autre poinct.

Car s'il se peut faire, soit AB derechef diuisee en D, sçauoir que AD & DB soient mediales commensurables en puissance seulement comprenant vn rectangle rationel. Nous demonstrerons tout ainsi qu'en la precedente proposition, que deux fois le rectangle de AD & DB sera autant plus grand que deux fois le rectangle de AC & BC, que les quarrez de AD & DB sont plus petits que les quarrez de AC & BC: Or tous iceux rectangles sont rationaux par l'hypotese. Donc leur excez sera rationel par le lemme qui precede la 45. p. 10. & par consequent l'excez des quarrez sera aussi rationel, ce qui est absurde: car iceux quarrez estans descrits sur lignes mediales, sont mediaux, & par la 27. p. 10. l'excez d'iceux ne sera rationel. Donc la ligne bimediale premiere AB ne pouuoit estre diuisee en ses noms, sinon au poinct C.

LEMME 2.

Si vne ligne droicte est couppee inegalement, les quarrez des deux parties seront plus grandes ensemble que deux fois le rectangle d'icelles parties.

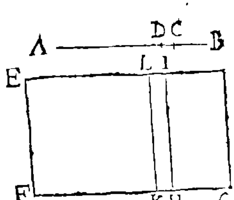
Soit la ligne droicte AB couppee inegalement en C: Ie dis que les quarrez de AC, CB sont plus grands que deux fois le rectãgle d'icelles AC, CB. Car ayant pris CD egale à la moindre partie CB, par la 7. p. 2. les quarrez de AC, CD, c'est à dire de AC, CB sont egaux à deux fois le rectãgle de AC, CD, (c'est à dire de AC, CB) auec le quarré de AD: & partant les deux quarrez de AC, CB sont plus grands que deux fois le rectangle de AC, CB: ce qui estoit proposé,



THEOR. 39. PROP. XLV.

La bimediale seconde, est diuisee en ses noms en vn poinct seulement.

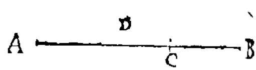
Soit la bimediale seconde AB diuisee en ses noms au poinct C, en sorte que AC & BC soient mediales commens. en puissance seulement comprenant vn rectangle medial, comme veut la 39. p. de ce liure: Ie dis qu'elle ne peut estre diuisee en ses nõs en vn autre poinct.



Car si faire se peut qu'elle soit encore diuisee en AD & DB, en sorte que dessus: & soit vne ligne rationele proposee EF, sur laquelle (par la 45.p.1. soit construit le rectangle EG, egal au quarré de AB. Item EH egal aux deux quarrez de AC CB: le reste IG sera egal à deux fois le rectangle de AC, CB, puis que par la 4.p.2. le quarré de AB est egal aux deux quarrez de AC, CB, auec deux fois le rectangle d'icelles AC, CB. En la mesme maniere si sur EF on applique EK egal aux quarrez de AD, DB: le reste LG sera egal à deux fois le rectãgle de AD, DB. Et pour autant que les quarrez de AC, CB, sont inegaux aux quarrez de AD, DB: leurs egaux rectangles EH, EK seront aussi inegaux: & partant les lignes FH, FK, seront inegales. Et derechef puis que les quarrez de AC, CB sont plus grands que deux fois le rectangle de AC, CB par le lemme precedent; EH sera aussi plus grand que IG: & partant EH plus grand que la moitié de EG: & consequemment la ligne FH plus grande que la moitié de la ligne FG. Nous demonstrerons par mesmes raisons que FK, est aussi plus grande que la moictié de FG. Donc les parties FH & HG, sont inegales aux parties FK, KG, chacune à la sienne. Et pource que AC, CB sont mediales, & cõmensurables en puissance; les quarrez d'icelles seront aussi mediaux & commensurables, & par la 16.p.10. le composé d'iceux sera aussi commensurable à vn chacun d'eux; lesquels estant mediaux leur composé, c'est à sçauoir le rectãgle EH sera aussi medial par le corol. de la 24.p.10. Par mesme raison EK sera demonstré medial: parquoy EH, EK appliquez sur la rationele EF, auront les costez FH, FK, rationaux commẽsurables en puissance seulement à la rationele EF, par la 23.p.10. Pareillement puis que le rectangle de AC, CB est posé medial; le double d'iceluy, sçauoir est IG, sera aussi medial par le corol. de la 24. p.10. & estant appliqué sur la rationele HI, l'autre costé HG sera aussi rationel commensurable en puissance seulement à icelle HI, par la 23.p. 10. Et puis que AC, CB sont incommensurable en longitude, & par la 1.p.6. comme AC est à CB, ainsi le quarré de AC est au rectangle de AC, CB: (car ils ont AC pour hauteur;) par la 10.p. 10. le quarré sera incommensurable au rectangle. Mais au quarré de AC est commensurable le composé des quarrez de AC, CB; (car d'autant que AC, CB sont commensurable en puissance, & partant les quarrez d'icelles commensurable, le cõposé d'iceux quarrez sera aussi commensurable au quarré de AC, par la 16.p.10.) & le rectangle de AC, CB est commensurable à son double. Donc aussi le composé des quarrez de AC CB, c'est à dire le rectangle EH est incommens. au double du rectangle de AC,CB, c'est à dire à IG, par le scholie de la 14 p.10 & d'autant que par la 1.p 6. comme EH est à IG, ainsi FH est à HG, par la 10.p.10. icelle FH,HG serõt incommens. en longit. Mais elles ont esté demonstrees rationeles : Donc FH,HG sont rationeles commens. en puissance seulement. Et par la 37 p.10. la toute FG sera binome, & diuisee en ses nõs au poinct H. En la mesme maniere nous demonstrerons aussi FG binome estre diuisee en d'autres noms à vn autre poinct K, ce qui est absurde : car par la 43.p.10. elle ne peut estre diuisee en ses noms qu'en vn seul poinct. Donc AB bimediale seconde ne peut estre diuisee en ses noms qu'au poinct C.

THEOR. 34. PROP. XLVI.

La ligne maieure, est diuisee en ses noms, en vn poinct seulement.



Soit la ligne maieure AB, diuisee en ses noms au poinct C, En sorte que AC & BC soient incommens. en puissance: & le composé de leurs quarrez soit rationel : mais le rectangle compris d'icelles, medial comme veut la 40 p. de ce liure. Ie dis qu'on ne pourra diuiser icelle AB en ses noms en vn autre poinct que C.

Car si faire se peut, qu'elle soit diuisee en ses noms en vn autre poinct D. Donc en quelque lieu que soit le poinct D, nous demonstrerons tout ainsi qu'en la 43.p. de ce liure, que les composez des quarrez de AC & BC, & de AD & DB ont vn mesme excez que les doubles rectangles de AC & BC, & de AD & DB. Mais d'autant que les composez quarrez sont rationaux par l'hypothese ; & par consequent leur excez rationel. il faudroit donc que l'excez des doubles rectangles (lesquels sont mediaux par le corol. de la 24.p.10.) fut rationel, ce qui est contraire à la 17 p.10. Donc la ligne maieure AB, ne sera diuisee en ses noms en autre poinct qu'en C.

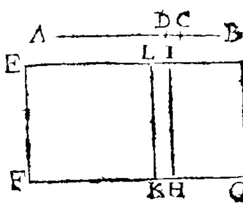
THEOR. 35. PROP. XLVII.

La ligne pouuant vn rational & vn medial, est diuisee en ses noms, en vn poinct seulemẽt.

Soit la ligne pouuant vn rationel & vn medial AB, diuisee en ses noms au poinct C, en sorte que AB & BC soient incommens. en puissance, comprenant vn rectangle rationel ; & que le cõposé de leurs quarrez soit medial : mais le rectangle d'icelles, rationel, comme veut la 41. p. 10. Ie dis qu'on ne pourra diuiser icelle AB en ses noms en vn autre poinct que C.
Car il s'ésuiuroit mesme absurdité qu'ẽ la prec. p. sçauoir que si on la diuisoit encores au point D, il s'ensuyuroit comme là, que l'excez des quarrez & des rectangles, seroit rationel, & medial.

THEO. 36. PROP. XLVIII.

La ligne pouuant deux mediaux, est diuisee en ses noms, en vn poinct seulement.



Soit la ligne pouuant deux mediaux AB, diuisee en ses noms au poinct C, en sorte que AC & BC soient incommens. en puissance, comprenant vn rectangle medial incommensur. au composé de leurs quarrez aussi medial, comme veut la 42. p. 10. Ie dis qu'on ne peut diuiser icelle AB en ses noms en vn autre poinct que C.

Autrement, si faire se peut, soit diuisee au poinct D : & sur la rationele proposee EF soit faite pareille cõstruction qu'en la 45. p. 10. sçauoir est le rectangle EG egal au quarré de AB, EH egal aux deux quarrez de AC & CB : & partant IG egal au double du rectangle de AC & BC (comme il a esté demonstré en ladite 45. p. 10.) & les deux rectangles EH & IG qui sont mediaux, feront les lignes FH & HG rationeles : mais le composé des quarrez de AC & BC est incommensur. au double de leur rectangle : (car par l'hypothese il est incom. à iceluy rectangle de AC, CB.) partant aussi les rectangles EG & EH seront incommens. Ainsi les lignes rationeles FH & HG seront commens. en puissance seulement : & par la 37. p. 10. AB sera binome diuisé en ses noms au poinct H. Que si on veut dire que AB peut encores estre diuisé en ses noms au poinct D : il s'ensuyura, comme en la 45. prop. 10. Que le binome FG, diuisé en ses noms au poinct H, se pourroit encore diuiser en ses noms au poinct K, contre la 42.p.10. Ainsi AB ne pouuoit estre diuisee en ses noms qu'au seul poinct C.

SECONDES DEFINITIONS.

Vne ligne rationele estant proposee, & le binome diuisé en ses noms : lors que le plus grand nom peut plus que le plus petit du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude.

1. Si le plus grand nom est commensurable en longitude à la rationele proposee : toute la ligne soit appellee Binome premier.

2. Mais si le plus petit nom est commensurable en longitude à la rationele proposee : toute la ligne soit appellee Binome second.

3. Que si ny l'vn ny l'autre nom n'est commensurable en longitude à la rationele proposee: toute la ligne soit appellee Binome troisiesme.

Et lors que le plus grand nom peut plus que le plus petit du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude.

4. Si le plus grād nom est commensurable en longitude à la rationele proposee : toute la ligne soit appelee Binome quatriesme.

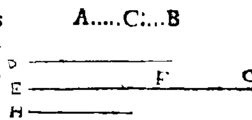
5 Mais si le plus petit nom est cōmensurable en longitude à la rationele proposee: toute la ligne est appelee Binome cinquiesme.

6. Que si ny l'vn ny l'autre nom n'est commēsurable en longitude à la rationele proposee; la toute soit appelee Binome sixiesme.

Il n'est rien dict icy des lignes, desquelles les deux noms soient commensurables en longitude à la rationele proposee : parce que telles lignes ne sont binomes : car par la 37 p 10. tout binome est composé de deux lignes rationeles commens. en puissance seulement.

PROB. 13. PROP. XLIX. Six. 3.

Trouuer vn Binome premier.



Estans trouuez deux nombres quarrez AB, CB (comme nous auons enseigné au scholie 2. de la 29.p.10.) desquels l'excez AC ne soit quarré, afin que AB CB soiét comme nombre quarré à nombre quarré, & AB, AC ne soiét comme quarré à quarré : Soit vne rationele proposee D, à laquelle soit pris EF commens. en longitude: & icelles D & EF seront rationeles commens. en long. En apres par le corol. de la 6.p.10. soit faict comme le nombre AB est à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de FG. Ie dis que la toute EG est binome premier.

Car puis que les quarrez de EF, FG qui sont entr'eux comme les nombres AB, AC sont commens. par la 6 p. 10. aussi les lignes EF, FG seront commensur. au moins en puissance : Et d'autant que EF est rationele, aussi FG sera rationele. Mais pource que AB, AC ne sont comme nombre quarré à nombre quarré, les quarrez d'icelles rationeles EF, FG ne sont comme nombre quarré à nombre quarré ; & partant les lignes EF FG sont incommens. en longitude par la 9.p.10. elles sont dőc rationeles commens. en puissance seulement : & par la 37.p.10 la toute EG sera binome. Ie dis aussi qu'il est premier. Car puis que les quarrez de EF, FG sont entr'eux comme les nombres AB, AC ; & AB est plus grand que AC, aussi le quarré de EF sera plus grand que le quarré de FG : soit donc du quarré de H (trouué par le lemme qui suit la 14.p.10) Et puis que comme le nombre AB est à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de FG : par conuersion de raison comme AB à CB, ainsi le quarré de EF sera au quarré de H. Mais AB est à CB comme nombre quarré à nombre quarré : donc le quarré de EF sera au quarré de H, comme nombre quarré a nombre quarré ; & partant les lignes EF, H sont commens. en longitude par la 9 p.10. Veu donc que EF plus grand nom est commens. en long. à la rationelle D, & peut plus que le moindre nom FG du quarré de H qui luy est commens. en longitude; EG sera binome premier par la 1. des secondes def.

SCHOLIE.

Soit la rationele proposee D 8, & EF 6. faisant donc que comme AB 9. est à AC 5, ainsi 36. quarré de EF soit au quarré de FG; icelle FG sera $\sqrt{20}$: & partant la toute EG, sera 6 + $\sqrt{20}$. qui est binome premier.

PROBL. 14. PROP. L.

Trouuer vn binome second.

Estans trouuez les deux nombres quarrez AB, CB, comme en la prop. precedente, & pris FG commensurable en longitude à vne rationele proposee D : icelles D & FG seront rationeles commensurables: puis apres par le corol. de la 6. p. 10. soit faict comme le nombre AC au nombre AB, ainsi le quarré de FG au quarré de EF. Ie dis que EG est binome second.

Car on demonstrera premierement tout ainsi qu'en la precedente que EG est binome. Et puis que cóme le nombre AC est au nombre AB, ainsi le quarré de FG au quarré EF: en changeant comme AB à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de FG. Mais AB est plus grand que AC: Donc aussi le quarré de EF sera plus grand que le quarré de FG, & soit du quarré de H. Nous demonstrerons maintenant comme en la precedente prop. que H & EF sont commensurables en longitude. Et partant que le plus grand nom EF, peut plus que le moindre nom FG du quarré de H qui luy est commensurable en longitude, & le moindre nom FG commensurable en longitude à la rationele D: & par la 2. def. EG, sera binome second.

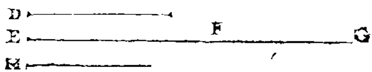
SCHOLIE.

La rationele proposee D, soit 7. & FG 5: faisant donc que comme AC 5. est à AB 9. ainsi 25. quarré de FG soit au quarré de EF; icelle EF sera $\sqrt{45}$. & partant la toute EG sera $\sqrt{45}+5$, qui est binome second.

PROB. 15. PROP. LI.

Trouuer vn binome troisiesme.

A..... C.... B
I......



Estant trouuees deux nõbres AB,CB comme en la 49.p.10. soit pris vn autre nombre I qui ne soit a l'vn ny a l'autre d'iceux AB,AC, cõme nombre quarré à nombre quarré (ce qui se faict prenant I nombre non quarré prochainement plus grand que AC. Car puis qu'il n'est quarré. Il ne sera au quarré AB, comme nombre quarré a nombre quarré. Derechef puis qu'il est non quarré prochainement plus grand que AC, il differe d'iceluy par l'vnité, ou par le binaire: Parquoy il ne tombera entre I & AC vn moyen proportionel, comme nous auons demonstré au scholie de la 8.p.8. Ils ne seront donc plans semblables; & partant ne serõt entr'eux comme nombres quarrez) & apres auoir exposé la rationele D, par le corol. de la 6.p.10. soit faict comme I à AB. Ainsi le quarré de D, au quarré de EF: ainsi les quarrez de D, & EF, estans comme nombre à nombre seront commensurables par la 6. p.10. & partant les lignes D, & EF aussi commensurables au moins en puissance. D estant donc rationele, EF sera aussi rationele. Mais parce que I n'est a AB, c'est à dire le quarré de D au quarré de EF, comme nombre quarré à nombre quarré; D & EF seront incommensurables en longitude par la 9 p.10. Derechef soit faict par le susdit corol. comme AB à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de FG: & par la 6. p. 10. iceux quarrez de EF, FG estans comme nombre quarré à nõbre quarré, seront commens. & partant les lignes EF, FG aussi commensurables au moins en puissance; & EF estant rationele, FG le sera aussi. Et d'autant que AB n'est à AC. c'est à dire le quarré de EF au quarré de FG, comme nombre quarré à nombre quarré; les lignes EF, FG seront incommensurable en longitude par la 9. p.10. & partant icelles EF, FG sont rationeles cõmensurables en puissance seulement: & par la 37. p.10. la toute EG sera binome. Ie dis aussi qu'elle est binome troisiesme. Car d'autant que comme I est à AB, ainsi le quarré de D au quarré de EF; & comme AB à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de FG, par raison egale comme I sera à AC, ainsi le quarré de D au quarré de FG. Mais I n'est à AC, comme nombre quarré à nombre quarré ; donc les quarrez de D, FG ne seront aussi comme nombre quarré à nombre quarré: & partant les lignes D, & FG, seront incommensurables en longitude par la 9.10. Et puis que comme AB est à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de FG ; & AB est plus grand que AC, aussi le quarré de EF sera plus grãd que le quarré de FG: soit donc plus grand du quarré de H. Maintenant nous demonstrerons comme en la 49.p.10. que EF & H, sont commensurables en longitude. Donc le plus grand nom EF, peut plus que le moindre FG du quarre de H qui luy est commensurable en longitude, & l'vne ny l'autre d'icelles EF, FG n'est commensurable en longitude a la proposee rationele D, cóme il a este demonstré : partant EG sera binome troisiesme par les secondes definitions.

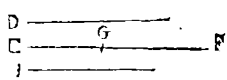
SCHOLIE.

La rationele proposee D soit 6: faisant donc que comme 16. est à AB 9. ainsi 36. quarré de D soit au quarré de EF ; icelle EF sera $\sqrt{}$ 54; & faisant que comme AB 9 est à AC 5, ainsi 54 quarré de EF soit au quarré de FG; icelle FG sera $\sqrt{}$ 30: & partant la toute EG sera $\sqrt{}$ 54 + $\sqrt{}$ 30, qui est binome troisiesme.

PROB. 16. PROP. LII.

Trouuer vn binome quatriesme.

A...... C... B



Estans trouuez deux nombres AC, CB, tels que le composé d'iceux AB, ne soit a l'vn ny a l'autre comme nombres quarrez (cõme nous auons enseigné au 3. scholie de la 29.p. de ce liure:) Soit exposé la rationele D. & pris EG commensurable en longitude à icelle rationele D. & par consequent EG sera aussi rationele: Et ayant construit le reste comme en la 49.p.10. Nous demonstrerons comme là que la toute EF est binome. Item que le quarré de EG peut plus que le quarré de FG; & que par conuersion de raison, comme AB est a CB, ainsi le quarré de EG au quarré de H. Mais AB n'est à CB comme nombre quarré à nombre quarré:

Donc le quarré de EG ne ſera au quarré de H, comme nombre quarré à nõbre quarré. & par la 9. p. 10. les lignes EG & H, ſont incom. en longitude : parquoy puis que le plus grand nom EG peut plus que le moindre nom FG du quarre de H, qui luy eſt incommenſurable en longitude. & qu'icelle EG eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſee D ; EF ſera binome quatrieſme par les def. ſecondes.

SCHOLIE.

La rationele expoſee D ſoit 8, & EG 6 : faiſant donc que comme AB 9 eſt AC 6 ainſi le quarré de EG ſçauoir 36. ſoit au quarré de FG ; icelle FG ſera trouuee de √24 : & partant la toute EF ſera 6 + √24, qui eſt binome quatrieſme.

PROB. 17. PROP. LIII.

Trouuer vn binome cinquieſme.

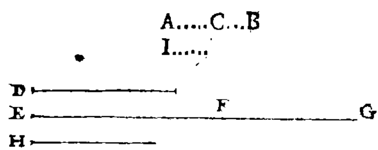
Eſtans trouuees les deux nombres AC, CB comme en la precedente prop. & fait la conſtruction comme en la 50 p. on demonſtrera comme en ladite 50 p. que EF eſt binome. Item que le quarré de EG eſt plus grand que le quarré de FG du quarré de H Et comme la precedente qu'icelles EG & H ſont incommenſ. en longitude : & partant par les ſecondes deff. EF eſt binome cinquieſme.

SCHOLIE.

La rationele propoſee D ſoit 7, & FG 6 : donc faiſant que comme AC 6 eſt à AB 9, ainſi le quarré de GF, ſçauoir eſt 36, ſoit au quarré de EG ; icelle EG ſera trouuee de √54 : partant la toute EF ſera √54 + 6, qui eſt binome cinquieſme.

PROBL. 18. PROP. LIV.

Trouuer vn binome ſixieſme.

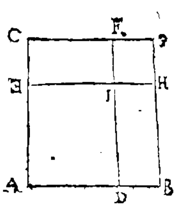


Soient expoſez 2. nombres AC, CB, tellement que le cõpoſé d'iceux AB ne ſoit à l'vn ny à l'autre comme nõbre quarré à nõbre quarré (ce qu'on fera adiouſtant enſemble deux nõbres premiers entr'eux : Car par la 30.p.7 le total sera aussi premier à chacun deux ; & partant ne sera a l'vn ny à l'autre comme nombre quarré a nombre quarré, par les choses demonstrees à la fin du 8. liure) Et soit pris quelque autre nombre non quarré I, afin qu'iceluy ne soit a AB, ny a AC, comme nombre quarré à nombre quarré. En apres soit vne rationele proposee D : & par le corol. de la 6 p. 10. soit faict comme I à AB, ainsi le quarré de D au quarré de EF : & ayāt acheué comme en la 51.p 10. nous demonstrerons comme là que EG est binome : en apres que D & FG sont incommensurables en longitude, & que le quarré de EF, est plus grand que le quarré de FG du quarré de H. Finalement nous demonstrerons comme en la 49. p. que par conuersion de raison, comme AB à CB, ainsi le quarré de EF au quarré de H. Mais AB n'est pas à CB, comme nombre quarré à nombre quarré, ny par consequent le quarré de EF au quarré de H : donc par la 9 p. 10. les lignes droictes EF & H, seront incommens. en longitude. Parquoy puis que le plus grand nom EF peut plus que le moindre FG du quarré de la ligne H qui luy est incōmens. en longitude: & l'vn ny l'autre d'iceux noms n'est commens. en long. a l'exposee rationele D, par les secondes def. EG sera binome sixiesme.

SCHOLIE.

La rationele proposee D soit 6 : faisant que comme I 6 est à AB 8, ainsi le quarré de D, c'est à sçauoir 36, au quarré de EF : icelle EF sera trouuee de √ 48 : & faisant que cōme AB 8 est à AC 5, ainsi 48 quarré de EF soit au quarre de FG : icelle FG sera trouuee de √ 30 : partant la toute EG sera √ 48 + √ 30, qui est binome sixiesme.

LEMME.



Les quarrez AI, IG estans conioincts à l'angle I tellement que les costez DI, IF facent vne seule ligne droicte DF; & par consequent les costez EI, IH aussi vne seule ligne droicte EH ; estāt acheue le parallelogramme BC. Ie dis qu'iceluy est quarre : & EF estre rectangle moyen proportionel entre les quarrez AI, IG : & EG moyen prop. entre les quarrez AG, IG.

Car d'autant que EI est egale à ID, mais HI à IF: la toute EH sera egale à la toute DF. Mais par la 34. p. 1. la ligne EH est egale à l'vne & à l'autre d'icelles AB, CG: & DF à AC, BG: & par consequent chacune d'icelles AB, CG est egale à l'vne & à l'autre AC, BG: dont le parallelogramme BC est equilateral. Mais par la 29. p. 1. il est aussi rectangle: & partant quarre. Derechef puis que comme DI est à IF, ainsi EI à IH. Mais par la 1. p. 6. comme DI à IF, ainsi AI à EF: & comme EI à IH, ainsi EF à IG: donc comme AI à EF, ainsi EF à IG: & partant EF est moyen prop. entre AI, IG. Et finalement veu que comme AE à EC, ainsi CF à FG, icelles estãs egales chacune à la sienne: & en cõposant comme AC à EC, ainsi CG à FG. Mais comme AC à CE, ainsi AC à EG: & comme CF à FG ainsi EG à IG par la 1 p. 6. Donc comme AG à EG, ainsi EG à IG; & par consequent EG est moyen prop. entre AG, IG.

Or voila comme Commandin propose & demonstre ce lemme: mais Clauius le propose ainsi.

Si vne ligne droicte est couppee comme on voudra, le rectangle contenu sous les parties, est moyen proportionel entre les quarrez d'icelles. Item le rectangle contenu soubs la toute, & vne des parties, est moyen prop. entre le quarré de la toute, & le quarré de ladite partie.

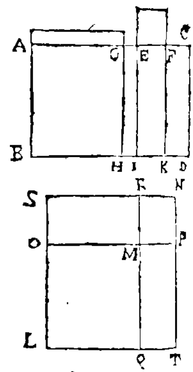
Ce qui est la mesme chose que dessus.

THEOR. 37. PROP. LV. Six. 4.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, & d'vn binome premier; la ligne pouuant iceluy rectangle est binome.

Soit le rectangle AD, compris de la rationele AB & du binome premier AC: Ie dis que la ligne qui peut iceluy rectangle est binome.

Car d'iceluy binome AC, le plus grand nom soit AE: donc par la def. AE, EC sont rationeles commens. en puissance seulement, & AE pourra plus que EC du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longit. & aussi AE sera commens. en longit. a la rationele proposee AB. Soit coupée EC en deux egalement en F. Donc puis que AE peut plus que EC du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longit. si sur icelle AE on applique vn rectangle egal au quart du quarré de EC, c'est a



dire au quarré de EF, & defaillant d'vne figure quarree, il diuisera icelle AE en parties commens. en longitude par la 18 p 10. soient donc icelles parties AG, GE· & par les poincts G, E, F soiét menees GH, EI, FK paralleles à icelles AB, CD. puis par la 14. p. 2. soient descrits les quarrez LM, MN egaux aux deux rectangles AH, GI, & disposez en sorte que OM, MP facent vne ligne droicte: puis soit acheué le rectangle ST, lequel sera quarré par le lemme precedent.

Maintenant d'autant que par la cōstruction le rectangle de AG, GE est egal au quarré de EF: les lignes AG, EF, GE seront prop. par la 17. p. 6 Donc par la 1 p. 6. les rectangles AH, EK, GI serót aussi proportionaux: parquoy EK sera moyē prop entre AH, GI, ou leurs egaux quarrez LM, MN. Mais par le lemme precedent OR est aussi moyen prop. entre iceux quarrez LM, MN: donc OR, EK seront egaux. Mais par la 43. p. 1. OR, QP sont egaux: & par la 36. p. 1. EK est egal à FD: donc QP sera aussi egal à FD: & par consequāt tout le quarré LN egal a tout le rectangle AD: & ainsi la ligne OP peut le rectangle AD: Ie dis donc qu'icelle OP est binome.

Car puis que AG, GE ont esté demonstrees commens. en longitude, la toute AE sera aussi commens. en longitude à chacune d'icelles par la 16. p. 10. Mais AE est aussi commens. en longitude à AB: donc par la 12 p. 10. icelle AB est aussi cōmens. en longit. à chacunes d'icelles AG, GE: & partant AB estant rationele, AG, GE seront aussi rationeles: & par la 20. p 10. les rectangles AH, GI contenus sous icelles rationeles, seront rationaux: donc aussi rationaux leurs egaux quarrez LM, MN: & par consequent les lignes OM, MP seront aussi rationeles. Et d'autant que AE est incommens. en longitude à EC, mais commēs à AG, & EC à sa moitié EF, par le scholie de la 14. p. 10. AG EF seront incommens. en long. parquoy AH, EK qui ont mesme raison que AG, EF par la 1. p. 6. sont aussi incommens. par la 10. p. 10. & par consequent leurs egaux LM, QP: donc par la 10. p 10. les lignes OM, MP sont aussi incommens. en longitude, puis que par la 1. p. 6. elles sont en mesme raison que LM, QP. Mais OM, MP, ont esté demonstrees rationeles; & partant elles sont rationelles commens.

en puissance seulement : donc la toute OP pouuant le rectangle AD est binome par la 37 p.10. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 5, & AC 4 + √12. Donc le rectangle AD sera 20 + √300: Et, puis que AE plus grand nom du binome est 4, & EF moitié du plus petit nom EC, est √3; AG sera 3, & GE 1. Donc le rectangle AH sera 15. & la ligne OM qui peut iceluy rectangle sera √15: Ainsi GI est 5, & MP √5 Mais EF est √3, & EI egale à AB: donc EK sera √75, & son double ED √300. Or si on multiplie OM, MP entr'elles, sera produicte MT √75, egal à EK. Mais à iceluy MT est egal MS: donc MS, MT ensemble seront aussi √300. Or les quarrez LM 15, MN 5, font ensemble 20 : Partant tout le quarré LN est 20 + √300, & son costé OP ou LT √15 + √5, qui est binome sixiesme.

THEOR. 38. PROP. LVI.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele & d'vn binome second ; la ligne qui peut iceluy rectangle, est bimediale premiere.

Soit le rectangle AD, compris de la rationele AB & du binome second AC: Ie dis que (apres auoir faict pareille construction & demonstration qu'en la precedente) la ligne OP qui peut iceluy rectangle AD, est bimediale premiere.

Car puis que AC est binome second, AE sera incommensurable en longitude à la rationele AB: Item AG & EG (qu'on prouuera estre commens. en longitude entr'elles, comme en la precedente, & par la 16.p.10. à leur toute AE) seront par la 14.p.10. aussi incommens. en longitude à icelle AB, laquelle estant rationele, icelles AG, GE seront aussi rationeles : & par consequent commens. en puissance seulement à icelle rationele AB. Donc par la 22.p.10. les rectangles AH, GI serõt mediaux ; & leurs egaux quarrez LM, MN aussi mediaux : Et partant les lignes OM, MP mediales, lesquelles on prouuera estre commens. en puissance seulemēt, tout ainsi qu'en la precedente. Et d'autant que EC est commens. en longitude à la rationele AB, le rectangle ED sera rationel par la 20. p. 10. aussi sera sa moitié EK : & par consequent son egal QP compris des deux mediales OM, MP : & par la 38. p. 10. OP est bimediale premiere.

SCHOLIE,

La rationele AB soit 5, & AC $\sqrt{48} + 6$ *: donc le rectangle AD sera* $\sqrt{12000} + 30$. *Et puis que AE est* $\sqrt{48}$ *, & EC 6 : EF sera 3, & son quarré 9, auquel estant posé egal le rectangle de AG, GE, icelles seront* $\sqrt{27}$, *&* $\sqrt{3}$ *: parquoy le rectangle AH sera* $\sqrt{675}$. *& par consequent la ligne OM, qui peut iceluy sera* $\sqrt{\sqrt{675}}$ *: ainsi GI sera* $\sqrt{75}$, *& MP* $\sqrt{\sqrt{75}}$. *Or EC est 6 : partant ED double de MS* $\sqrt{\sqrt{50625}}$, *c'est à dire 15, est 30 ; & par consequent MS, MT, seront aussi 30. Parquoy tout le quarré LN composé des quarrez LM* $\sqrt{675}$, *MN* $\sqrt{75}$, *& des deux rectangles MS, MT 30, sera* $\sqrt{1200} + 30$ *, & son costé OP ou LT* $\sqrt{\sqrt{675}} + \sqrt{\sqrt{75}}$ *, qui est bimediale premiere.*

THEOR. 39. PROP. LVII.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, & d'vn binome troisiesme ; la ligne qui peut iceluy rectangle est bimediale seconde.

Soit le rectangle AD, compris de la rationele AB & du binome troisiesme AC (apres auoir construit comme aux precedentes.) Ie dis que la ligne OP, qui peut iceluy rectangle AD, est bimediale seconde.

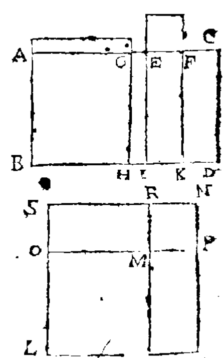
Car on prouuera comme en la precedente, que les deux lignes OM, MP sont mediales commensurables en puissance seulement ; Item d'autant que AC est binome troisieme, EC est commensurable en puissance seulement à la rationele AB ; & par la 22. p. 10. Le rectangle ID sera medial, aussi sera sa moitié EK : Et par consequent medial son egal QP (compris des deux mediales OM & MP.) Ainsi OM, MP sont deux mediales commensurables en puissance seulement comprenant vn rectangle medial, & par la 39 p. 10. OP sera bimediale seconde.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 5, & AC √32 + √24: Donc le rectangle AD sera √800 + √600. Mais d'autant que AE est √32, & EC √24, EF sera √6, au quarré de laquelle est posé egal le rectangle de AG, GE; & partant AG sera √18, & GE √2. Parquoy le rectangle AH sera √450, & GI √50; & par consequent la ligne OM est √√450, & MP √√50. Et puis que EI est 5, & EC √24, le rectangle ED sera √600, lequel est double de MT √150. Donc tout le quarré LN, qui est composé des quarrez LM √450, MN √50, & des rectangle MS, MT √600; sera √800 + √600; & partant son costé OP est √√450 + √√50. qui est bimediale seconde.

THEOR. 40. PROP. LVIII.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, & d'vn binome quatriesme; la ligne qui peut iceluy rectangle est ligne Maieure.



Soit le rectangle AD, compris du binome quatriesme AC & de la rationele AB (apres auoir construict & demonstré comme en la 55.p.) Ie dis que OP qui peut iceluy rectangle AD est ligne maieur.

Car puis que AC est binome quatriesme, AE plus grand nom est commensurable en longitude à la rationele AB, & peut plus que EC du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude, & par la 19.p.10. le rectangle deffaillant compris sous AG, GE (qui est egal au quart du quarré de EC) diuisera AE en AG & EG incommens. en longitude: & les rectangles AH & GI seront incõmens. par la 1.p.6. & 10.p.10. Donc aussi incõmens. leurs egaux quarrez LM, & MN: & par consequent les lignes OM, MP seront incommens. en puissance. Mais le rectangle AI cõpris des rationeles AB, AE, est rationel par la 20.p.10. (qui est egal aux quarrez LM, MN). Et le rectangle QP compris d'icelles lignes OM, MP est medial, car son egal EK est medial, comme son double EC par la 22 p.10. estant ED rationele commens. en puissance seulement à AB : & par la 40.p. 10. OP est ligne maieure.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 5, & AC $4+\sqrt{8}$: Donc le rectangle AD sera $20+\sqrt{200}$. Et puis que AE est 4, & EC $\sqrt{8}$; EF sera $\sqrt{2}$, au quarré de laquelle, sçauoir 2, ayant esté posé egal le rectangle de AG, GE; la ligne AG sera $2+\sqrt{2}$, & GE $2-\sqrt{2}$: partant le rectangle AH sera $10+\sqrt{50}$, & GI $10-\sqrt{50}$; & par consequent OM est $\sqrt{(10+\sqrt{50})}$ & MP $\sqrt{(10-\sqrt{50})}$. Or ED estoit $\sqrt{8}$, donc FD double du rectangle MT $\sqrt{50}$; sera $\sqrt{200}$. La somme des quarrez LM, MN, sera donc 20, à laquelle si on adiouste les plans TMS $\sqrt{200}$, on aura pour tout le quarré LN $20+\sqrt{200}$; & partant son costé OP sera $\sqrt{(10+\sqrt{50})}+\sqrt{(10-\sqrt{50})}$ ou $\sqrt{(20+\sqrt{200})}$ qui est ligne maieure.

THEOR. 41. PROP. LIX.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, & d'vn binome cinquiesme ; la ligne qui peut iceluy rectangle, est ligne irrationele pouuant vn rationel & vn medial.

Soit le rectangle AD, compris de la rationele AB, & du binome cinquiesme AC ; Ie dis (apres auoir construit & demóstré comme en la 55.p.) que OP qui peut iceluy rectangle AD, est ligne irrationele, pouuant vn rationel & vn medial.

Car puis que AC est binome cinquiesme, AE plus grand nom peut plus que EC du quarré d'vne ligne qui luy est incómens. en longitude : & comme en la precedente AG & EG seront incommens. en longitude : Et les lignes OM, MP serót incommens. en puissance, & l'egal au composé de leurs quarrez, sçauoir le rectangle AI, est medial par la 22. p. 10 car les lignes AB & AE sont rationeles commens. en puissance seulement. Et d'autant que AB, & le plus petit nom EC, sont commens. en longitude, par la 20. p. 10. ED est rationel : aussi sera sa moitié EK, & son egal QP, compris des lignes QM, MP, & par la 41. p. 10. OP est ligne irrationele pouuant vn rationel, & vn medial.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 5, & AC √ 8 +– 2. Donc le rectangle AD sera √ 100 +– 10. Et d'autant que AE est √ 8. & EC 2; EF sera 1, au quarré de laquelle estant egal le rectangle de AGE, le costé AG sera √ 2 +– 1: & GE √ 2 — 1: & partant le rectangle AH sera √ 50 +– 5, & la ligne OM √ (√ 50 +– 5); & MP √ (√ 50 — 5), puis que GI est √ 50 — 5. Et pource que EI est 5. & EC 2; le rectangle ED sera 10; & par consequent sa moictié MT est 5 Donc la somme des quarrez LM MN, est √ 100, à laquelle adioustant les rectangles SMT 10, tout le quarré LN sera √ 100 +– 10: & par consequent son costé OP, est √ (√ 50 +– 5) +– √ (√ 50 — 5), ou bien √ (√ 200 +– 10) qui est ligne pouuant vn rationel, & vn medial.

THEOR. 42. PROP. LX.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, & d'vn binome sixiesme ; la ligne qui peut iceluy rectangle, est ligne pouuant deux mediaux.

Soit le rectangle AD, compris de la rationele AB, & du binome sixiesme AC: (apres auoir construit & demonstré comme en la 55. p que OP peut iceluy rectangle AD) Ie dis qu'icelle OP, est ligne pouuant deux mediaux.

Car puis que AC est binome sixiesme, AE plus grand nom peut plus que EC du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude, & si les deux noms sont incommensurables en lõgitude à la rationele AB: Et comme il a esté demonstré à la 58. p. 10. OM, MP seront incommensurable en puissance; & si par la 22. p. 10 Le rectangle AI, qui est egal au composé de leurs quarrez est medial; Item EC qui est compris de deux rationeles commensurables en puissance seulement, est aussi medial par la mesme prop. aussi medial sa moitié EK, & son egal QP compris d'icelles lignes OM, MP. Et si iceluy rectangle QP, ou son egal EK est incommens. au cõposé des quarrez LM, MN, sçauoir AI : car les lignes AE & EC estant incommens. en longitude, aussi AE & EF le seront: & par la 1. p. 6. & 10 p 10. Les rectangles AI & EK seront incommens. Et par la 41 p. 10. OP sera ligne pouuant deux mediaux.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 5, AC √12 + √8. Do c le rectangle AD sera √300 + √200. Et pource que AE est √12, & EC √8; EF sera √1, au quarre de laquelle estant egal le rectangle de AGE; le costé AG sera √3 + 1, & le costé GE √3 — 1: Parquoy le rectangle AH sera √75 + 5:, & la ligne OM √ (√75 + 5:) & GI estant √75 — 5, MP sera √ (√75 — 5.) Mais EC estant √8, le rectangle ED double d MT √50; sera √200. Donc les quarrez LM, MN, fer nt ensemble √300, & les rectangles SMT √200 ; & partant tout le quarré LN sera √300 + √200; & par cõsequent son coste OP sera √ (√75 + 5) + √ (√75 — 5) ou bien √ (√300 + √200,) qui est ligne pouuant deux mediaux.

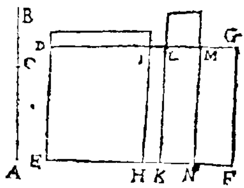
THEOR. 43. PROP. LXI. Six. 5.

Le quarré d'vn binome, appliqué sur vne ligne rationele, faict l'autre costé binome premier.

Soit le binome AB, le plus grand nom duquel est AC; & sur la rationele DE soit appliqué par la 45. p. 1. le rectãgle DF egal au quarré de AB : Ie dis que l'autre costé DG est binome premier.

Car sur la mesme DE soit construit le rectangle DH egal au quarré de AC : & sur HI vn autre rectangle IK egal au quarré de CB: Il est donc euident par la 4 p. 2. que le reste LF est egal à deux fois le rectangle de AC, CB : & en diuisant LG egalement en M, & en menant MN parallele a CD, chasque rectangle LN, MF sera egal au rectangle de AC, CB. Et d'autant que AB est binome, AC, CB sont rationeles commens.

en puis-



en puissance seulement ; & leurs quarrez seront rationaux, & leurs egaux rectãgles DH & IK aussi rationaux ; & par la 21. p. 10. les costez DI & IL seront rationelés commẽsurables en longitude à la rationele DE, & entr'elles par la 12. p. 10. Et par la 16 p. 10. la toute DL sera cõmens. en longitude à chacune DI, IL, & par la 12. p. 10. elle sera rationele & commens. en longitude à DE rationele : Et d'autant que par la 21. p. 10. le rectangle de AC, CB est medial, son double LF sera aussi medial : & par la 22. p. 10. Iceluy medial LF estant appliqué sur la rationele LK, l'autre costé LG sera aussi rationel incommens. en longit. à icelle LK, c'est à dire à DE, à laquelle DL estant commens. en longit. par la 13 p. 10. DL, LG sont incommens. en longit. mais elles sont rationeles : elles seront donc commens. en puissance seulement ; & par la 37 p. 10. DG est binome. Ie dis en outre que c'est binome premier.

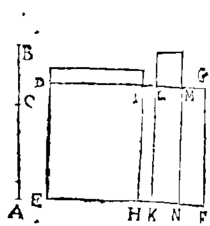
Car il appert par le lemme de la 54. p. de ce liure, que le rectangle de AC, CB est moyen prop. entre les quarrez d'icelles AC, CB : donc aussi LN moyen prop. entre DH, IK : & par consequent la ligne LM moyenne prop. entre les lignes DI, IL par la 1 p. 6. & par la 17. p. 6. le rectangle de DI, IL sera egal au quarré de LM : Et d'autant que les quarrez de AC, CB sõt commens. (car icelles AC, CB sont posees commensur. en puissance) leurs egaux DH, IK seront aussi commens. Donc aussi commens. en longitude les lignes DI, IL par les 1 p. 6. & 10. p. 10. Et d'autant que les deux quarrez de AC & CB sont plus grands que leur rectangle deux fois, par le lemme qui suit la 44. p. de ce liure : partant DK sera plus grand que LF ; & DL plus grand nom que LG : car icelles lignes sont entr'elles comme DK à LF, par la 1. p. 6. Et puisque le rectangle de DI, IL appliqué sur DL, est egal au quarré de LM, c'est à dire au quart du quarré de LG, & deffaillant d'vne figure quarree, & les parties DI IL sont commens. en longitude ; icelle DL peut plus que LG du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longit, par la 18. p. 10. & partant icelle DL ayant esté demonstree commens. en long. à la rationele DE, par les secondes def. DG sera binome premier.

SCHOLIE.

Le binome AB soit √ 45 +- 3, & la rationele DE 6. d'autant que le plus grand nom AC est √ 45 son quarré est 45 , lequel applique sur DE 6, faict l'autre costé DI de $7 \frac{1}{2}$: Et le moindre nom CB estant 3, son quarré est 9, qui appliqué sur IH 6, fait IL de $1\frac{1}{2}$, & partant la toute DL est 9, Or le rectangle de ACB est √ 405, & son double LF √ 1620. Donc la ligne FG sera √ 45; & par consequent la toute DG sera 9 +- √ 45, qui est binome premier.

THEOR. 44. PROP. LXII.

Le quarré d'vne bimediale premiere, appliqué sur vne ligne rationele , faict l'autre costé binome second.



Soit la bimediale premiere AB, diuisee en ses noms en C, dont le plus grand soit AC, (apres auoir construit comme en la precedente) Ie dis que DG est binome second.

Car puis que AB est bimediale premiere, par la 38. p. 10. AC, CB sõt mediales commensur. en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel, duquel le double LF sera aussi rationel, & par la 21. p. 10. LG sera rationele commens. en longitude à DE. Mais icelles deux lignes AC & CB estans mediales, leurs quarrez sont mediaux : & partant leurs egaux rectangles DH, IK seront aussi mediaux & commens. Et d'autant que par la 16. p. 10. le total DK est cõmens. à chacun d'iceux DH, IK, par le coroll. de la 24. p. 10. iceluy DK sera aussi medial : Et par la 23. p. 10. son autre costé DL sera rationel incommens. en longitude à la rationele DE : & par la 13. p. 10. DL, LG seront incommens. en long. & partant rationeles commens. en puissance seulement : & par la 37. p. 10. DG sera binome. Ie dis d'auantage qu'il est binome premier. Car il se prouuera comme en la precedente que DL est plus grand nom, & qu'il peut plus que le moindre LG du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude. Nous auons aussi monstré que LG plus petit nom, est commens. en longitude à la rationele DE : & partant par les secondes def. DG est binome second.

SCHOLIE.

La bimediale AB soit $\sqrt{}\sqrt{}180 + \sqrt{}\sqrt{}12$, & la rationele DE 4. D'autant que le plus grand nom AC est $\sqrt{}\sqrt{}108$ son quarré est $\sqrt{}108$, lequel estant appliqué sur la rationele DE 4, le coste DI sera $\sqrt{}6\frac{3}{4}$: Ainsi aussi le moindre nom estant $\sqrt{}\sqrt{}12$, son quarre est $\sqrt{}12$; & par consequent IL est $\sqrt{}\frac{3}{4}$, & la toute DL $\sqrt{}12$. Or le rectangle de ACB est 6: & partant le rectangle KG double d'iceluy est 12, & le coste LG 3. Donc la toute DG sera $\sqrt{}12 + 3$, qui est binome second.

THÉOR. 45 PROP. LXIII.

Le quarré d'vne bimediale seconde, appliqué sur vne ligne rationele, faict l'autre costé binome troisiesme.

Soit la bimediale seconde AB, diuisee en ses noms en C desquels AC soit le plus grand. (Apres auoir construit comme en la 61. p.) Ie dis que DG est binome troisiesme.

Car puis que AB est bimediale seconde, par la 39. p. 10. AC, CB sont mediales commensurable en puissance seulement comprenant vn rectangle medial; partant les quarrez d'iceux AC, CB seront commensurables & mediaux; & aussi leurs egaux rectangles DH, IK: & par la 16. p. 10. le total DK est commensurable à chacun d'iceux, DH, IK: donc par le corol. de la 24. p. 10, DK sera aussi medial, & estant appliqué sur la rationele DE, par la 23. p. 10. son autre costé DL, sera rationel incommensurable en longitude à icelle DE. Derechef puis que le rectangle de AC, CB est medial, son double LF le sera aussi; & iceluy LF estant appliqué sur la rationele LK, son autre costé LG sera rationel incommensurable en longitude à LK: c'est à dire à DE : Donc l'vne & l'autre d'icelles lignes DL, LG, est rationele & incommensurable en longitude à la rationele DE. Et d'autant que comme AC à CB, ainsi le quarré de AC au rectangle de AC & CB, par la 1.p.6. Il est euident par la 10. p. 10. que le quarré sera incommensurable au rectangle (estans les deux lignes incommensurable en longitude. Mais par la 16. p. 10. au quarré de AC est commensurable le composé des quarrez de AC, CB; & au rectangle de AC, CB est commensurable son double: Donc le composé des quarrez de AC, CB, c'est à dire le rectangle de DK est incommensurable au double du rectangle de AC, CB; c'est à dire au rectangle LF. par le scholie de la 14. p. 10. parquoy les lignes DL LG qui sont en mesme raison que DK, LF sont incommens. en longit. par la 10 p. 10. mais elles sont rationeles: & partant commens. en puissance seulement: & par la 37. p. 10. DG est binome.

Ie dis d'auantage qu'il est binome troisiesme. Car il a esté demonstré que les deux noms sont incommens. en longitude à la rationele DE: Et se prouuera comme à la 61. p. que DL peut plus que LG du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude: & par les secondes def. DG est binome troisiesme.

SCHOLIE.

AB soit $\sqrt{}\sqrt{}\,72 + \sqrt{}\sqrt{}\,8$, & DE 4. Donc DH sera $\sqrt{}\,72$, IK $\sqrt{}\,8$, & LN ou MF $\sqrt{}\,24$, qui appliquez sur DE; DI sera $\sqrt{}\,4\frac{1}{2}$. IL $\sqrt{}\,\frac{1}{2}$, & LM ou MG $\sqrt{}\,1\frac{1}{2}$: & partant la toute DL sera $\sqrt{}\,8$, & LG $\sqrt{}\,6$. Parquoy la toute DG est $\sqrt{}\,8 + \sqrt{}\,6$, qui est binome troisiesme.

THEO. 46. PROP. LXIIII.

Le quarré d'vne ligne maieur, appliqué sur vne ligne rationele, faict l'autre costé binome quatriesme.

Soit la ligne maieur AB, diuisee en ses noms en C, dont le plus grand soit AC. (apres auoir construit comme en la 61. p. de ce liure). Ie dis que DG est binome quatriesme.

Car puis que AB est ligne maieur, par la 40. p. AC, & CB sont incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel: partant le rectangle DK egal au composé d'iceux quarrez est aussi rationel, lequel estant appliqué sur la rationele DE, son autre costé DL sera aussi rationel cōmens. en longitude à icelle DE par la 21. p. 10. Item le rectangle LF double du rectangle de AC, CB sera medial, lequel apliqué sur LK, c'est à dire sur la rationele DE, par la 23. p. 10. LG sera rationele incommensurable en longitude à DE. Et partant par la 13. p. 10. Les rationeles DL & LG, seront incommensurable en longitude. Donc commensurable en puissance seulement: & par la 37. p. 10. DG est binome.

Ie dis d'auantage qu'il est binome quatriesme. Car puis que les lignes AC & CB sont incommens. en puissance, leurs quarrez seront incommens. partant aussi leurs egaux rectangles DH, IK, & les lignes DL, & IL incommens. Et d'autant que nous demonstrerons comme en la 61. p. que DL est plus grande que LG, & sur DL est appliqué le rectangle de DI, IL egal au quart du quarré de LG, & defaillant d'vne figure quarrée, lequel diuise icelle DL en parties incommensurables en longitude, par la 19. p. 10. DL, qui est commensurable en longitude à la rationele DE, peut plus que GL du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude, & par les secondes def. DG est binome quatriesme.

SCHOLIE.

La ligne maieur AB soit $\sqrt{}(10 + \sqrt{}37\frac{1}{2}) + \sqrt{}(10 - \sqrt{}37\frac{1}{2})$, *& la rationele DE soit* 5. *Donc le rectangle DH sera* $10 + \sqrt{}37\frac{1}{2}$, *IK* $10 - \sqrt{}37\frac{1}{2}$: *LN ou MF* $\sqrt{}62\frac{1}{2}$, *qui appliquez sur DE, le costé DI sera* $2 + \sqrt{}1\frac{1}{2}$ *IL* $2 - \sqrt{}1\frac{1}{2}$ *& LM ou MG* $\sqrt{}2\frac{1}{2}$. *Parquoy DL sera* 4, *& LG* $\sqrt{}10$; *& par consequent la toute DG est* $4 + \sqrt{}10$, *qui est binome quatriesme.*

THEOR. 47. PROP. LXV.

Le quarré d'vne ligne pouuant vn rationel & vn medial, appliqué sur vne ligne rationele, faict l'autre costé binome cinquiesme.

Soit la ligne pouuant vn rationel & vn medial AB, diuisee en ses noms au poinct C, dont le plus grand est AC (apres auoir construit comme à la 61.p.) Ie dis que DG est binome cinquiesme.

Car puis que AB est ligne pouuant vn rationel, & vn medial, AC, CB, par la 41.p.10. sont incommens. en puissance, comprenant vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarrez medial : Partant le rectangle DK egal au composé d'iceux quarrez est aussi medial, lequel estant appliqué sur la rationele DE, son autre costé DL sera aussi rationel commensurable en puissance seulement a icelle DE par la 23. p.10 Item le rectangle de AC, CB estant rationel, son double LF sera aussi rationel, & par la 21.p.10. Iceluy LF estãt apliqué sur LK, c'est à dire sur la rationele DE, son autre costé LG, sera ligne rationele com en longi. à icelle DE; & par la 13.p.10. les rationeles DL, LG seront cõm. en puissance seulemẽt, & par la 36. p.10. DG sera binome. Ie dis de plus, qu'il est binome cinquiéme. Car LG est commens. en longitude à la rationele DE, & si on prouuera comme en la precedente, que DL peut plus que LG, du quarre d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude, & par les secondes definitions DG est binome cinquiesme.

SCHOLIE.

La ligne AB soit $\sqrt{(\sqrt{125}+5)}+\sqrt{(\sqrt{125}-5)}$, *& la rationele* DE 5. *Donc le rectangle DH sera* $\sqrt{125}+5$, *IK* $\sqrt{125}-5$, *& LN, ou MF* 10, *qui apliquez sur* DE, *le costé DI sera* $\sqrt{5}+1$, *IL* $\sqrt{5}-1$, *& LM, ou* MG 2. *Parquoy DL sera* $\sqrt{20}$. *& LG* 4, *& par consequent la toute DG est* $\sqrt{20}+4$, *qui est binome cinquiesme.*

THEOR. 48. PROP. LXVI.

Le quarré d'vne ligne pouuant deux medianx aplíqué sur vne ligne rationelle, faict l'autre costé binome sixiesme.

Soit la ligne pouuant deux mediaux AB, diuisee en ses nõs au poinct C, dont le plus grand est AC. (Apres auoir construit comme aux precedentes) ie dis que DG est binome sixiesme.

Car puis que AB est ligne pouuant deux mediaux, par la 42.p.10. AC, CB sont incommens. en puissance, comprenant vn rectangle medial, incommens. au composé de leurs quarrez aussi medial : ainsi il est euident que DK & LF sont mediaux, & incommens. & par la 23.p.10. iceux estans appliquez sur lignes rationeles, leurs autres costez DL, LG seront rationaux commensur. en puissance seulement à la rationele DE. Mais iceux costez DL, LG estans entr'eux comme les parallelogrammes DK, LF, lesquels sont incommens. seront aussi entr'eux incommens. en longitude, par la 10.p.10 Donc les rationeles DL, LG seront incommens. en puissance seulemẽt, & par la 37.p.10. DG est binome, duquel les deux noms sont incommens. en longit. à la rationele DE : & comme il a esté demonstré aux precedentes, le plus grand d'iceux DL peut plus que le moindre LG, du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longit. & par les secondes def. DG est binome sixiesme.

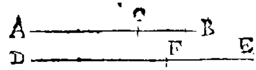
SCHOLIE.

