

**COURS**

**DE**

**PHYSIQUE**



COURS  
DE  
PHYSIQUE

CONFORME AUX PROGRAMMES  
DES CERTIFICATS ET DE L'AGRÉGATION DE PHYSIQUE

PAR  
H. BOASSE  
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

---

PREMIÈRE PARTIE  
MÉCANIQUE PHYSIQUE



PARIS  
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE  
15, RUE SOUFFLOT



## AVANT-PROPOS

*Pour juger équitablement ce traité, il ne faut pas oublier qu'il s'agit, dans la stricte acception du mot, d'un cours, d'un recueil des questions fondamentales dont la connaissance est exigée pour le Certificat de physique générale et l'Agrégation. Il n'a qu'une prétention : être utile aux étudiants.*

*Suivant ses préférences, le lecteur trouvera que je développe immodérément telle question et que je sacrifie telle autre. Si, en possession du contenu de ce livre, il est à même de lire les traités plus complets sur tous les points essentiels de la Physique, il doit en bonne justice se déclarer satisfait. Les examens et les traités qui y préparent, n'ont d'autre objet que d'assurer des bases solides pour le travail ultérieur.*

*J'utilise, quand il le faut, l'algorithme mathématique. Il me paraît difficile de comprendre la Physique sans savoir, au moins en pratique, le sens des équations différentielles et des intégrales. Ce sont des formes générales de raisonnement ; il est plus simple de les étudier une fois pour toutes in abstracto, que d'expliquer en langage vulgaire, à chaque pas d'un Cours de Physique, ce qu'elles signifient.*

*Je ne reviens pas sur les questions élémentaires traitées dans le Cours que j'ai publié en collaboration avec M. Brizard, et auquel je renvoie.*

*Ce livre contient-il des erreurs? Quel livre n'en contient pas! Le lecteur, tenté d'être trop sévère à cet égard, voudra bien considérer le labeur que je me suis imposé pour lui faciliter sa tâche. Je me rends compte de l'audace qu'il y a de parler de toute la Physique, quoique ce soit par définition le métier du professeur.*

---

<sup>1</sup> Cours des classes de Seconde, de Première C et D et de Mathématique A.  
Cours de Physique. — H. BOUSSE.

*Ce Cours se divise en quatre parties, formant des traités indépendants et qui paraîtront dans l'année :*

- I. Mécanique physique.**
- II. Thermodynamique.**
- III. Électricité et Magnétisme.**
- IV. Optique. Étude des Symétries.**

*La première partie renferme, exposées de la manière la plus élémentaire, les principales applications de la Mécanique rationnelle à la Physique, d'où le titre choisi. J'espère qu'il rendra des services non seulement aux futurs physiciens, pour lequel il est spécialement écrit, mais encore à ceux qui étudient pour le certificat de Mécanique rationnelle, ainsi qu'aux élèves de l'École Polytechnique et de l'École Centrale.*

*En particulier ceux dont l'esprit est tourné vers les applications, ne sont pas entièrement satisfaits de la forme abstraite généralement donnée en France à la Mécanique rationnelle. Ils n'en trouvent pas l'exposition assez physique; ils n'en saisissent pas l'intérêt, faute d'exemples. Il serait injuste d'accuser les professeurs de Mécanique, d'abord parce que leur temps est limité, ensuite parce qu'ils subissent le poids d'une longue tradition. En Angleterre, l'orientation des Études mécaniques est très différente; le court traité que j'offre au public se rapproche beaucoup de ce que les Anglais appellent « Dynamics ». Dans le désir d'être utile à ces étudiants, j'ai ajouté à mon exposition des développements (chap. VI, IX et fin du chap. XI) que les étudiants en Physique passeront, s'ils veulent se limiter strictement aux programmes, mais que cependant je ne saurais trop leur recommander, s'ils veulent se familiariser avec les dérivées partielles, écueil coutumier des débutants.*

*L'étude des flux et des actions en raison inverse du carré de la distance aurait pu prendre place dans ce premier volume. J'ai préféré la maintenir en tête de la troisième partie.*

# COURS DE PHYSIQUE

---

## CHAPITRE I

### PRINCIPES GÉNÉRAUX DE LA MÉCANIQUE APPLICATION A QUELQUES PROBLÈMES USUELS<sup>1</sup>

**1. Principe général de la statique.** — DÉFINITION DES LIAISONS. — On appelle *liaison* tout ce qui limite les déplacements possibles des corps. Ainsi le fil inextensible qui soutient un pendule, est une *liaison*, parce qu'il empêche le pendule de s'écarter du point d'attache  $O$  du fil, de plus de sa longueur  $l$ . Si nous remplaçons le fil par une barre rigide, chaque point du pendule doit rester sur une sphère de rayon  $l$  dont le centre est en  $O$ . Si enfin nous supposons que la barre, qui était mobile en tous sens autour du point  $O$ , est maintenant fixée par un couteau ou une lame de ressort, comme dans les horloges, et par conséquent tourne autour d'un axe  $AB$ , le nombre des liaisons se trouve encore augmenté : chaque point du pendule ne peut plus se mouvoir que sur une circonférence située dans un plan normal à  $AB$ .

Les déplacements sont dits *compatibles avec les liaisons*, lorsqu'ils sont possibles sans supprimer ces liaisons.

**DEGRÉS DE LIBERTÉ. DÉPLACEMENTS INDÉPENDANTS.** — Considérons un point libre de se déplacer sur un plan : choisissons deux axes de coordonnées. Tout petit déplacement peut être considéré comme la résultante de deux petits déplacements parallèles aux axes : on dit qu'il y a *deux degrés de liberté* et *deux déplacements indépendants*. En effet, on peut se donner arbitrairement les deux composantes : le déplacement résultant est possible.

Considérons une usine tout entière, si compliquée qu'elle soit. Mettons en mouvement un arbre quelconque : tous les autres arbres, toutes les poulies, toutes les machines... vont se mettre en mouve-

---

<sup>1</sup> Le lecteur ne doit pas chercher dans ce chapitre un cours complet de Mécanique Rationnelle. On lui rappelle seulement les propositions fondamentales. Quelques-unes sont même énoncées sans démonstration. Des exemples montrent leur intérêt *physique*.

ment, puisque tout est solidaire<sup>1</sup>. Nous n'avons plus *qu'un seul degré de liberté et qu'un seul déplacement indépendant*. De même pour une montre (exception faite pour le balancier), dont tous les rouages sont liés.

Reprenons l'exemple du pendule. Supposons un fil souple et inextensible. Le point matériel qui forme le pendule, peut d'abord se déplacer sur la sphère de rayon  $l$  : il a sur cette sphère deux degrés de liberté et deux mouvements indépendants. Mais à l'intérieur de cette sphère, il peut occuper une position quelconque : il y a *trois degrés de liberté*. En effet, prenons trois droites formant un trièdre trirectangle. Tout déplacement peut se décomposer en trois déplacements parallèles aux arêtes du trièdre (axes de coordonnées); et réciproquement, si l'on donne arbitrairement trois déplacements quelconques parallèles à ces axes, le déplacement résultant est possible, compatible avec les liaisons, pourvu que l'on ne sorte pas de la sphère.

Soit enfin un corps libre dans l'espace : le nombre des déplacements indépendants est de six. Je prends arbitrairement comme ci-dessus trois axes de coordonnées. Je peux donner au corps soit de petites translations parallèles à chacun des axes, soit de petites rotations autour de ces axes. Or chacun de ces mouvements ne gêne en rien les autres : il existe bien six mouvements différents indépendants; le mouvement résultant est possible. Supposons que j'impose au corps un axe de rotation, le long duquel il peut glisser : il existe deux mouvements indépendants, le mouvement de rotation et le mouvement de glissement. Enfin, si le corps ne peut pas glisser sur son axe, il n'a plus qu'un degré de liberté, qu'un déplacement indépendant, le mouvement de rotation.

Ceci posé, nous admettrons le principe général suivant : *Un déplacement compatible avec les liaisons ne peut se faire sous l'action d'un système de forces, que s'il en résulte un travail positif de ces forces. Si donc le déplacement correspond à un travail nul, il ne se fera pas ; le système sera en équilibre pour ce déplacement. Si cette condition est réalisée pour tous les déplacements indépendants, il l'est pour tous les déplacements possibles, le corps reste au repos : on dit qu'il y a équilibre.*

*Des forces sont équivalentes par rapport aux déplacements d'un système de corps, lorsqu'elles fournissent le même travail, pour tous les déplacements compatibles avec les liaisons : elles peuvent d'ailleurs ne pas être équivalentes pour d'autres déplacements.*

**2. Expression algébrique du principe du travail.** — Soient  $a, b, c, \dots$  les variables *toutes indépendantes* qui déterminent les mou-

<sup>1</sup> On suppose, bien entendu, les courroies inextensibles et les engrenages sans temps perdu.



vements possibles du système. Le travail  $d\mathcal{C}$  pour un déplacement quelconque infiniment petit peut être mis sous la forme :

$$d\mathcal{C} = A da + B db + C dc + \dots$$

A, B, C, ... sont des fonctions de  $a, b, c, \dots$

Les quantités A, B, C... s'appellent *forces suivant les variables*  $a, b, c, \dots$ . Si  $a$  a les dimensions d'une longueur, A est effectivement une force. Si  $a$  a les dimensions d'un angle, A est un couple. Si  $a$  a les dimensions d'un volume, A est une pression, etc.

Soient X, Y, Z les composantes d'une force appliquée au point  $x, y, z$  qui se déplace; le travail effectué par cette force est :

$$d\mathcal{C} = X dx + Y dy + Z dz.$$

Soit C le couple appliqué à un corps qui tourne de  $dx$  autour de l'axe du couple; le travail effectué par le couple est :

$$d\mathcal{C} = C dx.$$

Soit  $p$  la pression normale et uniforme appliquée à un corps dont le volume varie de  $dv$ , le travail effectué par le corps contre la pression extérieure est :

$$d\mathcal{C} = p dv.$$

Puisque par hypothèse les variables  $a, b, c, \dots$  sont toutes indépendantes, les conditions d'équilibre sont exprimées par les relations :

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \dots$$

La condition d'équilibre relative à l'une des variables,  $a$  par exemple, est  $A = 0$ . Si cette relation est satisfaite pour un système de valeurs des variables  $a, b, c, \dots$ , nous sommes assurés que le mécanisme ne tend pas à se déformer de manière à entraîner une variation de  $a$ .

**3. Exemples d'application du principe.** — Nous avons déjà prouvé (Cours de Seconde, § 24 et sq.) que le principe du travail est satisfait pour toutes les machines simples. Nous pourrions réciproquement déduire de ce principe les conditions d'équilibre de ces machines; c'est un exercice que nous laissons au lecteur et qui prouve l'équivalence, comme fondement de la Mécanique, du principe du travail et du principe de la composition des forces suivant la règle du parallélogramme. Le premier est plus commode dans la majorité des cas; surtout il est susceptible de généralisations importantes en Thermodynamique et en Électricité.

Voici deux exemples empruntés aux machines usuelles.

**Vis.** — On appelle *pas de vis* le chemin dont la vis s'avance dans la direction de son axe, quand on la fait tourner d'un tour. Supposons que la vis porte comme tête un disque de rayon R, sur le pourtour duquel nous exerçons une force tangentielle F. Cherchons à équilibrer à l'aide de cette force tangentielle une force P qui s'exerce sur la pointe de la vis et dans la direction de son axe. Quand la tête

tourne d'un tour, le travail de la force  $F$  est  $2\pi RF$ ; la vis avance de la longueur de son pas  $a$ ; le travail de la force  $P$  est  $Pa$ .

$$\text{On a :} \quad 2\pi RF = Pa, \quad F = \frac{a}{2\pi R} P.$$

Le pas est généralement un petit nombre de millimètres;  $R$  peut être quelconque; on s'explique comment il est possible avec des vis d'exercer des pressions énormes (applications: pressoirs, copies de lettres, etc.).

BALANCE DE ROBERVAL (fig. 1). — Imaginons un parallélogramme articulé CDEF tournant autour de deux axes fixes A et B, placés au milieu de deux de ses côtés.

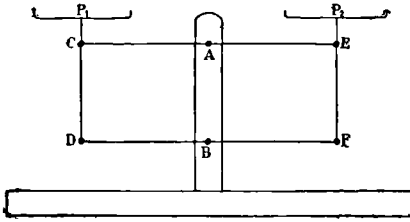


Fig. 1.

Les déplacements à chaque instant de tous les points de deux corps posés n'importe comment sur les plateaux  $P_1$  et  $P_2$  sont égaux. En effet, les tiges CD et EF restent parallèles à elles-mêmes dans leurs déplacements: elles subissent à *chaque instant* des mouvements de *translation* égaux. En particulier, l'une monte

autant que l'autre descend. Donc des poids égaux placés sur les plateaux se font équilibre, d'après le principe général du travail. La pesée consiste à déterminer la position d'équilibre du système mobile seul, à placer les corps à peser sur l'un des plateaux et des poids marqués sur l'autre, jusqu'à ramener le système dans sa position initiale. On dispose la ligne AB à peu près verticalement, quoique cette condition ne soit pas essentielle; mais c'est alors que la balance a le plus de sensibilité.

Pour que la balance ait une position d'équilibre stable, il faut que le centre de gravité du fléau CE soit suffisamment au-dessous de l'axe correspondant A, ou le centre de gravité du fléau DF suffisamment au-dessous de l'axe B.

**4. Suspension bifilaire.** — Une suspension bifilaire se compose de deux fils fins AB, égaux et parallèles. Ils sont attachés en deux points fixes A, A, situés dans le même plan horizontal. Ils supportent une pièce BB de poids  $P$ , à laquelle on applique un couple horizontal  $\Gamma$ . On demande l'angle de rotation de la partie inférieure du système autour de l'axe vertical  $OO_1$  qui passe par le milieu des droites AA et BB.

Soit  $l$  la longueur des fils,  $2a$  leur distance AA,  $\alpha$  l'angle de torsion,  $\theta$  l'angle que fait l'un des fils avec sa position verticale initiale.

Le travail que l'on effectue *contre* la pesanteur quand on passe de la position initiale à la position actuelle définie par l'angle  $\theta$ , est

égal au produit du poids  $P$  par la hauteur  $O_1O'$  dont il a été soulevé; son expression est  $Pl(1 - \cos \theta)$ .

Quand  $\theta$  augmente de  $d\theta$ , le travail augmente de  $Pl \sin \theta d\theta$ .

Soit  $\Gamma$  le moment du couple horizontal actuellement appliqué au corps  $BB$ : c'est une fonction de l'angle  $\alpha$  qu'il faut déterminer. Le travail effectué par ce couple pendant la rotation  $d\alpha$  est  $\Gamma d\alpha$ .

L'expression générale du travail est :

$$d\mathcal{C} = \Gamma d\alpha - Pl \sin \theta d\theta.$$

Mais il n'y a qu'une seule variable indépendante: il faut donc exprimer  $\theta$  en fonction de  $\alpha$ .

Comparons l'expression de  $DC$  dans les triangles  $O'DC$  et  $ADC$ . On trouve aisément la relation :  $2a \sin \frac{\alpha}{2} = l \sin \theta$ ; éliminons  $\theta$

entre les deux équations. Écrivons enfin, pour appliquer le principe général, que le travail est nul pour une variation  $d\alpha$ , ce qui revient à écrire que le coefficient de  $d\alpha$  est nul; il vient :

$$\Gamma = \frac{Pa^2}{l} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \frac{4a^2}{l^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}.$$

Dans toutes les applications de cet appareil,  $4a^2 : l^2$  est généralement très petit, de l'ordre de  $1/1000$  par exemple. L'angle  $\alpha$  est lui-même petit. On peut donc poser très approximativement :

$$\Gamma = \frac{Pa^2 \sin \alpha}{l},$$

jusqu'à des angles considérables.

Enfin si  $\alpha$  est lui-même très petit, on a :  $\Gamma = \frac{Pa^2 \alpha}{l}$ .

Le couple appliqué au corps  $BB$  est mesuré par la rotation  $\alpha$ , qu'on détermine généralement par la méthode de Poggendorff.

**5. Détermination algébrique des coordonnées du centre de gravité.** — Reportons-nous aux § 15 et 16, et aux § 31 et 37, du cours de Seconde. Nous y définissons la position et la grandeur de la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles, et nous appliquons les résultats aux forces de la pesanteur.

Soient  $m_1, m_2, m_3, \dots$  les masses de chacun des éléments de volume en lesquels on peut décomposer le corps considéré; les coordonnées de la masse  $m_i$  sont  $x_i, y_i, z_i$ . Nous nous proposons de calculer les coordonnées  $\xi, \eta, \zeta$  du centre de gravité.

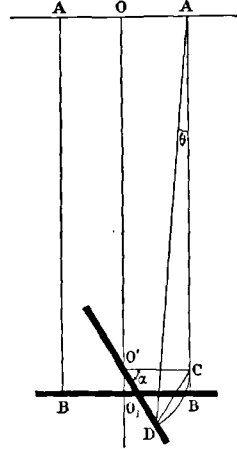


Fig. 2.

Considérons d'abord deux masses  $m_1$  et  $m_2$ ; elles sont soumises par hypothèse à deux forces  $F_1$  et  $F_2$  parallèles, de même sens et proportionnelles aux quantités  $m_1$  et  $m_2$ .

Les points d'application sont ici parfaitement déterminés; ce sont les points A et C où se trouvent les masses.

Le point B d'application de la résultante, de coordonnées  $x, y, z$ , est défini par la condition :

$$\frac{m_1}{BC} = \frac{m_2}{AB} = \frac{m_1 + m_2}{AC}.$$

Les segments AB, BC, AC sont évidemment proportionnels aux segments  $A''B''$ ,  $B''C''$ ,  $A''C''$ .

On a donc :

$$\frac{m_1}{x_2 - x} = \frac{m_2}{x - x_1} = \frac{m_1 + m_2}{x_2 - x_1}.$$

D'où l'on tire aisément :

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2},$$

et deux autres formules analogues pour  $y$  et  $z$ .

Soit une troisième masse  $m_3$ ; appliquons le résultat précédent à la résultante obtenue et à cette masse. Les coordonnées  $x', y', z'$  du nouveau centre de gravité sont données par la relation

$$x' = \frac{(m_1 + m_2)x + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

et deux autres analogues.

La généralisation est immédiate.

Pour un nombre quelconque de masses, on a :

$$\xi = \frac{\sum mx}{\sum m}, \quad \eta = \frac{\sum my}{\sum m}, \quad \zeta = \frac{\sum mz}{\sum m}.$$

**6. Théorèmes généraux de la mécanique.** — Nous avons énoncé au § 27 du Cours de Mathématiques le principe général de la dynamique *du point matériel*.

Quand un nombre quelconque de forces  $F_1, F_2, \dots$  mesurées en kilogrammes-poids, sont appliquées simultanément à une masse  $M$  mesurée en kilogrammes-masse, elles lui communiquent, chacune

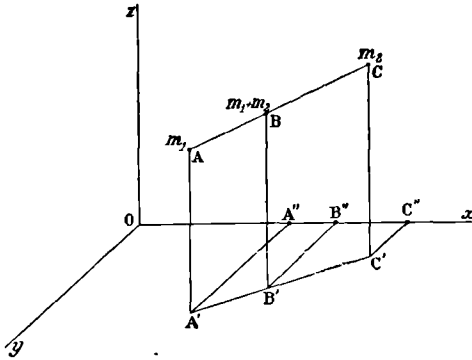


Fig. 3.

dans sa propre direction et indépendamment les unes des autres, des accélérations simultanées données par les formules :

$$\gamma_1 = g \frac{F_1}{M}, \quad \gamma_2 = g \frac{F_2}{M}, \dots$$

La mesure des forces en kilogrammes-poids et la mesure de l'accélération  $g$  de la pesanteur doivent être faites en un même lieu.

Nous avons montré ensuite comment on peut supprimer de ces formules le coefficient  $g$  en changeant de système d'unités. Nous énoncerons les propositions suivantes en CGS.

Nous avons montré enfin, au § 30 et 31, comment on pouvait déduire de la proposition précédente le théorème général des forces vives, applicable à un système quelconque de points. D'après cette proposition, les liaisons n'interviennent pas.

Ce théorème n'est pas le seul qu'on puisse tirer des propriétés dynamiques des forces mesurées par leurs effets statiques. Il en est d'autres importants que nous passerons rapidement en revue.

Considérons un système quelconque de points matériels.

1<sup>o</sup> Ils sont liés par des *liaisons rigides intérieures* que nous remplaçons par des forces convenables dont les composantes ont pour symbole général  $X_2, Y_2, Z_2$ . Ces forces sont deux à deux égales et de signes contraires, et leurs points d'application sont invariablement liés. Donc, elles disparaissent dans les expressions de la forme  $\Sigma X_2$  et accomplissent toujours un travail total nul.

2<sup>o</sup> Ils sont soumis à des forces *intérieures* dont le symbole général sera  $X_i, Y_i, Z_i$ . Ces forces vont encore deux par deux, égales et de signes contraires, en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction. Donc, elles disparaissent dans les expressions de la forme  $\Sigma X_i$ . Mais comme leurs points d'application ne sont pas invariablement liés, elles ne disparaissent pas dans l'expression du travail total.

3<sup>o</sup> Ils sont enfin soumis à des forces *extérieures*, parmi lesquelles peuvent se trouver des forces tenant lieu des liaisons *extérieures*. Elles sont quelconques et ne disparaissent pas dans les expressions de la forme  $\Sigma X_e$ .

Nous poserons :  $X_1 = X_i + X_e$ .

Pour chaque point du système, nous avons :

$$(1) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = X_1 + X_2, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y_1 + Y_2, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = Z_1 + Z_2.$$

Additionnons toutes ces équations respectivement multipliées par  $dx, dy, dz$ . Les forces représentant les *liaisons rigides intérieures* disparaissent de la somme. Il reste :

$$(2) \quad \Sigma \left\{ \left( X_1 - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) dx + \left( Y_1 - m \frac{d^2y}{dt^2} \right) dy + \left( Z_1 - m \frac{d^2z}{dt^2} \right) dz \right\} = 0.$$

D'où le théorème de d'Alembert :

Dans un système quelconque en mouvement, l'équilibre existe à chaque instant entre toutes les forces réelles d'une part, et des forces fictives, dites forces d'inertie de l'autre; chacune de ces forces d'inertie est égale au produit de la masse du point considéré par son accélération changée de signe.

**7. Théorème des forces vives.** — L'équation (2) peut s'écrire :

$$\Sigma m \left( \frac{d^2x}{dt^2} dx + \frac{d^2y}{dt^2} dy + \frac{d^2z}{dt^2} dz \right) = \Sigma (X_1 dx + Y_1 dy + Z_1 dz).$$

Soit  $v$  la vitesse du point de coordonnées  $x, y, z$ .

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}, \quad d \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{d^2x}{dt^2} dx + \frac{d^2y}{dt^2} dy + \frac{d^2z}{dt^2} dz.$$

D'où le théorème des forces vives :

$$\Sigma d \cdot \frac{mv^2}{2} = \Sigma (X_1 dx + Y_1 dy + Z_1 dz) = d\mathcal{C}.$$

En voici un corollaire intéressant. Quand un système passe par une position d'équilibre statique, l'énergie cinétique est maximum ou minimum. On a, en effet, lors de ce passage  $d\mathcal{C} = 0$ ; d'où  $d \cdot \Sigma \frac{mv^2}{2} = 0$ , équation qui renferme le théorème.

La réciproque n'est pas vraie; car la condition  $d\mathcal{C} = 0$  pour un petit déplacement à partir d'une position du système, n'implique pas qu'on soit dans une position d'équilibre statique, excepté s'il n'existe qu'une variable indépendante.

**8. Théorème des quantités de mouvement projetées.** — Reprenons les équations (1) du § 6. Multiplions par  $dt$  toutes les équations en  $x$  correspondant à tous les points du système; additionnons-les et intégrons entre les temps  $t_0$  et  $t_1$ . D'après ce que nous savons des forces  $X_2, X_i, X_e$ , il reste :

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} dt \right) = \left[ \Sigma m \frac{dx}{dt} \right]_{t_1} - \left[ \Sigma m \frac{dx}{dt} \right]_{t_0} = \int_{t_0}^{t_1} (\Sigma X_e dt).$$

L'accroissement entre deux époques  $t_0$  et  $t_1$  de la somme des quantités de mouvement projetées sur un axe fixe est égale à la somme, pendant le même temps, des impulsions des forces extérieures projetées sur le même axe (Cours de Math., § 37).

Parmi les forces extérieures, nous savons qu'il faut ranger les forces tenant lieu des liaisons extérieures.

En particulier, si les forces extérieures sont nulles, la quantité de mouvement reste constante, *quelles que soient les forces intérieures*. Car l'accroissement des vitesses de certaines masses suivant une direction, dans un sens, est compensée par l'accroissement des

vitesse d'autres masses suivant la même direction, mais en sens contraire.

**9 Mouvement du centre de gravité.** — Les coordonnées  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  du centre de gravité sont définies par les équations (§ 5) :

$$\xi = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m}, \quad \eta = \frac{\Sigma my}{\Sigma m}, \quad \zeta = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m}.$$

Posons  $\Sigma m = M$ . Dérivons une et deux fois par rapport au temps. Il vient :

$$M \frac{d\xi}{dt} = \Sigma m \frac{dx}{dt},$$

et deux autres équations analogues ;

$$M \frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2},$$

et deux autres équations analogues.

*Considérons donc les vecteurs représentant les quantités de mouvement de chaque point du système. Ils admettent comme vecteur résultant un vecteur qui représente la quantité de mouvement d'un point matériel fictif coïncidant avec le centre de gravité du système et où serait condensée la masse entière du système.*

*Même théorème pour les forces d'inertie.*

Reprenons les équations (1) du § 6 : additionnons-les. Il vient :

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma (X_1 + X_e + X_2) = \Sigma X_e, \quad M \frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma X_e,$$

et deux autres équations analogues.

*Le centre de gravité se meut comme un point dont la masse serait égale à la somme des masses, et qui serait sollicité par les forces extérieures transportées en ce point parallèlement à elles-mêmes.*

*S'il n'existe que des forces intérieures, ou si les forces extérieures ont une somme nulle (se réduisent à un couple par exemple), le centre de gravité se meut d'un mouvement rectiligne et uniforme. Comme cas particulier, il reste immobile.*

Par exemple, les mouvements volontaires d'un animal dans sa chute ne peuvent modifier la trajectoire du centre de gravité, car les nouvelles forces qui entrent en jeu pour produire la déformation sont intérieures. La trajectoire du centre de gravité d'un obus qui éclate reste la même, à supposer qu'on puisse négliger la résistance de l'air qui équivaut à un système de forces extérieures. Il est important de remarquer que dans les exemples précédents les forces extérieures sur chaque point (pesanteur) ne sont point modifiées par les mouvements de l'animal ou l'éclatement de l'obus.

Mais imaginons qu'une planète éclate ; il n'est pas exact de dire

que le mouvement du centre de gravité des morceaux de la planète se continue sans modification. Car l'éclatement aurait pour effet de modifier les forces extérieures : certaines masses se rapprocheraient du soleil et seraient plus attirées, d'autres s'éloigneraient et seraient moins attirées. Toutefois le nouveau centre de gravité se mouvrait comme un point de même masse totale, sollicité par les *nouvelles* forces extérieures transportées en ce point parallèlement à elles-mêmes. De même, du fait de l'éclatement de l'obus, la résistance de l'air, qui n'est généralement pas négligeable, est complètement modifiée; la trajectoire du centre de gravité ne reste donc pas la même que si l'obus n'avait pas éclaté : le théorème permet cependant de la calculer, *si toutes ces nouvelles résistances de l'air sur les morceaux de l'obus sont connues.*

**10. Théorèmes sur les moments.** — 1° Le moment par rapport à l'axe des  $z$  d'une force dont les composantes sont  $X$  et  $Y$ , suivant les axes normaux à l'axe des  $z$ , est

$$xY - yX.$$

Positif, il tend à faire tourner de l'axe des  $x$  vers l'axe des  $y$ .

On le montre immédiatement.

Le moment autour de l'axe des  $x$  est  $yZ - zY$ ; positif, il tend à faire tourner de l'axe des  $y$  à l'axe des  $z$ .

Le moment autour de l'axe des  $y$  est  $zX - xZ$ ; positif, il tend à faire tourner de l'axe des  $z$  à l'axe des  $x$ .

2° Les coordonnées d'un point passent des valeurs  $x, y, z$  (la projection du point sur le plan des  $x y$  est alors en  $A$ ) aux valeurs  $x + dx, y + dy, z + dz$  (position  $A'$ ). On demande l'expression de l'aire  $dS_z = OAA'$ , projection sur le plan des  $x y$  de l'aire balayée par le rayon vecteur issu de l'origine des coordonnées et aboutissant au point  $x, y, z$ .

$$\overline{OAA'} = \overline{OA'A'} - \overline{OA\alpha} - \overline{AA'\alpha'}$$

$$2\overline{OAA'} = (x + dx)(y + dy) - xy - dx(2y + dy) = xdy - ydx :$$

$$dS_z = \frac{1}{2} (xdy - ydx).$$

La vitesse est un vecteur dont les composantes sont

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt};$$

par analogie avec la définition du moment d'une force, on



peut appeler l'expression  $x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}$ , le moment de la vitesse par rapport à l'axe des  $z$ . D'autre part on peut appeler *vitesse aréolaire*, le quotient de l'accroissement de l'espace balayé par le temps employé au balayage, et représenter cette vitesse par un vecteur normal à l'aire balayée. Il revient au même de projeter l'aire balayée sur le plan des  $xy$ , ou le vecteur représentatif sur l'axe des  $z$ . D'où cette proposition :

*La projection de la vitesse aréolaire sur un axe, est égale à la moitié du moment de la vitesse par rapport à cet axe.*

Dérivons les deux membres de l'équation précédente par rapport au temps  $\Sigma$  :

$$\frac{d^2 S_z}{dt^2} = \frac{1}{2} \left( x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right).$$

*La projection sur un axe de l'accélération aréolaire est égale à la moitié du moment par rapport au même axe de l'accélération ordinaire.*

**11. Théorème des aires.** — Reprenons les équations (1) du § 6.

Multiplions la première par  $-y$ , la seconde par  $x$ ; faisons de même pour tous les points du système et additionnons. Remarquons que deux forces égales, de sens contraires et appliquées suivant la même direction (comme les liaisons intérieures ou les forces intérieures) ont un moment nul par rapport à un axe quelconque.

Il vient :

$$\Sigma m \left( x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \Sigma (x Y_e - y X_e) = 2 \Sigma m \frac{d^2 S_z}{dt^2}.$$

A chaque instant la somme des produits de chaque masse par la projection de l'accélération aréolaire sur l'un des axes de coordonnées est égale à la moitié de la somme des moments des forces extérieures par rapport au même axe.

Si la somme des moments des forces extérieures est constamment nulle, la quantité  $\Sigma m \frac{d^2 S_z}{dt^2}$  est nulle; la quantité  $\Sigma m \frac{d S_z}{dt}$  est constante; enfin, la quantité  $\Sigma m S_z$  est une fonction linéaire du temps. D'où la conséquence :

*La somme des produits de la masse de chaque point par l'aire balayée par le rayon vecteur correspondant croît proportionnellement au temps.*

Il en est ainsi si les forces extérieures se réduisent à une force unique passant par l'origine.

**CORPS TOURNANT AUTOUR D'UN AXE FIXE.** — L'aire balayée a pour

expression  $\frac{r^2 d\theta}{2}$ , où  $r$  est la distance à l'axe du point considéré,  $\theta$  l'angle dont le corps tourne. L'accélération aréolaire est donc (puisque  $r$  reste constant) :

$$\frac{r^2}{2} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Le théorème donne :

$$\Sigma(xY_e - yX_e) = \frac{d^2\theta}{dt^2} \Sigma mr^2,$$

expression que nous connaissons déjà (Cours de Math., § 36).

**12. Théorèmes sur les moments d'inertie.** — Le moment

d'inertie  $I$  d'un corps par rapport à un axe  $AB$  est égal au moment d'inertie  $I'$  par rapport à un axe  $A'B'$  parallèle et passant par le centre de gravité, plus le produit de la masse totale du corps par le carré de la distance  $h$  des deux axes  $AB$  et  $A'B'$ .

Prenons l'axe  $AB$  pour axe des  $z$ , et traçons l'axe  $Ox$  dans le plan passant par  $A'B'$ . L'abscisse  $h$  du centre de gravité  $G$  est donnée par la relation  $\Sigma mx = h\Sigma m$ .

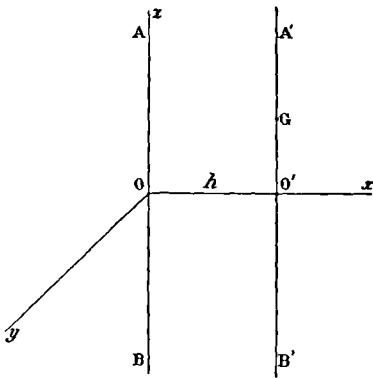


Fig. 5.

On a par définition :

$$I = \Sigma m(x^2 + y^2)$$

$$I = \Sigma m[(x - h)^2 + y^2] = I - 2h\Sigma mx + h^2\Sigma m.$$

D'où

$$I = I' + h^2\Sigma m.$$

Pour connaître les moments d'inertie par rapport à un axe quelconque, il suffit donc de connaître les moments d'inertie par rapport à toutes les droites qui passent par le centre de gravité.

**CALCUL DES MOMENTS D'INERTIE DANS LES CAS LES PLUS IMPORTANTS.** — Nous supposons le corps homogène;  $M$  est sa masse totale. Nous appelons *rayon de giration*  $\rho$  une quantité telle que :  $I = \rho^2 M$ . Soit  $V$  le volume,  $\delta$  la densité.

On a évidemment  $I = \rho^2 M = \rho^2 V \delta$ .

C'est le rayon de giration que nous allons calculer.

**I. Cylindre de rayon  $R$  et de hauteur  $l$ ; axe de rotation parallèle aux génératrices et passant par le centre de la base.**

Décomposons le cylindre en tubes élémentaires concentriques de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$ . L'aire de la section droite est  $2\pi r dr$ ; la

masse du tube est  $2\pi r dr \cdot \delta l$ ; son moment d'inertie par rapport à l'axe est  $2\pi r^3 dr \cdot \delta l$ .

On a donc

$$I = \int_0^R 2\pi r^3 dr \delta l = \frac{\pi}{2} R^4 \delta l = (\pi R^2 \delta l) \frac{R^2}{2}.$$

D'où enfin 
$$\rho^2 = \frac{R^2}{2}.$$

Le calcul actuel correspond au cas de disques tournant autour d'un axe perpendiculaire à leur plan et passant par leur centre.

*Anneau cylindrique de rayons  $R_0$  et  $R_1$  et de hauteur  $l$ .*

C'est le même problème, mais l'intégration doit être faite entre les limites  $R_0$  et  $R_1$ .

$$I = \frac{\pi}{2} (R_1^4 - R_0^4) \delta l = [\pi (R_1^2 - R_0^2) \delta l] \frac{R_1^2 + R_0^2}{2}.$$

$$\rho^2 = \frac{R_0^2 + R_1^2}{2}.$$

Si  $R_0$  devient égal à  $R_1$ ,  $\rho^2 = R_1^2$ , ce qui est évident à priori.

II. *Cercle de rayon  $R$  et d'épaisseur  $dl$  tournant autour d'un de ses diamètres.*

Le résultat est évidemment le même, quel que soit le diamètre considéré. Soit  $dS$  un élément.

Prenons deux axes  $Ox$  et  $Oy$  passant par le centre du cercle.

Le moment par rapport à  $Ox$  est  $\Sigma dS \cdot dl \cdot \delta \cdot x^2$ ; le moment par rapport à  $Oy$  est  $\Sigma dS \cdot dl \cdot \delta \cdot y^2$ . L'un ou l'autre de ces moments est donc égal à :

$$I = \frac{dl \cdot \delta}{2} \cdot (\Sigma dS \cdot x^2 + \Sigma dS \cdot y^2) = \frac{dl \cdot \delta}{2} \Sigma dS \cdot r^2,$$

en appelant  $r$  la distance de l'élément à l'axe.

Pour faire l'intégration, décomposons en couronnes de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$ .

Il vient :

$$I = \frac{dl \cdot \delta}{2} \int_0^R 2\pi r^3 dr = \frac{dl \cdot \delta}{4} \cdot \pi R^4 = (dl \cdot \delta \cdot \pi R^2) \frac{R^2}{4}.$$

D'où 
$$\rho^2 = \frac{R^2}{4}.$$

III. *Cylindre de rayon  $R$  et de longueur  $l$ ; axe perpendiculaire aux génératrices et passant par le centre de symétrie du cylindre.*

Décomposons en plaques minces, normales aux génératrices, d'épaisseur  $dx$  et situées à une distance  $x$  de la section droite médiane. Appliquons le théorème du § 12 et le résultat ci-dessus démontré (II). Le moment d'inertie d'une des plaques est :

$$dx \cdot \delta \cdot \frac{\pi R^4}{4} + dx \cdot \delta \cdot \pi R^2 \cdot x^2.$$

Intégrons entre 0 et  $\frac{l}{2}$ , et doublons le résultat.

$$\text{Il vient : } I = \pi R^2 \delta \left[ \frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{12} \right], \quad \rho^2 = \frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{12}.$$

*Tube cylindrique de rayons  $R_0$  et  $R_1$ .*

On trouve évidemment :

$$\pi R_1^2 \delta \left[ \frac{R_1^2}{4} + \frac{l^2}{12} \right] - \pi R_0^2 \delta \left[ \frac{R_0^2}{4} + \frac{l^2}{12} \right].$$

Or la masse est :  $\pi(R_1^2 - R_0^2)\delta$ .

D'où, mettant cette masse en facteur :

$$\rho^2 = \frac{R_0^2 + R_1^2}{4} + \frac{l^2}{12}.$$

*Aiguille mince.* — Il faut faire  $R = 0$ ;  $\rho^2 = \frac{l^2}{12}$ .

Il est important de remarquer que cette formule est déjà très approchée même pour un barreau relativement épais.

Soit en effet :  $R = 0,5$ ,  $l = 10$ .

Le rapport du second terme au premier est :

$$4l^2 : 12R^2 = 400 : 3 = 133.$$

IV. *Prisme droit à base rectangle tournant autour d'un axe perpendiculaire à l'une des faces et passant par le centre de symétrie.*

Le calcul se fait de la même manière que dans le cas précédent. Soit  $l$  et  $h$  les côtés de la face perpendiculairement à laquelle est mené l'axe, on trouve :

$$\rho^2 = \frac{h^2}{12} + \frac{l^2}{12}.$$

En particulier, si  $h$  est petit devant  $l$ , on retrouve la formule  $\rho^2 = \frac{l^2}{12}$ , ce qui est évident *a priori*.

V. *Sphère de rayon  $R$  tournant autour d'un de ses diamètres.*

Décomposons la sphère par des plans perpendiculaires à l'axe de rotation pris pour axe des  $z$ , en disques d'épaisseur  $dz$ , et situés à une distance  $z$  du centre de la sphère.

Leur rayon  $r$  satisfait à la condition  $r^2 + z^2 = R^2$ .

Le moment d'inertie de chaque disque est (voir I) :

$$\frac{\pi r^4}{2} \delta \cdot dz.$$

Il faut calculer l'intégrale

$$\int_{-R}^{+R} \frac{\pi r^4}{2} \delta dz = 2 \int_0^R \frac{\pi r^4}{2} \delta dz.$$

Remplaçons  $r^4$  par sa valeur :  $r^4 = (R^2 - z^2)^2$ .

Tous calculs faits, on trouve :  $\rho^2 = \frac{2R^2}{5}$ .

**13. Ellipsoïde et axes principaux d'inertie.** — Par un point O que nous prenons pour origine des coordonnées, faisons passer une droite OA, dont les cosinus directeurs sont  $\alpha, \beta, \gamma$ ; déterminons le moment d'inertie I du corps par rapport à cette droite.

D'un point M ( $x, y, z$ ) quelconque, abaissons sur OA une perpendiculaire de longueur  $MN = r$ .

$$I = \Sigma mr^2 = \Sigma m (\overline{OM}^2 - \overline{ON}^2) = \Sigma m [x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2].$$

Posons :

$$A = \Sigma m (y^2 + z^2),$$

$$B = \Sigma m (z^2 + x^2),$$

$$C = \Sigma m (x^2 + y^2),$$

$$D = \Sigma myz,$$

$$E = \Sigma mzx,$$

$$F = \Sigma mxy.$$

On trouve immédiatement :

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta.$$

Posons  $I\varepsilon^2 = 1$ . Portons sur la droite un vecteur de longueur  $\varepsilon$  et soient X, Y, Z les coordonnées de l'extrémité de ce vecteur.

On a :

$$1 = AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EZX - 2FXY.$$

La surface ainsi obtenue est une quadrique; comme  $\varepsilon$  est toujours réel et fini, c'est nécessairement un ellipsoïde, l'*ellipsoïde d'inertie*.

On appelle *axes principaux d'inertie relatifs au point O* les axes de l'ellipsoïde; les moments d'inertie correspondants, mesurés par l'inverse du carré des axes de l'ellipsoïde, sont les *moments d'inertie principaux relatifs au point O*.

Les axes de coordonnées sont les axes principaux si l'on a :

$$\Sigma myz = \Sigma mzx = \Sigma mxy = 0.$$

Il peut arriver que l'ellipsoïde soit de révolution, ou même se réduise à une sphère.

**14. Propriétés des axes principaux d'inertie relatifs au centre de gravité.** — Prenons le centre de gravité comme origine des coordonnées et ses axes principaux d'inertie comme axes de coordonnées. Nous avons donc les conditions :

$$\Sigma mx = \Sigma my = \Sigma mz = 0, \quad \Sigma mxy = \Sigma myz = \Sigma mzx = 0.$$

Considérons un point A quelconque de l'axe, par exemple le point

$$x = h, \quad y = z = 0.$$

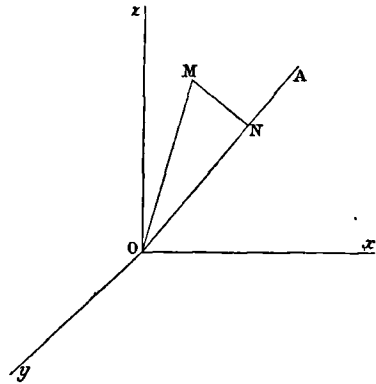


Fig. 6.

Déterminons pour ce point les quantités que nous avons appelées D, E, F. On trouve évidemment :

$$D = \Sigma myz = 0, \quad E = \Sigma mz(x - h) = 0, \quad F = \Sigma m(x - h)y = 0.$$

Donc les trois droites parallèles aux axes de coordonnées, passant par le point A, sont les axes principaux relatifs à ce point. En d'autres termes, *les axes principaux relatifs à tous les points des axes principaux relatifs au centre de gravité, sont parallèles à ces derniers.*

Voici des propositions (que nous n'avons pas la place de démontrer) qui sont d'une application constante dans le réglage des appareils.

*Si un corps, soumis à des forces nulles et retenu par un seul point fixe, est lancé de manière à tourner autour d'un des axes principaux relatifs au point, il continue à tourner uniformément autour de cet axe, comme s'il était fixe.*

Il résulte de là et d'une proposition précédente (§ 9) que *si un corps complètement libre et soumis à des forces nulles est lancé de manière à tourner autour d'un des axes principaux relatifs au centre de gravité, il continue à tourner uniformément autour de cet axe, comme s'il était fixe.*

*Les mêmes propositions subsistent, pourvu que les forces appliquées au corps se réduisent à un couple situé dans un plan perpendiculaire à l'axe.*

Cette proposition a une importance capitale; elle explique le soin qu'il faut prendre d'équilibrer *au point de vue de l'inertie* tous les corps qui doivent tourner autour d'un axe *qui n'est pas matériellement fixé*. Par exemple, un corps oscille sous l'influence de l'élasticité de torsion d'un fil auquel il est librement suspendu et qui produit un couple horizontal. Pour que tout se ramène à un mouvement de rotation autour du fil, il faut, non seulement que le centre de gravité soit dans le prolongement du fil, ce qui est automatiquement obtenu (au moins très approximativement, si le fil n'est pas trop raide), mais encore que la verticale du fil soit un axe principal d'inertie du centre de gravité. Si cette condition n'est pas réalisée, le mouvement se complique immédiatement d'oscillations pendulaires. Mêmes remarques quand un aimant oscille sous l'influence du champ terrestre.

Le moyen le plus simple de réaliser ces conditions est de donner au corps oscillant une forme de révolution et de s'arranger de manière que l'axe de révolution soit vertical. Ce procédé n'est évidemment pas toujours applicable, comme le prouve l'exemple de l'aimant.

Il faut équilibrer *au point de vue de l'inertie* un corps tournant très vite autour d'un axe *même matériellement fixé*, si l'on ne veut pas que les pressions sur l'axe le faussent rapidement, ou produisent

des frottements trop considérables. Il faut s'arranger pour cela de manière : 1° que l'axe de rotation passe par le centre de gravité et soit un axe principal d'inertie; 2° que les forces motrices se réduisent à un couple normal à l'axe.

**15. Pendules. Pendules compensateurs. Métronome.** — Un pendule est un corps de forme quelconque pouvant tourner autour d'un axe horizontal et soumis à la pesanteur seule. On se reportera aux § 39 et suivants du Cours de Mathématiques.

Appelons  $\theta$  l'élongation,  $I$  le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation,  $l$  la distance du centre de gravité à l'axe de rotation,  $p$  le poids du corps.  $\Gamma = pl \sin \theta$  est le couple pour l'élongation  $\theta$ . On a comme équation du mouvement :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \Gamma = -pl \sin \theta = -C \sin \theta.$$

Soit  $\theta_0$  l'amplitude, la durée d'oscillation est approximativement :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}} \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right) \text{ dans le système CGS.}$$

*Remarques sur les pendules compensateurs* (Cours de Seconde, § 144). — Si le pendule est composé d'une matière homogène, quand toutes ses dimensions sont multipliées par un même coefficient  $K$ ,  $I$  devient  $K^2I$ ,  $C$  devient  $KC$ ,  $T$  devient  $T\sqrt{K}$ . Si donc on chauffe un pendule homogène, la durée d'oscillation croît comme la racine carrée du binôme de dilatation.

Nous disons dans le Cours de Seconde que la compensation consiste à ramener le centre de gravité à la même distance de l'axe. On ne peut parler de moment d'inertie en Seconde; mais il est clair que la compensation n'est pas obtenue par ce procédé. Elle consiste à maintenir constant le quotient  $I : C$ , ce qui ne s'obtient généralement qu'en modifiant

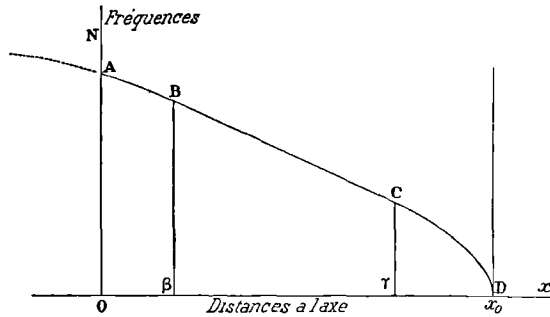


Fig. 7.

$C$ , c'est-à-dire la position du centre de gravité, le poids restant constant. Comme la compensation s'obtient par tâtonnement, elle ne présente pas plus de difficulté.

*Métronome.* — On se reportera à la figure 26 du Cours de Mathématiques. Supposons la tige prolongée et le corps  $M'$  à une distance

telle que le centre de gravité du système soit sur l'axe de suspension O. Soit alors  $x_0$  la distance à l'axe O du centre de gravité de  $M'$ ; I le moment d'inertie du système.

Il est facile de voir que pour une distance  $x$  quelconque ( $x < x_0$ ) du corps  $M'$  de masse  $m$ , la durée T d'oscillation est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I - m(x_0 - x)^2}{mg(x_0 - x)}}.$$

La courbe des fréquences  $N = 1 : T$  en fonction de  $x$  a la forme représentée fig. 7. Une partie BC de cette courbe est quasiment rectiligne : c'est précisément celle qu'on utilise. On vérifiera sur un appareil que la graduation *pratique* du métronome  $N = f(x)$  est linéaire.

**16. Pendule de Kater (à retournement).** — Soit  $I'$  le moment d'inertie autour d'un axe parallèle à l'axe de rotation et passant par le centre de gravité, et  $\rho$  le rayon de giration correspondant :

$$I' = \rho^2 \cdot m,$$

où  $m$  est la masse totale du pendule. On a :

$$I = I' + ml^2 = (\rho^2 + l^2)m.$$

On a d'ailleurs :  $p = mg$ .

La formule donnant la durée devient :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(\rho^2 + l^2)m}{pl}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \left( l + \frac{\rho^2}{l} \right)}.$$

Il résulte immédiatement de cette formule que la durée d'oscillation est la même autour d'une infinité d'axes parallèles, formant un cylindre circulaire autour d'une droite passant par le centre de gravité; pour tous ces axes, en effet,  $l$  et  $\rho^2$  sont les mêmes.

Faisons osciller le pendule autour d'un axe parallèle au premier, mais situé à une distance du centre de gravité  $l' = \rho^2 : l$ . La durée sera donnée par la formule dans laquelle on remplace  $l$  par  $l'$  : elle reste la même que précédemment. Il existe donc une seconde infinité d'axes parallèles, formant les génératrices d'un cylindre circulaire concentrique au premier et tels que la durée d'oscillation est la même pour tous et la même que pour les axes du premier système.

On appelle axes *réiproques* deux axes parallèles appartenant à l'un et l'autre système, situés de part et d'autre du centre de gravité et comprenant ce centre dans leur plan. L'un est dit axe de *suspension*, l'autre d'*oscillation*, et *réiproquement*. Les points de l'axe d'oscillation oscillent autour de l'axe de suspension comme s'ils appartenait à des pendules simples de longueur

$$\Delta = l + l' = l + \frac{\rho^2}{l},$$

égale à la distance des axes.



Si nous prenons l'axe de suspension (supposé parallèle à une direction invariable :  $\rho$  est alors invariable) à une distance du centre de gravité  $l_1$  variable, l'axe d'oscillation correspondant est à une autre distance  $l'_1$  variable, telle que  $l_1 l'_1 = \rho^2$ .

En particulier, les deux cylindres précédemment définis peuvent être confondus; la distance des axes au centre de gravité est alors

$$l_1 = l'_1 = \rho;$$

la longueur du pendule synchrone est  $2\rho$ .

*C'est alors que la durée d'oscillation est minima.*

Cette durée, infinie pour  $l_1 = 0$ , ( $l'_1 = \infty$ ), passe donc par un minimum pour  $l_1 = \rho$ , ( $l'_1 = \rho$ ), et redevient infinie pour

$$l_1 = \infty, \quad (l'_1 = 0).$$

RÉALISATION DU PENDULE DE KATER. — Nous venons de démontrer plus haut le théorème suivant :

*Étant donné un axe de rotation, il en existe toujours un second parallèle au premier, situé dans le plan passant par le premier et le centre de gravité, tel que la durée d'oscillation autour des deux axes soit la même. De plus, cette durée est celle d'un pendule simple dont la longueur serait égale à la distance  $\Delta$  des deux axes :*

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta}{g}}.$$

Dans le pendule de Kater, les deux axes O et O', représentés par les arêtes de deux couteaux, sont fixes. La distance  $\Delta = \overline{OO'}$  est donnée. La masse  $m_1$  est invariablement liée à la règle qui porte les couteaux. Il s'agit, par le déplacement d'une masse mobile  $m_2$  le long de la règle, d'amener à l'égalité les durées d'oscillations autour des deux couteaux. Cette condition n'est réalisable que si la masse mobile a été prise assez grande et si sa course est suffisante.

De la mesure de la distance  $\Delta$  des couteaux et de la durée commune d'oscillation T (par comparaison avec une horloge réglée

sur le temps sidéral, et par conséquent sur le temps moyen, voir Cours de Math., § 44), on déduira la valeur de  $g$ .

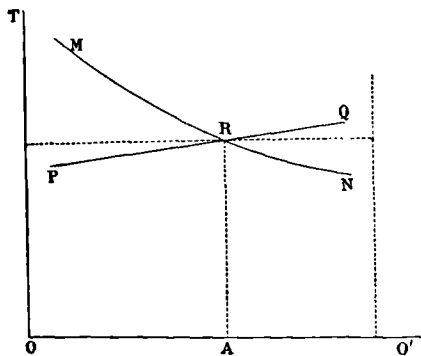


Fig. 9.

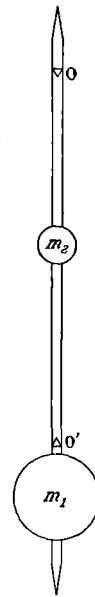


Fig. 8.

Il est commode de faire les tâtonnements d'une manière systématique. Supposons la tige  $OO'$  graduée. *Le pendule oscillant autour de l'axe O*, déplaçons la masse  $m_2$ ; déterminons la courbe PQ des périodes en fonction de la position de  $m_2$  entre les points O et O'. Retournons le pendule, déterminons la nouvelle courbe MN, bien plus inclinée que la première, des périodes en fonction de la position de  $m_2$ . Elles se coupent en un point R qui donne une première approximation de la position de  $m_2$  pour laquelle les périodes sont égales. Le tâtonnement est ainsi singulièrement abrégé.

Cette expérience est excellente pour se familiariser avec la mesure des durées et les mouvements oscillatoires.

Pour mesurer  $g$  avec précision, on préfère opérer autrement.

PENDULE SYMÉTRIQUE, A COUTEAUX INTERCHANGEABLES DE BESSEL. — Le pendule est symétrique par rapport aux couteaux *quant à sa forme extérieure*. Il ne doit pas être symétrique quant à sa masse : donc il est muni de deux disques circulaires de même grosseur, fixés normalement à la tige dans des positions semblables par rapport aux couteaux; l'un est plein, l'autre creux et parfaitement étanche. Les couteaux sont interchangeables. Il n'y a aucun moyen de réglage, on s'arrange seulement par construction de manière que les périodes T et T' soient très voisines. Montrons qu'avec quatre expériences, deux autour de chaque couteau occupant les deux positions, on peut éliminer les perturbations provenant de la courbure des couteaux et de l'action de l'air.

Soit  $\rho$  le rayon de giration autour d'un axe parallèle aux couteaux passant par le centre de gravité. On n'a plus  $ll' = \rho^2$ ; il faut poser :

$$\rho^2 = ll' + \mu, \quad \frac{\rho^2}{l} = l + \frac{\mu}{l}, \quad \frac{\rho^2}{l'} = l' + \frac{\mu}{l'},$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \left( l + l' + \frac{\mu}{l} \right), \quad T'^2 = \frac{4\pi^2}{g} \left( l + l' + \frac{\mu}{l'} \right);$$

d'où

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2}{g} (l + l') = \frac{lT^2 - l'T'^2}{l - l'}.$$

$\tau$  est calculable avec une grande approximation pourvu que T et T' soient très peu différents; il faut évidemment mesurer  $l$  et  $l'$ , mais une grande approximation n'est pas nécessaire. Posons en effet :

$$T'^2 = T^2 + \varepsilon^2;$$

il vient :

$$\tau^2 = T^2 - \frac{\varepsilon^2 l'}{l - l'}.$$

Pour déterminer le centre de gravité et par conséquent  $l$  et  $l'$ , on fait reposer le pendule, dont la tige est creuse et cylindrique, sur un double tronc de cône en acier, formant une sorte de gorge mobile à l'aide d'une vis de rappel autour de l'axe commun des deux cônes.

En faisant tourner lentement ce support, on amène le pendule en équilibre : le centre de gravité du pendule et l'axe du support sont dans le même plan vertical. On parvient ainsi à déterminer  $l$  et  $l'$  facilement à un dixième de millimètre près. En général,  $l = 2l'$  par construction ;  $l - l'$  vaut donc plus de 30 centimètres, le facteur du terme de correction est très bien déterminé (à 1/3000 environ dans notre hypothèse) ; puisque  $\epsilon$  est petit, la correction est très petite, l'approximation de 1/3000 sur  $l$  et  $l'$  est plus que suffisante.

Là n'est pas le principal avantage de la méthode.

Les couteaux ont des rayons de courbure  $r_1$  et  $r_2$  finis et de l'ordre de 100 microns.

On démontre aisément qu'il résulte du roulement du pendule sur un cylindre de courbure finie une petite diminution de la durée. On doit écrire :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \left( l + l' + \frac{\mu}{l} \right) \left( 1 - \frac{r_1}{l} \right), \quad T'^2 = \frac{4\pi^2}{g} \left( l + l' + \frac{\mu}{l'} \right) \left( 1 - \frac{r_2}{l'} \right),$$

$$\tau_1^2 = \frac{lT^2 - l'T'^2}{l - l'} = \frac{4\pi^2}{g} (l + l') \left( 1 + \frac{r_2 - r_1}{l - l'} \right).$$

On peut éliminer le terme en  $r_1$  et  $r_2$  en recommençant les expériences après avoir échangé les couteaux ; on trouve une nouvelle valeur  $\tau_2^2$  pour laquelle la correction est égale et de signe contraire ; on

a en définitive :

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 = \frac{8\pi^2}{g} (l + l').$$

L'action de l'air est complexe : elle accroît la durée d'oscillation, tant par entraînement d'une queue gazeuse qui augmente la masse à mouvoir, que par diminution du poids qui tend à mouvoir cette masse (principe d'Archimède). On en tient compte suffisamment au moyen d'un facteur de la forme  $\left( 1 + \frac{\gamma}{l} \right)$  ou  $\left( 1 + \frac{\gamma}{l'} \right)$ . Si le pendule est symétrique, l'action de l'air est la même après retournement ; elle s'élimine donc, tout comme s'élimineraient les rayons de courbure, si l'on avait  $r_2 = r_1$ .

Ainsi le pendule réversible, symétrique, à couteaux interchangeables de Bessel, élimine par quatre expériences les principales perturbations.

**17. Méthode des coïncidences.** — Pour déterminer avec quelque précision la durée d'oscillation d'un pendule, il faut faire durer l'expérience longtemps et, par conséquent, compter un très grand nombre d'oscillations. L'expérience montre qu'il est très facile de se tromper dans ce compte, sans parler de l'insupportable ennui d'une telle besogne. On l'évite en comparant *directement* la marche du pendule à étudier à celle du pendule d'une horloge, qui enregistre lui-même

le nombre total de ses oscillations : *c'est la méthode des coïncidences.*

Les plans d'oscillations des deux pendules sont parallèles; dans leurs positions d'équilibre, deux fils prolongeant leurs tiges se projettent l'un sur l'autre pour un observateur convenablement placé. S'il regarde les fils à travers une lunette, il peut faire coïncider leurs images avec le réticule. Supposons peu différentes les durées d'oscillations des pendules. Mettons-les en marche et admettons, pour simplifier le raisonnement, qu'aussitôt après le lancement les images des fils passent *simultanément* sur le réticule et avec des vitesses de même sens.

Soit  $T$  la durée d'oscillation du pendule  $P$  à étudier,  $T'$  celle du pendule  $P'$  de l'horloge de comparaison : soit  $T' > T$ . Le pendule  $P$  avance donc sur le pendule  $P'$ . Bientôt les images des fils ne passent plus simultanément sur le réticule de la lunette, c'est-à-dire par leurs positions d'équilibre. Le fil de  $P$  passe avant le fil de  $P'$ .

L'avance augmente; elle devient  $1/2$  oscillation : les fils passent alors simultanément sur le réticule de la lunette, mais avec des vitesses opposées. L'avance de  $P$  continue à croître. Enfin, au bout d'un temps  $t$ , l'avance de  $P$  est d'une oscillation entière : il y a encore coïncidence des fils lors de leur passage sur le réticule de la lunette avec des vitesses de même sens. Soit  $n$  le nombre des oscillations de  $P'$ ,  $n + 1$  celui de  $P$ ; on a :

$$t = nT' = (n + 1)T.$$

Or le nombre  $n$  est donné par l'indication de l'horloge;  $T'$ , exprimé en secondes de temps moyen (Cours de Math., § 44), résulte de la comparaison de l'horloge au jour sidéral; on a tout ce qu'il faut pour calculer  $T$  en fonction de la seconde de temps moyen.

En visant avec une lunette deux objets qui, nécessairement, ne sont pas à la même distance, on obtient des images peu nettes; un perfectionnement notable consiste à projeter les plans d'oscillations l'un sur l'autre avec une lentille placée entre les deux pendules; on peut ainsi, sans diminuer la netteté des images, éloigner autant qu'on le veut les pendules l'un de l'autre et éviter qu'ils ne s'influencent par résonance.

Comme on n'emploie que des oscillations de petite amplitude, les pendules conservent leur mouvement pendant plusieurs heures, *pourvu que les couteaux soient bien travaillés.* L'exemple numérique suivant, emprunté au mémoire de Borda, montre la précision de la méthode. Admettons que les coïncidences se fassent toutes les 50 minutes, que l'on puisse observer 5 coïncidences, c'est-à-dire faire durer l'expérience pendant  $4 \times 50 = 200$  minutes  $= 3^h 20^m$ , et qu'il y ait une incertitude de 30 secondes sur l'instant des coïncidences, c'est-à-dire que pendant 15 oscillations il soit impossible de distinguer les fils l'un de l'autre, lors de leur passage sur le réticule. En mettant les

choses au pis, cela fait une erreur de 60 secondes, soit une minute sur 200. Mais cette erreur de 1 : 200 sur le nombre  $n$  ne porte que sur une correction très petite. Les durées  $T'$  et  $T$  diffèrent en effet très peu. En 50 minutes, soit 3 000 secondes, il y a 1 501 oscillations de l'horloge et 1 500 du pendule qu'on lui compare. La différence relative est très approximativement de 1 : 1 500. Une erreur de 1 : 200 sur cette différence est donc une erreur de  $1 : (1\,500 \times 200) = 1 : 300\,000$  sur la quantité  $T$  à mesurer.

**18. Corps oscillant autour d'un axe sous l'influence d'un couple proportionnel à l'angle d'écart avec la position d'équilibre. Frottement proportionnel à la vitesse.** — L'équation du

mouvement est : 
$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} + C\theta = 0. \quad (1)$$

On sait que suivant la valeur de la constante  $f$  qui mesure le frottement, l'intégrale de cette équation est un mouvement sinusoïdal amorti ou un mouvement apériodique : dans ce dernier cas, le corps écarté de sa position d'équilibre y revient sans osciller.

Étudions d'abord le premier cas; la condition  $4CI - f^2 > 0$  est satisfaite, le frottement étant suffisamment petit. L'intégrale est :

$$\theta = \theta_0 e^{-\lambda t} \sin \omega t. \quad (2)$$

Substituons l'intégrale (2) dans l'équation (1); il vient comme conditions,

en posant  $\omega = \frac{2\pi}{T'}$  : 
$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C - \frac{f^2}{4I}}}, \quad \lambda = \frac{f}{2I}.$$

Les oscillations sont encore isochrones; le mobile passe à sa position d'équilibre,  $\theta = 0$ , avec une vitesse de même sens, à des temps séparés par un nombre entier de fois la période  $T'$ .

Les passages aux vitesses nulles (élongations maxima) se font aux temps donnés par la condition :  $\text{tg } \omega t = \omega : \lambda$ . La demi-oscillation n'est donc pas coupée en deux parties égales par le temps pour lequel la vitesse est nulle. Le temps nécessaire pour aller de  $\theta = 0$  à  $\theta$  maximum est  $\frac{T'}{4} - \frac{\lambda}{\omega^2}$ . Le temps nécessaire pour revenir à la position d'équilibre est  $\frac{T'}{4} + \frac{\lambda}{\omega^2}$ . Il est bon d'observer que ces deux quantités diffèrent très peu tant que  $f$  est petit.

Les amplitudes décroissent en progression géométrique. Soit  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  les amplitudes du même côté de la verticale pour deux oscillations consécutives. D'après ce que nous venons de dire, le mobile y arrive à des temps donnés par la condition :

$$t = \tau + kT',$$

où  $k$  est la suite des nombres entiers. On a donc :

$$\Theta_1 : \Theta_2 = e^{-\lambda\tau - \lambda k T'} : e^{-\lambda\tau - \lambda k T' - \lambda T'} = e^{\lambda T'}$$

Le rapport est constant : les amplitudes varient donc en progression géométrique.

Si  $\lambda$  est petit, on a :  $e^{\lambda T'} = 1 + \lambda T'$ .

$$\text{D'où} \quad \lambda T' = \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_2} = \delta.$$

La quantité  $\delta$ , qui représente la diminution relative d'amplitude, est immédiatement accessible à l'expérience.

*Calcul de  $T'$ .* — Appelons  $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}}$  la durée d'oscillation qu'aurait le système si le frottement était nul. Comparons  $T'$  et  $T$ . On a :

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{f^2}{4IC}}} = 1 + \frac{f^2}{8IC} = 1 + \frac{f^2 T^2}{32\pi^2 I^2}.$$

Or  $\delta = \lambda T' = \frac{f T'}{2I} = \frac{f T}{2I}$  sensiblement.

$$\text{D'où} \quad \frac{T'}{T} = 1 + \frac{\delta^2}{8\pi^2}.$$

Admettons par exemple que la diminution relative d'amplitude soit d'un dixième,  $\delta = 0,1$  : c'est déjà un amortissement considérable.

$$T' : T = 1,000127,$$

la différence est à peine supérieure à un dix millième.

D'où la proposition très importante :

*Un frottement proportionnel à la vitesse ne modifie pas sensiblement la durée d'oscillation, pourvu qu'il ne soit pas trop grand.*

La variation est d'ailleurs très facile à déterminer.

**19. Mouvements apériodiques.** — Si le frottement est suffisant, le mouvement cesse d'être périodique. L'intégrale de l'équation devient :

$$\theta = e^{-\lambda t} [Ae^{-Kt} + Be^{Kt}],$$

avec les conditions :

$$\lambda = \frac{f}{2I}, \quad K = \lambda \sqrt{1 - \frac{4CI}{f^2}} = \frac{1}{2I} \sqrt{f^2 - 4CI}.$$

Le passage du mouvement périodique au mouvement apériodique a lieu pour la valeur de  $f$  satisfaisant à la condition :

$$f^2 - 4CI = 0; \quad K = 0.$$

Écrivons que pour  $t=0$  la vitesse est nulle et l'élongation  $\theta_0$ ; l'intégrale générale devient :

$$\theta = \theta_0 \cdot \frac{e^{-\lambda t}}{2K} [(K - \lambda)e^{-Kt} + (K + \lambda)e^{Kt}].$$

Si  $f$  est énorme,  $K = \lambda$ ; on a sensiblement  $\theta = \theta_0$ . Le mobile ne tend plus à revenir à sa position d'équilibre.

Quel que soit  $f$ , le mobile met un temps infini à revenir rigoureusement à sa position d'équilibre; il arrive à une fraction déterminée  $\theta_1, \theta_2$ , de l'élongation initiale au bout d'un temps qui croît à mesure que le frottement  $f$  croît et qui devient infini en même temps que  $f$ .

Si les racines sont égales, l'intégrale générale a la forme

$$\theta = e^{-\lambda t}(A + Bt), \text{ avec la condition : } \lambda = \sqrt{C \cdot I}.$$

Écrivons que pour  $t=0$  la vitesse est nulle et l'élongation  $\theta_0$ ; l'intégrale générale devient :

$$\theta = \theta_0 e^{-\lambda t}(1 + \lambda t).$$

Le mobile arrive à une fraction déterminée de son élongation initiale en un temps  $t$  donné par la relation  $\lambda t = C^{1/2}$ . Il est paradoxal que ce temps diminue quand le frottement augmente. Mais dans le cas particulier où nous sommes, le frottement ne peut augmenter sans entraîner d'autres modifications. On a en effet :

$$\lambda = \sqrt{\frac{C}{I}};$$

$\lambda$  ne peut augmenter que si le couple augmente ou si le moment d'inertie diminue considérablement<sup>1</sup>.

**20. Détermination en valeur absolue d'un couple et d'un moment d'inertie.** — Nous venons de montrer que, malgré l'amortissement, on peut employer *presque rigoureusement* la formule simple :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}}.$$

La détermination de  $C$  en valeur absolue implique la connaissance de  $I$  et réciproquement. Il s'agit de trouver une seconde équation ne contenant encore comme inconnues que  $I$  et  $C$ ; car la détermination directe du moment d'inertie du corps oscillant, d'après sa masse et sa forme géométrique, est généralement impossible, cette forme ne pouvant être choisie assez simple.

La méthode générale consiste à augmenter le moment d'inertie d'une quantité connue  $I'$ .

<sup>1</sup> Nous engageons les lecteurs à étudier expérimentalement les lois des oscillations plus ou moins amorties avec un galvanomètre Deprez d'Arsonval, dont le cadre est fermé sur des résistances plus ou moins grandes.

On obtient alors une nouvelle durée d'oscillation  $T'$  donnée par la formule :

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I + I'}{C}}.$$

De ces deux équations, on tire :

$$I = I' \cdot \frac{T^2}{T'^2 - T^2}, \quad C = \frac{4\pi^2 I'}{T'^2 - T^2},$$

expressions qui résolvent le problème.

Voici comment on applique la méthode. Deux masses  $m$ , de forme géométrique simple, peuvent être placées à des distances connues  $d$

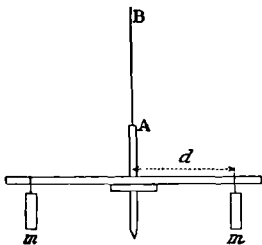


Fig. 10.

de l'axe AB autour duquel oscille le système. Le moment d'inertie de chacune de ces masses est  $(\rho^2 + d^2)m$ , en appelant  $\rho$  le rayon de giration autour d'un axe parallèle à l'axe AB et passant par le centre de gravité de chaque masse, rayon directement calculé d'après la forme géométrique. On peut, dans une première expérience, faire osciller le système sans ces masses, puis dans une seconde le faire osciller avec ces masses, placées à une distance  $d$  connue de l'axe.

L'inconvénient de cette méthode est de changer le poids de l'oscillateur d'une expérience à l'autre.

On peut encore faire deux expériences avec deux distances  $d$  aussi différentes que possible. On connaît dans les deux techniques la quantité  $I'$  dont le moment d'inertie est augmenté; on a tout ce qui est nécessaire pour calculer  $C$  et  $I$  en valeurs absolues.

**21. Impulsion. Choc des corps.** — Nous avons montré (Cours de Math., § 36) que l'impulsion, définie comme l'intégrale par rapport au temps d'une force constante en direction,  $\int F dt$ , est mesurée par la quantité de mouvement  $mv$ , lorsque le corps sur lequel elle est appliquée part du repos.

Nous allons traiter rapidement la question du *choc des corps*; elle se ramène immédiatement à l'étude des impulsions.

Soient deux corps, deux sphères par exemple, de masses  $m_1$  et  $m_2$  qui se meuvent avec des vitesses constantes  $v_1$  et  $v_2$  sur la même droite : soit  $x_1$  et  $x_2$  leurs distances à un point pris pour origine. L' $x$  du centre de gravité du système est donné par la formule :

$$(m_1 + m_2)x = m_1x_1 + m_2x_2.$$

Soit  $u$  la vitesse de centre de gravité; dérivons l'équation précédente par rapport au temps :

$$(m_1 + m_2)u = m_1v_1 + m_2v_2.$$



Le centre de gravité est donc lui-même animé d'un mouvement uniforme : c'est un cas particulier du théorème du § 9.

Pendant le choc les deux corps exercent l'un contre l'autre à chaque instant des forces égales et de sens contraires. Nous aurons donc à chaque instant :

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = 0.$$

Intégrons pour toute la durée du choc :

$$m_1 \frac{dx_1}{dt} + m_2 \frac{dx_2}{dt} = \text{Constante.}$$

Donc la somme des quantités de mouvement reste constante pendant le choc. Il revient au même de dire que le centre de gravité continue à se mouvoir d'un mouvement uniforme, dont la vitesse n'est pas modifiée par le choc.

Ce résultat est évident d'après la définition de l'impulsion : la quantité de mouvement du corps qui va le plus vite est diminuée d'une quantité précisément égale à celle dont est augmentée la quantité de mouvement de celui qui va d'abord le moins vite.

Pour aller plus loin, nous ferons des hypothèses sur la nature des corps qui se heurtent; elles correspondent à des cas limites dont les corps réels s'approchent plus ou moins.

*Corps mous.* — Après le choc, ils restent accolés; leur vitesse commune est précisément celle du centre de gravité :

$$u = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}.$$

Il y a perte de force vive pendant le choc.

On a avant le choc :

$$2W = m_1v_1^2 + m_2v_2^2.$$

On trouve aisément qu'après le choc

$$2W' = \frac{m_1^2v_1^2 + 2m_1m_2v_1v_2 + m_2^2v_2^2}{m_1 + m_2},$$

$$2(W - W') = \frac{m_1m_2(v_1 - v_2)^2}{m_1 + m_2}.$$

Ce résultat explique la curieuse expérience que voici. Si on lâche une balançoire de masse  $m_1$  d'une hauteur  $h$  et si, au passage par la verticale, on pose sans secousse sur la planche une masse  $m_2$  égale, la balançoire ne remonte qu'à une hauteur  $h : 4$ . Il semblerait qu'elle dût remonter à la hauteur  $h : 2$ . Appliquons la formule précédente :

$$m_1 = m_2, \quad v_2 = 0.$$

$$W = \frac{m_1v_1^2}{2}, \quad u = \frac{v_1}{2}, \quad W' = (m_1 + m_2) \frac{u^2}{2} = \frac{m_1v_1^2}{4}.$$

L'énergie cinétique a diminué de moitié : le pendule ne doit remonter qu'à une hauteur quatre fois moindre, puisque la masse est devenue double.

*Corps élastiques.* — On suppose que les corps se déforment, puis reprennent ensuite leur forme initiale suivant la même loi. Il y a donc dans le phénomène deux phases identiques au point de vue des forces mises en jeu.

Pendant la première phase, la vitesse de  $m_1$  passe de  $v_1$  à  $u$ ; pendant la seconde, elle subit une diminution égale et arrive à sa valeur finale  $v'_1$  telle que

$$u - v'_1 = v_1 - u, \quad v'_1 = 2u - v_1.$$

De même pour l'autre masse :

$$v'_2 = 2u - v_2.$$

Remplaçons dans ces équations  $u$  par sa valeur; il vient :

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2},$$

$$v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

En particulier si  $m_1 = m_2$ , on a  $v'_1 = v_2$ ,  $v'_2 = v_1$ ; les masses échangent leurs vitesses.

**22. Impulsion appliquée à un corps tournant autour d'un axe fixe.** — Nous allons reprendre les raisonnements qui nous ont servi à définir et à mesurer l'impulsion dans le cas d'un corps libre dans l'espace, pour définir et mesurer l'impulsion dans le cas d'un corps tournant autour d'un axe fixe.

Soit  $\Gamma$  le moment du couple qui agit. Nous avons à chaque instant en appelant  $u$  la vitesse angulaire :  $Idu = \Gamma dt$  (Cours de Math., § 36). Nous supposons que la durée d'action du couple est très petite. On appelle *impulsion* l'intégrale par rapport au temps  $\mathcal{J} = \int \Gamma dt$ .

D'après la relation générale précédemment rappelée, l'impulsion appliquée à un corps partant du repos est mesurée par la quantité  $\int Idu = Iu$ , produit du moment d'inertie par la vitesse angulaire au moment où le couple cesse d'agir. Cette formule est tout à fait analogue à l'expression de la quantité de mouvement; le moment d'inertie remplace la masse, la vitesse angulaire remplace la vitesse linéaire.

**APPLICATION. PENDULE BALISTIQUE.** — Un pendule, d'abord au repos, reçoit une impulsion  $\mathcal{J}$ ; on demande jusqu'à quelle élongation il ira à partir de sa position d'équilibre; on néglige les frottements.

Écrivons que le travail effectué contre les forces de la pesanteur est égal à l'énergie cinétique au départ. Soit  $p$  le poids,  $l$  la distance

du centre de gravité à l'axe de rotation; pour une élongation  $\theta$ , le travail contre la pesanteur est :

$$pl(1 - \cos \theta) = 2pl \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

La vitesse angulaire au départ est :  $u = \mathcal{J} : I$ .

L'énergie cinétique est :  $\frac{Iu^2}{2} = \frac{\mathcal{J}^2}{2I}$ .

L'équation donnant  $\theta$  est donc :

$$2pl \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\mathcal{J}^2}{2I}.$$

D'où  $\mathcal{J} = 2\sqrt{plI} \cdot \sin \frac{\theta}{2}$ .

On a plus simplement :  $\mathcal{J} = \sqrt{plI} \cdot \theta$ , si  $\theta$  est assez petit pour qu'on puisse poser :  $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$ .

Dans ce dernier cas, on peut donner à la formule des expressions souvent utilisées. Soit  $T$  la durée d'oscillation du pendule

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{pl}}.$$

On tire de là :  $\theta = \frac{\mathcal{J}}{\sqrt{plI}} = \frac{2\pi\mathcal{J}}{Tpl}$ .

Les raisonnements précédents s'appliquent à un corps mobile autour d'un axe, soumis à l'action d'un couple  $C\theta$  proportionnel à l'angle d'écart avec la position d'équilibre.

On a :  $\theta = \frac{\mathcal{J}}{\sqrt{IC}} = \frac{2\pi\mathcal{J}}{TC}$ .

*Remarque.* — A une impulsion déterminée ne correspond pas une quantité de travail déterminée<sup>1</sup>. L'énergie a pour expression  $\mathcal{J}^2 : 2I$ ; elle est d'autant plus petite que l'inertie du corps percuté est plus grande. Sans changer le couple  $C$ , modifions le moment d'inertie par l'adjonction de deux masses égales symétriquement disposées, par rapport au centre de gravité s'il s'agit d'un pendule, par rapport à l'axe vertical de rotation dans le cas où le corps oscille sous l'influence de l'élasticité de torsion d'un fil : la durée d'oscillation

<sup>1</sup> Ce n'est qu'à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle qu'on est parvenu à préciser le rôle des deux intégrales *travail* (intégrale du vecteur force le long d'un contour) et *impulsion* (intégrale du vecteur par rapport au temps). La fameuse dispute au XVIII<sup>e</sup> siècle sur la *force des corps*, que les uns voulaient mesurer par la *force vive* et les autres par la *quantité de mouvement*, a pour cause la confusion entre les notions fondamentales travail et impulsion.

augmente. Corrélativement à une même impulsion  $\mathcal{J}$  correspond un angle  $\theta$  plus petit, car l'énergie potentielle correspondant à l'angle  $\theta$  conserve la même valeur  $C\theta^2:2$ .

*Pendule balistique.* — Comme application de ces formules, nous citerons le *pendule balistique* qui servait à étudier les vitesses des projectiles. Ou bien on recevait la balle d'un fusil dans une sorte de boîte pleine d'argile mouillée, convenablement suspendue, ou bien l'arme (fusil ou canon) formait elle-même le pendule. L'expérience consistait toujours à déterminer l'angle  $\theta$  dont le pendule était écarté de la verticale en avant ou en arrière. Nous n'insistons pas, parce qu'aujourd'hui on détermine directement la vitesse des projectiles en leur faisant couper successivement deux circuits électriques dont la distance est suffisante et connue. Ces ruptures déclenchent deux couteaux qui marquent deux traits sur un corps tombant en chute libre; la distance des traits permet de calculer la différence des temps (chronographe Le Boulanger).

Mais outre l'intérêt théorique des formules démontrées, nous en trouverons une application très importante au galvanomètre balistique.

### 23. Impulsion appliquée sur un corps mobile autour d'un axe dans le cas où il y a frottement proportionnel à la vitesse.

Nous savons que l'équation est :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} + C\theta = 0.$$

Soit  $\mathcal{J}$  l'impulsion : le corps part du repos au temps  $t=0$  avec une vitesse angulaire  $u_0 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = \mathcal{J}:I$ .

Supposons d'abord l'intégrale de la forme

$$\theta = \theta_0 e^{-\lambda t} \sin \omega t.$$

La vitesse a généralement pour expression :

$$u = \theta_0 e^{-\lambda t} [-\lambda \sin \omega t + \omega \cos \omega t].$$

La condition initiale est donc :

$$u_0 = \mathcal{J}:I = \theta_0 \omega,$$

D'où l'intégrale :

$$\theta = \frac{u_0 T}{2\pi} \cdot e^{-\lambda t} \sin \omega t.$$

La position d'élongation maxima est donnée sensiblement par

$$\sin \omega t = 1, \quad t = T:4, \quad \theta = \frac{u_0 T}{2\pi} e^{-\lambda \frac{T}{4}} = \frac{\mathcal{J}T}{2\pi I} e^{-\lambda \frac{T}{4}}.$$

Puisqu'on a très sensiblement :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}}, \quad \text{il vient enfin : } \theta = \frac{2\pi J}{TC} e^{-\lambda \frac{T}{4}};$$

c'est la même formule que plus haut à un facteur constant près.

Supposons maintenant le mouvement apériodique. Écrivons que pour  $t=0$ , la vitesse angulaire est  $u_0$ , et l'élongation nulle,  $\theta=0$ .

Dans le cas général, on a :

$$\theta = \frac{u_0}{2K} e^{-\lambda t} [-e^{-Kt} + e^{Kt}].$$

Écrivons que la vitesse est nulle, c'est-à-dire l'élongation maxima : le temps doit satisfaire à une équation où  $u_0$  n'entre pas ; sa valeur  $t_1$  ne dépend donc que de  $\lambda$  et de  $K$ , c'est-à-dire des constantes de l'appareil. Autrement dit, le mobile met à aller jusqu'à l'élongation maxima un temps indépendant de la vitesse initiale. L'élongation maxima est proportionnelle à la vitesse initiale  $u_0$ , puisque le rapport  $\theta : u_0$  est égal à une fonction du temps  $t$  dans laquelle la variable  $t$  prend une valeur constante.

Dans le cas particulier où les racines sont égales, on a :

$$\theta = u_0 t e^{-\lambda t}.$$

L'élongation maxima, donnée par la condition  $\frac{d\theta}{dt} = 0$ , arrive au temps  $t = 1 : \lambda = \sqrt{I : C}$ ; elle a pour expression :

$$\theta = \frac{u_0}{\lambda e} = \frac{J}{eI\lambda} = \frac{J}{e\sqrt{IC}}.$$

Imaginons qu'il soit possible de supprimer l'amortissement, la période deviendrait  $T = 2\pi \sqrt{I : C}$ . Introduisons cette valeur dans la

formule, il vient : 
$$\theta = \frac{2\pi J}{TC} \cdot \frac{1}{e}.$$

L'appareil est  $e$  fois, soit environ trois fois moins sensible avec l'amortissement critique que sans amortissement.

En définitive, quelle que soit la grandeur du frottement, *supposé proportionnel à la vitesse*, l'impulsion est mesurée en valeur relative par l'angle d'écart à partir de la position d'équilibre.

**24. Influence d'une ou plusieurs percussions à certains points d'une oscillation sinusoïdale.** — Soit  $\theta = \theta_0 \sin \omega t$  la loi d'oscillation d'un pendule. Lorsqu'il est dans l'azimut  $\theta$ , on lui imprime une petite impulsion qui modifie sa vitesse angulaire actuelle  $u$  de  $\delta u$ ; on demande ce qui résulte pour la durée d'oscillation.

On a :  $\theta = \theta_0 \sin \omega t, \quad u = \omega \theta_0 \cos \omega t; \quad \text{tg } \omega t = \omega \theta : u.$

Le temps nécessaire pour aller de l'azimut  $\theta = 0$  à l'azimut actuel est donc :

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\omega\theta}{u}.$$

A partir de cet azimut, le pendule continuant son oscillation parvient à l'amplitude  $\theta_0$  dans le temps

$$t_2 = \frac{1}{\omega} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\omega\theta}{u} \right).$$

Supposons que dans l'azimut  $\theta$ , on donne une petite impulsion qui modifie la vitesse angulaire de  $\delta u$ . Le pendule continue l'oscillation avec une vitesse un peu plus grande; le temps qu'il emploie pour parvenir à l'élongation maxima est :

$$t'_2 = \frac{1}{\omega} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\omega\theta}{u + \delta u} \right).$$

L'accroissement de durée est donc :

$$\frac{1}{\omega} \left[ \operatorname{arctg} \frac{\omega\theta}{u} - \operatorname{arctg} \frac{\omega\theta}{u + \delta u} \right] = \frac{\theta\delta u}{\omega^2\theta_0^2}.$$

Cette formule donne d'intéressants résultats.