La ligne AB soit $\sqrt{}(\sqrt{252} + \sqrt{72}) + \sqrt{}(\sqrt{252} - \sqrt{72})$, & DE 6. Le rectangle DH sera donc $\sqrt{252} + \sqrt{72}$, IK $\sqrt{252} - \sqrt{72}$, & LN, ou MF $\sqrt{180}$, qui appliquez à DE, le costè DI est $\sqrt{7} + \sqrt{2}$, IL $\sqrt{7} - \sqrt{2}$, & LM ou MG $\sqrt{5}$. Partant DL est $\sqrt{28}$, & LG $\sqrt{20}$; & par consequent la toute DG est $\sqrt{28} + \sqrt{20}$, qui est binome sixiesme.

THEOR. 49. PROP. LXVII. Six. 6.

La ligne commens. en longitude au binome, est aussi binome de mesme ordre.

Soit quelconque binome AB diuisee en ses noms au poinct C, desquels AC est le plus grãd, & CB le moindre : & soit la ligne droicte DE, commensurab. en longitude au binome AB. Ie dis que DE est aussi binome, & de mesme ordre que AB.



Car ayant fait par la 12.p.6. comme la toute AB est à la toute DE, ainsi la retranchee AC à la retranchee DF, par la 19.

p.5. le reste CB sera au reste FE, comme la toute AB à la toute DE. Et pource que AB, DE, sont commens. en longit. par la 10.p.10. AC, DF, & CB, FE, seront aussi commens. en long. Mais par la 37.p.10 AC, CB, sont rationeles. Donc aussi DF, FE sont rationeles. Et puis que comme AC à DF, ainsi CB à FE, en changeant comme AC sera à CB, ainsi DF à FE. Mais AC, CB sont rationeles commensur. en puissance seulement: donc aussi DF, FE seront rationeles commens. en puissance seulement. Et partant par la 37.p.10 DE est binome. Maintenant ie dis qu'il est aussi binome de mesme ordre que AB.

Car si AC peut plus que CB du quarré d'vne ligne qui luy soit commens. en longitude, aussi par la 15. p. 10. DF pourra de mesme plus que FE. Et si AC est commens. en longitude à la rationele proposee, aussi sera DF par la 12. p. 10. Veu que l'vne & l'autre est commens. en longitude à la mesme AC: Et partant AB, & DE seront binome premier: Si BC est commens. en longitude à la rationele exposee, aussi sera FE: ainsi AB & DE seront binome second: si AC & BC sont incommens. en longitude à la rationele, aussi seront DF & FE, & par les def. AB & DE seront binome troisiesme. Que si AC peut plus que CB du quarré d'vne ligne qui luy soit incomm. en longitude, aussi par la 15. p. 10. DF pourra de mesme plus que FE. Parquoy nous demonstrerons comme dessus, que AB, DE, seront binome ou quatriesme, ou 5. ou 6. Partant AB, DE, seront binomes de mesme ordre.

THEOR. 50. PROP, LXVIII.

La ligne commens. en longitude à vne bimediale, est aussi bimediale de mesme ordre.

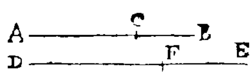
Soit quelconque bimediale AB, diuisee en ses noms au poinct C, desquels AC est le plus grand, & CB le plus petit, & à icelle AB soit commensurable en longitude la ligne DE. Ie dis qu'elle est aussi bimediale de mesme ordre qu'icelle AB.

Car (apres auoir construit comme en la precedente) le reste CB sera au reste FE, cõme la toute AB, à la toute DE: & partant par la 10.p.10. AC sera com. en long. à DF, & CB à FE. Mais AC, CB sont mediales: donc par la 24.p.10. DF, FE, cõmens. à icelles sont aussi mediales. Et puis que comme AC à DF, ainsi CB à FE, en changeant comme AC à CB, ainsi DF à

FE. Mais AC, CB sont commens. en puissance seulement, par la 38.p.10. Donc aussi DF, FE seront commensurables en puissance seulement, par la 10.p.10. mais elles sont aussi mediales: & partant par la 38. ou 39 p.10. DE sera bimediale. D'auantage ie dis qu'elle est en mesme ordre que AB. Car d'autant que comme AC est à DF, ainsi BC à FE, par la 22.p.6. Le quarré de AC sera au quarré de DF, comme le rectangle de AC, BC, est au rectangle de DF, FE, (estant iceux rectangles semblables, d'autant qu'ils ont les costez prop.) Mais le quarré de AC est commensurable au quarré de DF, ainsi par la 10.p.10. les rectangles seront aussi commens. que si l'vn est rationel, l'autre le sera aussi. Et partant AB, & DE seroient bimediales premieres, par la 38.p.10. Que si l'vn des rectangles est medial, l'autre sera aussi medial, & AB & DE seront bimediales secondes, par la 39.p.10. Ainsi DE sera bimediale, & en mesme ordre que AB.

THEOR. 51. PROP. LXIX.

La ligne commens. à vne ligne maieur, est aussi ligne maieur.



Soit la ligne maieur AB, diuisee en ses noms en C, & à icelles soit commens. DE. Ie dis qu'elle est aussi ligne maieur.

Car (apres auoir construict comme aux precedentes) AC sera à CB cōme DF à FE, & AC commens. à DF & CB à FE: mais par la 41.p.10. AC & CB sont incommens. en puissance; aussi DF & FE seront incommens. Item puis que icelles lignes AC, CB, DF, FE sont proport. par la 22.p.6. leurs quarrez seront proportionnaux: & en composant, les deux de AC & BC seront au seul de CB, cōme les deux de DF & FE, sont au seul de FE, & en changeant les deux quarrez de AC, & CB, seront aux deux de DF & FE, comme le seul de CB est au seul de FE. Mais les lignes CB, FE estans commens. leurs quarrez seront aussi commens. & partant les deux de DF & FE, seront par la 10.p.10. commens. aux deux de AC & BC: & seront rationaux comme iceux. Itē on prouuera comme en la precedente que le rectangle de DF

& FE est commensurable au rectangle de AC & BC : lequel estant medial, par la 40.p.10. aussi sera celuy de DF & FE, par le corol. de la 24.p.10. Parquoy DE sera ligne maieure.

THEOR. 52. PROP. LXX.

La ligne commensurable a vne ligne pouuant vn rationel, & vn medial ; est aussi ligne pouuant vn rationel, & vn medial.

Soit la ligne AB pouuant vn rationel & vn medial, diuisee en ses noms en D, & à icelle soit commens. la ligne DE. Ie dis qu'elle est aussi pouuant vn rationel & vn medial.

Car (apres telle construction qu'aux precedentes) on prouuera que comme AC & BC sont incommens. en puissance, aussi seront DF & FG. Item les quarrez de AC & BC composez seront commens. au composé des quarrez de DF & FE; & le rectangle de AC & BC sera commens. au rectangle de DF & FE. Mais par la 41.p.10. le composé des quarrez de AC & BC est medial, & leur rectangle rationel : Partant le composé des quarrez de DF & FE sera aussi medial, & leur rectangle rationel: & DE sera ligne pouuant vn rationel, & vn medial, par la 40.p.10.

THEOR. 53. PROP. LXXI.

La ligne commensurable à vne ligne pouuant deux mediaux ; est aussi ligne pouuant deux mediaux.

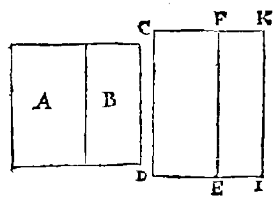
Soit la ligne AB pouuant deux mediaux, diuisee en ses nõs au poinct C, & à icelle soit commens. DE. Ie dis qu'elle est aussi ligne pouuant deux mediaux.

Car (apres construction faicte comme aux precedentes) on prouuera tout de mesme que DF & FE sont incommens. en puissance: que le composé de leurs quarrez est medial, & leur rectangle medial : Mais puis que le composé des quarrez de

AC & BC, est au composé des quarrez de DF & FE, comme le quarré de CB au quarré de FE: & que par la 22 p. 6. comme le quarré de CB au quarré de FE, ainsi le rectangle de AC & BC, au rectangle de DF & FE, par la 11.p.5. Le composé sera au composé, comme le rectangle au rectangle: Et en châgeant, comme le composé des quarrez de AC & BC est incommens. à leur rectangle, aussi le composé des quarrez de DF & FE est incommens. a leur rectangle, & par la 42.p.10. DE est ligne pouuant deux mediaux.

THEOR. 5. PROP. LXXII. Six. 7.

Si vne superficie rationelle, & vne mediale sont ioinctes, la ligne qui peut tout le composé est binome, ou bimediale premiere, ou ligne maieure, ou ligne pouuant vn rationel, & vn medial.



Soient ioinctes deux superficies A rationele & B mediale: ie dis que la ligne qui peut toutes les deux est binome, ou bimediale premiere, ou ligne maieur, ou ligne pouuant vn rationel & vn medial.

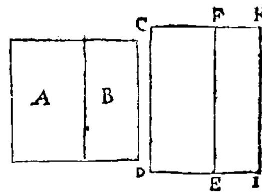
Car premierement les deux superficies ne sçauroient estre egales (car ou elles seroient toutes deux rationeles, ou toutes deux mediales). Soit donc premierement A plus grande que B: Et sur la rationele CD soit appliqué le rectangle CE egal à A: & sur EF vn autre rectangle FI egal à B. Et puis que A est rationele, & B mediale, aussi CE sera rationel, & FI medial, lesquels estans appliquez à la rationele CD; CF sera rationele commens. en longit. à icelle CD par la 21.p. 10. & aussi FK rationele, mais incommens. en longit. à CD par la 23.p.10. & par la 13.p.10. les rationeles CF, FK seront incommens. en lõgitude, donc commens. en puissance seulement: & par la 37. p.10. CK sera binome diuisé en ses noms en F: Et par la 1.p.6. CE estant plus grande que FI: CF sera le plus grand nom, lequel peut plus que FG du quarré d'vne ligne qui luy est cõmenſ. ou incommenſ. en long. Si commenſ. (eſtant CF commenſ. en longitude à la rationele CD) CK ſera binome premier par la 1. des ſeconde def. Et par la 55. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI eſt binome. Si incommenſ. CK ſera binome quatrieſme, par la 4. des ſecondes def. & par la 58. p. 10. la ligne qui peut iceluy rectangle CI eſt ligne maieure. Que ſi A eſt plus petit que B, auſſi CE ſera plus petit que FI, & CF ſera le plus petit nom commenſ. à la rationele CD : & par ce moyen CK ſera binome ſecond ou cinquieſme : ſi binome ſecond, par la 56. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI eſt bimediale premiere. Si binome cinquieſme, par la 59. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI eſt ligne pouuant vn rationel & vn medial.

SCHOLIE.

Si la ſuperficie rationele A eſt 7, & la mediale B $\sqrt{48}$. la ligne pouuant icelles adiouſtees enſemble ſera $2+\sqrt{3}$, qui eſt binome premier : ſi A & B ſont 21 & $\sqrt{432}$, la ligne pouuant icelles ſera $\sqrt{12}+3$, qui eſt binome ſecond : mais elle ſera $\sqrt{8}+\sqrt{6}$, qui eſt binome troiſieſme, ſi A eſt 14. & B $\sqrt{192}$: mais ſi A eſt 6, & B $\sqrt{32}$, elle ſera $2+\sqrt{2}$, qui eſt binome quatrieſme : ſi A eſt 3 & B $\sqrt{8}$, elle ſera $\sqrt{2}+1$ qui eſt binome cinquieſme : & ſi A eſt 5, & B $\sqrt{24}$, la lig. pouuãt la cõpoſee d'icelles ſera $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ qui eſt binome 6. mais ſi A eſt 4 & B $\sqrt{18}$, la lig. pouuãt la ſuperficie cõpoſee d'icelles ſera $\sqrt{\sqrt{8}}+\sqrt{\sqrt{2}}$, qui eſt mediale premiere : mais ſi A eſt 6. & B $\sqrt{12}$, la ligne pouuant la compoſee d'icelles ſera $\sqrt{(6+\sqrt{12})}$ ou $\sqrt{(3+\sqrt{6})}+\sqrt{(3-\sqrt{6})}$: & finalement ſi A eſt 2, & B $\sqrt{8}$, la ligne pouuant icelles ſera $\sqrt{(\sqrt{8}+2)}$, ou $\sqrt{(\sqrt{2}+1)}+\sqrt{(\sqrt{2}-1)}$, qui eſt ligne pouuant vn rationel & vn medial.

THEOR. 55. PROP. LXXIII.

Si deux ſuperficies mediales incommenſurables ſont iointes ; la ligne qui peut tout le cõpoſé eſt bimediale ſeconde, ou ligne pouuant deux mediaux.



Soient les deux superficies mediales incommens. A & B: Ie dis que la ligne qui peut toutes les deux est bimediale seconde, ou ligne pouuant deux mediaux.

Soit faicte construction cōme en la precedente sur la rationele CD: les rectangles CE & FI seront mediaux & incommens. Et par la 22. p. 10. CF FK seront rationeles commens. en puissance seulement entr'elles, & à la rationele CD: & par la 37. p. 10. CK sera binome. Soit donc CF le plus grand nom: Car CF & FK ne sçauroient estre egales, d'autant qu'elles sont incommens. en longitude: Donc CF peut plus que CG du quarré d'vne ligne qui luy est commens. ou incommens. en longitude. Si commens. CK est binome troisiesme par la 3. d. secondes (estans les deux noms incommens. en longitude à la rationele) & par la 57 p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI est bimediale seconde: Si incommens. CK, par la 6. des secondes def. sera binome sixiesme: & la ligne qui peut le rectangle CI est par la 60. p. 10. ligne pouuant deux mediaux.

SCHOLIE.

Si A est $\sqrt{}\,50$, & B $\sqrt{}\,48$. la ligne pouuant la composee d'icelles sera $\sqrt{}\sqrt{}\,18 + \sqrt{}\sqrt{}\,8$, qui est bimediale seconde: mais si A est $\sqrt{}\,12$, & B $\sqrt{}\,8$, ladite ligne pouuant icelles sera $\sqrt{}(\sqrt{}\,12 + \sqrt{}\,8)$, ou bien $\sqrt{}(\sqrt{}\,3 + 1) + \sqrt{}(\sqrt{}\,3 - 1)$, qui est ligne pouuant deux mediaux.

COROLAIRE.

De toutes ces choses on peut facilement colliger que le binome, & les autres lignes irrationeles qui suyuent icelle, sont differentes entr'elles, & à la mediale. Car le quarré d'vne ligne mediale, appliqué sur vne ligne rationele, faict l'autre costé rationel commens. en puissance seulement à la rationele à laquelle il est appliqué par la 23 p. 10.

Mais le quarré d'vn binome, faict l'autre costé binome premier par la 61. p. 10.

Le quarré d'vne bimediale premiere, faict l'autre costé binome se-

cond, par la 62. p. 10.

Le quarré d'vne bimediale seconde, fait l'autre costé binome troisiesme, par la 63. p. 10.

Le quarré d'vne ligne maieure, fait l'autre costé binome quatriesme, par la 64. p. 10.

Le quarré d'vne ligne pouuant vn rationel & vn medial, faict l'autre costé binome cinquiesme, par la 65. p. 10.

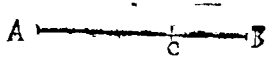
Le quarré d'vne ligne pouuant deux mediaux, faict l'autre costé binome sixiesme, par la 66. p. 10.

Mais il faut tousiours entendre qu'ils soient appliquez sur vne ligne rationele. Et puis que tous ces costez sont differens entr'eux, il est manifeste que toutes icelles lignes irrationelles sont differentes entr'elles.

ICY COMMENCENT LES *sixaines des lignes irrationelles par le retranchement.*

THEOR. 56. PROP. LXXIV.

Si d'vne ligne rationele, est retranchee vne ligne rationele commens. en puissance seulemēt à la toute; le reste est irrationel: Soit appelé Residu.



Soit retranchee de la rationele AB la rationele AC, en sorte que AB & AC, soient rationeles commens. en puissance seulement: Ie dis que le reste CB est irrationel.

Car par la 1. p. 6. comme AB est à AC, ainsi le quarré de AB est au rectangle de AB & AC: mais AB est incommensura. en longitude à AC. Donc par la 10. p. 10. Le quarré de AB est incommens. au rectangle de AB & BC : Partant aussi à son double: mais les quarrez de AB & AC, sont posez commens. Donc par la 16. p. 10. les deux ensemble seront commens. au seul de AB: & partant puis que le quarré de AB est incomméſurable au double du rectangle de AB, AC, par la 14 p. 10. les quarrez de AB & AC, ſeront auſsi incommenſ. à deux fois le rectangle de AB & AC, leſquels auec le quarré de CB, eſtans egaux aux 2 quarrez de AB & AC par la 7. p. 2. il s'enſuiura que le quarré de CB auec deux fois le rectangle de AB, & AC ſeront incommenſurable à iceux deux rectangles : Et par le corol. de la 17. p. 10. deux fois le rectangle auec le quarré de CB, (ou les deux quarrez de AB & AC) ſeront incommenſ. au quarré de CB; Mais iceux quarrez de AB, AC, eſtãs rationaux (car ils ſont deſcrits ſur lignes rationeles) le quarré de CB ſera irrational: Partant la ligne CB ſera auſsi irrationele appelee Reſidu.

SCHOLIE.

La rationele AB ſoit 2 & AC $\sqrt{3}$: Donc le reſte BC ſera $2 - \sqrt{3}$. Or en ceſte prop. & és 5 ſuiuantes, ou Euclide monſtre l'origine des Apotemes ou reſidus, il ne veut dire autre choſe, ſinon que ſi aux lignes dont il s'agit és prop. 37. 38. 39. 40 41. & 42, on retranche le plus petit nom du plus grand, ce qui reſtera eſt irrationel appelé reſidu, &c.

THEOR. 57. PROP. LXXV.

Si d'vne ligne mediale, eſt retranchee vne mediale commenſ. en puiſſance ſeulement à la toute, comprenant auec la toute vn rectãgle rationel; le reſte eſt irrationel: Soit appelé reſidu medial premier.

Soit la mediale AC, de laquelle eſt retranchee la mediale AB en ſorte que AB & AC ſont mediales commenſ. en puiſſance, comprenant vn rectangle rationel: Ie dis que le reſte BC eſt irrationel,

Car puis que AB & AC ſont mediales, leurs quarrez ſeront mediaux, & partant incommenſ. au double du rectangle de AB & AC, lequel eſt rationel: Et par la 7. p. 2. deux fois le rectangle de AB & AC auec le quarré de BC eſtans egaux aux quarrez de AB & AC, seront incommens. au double du rectangle de AB & AC, & par la 17 p. 10. le quarré de BC sera incommens. au double du rectangle AB & AC, lequel estant rationel, le quarré de BC sera aussi irrationel ; & partant la ligne BC aussi irrationele, qu'on appellera residu medial premier.

SCHOLIE.

La mediale AC soit $\sqrt{\sqrt{54}}$, & la retranchée AB $\sqrt{\sqrt{24}}$: donc le reste BC sera $\sqrt{\sqrt{54}} - \sqrt{\sqrt{24}}$.

THEOR. 58. PROP. LXXVI.

Si d'vne ligne mediale est retranchee vne ligne mediale commens. en puissance seulemẽt à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial; le reste est irrationel: Soit appelé residu medial second.

Soit la mediale AB, de laquelle est retranchée la mediale AC, en sorte que AB & AC soient commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial : Ie dis que le reste CB est irrationel.

Car puis que les quarrez de AB & AC sont commensurab. par la 16 p. 10. le composé d'iceux sera aussi commensur. à vn chacun d'eux : & chacun d'iceux estant medial, pource que les lignes AB, AC sont posees mediales) aussi le composé d'iceux quarrez est medial par le coroll. de la 24. p. 10 comme aussi le double du rectangle de AB, AC, puis que le seul rectangle de AB, AC est posé medial. Veu donc que par la 7. p. 2. le composé des quarrez de AB, AC, est egal au double du rectangle de AB, AC auec le quarré de CB : le composé des quarrez de AB, AC, qui est medial, excedera le double du rectangle de AB, AC, qui est aussi medial, du quarré de CB. Mais par la 27. p. 10. vn medial n'excede pas vn medial, d'vn rationel : donc le quarré de CB n'est pas rationel ; & partant il est irrationel ; & la ligne BC sera aussi irrationele, qu'on appellera residu medial second.

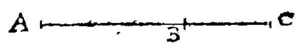
SCHOLIE.

SCHOLIE.

La médiale AB soit $\sqrt{}\sqrt{}18$, *&* *AC* $\sqrt{}\sqrt{}8$: *donc le reste CB sera* $\sqrt{}\sqrt{}18-\sqrt{}\sqrt{}8$.

THEOR. 59. PROP. LXXVII.

Si d'vne ligne droicte est retranchee vne ligne droicte incommensurable en puissance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel; le reste sera irrationel: Soit appellé ligne Mineure.



Soit la ligne droicte AC, de laquelle est retrãchee AB incommen. en puissance à la toute AC, comprenant auec icelle vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez est rationel: Ie dis que le reste BC est irrationel.

Car puisque le composé des quarrez de AB, & AC est rationel, il est incommens. au rectangle de AC & AB, lequel est medial: partant aussi au double d'iceluy rectangle. Mais par 17. p. 2. le composé des quarrez de AB, AC est egal au double du rectangle de AB, AC, ensemble au quarré de CB: donc par le corol. de la 17. p. 10. le composé d'iceux quarrez de AB, AC sera aussi incommens. au quarré de CB. Et puis qu'iceluy cõposé est posé rationel, par la 10. d. le quarré de BC est irrationel, & la ligne BC irrationele, qu'on appellera ligne mineure.

SCHOLIE.

Soit la ligne AC $\sqrt{}(18+\sqrt{}108)$. *&* *AB* $\sqrt{}(18-\sqrt{}108)$: *le reste BC sera donc* $\sqrt{}(18+\sqrt{}108)-\sqrt{}(18-\sqrt{}108)$.

THEOR. 60. PROP. LXXVIII.

Si d'vne ligne droicte est retranchee vne ligne droicte incõmensurable en puissance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarrez medial, le reste sera irrationel : soit appelé ligne faisant auec vne superficie rationelle vn tout medial.

Soit la ligne droicte AC, de laquelle est retranchee AB incommens. en puissance a la toute, comprenant auec icelle vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarrez est medial. Ie dis que le reste BC est irrationel.

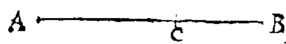
Car puis que le rectangle de AB & AC est rationel, aussi sera son double, & partant par la 10. d. il sera incommensurable au composé des quarrez de AC & AB, lequel est medial, c'est à dire irrationel. Mais le composé d'iceux quarrez par la 7. p. 2. est egal au double du rectangle de AB, AC, ensemble au quarré de BC. Donc aussi le double du rectangle de AB, AC est incommensurable au double d'iceluy rectangle auec le quarré de BC : Et par la 17. prop. 10. iceluy double rectangle sera aussi incommens. au quarré de BC. Et puis que iceluy double rectangle est rationel, par la 10. d. le quarré de BC sera irrationel, & la ligne BC irrationele. appellee ligne faisant auec vne superficie rationele, vn tout medial, ainsi nommee à cause que le quarré d'icelle ligne adiousté auec vne superficie rationele fait vn tout medial comme il apparoistra à la 109. p. 10.

SCHOLIE.

Si AC est $\sqrt{(\sqrt{216}+\sqrt{72})}$ *&* *AB* $\sqrt{(\sqrt{216}-\sqrt{72})}$*; le reste BC sera* $\sqrt{(\sqrt{216}+\sqrt{72})}-\sqrt{(\sqrt{216}-\sqrt{72}.)}$

THEOR. 61. PROP. LXXVIIII.

Si d'vne ligne droicte, est retrãchee vne ligne droicte incommensurable en puissance à la toute, comprenant auec icelle vn rectãgle medial, incommensurable au composé de leurs quarrez aussi medial; le reste est irrationel : soit appelé ligne faisãt auec vne superficie mediale vn tout medial.



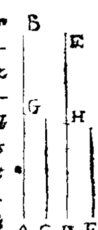
Soit la ligne droicte AB, de laquelle est retranché la ligne AC incommensurable en puissance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial incommensurable au composé de leurs quarrez aussi medial: Ie dis que le rectangle BC est irrationel.

Car puis que par la 7. p. 2. le composé des quarrez de AB. AC, est egal au double du rectangle de AB, AC, auec le quarré de BC: iceluy composé des quarrez excedera le double du rectangle, du quarré de BC. Mais par la 27. p. 10. vn medial, n'excede pas vn medial d'vn rationel : Donc le quarré de BC n'est pas rationel; & partant est irrationel, & la ligne BC aussi irrationele, qu'on appellera ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial : ainsi appellee parce que le quarré d'icelle auec vne superficie mediale faict vn tout medial, comme il apparoistra à la 110. p. 10.

SCHOLIE.

Si AB est $\sqrt{(180+\sqrt{60},)}$ *& AC* $\sqrt{(180-\sqrt{60}}$*, le reste CB sera* $\sqrt{(\sqrt{180}+\sqrt{60})}-\sqrt{(\sqrt{180}-\sqrt{60})}$

LEMME.



S'il y à quatre grandeurs AB, C, DE, F, & que GB excez d'entre AB & C soit egal à DH excez d'entre DE & F; aussi en changeant l'excez d'entre AB & DE sera egal à l'excez d'entre C & F. Car puis que GB est l'excez d'entre AB & C, AG sera egal à C : En la mesme maniere DH sera egal a F. Donc l'excez d'entre AG & DH sera egal à l'excez d'entre C & F, puis que ces grãdeurs cy sont egales à celles-là, chacune à la sienne, & partãt adioustant à AG & DH choses egales GB & HF, l'excez d'entre les toutes AB, & DE sera tousiours egal à l'excez d'entre C & F. Ce qui estoit proposé.

COROLLAIRE.

De ces choses appert que quatre grandeurs ayant proportion Arithmetique, en changeant elles seront aussi en proportion Arithmetique.

THEOR. 62. PROP. LXXX.

Au residu ne peut conuenir qu'vne seule ligne rationele commens. en puissance seulemẽt à la toute.

Soit le residu AB, auquel conuienne BC en sorte que AB & BC soient rationeles commens. en puissance seulement : Ie dis qu'à icelle AB ne peut conuenir autre ligne en la mesme sorte.

Car s'il est possible, en soit vne autre BD, s'accordant auec icelle AB, en sorte que AD, & BD soient rationeles commensurables en puissance seulement. Maintenant par la 7. p. 2. les deux quarrez de AC, BC sont plus grands que deux fois le rectangle de AC, BC du quarré de AB. Pareillement les deux quarrez de AD, & BD sont plus grands que deux fois le rectangle de AD, BD, du mesme quarré de AB; & en changeant par le lemme precedent, les quarrez excederont autant les quarrez, que les rectangles excedent les rectangles: & d'autant que les quarrez sont rationaux, leur excez sera rationel, par le lemme precedant la 43. p. 10. & partant les rectangles estans mediaux, (pource que par la 22. p. 10. vn seul d'iceux rectangles est medial, & par le corol. de la 24. p. 10. son double est aussi medial) leur excez sera rationel contre la 27. p. 10. Donc à AB ne peut conuenir autre ligne que BC, rationele commensurable en puissance seulement à la toute.

THEO. 63. PROP. LXXXI.

Au residu medial premier, ne s'accorde qu'vne ſeule ligne mediale commẽſurable en puiſſance ſeulement à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle rationel.

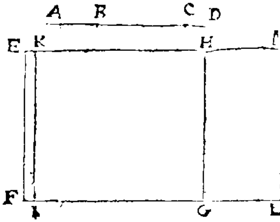
Soit le reſidu medial premier AB, auquel la mediale BC s'accorde en ſorte que AC & BC, ſoient mediales commenſ. en puiſſance ſeulement comprenant vn rectangle rationel: Ie dis qu'à icelle AB ne peut conuenir autre ligne que BC en la meſme ſorte.

Car ſi faire ſe peut en ſoit vne autre BD. Maintenant par la 7.p.2. il ſe prouuera comme en la preced. que l'excez d'entre le compoſé des quarrez de AB, BC, & le compoſé des quarrez de AD, BD, eſt tel que l'excez d'entre deux fois le rectangle de AC, BC, & deux fois le rectangle de AD, BD. Mais l'excez d'entre ces rectangles eſt rationel par le lemme qui precede la 43.p.10 pource que chacun d'iceux eſt rationel: & partant l'excez d'entre les quarrez qui ſont mediaux (eſtans deſcrits ſur lignes mediales) ſeroit auſſi rationel, contre la 27.p.10. Donc à AB n'a peu conuenir autre ligne mediale que BC, qui ſoit commenſ en puiſſance ſeulement à la toute, & comprenant auec icelle vn rectangle rationel.

THEOR. 64. PROP. LXXXII.

Au reſidu medial ſecond, ne peut eſtre conioincte qu'vne ſeule ligne mediale commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial.

Soit conioincte au reſidu medial ſecond AB la mediale BC, commenſ. en puiſſance ſeulement à la toute AC, & faiſant auec icelle vn rectangle medial. Ie dis qu'à icelle AB ne peut pas conuenir vne autre ligne que BC, en la meſme ſorte.

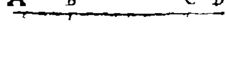


Car si faire se peut, en soit conioincte vne autre BD en la sorte requise. Et sur la rationele proposee EF soit appliqué le rectangle EG egal aux deux quarrez de AC, BC; & a la mesme EF soit encore appliqué EI egal au quarré de AB: parquoy par la 7.p 2. le reste KG sera egal à deux fois le rectãgle de AC, BC. Itẽ sur la mesme rationele soit encore appliqué le rectangle EL egal aux deux quarrez de AD, BD: Et puisque le rectangle EI est egal au quarré de AB: aussi KL sera egal à deux fois le rectangle de AD, DB, par la 7.p.2.

Maintenant les quarrez de AC & BC sont mediaux (estans faicts de lignes mediales) & si deux fois le rectangle de AB & BD doit estre medial: partant leurs egaux rectangles EG, & KG seront mediaux: lesquels appliquez sur la rationele EF, auront les autres costez EH, & KH rationaux commens. en puissance seulement a EF par la 23.p 10 en apres le quarré de AC estant au rectangle de AC, & BC, par la 1.p.6. comme AC est à BC, qui sont incommens. en longitude: par la 10.p.10. le quarré de AC sera incommens. au rectangle de AC & BC: & partant aussi à son double KG. Item le quarré de BC est cõmens. au quarré de AC, & par la 16.p.10. le rectãgle EG egal à iceux quarrez, sera commens. au seul quarré de AC, auquel KG est incommens. Et par la 14 p.10. EG, & KG seront incõmens. aussi seront les lignes EH & KH par la 1.p.6 & 10.p.10. lesquelles estans rationeles seront commens. en puissance seulement; & par la 74.p.10 EK sera residu, & KH sa conuenable. Par mesme discours (si on maintient que DC soit aussi adiointe a AB, selon le requis) EK se trouuera residu, & KM sa conuenable: ce qui seroit contre la 80.p.10. Donc au residu medial AB ne peut s'adioindre autre conuenable que BC.

THEOR. 65. PROP. LXXXIII.

A la ligne mineure, est conuenable vne seule ligne incommens. en puissance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel.



Soit la ligne mineure AB, à laquelle conuienne BC incommens. en puissance à la toute AC, & faisant le composé de leurs quarrez rationel, & le rectangle compris d'icelles AC, BC, medial. Ie dis qu'à icelle AB ne peut estre adioincte autre ligne que BC selon le requis.

Car si faire se peut en soit adiouste vne autre BD selon le requis. Il se prouuera comme en la 80. p. 10. qu'il y a mesme excez entre le composé des quarrez de AC, BC, & le composé des quarrez de AD, BD, qu'entre deux fois le rectangle de AC, BC, & deux fois le rectangle de AD, BD. Mais lexcez d'entre les quarrez est rationel par le lemme qui suit la 42. prop. 10. pource que l'vn & l'autre composé est rationel: donc aussi l'excez d'entre les rectangles sera rationel, contre la 27. p. 10. Car iceux rectangles estās mediaux l'excez d'iceux ne peut estre rationel. Donc à la ligne mineure AB on n'a peu adiouster autre ligne conuenable que BC.

THEOR. 66. PROP. LXXXIIII.

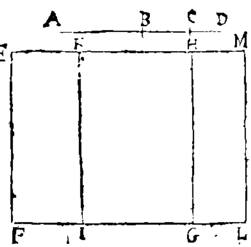
A la ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial, s'accorde vne seule ligne incommensurable en puissance à la toute, cōprenant auec icelle vn rectangle rationel, mais le composé de leurs quarrez medial.

Soit la ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial AB, a laquelle s'accorde la ligne BC, incommensur. en puissance à la toute AC, & comprenant auec icelle vn rectangle rationel, mais le composé de leurs quarrez medial. Ie dis qu'à icelle AB ne peut s'accommoder autre ligne que BC, qui soit selon le requis.

Car s'il est possible en soit encore vne autre BD: il se prouuera comme en la 80. p. 10. que les quarrez de AC, & BC, excedent les quarrez de AB & BD d'vn mesme excez, que deux fois le rectangle de AC & BC, excedent deux fois le rectangle de AB, & BD, lequel excez comme en la precedente seroit rationel & irrationel si à AB, on pouuoit encore adioindre BD selon le requis.

THEOR. 67. PROP. LXXXV.

A la ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial, se conioinct vne seule incommensurable en puissance à la toute, cõprenant auec icelle vn rectangle medial, incõmensurable au composé de leurs quarrez aussi medial.



Soit la ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial AB, a laquelle s'accorde BC incommens. en puissance a la toute AC, & comprenant auec icelle vn rectangle medial incõmensurable au composé de leurs quarrez, qui est aussi medial. Ie dis qu'à icelle AB ne peut s'adioindre autre ligne que BC, qui fasse le requis.

Car si faire se peut en soit adiouftee vne autre BD. Puis soit faict mesme construction qu'en la 82.p.10. Donc le composé des quarrez de AC & BC estant medial & incommensurable a deux fois le rectangle de AC & BC aussi medial, leurs egaux rectangles EG, & KG seront mediaux, & incommensurable: Et par la 23.p 10. estans appliquez sur la rationele EF leurs autres costez EH, & KH seront lignes rationeles, & par la 1.p.6.& 10.p.10. commẽsurables en puissance seulemẽt (puis que leurs rectangles sont incommensurables,) & par la 74.10. EK sera residu auquel KH sera conuenablement adioustee. Par mesme discours (si on dit que BD soit aussi conuenable à AB selon le requis) EK se trouuera residu, & KM sa conuenable: ainsi le residu EK n'auroit pas vne seule conuenable, cõtre la 80 p.10. On ne pouuoit donc pas adioindre à AB, autre ligne conuenable que BC.

DEFINITIONS TROISIESMES.

Estant proposee vne ligne rationele , & le residu: Lors la toute composee du residu, & de sa conuenable ou adioustee, peut plus que la conuenable, du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude.

1. Si la toute est commensurable à la rationelle proposee; le residu soit appellé residu premier.

2 Mais si l'adioustee est commensurable, à la rationele exposee; Soit residu second.

3 Que si ny l'vne ny l'autre n'est commensurable à la rationelle proposee; Soit residu troisiesme.

Derechef lors que la toute peut plus que l'adioustee, du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude.

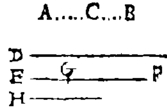
4 Si la toute est commensurable à la rationelle proposee; Soit residu quatriesme.

5. Mais si l adioustee est commensurable à la rationele; Soit residu cinquiesme.

6. Que si ny l'vne ny l'autre n'est commensurable à la rationele; Soit residu sixiesme.

PROBL. 19. PROP. LXXXVI.

Trouuer vn residu premier.



Eſtans trouuez deux nombres quarrez AB, CB, (comme nous auons enſeigné au 2. ſcholie de la 29. p. 10.) deſquels l'excez AC ne ſoit quarré, ſoit expoſee la rationele D, alaquelle EF ſoit cõmenſurab. en longitude: & partant icelle EF ſera auſſi rationele: puis apres par le corol. de la 6. p. 10 ſoit faict que comme le nombre AB eſt au nombre AC, ainſi le quarré de EF ſoit au quarré de GF. Ie dis que EG eſt reſidu premier.

Car puis que les quarrez de EF, GF qui ſont comme nõbre à nombre, ſont commenſ. par la 6. p. 10. auſſi les lignes EF, GF ſeront comm. au moins en puiſſance : & EF eſtant rationele, GF le ſera auſſi. Mais d'autant que AB, AC ne ſõt entr'eux comme nombres quarrez : auſſi les quarrez de EF, GF ne ſeront comme nombres quarrez: & partant par la 9 p. 10. les lignes EF, GF ſont incommenſ. en longitude : elles ſont donc rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement, & partant le reſte EG ſera reſidu par la 74. p. 10.

Ie dis d'auantage qu'il eſt reſidu premier : car EF eſtant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle GF, ſoit du quarré de H. Et puis que cõme le nõbre AB eſt au nõbre AC, ainſi le quarré de EF, au quarré de GF, par conuerſion de raiſon comme AB ſera à CB, ainſi le quarré de EF ſera au quarré de H. Mais AB, CB ſont nombres quarrez: Donc les quarrez de EF & H ſont comme nombres quarrez: & partant par la 9 p. 10. les lignes EF, & H ſont comment. en longitude. Ainſi la toute EF, commenſur. en longitude à la rationele D, peut plus que la conuenable GF, du quarré de la ligne H qui luy eſt commenſ. en longitude; & partant par la 1. d. des troiſiéme, EG ſera reſidu premier.

SCHOLIE.

La rationele D ſoit 9. EF 6: AB 9, CB 4, & par conſequent AC eſt 5: faiſant donc que comme 9 eſt à 5, ainſi le quarré de EF, c'eſt à dire 36, ſoit au quarré de FG; icelle FG ſera $\sqrt{20}$: & partant le reſte EG ſera 6 — $\sqrt{20}$, qui eſt reſidu premier.

PROB. 20. PROP. LXXXVII.

Touuer vn reſidu deuxieſme.

Estans trouuees deux nombres quarrez AB, CB, (comme en la precedente proposition) & l'exposee rationele D, soit prise GF commens. en longitude a icelle D, laquelle sera aussi rationele: puis soit faict comme le nombre AC, est au nombre AB, ainsi le quarré de GF soit au quarré de EF par le corol. de la 6. p. 10. Ie dis que EG est residu second.

Car puis que les quarrez de GF, EF, ayans la raison des nombres AC, AB, sont commens. par la 6. p. 10. les lignes GF, EF seront aussi commens. au moins en puissance: & GF estant rationele, EF sera aussi rationele. Et d'autant que les nombres AC, AB, & partant aussi les quarrez de GF, EF, ne sont comme nombres quarrez, par la 9. p. 10. GF, EF, incommens. en longit. donc les rationeles GF, EF, sont commens. en puissance seulement: & partant par la 74. p. 10. le reste EG est residu. Ie dis aussi qu'il est residu second. Car EF estant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle, & soit du quarré de H. Donc puis que comme AC est a AB, ainsi le quarré de GF au quarré de EF: & en changeant cõme AB à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de GF. Maintenant nous demonstrerons comme en la precedente prop. que la ligne H est commensurable en longitude a icelle EF. Parquoy puis que la toute EF, peut plus que l'adioustee GF, du quarré de H qui luy est cõmens. en longit. comme aussi a la rationele proposee D: par les troisiesmes def. EG sera residu second.

SCHOLIE.

La rationele D soit 9, FG 5. AB 9, CB 4. & par consequent AC 5: faisant donc que comme AC 5 est AB 9, ainsi le quarré de GF soit au quarré de EF: icelle EF sera $\sqrt{45}$: & partant EG sera $\sqrt{45}$ — 5, qui est residu second.

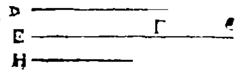
PROB. 21. PROP. LXXXVIII.

Trouuer vn residu troisiesme.

Ayant troué les deux nombres quarrez AB, CB, comme en la prop. 86. soit pris vn autre nombre I (comme nous auons enseigné en la 51. prop. de ce liure) qui ne soit a l'vn ny à l'autre d'iceux AB, AC, comme nombre quarré a nombre quarré:

puis estant exposee la rationele D soit faict que comme I est à AB, le quarré de D soit au quarré de EG, lesquels quarrez par la 6. p. 10. seront commensurables: & partant les lignes D & EG, aussi commensurables au moins en puissance.

A.....C....B
I......



Donc D estant rationele, aussi EG sera rationele. Et d'autant que les nombres I & AB, & partant les quarrez de D & EG, ne sont en raison de nombres quarrez, par la 9. p. 10. les lignes D & EG seront incommensur. en longitude. Derechef soit faict que comme AB est à AC, ainsi le quarré de EG soit au quarré de GF. Ie dis que EF est residu troisiesme.

Car puis que les quarrez de EG, GF, estans comme nombre a nombre, sont commensurables par la 6. p. 10. les lignes EG, GF seront ausi commensurables au moins en puissance. Mais EG estant rationele, GF le sera ausi. Et puis que AB, AC, & partant aussi les quarrez de EG, GF, ne sont comme nombres quarrez, par la 9. p. 10. les lignes EG, GF, seront incommensurables en longitude. Donc EG, FG sont rationeles commensurables en puissance seulement: & partant puis que de EG, est ostee GF commens. en puissance à icelle, par la 74. p 10. le reste EF sera residu.

Ie dis qu'il est ausi residu troisiesme: Car puis que comme I est à AB, ainsi le quarré de D, au quarré de EG, & comme AB à AC, ainsi le quarré de EG au quarré de GF, en raison egale comme I sera à AC, ainsi le quarré de D au quarré de GF. Or les nombres I & AC ne sont comme nombres quarrez: ny par consequẽt ausi les quarrez de D & GF: parquoy par la 9. p. 10. les lignes D & GF sont incommensurables en longitude. Donc l'vne & l'autre d'icelles EG, GF est incommensurable en longitude à la rationele proposee D. Et comme en la 86. p: on prouuera que EG peut plus que GF du quarré de la ligne H, qui luy est commensurable en longitude: Et par les tierces def. EF sera residu troisiesme.

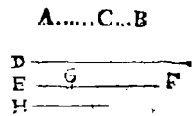
SCHOLIE.

La rationele D soit 6, & soit fait que comme le nombre I 6, est à AB 9, ainsi le quarré de D, sçauoir 36, soit au quarré de EF, & iceluy sera 54, & par consequent la ligne EF $\sqrt{}$ 54. Mais faisant que comme

AB 9, est à AC 5. ainsi le quarré de EF soit au quarré de FG, icelle FG sera √30, & par consequent EG sera √54 — √30, qui est residu troisiesme.

PROBL. 22. PROP. LXXXVIIII.

Trouuer vn residu quatriesme.



Estans trouuez (comme nous auons enseigné au 3. scholie de la 29. prop. 10.) deux nombres AC, CB, tels que le composé d'iceux AB ne soit à l'vn ny à l'autre AC, CB, comme nombre quarré à nombre quarré. soit proposee la rationele D. à laquelle soit commensurable en longitude EF, laquelle sera par consequent aussi rationele. Que si on acheue de construire comme en la 86. p. on demonstrera comme là que EG est residu: & d'auantage ie dis qu'il est residu quatriesme.

Car EF estant plus grande que GF, elle pourra plus, qu'icelle, soit du quarré de H. Et puis que comme AB est à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de GF: par conuersion de raison comme AB à CB, ainsi le quarré de EF au quarré de H. Mais les nombres AB, CB, ne sont comme nombre quarré à nõbre quarré: donc par la 9. p. 10. les lignes EF & H seront incommens. en longi. Parquoy la toute EF peut plus que l'adioustée GF, du quarré de H qui luy est incommensurable en longitude, & la mesme EF est commens en longitude à la rationele D: partant par la def. EG sera residu quatriesme.

SCHOLIE.

La rationele D soit 9, EF 6: faisant donc que comme AB 9 est à AC 6, ainsi 36 quarré de EF soit au quarré de FG, icelle sera √24, & par consequent le reste EG sera 6 — √24, qui est residu quatriesme.

PROB. 23. PROP. XC.

Trouuer vn residu cinquiesme.

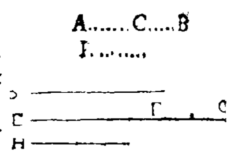
Estans trouuez les deux nombres AC,CB,comme en la prop. preced soit faict mesme construction qu'en la 87. p. puis soit demóstré comme en icelle 87.p. que EG est residu Ie dis qu'il est aussi residu 5. Car EF peut plus que G du quarré de H: Et comme en la 86.p nous demonstrerós par conuersion de raison,que comme AB est à CB,ainsi le quarré de EF est au quarré de H: & comme en la precedente les lignes EF & H serót incommens.en longitude: & la conuenable GF commens. en long. à la rationele D. Parquoy par les def. troisiesmes EG sera residu cinquiesme.

SCHOLIE.

La rationele D soit 9, FG 6. faisant que comme AC 6, est à AB 9, ainsi le quarré de GF soit au quarré de EF, iceluy sera 54 & par consequent la ligne EF √54; & le reste EG √54 —6, qui est residu cinquiesme.

PROB. 24. PROP. XCI.

Trouuer vn residu sixiesme.



Estans trouuez les trois nombres AC,CB,& I,comme en la 54. prop.& exposé la rationele D,soit acheuee la construction comme en la 88.prop. Nous demonstrerós cóme là, que D & EG sont incommens. en longit.& que EF est residu: puis que D & FG seront aussi incommens. en longitude, & partant l'vne & l'autre d'icelles EG, FG est incommens. en longitude à la rationele proposee D. Maintenant EG,peut plus que FG du quarré de la ligne H, laquelle nous demonstrerons comme en la 89 p. estre incommens. en longitude à icelle EG. Parquoy par la derniere des 3. d. EF sera residu sixiesme.

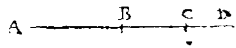
SCHOLIE.

La rationele D soit 9 ; & soit faict que comme I9 est à AB 11, ainsi 81 quarré de D soit au quarré de EF; lequel sera trouué de 108, & par consequent icelle sera √108; & faisant que comme AB 11 est à

AC 7, ainsi 108 soit au quarré de FG; icelle FG sera √ 63, & par consequent le reste EG sera √ 108— √63. qui est residu sixiesme.

Or nous trouuerons encores (comme enseigne Theon) les six residus su dits, ainsi qu'il ensuit.

S'il faut trouuer pour exemple le residu premier: soit trouué par la 49. p. 10. le binome premier AD, duquel le plus grãd nom est AC, & le moindre CD; puis soit couppé de AC la ligne CB egale à CD. Ie dis que AB est residu premier. Car d'autant que AC, CD, sont rationeles commensurable en puissance seulement; aussi AC, BC seront rationeles commẽsurab'es en puissance seulement: Donc par la 74. p. 10. AB est residu. Et pource que AC peut plus que CD, ou CB du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude, & AC est commens. en longitude à la rationele proposee par la def. du binome premier; AB sera residu premier par la 1. des tierces def. Par la mesme maniere seront trouuez tous les autres residus, sçauoir, est le 2. si du second binome nous ostons le moindre nom du plus grand, &c.



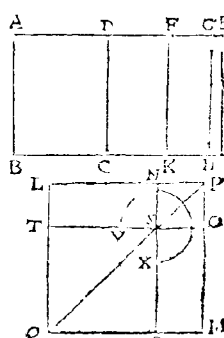
Ainsi ayant trouué le binome premier AD 9+ √ 45, si du plus grand nom AC 9. on est le moindre nom, restera le residu AB de 9 —√ 45. & ainsi des autres.

THEOR. 68. PROP. XCII. Six.4.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele & d'vn residu premier; la ligne qui peut iceluy rectangle est residu.

Soit le rectangle AC compris de la rationele AB, & du residu premier AB: Ie dis que la ligne qui peut iceluy rectangle est residu.

Au residu AB soit sa conuenable DE. laquelle soit couppee en deux egalement au poinct F, & apres auoir appliqué vn rectangle sur la ligne AE defaillant d'vne figure quarree, c'est à dire d'vne ligne egale à son autre costé, & egal au quart du quarré de DE, qui est le quarré de FE, soit iceluy rectangle compris soubs AG,



GE: en apres soient menees les lignes FK, GH, EI paralleles a AB, qui rencontrent la ligne BC prolongee en K, H& I, puis soit faict le quarré LM egal au rectangle AH, & le quarre NO, egal au rectangle EH, ayant auec LM l'angle LPM commun. Donc les quarrez LM, NO, par la 26.p.6. seroit au long d'vn mesme diametre, lequel soit PQ: soient continuees les lignes NS, OS, afin d'acheuer le gnomō VX. Maintenant FE est moyenne proport. entre AG & GE, par la 17.p. 6. car par hypothese le quarré de EF est egal au rectangle de AG & GE, & par la 1. p. 6. le rectangle KE sera milieu proport. entre les deux rectangles AH & HE; il le sera aussi entre leurs egaux quarrez LM & NO. Mais par le lemme de la 54 p.10. le rectangle LO, est aussi milieu proport. entre iceux quarrez: Donc KE, ou DK son egal, sera egal au rectangle LO, Et par consequent KG à LS, (estant HE egal à NO.) Iceluy GK sera aussi egal a SM: ainsi le rectangle DH sera egal au gnomon VX. Mais tout le quarré LM: est egal au rectangle AH. Partant le rectangle AC sera egal au quarré TR. Ie dis que la ligne TS: qui peut le rectangle AC est residu. Soit ceste construction generale a toute la sixaine.

Car puisque AD est residu premier, & DE sa conuenable: les deux lignes AE & DE, sont rationeles commens. en puissance seulement, estant la toute AE commens. en longitude à la rationele AB, & pouuant plus que l'adioustee DE, du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude: Et par la 18.p.10. le rectangle defaillant aura les deux costez AG, & GE commens. en longitude, & par la 16.p.10. Ils seront commensurables en longitude à la totale AE, laquelle estant cōmensurable en longitude à la rationele AB, par la 12.p.10. AE AG, GE, AB seront toutes rationeles commens. en longitude: & par la 20.p.10. les rectangles AH & HE seront rationaux, & leurs egaux quarrez LM & NO aussi rationaux, & les lignes TO & SO rationeles.

Pareillement les deux lignes DF & FE estans egales, & cōmens. elles le seront aussi a leur toute DE, par la 16.p.10. Laquelle DE estans rationele; DF, & FE seront aussi rationeles commens. en puissance seulement a AB, comme leur toute DE; & par la 21.p.10 leurs rectangles CF & KE seront mediaux. Mais le rectangle LO est egal au medial KE, partant aussi medial, & incommens. au quarre rationel NO. Et par la 1.p.6. & 10.p.10. leurs costez TO & SO seront incommensu. en longitude: & pour autant qu'ils sont rationaux, ils seront com. en puissance seulement, & par la 74.p. 10. TS est residu.

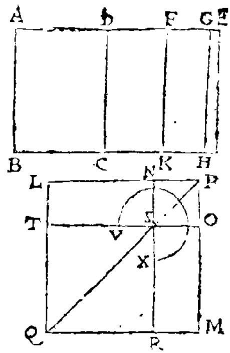
SCHOLIE.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 8, & AD 9—√45 · DE est donc √45, & sa moitié DF √11¼: mais AG sera 7½, & GE 1½. Donc le rectangle BF est 72, AH 60, HE 12, CF √720, & AC 72—√2880, & le rectangle de AG, GE est 11¼. Parquoy le quarré LM sera 60, & NO 12: & partant la ligne LP est √60, & NP √12: & par consequent LN, ou TS sera √60—√12, qui est residu, & son quarré TR est 72—√2880, egal au rectangle AC.

THEOR. 69. PROP. CXIII.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele & d'vn residu second; la ligne qui peut iceluy rectangle, est residu medial premier.



Soit le rectangle AC, compris de la rationele AB, & du residu second AD: Je dis apres auoir construict comme en la precedente; que la ligne TS qui peut iceluy rectangle AC, est residu medial premier.

Car puis que AD est residu second, & DE sa conuenable, les deux lignes AE & DE sont rationeles commensurables en puissance seulement, la conuenable DE estant com. en long. à la rationele AB; & AE peut plus que DE du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude, & par la 18. p. 10. Le rectangle defaillant aura les deux costez AG & GE commensur. en longitude, & par la 16. p. 10. ils seront aussi commensurables a la totale AE, & par la 14. p. 10. icelle totale estant incommensurable en longitude à la rationele AB, aussi seront AG, & GE qui sont rationeles (car elles ſont commenſ. à leur totale qui eſt rationele) cõmenſurable en puiſſance ſeulement à la rationele AB, & par la 22 p. 10. les rectangles AH & HE ſeront mediaux; partãt mediaux leurs egaux quarrez LM & NO, & leurs coſtez TO & SO ſeront lignes mediales.

Pareillement DE eſtant commenſ. en longitude à la rationele AB, auſſi ſera ſa moitié FE, & par la 20. p. 10. le rectãgle KE ſera rationel: partant auſſi rationel ſon egal rectãgle LO, compris des deux mediales TO & SO, leſquelles ſont incommenſ. en longitude: (autrement leur rectangle ſeroit medial par la 25. p. 10.) & par la 75. p. 10. TS eſt reſidu medial premier.

SCHOLIE.

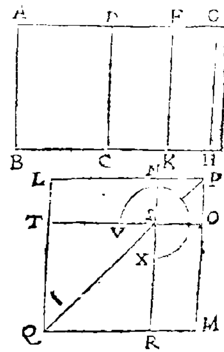
La rationele AB ſoit 4, AD $\sqrt{45}-5$: DE eſt donc 5, & ſa moitié DF $2\frac{1}{2}$, & par conſequent le quarré d'icelle DF ou FE eſt $6\frac{1}{4}$, auquel eſtant egal le rectangle de AG, GE, icelles ſeront $\sqrt{31\frac{1}{4}}$ & $\sqrt{1\frac{1}{4}}$: parquoy le rectangle HE, ou quarré NO ſera $\sqrt{20}$: & partant ſon coſté SO eſt $\sqrt{\sqrt{20}}$. Mais puis que la ligne AE eſt $\sqrt{45}$, & AG $\sqrt{31\frac{1}{4}}$: le rectangle BE ſera $\sqrt{720}$, & AH, ou le quarré LM $\sqrt{500}$: & par conſequent la ligne TO eſt $\sqrt{\sqrt{500}}$: de laquelle eſtant oſtee SO, reſtera TS $\sqrt{\sqrt{500}}-\sqrt{\sqrt{20}}$, qui eſt reſidu medial premier, & ſon quarré TR eſt $\sqrt{720}-\sqrt{20}$. Mais le rectangle AC eſt autant: car multipliant AB 4 par AD $\sqrt{45}-5$, viendra auſſi $\sqrt{720}-\sqrt{20}$. Donc TS reſidu medial prèmier peut le rectangle AC.

THEOR. 70. PROP. XCIIII.

Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele, & d'vn reſidu troiſieſme; la ligne pouuant iceluy rectangle, eſt reſidu medial ſecond.

Soit le rectangle AC, compris de la rationele AB, & du reſidu troiſieſme AD (apres auoir conſtruit comme en la 91. p. 10.) Ie dis que la ligne TS qui peut iceluy rectangle AC, eſt reſidu medial ſecond.

Car puis que AB eſt reſidu troiſieſme, & DE ſa conuenable, les lignes AE & DE ſont rationeles commenſu. en puiſsance seulement entr'elles, à la rationele AB, mais AE peut plus que DE du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude, & par la 18. p. 10. AG & GE seront commensurable en longitude, & à leur totale AE par la 16. p. 10. Et seront rationeles comme icelle: mais AE est commẽsurable en puissance seulement a la rationele AB, & par la 14. p. 10. AG & GE seront cõmens. en puissance seulement à AB. Et par la 22. p. 10. les rectangles AH & HE seront mediaux: Donc aussi mediaux leurs egaux quarrez LM & NO, & leurs costez TO & SO seront lignes mediales.



Pareillement DE estant incommensurable en longitude à la rationele AB, aussi sera sa moitié FE, par la 14. p. 10 & par la 22. p. 10. EF estãt rationele comme sa double DE, le rectangle KE sera medial, partant aussi medial son egal LO, compris des deux mediales commensurables en puissance seulement TO & SO: (car leurs quarrez sont commensurables estans leurs egaux rectangles commensurables, & ne sçauroient estre commensurab. en longitude, car il faudroit par la 1. p. 6. & 10. p. 10. que LO & NO fussent aussi commensurables, & par consequent leurs egaux rectangles KE & HE, (ce qui n'est pas.) & par la 76. p. 10. TS est residu medial second.

SCHOLIÉ.

La rationele AB soit 4, & AD $\sqrt{54}-\sqrt{30}$; donc DE est $\sqrt{30}$: & sa moitié DF $\sqrt{7\frac{1}{2}}$ son quarré $7\frac{1}{2}$, lequel estant appliqué sur la ligne AE $\sqrt{54}$, & deffaillant d'vne figure quarree, les costez du rect. appliqué, sçauoir AG, GE, seront $\sqrt{37\frac{1}{2}}$, $\sqrt{1\frac{1}{2}}$. Parquoy le rectangle AC sera $\sqrt{864}-\sqrt{480}$, BE $\sqrt{864}$, CE $\sqrt{480}$, AH $\sqrt{600}$, DK $\sqrt{120}$, & HE $\sqrt{24}$. Mais le quarré LM estant egal à AH, il sera aussi $\sqrt{600}$, NO egal a HE $\sqrt{24}$: & partant les costez d'iceux quarrez, sçauoir TO, SO sont $\sqrt{\sqrt{600}}$, $\sqrt{\sqrt{24}}$: & par consequent TS est $\sqrt{\sqrt{600}}-\sqrt{\sqrt{24}}$, & son quarré TR $\sqrt{864}-\sqrt{480}$, egal au rectangle AC.

THEOR. 71. PROP. XCV.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, & d'vn residu quatriesme ; la ligne qui peut iceluy rectangle, est ligne mineure.

Soit le rectangle AC compris de la rationele AB, & du residu quatriesme AD. (apres construit comme en la 92.p.10.) Ie dis que la ligne TS qui peut iceluy rectangle AC est ligne mineure.

Car puis que AD est residu quatriesme, & DE sa conuenable, les lignes AE & DE sont rationeles commens. en puissance seulement ; & AE qui est commens. en longitude à la rationele AB, peut plus que DE du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude : & par la 19 p 10. AG & GE seront incommen. en longitude: partant par la 1.p.6.& 10.p.10. les rectangles AH & HE seront incomm. aussi seront donc leurs egaux quarrez LM & NO : partant les lignes TO & SO seront incommensu. en puissance : Mais AE estant commensurable en longitude à la rationele AB, par la 20. p.10. le rectangle AI sera rationel : partant aussi rationel sera le composé de leurs egaux quarrez LM & NO. Pareillement DE estant commensurable en puissance seulement à AB, le rectãgle CE sera medial par la 22. p. 10. aussi sera sa moitié KE : & par consequent son egal LM sera ausi medial : partant les deux lignes TO & SO, qui comprennent iceluy rectangle, mediales (estans incommens. en puissance) & le composé de leurs quarrez estant rationel, par la 77.p.10. TS est ligne mineure.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 6, AD $9-\sqrt{54}$; donc DE est $\sqrt{54}$, & sa moitié DF $\sqrt{13\frac{1}{2}}$, son quarre $13\frac{1}{2}$, lequel appliqué sur AE 9, & deffaillant d'vne figure quarree, les costez AG, GE seront $4\frac{1}{2}+\sqrt{6\frac{3}{4}}$ & $4\frac{1}{2}-\sqrt{6\frac{3}{4}}$. Parquoy le rectangle AC sera $54-\sqrt{1944}$, BE 54, AH $27+\sqrt{243}$, DK $\sqrt{486}$, & HE $24-\sqrt{243}$. Mais le quarre LM estant egal à AH, sera aussi $27+\sqrt{243}$, NO egal à HE $27-\sqrt{243}$: & partant leurs costez TO, SO sont $\sqrt{(27+\sqrt{243})}$ & $\sqrt{(27-\sqrt{243})}$: & par consequent TS est $\sqrt{(27+\sqrt{243})}-\sqrt{(27-\sqrt{243})}$, & son quarré TR $54-\sqrt{1944}$, egal au rectangle AC.

THEO. 72. PROP. XCVI.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, & d'vn residu cinquiesme; la ligne qui peut iceluy, est ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial.

Soit le rectangle AC, compris de la rationele AB, & du residu cinquiesme AD: (apres auoir construit comme en la 92. p. 10.) Ie dis que TS qui peut iceluy rectangle AC, est ligne faisãt auec vne superficie rationel, vn tout medial.

Car puis que AB est residu cinquiesme, & DE sa conuenable, les lignes AE, & DE sont rationeles commensurables en puissance seulement, & DE est commensurable en longitude à la rationele AB, & AE peut plus que DE du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude, & par la 19. p. 10. Les lignes AG & GE sont incommensurables en longitude: & comme en la precedente TO & SO seront incommensurables en puissance. Mais AE estant incommensurable en longitude à la rationele AB, le rectangle AI sera medial par la 22. p. 10. partant aussi medial le composé de leurs egaux quarrez LM, & NO.

Pareillement DE estant commensurable en longitude à la rationele AB, par la 20. p. 10. le rectangle CE sera rationel, aussi sera sa moitie KE, & son egal LO, compris de deux lignes incommensurables en puissance TO & SO, desquelles le composé de leurs quarrez faict vn tout medial, & par la 78. p. 10. TS sera ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 4, AD $\sqrt{54}-6$*: donc DE est 6, & sa moitié DF 3, son quarre 9, auquel estant egal le rectangle de AGE. AG sera* $\sqrt{13\frac{1}{2}}+\sqrt{4\frac{1}{2}}$ *& GE* $\sqrt{13\frac{1}{2}}-\sqrt{4\frac{1}{2}}$*. Mais le rectãgle AC sera* $\sqrt{864}-24$*, BE* $\sqrt{864}$*, AH* $\sqrt{216}+\sqrt{72}$*, DK 12, & HE* $\sqrt{216}-\sqrt{72}$*: ainsi le quarré LM sera* $\sqrt{216}+\sqrt{72}$*, NO* $\sqrt{216}-\sqrt{72}$*. &*

leurs costez TO, SO, $\sqrt{}\sqrt{}(216+\sqrt{}72)$, & $\sqrt{}\sqrt{}(216-\sqrt{}72)$, & par consequent TS est $\sqrt{}\sqrt{}(216+\sqrt{}72)-\sqrt{}\sqrt{}(216-\sqrt{}72)$, & son quarré TR sera $\sqrt{}864-24$.

THEOR. 73. PROP. XCVII.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, & d'vn residu sixiesme ; la ligne qui peut iceluy, est ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial.

Soit le rectangle AC, compris de la rationele AB, & du residu sixiesme AD (apres auoir construit comme en la 92. p. 10.) Ie dis que TS qui peut iceluy rectangle AC, est ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial.

Car puis que AD est residu sixiesme, & DE sa conuenable; AE & DE sont rationeles commensurables en puissance seulement entr'elles, & à la rationele AB, & AE peut plus que DE du quarré d'vne ligne qui luy est incõmensurable en longitude: Et par la 19 p. 10. AG & GE seront incommensurable en longitude: Et comme en la 95. p. 10. TO & SO seront incommensf. en puissance, & tout ainsi qu'en la precedente le rectangle AI estant medial, le composé de leurs egaux quarrez LM & NO, sera aussi medial: Item DE estant commensu. en puissance seulement a AB rationele, par la 22. p. 10. le rectangle CE sera medial: aussi sera donc sa moitie KE, & son egal LO. Et AE, DE estans incommensf. en longitude, par la 1. p. 6. & 10 p. 10. les rectangles AI, CE, seront incommensurables, & puis que CE est commensf. a sa moitie KE, par la 14. p. 10. KE sera incommensf. a AI: Et partant le medial LO (egal a KE) compris des lignes TO & SO incommensf. en puissance, est incommensu. au composé des quarrez d'icelles TO & SO (egal a AI) medial: Parquoy par la 79. p. 10. le reste TS sera ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial.

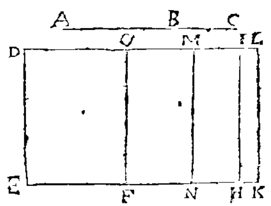
SCHOLIE.

La rationele AB soit 6, AD $\sqrt{}108-\sqrt{}63$: donc DE est $\sqrt{}63$, & sa moitie DF $\sqrt{}15\frac{3}{4}$, son quarré $15\frac{3}{4}$, AG $\sqrt{}27+\sqrt{}11\frac{1}{4}$, GE $\sqrt{}27-$

$\sqrt{11}$: mais le rest. AC sera $\sqrt{3888} - \sqrt{2268}$, *BE* $\sqrt{3888}$, *AH* $\sqrt{972} + \sqrt{405}$, *DK* $\sqrt{567}$, *& HE* $\sqrt{972} - \sqrt{405}$ *: ainsi le quarré LM sera* $\sqrt{972} + \sqrt{405}$, *NO* $\sqrt{972} - \sqrt{405}$, *& leurs costez TO, SO, seront* $\sqrt{\sqrt{}}(972 + \sqrt{405})$, *&* $\sqrt{\sqrt{}}(972 - \sqrt{405})$ *: & par consequent TS est* $\sqrt{\sqrt{}}(972 + \sqrt{405}) - \sqrt{\sqrt{}}(972 - \sqrt{405})$, *& son quarre TR* $\sqrt{3888} - \sqrt{2268}$.

THEOR. 74. PRO. XCVIII. Six. 5.

Le quarré d'vn residu apliqué sur vne rationele, faict l'autre costé residu premier.



Soit le residu AB, & BC sa conuenable, tellement que AC, BC soient rationeles commensurables en puissance seulement: & sur la rationele DE soit appliqué le rectangle DF egal au quarré de AB. Ie dis que l'autre costé DG est residu premier.

Car sur la mesme rationele DE soit appliqué le rectangle DH egal au quarré de AC: & sur IH vn autre rectangle IK egal au quarré de BC, tellement que le total DK est egal au composé des quarrez de AC, BC; lequel estant egal par la 7.p.2. à deux fois le rectangle de AC, CB, ensemble auec le quarré de AB, si on oste le quarré de AB & le rectangle DF; restera GK egal à deux fois le rectangle de AC, CB: partant GL estant couppee en deux egalement en M, & tiré MN parallele à DE; MK sera egal au rectangle de AC, CB. Et pource que AC, CB sont rationeles, leurs quarrez seront aussi rationaux, & partant commens. & par la 16.p.10. le composé d'iceux quarrez est commensu. à vn chacun d'eux: & partant iceluy composé, ou DK son egal, est rationel, lequel estant appliqué sur la rationele DE, par la 21. p.10. DL sera rationele commens. en longit. à icelle DE. Derechef puis que AC, CB sont rationeles commens. en puissance seulement, le rectangle d'icelles, & partant aussi son double GK, sera medial: & iceluy estant appliqué à la rationele GF, par la 23.p.10. GL sera rationele incommens. en longitude à GF, ou DE : Et puis que DK rationel, & GK medial, c'est à dire irrationel, sont incommensurab. par la 1. p. 6. & 10. p. 10. les lignes DL, GL, seront aussi incommens. en longitude. Parquoy puis qu'elles ont esté demonstrees rationeles, elles seront commensurab. en puissance seulement : & partant par la 74. p. 10. le reste DG sera residu. Ie dis d'auantage qu'il est residu premier.

Car puis que par le lemme de la prop. 54. le rectangle de AC, CB, ou son egal MK, est moyen prop entre les quarrez de AC CB, c est à dire entre DH, IK : DH, MK, IK seront continuellement proportionaux : & par consequent aussi les lignes DI, ML, IL. & par la 17. p. 6. le rectangle de DI, IL est egal au quarré de ML, c'est a dire au quart du quarré de GL, par le scholie de la 4. p. 2. Et puis que les quarrez de AC, CB, ou leurs egaux rectangles DH, IK, sont commens. par la 1. p. 6. & 10. p. 10. les lignes DI, IL, seront commens. en longit. Parquoy puis que les lignes DL, GL sont inegales, & à la plus grande DL est appliqué le rectangle de DI, IL, egal à la quarte partie du quarré de GL, & defaillant d'vne figure quarree, par la 18. p. 10. DL pourra plus que GL du quarré d vne ligne qui luy est commens. en longitude ; & par la 1. des 3. def. DG sera residu premier.

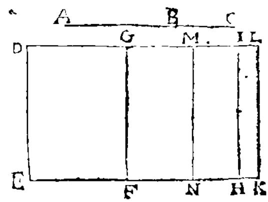
SCHOLIE.

Le residu AB soit $\sqrt{60} - \sqrt{12}$, & BC $\sqrt{12}$: donc la toute AC est $\sqrt{60}$: mais la rationele DE soit 8, sur laquelle estant appliqué le quarré de AB, qui est $72 - \sqrt{2880}$, l'autre costé DG sera $9 - \sqrt{45}$: aussi DI sera $7\frac{1}{2}$, IL $1\frac{1}{2}$, DL 9 & GL $\sqrt{45}$, & GM $\sqrt{11\frac{1}{4}}$: Ainsi le rect. DK sera 72, DH 60, IK 12, GN $\sqrt{720}$, GK $\sqrt{2880}$, & DF $72 - \sqrt{2880}$.

THEOR. 75. PROP. XCIX.

Le quarré d'vn residu medial premier, appliqué sur vne ligne rationele, faict l'autre coste residu second.

Soit le residu medial premier AB, duquel la conuenable soit BC, tellement que AC, BC, soient mediales commens. en puissance seulement, & contiennent vn rectangle rationel ; & sur la rationele DE soit appliqué le rectãgle DF egal au quarré de DB. Ie dis que l'autre costé DG est residu second.



Car soit construit ainsi qu'en la precedente, tellement que derechef DH, IK, soient egaux aux quarrez de AC, BC, & GK double du rectangle compris d'icelles lignes AC, BC, & partant MK egal à vne fois le rectangle de AC, BC. Veu donc que les lignes AC, CB, sont mediales commens. en puissance seulement ; les quarrez d'icelles, ou leurs egaux rectãngles DH, IK, seront aussi mediaux & commens. & partant par la 16. p. 10. le tout DK sera aussi commens. à chacun d'iceux: Donc aussi medial, par le corol. de la 24. p. 10. Et par la 23. p. 10. DL sera rationele commensurable en puissance seulement à DE: & d'autant que le rectangle de AC, BC est rationel, son double GK sera aussi rationel: & par la 21. p. 10. GL sera rationele commensurable en longitude a DE rationele, & les deux rectangles DK, & GK estans incommens. (car l'vn est rationel, l'autre medial) les rationeles DL & GL seront commensurables en puissance seulement, & par la 74. p. 10. DG sera residu: lequel ie dis estre aussi second. Car on prouuera de mesme qu'en la precedẽte, que la toute DL, peut plus que la conuenable GL, du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude, & partant par les tierces definitions DG est residu second.

SCHOLIE.

Le residu medial premier AB soit $\sqrt{\sqrt{500}}-\sqrt{\sqrt{20}}$, & BC $\sqrt{\sqrt{20}}$: la toute AC sera donc $\sqrt{\sqrt{500}}$: & estãt appliqué sur la rationele DE 4, le quarré de AC, qui est $\sqrt{500}$, l'autre costé DI sera $\sqrt{31\frac{1}{4}}$, & si à la mesme DE est appliqué IK egal au quarré de BC, qui est $\sqrt{20}$, IL sera $\sqrt{1\frac{1}{4}}$: ainsi la toute DL sera $\sqrt{45}$. Derechef appliquant a DE le rect. GN egal au rect. de ACB, qui est 10, l'autre cost. GM sera $2\frac{1}{2}$, & son double GL 5: parquoy DG sera $\sqrt{45}-5$. qui est residu second.

THEOR. 76. PROP. C.

Le quarré d'vn residu medial second, appliqué sur vne ligne rationele, faict l'autre costé residu troisiesme.

Soit le residu medial second AB, auquel conuienne BC, tellement que AC, BC, soient mediales commésurables en puissance seulement, & contiennent vn rectangle medial : Et sur la rationele DE, soit appliqué le rectangle DF. Ie dis que l'autre costé DG est residu troisiesme.

Car (ayant construit comme en la 98.p.10.) on demonstrera comme en la precedente que le rectangle DK est medial, & partant par la 23.p 10. son autre costé DL sera rationel commensurable en puissance seulement à la rationele DE. Item le rectangle de AC, BC estant medial, aussi sera son double GK, & par la 23.p 10. GL sera aussi rationele commensurable en puissance seulement à la rationele DE : Et puis que AC, BC sont incómens. en longitude, le quarré de AC sera incommésurable au rectangle de AC, BC, par la 1.p.6. & 10.p 10. partant aussi à só double GK : Mais le quarré de AC est aussi commen. au quarré de BC : (pource qu'iceux quarrez sont descrits sur lignes commensurables en puissance :) & partant par la 16.p. 10. le composé d'iceux quarrez, c'est à dire DK, sera aussi com au quarré de AC, auquel est incó. GK, parquoy par la 13. p.10. DK sera incom. a GK, & par la 10.p.10. les lignes DL, GL, ayat mesme raison que DK, GK serót incom. en lon. Mais estás rationeles, elles seront commens. en puissance seulement, & par la 74.p.10. BG sera residu. Mais n'y DL, ny GL ne sont commensurable en longitude à la rationele DE, & si on prouuera comme en la 98.p.10. que DL peut plus que GL du quarré d'vne ligne qui luy est commésurable en longitude: Et par les tierces def. DG est residu troisiesme.

SCHOLIE.

Le residu medial second AB soit √√600—√√24, & BC √√24 : la toute AC sera donc √√600 : & appliquant sur la rationele DE 4, *le rect. DH egal au quarré de AC, qui est √600, l'autre costé DI se-*

ra $\sqrt{}\,57\frac{1}{2}$; mais appliquant ſur la meſme DE le rect. IK egal au quarré de BC, l'autre coſté IL ſera $\sqrt{}\,1\frac{1}{2}$: & partant la toute DL ſera $\sqrt{}\,54$: & ſi derechef on applique ſur la meſme DE le rect. GN egal au rectangle de ACB, qui eſt $\sqrt{}\,120$, l'autre coſté GM ſera $\sqrt{}\,7\frac{1}{2}$, & ſon double GL $\sqrt{}\,30$: parquoy DG eſt $\sqrt{}\,54 - \sqrt{}\,30$, qui eſt reſidu troiſieſme.

THEOR. 77. PROP. CI.

Le quarré d'vne ligne mineure, appliqué ſur vne ligne rationele, faict l'autre coſté reſidu quatrieſme.

Soit la ligne mineure AB, à laquelle BC conuienne, en ſorte que AC, BC, ſoient incommenſ. en puiſſance, comprenant vn rectangle medial, & le compoſé de leurs quarrez rationel, & le quarré d'icelle AB ſoit appliqué ſur la rationele DE: ie dis que l'autre coſte DG eſt reſidu quatrieſme.

Car (apres auoir conſtruit comme en la 98. p. 10. le rectãgle DK ſera rationel, & GK medial, par le diſcours des precedentes; & par la 21. p. 10. DL ſera rationele com. en long. a la rationele DE; & GL, par la 23. p. 10. ſera rationele com. en puiſſance ſeulement à icelle rationelle DE: & puis que DK eſt rationel, & GK medial, ils ſont incommenſurables, & par la 10. p. 10. les lignes DL, GL qui ſont en meſme raiſon que DK, GK, ſeront incommenſurable en longitude. Mais elles ſont rationeles, elles ſeront donc commenſu. en puiſſance ſeulement; & par la 74 p. 10. DG ſera reſidu.

D'auantage il eſt reſidu quatrieſme. Car puis que les lignes AC, BC ſont incommenſ. en puiſſance, leurs quarrez ſeront incommenſ. Auſsi incommenſ. leurs egaux rectangles DH, IK, & par conſequent incommenſ. les lignes DI, IL, coſtez du rectangle defaillant d'vne figure quarrée egale au quarre de ML, c'eſt à dire à la quarte partie du quarre de GL, comme il a eſté demonſtré en la 98. p. 10. & par la 19. p. 10. DL (qui eſt commenſu. en longitude à la rationele DE,) peut plus que la conuenable GL, du quarre d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude: & par les tierces definitiõs DG eſt reſidu quatrieſme.

SCHOLIE.

La ligne mineure AB soit $\sqrt{}(27+\sqrt{}243)-\sqrt{}(27-\sqrt{}243)$ & BC $\sqrt{}(27-\sqrt{}243)$: la toute AC sera donc $\sqrt{}(27+\sqrt{}243)$, le quarré de laquelle appliquè sur la rationele DE 6, l'autre costé DI sera $4\frac{1}{2}+\sqrt{}6\frac{3}{4}$: mais estant appliqué sur la mesme DE, le rectangle IK egal au quarré de BC, qui est $27-\sqrt{}243$, l'autre costé IL sera $4\frac{1}{2}-\sqrt{}6\frac{3}{4}$: & partant la toute DL sera 9. Que si à la mesme DE on applique le rect. GN egal au rectang. de ACB, qui est $\sqrt{}486$, l'autre costé GM sera $\sqrt{}13\frac{1}{2}$, & son double GL $\sqrt{}54$: & partant DG est $9-\sqrt{}54$, qui est residu quatriesme.

THEOR. 78. PROP. CII.

Le quarré d'vne ligne faisant auec vne superficie rationele, vn tout medial, apliqué sur vne ligne rationele, faict l'autre costé residu cinquiesme.

Soit la ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial AB, de laquelle le quarré soit appliqué sur la rationele DE : Ie dis que l'autre costé DG est residu cinquiesme.

Car (apres auoir construit comme en la 98.p.10.) AB estát ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial, & BC sa conuenable, les deux lignes AC, BC sont incommens. en puissance, comprenant vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarrez medial : partant le rectangle DK sera medial, & GK rationel, & par la 23. p. 10. DL sera rationele incommens. en longitude a la rationele DE: & par la 21.p.10. GL sera aussi rationele, mais commens. en longit. à la rationele DE : Item les rectangles DK, GK estans incommensur. (car l'vn est rationel, l'autre medial) les lignes DL, GL seront aussi incommens. en longitude. Mais icelles sont rationeles: elles seront donc commens en puissance seulement, & par la 74 p.10. DG sera residu. Mais GL estant commens. en longitude à la rationele DE, & si comme en la precedéte on prouuera que la toute DL peut plus que la conuenable GL, du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude : & partant par les tierces def. DG est residu cinquiesme.

SCHOLIE.

La ligne AB ſoit $\surd\surd(216+\surd 72)-\surd\surd(216-\surd 72)$, *&* *BC* $\surd\surd(216-\surd 72)$; *la toute AC ſera donc* $\surd\surd(216+\surd 72)$, *le quarrè de laquelle ſoit appliqué ſur la rationele DE 4, & l'autre coſtè DI ſera* $\surd 13\frac{1}{2}+\surd 4\frac{1}{2}$: *mais eſtant appliquè ſur la meſme rationele, le rectangle IK egal au quarrè de BC, qui eſt* $\surd 216-\surd 72$, *l'autre coſtè IL ſera* $\surd 13\frac{1}{2}-\surd 4\frac{1}{2}$: *& partant la toute DL ſera* $\surd 54$: *Que ſi à la meſme rationele on applique le rect. GN ou MK, egal au rect. de ACB, qui eſt 12, l'autre coſtè ML ſera 3, & ſon double GL 6 : Parquoy DG ſera* $\surd 54-6$, *qui eſt reſidu cinquieſme.*

THEOR. 79. PROP. CIII.

Le quarré d'vne ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial, appliqué ſur vne ligne rationele, faict l'autre coſté reſidu ſixieſmé.

Soit la ligne AB, faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial, le quarré de laquelle AB ſoit appliqué ſur la rationele DE : Ie dis que l'autre coſté DG eſt reſidu ſixieſme.

Car (apres auoir conſtruit comme en la 98.p.10.) AB eſtãt ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial, & BC la conuenable à icelle AB : les deux lignes AC, BC ſont incommenſurables en puiſſance, comprenant vn rectangle medial, incommenſurable au compoſe de leurs quarrez auſſi medial : partant les deux rectang. DK & GK ſont mediaux & incommenſ. & par la 23. p. 10. DL, GL feront rationeles incom. en lõg. entr'elles, & à la rationele DE ; & par cõſequent commenſ. en puiſſance ſeulement : & par la 74.p.10. BG ſera reſidu Mais on peut prouuer cõme en la 101.p.10. que la toute DL peut plus que la cõuenable GL, du quarre d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude : & partãt par les tierces déf. GD eſt reſidu ſixieſme.•

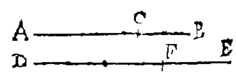
SCHOLIE.

La ligne AB ſoit $\surd\surd(972+\surd 405)-\surd\surd(972-\surd 405)$, *&*

BC√√ (972—√405) : donc la toute AC sera √√ (972+√405), au quarré de laquelle soit egal le recta gle DH, appliqué sur la rationele DE 6 : l'autre costé DI sera donc √ 27+ √11¼ : mais estant appliqué sur la mesme rationele, le rect. IK egal au quarré de BC, qui est √972 — √405, l'autre costé IL sera √ 27—√11¼ : & partant la toute DL sera √108 : Si derechef on applique sur la mesme rationele le re tangle MK, ou GN, egal au rectangle de ACB, qui est √567 l'autre costé GM sera √15¾, & son double √63 : parquoy DG sera √108 —√63. qui est residu sixiesme.

THEOR. 80. PROP. CIIII. Six. 6.

La ligne commensurable en longitude à vn residu, est aussi residu, & de mesme ordre.



Soit le residu AC, auquel soit commens. en longitude la ligne droicte DF. Ie dis que DF est residu de mesme ordre que AC.

Car CB soit la conuenable au residu AC, tellement que AB, CB soient rationeles commensurables en puissance seulement, & par la 12. p. 6. soit faict que comme AC est à DF, ainsi CB soit à FE Donc par la 12. p. 5. la toute AB sera à la toute DE, comme AC à DF, ou CB a FE: & par la 10. p. 10 comme AC est commensura. en longitude à DF, ainsi AB a DE & BC à FE. Et en changeant comme AB à BC, ainsi DE à FE, Maintenant comme AB & BC sont rationeles, aussi seront DE & FE: (car elles sont commensurables à icelles, par la 10. p. 10.) Mais AB & BC sont commensurables en puissance seulement : partant DE & FE seront aussi rationeles commensurables en puissance seulement, & par la 74. p. 10. DF est residu.

Ie dis d'auantage qu'il est residu de mesme ordre que AC. Car la ligne AB peut plus que BC du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable ou incommensurable en longitude: si commensurable: aussi DE pourra pl is que FE de mesme façon par la 15 p 10. (estans les quatre lignes proport.) que si AB est commens. en lon. à vne ligne rationele proposee, aussi DE qui luy est commens. en longitude sera commens. en longitude à la mesme rationele proposee par la 11. p. 10. Parquoy

AC & DF feront refidus premiers : Que fi BC eft commenf. en longitude à la rationele, aufsi fera FE : & AC, DF feront refidus feconds : fi AB & BC font incommenfurables en longitude à la rationele : aufsi feront DE & FE; & AC, DF feront refidus troifiefmes. Que fi AB peut plus que BC du quarré d'vne ligne qui luy foit incommenfurable en longitude: aufsi DE pourra plus de mefme que FE par la 15.p.10. & fi AB eft commenfurable en longitude à la rationele; aufsi fera DE: & AC DF feront refidus quatriefmes. Si BC eft commenfurable en longitude à la rationele, aufsi fera FE : & AC DF feront refidus cinquiefmes. Si AB & BC font incommenfur. en longitude à la rationele, aufsi feront DE & FE : partant AC & DF feront refidus fixiefmes: par ainfi DF eft refidu de mefme ordre que AC.

SCHOLIE.

Le refidu AC foit √60 — √12 *&* DF √15 — √3. *lefquelles font commenf. en longitude, l'vne eftant double de l'autre, & la conuenable CB foit* √ 2: Donc *la toute AB eft* √60 : *& puis que comme AC eft à DF, ainfi CB* √12 *eft à FE; icelle FE fera* √3: *& la toute DE* √15 *commen. feulement en puiffance à DF.*

THEOR. 81. PROP. CV.

La ligne commenfurable à vn refidu medial, eft aufsi refidu medial de mefme ordre.

Soit la ligne DF commenf. au refidu medial AC : ie dis que icelle DF eft aufsi refidu medial, & de mefme ordre que AC.

Car ayant faict mefme conftruction qu'en la preced. prop. AB & BC feront commenf. à DE, lefquelles font mediales commenf. en puiffance feulement, & par la 24.p.10. DE & FE feront mediales commenf. en puiffance feulement, par la 10. p.10. Et partant par la 75 ou 76 p.10. DF eft refidu medial : ie dis d'auantage qu'il eft de mefme ordre que AC.

Car le quarré de AB eft au rectangle de AB, BC comme AB à BC : Item le quarré de DE eft aufsi au rectangle de DE, FE comme DE à FE, par la 1 p 6. Mais le quarré de AB eft commensƒ au quarré de DE, estar^λ AB & DE commenf. & par la prop. 10 les deux rectangles seront aussi commen. Que comme l'vn sera rationel ou medial, aussi l'autre sera rationel ou medial· partant si les rectangles sont rationaux, AC & DF seront residus mediaux premiers: si les rectāgles sont mediaux, AC & DF seront residus mediaux seconds.

SCHOLIE.

Le residu medial AC soit $\sqrt{}\sqrt{}500 - \sqrt{}\sqrt{}20$, *& DF* $\sqrt{}\sqrt{}1\frac{1}{4} - \sqrt{}\sqrt{}\frac{1}{4}$; *BC sera* $\sqrt{}\sqrt{}20$. *& la toute AB* $\sqrt{}\sqrt{}500$; *mais FE sera* $\sqrt{}\sqrt{}1\frac{1}{4}$, *& la toute DE* $\sqrt{}\sqrt{}31\frac{1}{4}$.

THEOR. 82. PROP. CVI.

La ligne commensurable à vne ligne mineure; est aussi ligne mineure.

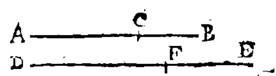
Soit la ligne DF, commenf. à la ligne mineure AC: Ie dis qu'icelle DF est aussi ligne mineure. Car CB estant conuenable a icelle AC, & faict mesme cōnstruction qu'en la 104 p.10. AB & BC seront incommensu. en puissance, comprenant vn rectangle medial , & le composé de leurs quarrez rationel, Mais comme AB à CB, ainsi DE à FE, & par la 10.p.10. DE & FE seront incommenf. en puissance. Item puis que comme AB à BC, ainsi DE à FE , par la 22.p. 6. leurs quarrez seront proportionaux, & en composāt comme le composé des quarrez de AB, BC sera au quarré de BC, ainsi le cōposé des quarrez de DE, FE, sera au quarré de FE; & en permutant comme le composé des quarrez de AB , BC sera au composé des quarrez de DE, FE, ainsi le quarré de CB sera au quarré de FE: lesquels quarrez de CB & FE sont commenf. (car les lignes BC & FE sont commenf. comme AC & DF , ainsi qu'il a esté demonstré à la 104.p.10.) & partant par la 10.p 10. le composé des quarrez de AB & BC, (lequel est rationel) sera commēsurable au composé des quarrez de DE & FE, lequel sera aussi rationel. Pareillement d'autant que comme nous auons dit à la prop precedente, le quarré de AB est au rectangle de AB & CB, comme le quarré de DE au rectangle de DE & FE, & en changeant comme le quarre au quarré, ainsi le rectangle au

rectangle

rectangle : c'est à dire commensur. Car les lignes A B & D E sont commens. par la 10. p. 10. & par le corol. de la 24. p. 10. le rectangle de AB & BC estant medial, celuy de DE & FE sera aussi medial : partant DE & FE estant incommens. en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel, par la 77. p. 10. DF sera ligne mineure.

THEOR. 83. PROP. CVII.

La ligne commensurable à vne ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial, est aussi ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial.



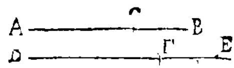
Soit la ligne DF commensurable à la ligne AC, faisant auec vne superficie rationele vn tout medial. Ie dis que DF est aussi ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial.

Car soit CB conuenable à AC, tellement que AB, CB soiẽt incommens. en puissance, & facent le composé de leurs quarrez medial, mais le rectangle compris d'icelles rationel : Et estant fait mesme construction qu'en la 104. p. on demonstrera comme en la precedente que les lignes DE, FE sont incommens. en puissance ; & que le composé des quarrez de AB, CB est commens. au composé des quarrez de DE, FE. Mais celuy la est medial : aussi sera donc cestuy-cy, par le corol. de la 24. p. 10. Derechef comme nous auons demonstré en la 105. p. le rectangle de AB, CB, est commens. au rectangle de DE, FE : mais cestuy-là est posé rationel : aussi sera donc celuy cy par la 9. d. 10. Veu donc que DE, FE, sont incommens. en puissance, & font le composé de leurs quarrez medial, mais leur rectangle rationel, par la 78. p. 10. DF sera ligne faisant auec superficie rationele vn tout medial.

THEOR. 84. PROP. CVIII.

La ligne commensurable à la ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial, est aussi ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial.

Soit la ligne D F commens. à la ligne AC, faisant auec vne superficie mediale vn tout medial: Ie dis que DF est aussi ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial.



Car à AC soit CB conuenable, tellement que AB, CB soient incommens. en puissance, & facent le composé de leurs quarrez medial, & leur rectangle aussi medial, & incommens. au composé de leurs quarrez: & ayant faict semblable construction qu'aux precedentes, on prouuera comme en la 106. p. que les lignes DE, FE, sont incommens. en puissance, & que le composé des quarrez de AB & BC, est commensurable au composé des quarrez de DE & FE: & comme en la 105. p. que le rectangle de AB & BC, est commensurable au rectangle de DE & FE. Mais le rectangle de AB, & CB est medial, & incommensurable au composé des quarrez de AB & CB, aussi medial: partant par le scholie de la 14 p. 10. le rectang. de DE & EF, sera medial, & incommens. au composé des quarrez de DE & FE, aussi medial: & DF sera ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial.

THEOR. 85. PROP. CIX.

Si d'vne superficie rationele, est retranchee vne superficie mediale: la ligne qui peut le reste est residu, ou ligne mineure.

Soit la superficie rationele AB, (en la figure de la prop. suiuante) de laquelle soit retranchee la mediale A: Ie dis que la ligne qui peut le reste, B est residu, ou ligne mineure.

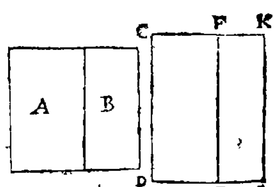
Qu'il ne soit ainsi. Sur la rationele proposee CD soit descrit le rectangle CE egal a A, & FI egal a B. Il est euident que CI sera rationel, & par la 21 p. 10 son autre costé CK sera rationel commens. en longitude à CD. Item par la 23. p. 10. CE estant medial, CF sera rationele commens. en puissance seulement à CD, & par la 13. p. 10. CK & CF seront rationeles commens. en puissance seulement : & partant par la 74. p. 10. FK sera residu Maintenant CK peut plus que CF du quarré d'vne ligne qui luy est commens. ou incommensur. en longit. Si commens. FK sera residu premier : & la ligne qui peut le rectangle FI (ou son egal B) est residu par la 92. p. 10. Si incommensur. CK est residu quatriesme : & la ligne qui peut le rectangle FI, (ou son egal B) est ligne mineure par 95. p. 10.

SCHOLIE.

Si le rectangle rationel AB est 32, le medial A $\sqrt{320}$, & la ligne rationele CD 6, sur laquelle est descrit le rect. CE egal à A, & FI egal à B : les costez CF, & FK, seront $\sqrt{8\frac{8}{9}}$ & $5\frac{1}{3} - \sqrt{8\frac{8}{9}}$: & partant la toute CK sera $5\frac{1}{3}$: & le rectangle CI 32, duquel ostant CE, qui est $\sqrt{320}$, le reste rectangle FI sera $32 - \sqrt{320}$: & la ligne pouuant iceluy sera $\sqrt{(16+\sqrt{176})} - \sqrt{(16-\sqrt{176})}$, qui est ligne mineure.

THEOR. 86. PROP. CX.

Si d'vne superficie mediale, est retranchee vne superficie rationele; la ligne qui peut le reste, est residu medial premier, ou ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial.



Soit comme dessus la superficie mediale AB, de laquelle soit retranchee la rationele A Ie dis que la ligne qui peut le reste B, (apres auoir construict comme en la precedente) ou son egal FI, est residu medial premier, ou ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial.

Car puis que la superficie totale AB est mediale, aussi la totale CI est mediale, & par la 23. p. 10 Le costé CK est rational commens. en puissance seulement à la rationele CD.

Item puis que le retranché A est rationel, aussi sera son egal CE, & par la 21. p 10. CF sera rationele commensurable en longitude à la rationele CD: & par la 13. p 10. CK & CF seront rationeles commensurables en puissance seulement; & partant par la 74. p. 10. FK sera aussi residu. Mais à cause que CK peut plus que CF du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable, ou incommensurable en longitude; FK sera residu second, ou residu cinquiesme. Si residu second; la ligne qui peut le rectangle FI est residu medial premier par la 93. p 10 si residu cinquiesme, la ligne qui peut le rectangle FI, est ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial par la 96. p. 10.

SCHOLIE.

Si la superficie mediale AB est √ 800, & la rationele A 12; le reste B sera √ 800—12, & la ligne pouuãt iceluy sera √ (√ 200+√ 164) — √ (√ 200—√ 164), qui est ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial.

THEOR. 87. PROP. CXI.

Si d'vne superficie mediale, est retranchee vne superficie mediale incommẽsurable à la toute; la ligne qui peut le reste est ou residu medial secõd, ou ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial.

Soit la superficie mediale AB, de laquelle soit retranchee la superficie mediale A, incommens. à la toute AB. Je dis que la ligne qui peut le reste B, est residu medial second, ou ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial.

Car ayant faict mesme construction qu'aux precedentes, les rectangles CI, CE seront mediaux & incommens. entr'eux; & par la 23. p. 10. les lignes CK, CF seront rationeles incommensurables en longitude à CD. Et puis que CI, CE. sont incommensura. les rationeles CK, CF, qui sont en mesme raison que CI, CE, seront aussi incommensurable en longitude, par la 10. p. 10. & par consequent elles sont seulement commens.

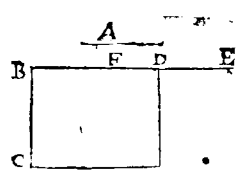
en puiſſance : Donc FK ſera reſidu par la 74. p. 10. & FC ſa conuenable. Maintenant CK peut plus que FK, du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. ou incommenſ. en longitude : ſi commenſurable ; FK ſera reſidu troiſieſme, par la def. Parquoy la ligne qui peut le rectangle FI (ou ſon egal B) eſt reſidu medial ſecond, par la 94. p. 10. Si incommenſ. FK ſera reſidu 6. par la def. Parquoy la ligne qui peut le rectangle FI (ou B ſon egal) eſt ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial, par la 97. p. 10.

SCHOLIE.

Si la ſuperficie mediale AB eſt $\sqrt{279}$, & A $\sqrt{40}$: la ſuperficie reſtante B ſera $\sqrt{279} - \sqrt{40}$: & la ligne pouuant icelle ſera $\sqrt{(\sqrt{69\frac{3}{4}} + \sqrt{59\frac{3}{4}})} - \sqrt{(\sqrt{69\frac{3}{4}} - \sqrt{59\frac{3}{4}})}$, qui eſt appellée ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial.

THEO. 88. PROP. CXII.

La ligne appelee reſidu, n'eſt pas la meſme que Binome.



Soit le reſidu A. Ie dis qu'elle n'eſt pas meſme ligne que binome.

Car ſoit la rationele propoſee BC, ſur laquelle ſoit appliqué le rectangle CD egal au quarré du reſidu A : par la 98. p. 10. BD ſera reſidu premier : auquel ſi on adiouſte ſa conuenable DE ; BE & DE, ſeront rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement : & BE commenſur. en longitude à la rationele BC.

Maintenant ſi on poſe A eſtre binome ; BD ſera binome premier, par la 61. p. 10. lequel eſtant diuiſé en ſes noms au point F ; (eſtant BF le plus grand nom) BF & FD ſeront rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement, & BF commenſurable en longitude à la rationele BC ; & par la 12. p. 10. BE & BF, ſeront commenſurables en longitude. Veu donc que la toute BE eſt commenſ. en longitude à la partie BF, par le corol. de la 16. p. 10. l'autre partie FE ſera auſſi commenſu.

en longitude à BE: partant aussi rationele comme icelle BE. Mais DE qui est aussi rationele, n'est commensurable en longitude à BE, & par la 14 p.10. FE, DE sont rationeles cómensurables en puissance seulement: & partant par la 74. p. 10. FD est residu, & par consequent irrationele; ce qui est absurde: car elle a esté prouuee tantost rationele: donc le residu A, sera differend du binome.

COROLLAIRE.

De ces choses on peut facilement colliger que la ligne appellee residu, & les cinq sortes de lignes irrationeles suiuantes, sont differentes de la mediale, & entr'elles. Car le quarré de la mediale appliqué sur vne ligne rationele, faict l'autre cost rationel commensurable en puissance seulement à icelle rationele, par la 23. p.10.

Le quarré du residu, faict l'autre costé residu premier, par la 98. p. 10.

Le quarré du residu medial premier, faict l'autre costé residu second par la 99. p.10.

Le quarré du residu medial second, faict l'autre costé residu troisiesme, par la 100 p.10.

Le quarré de la ligne mineure, faict l'autre costé residu quatriesme, par la 101 p.10.

Le quarré de la ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial, faict l'autre coste residu cinquiesme, par la 102. p. 10.

Le quarré de la ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial, faict l'autre coste residu sixiesme par la 103. p.10.

Puis donc que tous ces costez, (qui sont les latitudes des rectangles) sont differens; les lignes qui les peuuent seront aussi differentes. Mais les quarrez des binomes, & des cinq lignes irrationeles suiuantes, estans appliquez sur vne ligne rationele font l'autre costé binome de quelque ordre: partant le binome & les cinq suiuantes sont differentes du residu, & des cinq suiuantes,

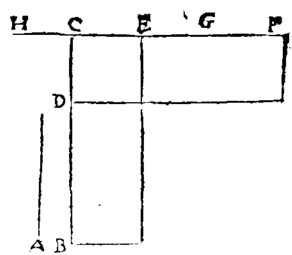
Ainsi toutes les lignes irrationeles cy deuant dictes sont treize: sçauoir celles-cy.

1. Mediale.
2. Binome.
3. Bimediale premiere.
4. Bimediale seconde.
5. Ligne maieure.
6. Ligne pouuant vn rationel & vn medial.

7. Ligne pouuant deux mediaux.
8. Residu.
9. Residu medial premier.
10. Residu medial second.
11. Ligne mineure.
12. Ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial.
13. Ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial.

THEOR. 89. PROP. CXIII.

Le quarré d'vne ligne rationele estant appliqué sur vn binome, faict l'autre costé residu, les noms duquel sont proportionaux, & commensurables aux noms du binome : en outre le residu est de mesme ordre que le binome.



Soit la rationele A, & le binome BC, duquel le plus grād nom soit BD : & à icelle BC soit appliqué le rectangle BE egal au quarré de la rationele A. Ie dis que l'autre costé CE est residu tel que dit la proposition.

Car sur le plus petit nom CD soit appliqué le rectangle DF aussi egal au quarré de rationele A : donc les deux rectangles BE, DF, seront egaux, & par la 14.p.6. leurs costez seront reciproques, sçauoir que comme BC à DC, ainsi CF à CE, & en diuisant comme BD à DC, ainsi FE à EC. Mais BD est plus grande que CD : donc aussi FE sera plus grande que EC. Maintenant de EF soit retranchee EG egale à EC, & soit faict comme FG à GE, ainsi EC à CH, par la 12.p.6. & en composant comme FE à EG (ou EC son egale) ainsi EH à CH, & par la 12.p.5. les deux antecedents FEH seront aux deux consequents ECH. comme l'vn des antecedens EH à l'vn des consequens CH : & partant les trois lignes FH, EH, CH, seront continuellement proportioneles en la raison de FE à EC, ou BD à DC : & par la 22. p. 6. & 10. p. 10. comme le quarré de BD est commensur. au quarré de DC, (car iceux quarrez sont commensur. puis que BD, DC sont les noms du binome BC) ainsi que le quarré de EH, sera commensur. au quarré de CH : & par le corol. de la 20. p. 6. & 10. p. 10. CH sera commens. en longitude à la troisiesme proportionele FH, & par la 16. p. 10. CH & CF seront commens. en longit. Et d'autant que le rectangle DF est rationel (estant egal au quarré de la ligne rationele A) & DC ligne rationele : CF sera aussi ligne rationele commensur. en longitude à CD, par la 21. p. 10. Et CH sera aussi rationele cõmens. en longitude à CD, par la 12. p. 10. & par la 10. p. 10. cõme CD & DB sont rationeles commens. en puissance seulement, aussi CH, EH, seront rationeles commens. en puissance seulement : & partant par la 74 p. 10. CE sera residu : duquel les noms EH, CH, sont proportionaux, & commens. aux nõs BD, DC, du binome BC : Car il a esté demonstré que comme BD est à DC, ainsi EH à CH ; & partant en changeant comme BD sera à EH, ainsi DC à CH. Mais DC, CH ont esté demonstrees commens. en long par la 10 p. 10. BD, EH, seront donc aussi commens. en longitude.

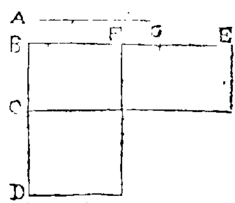
Reste donc à prouuer que le residu est de mesme ordre que le binome : Or les noms de l'vn estans proportionaux, & cõmensurab. aux noms de l'autre : par la 15. p 10. comme le plus grand nom du binome pourra plus que le plus petit du quarré d'vne ligne qui luy sera commensurable, ou incommens. en longitude : le plus grand nom du residu pourra plus de mesme : Que si le plus grand nom du binome est commensurable en longitude à la rationele : aussi sera le plus grand du residu par la 12 p. 10. & ils seront binome premier, & residu premier. Que si le plus petit nom du binome est commens. en longit. à la rationele ; aussi sera le plus petit du residu ; & ils seront binome & residu second. Que si ny l'vn ny l'autre nom du binome est commens. à la rationele : semblablement l'vn ny l'autre nom du residu ne sera commens. à la mesme rationele : Et ils seront binome, & residu troisiesme : & ainsi des autres.

SCHOLIE.

Si la rationele A est 8, le binome BC 9 + $\sqrt{45}$. *tellemẽt que* BD *soit* 9, *&* CD $\sqrt{45}$: *Le quarre de A estãt appliqu. sur* BC, *l'autre coste du* *rectangle CE sera 16 — $\sqrt{142\frac{2}{9}}$, qui est residu: & puis que comme DC est à CB, ainsi CE à CF, icelle CF sera $\sqrt{91\frac{1}{45}}$; & EF $\sqrt{460\frac{4}{5}}$ — 16. Mais EG estant egale à CE, est 16 — $\sqrt{142\frac{2}{9}}$; GF $\sqrt{1115\frac{1}{45}}$ — 32: & d'autant que comme FG est à GE, ainsi EC à CH; icelle sera $\sqrt{142\frac{2}{9}}$, & EH 16: Ainsi est manifeste que CE est residu de mesme ordre que le binome BC, & que les noms EH, CH, sont proportionaux aux noms BD, CD.*

THEOR. 90. PROP. CXIIII.

Le quarré d'vne ligne rationele, estant appliqué sur vn residu, faict l'autre costé binome, les noms duquel sont proportionaux, & commens. aux noms du residu : En outre le binome est de mesme ordre que le residu.



Soit la rationele A, & le residu BC auquel conuienne CD, & sur BC soit descrit le rectangle CE egal au quarré de la rationele A: Ie dis que l'autre costé BE sera binome tel que demande la proposition.

Car sur BD, soit descrit le rectangle DF egal au mesme quarré de la rationele A: Donc les rectangles CE & DF seront egaux, & ayans les costez reciproques par la 14 p. 6. BD sera à BC comme BE à BF, & par conuersion de raison BD sera à CD, comme BE à FE. Maintenant soit couppee EF en G, par la 10. p. 6. tellement que comme BE est à FE, ainsi EG à GF, veu donc que comme la toute BE est à la toute FE, ainsi EG retrãchee de BE, est à GF retranchee de FE, aussi par la 19 p. 5. le reste BG, sera au reste EG, comme la toute à la toute, c'est à dire comme la retranchee EG à la retranchee GF: & partant EG est moyenne proportion. entre BG & GF. Parquoy comme BG sera à GF, ainsi le quarré de BG sera au quarré de EG, par le corol. de la 20. p. 6. Et puis que comme BD à CD, ainsi BE à FE, c'est à dire BG à GE; & BD, CD noms du residu BC sont rationeles commens. en puissance seulement: & par la 10. p. 10. BG, GE seront aussi commensurable en puissance seulement: & partant les quarrez d'icelles BG, GE sont commens., & par consequent les lignes BG, FG qui ont mesme raison qu'iceux quarrez, sont commẽsurables, en longitude, par la mesme o p. 10. Et par le corol. de la 16. p 10. BG, BF seront aussi commensurables en longitude. Et d'autant que BD plus grand nom du residu BC est rationele, & le rectangle DF egal au quarré de la rationele A, est rationel; par la 2. p. 10. BF sera aussi rationele commensu. en longitude a BD. Donc par la 12. p. 10. BG sera aussi rationele cõmens. en longitude a la mesme BD. Et puis que BG, GE, ont esté demonstrees commens. en puissance seulement, & BG rationele, GE sera aussi rationele. Donc BG, GE sont rationeles commens. en puissance seulement: Et partant par la 37. p 10. BE est binome: duquel les noms BG, GE, sont proportionnaux, & commens. aux noms BD, CD, du residu BC. Car il a esté demonstré que comme BD a CD, ainsi BG a GE: & partant en permutant comme BD a BG, ainsi CD a GE: mais BD a esté demonstré commensurable en longitude a BG: dõc aussi CD sera commens. en longitude a GE, par la 10. p. 10. Reste donc a prouuer que BE est binome de mesme ordre que le residu BC: ce qu'on fera tout ainsi qu'en la precedente.

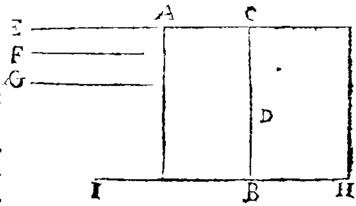
SCHOLIE.

Si la ration. A est 4, & le residu BC 9 — √ 45, CD √ 45, & BD 9. le rect. DF sera 16, & aussi CE 16: ainsi le costé BF sera $1\frac{7}{9}$, *& BE* $4 + \sqrt{8\frac{8}{9}}$ *: & par consequent FE sera* $\sqrt{8\frac{8}{9}} + 2\frac{2}{9}$*; Et GE* $\sqrt{8\frac{8}{9}}$*, FG* $1\frac{7}{9}$*, BG 4: ainsi est euident que BE est binome en mesme ordre que le residu BC, & que les noms d'iceux sont proportionaux.*

THEOR. 91. PROP. CXV.

Si vn rectangle est compris d'vn residu, & d'vn binome, desquels les noms sont proportionnaux & commensurables; la ligne droicte pouuant icelluy rectangle est rationelle.

Soit le rectangle AB, compris sous le residu AC, & le binome CB, duquel les noms CD, DB soient proportionaux, &



commensurab. aux nõs CE, AE du residu AC, & soit la ligne droicte F pouuant iceluy rectangle AB. Ie dis que F est rationele.

Car soit vne rationele proposee G, le quarré de laquelle estant appliqué sur le binome CB, face le rectangle CH. Donc par la 113. p. 10. l'autre costé BH sera residu, duquel les noms HI, BI sont commensur. & proportionaux aux noms CD, DB, sçauoir est que comme HI à BI, ainsi CD à DB, & partant ainsi CE à AE: & en changeãt comme la toute HI à la toute CE, ainsi la retranchee BI à la retranchee AE; & par la 19 p. 5. le reste BH sera aussi au reste AC, comme la toute à la toute. Mais icelles toutes sont commensf. en long. par la 12. p. 10. pource que l'vne & l'autre est commens. à CD: donc aussi BH, AC seront commensur. en long par la 10. p. 10. & par consequent les rectangles HC & BA estans par la 1. p. 6. en mesme raison que BH, & AC, seront aussi commens. Mais HC egal au quarré de la rationele G, est rationel: donc aussi AB sera rationel; & partant la ligne F qui peut iceluy AB, sera aussi rationele.

COROLAIRE.

De cecy est manifeste qu'vn rectangle rationel, peut estre compris de lignes irrationeles.

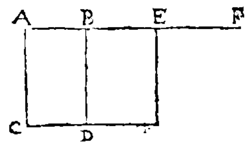
SCHOLIE.

Si le residu AC est 4 — $\sqrt{8\frac{1}{9}}$, tellement que les noms d'iceluy CE, & AE soient 4, & $\sqrt{8\frac{1}{9}}$, mais le binome BC soit 9 + $\sqrt{45}$, le rectangle AB sera 16, qui est rationel: & partant la ligne F qui peut iceluy est 4, & par consequent rationele. Or la rationele G estant 8 le rectangle CH sera 64, & le costé BH 16 — $\sqrt{142\frac{2}{9}}$, HI 16, & BI $\sqrt{142\frac{2}{9}}$.

THEO. 92. PROP. CXVI.

De la ligne mediale naissent infinies lignes irrationeles, toutes differentes des deuant dictes.

Soit la ligne mediale AB, ie dis que d'icelle naissent infinies lignes irrationeles toutes differentes des deuant dictes.



Car si sur l'extremité de la mediale on meine la perpendiculaire AC qui soit rationele, & on acheue le rectangle AD : iceluy rectangle sera irrationele par le coroll. de la 39. p. 10. & par la 11. d. 10. la ligne qui peut iceluy rectangle est irrationele : soit icelle BE : laquelle sera differente de toutes les deuant dictes. Car son quarré appliqué sur vne ligne rationele comme AC, fait l'autre costé AB medial : Ce que ne faisoit pas vne des deuant dictes. Item si on accomplit le rectangle DE, il sera aussi irrationel : & la ligne qui le peut aussi irrationele : & soit EF, laquelle sera differente de toutes les deuant dictes. Car le quarré de pas vne d'icelles, appliqué sur vne ligne rationele, ne faict l'autre costé tel que BE : & de ceste façon on peut proceder à l'infiny.