Si l'impulsion a lieu lors du passage à la position d'équilibre  $\theta = 0$ ,

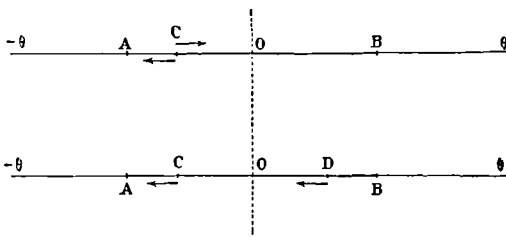


Fig. 11.

la durée n'est pas modifiée. On s'efforcera donc qu'il en soit ainsi dans tous les échappements; car ils produisent précisément une petite impulsion.

Supposons que l'impulsion augmente toujours la valeur absolue de la vitesse, ce qui est

le cas pratique. Produisons deux impulsions égales lors du passage au point C;  $\theta$  est le même, mais la vitesse est négative quand le mobile va de O en C, positive quand le mobile va de C en O; les  $\delta u$  sont égaux et de signes contraires. L'impulsion lors du premier passage augmente la durée; elle la diminue d'une quantité égale, lors du second.

De même deux impulsions égales en C et en D, *le mobile allant dans le même sens*, ne modifient pas la durée. Les  $\delta u$  sont de mêmes signes, les  $\theta$  de signes contraires. Si donc il est impossible de produire l'impulsion lors du passage par la position d'équilibre, on obtient le même effet par deux impulsions symétriques. C'est précisément le cas réalisé dans les horloges ordinaires.

25. **Oscillations à peu près sinusoïdales.** — Sur le mobile agissent : 1° une force proportionnelle à l'élongation ; 2° d'autres forces quelconques suffisamment petites par rapport à la première. On peut regarder ces forces comme procédant par impulsions successives infiniment petites. Si pour l'azimut  $\theta$ , l'une d'elles  $F$  produit une variation  $\delta u$  de vitesse angulaire, elle change la durée d'oscillation de  $\theta \delta u : \omega^2 \theta_0^2$ .

Mais le principe de la conservation de l'énergie donne la condi-

tion 
$$Fd\theta = Id \frac{u^2}{2} = Iu\delta u ;$$

d'où 
$$\frac{\theta \delta u}{\omega^2 \theta_0^2} = \frac{F\theta dt}{I\omega^2 \theta_0^2} .$$

Ainsi la période de l'oscillation troublée par les petites forces diffère de la période de l'oscillation rigoureusement sinusoïdale d'une quantité immédiatement calculable par l'intégrale :

$$\int \frac{F\theta dt}{I\omega^2 \theta_0^2} . \tag{1}$$

Comme elle n'est plus qu'une correction, il suffit d'y supposer le mouvement rigoureusement sinusoïdal.

Soit par exemple :  $F = a_n \theta^n .$

Posons :  $\theta = \theta_0 \sin \omega t, \quad F = a_n \theta_0^n \sin^n \omega t .$

La correction est donnée par l'intégrale toujours facilement cal-

culable :  $\frac{a_n \theta_0^{n-1}}{I\omega^2} \int \sin^{n+1} \omega t . dt = \frac{a_n \theta_0^{n-1}}{C\omega} \int \sin^{n+1} \alpha d\alpha .$

En particulier soit :  $F = a_3 \theta^3 .$

On a aisément :  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \alpha d\alpha = \frac{3\pi}{16} .$

La correction (négative) est donc pour un quart de période :

$$\frac{a_3 \theta_0^3}{C\omega} \cdot \frac{3\pi}{16} = \frac{T}{4} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{a_3 \theta_0^3}{C} .$$

La période vraie est donc :

$$T \left( 1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{a_3 \theta_0^3}{C} \right) .$$

*Application.* — On tire de là une formule importante.

Quand les oscillations du pendule ne sont pas très petites, le couple a pour expression :

$$C \sin \theta = C \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right) .$$

Pour trouver la correction, il faut faire dans la formule précédente :

$$a_3 = -C : 6.$$

La période vraie est donc :

$$T \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right).$$

La formule (1) conduit donc immédiatement à des résultats qu'on ne trouve ordinairement que par de pénibles développements en série.

**26. Condition pour qu'une percussion appliquée à un corps tournant autour d'un axe, ne produise aucune percussion sur cet axe.** — On démontre qu'il n'y a pas percussion sur l'axe à la

condition : 1° que la percussion QP soit normale au plan OAG passant par l'axe de rotation OA et le centre de gravité G ;

2° que l'axe de rotation OA soit un des axes principaux d'inertie relatifs au point O où il perce le plan OO'P qui lui est normal et passe par la percussion ;

3° que la distance OO' soit égale à  $l + \frac{\rho^2}{l}$ , où  $l$  est la distance du centre

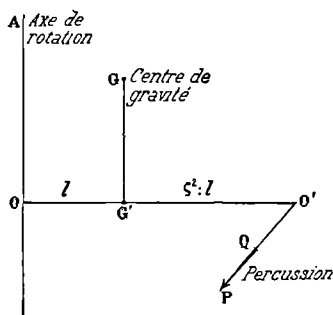


Fig. 12.

de gravité G à l'axe,  $\rho$  le rayon de giration relativement à la droite GG' passant par le centre de gravité et parallèle à OA. Le point O' s'appelle *centre de percussion*.

Par exemple, si on veut lancer le pendule de Kater d'abord au repos sans percussion sur l'axe, il suffit de frapper sur le second axe horizontalement et dans le plan d'oscillation. Les conditions 1° et 3° sont ainsi satisfaites. La seconde est satisfaite par construction.

Réciproquement, si un corps est en mouvement autour d'un axe, on peut l'arrêter brusquement sans percussion sur l'axe, en appliquant une force instantanée comme il vient d'être dit.

On va comprendre maintenant la théorie du marteau.

Le marteau possède généralement une masse considérable et très ramassée portant un manche *long et léger*. Quand on l'utilise, il tourne autour d'un axe

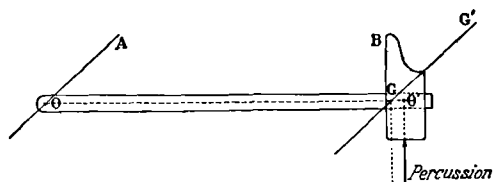


Fig. 13.

OA passant dans la main, par l'extrémité du manche et *perpendiculaire à un plan de symétrie*. Grâce à la forme ramassée de la masse



lourde, le rayon de giration par rapport à la droite  $GG'$  parallèle à  $OA$  et passant par le centre de gravité est très petit;  $\rho^2 : l$  est donc très petit. On comprend dès lors que la percussion appliquée au centre de la partie plate, et passant près du centre de gravité, donne une percussion nulle sur la main. Le bec  $B$  du marteau est d'ailleurs placé de manière à reporter le centre de gravité entre  $O$  et  $O'$ , comme le veut la théorie.

Quand l'axe de rotation passe par le centre de gravité, il éprouve toujours une percussion, puisque le centre de percussion est alors à l'infini. Si donc on veut lancer un corps autour d'un tel axe, sans qu'il y ait percussion, il faut, conformément à la théorie générale du § 14, employer un couple normal à l'axe et faire en sorte que cet axe soit principal d'inertie. Ces remarques ont des applications très importantes dans les appareils tels que les galvanomètres à aimant et à cadre mobiles, etc.

---

## CHAPITRE II

### PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FLUIDES. HYDROSTATIQUE

**27. Définition de la pression en un point d'un fluide.** — Dans le chapitre II du Cours de Seconde, nous établissons *experimentalement* les lois de l'hydrostatique; nous allons ici les déduire plus systématiquement de la définition des fluides.

**DÉFINITION DU FLUIDE PARFAIT.** — On appelle fluide parfait un corps dont les différentes parties glissent les unes sur les autres sans frottement, dont par conséquent on peut modifier la forme sans aucune dépense de travail, pourvu qu'on ne modifie pas simultanément son volume. Un fluide parfait ne peut éprouver que des pressions normales de la part du vase qui le renferme, ou, ce qui revient au même, d'après le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, ne peut exercer que des pressions normales sur ces parois. Car tout déplacement des parties du fluide le long de la paroi doit s'effectuer sans qu'il en résulte un travail; ce n'est possible que si les forces sont normales à la direction du déplacement, c'est-à-dire normales à la paroi tangentielllement à laquelle s'effectue le déplacement.

**PRINCIPE DE LA SOLIDIFICATION.** — Si l'équilibre a lieu dans certaines conditions, il a encore lieu, en supposant reliés par des liens rigides des points qui étaient libres auparavant. Cette règle générale est évidente. Dans le cas particulier des liquides, elle prend le nom de *principe de la solidification* et s'énonce ainsi : *Si l'équilibre a lieu, il subsiste en supposant solidifié tout ou partie du liquide.* Il ne s'agit pas là d'une solidification réelle : si l'eau devenait de la glace, les conditions d'équilibre pourraient être considérablement modifiées. On veut parler d'une solidification de pur raisonnement : l'eau est censée conserver toutes ses propriétés, sauf la fluidité; sa densité par exemple n'est pas modifiée, elle le serait par une solidification réelle.

**Pression en un point.** — Ceci posé, séparons par une surface quelconque  $S$  le fluide en deux parties et solidifions tout ce qui se trouve

d'un côté de la surface. Le fluide exerce sur un élément  $dS$  de la surface du *solide obtenu* une certaine pression. Nous admettons qu'entre les deux portions du fluide à l'état liquide s'exerce de part et d'autre de l'élément  $dS$  considéré de la surface géométrique  $S$ , la pression que nous venons de définir. Elle est naturellement normale à l'élément  $dS$  d'après la définition du fluide parfait.

Faisons tourner l'élément  $dS$  autour d'un de ses points  $O$ ; nous disons que la pression sur l'élément  $dS$  est indépendante de son orientation autour du point  $O$ . Cette proposition démontrée, nous aurons défini ce qu'on appelle *pression en un point d'un fluide*.

Pour y parvenir, considérons une surface fermée supportant en tous ses points la même pression normale; il est évident que la résultante de toutes les pressions est nulle. En effet, coupons-la par un plan  $P$  quelconque et cherchons la résultante des pressions parallèlement à la normale  $ON$  à ce plan.

Sur un élément  $dS$ , la force qui s'exerce est  $p dS$  et la composante suivant  $ON$  est  $p dS \times$  le cosinus de l'angle que fait  $p$  (normale à  $dS$ ) avec  $ON$ . Cette composante est donc égale à  $p d\sigma$ ,  $d\sigma$  étant la projection sur le plan  $P$  de l'élément  $dS$ . En définitive, la résultante de toutes les pressions qui s'exercent *de haut en bas* sur la partie de la surface  $S$  qui est au-dessus de  $P$  est  $p\sigma$ ; la résultante de toutes les pressions qui s'exercent *de bas en haut* sur la partie de la surface qui est au-dessous de  $P$  est  $p\sigma$ . La somme est nulle.

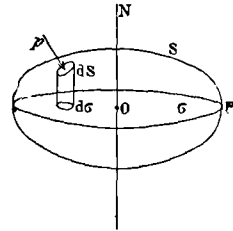


Fig. 14.

Supposons maintenant une surface fermée très petite et enveloppant un volume  $dv$ . Admettons qu'outre les pressions, sur la grandeur desquelles je ne suppose rien, si ce n'est qu'elles sont finies, il n'existe que des forces proportionnelles au volume. Je dis que si l'on fait tendre le volume  $dv$  vers 0, la condition d'équilibre est que la pression en tous les points de la surface fermée tende vers la même valeur. En effet, les forces qui ne sont pas les pressions vont décroître comme  $dv$ , tandis que les pressions vont décroître comme l'aire de la surface. Or ces quantités ne sont pas du même ordre. Il faut donc pour l'équilibre que la résultante des pressions s'annule comme la résultante des forces proportionnelles au volume, bien que l'aire de la surface ne s'annule pas comme le volume qu'elle entoure. Le volume  $dv$  tendant vers 0, il faut donc que les pressions deviennent égales sur toute la surface, car leur résultante s'annule alors, quelles que soient la forme de cette surface et son aire.

**28. Équation générale d'équilibre.** — Nous pouvons donc considérer la pression en un point d'un fluide comme une fonction des

coordonnées de ce point :  $p = f(x, y, z)$ . Établissons la relation qui doit exister pour l'équilibre entre la pression et les forces qui sont

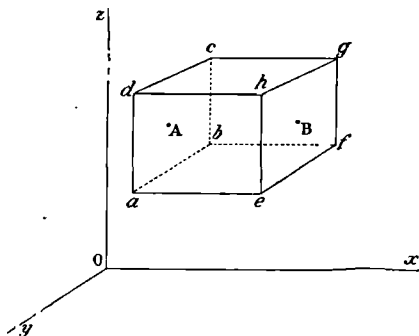


Fig. 15.

proportionnelles au volume et dont je représenterai les composantes par  $Xdv$ ,  $Ydv$ ,  $Zdv$ ;  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  sont généralement des fonctions des coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de l'élément de volume  $dv$  considéré.

Soit un parallépipède découpé dans le fluide et dont les arêtes sont parallèles aux axes de coordonnées. La pression au point A et sur tout l'élément de surface  $abcd$  est  $p$ ; la force sur l'élément  $abcd$  est  $p.dydz$ .

La pression au point B est  $-(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx)$ ; la force sur l'élément  $efgh$  est  $-(p.dydz + \frac{\partial p}{\partial x} dv)$ , en posant  $dv = dxdydz$ .

La résultante des pressions parallèles à  $Ox$  est donc  $-\frac{\partial p}{\partial x} dv$ , puisque, les pressions étant normales, les autres faces du parallépipède ne fournissent aucune composante parallèle à  $Ox$ .

Pour l'équilibre nous devons avoir :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + X = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = X,$$

et par symétrie :  $\frac{\partial p}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = Z.$

Ce sont les équations générales d'équilibre<sup>1</sup>.

Si aucune force ne sollicite le fluide, la pression est la même en tous points, ce qui est évident d'après le paragraphe précédent.

*Surfaces de niveau.* — Elles sont définies par la condition que la pression soit constante.

Or on a :

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Écrire que  $dp = 0$  le long d'une surface, c'est écrire que

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Le travail du vecteur  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  est nul pour tout déplacement sur la

<sup>1</sup> Nous retrouverons plus loin (§ 124) ce même mode de raisonnement employé d'une manière plus générale.

surface de niveau; donc le vecteur  $X, Y, Z$  est normal à la surface en tous ses points.

En particulier supposons le fluide soumis à l'action d'une force qui admet un potentiel : posons  $Xdx + Ydy + Zdz = -\rho dV$ , en explicitant la densité  $\rho$ . L'équation d'équilibre devient :

$$dp = -\rho dV.$$

$dV$  étant par hypothèse une différentielle exacte, il faut que la densité ne soit fonction que de la pression. Les surfaces d'égale densité sont donc à la fois des surfaces d'égale pression et des surfaces équipotentielles. De plus, la densité étant généralement fonction de la température, il faut pour l'équilibre que les surfaces d'égale pression soient aussi des surfaces isothermes.

**Corollaires.** *Fluide soumis à l'action de la pesanteur seule.* — Si la force  $X, Y, Z$  par unité de volume est de direction constante, les surfaces de niveau sont des plans. Ainsi quand un liquide n'est soumis qu'à l'action de la pesanteur, les surfaces de niveau sont des plans horizontaux. En particulier, la surface libre est une surface de niveau : elle est donc horizontale.

Prenons la verticale comme axe des  $z$ ,  $Y = X = 0$ ; l'équation d'équilibre devient :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = Z = \rho g,$$

si l'on désigne la densité par  $\rho$ .

La direction positive de l'axe des  $z$  est dirigée vers le bas.

*Liquide pesant placé dans un vase animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des  $z$ .* — Soit  $\omega$  la vitesse angulaire. La force centrifuge est  $m\omega^2 r$ , où  $r$  est la distance à l'axe. Ses composantes parallèlement à l'axe des  $x$  et des  $y$  sont :

$$m\omega^2 x \text{ et } m\omega^2 y.$$

Les équations d'équilibre deviennent :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \rho\omega^2 x, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho\omega^2 y.$$

Les surfaces de niveau sont fournies par la condition :

$$gdz + \omega^2(xdx + ydy) = 0.$$

C'est-à-dire :  $2gz + \omega^2 r^2 = C^{\text{te}}$ .

Les surfaces de niveau, et par conséquent la surface libre, sont des paraboloides de révolution autour de l'axe de rotation. La constante se détermine en écrivant que le volume du liquide a une valeur donnée à l'avance (fig. 16).

Nous verrons plus tard (§ 88 et 96) qu'il n'existe pas ici de potentiel des vitesses. La quantité  $\rho_z$  définie au § 96, n'est pas nulle : on a, en effet,  $\rho_z = 2\omega$ . Le mouvement de rotation d'ensemble que nous avons admis, ne peut donc exister dans un liquide *parfait sans viscosité* (voir chapitre IV). Son existence très approchée dans un liquide réel prouve que ceux-ci ne satisfont qu'imparfaitement à la définition du § 27.

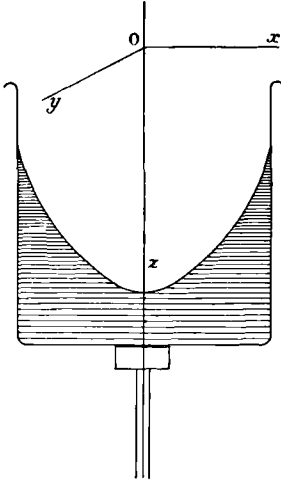


Fig. 16.

*Liquide magnétique soumis à un champ.* — On peut modifier la forme de la surface libre en mettant un liquide magnétique (dissolution de perchlorure de fer par exemple) dans un champ magnétique intense.

**29. Liquide incompressible soumis à l'action de la pesanteur.** — Nous pouvons aisément retrouver toutes les propositions énoncées dans le chapitre II

du Cours de Seconde. Prenons pour axe des  $z$  la verticale et comptons les  $z$  positifs vers le bas. L'équation d'équilibre se réduit à :

$$\frac{dp}{dz} = \rho g.$$

D'où

$$p = p_0 + \rho g z,$$

formule qui contient toutes les lois énoncées au § 58 du Cours de Seconde.

La formule s'appliquant quel que soit  $p_0$ , elle contient aussi le principe de Pascal (§ 64).

On en déduit immédiatement la valeur de la pression totale sur le fond plan et horizontal d'un vase (§ 60).

Il nous reste, pour compléter ces notions, à calculer la pression sur une paroi plane inclinée comme on voudra.

Soit  $p_0$  la pression atmosphérique; plaçons l'origine des coordonnées en un point de la surface libre du liquide. La pression sur une paroi plane est *la somme algébrique* de toutes les pressions, puisque les forces exercées sur les éléments de la paroi, lui étant normales, sont parallèles. Appelons  $dS$  un élément de la surface; la résultante des pressions est :

$$\iint p dS = p_0 S + \rho g \iint z dS,$$

l'intégrale étant étendue à toute la paroi.

Considérons la paroi comme une plaque mince homogène de densité 1, et soit à calculer la coordonnée  $z_1$  de son centre de gravité.

D'après le § 5, il faut écrire :

$$Sz_1 = \int \int z dS.$$

Donc la force que nous cherchons a pour expression :

$$p_0 S + \rho g z_1 S.$$

Elle est égale à la somme de deux termes. Le premier représente le produit de la pression atmosphérique par l'aire de la paroi considérée. Le second représente le poids d'un cylindre ayant la paroi pour base et pour hauteur la distance à la surface libre du centre de gravité de cette paroi considérée comme une plaque mince homogène.

*Centre de pression.* — Le centre de pression ne coïncide pas avec le centre de gravité de la paroi; c'est évident, car les éléments égaux de cette paroi supportent des forces qui sont bien parallèles, mais qui ne sont pas égales. Le centre de pression est toujours au-dessous du centre de gravité, puisque la pression croît avec la profondeur.

Le calcul de ses coordonnées se fait à l'aide d'équations qu'il est facile de poser. Dans les formules du § 5, les forces parallèles sont proportionnelles aux masses  $m_1, m_2, \dots$ . Pour calculer le point d'application d'un système *quelconque* de forces parallèles, il suffit donc de remplacer dans ces formules les  $m$  par les forces considérées.

Sur un élément  $dS$  de coordonnées  $x, y, z$ , la force est  $p dS$ .

Les équations donnant le centre de pression  $x', y', z'$  sont donc :

$$x' \int \int p dS = \int \int p x dS,$$

et deux autres analogues.

**30. Résultante des forces exercées par un liquide sur les parois du vase qui le contient. Proposition réciproque : principe d'Archimède.** — Les équations générales d'équilibre sont :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + X = 0, \quad -\frac{\partial p}{\partial y} + Y = 0, \quad -\frac{\partial p}{\partial z} + Z = 0.$$

Multiplions par  $dv = dx dy dz$  et intégrons pour tout le volume compris dans une surface fermée quelconque.

Traitons l'une des équations.

$$\iiint -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz + \iiint X dv = 0.$$

Or une des intégrations peut être faite pour la première intégrale.

Il vient :

$$\int \int (p_2 - p_1) dy dz + \iiint X dv = 0.$$

La première intégrale peut être mise sous une autre forme. Appelons généralement  $\alpha, \beta, \gamma$  les cosinus directeurs de la normale à la surface, *cette normale étant supposée toujours menée vers l'intérieur*

de la surface. Menons un cylindre tangent à la surface  $S$  et dont les génératrices soient parallèles à l'axe des  $x$ . La courbe suivant laquelle il touche la surface  $S$  décompose celle-ci en deux parties  $S_1$  et  $S_2$ . On a dès lors :

$$-p_1 dydz = p_1 \alpha_1 dS_1, \quad p_2 dydz = p_2 \alpha_2 dS_2.$$

$$\iint (p_2 - p_1) dydz = \iint p \alpha dS, \quad \iint p \alpha dS + \iiint X dv = 0.$$

Or la première intégrale représente la somme des pressions dirigées vers l'intérieur de la surface et projetées parallèlement à un axe (ici l'axe des  $x$ ); la seconde intégrale représente la résultante de toutes les forces appliquées aux éléments de volume et projetées parallèlement au même axe. L'équation exprime que ces deux résultantes sont égales et de signes contraires : donc elles se font équilibre.

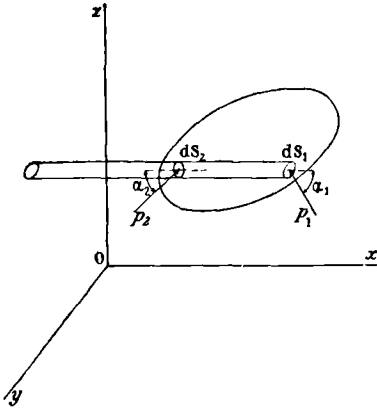


Fig. 17.

En particulier, s'il s'agit de la pesanteur, l'énoncé devient : la résultante verticale de toutes les pressions exercées par un fluide sur une surface fermée quelconque,

fait équilibre au poids du liquide contenu dans cette surface.

Le principe de l'action et de la réaction fournit immédiatement le principe d'Archimède. Les forces exercées par un liquide en équilibre sur toutes les parties de la surface d'un solide qui sont à son contact, admettent une résultante qui est verticale, dirigée vers le haut et égale au poids du liquide déplacé. Elle est appliquée au centre de gravité du volume déplacé.

**31. Équilibre des corps flottants. Théorie élémentaire du navire.** — Nous savons (S. 53) qu'un corps flottant peut être en équilibre stable, alors même que son centre de gravité est au-dessus du centre de poussée (radeaux). Nous devons préciser les conditions de stabilité et donner une idée de la théorie du navire.

L'intersection d'un corps flottant par la surface du liquide *supposée plane* s'appelle *flottaison*. Toutes les flottaisons qui déterminent des volumes égaux ou *isocarènes* s'appellent *flottaisons isocarènes*.

Les centres de gravité des volumes liquides déplacés s'appellent *centres de poussée ou de carène*.

Considérons l'ensemble des flottaisons isocarènes ; ce qui revient au même, pour toutes les inclinaisons du corps flottant, supposons déterminée la flottaison de manière que le poids du liquide déplacé



soit toujours égal au poids du corps, *c'est-à-dire constant*. A chacune des flottaisons  $\pi$  correspond un centre de poussée P. A l'ensemble des flottaisons isocarènes correspond une surface C lieu des centres de poussée.

Indépendamment de toute question hydrostatique, on démontre le théorème suivant. Menons en un point la normale à la surface C; elle est aussi normale à la flottaison  $\pi$  correspondante. Cette normale est, par conséquent, verticale dans le problème hydrostatique, puisque la flottaison est par hypothèse un plan horizontal.

Ce théorème admis, soit un corps flottant possédant un plan de symétrie : imposons-lui des inclinaisons isocarènes par rotation autour d'axes normaux à ce plan; les flottaisons correspondantes sont elles-mêmes normales au plan de symétrie. C'est exactement le problème du *tangage sur mer calme*. Un navire possède en effet un plan de symétrie passant par la quille (*longitudinal*). C'est un peu simplifié le problème du *roulis sur mer calme*; le plan vertical passant par le centre de gravité du navire et perpendiculaire à la quille (*latitudinal*) n'est pas absolument de symétrie.

Les centres de poussée forment une courbe  $P_2PP_1$  tracée sur la surface C précédemment définie; elle est dans le plan de symétrie. On appelle *métacentres* les centres de courbure  $M_1, M, M_2, \dots$  de cette courbe. La courbe des métacentres M, développée de la courbe des centres C, présente généralement un point de rebroussement M qu'on appelle *le premier métacentre*.

Dans la position d'équilibre, le navire étant symétriquement chargé et le centre de gravité G étant alors dans le plan de symétrie, le premier métacentre M et le centre de gravité G sont sur la même verticale. Inclignons le navire de manière que la flottaison vienne en  $\pi_1$  : cherchons à quelle condition il se redressera.

D'après le lemme, le centre de poussée devenant  $P_1$ , la normale  $P_1M_1$  à la courbe  $P_2PP_1$  est aussi normale à la flottaison  $\pi_1$ . Elle est par conséquent verticale : *la poussée est dirigée suivant  $P_1M_1$* . Agira donc sur le navire un couple dont les deux forces, égales au poids du navire, sont appliquées aux points G et  $P_1$ . Pour que ce couple redresse le navire, il faut que le point d'intersection N de  $P_1M_1$  et de GM soit au-dessus du point G. Cette condition sera nécessairement satisfaite, si la courbe des métacentres est au-dessus du point G.

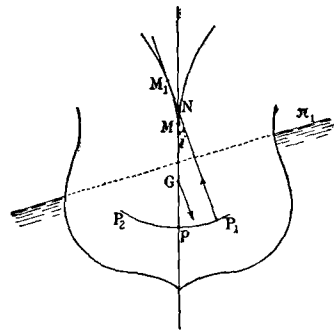


Fig. 18.

En définitive, pour savoir si l'équilibre est stable pour le roulis, il faut tracer la courbe des centres de

poussée pour toutes les flottaisons isocarènes normales au latitudinal, construire la développée de cette courbe, c'est-à-dire la courbe des métacentres. Si cette courbe est au-dessus du centre de gravité, l'équilibre est stable.

Pour savoir si l'équilibre est stable pour le tangage, il faut tracer la courbe des centres de carène pour toutes les flottaisons isocarènes normales au longitudinal, construire la développée de cette courbe, c'est-à-dire une nouvelle courbe de métacentres. Si elle est au-dessus du centre de gravité, l'équilibre est stable. Cette seconde courbe est généralement à une très grande distance au-dessus de la première et du navire.

### 32. Mesure de la stabilité. Durée des petites oscillations.

— Considérons le roulis. Soit  $P$  le déplacement (poids du navire). Le couple qui tend à ramener le navire est  $P \cdot \overline{GN} \cdot \sin i$ . Pour des inclinaisons inférieures à  $10^\circ$ , la longueur  $\overline{MN}$  est généralement négligeable devant  $\overline{GM}$ . Le couple est donc

$$P \cdot \overline{GM} \sin i = P (\overline{PM} - \overline{PG}) \sin i.$$

On désigne par  $\rho$  la hauteur métacentrique  $\overline{PM}$ , et par  $a$  la distance  $\overline{PG}$  du centre de gravité au centre de carène initial. Le moment de stabilité transversale est donc mesuré par la quantité

$$P(\rho - a) \sin i.$$

La distance  $\rho = \overline{PM}$  est complètement déterminée quand on se donne la forme du navire et son déplacement : elle mesure la stabilité de forme. La distance  $a = \overline{PG}$  dépend de la manière dont la charge est répartie ; elle mesure la stabilité de poids. On la rend d'autant plus petite que l'on charge plus bas ; on peut même faire en sorte qu'elle soit négative, que le centre de gravité passe sous le centre de poussée.

Nous avons déjà dit que la distance  $\overline{PM}$  est beaucoup plus grande pour le tangage que pour le roulis : la stabilité du navire est donc beaucoup plus grande pour une rotation autour d'un axe perpendiculaire à la quille que pour une rotation autour d'un axe parallèle à la quille.

Évaluons maintenant la durée des oscillations dans le roulis ou le tangage.

Le navire est toujours soumis à un couple, au moins si nous admettons qu'à chaque instant le poids est égal au déplacement. Donc le centre de gravité doit être immobile (§ 9). Ce n'est d'ailleurs qu'une première et assez grossière approximation. Le navire tourne donc dans le roulis autour d'un axe horizontal, sensiblement parallèle à la quille et qui passe par son centre de gravité  $G$ .

Soit  $I$  le moment d'inertie par rapport à cet axe; la durée des petites oscillations est donnée par la formule

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{gP(\rho - a)'}}$$

dans le système du kilogrammètre.

La durée d'oscillation pour le tangage est donnée par la même formule, où  $I$  représente le moment d'inertie du navire par rapport à un axe perpendiculaire à la quille et passant par le centre de gravité  $G$ , et  $R - a$  la distance  $\overline{GN}$  correspondant au tangage. Comme  $I$  et  $R - a$  sont toutes deux beaucoup plus grandes pour le tangage que pour le roulis, la période reste du même ordre de grandeur.

A mesure que la stabilité augmente, soit par raison de la forme, soit par diminution de  $a$  (en arrimant la cargaison plus bas), la période diminue : la vivacité du roulis augmente. Si l'on veut une lenteur d'oscillation telle que le navire roule peu, même par une mer assez forte, il faut que  $\overline{GM} = \rho - a$  soit petit; le métacentre doit être voisin du centre de gravité. Sur certains cuirassés,

$$\rho - a = 60 \text{ centimètres.}$$

La stabilité proprement dite et l'immobilité relative ou stabilité dite de plateforme sont donc des qualités contradictoires. On les concilie tant bien que mal en prenant une faible distance  $GM$ , mais en choisissant la forme de la carène telle que pour de grands angles d'écart (le roulis peut atteindre  $35^\circ$ ), la distance  $\overline{GN}$ , qui intervient rigoureusement au lieu de  $\overline{GM}$ , croisse rapidement.

Nous avons raisonné pour une mer calme. Quand la mer est *houleuse*, on démontre que le navire tend à rouler par rapport à la normale à la houle, comme il roule en eau calme par rapport à la verticale.

Si la période d'oscillation est exactement celle de la houle, c'est-à-dire égale au temps qu'une crête met à s'avancer de la distance de deux crêtes consécutives, *il y a résonance* : l'amplitude des oscillations peut croître d'une manière dangereuse<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Pour fixer les idées, on saura que dans une houle régulière, les particules liquides décrivent en un temps  $\tau$  des trajectoires elliptiques situées dans des plans verticaux, perpendiculaires aux crêtes et aux creux des vagues et parallèles à leur direction de propagation. Chaque particule se meut en avant quand elle est au sommet d'une vague, en arrière quand elle est dans le creux. Les ellipses décrites sont sensiblement des cercles à la surface; quand la profondeur augmente, l'axe vertical diminue plus vite que l'axe horizontal. La longueur d'onde  $L$  est la distance de deux crêtes; la hauteur de la houle est le diamètre de l'orbite à la surface. Chaque particule faisant une révolution quand l'onde avance de  $L$ , la vitesse de propagation  $V$  est  $L = V\tau$ . On démontre qu'il existe entre la vitesse et la longueur d'onde la relation :

$$V^2 = \frac{gL}{2\pi}.$$

Soit par exemple  $L = 120$  mètres; on tire  $V = 13^m,7$  et  $\tau = 8^s,8$ .

Pour éviter le synchronisme, on cherche à allonger la période d'oscillation  $T$  du navire. Pour certains cuirassés on atteint  $20^s$ , valeur très supérieure aux périodes  $\tau$  de la houle (6 à  $10^s$ ).

**33. Variations de la pression dans un fluide pesant compressible.** — L'équation d'équilibre est encore :

$$\frac{dp}{dz} = \rho g.$$

Mais  $\rho$  n'est plus une constante; c'est une fonction de la pression et de la température.

**LIQUIDES.** — La loi de compressibilité des liquides est donnée par la formule

$$V = V_0 [1 - \kappa (p - p_0)], \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} [1 - \kappa (p - p_0)].$$

Transportant dans l'équation différentielle, intégrons; écrivons que pour  $z = 0$ ,  $\rho = \rho_0$ ; il vient :

$$p - p_0 - \kappa \frac{(p - p_0)^2}{2} = \rho_0 z.$$

$\kappa$  étant toujours très petit, on peut résoudre cette équation par approximation et poser  $p - p_0 = \rho_0 z$  dans le terme multiplié par  $\kappa$ .

$$p - p_0 = \rho_0 z \left[ 1 + \frac{\kappa \rho_0 z}{2} \right].$$

Évaluons les pressions en kilogrammes par  $\text{cm}^2$ . Pour l'eau, on a  $\kappa = 0,000\,05$  (§ 65 du Cours de Seconde).

La densité  $\rho_0$  de l'eau de mer étant 1,022, la pression à 8 kilomètres de profondeur est, non pas  $800 \times 1,022 = 818$  kilogs,

mais  $818 [1 + 409 \cdot 0,000\,05] = 835$  kilogs environ.

Le lecteur résoudra facilement le problème suivant :

Quelle épaisseur  $h$  occupe une couche d'eau comprimée par son propre poids, sachant que non comprimée sa hauteur serait 8 kilomètres ?

**GAZ.** — Nous admettons qu'il s'agit d'un gaz parfait et que l'on peut poser :

$$\rho = \frac{\rho_0}{p_0(1 + \alpha t)} \cdot p,$$

où  $t$  est la température,  $\alpha$  le coefficient de dilatation (0,00365),  $\rho_0$  la densité pour la pression  $p_0$ , à la température  $0^\circ$ .

L'intégration n'est évidemment possible que si l'on se donne  $t$  en fonction de  $z$ .

Admettons que la température est constante dans toute l'épaisseur de la couche d'atmosphère considérée. On a :

$$\frac{dp}{dz} = \frac{g \rho_0}{p_0(1 + \alpha t)} \cdot p = Kp.$$

D'où :  $\log \text{ nép } p = Kz + C^{\text{te}}$ .

Soit  $P$  et  $p$  les pressions qui correspondent aux hauteurs  $Z$  et  $z$  comptées positivement vers le bas. Il vient :

$$Z - z = \frac{1}{K} \log \text{nép} \frac{P}{p} = \frac{2,303}{K} \log \frac{P}{p}.$$

Le terme  $p_0 : g\rho_0$ , qui entre dans la valeur de  $1 : K$ , a les dimensions d'une longueur. Calculons-le dans un système quelconque cohérent d'unités, par exemple dans le système du kilogrammètre :  $g\rho_0$  est le poids du mètre cube d'air à  $0^\circ$  et sous la pression  $p_0$ . Soit  $p_0$  une atmosphère, c'est-à-dire 10 330 kilogrammes par mètre carré :  $g\rho_0$  est alors  $1^{kg}, 293$ .

$p_0 : g\rho_0 = 10\,330 : 1,293 = 8\,000$  mètres très approximativement. C'est ce qu'on appelle la *hauteur réduite à  $0^\circ$*  ; c'est l'épaisseur d'une couche de poids spécifique constant et égal à  $g\rho_0$ , qui ferait équilibre à la pression normale au niveau de la mer.

On trouve en définitive :

$$Z - z = 18\,400 (1 + \alpha t) \log \frac{P}{p}.$$

Si l'on voulait une rigueur plus grande, il faudrait tenir compte des deux faits suivants :  $1^\circ$  la valeur de  $g$  diminue quand on s'élève dans l'atmosphère ;  $2^\circ$  elle varie avec la latitude. Mais, outre que la température est loin d'être constante dans une couche un peu épaisse d'atmosphère, l'erreur que l'on commet sur l'estimation de la *valeur moyenne* est telle, qu'il est absolument illusoire d'introduire ces corrections.

On trouve au § 72 du Cours de Seconde un tableau qui montre comment varient les pressions quand on s'élève dans l'atmosphère ; il est calculé par la formule précédente.

La hauteur d'une montagne ne peut être mesurée avec le baromètre qu'à 2 ou 3 % près, dans les conditions les plus favorables et en opérant avec deux baromètres, l'un servant de témoin et conservé au pied de la montagne, l'autre transporté au sommet. On suppose opérer avec un baromètre donnant la pression sans erreur sensible. Nous verrons (§ 119) quelles difficultés présente l'emploi des baromètres anéroïdes, les seuls qui soient employés dans les opérations courantes. Il ne faut pas oublier que, même en supposant connues les températures, les courants atmosphériques peuvent modifier *localement* la pression : par exemple, sur la face est et la face ouest d'un bâtiment par vent d'ouest ou d'est, on constate quelquefois des différences de  $0^{mm}, 2$  à  $0^{mm}, 3$  de pression, correspondant à des dénivellations de 2 à 3 mètres. Bien entendu, quand on opère avec un seul baromètre, l'incertitude est plus grande ; l'erreur peut aller jusqu'à 5 % de la hauteur (50 mètres pour une dénivellation de 1 000 mètres).

MASSE ET LIMITES DE L'ATMOSPHÈRE. — Pour de très grandes hauteurs, il est clair que l'hypothèse de la température constante est

inadmissible. D'ailleurs, en supposant l'atmosphère décomposée en couches sphériques concentriques et appelant  $R$  le rayon de la terre, la masse de l'atmosphère a pour expression :

$$M = \int_R^{\infty} 4\pi(R+z)^2 \rho dz :$$

cette intégrale doit rester finie. Remplaçons dans l'équation fondamentale  $g$  par  $gR^2 : (R+z)^2$  pour tenir compte de la variation de  $g$  avec l'altitude (théorème de Newton); il faut, pour que  $M$  soit finie, que la température décroisse très rapidement quand on s'élève. Les expériences font à peu près défaut pour les grandes hauteurs. Suivant la loi admise, on reporte plus ou moins loin les limites de l'atmosphère, c'est-à-dire les points où la pression est une fraction donnée (un millionième par exemple) de la pression normale. Il semble bien qu'ils sont situés à des distances du sol de l'ordre de 500 kilomètres.

#### 34. Équilibre des couches superposées d'un fluide pesant quand la température varie avec la hauteur.

Pour l'équilibre, les surfaces isothermes sont horizontales (§ 28); d'ailleurs, les couches doivent décroître de densité à mesure qu'on s'élève : d'où une condition pour le taux de variation de la température. Calculons-le pour un gaz.

L'équation d'équilibre est (voir § 33) :

$$\frac{dp}{dz} = \frac{p_0}{\rho_0} \frac{d}{dz} [\rho(1 + \alpha t)] = \rho g.$$

Pour qu'à la hauteur  $z$  la densité ne varie pas, il faut que la variation de température satisfasse à la relation :

$$\frac{dt}{dz} = \frac{\rho_0 g}{p_0 \alpha} = \frac{273^0}{8000} = 0^0,034.$$

Pour que l'équilibre soit possible, il faut donc que la température ne croisse pas de plus de  $0^0,034$  par mètre quand on se rapproche de la terre. Nous verrons en Optique une application de ce résultat à propos du mirage.

Les liquides étant à peu près incompressibles, la condition d'équilibre pratique est que la température décroisse quand on va vers le fond du vase : sinon il y a convection.

On a étudié particulièrement (Bénard) le phénomène dans une nappe liquide, horizontale, chauffée uniformément par dessous et dont l'épaisseur est de l'ordre du millimètre. Le plus léger excès local de température suffit à créer un centre d'ascension. On pourrait croire que ces centres se répartissent et se déplacent au hasard. L'expérience prouve au contraire qu'un régime permanent s'établit.

La masse se sépare en prismes hexagonaux droits, réguliers,

égaux, formant une sorte de carrelage, dont les côtés ont quelques millimètres de longueur. Ces prismes sont séparés par des cloisons verticales AB, le long desquelles les particules liquides descendent verticalement. Les trajectoires des particules sont contenues dans les

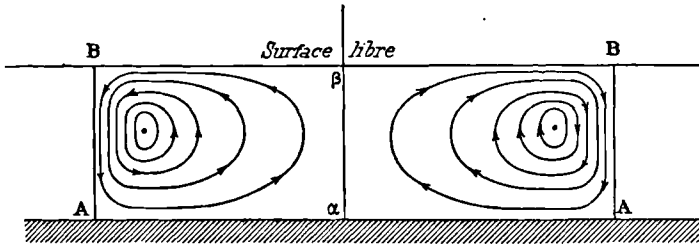


Fig. 19.

plans verticaux passant par l'axe  $\alpha\beta$  du prisme. Dans chacun de ces plans, il en existe deux systèmes symétriques par rapport à l'axe : toutes les courbes du même système sont parcourues dans le même sens et s'enveloppent les unes les autres. Le liquide monte dans les régions voisines de l'axe et descend dans les régions voisines des faces latérales (voir § 100).