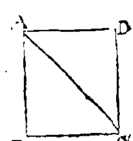
SCHOLIE.

Si la mediale AB est $\sqrt{\sqrt{2}}$, *& la rationele AC 2; le rectangle AD sera* $\sqrt{\sqrt{32}}$ *la ligne & BE qui peut iceluy sera* $\sqrt{\sqrt{\sqrt{32}}}$*: Ainsi le rectangle DE sera* $\sqrt{\sqrt{\sqrt{512}}}$, *& la ligne EF qui peut iceluy sera* $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{512}}}}$, *& ainsi a l'infiny.*

THEOR. 93. PROP. CXVII.

Au quarré, la diagonale est incommensurable en longitude au costé.

Soit le quarré A B C D, duquel AC soit diagonale. Ie dis que la diagonale AC est incommensurable en longitude au costé AB.



Car par la 47. p. 1. le quarré de AC est double du quarre de AB : mais toute grandeur double d'vne autre est comme 2 à 1, ou 4 à 2, ou 8 à 4, &c. Donc le quarré de AC est au quarré de AB, comme 2 à 1, ou 4 à 2, ou 8 à 4, &c. qui n'est pas comme nombre quarré à nombre quarré, comme nous auons demonstré au corol. de la 24. p. 8. & partant par la 9. p. 10. la diagonale AC, & costé AB, sont incommensurables en longitude.

SCHOLIE.

Si AB costé du quarré est 1, la diagonale AC sera $\sqrt{2}$: tellement que la raison du costé au diametre est comme 1 à $\sqrt{2}$, c'est à dire incommens. en longitude.

Fin du dixiesme liure.

ELEMENT VNZIESME.

DEFINITIONS.

1. SOlide, eſt ce qui a longueur, largeur & profondeur : Mais les termes d'vn ſolide, ſont ſuperficies.

2. Vne ligne droicte eſt perpendiculairement eſleuee ſur vn plan, quand toutes les lignes ſur iceluy plan menees vers elle la rencontrent en angles droicts.

3. Vn plan eſt eſleué perpendiculairement ſur vn plan, quand les lignes menees ſur l'vn d'iceux perpendiculairemẽt à la ligne de commune ſection, ſont auſſi perpendiculaires à l'autre plan.

4. L'inclination d'vne ligne droicte à vn plã eſt l angle aigu contenu d icelle ligne, & d'vne autre ligne droicte menee au plan de l'inclinãte, par le poinct auquel tombe vne perpendiculaire tiree du ſommet d'icelle inclinante ſur ledit plan.

5. Vn plan eſt incliné ſur vn plan, quand les lignes menees ſur l'vn & l'autre plan perpendiculaires à la ligne de commune ſection, & vers vn meſme poinct d icelle, ne ſont point perpẽdiculaires les vnes aux autres : & l'inclination d'iceux plans; eſt l angle aigu compris d icelles perpendiculaires.

6. Vn plan eſt dit eſtre ſemblablement incliné à vn plan, lors que les ſuſdicts angles dinclination ſont egaux entr'eux.

7. Plans parallels, ſont ceux leſquels eſtans continuez ne ſe rencontrent point.

8. Solides ſemblables , ſont ceux qui ſont compris de ſuperficies ſemblables, egales en nombre.

9. Solides egaux, & ſemblables, ſont ceux qui ſont compris de ſemblables ſuperficies, egales en nombre & grandeur.

10. Angle ſolide, c eſt la rencõtre de plus de deux angles plans en vn meſme poinct, eſtans iceux conſtituez ſur plans differens.

11. Pyramide, eſt vn ſolide compris de plusieurs plans, ſe rencontrãs en vn méme poinct, & ayans vn autre plan pour baſe.

12. Priſme, eſt vn ſolide compris de plans, deſquels deux qui ſont oppoſez ſont egaux, ſemblables, & parallels, & les autres ſont parallelogrammes.

13. Sphere, eſt vne figure compriſe par le demy cercle, lors que ſon diametre demeurant

immobile, iceluy demy cercle tourne iusques à ce qu'il reuienne là, d'où il estoit party.

14 L'axe de la sphere, est iceluy diametre immobile à l'entour duquel tourne le demy cercle.

15. Le centre de la sphere, est celuy mesme que du demy-cercle.

16. Diametre de la sphere, est vne ligne laquelle passant par le centre d'icelle, est terminee à la superficie de la sphere.

17. Cone, est vn solide compris par vn triangle rectangle, lors que l'vn des costez qui comprennent l'angle droict demeurant immobile, le triangle faict vn tour alentour d'iceluy costé. Et si ledit costé immobile est egal à l'autre costé comprenant l'angle droict; le cone sera rectangle: si plus petit, il sera ambligone: si plus grand, il sera oxigone.

18. L'axe du cone est icelle ligne immobile à l'entour de laquelle tourne le triangle.

19. Mais le cercle descrit par l'autre costé comprenant l'angle droict qui tourne, est la base du cone.

20. Cylindre, est vn solide compris par vn parallellogramme rectangle, lors que l'vn des costez demeurant immobile, le parallelogramme faict vn tour à l'entour d'iceluy costé.

21. L'axe du cylindre, est icelle ligne immobile à l'entour de laquelle se meust le parallelogramme.

22. La

22. La base du cylindre, est le cercle descrit par l'autre costé, qui auec l'axe du cylindre comprend l'angle droict.

23. Semblables cones, & cylindres, sont ceux desquels les axes & les diametres de leurs bases sont proportionaux.

24. Cube est vn solide compris de six quarrez.

25. Tetraedre, est vne figure solide comprise de quatre triangles egaux, & equilateraux.

26. Octaedre, est vn solide cõpris de huict triangles egaux, & equilateraux.

27. Dodecaedre, est vn solide compris de douze pentagones egaux, & equilateraux & equiangles.

28. Icosaedre, est vn solide cõpris de vingt triangles egaux, & equilateraux.

29. Parallelipipede, est vn solide compris de six quadrangles plans, desquels les opposez sont parallels.

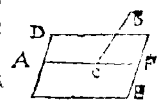
30. Vne figure solide, est dicte inscrite en vne figure solide, lors que tous les angles de la figure inscrite sont construits, ou és angles, ou és costez, ou finablement és plans de la figure en laquelle elle est inscrite.

31. Mais vne figure solide, est dicte circonscrite à vne figure solide, quand ou les angles, ou les costez, ou les plans de la figure circonscrite, touchent tous les angles de la figure à

l'entour de laquelle elle est descripte.

THEO. 1. PROP. I.

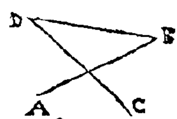
Vne partie d'vne ligne droicte ne peut estre sur vn plan, & l'autre partie en l'air.



La demonstration de ceste prop. est facile. Car si AC partie de la ligne ACB est sur le plan DE, & l'autre partie CB en l'air, il est euident que ACB ne sera pas ligne droicte, comme il est requis.

THEOR. 2. PROP. II.

Si deux lignes droictes se coupent l'vne l'autre, elles seront sur vn mesme plan : Et tout triangle est en vn mesme plan.

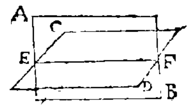


Soient deux lignes AB & CD se coupans l'vne l'autre au poinct E, & en EB, ED soient pris quelcõques poincts B & D, & soit tiree la ligne droicte BD. afin de faire le triangle EBD. Ie dis que les deux lignes droictes AB, CD, sont constituees en vn seul plan : Item que le triangle EBD est pareillement en vn seul plan.

Car d'autant que les lignes AB, CD s'entrecoupent en E, BE, DE feront vn angle au poinct E: & par la definition de l'angle plan conuertie, & 1.p. 1. elles seront en vn mesme plan, Et par la mesme raison BD faisant deux angles auec icelles deux lignes BE, DE; sera aussi au mesme plan : Partant tout le triangle EBD est en vn mesme plan. Et puis que BE, DE parties des lignes AB, CD, sont en vn mesme plan, il s'ensuit par la 1.p.11. qu'icelles AB, CD, sont aussi en vn mesme plan; sçauoir est en celuy auquel nous auons demonstré estre le triangle EBD.

THEOR. 3. PROP. III.

Si deux plans ſe coupent l'vn l'autre, leur commune ſection ſera vne ligne droicte.

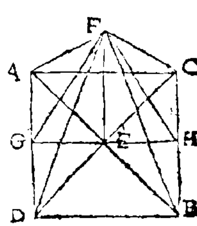


Soient les deux plans ſe coupans l'vn l'autre AB & CD, & les termes de leur cōmune ſection, ſoient les poincts E, F. Ie dis que leur commune ſection eſt vne ligne droicte.

Car puis que les poincts E, F, ſont communs à tous les deux plans, d'vn poinct à l'autre ſoit menee vne ligne droicte ſur le plan AB; item des meſmes poincts ſoit menee vne ligne droicte ſur le plan CD: Ie dis qu'il eſt impoſſible qu'icelles deux lignes ſoient autres qu'vne ſeule ligne droicte, ſçauoir EF: car ſi elles eſtoient differentes, il s'enſuiuroit que deux lignes droictes auroient leurs extremitez communes: ce qui eſt impoſſible, car elles enfermeroient vne eſpace, contre ſa 12 com ſent. La ligne droicte EF eſt donc ſur l'vn & l'autre plan, & partant leur commune ſection.

THEOR. 4. PROP. IIII.

Si deux lignes droictes ſe coupans l'vne l'autre, & au poinct de leur ſection on eſleue perpendiculairement vne autre ligne droicte, elle ſera auſſi eſleuee perpendiculairement ſur le plan d'icelles.



Soient les deux lignes AB & CD, ſe coupans l'vne l'autre au poinct E, & du poinct de ſection E ſoit eſleuee la perpendiculaire EF à chacunes d'icelles: ie dis qu'elle eſt auſſi perpendiculaire à leur plan.

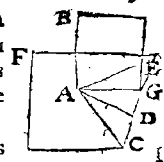
Car ſoient poſees egales AE, EB, CE & ED, & ſoiēt tirees les lignes AD, BC,

& par le poinct E soit menee la ligne droicte GH, couppant les lignes AD, BC, és poincts G & H: Item du poinct en l'air F soient tirees les lignes FA, FG, FD, FB, FH & FC. D'autant que les costez EA, ED du triangle AED, sont egaux aux costez EB, EC du triangle BEC, & les angles AED, BEC contenus par iceux costez aussi egaux par la 15. p. 1. les bases AD, BC seront pareillement egales, par la 4 p. 1. Derechef puis que les angles AEG, BEH sont egaux par la 15. p. 1. les deux angles AEG, EAG du triangle AGE seront egaux aux deux angles BEH, EBH du triangle BHE, & le costé AE est egal au costé BE: donc par la 26. p. 1. les deux costez AG, GE, seront egaux aux deux costez BH, HE. Et puis que les deux costez FE, EA du triangle FEA sont egaux aux costez FE, EB du triangle FEB, & les angles contenus d'iceux costez aussi egaux, sçauoir droicts par l'hypotese, par la 4. p. 1. les bases FA, FB seront egales. Par mesme raison seront aussi egales les lignes FD, FC. D'auãtage veu que les costez FA, AD du triangle FAD, sõt egaux aux costez FB, BC du trian. FBC, & la base FC, egale á la base FD, par la 8. p. 1. les angles FAD, FBC serõt aussi egaux: Parquoy les costez FA, AG du trian. FAG estans egaux aux costez FB, BH, du triangle FBH, les bases FG, FH, seront pareillemẽt egales par la 4 1. p. 1. Et finablemẽt puis que les costez FE, EG, du triangle FEG, sont egaux aux costez EF, EH du triangle FEH, & les bases FG, FH aussi egales, les angles FEG, FEH seront pareillement egaux par la 8 p. 1. & partant par la 10. d. 1. la ligne droicte FE sera perpendiculaire á la ligne GH, qui la touche en E, & constituee au mesme plan que les lignes AB, CD, par la 2. p. 11.

On pourra semblablement prendre tant de lignes qu'on voudra sur le mesme plan, qui feront les angles droicts rencontrant la perpendiculaire FE, par les mesmes raisons que dessus: & par la 2. d 11. FE sera perpendiculaire au plan des lignes AB & CD: ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 5. PROP. V.

Si vne ligne droite rencontre en vn poinct perpendiculairement trois autres lignes droites; icelles trois lignes droites seront en vn mesme plan.

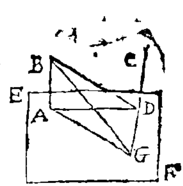


Soit la ligne droicte AB perpendiculaire a trois autres lignes droictes AC, AD, AE, au poinct de leur rencontre A. Ie dis qu'icelles trois lignes AC, AD, AE, sont sur vn mesme plan.

Car puis que deux d'icelles quelles qu'elles soient sont en vn mesme plan par la 2. p. 11. soient AC, AD, au plan FC. Si donc on dit que AE n'est point sur le mesme plan FC, mais qu'elle est esleuee en l'air, elle pourra estre au mesme plan que AB par la 2. p. 11. & soient toutes deux au plan BE. Ainsi FC, & BE sont deux plans differés, lesquels se touchans au poinct A, ne sont pas parallels, partant estans continuez tant qu'il sera de besoin ils se coupperont, & leur commune section sera vne ligne droicte par la 3. p. 11. soit la ligne AG, laquelle par ce moyen sera au mesme plan que AC ; & partant par la 3. d. 11. BA, & GA se rencontreront en angles droicts : mais par hypothese AB & AE se rencontrent aussi en angles droicts : par ainsi les angles BAE, BAG estans au plan BG tiré par les lignes BA, AG, seroient egaux, la partie au tout : ce qui est impossible : Donc AE estoit au mesme plan que AC & AD.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux lignes droites sont esleuees perpendiculairement sur vn mesme plan ; elles seront paralleles.



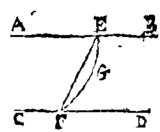
Soient les deux lignes AB, CD esleuees perpendiculairement sur vn mesme plan EF. Ie dis qu'elles sont paralleles entr'elles.

Car si des poincts A & D, ou icelles lignes rencontrent vne mesme superficie plane on meine la ligne droite CD, les deux angles BAD & CDA seront droicts par la 2 d. 11. partant si les deux lignes BA & CD sont en vn mesme plan, elles seront paralleles par la 28 p. 1.

Ores qu'elles soient en vn mesme plan, on le prouue ainsi. Sur le plan EF & du poinct D, soit menee DG perpendiculaire à AD par la 11. p. 1. & soit posee icelle DG egale à AB, & soient menees les lignes BD, BG, AG. D'autant que les 2. triangles ABD & AGD ont les deux costez AB, DG egaux, & AD commun, & l'angle BAD droict egal à l'angle GDA aussi droict, par la 4. p. 1. la base BD sera egale à la base AG. Item les deux triangles AGB & GDB ayans les deux costez AB, & DG egaux, & les deux autres AG & BD aussi egaux, & la base BG commune à tous deux, par la 8. p. 1 les deux angles BAG, BDG seront egaux. Mais l'angle BAG est droict par la 3. d. 11. donc BDG sera aussi droict: il est donc euident que GD touche perpendiculairement, en vn poinct D, les trois lignes DA, DB, DC: & partant par la 5. p. 11 icelles trois lignes seront en vn mesme plan, c'est à dire que CD sera au plan mené par les lignes AD, DB. Mais par la 2. p. 11. les trois lignes AB, BD, AD sont aussi sur vn mesme plan; partant AB & CD seront en vn mesme plan.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si deux lignes droites sont paralleles, & de l'vne à l'autre on meine vne ligne droicte, elle sera au mesme plan des lignes paralleles.



Soient deux lignes paralleles AB & CD, & de l'vne à l'autre soit menee la ligne droicte EF. Ie dis qu'icelle ligne est au mesme plan des lignes paralleles AB & CB.

Car si elle n'est au mesme plan, ains en vn autre: que celuy cy couppe cestuy-là és poincts E, & F, & la commune section d'iceux plans soit EGF, laquelle sera ligne droicte par la 3. p. 11. donc les deux lignes droictes EF, EGF, ayans mesmes termes E & F, enfermeroient vn espace: ce qui est absurde. Donc la ligne droicte EF n'est pas en vn autre plan que celuy auquel sont les paralleles AB, CD.

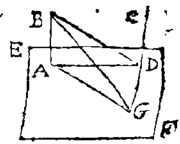
SCHOLIE.

Ceste mesme proposition est aussi veritable, encore que les deux lignes AB, CD ne soient paralleles, pourueu qu'elles soient en vn mes-

me plan, comme il est manifeste par la demonstration.

THEOR. 8. PROP. VIII.

S'il y a deux lignes paralleles, desquelles l'vne soit à angles droicts à quelque plan : aussi l'autre sera à angles droicts sur le mesme plan.

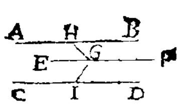


Soient les deux lignes paralleles AB & CD, & que l'vne d'icelle AB soit esleuee perpendiculairement sur le plan EF. Ie dis que l'autre CD est aussi esleuee perpẽdiculairemẽt sur le mesme plan EF.

Qu'il ne soit ainsi. Soit faicte mesme constructiõ qu'en la 6.p.11.& comme il a esté demonstré, les deux angles BAG & GDB seront droicts, & par la 4.p.11.GD sera esleuee perpendiculairement sur le plan des lignes AD & BD : mais par la 7.p.11.les deux lignes AB & AD sont au mesme plan de AB & CD : car elles sont paralleles par hypothese : il s'ensuit que GD est perpendiculaire sur le plan où est la ligne CD : Ainsi l'angle CDG sera droict. Mais l'angle ADC est aussi droict par la 29.p.1.estãs AB & GD paralleles:&par la 4.p.11.CD sera perpendiculaire au plan de GD & AD, c'est à dire au plan EF. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 9. PROP. IX.

Les lignes droites paralleles à vne mesme, lesquelles ne sont à vn mesme plan qu'icelle; sont aussi paralleles entr'elles.



Soient les lignes droictes AB, CD, paralleles à la ligne EF, & ne soient en vn mesme plan qu'icelle. Ie dis que AB, CD, sont aussi paralleles entr'elles.

Soit pris en EF quelconque poinct G, duquel soient tirees à icelle EF deux perpendiculaires, sçauoir GH au plan des paralleles AB, EF; &

GI au plan des paralleles CD, EF. D'autant que EF est perpendiculaire aux deux lignes GH, GI, qui s'entre-touchent en G: elle le sera aussi au plan tiré par icelles par la 4 p.11. Partquoy puis que AB, EF, sont paralleles: & EF est perpendiculaire au plan mené par GH, GI: aussi AB sera perpendiculaire au mesme plan par la 8.p.11. Par mesme raison CD sera perpend. au plan passant par GH, GI: & partant par la 6 p.11. AB, CD estans perpend. a vn mesme plan, sont paralleles entr'elles. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR, 10. PROP. X.

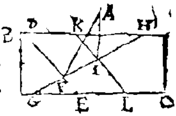
Si deux lignes droites s'entre-touchant, sont paralleles à deux autres lignes droites s'entre-touchant, & ne sont en vn mesme plan, elles comprendront angles egaux.

Soient les deux lignes AB & AC se touchans en A, lesquelles soient paralleles aux deux autres lignes DE & DF se touchant en D: & AB, AC ne soient au mesme plan que DE, DF. Ie dis que les angles BAC, EDF, compris par icelles sont egaux.

Qu'ainsi ne soit. Soient egales les quatre lignes AB, AC, DE, DF; & soient menees les lignes AD, BE, CF, BC, EF. Premierement AB & DE estans egales & paralleles, AD & BE seront aussi egales & paralleles par la 33.p 1. & par la mesme raison AD, & CF seront aussi egales & paralleles: & partant par la 9 p.11. BE & CF seront aussi egales & paralleles entr'elles: & par la 33.p.1. BC & EF seront egales: & par consequent les deux triangles ABC & DEF ont les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien, & par la 8. p. 1. les angles BAC, EDF seront egaux. Ce qu'il falloit demonstrer.

PROBL. 1. PROP. XI.

D'vn poinct esleué en haut, mener vne ligne perpendiculaire sur le plan qui est au dessous d'iceluy poinct.

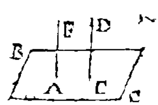


Soit le poinct A esleué en haut, duquel il faut tirer vne perpendiculaire au plan BC qui est au dessoubs d'iceluy poinct A. Au plan BC, soit menee comme on voudra la ligne DE; a laquelle de A soit tiree la perpendiculaire AF par la 12. p. 1. Et au plan BC par F, soit tiree GH perpendiculaire a DE par la 11. p. 1. Et à icelle GH soit tiree d'A la perpendiculaire AI par la 12. p. 1. Ie dis qu'icelle AI est perpendiculaire au plan BC.

Car au plan BC, estant tiree par I, la ligne KIL parallele à DFE par la 31. p. 1. puis que DF est perpendiculaire aux deux lignes FA, FH par la construction; & partant aussi perpend. au plan tiré par FA, FH par la 4. p. 11. pareillement KI sera perpend. au mesme plan par la 8. p. 11. Et d'autant que par la 2. p. 11 AI est en vn mesme plan que FA, FH, & touche la ligne KI en I, l'angle KIA sera droict par la 2. d. 11. & AI sera perpendiculaire aux deux KI, IF. Donc par la 4. p. 11. AI sera perpendicul. au plan où sont les lignes KI, IF, sçauoir au plan BC.

PROB. 2. PROP. XII.

A vn plan donné, & d'vn poinct donné en iceluy, esleuer vne ligne perpendiculaire.



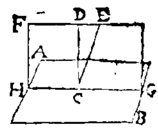
Soit le plan donné BC, & le poinct donné en iceluy soit A: Il faut d'iceluy poinct A esleuer vne ligne perpendiculaire au plan donné BC.

Soit pris en l'air comme on voudra le poinct D, & d'iceluy soit menee sur le plan BC, la perpendiculaire DE, rencontrant le plan au poinct E par la 11. p. 11. Et du poinct A soit menee AF parallele à ED, par la 31. p. 1. il est euident que par la 8. p. 11. AF sera aussi perpendiculairement esleuee sur le plan BG, ainsi qu'il estoit requis.

THEOR. 11. PROP. XIII.

D'vn mesme plan, & d'vn mesme poinct

d'iceluy, on ne leuera pas en l'air d'vn mesme costé, deux lignes perpendiculaires.

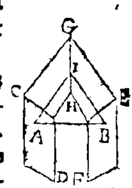


Soit donné quelque plan comme AB, & le poinct en iceluy C : ie dis que du poinct C, on n'esleuera pas en l'air deux lignes perpendiculaires sur iceluy plan, & de mesme costé.

Autremét s'il est impossible: du poinct C, soient esleuees en l'air les deux perpẽdiculaires CD & CE, elles seront en vn mesme plan, par la 2.p.11. & soit iceluy FG, lequel d'autant qu'il touche le plan AB, au poinct C, n'est point parallele à iceluy AB : partant estans continuez ils se coupperont, & leur commune section sera vne ligne droicte: soit icelle GCH. Et parce que les lignes CD & CE sont perpendiculaires à iceluy plan AB, les angles ECG & DCG seroient droicts & egaux, la partie au tout : ce qui est impossible. Il ne se peut donc esleuer du poinct C, deux lignes perpendiculaires au plan AB, & de mesme coste, ce qu'il faloit prouuer.

THEOR. 12. PROP. XIV.

Si vne ligne droicte est perpendiculaire à deux plans; iceux plans seront parallels.

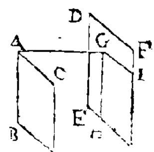


Soit la ligne droicte AB, perpendiculaire à chacun des plans CD & EF : ie dis qu'iceux plans sont parallels entr'eux.

Autrement s'ils n'estoient parallels, estans continuez ils se rencontreront, & leur commune section sera vne ligne droicte par la 3.p. 11. soit icelle GH, en laquelle soit pris comme on voudra le poinct I, & soient d'iceluy menees les lignes IA, IB és plans GCD, GEF. Maintenant puis que la ligne AB est perpendiculaire à chacun d'iceux plans GCD, GEF, au triãgle AIB les angles IAB & IBA, serõt droits, contre la 17.p.1. donc les deux plans CD, EF ne se rencontreront point, ains seront parallels: ce qu'il faloit prouuer.

THEOR. 13. PROP. XV.

Si deux lignes droictes s'entretouchant sont paralleles à deux autres lignes droictes s'entretouchans, n'estans toutesfois en vn mesme plan: les plans passans par icelles, seront aussi parallels.



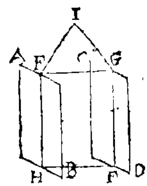
Soient les deux lignes AB & BC, se touchans au poinct A, paralleles a deux autres lignes DE, DF, s'entretouchans en D, & ne soiét en vn mesme plan qu'icelles. Ie dis que le plan BC mené par icelles AB, AC est parallel au plan EF tiré par les lignes DE, DF.

Car par la 31.p.11. de A soit tiree sur le plan EF la perpendiculaire AG, rencontrant le plan EF en G: puis par la 31.p.1.au plan EF, soient tirees de G, les lignes GH, GI paralleles a DE, DF, Maintenant d'autant que AB, GH sont paralleles a DE, icelles AB, GH seront paralleles entr'elles, par la 9.p 11.& partant par la 29.p.1. les angles BAG, AGH sont egaux a deux droicts. Mais AGH est droict, par la 3.d.11. Donc BAG sera aussi droict. Par mesme raison on prouuera l'angle CAG estre droict. Parquoy veu que la ligne GA est perpend. aux deux AB, AC; par la 4.p.11. elle sera aussi perpend. a leur plan BC: Mais par la construction elle l'est aussi au plan EF. Donc par la 14.p.11. les plans BC, seront parallels: ce qu'il faloit demonstrer.

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si deux plans parallels sont couppez par vn autre plan; les lignes de commune section seront paralleles.

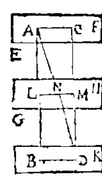
Soient les deux plans parallels AB & CD, couppez par le troisiesme plan EF : Ie dis que leurs lignes de commune section (c'est a sçauoir HE & GF) sont paralleles.



Autrement si elles n'estoient paralles, estans cõtinuees, elles se rencontreroiēt comme au poinct I: Mais d'autant qu'iceux plans AB,CD sont Parallels, estans continuez ils ne se rencontrent iamais: il faudroit donc que les lignes HEI,FGI ('esquelles se rencontrent) fussent en partie sur leurs plans, en partie dehors, ce qui est contre la 1. p. 11. Donc HE & GF estant continuees ne se rencontrent point, & partant sont paralleles: ce qui estoit a prouuer.

THEO. 15. PROP. XVII.

Si deux lignes droictes sont couppees par plusieurs plans parallels, elles seront couppees proportionnellement.

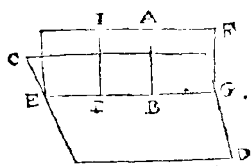


Soient les deux lignes AB, CD, trauersans les trois plans parallels EF, GH, IK, tellement qu'icelles lignes sont couppees par iceux plās ès poincts A, L, B, C, M, D. Ie dis qu'elles sont couppees proportionelement, c'est à dire que les segmens d'icelles interceps entre les susdits plans sont proportionaux, sçauoir que comme AL est à LB, ainsi CM à MD.

Car ès plans EF, IK, soient menees les lignes droictes AC, BD : & tiré AD rencontrant le plan GH au poinct N, duquel soient menees les lignes NL, NM, au mesme plan GH; & le triangle ABD, par la 2. p. 11. sera en vn mesme plan : semblablement le triāgle ADC en vn seul plan. Et d'autant que les plans parallels GH, IK sont couppez par le plan du triangle ABD : leurs communes sections LN, BD seront paralleles par la 16. p. 1. Par mesme raison MN, AC, seront aussi paralleles. Parquoy par la 2. p. 6. comme AL sera à LB, ainsi AN sera à ND : Item comme AN à ND, ainsi CM à MD : Et partant par la 11. prop. 5. comme AL sera à LB, ainsi CM sera a MD : ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si vne ligne droicte est esleuee perpendiculairement sur vn plan, aussi tous les plans procedans d'icelle, seront perpẽdiculaires au mesme plan.



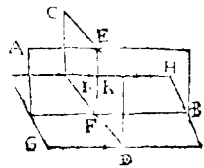
Soit la ligne AB perpendiculaire sur quelque plan CD : Ie dis que tous les plans menez de la ligne AB, quelle part on voudra, seront esleuez perpendiculairement sur le mesme plan CD.

Qu'ainsi ne soit. Soit tiré par AB le plan EF, couppant le plan CD par la ligne EG : & en icelle soit pris quelconque poinct H, duquel au plan EF soit menee HI parallele à AB par la 31. p.1. Donc puis que AB, IH sont paralleles, & AB a esté posee perpendiculaire au plan CD : aussi IH sera perpend. au mesme plan CD, par la 8.p.11.& partant par la 2.d.11.aussi perpendiculaire a la commune section EG. Par mesme discours toutes autres lignes qui seront tirees au plan EF paralleles à icelle AB, seront perpendiculaires au plan CD : & par consequẽt a la ligne EG. Parquoy par la 3.d.11. le plan EF sera perpendiculaire au plan CD. Par mesme raison seront demonstrez tous autres plans tirez par la ligne AE, estre perpendiculaires au plan CD.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Si deux plans esleuez perpendiculairement sur vn autre plan s'entrecoupent, leur ligne de commune section est perpendiculaire sur iceluy plan.

Soient les deux plans se couppans l'vn l'autre AB & CD, esleuez perpédiculairement sur le plan GH, & soit la ligne de leur commune sectionFE: ie dis qu'icelle est perpendiculaire au mesme plan GH.

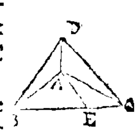


Car si elle n'est perpendiculaire au plan GH: puis que le plan AB, est perpendiculaire au plan GH, ils auront vne commune section qui sera ligne droicte: soit icelle FB; & du poinct F pris en icelle soit menee FI perpendiculaire à la ligne FB, sur le plan CD, par la 11.p. 1. & par la 4. d.11. conuertie, elle sera perpēdiculaire au plan GH. Tout de mesme le plan CD estant perpendiculaire au plan GH, si à leur commune section DF, & du poinct F, on leue la perpendiculaire FK sur le plan CD, elle sera aussi par la mesme def. conuertie perpendiculaire au plan GH: ainsi FI & FK seroient toutes deux d'vn mesme poinct esleuees perpendiculairemēt sur vn mesme plan: ce qui est contre la 13 p.11. Dōc du poinct F on n'en a peu mener d'autres perpendiculaires au plan GH, sinon vne seule, laquelle doit estre commune à tous les deux autres plans: partant il est euident que c'est leur ligne de cōmune section FE.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si vn angle solide est compris de trois angles plans, les deux pris comme on voudra, sont plus grands que le troisiesme.

Soit l'angle solide A, compris des trois angles plans BAC, CAD, DAB. Ie dis que deux pris comme on voudra, comme BAD & DAC sont plus grands que le troisiesme BAC.

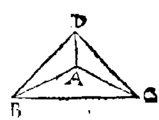


Car si on dict que BAC soit plus grand que les deux autres: au plan tiré par AB, AC, soit faict DAE egal à DAB par la 23.p.1. & soient faictes egales les deux lignes AD AE: puis apres au mesme plan soit menee par E la ligne droicte BC, couppant les lignes AB, AC, en B & C: & soient tirees les lignes BD, DC. Maintenant puis que les deux costez AB & AD sont egaux aux 2. costez AB & AE, & leurs angles egaux : la base DB sera egale à la base BE, par la 4. p. 1. Item puis que l'on pose l'angle BAC plus grand que les deux autres, & que le retranché BAE est egal à l'vn d'iceux BAD, le reste CAE sera plus grand que l'autre CAD : mais les deux costez EA & AC sont egaux aux deux costez AD & AC, & l'angle CAE est plus grãd que l'angle DAC : & partant par la 24. p. 1. la base EC sera plus grande que la base DC : & BD estant egale à BE, il est euident que au triangle ABC le costé BC est plus grand que les deux autres : ce qui est contre la 20. prop. 1. Donc l'angle BAC n'est point plus grand que les deux autres BAD, CAD. Que si on dit qu'il est egal, il s'ensuyura par le mesme discours que BC est egale à BD & CD : ce qui contreuient tousiours à la 20 p. 1. Il est donc plus petit que les deux autres ; ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Tous les angles plans d'vn angle solide, sont plus petits que quatre angles droicts.

Soit l'angle solide A, compris des trois angles plans CAB, BAD, DAC. Ie dis qu'iceux trois angles plans sont plus petits que quatre droicts.



Car estans tirees les trois lignes BC, CD, BD, seront constituez trois angles solides B, C, D, desquels chacun est contenu sous trois angles plans, sçauoir B, soubs ABC, ABD, CBD: & C soubs ACB, ACD, BCD : & D soubs ADB, ADC, BDC. Et d'autant que par la 20. p. 11. de chacun d'iceux angles solides, deux angles plans pris comme on voudra sont plus grands que le troisiesme, les deux ABC, ABD, seront plus grands que le troisiesme DBC, & les deux ACB, ACD, seront plus grands que le troisiesme BCD : Item les deux CDA, & BDA, sont plus grands que BDC: & partant les six angles ABC, BCA, ACD, CDA, ADB, DBA ensemble, seront plus grands que les trois de la base triangulaire BCD, c'est à dire que deux droicts (car iceux trois angles vallent autant par la 32. p. 1. (Mais d'autant qu'iceux six angles auec les trois qui font l'angle solide A, vallent six droicts, par la 32.p.1. (Car ce sont les angles de trois triangles plans ABC, ACD, ABD, & qu'iceux six angles sont plus grands que deux droicts) ; il est manifeste que les trois qui font l'angle solide A, sont plus petits que quatre droicts : ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 20. PROP. XXII.

S'il y a trois angles plans, desquels deux pris comme on voudra soient plus grands que l'autre, & les lignes droictes comprenant iceux egales ; Il se peut faire que des lignes qui conioignent icelles egales, soit constitué vn triangle.

Soient trois angles plãs A, B, C, contenus des lignes egales AD, AE, BF, BG, CH & CI : deux desquels en quelques sortes qu'ils soient pris, sont plus grands que l'autre. Ie dis que des trois lignes droictes DE, FG, HI, qui conioignent icelles lignes egales, peut estre constitue vn triangle.

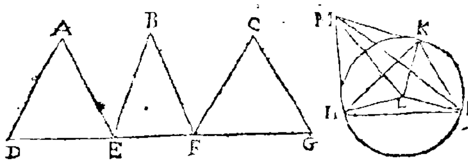
Car puis que deux d'iceux angles pris comme on voudra, sont plus grands que le troisiesme : qu'on en mette deux ensemble tels qu'on voudra, cõme si a HCI, on adiouste HCK egal à FBG par la 23.p.1. & ayant faict CK egal à BG : on tire IK & HK ; l'angle ICK estant plus grand que le troisiesme A, la base IK par la 24.p.1. sera plus grãde que la base DE : (car les deux costez sont egaux) & à plus forte raison les deux IH, HK qui par la 20.p.1. sont plus grandes qu'icelle IK, seront plus grandes que la troisiesme DE. Et par mesme discours on monstrera tousiours que deux d'icelles bases DE, FG, HI, prises comme on voudra, sont plus grandes que la troisiesme : Partant d'icelles on pourra faire vn triangle. Ce qui estoit a demonstrer.

PROB.

PROB. 3. PROP. XXIII.

Faire vn angle solide de trois angles plans, desquels deux pris comme on voudra soient plus grands que le tiers. Mais il faut qu'iceux trois angles soiēt moindres que quatre droicts.

Soient trois angles plans A, B, C, moindres que 4 droicts, & desquels deux quels qu'ils soient sont plus grands que



l'autre. Il faut faire vn angle solide de trois angles plans egaux à iceux A, B, C.

Soient posees egales les six lignes AD, AE, BE, BF, CF, & CG qui comprennent les angles proposez, lesquels soient soustenus des trois bases DE, EF, FG. Donc puis que par la precedente prop. on peut faire vn triangle d'icelles lignes DE, EF, FG, soit fait le triangle HIK, ayans les trois costez egaux à icelles bases DE, EF, FG par la 22 p 1. lequel soit circonscrit du cercle HIK par la 5. p. 4. & du centre L soient menees les trois lignes LH, LI, LK : & apres auoir par la 12. p. 11. esleué en l'air perpendiculairement LM, par le lemme de la 14. p. 10. soit icelle retranchee en sorte, que son quarré auec le quarré de LH, soient egaux au quarré de l'vn des costez d'iceux angles plans : puis soient menees les lignes HM, IM, KM : Ie dis que HIMK est vn angle solide, compris de trois angles plans, egaux aux trois donnez A, B, C.

Car les trois lignes LH, LI, LK estant egales, & LM perpendiculaire à icelles : les trois lignes HM, IM, KM, seront egales par la 47. p. 1. d'autant qu'elles peuuent autant l'vne comme l'autre : & puis qu'elles peuuent autant que l'vn des costez des angles plans donnez, elles seront egales aux costez d'iceux angles plans : puis les trois bases HI, IK, KH estans

Kk

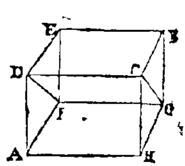
egales aux bases des angles donnez, par la 8.p.1. les trois angles plans faisant l'angle solide au poinct M, seront egaux aux trois donnez A,B,C.

SCHOLIE.

Si quelqu'vn obiectoit icy que la perpendiculaire LM ne peut pas tousiours estre retranchee, en sorte que son quarré auec le quarré de LH soient egaux au quarré de l'vn des costez des angles donnez: comme par exemple si iceluy costé estoit egal ou plus petit que HL. Ie dis que cela n'arriue iamais, non pas seulement qu'il soit egal à HL: Car si HL & IL estoient egaux à AD & AE: & la base HI egale à la base DE, par la 8 p.1. (& ainsi des deux autres triangles) les trois angles au poinct L seroient egaux aux trois angles A,B,C, chacun au sien: ce qui est euidemment faux: Car tousiours par hypothese les trois angles A, B, C, sont plus petits que quatre droicts; & par le coroll. de la 15.p.1. les trois au poinct L sont egaux à quatre droicts.

THEOR. 21. PROP. XXIIII.

Si vn solide est compris de plans parallels; les plans opposez d'icelles seront parallelogrames semblables, & egaux.



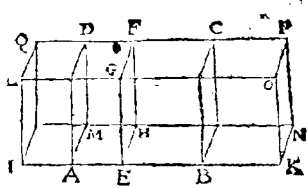
Soit le solide AB compris de six plās parallels AC,FB,AG,DB,AE,HB : Ie dis que les plans opposez sont parallelogrames, semblables & egaux.

Car puis que les plans AC & FB sont parallels, estans couppez par les plans AE & HB; les lignes de cōmune sectiō AD, FE sōt paralleles: Itē HC & GB, par la 16.p.11. par la mesme raison les plans AG & DB estans parallels, les lignes de commune section AF & DE: Item GH & BC sont paralleles: partant AE & HB sont parallelogrames. Par le mesme discours AG,DB; AC,FB, se prouueront estre parallelogrames. Ie dis maintenant que les parallelogrames opposites sont semblables & egaux. Car puis que les lignes AF, AD, sont parallels tées lignes HG,HC,& non en mesmes plans, mais en opposez; par la 10.p.11 les angles DAF, CHG, seront egaux: par mesme raison les autres angles du parallelograme AE, serõt egaux aux autres angles du parallelograme HB. Et puis que par la 34.p.1.au parallelog AC,les costez AD,HC sont egaux comme aussi les costez AF,HG, du parallelog. AG; comme AD sera à AF, ainsi HC à HG, & partat comme AF a FE, ainsi HG a GB,&c. Donc les costez des parallelog. AE, HB, au long des angles egaux, seront proportionaux: & partant ils sont parallelogrames semblables. Maintenant estans tirez les diametres DF,CG: veu que les costez AD, AF, du triangle ADF, sont egaux aux costez HC HG, du triãgle HCG, & les angles DAF,CHG aussi egaux; par la 4.p.1. les triangles ADF HCG, seront pareillement egaux: lesquels estans moitiez des parallelogrames AE,HB, par la 34 p 1. iceux parallelogrames seront aussi egaux entr'eux. Par mesme discours on demonstrera les autres parallelogrames opposez AG, DB; AC, FB, estre semblables & egaux.

THEOR. 22. PROP. XXV.

Si vn solide parallelipipede est couppé par vn plan parallel aux plans opposez, les solides couppez seront l'vn à l'autre comme leurs bases.

Soit le solide parallelipipede ABCD couppé par le plan EF parallel aux deux opposez AD & BC, & faisant deux solides AF & EC: ie dis qu'iceux solides seront l'vn à l'autre, comme la base AH à la base BH.

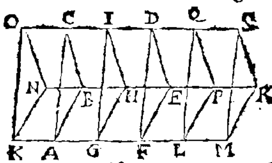


Qu'il ne soit ainsi (la ligne AB estant prolongee de part & d'autre.) Soient faictes egales AI à AE, & BK à BE, & soient accomplis les parallelogrames IM & BN. Item les solides AQ & BP. Doncques puis que AI, AE, sont egales, les parallelog. IM, AH seront aussi egaux par la 1.p.6.& par la 24. p.11. les plans opposez LD, GD seront semblables & egaux: Item AL, AG semblables & egaux à MQ, MF, plans opposez; & ainsi des autres: & par la 9. def. de ce liure, le solide AQ est egal au solide AF. Par le mesme discours le solide BP sera egal au solide FB: partant le solide IF est autãt multiplice du solide AF, comme la base IH est multiplice de la base AH: Item le solide EP est autant multiplice du solide EC, comme la base EN est multiplice de la base BH: & partant comme la base IH sera plus grande, egale ou plus petite que la base AH, ainsi le solide IF sera plus grand, egal, ou plus petit que le solide AF. Tout de mesme comme la base EN sera plus grande, egale, ou plus petite que la base BH, ainsi le solide EP sera plus grand, egal, ou plus petit que le solide EC. Maintenant soient quatre grandeurs, les deux bases AH, BH, & les deux solides AF, EC: desquelles de la premiere & troisiesme, (sçauoir de la base AH & du solide AF) on à pris les equemultiplices HI base, & IF solide: Item de la seconde & quatriesme, (sçauoir de la base BH, & du solide EC) les equemultiplices EN base, & EP solide, lesquels nous auons monstré estre comme demande la 6. d. 5. plus grands, egaux ou plus petits, en quelconque multiplication qu'elles soient prinses: & partant comme la base AH à la base BH, ainsi le solide AF au solide EC: ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

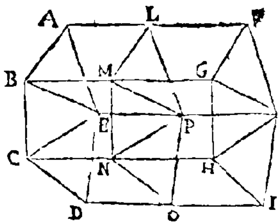
Ceste propos. se peut accommoder à tous prismes: Car si quelconque prisme est couppé par vn plan parallel aux plans opposez; tout ainsi que la base sera à la base, ainsi le solide sera au solide. Car soit premierement le prisme ABCDEF, duquel les plans opposez sont les triangles ABC, DEF; & soit iceluy couppé par le plan GHI parallel aux plans opposez. Ie dis que comme la base AI est à la base FI, ainsi le solide ABCIHG est au solide FEDIHG. Car soit imaginé le prisme ABCDEF estre prolongé de part & d'autre, tant qu'on voudra; Et de AF prolongee soient prises AK egale à GF, & FL, LM egales à FG: En apres par les poincts G, L, M soient entendus les plans KNO, LPQ, MRS parallels aux plans ABC, GHI, FED. Donc puis que les plans parallels ABC, GHI, sont couppez par le plan AI; leurs communes sections AC, GI, seront parallels par la 16. p. 11. Mais à cause que AD est parallelog. AG, CI seront aussi paralleles. Donc AI est parallelog. Par mesmes raisons seront demonstrez AH, CH estre parallelog. Et pource que les costez AC, AB, du triangle ABC, sont egaux

aux costez GI, GH, du triangle GHI, (car par la 34. p. 1. AC est egal à GI, & AB à GH) & par la 10. p. 11. les angles BAC, HGI sont aussi egaux; (pource que les lignes AB, AC sont paralleles aux lignes GH, GI, & en diuers plans) par la 4. p. 1. les triangles ABC, GHI sont egaux entr'eux, & equiangles: Parquoy par la 4 p. 6. les costez d'alentour les angles egaux, seront proportionnaux; & partant iceux triangles seront semblables. Donc le solide ABCIHG, contenu des deux plans opposez ABC, GHI egaux & semblables, & des parallellog. AI, IB, GB, est vn prisme. Par mesme raison ABCONK, GHIDEF, DEFLPQ, & LPQSRM seront prismes: Et pource que les parallelogrames AI, KC sont egaux & semblables, comme aussi AH, KB; & CH, OB; tous les plans du prisme ABCIHG, seront egaux & semblables à tous les plans du prisme ABCONK. Parquoy par la 9. d. 11. les prismes ABCIHG, ABCONK sont egaux. Par mesme raison les prismes GHIDEF, DEFLPQ, LPQSRM seront egaux. Partant le prisme KNOIHG sera autant multiple du prisme ABCIHG, que la base KI, de la base AI; & le prisme GHISRM autant multiplice du prisme GHIDEF, que la base GS de la base GD. Et pource que si la base KI, (multiplice de la base AI premiere grandeur) est egale à la base GS (multiplice de la base GD 2. grandeur) aussi le prisme KNOIHG (multiple du prisme ABCIHG 3. grandeur) est egal au prisme GHISRM, (multiple du prisme GHIDEF 4. grandeur:) Mais si la base KI est plus grande que la base GS, aussi le prisme est plus grand que le prisme; & si moindre, moindre, en quelconque multiplication: par la 6. d. 5. cõme la base AI premiere grandeur, sera à la base GD 2. grandeur, ainsi le prisme ABCIHG 3. grandeur sera au prisme GHIDEF 4. grandeur. En la mesme maniere on demonstrera que le prisme est au prisme, comme la base AH est à la base GE, & comme la base CH est à la base EI. Ce qui estoit proposé.



Soit maintenant le prisme ABCDEFGHIK, duquel les plans opposez sont polygones, c'est à sçauoir pentagones, & soit couppé par le plan LMNOP. Ie dis derechef, que comme la base CM est à la base NG, ainsi est le solide ABCDELMNOP, au solide LMNOPFGHIK. Car si les plans opposez parallels sont resouds en triangles; aussi le prisme sera resoud en autant de prismes qu'il y aura de triangles es plans opposez. Parquoy comme la base BP sera à la base MK, ainsi le prisme ABEPML sera au prisme LMPKGF, par les choses demonstrees cy dessus. En la mesme maniere, comme la base CP est à la base NK, ainsi le prisme BCEPMN sera au prisme MNPKGH; &

le prisme CDEPNO au prisme NOPKHI. Mais par la 1.p.6. comme BP est à MK; & CP à NK, ainsi est la ligne EP à la ligne PK, c'est à dire comme CN est à NH, & comme CN est à NH, ainsi est CM à NG. Donc les prismes ABEPML, BCEPMN, CDEPNO, ont mesme raison aux prismes LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, que CM à NG; & partant ont la mesme entr'eux. Mais par la 12.p.5. comme vn seul est à vn seul, ainsi sont les trois aux trois. Donc comme le prisme BCEPMN sera au prisme MNPKGH, c'est à dire comme la base CM à la bas NG, ainsi le prisme ABCDELMNOP composé des trois sera au prisme LMNOPFGHIK composé des trois. Ce qui estoit proposé. Il y aura mesme demonstration en quelconque autre prisme.



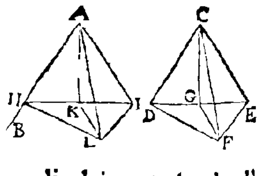
COROLLAIRE.

De cecy resulte que si quelconque prisme est couppé par vn plan parallel aux plans opposez, que la section est vne figure egale & semblable aux plans opposez. Car il a esté demonstré au premier prisme que le triangle GHI est egal, & semblable au triangle ABC, & partant au triangle DEF: Et il y a mesme demonstration en tous. Le mesme se doit entendre des parallelipipedes.

PROB. 4. PROP. XXVI.

Sur vne ligne droicte, & à vn poinct donné en icelle, constituer vn angle solide egal à vn angle solide donné.

Soit la ligne droicte donnee AB, & le poinct en icelle A; & il faut construire sur icelle AB, & au poinct A, vn angle solide egal à l'angle solide C compris de trois angles plãs DCE, ECF, FCD.

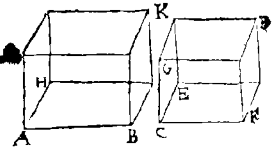


Soit tiree de F, la ligne FG perpendiculaire au plan des lignes CD,CE, par la 11.p. 11. & ſoient menees les lignes DF, FE,EG,GD,CG : en apres ſoit priſe AH egale à CD : & par la 23.p.1.ſoit faict l'angle HAI egal à l'angle DCE : & la ligne AI egale à la ligne CE.Derechef au plan tiré par AH,AI ſoit faict l'angle HAK egal à l'angle DCG : & la ligne AK egale à la ligne CG : puis par la 12.p.11.de K ſoit tiree au plan auquel ſont les trois AH,AK,AI, la perpendiculaire KL : laquelle ſoit poſee egale à FG,& ſoit menee la ligne AL. Ie dis que l'angle ſolide A, contenu des trois angles plans HAI, HAL,LAI, eſt egal à l'angle ſolide donné C.

Car eſtans menees les lignes HK,KI, IL, LH : veu que les coſtez AH,AK du triangle AHK,ſont egaux aux coſtez CD, CG du triangle CDG,& les angles HAK, DCG egaux par la conſtruction : les baſes HK , DG ſeront egales par la 4.p.1. Et d'autant que des angles egaux HAI,DCE,eſtans oſtez les angles egaux HAK,DCG,demeurent egaux les angles KAI, GCE : leſquels par la conſtruction ſont compris de lignes egales; par la 4.p.1.les baſes KI, GE, ſeront auſſi egales. Les coſtez KH,KL ſont auſſi egaux aux coſtez GD,GF,& les angles HKL,DGL droicts : donc par la meſme 4. p.1. les baſes HL,DF,ſeront egales.Parquoy puis que les coſtez AH , AL du triangle AHL,ſont auſſi egaux aux coſtez CD,CF du triãgle CDF : (car les coſtez AK,KL, ſont egaux aux coſtez CG, GF,par la conſtruction,& comprennent angles droicts : partãt les baſes AL,CF ſont egales par la 4.p.1.) les angles HAL DCF ſeront pareillemẽt egaux par la 8.p.1. Finalement pour ce que les coſtez KI , KL ſont egaux aux coſtez GE , GF : & les angles IKL,EGF droicts; par la 4.p.1.les baſes IL,EF ſont egales : partant puis que les coſtez AI , AL du triangle AIL ſont egaux aux coſtez CE , CF du triangle CEF , par la conſtruction,les angles IAL,ECF ſeront auſſi egaux par la 8.p.1. donc les trois angles plans HAI,HAL,LAI,compoſant l'angle ſolide A , ſont egaux aux trois angles plans DCE , DCF, FCE, compoſant l'angle ſolide C ; & partant l'angle ſolide A eſt egal à l'angle ſolide C : ce qui eſtoit requis.

PROB. 5. PROP. XXVII.

Sur vne ligne droite donnee, deſcrire vn ſolide parallelipipede ſemblable , & ſemblablement poſé à vn ſolide parallelipipede donné.



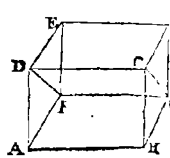
Soit la ligne donnee AB, sur laquelle il faut construire vn solide parallelipipede semblable, & semblablement posé au parallelipipede donné CD.

Sur la ligne AB & au poinct A, soit faict vn angle solide egal à l'angle solide C par la 26. p.11. lequel soit compris des trois angles plans H A I, B A I, BAH : & par la 12. p.6. soit faict comme CF est à CG, ainsi AB à AI, & comme CG à CE, ainsi AI à AH : & en raison egale AB sera à AH comme CF à CE. Soient maintenant parachevez les parallelog. BH, HI, BI, BK, KI, KH. Ie dis que le solide AK est semblable & semblablement posé au solide CD donné.

Car ils ont autant de superficies planes l'vn comme l'autre: & d'autant que AB est à AI, comme CF a CG, & l'angle BAI egal à l'angle FCG, le parallelogramme BI est semblable au parallelog. FG : par la mesme raison le parallelog. BH sera semblable au parallelog. FE : & HI a EG. Partant trois parallelog. du solide AK sont semblables & semblablement posez, à trois parallelog. du solide CD. Mais par la 24. p.11. les trois opposez sont egaux, & semblables. Parquoy les six plans du solide AK sont semblables & semblablement posez aux six plans du solide CD: & partant par la 8. d de ce liure les solides AK & CD seront semblables & semblablement posez.

THEOR. 23. PROP. XXVIII.

Si vn solide parallelipipede est couppé par vn plan passant par les diagonales des plans opposez : il sera couppé en deux egalement.



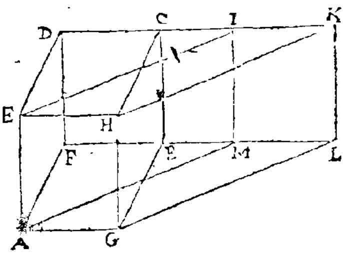
Soit le solide parallelippipede AB couppé par vn plan passant par les diagonales des plans opposez DF, CG. Ie dis qu'il est couppé en deux egalemét.

Car il est euident par la 34. p. 1. que les triangles A D F, EFD sont egaux : item les deux CGH & GCB, & le plan AG egal & semblable au plan DB, &

AC à FB par la 24.p.11. (car ils sont opposez) Partant les deux prismes ADCHGF, FEBGCD, sont cōpris de parallelogrāmes, & de triangles opposez semblables & egaux : & par la 9.def.de ce liure iceux prismes sōt egaux. Parquoy puis qu'ils composent le parallelipipede AB : iceluy sera couppé en deux egalement par le plan DCGF : ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 24. PROP. XXIX.

Les solides parallelipipedes ayans mesme base, & mesme hauteur, & desquels les plās opposez à la base sont entre mesmes lignes droictes, sont egaux entr'eux.

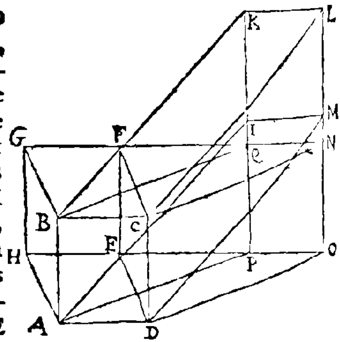


Soient les deux solides parallelipipedes ABCDEFGH, ALKIEHGM, tous deux sur la mesme base AH, de mesme hauteur, ayans les deux plans FC & MK opposez à la base AH constituez entre les mesmes lignes droictes DK & FL : ie dis qu'iceux deux solides parallelipip. sont egaux entr'eux.

Ceste demōstration est facile à celuy qui a bien conceu celle de la 35.p.1. Car ce que celle-là prouue par les triangles egaux, ausquels on oste & adiouste. Icy on prouue par les prismes egaux, desquels on retranche & adiouste vn prisme commun. Les prismes AFMIDE, GBLKCH, seront monstrez egaux par la 24.p.11. parce que les plans opposez des parallelipipedes sont semblables, & egaux: & d'iceux sont faicts les prismes. Le reste est aisé.