## CHAPITRE III

### CAPILLARITÉ

En Hydrostatique, on suppose aux liquides une fluidité parfaite; nous verrons que cette condition est loin d'être réalisée (§ 55 et sq.). On suppose, de plus, qu'aucune force intérieure ne tend à modifier la forme du liquide; ce qui revient au même, que l'énergie potentielle interne d'une masse liquide ne dépend ni de sa forme ni en particulier de l'aire de la surface qui la limite. Nous allons montrer dans ce Chapitre que l'hypothèse est fausse.

**35. Classification générale des tensions ou pressions.** — Nous rencontrerons dans l'étude de la Physique trois espèces de tensions ou de pressions.

1<sup>o</sup> *La tension T d'un fil déjà définie au § 4 du Cours de Seconde.* Elle s'exerce suivant la tangente au fil, elle est donc complètement déterminée comme direction. Elle a les dimensions d'une force :  $MLT^{-2}$ .

2<sup>o</sup> *La tension d'une surface.* Elle s'exerce dans le plan tangent; il y a donc une indéterminée dans sa direction. Ce n'est pas une force, c'est une force par unité de longueur; ses dimensions sont  $MT^{-2}$ . D'une manière générale, la tension d'une surface n'est ni constante en tous points de la surface, ni normale aux lèvres des coupures qui servent à la définir. Il faut entendre par là que la surface étant incisée, pour maintenir les bords de l'incision dans leurs positions primitives, il faut généralement exercer des forces qui varient d'un point à l'autre de la surface, et qui ne sont pas normales aux bords de l'incision. Pour un store baissé, par exemple, les tensions sur les coupures verticales sont nulles, les tensions sur les coupures horizontales sont normales et croissent à mesure qu'on prend un point plus élevé: la quantité de matière à supporter augmente. Les tensions sur des coupures inclinées sont encore verticales, c'est-à-dire inclinées sur la coupure.



3<sup>o</sup> Enfin, on peut faire une section dans un solide. La tension nécessaire pour maintenir au contact les *surfaces* séparées par la coupure, est une force par une unité de surface, une pression ou une tension au sens ordinaire du mot; ses dimensions sont  $ML^{-1}T^{-2}$ . Il y a deux indéterminées dans sa direction (voir plus loin § 96 et sq.). Comme cas particulier, cas important qui se présente dans les fluides, la tension est normale à la surface d'incision et constante autour d'un point (§ 27).

**36. Phénomènes capillaires.** — Tous les phénomènes de capillarité peuvent se déduire de la proposition suivante. L'aire  $S$  de la surface libre d'un liquide tend à diminuer : le travail  $\Delta\mathcal{E}$ , disponible quand l'aire décroît de  $\Delta S$ , est proportionnel à cette variation : nous pouvons écrire  $\Delta\mathcal{E} = A\Delta S$ .

A s'appelle la *tension superficielle*.

Une masse liquide possède donc, du fait de l'existence d'une surface libre  $S$ , une énergie potentielle  $AS$  proportionnelle à  $S$ . A une diminution  $\Delta S$  de la surface correspond une diminution  $A\Delta S$  de l'énergie potentielle, et par conséquent un travail  $\Delta\mathcal{E}$  contre les forces extérieures.

Tout se passe encore comme s'il existait à la surface des liquides une membrane tendue uniformément et indépendamment de la courbure de la surface, et telle que si on fait une petite coupure dans cette membrane, les forces nécessaires pour empêcher les lèvres de cette coupure de s'écarter, soient normales à la coupure. Les deux propositions sont absolument équivalentes. *Cependant il ne s'agit pas de chercher à se représenter cette membrane tendue : elle n'existe pas ; elle ne sert que pour faciliter les raisonnements.*

Les résultats sont identiques, que nous appliquions l'une ou l'autre des deux propositions, et il est des cas où la seconde conduit au but plus rapidement que la première.

Dans le Cours de Seconde (§ 100 et sq.), nous avons prouvé expérimentalement l'existence *apparente* de la membrane. Montrons d'abord sur un exemple qu'on arrive aussi bien aux résultats que nous avons alors énoncés, soit en invoquant l'existence de la membrane, soit *en posant que l'énergie potentielle de la surface libre est proportionnelle à son aire*, ce qu'exprime l'équation  $\Delta\mathcal{E} = A\Delta S$ .

Calculons la pression dans une bulle de savon (§ 101 du Cours de Seconde).

Supposons la bulle gonflée à l'extrémité d'un tube  $T$  dans lequel se meut un piston de section  $\sigma$ ; enfonçons le piston d'une longueur  $d$ ; le volume de la bulle varie de  $\Delta V = \sigma.d$ .

Si  $p$  est l'excès de la pression intérieure sur la pression extérieure, le travail qui accompagne le déplacement est

$$\Delta\mathcal{E} = p\sigma d = p\Delta V.$$

Calculons la variation  $\Delta s$  de la surface sphérique de la bulle.

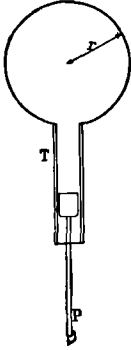


Fig. 20.

$$\text{On a} \quad s = 4\pi R^2, \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

$$\text{D'où} \quad \Delta V = \frac{R\Delta s}{2}.$$

La bulle est très mince, elle est limitée par deux sphères dont les rayons sont à peu près rigoureusement égaux; donc la surface libre  $S$  du liquide est égale à deux fois la surface  $s$  de l'une des sphères.

$$\text{On a donc :} \quad \Delta V = \frac{R\Delta S}{4}.$$

Appliquons le principe général du travail, il vient :

$$d\mathcal{G} = pR \frac{\Delta S}{4} = A\Delta S.$$

D'où enfin

$$p = \frac{4A}{R}.$$

C'est précisément la formule donnée en note du § 101 du Cours de Seconde.

**37. Rayon d'activité moléculaire.** — A l'intérieur de la surface qui limite un milieu, il ne faut pas s'imaginer les paramètres caractéristiques du milieu (densité par exemple) prenant immédiatement une valeur constante. Sur une longueur  $\epsilon$  prise normalement à partir de la surface, ils varient très rapidement pour tendre (asymptotiquement en toute rigueur) vers la valeur qui caractérise les points situés à l'intérieur d'une masse indéfinie. La distance  $\epsilon$  est donc par nature mal déterminée, *en toute rigueur infinie*. On peut seulement se proposer de trouver la distance  $\epsilon$  telle que les propriétés ne diffèrent plus que très peu des propriétés caractéristiques. Elle est extraordinairement petite : *elle mesure, si l'on veut, l'épaisseur de la couche dans laquelle nous pouvons localiser l'énergie potentielle superficielle*. Pour une surface libre  $S$ , l'énergie n'a sa valeur caractéristique  $AS$  que si l'épaisseur est supérieure à  $\epsilon$  : sinon elle est plus petite.

Les bulles de savon nous donnent une évaluation par excès de  $\epsilon$ . Nous verrons qu'on sait mesurer leur épaisseur (Cours d'Optique). On peut admettre qu'elles éclatent infailliblement, si cette épaisseur est inférieure à  $2\epsilon$ . Par exemple, on a trouvé pour épaisseur limite des bulles  $0\mu,1 = 100\mu\mu$ ; on doit conclure de cette expérience  $\epsilon < 50\mu\mu$ .

Que le liquide n'a pas des propriétés identiques à l'intérieur et au voisinage de la surface, c'est ce qu'on peut démontrer directement par l'étude de la composition chimique des *mousses* qui se forment quand on agite certaines dissolutions; l'expérience montre que la

concentration  $\gamma$  est plus grande. Il faut considérer comme un fait très général l'existence de *couches de passage* qui constituent comme une sorte de membrane à la surface des corps.

**38. Équilibre d'une lame liquide limitée par un fil de poids négligeable et parfaitement flexible.** — Nous avons rencontré, au § 100-1<sup>o</sup> du Cours de Seconde, un cas particulier de ce problème. Sous l'influence de la tension  $2A$  d'une lame liquide, c'est-à-dire des tensions superficielles des deux surfaces libres de cette lame, un anneau de fil fin prend la forme circulaire. Étudions cette question d'une manière plus générale.

Nous verrons (§ 155) qu'un fil flexible formant une courbe plane ne peut conserver en un de ses points une tension  $T$  et un rayon de courbure  $R$ , que grâce à une force égale à  $p$  par unité de longueur, dirigée dans le plan du fil, normalement à sa direction et vers sa convexité;  $p$  est donnée par la formule  $p = T : R$ .

Si nous admettons qu'une lame liquide exerce une tension  $2A$  constante et normale à la coupure, le fil qui la limite doit : 1<sup>o</sup> avoir tout de son long une tension  $T$  constante; car les seules forces qui s'exercent dessus sont normales et ne peuvent faire varier cette tension; 2<sup>o</sup> avoir un rayon de courbure constant et, par conséquent, prendre la forme d'une circonférence de cercle.

La tension  $T$  et le rayon  $R$  satisfont à la condition  $T = 2AR$ .

On s'explique ainsi l'expérience que nous venons de rappeler.

En voici une autre analogue, mais pour laquelle on peut faire des mesures précises.

A deux baguettes AA et BB sont attachés deux fils égaux  $h$ : la distance des points d'attache est  $l$ . Le poids de la baguette BB et des poids qu'elle supporte est  $P$ . On demande la forme d'équilibre des fils sous l'action d'une membrane de tension uniforme et normale  $2A$ , et la nouvelle distance  $h'$  des baguettes.

Les fils forment des circonférences égales; leur tension  $T$  satisfait à la relation  $T = 2AR$ . Négligeons le poids des fils et de la lame, et écrivons que la tension des fils et celle de la lame supportent le poids  $P$ . Nous avons la relation :

$$P = 2T \cos \theta + 2Al = 2A(2R \cos \theta + l) \quad (1)$$

$$\text{Évaluons la longueur de l'arc AB; } h = 2R\theta. \quad (2)$$

$$\text{On a aussi : } h' = 2R \sin \theta. \text{ D'où } h' : h = \sin \theta : \theta. \quad (3)$$

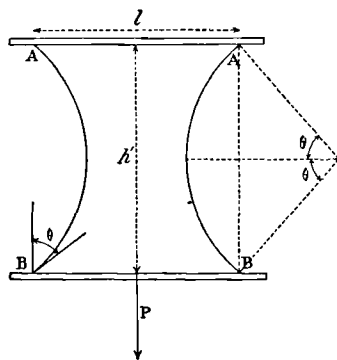


Fig. 21.

Mesurant  $h$  et  $h'$ , on peut calculer  $\theta$  puis  $R$  à l'aide des équations (3) et (2).

Connaissant  $l$  et  $P$ , l'équation (1) fournit la valeur de  $A$ .

**39. Pression normale exercée par une surface dont la tension  $A$  est uniforme et normale aux coupures.** — Soit  $O$  un

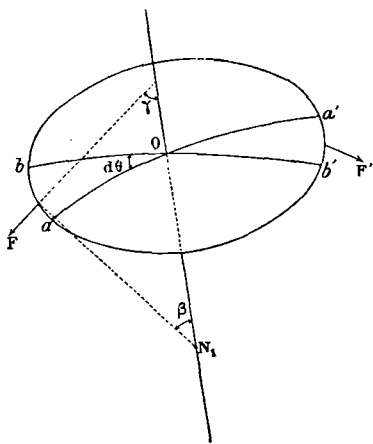


Fig. 22.

point de la surface,  $ON$  la normale en ce point. Traçons sur la surface une petite circonférence de centre  $O$  et de rayon  $\lambda$ . Faisons une incision le long de cette courbe et maintenons les choses en état au moyen des forces  $F$  appliquées dans le plan tangent. Cherchons la résultante normale de toutes ces forces.

Faisons par la normale passer deux plans faisant l'angle  $d\theta$  : leurs traces sur la surface sont  $aa'$  et  $bb'$ . Soit  $\rho_1$  le rayon et  $N_1$  le centre de courbure correspondant à ces sections très voisines :  $\beta\rho_1 = \lambda$ . Soit  $A$  la tension superficielle.

Sur chacun des éléments  $ab$  et  $a'b'$  de longueur  $\lambda d\theta$ , la tension est  $A\lambda d\theta$ .

Sa composante normale à la surface, dirigée suivant  $ON_1$ , est

$$A\lambda \cdot d\theta \sin \beta = A\lambda\beta d\theta,$$

puisque  $\beta$  est très petit. La composante normale pour les deux éléments  $ab$  et  $a'b'$  est donc

$$2A\lambda\beta d\theta = \frac{2A\lambda^2 d\theta}{\rho_1}.$$

Menons maintenant deux plans normaux aux plans donnant pour traces  $aa'$  et  $bb'$  ; cherchons la composante normale des forces  $F$  appliquées aux deux éléments analogues à  $ab$  et  $a'b'$  ainsi découpés. Il suffit de remplacer dans la formule précédente  $\rho_1$  par  $\rho_2$ ,  $\rho_2$  étant le rayon de courbure des nouvelles sections.

En définitive, la composante normale à la surface due aux quatre éléments que nous venons de considérer, symétriquement disposés sur la circonférence, est :

$$2A\lambda^2 \cdot d\theta \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) = 2A\lambda^2 d\theta \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

d'après un théorème connu, en appelant  $R_1$  et  $R_2$  les rayons de courbure principaux de la surface au point  $O$ .

Pour avoir la résultante normale due au cercle tout entier, il suffit de prendre quatre par quatre tous les éléments formant le cercle ;

cela revient évidemment à remplacer  $d\theta$  par  $\frac{\pi}{2}$ , puisque dans la formule trouvée tous les autres termes sont constants. La résultante normale est donc :

$$A\lambda^2\pi\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Mais la pression normale  $p$  est égale à cette résultante divisée par l'aire de la surface qui l'exerce; l'aire du cercle de rayon  $\lambda$  est  $\pi\lambda^2$  :

donc enfin,

$$p = A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \quad (1)$$

Si  $R_1 = R_2 = R$ , nous trouvons  $p = \frac{2A}{R}$ . Si la surface tendue est double comme dans le cas d'une lame liquide, il faut remplacer  $A$  par  $2A$  : c'est la formule  $p = \frac{4A}{R}$ , du § 36.

Remarquons l'analogie de forme entre l'expression (1) et celle qui relie la tension d'une lame liquide avec la tension du fil qui la limite (§ 38).

**40. Systèmes laminaires.** — Formons avec un fil métallique une charpente limitée par des courbes quelconques fermées; trempons-la dans un liquide donnant des lames persistantes et sortons-la. Généralement il s'est formé des lames plus ou moins compliquées s'appuyant sur le contour ou aboutissant à d'autres lames. Comme il existe sur leurs deux faces des pressions (égales ou inégales) constantes, les lames satisfont chacune à une équation

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{Constante}.$$

Quelles que soient les charpentes employées, on constate : *qu'à une même arête liquide aboutissent toujours trois lames; que les arêtes liquides aboutissant à un même point liquide, sont toujours au nombre de quatre.* Il résulte de l'égalité des tensions que les trois lames aboutissant à une même arête, y font des angles égaux; par suite, les quatre arêtes concourant en un même point liquide font aussi entre elles des angles égaux.

En particulier, quand la pression est la même des deux côtés (pression atmosphérique), l'équation à laquelle satisfont les lames est  $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ ,  $R_1 = -R_2$ ; les courbures principales sont égales et de signes contraires. De telles surfaces sont dites à courbure moyenne nulle.

Comme surfaces réglées à courbure moyenne nulle, il n'existe que le plan et l'hélicoïde gauche à plan directeur. La charpente

employée dans ce dernier cas se compose d'un fil de fer servant d'axe autour duquel circule un autre fil de fer courbé en hélice et plié à ses extrémités de manière à former une portion rectiligne, aboutissant normalement à l'axe. Opérant comme il est dit ci-dessus, on trouve une belle lame s'étendant de l'axe aux spires et constituant un hélicoïde.

*Figures de révolution.* — Parmi les figures en nombre infini qu'on peut obtenir, satisfaisant à l'équation  $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = C^{te}$ , nous insisterons seulement sur les figures de révolution.

Pour réaliser les figures de révolution, nous emploierons deux anneaux horizontaux de fer de même rayon  $R$  (5 centimètres par exemple). L'un repose sur trois pieds, l'autre est tenu par un manche formé d'un fil métallique. Écartons l'anneau supérieur et soufflons sur l'anneau inférieur une bulle de savon ; elle est naturellement sphérique : la pression est plus grande à l'intérieur qu'à l'extérieur.

Rapprochons l'anneau supérieur après l'avoir mouillé : pour une certaine position, il se colle contre la bulle.

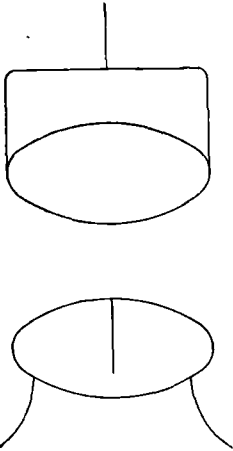


Fig. 23.

L'expérience étant ainsi préparée, introduisons une pipette dans la bulle et aspirons de l'air. Nous obtenons par tâtonnement, comme surface latérale, le cylindre circulaire de rayon  $R$ . Naturellement, à mesure que nous aspirons l'air, la pression intérieure décroît. Pour le cylindre, une des courbures est nulle, l'autre est égale à  $R$ ; l'excès de pression est  $\frac{2A}{R}$ , puisqu'il y a deux surfaces actives. Le volume est fermé par deux calottes sphériques de rayon  $2R$ , puisqu'alors l'excès de pression dû aux calottes est égal à l'excès dû à la surface latérale :

$$2A \left( \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} \right) = \frac{2A}{R}.$$

L'expérience montre que l'on ne peut jamais obtenir, quel que soit le diamètre primitif de la bulle, un cylindre dans lequel le rapport de la hauteur au diamètre est supérieur à 3,5 ; il y a donc alors instabilité de la figure. Si on augmente la hauteur, il y a une tendance au sectionnement ; ce sectionnement régulier se produit, comme nous le verrons, dans les cylindres liquides.

Supprimons encore de l'air ; bientôt les bases terminales deviennent planes ; la figure satisfait à la condition  $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$  ; c'est ce

qu'on appelle une caténoïde, la courbe méridienne est une chaînette. La pression est alors la même à l'intérieur et à l'extérieur.

Enlevons encore de l'air, la pression devient plus petite à l'intérieur qu'à l'extérieur.

Nous aurions pu, à partir de la sphère, augmenter la pression. Nous obtenons ainsi toutes les figures de révolution satisfaisant

à l'équation 
$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = C^{te}.$$

*Autre procédé pour obtenir les surfaces satisfaisant à l'équation*

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = C^{te}.$$

On peut réaliser les mêmes expériences non plus avec des lames dont on puisse négliger le poids, mais en formant les figures avec un liquide dans un autre liquide non miscible, de même densité. On élimine ainsi l'action de la pesanteur. On fait un mélange d'alcool et d'eau en proportions convenables, et l'on prend l'huile comme second liquide.

Les expériences se font identiquement de la même manière; en particulier, on réussit très aisément les figures de révolution.

**41. Formation des gouttes.** — Nous avons décrit comment se forme une goutte à l'extrémité d'une baguette cylindrique de verre (§ 100 du Cours de Seconde). Un phénomène analogue se produit quand un liquide s'écoule lentement par un tube. La goutte est supportée par la tension capillaire, et pas du tout, comme on pourrait le croire sans réflexion, par la *cohésion normale* du liquide; on entend par *cohésion normale* la résistance à la séparation normalement à un plan. Nous savons que la *cohésion tangentielle* est quasi nulle pour un liquide par la définition même de la fluidité; cela veut dire qu'on peut faire glisser sans travail sensible les couches les unes sur les autres. Il ne faut pas conclure que la *cohésion normale* soit négligeable: nous verrons plus tard qu'elle est énorme. Mais elle n'intervient pas ici.

Les propositions précédentes résultent de l'expérience: elle nous apprend que *le poids des gouttes est proportionnel, non pas à l'aire de la section où se fait l'étranglement définitif, mais au diamètre de cette section*. C'est donc bien la résistance de la surface latérale qui intervient pour soutenir la goutte, c'est-à-dire la tension superficielle, et non pas la cohésion normale du liquide de part et d'autre de la section d'étranglement.

<sup>1</sup> Nous ne saurions trop engager le lecteur à répéter ces expériences. Il se servira du liquide suivant:

Eau 1 000 gr.      Savon blanc 10 gr.      Sucre 400 gr.

Tout ce qui modifie la tension superficielle modifie le poids des gouttes. En particulier, on construit des compte-gouttes servant d'alcoomètre. Ils donnent avec l'eau pure des gouttes de 50 milligrammes par exemple, et fournissent par conséquent 100 gouttes pour 5 centimètres cubes. Le nombre des gouttes devient 259 pour de l'alcool à 90°. On conçoit qu'une table permette, d'après le nombre des gouttes, de déterminer la richesse alcoolique.

Il suffit d'approcher de l'extrémité du tube où se forment les gouttes, un vase contenant de l'éther pour modifier leur poids. Ce poids dépend en effet de la composition de la couche superficielle et pas du tout de la composition moyenne. La vapeur d'éther modifie la tension d'une manière sensible sans changer cette composition. Nouvelle preuve que la *cohésion normale* n'intervient pas.

**42. Ascension d'un liquide le long d'une paroi plane indéfinie qu'il mouille.** — Prenons comme plan des  $yOx$  un plan ver-

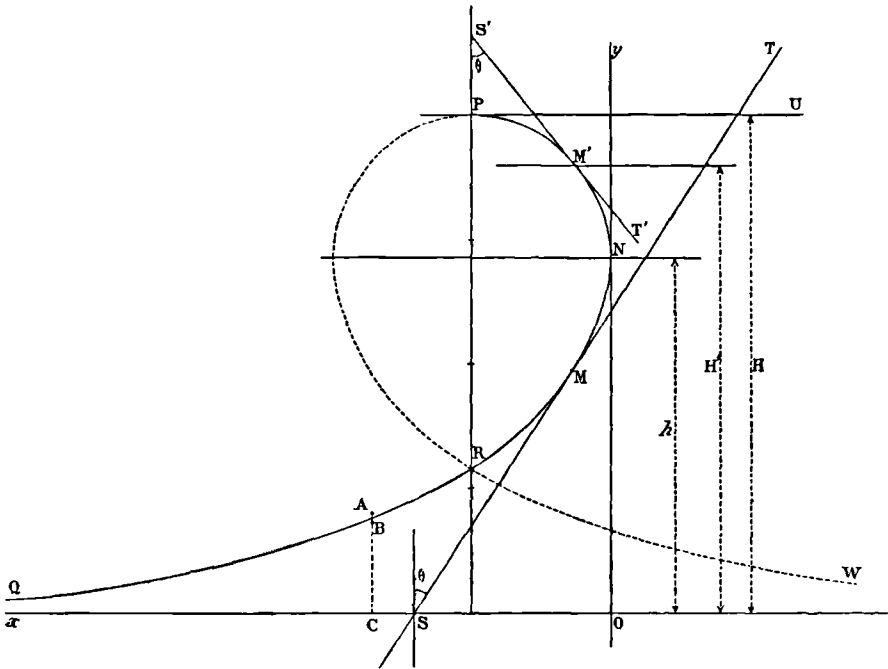


Fig. 24.

tical normal à la paroi, l'axe  $Ox$  étant situé dans la surface libre horizontale du liquide. Si le liquide mouille la paroi, nous constatons que sa surface se relève, au voisinage de cette paroi, suivant un cylindre dont nous nous proposons de déterminer la trace sur le plan  $yOx$ .

D'après les règles de l'Hydrostatique, la pression doit être la même



en tous les points du plan horizontal  $Ox$ . Or, quand nous passons d'un point A extérieur à la surface libre au point B *très voisin*, situé dans le liquide de l'autre côté de la surface libre, la pression diminue brusquement de  $A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ ; la surface libre est une *surface de discontinuité* pour la pression.

Ici l'un des rayons de courbure est infini; si nous désignons l'autre par  $R$ , la diminution brusque de pression est  $\frac{A}{R}$ .

Quand ensuite nous descendons dans le liquide de B en C, soit d'une hauteur  $y$ , la pression croît de  $\delta \cdot y$ , si  $\delta$  est le poids spécifique du liquide.

Écrivons que la pression est constante dans le plan horizontal  $Ox$ . L'équation de condition est :

$$y\delta = \frac{A}{R} = \frac{Ay''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

C'est l'équation différentielle de la section droite de la surface<sup>1</sup>; remarquons que l'inclinaison de la paroi n'intervient pas.

Une intégration est immédiatement possible : écrivons de plus que pour  $y=0$ ,  $y'=0$ , ce qui revient à dire que le plan  $Ox$  se confond avec la surface libre loin de la paroi; il vient :

$$y^2 = \frac{2A}{\delta} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right).$$

L'équation peut s'écrire :

$$y^2 = \frac{2A}{\delta} (1 \mp \sin \theta).$$

Le signe — correspond à la branche QMN;  $\theta$  varie de  $\frac{\pi}{2}$  à 0. Le signe + correspond à la branche NP;  $\theta$  varie de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ .

Si la paroi est verticale, il faut poser  $\theta=0$ ; le liquide s'élève à une hauteur  $h = \sqrt{2A : \delta}$ . La mesure de  $h$  fournit la valeur de  $A$ . Si la paroi plane SMT ou S'M'T' fait avec le plan vertical l'angle  $\theta$ , l'équation donne l'ordonnée des points M ou M' de tangence; on choisit, suivant le cas, le signe — ou le signe +.

Si la paroi est horizontale, telle que PU, le liquide monte au *maximum* à une hauteur  $H = 2\sqrt{A : \delta}$ .

<sup>1</sup> Le raisonnement précédent montre que l'équation différentielle générale de la surface libre d'un liquide pesant est :

$$A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \delta y,$$

quelle que soit la forme des parois qui le limitent. Nous retrouverons cette équation plus loin avec des notations un peu différentes et d'autres conventions de signes.

Tous les raisonnements précédents sont encore valables pour une paroi légèrement courbe, par exemple pour la paroi d'un tube d'assez grand rayon plongeant verticalement dans le liquide. La solution est d'autant plus exacte que le rayon est plus grand.

**Remarque.** — La courbe que nous venons d'étudier se retrouve en Élasticité (§ 114). C'est la forme d'un fil flexible, très long, attaché librement en Q, portant en W une charge et passant librement en R dans un petit anneau. La ligne  $xO$  doit être placée verticalement.

#### 43. Définition de la tension superficielle dans le cas de deux liquides en contact ou dans le cas d'un solide et d'un liquide.

— Pour comprendre comment un liquide se comporte au voisinage d'un solide ou en présence d'un autre liquide, il faut reprendre la question d'une manière plus générale.

Considérons un liquide dans un vase. Soit  $S$  la surface libre,  $s$  l'aire de la surface de contact du liquide et du solide,  $v$  le volume. Nous avons admis que l'énergie potentielle de la surface libre a pour expression  $AS$ ; nous admettrons qu'une certaine énergie potentielle réside dans la surface de contact liquide-solide et qu'elle a pour expression  $Bs$ . Prenons pour plan de référence un plan horizontal quelconque, et comptons les  $z$  positivement vers le haut normalement à ce plan. L'énergie potentielle totale du liquide peut s'écrire (à une constante près qui dépend du choix du plan de référence) :

$$E = \rho \int z dv + AS + Bs,$$

où  $\rho$  est le poids spécifique.

La détermination des conditions d'équilibre revient à chercher la condition pour qu'une petite modification de la surface compatible avec les liaisons ne modifie pas cette énergie :  $\delta E = 0$ .

Supposons d'abord que la surface  $s$  reste invariable pendant la modification. Remplaçons la surface  $S$  par une surface  $S'$  infiniment voisine, limitée au même contour pour que  $s$  reste le même, et cherchons les variations des deux premiers termes de  $E$ .

Traçons sur  $S$  les deux systèmes de lignes de courbure, découpant de petits rectangles curvilignes de côtés  $dl_1$ ,  $dl_2$ . Menons des normales aux sommets des rectangles, et prolongeons-les jusqu'à  $S'$  : soit  $dn$  la longueur de ces normales. Nous formons ainsi sur la surface  $S'$  de petits rectangles dont les côtés  $dl'_1$ ,  $dl'_2$  sont reliés aux côtés  $dl_1$ ,  $dl_2$  par les relations dues à la comparaison de triangles semblables :

$$dl'_1 = dl_1 \left( 1 + \frac{dn}{R_1} \right), \quad dl'_2 = dl_2 \left( 1 + \frac{dn}{R_2} \right).$$

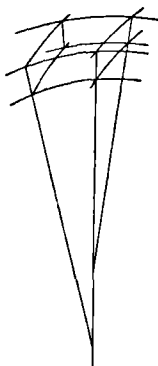


Fig. 25.

L'accroissement d'aire du petit rectangle est donc :

$$dl'_1 dl'_2 - dl_1 dl_2 = dl_1 dl_2 dn \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Les rayons de courbure sont positifs s'ils sont intérieurs à la masse liquide,  $dn$  est positif s'il est extérieur au liquide. Avec ces conventions, l'accroissement d'aire est en grandeur et en signe :

$$\delta S = \int \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dndS.$$

La condition que le liquide ne change pas de volume est  $\int dndS = 0$ .

L'accroissement de l'énergie potentielle due à la pesanteur est  $\rho \int zdndS$ . En effet, la surface  $S'$  est tantôt au-dessus ( $dn > 0$ ), tantôt au-dessous ( $dn < 0$ ) de la surface  $S$ . Prenons tout le liquide limité par  $S$  et  $S'$  dans le second cas, et transportons-le dans le plan  $z = 0$ . Comme  $dn < 0$ , l'énergie potentielle qui décroît, varie de  $\rho \int z \cdot dndS$  en grandeur et en signe, l'intégrale étant étendue à la portion de la surface liquide qu'on vient de définir. Reprenons ce même liquide dans le plan  $z = 0$  et transportons-le dans l'espace à remplir, c'est-à-dire là où  $S'$  est au-dessus de  $S$  ( $dn > 0$ ); l'énergie potentielle croît de  $\rho \int zdndS$ , l'intégrale étant étendue à la seconde portion de la surface liquide. Or la variation d'énergie potentielle ne dépend pas du chemin parcouru; donc quelle que soit la manière dont le liquide se déplace, la variation totale d'énergie potentielle est bien  $\rho \int zdndS$  étendue à la surface entière.

Écrivons que l'énergie potentielle n'a pas varié.

$$\int \left[ A \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \rho z \right] dndS = 0.$$

Comme la relation doit être satisfaite pour toute petite déformation de la surface, il reste comme condition :

$$A \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \rho z = 0.$$

C'est, avec d'autres notations, l'équation de la note du § 42.

Supposons maintenant que l'aire  $s$  de contact entre le liquide et le solide, change pendant la modification. Soit  $\sigma$  la ligne de séparation de  $S$  et de  $s$ ,  $\sigma'$  la ligne de séparation de  $S'$  et de  $s$ . En tous les points de  $\sigma$  menons des normales à  $S$ . Nous décomposons ainsi la surface  $S'$  en deux parties  $S'_1$  et  $S'_2$ .

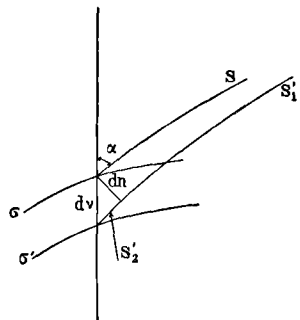


Fig. 26.

D'après ce qui précède, nous pouvons écrire :

$$S'_1 - S_1 = \int \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dndS^1.$$

Soit  $d\nu$  la distance des lignes  $\sigma$  et  $\sigma'$ , comptée positivement vers l'intérieur du liquide; nous avons évidemment :

$$\delta s = \int \sigma \cdot d\nu = \iint d\sigma \cdot d\nu.$$

Enfin  $S'_2$  peut être considéré comme la projection des éléments  $d\nu d\sigma$  sur la surface  $S$ . Soit donc  $\alpha$  l'angle de raccordement que rien n'empêche pour l'instant de supposer variable d'un point à l'autre :

$$S'_2 = - \int \cos \alpha d\nu d\sigma.$$

Écrivons que l'énergie potentielle ne change pas :

$$\int \left[ A \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \rho z \right] dndS + (-A \cos \alpha + B) d\nu d\sigma = 0.$$

Cette condition doit être vérifiée quelle que soit la modification de la surface; nous concluons donc, outre la condition d'équilibre déjà trouvée, la condition :

$$-A \cos \alpha + B = 0, \quad \cos \alpha = \frac{B}{A}.$$

L'angle  $\alpha$  de raccordement est constant,  $\cos \alpha$  est égal au rapport des énergies potentielles par unité de surface du système liquide-solide et du système liquide-gaz.

Comme  $A$  et  $B$  sont des quantités positives, il résulte d'abord de la théorie précédente que l'angle  $\alpha$  ne peut être qu'aigu. C'est nécessaire pour qu'à une augmentation de  $s$  corresponde une aire  $S'_2$  négative; l'accroissement d'énergie potentielle dû à l'accroissement de surface de contact du solide et du liquide est compensé par la diminution  $-S'_2$  de la surface libre du liquide.

Pour  $B=0$ , le liquide se raccorde normalement.  $A$  mesure que  $B$  croît, l'angle  $\alpha$  diminue à partir de  $\frac{\pi}{2}$  et se rapproche de 0; enfin pour

$$B=A, \quad \text{on a : } \alpha=0.$$

Si  $B > A$ , brusquement le phénomène change. L'angle de raccordement est imaginaire, l'équilibre n'est plus possible. *Le liquide mouille le solide*. Il tend à recouvrir le solide d'une très mince

couche. En effet, pour chaque unité de surface recouverte, l'énergie

<sup>1</sup> Remarquons que, d'après nos conventions de signes,  $dn$  et  $d\nu$  sont négatifs dans le cas de la figure 26;  $\delta s$  est négatif et  $S'_1 < S_1$ ; au contraire,  $S'_2 > 0$ .

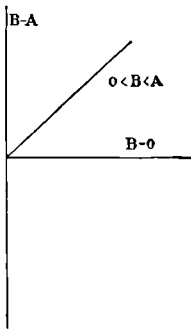


Fig. 27.

potentielle diminue de  $B - A$  unités de travail. Comme l'action de la pesanteur intervient à peine pour balancer cette diminution d'énergie potentielle, que le frottement est faible, la couche pourra s'étendre fort loin. Il faut alors, dans les raisonnements, faire abstraction du solide et le supposer remplacé par du liquide.

Voici quelques remarques importantes.

Nous pouvons admettre que dans une surface *solide* réside une énergie potentielle  $C\Sigma$  proportionnelle à l'étendue  $\Sigma$  de cette surface; la rigidité des parties du solide les empêche d'obéir à la tension qui tend à diminuer la surface libre. La théorie précédente n'est pas modifiée par cette hypothèse; l'expression de la variation de l'énergie devient :

$$\delta E = \rho \delta \int z dv + A \delta S + B \delta s + C \delta \Sigma.$$

Mais on a toujours :  $\delta s + \delta \Sigma = 0$ , car la surface totale du solide est invariable; d'où

$$\delta E = \rho \delta \int z dv + A \delta S + (B - C) \delta s.$$

Il suffit donc, pour retrouver les mêmes résultats, de poser que  $B$  représente dans les calculs précédents la différence  $B - C$ . Mais la généralisation nous permet de considérer la possibilité d'un  $B$  négatif.

On a cherché à expliquer par l'existence de la tension superficielle des solides certains phénomènes d'écaillage qui se produisent quand on cherche à obtenir des arêtes extrêmement vives (Brillouin).

On peut considérer la surface liquide-solide comme tendue, la tension superficielle est  $B$ . La condition  $A \cos \alpha = B$  exprime que les composantes tangentielles de ces deux tensions se font équilibre.

*Rayon d'activité moléculaire.* — Pour que l'angle  $\alpha$  ait la valeur caractéristique du système liquide-solide employé, il faut que l'épaisseur de celui-ci soit suffisante. Si l'on plonge du verre recouvert d'une couche de platine plus ou moins épaisse dans le mercure, l'angle de raccordement est égal à celui du système mercure-verre pour un platinage quasi nul; il ne devient caractéristique du système mercure-platine que si la couche de platine est supérieure à  $2\epsilon$  (§ 37). On trouve ainsi pour  $\epsilon$  des valeurs de l'ordre de  $50\mu$ .

**44. Liquide ne mouillant pas le solide avec lequel il est en contact. Caléfaction.** — Quand le liquide ne mouille pas le solide, nous venons de voir que la surface liquide aboutit à la surface solide sous un angle  $\alpha$  constant, caractéristique du système solide-liquide considéré; c'est l'*angle de raccordement*.

Le liquide s'abaisse au voisinage de la paroi. On a toujours l'équation générale :

$$y^2 = \frac{2A}{\delta} (1 \mp \sin \theta).$$

On compte les  $y$  positivement au-dessous de la surface libre  $XX$ ,

$\theta$  est l'angle avec la verticale. La branche ABCD correspond au signe  $-$ ,  $\theta$  varie de  $\frac{\pi}{2}$  à 0. La branche DE correspond au signe  $+$ ,  $\theta$  varie de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ .

Supposons la paroi verticale, on a  $\theta = \alpha$ ; l'équation donne immédiatement l'abaissement au-dessous du niveau général XX.

Pour le mercure,  $A = 47$  milligrammes par millimètre,  $\alpha = 42^\circ$ ,  $\delta = 13,6$ ; on trouve pour abaissement  $1\text{mm},51$ .

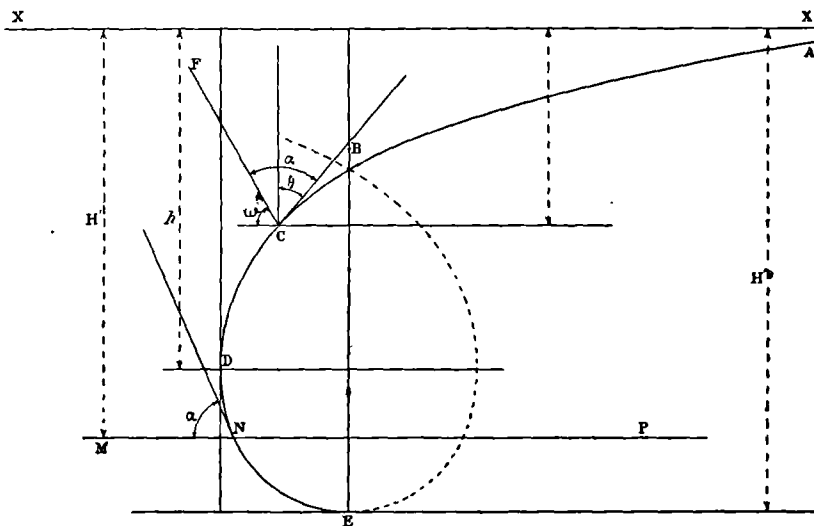


Fig. 28.

*Goutte infiniment large.* — Supposons que la paroi CF fasse l'angle  $\omega$  avec le plan horizontal; l'angle de raccordement devant rester le même, la surface liquide fait avec la verticale un angle

$$\theta = \alpha + \omega - \frac{\pi}{2}.$$

L'ordonnée du point de raccordement au-dessous de XX est donc :

$$y = \sqrt{\frac{2A}{\delta} [1 \mp \cos(\alpha + \omega)]}.$$

Diminuons peu à peu  $\omega$  jusqu'à 0, la surface solide vient en MNP : elle est horizontale. La hauteur  $H'$  est fournie par la relation

$$H' = \sqrt{\frac{2A}{\delta} (1 + \cos \alpha)}.$$

Les mesures de  $H'$  et de  $h = \sqrt{2A : \delta}$ , permettent de calculer  $\alpha$  et  $A$ .

*Caléfaction.* — Le phénomène de la caléfaction se produit quand on verse une petite quantité de liquide sur une plaque métallique fortement chauffée. Le liquide forme une goutte qui *ne touche pas le métal* : il est généralement très au-dessous de son point d'ébullition. La goutte caléfiée est soutenue à distance finie de la plaque chaude par la vapeur qui se produit abondamment sur la surface liquide en regard de la plaque. L'angle de raccordement qu'elle fait avec la plaque est nul. Le profil d'une large goutte peut donc être calculé par les formules précédentes, dans lesquelles on fait  $\alpha = 0$ .

$$H' = 2\sqrt{\frac{A}{\delta}}, \quad h = \sqrt{\frac{2A}{\delta}}, \quad H' : h = \sqrt{2}.$$

**45. Mouvements dus aux phénomènes capillaires.** — On peut les classer en deux groupes.

*Mouvements dus à la forme des appareils.* — Dans des tubes coniques, une goutte d'un liquide mouillant les parois tend à se déplacer vers le sommet du cône; elle tend à s'éloigner du sommet si le liquide ne mouille pas les parois. En effet, quand le liquide mouille les parois, les surfaces terminales se creusent vers l'intérieur de la goutte. Or ce sont des surfaces de discontinuité pour la pression; la *diminution* de pression quand on passe de l'extérieur à l'intérieur de la goutte est d'autant plus grande que le rayon de courbure de la calotte est plus petit. Donc la pression à l'intérieur de la goutte est plus petite vers la surface voisine du sommet du cône que vers la surface opposée. L'équilibre ne peut exister, il y a déplacement vers le sommet du cône.

Même explication quand le liquide ne mouille pas; mais il existe alors une augmentation de pression quand on passe de l'extérieur à l'intérieur de la goutte, à travers les calottes terminales.

On démontre très simplement que deux parois parallèles et mobiles tendent à se rapprocher quand elles sont plongées dans un liquide qui les mouille toutes deux ou ne les mouille pas. Il suffit de considérer la surface libre comme une surface de discontinuité pour la pression et d'évaluer la pression pour les divers plans horizontaux. On trouve qu'elle est, sur une certaine hauteur, plus petite entre les parois qu'à l'extérieur.

Les parois tendent à s'éloigner si l'une est mouillée et l'autre pas.

Pour des raisons analogues, deux corps flottants se rapprochent si tous les deux sont mouillés ou ne le sont pas. Ils s'éloignent l'un de l'autre si l'un est mouillé et l'autre sec.

*Mouvements dus à des inégalités de la tension aux divers points de la surface.* — Si la tension en un point est plus petite qu'aux points voisins, la surface se trouve comme arrachée. C'est ce qu'on obtient quand on chauffe un point de la surface d'un liquide par l'approche

d'une barre de fer rougie. Nous verrons, en effet, plus loin que la tension diminue quand la température s'élève.

De même, plaçons dans un vase une mince couche d'eau et laissons tomber au milieu une goutte d'éther. Les surfaces touchées par l'éther, dont la tension se trouve diminuée, sont si violemment arrachées, que le vase est asséché en son milieu.

Sur les mêmes phénomènes sont basées les méthodes de dégraissage. On place un buvard au centre de la tache, et on en chauffe les bords avec un fer à repasser. La graisse se rassemble au milieu de la tache et est absorbée par le papier buvard.

On explique par des diminutions locales de tension superficielle les mouvements tourbillonnaires du camphre projeté sur l'eau très propre. Une trace d'essence de térébenthine ou d'huile les supprime en recouvrant l'eau d'une couche extrêmement mince (§ 46), de faible tension. Une épaisseur d'huile inférieure à  $2\mu$  suffit à arrêter les mouvements. On ne mesure pas ainsi la quantité  $\epsilon$  définie au § 37, mais on prouve l'extraordinaire divisibilité de la matière.

**46. Phénomènes au contact de deux liquides.** — Plaçons une goutte d'un liquide  $L_1$  sur un liquide  $L_2$ . Nous avons trois systèmes,  $L_1/\text{air}$ ,  $L_2/\text{air}$ ,

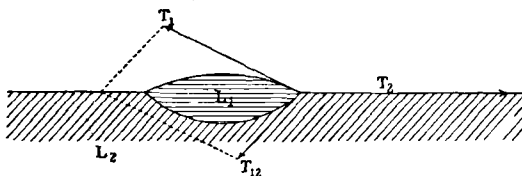


Fig. 29.

et par conséquent trois tensions  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_{12}$ .

La condition de raccordement est que ces tensions se fassent équilibre sur la courbe de raccordement. Ce n'est

possible que si la tension  $T_2$  est inférieure à la somme des deux autres; sinon la goutte s'étale et recouvre complètement le liquide 2.

Dans le système CGS (dyne centimètre), les tensions ont par exemple les valeurs :

$$\text{Eau} = 75, \quad \text{Hg} = 536, \quad \text{Eau/Hg} = 417.$$

$$\text{Comme} \quad 417 + 75 (= 492) < 536,$$

l'eau s'étale sur le mercure propre.

De même, on a :

$$\text{Eau} = 75, \quad \text{Huile} = 37, \quad \text{Huile/Eau} = 21.$$

$$\text{Comme} \quad 37 + 21 (= 58) < 75,$$

l'huile s'étale sur l'eau propre.

Quand deux liquides se raccordent sur une paroi solide, l'angle de raccordement est donné par la condition que les composantes des



trois tensions  $T_1 = L_1/\text{solide}$ ,  $T_2 = L_2/\text{solide}$ ,  $T_{12} = L_1/L_2$ , tangentielle au solide se passent en équilibre. D'où la condition :

$$T_{12} \cos \alpha = T_1 - T_2.$$

L'angle  $\alpha$  est aigu du côté de la plus petite des deux tensions  $T_1$  et  $T_2$ . Si  $T_1 > T_2 + T_{12}$ , l'équilibre n'est pas possible. Un des liquides repousse l'autre et tend à s'interposer entre lui et la paroi.

Le principe général que nous appliquons à ces phénomènes est que l'énergie potentielle totale tend toujours à devenir minima.

**47. Émulsions.** — Une émulsion est formée de petits globules de forme presque rigoureusement sphérique d'un liquide à l'intérieur d'un autre liquide. Pour qu'une émulsion se maintienne aisément, il faut que la tension au contact  $T_{12}$  soit suffisamment faible. Autrement les globules ne tardent pas à se réunir (afin de diminuer la surface de contact entre les liquides et conséquemment l'énergie potentielle), et l'émulsion disparaît.

Ainsi, la tension eau/huile étant relativement grande, l'émulsion ne subsiste pas; l'émulsion de l'huile dans l'eau de savon est beaucoup plus stable, parce que la tension relative est plus faible.

**48. Variation de la constante capillaire avec la température.** — Nous avons vu (§ 102 du Cours de Seconde) que l'ascension capillaire dans un tube de rayon  $r$  est donnée par la formule  $h = \frac{2A}{pr}$ ,

où  $p$  est le poids spécifique du liquide :  $A = \frac{1}{2} . hr . p$ . Nous avons négligé dans notre raisonnement le poids spécifique du gaz par rapport à celui du liquide. Reprenons-le en en tenant compte; nous aurons ainsi l'occasion de donner une seconde démonstration de la loi de Jurin.

Soit  $p_1$  le poids spécifique du liquide et  $p_2$  celui de l'atmosphère gazeuse. Assimilons la surface libre à une demi-sphère de rayon  $r$ .

Quand on la traverse, la pression diminue brusquement de  $\frac{2A}{r}$ . Pour arriver au plan horizontal où se trouve la surface libre extérieure au tube, il faut descendre d'une hauteur  $h$ . Dans le liquide, il y a de ce fait un accroissement de pression égal à  $hp_1$ ; dans le gaz, l'accroissement est de  $hp_2$ . Mais la pression est la même pour ce plan horizontal dans le tube et hors du tube; nous avons donc la condition :

$$hp_1 - \frac{2A}{r} = hp_2, \quad A = \frac{1}{2} hr(p_1 - p_2).$$

Quand on opère à des températures croissantes, la différence  $p_1 - p_2$  des poids spécifiques diminue; cependant l'ascension  $h$  décroît, ce qui prouve que  $A$  diminue encore plus vite que  $p_1 - p_2$ .

Un cas intéressant souvent réalisé consiste à prendre pour atmosphère extérieure la vapeur saturée du liquide. Le tube capillaire est enfermé dans un tube épais et large qu'on scelle à la lampe après l'avoir vidé d'air et rempli en partie du liquide à étudier. On chauffe le tout dans des étuves convenables. L'expérience montre que l'ascension décroît dans ces conditions sensiblement suivant une fonction linéaire de la température. Il serait impossible dans ce cas de négliger  $p_2$  devant  $p_1$ , car nous savons que la différence  $p_1 - p_2$  diminue quand  $t$  augmente et s'annule au point critique.

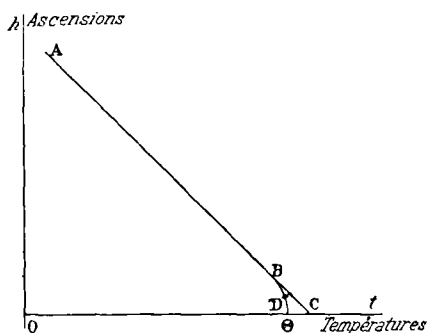


Fig. 30.

L'ascension  $h$  s'annule évidemment à la température critique  $\Theta$ , puisqu'alors le liquide et la vapeur deviennent identiques. Si la loi reliant  $h$

à la température était rigoureusement linéaire, l'intersection de la droite  $h = f(t)$  avec l'axe des températures permettrait la détermination aisée de la température critique  $\Theta$ . Mais il semble qu'au voisinage de  $\Theta$  la courbe s'infléchit suivant  $BD$  comme le montre la figure. Néanmoins la distance  $DC$  est toujours assez petite pour que la méthode fournisse  $\Theta$  avec une approximation de quelques degrés.

On a trouvé par exemple pour l'ascension de l'éther entre  $-100^\circ$  et  $+160^\circ$  la formule  $h = 1 - 0,00496 t$  en valeurs relatives. Elle donne pour  $h = 0$ ,  $\Theta = 202^\circ$  au lieu de  $194^\circ$  qui est la température critique vraie.

**49. Relation entre la constante capillaire et le poids moléculaire.** — Nous savons que pour augmenter la surface libre d'un liquide de  $\Delta S$ , il faut dépenser un travail  $A\Delta S$ . On appelle *énergie superficielle moléculaire* le travail nécessaire pour produire un accroissement de surface  $\Sigma = \Delta S$  égal à la surface sur laquelle se trouve la masse moléculaire. Il est clair que cette surface n'est déterminée que si nous donnons l'épaisseur  $\epsilon$  de la couche définie au § 37. Nous dirons *par hypothèse* que cette couche renferme toujours un même nombre de strates de molécules ; elle mesure donc, à un facteur absolu près, l'épaisseur de la molécule dans le sens normal à la surface. Les molécules occupant autant de place dans tous les sens, la surface  $\Delta S$  est proportionnelle à  $\epsilon^2$  ; le volume moléculaire  $V_m = \epsilon \Delta S$  est proportionnel à  $\epsilon^3$  : donc il est donné en fonction de  $\Delta S$  par la formule  $\Delta S = V_m^{\frac{2}{3}}$ , à un facteur absolu près.

Soit  $M$  le poids moléculaire,  $p_1$  le poids spécifique; le volume moléculaire  $V_m$  est égal à  $M : p_1$ .

Par définition, l'énergie superficielle moléculaire est :

$$E = AV_m^{\frac{2}{3}} = M^{\frac{2}{3}}(A : p_1^{\frac{2}{3}}).$$

On a trouvé que  $\frac{dE}{dt}$  était pour un grand nombre de liquides à peu près constant, et la même constante.

On pourrait donc poser pour tous les liquides normaux :

$$A\Sigma = K(\Theta - t), \quad (1)$$

$K$  étant une constante absolue,  $\Theta$  la température critique; formule analogue à celle des gaz parfaits où la tension  $A$  joue le rôle de la pression, la surface  $\Sigma$  le rôle du volume.

Il est important de remarquer qu'il est contradictoire de représenter simultanément par une fonction linéaire de la température les deux expressions :

$$\frac{A}{p_1 - p_2} \quad \text{et} \quad \frac{A}{p_1^{\frac{2}{3}}},$$

puisque  $p_1$  et  $p_2$  en sont des fonctions complexes (voir § 48).

Nous pouvons dire seulement que les deux courbes représentatives de ces fonctions tendent approximativement vers des asymptotes rectilignes pour des températures assez éloignées du point critique.

La formule (1) exprime que *les asymptotes des courbes représentant en fonction de la température les énergies superficielles moléculaires, sont sensiblement parallèles pour un grand nombre de corps*. Exprimée en ergs, la constante  $K$  a alors une valeur moyenne égale à 2,1.

Pour certains liquides, au contraire, on trouve une valeur notablement plus petite ou plus grande. Il en est ainsi pour les alcools (alcool méthylique,  $K = 0,97$ ), les acides gras (acide formique,  $K = 0,99$ ), le phénol, l'acétone, ... généralement les corps qui contiennent l'oxydhydre (eau,  $K = 0,89$ ).

Si  $K = 2,1$ , on dit que les corps sont *normaux*. Si  $K < 2,1$ , il y a *association de molécules*; si  $K > 2,1$ , il y a *dissociation*.

Voici un exemple de calcul de la constante  $K$ . Pour le sulfure de carbone, on trouve en CGS

à 19°,4	$A = 33,58$ dynes	densité = 1,264
46°,1	29,41 dynes	1,223

Le poids moléculaire est 76. Le volume de 76 grammes de  $\text{CS}_2$  est  $60,1 \text{ cm}^3$  à  $19^\circ,4$  et  $62,1$  à  $46^\circ,1$ .

On peut donc calculer l'énergie superficielle moléculaire; on trouve :

$$515,4 \text{ ergs à } 19^\circ,4, \quad 461,4 \text{ ergs à } 46^\circ,1.$$
$$K = (515,2 - 461,2) : (46,1 - 19,4) = 2,022.$$

---

## CHAPITRE IV

### ÉCOULEMENT DES FLUIDES. VISCOSITÉ. RÉSISTANCE AU MOUVEMENT.

50. **Écoulement d'un liquide en paroi mince.** — Nous supposons que le liquide s'écoule par un orifice circulaire de section  $s_1$  percé en *paroi mince*, ou, si la paroi est épaisse, par un trou dont les parois coniques présentent un biseau tranchant vers l'intérieur. Par un procédé quelconque, nous maintenons la surface libre du liquide à une hauteur constante  $h_1$  au-dessus du fond.

L'expérience montre d'abord que la veine liquide est, à partir de l'orifice, nettement conique, et qu'elle ne devient sensiblement cylindrique qu'à des distances de l'orifice qui peuvent atteindre une fois et demie son diamètre : elle est cependant encore légèrement conique. La section *contractée*  $s_2$  qui termine l'étranglement brusque initial, est plus petite que  $s_1$ ; on appelle *contraction* le rapport  $(s_1 - s_2) : s_1$ . Pour un orifice circulaire et de l'eau, la contraction est voisine de 0,4, quand le diamètre est supérieur à 10 millimètres; on a donc  $s_2 : s_1 = 0,6$  environ.

Soit  $v$  la vitesse moyenne dans une section d'aire  $s$  : le volume de liquide qui s'écoule pendant l'unité de temps est *par définition*  $Q = vs$ . Pour déterminer  $s$ , on mesure directement le diamètre de la veine contractée; avec un colorant quelconque, on rend le liquide opaque et on photographie la veine sur fond lumineux. L'épaisseur de l'image sur le cliché permet de déterminer les dimensions de l'objet. On connaît donc très exactement la vitesse moyenne dans une section quelconque par la mesure du diamètre de cette section et de la quantité de liquide qui s'écoule dans l'unité de temps.

*Règle de Torricelli.* — Pour calculer la vitesse verticale moyenne  $v$

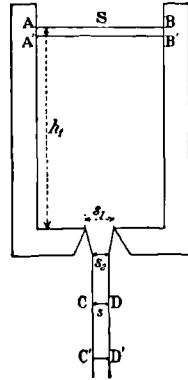


Fig. 31.

à une hauteur  $h$  quelconque au-dessous de la surface libre, admettons que les frottements sont nuls. Écrivons que le travail se retrouve sous forme d'énergie cinétique. Considérons un volume ABCD quand l'état permanent est atteint. Il passe au bout d'un petit temps  $dt$  à la position A'B'C'D'. Le travail accompli correspond au passage de la petite masse  $dm = \delta V S dt = \delta v s dt$  de ABA'B' en CDC'D';  $\delta$  représente la masse spécifique du liquide. Le travail a pour expression  $\delta g v s \cdot h dt = gh dm$ . L'accroissement d'énergie cinétique est

$$\frac{dm}{2} (v^2 - V^2),$$

car par hypothèse dans chacune des tranches considérées les vitesses vraies des divers filets sont sensiblement égales et verticales.

Écrivons que l'énergie se conserve :

$$\frac{dm}{2} (v^2 - V^2) = gh dm, \quad v^2 - V^2 = 2gh.$$

Mais  $V$  est petit devant  $v$ , puisque  $s$  est petit devant  $S$ ; à fortiori  $V^2$  est négligeable devant  $v^2$ . Donc on peut écrire :

$$v = \sqrt{2gh};$$

c'est la règle de Torricelli. *La vitesse est la même que si l'élément de volume CDC'D' considéré tombait verticalement en chute libre à partir de la surface libre supérieure du vase.*

L'expérience prouve la parfaite exactitude de cette règle, à la condition qu'on l'applique précisément dans les conditions exigées par les hypothèses. Or ce n'est qu'à partir de la section contractée  $s_2$  que les vitesses des divers filets peuvent être considérées comme égales et verticales. C'est donc à partir de cette section que l'équation s'applique.

**51. Forme de la veine. Causes de la contraction.** — Le débit  $Q$  est le même à travers toutes les sections de la veine; donc nous avons  $Q = vs = C^{te}$ ;  $v$  est la vitesse verticale moyenne. Nous ne pouvons déduire de cette condition et de la règle de Torricelli la loi de variation de  $s$  en fonction de  $h$ , que si le raisonnement précédent s'applique, c'est-à-dire si la vitesse vraie est peu différente de la vitesse verticale moyenne. Nous aurons alors :

$$s = Q : v = Q : \sqrt{2gh}.$$

L'aire de la section de la veine diminue en raison inverse de  $\sqrt{h}$ , et par conséquent le diamètre en raison inverse de la racine quatrième de  $h$ . Si  $h$  passe de 1 à 2, le diamètre passe de 1 à  $2^{-\frac{1}{4}} = 0,84$ . La veine est donc légèrement conique au delà de la partie contractée, ce que l'expérience nous a appris.

Mais on ne pourrait calculer ainsi la diminution brusque de dia-

mètre qui se fait à la sortie du vase et que nous avons appelée *contraction*. Le raisonnement ne s'applique plus; les vitesses des divers filets constituant la veine ne sont pas, même approximativement, verticales ni égales.

On peut facilement mettre en évidence le rôle de la tension superficielle pour contracter la veine comme ferait un ajutage. En effet, la contraction est plus petite quand la tension du liquide est elle-même plus petite. La veine est alors plus large, le débit par conséquent plus grand pour une même hauteur  $h_1$  du liquide au-dessus de l'orifice. Ainsi, pour l'alcool, le débit est plus grand que pour l'eau.

Il ne faut pas croire que la diminution de la tension change la vitesse en fonction de la distance  $h$  de la surface libre à la section contractée : celle-ci est toujours donnée par la règle de Torricelli. Mais pour l'alcool, tout se passe comme si l'orifice était plus large que pour l'eau, les vitesses restant les mêmes : c'est encore comme si on modifiait la forme de l'ajutage.

Naturellement on augmente le débit en évaporant auprès de la veine un liquide qui, se mélangeant avec le liquide formant la veine, diminue sa constante capillaire; en évaporant par exemple de l'éther auprès d'une veine aqueuse.

La tension superficielle n'est ni la seule cause, ni la plus impor-

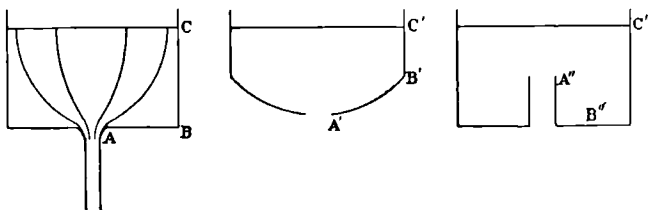


Fig. 32.

tante de la contraction. Celle-ci provient surtout de ce qu'à l'intérieur du vase le liquide ne descend pas verticalement, mais se précipite aussi vers l'ouverture dans des directions obliques. La figure 32 montre comment il en résulte une contraction de la veine. Si le liquide tient des poussières en suspension, on peut suivre par leurs trajectoires la direction des vitesses. Elles sont parallèles loin de l'orifice, puis elles s'infléchissent. On conçoit que vers les bords de l'orifice, les vitesses extérieures sont inclinées sur la normale.

Il résulte de là qu'on peut modifier considérablement la contraction et par conséquent le débit en modifiant le profil AB du vase. Si le profil devient plus concave, tel que B'A', la contraction diminue, le débit augmente. Si le profil devient plus convexe, tel que B''A'', la contraction augmente et arrive même à être égale à 0,5; le débit est moitié de ce qu'il serait sans contraction.

**52. Sectionnement de la veine.** — La veine liquide au sortir de l'orifice est calme et transparente; d'abord nettement conique, elle devient rapidement presque cylindrique. La longueur de la partie limpide est sensiblement proportionnelle au diamètre de l'orifice et à la vitesse  $v_1$  au niveau de celui-ci (proportionnelle par conséquent à  $\sqrt{h_1}$ ).

Mais au delà de cette longueur la veine se trouble. Pour étudier ce qui se passe, nous la placerons devant un fond lumineux et la regarderons à travers des trous équidistants, percés le long d'une circonférence tracée sur un écran circulaire opaque. L'écran est entraîné par un moteur et tourne autour d'un axe normal à sa surface et passant par le centre de la circonférence. Nous savons que si le phénomène à étudier est périodique, et si la vitesse angulaire de l'écran est convenable, nous voyons toujours la même phase du phénomène; nous avons étudié cette méthode d'observation au § 53 du Cours de Mathématiques sous le nom de *Stroboscopie*.

Pour une vitesse angulaire convenable, la veine apparaît comme immobile, et sa constitution est représentée dans la figure 33. Elle se compose de grosses gouttes sensiblement de même volume, séparées les unes des autres par une goutte beaucoup plus petite. Celles-ci sont elles-mêmes séparées par une goutte encore plus petite, moins facilement visible. Nous concluons déjà de l'immobilité apparente du phénomène que les gouttes se succèdent à des intervalles égaux aux mêmes points; elles se détachent donc périodiquement de la partie continue de la veine liquide.

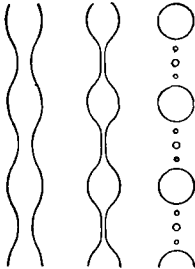


Fig. 33.

L'explication du phénomène repose sur ce fait qu'un cylindre liquide *très allongé* est une forme d'équilibre instable sous l'action de la tension superficielle. Si un étranglement commence à se produire sur une section du cylindre, la déformation s'exagère, et il se fait une séparation suivant cette section. D'ailleurs, pendant la chute libre, la pesanteur ne gêne en rien l'action des forces superficielles.

On montre par une expérience très simple la tendance d'un long cylindre liquide au fractionnement régulier. On tend un fil à coudre sur un petit arc de métal, on le plonge dans l'huile et on le retire horizontalement; il sort couvert d'un cylindre liquide qui se fractionne bientôt en gouttes *équidistantes*.

Chaque portion du liquide tend donc à obéir aux forces superficielles comme le fait un cylindre, dès qu'elle dépasse la section contractée. Dans la portion limpide de la veine commencent à se dessiner des renflements et des étranglements régulièrement espacés, dont



le profil s'accroît peu à peu, et qui finissent par donner lieu à des étranglements complets et à des masses isolées.

Mais cette striction demandant un certain temps pour se produire, temps indépendant de la vitesse de chute, elle ne sera définitive et la veine ne sera vraiment discontinuë qu'à une distance de l'orifice proportionnelle à la vitesse  $v_1$  au niveau de l'orifice. Donc la longueur de la partie limpide sera, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle à cette vitesse. De plus, l'expérience montrant que le temps employé pour le sectionnement complet est d'autant plus grand que le diamètre est plus grand, la longueur de la partie limpide sera aussi proportionnelle au diamètre.

La veine fait entendre un son : ce son résulte du choc périodique des masses isolées en lesquelles la veine s'est divisée, contre le corps sur lequel elles tombent. Il peut acquérir une très grande intensité, si ce corps est une membrane tendue ou, d'une manière générale, peut vibrer à l'unisson. On peut démontrer et l'expérience confirme que sa hauteur est proportionnelle à la vitesse  $v_1$  et en raison inverse du diamètre.

Nous avons dit que le profil de la veine dans la partie continue présente déjà des renflements et des étranglements dont la distance est indépendante de la vitesse et proportionnelle au diamètre ; il en passe donc par seconde, dans un plan donné, un nombre proportionnel à la vitesse et en raison inverse du diamètre. Comme chaque masse isolée résulte du sectionnement complet là où se trouvent deux étranglements consécutifs, le nombre de masses qui se forment par seconde et par conséquent qui tombent sur la membrane, est lui-même proportionnel à la vitesse et en raison inverse du diamètre ; la hauteur du son qu'elles donnent par leurs chocs suit donc les mêmes lois. Pour voir la veine immobile, il faut que la vitesse du disque soit telle qu'il passe par seconde devant l'œil autant de trous qu'il passe de gouttes en un point.

**53. Généralisation de la règle de Torricelli. Théorème de Bernoulli.** — La règle de Torricelli peut être considérée comme un cas particulier d'un théorème plus général dû à Bernoulli. Le liquide se meut dans un tuyau, et le régime permanent est établi ; chaque masse qui s'écoule est immédiatement remplacée par une masse identique et animée du même mouvement.

Nous supposons le liquide incompressible ; sa viscosité est négligeable, ainsi que son frottement contre les parois du tuyau ; il n'y a donc aucune énergie absorbée de ce chef. Enfin la section transversale du tuyau varie d'une manière continue.

Appliquons le principe de la conservation de l'énergie.

Soient  $p$ ,  $s$ ,  $V$  la pression, la section, la vitesse au voisinage du point  $G$  du tuyau ; soient  $p'$ ,  $s'$ ,  $V'$  les mêmes quantités au voisinage du point  $G'$ .

Admettons que pendant le temps  $dt$ , la masse  $DCCD'$  vient en  $ABB'A'$ ; tout se passe donc comme si la masse  $ABCD$  venait en  $A'B'C'D'$ . Elle a pour expression (en poids) :

$$dm = \delta V s dt = \delta V' s' dt.$$

Elle descend de  $GJ = z - z'$  : la pesanteur accomplit donc un travail  $dm(z - z')$ .

La pression  $p$  pousse la masse  $DCD'C'$  sur la face  $DC$  d'aire  $s$ ; la pression  $p'$  s'exerce sur la face  $D'C'$  d'aire  $s'$ . Le travail de ces pressions est :

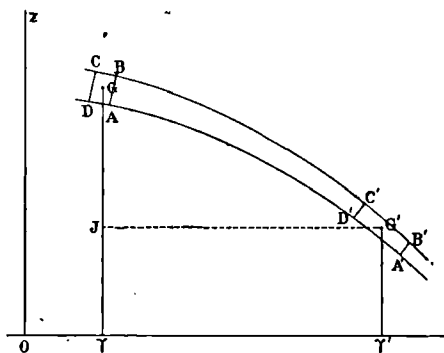


Fig. 34.

$$ps \cdot \overline{DA} - p's' \cdot \overline{D'A'} = (psV - p's'V')dt = \frac{dm}{\delta} (p - p').$$

L'accroissement d'énergie est enfin :  $\frac{dm}{2g} (V'^2 - V^2)$ .

Le principe de la conservation de l'énergie fournit donc la condition :

$$(z - z') + \frac{p - p'}{\delta} = \frac{1}{2g} (V'^2 - V^2),$$

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\delta} + z = \frac{V'^2}{2g} + \frac{p'}{\delta} + z' = C''.$$

Si l'on suppose  $p = p'$  et  $V$  négligeable, il reste :

$$V'^2 = 2g(z - z') = 2gh;$$

c'est la règle de Torricelli.

Le théorème de Bernoulli suppose tous les frottements nuls. En particulier, soit un tube horizontal ( $z = z'$ ) et de section constante; si le régime permanent est établi, on doit avoir  $V = V'$ . Il reste  $p = p'$ ; la pression devrait être la même dans toutes les sections, condition qui est infiniment loin d'être réalisée.

Nous reprendrons la même question d'une manière plus générale au chapitre VI, et pour les gaz en Thermodynamique.

**54. Écoulement à travers des tuyaux cylindriques.** — Le problème de l'écoulement sera résolu plus loin pour les tubes fins et les vitesses petites. Pour les tuyaux non capillaires et les grandes vitesses, il est difficile de tenir compte théoriquement de tous les frottements. On s'est contenté jusqu'à présent de formules empiriques.

Soient  $p$  et  $p'$  les pressions aux bouts du tube de section  $s$  que nous supposerons cylindrique et de forme quelconque,  $z$  et  $z'$  les

hauteurs de ses deux extrémités,  $f$  le frottement total. Admettons le régime permanent établi. Écrivons l'équation d'équilibre, il suffit de reproduire le raisonnement fait plus haut § 53.

Le travail de la pression est :  $\frac{dm}{\delta}(p-p')$ , pendant le temps  $dt$  nécessaire pour que le poids  $dm$  de liquide s'écoule. Le travail de la pesanteur est  $dm(z-z')$ ; enfin le travail de la force  $f$  est :

$$fVdt = \frac{f \cdot dm}{\delta s},$$

où  $V$  est la vitesse moyenne.

On a donc :

$$\frac{p-p'}{\delta} + z - z' = \frac{f}{s\delta},$$

quand le régime permanent est établi, c'est-à-dire quand les forces se font équilibre.

Reste à déterminer  $f$ . On a trouvé expérimentalement que le frottement est proportionnel : 1° à la surface totale du tuyau  $CL$ , où  $C$  est le périmètre de la section,  $L$  la longueur totale ; 2° à une fonction  $\phi(V)$  de la vitesse, qu'on peut admettre de la forme  $aV + bV^2$ .

$$\frac{p-p'}{\delta} + z - z' = \frac{C \cdot L(aV + bV^2)}{s\delta} = \frac{4L(aV + bV^2)}{D\delta},$$

si le tube est circulaire et de diamètre  $D$ .

Si les deux bouts du tube sont à la même pression, la pente par mètre nécessaire pour produire la vitesse moyenne  $V$  est en raison inverse du diamètre :

$$\frac{z-z'}{L} = 4 \frac{aV + bV^2}{D\delta}.$$

Si le tuyau est horizontal, la variation de pression par mètre est :

$$\frac{p-p'}{L} = 4 \frac{aV + bV^2}{D}.$$

Le problème se pose souvent de la manière suivante : Quel travail faut-il dépenser pour vaincre le frottement d'un tube de longueur  $L$  et de diamètre  $D$ , quand on veut recueillir par seconde un volume  $Q = Vs$  de liquide ?

Le travail est :

$$\mathcal{C} = fV = CLV(aV + bV^2) = \frac{CLQ}{s}(aV + bV^2) = \frac{4LQ}{D}(aV + bV^2).$$

Remplaçons  $V$  par sa valeur, il vient en définitive :

$$\mathcal{C} = \frac{16 \cdot LQ^2}{\pi D^3} \left( a + \frac{4bQ}{\pi D^2} \right),$$

$a$  et  $b$  ont été déterminés par l'expérience.

Le frottement sur les parois n'est pas la seule cause de perte d'énergie. Chaque fois qu'il y a rétrécissement ou élargissement

brusque dans une conduite, il se produit des remous dont les lois sont inconnues et qui absorbent du travail. On en a donné une expression globale fondée sur des raisonnements dont il est malaisé de dissimuler la faiblesse. Nous n'insisterons donc pas.

**55. Viscosité des liquides. Frottement intérieur.** — Les hypothèses qui ont conduit aux résultats précédents ne sont que de premières approximations. Les frottements de glissement existent au sein des liquides. Soit un liquide se déplaçant dans un tuyau cylindrique qu'il mouille. L'expérience prouve que la couche adhérente à la surface du tuyau est parfaitement immobile ; donc la vitesse croît quand on passe d'une couche cylindrique à la couche voisine de rayon plus petit. Nulle à la surface intérieure du tuyau, elle prend sa valeur maxima dans l'axe du tube. Nous pouvons donc réaliser des couches voisines de vitesses différentes, entre lesquelles naît un frottement : c'est-à-dire que, pour maintenir ces vitesses, il faut dépenser un travail.

La différence essentielle avec le cas des solides, est que les vitesses varient, non plus brusquement, mais d'une façon continue.

Pour définir le frottement qui s'exerce entre deux couches contiguës, considérons des couches parallèles pour lesquelles la vitesse  $v$  varie d'une manière continue. Menons la normale  $Ox$  à ces couches ; la vitesse  $v$  est une fonction de la distance  $x$  de la couche considérée au point  $O$  pris pour origine :  $v = f(x)$ . Nous admettons que le frottement qui s'exerce à la surface  $S$  de séparation de deux couches, est parallèle à la vitesse de ces couches et donné par la formule :

$$f = \eta s \frac{dv}{dx},$$

$\eta$  est un coefficient mesurant le *frottement intérieur*,  $s$  est l'aire de la surface de contact,  $\frac{dv}{dx}$  le taux de variation de la vitesse normalement à cette surface.

Considérons une surface  $S_1$  située à une distance  $dx$  de la première. Il s'y exerce un frottement

$$f + df = \eta s \left( \frac{dv}{dx} + \frac{d}{dx} \frac{dv}{dx} dx \right).$$

La force résultant des frottements et agissant sur le volume de surface  $s$  d'épaisseur  $dx$  et de volume  $sdx$ , est la différence de ces

deux forces, soit :

$$df = \eta s \frac{d^2v}{dx^2} dx.$$

Telles sont les hypothèses fondamentales que nous allons appliquer à des cas particuliers.

### 56. Écoulement dans un tuyau cylindrique rectiligne de rayon $R$ .

Nous admettons que la pression est constante pour tous les points d'une section droite du tuyau. Elle n'est fonction que de la distance  $l$  de la section droite considérée à l'une des extrémités.

Décomposons le liquide en tubes élémentaires concentriques de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$ .

La vitesse est une fonction de  $r$ , qu'il s'agit de déterminer.

Entre deux éléments de surface de deux tubes contigus, limités par deux sections distantes de  $dl$ , le frottement est :

$$2\pi\eta r \cdot dl \cdot \frac{dv}{dr},$$

où  $r$  est le rayon de la surface de contact. L'accroissement du frottement quand on passe à la surface de rayon  $r + dr$ , est égal à la variation de cette quantité, soit :

$$2\pi\eta dl \left( \frac{dv}{dr} + r \frac{d^2v}{dr^2} \right) dr.$$

Cette variation est la résultante des frottements qui agissent sur le volume tubulaire limité, d'une part aux cylindres de rayon  $r$  et  $r + dr$ , de l'autre aux sections droites distantes de  $dl$ . Elle doit être équilibrée par la résultante des forces dues aux pressions qui s'exercent sur les sections droites de cet élément tubulaire, l'action de la pesanteur étant absolument négligeable dans un tube très étroit.

La force a pour expression le produit de la surface  $2\pi r \cdot dr$  par la pression. Sa variation est égale à

$$\frac{d}{dl} (2\pi r \cdot dr \cdot p) dl = 2\pi r \cdot dr \cdot \frac{dp}{dl} dl.$$

D'où l'équation 
$$\frac{dp}{dl} = \eta \left( \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \right).$$

Où  $p$  est une fonction de la distance  $l$  seule,  $v$  est une fonction de la distance  $r$  seule; donc les deux membres de cette équation sont nécessairement constants. Nous devons poser :  $p = a - bl$ , où  $a$  et  $b$  sont des constantes :

$$\eta \left( \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \right) = -b.$$

L'intégrale générale de cette équation est :

$$v = a' + b' \log r - \frac{b}{4\eta} r^2.$$

La vitesse ne devant pas être infinie pour  $r = 0$ , il faut que  $b'$  soit nul.

Écrivons que pour  $r=R$ , la vitesse est nulle, ce qui revient à écrire que la couche qui est au contact du solide est immobile :

$$v = \frac{b}{4\eta} (R^2 - r^2).$$

Calculons le débit ; à travers l'élément annulaire d'épaisseur  $dr$  et de rayon  $r$  de la section droite, il passe dans l'unité de temps  $2\pi r \cdot dr \cdot v$  de liquide ; la quantité totale qui traverse le tube est donc :

$$Q = \int_0^R 2\pi r dr v = \frac{\pi b}{2\eta} \int_0^R r(R^2 - r^2) dr = \frac{\pi b}{8\eta} R^4 = \frac{\pi b}{128 \cdot \eta} \cdot D^4.$$

Soit  $p_0$  et  $p_1$  les pressions aux deux bouts du tube de longueur  $L$  ; on peut écrire :

$$Q = \frac{\pi(p_0 - p_1)}{128 \cdot \eta L} D^4 = \frac{\pi(p_0 - p_1)}{8\eta L} R^4 = \frac{KPD^4}{L}.$$

En définitive, le débit est proportionnel à la quatrième puissance du diamètre, en raison inverse du coefficient  $\eta$  de frottement intérieur, et proportionnel à la variation de pression par unité de longueur.

Ce sont les lois de Poiseuille.

Pour l'eau, en unités CGS,  $\eta = 0,0178$ .

Le frottement intérieur diminue très vite quand la température s'élève.

**57. Filtration.** — La *filtration* est assimilable à l'écoulement à travers des tubes capillaires.

Toutefois un fait important est à considérer.

Il résulte de la théorie précédente que le débit est indépendant de la nature de la paroi, pourvu que la couche au contact puisse être considérée comme immobile. Faisons écouler plusieurs liquides sous la même différence de pression à travers le même tube ; la mesure des débits fournit immédiatement les valeurs relatives des coefficients  $\eta$ . Le produit  $\eta Q$  est constant. Si nous répétons l'expérience sur différents tubes *capillaires assez gros*, dont les diamètres varient par exemple de 0<sup>mm</sup>,1 à 1 millimètre, nous retrouvons bien pour les divers liquides les mêmes  $\eta$  relatifs, *quel que soit le tube*.

Mais si nous utilisons des tubes beaucoup plus fins, si nous filtrons par exemple à travers des parois poreuses, les valeurs relatives des  $\eta$  trouvés pour les divers liquides dépendent de la nature de la paroi. Cette influence a probablement pour origine l'épaisseur *variable d'un liquide à l'autre* de la couche immobile. Cette épaisseur, qui est souvent d'une fraction de micron, peut atteindre pour certains systèmes solide-liquide une valeur de quelques microns. Tout se passe comme si le tube capillaire était plus étroit : le débit diminue, toutes choses égales d'ailleurs ; le coefficient  $\eta$  semble plus grand qu'il n'est en réalité. L'influence de l'épaisseur de la couche

immobile, négligeable quand le diamètre du tube est supérieur à une centaine de microns, ne l'est plus quand ce diamètre est de l'ordre de quelques dizaines de microns.

Pour que les lois de Poiseuille soient applicables à la filtration, il faut que les tubes auxquels on assimile les porosités soient assez longs. Sinon les perturbations à l'entrée et à la sortie modifient les phénomènes. Cette remarque est applicable aux gaz (voir § suivant).

**58. Écoulement des gaz à travers les tubes fins.** — On peut appliquer aux gaz la théorie précédente. Le volume de gaz débité à la pression moyenne  $(p_0 + p_1) : 2$  est donné par la formule :

$$Q = \frac{\pi(p_0 - p_1)}{128\eta L} \cdot D^4.$$

Ce qui prouve qu'on peut regarder comme immobile la couche en contact avec la paroi. Si la mesure du volume est faite à la pression  $p_0$ , on doit appliquer la formule :

$$Q_1 = Q \cdot \frac{p_0 + p_1}{2p_0} = \pi \frac{p_0^2 - p_1^2}{256 \cdot \eta L p_0} \cdot D^4.$$

Pour mesurer les valeurs relatives des coefficients  $\eta$  pour divers gaz, on mesure les temps  $t$  nécessaires pour faire écouler le même volume des différents gaz à travers un même tube avec les mêmes pressions initiale et finale. Les temps  $t$  sont proportionnels aux coefficients  $\eta$ . Si on prend  $\eta = 1$  pour l'air, on a pour les gaz suivants :

O	Az	CO <sup>2</sup>	H
1,11	0,98	0,81	0,49.

En valeur absolue à 15°, on a trouvé pour l'air  $\eta = 0,00018$ .

*Le coefficient de frottement intérieur est indépendant de la pression. Il croît avec la température.*

Nous développerons en Thermodynamique une théorie cinétique qui conduit pour  $\eta$  à une loi de variation proportionnelle à la racine carrée de la température absolue. A la vérité, les expériences ont donné, pour l'exposant de la température, des nombres compris entre l'unité et la valeur 0,5 que veut la théorie. Mais nous verrons qu'elle repose sur des hypothèses qu'on peut généraliser sans contradiction.

On utilise la variation de  $\eta$  en fonction de la température pour mesurer celle-ci. Par exemple, on s'arrange pour que le débit du gaz, préparé par électrolyse à l'aide d'un courant invariable, soit constant à travers un tube fin de platine ; on mesure la pression nécessaire pour produire l'écoulement : elle croît avec la température à peu près linéairement. A l'aide de températures fixes (fusion du zinc, de l'argent, de l'or) on construit la courbe pression-température ; l'étalonnage fait, on dispose d'un thermomètre pouvant servir

jusqu'à la fusion du platine et dont les indications ne dépendent pas des modifications physiques de celui-ci. (JOB.)

**59. Entraînement d'un milieu indéfini par un plan indéfini tournant autour d'un axe d'un mouvement sinusoïdal par rapport au temps.** — Ce problème ne semble pas avoir d'intérêt, mais il peut être résolu complètement et fournit la solution *approchée* du problème pratique du paragraphe suivant.

Soit  $\theta = \theta_0 \sin \omega t$  la loi de rotation du plan indéfini. Prenons l'axe de rotation comme axe des  $z$ , et soit  $r$  la distance d'un point à cet axe. Je dis qu'une tranche  $dz$  du fluide visqueux, situé à une distance  $z$  du disque, se déplace *en bloc comme si elle était solide* suivant la loi :

$$\theta = \theta_0 e^{-Kz} \sin(\omega t - K'z).$$

Cela signifie que son mouvement est encore sinusoïdal, mais d'amplitude rapidement décroissante à mesure que l'on s'éloigne du disque (terme exponentiel). Il y a de plus comme une vitesse de propagation  $V = \omega : K'$ ; le mouvement de la tranche située à la distance  $z$  a sur le mouvement du plan un retard proportionnel à  $z$ .

Il s'agit de déterminer  $K$  et  $K'$ .

Montrons d'abord que l'hypothèse d'un déplacement en bloc de chaque tranche  $dz$  parallèle au disque est conforme aux hypothèses sur le frottement intérieur. Considérons dans la tranche un anneau de largeur  $dr$  et d'épaisseur  $dz$  à une distance  $r$  de l'axe. *Admettons le déplacement en bloc; les seules forces qui agissent sur l'anneau sont les deux frottements sur les faces parallèles au plan, puisqu'il n'y a pas de déplacement relatif des anneaux formant la tranche.* Écrivons l'équation du mouvement.