THEOR. 25. PROP. XXX.

Les solides parallelipipedes constituez sur mesme base, & de mesme hauteur, & desquels les plãs opposez à leur base ne sont entre mesmes lignes droites, sont egaux entr'eux.



Soient deux solides parallelipipedes ABCD EFGH, ABCDMLKI, tous deux sur mesme base A B C D, & de mesme hauteur (c'est à dire que leurs plans opposez, & parallels à leur base AB CD, sçauoir GE & KM soient en vn mesme plã, lequel soit parallel à la base AC) ie dis qu'ils sont egaux entr'eux, encores que les plans GE & KM opposez à leur base commune AC, ne soient entre mesmes lignes droites.

Car puis que les plans GE & KM sont en vn mesme plan, & qu'ils ne sont entre mesmes lignes droites : il est certain que deux costez de l'vn estans continuez, coupperont deux costez de l'autre aussi continuez. Soient donc les costez GF, HE continuez vers N & D · Item KI, LM vers P & O : elles se coupperont donc aux poincts Q, N, P, O, faisant vn parallelogramme (d'autant que les lignes continuees sont paralleles) lequel sera egal à la base plane AC : Car par la 34. p. 1. les lignes QP & NO estans egales à GH, FE, elles le seront aussi à BA & CD : item PO & QN estans egales à IM & KL, elles le seront aussi à BC & AD : & apres auoir mené les quatres lignes AP, DO, BQ, CN : il est manifeste que les deux solides AF, AN, sont sur mesme base, & de mesme hauteur; (car ils sont entre mesmes plans) & les plans HF, PN opposez à la base AC, entre mesmes lignes droictes, & par la 29. p. 11. ils sont egaux.

Pareillement le solide AN se trouuera egal au solide AL, (estãs sur mesme base AC, de mesme hauteur, & les plans QO, KM opposez à la base AC entre mesmes lignes droites) & par la 1. commune sentence le solide AF sera egal au solide AL: ce qui estoit à demonstrer.

SCHOLIE.

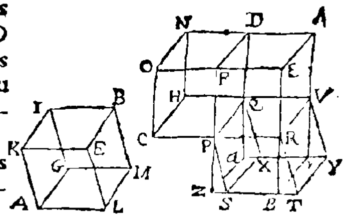
On conuertira tant ceste proposition que la precedente en ceste maniere.

Les solides parallelipipedes egaux ayans mesme base, soit qu'ils soient colloquez entre mesmes lignes droictes, ou non, sont en mesme hauteur.

Car si l'on dit que l'vn est plus haut, si d'iceluy on couppe vn parallelipipede de mesme hauteur que l'autre, le couppé & l'autre serõt egaux, par la 29. ou 30. p 1. & puis qu'à cest autre est posé egal au tout; le couppé sera egal au tout; Ce qui est absurde.

THEOR. 26. PROP. XXXI.

Les solides parallelipipedes estans sur bases egales, & de mesme hauteur; sont egaux entr'eux.

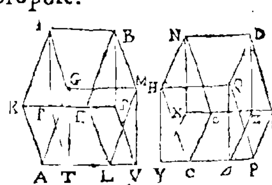


Soient les deux solides parallelipipedes A B, C D constituez sur bases egales AE & CF, & de mesme hauteur A G, CH. Ie dis qu'iceux solides sont egaux.

Qu'ainsi ne soit. Leurs hauteurs sont perpendiculaires, ou non: Soient premierement perpendiculaires: & apres auoir continué CP iusques à K, & faict PR egale à KE, au plan de OP prolongé, soit faict l'angle RPS egal a l'angle AKE, & faict PS egale à KA: puis soit acheué le parallelogramme PT, sur lequel soit construict le parallelipipede QSTV à la hauteur de la perpendiculaire PQ. Donc puis que les costez PR, PS sont egaux aux costez EK, KA, & les angles RPS, EKA egaux, les parallelog PT, KL seront eg. & semblab. Derechef puis que les costez PQ, PS sont egaux aux costez KI, KA, & les angles QPS, IKA droicts par la 1. d.

11. pource qu'icelles IK, PQ sont posees perpendiculaires aux plans AE, PT : aussi les parallelog. QS, AI, seront eg. & semblab. Par mesme raison, d'autant que les costez PR, PQ sont egaux aux costez KE, KI, & les angles RPQ, EKI droicts par la mesme 2 d. 11. pareillement les parallelog. PV, KB seront eg. & semblab. Parquoy puis que les trois parallelog. PT, QS, PV, du parallelipipede QSTV sont egaux & semblables aux trois KL, AI, KB, du parallelipipede AIBL, par la 24. p. 11. tant ceux la que ceux-cy seront egaux & semblables à leurs autres parallelog. opposez : & partant par la 9. def. de ce liure les parallelipipedes AB, SV seront egaux entr'eux. Maintenant que FP, TS prolongees se rencontrent en Z : & DQ, YX, en a & soit acheué le parallelipipede ZV. Item que ND, γV prolongees se rencontrant en δ, & OF, BR, en ε, & soit acheué le parallelipipede DR Donc puis que les parallelipipedes SV, ZV, ont mesme base PV, & sont en mesme hauteur, & que les plans SY, Zγ, opposez a la base, sont entre mesmes lignes droictes ZT, aY : iceux solides seront egaux entr'eux par la 29. p. 11. Mais le parallelipipede SV est egal au parallelipipede AB : donc le parallelipipede ZV sera egal au mesme AB. Et d'autant que par la 35. p. 1. les parallelogrammes PT, PB sont egaux, & PT egal à AE, aussi PB sera egal au mesme AE, c'est à dire a CF (car AE, CF sont posees bases egales) & par la 7 p. 5. comme CF sera à Pε, ainsi PB sera à Pε : & par la 25. p. 11 comme la base CF est à la base Pε, ainsi le solide CD est au solide Pδ, puis que le parallelipipede Cδ est couppé par le plan PD parallel aux plans opposez CN, Rδ : Par la mesme raison cōme PB est à Pε, ainsi le solide ZV au solide Pδ, pource que le parallelipipede DB est couppé par le plan PV parallel aux plans opposez. Donc par la 9. p. 5. les parallelipipedes CD, ZV seront egaux, puis qu'ils ont vne mesme raison au solide Pδ, sçauoir est la mesme qu'ont les bases CF, PB, a la base Pε. Parquoy puis que le parallelipipede ZV a esté demonstré egal au parallelipipede AB : les parallelip. AB & CD seront pareillement egaux : ce qui estoit proposé.

Maintenant si leurs hauteurs ne sont perpendiculaires sur les bases AE, CF, soiēt tirees des poincts (apres auoir continué les lignes AL, KE & PC, FO, tant qu'il sera de besoin) G, I, B, M, & H, N D, Q, & sur les plans d'audessous d'iceux poincts les perpen-



diculaires GT, IR, BS, MV, & HY, NX, DZ, Qa, par la 11. p. 11. & soient tirees RT, SV, XY, Za. Il est euident par ce qui a esté demonstré cy dessus que le solide TB est egal au solide YD, car ils sont sur bases egales GB, HD : & de mesme hauteur : Mais par la 29. p. 11. le solide TB est egal au solide AB ; & le solide YD egal au solide CD : donc le solide AB sera egal au solide CD. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

On conuertira ceste 31. prop. en ceste maniere.

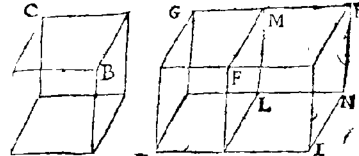
Les solides parallelipipedes egaux, constituez sur bases egales, sont en mesme hauteur : & les solides parallelipipedes egaux, qui sont en mesme hauteur : sont sur bases egales, s'ils n'ont vne mesme base.

Car si on croit l'vn plus haut que l'autre : si on couppe du plus haut vn parallelipip. de mesme hauteur que l'autre : par la 31. p. 11. le couppé sera egal à l'autre, auquel est aussi posé egal le tout : parquoy le couppé sera aussi egal au tout : ce qui est absurde. Que si les parallelip. estans de mesme hauteur, on croit que la base de l'vn soit plus grande que la base de l'autre, si on couppe d'icelle base vne egale à l'autre, & sur icelle couppee on entend estre vn parallelipipede de mesme hauteur, nous demonstrerons en la mesme maniere, la partie estre egale au tout : ce qui est absurde.

THEOR. 27. PROP. XXXII.

Les soildes parallelipipedes de mesme hauteur; sont l'vn à l'autre comme leurs bases.

Soient deux parallelipipedes de mesme hauteur ABCD, EFGH, desquels les bases soient AB, EF Ie dis que le solide est au solide comme la base à la base.



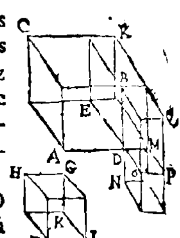
Car si sur la ligne HF (apres auoir prolongé le plan EF vers I) & sur l'angle FHI on construit le parallelograme FI egal au parallelograme AB : puis on acheue le solide IFLK; iceluy estant de mesme hauteur que le solide ABCD, & sur base egale, il luy sera egal par la 31 p. 11 Parquoy par la 7. p. 5. comme le solide IFKL est au solide EFGH, ainsi le solide AB CD au mesme solide EFGH. Mais par la 25. p. 11. le solide IF KL est au solide EFGH, comme la base IF, c'est a dire AB à la base EF; Donc aussi le solide ABCD, sera au solide EFGH, comme la base AB, à la base EF: ce qu'il faloit prouuer.

SCHOLIE.

La conuerse; si les solides parallelipipedes sont entr'eux comme leurs bases; ils seront en mesme hauteur. Car si l'vne est plus grande que l'autre, soit de la plus grande couppee vne egale à la moindre, & soit tiré vn plan parallel à la base, & par la 32. p. 11. comme la base sera à la base, ainsi le parallelipipede sera au parallelipipede couppé: mais ainsi il estoit aussi au parallelip. total. Donc le couppé est egal au tout par la 9. p. 5. ce qui est absurde.

THEO. 28. PROP. XXXIII.

Les semblables solides parallelipipedes, sōt l'vn à l'autre en raison triplee de leurs costez homologues.



Soient deux semblables parallelipipedes ABCDEFGHIK constituez sur les bases semblables AE, FK, esquelles les costez homologues sont AD, FI Ie dis que le parallelipipede ABCDE est parallelipipede FGHIK en raison triplee des costez homologues AD, FI.

Qu'ainsi ne soit : soit prolongé AD vers M, tellement que DM soit egale à FI, ou HG. Item BD vers N, en sorte que DN soit egale à LI ou GK : Item ED vers O, tellement que DO soit egale à KI ou GL : puis apres estans accomplis les parallelogrames DP, MN, NO, soit acheué le parallelipipede NMP, Il est donc euident que les deux parallelipipedes

FG,NP sont semblables & egaux, puis qu'ils sont composez de plās qui ont les angles egaux, & les costez au long d'iceux angles egaux, aussi egaux. Item soient construis les parallelipipedes BMOQ,& EBRM. D'autant que les parallelipipedes ABCD; FGHI, sont semblables, comme AD est à FI, c'est à dire à DM, ainsi DE à KI, c'est à dire à DO; & BD à LI, c'est à dire à DN. Mais par la 1.p.6. comme AD à DM, ainsi est le parallelo. AE, au paralle. EM; & cōme ED à DO, ainsi le paral. log. EM à DP; & comme BD à DN, ainsi le parallelograme BM à MN. Donc comme AE sera à EM, ainsi EM à DP, & BM à MN. Mais par la 32.p.11. comme la base AE à la base EM, ainsi est le parallelipipede AECB au parallelipipede EMRB: & comme la base EM est à la base DP, ainsi le parallelipipede EMRB est au parallelip. DPBQ: & comme la base BM est à la base MN, ainsi le parallelipipede DPBQ au parallelipipede NP. Parquoy comme le parallelip. AECB sera au parallelipipede EMRB, ainsi le parallelip. EMRB sera au parall. DPBQ; & le parallelipipede DPBQ au parallelip. NP: Partāt les quatre quantitez AECB, EMRB, DPBQ, NP sont continuellement proportioneles: & par la 10. d. 5. la premiere AECB sera à la 4. NP, c'est à dire à FG, en raison triplee de la premiere AECB à la seconde EMRB. Mais par la 32.p.11. comme AECB est à EMRB, ainsi la base AE, est à la base EM; & par la 1.p.6. comme AE est à EM, ainsi AD est à DM, c'est à dire à FI. Donc par la 11.p. 5. AECD sera à EMRB comme AD à FI: partant la raison triplee de AECD à EMRB, sera la mesme que de AD à FI; & par consequent AECD estant à FG en raison triplee de AECD à EMRB; il sera aussi en raison triplee de AD à FI. Ce qu'il falloit demonstrer.

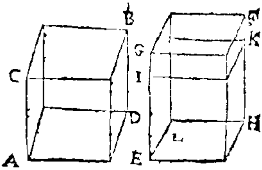
COROLLAIRE.

Par cecy est euident que s'il y a quatre lignes droictes continuellement proportioneles, comme la premiere est à la 4. ainsi le parallelipipede descrit sur la premiere, est au parallelip. semblable, & semblablement descrit sur la seconde. Puis que tant le parallelipipede est au parallelip. que la premiere ligne à la 4. en raison triplee de la raison de la premiere ligne à la 2. sçauoir des costez homologues.

THEOR. 29. PROP. XXXIV.

Les egaux solides parallelipipedes, ont les bases & les hauteurs reciproques : Et ceux qui ont les bases & les hauteurs reciproques, sont egaux.

Soiẽt egaux les parallelipipedes ABCD, EFGH sur les bases AD, EH. Ie dis que leurs bases & leurs hauteurs sont reciproques, c'està dire, que comme la base AD est à la base EH, ainsi la hauteur EG est à la hauteur AC.



Qu'il ne soit ainsi. Premierement il est euident que si les bases AD & EH sont egales (estans les solides egaux) qu'il faudra aussi que les hauteurs soient egales. Soient donc les bases inegales, sçauoir AD plus grande que DH. Ie dis que la hauteur EG doit estre plus grande que CA : car elle ne peut estre plus petite, non pas seulement egale, d'autant que par la 32 p. 11. iceux solides seroiẽt l'vn à l'autre cõme leurs bases, partant AB plus grãd que EF, & nous les auõs posez egaux : La hauteur EG sera dõc plus grande que CA, & d'icelle soit retranchee EI egale à CA, & d'iceluy poinct I soit imagininé le plan IK parallel a EH, couper le parallelipipede EF : Or les deux solides AB & EF estans egaux, ils auront mesme raison l'vn comme l'autre au solide EK, par la 7. p. 5. Mais AB & EK estans de mesme hauteur, ils seront l'vn à l'autre comme la base AD à la base EH, par la 32 p. 11. Partant EF sera aussi à EK comme la base AD à la base EH. Or comme le parallelipipede EF est au parallelipipede EK, ainsi la base GL à la base IL, par la 25. p. 11. & icelle base GL est à la base IL, comme la ligne EG est à la ligne EI, par la 1. p. 6. & partant par la 11. p. 5. le solide EF est au solide EK, comme EG a EL. Mais le solide EF est aussi au solide EK, comme la base AD à la base EH : Donc par la 11. p. 5. comme la base AD à la base EH, ainsi la hauteur EG est à la hauteur EI, ou à son egale AC.

Pour la seconde partie si AD base est à EH base, comme EG hauteur est à AC hauteur. Ie dis que les deux solides AB, & EF sont egaux.

Car si les hauteurs sont egales, il est euident que les bases sont aussi egales, puis qu'elles sont posees en mesme raison & partant par la 31. p. 11. les parallelipipedes AB, EF seront pareillement egaux.

Que si la hauteur EG est plus grande que la hauteur AC, soit retranchee d'icelle EI, egale à AC, & par I soit tiré le plan IK parallele à la base EH. Donc par la 32. p. 11. comme la base AD est a la base EH, ainsi le solide AB est au solide EK, puis que leurs hauteurs sont egales: Et par la 1. p. 6. comme EG est à EI, ainsi le plan GL est au plan IL. Mais comme la base GL est à la base IL, ainsi le solide EF, est au solide EK: (car ils sont de mesme hauteur,) donc comme le solide AB est au solide EK, ainsi le solide EF est au mesme solide EK, puis que par l'hypotese AD est à EH comme EG à AC ou EI: partant par la 9. p. 5. les solides AB, EF seront egaux.

SCHOLIE.

Il faut noter qu'à ceste demonstration & presque à toutes les autres de ce liure, les hauteurs des solides doiuent estre perpendiculaires. Parquoy si elles n'estoient telles, les y faudroit reduire, comme nous auons faict à la fin de 31 p. de ce liure.

Or toutes les choses que nous auons demonstrees és 6. precedentes propositions, sçauoir, 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conuiennent aussi aux prismes qui ont deux plans opposez triangulaires, obseruant les susdites hypoteses. Car si à deux tels prismes de mesme hauteur, & constituez sur vne mesme base, ou sur bases egales, on appose deux autres prismes egaux & semblables à iceux, seront faicts deux parallelipipedes de mesme hauteur, & constituez sur mesme, ou bases egales. Parquoy par la 29. 30. ou 31. p. 11. seront egaux iceux parallelip. & partant aussi les prismes donnez, c'est à sçauoir les moitiez d'iceux parallelip.

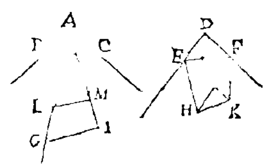
Derechef si aux deux prismes susdits de mesme hauteur, & constituez sur diuerses bases, on adioinct deux autres prismes egaux, & semblables à iceux, seront faicts derechef deux parallelipipedes de mesme hauteur: Parquoy par la 32. p. 11. le parallelipipede sera au parallelipipede comme la base à la base; & partant par la 15. p. 5. le prisme sera au prisme, c'est à sçauoir la moitié de l'vn des parallelip. à la moictié de l'autre, comme la mesme base à la base, si les bases des prismes sont parallelogrames, ou comme le triangle au triangle, sçauoir est la moitié d'vne base à la moitié de l'autre, si les bases sont triangulaires.

D'auantage, si à iceux deux prismes semblables, on adiouste deux autres prismes egaux & semblables à eux seront constituez deux paralleli. semblables, lesquels par la 33. p. 11. seront entr'eux en raison triplee des costez homologues. Donc aussi par la 15. p. 5. les prismes, sçauoir est les moitiez d'iceux, auront la raison triplee de mesmes costez homologues, lesquels sont pareillement costez homologues des prismes.

Finablement, si aux deux susdits prismes egaux, on adiouste deux autres prismes egaux & semblables a iceux, serōt constituez deux parallelipip des egaux de m sme hauteur que les prismes: Parquoy par la 34 p. 11 puis que les bases, & les hauteurs des parallelipipedes, sont reciproques, & les bas s des prismes sont les mesmes, ou les triangles moictiez d'icelles, ayant mesme raison par la 15 p 5. Aussi les bases & hauteurs des prismes seront reciproques.

THEOR. 30. PROP. XXXV.

S'il y a deux angles plans egaux, aux sommets desquels soient leuees en l air deux lignes droictes faisant angles egaux auec les costez des angles premieremēt posez, chacun au sien: & d'vn poinct pris au haut de chacune des deux lignes sont menees des lignes perpendiculaires sur les plans esquels sont les angles premierement posez; & des poincts où tombent icelles perpendiculaires sont tirees des lignes droites vers les sommets des angles premierement posez: Les angles que font icelles lignes, auec les leuees en l'air sont egaux entr eux.



Soient les deux angles plās egaux BAC, EDF, du sommet desquels A & D, soient leuees en l'air le lignes droites AG, DH, tellement que l'angle BAG est egal a l'angle EDH: & l'angle CAG egal à l'angle FDH. & des poincts G & H pris és lignes AG, DH, soient tirees aux plans esquels sont les angles BAC, EDF, les perpēdiculaires GI, HK, tombantes és poincts I, K, desquels soient menees les lignes IA, KD Ie dis que les angles GAI, HDK, sont egaux entr'eux.

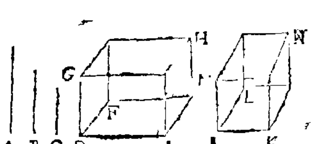
Car si les deux lignes AG, DH sont inegales, de la plus grande AG, soit retranchee AL egale a DH; & de L au plan du triangle AGI, soit tiree LM parallele à GI : laquelle LM sera perpendiculaire au plan de l'angle BAC par la 8.p.11.puis que GI est perpendicul.à iceluy plan Soient aussi tirez des poincts M,K,les lignes MB,MC,KE,KF,perpendiculaires aux lignes AB,AC,DE,DF ; & soient menees les lignes BC,BL,LC,EF, EH, HF. Or d'autant que LM est perpendiculaire au plan de l'angle BAC, elle le sera aussi a la ligne AM tiree au mesme plan par la 2.d 11.partant par la 47. p.1. le quarré de AL sera egal aux quarrez de AM, ML : mais par la mesme prop le quarré de AM est egal aux quarrez de AC,CM,puis que l'angle ACM est droict par la construction. Donc le quarré de AL est egal aux quarrez de AC,CM,ML : Et par la 47.p.1. le quarré de CL est egal aux quarrez de CM, ML, puis que par la 2.d.de ce liure, l'angle CML est droict. Donc le quarré de AL est egal aux quarrez de AC, CL : & partant par la 48.p.1. l'angle ACL est droict. Derechef, puis que par la 47. p. 1 le quarré de AL est egal aux quarrez de AM, ML : & le quarré de AM est egal aux quarrez de AB, BM, l'angle ABM estant droict par la construction : le quarré de AL est egal aux quarrez de AB, BM, ML : mais le quarré de BL est egal à iceux quarrez de BM, ML, pource que l'angle BML est droict par la 2.d. 11. Donc le quarré de AL est egal aux quarrez de AB, BL : & partant par la 48. p. 1. l angle ABL sera droict. On demonstrera en la mesme maniere que les angles DFH, DEH sont aussi droits. Maintenant puis que les angles ABL, LAB, du triangle ABL sont egaux aux angles DEH, HDE, du triangle DEH,& les costez AL, DH aussi egaux, par la 26 p. 1. les autres costez AB,BL seront pareillement egaux aux autres costez DE, EH Par mesme raison seront egaux les costez AC,CL,aux costez DF,FH. Parquoy les costez AB, AC du triangle ABC,estans egaux aux costez DE, DF du triangle DEF, & les angles BAC, EDF aussi egaux, par la 4. p.1. les bases BC,EF,seront pareillement egales entr'elles, & les angles ABC,ACB egaux aux angles DEF, DFE Mais tous les angles ABM,ACM, sont egaux a tous les angles DEK, DFK, puis qu'ils sont tous droicts : Donc aussi les autres angles MBC, MCB seront egaux aux autres angles KEF, KFE : & partant puis que les costez BC,EF,ont esté demonstrez egaux;les costez BM,CM, seront egaux aux costez EK,FK, par la 26.p.1. veu donc que les costez AC,CM du triãgle ACM sont egaux aux costez DF,FK du triangle DFK,& les angles ACM, DFK sont droicts, par la 24.p. 1. les bases AM, DK seront egales. Et puis que BL,EH ont esté demonstrees egales, leurs quarrez seront aussi egaux : Mais par la 47.p.1. le quarré de BL est egal aux quarrez de BM, ML, & le quarré de EH aux quarrez de EK, KH, pource que les angles BML, EKH sont droicts, par la 2.d.11. Donc les quarrez de BM, ML seront egaux aux quarrez de EK, KH: & partant estans ostez les quarrez de BM EK, qui sont egaux, les lignes BM, EK, ayant esté demonstrees egales; resteront egaux les quarrez de LM, HK, & partant les lignes LM, HK seront egales. Parquoy veu que les costez AL, AM du triangle ALM, sont egaux aux costez DH, DK du triãgle DHK, & la base LM egale a la base HK ; les angles LAM, HDK seront egaux par la 8.p.1. ce qu'il faloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Parquoy s'il y à deux angles plans egaux, és sommets desquels soient esleuees en l'air des lignes droictes egales, lesquelles auec les lignes d'iceux angles premierement posez, contiennent angles egaux, chacun au sien; les perpendiculaires tirees des poincts extremes d'icelles lignes esleuees en l'air, sur les plans des angles premierement posez; seront egales entr'elles. Car d'autant que les angles plans BAC, EDF, sont posez egaux, & les lignes egales AL AL, DH esleuees en haut constituent les angles egaux LAB, HDE; Item LAC, HDF; il a esté demonstré que les perpendiculaires LM, HK, sont egales entr'elles.

THEOR. 31. PROP. XXXVI.

Si trois lignes sont proportionelles; le solide parallelipipede cõpris d'icelles trois lignes, est egal au solide parallelipipede compris de la moyenne; moyennant qu'iceux deux solides soient equiangles.



Soient trois lignes continuellement proportionneles A, B, C : & soit constitué vn angle solide D, de trois quelconques angles plãs EDF, EDG, FDH tellement que la ligne DH soit egale à A, & DG à B, & DF egale a C: & soit accomply le parallelipipede DH: en apres par la 26.p.11. sur la ligne IK egale a B, & au poinct I soit faict l'angle solide I des trois angles plans KIL, HIM, & KIL, egaux aux trois EDF, EDG, FDG: tellement que les lignes IK, IL, IM soient egales à la moyenne B; & soit faict le parallelipipede IN. Ie dis que les solides DH, IN sont egaux.

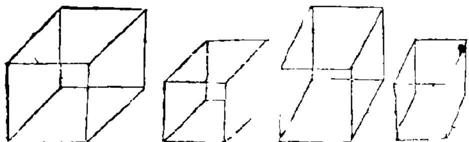
Car puis que comme DE est a Ik, ainsi IL a DF: (car DE est egale à A; Ik, IL a B; & DF a C) & les angles EDF, KIL egaux; les parallelogrammes EF, kL seront egaux par la 14.p. 6. pource qu'ils ont les costez au long des angles egaux reciproques. Et d'autant qu'aux sommets des angles plans egaux EDF, kIL sont esleuez en l'air les lignes egales DG, IM, lesquelles auec les lignes des angles premierement posez comprennent angles egaux, vn chacun au sien: les perpendiculaires tirees de G, M, sur les plans des bases EF, KL; (sçauoir est les haulteurs des parallelipipedes DH, IN) serōt egalss entr'elles par le corolaire de la precedente proposition Parquoy par la 31.p.11. les parallelipipedes DH, IN, seront egaux entr'eux, puis qu'ils ont les bases EF, KL egales, & pareillemēt les hauteurs egales: ce qu'il faloi demonstrer.

THEOR. 32. PROP. XXXVII.

Si quatre lignes sont proportioneles, les solides parallelipipedes semblables, & semblablement descrits sur icelles, seront proportionaux: Et si iceux quatre semblables solides parallelipipedes sont proportionaux; les quatre lignes sur lesquelles ils seront semblablement posez, seront aussi proportioneles.

Soient quatre lignes proportioneles comme A, B, C, D: & soient descrits sur icelles quatre solides semblables & semblablement posez A, B, C, D. Ie dis qu'iceux solides sont proportionaux.

Car puis que le solide A est semblable au solide B: par la 33.p 11. ils seront l'vn à l'autre en raison triplee de la ligne A à la ligne B : pareillement les solides C & D seront aussi en raison triplee de C a D : mais la raison de A à B, est comme C a D par l'hypothese. Donc la raison triplee de A a B, sera



semblable à la raison triplee de C à D ; & partant par la 11. p. 5. le solide A sera au solide B, comme le solide C au solide D.

Maintenant si les quatre solides A, B, C, D sont proportionaux, la ligne A sera à la ligne B, comme la ligne C à la ligne D. Car tout de mesme le solide A sera au solide B, en raison triplee de la ligne A à la ligne B : Item le solide C au solide D, en raison triplee de C a D : mais le solide A est au solide B cōme le solide C au solide D. partant leur raison triplee sera semblable ; & par consequent les quatre lignes A, B, C, D, seront proportioneles.

SCHOLIE.

Nous adiousterons icy cest autre theoreme.

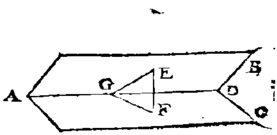
Si 4 lignes sont continuellement proportioneles : le parallelipipede cōpris sous le quarré de l'vne des extremes, & sous le quarré de l'autre extreme, est egal au cube de la moyenne proportionele plus prochaine de la premiere extreme prise.

Soient quatre lignes continuellement proportioneles A, B, C, D. Ie dis que le parallelipipede compris sous le quarré de l'extreme A, & sous le quarré de l'autre extreme D, est egal au cube de la moyenne B plus prochaine de l'extreme A.

Car puis que par le coroll. de la 20 p 6. le quarré de A est au quarré de B, comme A à C, c'est à dire comme B à D : les bases auec les hauteurs seront reciproques, puis que le quarré de A est la base du parallelipipede, & la ligne D, la hauteur d'iceluy ; & la base du cube est le quarre de B, & sa hauteur la mesme ligne B. Donc, par la 34. p. 11. le parallelipipede & le cube seront egaux. Par mesme raison le paralleli p. compris sous le quarré de l'extreme D, & sous le quarré *de l'autre extreme A, sera demonstré egal au cube de la moyenne prop. C plus prochaine de l'extreme D.*

THEO. 33. PROP. XXXVIII.

Si vn plan est esleué perpendiculairement sur vn autre plan, & d'vn poinct de l'vn d'iceux on meine vne ligne perpẽdiculaire sur l'autre; elle tombera sur leur commune section.



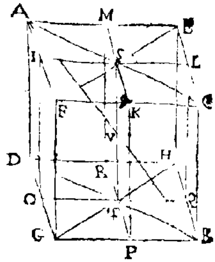
Soit le plan AB, esleué perpẽdiculairement sur le plan AC, leur ligne de commune section AD; & du poinct E pris en AB on laisse tomber vne perpendiculaire sur le plã AC: ie dis qu'elle tombera sur la commune section AD.

Autrement qu'elle tombe au poinct F, du plan AC, s'il est possible: & par la 12. p 1. du poinct F sur la ligne AD soit menee la perpendiculaire FG; & la ligne GE faisant le triangle GFE. Or si la ligne EF est perpendiculaire au plan AC, elle le sera aussi à la ligne FG: & icelle FG estant perpendiculaire à la commune section AD. elle le sera pareillement au plan AB: & par consequent à la ligne GE: partant au triangle GFE, les deux angles sur la ligne GF seroiẽt tous deux droits contre la 17. p. 1. Donc la perpendiculaire tombant de E sur le plan AC ne tombera pas hors la commune section AD, mais elle tombera en icelle: ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 34. PROP. XXXIX.

Si les costez des plans opposez d'vn solide parallelipipede, sont couppez en deux egalement; & on meine des plans par les sections: la ligne de commune section d'iceux plans, & le diametre du solide parallelipipede, se coupperont en deux egalement.

Soit le parallelipipede AB; les plãs opposez AC, BD, desquels tous les costez soient couppez en deux egalement és poincts I, K, L, M, O, P, Q, R, par lesquels soiẽt imaginez passer les plans IQ, KR, se couppans l'vn l'autre en la ligne ST : & soit menee la diagonale AB, Ie dis que la ligne ST & la diagonale AB s'entre-couppent en deux egalement.



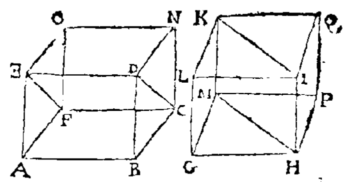
Car estans tirees les lignes SA, SC, TD, TB : soient considerez les deux triangles BQT, DOT, desquels les deux costez BQ, QT sont egaux aux deux costez DO, OT, (car BQ, DO, sont moitiez des lignes droictes egales BH, DG : & par la 34.p.1 QT, OT, sont egales aux deux egales BP, GP, puis que PQ, PO sont parallelogrammes.) & l'angle BQT par la 29. p. 1. est egal à l'interne DOT : partant par la 4.p 1. les bases BT, DT seront aussi egales : & les angles BTQ, DTO pareillement egaux : Et par la 13.prop.1. les angles BTQ, BTO sont egaux à deux droicts. Donc aussi DTO, BTO sont egaux à deux droicts: & partant par la 14.p. 1. BT, DT constituent vne seule ligne droicte. En la mesme maniere sera demõstré que AS, CS sont egales, & composent vne seule ligne droicte. Maintenant puis que l'vne & l'autre AD, BC est parallele & egale à FG, à cause des parallelogrammes DF, FB: icelles seront aussi egales & paralleles entr'elles par la 9.p.11. Parquoy AC, BD qui conioignent les extremitez d'icelles AD, BC, sont aussi egales & paralleles par la 33.p. 1. & par consequent AS, BT moitiez d'icelles sont egales. Mais pource que AC, BD sont paralleles, les lignes AB, ST seront auec icelles en vn mesme plan, par la 7.p.11. & partant s'entrecouperont en vn poinct, sçauoir en V. Et d'autant que par les 29. & 15.p.1 les deux angles ASV, AVS du triangle ASV, sont egaux aux deux angles BTV, BVT du triangle BTV, & le costé AS egal au costé BT : les autres costez AV, SV, seront aussi egaux aux autres costez BV, TV, chacun au sien; par la 26.p.1. Parqnoy les deux lignes AB, ST s'entrecouppent en deux egalement au poinct V : ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

Par cecy est euident qu'en tout parallelipipede, tous les diametres *s'entrecouppent en deux egalement en vn seul poinct, sçauoir est au poinct V, auquel ils diuisent en deux egalement la ligne ST. Est aussi manifeste que tout plan qui couppe le parallelipipede en deux egalement passe par le centre d'iceluy, sçauoir par V.*

THEOR. 35. PROP. XL.

Deux prismes de mesme hauteur sont egaux, si la base de l'vn triangulaire, n'est que la moitié de la base de l'autre, estant vn parallelogramme.



Soient deux prismes de mesme hauteur ABCDEF, GHIKLM; & que celuy-là ait pour base le parallelogramme ABCF, double du triangle GHM base du prisme GHIKLM. Ie dis qu'iceux prismes sont egaux.

Car si on les accomplit pour estre solides parallelipipedes AN, GQ, la base GP sera egale à la base BF: & estans de mesme hauteur, ils seront egaux par la 31. p. 11. & par la 28. p. 11. les plans diagonaux CDEF, HIKM les diuiseront en deux egalement, & partant les prismes donnez au commencemét estans les moitiez de choses egales, seront egaux entr'eux: ce qu'il falloit prouuer.

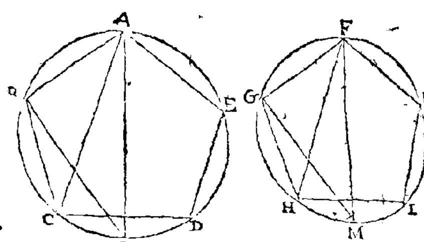
Fin de l'Element vnziesme.

ELEMENT DOVZIESME.

THEOR. I. PROP. I.

LEs polygones ſemblables inſcrits aux cercles ; ſont l'vn à l'autre comme les quarrez deſcrits des diametres des cercles.

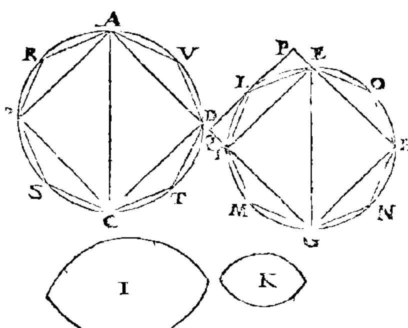
Soient deux polygones ſemblables ABCDE & FGHIK, inſcrits dans les cercles, deſquels les diametres ſont AL, FM. Ie dis qu'iceux polygones ſont l'vn à l'autre comme les quarrez des diametres AL, FM.



Qu'il ne ſoit ainſi. Soient menees les lignes AC, FH, item BL, & GM. D'autant que les pentagones ſont ſemblables, est à BC, comme FG à GH, & l'angle ABC, egal à l'angle FGH; par la 6.p.6. les triangles ABC, FGH sont equiangles; partant l'angle BCA sera egal a l'angle FHG. Mais ils sont chacun egaux, l'vn à l'angle L, l'autre à l'angle M, par la 21. p.3. (car ils sont sur mesmes sections BA & FG.) Ainsi l'angle L sera egal a l'angle M: & par la 31 p.3. les angles ABL, FGM estans droicts dans les demy cercles, & egaux, les triangles ABL, FGM seront equiangles: (car le troisiesme sera egal au troisiesme, par la 32. p. 1.) & par la 4 p.6. comme AL sera a AB, ainsi FM a FG; & en changeant comme AL sera à FM, ainsi AB à FG. Parquoy par la 22. p.6. comme le pentagone descrit sur AB sera a l'autre pentagone semblable, & semblablement posé sur FG: ainsi le quarré de AL au quarré de FM: ce qui estoit a prouuer.

THEOR. 2. PROP. II.

Les cercles sont l'vn à l'autre, comme les quarrez descrits de leurs diametres.



Soient les deux cercles ABCD, EFGH, descrits sur les deux diametres AC & EG: Ie disqu'ils sont l'vn a l'autre comme le quarré de AC est au quarré de EG; c'est a dire que si on imagine que comme le quarré de AC, au quarré EG, ainsi le cercle ABCD a quelque figure quatriesme propor. (comme I) qu'icelle figure I est egale au cercle EFGH.

Autrement elle sera plus petite ou plus grande. Soit premierement plus petite s'il est possible: & soit le cercle EFGH plus grand qu'icelle de la figure K. Or par la 1 p.10. on peut retrancher plus de la moitié du cercle EFGH, & du residu plus de la moitié tant de fois qu'il demeurera en fin vne quatité plus petite que K : Soit donc dans iceluy cercle EFGH descrit le quarré EFGH, qui est plus grand que la moitié du cercle (d'autant que le quarre de EG, qui est son double, est plus grand que le cercle.) Si les quatre sections du cercle sont plus petite que K, nous auons ce que nous demandons: Sinon soit couppé l'arc EF en deux egalement au poinct L, & les trois autres arcs semblablement és poincts L, M, N, O; & soiét tirees les lignes EL, LF, FM, MG, GN, NH, HO, & OE, à fin d'auoir l'octogone ELFMGNHO, inscrit dans le cercle: Il est euident que dans les quatre sectiõs egales, il y aura quatre triangles egaux, & que chacun comme ELF, est plus de la moitie de sa section : (car le triangle Isoscele FLE est la moitie du rectangle FP de mesme hauteur & sur mesme base FE, par la 41.p.1. lequel rectangle est plus grand que la section FLE.) Soient maintenant les huict petites figures restantes plus petites que la figure K, que si cela n'estoit, il faudroit tousiours coupper les arcs derniers, & tousiours inscrire des polygones, desquels le dernier auroit deux fois autant de costez que son precedent, & soustraire tousiours plus de la moitié de chacune section, sçauoir son triangle Isoscele: Il est certain qu'a la fin les dernieres sections seront plus petites que la figure K. Mais pour abreger soient les deuant dictes huict sections restantes plus petites que la figure K: Il est euident que l'octogone ELFMGNHO sera plus grand que la figure I, puis que les deux I & K sont egales au cercle EFGH. Soit pareillement inscrit vn octogon esemblable, au cercle ABCD, ce qui est facile: car il n'y à qu à coupper en deux egalement les deux demy cercles ABC, ADC, en B & D; puis les circonferences AB, BC, CD AD aussi en deux egalement en R, S, T, V; & ayant tiré les lignes droictes AR, RB, BS, SC, CT, TD, DV & VA; il est euident que la figure inscripte sera sẽblable a la figure octogone descrite au cercle EFGH. Maintenãt par la 1 p.12. l'octogone ARBSCTDV sera à l'octogone ELFMGNHO, comme le quarré de AC: est au quarré de EG: mais cõme le quarré de AC est au quarré de EG, ainsi le cercle ABCD est à la figure I: & par la 11. p. 5. cõme le poligone ARBSCTDV sera au poligone ELFMGNHO, ainsi le cercle ABCD sera à la figure I. Mais le poligone ARBSCTDV est moindre que le cercle ABCD: Donc par la 14.p.5. le polygone ELFMGNHO sera aussi moindre que la figure I: Mais il a aussi esté demonstré plus grand. Ce qui est absurde. Donc la figure I n'est pas plus petite que le cercle EFGH.

On prouuera aussi qu'elle ne peut estre plus grande. Autrement s'il est possible; puis que comme le quarré de AC au quarré de EG, ainsi le cercle ABCD à la figure I: aussi en changeant la figure I sera au cercle ABCD, comme le quarré de EG au quarré de AC: mais soit imaginé que comme I est au cercle ABCD, ainsi le cercle EFGH soit à quelque autre figure, comme K: & par la 14. p. 5. cõme la figure I est plus grande que le cercle EFGH, ainsi le cercle ABCD sera plus grand que la figure K: & par la 11. p. 5. le cercle ABCD sera à la figure K, comme le quarré de AC est au quarré de EG: ce qui contreuient à la premiere partie de sa demonstration, en laquelle nous auons monstré que l'vn des cercles estant à vne figure, en la raison des quarrez des diametres, qu'icelle figure ne pouuoit estre plus petite que l'autre cercle: Partant la figure I ne pouuoit estre plus grande que le cercle EFGH: ny plus petite, comme en la premiere partie: elle estoit donc egale à iceluy: ce qu'il falloit prouuer.

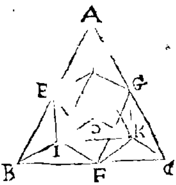
COROLLAIRE.

Par ces choses est euident que le cercle est au cercle comme le polygone descrit en celuy-là est au polygone semblable descrit en cestuy-cy. Puis que par la 2. p. 12. tant le cercle est au cercle, que par la 1. p. 12. le polygone est au polygone, comme le quarré du diametre est au quarré du diametre, ainsi qu'il a esté demonstré.

THEOR. 3. PROP. III.

Toute pyramide ayant base triangulaire, peut estre diuisee en deux pyramides egales, semblables entr'elles, & à la totale; & en deux prismes egaux, & plus grands que la moitié de la pyramide totale.

Soit la pyramide ABCD, ayant la base triangulaire ABD, & le sommet au poinct C: Ie dis qu'elle peut estre diuisee en deux pyramides egales, semblables entr'elles, & à la totale: & en deux prismes egaux, plus grands que la moitié de la pyramide donnee.



Qu'il ne ſoit ainſi. Soient couppez en deux egalement, tous les coſtez des plãs d'icelle pyramide, ſçauoir les trois de la baſe ABD aux poincts E, F, G, & les trois hypothenuſes AC, BC, DC aux trois poincts H, I, K, & ſoient menees les lignes FE, FG, HI, IK, KH, HG, HE, FI. Premierement la baſe ABD eſt diuiſee en trois figures ; au quadrangle BEGF ; & les deux triãgle DGF, & EAG, leſquels ſont ſemblables entr'eux, & au tout ABC, puis que les coſtez d'iceluy ſont couppez proportionnellement, & par la 2.p 6 la ligne EG eſt parallele a BD, & FE a AD. Partant eſtant l'angle A commun aux deux triãgles BAD, & EAG, l'angle exterieur GEA ſera egal a l'oppoſé interieur DBA, par la 29.p.1. Et par la 32.p 1 le troiſieſme ſera egal au troiſieſme, & par la 4 p.6 & 1.d.6. les deux triangles BAD & EAG ſeront ſemblables. Par le meſme diſcours le triãgle FGD, ſera ſemblable au triangle BAD, & par la 21.p.6. les deux triangles EAG FGD, ſeront ſemblables entr'eux, & egaux, d'autant que leurs coſtez ſont egaux. Quant au quadrãgle BEGF il eſt euident par la 41.p 1 qu'il eſt double du triangle FGD. (car il eſt ſur baſe egale, & entre meſmes paralleles) Il eſt auſſi manifeſte que toute la pyramide ABCD, eſt diuiſee aux deux pyramides AEGH & HIKC egales & ſemblables ; & aux deux priſmes, l'vn EHGFIB, duquel la baſe eſt le quadrãgle BEGF, l'autre HIKFDG, duquel la baſe eſt le triangle FGD : & pourautant qu'ils ſont de meſme hauteur, ſçauoir de la hauteur du poinct H, ou du poinct K, & que la baſe quadrangulaire eſt double de la triangulaire. ils ſeront egaux par la 40 p.11.

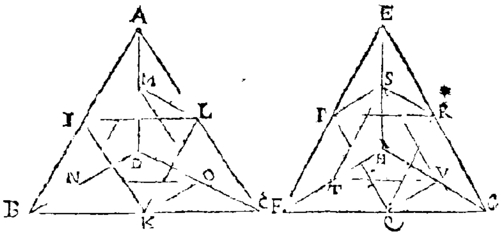
Or que les pyramides AEHG, & HICK ſoient ſemblables, on le prouue en ceſte ſorte : d'autant que les coſtez AC, DC du triangle ACD ont eſté couppez en deux egalement, par la 2.p.6 HK, AD, ſont paralleles, & l'angle exterieur CHK eſt egal à ſon oppoſé interieur HAG par la 29 p 1 Et AHG à HCK, & par la 32.p. 1 le troiſieſme ſera egal au troiſieſme ; & partant par la 4.p.6. Les triangles equiangles CHK & HAG ſeront ſemblables entr'eux, & au triangle ACD, par la 21.p.6. ils ſeront auſſi egaux entr'eux, eſtans les lignes CH & HA egales. Par les meſmes raiſons les triangles ICH, & EHA ſeront egales & ſemblables entr'eux, & au triangle ACB. Itẽ le triangle IKH ſe prouuera facilement equiangle, & ſemblable au triangle ABD, par la 10.p.11. (ayans leurs coſtez parallels se touchans en diuers plans) partant aussi semblables au triangle GAE, & egal à iceluy par la 21.p.6. Car HK est egal à GD, & GD à GA: & par la 10.p.11. KCI & BCD seront semblables a GHE, & KGI egal à iceluy: & par la def. des solides semblables & egaux, icelles trois pyramides ABCD, AEHG, HICK, faictes de plans semblables, seront semblables; & les deux petites seront egales, faictes de plans egaux

Que les deux prismes EHGFIB, & HIKFDG soient ensemble plus de la moitié d'icelle pyramide totale ABCD, il appert ainsi: iceux deux prismes estans egaux, l'vn d'iceux EHGFIB, ayant base quadrangulaire BEGF double du triãgle FGD, base de la pyramide AGHE, & de mesme hauteur qu'icelle, on en peut retrancher vne pyramide egale à icelle pyramide EAGH: partant iceluy prisme est plus grand que la pyramide, le tout que la partie: Et par consequent les deux prismes ensemble, serõt plus grands que les deux pyramides AEHG, HICK ensemble. Mais iceux prismes, & pyramides font ensemble la pyramide totale ABCD: donc iceux prismes estans plus grands qu'icelles deux pyramides; seront aussi plus grands que la moitié d'icelle pyramide totale ABCD: ce qu'il falloit prouuer.

THEO. 4. PROP. IIII.

S'il y a deux pyramides de mesme hauteur ayans base triangulaire, & chacune d'icelles est diuisee en deux autres pyramides semblables entr'elles, & à la toute; & en deux prismes egaux; & les pyramides de la diuisiõ sont tousiours subdiuisees de mesme façon: comme la base de l'vne des pyramides sera à la base de l'autre, ainsi aussi tous les prismes ensemble tant de la diuision que subdiuision d'icelle pyramide, seront à tous les prismes ensemble de l'autre pyramide.

Soient sur les bases triangulaires ABC, EFG, les pyramides ABCD, EFGH de mesme hauteur, desquelles chacune soit diuisee comme en la precedente proposition en deux pyrami-



des egales entr'elles & semblables à la toute, sçauoir est en AILM, MNOD ; EPRS, STVH ; & en deux prismes egaux IBKLMN, CKLMNO ; PFQRST, GQRSTV : Et de mesme façon soient entendues chacunes des pyramides AILM, MNOD, EPRS, STVH estre diuisees; & en continuant tousiours de mesme façon. Ie dis que comme la base ABC est à la base EFG, ainsi tous les prismes faicts en la pyramide ABCD à tous les prismes faicts en la pyramide EFGH.

Car puis que comme BC à CK, ainsi FG à GQ; pource que l'vne & l'autre ligne est diuisee en deux egalement, & les triangles ABC LKC sont semblables & semblablemẽt posez: Item les triangles EFG RQG, par le corol. de la 4. p. 6. pareillemẽt par la 22. p. 6. comme le triangle ABC au triangle LKC, ainsi le triangle EFG au triangle RQG : & en permutãt comme ABC à EFG, ainsi LKC à RQG. Mais cõme LKC à RQG ainsi est le prisme CKLMNO au prisme GQRSTV, comme nous demonstrerõs incontinent : & partant ainsi aussi le prisme IBKLMN est au prisme PFQRST, puis que ceux-cy sont egaux à ceux là : Et cõme vn seul prisme, sçauoir IBKLMN est à vn seul prisme PFQRST, ainsi sont les deux prismes ensemble IBKLMN, CKLMNO, aux deux prismes ensemble PFQRST, GQRSTV par la 12. p. 5. Donc aussi comme la base ABC à la base EFG, ainsi les deux prismes en la pyramide ABCD seront aux deux prismes en la pyramide EFGH. Nous demonstrerons en la mesme maniere, deux prismes és pyramides AILM, MNOD, faictes en la pyramide ABCD, estre aux deux prismes és pyramides EPRS, STVH, faictes en la pyramide EFGH, comme sont les bases AIL, MNO de ces pyramides là aux bases EPR, STV de ces pyramides-cy : & ainsi

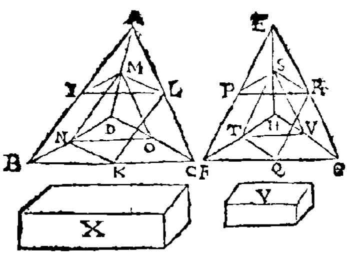
ainsi continuellement, tant que la mesme diuision sera faicte. Mais comme ces bases la sont à celles-cy, ainsi la base LKC, qui est egale & semblable à celles-là, est à la base RQG, qui est egale & semblable à cellescy, c'est à dire ainsi la base ABC est à la base EFG. Donc aussi comme la base ABC est a la base EFG, ainsi les prismes de quelconque pyramide faicte en la pyramide ABCD, seront aux prismes de quelconque pyramide faicte en la pyramide EFGH : & partant aussi comme les prismes de la pyramide ABCD seront aux prismes de la pyramide EFGH, ainsi seront les prismes estant de la pyramide AILM, aux prismes de la pyramide EPRS, que les prismes de la pyramide MNOD, aux prismes de la pyramide STVH; & ainsi continuellement. Parquoy puis que par la 12.p.5. comme les deux prismes de la pyramide ABCD sont aux deux prismes de la pyramide EFGH, ainsi tous les prismes estans es pyramides ABCD, AILM, MNOD, &c. ensemble, sont à tous les prismes estans és pyramides EFGH, EPRS, STVH &c. ensemble, si celles-cy sont egales en multitude à celles-là; pareillement comme la base ABC est à la base EFG, ainsi seront tous les prismes estans en la pyramide ABCD, à tous les prismes en la pyramide EFGH: ce qu'il falloit prouuer.

LEMME.

Or que comme LKC est à RQG, ainsi le prisme CKLMNO soit au prisme GQRSTV, nous le demonstrerons ainsi. Soient imaginees tomber des sommets D, H, des lignes perpendiculaires sur les bases ABC, EFG, lesquelles serōt les hauteurs egales des pyramides ABCD EFGH. Donc puis que les plans parallels ABC, MNO couppēt proportionnelement par la 17.p.11. deux lignes droictes, sçauoir DC & la perpendiculaire tombant de D; & DC est couppee en deux egalement en O: pareillement la perpendiculaire tombant de D, sera couppee en deux egalement au poinct auquel elle rencontre le plan MNO. Par la mesme raison la perpendiculaire tombant de H, sera couppee en deux egalement par le plan STV. Parquoy puis qu'icelles perpendiculaires sont posees egales, leurs moitiez, sçauoir est les hauteurs des prismes, seront aussi egales: & partant les prismes CKLMNO, GQRSTV estans d'egales hauteurs, seront entr'eux, comme les bases LKC, RQG, par les choses que nous auons demonstrees sur la 34. prop. 11.

THEOR. 5. PROP. V.

Les pyramides de mesme hauteur ayans bases triangulaires, sont l'vne à l'autre comme leurs bases.



Soient les pyramides de mesme hauteur ABCD, EFGH, desquelles les bases sont les triãgles ABC, EFG. Ie dis que la pyramide est à la pyramide, comme la base est à la base.

Autrement, soit imaginé comme en la 2.p.12. que comme la base ABC à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD à quelque solide, comme X: ie dis qu'iceluy solide X est egal à la pyramide EFGH, autrement il sera plus petit ou plus grand : & soit en premier lieu plus petit comme de la quantité du solide Y. Ainsi nous imaginons que les deux solides X & Y, soient egaux à la pyramide EFGH. Maintenant par la 3.p. 12. on peut diuiser vne pyramide en deux pyramides egales,& en deux prismes egaux, lesquels seront plus grands que la moitié de la pyramide totale : Que si de la pyramide EFGH, on rettanche plus de la moitié, sçauoir les deux prismes PFQRST, GQRSTV, & de chacune pyramide restante EPRS, STVH, encores plus de la moitié, sçauoir deux prismes, en continuant tousiours iusques à ce que toutes les pyramides restantes apres le dernier retranchement, soient toutes ensemble manifestement plus petites que le solide Y: ce qui peut arriuer par la 1.p. 10. Ainsi tous les prismes ensemble retranchez de la pyramide EFGH, seront plus grãds que le solide X, puis que le reste est plus petit que le solide Y. Pareillement soient retranchez autãt de fois deux prismes de la pyramide ABCD, comme on en a retranché de la pyramide EFGH: il est euidét par ce qui a esté demonstré à la precedente proposition, que comme la base ABC est à la base EFG, ainsi tous les prismes retranchez de la pyramide ABCD seront à tous les prismes retranchez de la pyramide EFGH: Mais nous auõs posé que comme la base ABC est à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD est au solide X. Et partant par la 11. p. 5. tous les prismes retranchez de la pyramide ABCD seront a tous les prismes retranchez de la pyramide EFGH, comme la pyramide ABCD est au solide X. Or tous les prismes retranchez de la pyramide ABCD sont plus petits qu'icelle pyramide: Et partant par la 14 p. 5. tous les prismes retranchez de la pyramide EFGH, seront plus petits que le solide X, & nous les auions tantost prouuez estre plus grands en posant le solide X plus petit que la pyramide EFGH : partant icelle hypothese a esté fausse, qui nous a conduit à absurdité: Et le solide X n'estoit plus petit que la pyramide EFGH.