Soit  $\rho$  la densité du fluide; le moment d'inertie de l'anneau est :

$$2\pi r^3 dr dz \cdot \rho.$$

D'après le § 55, l'équation du mouvement est :

$$2\pi r^3 dr \cdot dz \cdot \rho \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 2\pi r^3 dr \cdot \eta \cdot \frac{\partial^3 \theta}{\partial t \partial z^2} dz.$$

Il reste la condition :  $\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \eta \frac{\partial^3 \theta}{\partial t \partial z^2}$ ,

qui ne contient plus la variable  $r$ , ce qui est d'accord avec l'hypothèse. La fonction  $\theta$  a bien là forme que nous avons supposée. Substituons, en effet, dans l'équation précédente, il vient :

$$K = K' = \sqrt{\frac{\rho \omega}{2\eta}}, \quad \theta = \theta_0 e^{-\sqrt{\frac{\rho \omega}{2\eta}} \cdot z} \sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{\rho \omega}{2\eta}} \cdot z\right).$$

Le coefficient d'amortissement  $K$  croît quand  $\eta$  décroît; c'est évident *a priori* : si la viscosité est nulle, le fluide n'est pas entraîné



par la rotation du plan, l'amortissement est infini. L'amortissement croît quand le fluide est plus dense et quand la période est plus petite. Si la période devient extrêmement petite, le mouvement devient nul tout près du plan.

La longueur d'onde a pour expression  $\lambda = 2\pi : K$ . Nous devons en effet poser :

$$Kz = 2\pi \frac{z}{\lambda};$$

elle varie en raison inverse de l'amortissement et dépend de la période.

*Travail d'entraînement.* — Calculons le travail nécessaire pour maintenir en mouvement une portion du plan formant un disque de rayon R. La tranche au contact du disque est complètement entraînée par lui. Le couple dû au frottement sur un anneau de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$  est :

$$2\pi r^2 \cdot dr \cdot \eta \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0} = 2\pi r^3 dr \cdot \eta \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial t} \right)_{z=0}.$$

Le couple total est :

$$\int_0^R 2\pi r^3 dr \eta \cdot \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial t} \right)_{z=0} = \frac{\pi R^4 \eta}{2} \cdot \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial t} \right)_{z=0}.$$

Le travail total de ce couple pendant une oscillation est :

$$\mathcal{C} = \frac{\pi R^4 \eta}{2} \int_0^T \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial t} \right)_{z=0} d\theta.$$

Un calcul facile donne la valeur de la parenthèse; il vient :

$$\mathcal{C} = \frac{\pi R^4 \eta}{2} K \omega^2 \theta_0^2 \int_0^T (-\cos \omega t + \sin \omega t) \cos \omega t \cdot dt = \frac{\pi^2 R^4 \eta K \omega \theta_0^2}{2}.$$

**60. Oscillation dans son plan d'un disque circulaire de rayon R immergé dans un liquide et tournant sous l'influence d'un couple proportionnel à l'écart.** — C'est le problème déjà traité § 18, où l'on suppose que la force amortissante est due aux frottements liquides.

L'équation de mouvement est :

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + C\theta + \varphi(\theta) = 0,$$

$\varphi$  étant la fonction amortissante.

Le problème est infiniment compliqué. On n'est parvenu à le résoudre que d'une manière approchée. On admet que le fluide se meut au-dessus et au-dessous du disque comme si celui-ci était indéfini; on néglige les frottements dus au fluide extérieur au cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe et tangentes au disque.

On admet enfin que le mouvement du fluide suit les mêmes lois

sous l'influence des oscillations *amorties* du disque que lorsque le mouvement de ce disque est permanent.

Dans ces conditions, cherchons l'amortissement  $\delta = \Delta\theta_0 : \theta_0$ . Écrivons que la perte d'énergie potentielle, au bout d'une oscillation, est égale au travail des frottements dont nous connaissons l'expression.

$$C\theta_0\Delta\theta_0 = \frac{\pi^2 R^4 \eta K \omega \theta_0^2}{2}, \quad \frac{\Delta\theta_0}{\theta_0} = \frac{\pi^2 R^4 \eta K \omega}{2C} = \frac{\pi^2 R^4}{2I} \sqrt{\frac{\rho \eta}{2\omega}},$$

puisqu'on a très sensiblement, malgré l'amortissement :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}}.$$

Mais le frottement s'exerce sur les deux faces du disque; en définitive :

$$\delta = \frac{\pi^2 R^4}{I} \sqrt{\frac{\rho \eta}{2\omega}}.$$

Cela revient à poser dans l'équation du § 48 :

$$f = \pi R^4 \sqrt{\frac{\omega \eta \rho}{2}},$$

formule qui permet de mesurer les coefficients  $\eta$ .

Il faut remarquer que le coefficient  $f$  n'est pas indépendant de la période; on ne peut pas dire *généralement* que la présence du fluide crée un frottement *total* proportionnel à la vitesse. Par exemple, le frottement n'est pas le même au passage par la position d'équilibre quand on double l'amplitude, la période restant la même, et quand on diminue la période de moitié, l'amplitude restant la même. Pourtant la vitesse angulaire a dans les deux cas la même valeur.

On trouve seulement qu'en divers points d'une oscillation *de période donnée* tout se passe comme si le frottement était proportionnel à la vitesse.

**61. Entraînement d'un cylindre par un cylindre concentrique séparé du premier par un liquide visqueux.** — Le cylindre de rayon  $R_1$  est entraîné avec une vitesse angulaire uniforme  $\Omega$ . Le cylindre intérieur de rayon  $R_0$  est supporté par un fil métallique AB dont la torsion mesure le couple d'entraînement. On demande d'exprimer ce couple en fonction du coefficient  $\eta$  quand le régime permanent est établi.

Nous admettons que le fluide se divise en couches cylindriques coaxiales animées de vitesses angulaires constantes  $\omega$ ;  $\omega$  varie de 0 pour  $r = R_0$  à  $\Omega$  pour  $r = R_1$ . Le régime permanent établi, la résultante des forces sur chaque *couche* cylindrique est nulle; ce qui revient au même, le couple d'entraînement  $C$  sur chaque *surface* cylindrique est indépendant du rayon  $r$ .

Soit  $h$  la hauteur de la couche. Le couple  $C$  a pour expression sur la surface de rayon  $r$  :

$$C = 2\pi r^3 h \eta \frac{d\omega}{dr}.$$

Intégrons dans l'hypothèse où  $C$  est constant,

il vient : 
$$\omega = \frac{-C}{4\pi r^2 \eta h} + B.$$

Déterminons les constantes  $B$  et  $C$  par les conditions ci-dessus énoncées pour  $r = R_0$  et  $r = R_1$ ; il vient en définitive :

$$C = \frac{4\pi\eta\Omega R^2 R_0^2 h}{R_1^2 - R_0^2},$$

équation qui résout complètement le problème, et qu'on peut utiliser pour la détermination de  $\eta$ .

L'application de cette méthode fournit les résultats généraux suivants :

1° Le rapport  $C : \Omega$ , et par conséquent le coefficient  $\eta$ , sont effectivement constants, comme le veut l'hypothèse du § 55, quand la vitesse angulaire est assez petite;

2° A partir d'une certaine vitesse, les phénomènes se modifient très rapidement; tout se passe comme si  $\eta$  croissait avec la vitesse. L'accroissement apparent de  $\eta$  en fonction de  $\Omega$ , d'abord rapide, est ensuite de plus en plus lent. On peut admettre que  $\eta$  est encore constant, mais les conditions de l'expérience sont modifiées : il se produit des tourbillons.

De même dans les tubes fins, pour de faibles vitesses, les résultats sont conformes à l'hypothèse d'un coefficient constant de frottement et aux hypothèses accessoires du § 56. Pour les grandes vitesses, les lois sont différentes, le coefficient de frottement semble croître. Mais il est préférable d'admettre qu'il reste constant et que ce sont les hypothèses accessoires qui cessent d'être vérifiées : il se produit en effet des tourbillons.

**62. Résistance opposée par les fluides aux déplacements lents.** — Nous nous bornerons à un cas simple important : *chute d'une sphère pesante dans un milieu de viscosité  $\eta$* . Des calculs compliqués donnent pour la vitesse  $v$  de chute et un corps de densité 1

(eau) : 
$$v = \frac{2}{9} \cdot \frac{ga^2}{\eta}.$$

On tire de là 
$$v = 1,21 \cdot 10^6 \cdot a^2$$

pour l'air, où 
$$\eta = 1,8 \cdot 10^{-4}, \quad (g = 981).$$

Supposons 
$$a = 5\mu = 5 \cdot 10^{-4}.$$

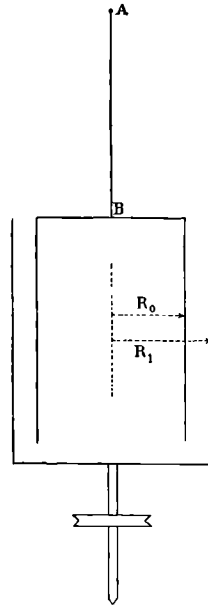


Fig. 35.

On trouve  $v = 3$  millim. sec. environ. Nous aurons l'occasion d'utiliser cette formule dans l'étude de l'ionisation des gaz. Elle permet de déterminer la grosseur des gouttes d'un nuage, connaissant la vitesse de chute.

**63. Résistance opposée par les fluides indéfinis aux déplacements rapides.** — Quand un corps tombe en chute libre, nous savons que son mouvement n'est pas uniformément accéléré : il peut même devenir uniforme. Cela tient à ce que la résistance de l'air intervient comme une force qui croît avec la vitesse. Quand elle est assez grande, la résistance de l'air équilibre la pesanteur et la vitesse devient constante. Les phénomènes diffèrent beaucoup de ceux que nous avons étudiés ci-dessus.

Quand la vitesse est de l'ordre de 4 à 20 mètres par seconde, ce n'est plus la viscosité qui intervient principalement, mais la densité du milieu où le corps se déplace ; la résistance n'est plus proportionnelle à la vitesse, mais au carré de celle-ci.

Voici par quel raisonnement Newton rend compte de ce résultat.

On peut admettre que : 1° le corps communique à une certaine portion du milieu dans lequel il se déplace des vitesses proportionnelles à sa propre vitesse ; 2° que la masse  $m$  du milieu à laquelle ces vitesses sont communiquées est, dans un temps donné, proportionnelle au déplacement du corps. En définitive, l'énergie dépensée par le corps dans le temps  $dt$ , énergie qui doit se retrouver dans le milieu, est proportionnelle :

1° à la masse  $m$ , et par conséquent *de ce chef* à la vitesse  $v$  du corps ;

2° au carré des vitesses des diverses portions du milieu entraîné, et par conséquent à  $v^2$  ;

3° à la densité du milieu entraîné.

Elle est par conséquent de la forme  $Kv^3dt$ .

Soit  $F$  le frottement, son travail est  $Fvdt$  ; nous devons poser :

$$Kv^3dt = Fvdt; \text{ d'où } F = Kv^2.$$

Par exemple, la résistance que l'air fait éprouver à une sphère est donnée par la formule  $R = 0,027 Sv^2$ , où  $S$  est la surface en mètres carrés du grand cercle, et  $v$  la vitesse en mètres par seconde,  $R$  la résistance en kilogrammes. Nous pouvons aisément calculer la vitesse qu'une sphère, tombant en chute libre, ne peut dépasser. Soit  $p$  le poids en kilogrammes du mètre cube de la matière dont la sphère est faite, son poids  $P$  a pour expression  $P = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 p$ . Écrivons  $P = R$  ; il vient  $v = 7^m,03 \sqrt{rp}$ . La vitesse limite diminue donc à mesure que le rayon de la sphère et son poids spécifique diminuent.

Calculons les vitesses limites pour des sphères de 1 centimètre de diamètre ( $r = 0^m,005$ ) et les corps

Platine  $p = 21400^k$ ; Aluminium  $p = 2600$ ; Glace  $p = 917$ .  
On trouve :  $v = 73^m$      $v = 25^m$      $v = 15^m$ .

La vitesse de 15 mètres est la vitesse limite d'un grélon pesant à peu près la moitié d'un gramme<sup>1</sup>.

La résistance de l'air dépend de la forme du corps. Pour un parachute dans la position d'emploi, on a par exemple :

$$R = 0,163 \cdot Sv^2,$$

où  $S$  est l'aire de la projection horizontale de l'appareil : généralement, cette projection est une circonférence de 5 mètres de rayon :  $S = 78^{m25}$ . Admettons que le poids à soutenir (homme, parachute et nacelle) soit 200 kilogrammes. La vitesse limite est inférieure à 4 mètres. Pour le parachute renversé on a seulement :

$$R = 0,065Sv^2.$$

Quand la vitesse du corps en mouvement est énorme, de l'ordre de quelques centaines de mètres, comme pour les projectiles à la sortie de l'arme, les phénomènes sont plus compliqués : la résistance n'est pas proportionnelle au carré de la vitesse. On a pu photographier des balles de fusil en les éclairant par une étincelle électrique qu'elles font elles-mêmes éclater. Le cliché met en évidence l'existence d'une proue et d'une poupe d'air entraîné, dont le volume est considérable par rapport aux dimensions du projectile.

**64. Autres applications.** — La formule  $R = 0,084Sv^2$  est applicable au calcul de la résistance éprouvée par un plan perpendiculaire au sens du mouvement et approximativement par un train;  $S$  est alors la section maxima des wagons, généralement voisine de 5 mètres carrés. Si, par exemple,  $v$  est 20 mètres par seconde,  $S = 5$  mètres carrés,  $R = 168$  kilogrammes. Le travail par seconde est :

$$168 \times 20 = 3360 \text{ kilogrammètres ;}$$

<sup>1</sup> On peut appliquer la formule  $R = 0,027Sv^2$  aux ballons sphériques et se rendre compte des difficultés de diriger un tel engin. La vitesse d'une forte brise est 10 mètres par seconde, un vent fort fait 20 mètres, et l'ouragan jusqu'à 40 mètres. D'ailleurs, 5 mètres par seconde donnent 18 kilomètres à l'heure. Faisons le calcul pour cette vitesse, ce qui implique que le ballon ne pourra servir que si la composante de la vitesse du vent opposée au déplacement est inférieure à 5 mètres. Soit un diamètre de 10 mètres;  $S = 78$  mètres carrés environ,  $R = 53$  kilogrammes. Le travail par seconde est 265 kilogrammètres, ce qui représente trois chevaux et demi environ. Si on remarque que le rendement des hélices propulsives est faible, que le calcul porte sur un ballon de dimensions médiocres, on ne s'étonnera pas des résultats insignifiants obtenus jusqu'au moment où l'on a construit des moteurs très puissants sous un faible poids et trouvé des formes d'enveloppe présentant une moindre résistance à l'air.

la puissance nécessaire est :

$$3360 : 75 = 45 \text{ ch. vap. environ.}$$

On calcule la résistance de l'eau à la marche des navires par une formule analogue  $R = K Sv^2$ .  $K$  varie de 80 kilogrammes pour un avant plat à 3 pour des carènes de formes convenables,  $S$  est la surface transversale maxima.

Quand un plan mince de surface  $S$  se meut dans un liquide sous une inclinaison  $\theta$ , la résistance normale est de la forme  $KSv^2 \sin^2 \theta$ . On explique aisément par cette formule l'action du gouvernail. Soit  $\theta$  l'angle que fait son plan avec le plan vertical passant par la quille du navire (longitudinal). Il subit une résistance normale  $KSv^2 \sin^2 \theta$ ; d'où résulte une composante normale au plan longitudinal

$$KSv^2 \sin^2 \theta \cos \theta.$$

L'arrière du navire est donc poussé normalement par une force sensiblement proportionnelle au carré de la vitesse, et qui croît avec l'angle  $\theta$  jusqu'à un certain maximum ( $55^\circ$ ). Pratiquement, cette force produit son plus grand effet pour  $\theta = 40^\circ$  environ, les hypothèses sur lesquelles est basé le calcul précédent n'étant que grossièrement approchées.

Il semble incontestable que les lois de la résistance ne doivent dépendre que du mouvement relatif du corps et du fluide. Comme il est très difficile de réaliser un fluide quasiment indéfini animé d'un mouvement uniforme, c'est généralement l'objet qui est mobile dans les expériences. On a toutefois étudié la résistance produite par les fluides en mouvement sur les corps immobiles, en utilisant les rivières et le vent. On a toujours trouvé des nombres plus forts que dans le cas inverse. On attribue ce résultat à la non uniformité du mouvement du fluide.

## CHAPITRE V

### TRANSMISSION D'UN ÉBRANLEMENT A TRAVERS UN FLUIDE COMPRESSIBLE

65. **Définition de la condensation ou de la dilatation.** — La *condensation* est mesurée par le quotient de la diminution de volume d'une masse par le volume initial de cette masse; la *dilatation* est mesurée par le quotient de l'augmentation de volume par le volume initial; elle a la même expression que la condensation au signe près.

Quand la condensation  $\gamma$  est produite par de petits déplacements des éléments constituant un fluide, on peut lui donner une expression remarquable.

Soit  $u, v, w$  les composantes parallèlement à trois axes rectangulaires du déplacement d'un point par rapport à une de ses positions  $x, y, z$  prise comme repère;  $u, v, w$  sont des fonctions généralement continues du temps et des coordonnées.

Considérons les points situés sur une surface fermée et évaluons la variation de volume quand, par leurs déplacements, ils viennent se mettre sur une

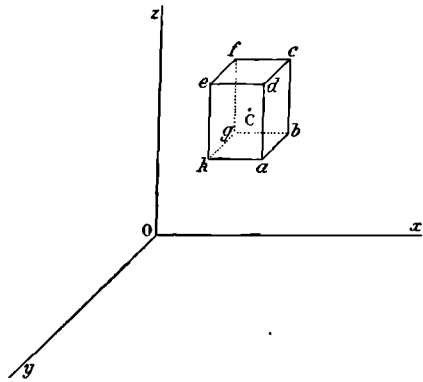


Fig. 36.

autre surface. Pour simplifier les calculs, prenons d'abord comme surface initiale un petit parallélépipède dont les arêtes sont parallèles aux axes et ont pour longueurs  $dx, dy, dz$ .

En moyenne, les déplacements parallèles à l'axe des  $x$  des points qui se trouvent sur la face  $efgh$  sont ceux du centre de cette face; désignons-les par  $u$ . En moyenne, les déplacements des points de la

face  $abcd$  sont ceux du centre de cette face; ils seront représentés par  $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ . Le nouveau parallélépipède aura donc deux nouvelles faces perpendiculaires à l'axe des  $x$  dont la distance ne sera plus  $dx$ , mais

$$dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

On démontre de même que les épaisseurs parallèlement aux deux autres axes sont devenues :

$$dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy, \quad dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz.$$

Le volume initial était  $dx dy dz$ ; il est devenu :

$$dx dy dz \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Or les dérivées partielles sont par hypothèse de très petites quantités; on peut donc écrire le nouveau volume sous la forme :

$$dx dy dz \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right].$$

En définitive, la *condensation*  $\gamma$  est :

$$\gamma = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

La quantité entre parenthèses s'appelle la *divergence* du vecteur  $u, v, w$ .

*Autre démonstration.* Considérons une surface fermée  $S$  et déformons-la; elle devient  $S_1$ . Évaluons le changement de volume  $\Delta V$ . Soit  $dS$  un élément de surface pris autour du point  $A$ ,  $dn$  l'élément de normale menée au point  $A$  et limitée par la surface  $S_1$ . On a évidemment :

$$\Delta V = \iint dndS.$$

Soit  $\lambda, \mu, \nu$  les cosinus directeurs de la normale;  $u, v, w$  le déplacement très petit du point  $A$ . On a :

$$u\lambda + v\mu + w\nu = dn.$$

$$\Delta V = \iint (u\lambda + v\mu + w\nu) dS = \iint (u dy dz + v dz dx + w dx dy).$$

On peut dire que le changement de volume est le flux à travers la surface du vecteur  $u, v, w$  (voir partie III du Cours).

Mais l'intégrale double peut se transformer en une intégrale triple :

$$\Delta V = \iiint \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx dy dz,$$

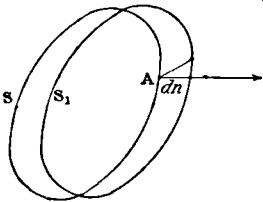


Fig. 37.



puisque  $u, v, w$  sont des fonctions continues des coordonnées. Or il est évident que la variation du volume  $\Delta V$  limité par la surface  $S$  est la somme des variations de volume de ses éléments.

$$\Delta V = - \iiint \gamma dx dy dz; \quad \text{d'où} \quad \gamma = - \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

En Électricité, on rencontre à chaque instant de pareilles transformations d'intégrales de surface en intégrales de volume, et réciproquement.

**66. Pression ou variation de pression résultant d'une condensation.** — Elle dépend essentiellement des hypothèses faites sur la nature du fluide.

1<sup>o</sup> Supposons une masse gazeuse variant de volume à température constante. On a alors :  $pv = C^{te}$ .

$$p\Delta v + v\Delta p = 0, \quad - \frac{\Delta v}{v} = \gamma = \frac{\Delta p}{p}; \quad \Delta p = p\gamma.$$

2<sup>o</sup> Supposons une masse gazeuse variant adiabatiquement de volume. La loi à appliquer est alors :

$$pv^{\frac{c}{c-1}} = C^{te}, \quad \log p + \frac{c}{c-1} \log v = C^{te}.$$

$$\frac{\Delta p}{p} + \frac{c}{c-1} \frac{\Delta v}{v} = 0, \quad \Delta p = \frac{c}{c-1} p\gamma.$$

3<sup>o</sup> Supposons enfin un liquide. Le coefficient de compressibilité  $\kappa$  est défini par l'équation (§ 33) :

$$V = V_0 [1 - \kappa(p - p_0)],$$

où  $V_0$  est le volume sous la pression atmosphérique  $p_0$ . On tire de là :

$$- \frac{\Delta V}{V_0} = \kappa \Delta p, \quad \Delta p = \frac{1}{\kappa} \cdot \gamma.$$

D'une manière générale, l'accroissement de pression  $\Delta p$  qui résulte de la condensation est proportionnel à cette condensation; nous l'écrirons  $\Delta p = \pi\gamma$ .

**67. Propagation d'une onde plane dans un tuyau cylindrique indéfini.** — Considérons un tuyau cylindrique indéfini; prenons pour axe des  $x$  une parallèle au tuyau; admettons que les déplacements  $v$  et  $w$  sont nuls, et que le déplacement  $u$  parallèle à la longueur du tuyau est fonction de  $x$  seul. Les particules de fluide qui sont d'abord sur une section droite du tuyau restent donc toujours sur des sections droites.

On dit que l'onde est plane et perpendiculaire à l'axe des  $x$ .

La condensation  $\gamma = - \frac{\partial u}{\partial x}$  est une certaine fonction de  $x$ .

Considérons dans le tuyau une tranche AB limitée par deux sections droites distantes de  $dx$ . Au voisinage de A la condensation est  $\gamma$  et l'accroissement de pression  $\pi\gamma$ ; au voisinage de B la condensation est  $\gamma + \frac{\partial\gamma}{\partial x} dx$  et l'accroissement de pression est  $\pi(\gamma + \frac{\partial\gamma}{\partial x} dx)$ .



Fig. 38.

Soit  $\sigma$  l'aire de la section droite. La résultante des forces qui agissent sur le volume  $\sigma dx$  et sur la masse  $\rho\sigma dx$  ( $\rho$  étant la densité)

est donc 
$$-\pi \frac{\partial\gamma}{\partial x} dx \cdot \sigma.$$

L'équation qui régit les petits mouvements est, en définitive :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\pi \frac{\partial\gamma}{\partial x} = \pi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Posons

$$V = \sqrt{\frac{\pi}{\rho}},$$

l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Suivant les cas, la quantité  $V$  qui a les dimensions d'une vitesse, prend les valeurs suivantes (§ 66) :

gaz se comprimant isothermiquement,  $V = \sqrt{\frac{p}{\rho}}$ ;

gaz se comprimant adiabatiquement,  $V = \sqrt{\frac{C}{c} \cdot \frac{p}{\rho}}$ ;

liquide compressible,  $V = \sqrt{\frac{1}{\kappa\rho}}$ .

**68. Intégration de l'équation différentielle par des fonctions arbitraires.** — L'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles est<sup>1</sup> :

$$(1) \quad u = f(Vt + x) + F(Vt - x).$$

<sup>1</sup> Nous recommandons instamment au lecteur l'étude des paragraphes suivants. Elle est indispensable pour se faire une idée nette du rôle des équations aux dérivées partielles en Physique. Nous choisissons intentionnellement la méthode d'intégration par fonctions arbitraires quoique plus longue, d'abord comme plus générale, puis pour forcer à réfléchir sur l'indétermination spéciale des solutions que fournit une équation aux dérivées partielles.

$f$  et  $F$  sont des fonctions à déterminer pour satisfaire aux conditions initiales. On a en effet :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(Vt + x) + F''(Vt - x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2[f''(Vt + x) + F''(Vt - x)],$$

$f''$  et  $F''$  désignent les dérivées secondes de  $f$  par rapport à la variable  $Vt + x$  et de  $F$  par rapport à la variable  $Vt - x$ .

Voici comme exemple la solution du problème fondamental.

On se donne au temps  $t=0$ , dans un tuyau indéfini, un certain ébranlement limité par les sections droites  $x_1$  et  $x_2$ . Entre  $-\infty$  et  $x_1$  le milieu est en équilibre :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Il en est de même entre  $x_2$  et  $+\infty$ . Entre  $x_1$  et  $x_2$  on se donne au temps  $t=0$ , en fonction de  $x$ , la dilatation  $\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(x)$  et la vitesse  $\frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x)$ . Les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont donc identiquement nulles, sauf quand la variable est comprise entre les valeurs  $x_1$  et  $x_2$ .

On demande comment l'ébranlement se propage, le fluide étant abandonné à lui-même.

Dérivons l'équation (1) par rapport à  $x$  et par rapport à  $t$ ; faisons  $t=0$  dans les expressions obtenues et écrivons qu'elles sont identiquement égales à  $\varphi(x)$  et à  $\psi(x)$ ; il vient :

$$(2) \quad f'(x) - F'(-x) = \varphi(x), \quad (3) \quad V[f'(x) + F'(-x)] = \psi(x).$$

$$2f'(x) = \varphi(x) + \frac{1}{V} \psi(x), \quad 2F'(-x) = -\varphi(x) + \frac{1}{V} \psi(x).$$

Les fonctions  $f'(x)$  et  $F'(-x)$  sont donc parfaitement déterminées. En particulier,  $f'$  est identiquement nulle pour toutes les valeurs de la variable  $x$  qui ne sont pas comprises entre  $x_1$  et  $x_2$ ;  $F'$  est identiquement nulle pour toutes les valeurs de la variable (ici  $-x$ ) qui ne sont pas comprises entre  $-x_1$  et  $-x_2$ . En effet, les seconds membres sont identiquement nuls pour toutes les valeurs de  $x$  qui ne sont pas comprises entre  $x_1$  et  $x_2$ , d'après les hypothèses faites sur les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$ .

D'une manière générale, le mouvement  $u$  est la résultante de deux mouvements définis par les fonctions  $f$  et  $F$ . Il est clair que les données du problème ne fournissent que les dérivées  $f'$  et  $F'$ , les fonctions  $f$  et  $F$  ne sont connues qu'à une constante près. Nous verrons tout à l'heure le sens de cette constante.

Cherchons d'abord comment se propagent les condensations ou

les vitesses. En particulier, étudions leur distribution au temps  $t$  que nous prendrons d'abord  $> (x_2 - x_1)V$ .

Je dis que pour les  $x > x_2$  les condensations ou les vitesses ne seront différentes de 0 qu'entre les abscisses  $x'_1 = x_1 + Vt$  et  $x'_2 = x_2 + Vt$  : elles dépendent uniquement de la fonction  $F'$ . En effet,  $f'$  est identiquement nulle pour toutes les valeurs de la VARIABLE supérieure à  $x_2$ ; elle est donc certainement nulle pour tous les points dont les ABSCISSES sont supérieures à  $x_2$ , puisque dans  $f'$  la VARIABLE a généralement pour expression  $Vt + x$  et que  $t$  est positif.

Quant à la fonction  $F'$ , elle est nulle sauf entre les valeurs  $-x_1$  et  $-x_2$  de la VARIABLE qui a pour expression  $Vt - x$ . Les limites entre lesquelles les condensations et les vitesses ne sont pas nulles sont fournies par les conditions :

$$\begin{aligned} Vt - x'_1 &= -x_1, & Vt - x'_2 &= -x_2; \\ x'_1 &= x_1 + Vt, & x'_2 &= x_2 + Vt; & x_2 - x_1 &= x'_2 - x'_1. \end{aligned}$$

La fonction  $F'$  a constamment la même valeur au temps 0 pour l'abscisse  $x_3$ , et au temps  $t$  pour l'abscisse  $x'_3 = x_3 + Vt$ .

*Donc les vitesses et les condensations définies par la fonction  $F'$  se propagent vers les  $x$  croissants avec une vitesse constante  $V$ .*

On démontrerait absolument de même que *les vitesses et les condensations définies par la fonction  $f'$  se propagent vers les  $x$  décroissants avec une vitesse constante  $V$ .*

*Les vitesses et les condensations définies au temps 0 entre les abscisses  $x_1$  et  $x_2$  peuvent donc être considérées comme la superposition, d'après le principe des petits mouvements, de deux systèmes de vitesses et de condensations, séparément définies par les fonctions complètement déterminées  $f'$  et  $F'$ , qui se propagent à partir de ce moment dans des directions opposées.*

**69. Cas d'une onde unique.** — Il peut arriver qu'une des deux ondes précédemment définies manque : l'une des fonctions  $f'$  ou  $F'$  est identiquement nulle, même entre les valeurs  $x_1$  et  $x_2$  de la variable. Il faut pour cela qu'il existe entre les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  une certaine relation.

Réécrivons les équations (2) et (3) :

$$f'(x) - F'(-x) = \varphi(x) = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{t=0},$$

$$V[f'(x) + F'(-x)] = \psi(x) = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0}.$$

$F'$  existe seule et tout se réduit à une onde se déplaçant vers les  $x$  croissants, si l'on a identiquement :

$$-V \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{t=0} = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} = V\gamma_0.$$

La vitesse de chaque tranche dans l'ébranlement initial imposé est alors proportionnelle à sa condensation. Bien entendu, l'ébranlement défini par la fonction  $F$  satisfait à cette condition; on a en effet :

$$u = F(Vt - x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = VF'(Vt - x), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -F'(Vt - x),$$

$$V\gamma = -V \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

De même  $f'$  existe seule, et tout se réduit à une onde se déplaçant sans modification et d'un mouvement uniforme vers les  $x$  décroissants, si l'on a identiquement :

$$V \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{t=0} = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} = -V\gamma_0.$$

C'est la même condition que plus haut, mais les vitesses sont changées de signes. L'ébranlement défini par la fonction  $f$  satisfait bien entendu à cette condition :

$$u = f(Vt + x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = Vf'(Vt + x), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = f'(Vt + x),$$

$$-V\gamma = V \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

**70. Détermination complète des fonctions  $f$  et  $F$ .** — Les fonctions  $f$  et  $F$  ne sont déterminées qu'à une constante près. En effet, quand le milieu est en équilibre,  $u$  n'est pas nécessairement nul; il suffit qu'il soit constant. Le passage de l'onde en un point laisse ce point généralement déplacé; il ne revient pas nécessairement à sa position initiale, *qui n'est pas plus une position d'équilibre que toute autre position.*

De ce qu'au début on imagine le milieu en équilibre sauf entre  $x_1$  et  $x_2$ , il est impossible de poser  $u = 0$  hors de ces limites. On doit seulement poser  $u$  constant.

Supposons que l'onde  $F$  parte d'une abscisse négative grande, que l'onde  $f$  parte d'une abscisse positive grande et que leurs déplacements avec la vitesse constante  $V$  les amènent à se croiser à l'origine des temps précisément entre les abscisses  $x_1$  et  $x_2$ . Elles continuent ensuite leurs chemins. Nous retrouvons sous une autre forme précisément le problème traité ci-dessus.

Mais au temps  $t = 0$ , un point d'abscisse comprise entre  $-\infty$  et  $x_1$  a été traversé par l'onde  $F$  qui l'a déplacé de  $u_0$ ; il sera traversé ensuite par l'onde  $f$  qui le déplacera de  $u'_0$ . En admettant que son  $u$  ait été nul avant le passage des ondes (ce qui est d'ailleurs purement arbitraire), il est  $u_0^s$  au temps  $t = 0$ ; il devient  $u_0 + u'_0$  après un temps suffisant.

De même l' $u$  d'un point situé entre  $x_2$  et  $+\infty$  devient  $u'_0$  à l'ori-

gine des temps (du fait du passage de l'onde  $f$ ), et  $u_0 + u'_0$  au bout d'un temps suffisant.

En définitive, pour un temps *négligeable* grand,  $u = 0$  identiquement; pour un temps *positif* grand,  $u = u_0 + u'_0$  identiquement : tout le tuyau est en équilibre. Au temps  $t = 0$ ,  $u = u_0$  entre  $-\infty$  et  $x_1$ ;  $u = u'_0$  entre  $x_2$  et  $+\infty$ .

Il s'agit de déterminer les déplacements  $u_0$  et  $u'_0$ .

L'intégration des équations (2) et (3) donne :

$$2f(x) = \int_{x_1}^x \varphi(x) dx + \frac{1}{V} \int_{x_1}^x \psi(x) dx.$$

$$2F(-x) = - \int_{x_1}^x \varphi(x) dx + \frac{1}{V} \int_{x_1}^x \psi(x) dx + 2u_0.$$

en admettant les hypothèses précédentes et en posant :

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx = A, \quad \frac{1}{V} \int_{x_1}^{x_2} \psi(x) dx = B; \quad 2u'_0 = A + B, \quad 2u_0 = A - B.$$

En effet, au moment où l'onde est localisée dans l'intervalle  $x_1 x_2$ ,  $f(x) = u'_0$  pour  $x > x_2$ ; d'où la condition  $A + B = 2u'_0$ ; pour  $x < x_1$ ,  $f(x) = 0$  identiquement et corrélativement les intégrales sont nulles. De même  $F(-x) = u_0$  pour  $x < x_1$  et  $F(-x) = 0$  pour  $x > x_2$ ; d'où la condition  $-A + B + 2u_0 = 0$ .

Le problème est donc complètement résolu, puisque les intégrales A et B nous sont complètement connues.

Si l'on se donne à l'origine des temps les déplacements  $u = \chi(x)$  et les vitesses des tranches, la solution s'obtient aisément en suivant une marche analogue. Bien entendu, il faut laisser indéterminés au début les déplacements hors l'intervalle  $x_1 x_2$ , où nous savons seulement que  $u$  est constant.

**71. Piston fermant l'extrémité d'un tuyau et animé d'un mouvement quelconque.** — Considérons l'ébranlement précédemment défini, réduit à la partie représentée par la fonction F par exemple; ou, ce qui revient au même, considérons l'une des ondes. Quand elle parvient à la tranche d'abscisse  $x_0$ , celle-ci subit des déplacements représentés par :

$$u = F(Vt - x_0).$$

Rien ne nous empêche de supposer que le plan d'abscisse  $x_0$  limite un piston, auquel nous imprimons précisément le mouvement  $u = F(Vt - x_0)$ . Il est clair qu'au delà de ce piston les phénomènes seront identiquement les mêmes que si le piston n'existait pas et si l'onde venait d'en deçà. Donc, quand nous imprimons à un piston formant la section droite d'un tube cylindrique un déplacement représenté par  $u = F(t)$  en fonction du temps, nous créons dans le tuyau une onde qui se déplace sans déformation et avec une vitesse cons-

tante. Le mouvement d'une tranche quelconque est donné par l'équation :

$$u = F\left(t - \frac{x}{V}\right).$$

Si le déplacement du piston se fait suivant une loi périodique, toute tranche est animée d'un mouvement périodique avec un retard qui, évalué en temps, est égal à  $x:V$ ;  $x$  est la distance de la tranche considérée au piston.

**72. Vitesse de propagation.** —  $V$  est la vitesse de propagation uniforme. L'expérience montre que les gaz transmettent le son en se comprimant et se dilatant adiabatiquement. C'est donc la formule :

$$V = \sqrt{\frac{C}{c} \frac{p}{\rho}},$$

qu'il faut employer. Elle est homogène, puisque  $p$  représente une force par unité de surface ( $\text{MLT}^{-2} \cdot \text{L}^{-2}$ ),  $\rho$  une masse par unité de volume ( $\text{ML}^{-3}$ ). Appelons  $p_0$  une certaine pression dans le système du kilogrammètre,  $D_0$  le poids spécifique ou la masse spécifique (exprimée par le même nombre dans ce système), sous la pression  $p_0$  et à la température  $0^\circ$ . D'après les lois de Mariotte et Gay-Lussac :

$$D = p \cdot \frac{D_0}{p_0} \frac{1}{1 + \alpha t}.$$

Dans le système du kilogrammètre, la formule devient :

$$V = \sqrt{\frac{C}{c} \frac{pg}{D}} = \sqrt{\frac{C}{c} \cdot \frac{gp_0}{D_0} (1 + \alpha t)};$$

formule déjà donnée au § 126 du Cours de Mathématiques.

**73. Phénomènes de réflexion.** — Considérons les cas fondamentaux des § 127 et 128 du Cours de Mathématiques, et légitimons les énoncés généraux du § 137.

**RÉFLEXION SUR UN MUR INVARIABLE.** — Le mur est à l'origine des coordonnées; nous envoyons dessus une onde définie par l'équation :

$$u = f(Vt + x).$$

Dire qu'il y a réflexion, c'est dire qu'il faut adjoindre au mouvement incident un autre mouvement se propageant en sens contraire, et tel que par la superposition des deux mouvements la tranche d'abscisse 0 reste immobile. Le mouvement réfléchi est évidemment :

$$u_1 = -f(Vt - x).$$

Pour  $x=0$ , on a identiquement  $u + u_1 = 0$ . D'ailleurs,  $u_1$  satisfait à l'équation différentielle du § 64.

Considérons deux points d'abscisses  $x_1$  et  $-x_1$ . Au temps  $t$  le déplacement du point d'abscisse  $x_1$ , envisagé comme subissant l'ébranlement incident, est  $u = f(Vt + x_1)$ ; au même temps  $t$  le

déplacement du point d'abscisse  $-x_1$ , envisagé comme subissant l'ébranlement réfléchi qu'on suppose exister même au delà du mur réfléchissant, est  $u_1 = -f[Vt - (-x_1)] = -f(Vt + x_1)$ . Donc on peut supprimer le mur réfléchissant et considérer le tuyau comme indéfini, à la condition de faire intervenir deux ondes se propageant en sens inverses, les déplacements ou les vitesses dans l'onde ajoutée étant exactement symétriques des déplacements dans l'onde primitive, par rapport au mur réfléchissant. C'est la règle du § 137 du Cours de Mathématiques. Ces ondes se pénètrent suivant la loi des petits mouvements : les points d'abscisse 0 restent immobiles.

Les condensations dues aux deux ondes sont généralement :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(Vt + x), \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = f'(Vt - x).$$

Elles sont toujours égales pour  $x=0$ . C'est un corollaire de la remarque générale du § 69. Quand, sur deux ondes qui se propagent en sens inverses, les vitesses sont égales et de signes contraires, les condensations sont égales et de même signe.

RÉFLEXION SUR UN MILIEU INDÉFINI OÙ L'ON SUPPOSE QUE LA PRESSION RESTE CONSTANTE. — Il faut adjoindre à l'ébranlement incident un autre ébranlement se propageant en sens contraire, et tel que, par la superposition des deux ondes, il y ait condensation nulle aux points d'abscisse 0. Ce nouvel ébranlement est évidemment :

$$u_1 = f(Vt - x).$$

On a, en effet :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(Vt + x), \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = -f'(Vt - x);$$

et par conséquent, quel que soit le temps,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)_{x=0} = 0.$$

Il est identique à l'ébranlement réfléchi du cas précédent, sauf qu'à chaque instant les vitesses de toutes les tranches sont de sens contraires.

Ainsi quand la réflexion se fait sur un milieu où, la pression devant rester constante, la condensation doit toujours être nulle, on peut supprimer le tuyau indéfini, à la condition d'ajouter une nouvelle onde se propageant en sens contraire de la première; les déplacements ou les vitesses dans les deux ondes sont à chaque instant égaux et de même sens sur deux tranches qui sont à la même distance de part et d'autre du plan de réflexion.

C'est la règle du § 137 du Cours de Mathématiques. Les deux ondes se pénètrent suivant la loi des petits mouvements; la tranche d'abscisse 0 ne subit aucune condensation. Le déplacement résultant



n'y est évidemment pas nul, puisque les déplacements dus aux deux ondes sont toujours de même sens. C'est un corollaire de la remarque générale du § 69. Quand, sur deux ondes qui se déplacent en sens inverses, les condensations sont égales et de signes contraires, les déplacements ou les vitesses sont égaux et de même signe.

**74. Représentation d'une fonction d'une variable  $t$  par une série de sinus et de cosinus.** — On sait qu'une fonction arbitraire  $F(t)$  donnée entre deux limites  $t_1$  et  $t_2$  peut toujours se développer en une série de sinus et de cosinus. Si cette fonction est périodique et de période  $T = 1 : N$ , on choisira pour limites du développement deux temps  $t_1$  et  $t_2$  distants d'une période. Posons  $\omega = 2\pi : T = 2\pi N$ ; la série prendra l'une des formes équivalentes :

$$\begin{aligned} F(t) &= A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t + \dots + A_n \sin n\omega t + \dots \\ &\quad + B_0 + B_1 \cos \omega t + B_2 \cos 2\omega t + \dots + B_n \cos n\omega t + \dots \\ F(t) &= B_0 + a_1 \sin(\omega t - x_1) + a_2 \sin(2\omega t - x_2) + \dots \\ &\quad + a_n \sin(n\omega t - x_n) + \dots \end{aligned}$$

La fonction périodique  $F(t)$  est représentée par ces séries pour toutes les valeurs du temps, puisque la série vaut pour une période  $T$  et que le second membre est périodique et admet comme le premier par hypothèse  $T$  pour période.

On a, pour déterminer les  $A$  et les  $B$ , les équations (§ 164) :

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T \sin n\omega t \cdot F(t) dt, \quad B_n = \frac{2}{T} \int_0^T \cos n\omega t \cdot F(t) dt.$$

Connaissant  $A_n$  et  $B_n$ , on calculera  $a_n$  et  $x_n$  par les formules :

$$a_n^2 = A_n^2 + B_n^2, \quad \operatorname{tg} x_n = -B_n : A_n.$$

C'est la possibilité de ce développement qui permet de dire : *qu'un son périodique quelconque peut toujours être considéré comme la somme de sons simples dont les nombres de vibrations par seconde sont double, triple, quadruple... du nombre de vibrations de l'un d'eux.* Le son le plus grave s'appelle *fondamental* ou *premier harmonique*; les autres s'appellent *second, troisième... harmonique.*

Cette équivalence *algébrique* se transforme en une équivalence *physique*, quand le principe des petits mouvements est applicable. On peut dire alors qu'un corps dont les points se déplacent suivant une loi *périodique* quelconque peut être envisagé comme émettant simultanément une série de sons simples harmoniques. Il pourrait les émettre séparément; il peut aussi les émettre simultanément : les mouvements de chaque point sont alors les résultantes des mouvements dus à chacun des sons simples envisagés comme indépendants.

Le principe des petits mouvements s'applique chaque fois que les équations différentielles du mouvement sont linéaires, l'intégrale géné-

rale étant alors la somme des intégrales particulières. Il en est ainsi quand les déplacements sont petits, parce qu'alors la force qui ramène les points à leur position d'équilibre est proportionnelle au déplacement.

Il peut arriver qu'un corps émette simultanément plusieurs séries formées chacune d'un fondamental et de ses harmoniques. Comme cas particulier, ces séries se réduisent à un seul de leurs termes; on dit alors que le corps émet un son complexe dont les sons simples composants (sons partiels) ne sont pas harmoniques.

Un *accord* est un son complexe rentrant dans le cas le plus général; comme cas particulier, il peut ne se composer que d'un petit nombre de sons simples. Mais un accord donné sur le piano, par exemple, se compose *d'autant de séries* qu'il y a de notes.

### 75. Mouvements périodiques. Intégration de l'équation différentielle par des séries trigonométriques.

$$\text{L'équation} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

étant linéaire, l'intégrale générale est la somme des intégrales particulières. Le mouvement

$$u = u_0 \sin 2\pi n \left( \frac{T}{t} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

avec la condition  $\lambda = VT$  et où  $n$  est un entier quelconque, satisfait l'équation; une série trigonométrique la satisfait aussi. D'après la proposition du paragraphe précédent, tout mouvement périodique d'une tranche est représenté par une série trigonométrique où  $n$  varie de 1 à  $\infty$ ; donc la loi de propagation de ce mouvement est obtenue en remplaçant sous les signes sin et cos

$$\omega t = 2\pi \frac{t}{T} \quad \text{par} \quad 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

**76. Phénomènes de réflexion dans le cas d'un ébranlement périodique. Ondes stationnaires.** — On en trouve la théorie aux § 137 et 143 du Cours de Mathématiques.

**77. Pression exercée par une onde sur le plan réfléchissant.** — Avec les approximations que nous avons faites, la pression moyenne sur le plan réfléchissant est égale à la pression initiale  $p_0$ . Il y a, en effet, parfaite symétrie entre les condensations et les dilations. L'expérience montre cependant que si l'amplitude n'est pas négligeable devant la longueur d'onde, une onde qui se réfléchit produit une pression; il faut donc faire intervenir des termes d'ordre supérieur dans l'expression de l'accroissement de pression. Posons  $\epsilon = C : c$ .

Si la déformation est adiabatique, on a :

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^\epsilon} = 1 - \epsilon \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\epsilon(\epsilon+1)}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

Nous avons encore approximativement (Cours de Math., § 140) :

$$u = u_0 \sin 2\pi \frac{t}{T} \sin \pi \frac{x}{\lambda}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = u_0 \frac{\pi}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos \frac{\pi x}{\lambda},$$

ce qui suppose un nœud pour  $x = 0$ .

Au voisinage du nœud, la pression moyenne est :

$$\frac{1}{T} \int_0^T p dt = p_0 \left[ 1 + \frac{\epsilon(\epsilon+1)}{2} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{u_0^2 \pi^2}{\lambda^2} \sin^2 \frac{2\pi t}{T} dt \right] = p_0 + p_0 \epsilon(\epsilon+1) \frac{u_0^2 \pi^2}{4\lambda^2}.$$

La pression au voisinage du ventre reste évidemment  $p_0$ ; enfin la pression moyenne entre deux nœuds est :

$$p_0 + p_0 \epsilon(\epsilon+1) \frac{u_0^2 \pi^2}{8\lambda^2}.$$

La pression moyenne est donc plus grande aux nœuds qu'aux ventres; cette différence explique, outre les répulsions, l'existence de courants gazeux qui vont des nœuds vers les ventres.

**78. Propagation d'une onde sphérique.** (Poisson.) — Nous allons traiter le cas où l'ébranlement est dû à la déformation d'une sphère. Par raison de symétrie, les déplacements  $u$  des points du milieu se font suivant des droites passant par le centre O de la sphère pulsante et sont identiques sur chacune des surfaces sphériques de centre O.

Appelons  $r$  le rayon de la surface considérée;  $u$  est une fonction  $F(t, r)$  du temps et de ce rayon. La condensation  $\gamma$  est, elle aussi, une fonction de  $r$  et de  $t$ .

Considérons un petit volume  $dV$  compris dans un cône d'angle solide  $\omega$  et entre deux sphères de rayon  $r$  et  $r + dr$ . On a  $dV = \omega r^2 dr$  d'après la définition de l'angle solide. Soit  $\rho$  la densité du milieu. L'accroissement de pression sur la face AB de la sphère  $r$  est  $\pi\gamma$ ; la force est  $\omega r^2 \cdot \pi\gamma$  (§ 66); l'accroissement de pression sur la face CD est :

$$\pi\left(\gamma + \frac{\partial\gamma}{\partial r} dr\right);$$

la force est :

$$\omega(r + dr)^2 \pi\left(\gamma + \frac{\partial\gamma}{\partial r} dr\right) = \omega r^2 \cdot \pi\gamma + 2\omega r \pi\gamma dr + \omega r^2 \cdot \pi \frac{\partial\gamma}{\partial r} dr.$$

Il faut maintenant tenir compte des pressions sur les faces latérales. Admettons, pour simplifier le calcul, que le cône élémentaire

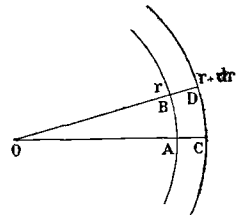


Fig. 39.

considéré est circulaire ; soit  $\theta$  l'angle au sommet compris entre les génératrices et l'axe de cône. La longueur de la circonférence AB est  $6,28.\theta r$  ; la surface latérale du petit volume est  $6,28.\theta r dr$ . La pression totale qui s'exerce normalement est  $6,28.\theta r dr . \pi \gamma$  ; enfin la composante radiale de cette pression est  $6,28\theta^2 r dr \pi \gamma$ . Reste à connaître la relation entre  $\theta$  et  $\omega$  ; on démontrera facilement que l'on a  $\omega = 3,14 . \theta^2$ . En définitive, la résultante radiale des pressions qui s'exercent sur la surface latérale est  $2\omega r . \pi \gamma . dr$ .

Faisons la somme de toutes les composantes radiales et écrivons l'équation du mouvement :

$$\omega r^2 dr . \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \omega r^2 \pi \frac{\partial \gamma}{\partial r} dr, \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \pi \frac{\partial \gamma}{\partial r}.$$

Reste à évaluer  $\gamma$  en fonction du déplacement.

Le volume  $dV$  est compris entre deux sphères de rayons  $r$  et  $r + dr$ . Après déplacement, les rayons deviennent  $r + u$  et  $r + dr + u + \frac{\partial u}{\partial r} dr$ . La variation du volume  $dV$  est :

$$\delta . dV = 4\pi(r + u)^2(dr + \frac{\partial u}{\partial r} dr) - 4\pi r^2 dr = 4\pi r^2 dr \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} \right).$$

$$\gamma = - \frac{\delta . dV}{dV} = - \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} \right).$$

La condensation n'a plus la même expression que pour les ondes planes ; c'est évident *a priori*. En effet, donnons à toutes les tranches d'un tuyau le même déplacement, la condensation reste partout nulle. Donnons maintenant le même déplacement à toutes les sphères concentriques ; pour les sphères de grand rayon, tout se passe comme si c'était des plans : la condensation reste nulle. Mais il n'en est plus de même pour les sphères de petit rayon. Si j'agrandis, par exemple, tous les rayons de la même quantité, j'aurai une dilatation infinie au centre et qui diminue à mesure que grandit le rayon des sphères considérées.

En définitive, l'équation de la propagation de l'ébranlement devient, en posant  $V^2 = \pi : \rho$ ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} \right).$$

L'intégrale générale est :

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{r^2} F(Vt - r) + \frac{1}{r} F'(Vt - r). \\ v &= \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{V}{r^2} F'(Vt - r) + \frac{V}{r} F''(Vt - r). \\ \gamma &= \frac{1}{r} F''(Vt - r). \end{aligned}$$

Nous pourrions aussi prendre une fonction arbitraire de la forme  $f(Vt+r)$ ; nous limitons pour l'instant notre discussion à l'onde divergente ou centrifuge.

**79. Discussion du mode de propagation fourni par l'équation précédente. Les limites de l'ébranlement se transportent avec une vitesse constante.** — Supposons qu'au temps 0 le mouvement soit compris entre les sphères de rayons  $r_1$  et  $r_2$ . La fonction  $F$  et ses dérivées sont nulles pour toutes les valeurs de la variable  $(Vt-r)$  qui ne sont pas comprises entre  $-r_1$  et  $-r_2$ . Pour un temps  $t$  quelconque, il faut, pour que  $F$  et ses dérivées ne soient pas nulles, compenser, dans la variable  $(Vt-r)$ , l'accroissement de  $Vt$  par un accroissement de  $r$ . Au temps  $t$  le mouvement sera compris entre deux sphères de rayons  $r'_1$  et  $r'_2$ , tels que l'on ait :

$$\begin{aligned} Vt-r'_1 &= -r_1, & Vt-r'_2 &= -r_2; \\ r'_1 &= r_1 + Vt, & r'_2 &= r_2 + Vt; & r'_2 - r'_1 &= r_2 - r_1. \end{aligned}$$

Tout cela revient à dire que les *limites* de la perturbation se propagent avec une vitesse constante : *cela ne veut pas dire que la perturbation reste inaltérée à l'intérieur de ces limites.*

*La condensation se propage inaltérée au coefficient 1 :  $r$  près.*

On a en effet : 
$$\gamma = \frac{1}{r} F''(Vt-r);$$

le produit  $\gamma r$  a la même valeur pour  $r=r_1$  au temps 0, et pour  $r=r_1+Vt$  au temps  $t$ .

Il faut bien remarquer en quoi consiste cette *inaltération*. A proprement parler, c'est une modification notable. Considérons un ébranlement limité d'abord par les sphères de rayons  $r_1=1$  et  $r_2=2$ ; au bout d'un certain temps il est, par exemple, limité par des sphères de rayons  $r'_1=101$  et  $r'_2=102$ . L'équation précédente nous apprend que l'on a :

$$\begin{aligned} \gamma_1 r_1 &= \gamma'_1 r'_1, & \gamma_1 &= 101 \cdot \gamma'_1. \\ \gamma_2 r_2 &= \gamma'_2 r'_2, & \gamma_2 &= 51 \cdot \gamma'_2. \end{aligned}$$

Nous sommes toutefois assurés que la condensation ne changera pas de signe; de condensation elle ne deviendra pas dilatation.

*La vitesse des tranches concentriques de l'ébranlement peut changer de signe du fait de la propagation.*

On a : 
$$v = \frac{V}{r^2} F'(Vt-r) + \frac{V}{r} F''(Vt-r).$$

Près du centre le premier terme l'emporte

$$v_c = \frac{V}{r^2} F'(Vt-r);$$

très loin du centre c'est le second terme qui prédomine

$$v_{\infty} = \frac{V}{r} F''(Vt - r).$$

Considérons par exemple, près du centre O, un ébranlement tel que la vitesse d'un point  $v_c$  soit représentée en fonction du temps par la courbe ABCDE; c'est à un facteur constant près la fonction  $F'$ . La fonction  $F''$  est représentée par la courbe très différente A'B'C'D'E'. Pendant l'ébranlement le point *voisin du centre* s'éloigne

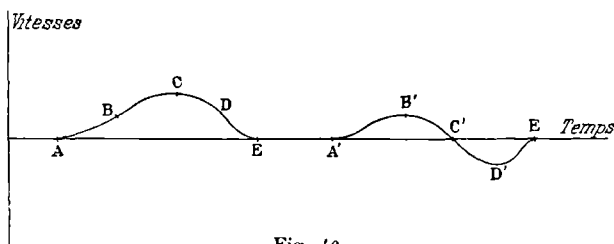


Fig. 40.

constamment du centre avec une vitesse nulle, puis croissante, puis décroissante; sous l'influence du même ébranlement, le point *éloigné du centre* subit une sorte d'oscillation: il s'éloigne pour se rapprocher ensuite.

Dire que les limites de l'ébranlement se transportent avec une vitesse constante, revient à écrire  $AE = A'E'$ .

En définitive, si l'ébranlement considéré comme un bloc se propage avec une vitesse constante, nous sommes loin des lois simples de la propagation dans les tuyaux.

Les résultats précédents s'appliquent, lorsque l'onde née en un point n'est pas rigoureusement sphérique, *pourvu qu'on se place à une distance suffisante du point*: même alors le phénomène se simplifie. C'est par exemple ce qui arrive dans la détermination directe de l'existence du son dans l'air ou dans l'eau. On produit un ébranlement en un point; à une distance suffisante du point, la vitesse de propagation est constante, l'onde se déplace sans déformation sensible; la vitesse est en raison inverse de la distance; l'intensité de son en raison inverse du carré de la distance. Ainsi se trouvent légitimées ces méthodes de mesure.

Nous savons (§ 33) que pour l'eau, le coefficient de compressibilité est  $\kappa = 0,0005 = 5 \cdot 10^{-5}$ , la pression étant évaluée en kilogrammes par  $\text{cm}^2$ . Évaluons tout dans le système du kilogrammètre; il est  $10^4$  fois plus petit  $= 5 \cdot 10^{-9}$ .

La densité  $\rho$  vaut  $10^3$ ; enfin  $g = 9^{\text{m}},81$ .

$$V = \sqrt{\frac{g}{\kappa \rho}} = \sqrt{\frac{9,81}{5 \cdot 10^{-9} \cdot 10^3}} = 1400 \text{ mètres environ.}$$

**80. Mouvement vibratoire entretenu par une sphère pulsante.** — Soit  $\varepsilon$  le rayon de la sphère pulsante et  $v = \varphi(t)$  la vitesse qu'on impose suivant le rayon aux points de sa surface. Nous devons poser, puisque par hypothèse  $\varepsilon$  est très petit :

$$\varphi(t) = \frac{V}{\varepsilon^2} F'(Vt - \varepsilon) = \frac{V}{\varepsilon^2} F'(Vt).$$

En définitive, on aura pour un point quelconque :

$$v = \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{r^2} \varphi\left(t - \frac{r}{V}\right) + \frac{1}{r} \varphi'\left(t - \frac{r}{V}\right) \right].$$

$$\gamma = \frac{\varepsilon^2}{Vr} \varphi'\left(t - \frac{r}{V}\right).$$

*Ondes périodiques.* — Posons  $v = \varphi(t) = K \sin 2\pi \frac{t}{T}$ . Il vient :

$$v = K\varepsilon^2 \left[ \frac{1}{r^2} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) + \frac{1}{r} \frac{2\pi}{\lambda} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) \right] \quad (1)$$

$$\gamma = K\varepsilon^2 \frac{1}{Vr} \frac{2\pi}{\lambda} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right).$$

Tout près du centre on a :

$$v = \frac{K\varepsilon^2}{r^2} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right).$$

Loin du centre on a :

$$v = \frac{K\varepsilon^2}{r} \frac{2\pi}{\lambda} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \frac{1}{4} \right).$$

Le mouvement à grande distance est donc *en avance* de  $1/4$  de période. Cette avance se produit à des distances de la source inférieures à  $\lambda$ . Tout se passe comme si la vitesse de propagation était extrêmement grande près de la source et diminuait rapidement en fonction de  $r$  jusqu'à sa valeur normale; d'où l'avance ci-dessus constatée.

**81. Variation de l'amplitude avec le rayon et transport de l'énergie mécanique.** — Écrivons la vitesse  $v$  [éq. (1) du § précédent] sous la forme :

$$v = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + h \right).$$

$$\text{Il vient : } A = K\varepsilon^2 \sqrt{\frac{1}{r^4} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2 r^2}}, \quad \text{tg } 2\pi h = \frac{2\pi r}{\lambda}.$$

A n'est donc pas en raison inverse de  $r$ . On admet généralement que l'énergie mécanique, *existant à un instant donné sur une sphère de rayon  $r$* , se transporte en totalité au bout d'un certain temps sur

une sphère de rayon  $r'$ . D'où la loi des énergies en raison inverse du carré des distances. Sous cette forme absolue, la règle ne présente aucune nécessité. Il est bien nécessaire que l'énergie qui *traverse* une sphère de rayon  $r$ , soit indépendante de  $r$  dès que l'état permanent est atteint; mais il n'est pas nécessaire *a priori* que les énergies sur des surfaces égales des diverses sphères soient dans un rapport déterminé, tel par exemple que celui de l'inverse du carré des distances au centre. Les mêmes règles s'appliquent en Optique : la loi de variation de l'éclairement en raison inverse du carré des distances n'est légitimée que par la grandeur de la distance  $r$  vis-à-vis de la longueur d'onde. Ce qu'on mesure en effet, ce n'est pas l'énergie *transportée*, mais l'énergie *existante*.

La proposition généralement admise est d'ailleurs contredite par les faits journaliers. Un corps vibrant ne communique au milieu ambiant qu'une très petite partie de son énergie : pourquoi n'en serait-il pas de même des couches gazeuses?

*Évaluation de l'énergie transportée.* — Évaluons le travail fourni sur une surface sphérique de rayon  $r$ , où la pression est  $p$ , et dont le déplacement est  $u$ .

$$\text{On a :} \quad dW = 4\pi r^2 \cdot p \cdot u = 4\pi r^2 p \cdot v dt.$$

Or la pression est égale à la pression moyenne, augmentée de  $\pi'\gamma$ , d'après la définition même de  $\gamma$  et de  $\pi'$  (§ 66)<sup>1</sup>.

Le travail fourni pour une période est donc :

$$W = \int_0^T dW = 4\pi r^2 \cdot \pi' \int_0^T \gamma v dt = (8\pi^3) \frac{\pi' K^2 \varepsilon^4}{V \lambda^2}.$$

Comme on pouvait le prévoir, l'énergie *transportée*  $W$  est indépendante du rayon; par unité de surface, elle est donc en raison inverse du carré du rayon.

Le centre d'ébranlement est entouré d'une atmosphère agitée qui ne perd qu'une faible partie de son énergie, partie d'autant moindre que  $\lambda$  est plus grand. Les vibrations d'un solide de petites dimensions (diapason, corde, ...) donnent un son très faible en tout point dont la distance n'est pas très petite, s'il n'y a pas de table d'harmonie.

Voici une curieuse expérience qu'explique la formule précédente. Un timbre sonne dans un récipient où l'on a raréfié l'air; on l'entend distinctement. On laisse rentrer de l'hydrogène à la *pression atmosphérique* : le son devient imperceptible.

Remplaçons  $\lambda$  par sa valeur  $VT$ ; nous savons que  $\pi'$  est proportionnel au produit de la pression moyenne  $p$  par  $C:c$ ;  $V$  est indépendant de la pression  $p$ . Laissant de côté les facteurs constants qui

<sup>1</sup> Nous écrirons  $\pi'$  au lieu de  $\pi$  (§ 66) pour éviter une confusion avec le nombre  $\pi$ .



interviennent dans  $W$ , nous trouvons que l'énergie transportée est proportionnelle à  $p : V^3$ .

L'hydrogène a pour densité 0,0693, la vitesse de propagation est en raison inverse de la racine carrée de la densité. Elle est donc 3,8 fois plus grande dans l'hydrogène que dans l'air. Or  $\sqrt{3,8^3} = 5,5$ . Donc, à égalité de pression, l'énergie transportée est 5,5 fois plus petite dans l'hydrogène que dans l'air. Si la pression de l'air est réduite à  $1/10$  d'atmosphère, l'énergie transmise y est encore 5,5 fois plus grande que dans l'hydrogène à la pression atmosphérique. En définitive, l'énergie transportée dépend essentiellement de la densité par rapport à l'air du gaz dans lequel se fait la vibration; dans un gaz donné, elle croît proportionnellement à la pression.

**82. Principe d'Huyghens.** — On peut regarder comme centres d'ébranlement tous les éléments  $E$  d'une surface d'onde  $M$ ; pour trouver le mouvement en un point  $P$  au temps  $t$  en dehors de cette surface d'onde, il suffit de composer les mouvements élémentaires, envoyés au point  $P$  par chacun des éléments  $E$  et y arrivant au temps  $t$ .

Ce principe offre deux paradoxes dont la solution se trouve dans les considérations précédentes.

1° Soit un ébranlement limité par deux plans  $A$  et  $B$  dont la distance est  $e$  et formant un système d'ondes planes. Nous pouvons d'abord lui appliquer ce que nous avons dit de la propagation dans les tuyaux, c'est-à-dire par ondes planes. L'ébranlement se propage d'un mouvement uniforme et sans modification. Le principe d'Huyghens qui, s'il est exact, doit conduire au même résultat, nous permet d'envisager la propagation d'une manière toute différente.

Avant d'arriver entre les plans  $A$  et  $B$ , l'ébranlement met à traverser un certain plan  $M$  un temps  $\tau = e : V$ , pendant lequel chaque élément  $E$  du plan  $M$  peut être considéré comme centre d'ébranlement.

Pour calculer le mouvement du point  $P$  au temps  $t$ , il faut chercher ce qu'il reçoit au temps  $t$  de tous les éléments  $E$  jouant le rôle de centres.

A chaque élément  $E$  est dû au temps  $t$  un ébranlement qui, d'après ce que nous savons, est compris entre deux sphères dont les rayons diffèrent précisément de la distance  $e$ . Ce sont tous ces mouvements qu'il faut composer.

Le paradoxe est précisément que leur résultante soit identiquement nulle dans l'espace compris entre le plan  $M$  et le plan  $A$ .

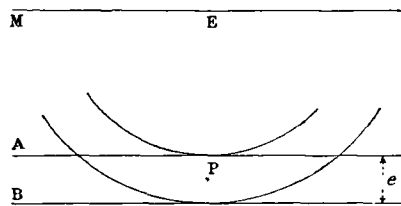


Fig. 41.

Supposons, par exemple, que l'onde plane considérée soit uniquement *condensée* et que la vitesse vibratoire  $y$  soit partout de même signe. Si les mouvements envoyés par les différents éléments  $E$  conservaieent, pour la vitesse, un signe invariable à toute distance, il est clair que le mouvement résultant ne pourrait être nul dans l'espace compris entre les plans  $A$  et  $M$ . Mais nous savons qu'il n'en est pas ainsi (§ 79), ce qui lève le paradoxe.

2° Considérons les différents éléments  $E$  comme sources; si l'on suppose que la vitesse de propagation est *constante*, on retrouve au point  $P$  le mouvement qu'on cherche, *mais seulement en grandeur et non en phase*; d'où un paradoxe longtemps inexplicable. Mais nous savons que la vitesse n'est pas constante, qu'au voisinage de la source elle est plus grande que sa valeur normale, et qu'il résulte de là une avance d'un quart de période pour les points qui sont à une distance de la source supérieure à une longueur d'onde.

Nous aurons l'occasion de revenir sur le principe d'Huyghens en Optique.

**83. Problème général de l'entretien d'un son dans une cavité de forme quelconque.** — Le problème général consiste à déterminer quel système de vibrations peut se maintenir indéfiniment dans une cavité de forme donnée. Il faut satisfaire en un point quelconque du milieu aux équations générales d'équilibre dynamique, et en un point quelconque de la surface limitant le milieu à des conditions particulières, imposées soit par les données expérimentales, soit le plus souvent d'une manière arbitraire pour simplifier la question et obtenir au moins une solution approchée.

La théorie élémentaire des tuyaux telle qu'elle est exposée dans le Cours de Mathématiques, § 147 et suivants, est un bon exemple de ces approximations. On suppose que, le long des parois latérales, le gaz glisse sans frottement, et qu'aux extrémités il existe exactement un ventre ou un nœud; on admet que les parois n'entrent pas en vibration: toutes hypothèses dont le manque de rigueur est évident.

L'expérience prouve qu'il existe ce qu'on appelle très improprement des *perturbations aux extrémités*. Par exemple, à l'extrémité ouverte d'un tuyau, le mouvement vibratoire ne cesse pas brusquement; il existe encore notable à quelque distance. Donc l'hypothèse d'un ventre n'est pas exacte: la condensation n'est pas identiquement nulle, la pression n'est pas identiquement constante. Une théorie plus exacte montre que tout se passe comme si la théorie élémentaire était vraie, à la condition de supposer le tuyau plus long d'une quantité qui, pour les tuyaux cylindriques, est environ les 0,6 du rayon.

Pour les tuyaux dont la longueur n'est pas très grande par rapport aux dimensions transversales, la théorie élémentaire ne signifie

plus rien. Il est évident *à priori* que l'atmosphère extérieure joue un rôle qui devient prédominant quand le tube est très large. En augmentant le diamètre sans changer la longueur, on fait baisser le son de plus forte résonance.

L'approximation donnée par la théorie *élémentaire* est encore plus mauvaise pour l'extrémité où se trouve l'embouchure. Les facteurs d'orgue admettent que, pour une embouchure de flûte, un tuyau rectangulaire se conduit comme le veut la théorie, en ajoutant à la longueur réelle deux fois la distance du biseau à la paroi opposée. La correction est quatre ou cinq fois plus grande que celle de l'extrémité ouverte.

On suppose, dans la théorie élémentaire, que le frottement de l'air contre la paroi latérale est négligeable. Ce n'est évidemment pas exact, il serait plus correct d'admettre que l'air au contact de la paroi est immobile (§ 58). On modifie nettement le son en rendant plucheuse la paroi interne.

Enfin les parois peuvent vibrer : un tuyau de papier de même longueur qu'un tuyau de cuivre donne un son nettement plus bas et d'un timbre plus sourd ; les harmoniques supérieurs ont disparu.

On ne doit pas s'étonner qu'une théorie évidemment insuffisante n'explique pas rigoureusement les faits ; une théorie plus exacte existe : malheureusement le cadre de cet ouvrage ne nous permet pas d'insister ; nous en indiquerons cependant les principes aux § 94 et suivants.

*Loi des volumes semblables.* — Nous citerons seulement un résultat très général. *Les masses d'air de formes semblables, ébranlées par des bouches semblables, engendrent des sons dont les hauteurs sont en raison inverse des dimensions homologues.*

Cette proposition est un cas particulier d'un théorème plus général. Dans les systèmes vibrants semblables et semblablement constitués, la hauteur est inversement proportionnelle au rapport de similitude et proportionnelle à la vitesse de propagation pour le milieu et les vibrations considérés.

**84. Théorie des résonateurs.** — On appelle *résonateur* une cavité de forme quelconque limitée par une paroi rigide, polie, percée d'une ouverture de dimensions convenables. Parmi les sons que le résonateur peut renforcer, il en est un très grave (relativement aux dimensions), correspondant à un mouvement vibratoire particulièrement simple.

On choisit généralement comme résonateurs des sphères creuses en métal mince à deux ouvertures ; l'une est une section circulaire découpée dans la paroi, l'autre porte un bout de tube qu'on introduit dans l'oreille. Si l'une des oreilles est bouchée avec de la cire, si l'on met dans l'autre le résonateur, la plupart des sons émis au voi-

sinage sont plus étouffés qu'à l'ordinaire; mais quand on produit le son simple correspondant au résonateur, il éclate dans l'oreille avec intensité.

La cavité étant très petite par rapport à la longueur d'onde du son, nous admettons que la pression  $p$  est à chaque instant constante en tous les points;  $p$  est donc seulement une fonction du temps. Supposons l'ouverture fermée par un piston P ayant une certaine

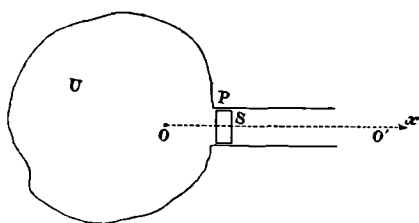


Fig. 42.

masse, et supposons qu'extérieurement la pression soit constante et égale à  $p_0$ . L'air à l'intérieur de la cavité joue le rôle d'un ressort; le piston P vibre avec une période qu'il est facile de calculer, si nous donnons sa masse. Comme elle représente en définitive l'inertie du milieu extérieur, nous la représenterons par  $\rho_0 M$ ;  $\rho_0$  est la densité constante de l'air intérieur,  $M$  est une quantité qui a les dimensions d'un volume. Repérons la position du piston au moyen d'une variable  $x$ , mesurée sur une droite  $OO'$  à partir de sa position d'équilibre; soit  $S$  l'aire du piston; l'équation du mouvement est :

$$\rho_0 M \frac{d^2 x}{dt^2} = - \Delta p \cdot S.$$

Soit  $U$  le volume de la cavité; à chaque instant le changement de volume est  $dU = S dx$ . Multiplions et divisons le second membre par  $\Delta U : U = Sx : U$ , il vient :

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = \left[ - \Delta p : \left( \rho_0 \frac{\Delta U}{U} \right) \right] \frac{S^2 x}{U}.$$

Mais la quantité entre crochets est (§ 67) le carré  $V^2$  de la vitesse de propagation du son dans l'air; d'où :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{V^2 S^2}{MU} \cdot x.$$

Nous avons étudié cette équation; nous savons que le piston exécutera des vibrations isochrones dont le nombre par seconde est :

$$N = \frac{VS}{2\pi \sqrt{MU}}.$$

Le problème serait complètement résolu si nous connaissions le volume  $M$  qui définit l'inertie du milieu extérieur. Elle dépend évidemment de la manière dont ce milieu communique avec le milieu intérieur  $U$ .

Pour aller plus loin, spécifions ces circonstances.

*Ouverture percée en paroi mince.* — Il semble probable à priori que le volume  $M$  dépend uniquement des dimensions de l'ouverture; il est donc naturel de poser  $M = KS^{\frac{3}{2}}$ , où  $K$  est un facteur constant à déterminer. La théorie et l'expérience montrent que  $K = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ; d'où

la formule :

$$N = \frac{V}{\sqrt{2} \sqrt[4]{\pi^5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{S}}{\sqrt{U}}.$$

Substituant à  $V$  sa valeur, on trouve à 0° et en prenant le centimètre pour unité de longueur :

$$N = 5620 \frac{\sqrt[3]{S}}{\sqrt{U}}.$$

Par exemple, soit une sphère de 13 centimètres de diamètre :

$$U = 1144 \text{ cm}^3.$$

Soit un diamètre d'orifice de 3 centimètres :

$$S = 7 \text{ cm}^2, 07, \quad N = 268.$$

*Résonateurs de Pinaud.* — Ce sont des sphères soufflées au bout d'un tube de verre étroit et très long.

$M$  dépend évidemment de la section  $S$  et de la longueur du tube : la théorie et l'expérience donnent l'expression simple  $M = SL$ ;

$$N = \frac{V}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{S}{L}} \frac{1}{\sqrt{U}}, \quad N = 5270 \cdot \sqrt{\frac{S}{L}} \frac{1}{\sqrt{U}}.$$

La théorie précédente explique le fonctionnement d'instruments singuliers appelés *ocarinas*. Ce sont des cavités irrégulières qui communiquent avec l'atmosphère par des trous placés n'importe comment, mais de diamètres convenables. En en ouvrant 1, 2, ... on obtient pour un même volume  $U$  des masses fictives  $\rho M$  à mouvoir différentes, et par conséquent des sons différents. La même théorie explique pourquoi dans un instrument à vent et à trous (flûte, clarinette, ...) on peut corriger la mauvaise position des trous en modifiant leurs diamètres ou la distance maxima au tube du tampon qui sert à les fermer et à les ouvrir.

## CHAPITRE VI

### HYDRODYNAMIQUE

Reprenons la question du mouvement dans les fluides d'une manière un peu plus générale. Outre l'intérêt pratique des formules que nous établirons et des exemples qui leur servent d'application, nous rencontrons une manière infiniment remarquable de représenter les phénomènes dans un milieu.

**85. Notations de l'Hydrodynamique. Équation de continuité.** — A l'intérieur d'un fluide considérons un petit élément. Il occupe une certaine position  $x, y, z$ ; il est animé d'une vitesse dont les composantes, parallèlement à trois axes rectangulaires, sont  $u, v, w$ . Successivement au même point  $x, y, z$  viennent passer d'autres éléments, avec d'autres vitesses autrement dirigées; de sorte qu'en ce point fixe  $x, y, z$ , la vitesse varie :  $u, v, w$  sont donc des fonctions du temps.

Si notre observation avait porté sur un autre point, nous aurions trouvé pour les composantes de la vitesse à chaque instant d'autres fonctions du temps. Il est clair qu'au point de vue cinématique, nous connaissons absolument tout ce qui se passe dans le liquide par la connaissance des trois fonctions  $u, v, w$  des variables  $x, y, z$  et du temps, et de l'état du petit élément qui traverse chaque point fixe  $x, y, z$  à chaque instant  $t$ ; l'état est déterminé par la valeur de la densité  $\rho$  qui est la seule caractéristique pour un fluide.

Dans ces notations nous ne suivons plus *individuellement* chaque élément du fluide; cela n'aurait d'ailleurs aucun intérêt, puisqu'ils sont *indiscernables* quant à leur nature.

Il est évident que nous ne pouvons pas nous donner arbitrairement les fonctions  $u, v, w, \rho$  des variables  $x, y, z, t$ . Une relation doit exister entre ces fonctions, ce qu'on appelle *une équation de continuité*.

Considérons une surface fermée sans trou, et exprimons la quantité de matière qui en sort pendant le temps  $dt$ . Soient  $\lambda, \mu, \nu$  les

cosinus directeurs de la normale, prise positivement vers l'extérieur. Si  $u, v, w$  sont les composantes de la vitesse au sens cinématique du mot,  $u_\rho, v_\rho, w_\rho$  sont les composantes de la vitesse d'écoulement matériel. De sorte qu'à travers l'élément  $dS$ , dans le temps  $dt$ , la quantité de matière qui s'écoule est :

$$\rho(u\lambda + v\mu + w\nu)dSdt.$$

Nous pouvons donc écrire :

$$dt \iint \rho(u\lambda + v\mu + w\nu)dSdt = -dt \frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho d\omega = -dt \iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} d\omega,$$

où  $d\omega$  est l'élément de volume. Nous exprimons que la diminution de la masse totale à l'intérieur de la surface fermée est égale à la masse qui s'écoule à travers cette surface pendant le même temps.

Or, cette identité devant être satisfaite quelle que soit la surface considérée, elle doit l'être pour un élément de volume parallélépipédique  $dx dy dz$ . Différencions les deux membres de l'équation; remarquons que l'on a :

$$\iint \rho u \cdot \lambda dS = \iint \rho u dy dz = \iiint \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz,$$

et de même pour les autres termes du premier membre; il reste :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

Si le liquide est incompressible, l'équation (1) devient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1')$$

analogue à l'équation du § 65. Toutefois les notations  $u, v, w$  n'ont pas le même sens. Au § 65,  $u, v, w$  représentent de petits déplacements; ici  $u, v, w$  représentent les composantes de la vitesse dont les grandeurs sont quelconques. Un instant de réflexion montre qu'il doit en être ainsi : les vitesses étant les limites du quotient de l'espace par un temps, si nous explicitons les chemins parcourus, ils doivent naturellement être très petits.

**86. Équations de l'Hydrodynamique.** — Il faut toujours écrire que le vecteur *accélération* d'un petit élément du fluide est égal à la force appliquée à cet élément divisée par sa masse. Si les équations de l'Hydrodynamique n'ont pas la forme ordinaire, c'est que nous devons exprimer les vitesses et les accélérations d'un élément *mobile déterminé* au moyen des vecteurs  $u, v, w$ , qui représentent les composantes de la vitesse en un point fixe du milieu.

Soient  $x, y, z$  les coordonnées variables de l'élément considéré. Nous avons (§ 28) :

$$\rho \frac{d^2x}{dt^2} = X - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho \frac{d^2y}{dt^2} = Y - \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \rho \frac{d^2z}{dt^2} = Z - \frac{\partial p}{\partial z};$$

ce qui revient à ajouter aux forces appliquées à l'élément les forces dites d'inertie. Il s'agit d'exprimer les premiers membres en fonction de  $u, v, w$ .

Or l'élément qui est actuellement au point  $x, y, z$  se trouve, au bout du temps  $dt$ , au point

$$x + dx = x + udt, \quad y + dy = y + vdt, \quad z + dz = z + wdt.$$

Sa vitesse est donc celle qui existe en ce nouveau point et pour le temps  $t + dt$ . Puisque  $u$  est la vitesse au temps  $t$  et au point  $x, y, z$ , la vitesse  $u + du$  au temps  $t + dt$ , et au point  $x + udt, y + vdt, z + wdt$  est :

$$\begin{aligned} u + du &= u + \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ &= u + \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dt. \end{aligned}$$

De même, pour  $v$  et  $w$ .

Le taux d'accroissement  $\frac{d^2x}{dt^2}$  de la vitesse de l'élément considéré, parallèlement à l'axe des  $x$ , est donc l'expression comprise entre parenthèses. En définitive, les équations de l'Hydrodynamique sont :

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{X}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{Y}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{Z}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}$$

**87. Conditions aux limites.** — Lorsque le fluide n'est pas indéfini, il existe des conditions à satisfaire dites équations aux *limites*. Si, par exemple, il est contenu dans un vase, la vitesse à la surface de ce vase doit être dans le plan tangent.

Soit  $f(x, y, z, t) = 0$  l'équation du vase qui n'est pas nécessairement immobile ou de forme invariable; le déplacement  $dx, dy, dz$  d'un des points de la surface satisfait à l'équation

$$dx \frac{\partial f}{\partial x} + dy \frac{\partial f}{\partial y} + dz \frac{\partial f}{\partial z} + dt \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

La condition à satisfaire est :

$$u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Dans le cas d'une paroi fixe,  $\partial f / \partial t$  est identiquement nul.

A la surface libre d'un liquide, la pression  $p$  est en général constante.



Comme on a  $p = f_1(x, y, z, t)$ , l'équation de la surface libre est  $f_1 = C^t$ ; substituant dans l'équation de condition générale, il vient :

$$u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

**88. Cas particuliers les plus importants. Potentiel des forces et des vitesses.** — Le plus souvent la force X, Y, Z admet un *potentiel*, c'est-à-dire qu'on peut poser :

$$\frac{X}{\rho} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{Y}{\rho} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{Z}{\rho} = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

où V est une fonction de  $x, y, z$ .

Soit  $\Phi$  une fonction de  $x, y, z$  et du temps; on dit qu'il y a un *potentiel des vitesses* si l'on a :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

On démontre que s'il existe à *un moment* un potentiel des vitesses et si les forces agissantes admettent un potentiel, il existera *toujours* un potentiel des vitesses pour la même portion finie du fluide, pourvu que la densité soit une fonction de la pression.

Posons : 
$$U^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Multiplions la première des équations (2) par  $dx$ , la seconde par  $dy$ , la troisième par  $dz$  et additionnons; on trouve comme intégrale :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{U^2}{2} = -V - \int \frac{dp}{\rho} + F(t). \quad (3)$$

$F(t)$  est une fonction arbitraire de  $t$ .

S'il s'agit d'un fluide incompressible, l'équation (3) devient :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{U^2}{2} = -V - \frac{p}{\rho} + F(t), \quad (3')$$

et l'équation de continuité (1) prend la forme

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \Delta^2 \Phi = 0. \quad (1')$$

Quand ces conditions sont satisfaites, et quand les conditions aux limites sont purement cinétiques, la solution des problèmes revient à chercher une solution de (1') qui satisfasse aux conditions aux limites. L'équation (3') fournit ensuite la pression. On détermine la fonction arbitraire  $F(t)$  par les conditions initiales.

**89. Mouvements stationnaires.** — Le mouvement est dit *stationnaire* quand  $u, v, w$  ne sont fonction que de  $x, y, z$ . Tout élément qui passe en un point y prend une vitesse  $u, v, w$  de grandeur et de direction invariables. Les trajectoires de forme invariable des particules s'appellent *lignes de courant*.

S'il existe un potentiel des vitesses, on a évidemment :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad \int \frac{dp}{\rho} + V + \frac{U^2}{2} = \text{Constante.} \quad (3'')$$

Mais cette équation n'implique plus l'existence d'un potentiel des vitesses, *pourvu qu'on l'applique à un tube de courant*.

Soit en effet  $s$  une variable comptée le long de la ligne de courant. On a :

$$u = U \frac{dx}{ds}, \quad v = U \frac{dy}{ds}, \quad w = U \frac{dz}{ds}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Substituant dans (2), il vient :

$$U \left[ \frac{du}{dx} \frac{dx}{ds} + \frac{dv}{dy} \frac{dy}{ds} + \frac{dw}{dz} \frac{dz}{ds} \right] = U \frac{du}{ds} = \frac{X}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx},$$

et deux autres analogues.

Multipliant respectivement par  $\frac{dx}{ds}$ ,  $\frac{dy}{ds}$ ,  $\frac{dz}{ds}$ , additionnant, il vient l'équation (3'').

Appliquons-la au cas d'un liquide pesant *incompressible*; pour la pesanteur le potentiel  $V$  est de la forme  $gz$  (au signe près) : nous retrouvons *avec d'autres notations* le théorème de Bernoulli (§ 53).

L'équation (3'') (appliquée à tous les points d'un tube de courant, s'il n'y a pas un potentiel des vitesses; appliquée à tous les points du milieu, s'il existe un tel potentiel) prouve que *la pression est, toutes choses égales d'ailleurs, moindre là où la vitesse est plus grande*. C'est bien évident *a priori*, puisque l'accroissement de vitesse le long du tube de courant est précisément dû à la diminution de pression.