Soit donc plus grand, s'il est possible; puis que comme la base ABC à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD au solide X; en changeant la base EFG, sera à la base ABC, comme le solide X est à la pyramide ABCD. Pareillement comme le solide X à la pyramide ABCD soit posé la pyramide EFGH estre à quelque autre solide, comme Y : Et par la 14. p. 5. d'autant que le solide X est posé plus grand que la pyramide EFGH, aussi la pyramide ABCD sera plus grande que le solide Y : & par la 11. p. 5. comme la base EFG est à la base ABC, ainsi la pyramide EFGH à vn solide plus petit que l'autre pyramide: mais nous auons demonstré que cela estant, il s'ensuit vne absurdité, sçauoir que les prismes retranchez d'vne pyramide, estoient plus grand que la pyramide de laquelle ils sont retranchez: Partant le solide X ne peut estre plus grand que la pyramide EFGH, ny aussi plus petit : il sera donc egal. Parquoy puis qu'il a esté posé que comme la base ABC est à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD est au solide X; & que par la 7. p. 5. la pyramide ABCD est au solide X, comme à la pyramide EFGH egale a iceluy solide X; pareillement comme la base ABC sera à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD sera à la pyramide EFGH: ce qu'il faloit demonstrer.

SCHOLIE.

Par la conuerse; Si les pyramides triangulaires sont entr'elles cõme leurs bases : elles seront de mesme hauteur. Car si on croit que la hauteur de l'vne soit plus grande que l'autre, soit couppee d'icelle vne egale à la moindre, & du poinct de la section à tous les angles de la *base, soient tirees des lignes droictes : & comme la base sera à la base ainsi la pyramide sera à la pyramide n'agueres constituee : mais elle estoit pareillement ainsi à toute la pyramide. Donc par la 9. p. 5. la pyramide constituee sera egale à toute la pyramide, la partie au tout: ce qui est absurde.*

COROLLAIRE.

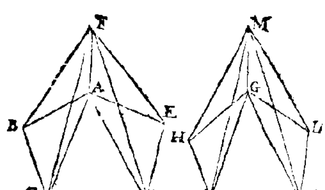
De cecy resulte que les pyramides de mesme hauteur constituees sur mesmes, ou egales bases triangulaires, sont egales entr'elles : puis qu'elles sont en mesme raison que leurs bases, lesquelles sont posees egales, ou vne seule & mesme.

Item il s'ensuit au contraire que les pyramides triangulaires constituees sur vne mesme ou egales bases, sont de mesme hauteur. Et que les pyramides egales, & ayans mesme hauteur, ont les bases egales, si elles ne sont vne mesme : lesquelles deux choses nous demonstrerons par la premiere partie du corol. par le mesme argument dont nous auons vsé en demonstrant la conuerse des 30 & 31. p. 11. si tant sur la hauteur, que sur la base couppee est constituee vne autre pyramide &c.

THEOR. 6. PROP. VI.

Les pyramides de mesme hauteur ayans bases poligones, sont l'vne à l'autre comme leurs bases.

Soit la pyramide ABCDEF de mesme hauteur que la pyramide GHIKLM, desquelles les bases ABCDE & GHIKL sõt poligones : Ie dis que comme la base est à la base, ainsi la pyramide est à la pyramide.

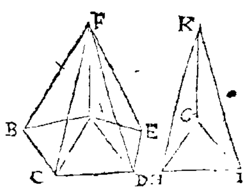


Car les bases estans reduites en triangles ABC, ACD, ADE; GHI, GIK, GKL: soit imaginé sur chacun d'iceux vne pyramide de mesme hauteur que la totale. Donc puis que par la 5.

p.12.comme la base ABC est à la base ACD, ainsi la pyramide ABCF est à la pyramide ACDF; en composant comme la base ABCD sera a la base ACD, ainsi la pyramide ABCDF sera à la pyramide ACDF: Mais derechef, par la 5.p.12. comme la base ACD est à la base ADE, ainsi la pyramide ACDF est à la pyramide ADEF: Donc en raison egale, comme la base ABCD est à la base ADE, ainsi la pyramide ABCDF est à la pyramide ADEF: & partant en composant comme la base ABCDE est à la base ADE, ainsi la pyramide ABCDEF est à la pyramide ADEF. Par semblable argument sera demonstré que comme la base GHIKL est à la base GKL, ainsi la pyramide GHIKLM est à la pyramide GKLM; & en changeant comme la base GKL est à la base GHIKL, ainsi la pyramide GKLM est est à la pyramide GHIKLM. Derechef puis que par la 5.p.12. comme la base ADE est à la base GKL, ainsi la pyramide ADEF est à la pyramide GKLM; les 4. bases ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, seront és mesmes raisons que les 4. pyramides ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM: Parquoy en raison egale comme la base ABCDE est à la base GHIKL, ainsi la pyramide ABCDEF est à la pyramide GHIKLM: Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

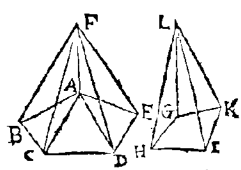
Encore que selon plusieurs Interpretes, il soit parlé en la demonstration de ceste prop. seulement des pyramides de mesme hauteur, desquelles les bases polygones ont les costez egaux en nombre: toutesfois nous demonstrerons aussi le mesme des pyramides de mesme hauteur, la base de l'vne desquelles contiēt plus de costez que la base de l'autre. Car soient premierement deux pyramides de mesme hauteur ABCDEF, GHIK, la base de l'vne desquelles soit polygone sçauoir est pentagone, & de l'autre triangulaire. Ie dis que la pyramide est à la pyramide, comme la base est à la base: Car le pentagone estant resoud en triangles, aussi la pyramide sera diuisee



en pyramides egales en nombre. Et pource que par la 5.p.12. comme la base ABC premiere quantité est à la base GHI, seconde quantité, ainsi la pyramide ABCF 3. quantité est à la pyramide GHIK 4. quantité, Et en la mesme maniere, comme la base ACD, 5. quanti-

té est à la base GHI 2. quantité, ainsi la pyramide ACDF 6. quantité est à la pyramide GHIK 4. quantité : par la 24. p. 5. comme la base ABCD premiere & 2. quantitez ensemble, sera à la base GHI seconde quantité, ainsi la pyramide ABCDF 3. quantité, auec la 6. sera à la pyramide GHIK 4. quantite. Derechef puis que comme la base ABCD est à la base GHI, ainsi la pyramide ABCDF est à la pyramide GHIK, comme nous venons de demonstrer : & que par la 5. p. 12. comme la base ADE 5. quantité, est à la base GHI 2. quantité, ainsi la pyramide ADEF 6. quantité est à la pyramide GHIK 4. quantité : par la mesme 24. p. 5. la base ABCDE sera à la base GHI, comme la pyramide ABCDEF est à la pyramide GHIK : ce qui estoit proposé. En la mesme maniere faudroit tousiours proceder s'il y auoit d'auantage de triangles en la base du polygone. Or puis que comme il a esté demonstré, la base du polygone ABCDE est à la base triangulaire GHI, ainsi que la pyramide ABCDEF est à la pyramide GHIK : pareillement en changeant, comme la base GHI sera à la base ABCDE, ainsi la pyramide GHIK sera à la pyramide ABCDEF. Parquoy deux pyramides, desquelles l'vne à la base polygone, & l'autre triangulaire, sont tousiours comme leurs bases, de quelque part ou l'on commence : Car encore que la demonstration commence au polygone & à sa pyramide, comme appert par la demonstration, toutesfois en changeant il est permis prendre le commencement au triangle & à sa pyramide, comme il a esté dict.

Maintenant soient deux pyramides de mesme hauteur ABCDEF, GHIKL, desquelles les bases sont polygones, & sont plus de costez en vne base qu'en l'autre : Ie dis derechef que la pyramide est à la pyramide, comme la base est à la base. Car estant resoud le polygone ABCDE, és triangles ABC, ACD, ADE : la pyramide sera diuisee en autant de pyramides. Et d'autant



que comme la base triangulaire ABC, premiere quantité, est à la base polygone GHIK seconde quantité, ainsi la pyramide ABCF troisiesme quantité, est à la pyramide GHIKL 4. quantité ; & comme la base ACD 5. quantité est à la base GHIK seconde quantité, ainsi la pyramide ACDF 6. quantité, est à la pyramide GHIKL 4. quantité : aussi par la 24 p. 5. comme la base ABCD premiere quantité auec la 5. sera à la base GHIK seconde quantité, ainsi la pyramide ABCDF troisiesme quantité auec la 6. sera à la pyramide GHIKL 4. quantité. Derechef puis que comme la base ABCD premiere quantité est à la base GHIK seconde quantité, ainsi la pyramide ABCDF tierce quantité, est à la pyramide GHIKL 4. quantité : & aussi *que comme la base ADE quinte quantité, est à la base GHIK seconde quantité, ainsi la pyramide ADEF sixiesme quantité, est à la pyramide GHIKL quarte quantité : pareillement par la 24. p. 5. comme la base ABCDE premiere quātité auec la quinte, sera à la base GHIK seconde quantité, ainsi la pyramide ABCDEF tierce quantité auec la 6. sera à la pyramide GHIKL 4. quantité : ce qui estoit proposé. Il faudroit tousiours proceder en la mesme maniere s'il y auoit d'auantage de triangles en la base.*

Or nous conuertirons tant ceste 6. prop. que celle demonstree en ce scholie, en ceste maniere.

Les pyramides de quelconques bases, lesquelles sont entr'elles comme leurs bases, sont en mesme hauteur.

Ce qu'on demonstrera en la mesme maniere, que les choses dictes au scholie de la 5. p. de ce liure, ont esté demonstrees.

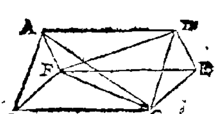
COROLLAIRE.

Il appert aussi que les pyramides de mesme hauteur, constituees sur bases egales multilateres, ou sur vne mesme, estre egales entr'elles; puis qu'elles ont mesme raison que leurs bases, lesquelles sont posees egales, ou vne mesme.

Derechef est euident que les pyramides multilateres egales, & cōstruites sur bases egales, ou sur vne mesme, ont mesme hauteur. Et que les pyramides multangulaires egales, & ayans mesme hauteur, ont aussi les bases egales, si elles ne sont vne mesme. Ce qui se peut demonstrer comme nous auons dict au corol. de la 5. p. de ce liure.

THEOR. 7. PROP. VII.

Tout prisme peut estre diuisé en trois pyramides egales, ayans bases triangulaires.



Soit le prisme ABCDEF duquel les deux triangles opposites ABF, DCE sont egaux & semblables. Ie dis qu'iceluy prisme peut estre diuisé en trois pyramides egales, ayans bases triangulaires.

Car si des trois parallelogrames d'iceluy prisme, on meine les trois diametres AC, CF, FD, il est euident que le prisme sera diuisé en trois pyramides : monstrons qu'elles sont egales. D'autant que la diagonale AC, couppant le parallelog. ABCD en deux egalement, les triangles ABC, ADC sont egaux : Partant la pyramide ABCF, ayant pour base le triangle ABC est egale à la pytamide ADCF ayant pour base le triangle ADC, par la 5.p.12. Car icelles Pyramydes sont de mesme hauteur, sçauoir est de la perpendiculaire tombant du sommet F sur le plan ABCD. Par mesme raison seront egales les pyramides ADFC, EFDC, constituees sur les bases egales ADF, EFD, & soubs mesme hauteur, sçauoir de la perpendicul. menee du sommet C sur le plan ADEF. Mais la pyramide ADCF est la mesme que la pyramide ADFC ; puis que l'vne & l'autre est contenuee des 4. plans ADC, ADF, ACF, DCF. Dõc les trois pyramides ABCF, ADCF, EFDC, ou CDEF, composans tout le prisme, sont egales entr'elles: ce qu'il faloit prouuer.

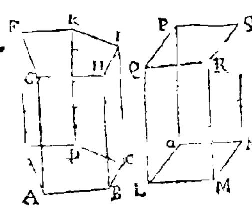
COROLLAIRE. I.

De cecy resulte que tout prisme est triple d'vne pyramide de mesme hauteur, estant sur mesme base, ou sur bases egales, ou bien qu'vne pyramide est la tierce partie d'vn prisme de mesme hauteur, estant sur mesme base, ou sur bases egales.

SCHOLIE.

Nous adiousterons icy la demonstration d'vne autre proposition, touchant les prismes qui ont au sommet les plans parallels à la base, egaux & semblables: ceste proposition est telle.

Les prismes estans sous mesme hauteur, & ayans quelconques bases, sont entr'eux comme leurs bases.



Soient deux prisme de mesme hauteur ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, desquels les bases sont figures multilateres. Ie dis que comme la base ABCDE est à la base LMNO, ainsi est le prisme au prisme. Car si de tous les angles de chasque base, on tire des lignes droictes à vn poinct du plan superieur, qui est opposé à la ba-

se, se feront deux pyramides sous mesme hauteur, ayans mesmes bases que le prisme : Et partant par le coroll. cy dessus, chaque pyram. sera la troisiesme partie de son prisme. Parquoy par la 15. p. 5. comme la pyramide sera à la pyramide, ainsi le prisme sera au prisme : Mais la pyramide est à la pyramide, comme la base à la base, ainsi qu'il a esté demonstré à la 6. p. Donc aussi comme la base sera à la base, ainsi le prisme sera au prisme. Ce qui estoit proposé.

COROLLAIRE II.

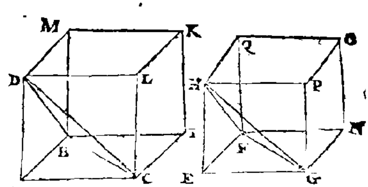
Il est manifeste par ces choses, que les prismes de mesme hauteur, & constituez sur mesme base, ou sur bases egales quelles quelles soient, sont egaux entr'eux, puis qu'ils ont mesme raison entr'eux que leurs bases, lesquelles sont une mesme, ou bien sont egales.

Appert aussi par le contraire, que les prismes egaux, constituez sur une mesme base, ou sur egales, sont en mesme hauteur : Et que les prismes egaux de mesme hauteur, ont aussi mesme base, ou egales. Ce qu'on demonstrera en la mesme maniere qu'a esté demonstré la converse de la 31. p. 11.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Pyramides semblables ayans bases triangulaires, sont en raison triplee de leurs costez homologues.

Soient les deux pyramides semblables ABCD & EFGH, ayās bases triangulaires ABC & EFG : ie dis qu'elles sont en raison triplee des costez de mesme raison AC & EG.

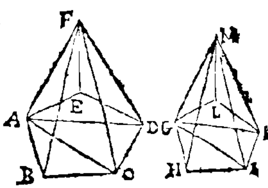


Qu'ainsi ne soit. Soient acheuez les parallelipipedes AK & EO. D'autant que les pyramides sont semblables, les trois costez AD, AB, AC, seront proportionnaux aux trois costez EH, EF, EG, & l'angle solide A egal à l'angle solide E, par la deff. des solides semblables : & par la mesme demonstration qui a esté faicte à la 27.p.11.les deux solides AK & EO seront semblables , ayans les trois costez AB,AD,AC, proportionnaux aux trois costez EF,EH,EG; & les opposez seront aussi proportionaux;&par consequent les six plans proportionaux aux six plans:Mais les 2. solides AK & EO,estans semblables, ils seront en raison triplee de leurs costez homologues AC,& EG,par la 33.p.11 Et côme le solide AK est au solide EO,ainsi la pyramide ABCD est à la pyramide EFGH : (car chacune pyramide est la sixiesme partie de son solide, d'autant que par la 28. p.11. chacun solide peut estre diuisé en deux prismes egaux , & chacun prisme en trois pyramides egales par la 7.p. 12.) & partant la 11.p.5. les pyramides sont aussi en raison triplee des costez de mesme raison AC , & EG. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, qu'aussi les pyramides semblables, desquelles les bases ont plus de trois costez ; sont en raison triplee de leurs costez homologues.

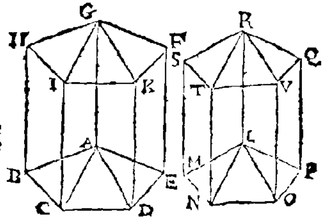
Soient les pyramides semblables ABCDEF,GHIKLM, ayans bases rectilignes semblables de plusieurs costez. Ie dis qu'icelles pyramides sont en raison triplee des costez homologues AB , GH. Car si des angles A & G , on tire aux angles opposez les lignes droictes AC, AD : GI,GK: par la 20 p.6.les bases semblables seront diuisees en nôbre egal de triangles semblables, sçauoir est que les triangles ABC, ACD, ADE,seront semblables aux triangles GHI , GIK, GKL. Donc puis que les pyramides sont semblables : les triangles AFB,GMH,sont



semblables,& l'angle FAB egal à l'angle MGH; & comme FA sera à AB,ainsi MG sera à GH : mais comme AB à AC, ainsi GH à GI, à cause de la similitude des triangles ABC, GHI : donc en raison egale, comme FA sera à AC, ainsi MG sera à GI.Derechef puis que comme AC est à CB, ainsi GI est à IH : à cause de la similitude des triangles ABC,GHI : & comme GB à CF, ainsi IH à IM , puis que à cause de la similitude des pyramides, les triangles BCF, HIM,sont semblables : aussi par raison egale , comme AC sera à CF , ainsi GI sera a IM : & partant puis que comme FA a AC, ainsi MG a GI; & comme AC a CF, ainsi GI a IM : pareillement en raison egale, comme FA sera a FC, ainsi MG a MI. Parquoy par la 5.p.6. les triangles AFC, GMI, seront equiangles, & partant semblables. Mais les triangles AFB, BFC, ABC sont aussi semblab aux triangles GMH HMI, GHI. Donc par la 8.d.11. les pyramides ABCF, CHIM, sont semblables. Par mesme raison seront semblables les pyramides AC DF, GIKM : Item ADEF, GKLM. Parquoy par la 8.p 12. les pyramides ABCF, ACDF, ADEF, seront aux pyramides GHIM, CIKM GKLM, chacune a la sienne, en raison triplee des costez homologues AB, CD, DE, à GH, IK, KL, chacun au sien. Veu donc qu'à cause de la similitude des bases ABCDE, GHIKL, il y a vne seule & mesme raison de AB, CD, DE à GH, IK, KL: aussi les pyramides ABCF, AC DF, ADEF, auront aux pyramides GHIM, GIKM, GKLM, vne seule & mesme raison, c'est à sçauoir triplee. Et par la 12.p.5. comme vne seule pyramide ABCF est a vne seule pyramide GHIM, ainsi toutes les pyramides, sçauoir est la pyramide ABCDEF, est a toutes les pyramides, sçauoir est a la totale GHIKLM. Parquoy puis que par la 8.p.12. la pyramide ABEF est à la pyramide GHIM en raison triplee des costez homologues AB, GH; aussi la pyramide ABCDEF sera à la pyram. de GHIKLM en la raison triplee des mesmes costez homologues AB, GH. Ce qui estoit proposé.

SCHOLIE.

Par mesme raison les prismes semblables sont en raison triplee de leurs costez homologues. Car soient deux prismes semblables ABCDEF GHIK, LMNOPQRSTV: Ie dis qu'ils sont en raison triplee des costez homologues. Car si des angles A & L on tire les lignes AC, AD, LN, LO; par la 10.p.6. les triangles ABC, CAD, DEA, seront semblables aux triangles LMN, LN O, OPL. Semblablement si des angles G & R, on tire les lignes GI, GK. RT, RV; les triangles GHI, GIK, GKF, seront aussi sẽblables aux triangles RST, RTV, RVQ, & aux susdits, puis que par la def. du prisme, tous les plãs opposites des prismes sõt semblab. Et d'autãt qu'à cause de la similitude des prismes, les parallelogrames CH, NS sont semblables; comme CI sera à CB, ainsi TN sera



à NM, mais BC est à CA, ainsi aussi NM est à NL, à cause de la similitude des triangles. Donc par raison egale, comme CI sera à CA, ainsi TN à NL. Derechef pource que l'angle solide N, est egal, à l'angle solide C, à cause de la similitude des prismes, si celuy-cy est superposé à l'autre, l'angle MNO conuiendra à l'angle BCD, & l'angle TNM à l'angle ICB, & l'angle TNO à l'angle ICD. Mais aussi la ligne droicte NL conuient à la ligne CA, pource que les angles MNL, BCA sont egaux. Donc les angles ICA, TNL sont egaux; & partant puis que les costez d'alentour iceux, ont esté demonstrez proportionaux, les parallelogrames CG, NR, seront semblables. Mais aussi les parallelogrames CH, HA sont semblables aux parallelog. NS, SL, & les triangles ABC, GHI, aux triangles LMN, RST. Donc les prismes ABCIGH, LMNTRS, sont semblables, par la 8 def. 11. On demonstrera en la mesme maniere que les prismes CDAGIK, NOLTRV, sont semblables, comme aussi les prismes AEDKGF, LPOVRQ. Parquoy les prismes ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF, par les choses demonstrees à la 34. p. 11 sont aux prismes LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, chacun au sien, en raison triplee des costez homologues BC, CD, DE à MN, NO, OP, chacun au sien. Et partant en la mesme maniere que nous auons demonstré cy dessus des pyramides multangles, on demonstrera que les prismes ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, sont en raison triplee des costez homologues BC, MN.

De toutes ces choses se collige, que les pyramides multangles semblables, se diuisent en pyramides triangulaires semblables, & en nombre egal, & homologues aux toutes. Car cecy est manifeste par la demonstration du preced. corol.

Se collige aussi que les prismes multangulaires semblables, se diuisent en prismes semblables, ayans bases triangulaires, & en nombre egaux, & homologues aux tous, comme appert par la demonstration de ce scholie.

THEOR. 9. PROP. IX.

Des pyramides egales, ayans bases triangulaires; leurs hauteurs sont reciproques aux bases : Et les pyramides ayans bases triangulaires reciproques à leurs hauteurs, sont egales.

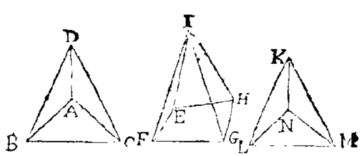
Soient les deux pyramides egales ABCD, & EFGH, ayant bases triangulaires : ie dis que les bases d'icelles sont reciproques a leurs hauteurs, c'est à dire que cóme la base ABC à la base EFG, ainsi la hauteur du point H à la hauteur du point D.

Qu'il ne soit ainsi. Soient acheuez les parallelipipedes AK, EO, & comme en la precedente, il sera euident que chacun d'iceux parallelipipedes sera sextuple de sa pyramide. Et les deux pyramides estans egales, iceux solides AK, EO, seront egauz: & par la 34. p. 11. ils auront les hauteurs reciproques aux bases. (C'est à dire que comme la hauteur du poinct D à la hauteur du poinct H, ainsi la base EN à la base AI) Mais cõme EN à AI, ainsi sa moitié le triangle EFG, à la moitié de AI, sçauoir le triangle ABC; & partant par la 11. p. 5. comme la hauteur du poinct D à la hauteur du poinct H, ainsi le triangle EFG au triangle ABC.

Pour la seconde partie: Si la hauteur du poinct D est à la hauteur du poinct H, comme le triangle EFG, est au triangle ABC: ie dis que les pyramides ABCD, EFGH seront egales. Car il est euident comme cy-dessus que la hauteur du poinct D, sera à la hauteur du poinct H, comme la base EN, à la base AI (d'autant qu'elles sont doubles des triangles EFG & ABC) ainsi les parallelipipedes AK, EO, auront les hauteurs reciproques aux bases: & par la 34. p. 11. ils seront egaux; & par consequent leurs sixiesmes parties seront aussi egales, sçauoir les pyramides ABCD, & EFGH: ce qu'il faloit prouuer.

SCHOLIE.

Les pyramides egales, desquelles les bases ne sont triangulaires, ont aussi les bases & hauteurs reciproques: & les pyramides desquelles les bases ne sont triangulaires, & ont leurs bases reciproques à leurs hauteurs, sont egales.

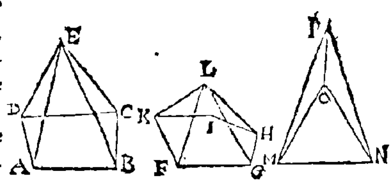


Car soient premierement deux pyramides egales, l'une desquelles ABCD ait la base triangulaire, mais l'autre EFGHI ne l'ait pas. Soit faict le triangle KLM egal à la base non triangulaire EFGH; puis sur iceluy triangle soit construicte la pyramide KLMN, de mesme hauteur que la pyramide EFGHI. Or d'autant que les pyramides EFGHI, KLMN, ont les bases egales, & mesme hauteur; elles seront egales, par les choses demonstrees au scholie de la 6. p. 12. Mais la pyramide EFGHI a esté posee egale a la pyramide ABCD; donc aussi les pyramides ABCD, KLMN, seront egales: Parquoi puis qu'elles ont les bases triangu-

laires, par la 9.p.12. comme la base ABC sera à la base KLM, ou à son egale EFGH, ainsi la hauteur de la pyramide KLMN, c'est a dire la hauteur de la pyramide EFGH, sera a la hauteur de la pyramide ABCD: Et partāt des pyramides egales ABCD, EFGHI, les bases & hauteurs sont reciproques.

Mais maintenant d'icelles pyramides, les bases & hauteurs soient reciproques. Ie dis qu'icelles pyramides sont egales. Car demeurant la mesme construction faicte cy dessus; puis que la base ABC est posee estre a la base EFGH, cōme la hauteur de la pyramide EFGHI est a la hauteur de la pyram. ABCD; aussi la base ABC sera a la base KLM, cōme la hauteur de la pyram. KLMN sera a la hauteur de la pyramide ABCD. Parquoy par la 9.p.12. les pyramides ABCD, KLMN, sont egales. Mais comme nous auons demonstré au scholie de la 6.p.12. la pyramide KLMN est egale a la pyramide EFGHI: donc aussi la pyramide ABCD sera egale a la pyramide EFGHI. Ce qui estoit proposé.

Soient maintenant les pyramides egales ABCDE, FGHIKL, ayans bases multangulaires. Soit faict de rechef le triangle MNO, egal a la base ABCD: & la pyramide MNOP de mesme hauteur que la pyramide ABCDE. Donc par les choses demonstrees au scholie de la 6.p.12. la pyramide MNOP sera egale a la pyramide ABCDE: laquelle a esté posee egale a la pyramide FGHIKL: donc aussi la pyramide MNOP sera egale a la pyramide FGHIKL. Parquoy comme nous auons demonstré cy dessus, ainsi que la base MNO, c'est a dire la base ABCD, sera a la base FGHIK, ainsi la hauteur de la pyramide FGHIKL sera a la hauteur de la pyramide MNOP, c'est a dire a la hauteur de la piramide ABCDE: Et partant des piramides egales ABCDE, FGHIKL, les bases & hauteurs sont reciproques.



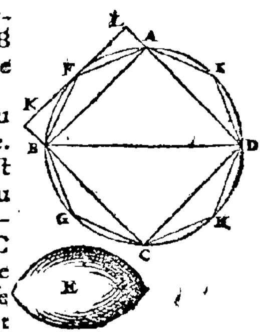
Mais soient maintenant reciproques les bases & hauteurs d'icelles piramides: on demonstrera comme dessus qu'elles sont egales.

Or tout ce que nous auons demonstré cy dessus peut aussi conuenir a quelconques prismes. Car si les prismes estoient egaux, aussi les piramides de mesme hauteur qu'iceux, ayans les mesmes bases, seront egales, puis que d'iceux prismes par le corol. de la 7.p.12. elles sont les tierces parties, ou les deux tierces parties par le scholie de la mesme *prop. Parquoy comme nous auons demonstré n'agueres, les bases & hauteurs d'icelles piramides seront reciproques. Veu donc que ces bases & hauteurs sont les mesmes que des prismes, les bases & hauteurs des prismes seront pareillement reciproques.*

Derechef si les bases & hauteurs des prismes sont reciproques : les bases & hauteurs des piramides aians mesmes bases & hauteurs que les prismes, seront aussi reciproques. Parquoi, comme il a esté demonstré, les piramides sont egales ; & partant aussi les prismes, puis que d'icelles piramides ils sont triples, ou sesquialteres. Ce qui estoit proposé.

THEOR. 10. PROP. X.

Tout cone est la troisiesme partie du cylindre ayant base egale, & de mesme hauteur.



Soit vn cylindre & vn cone, tous deux de mesme hauteur, & ayans vne mesme base, sçauoir le cercle ABCD : Ie dis que le cylindre est triple du cone.

Autrement il sera plus grand, ou plus petit que le triple d'iceluy cone. Soit premierement plusgrãd s'il est possible, sçauoir de la quantité du solide E, c'est à dire que si du cylindre, ayant pour base le cercle ABCD est retranché le solide E, le reste sera triple du cone, ayant pour base le mesme cercle ABCD. Maintenãt dans le cercle soit inscrit le quarré ABCD, diuisé en deux triangles par la diagonalle BD, & sur iceux triangles soient imaginez estre esleuez deux prismes de mesme hauteur que le cylindre : Et parce que le quarré est plus de la moitié du cercle, il est euident qu'iceux deux prismes seront plus de la moitié du cylindre. Que si les segmens restans du cylindre, (les deux prismes estans soustraits) sont encores plus grands que le solide E, sur les bases d'iceux segmens soient faicts les quatre triangles Isosceles AFB, BGC, CHD, DIA, & sur iceux soient imaginez estre esleuez quatre prismes de mesme hauteur que le cone ou cylindre, dont la base est le cercle ABCD. Il est euident qu'iceux triangles isosceles sont plus de la moitié des bases des segmens restans du cylindre ; & par consequent qu'iceux quatre prismes serōt plus de la moitié d'iceux quatre segmens: Que si les huict petits segmens restans du cylindre ne sont plus petits que le solide E, soit tousiours en ceste façon soustrait plus de la moitié de ce qui restera, iusqu'à ce que par la 1.p.10. les segmens restans soient plus petits que le solide E. Et pour abreger soiét iceux huict petits segmens plus petits qu'iceluy solide E: Il est donc manifeste que la colomne composee de ces six prismes, ayant pour base le poligone inscrit au cercle ABCD, & de mesme hauteur que le cylindre donné ; sera plus que triple d'iceluy cone, par ce qui a esté dit cy-dessus. Or d'autant que chacun prisme est triple de sa pyramide de mesme hauteur, & ayant base egale, (car il peut estre diuisé en trois telles pyramides egales par la 7.p.12.) il s'ensuit que tous iceux prismes faisās la colōne ayant pour base le polygone inscrit au cercle ABCD, (c'est à dire icelle colomne de mesme hauteur que le cylindre I) est triple de toutes les six pyramides, faisant la seule pyramide, ayant le mesme poligone pour base, & de mesme hauteur qu'icelle colomne. Partant icelle pyramide sera plus grande que le cone de mesme hauteur, ayant le cercle ABCD pour base: ce qui est impossible, n'estant la pyramide que partie du cone. Donc le cylindre n'estoit pas plus grand que le triple du cone.

Soit donc plus petit, s'il est possible ; sçauoir de la quantité du solide E, c'est a dire que si on retranche le solide E du cone, que le residu soit la troisiesme partie du cylindre. Maintenant du cone, ayant pour base le cercle ABCD, soit retranché plus de la moitié, sçauoir la pyramide de mesme hauteur, ayāt pour base le quarré ABCD, & du residu, sçauoir des quatre segmens F, G, H, I, soit retranché plus de la moitié, sçauoir la pyramide de chacun segment, de mesme hauteur qu'iceluy segment, & ayant pour base le triangle isoscelle en iceluy segment: soit continué ce retranchement iusques à ce que les segmens restans soient plus petits que le solide E: ce qui doit arriuer par la 1.p.10. Soient donc pour abreger iceux huict petits segmens plus petits que le solide E: il est donc euident que la pyramide de mesme hauteur que le cone, ayant iceluy octogone pour base, est plus grād' q̃ le tiers du cylindre dōné, d'autant qu'elle est plus grande que le cone, apres que d'iceluy on a retranché le solide E. Or iceluy cone ainsi rescindé

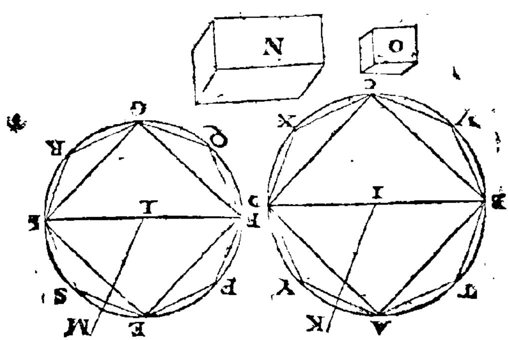
est le

est le tiers du cylindre donné, & la pyramide est aussi, (comme il a esté dit cy-dessus) le tiers de la colomne de mesme hauteur, ayant le mesme octogone pour base: Partant icelle colomne seroit plus grande que le cylindre donné, duquel elle est partie: Ce qui est impossible. Donc le cylindre donné n'estoit ne plus petit, ne plus grand que le triple du cone: il faut donc qu'il soit egal: ce qui estoit a demonstrer.

THEOR. II. PROP. XI.

Les cones & cylindres de mesme hauteur, sont l'vn à l'autre comme leurs bases.

Soient deux cones de mesme hauteur, desquels les bases sont les cercles ABCD & EFGH; les diametres BD & FH leurs axes ou hauteurs IK & LM. Ie dis que comme le cercle



ABCD est au cercle EFGH, ainsi le cone BK est au cone FM; C'est à dire que si on imagine que comme le cercle au cercle ainsi le cone BK à quelque autre solide, comme N: qu'icelluy solide N sera egal au cone FM.

Autrement il sera plus petit ou plus grand: Soit premierement plus petit, & s'il est possible de la quantité du solide O: ainsi les deux solide SN & O seront egaux au cone FM. Maintenant du cone FM comme en la precedente, soit retranché plus de la moitié, sçauoir vne pyramide de mesme

N n

hauteur que le cone, ayant pour base le quarré FGHE: & du residu encores plus de la moitié, sçauoir quatre pyramides de mesme hauteur que le cone, ayans pour base les quatre triangles isosceles EPF, FQG, FQH, GRH, HSE, en continuant tousiours iusques à ce que par la 1. p. 10. le residu soit plus petit que le solide O: & soit iceluy residu pour abreger les huicts petits segmens: il s'ensuit que la pyramide FM de mesme hauteur que le cone FM, & ayant pour base l'octogone EPFQGRHS, sera plus grande que le solide N. Dans le cercle ABCD, soit inscrit vn poligone semblable au poligone inscrit dans la base circulaire EFGH, & sur iceluy soit imaginé estre esleuee vne pyramide de mesme hauteur que le cone BK. Or par le corol. de la 2 p. 12. comme le cercle ABCD est au cercle EFGH, ainsi le polygone TVXY est au polygone PQRS: mais comme le cercle ABCD au cercle EFGH, ainsi le cone BK est au solide N, & par la 6. p. 12. comme le poligone au poligone, ainsi la pyramide à la pyramide de mesme hauteur que les cones: & partant par la 11. p 5 la pyram. ATBVCXDYK sera à la pyramide EPFQGRHSM, comme le cone BK au solide N. Mais la pyramide ATBVCXDYK est plus petit que le cone BK, la partie que le tout: Donc aussi par la 14 p. 5. la pyramide EPFQGRHSM sera moindre que le solide N. Mais elle a esté demonstrée aussi plus grande: ce qui est absurde. Donc le solide N n'estoit pas plus petit que le cone FM, puis que le posant tel, il nous a conduit à absurdité.

Soit donc plus grand s'il est possible: & soit en changeant comme le solide N au cone BK, ainsi le cercle EFGH au cercle ABCD: & comme iceluy solide N au cone BK, soit aussi le cone FM à quelque autre solide, comme O: Et par la 14. p 5. puis que le solide N est plus grand que le cone FM, aussi le cone BK sera plus grand que le solide O. Parquoy puis que comme le cercle EFGH est au cercle ABCD, ainsi le solide N est au cone BK: par la 11. p. 5. comme le cercle EFGH est au cercle ABCD, ainsi le cone FM au solide O, plus petit que le cone BK: ce que tantost nous auons monstré estre impossib. Donc le solide N n'est pas plus grand ne plus petit que le cone FM, ains egal. Parquoy puis qu'on a posé la base ABCD estre à la base ABCD estre a la base EFGH, ainsi que le cone ABCDK au solide N: & par la 7 p. 5. comme le cone ABCDK est au solide N, ainsi est le mesme cone ABCDK au cone EFGHM: pareillement comme la base ABCD sera à la base EFGH, ainsi le cone ABCDK sera au cone EFGHM.

Ce que nous auons prouué des cones de mesme hauteur, se doit aussi entendre des cylindres de mesme hauteur : d'autant que par la 10. p. 12. le cylindre est triple de son cone de mesme hauteur, & ayant base egale. Que si le cone est au cone comme la base à la base, aussi le triple du cone sera au triple du cone, comme la base à la base par la 15. p. 5. c'est a dire le cylindre au cylindre, comme la base a la base. Donc les cones & cylindres de mesme hauteur sont entr'eux comme leurs bases. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

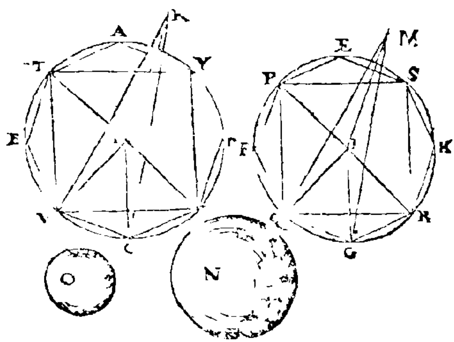
De cecy resulte que les cones & cylindres de mesme hauteur, constituez sur mesme base ou sur bases egales, sont aussi egaux.

THEOR. 12. PROP. XII.

Les cones & cylindres semblables, sont l'vn à l'autre en raisō triplee des diametres de leurs bases.

Soient semblables cones & cylindres, ayans pour bases les cercles ABCD, EFGH, mais les axez d'iceux soient IK, LM; & les diametres des bases TV, PR. Ie dis que le cone duquel la base est le cercle ABCD, mais le sommet K, est au cone ayant pour base le cercle EFGH, & pour sommet le poinct M, en raison triplee du diametre TX au diametre PR, c'est à dire que si on imagine comme aux precedentes, que le cone ABCDK soit à quelque solide, comme à N, en raison triplee du diametre TX au diametre PR. Ie dis que le solide N est egal au cone EFGHM.

Autrement il sera plus grand ou plus petit. Soit premierement plus petit, sçauoir de la quantité du solide O: Donc les deux solides O & N seront egaux au cone EGHM: & comme en la precedente soit faicte detraction de plus de la moitié du cone EFGHM, & du residu encore plus de la moitié, iusques à ce que par la 1. p. 10. les restes (c'est à sçauoir pour abreger les huict petits segmens, qui sont à l'entour de la pyramide à la base octogone EPFQGRSM, ou de plus s'il est besoin) soient plus petits que le solide O: Il est euident qu'icelle pyramide à la base poligone FM, sera plus grande que le solide N. Maintenant dans le cercle ABCD soit inscrit vn mesme poligone que le plus grand qui soit inscrit au cercle EFGH, sçauoir ATBVCXDY:& sur iceluy soit imaginé estre esleuee vne pyramide de mesme hauteur que le cone BK, & ayant tiré les lignes VI, CI; QL,GL; soient menees les lignes QM, CM; VK, CK, afin d'auoir les deux pyramides VCIK,QLGM. Il est manifeste que la pyramide ATBVCXDYK est composee d'autant de pyramides egales, qu'il y a de costez au poligone inscrit dans le cercle, (c'est à sçauoir qu'icelle pyramide totale VICK est composee de huict pyramides egales & semblables à la pyramide de mesme hauteur que la to-



tale.) Le mesme se peut dire que l'autre pyramide totale EPF QGRHSM est composee de huict pyramides egales & semblables a la pyramide QLGM, de mesme hauteur que sa totale. Mais d'autãt que les cones BK & FM sont semblables par la definition des cones semblables, comme le diametre TX est au diametre PR; & partant par la 15. p. 5. comme le demy diametre VI est au demy diametre QL, ainsi l'axe IK est à l'axe LM: & en permutant comme le demy diametre VI sera à l'axe IK, ainsi le demy diametre QL est à l'axe LM:& les angles VIK & QLM estans droicts, (car les cones sont posez droicts; & par consequẽt les axez d'iceux, sont aussi a droicts angles sur leurs bases) par la 6. p. 6. le triangle VIK sera equiangle au triangle QLM. Item CIK sera aussi equiangle à GLM, & par la 4. p. 6. ils auront les costez proportionaux,& seront semblables. Item VI est a CI comme QL à GL, (estãs chacun egaux) & l'angle I egal à l'angle L; (ayans chacun la huictiesme partie de sa circonference pour base)& partant par la 6.p.6. les triangles VIC , QLG , seront equiangles: partant semblables . Item VC est a VI, comme QG a QL, d'autant que les triangles VIC, & QLG sont semblables) & pour la mesme raison VI est VK comme QL à QM ; & en raison egale VC sera à VK comme QG à QM. Et par mesme discours VC est à CK,comme QG à GM:Et les egales VK & CK,seront l'vne à l'autre , comme les egales QM à GM : Et partant par la 5 p.6. les triangles VKC,QMG,seront equiágles,& semblables: & par la deff. des pyramides semblables, les deux piramides VICK,& QLGM, seront semblables: Et par la 8.p.12. elles seront en raison triplee de leurs costez homologues, sçauoir des demy diametres VI & QL. Par mesme discours on prouuera les sept autres pyramides de la totale ATBVCXDYK,proportioneles à vne chacune de sept autres pyramides de la totale EPFQGRHSM : Et partant par la 12. p.5. Les toutes seront aux toutes, comme l'vne d'icelles est à l'vne d'icelles : C'est à dire que toute la pyramide BK est à toute la pyramide FM,en raison triplee du demy diametre VI au demy diametre QL, ou bien du diametre TX, au diametre PR; puis que comme VI est a QL , ainsi TX est à PR, par 15.p 5.Mais par nostre hypothese le cone BK est au solide N, aussi en raison triplee des deux diametres TX, PR: Et partant par la 11.p.5. le cone BK sera au solide N, comme la pyramide ABVCXDYK à la pyramide EPFQGRHSM. Parquoy puis que le cone BK est plus grand que la pyramide BK, le tout que la partie, aussi par la 14. p. 5. le solide N sera plus grand que la pyramide FM: & il a esté demonstré estre aussi moindre. Ce qui est absurde. Donc le solide N n'estoit pas plus petit que le cone FM , puis que le posant tel il nous á conduit à l'absurdité.

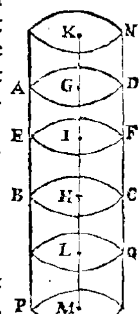
Soit donc maintenant le solide N plus grand que le cone EFGHM, s'il est possible. D'autant qu'on a pose que le cone ABCDK est au solide N en raison triplee du diametre TX au diametre PR, & la pyramide BK est à la pyramide FM en raison triplee des mesmes diametres,comme nous auons demóstré,par la 11.p.5.comme le cone BK sera au solide N, ainsi la pyramide BK à la pyramide FM : & en changeant comme N au cone BK,ainsi la pyramide FM à la pyramide BK Parquoy puis que par le corol.de la 8.p.12.la pyramide FM est à la pyramide BK en raison triplee des costez homologues QG à VC : c'est à dire du diametre PR au diametre TX : pareillement le solide N sera au cone BK en raison triplee des mesmes diametres PR à TX. Soit posé que comme N est au cone BK, ainsi le cone FM au solide O. Donc aussi le cone FM sera au solide O en raison triplee du diametre PR au dia. TX. Et puis que le solide N a esté posé plus grand que le cone FM: par la 14. p. 5 le cone BK sera aussi plus grand que O Parquoy le cone FM sera au solide O moindre que le cone BK, en raison triplee du diametre PR au dia. TX: ce qui est absurde. Car il a esté demonstré cy dessus qu'vn cone ne peut estre à vn solide moindre qu'vn autre cone, en raison triplee des diametres des bases d'iceux cones. Donc le solide N n'est pas plus grand ny plus petit que le cone EFGHM: il est donc egal. Parquoy par la 7. p. 5. le cone ABCDK a mesme raison au cone EFGHM qu'au solide N. Et partant puis qu'on a posé le cone ABCDK estre a N en raison triplee des diametres TX & PR: le cone ABCDK sera aussi au cone EFGHM en la raison triplee des mesmes diametres.

Ceste preuue se doit aussi entendre des cylindres semblables: car leurs cones estans en raison triplee des diametres, par la 15. p 5. Les cylindres qui sont triples d'iceux cones, seront aussi l'vn à l'autre en raison triplee de leurs diametres.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si vn cylindre est couppé par vn plan parallel, aux plans opposez d'iceluy cylindre: les segmens du cylindre sont l'vn à l'autre comme les segmens de l'axe.

Soit le cylindre ABCD, couppé par le plan EF, parallel aux deux plans opposez AD & BC, lequel couppe l'axe GH en I. Ie dis que le segment de cylindre AEFD, est au segment de cylindre EBCF, comme l'axe GI, est à l'axe IH

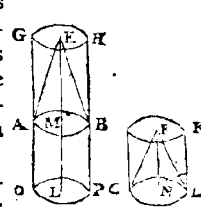


Qu'il ne soit ainsi: apres auoir continué l'axe GH de part & d'autre, soit faicte GK egale à GI: & de l'autre costé HL, LM egales à IH: Et soit imaginé le cylindre ABCD, continué d'vn costé iusques au poinct K, & de l'autre iusques au poinct M. Il est euident que tous les cylindres AN, ED, BF, BO, PO, sont tous sur bases egales;

& par le corol. de la 11. prop. 12. les deux qui ont les axes egaux GK, GI, (c'est à dire qui sont de mesme hauteur sont egaux entr'eux : Item les trois BF, BO, PO, estans de mesme hauteur, sont aussi egaux entr'eux : Ainsi il est euident que l'axe IK est autant multiplice de l'axe IG, que le cylindre EN, est multiplice du cylindre ED : Pareillement que l'axe IM est autant multiplice de l'axe IH, que le cylindre PF, est multiplice du cylindre BF; & partant si l'axe IK (multiplice de IG premiere grandeur) est egal, plus grãd, ou plus petit que l'axe IM, (multiplice de IH seconde grandeur) aussi le cylindre EN (multiplice du cylindre ED troisiesme grandeur) sera egal, plus grand, ou plus petit que cylindre F, (multiplice du cylindre BF 4. grandeur) & ce en quelcõque multiplication: & partant par la 6.d.5. l'axe GI sera à l'axe IH, comme le cylindre ED au cylindre BF. Ce qui estoit à demonstrer.

THEOR. 14. PROP. XIIII.

Les cones, & cylindres ayans bases egales, sont l'vn à l'autre, comme leurs hauteurs.



Soient sur bases egales AB, CD, les deux cones ABE, CDF; & les deux cylindres ABGH, CDIK, desquels les axes & hauteurs soient ME, NF. Ie dis que le cone ABE est au cone CDF; & le cylindre ABGH au cylindre CDIK, comme la hauteur ME est à la hauteur NF.

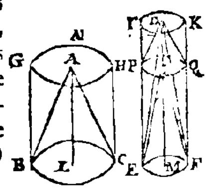
Qu'il ne soit ainsi: Soit continué l'axe EM, iusques au poinct L, & soit faicte ML egale à FN; & soit imaginé le cylindre AH continué iusques au plan OP parallel à AB, & passant par le poinct L. Et d'autant que le plan AB couppe le total cylindre OPGH, estant parallel aux deux plans opposez OP, GH par la 13.p. 12. les cylindres AH, AP, seront l'vn à l'autre comme les axes EM & ML: Mais ML est egal à FN, & la base AB egale à la base CD: Donc par le corol. de la 11. p.12. le cylindre AP sera egal au cylindre Ck: Partant comme EM sera à NF, ainsi le cylindre AH au cylindre Ck. Et d'autant que par la 10 p.12. les cones ABE, CDF, sont tierces

Nn iiii

parties des cylindres AH, Ck; ils aurőt mesme raison qu'iceux cylindres, par la 15. p. 5. Et partant le cone ABE sera pareillement au cone CDF, comme la hauteur ME à la hauteur NF. Donc les cones & cylindres constituez sur bases egales, sont entr'eux, comme leurs hauteurs. Ce qui estoit à demonstrer.

THEOR. 15. PROP. XV.

Aux cones, & cylindres egaux; les hauteurs sont reciproques aux bases: Et les cones & cylindres sont egaux, desquels les hauteurs sont reciproques aux bases.



Soient egaux les cones ABC, DEF; & les egaux cylindres BGHC, EIKF, desquels les bases soient BC, EF; leurs axes ou hauteurs AL, DM. Ie dis que les bases sont reciproques aux hauteurs; c'est à dire que comme la base BC est à la base EF, ainsi la hauteur DM à la hauteur AL.

Car premierement si DM est egale à AL; les cylindres estãs egaux, il est euident par la 11. p. 12. que la base sera egale à la base. Que si MD est plus grande que AL, soit retranchee MO egale à AL; Et soit couppé le cylindre Ek, par le plan PQ, parallel a EF, & passant par le poinct O. Donc par la 14. p. 12. le cylindre Ek sera au cylindre EQ, comme la hauteur MD a la hauteur MO: & partant par la 7. &. 11. p. 5. le cylindre BH egal à iceluy Ek, sera au cylindre EQ, comme MD est a MO: & par la 11. p. 12. comme le cylindre BH est au cylindre de mesme hauteur EQ, ainsi la base BC a la base EF: Et partant par la 11. p. 5. comme la base BC, a la base EF, ainsi la hauteur MD a la hauteur MO, ou LA son egale. Donc les cylindres egaux BH, Ek ont les bases & les hauteurs reciproques.

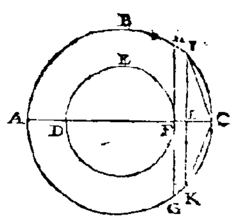
Par mesme discours on prouuera que les bases & hauteurs des cones egaux ABC, DEF, sont reciproques; si on cőstruit deux cones sous les hauteurs MO, OD, comme appert en la figure.

Maintenant soient les bases reciproques aux hauturs: Ie dis que les cylindres BH & EK sont egaux. Car ayant construict comme dessus,puis que la base BC,est à la base EF,cóme la hauteur MD , à la hauteur LA, ou MO son egale: Et par la 11.p 12.comme la base BC,a la base EF,ainsi le cylindre BH au cylindre de mesme hauteur EQ; Item par la 14.p.12. comme la hauteur MD à la hauteur MO,ainsi le cylindre EK au cylindre EQ: par la 11.p.5. Les deux cylindres BH & EK, auront mesme raison au troisiesme EQ, l'vn comme l'autre: Et par la 9.p.5.ils seront egaux.

Quant aux cones qui ont aussi leurs bases & hauteurs reciproques,ils seront par le mesme discours demonstrez egaux. Ce qui est toutesfois assez euident, puis qu'ils sont par la 10. p.12. tierces parties des cylindres.

PROBL. I. PROP. XVI.

Deux cercles inegaux estans à l'entour d'vn mesme centre; inscrire au plus grand cercle vn polygone equilateral, ayant le nombre des costez pair, & lequel ne touche point le plus petit cercle.



Soient deux cercles inegaux ABC, & DEF, tous deux sur vn mesme centre: Il faut dans le plus grand ABC, inscrire vn polygone equilateral,duquel les costez soiét nombre pair,& ne touchent point la circonference du plus petit cercle DEF.

Soit mené par le centre d'iceux cercles le diametre commun AC, couppant le petit cercle au poinct F: Et d'iceluy poinct soit meneeHFG perpendiculaire au diametre DF, rencontrant la circonference du grand cercle aux poincts H & G: & laquelle touchera le cercle DEF en F par le corol.de la 16.p.3. Item soit couppee la demie circonference ABC en deux egalement; Et la moitié encores en deux egalement, en continuant tousiours iusques à ce qu'on vienne à vn arc plus petit que l'arc HC: ce qui est possible par la 1.p 10. Soit donc iceluy plus petit arc IC, & soit tiree la ligne droicte subtendante IC. Ie dis qu'icelle ligne droicte IC est vn costé du polygone requis. Car puis que le demy cercle & autres arcs d'iceluy ont tousiours esté diuisez par moitié iusques à l'arc IC : il est euident qu'iceluy arc est contenu precisément certain nombre de fois en la circonference du cercle, & en nõbre pair; & par consequent que la ligne droicte IC sera certain nombre de fois egalement dans iceluy cercle ABC, & en nombre pair. Partant sera descrit dans le cercle ABC vn polygone equilateral & de costez pair. Et qu'il ne touche le cercle DEF, on le demonstre ainsi : De I soit menee IK perpendiculaire à AC, couppant icelle AC en L. D'autant que les angles HFC, ILF sont droicts, les lignes GH, IK seront paralleles par la 28. p. 1. Parquoy puis que la ligne droicte GH touche le cercle DEF au seul poinct F ; la ligne droicte IK sera totalemẽt hors iceluy cercle, & ne le peut iamais toucher, puis que iamais elle ne conuiendra auec la ligne droicte GH: Donc a plus forte raison la ligne droicte IC, qui est moindre & plus esloignee d'iceluy cercle que IK, ne le touchera pas; ny partãt aussi les autres costez du polygone inscrit, puis qu'il sont egaux a IC, & par consequent egalemẽt distans du centre d'iceluy cercle par la 14. p. 3.

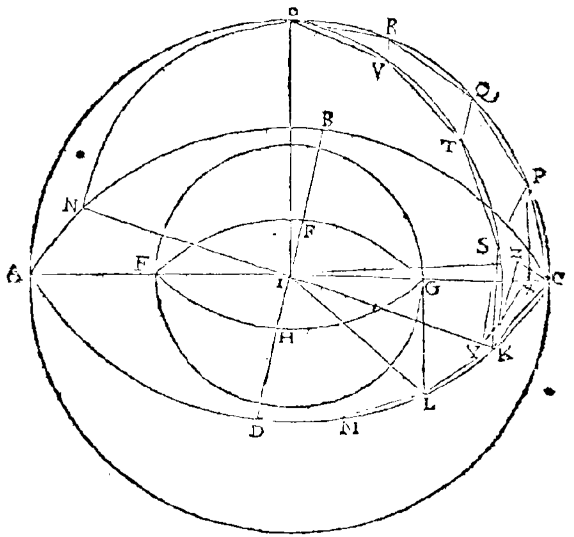
COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, que si a l'extremité du costé du poligone inscrit, lequel conuient auec le diametre, on tire vne ligne perpendic. a iceluy diametre, qu'elle ne peut toucher le moindre cercle, mais que elle tombera toute dehors. Car telle est la ligne IK, *laquelle du poinct* I *extreme du coste* IC *conuenant auec le diametre AC, est tiree perpendiculairement sur iceluy diametre AC. & a esté demonstré qu'elle ne touche pas le cercle* DEF.

PROB. 2. PROP. XVII.

Deux spheres inegales estans sur vn mesme centre; inscrire en la plus grande vn polyedre, duquel les plans ne touchent point la superficie de la petite sphere.

Soient les deux spheres inegales ABCD , EFGH, alentour d'vn mesme centre I : & il faut dans la plus grande ABCD inscrire vn solide polyedre ou de plusieurs costez, lequel ne touche la superficie de la moindre sphere EFGH.



Soient les deux spheres couppees par quelque plan passant par le centre I : il est euident par la def. de la sphere,(qui est faicte par la circonduction du demy cercle) que les communes sections seront cercles, & les plus grands de toute la sphere : d'autant qu'ils ont pour diametre le diametre de la sphere, puisque le plan couppant passe par le centre de la sphere: soient dõc icelles communes sections, sçauoir en la plus grande sphere, le cercle ABCD, & en la plus petite, le cercle EFGH: & soient leurs diametres AC & BD se couppans en angles droicts au centre I : Et dans le cercle de la plus grande sphere ABCD , soit inscrit vn polygone , ne touchant point le moindre cercle EFGH, par la 16.p.12. Duquel les costez de la quarte CD, soient Ck, kL, LM, MD: Et soit menee la ligne KI, continue e iusques au poinct N : Item par la 12.p.11. du cẽtre I soit mene IO perpendiculaire sur le plan des cercles AB CD, EFGH, rencontrant la superficie de la plus grande sphere en O : Pareillement par les lignes AC,IO,& Nk,OI,soiét tirez les plans AOC,NOk. Ils feront (par ce qui a esté dit cy dessus) les demy cercles AOC,NOK, tres-grands en la sphere, (d'autant que leurs diametres passent par le centre I :) Et d'autant que la ligne IO est esleuee perpendiculairement sur le plan du cercle ABCD, les deux demy cercles AOC, NOk, seront par la 18.p.11. esleuez perpendiculairement sur le plan d'iceluy cercle. Et puis que les trois demy cercles ADC, AOC, NOk sont egaux (ayans les diametres egaux) aussi leurs moitiez seront egales, sçauoir les quartes DC,OC,Ok : Partant autant qu'il y aura de costez du poligone en la quarte DC, on en pourra inscrire autát en chacune des quartes OC, Ok. Soient iceux CP,PQ,QR,RO ; & KS, ST, TV, VO : & soient menees les lignes SP,TQ, VR : Item des poincts P & S soiét menees par la 11. p.11. les perpendiculaires PX,SY : par la 38.p.11. elles tomberont sur les lignes IC, IK, qui sont les communes sections des quarts de cercles IOC, IOK, esleuez perpendiculairement sur le quart IDC. Soit aussi menee la ligne XY. Maintenant puis que les arcs & les cordes PC & SK sont egales : les angles PXC,SYK droicts, & les angles PCX SKY egaux : car ils insistent sur les peripheres egales AOP, NOS : les deux angles PCX,PXC du triangle PCX, & le costé PC, sont egaux aux deux angles SKY, SXK, & au costé SK du triangle SKY : partant par la 26. p. 1. les autres costez PX,XC seront egaux aux autres costez SY,YK. Parquoy puis que les deux diametres AC, NK sont egaux : & les segmens XC,YK aussi egaux ; les segmens AX,NY seront pareillemét egaux : partant comme IX est a XC, ainsi IY est a YK : & par la 2 p.6. YX sera parallele a KC. Item les deux perpendiculaires PX,SY estans egales, sont aussi paralleles par la 6. p.11. & par la 33.p.1. SP,YX, seront egales & paralleles : & par la 9. p.11. SP & KC seront paralleles, & par la 7 p.11. SK & PC seront au mesme plan d'icelles. Partant tout le quadrilatere CKSP, est en vn mesme plan. Par mesme discours on monstrera aussi que les quadrilateres TP, VQ, & le triangle VOR ont chacun toutes leurs parties en vn mesme plã. Que si des points O,P,R,S,T, V, on imagine des lignes menees vers le centre I, on se representera vne figure solide, comprise entre OC & OK, composee de quatre pyramides, desquelles le sommet est au centre I, & leurs bases sont les quadrilateres SC, TP, VQ, & le triangle VOR : Et si on construict pareillement sur les costez KL,LM, & MD, comme on a faict sur CK : Et semblablement sur toutes les autres quartes, on aura inscrit vn poliedre en la sphere donnee.

Ie dis d'auantage qu'iceluy polyedre ne touche la petite sphere EFGH. Car si du centre I on meine la ligne IZ perpendiculaire sur le plan SC: Ie dis qu'elle sera plus grãde que IG demy diametre de la petite sphere.

Car ayant pour l'inscription du poligone tiré du poinct G la ligne GL perpendiculaire à AC, laquelle est manifestement plus grande que CK costé d'iceluy polygone inscrit, soit tiree IL; & aussi CZ, KZ. D'autant que par la 2.d.11. les angles IZC, IZK sont droicts, le quarré de IC sera egal aux quarrez de IZ, CZ, & le quarré de IK egal aux quarrez de IZ, ZK: Parquoy les quarrez des demy diametres egaux IC, IK, estans egaux, les quarrez de IZ, CZ, seront egaux aux quarrez de IZ ZK: ostant donc le quarré de IZ commun, resteront egaux les quarrez de CZ, KZ; & par consequent les lignes CZ, KZ sont egales. On demonstrera en la mesme maniere, estant tirees des lignes de Z à P & S, qu'elles seront egales, tant entr'elles qu'à icelles CZ, KZ: Parquoy si du centre Z, & de l'interuale de l'vne d'icelles, on descrit vn cercle il circonscrira le quadrilatere CKSP: duquel les trois costez CK, CP, KS qui soustiennẽt arcs egaux de cercles eg. estãs eg. & l'autre costé SP plus petit; (car les triang. ICK, IXY estans semblables, & le costé IC plus grand que le costé IX, aussi le costé CK sera plus grand que le costé XI, qui a esté demõstré egal à SP) il est euident que l'angle CZK sera plus grand qu'vn droict; & par consequent le plus grand du triangle CZK; & par la 19 p.1. CK sera plus grand costé que CZ. Parquoy GL estant plus grande que CK, sera aussi plus grande que CZ; & par consequent le quarré de GL plus grand qu'iceluy de CZ. Et d'autant que par la 47. p.1. les quarrez de IG & GL, sont egaux aux quarrez de IZ, CZ, (estans chacuns egaux au quarré du demy diametre de la grande sphere, d'autant que les triangles IGL, ICZ sont rectangles) & le quarré de GL, est plus grãd que le quarré de CZ; le quarré de IZ, sera plus grand que le quarré de IG; & par consequent la ligne IZ, plus grande que la ligne IG. Le plan CKSP ne touche donc pas la petite sphere EFGH. On prouuera par mesme raison que tous les autres plans du polyedre inscrit en la grãde sphere ne touchent pas la petite spere EFGH. Donc estans donnees deux spheres inegales alentour d'vn mesme centre, nous auons inscrit en la plus grande vn polyedre, qui ne touche pas la superficie de la petite sphere. Ce qu'il falloit faire.

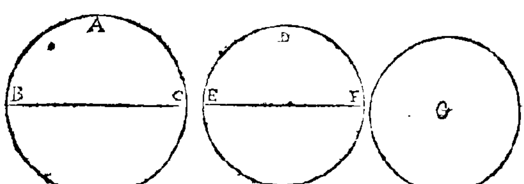
COROLLAIRE.

Des choses cy dessus demonstrees, resulte que si en vn autre sphere, on inscrit vn polyedre séblable au polyedre cy dessus descrit, qu'iceux polyedres seront en raison triplee des diametres des spheres, ausquelles ils seront inscrits. Car iceux polyedres estans semblables par la deff. des solides semblables, ils auront en leur conuexité autant de plans semblables l'vn comme l'autre: partant ils se pourront diuiser en autant de pyramides semblables l'vn comme l'autre, ayant toutes le demy diametre de leur sphere pour vn de leurs costez: Partant prises vne à vne, elles seront en raison triplee des costez homologues, sçauoir est des demy diametres des spheres, par le corol. de la 8 p 12. Et les toutes aux toutes, pareillement en raison triplee des mesmes demy diametres, par la 12. p. 5. Et par la 15. p. 5. en raison triplee des diametres entiers.

THEO. 16. PROP. XVIII.

Les spheres sont l'vne à l'autre, en raison triplee de leurs diametres.

Soient les deux spheres ABC, DEF, desquelles les diametres sont BC, EF. Ie dis qu'elles sont l'vne a l'autre en raison triplee du diametre BC, au diametre EF: C'est a dire que si



on imagine que comme la raison triplee de BC à EF, ainsi la sphere BAC, a quelque autre sphere, comme G: icelle sera egale a la sphere DEF.

Autrement elle sera plus grande ou plus petite. Soit premierement la sphere G, plus petite que la sphere DEF, s'il est possible : Elle pourra estre enfermee dans icelle, si on les met toutes deux sur vn mesme centre : Et partant dans la sphere DEF, peut estre inscrit vn polyedre qui ne touchera point la plus petite sphere G par la 17. p. 12. Et dedans l'autre sphere pourra estre pareillement inscrit vn semblable polyedre par la mesme prop. Et par le corol. d'icelle, ce polyedre cy sera a celuy-la, en raison triplee du diametre BC, au diametre EF: mais en telle raison, la sphere BAC est posee estre a la sphere G, & par la 11. p 5. comme la sphere BAC, a la sphere G, ainsi le polyedre de la sphere BAC, sera au polyedre de la sphere DEF. Or la sphere BAC, est plus grande que son polyedre, n'estant que partie d'icelle : donc par la 14. p. 5. la sphere G est plus grande que le polyedre de la sphere DEF : ce qui est impossible, n'estant que partie d'iceluy. Donc la sphere BAC, ne peut estre en raison triplee des diametres BC & EF, a vne autre sphere plus petite que DEF.

Soit donc la sphere G plus grande que DEF, s'il est possible : Et puis qu'on a posé que comme la sphere ABC a la sphere G, ainsi la raison triplee du diametre BC au diametre EF ; en changeant la sphere G sera a la sphere BAC, en raison triplee du diametre EF, au diametre BC. Item on peut imaginer que comme la sphere G a la sphere BAC, ainsi la sphere DEF, a vne quatriesme proportionele : laquelle sera plus petite que BAC par la 14. prop. 5. d'autant que G est posee plus grande que DEF : Et partant icelle quatriesme pourra estre inscrite en la sphere BAC : Et si par la 11. p. 5. la sphere DEF, sera à icelle quatriesme inscrite dans BAC, en raison triplee du diametre EF au diametre BC, ce que nous auons demonstré estre impossible. Donc la sphere G, n'a peu estre plus grande, ne plus petite que la sphere DEF, mais egale : & par consequent les spheres sont l'vne à l'autre en raison triplee de leurs diametres.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, qu'vne sphere est à vne sphere, comme le polyedre descrit dans celle-là, est au polyedre semblable descrit en ceste *cy: pource que tant les ſpheres que les polyedres ſont en raiſon triplee des diametres d'icelles ſpheres, comme il a eſté demonſtré.*

Fin de l'Element douzieſme.

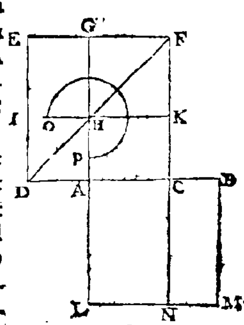
ELEMENT

ELEMENT TREIZIESME.

THEOR. 1. PROP. I.

SI vne ligne droicte est couppee en la moyenne & extreme raison : le quarré de la moitié de la toute, & du plus grand segmēt comme d'vne seule ligne, est quintuple du quarré de la moitié d'icelle ligne totale.

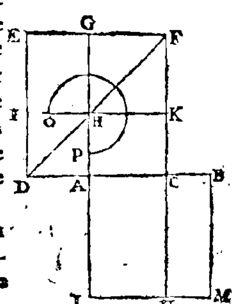
Soit la ligne AB, couppee en la moyenne & extreme raison au poinct C, à laquelle on adiouste AD, ligne egale à la moitié de la totale AB: ie dis que le quarré de DC est quintuple du quarié de DA.



Car soit descrit sur CD le quarré CE, & tiré le diametre DF; puis soit menee AG parallele à DE, couppāt le diametre DF en H, par lequel poinct soit tiree IK parallele à CD En apres ayant prolongé GA & accomply le quarré AM, soit produite FC iusques en N. Premierement par le corol. de la 4.p.2. les quadrilateres AI, GK seront quarrez des lignes DA, AC. Et puis que AB est couppee en la moyenne & extreme raison en C, comme AB sera à AC, ainsi AC est à CB; & par la 17.p.6. le rectangle CM, soubs AB, CB, est egal au quarré de AC, sçauoir GK. Et puis que AB est posee double de DA; & AL est egale à icelle AB, & AH à AD; aussi AL sera double de AH. Mais comme AL est à AH, ainsi le rectangle AN est au rectangle AK, par la 1.p 6. Donc AN est double de AK. Et puis que par la 43.p 1. AK est egal à IG; AN sera egal aux deux IG, AK; adioustant donc ces egaux, aux egaux CM, KG, le quarré AM sera egal au gnomon OP. Parquoy puis que par le scholie de la 4.p 2. le quarré AM est quadruple du quarré AI, aussi le gnomon OP sera quadruple du mesme quarré AI: & partant si au gnomon OP est adiousté le quarré AI; CE quarré de DC sera quintuple de AI quarré de DA. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 2. PROP. II.

Si le quarré d'vne ligne, est quintuple du quarré d'vne partie d'icelle: le double d'icelle partie estant couppee en la moyenne & extreme raison, le plus grand segment sera l'autre partie de la donnee.



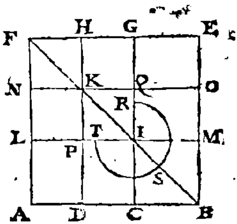
Soit la ligne DC diuisee au poinct A, en sorte que le quarré de la toute sçauoir EC, soit quintuple du quarré de la plus petite partie DA, sçauoir AI: & soit prise AB double d'icelle AD: Ie dis que si on diuise AB en la moyenne & extreme raison, que le plus grand segment sera AC, autre partie de la totale DC.

Car ayant acheué la construction comme en la precedente: les quadrilateres AI, GK seront quarrez par le corol de la 4. p.2. Et puis que AB, c'est à dire AL, est double de DA, ou

AH son egale, le rectangle AN sera double du rectangle AK par la 1.p.6. ou egal aux deux AK, IG qui sont egaux par la 43.p.1 Or par le scholie de la 4.p.2. le quarré AM est quadruple du quarré AI ; & le quarré EC est quintuple du mesme par l'hypothese: Il est donc euident que le quarré AM est egal au gnomon OP, duquel les deux rectangles AK, IG, sont egaux au rectangle AN. Il faut donc que le rectang CM, soit egal au quarré GK, faict sur vne ligne egale à AC : & partant par la 17.p.6. comme BM, c'est à dire AB est à AC, ainsi AC à CB. Parquoy par la 3.d 6. la ligne AB sera couppee en la moyenne & extreme raison au poinct C : & AC autre partie de la totale DC, est le plus grand segment d'icelle. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 3. PROP. III.

Si vne ligne droicte est couppee en la moyenne & extreme raison ; le quarré du plus petit segment & de la moitié du plus grand segment comme d'vne seule ligne, est quintuple du quarré de la moitié du plus grand segment.



Soit la ligne AB, couppee en la moyenne & extreme raison au poinct C, de laquelle le plus grand segment AC est couppé en deux egalement en D: ie dis que le quarré du petit segment & de la moitié du grand BD, est quintuple au quarré de la moitié du grand segment DC.

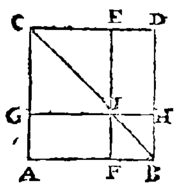
Qu'il ne soit ainsi : sur AB soit descrit le quarré AE, & ayãt mené son diametre BF, des points C & D, soient menees CG, DH paralleles à AF ; couppans le diametre BF és poincts I & K, par lesquels soient menees LM, NO paralleles à AB, lesquelles couppent CG, DH en P & Q: Et par le corol. de la 4.p.2. les quadrilateres LG, PQ, DO seront quarrez des lignes AC, CD, DB: ie dis donc que le quarré DO est quintuple au quarré PQ.

Car puis que comme AB à AC, ainsi AC à CB, par la 17.p.6.

le rectangle des extremes AB & CB (sçauoir AM) est egal au quarré de la moyẽne AC, sçauoir LG, lequel estát par le scholie de la 4. p. 2. quadruple du quarré PQ, le rectangle AM sera aussi quadruple de PQ: mais AP & DI estans sur bases egales, sont egaux par la 1. p. 6. Et DI estant egal à IO, par la 43. p. 1. le gnomon RST sera egal au rectangle AM quadruple du quarré PQ: ainsi il est euident que le quarré DO, est quintuple du quarré PQ. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 4. PROP. IIII.

Si vne ligne droicte est couppee en la moyenne & extreme raison, le quarré de la toute, & le quarré du petit segment ensemble, sont triples du quarré du plus grand segment.



Soit la ligne AB, couppee en la moyenne & extreme raison au poinct F: ie dis que le quarré de la toute AB, & le quarré de FB plus petit segment, sont triples du quarré de AF plus grand segment.

Car soit descrit sur AB le quarré AD, auquel estant tiré le diametre BC, soit menee de F la ligne EF parallele à AC, coupant BC en I, par lequel soit menee GH parallele à AB. Par le corol de la 4. p. 2. les parallelogrammes GE, FH seront quarrez des lignes AF, FB: Et puis que comme AB est à AF, ainsi AF est à FB, par la 17. p. 6. le rectangle des extremes AB, FB, sçauoir AH est egal au quarré de la moyenne AF, sçauoir GE. Veu donc que AH & FD sont egaux, le gnomon EBG auec le quarré FH, sera egal au double du quarré GE: & partant adioustant le quarré GE; AD quarré de AB, auec FH quarré de FB sera triple de GE quarré de AC. Ce qu'il falloit prouuer.

THEO. 5. PROP. V.

Si vne ligne droicte est couppee en la moyenne & extreme raiſon, & à icelle on adiouſte directement le plus grand ſegment; la toute compoſee, ſera couppee en la moyenne & extreme raiſon, & la toute ſimple ſera le plus grand ſegment.

Soit la ligne AB, couppee en la moyenne & extreme raiſon au poinct C, & à icelle on adiouſte directement AD egale à AC grand ſegment: ie dis que DB eſt auſſi couppee en la moyenne & extreme raiſon au poinct A, & que la toute donnee AB eſt le plus grand ſegment.

Car puis que comme AB eſt à AC, c'eſt à dire AD, ainſi AC eſt a CB; en changeant comme DA ſera à AB, ainſi BC à AC: & en compoſant comme DB ſera à AB, ainſi AB à AC, c'eſt à dire à AD. Donc par la 3.d.6. la ligne DB eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon au poinct A, & le plus grand ſegment eſt la ligne AB propoſee au commencement. Ce qui eſtoit à prouuer.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vne ligne rationele eſt couppee en la mõnoye & extreme raiſon: l'vn & l'autre ſegmẽt eſt ligne irrationele appellee reſidu.

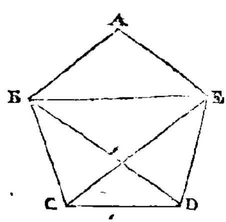
Soit la ligne rationele AB, couppee en la moyenne & extreme raiſon au poinct C: ie dis que AC & BC ſont irrationeles & reſidus.

Car ſi au plus grand ſegment AC on adiouſtee directemẽt DA, egale à la moitié de AB. D'autant que par la 1. p.13. le quarré de DC eſt quintuple du quarré de la ligne DA, il eſt à iceluy comme nombre à nombre. Parquoy par la 6. p.10. les quarrez de DC, DA ſeront commenſurables, & par conſequent les lignes DC, DA, ſont auſſi commenſurables, au moins en puiſſance. Or AD eſt rationele, puis qu'elle eſt moitié d'vne rationele AB: Donc auſſi DC ſera rationele. Et d'autant que les quarrez de DC, DA ne sont comme nombre quarré à nombre quarré: (comme il appert par le corol. de la 24. p. 8. car ils sont comme 5 a 1, ou 25 à 5) les lignes DC, DA, seront incommens. en longitude, par la 9. p. 10. & partant rationeles commensurables en puissance seulement. Parquoy si de DC rationele on oste DA commensurable en puissance seulement, par la 74 p. 10. le reste AC sera irrationele appellee residu.

Derechef AB estant couppee en la moyenne & extreme raison en C, le quarré de AC sera egal au rectangle de AB, CB par la 17. p. 6. Or le quarré du residu AC applicqué sur la rationele AB, doit faire l'autre costé CB residu premier, par la 98. p. 10. Donc les segmens AC, CB, sont lignes irrationeles appellees residus. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si en vn pentagone equilateral trois angles pris comme on voudra sont egaux : il sera equiangle.

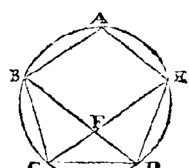


Soit le pẽtagone equilateral ABCDE, duquel trois angles pris cõme on voudra sont egaux, sçauoir A, C, D, ie dis qu'iceluy pentagone est equiangle.

Car estant tirees à iceux angles egaux A, C, D, les lignes substendantes BE, BD, CE, elles seront egales par la 4 p. 1. (estans tous les costez egaux.) Item les deux triãgles DBC & DEC, ayans les trois costez egaux aux trois costez, chacun au sien, les deux angles DBC & DEC seront egaux par la 8. p. 1. Item BAE estant isoscele, les deux angles sur la base BE, seront egaux par la 5 p. 1. Pareillement les deux triangles CBE & DEB, ayãs les trois costez egaux aux trois costez, chacun au siẽ ils auront l'angle CEB egal a l'angle DBE, par la 8. p. 1. Partant le total angle B est egal au total angle E. Mais d'autant que CBE est triangle isoscele, & que BAE a les trois costez egaux aux trois costez du triangle DEC chacun au sien, l'angle ABE sera egal a l'angle DCE par la 8.p.1. Parquoy le total C sera egal a l'angle total B, & par la 1. commune sentence ils seront tous egaux entr'eux. Partant le pentagone sera equiangle. Ce qui estoit a demonstrer.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si deux lignes droictes subtendent deux angles d'vn pentagone equiangle & equilateral, lesquels soient d'ordre: icelles subtendantes se couperont l'vne l'autre en la moyenne & extreme raison, & leurs plus grands segmens seront egaux à vn costé du pentagone.



Au Pentagone ABCDE equiangle & equilateral soient deux lignes droictes BD, CE, subtendantes les angles C, D, qui sont d'ordre, lesquelles s'entrecouppent en F. Ie dis qu'elles seront ainsi couppees en la moyenne & extreme raison, & que leurs plus grands segmens BF, EF seront egaux a quelconque costé du pentagone.

Car ayant descrit par la 14.p 4. vn cercle alentour du pentagone, les arcs AB, BC, CD, DE, & EA seront egaux par la 28.p.3. Et d'autant que les triangles CBD, CED, ont deux costez egaux, & l'angle compris par iceux aussi egal par l'hypotese; les bases BD, CE, & les angles CDB, DCE seront pareillement egaux par la 4.p.1. Et partant veu qu'au triangle CFD, les deux angles DCF, CDF, sont egaux, & par la 32.p.1. l'angle externe BFC est egal à iceux: iceluy BFC sera double de DCE. Mais par la 33.p.6. l'angle BCE est aussi double du mesme DCE, pource que l'arc BAE est double de l'arc DE; Donc les angles BFC, BCF sont egaux: & partant par la 6 p.1. BF est egale au costé du pentagone BC. Et d'autant que par la 26.p.3. les angles DBC, ECD, insistans sur arcs egaux, les deux angles DBC, CDB du triangle BCD sont egaux aux deux angles DCF, FDC du triangle CFD: & partant les deux triangles BCD, CFD seront equiangles par la 32.p.1. Parquoy par la 4.p.6.comme BD sera a DC, c'est à dire a BF, ainsi CD ou BF sera a FD: & partant la subtendante BD est couppee en F, en la moyenne & extreme raison, & le plus grand segment BF est egal a BC costé du pentagone. Par mesme raison on demonstrera CE estre couppee en la moyenne & extreme raison en F, & que le grand segment EF est egal à DE costé du pentagone. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

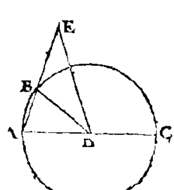
Dounot a traduict ceste proposition ainsi.

Si deux lignes droictes sont tirees d'angle en angle en vn pentagone equiangle, & equilateral, elles se coupperont l'vne l'autre en la moyenne & extreme raison, & leurs plus grãds segmens seront egaux aux costez du pentagone.

Ce qu'estant ainsi, la proposition ne seroit vniuersellement vraye: Car il est euident que si on tire deux lignes droictes de l'angle A, aux angles C *&* D*, ou de l'angle* B *, aux angles D & E, &c.* Icelles *lignes droictes ne se coupperont point.*

THEOR. 9. PROP. IX.

La ligne droicte composee du costé de l'hexagone, & du costé du decagone, tous deux inscrits en vn mesme cercle; est couppee en la moyenne & extreme raison, de laquelle le plus grand segment est le costé de l'hexagone.



Dans le cercle ABC soit inscrit le costé du decagone AB, auquel soit adiousté directement le costé de l'hexagone BE qui peut estre inscrit dans le mesme cercle, c'est à dire que BE soit egale au demy diametre du cercle. (car le costé de l'hexagone est egal au demy diametre du cercle auquel il est inscrit par le corol. de la 15.p.4.) Ie dis que AE est couppee en la moyenne & extreme raison, & que BE costé de l'hexagone est le plus grand segment.

Car ayant mené de A par le centre D le diametre AC, & tiré les lignes DB, DE : l'arc AB estant la 10. partie de la peripheree du cercle, sera la 5. de l'arc AC : & partant l'arc BC sera quadruple d'iceluy AB : Parquoy par la 33. p. 6. aussi l'angle BDC sera quadruple de l'angle ADB : & par la 32. p. 1. BDC estant exterieur, il vaudra les deux DAB, DBA : lesquels estãs egaux par la 5. p. 1 parce que le triangle ABD est Isoscele. l'vn ou l'autre sera double de ADB : mais l'vn d'iceux DBA estant exterieur, est egal aux deux opposez interieurement DEB & BDE (lesquels sont egaux, estant le triangle DBE Isoscele, pource que DB demy diametre, & BE sont egaux par la construction) ainsi l'angle DBA sera double de l'angle E : lequel par ce moyen sera egal à l'angle ADB : ainsi les deux triang. AED, ADB seront equiangles, ayans l'angle A commun, & l'angle E egal à l'angle ADB, par la 32. p. 1. le tiers sera egal au tiers : & par la 4. p. 6. comme AE est à AD ou BE son egalle, ainsi AD, ou BE est à AB : partant AE est couppee en la moyenne & extreme raison en B : & BE costé de l'hexagone est le plus grand segment. Ce qu'il falloit prouuer.

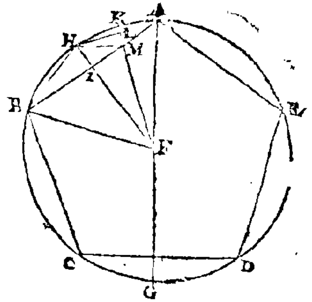
COROLLAIRE.

De cecy est euident que le costé de l'hexagone estant couppé en la moyenne & extreme raison, le plus grand segment est costé du decagone inscrit au mesme cercle. Car si de BE costé de l'hexagone on couppe vne partie egale à AB : comme la toute AE sera à la toute BE ainsi la retranchee BE sera à la retranchee de BE, c'est à dire à AB : & partant par la 19. p. 5. le reste sera au reste, comme la toute a la toute, ou la retranchee à la retranchee. Parquoy BE sera semblablement couppee que AE en la moyenne & extreme raison par la 3. d. 6. dont le plus grand segment sera AB costé du decagone.

THEOR. 10. PROP. X.

Le quarré du costé du pentagone equilateral inscrit en vn cercle, est egal aux deux quarrez des costez du decagone, & de l'hexagone, inscrits au mesme cercle.

Au cercle ABCDE, duquel le centre est F, soit inscrit vn pentagone equilateral, vn costé duquel est AB. Ie dis que le quarré d'iceluy costé AB est egal aux deux quarrez des costez de l'hexagone, & du decagone inscrit au mesme cercle.



Car ayant tiré le diametre AFG, & ioinct FB, soit couppé l'arc AB en deux egalement par la ligne FH, laquelle couppe aussi la ligne AB en I; & soient tirees les lignes droictes AH, BH; & AH sera costé du decagone, & FB costé de l'hexagone: En apres soit couppé l'arc AH en deux egalement en K, par la ligne FK, laquelle couppe aussi la ligne AH en L, & la ligne AB au poinct M, auquel soit menee la ligne HM. Veu donc que les arcs AH, BH sont egaux, aussi seront egaux les angles AFH, BFH, par la 27.p.3. Parquoy les costez AF, FB estans egaux, & FI commun aux deux triangles AFI, BFI, la base AI sera egale a la base BI, par la 4 p. 1. & les angles AIF, BIF aussi eg. & partãt droicts. Par mesme raison serõt egales les lig. AL, HL, & les ang ALF, HLF droicts. Or si des demis cercles eg ABCG, AEDG, on oste arcs egaux ABC, AED, resteront eg. les arcs CG, CD, & partant l'arc CG sera moitié de l'arc CGD. Mais aussi l'arc AH est moitié de l'arc AHB: donc puis que les arcs AB, CD sont egaux, les arcs AH, CG moitiez d'iceux, seront aussi egaux: & partant l'arc AH estãt double de l'arc HK, aussi le sera CG. Aussi puis que les arcs AB, BC sont egaux, & l'arc AB est double de l'arc BH, l'arc BC sera pareillement double du mesme arc BH. Parquoy les arcs CG, BC sont equemultiplices, sçauoir est doubles, des arcs HK, BH, & partant par la 1.p.5. tout l'arc BG sera double de l'arc BK: & par consequent l'angle BFG aussi double de l'angle BFK, par la 33.p.6. Mais par la 20.p.3. le mesme angle BFG au centre, est double de l'angle FAB: donc les angles BFM, FAB seront egaux, & partant l'angle ABF estant commun aux deux triangles ABF, FBM, & le tiers au tiers, par la 32.p.1. iceux triangles seront equiangles; & par la 4.p.6. comme AB sera à BF, ainsi BF à BM: & partant par la 17.p. 6. le rectangle de AB,BM sera egal au quarré de BF. Derechef puis que les costez AL, LM du triangle ALM sont egaux aux costez HL, LM du triangle HLM, & les angles contenus d'iceux aussi egaux, sçauoir droicts, par la 4.p.1. les bases AM, HM, & les angles LAM, LHM seront egaux. Mais par la 5.p.1. l'angle LAM est egal a l'angle HBA, pource que les costez HA, HB sont egaux: Donc aussi l'angle LHM sera egal au mesme HBA: & partant par la 32. proposition 1. les triangles ABH, AHM seront equiangles, puis qu'ils ont les angles ABH, AHM egaux, & l'angle HAM commun. Parquoy par la 4.p.6. comme AB sera a AH, ainsi AH a AM: & par la 17.p.6. le rectangle de AB, AM sera egal au quarré de AH. Mais il a esté demonstré que le rectangle de AB, BM, est egal au quarré de BF: donc les rectangles de AB, AM, & de AB, BM ensembles, sont egaux aux deux quarrez de AH, BF. Mais par la 2. p. 2. iceux rectangles sont egaux au quarré de AB: donc le quarré de AB costé du pentagone est egal aux deux quarrez des lignes BF, AH, costez de l'hexagone, & du decagone. Ce qui estoit à prouuer.

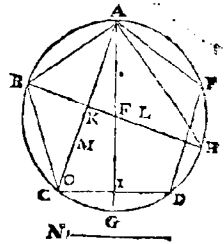
COROLLAIRE. 1.

Par cecy est manifeste qu'vne ligne droicte tiree du centre, & laquelle diuise en deux egalement vn arc, diuise aussi la ligne subtendente d'iceluy arc en deux egalement, & a angles droicts.

Est aussi euident que le diametre du cercle tiré de l'angle du pentagone, diuise en deux egalement l'arc que le costé opposé à iceluy angle subtend, comme aussi iceluy costé opposé, & a angles droicts. Car il a esté demõstré que le diametre AG tiré du poinct A, diuise en deux egalement l'arc CD, lequel le costé opposé CD subtend: Parquoy par ce que dessus, il couppera aussi en deux egalemẽt & a angles droicts iceluy costé CD. La mesme demonstration sera en tout polygone equilateral inscrit au cercle, le nombre des costez estant impair.

THEOR. 11. PROP. XI.

Si dans vn cercle ayant le diametre rationel, on inscrit vn pentagone equilateral; le costé du pentagone est irrationel: appellé ligne mineure.



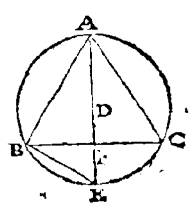
Soit le pentagone equilateral ABCDE, inscrit dans le cercle ABCDE, duquel le diametre est rationel : ie dis que AB costé du pentagone est irrationel, appellé ligne mineure.

Car soient menez par le centre F les diametres AG, BH, desquels AG couppera le costé CD en deux egalement en I, & à angles droicts par le corol. de la preced. soient aussi tirees les lignes AC, AH, desquelles AC, sera couppee par le diametre BH en deux egalement en K par le corol. de la preced. Partant est manifeste que les deux triangles ACI & AKF sont equiangles : car l'angle du poinct A est commun a tous les deux, & le droict AKF egal au droict AIC ; le tiers sera egal au tiers par la 32. p. 1. Et par la 4. p. 6. comme IC à CA, ainsi KF à FA. Item du demy diametre FH (lequel est rationel & egal à FA) soit retranchée FL egale au quart de FA, laquelle FL sera rationele estant le quart d'vne ligne rationele, & par la 16. p. 10. BL composee des deux BF, FL, & commensurable à chacune d'icelles, sera aussi rationele. Item de AC soit retranché CM quart d'icelle ligne: Et par la 15. p. 5. CI sera à CM quart de CA, comme KF a FL quart de FA: Que si on double les deux CI & CM par la 15. p. 5. CD sera à CK (car elle est la moitié de CA & double de CM) comme KF à FL : & en composant comme les deux CD & CK ensemble à CK, ainsi KL à FL : Et par la 22. p. 6. le quarré de la composee de CD & CK sera au quarré de CK, comme le quarré de KL au quarré de FL. Mais d'autant que la ligne AC estant couppee en la moyenne & extreme raison (sçauoir est estant tiree la ligne droicte BD) par la 8. p. 13. son plus grand segment est egal au costé du pentagone, sçauoir à iceluy CD: par la 1. p. 13 le quarré de la composee de CD plus grand segment, & CK moitié de la toute CA, sera quintuple au quarré de CK moitié de la toute : partant aussi le quarré de KL, sera quintuple du quarré de FL. Mais la ligne BL est aussi quintuple de FL, estant FL quart de IB: donc comme BL à FL, ainsi le quarré de KL, au quarré de FL ; c'est à dire en raison doublee de KL à FL : dont s'ensuit que KL sera moyenne proportionele entre BL & FL : Partant par la mesme raison doublee de la 10. deff. 5. & 20. proposition du 6. le quarré de BL sera au quarré KL, comme BL à FL : c'est à dire que le quarré de BL sera quintuple du quarré de KL : Partant iceux quarrez seront entr'eux comme nombre à nombre, mais non pas comme nombre quarré à nombre quarré, (comme il appert par le corol. de la 24. p. 8) Parquoy par la 9. p. 10. les lignes BL & KL, seront commensurables en puissance seulement: desquelles BL estant rationele: BL & KL seront rationeles commensurables en puissance seulemẽt, & par la 74. p. 10. BK sera residu. Maintenant que la ligne BL puisse plus que la ligne KL, du quarré de la ligne N. Donc puis que BL est rationele commens. en longitude à la rationele proposee BF (car elles sont entr'elles comme 5. à 4.) Et que BL peut plus que KL, du quarré de la ligne N qui luy est incommens. en longitude; (car la puissance de la ligne BL estant quintuple de la puissance de la ligne KL, le quarré de N, qui reste apres auoir osté le quarré de KL de celuy de BL; sera au quarré de BL, comme 4. à 5. qui n'est pas comme nombre quarre à nombre quarre: & partant par la 9. proposition 10. BL qui peut plus que KL du quarre de la ligne N, est incommens. en longitude à icelle N.) par la 4. des tierces def. du 10. BK sera residu quatriesme.

Finalement pource que par le corol. de la 8. p. 6. AB est moyenne proportionele entre BH, BK (car le triangle BAH, à l'angle droict, duquel est tiree AK perpend. à la base BH) le quarre de AB sera egal au rectangle de BH, BK. Parquoy puis que la ligne droicte AB peut la superficie contenue de la rationele BH, & du residu 4. BK: par la 95 p. 10. icelle AB sera ligne mineure. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 12. PROP. XII.

Le quarré du costé du triangle equilateral inscrit dans vn cercle, est triple du quarré du demy diametre d'iceluy cercle.



Soit le triangle equilateral ABC inscrit en vn cercle ABC, duquel le centre est D. Ie dis que le quarré de AB costé d'iceluy triangle, est triple du quarre du semidiametre.

Car estant tire le diametre AE, lequel couppera par le corol. de la 10. p de ce liure, l'arc BC en deux egalement en E: & aussi la ligne droicte BC en deux egalement & à angles droicts : veu que l'arc BEC est le tiers de toute la circonference, BE sera la sixiesme partie : partant estant tiree la ligne droicte BE, elle sera le costé de l'hexagone & egal au demy diametre DE, par le corol. de la 15 p 4. Or le quarre du diametre AE sera quadruple du quarre de BE egale au demy diametre, par le scholie de la 4 p 2. & par la 47. p. 1. Il est aussi egal aux deux de BA & BE: il est donc manifeste qu'il sera triple du quarre de BE, ou ED son egal. Ce qu'il falloit prouuer.

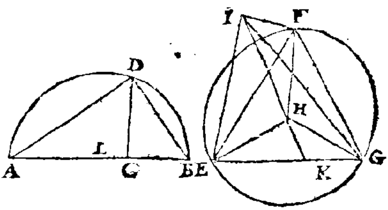
COROLLAIRE.

Il s'ensuit de ce que dessus que le quarré du diametre d'vn cercle est au quarré du costé du triangle equilateral inscrit en iceluy cercle, en raison sesquitierce, c'est à dire comme 4. à 3. Car puis qu'il a esté demonstré que le quarré du costé AB est triple du quarre du demy diametre AD ; posant le quarre de AB 3. le quarre de AD sera 1 ; & le quarrè de AE quadruple d'iceluy sera 4. Parquoy le quarrè de AE sera au quarrè de AB comme 4. à 3.

Et pource que le corol de la 8 p. 6. comme AE est à AB, ainsi AB à AF perpendiculaire tombant d'an angle sur vn costé; pareillement le quarré de AB sera au quarrè de AF, comme 4. à 3. On peut aussi facilement colliger que le semi-diametre DE est coupp en deux egalement en F par le costé du triangle BC. Car puis que le quarré de AB est triple du quarrè de BE; si on pose iceluy quarrè de AB estre 12. le quarré de BE sera 4, & le quarre de BF 3 ; & par consequent le quarrè de EF sera 1. par la 47. p. 1. Partant le quarré de BE, c'est à dire de DE son egale, sera quadruple du quarre de FE. Parquoy par le scholie de la 4. p. 2. la ligne DE sera double de FE; & par cõsequent DE est couppee en deux egalement en F.

PROB. I. PROP. XIII.

Dans vne sphere donnee, inscrire vne pyramide equilaterale : & monstrer que le quarré du diametre d'icelle sphere, est en raison sesquialtere au quarré du costé d'icelle pyramide.



Soit la ligne AB, diametre de la sphere donnee, diuisee en C, de sorte que AC soit double de BC: Et apres auoir descrit sur AB le demy cercle ADB, leuee la moyenne proportionele CD, & mené les lignes DA & DB: Soit descrit le cercle EFG, duquel le demy diametre HE soit egal à CD: & apres auoir inscrit en iceluy le triang. equilateral EFG, du centre H soit leuee la perpẽdiculaire HI par la 12. p. 11. laquelle soit egalee à AC: puis soient menees les lignes IE, IF, IG. Ie dis premierement que la pyramide EFGI est equilaterale: puis qu'elle peut estre inscrite en la sphere, de laquelle le diametre est AB: & que le quarré du diametre AB, est en raison sesquialtere au quarré du costé EG.

Que la pyramide soit equilaterale: il appert en premier lieu que le triãgle EFG, est equilateral: Item que les trois lignes IE, IF, IG, sont aussi egales entr'elles: (d'autant que par la 47. p. 1. le quarré d'vne chacune d'icelle est egal au quarré de la perpendiculaire IH, & au quarré de l'vne des trois lignes HE, HF, HG, lesquelles sont egales.) Et d'autant que les costez AC, DC du triangle ADC sont egaux aux costez HI, HE du triangle IHE: & les angles qu'ils comprennent egaux; la base AD sera egale a la base EI par la 4. p. 1. En la mesme maniere sera demonstre AD estre egale à FI, GI. Et veu que le quarre de AC, est double du quarre de CD (car ils sont l'vn à l'autre comme AC a CB par le corol. de la 20. p. 6. estans les 3. lignes AC, CD, CB continuellemẽt proportioneles) le quarre de AD, qui est egal à tous les deux, sera triple du quarre de CD, ou de son egale HE: Mais par la 12. p. 13. le quarre de EF est aussi triple du quarre de HE; Partant EF, & AD sont egales: & par la 1 comm. sent. EF & EI seront egales. Parquoy puis que AD est aussi egale à FI, GI, les quatre triang. EFG, EFI, FGI, GEI seront equilateraux, & egaux entr'eux. Et par consequent la pyramide EFGI, est equilaterale.

Qu'elle puisse estre inscrite à la sphere, ayant pour diametre AB, il appert: Soit continuee la ligne perpend. IH par dessous la base de la pyramide iusques en K: Et soit faicte IK egale à AB,& soit imaginé estre posé le demy cercle ADB à l'entour de la pyramide : sçauoir le poinct A, au poinct I; le poinct B au poinct K: Et puis que AC & BC sont egales à IH & HK; & HG egale à DC, faisant angle droict auec IH, aussi bien que leurs egales AC & CD , il est euident que le poinct D, du demy cercle tombera sur le poinct G. Partant le diametre demeurant immobile, si le demy cercle faict vne reuolution, il touchera les deux autres angles de la pyramide E & F; (estans les lignes HE, HF, HG egales) ainsi la pyramide est inscrite en la sphere donnee.

Finalement que le quarré du diametre AB, soit sesquialtere au quarré du costé AD, qui est egal à chacun costé de la pyramide, il appert: Car puis que AB est triple de BC:& AC double de la mesme BC; AB sera en raison sesquialtere à AC. Mais par le corol. de la 8.p.6. les trois lignes AB, AD, AC sont proportioneles: Et partant par le cor. de la 20.p.6. comme AB sera à AC, ainsi le quarré de AB sera au quarré de AD. Donc aussi le quarré de AB sera au quarré de AD en raison sesquialtere.

COROLLAIRE.

De ces choses on peut facilement colliger, que la puissance du diametre de la sphere est quadruple sesquialtere de la puissance du semidia. du cercle descrit al'entour de la base de la pyramide. Car puis que AB diam. de la sphere, a esté demonstré sesquialtere en puissance à EF costé de la pyramide, le quarrè de EF sera de 6. parties, telles que le quarré du diametre AB en contiendra 9, & le quarré de la ligne HE 2, pource que le quarrè de EF est triple du quarré de HE, par la 12.p.13. Donc de 9 telles parties que le quarré de AB contiendra; le quarré de HE en contiendra 2: Et partant le diametre AB est quadruple sesquialtere en puissance au semidiametre HE, puis que la raison des quarrez est comme 9 à 2.

Aussi la perpendiculaire tiree du centre de la sphere au plan de la base de la pyramide est la sixiesme partie du diametre de la sphere, & la tierce partie du semidia. Car L soit le cētre du demy cercle ADB: L sera pareillement le centre de la sphere. Ie dis que la ligne LC (qui est la perpend. tiree du centre de la sphere à la base EFG: puis que AC est egale à HI, & partant le poinct C, le mesme que H, ainsi aussi L est le mesme que le centre de la sphere) est la 6. partie du dia. de la sphere, sçauoir est de AB, & la tierce partie du semidia. AL. Car puis que AC est double de CB, de telles 4 parties qu'est AC, 2 telles sera CB: & partant 6 telles sera la toute AB, & 3 le semidia. AL.

Parquoy

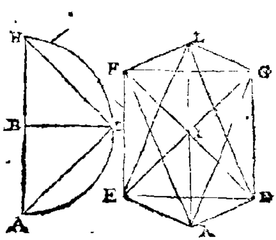
Parquoy si AC est 4, & AL 3; LC sera 1: & partant LC sera la sixiesme partie de AB, & la tierce de AL.

Semblablement la hauteur de la pyramide HI sera deux tierces parties du diametre de la sphere. Car HI est la mesme que AC, laquelle par la construction est deux tierces parties d'iceluy diametre.

Aussi de 9 telles parties que sera le quarrè d'iceluy diam. le quarrè de la hauteur de la pyrmide en sera 4. Car la raison de 9 à 4, est la raison doublee de 3 à 2.

PROB. 2. PROP. XIIII.

Dans vne sphere donnee, inscrire vn octaedre: Et monstrer que le quarré du diametre de la sphere, est double du quarré du costé de l'octaedre.



Soit le diametre de la sphere donnee AH, couppé en deux egalement au poinct B: & apres auoir construict le demy cercle A C H; leué la perpendiculaire BC, & mené les lignes CA, CH, lesquelles seront egales entr'elles par la 4. p. 1. sur la ligne DE egale à l'vne d'icelles AC, CH, soit construit le quarré DEFG, dans lequel soient menees les deux diagonales DF, GE se couppans au poinct I, duquel poinct par la 12. p. 11. soit esleuee la ligne IL, perpendiculairement sur le quarré GE; laquelle soit aussi continuee perpendiculairement par dessoubs iceluy plan, & soit icelle IK, laquelle soit faicte egale à AB; & IL aussi à AB: Item des poincts L & K, soient menees aux angles du quarré les lignes LD, LE, LF, LG, KD, KE, KF, KG.

Ie dis maintenant que la figure solide DLFK, est enuirõnee de huict triangles equilateraux; & que c'est vn octaedre. Car le quarré DEFG, ayant les costez egaux à AC; Il est euident que les diagonales EG, FD seront egales à AH: partant leurs moitiez a AB. Mais les deux lignes IL & IK sont aussi egales à AB: & par consequent elles seront egales à vne chacune d'icelles demy diagonales; & par la 4. p. 1. les huict lignes

LD, LE, LF, LG, KD, KE, KF, KG, seront toutes egales entr'elles : & aux quatre du quarré DEFG par la mesme 4.p.1. (estans les demy diagonales egales aux perpendic. IL & IK, en constituant des angles droicts au poinct I milieu du quarré) Et puis que tous les costez sont egaux, tous les triang. seront equilateraux, sçauoir les quatre au dessus du quarré DEFG, & ayans leurs bases sur les quatre costez d'iceluy quarré, & se terminans au poinct L: & quatre autres au dessoubs du mesme quarré, ayans aussi leurs bases sur les costez du quarré, & se terminans au poinct K: ainsi le solide DLFK compris de huict triangles equilateraux, sera octaedre.

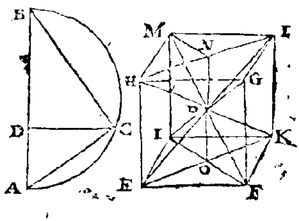
Ie dis d'auantage qu'iceluy octaedre est inscriptible en la sphere donnee. Car il est euident que la ligne LK, est egale au diametre AH, & que l'angle LDK est droict: (d'autant que les deux lignes LI, ID estans egales; les angles sur la base LD seront egaux, & demy droicts, pource que l'angle LID est droict: Et par mesme raison l'angle IDK est demy droict; & partant le total LDK sera droict.) Partant le demy cercle ayāt pour diametre LK, & faisant vne reuolution à l'entour de l'octaedre, il touchera le poinct D : Et par mesme discours il touchera aussi les trois autres E, F, G, desquels les angles sont egaux à l'angle D.

Finablement il est euident par la 47. p. 1. que le quarré du diametre de la sphere AH ou LK, est egal aux deux quarrez de LD, DK, lesquels sont egaux; & partant iceluy quarré de LK diametre de la sphere, sera double du quarré de l'vn d'iceux costez de l'octaedre. Ce qu'il falloit demonstrer.

PROB. 3. PROP. XV.

Dans la sphere donnee, inscrire vn cube: & monstrer que le quarré du diametre de la sphere, est triple au quarré du costé d'iceluy cube.

Soit le diametre de la sphere donnee AB, lequel soit coupé au poinct D, en sorte que BD soit double de AD, c'est à dire que AB soit triple d'icelle AD: Puis, apres auoir construict le demy cercle ABC, leué la perpendiculaire DC, & mené les deux lignes AC, & BC : Sur EF egale a BC, soit faict le quarré EFGH, sur lequel soient esleuees par la 12.p.11. les quatre li-



gnes perpendiculaires EI, FK GL, HM, qu'on fera egales à EF: puis soiét menees les quatre lignes I K, KL, LM, MI. D'autant que les lignes EI, FK sont perpend. au plan EF GH : elles seront paralleles par la 6. p. 11. Mais elles sont aussi egales : donc par la 33. p. 1. EF, IK seront pareillement egales & paralleles : & partant EFKI est vn parallelogramme ayant les 4 costez egaux. Mais il a aussi par la 34. p. 1. les 4 angles droicts, puis que les angles EIK, FKI sont opposez aux droicts KFE, IEF : donc EFKI est quarré. Par mesme raison FKLG, GLMH, HMIE seront quarrez : & partant IKLM sera aussi quarré, puis que par la 24. p. 11. il est egal & semblable au quarré opposé EFGH : Car EL est vn solide parallelipipede : pource que par la 15. p. 11. les plans opposez d'iceluy sont parallels, estans tirez par lignes paralleles qui s'entretouchent. Parquoy EL sera vn cube : lequel ie dis estre inscriptible en la sphere donnee. Car ayant mené les diametres EK, FI, HL, GM, des plans opposez EFKI, HGLM, soient imaginez estre tirez par iceux diametres, les plans EKLH, FIMG, lesquels par la 28. p. 11. coupperont le cube en deux egalement, & passeront par le centre d'iceluy, sçauoir par le poinct P, auquel par le corol. de la 39. p. 11. tous les diametres dudit cube s'entre coupperont aussi en deux egalement : & partant la commune section d'iceux plans, sçauoir NO, passera par le mesme centre P. Mais il est euident qu'iceux plans EKLH, FIMG sont rectangles egaux : & que par consequent leurs diametres & semidiametres seront aussi egaux. Parquoy estant descrit vn cercle du centre P, sur le diametre EL : il est euident qu'iceluy demy cercle faisant vne reuolutió alentour du cube, descrira vne sphere passant par tous les angles du cube: laquelle ie dis estre egale à celle du diametre AB. Car puis que par la 47. p. 1. le quarré de EK est egal aux quarrez des lignes egales EF, FK, & partant double du quarré de EF, ou de KL : les quarrez de EK, KL seront triples du quarré de KL. Mais par la 47. p. 1. le quarré de EL est eg. aux quarrez de EK, KL : donc aussi le quarré de EL sera triple du quarré de KL, c'est à dire du quarré de AC : duquel est aussi triple le quarre de AB. (car par le corol. de la 8. p. 6. AB, AC, AD sont próp. & partant par le corol. de la 20. p 6. comme AB est à AD, ainsi le quarre de AB sera au quarre de AC: Veu donc que AB est triple de AD, aussi le quarre de AB sera triple du quarre de AC.) Parquoy les quarrez de EL, AB sont egaux: & par consequent les lignes EL, AB, diametres des spheres: comme aussi les spheres d'iceux diametres, sont pareillement egales.

Or il a esté demonstré que le quarre du diametre EL est triple du quarre du costé du cube KL. Parquoy nous auons faict tout ce qui estoit proposé.

COROLLAIRE.

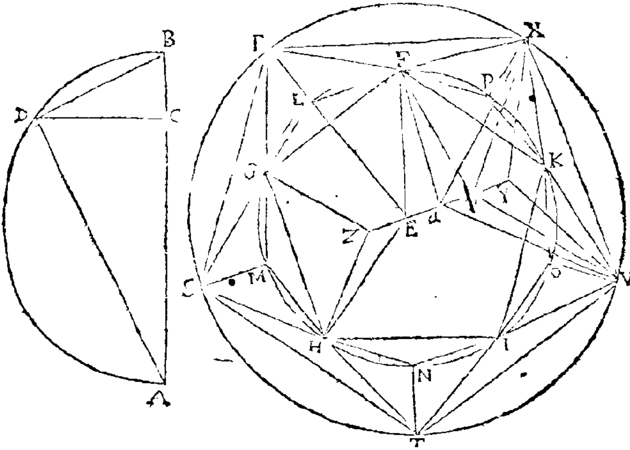
Il est manifeste que le quarré du diametre de la sphere, ou du cube, est egal aux quarrez du costé du Tetraedre & du cube pris ensemble. Car par la 47. p. 1 le quarré de AB diametre de la sphere, est egal aux deux quarrez de AC, BC costez du cube & du tetraedre.

Est aussi euident que tous les diametres du cube sont egaux entr'eux, & qu'ils se diuisent en deux egalement au centre de la sphere: & pareillement que les lignes droictes qui conioignent les centres des quarrez opposez, se couppent en deux egalement au mesme centre de la sphere.

PROB. 4. PROP. XVI.

Dans la sphere donnee, inscrire vn icosaëdre: Et monstrer que son costé est ligne irrationele, appellee ligne mineure.

Soit le diametre de la sphere donnee AB, lequel soit diuisé au poinct C, en sorte que AC soit quadruple de BC, & apres auoir construit le demy cercle, leué la perpendiculaire CD, & mené les lignes AD, DB; du centre E, & interual EF, egale à BD; soit faict vn cercle, dans lequel soit inscrit le pentagone equilateral FGHIK, & puis dans le mesme cercle, soit aussi inscrit vn decagone equilateral, (ce qui se fera en couppant en deux egalement l'arc d'vn chacun costé du pentagone.) En apres par la 12. p. 11 du centre E, & des poincts L, M, N, O, P, soient leuees les lignes EQ, LR, MS, NT, OV, PX perpendiculaires au plan du cercle FGHIK, lesquelles soient posees egales à EF ou BD, & par la 6. p. 11. elles seront paralleles entr'elles: & partant les lignes droictes conioignant icelles, sçauoir EL, QR; EM, QS; EN, QT; EO, QV; EP. QX, (toutes lesquelles toutesfois nous n'auõs tirees pour euiter cõfusion) serõt egales & paralleles entr'elles, par la 33. p. 1. Dõc puis que



EL, EM, &c. sont egales au semidiametre EF; aussi QR, QS, QT, QV, QX serõt egales tant entr'elles qu'à iceluy demy diametre EF, ou à la ligne BD. Et pource que par la 15, p. 11. le plan mené par les lignes QR, QS est parallel au plan FGHIK tiré par les lignes EL, EM: Et que pour la mesme raison le plã tiré par les lig. QS, QT, est parallel au mesme plan FGHIK, tiré par les lignes EM, EN; mais que le plan tire par les lignes QR, QS conuient auec le plan mené par les lignes QS, QT, en la ligne droicte QS il est euident par les choses demonstrees à la 16. p. 11. que ces deux plans en font vn seul. On demonstrera en la mesme maniere que le plan tiré par QT, QV, auec celuy-cy en faict vn seul, & aussi celuy tiré par QV, QX, & par QX, QR: tellement donc que les 5 lignes QR, QS, QT, QV, QX sont en vn mesme plan; & partant si de Q, & de l'interualle QR, on descrit vn cercle en iceluy plan, il passera par les autres poincts S, T, V, X, & sera egal au cercle FGHIK. Soient tirees les lignes droictes RS, ST, TV, VX, XR. Et d'autant que LR, PX sõt egales & paralleles; si on imagine estre tiree vne lig. droicte LP; aussi par la 33. p. 1. LP, RX serõt egales & paralleles: & partant par la 28. p. 3, de cercles egaux, elles prennent arcs egaux: Mais LP prend la 5. partie du cercle FGHIK, sçauoir deux 5. parties LF, FP: Donc aussi RX prend la 5. partie du cercle RSTVX. Par mesme maniere nous conclurons que chacune des autres lignes droictes RS, ST, TV, VX, prend la 5. partie d'iceluy cercle. Parquoy RSTVX est vn pentagone equilateral, ayant tous les costez egaux a ceux du pentagone FGHIK. Soient tirees des angles du pentagone RSTVX, aux angles du pentagone FGHIK, les lignes droictes RF, RG, SG SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Donc puis que la perpendiculaire LR est egale au demy diametre EF, c'est à dire au costé de l'exagone du cercle FGHIK; & LF est coste du decagone par la 10. p. 13. le quarre du coste du pentagone du mesme cercle, est egal aux quarrez de LR, LF. Mais le quarre de FR, par la 47. p. 1 est egal à iceux quarrez de LR, LF. Donc le quarre de FR est egal au quarre du coste du Pentagone; & par consequent la ligne RF sera egale a LP coste du pentagone, ou à FG, c'est à dire a RX. Par la mesme raison, les autres lignes RG, SG, &c seront egales aux autres costez de chasque pentagone: & partant les 10 triangles RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, seront equilateraux, & egaux entr'eux. Maintenant soit prolongé de part & d'autre la perpendiculaire EQ, tellement que QY, EZ soient egales au costé du decagone, & soient tirees les lignes VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ HE, HZ. D'autant que QX est semy diametre du cercle RSTVX, c'est à dire costé de l'exagone, & QY est costé du decagone de mesme cercle; par la 10. p. 13. le quarré de XV costé du pentagone, sera egal aux quarrez de QX, QY. Mais par la 47 prop. 1. à iceux quarrez de QX, QY, est aussi egal le quarré de XY (car l'angle XQY est droict, estant EQ perpendiculaire a l'vn & l'autre plan des cercles parallels.) Donc le quarré de XY est egal au quarré de XV; & partant la ligne XY egale à ligne XV. Par mesme raison XV sera demonstree egale à VY; & partãt le triangle VYX est equilateral. Par mesme maniere, (estans tirees les lignes RY, SY, TY, lesquelles ne sont tirees pour euiter confusion) les quatre triangles RYX RYS, SYT, TYV, seront demonstrez equilateraux, & egaux au triãgle VYX, c'est à dire aux dix premiers triangles, puis que tous leurs costez sont egaux aux costez du pentagone. Par sẽblable argument sera prouué que le triangle GZH est equilateral; comme aussi les 4. autres triangles HZI, IZK, KZF, FZG, (desquels toutesfois nous n'auons aussi tiré les lignes, afin d'euiter la confusion) tous lesquels seront egaux aux 15. precedans. Veu donc que tous ces 20. triangles sont equilateraux, & egaux, & qu'ils se conioignent les vns aux autres par lignes droictes; sera cõstitué d'iceux vn Icosaedre: lequel ie dis estre inscriptible en la sphere donnee, de laquelle le diametre est AB. Car ayant couppé en deux egalement EQ en *a*, & tire les lignes *a* F, *a* X, *a* V; les costez *a* Q, QV du triangle *a* QV seront egaux, aux costez *a* Q, QX du triangle *a*QX, (car QV, QX sont semy diametres du cercle RS TVX) & les angles *a* QV, *a*QX sont droicts: & partant par la 4.p.1. les bases *a*V, *a* X seront egales. Par la mesme raison, si on tire des lignes de *a* & Q, à R, S, T, les lignes *a* R, *a* S, *a* T seront demonstrees egales entr'elles, & à icelle *a*v, *a*X. Et puis que les costez *a*Q, QX du triangle *a* QX; sont egaux costez *a*E, EF du triangle *a* EF, (pource que QX, EF sont demy diametres de cercles egaux, & EQ est couppee en deux egalement en *a*,) & les angles *a* QX, *a* EF sont aussi egaux, sçauoir droicts; par la 4.p.1. les bases *a*X, *a*F, seront aussi egales. Par mesme raison, si de *a* & E on tire des lignes droictes à G, H, I, K, on demonstrera les lignes *a*G, *a*H, *a*I, *a*K, estre egales à icelle *a*X: & partant les dix lignes droictes tirees de *a* aux dix angles F, G, H, I, K, R, S, T, V, X, sont egales. Et d'autant que QE est semidiametre, c'est à dire costé de l'exagone du cercle FGHIK; & EZ costé du decagone du mesme cercle; par le 9.p.13. QZ sera diuisee en la moyenne & extreme raison en E, & le plus grand segment sera QE. Parquoy par la 3. p 13. le quarré de AZ sera quintuple du quarre de E*a*. Mais le quarre de *a*F est aussi quintuple du mesme quarre de E*a*: Car le quarre de EF estant quadruple du quarre de E*a* par le scholie de la 4.p.2. pource que EF est double de E*a*; les quarrez de EF, E*a*, sont le quintuple du quarre de E*a*. Mais par la 47.p 1. le quarre de *a*F est egal à iceux quarrez de EF, E*a*: donc aussi le quarre d'icelle *a*F sera quintuple d'iceluy quarre de E*a*.) Donc les quarrez de *a*Z, *a*F, sont egaux; & par consequent les lignes *a*Z, *a*F seront egales Et puis que *a*E, *a*Q, & EZ, QY sont egales, aussi *a*Z, *a*Y seront egales; & toutes les lignes droictes tirees de *a*, à tous les angles de l'icosaedre pareillement egales Parquoy la sphere descrite alentour du diametre ZY, passera par tous les angles de l'iscosaedre Car d'autant que par la 15.p.5 comme *a*Z est à *a*E, ainsi YZ a QE, & partant par la 22 p.6. comme le quarre de *a*Z est au quarre de *a*E, ainsi le quarre de YZ au quarre de QE, & que le quarre de *a*Z a esté demõstre quintuple du quarre de *a*E: pareillemẽt le quarre YZ sera quintuple du quarre de QE, c'est à dire du quarre de BD son egale. Mais aussi le quarre de AB est quintuple du mesme quarre de BD: (car AB, BD, BC estans propor.

par le corol. de la 8. p. 6. le quarré de AB sera au quarré de BD, comme AB à BC par le corol. de la 20. p. 6. & partant AB estãt quintuple de BC, aussi le quarré de AB sera quintuple du quarré de BD.) Donc les quarrez de YZ, AB sont egaux ; & partant les lignes YZ, AB, & les spheres descrites alentour d'icelles seront egales.

Ie dis finablement que le coste de l'icosaedre est ligne irrationele, appellee ligne mineure : ce qui est euident par la 11. p. 13. estant par la 6. p. 10. le demy diametre EF, ou son egale BD, ligne rationele commensurable en puissance à la posee rationele AB, de laquelle nous auons monstre que le quarre estoit quintuple du quarre de BD. Nous auons donc faict ce qui estoit propose.

COROLLAIRE.

De cecy resulte que le quarré du diametre de la sphere est quintuple du quarré du semidiametre du cercle comprenant 5 costez de l'icosaedre

Et aussi qu'iceluy diametre de la sphere est cõposé du costè de l'hexagone, & de deux costez du decagone, descrit en vn mesme cercle.

Et encore que le costè de l'icosaedre est egal au coste du pentagone, par le moyen duquel est construit iceluy icosaedre.

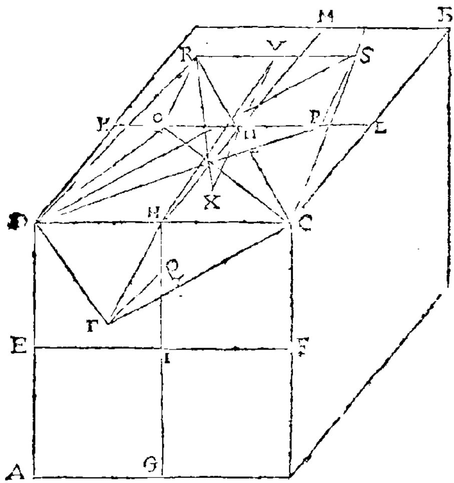
PROBL. 5. PROP. XVII.

Dans vne sphere donnee, inscrire vn dodecaedre : Et monstrer que son costé est ligne irrationele appellee residu.

Soit le cube AB, & d'iceluy les deux plans exterieurs AC, & DB, se rencõtras à droits angles à la ligne de commune section DC : & d'iceux plans tous les costez soient couppés en deux egalement, sçauoir AC, par les deux lignes EF, GH se couppãs au poinct I ; & DB, par les lig. KL & HM se coupãs au poinct N. Item soient les trois lignes KN, NL, HI couppees en la moyenne & extreme raison aux poincts O, P, Q, desquelles les plus grands segmens soient ON, NP, IQ : Et par la 11 p. 11. soient leuees les deux lignes OR, PS perpend.

au plan DB : mais QT au plan AC, lesquelles soient posees egales aux trois segmens ON, NP, IQ. Puis soient menees les lignes DR, RS, DT, CS, CT. Ie dis que DRSCT est pentagone equilateral constitué sur vn mesme plan, & equiangle.

Car soient menees les lignes DO, DP, DS: Et d'autant que KN est couppee en la moyenne & extreme raison au poinct O, & que ON, est le plus segment, par la 4.p.13. les deux quar-

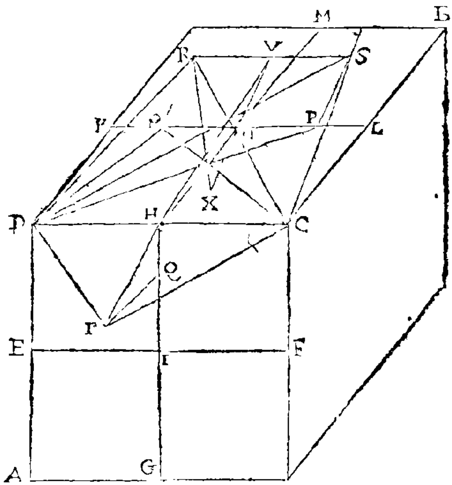


rez de KN, KO seront triples du quarré de ON: Et KN estât egale à kD ; & ON à OR, les deux quarrez de kD, & KO, ou par la 47 p.1. le seul de DO, est triple du quarré de OR : & le quarré de DR, qui est egal à tous les deux, par la 47. p.1. sera quadruple du seul de RO : Et d'autant que RS est double de RO, son quarré, par le scholie de la 4.p.2. sera aussi quadruple du quarré de RO, aussi bien que le quarré de DR: Partant les lignes DR, RS seront egales. Par mesme discours on monstrera l'egalité des trois autres costez SC, CT, TD tant entre eux qu'aux deux DR, RS : donc le pentagone est equilateral.

Ie dis maintenant qu'il est en vn mesme plan. Soit menee NV, parallele à OR : Item les deux TH & HV. Ie dis qu'icelles deux lignes se rencontrent directemét, & font vne seule ligne droicte THV. Car pour autant que HI est couppee en la moyenne & extreme raison au poinct Q; IH sera à IQ, comme IQ à QH. Mais HN est egale à HI, & NV à IQ, & QT à QI: donc comme HN est à NV, ainsi QT à QH. Parquoy puis que les triangles NVH, QTH, ont deux costez proportionaux à deux costez, & sont composez à vn angle H, tellement que les costez homologues sont parallels par la 6. p.11. sçauoir HN & TQ, qui sont perpendic. au plan du quarré AC: & NV, QH qui sont à angles droicts sur le plan DB: par la 32.p.6. THV sera vne seule ligne droicte. Or par la 1.p.11. Toute ligne droicte est en vn mesme plan: par consequent le pentagone DRSCT est en vn mesme plan.

Ie dis encores qu'il est equiangle: Car puis que KN est couppee en moyenne & extreme raison, estant ON plus grãd segment, par la 5.p.13. en adioustant kN à NP, egale au plus grand segment ON; la toute KP sera couppee en la moyenne & extreme raison au poinct N, & sera KN le plus grand segment: & partant par la 4.p.13. les quarrez de KP & NP (ou PS son egale) sont triples du quarré de KN, (ou de son egale KD.) & en adioustant le quarré de KD auec les deux de KP & PS, iceux trois quarrez seront quadruples du seul de KD (ou par la 47.p.1. au lieu des deux de KP & KD, le seul de DP auec celuy de PS, ou encore le seul de DS, sera quadruple du quarre de KD) duquel le quarre de DC est aussi quadruple par le scholie de la 4.p.2. estant DC double de KD: partant les 2. lignes DC & DS seront egales: Mais aussi estans tous les costez du pentagone egaux, les deux triangles DCT, DSR auront les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien: Et par la 8.p.1. l'angle au poinct R sera egal à l'angle au poinct T. Et semblablement nous monstrerons que l'angle RSC est egal à l'angle DTC: ainsi trois angles du pẽtagone seront egaux, & par la 7.p.13. il sera equiangle. Il est aussi equilateral, & sur DC l'vn des costez du cube, auquel il y en a douze de pareils. Que si on veut construire de mesme façon vn pentagone, sur chacundes vnze costez restans, on trouuera vne figure solide enuironnee de douze pentagones equiangles & equilateraux: Et par les def. sera dodecaedre.

Ie dis dauantage qu'il est inscriptible en la sphere donnee. Car si on prolonge VN, qui est perpend. sur le centre du quarre DB: il appert par la 39.p.11. qu'elle couppera la diagonale du cube en deux egalement: qu'elle la couppe donc au poinct X, auquel poinct sera le centre de la sphere enuironnant le cube par le corol. de la 15.p.13. & NX est egale au demy coſte du cube : Soit menee la ligne RX. Or nous auons tantoſt monſtre par la 4.p 13. que les quarrez de kP & NP ſont triples du quarre de kN : Mais VX eſt egale à kP ; & RV à NP : (car



NX eſt egale à KN : & VN à NP). Partant les deux quarrez de RV, XV, ou le ſeul de RX, par la 47.p.1. eſt triple du quarre de KN : Mais par la 15.p.13. le quarre du diametre de la ſphere circonſcrite au cube, eſt triple du quarre du coſte d'iceluy cube : Et par la 15. p. 5. le quarre du demy diametre eſt triple au quarre du demy coſte. Or KN eſt le demy coſte du cube : Partant RX ſera le demy diametre de la ſphere circonſcrite au cube AB, duquel le centre eſt X. Par meſme diſcours nous monſtrerons que du poinct X toutes les lignes menees vers les autres angles du dodecaedre, ſont egales au demy diametre de la ſphere circonſcrite au cube. Partant vne meſme ſphere pourra eſtre circonſcrite au cube & au dodecaedre.

Ie dis finalement que le coſte du dodecaedre eſt ligne irrationele appellee reſidu. Car d'autant que les deux demy coſtez du cube KN, NL ſont chacun couppez en la moyenne & extreme raiſon : par la 15. p. 5. toute la ligne KL ſera aux deux plus grands ſegmens enſemble, ſçauoir à OP, comme iceux plus grands ſegmens ſont aux plus petits enſemble, ſçauoir à la composée de KO & PL. Parquoy ſi KL coſte du cube est couppee en la moyenne & extreme raison, le plus grand segment sera OP. Mais la toute KL ainsi couppee est rationele: (car son quarre est commensurable au quarre du diametre de la sphere, lequel est pose rationel: puis qu'il est le tiers d'iceluy par la 15.p.13.) Donc par la 6.p.13.le plus grãd segment OP, c'est à dire RS coste du dodecaedre qui luy est egal, est ligne irrationele, appellee residu. Nous auons donc faict tout ce qui estoit proposé.

COROLLAIRE.

De cecy resulte que le costé d'vn cube estant couppé en la moyenne & extreme raison, le plus grand segment sera le costé du dodecaedre inscrit en vne mesme sphere.

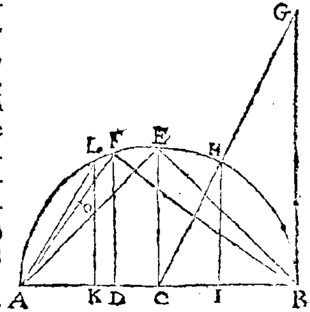
Aussi que le costé du cube est egal à la ligne droicte subtendant vn angle du pentagone du dodecaedre. Et d'autant qu'icelle mesme ligne estant couppee en la moyenne & extreme raison, par la 8.p.13. le plus grand segment est costé d'vn pentagone: & partant par la 5. p 13.la ligne droicte composee d'icelle, c'est à dire du coste du cube, & du plus grand segment, c'est à dire du costé du dodecaedre, est semblablement diuisee, & le moindre segment est costé du dodecaedre, mais le plus grand, est costé du cube: Il s'ensuit que si vne ligne droicte est couppee en la moyenne & extreme raison, & que le moindre segment soit costé du dodecaedre: le plus grand segment sera coste du cube inscrit en la mesme sphere.

PRROB. 6. PROP. XVIII.

Le diamerre d'vne sphere estant donné; trouuer les costez des cinq figures inscrites en icelle; & les comparer entr'eux.

Soit le diametre d'vne sphere donnee AB: & il faut premierement trouuer les costez des cinq figures inscriptibles en icelle sphere.

Soit diuisé le diametre AB en deux egalement au poinct C; mais au poinct D, tellement que AD soit la tierce partie de AB, puis ayant descrit sur AB vn demy cercle, soient esleuees les perpendiculaires CE, DF, & tiré les lignes AE, AF; BE, BF.



D'autant que par le corol. de la 8. p.6. BF est moyēne proportionele entre AB, BD; par le corol. de la 20.p. 6. comme AB sera à BD, ainsi le quarré de AB au quarré de BF. Mais AB est à BD en raison sesquialtere: (car par cōstruction AB contient 3 telles parties que AD 1, & BD 2) Donc aussi le quarré de AB est au quarré de BD, en raison sesquialtere : & partant puis que par la 13. prop.13. le quarre du diametre de la sphere est en raison sesquialtere au quarre du costé de la pyramide equilaterale ou tetraedre : BF sera le costé du tetraedre inscrit en la sphere du diametre AB.

Derechef puis que par le mesme corol. de la 8 p.6. AE est moyenne prop. entre AB, AC : & partant comme AB est a AC ainsi le quarre de AB au quarre de AE par le corol. de la 20.p. 6.& AB est double de AC : aussi le quarre de AB sera double du quarre de AE. Parquoy puis que par la 14. p.13. le quarre du diametre de la sphere est double du costé de l'octaedre, AE sera coste de l'octaedre inscrit en la sphere du diametre AB.

Et pour autant que par les mesmes corol. de la 8. & p.20 p. 6. le quarre de de AB est au quarre de AF, cōme AB a AD; & que par la construction AB est triple de AD, le quarre de AB sera triple du quarre de AF. Parquoy veu que par la 15.p.13. le quarre du diametre de la sphere est triple du quarre du costé du cube; AF sera le costé du cube inscrit en la sphere du diametre AB.

Et d'autant que AF est costé du cube, soit iceluy couppé en la moyenne & extreme raison au poinct O, duquel le plus grand segment soit AO: iceluy (par le corol de la 17.p.13.) sera le costé du dodecaedre inscrit en la mesme sphere que le cube, qui est celle-la mesme qui a pour diametre AB.

Quant au costé de l'icosaedre, soit leuee la perpendiculaire BG egale à AB : & apres auoir mene la ligne CG couppant la circonferēce du demy cercle en H, d'iceluy poinct soit menee HI perpend. à AB par la 12.p.1. Or BG estant egale à AB, elle sera double de BC : & partant par la 4 p.6. HI sera doub. de IC : (car les triangles sont equiangles, pource qu'ayans l'angle C commun, & ceux des poincts B & I droicts ; le tiers

G sera egal au tiers H par la 32. p.1.) & par le scholie de la 4. p.2. le quarre de HL sera quadruple du quarre de IC : & partant le quarre de HC (ou de son egale AC) qui par la 47.p.1. est egal a tous les deux, sera quintuple du quarre de CI. Mais d'autant que AD est le tiers du diametre AB, & AC sa moitie: DC sera le demy tiers : & partāt AC sera triple de DC ; & son quarre vaudra neuf fois le quarre de DC, par la 20. p.6. Or iceluy quarre de AC n'est que quintuple du quarre de CI: dōc la ligne CI sera plus grande que DC. Soit prise CK egale à CI, & apres auoir leue la perpendiculaire KL, soit menee la ligne AL. Puis donc que le quarre de AC est quintuple du quarre de CI, par la 15.p.5. le quarre de AB, (la double de AC) sera quintuple du quarre de IK (la double de IC.) Or par le corol. de la 16.p.13. le quarre du diametre de la sphere circonscrite à l'Icosaedre est quintuple au quarré du demy dia. du cercle circōscriuāt 5 costez de l'icosaedre: donc CK sera semidia. c'est à dire coste de l'hexag. d'iceluy cercl. lequel coste de l'hexagone auec deux fois le coste du decagone inscrit dās le méme cercle, est egal au diametre de la sphere AB, par le co. de la mesme 16.p.13. Il faut donc que AK, & IB lignes egales, soiēt les deux costez du decagone inscrit dans le mesme cercle, dans lequel KI est le coste de l'exagone. Mais KI & KL sont egales: (car KL est egale a IH, pour estre en mesme distance du centre C, laquelle estant double de CI sera egale a KI.) Partant KL sera costé de l'exagone, & AK du decagone : & par la 47.p.1. & 10.p.13. AL sera le coste du pentagone inscrit au mesme cercle. Donc il sera aussi le coste de l'icosaedre, par la 16.p 13.

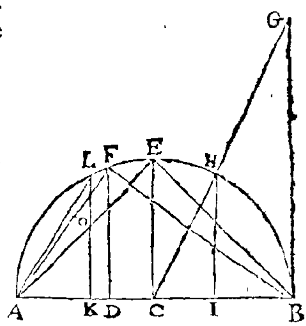
Nous auons donc trouue les costez des 5. figures regulieres inscriptibles en vne mesme sphere.

Maintenant pour le regard de la comparaison d'iceux costez trouuez. D'autant qu'il a esté demonstre que le quarré du diametre de la sphere est sesquialtere au quarre du costé de la pyramide : mais double de celuy du coste de l'octaedre, & triple du quarre du coste du cube; il est euidēt que le quarre du diametre de la sphere estant 6. celuy du coste du tetraedre sera 4: celuy du coste de l'octaedre 3. & celuy du coste du cube 2. Partant le quarre du coste de la pyramide est sesquitierce au quarre de l'octaedre : mais double de celuy du costé du cube. Item le quarre du coste de l'octaedre est sesquialtere a celuy du coste du cube. Parquoy les quarrez des costez d'icelles trois figures, & celuy du diametre de la sphere, sont entr'eux comme nombre à nombre: & partant par la 6 p.10.

Iceluy diametre de la sphere, & costez d'icelles figures sont lignes commensurables, & rationeles, pource que le diametre est pose rationel. Mais les susdits quarrez ne sont entr'eux comme nombre quarre à nombre quarre, ainsi qu'il apert par le corol. de la 24.p.8. Donc icelles lignes (sçauoir le diame-diametre de la sphere, le coste de la pyramide, le costé de l'octaedre, & celuy du cube,) sont incommens. en longitude par la 9.p.10. & partant elles sont rationeles commensu. en puissance seulement.

Et quand aux costez de l'icosaedre, & dodecaedre: pource qu'ils sont lignes irrationeles, il est euident que ils sont incõmens. tant entr'eux, qu'au diametre de la sphere, & aux costez des autres figures.

Or lesquels d'iceux costez sont les plus grands, nous le rendrons manifeste ainsi: d'autant qu'il a este demonstre cy dessus que le quarre de AB est triple du quarre de AF: mais quintuple du quarre de KL, c'est à dire de AL son egale; trois quarrez de AF seront egaux à 5 quarrez de KL. Et puis que AF est couppee en la moyenne & extreme raison en O, & AO est le plus grand segment, il est euident par la 1.p.6. que le rectangle compris de AF, AO sera plus grand que le rectangle de AF, OF: & partant iceux deux rectangles ensemble, seront plus grands que le double du rectangle de AF, OF: Mais à iceux deux rectangles ensemble, est egal le quarre de AF, par la 2.p.2. & au double du rectangle de AF, OF, est egal le double du quarre de AO: (car par la 17.p.6 le simple rectangle de AF, OF est egal au simple quarre de AO.) Donc aussi le quarre de AF sera plus grand que deux fois le quarre de AO: & par consequẽt trois quarres de AF, ou cinq quarrez de kL leurs egaux) seront aussi plus grands que 6. quarrez de AO. Parquoy vn seul quarre de KL sera plus grand



qu'vn seul quarre de AO: & par consequent la ligne KL sera plus grande que AO: Partant AL qui est plus grande qu'icelle KL, sera beaucoup plus grande que la mesme AO coste du dodecaedre. Nous auons donc faict ce qui estoit propose.

SCHOLIE.

Or outre les cinq figures solides cy dessus declarees, on n'en peut trouuer d'autres comprises de superficies planes, equiangles, & equilaterales. Car de deux triangles, ou deux autres superficies planes, on ne comprendra aucun solide, ne pouuant constituer vn angle solide. De trois triangles equilateraux, est constitué l'angle de la pyramide: de quatre, l'angle de l'octaedre: de cinq, l'angle de l'icosaedre: de six triangles equilateraux on ne constituera aucun angle solide: car iceux sont egaux à quatre angles droicts, & tous les angles plãs d'vn angle solide, doiuent estre plus petits que quatre angles droicts par la 21.p.11. Partant on ne pourra constituer vn angle solide de plus de six angles plans. De trois angles droicts est composé l'angle solide du cube: de quatre angles droicts on ne fera aucun angle solide: car ce seroit tousiours contreuenir à la 21. p.11. l'angle solide du dodecaedre est compris de trois pentagones equiangl. De quatre pentagones, il sera impossible: estans iceux plus grãds que quatre droicts. Et de pas vn autre polygone equiangle, on ne pourra constituer aucun angle solide, d'autant qu'il s'ensuyuroit absurdité. Partant il est euident qu'outre les cinq figures regulieres cy dessus declarees, on n'en trouuera point d'autres.

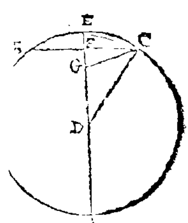
Fin de l'Element treiziesme.

ELEMENT

ELEMENT QVATORZIESME.

THEOR. 1. PROP. I.

LA ligne perpendiculaire menee du centre vers le costé du pentagone inscrit au cercle, est la moitié des deux costez de l'hexagone, & decagone ensemble, inscrits au mesme cercle.

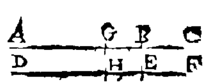


Soit dans le cercle ABC, le costé du pentagone BC, & du centre D soit mené la ligne DF, tombant perpendiculairement sur iceluy costé BC; & icelle estant prolongee de part & d'autre iusques en A & E, elle couppera l'arc BEC en deux egalement, comme la ligne BC par la 3. p.3. ainsi estant tiree la ligne EC, elle sera le costé du decagone, & DE costé de l'hexagone. Ie dis que la perpendiculaire DF est la moitié des deux costez ensemble EC & DE.

Qu'il ne soit ainsi. Apres auoir pris FG egale à FE, soit menee la ligne GC. Puis que l'arc BEC est la cinquiesme partie de la circonferēce du cercle, EC sa moitié sera la cinquiesme partie de la demy circonference ACE : Et partant l'arc AC sera quadruple de CE, & par la 33. p. 6. l'angle CDA sera quadruple de CDE au centre, & double de DEC à la circonference par la 20. p. 3. lequel par ce moyen sera double à CDE: mais par la 4. p. 1. la base CE est egale à la base CG : & par la 5. p. 1. les deux angles sur la base EG seront egaux : & FGC sera double de GDC : & iceluy FGC estant par la 32 p. 1. egal à tous les deux opposez interieurement, les deux angles sur la base DC seront egaux entr'eux : & par la 6. p. 1 GC & GD seront egales ; & EC à chacune d'icelles. Parquoy les deux GF & FE estans egales, la seule FD, sera egale aux deux FE, EC ensemble: & partant les trois ensemble DF, FE, EC, c'est à dire les deux ensemble DE, EC, seront egales au double de la seule DF : & par consequent icelle DF perpendiculairement tiree du centre sur le costé du pētagone, sera moitié des deux ensemble DE, EC, costez de l'hexagone, & du decagone. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 2. PROP. II.

S'il y a deux lignes droictes couppees en la moyenne & extreme raison ; elles seront semblablement couppees.



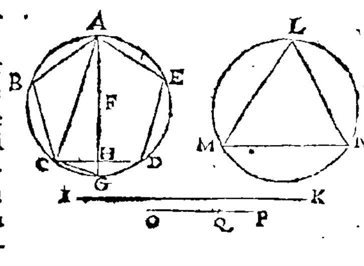
Soient les deux lignes AB & DE couppées en la moyenne & extreme raison aux poincts G & H : leurs plus grands segmens soient AG & DH. Ie dis qu'icelles lignes sont semblablement couppees : c'est à dire que comme AB est à DE, ainsi AG à DH, & GB à HE: Item comme AG à GB, ainsi DH à HE, &c.

Car par la 17. p. 6. comme le rectangle de AB, & GB, sera egal au quarré de AG , ainsi le rectangle de DE & HE sera egal au quarré de DH : & partant quatre fois le rectangle de AB & GB sera au quarré de AG, comme quatre fois le rectangle de DE & HE au quarré de DH : & en composant, (apres auoir adiousté directemēt BC egale à BG ; & EF egale à EH) quatre fois le rectangle de AB & GB auec le quarré de AG (ou par la 8. p. 1. le seul quarré de AC) est au quarré de AG, cōme quatre fois le rectangle de DE & HE, auec le quarré de

DH,(ou le ſeul quarré de DF) eſt au quarré de DH. Parquoy par la 22.p.6. comme AC à AG, ainſi DF à DH: Et en compoſant comme la compoſee de AC, AG, c'eſt à dire la double de AB, eſt à AG, ainſi la compoſee de DF, DH, c'eſt à dire la double de DE, eſt à DH: & en changeant comme la double de AB eſt à la double de DE, ainſi AG à DH: Et par la 15.p.5. comme la double de AB eſt à la doub. de DE, ainſi AB à DE. Donc comme AB ſera à DE, ainſi AG à DH: & partant par la 19.p.5. ainſi ſera auſſi le reſte GB au reſte HE. Parquoy comme AG à DH, ainſi ſera GB à HE, puis que l'vne & l'autre raiſon eſt comme AB à DE: & en permutant comme AG ſera à GB, ainſi DH ſera à HE: & ainſi ſelon toutes les autres manieres d'argumenter es proportions, on demonſtrera toutes lignes, & parties d'icelles eſtre proportioneles entr'elles.

THEOR. 3. PROP. III.

Vn meſme cercle comprend le pentagone du dodecaedre, & le triangle de l'Icoſaedre inſcrit en vne meſme ſphere.



Auparauant que d'expliquer ceſte propſit. il conuient demonſtrer que le quarré du coſté du pentagone auec le quarré de la ligne qui ſouſtient vn angle d'iceluy, eſt quintuple du quarre demy diam du cercle dãs lequel eſt inſcrit iceluy pentagone.

Soit le coſté du pentagone inſcrit dans vn cercle CD, la ligne qui ſouſtient vn angle d'iceluy pentagone CA, le demy diametre FG; lequel couppe en deux egalement, tant l'arc CGH que le coſté CD, par le corol. de la de la 10.p.13. Ie dis que les deux quarrez de CA & de CD ſont enſemble quintuples du quarré de FG.

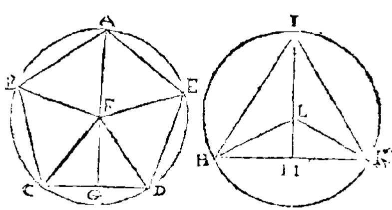
Car ſi on meine CG, ce ſera le coſté du decagone: & par le ſcholie de la 4.p.2. le quarré de AG, ſera quadruple du quarré du demy diametre FG; & par consequent les deux de AC,CG qui par la 47. p 1. sont egaux au quarré de AG, seront aussi quadruple d'iceluy quarré de FG. Parquoy les trois de AC,CG,& GF, seront ensembles quintuples du seul de GF: Mais les deux de CG, & GF, costez de l'hexagone & decagone sont ensemble egaux au quarré de CD costé du pentagone, par la 10.p.13. partant les deux quarrez de AC & CD sont quintuples du seul quarré de GF Ce qui estoit proposé.

Pour la proposition. Soit IK le diametre de la sphere comprenant le dodecaedre & l'icosaedre; & d'iceluy dodecaedre soit vn pentagone ABCDE, & de l'icosaedre soit le triangle equilateral LMN : ie dis qu'vn mesme cercle circonscrit le pentagone ABCDE,& le triangle LMN; c'est à dire que les cercles ABCDE,LMN,qui les circonscriuent sont egaux.

Car estant tiree AC subtendante de l'angle du pentagone B, ce sera le costé du cube inscrit en la mesme sphere, par le corol. de la 17.p.13 & soit exposee la ligne droicte OP, telle que le quarré de IK diametre de la sphere, soit quintuple du quarre d'icelle OP : laquelle OP sera egale au demy diametre du cercle, dans lequel on construit l'icosaedre par le corol. de la 16.p.13 soit icelle OP couppee en la moyenne & extreme raison en Q; & le plus grand segment OQ sera costé du decagone inscrit au mesme cercle, dont OP est costé de l'hexagone ou semi diametre, par le corol. de la 9. propo.13. Mais par la 7. prop.13. lors que CA est diuisee en la moyenne & extreme raison, son plus grand segment est AB : Donc par la 2. prop. 14. comme la toute AC sera à la toute OP, ainsi le plus grand segment AB, sera au plus grand segment OQ: partant par la 22. p. 6. comme le quarré de AC sera au quarré de OP,ainsi le quarré de AB sera au quarré OQ;&par la 4.p.5.comme le triple du quarre de AC est au quintuple du quarre de OP,ainsi le triple du quarre de AB est au quintuple du quarre de OQ.Mais le triple du quarre de AC est egal au quintuple du quarre de OP: (pource que le quarre de IK diametre de la sphere,est egal,tant au triple du quarre de AC coste du cube, par la 15. p. 13. que au quintuple du quarre de OP par l'hypotese.) Donc aussi le triple du quarre de AB sera egal au quintuple du quarre de OQ Or par le corol. de la 16. p 1 ML costé du triangle de l'icosaedre,est egal au costê du pentagone inscrit dans le cercle, dont OP est demidiametre; & partant puis que par la 10.p.13. le quarre d'iceluy costé est egal aux deux quarrez de OP,& OQ,costez de l'hexagone & du decagone; cinq quarrez de ML, sont egaux à cinq quarrez de OP, & à cinq de OQ : ou à trois de BA, & trois de AC. Parquoy les deux quarrez de BA, & AC estans quintuples du quarre du demy-diametre FA, (cõme nous auons demonstré au commencement de ceste proposition) trois quarrez de AB, & AC seront egaux à quinze quarrez du demy diametre FA. Mais cinq quarrez de ML, costé du triangle equilateral, sont aussi egaux à quinze quarrez du demy diametre du cercle LMN : (car chacun quarre de ML est triple du quarre du demy diametre, par la 12. proposition du 13.) Donc les trois de BA & AC, estans egaux aux cinq de ML, les quinze du demy diametre FA, seront egaux aux quinze du demy diametre du cercle LMN. Partant vn quarre d'iceux sera egal à vn quarré, & le demy diametre au demy-diametre, & par consequent les cercles ABCDE, LMN seront egaux : ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 4. PROP. IIII.

Si du cẽtre du cercle circõscriuant le pẽtagone du dodecaedre, on meine vne ligne perpẽdiculaire sur vn costé d'iceluy pentagone ; trente fois le rectangle compris de la perpẽdiculaire, & du costé du pentagone, sont egaux à toute la superficie du dodecaedre.



Soit le cercle ABCDE circonscriuant vn pentagone d'vn dodecaedre, & le centre d'iceluy cercle soit F, duquel soit tiree FG perpendiculairemẽt sur le costé CD. Ie dis que trente fois le rectangle compris de la perpẽdiculaire FG & costé CD, sont egaux a la superficie du dodecaedre.

Car ayant tiré les lignes FA, FB, FC, FD, FE : il est euident par la 41. p. 1. que le rectangle compris de FG, CD, est double du triangle CFD. Or en la superficie du dodecaedre, il y a douze pentagones egaux, & chasque pẽtagone à cinq pareils triangles que CFD, qui sont en tout soixante triangles, desquels soixante rectangles, seroient le double : Donc trente rectangles de FC, & CD, leur seront egaux.

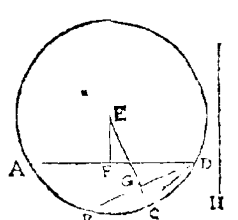
Nous demonstrerons semblablement que si vn triangle equilateral, comme HIK, est inscrit en vn cercle, du centre duquel L, on tire sur le costé HK la perpendiculaire LM : trente fois le rectang. de LM & HK, seront egaux à la superficie de l'Icosaedre. Car icelle superficie contient vingt triangles equilateraux semblables à HIK ; & chacun d'iceux se diuise en trois egaux entr'eux, & semblables & egaux à HLK, qui font en tout soixante triangles comme HLK : mais le rectangle de la perpendiculaire LM & du costé HK, est double du triangle HLK, par la 41.p.1. Et par consequent soixante rectangles seroient doubles de soixante triangles : Donc trẽte rectangles de LM & HK seront egaux à la superficie totale de l'icosaedre.

COROLLAIRE.

De cecy resulte, par la 15.p.5. que comme vn seul rectangle de FG & CD, est à vn seul rectangle de LM & HK, ainsi la superficie du dodecaedre à la superficie de l'icosaedre.

THEOR. 5. PROP. V.

Comme la superficie du dodecaedre, est à la superficie de l'icosaedre; ainsi le costé du cube au costé de l'icosaedre, inscrits en vne mesme sphere.



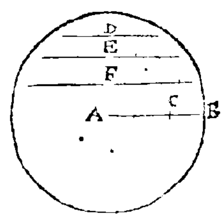
Dans le cercle donné ABCD soit pris AD le costé du triangle equilateral de l'icosaedre, & dans le mesme cercle le costé du pentagone du dodecaedre (ce que nous auons monstré estre possible par la 3.p.14. qu'vn mesme cercle cõprent & le triangle de l'icosaedre, & le pentagone du dodecaedre.) Soit donc iceluy costé du pentagone

BD, & du centre E soient tirees sur AD, BD les perpendiculaires EF, EG : & icelle EG estant prolongee iusques à la circonference, elle couppera l'arc BCD en deux egalement en C : & estant tiree la ligne droicte CD, ce sera le costé du decagone : & finalement soit exposee la ligne droicte H costé du cube inscrit en la mesme sphere. Ie dis que la superficie du dodecaedre, est à la superficie de l'Icosaedre, comme H costé du cube, est à AD costé de l'Icosaedre.

Car d'autant que EC est costé de l'hexagone, & CD costé du decagone inscrit en vn mesme cercle; la cõposee d'iceux costez, sera couppee en la moyenne & extreme raison, dont le plus grand segment sera EC par la 9.p.13.& par la 1.p.14. la moitié d'icelle composee est EG ; & par le corol. la 12. p. 13. la moitié d'iceluy plus grand segment est EF : Et partant puis que par la 15.p.5. les toutes sont aux toutes, comme les moitiez aux moitiez : il est euident que la moitié EG estant couppee en la moyenne & extreme raison, la moitié EF sera le plus grand segment; (car la moitié du plus grand segment, & la moitié du plus petit faict la moitié de la toute.) Mais par le corol. de la 17.p.13. H costé du cube estant aussi couppé en la moyenne & extreme raison, son plus grand segment sera BD costé du dodecaedre. Donc par la 2.p.14. comme la toute H, sera à BD son plus grand segment, ainsi la toute EG sera à EF son plus grand segment : Et partant par la 16. p. 6. le rectangle compris des extremes H, EF, sera egal au rectangle des moyennes BD, EG. Et pource que par la 1.p.6. comme H est à AD, ainsi le rectangle de H, EF, est au rectangle de AD, EF : aussi comme H sera à AD, ainsi le rectangle de BD, EG (lequel est egal à celuy de H, EF) est au mesme rectangle cõpris sous AD, EF. Parquoy puis que par le corol. de la preced. comme le rectangle compris sous BD, EG, est au rectangle compris de AD, EF, ainsi la superficie du dodecaedre est à la superficie de l'icosaedre : pareillement comme H costé du cube sera à AD costé de l'icosaedre, ainsi sera la superficie du dodecaedre à la superficie de l'Icosaedre. Ce qu'il falloit prouuer.

THEO. 6. PROP. VI.

Si vne ligne droicte est couppee en la moyenne & extreme raison ; cõme les deux quarrez de la toute & du plus grand ſegment, ſont aux deux quarrez de la toute & du plus petit ſegmẽt, ainſi le quarré du coſté du cube, eſt au quarré du coſté de l'icoſaedre inſcrit en vne meſme ſphere.



Soit le cercle comprenant & le triangle de l'icoſaedre, & le pentagone du dodecaedre, duquel le demy diametre AB, ſoit couppé en la moyenne & extreme raiſon en C, le plus grand ſegment ſoit AC, lequel ſera le coſté du decagone inſcrit dans le meſme cercle par le corol. de la 9. p. 13. Item ſoient priſes trois lignes, D coſté du dodecaedre, E coſté de l'icoſaedre, F coſté du cube: Ie dis que le quarré de F, eſt au quarré de E comme les deux quarrez de AB & AC ſont aux deux quarrez de AB & CB.

Car D eſtant le coſté du pentagone, & E coſté du triang. tous deux inſcrits dans le cercle donné; lors que F coſté du cube eſt diuiſé en la moyenne & extreme raiſon, D eſt ſon plus grand ſegment, par le corol de la 17 p. 13. Donc E eſtant le coſté du triangle inſcrit au cercle donné, ſon quarré ſera triple du quarré du demy diametre AB par la 12. p. 13. & par la 4. p 13. les deux quarrez de AB & CB ſont triples du quarré de AC: Ainſi le quarré de E, eſt au quarré de AB, comme les 2. quarrez de AB, CB ſont au quarré de AC: Et en changeant le quarré de E, ſera aux deux quarrez de AB, CB, comme le quarré de AB au quarré de AC. Mais comme le quarré de AB au quarré de AC, ainſi le quarré de F au quarré de D: (car par la 2 p. 14. comme la toute AB eſt à ſon plus grand ſegmẽt AC, ainſi la toute F à ſon plus grand ſegment D; & partant par la 22. p. 6. comme le quarré de AB au quarré de AC, ainſi le quarré de F ſera au quarré de D) donc par la 11. p. 5. comme le quarré de E aux quarrez de AB & CB, ainſi le quarré de F, au quarre de D: Et en changeant comme le quarre de E au quarre de F. ainſi les quarrez de AB & CB, ſont au quarre de D, coſté du pẽtagone: lequel par la 10. p 13. eſt egal aux deux quarrez de AB & AC coſtez de l'hexagone & decagone inſcrits en vn mesme cercle ; & par consequent le quarre de F costé du cube est à E costé de l'Icosaedre, comme les deux quarrez de AD & AC, sont aux deux quarrez de AB & CB. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 7. PROP. VII.

Comme le costé du cube au costé de l'icosaedre, ainsi le dodecaedre à l'icosaedre, inscrits en vne mesme sphere.

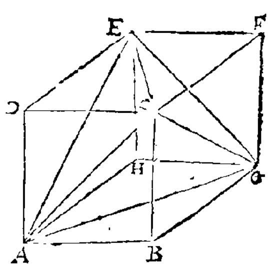
Ceste demonstration est facile, les precedẽtes estans bien entendues : Car puisque par la 3.p.14. le pentagone du dodecaedre, & le triangle de l'icosaedre sont inscrits dans vn mesme cercle : il est euident qu'iceux triangle & pentagone serõt equidistans du centre de la sphere. Parquoy si on diuise le dodecaedre & l'icosaedre en pyramides, toutes icelles pyramides tant de l'vn que de l'autre solide serõt de mesme hauteur: Et par les 5.& 6.p.12. elles seront l'vne à l'autre, comme leurs bases, c'est à sçauoir douze pyramides du dodecaedre à vingt pyramides de l'icosaedre, comme douze pentagones à vingt triangles : C'est à dire que comme la superficie du dodecaedre à la superficie de l'icosaedre, ainsi tout le dodecaedre à tout l'icosaedre. Mais par la 5. p. 14. icelles superficies sont l'vne à l'autre, comme le costé du cube au costé de l'icosaedre: donc par la 11.p.5. comme le costé du cube au costé de l'icosaedre: ainsi le dodecaedre à l'icosaedre. Ce qui estoit à prouuer.

Fin du quatorziesme Element.

ELEMENT QVINZIESME.

PROB. 1. PROP. I.

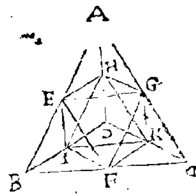
DANS vn cube donné, inſcrire vne pyramide.



Soit le cube donné AF, dans lequel il faut inſcrire vne pyramide. Soient menez les digonales AE, EC, EG, & des extremitez d'icelles A, C, G, ſoient auſſi menees les diagonales AG, AC, GC: Toutes leſquelles diagonales sõt egales entr'elles, parce que les ſix quarrez dans leſquelles elles ſont menees ſont egaux par la definition du cube: Partant les quatre triangles compoſez d'icelles AGE, ACE, ACG, ECG, ſont equilateraux, & egaux entr'eux: & partant la pyramide AEGC conſtituee d'iceux triangles eſt inſcrite au cube donné AF, par la 30. d. 11. Car tous les angles d'icelle ſont colloquez és adgles d'icelles cube propoſé.

PROB. 2. PROP. II.

Dans vne pyramide donnee, inſcrire vn octaedre.

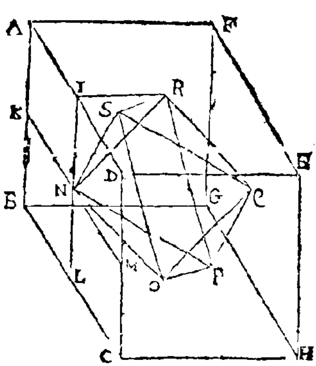


Soit la pyramide donnee ABCD, dans laquelle il faut inſcrire vn octaedre. Soient couppez tous les coſtez d'icelle pyramide en deux egalement aux poincts E,F,G,H,I,K : Et ſoient menees les lignes EF, FG, GE, HI,IK, KH,EI,IF,FK,KG,GH, HE. Toutes leſquelles lignes ſont egales entr'elles, par la 4.p.1. eſtant toutes les lignes couppees egales, & les angles des triangles plans de la pyramide egaux: Et partant le quadrilatere EGKI à les quatre coſtez egaux, & les quatre triãgles EHI,IHK,KHG.GHE,cõmençãs ſur iceluy quadrilatere,& finiſſans au poinct H, ſont tous equaliteraux & egaux entr'eux. Itẽ les quatre autres triãgles IFE,EFG, GFK, KFI commençans au deſſoubs du quadrilatere,& finiſſans au poinct F,ſõt auſſi equilateraux & egaux tant entr'eux qu'aux 4.precedans.Parquoy la figure EIKGHF compoſee d'iceux 8. triangles eſt vn octaedre,par la 26.d.11.& par la 30.d.11.il eſt inſcrit dans la pyramide donnee ABCD puis que tous les angles d'iceluy touchent les coſtez d'icelle pyramide.

PROB. 3. PROP. III.

Dans vn cube donné, inſcrire vn octaedre.

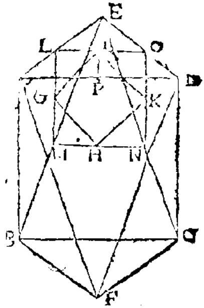
Soit le cube donne AH , dans lequel il faut inſcrire vn octaedre. Soient couppez en deux egalement les coſtez du quarre AC,es poincts I,K, L M,& ſoient menees les deux lig. IL,KM, s'entre-coupans en N , lequel poinct ſera le centre du quarre AC,comme il appert par la demonſtration de la 8. p.4. Par la meſme maniere ſeront trouuez les centres des 5. autres quarrez du cube, leſquels centres ſoient O,P,Q,R,S: Donc toutes les lignes droictes tirees d'iceux centres a chaſque poinct de la section des costez de leurs quarrez, telles que sont NI NK, NL, NM, NR, &c. seront egales aux moitiez d'iceux costez, comme il appert par la susdite demonstration de la 8. p. 4. Item soient tirees les quatre lignes droictes NP, PQ, QS, SN, lesquelles seront toutes egales, par la 4. p. 1. d'autant qu'elles sont bases de quatre triangles ayans deux costez egaux à deux costez, & vn angle egal à vn angle: Il est euident que icelles quatre lignes seront aussi vn quarre qui est au milieu de l'octaedre. Or des quatres angles d'iceluy quarre soient menees les quatre lignes NR, PR, QR, SR, vers le poinct R, lesquelles comme il a esté dit cy-dessus seront toutes egales tant entr'elles qu'aux quatre precedentes, & seront les quatres triangles equilateraux NRP, PRQ, QRS, NRS: Item des mesmes quatres angles au dessoubs du quarre vers le centre D, soiēt aussi menees les lignes NO, PO, QO, SO, qui seront egales comme dessus, & seront quatres autres triangles equilateraux NOP, POQ, QOS, NOS, lesquels seront aussi egaux aux quatre premiers Parquoy le solide NOPQRS composé d'iceux 8 triangles equilateraux & egaux entr'eux est Octaedre inscrit au cube donné, par les 26. & 30. d. 11.



PROB. 4. PROP. IIII.

Dans vn octaedre donné, inscrire vn cube.

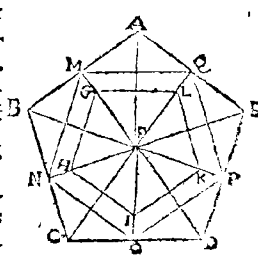
Soit donné l'octaedre ABCDEF, dans lequel il faut inscrire vn cube des quatre triangles AEB, BEC, CED, AED, qui se terminent au poinct E. Soient pris les centres G, H, I, K, & soient menees les lignes GH, HK, KI, GI: Il est euident que GHKI sera quarre. Car si d'iceux quatre centres on meine les lignes droictes LM, MN, NO, OL, paralleles chacune à son costé du quarré du milieu de l'octaedre ABCD: les triãgles LEM, MEN, NEO, LEO seront equilateraux, puis qu'ils



ſont ſemblables aux triangles equilateraux cy deſſus par le corol. de la 4. p. 6. & partant egaux entr'eux, pource qu'ils ont les coſtez communs ; & par conſequẽt les quatre baſes LM, MN, NO, LO ſont egales. Item ſi de E par le centre I on meine EP : elle diuiſera l'angle E en deux egalement : & par conſequent LI ſera egale à IO, c'eſt à dire que LO ſera couppee en deux egalement au centre I: Par meſme raiſon LM, MN, NO ſeront auſſi couppez en deux egalement aux cẽtres G, H, K. Ainſi les 4 triangles GLI, IOK, GMH, HNK ſont Iſoſceles rectang. (Car par la 10. p. 11. les angles des poincts L, M, N, O, ſont egaux aux droicts du quarre ABCD.) Parquoy les 4 baſes GI, IK, GH, HK ſeront egales, & les angles qu'elles comprennent droicts : partant GHKI eſt quarre. Que ſi ſemblablement des autres triang. de l'octaedre on prend les centres : iceux centres eſtans tous conioincts par lignes droictes, ſeront deſcrits encores 5 quarrez, leſquels ayans les coſtez communs ſeront egaux entr'eux. Parquoy le cube compoſe d'iceux 6 quarrez ſera inſcrit dans l'octaedre donne, puiſque les angles d'iceluy touchent les baſes de l'octaedre.

PROB. 5. PROP. V.

Dans vn icoſaedre donné, deſcrire vn dodecaedre.



Soit ABCDE le pentagone par le moyen duquel on conſtruit l'icoſaedre, ſur lequel ſoit vne des 12. pyramides pentagonales de l'icoſaedre ayant pour ſommet le poinct F, auquel s'aſſemblent les 5 triang. equilateraux ABF, BCF, CDF, DEF AEF, & ſoit trouue le centre de chacun d'iceux triangles aux poincts G, H, I, K, L, & d'iceux ſoient menees les lignes HG, GL, LK, KI, IH:

Item de F par iceux centres, soient menees les lignes FM, FN, FO, FP, FQ, lesquelles coupperōt en deux egalemēt les costes AB, BC, CD, DE, EA, comme il apert par le corol. de la 10. p. 13. & partant estant menees les lignes droictes MN, NO, OP, PQ, QM ; il est euident par la 4. p. 1. quelle seront egales; & que par la 8. p. 1. les angles qu'elles soustiennent au poinct F sont egaux ; & d'autant que les lignes FG, FH, FI, FK, FL sont aussi egales; (car ce sont demis diametres de cercles circonscriuans triangles equaliteraux egaux) les lignes GH, HI, IK, KL, LG seront pareillement egales, & les angles de dessus icelles aussi egaux, par la 4. p. 1. Parquoy le pentagone GHIKL est equilateral & equiangle : & il se prouuera aisement comme à la 17. p. 13. qu'il est aussi en vn mesme plan. Que si semblablement on conioinct par lignes droictes, les centres de tous les triangles des autres 11. pyramides de l'icosaedre, seront aussi descris des pentagones equaliteraux & equiangles, lesquels puis qu'ils ont des costez communs, seront aussi egaux entr'eux. Parquoy 12. tels pentagones constitueront vn dodecaedre, lequel sera inscrit dans l'icoaedre, puis que les 20. angles touchent les vingts bases de l'icosaedre.

Fin du quinziesme & dernier Element.

Extraict du Priuilege du Roy.

PAR grace & priuilege du Roy, il est permis à D. Henrion Mathematicien, de faire imprimer par tel Imprimeur que bon luy semblera, Les Elements d'Euclide, qu'il a traduicts de Latin en François, & ce iusques au terme de six ans finis & accomplis, à compter du iour que ledit liure sera acheué d'imprimer : pendant lequel temps defences sont faictes à tous Imprimeurs, Libraires, & autres personnes de quelque estat & condition qu'ils soient, d'imptimer ou faire imprimer, alterer ny extraire aucune chose dudit liure, d'achepter, vendre, ny distribuer aucune indeuë impression d'iceluy, sur peine de mille liures d'amende, & confiscation des liures & exemplaires d'iceux, qui se trouueront d'autre impression que de celle qu'aura faict faire ledict Henrion. Voulant en outre sa Majesté, qu'en apposant au commencement ou à la fin dudit liure vn extraict des presentes, elles soient tenuës pour bien notifiees & signifiees, nonobstant quelconque lettre au contraire : Car tel est le plaisir de sa Majesté. Donné à Paris le vingt-sixiesme Septembre 1614.

Par le Roy en son Conseil,

ADDEE.

Ces Elements d'Euclide ont esté acheuez d'imprimer le 15. Octobre de ladicte annee 1614.