Par exemple, on fait écouler un liquide par un ajutage *horizontal* qui va se rétrécissant vers le dehors; le potentiel des forces  $V$  reste constant le long du tube. Il est clair que la vitesse croît, puisque la section du tube diminue; on montre aisément la diminution de pression correspondante en branchant des tubes verticaux sur l'ajutage. Cette diminution de pression ne correspond pas à un travail de frottement, mais à l'accroissement de l'énergie cinétique.

## 90. Théorie de la houle. Ondes oscillantes en eau profonde.

— Voici une très intéressante application des équations précédentes.

Considérons un milieu liquide *incompressible* et indéfini. Le mouvement *que nous allons démontrer possible* (quitte ensuite à chercher à quel phénomène il correspond) est *par hypothèse* identique dans tous les plans parallèles au plan  $xy$ ;  $u$  et  $v$  sont indépendants de  $z$ . On suppose de plus identiquement  $w = 0$ .

Prenons l'axe des  $x$  horizontal, l'axe des  $y$  vertical et dirigé vers le bas.

Les équations générales à satisfaire sont, en admettant l'existence

d'un potentiel des vitesses, réduisant les forces à la pesanteur, et négligeant comme première approximation les carrés et les produits des vitesses et des déplacements :

$$\Delta^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{p}{\rho} = F(t) + gy - \frac{\partial\Phi}{\partial t}.$$

On vérifie d'abord aisément que

$$\Phi = Ae^{-ny} \cos(mt - nx) \tag{1}$$

est une solution de l'équation  $\Delta^2\Phi = 0$ .

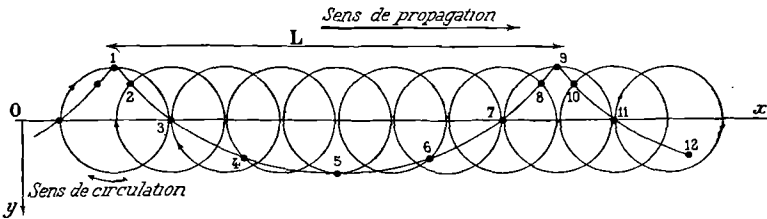


Fig. 43.

Transportant dans la seconde équation, il vient :

$$\frac{p}{\rho} = F(t) + gy + mAe^{-ny} \sin(mt - nx). \tag{2}$$

La forme de la surface libre est donnée par la condition  $p = C^te$  (§ 87) :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

D'ailleurs,  $F(t)$  est une fonction arbitraire du temps; la suite du calcul montre que nous pouvons la supposer constante sans contradiction. Substituant dans l'équation (3) la valeur de  $p$ , il reste simplement la condition  $m^2 = gn$ .

Les vitesses au point  $x, y$  ont pour composantes :

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = nAe^{-ny} \sin(mt - nx), \quad v = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -nAe^{-ny} \cos(mt - nx).$$

Pour concrétiser le phénomène, nous allons substituer à ce mouvement un mouvement peu différent. Strictement  $u$  et  $v$  sont les vitesses en un point fixe  $x, y$ ; supposons qu'elles représentent les vitesses d'une particule déterminée se déplaçant au voisinage d'un point fixe.

Le mouvement est :

$$\xi = x_1 - \frac{nA}{m} e^{-ny_1} \cos(mt - nx_1), \quad \eta = y_1 - \frac{nA}{m} e^{-ny_1} \sin(mt - nx_1).$$

Chaque particule décrit donc un cercle de centre  $x_1, y_1$ , de rayon

$$R = \frac{nA}{m} e^{-ny_1},$$

avec une vitesse uniforme

$$nAe^{-ny_1} = mR = \frac{2\pi R}{\tau}.$$

La figure représente au même instant les positions des particules qui correspondent au même  $y_1$  et à une série croissante de valeurs de  $x_1$ .

Nous reconnaissons *la houle régulière*. La distance verticale entre la crête d'une vague et le creux, ce qu'on appelle *la hauteur de la houle*, est égale au diamètre de l'orbite des particules à la surface. Chaque particule se meut en avant quand elle est au sommet d'une vague, en arrière quand elle est dans le creux. A mesure que  $x_1$  augmente, la particule se décale *en arrière* sur son orbite.

Cherchons la vitesse  $V$  de propagation du phénomène en fonction de la longueur d'onde  $L$  et de la période  $\tau$ , considérée soit comme la période de rotation sur l'orbite, soit comme la période définie par la propagation. Il faut poser :

$$mt - nx = \frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2\pi x}{L}, \quad \tau = \frac{2\pi}{m}, \quad L = \frac{2\pi}{n}.$$

Les conditions  $m^2 = gn$  et  $L = V\tau$  donnent :

$$2\pi L = g\tau^2, \quad 2\pi V^2 = gL.$$

La vitesse  $V$  de propagation varie comme  $\sqrt{L}$ . Pour fixer les idées, on a par exemple  $L = 120$  mètres;  $\tau = 8^s,8$  et  $V = 13^m,7$  à la seconde (§ 32).

Si l'eau n'est pas très profonde, on trouve des trajectoires elliptiques; l'axe vertical, égal à l'axe horizontal à la surface, diminue plus vite que lui quand on s'approche du fond.

La forme de la surface libre est une cycloïde *raccourcie*, obtenue en faisant rouler sur une droite un cercle de rayon  $R_1 = L : 2\pi$ . Le point qui décrit la cycloïde est à une distance  $R$  du centre.

Il est facile de montrer que l'action de la pesanteur sur une particule et la force centrifuge due à son mouvement de rotation ont bien une résultante normale à cette surface libre.

En effet, considérons les phénomènes au temps  $t = 0$ , et soit  $y_1 = 0$  la position des centres des orbites pour la surface libre. Les équations de cette surface et de sa tangente sont :

$$\begin{aligned} \xi &= x_1 - R \cos nx_1, & \eta &= R \sin nx_1, \\ \frac{d\xi}{dx_1} &= 1 + nR \sin nx_1, & \frac{d\eta}{dx_1} &= nR \cos nx_1. \end{aligned}$$

La résultante des actions sur une particule est :

$$X = -m^2 R \cos nx_1, \quad Y = g + m^2 R \sin nx_1.$$

Grâce à la condition  $m^2 = gn$ , il vient :

$$X \frac{d\zeta}{dx_1} + Y \frac{d\eta}{dx_1} = 0. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

**91. Conséquences de la dépendance entre la vitesse de propagation et la longueur d'onde (Rayleigh).** — Lorsqu'un groupe d'ondes se propage en eau tranquille, sa vitesse est moindre que celle des ondes qui le composent. Celles-ci ont l'air de s'avancer dans le groupe; elles s'évanouissent lorsqu'elles approchent de son front. Il est facile de montrer dans un cas particulier que ce phénomène tient à ce que la vitesse est fonction de la longueur d'onde.

Soit deux trains d'ondes de même amplitude, mais de longueurs d'onde peu différentes se propageant dans la même direction. Le mouvement résultant est :

$$\begin{aligned} y &= \cos 2\pi (mt - nx) + \cos 2\pi (m't - n'x) \\ &= 2 \cos \pi \{ (m - m')t - (n - n')x \} \cos \pi \{ (m + m')t - (n + n')x \}. \end{aligned}$$

Si  $\Delta m = m - m'$  est petit, le mouvement résultant (*groupe d'ondes*) peut être assimilé à un mouvement

$$Y \cos \pi \{ (m + m')t - (n + n')x \},$$

presque identique à l'un ou l'autre des mouvements vibratoires composants, à la différence près que son amplitude  $Y$  varie lentement dans l'espace et dans le temps.

Pour un temps donné, l'amplitude varie de 0 à 2. La période *en longueur*, c'est-à-dire la longueur d'onde  $\lambda_1$  du phénomène est  $2 : \Delta n$ ; nous verrons à un instant donné des maximums successifs séparés par cette distance et comprenant des minimums. Cet ensemble forme le *groupe*. Pour un point donné, la période *en temps*  $\tau_1$  est  $2 : \Delta m$ . Donc, ces maximums ou minimums se déplacent avec une vitesse  $V_1$  :

$$V_1 = \frac{\lambda_1}{\tau_1} = \frac{\Delta m}{\Delta n}.$$

Soit  $V = KL^p$ , où  $L$  est la longueur d'une onde simple,  $p$  et  $K$  des constantes; on a :

$$V_1 = \lim \frac{\Delta m}{\Delta n} = \frac{d(1 : \tau)}{d(1 : L)} = \frac{d(V : L)}{d(1 : L)} = (1 - p)V.$$

Pour les ondes en eau profonde :

$$p = \frac{1}{2}, \quad V = 2V_1.$$

La vitesse de chaque onde est deux fois plus grande que la vitesse du groupe; donc les ondes individuelles doivent s'avancer dans le groupe.

92. **Onde solitaire ou de translation.** — Si l'épaisseur du liquide devient relativement faible, il se produit un mouvement obéissant à d'autres lois. L'expérience a montré que le tirage d'un bateau dans un canal de section rectangulaire et de profondeur  $h$  est particulièrement facile pour une vitesse donnée qui dépend de la profondeur.

*C'est la vitesse de propagation de l'onde ou de la protubérance produite par le passage du bateau.*

Pour la calculer, nous admettrons que toutes les particules d'une même section droite du canal sont animées à chaque instant du même mouvement horizontal. Nous appellerons  $\xi$  le déplacement pour les points d'une section repérée par l'abscisse  $x$ . Nous admettrons de plus que le mouvement vertical est toujours très faible; nous appellerons  $\eta$  la hauteur de la protubérance au point  $x$ .

Du fait de cette protubérance, la pression croît de la quantité constante  $g\rho\eta$  dans toute la section droite  $x$ . Considérons un petit élément de hauteur  $dy$ . La force horizontale est augmentée sur sa face d'abscisse  $x$  de  $g\rho\eta dy$ ; sur sa face d'abscisse  $x + dx$ , elle est augmentée de  $g\rho(\eta + \frac{\partial\eta}{\partial x} dx) dy$ ; par conséquent, le mouvement horizontal du petit élément est défini par l'équation

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (1)$$

Mais si la protubérance  $\eta$  se fait, c'est que dans la tranche limitée par les abscisses  $x$  et  $x + dx$ , il entre plus de liquide qu'il n'en sort. A travers la tranche d'abscisse  $x$ , il passe le volume  $h \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t}$ ; à travers la tranche d'abscisse  $x + dx$ , il passe le volume

$$h \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} dx \right).$$

De sorte que l'on a :  $-\frac{\partial \eta}{\partial t} = h \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t}$ ,

ou en choisissant convenablement la constante d'intégration :

$$-\eta = h \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

L'équation (1) devient :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (1')$$

Le déplacement  $\xi$  se propage donc avec une vitesse  $V = \sqrt{gh}$ , constante pour une profondeur  $h$  donnée, mais qui dépend de cette profondeur. Si, par exemple, la profondeur du canal est  $h = 3$  mètres, la vitesse de propagation du déplacement  $\xi$  est  $V = 5^m,42$  par

seconde, soit 19km,5 à l'heure. Pour  $h = 2$  mètres,  $V = 4m,43$  par seconde, soit 16 kilomètres à l'heure.

Les deux cas que nous venons de traiter (§ 90 et 92) rentrent dans une formule plus générale qui convient à une profondeur ni très petite, ni très grande.

**93. Influence de la tension superficielle. Rides à la surface d'un liquide.** — Admettons que la courbure de la surface libre  $\eta = f(x)$  reste toujours petite. L'inverse du rayon de courbure de la section normale aux rides peut être exprimé à chaque instant par la dérivée seconde  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ . Puisque la surface reste cylindrique, l'autre rayon de courbure est infini. Au point de la surface d'abscisse  $x$ , il naît donc une pression  $A \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ , due à la tension superficielle  $A$ , et qui s'ajoute à la pression hydrostatique proportionnelle à  $\eta$ .

Reprenant nos raisonnements, remplaçant  $g\varphi\eta$  par  $g\varphi\eta + A \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ , il vient comme nouvelle équation de condition :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{A}{\rho} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = gh \frac{\partial_u^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{Ah}{\rho} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}.$$

Cette équation admet comme intégrale le mouvement

$$\zeta = B \sin 2\pi \left( \frac{t}{\tau} - \frac{x}{L} \right),$$

avec la condition :

$$V = L : \tau = \sqrt{gh} \sqrt{1 + \frac{4\pi^2 A}{g\rho L^2}} = V_0 \sqrt{1 + \frac{4\pi^2 A}{g\rho L^2}}.$$

Si la longueur d'onde  $L$  est suffisamment petite, le terme dû à la pesanteur est négligeable; le phénomène est produit par la tension capillaire seule. Pour étudier ces rides, on fait réfléchir la lumière à leur surface et on les observe avec la méthode stroboscopique. Les expériences de Cours avec une surface de mercure périodiquement frappée par un trembleur, se rapportent au phénomène ici étudié.

Nous avons traité le problème en supposant le vase peu profond; on pourrait supposer une profondeur quelconque. En particulier, pour une profondeur infinie, il faudrait au § 90 modifier la formule (2) donnant la pression à la surface, en introduisant l'effet de la courbure. Nous n'insisterons pas; le résultat est le même :

$$V = V_0 \sqrt{1 + \frac{4\pi^2 A}{g\rho L^2}} = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}} \sqrt{1 + \frac{4\pi^2 A}{g\rho L^2}}.$$

### Petites oscillations.

**94. Simplification des équations.** — Si le fluide est animé d'un mouvement oscillatoire de très petite amplitude, on peut négliger les carrés et les produits des vitesses et de leurs dérivées partielles. Les équations générales se réduisent à :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{X}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

et deux autres pour  $v$  et  $w$ .

L'équation de continuité devient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0,$$

car la densité peut être considérée comme ayant sa valeur moyenne  $\rho_0$  dans les termes où ses variations sont multipliées par  $u$ ,  $v$ ,  $w$  ou leurs dérivées.

Les déplacements étant très petits, on peut considérer arbitrairement  $u$ ,  $v$ ,  $w$  comme les vitesses *en un point fixe* ou les vitesses *d'une particule déterminée*; les deux méthodes de repérage ne se distinguent plus.

Enfin, on peut toujours admettre qu'il existe un potentiel des vitesses  $\Phi$ .

L'équation de continuité devient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \Delta^2 \Phi = 0.$$

Les équations deviennent alors simplement (§ 88), en négligeant l'action des forces extérieures :

$$\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -p + F(t).$$

On peut sans contradiction considérer  $F(t)$  comme une constante, égale par exemple à la pression moyenne  $p_0$ . Ecrivons  $p - p_0 = \delta p$ ,

il vient en définitive :  $\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\delta p$ . (1)

**95. Application à une masse gazeuse se dilatant adiabatiquement.** — Appelons  $\gamma$  le rapport des chaleurs spécifiques. On a pour loi de la détente adiabatique :

$$p\rho^{-\gamma} = p_0\rho_0^{-\gamma}, \quad \delta p = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \cdot \delta \rho = V^2 \delta \rho,$$



avec les approximations admises et suivant la notation du § 67. L'équation (1) du paragraphe précédent devient :

$$\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -V^2 \delta \rho,$$

qui, combinée avec l'équation de continuité, fournit :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = V^2 \Delta^2 \Phi, \quad (1)$$

en remarquant que d'après sa définition

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta \rho = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Telle est l'équation unique du mouvement vibratoire d'une masse gazeuse quelconque.

Nous retrouvons immédiatement les cas particuliers traités longuement au chapitre V. Il faut seulement observer que  $u$ ,  $v$ ,  $w$  représentent des déplacements au chapitre V et des vitesses dans celui-ci. Grâce à la petitesse des déplacements, il faut donc assimiler les  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial t}$  du chapitre V avec les  $u$ ,  $v$ ,  $w$  actuels.

*Ondes planes.* — Posons  $\Phi = Vf(Vt + x) + VF(Vt - x)$ .  $\Phi$  satisfait à l'équation (1); il est évident qu'on retrouve les ondes planes que nous avons étudiées aux § 67 et suivants.

*Ondes sphériques.* — Cherchons ce que devient l'équation de continuité du § 94, lorsque nous imaginons le déplacement se faisant uniquement suivant le rayon. La vitesse radiale est  $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ . La quantité de matière qui passe à travers la sphère de rayon  $r$  est :

$$4\pi r^2 \rho \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Égalons les deux expressions de l'accroissement de la quantité de matière entre les sphères de rayon  $r$  et  $r + dr$  :

$$-4\pi \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \rho \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 4\pi r^2 \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Tenant compte des approximations admises, il reste :

$$-2r\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r} - r^2 \rho_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = -r^2 \rho_0 \frac{\partial^2 (\Phi r)}{\partial r^2} = r^2 \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Tirant  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  de l'équation générale

$$\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -V^2 \delta \rho, \quad \text{ou} \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -V^2 \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

divisant les deux membres par  $\rho_0 r$ , on trouve enfin :

$$\frac{\partial^2(r\Phi)}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2(r\Phi)}{\partial r^2},$$

équation identique à celle qui régit les ondes planes. On y satisfait en posant :

$$\Phi = - \frac{VF'(Vt - r)}{r}.$$

On retrouve ainsi les résultats des § 78 et suivants; en particulier, la vitesse radiale (notée  $\frac{\partial u}{\partial t}$  au § 78) est :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{V}{r^2} F'(Vt - r) + \frac{V}{r} F''(Vt - r).$$

Il n'entre pas dans le plan de cet ouvrage de pousser plus loin l'étude des cas particuliers. En prenant des expressions convenables pour le potentiel des vitesses, on rend plus conforme à l'expérience la théorie des tuyaux sonores; par exemple, on calcule les perturbations à l'extrémité ouverte (§ 83).

### Tourbillons.

**96. Mouvement le plus général d'un élément d'un corps.** — Soit  $u, v, w$  les composantes de la vitesse en un point O d'un corps de coordonnées  $x, y, z$ . Au voisinage de ce point, les vitesses sont données par les relations

$$u' = u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z, \quad (1)$$

et deux autres semblables. Nous devons considérer les quantités  $u, v, w$  et leurs dérivées comme des constantes, pourvu que  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  qui sont par rapport au point O les coordonnées du point considéré restent suffisamment petits.

Posons :

$$\begin{aligned} \delta_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \delta_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \delta_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & (2) \\ g_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), & g_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), & g_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \rho_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), & \rho_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), & \rho_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Nous pouvons mettre les équations (1) sous la forme :

$$\begin{aligned} u' &= u + (\delta_x \Delta x + g_x \Delta y + g_y \Delta z) + (\rho_y \Delta z - \rho_z \Delta y), \\ v' &= v + (g_x \Delta x + \delta_y \Delta y + g_z \Delta z) + (\rho_z \Delta x - \rho_x \Delta z), \\ w' &= w + (g_y \Delta x + g_z \Delta y + \delta_z \Delta z) + (\rho_x \Delta y - \rho_y \Delta x). \end{aligned} \quad (3)$$

On peut, d'après ces équations, considérer le déplacement d'un petit élément comme composé de trois parties.

Posons :

$$u' = u + u_1 + u_2, \quad v' = v + v_1 + v_2, \quad w' = w + w_1 + w_2.$$

1<sup>o</sup> La première partie correspond aux premiers termes; le mouvement correspondant a pour composantes  $u, v, w$ . C'est pendant un temps  $dt$  un mouvement de *translation d'ensemble* de l'élément.

Considérons donc le point  $x, y, z$  comme fixe, c'est-à-dire laissons de côté cette translation d'ensemble.

2<sup>o</sup> La seconde partie comprend les premières parenthèses; le déplacement est :

$$\begin{aligned} u_1 &= \delta_x \Delta x + g_z \Delta y + g_y \Delta z, \\ v_1 &= g_z \Delta x + \delta_y \Delta y + g_x \Delta z, \\ w_1 &= g_y \Delta x + g_x \Delta y + \delta_z \Delta z. \end{aligned} \tag{4}$$

Considérons la quadrique :

$$\begin{aligned} f(\Delta x, \Delta y, \Delta z) &= \delta_x \overline{\Delta x^2} + \delta_y \overline{\Delta y^2} + \delta_z \overline{\Delta z^2} + 2g_x \Delta y \Delta z + 2g_y \Delta z \Delta x \\ &\quad + 2g_z \Delta x \Delta y = C^{te} \end{aligned} \tag{5}$$

passant par le point considéré de coordonnées  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ .

Un déplacement  $u_1 dt, v_1 dt, w_1 dt$  qui s'effectue suivant la normale à partir du point  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ , satisfait aux équations :

$$\frac{u_1 dt}{\left(\frac{\partial f}{\partial \Delta x}\right)} = \frac{v_1 dt}{\left(\frac{\partial f}{\partial \Delta y}\right)} = \frac{w_1 dt}{\left(\frac{\partial f}{\partial \Delta z}\right)}.$$

C'est précisément le second des mouvements en lesquels se décompose le mouvement le plus général. Si nous rapportons la quadrique à ses axes de symétrie, elle prend la forme :

$$\delta'_x \overline{\Delta x'^2} + \delta'_y \overline{\Delta y'^2} + \delta'_z \overline{\Delta z'^2} = C^{te}. \tag{5'}$$

Les équations (4) deviennent par conséquent :

$$u'_1 = \delta'_x \Delta x', \quad u'_2 = \delta'_y \Delta y', \quad u'_3 = \delta'_z \Delta z'.$$

La *déformation* se ramène donc à une dilatation dans le rapport  $\delta'_x$  de toutes les lignes parallèles à l'axe des  $x'$  de la quadrique (5'), à une dilatation dans le rapport  $\delta'_y$  de toutes les lignes parallèles à l'axe des  $y'$ , à une dilatation dans le rapport  $\delta'_z$  de toutes les lignes parallèles à l'axe des  $z'$ . Les axes de la quadrique sont les axes principaux de la déformation.

3<sup>o</sup> Enfin considérons le troisième mouvement :

$$u_2 = \rho_y \Delta z - \rho_z \Delta y, \quad v_2 = \rho_z \Delta x - \rho_x \Delta z, \quad w_2 = \rho_x \Delta y - \rho_y \Delta x.$$

Il représente une *rotation* de l'élément tournant en bloc autour

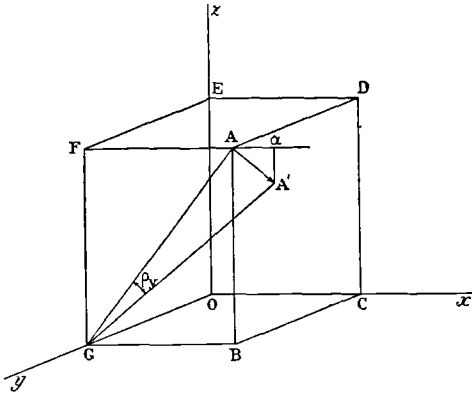


Fig. 11.

d'un axe instantané passant par le point  $x, y, z$ . Les rotations composantes, considérées comme des vecteurs, sont  $\rho_x, \rho_y, \rho_z$ . Elles sont comptées positivement quand elles font tourner dans le sens  $yOz, zOx, xOy$ .

Par exemple, cherchons la variation de l' $x$  du point A sous l'influence d'une rotation  $\rho_y$ . C'est la projection  $Ax$  du déplacement  $\overline{AA'} = \overline{GA} \cdot \rho_y$ .

Or on a :

$$\overline{Ax} = \overline{AA'} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = AB \cdot \rho_y = \rho_y \Delta z.$$

On trouverait de même que la variation de l' $x$  du point A sous l'influence d'une rotation  $\rho_z$  est  $-\rho_z \Delta y$ ; d'où la variation totale  $u_x = \rho_y \Delta z - \rho_z \Delta y$ . De même pour les autres formules.

**97. Interprétation géométrique de l'existence d'un potentiel des vitesses.** — Dire qu'il existe un potentiel des vitesses, c'est dire qu'à chaque instant  $u dx + v dy + w dz = d\Phi$  est une différentielle exacte; c'est dire que les rotations  $\rho_x, \rho_y, \rho_z$  sont nulles. Le mouvement est *irrotationnel*. Il n'y a pas rotation de l'élément de volume autour d'un axe instantané passant par un de ses points.

**98. Tourbillons.** — Supposons que les rotations  $\rho_x, \rho_y, \rho_z$  ne soient pas nulles. A chaque instant, chaque élément du liquide pour lequel le mouvement n'est pas *irrotationnel*, tourne autour d'un axe instantané passant par lui avec une vitesse angulaire  $\omega = \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2}$ .

Une ligne menée de manière à être en chacun de ses points tangente à l'axe instantané correspondant à ce point, est une *ligne de tourbillon*. On appelle *tube de tourbillon*, ou plus simplement *tourbillon*, le cylindre formé par l'ensemble des lignes de tourbillon qui s'appuient sur une petite courbe fermée.

D'après la définition des rotations  $\rho_x, \rho_y, \rho_z$ , on a identiquement :

$$\frac{\partial \rho_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho_z}{\partial z} = 0.$$

Il résulte de là que le flux du vecteur  $\omega$  dont les composantes sont

$\rho_x, \rho_y, \rho_z$ , à travers une surface fermée quelconque, est nul; on peut poser :

$$\iiint \left( \frac{\partial \rho_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint (\alpha \rho_x + \beta \rho_y + \gamma \rho_z) dS = 0 :$$

la première intégrale est étendue à tout le volume et est identiquement nulle; la seconde représente le flux du vecteur à travers la surface;  $\alpha, \beta, \gamma$  sont les cosinus directeurs de sa normale (le lecteur se reportera au début de la troisième partie de ce Cours).

Il résulte de là que le flux du vecteur  $\omega$  est le même sur toutes les sections droites d'un tube de tourbillon, puisque par la définition même du tube le flux latéral du vecteur  $\omega$  est nul (voir des théorèmes analogues en Electricité et en Magnétisme). Si donc  $\omega_1, \omega_2$  sont les vitesses angulaires pour deux sections droites dont les aires sont

$\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , on a :  $\omega_1 \sigma_1 = \omega_2 \sigma_2 = \text{Constante}$ .

Ce produit s'appelle *intensité du tourbillon*.

On appelle *circulation* l'intégrale  $\int u dx + v dy + w dz$  le long d'une courbe. Nous aurons l'occasion de démontrer le théorème suivant :

$$\int u dx + v dy + w dz = 2 \iint (\alpha \rho_x + \beta \rho_y + \gamma \rho_z) dS;$$

la première intégrale est prise le long d'une courbe fermée, la seconde le long d'une surface limitée par cette courbe.

Si le mouvement est irrotationnel en tout point de la surface d'intégration, la *circulation* est nulle.

Dans le cas où il existe des tourbillons, la circulation pour un circuit quelconque est égale à deux fois la somme des intensités de tous les tourbillons qu'il embrasse.

Nous retrouverons en Electricité et Magnétisme des théorèmes identiques; nous verrons que le travail magnétique le long d'une courbe fermée est nul, s'il ne passe à l'intérieur aucun courant électrique; il est généralement proportionnel à la somme des intensités des courants qui passent à son travers. L'intensité du courant joue le même rôle que l'intensité du tourbillon.

**99. Tourbillons rectilignes.** — Supposons que le liquide incompressible tourne autour de l'axe des  $z$  et qu'il existe un potentiel des vitesses. Soit  $\omega$  la vitesse angulaire à la distance  $r$  de l'axe.

$$u = -\omega y, \quad v = \omega x, \quad \rho = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega + r \frac{d\omega}{dr}.$$

La condition  $\rho = 0$  donne  $\omega r^2 = \text{Constante}$ . La vitesse angulaire est

donc en raison inverse du carré de la distance à l'axe de rotation, la vitesse linéaire  $r\omega$  en raison inverse de cette distance.

Le potentiel a pour expression :

$$\Phi = K\alpha = K \arctg \frac{y}{x}.$$

En effet, la vitesse suivant OA est nulle et l'on a bien

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0.$$

Sa vitesse linéaire suivant AA' est :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial(r\alpha)} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = \frac{K}{r} = \omega r;$$

$$\text{d'où} \quad \omega = K : r^2,$$

qui est l'expression trouvée plus haut.

Donc il y a partout un potentiel des vitesses, *sauf à l'origine des coordonnées, où  $\rho$  ne s'annule pas.*

La pression est donnée par l'équation (3') du § 88, qui se simplifie

$$\text{et devient :} \quad \frac{K^2}{2r^2} + \frac{p}{\rho} = \text{Constante},$$

puisque le mouvement est permanent et qu'il n'y a pas de forces extérieures.

Nous venons de définir un *tourbillon* dans le cas le plus simple. Il y a potentiel des vitesses, sauf précisément sur l'axe de rotation.

L'intensité  $i$  du tourbillon est le produit  $i = \pi r^2 \cdot \omega = \pi K$ . La circulation sur un cercle de rayon  $r$  est  $2\pi r \cdot r\omega = 2\pi K = 2i$ ; elle est la même pour une courbe quelconque entourant le tourbillon.

Les formules précédentes montrent une identité parfaite entre les lignes de courant du tourbillon et les lignes de force d'un courant électrique rectiligne indéfini. C'est la même expression du potentiel.

Supposons deux tourbillons parallèles rectilignes, d'intensité  $i_1$  et  $i_2$  et dont les traces, à un moment donné, sont  $O_1O_2$ ; il est facile de montrer qu'un point C de la droite  $O_1$  et  $O_2$  doit rester fixe. Il est à des distances  $r_1$  de  $O_1$ ,  $r_2$  de  $O_2$  telles que

$$\frac{i_1}{r_1} = \frac{i_2}{r_2}.$$

Si  $i_1$  et  $i_2$  sont de même signe, le point C est entre les points  $O_1$  et  $O_2$ ; si  $i_1$  et  $i_2$  sont de signes contraires, le point C est en dehors de l'intervalle  $O_1O_2$  et du côté du tourbillon le plus faible. Les tour-

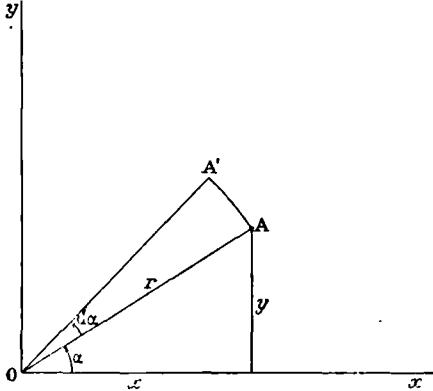


Fig. 45.

billons restent à la même distance; leur ensemble tourne avec une vitesse constante autour d'un axe parallèle à chacun d'eux et passant par le point C. La vitesse angulaire de cette rotation est :

$$\frac{i_1 + i_2}{\pi \cdot O_1O_2^2}.$$

Si  $i_1 = i_2$ , le centre C est renvoyé à l'infini; le système des deux tourbillons se déplace perpendiculairement à la droite  $O_1O_2$  avec une vitesse  $i_1 : \pi \cdot O_1O_2$ . En tout point du plan normal à la ligne des centres  $O_1O_2$  en son milieu, le mouvement est parallèle à ce plan. On peut donc installer un plan réel à sa place, les conditions aux limites sur ce plan seront satisfaites. Donc quand un tourbillon rectiligne indéfini se trouve à une distance  $d$  d'un plan fixe parallèle, il se déplace parallèlement à lui avec une vitesse  $i_1 : 2\pi d$ .

On traite sans plus de difficulté le cas de plusieurs tourbillons rectilignes; en les associant convenablement, on résout une série de problèmes où interviennent comme limites des plans fixes ou des cylindres.

**100. Tourbillons circulaires.** — L'analogie avec les courants se maintient.

La ligne de tourbillon est un cercle de diamètre  $O_1O_2$ , normal à la droite ACB. Les lignes de courant à un instant donné sont représentées dans la figure 46; elles sont identiques aux lignes de force d'un courant circulaire.

Un tourbillon isolé se meut, sans changement notable de dimensions, parallèlement à son axe, avec une vitesse constante dans le sens de la vitesse du liquide sur l'axe.

Pour obtenir un tourbillon circulaire, on emploie une caisse dans la face avant de laquelle est une ouverture circulaire à bords nets. La face opposée est remplacée par une étoffe lâche. On produit à l'intérieur une fumée en suspendant des chiffons mouillés les uns d'ammoniaque, les autres d'acide chlorhydrique. Pour produire un tourbillon, on tire en arrière le fond, puis on le renvoie en avant d'un coup sec.

*Système de tourbillons circulaires de même axe AB.* — Les mouvements sur chaque tourbillon sont dus, partie à l'action du tourbillon lui-même, partie à l'action des autres.

Si deux tourbillons  $T_1$  et  $T_2$  de même axe ont le même sens de rotation, ils avancent dans la même direction. Le rayon de celui qui est avant  $T_1$  augmente, le rayon de celui qui est derrière  $T_2$  diminue. Si le rayon de  $T_1$  devient plus grand que le rayon de  $T_2$ , le mouvement sur  $T_1$  est retardé; il est avancé sur  $T_2$ . Il peut arriver que  $T_2$  passe à travers  $T_1$ . Mais les rôles sont alors renversés. Le tourbillon  $T_2$ , maintenant en avant, voit son rayon croître et est retardé; le

tourbillon  $T_1$  voit son rayon décroître et est avancé. C'est le tour de  $T_1$  de passer dans  $T_2$ .

Si les sens de rotation sont inverses et tels que les anneaux s'approchent l'un de l'autre, les rayons des deux tourbillons augmentent.

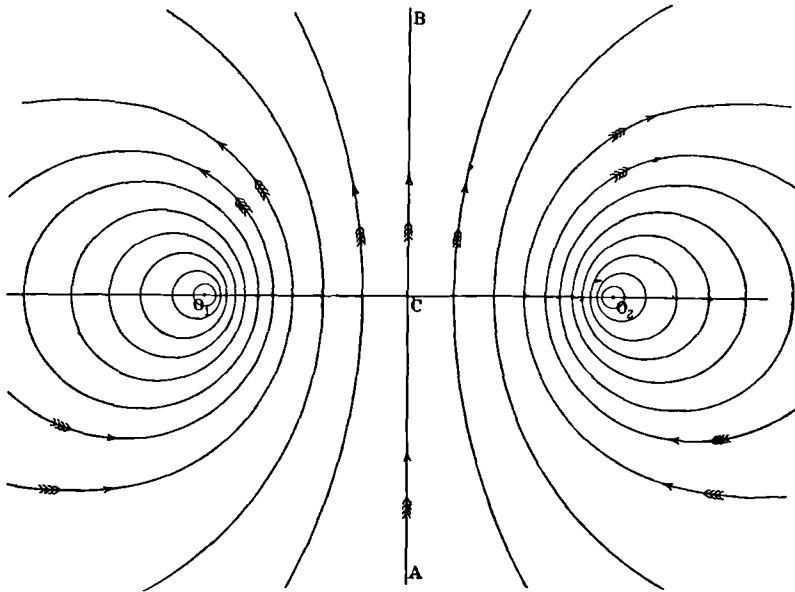


Fig. 46.

Nous n'insisterons pas davantage. Avec la caisse que nous avons décrite et dont on modifie l'ouverture, on peut obtenir non seulement des systèmes de tourbillons circulaires coaxiaux, mais aussi des tourbillons elliptiques et étudier leurs déformations.

Les tourbillons dont nous avons parlé au § 34 admettent comme *ligne de tourbillon* un polygone hexagonal à sommets arrondis.



## CHAPITRE VII

### DÉFORMATIONS PARFAITEMENT ÉLASTIQUES DES SOLIDES RÉACTIVITÉ <sup>1</sup>

Nous allons étudier dans ce chapitre les déformations élastiques les plus importantes ; nous en ferons la théorie en utilisant pour chaque cas des hypothèses particulières. Nous procédons comme on a coutume dans les traités de *Résistance des Matériaux*. Le lecteur, familiarisé avec les faits, trouvera dans le chapitre suivant une théorie plus générale qui contient tous les cas particuliers de ce chapitre VII. En suivant l'ordre strictement logique, nous aurions craint de ne pas laisser une idée expérimentale suffisamment nette.

**101. Représentation des déformations. Hystérésis.** — Pour déformer un corps, on applique à ce corps une force ou un système de forces. Pour nous limiter aux cas les plus simples, nous supposons que le système de forces dépend d'une seule variable, la *variable mécanique*, et que les déformations peuvent s'exprimer par une seule quantité, la *variable géométrique*. Cette restriction n'a rien de nécessaire.

Nous pourrions donc représenter à chaque instant une déformation et sa cause par un point sur un plan, une expérience en-

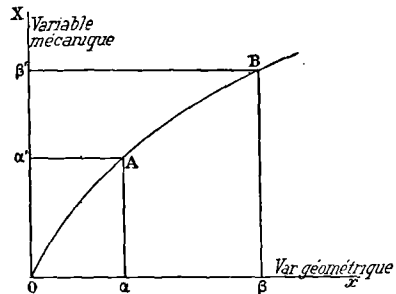


Fig. 47.

tière par une courbe. Nous porterons la variable géométrique en abscisses et la variable mécanique en ordonnées.

<sup>1</sup> Dans ce chapitre nous faisons de nombreux emprunts à un ouvrage (Gratien et Rey, Grenoble, et Gauthier-Villars, Paris) sur l'*Essai des Matériaux*, auquel nous renvoyons les lecteurs désireux de plus amples renseignements.

Les courbes ainsi obtenues ont un *sens de parcours*, c'est le sens dans lequel se déplace le point figuratif de l'expérience; généralement une courbe ne peut être réellement parcourue que dans une direction unique.

Parvenus en un point d'une courbe, changeons le sens de variation de la variable géométrique; nous obtenons une courbe de retour, qui généralement ne se superpose pas à la courbe d'aller. Nous disons alors qu'il y a *hystérésis*, mot fort mal choisi et dont il ne faut pas considérer le sens étymologique.

La conséquence immédiate de l'hystérésis est qu'un parcours effectué entre les mêmes valeurs de la variable géométrique ne va pas sans une absorption ou un dégagement d'énergie.

Quand on prend pour abscisses les déplacements linéaires ou angulaires, pour ordonnées les forces ou les couples, comptés positivement quand on les exerce sur le corps déformé, dans le sens de l'accroissement de la variable géométrique, l'énergie absorbée par le corps sous une forme quelconque dans un parcours ABC est représentée par l'aire  $\alpha ABC\gamma\alpha$ .

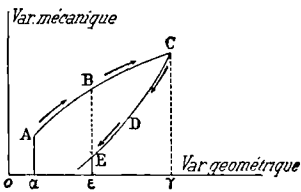


Fig. 48.

Par exemple quand on tord un fil, il faut dépenser du travail qui se retrouve en partie sous forme d'accroissement de l'énergie potentielle, en partie sous forme de chaleur, en partie sous forme de variation de l'énergie interne.

Dans nos conventions, l'énergie est *absorbée* par le corps quand l'aire est à *droite* de l'observateur qui décrit la courbe ABC dans le sens des opérations réelles. L'énergie *restituée* par le corps dans le parcours CDE (fil qui se détord par exemple) a pour mesure l'aire  $\gamma CDE\epsilon\gamma$  qui est à *gauche* de l'observateur. L'énergie *absorbée* dans le parcours ABCDE a pour mesure l'aire  $\alpha ABCDE\epsilon\alpha$ : elle est à *droite* de l'observateur qui décrit le parcours dans le sens des opérations réelles.

Généralement la courbe décrite de gauche à droite est au-dessus de la courbe décrite de droite à gauche qui lui fait suite; la somme des énergies mises en jeu dans tout parcours BCE limité à la même ordonnée BE, correspond à une absorption. Il peut cependant arriver que les courbes présentent la disposition inverse, au moins accidentellement; la somme des énergies mises en jeu dans le parcours limité par une ordonnée, correspond en définitive à une restitution d'énergie par le corps déformé.

**102. Déformations parfaitement élastiques.** — La déformation est *parfaitement élastique* quand la même courbe peut être

arbitrairement parcourue dans les deux sens. Le parcours pour aller de A à B est alors parfaitement déterminé et indépendant de la loi suivant laquelle le point figuratif se déplace en fonction du temps.

Bien entendu, si un arc de courbe correspond à une déformation parfaitement élastique, une portion de cet arc y correspond aussi.

Le parcours aller et retour d'un arc de courbe correspondant à une déformation parfaitement élastique n'entraîne aucune absorption d'énergie ; cela résulte de la définition elle-même : *les courbes correspondant aux déformations élastiques sont sans hystérésis.*

La forme de la courbe OAB (fig. 47) est quelconque à priori.

Cependant *les déformations parfaitement élastiques d'un solide ne constituant qu'un cas limite, étant toujours plus ou moins enchevêtrées d'autres déformations, et devant généralement et en tout cas pour un métal rester très petites pour ne pas trop s'éloigner de leur définition, on n'utilise en pratique de la courbe OAB qu'un arc si petit qu'il est toujours permis de le confondre avec une droite.*

*Pratiquement, une déformation parfaitement élastique est donc, au moins pour un métal, proportionnelle à sa cause.*

C'est la fameuse loi de Hooke dont on voit immédiatement la relativité et le peu d'importance théorique.

**103. Traction d'un cylindre. Module d'Young.** — Nous allons choisir parmi les déformations à peu près parfaitement élastiques les plus importantes.

La plus simple des déformations est l'allongement  $L - L_0$  d'un fil métallique de longueur  $L_0$  et de section  $S$  tiré par un poids  $P$ .

Sous les réserves du § précédent, l'expérience donne

$$P = E \cdot S \frac{L - L_0}{L_0} ;$$

la charge est proportionnelle à la section, à l'allongement relatif, et à un coefficient  $E$  caractéristique de la matière qu'on appelle *module d'élasticité*. La courbe de déformation est une droite; le quotient  $dP : dL$  mesure à un coefficient constant près le module d'élasticité.

Évaluons  $S$  en millimètres carrés,  $P$  en kilogrammes; on a trouvé :

Fer :  $E = 20\,000^k$ ; Cuivre :  $E = 12\,000^k$ ; Argent :  $E = 7\,000^k$ .

Ainsi pour allonger de 1 millimètre 1 mètre de fil de fer ( $\Delta L : L_0 = 0,001$ ), dont le diamètre est 1 millimètre, et dont par conséquent la section est  $0^{\text{mm}^2}78$ , il faut un poids de

$$20\,000 \times 0,001 \times 0,78 = 15^k,5.$$

Pour un fil d'argent, il ne faudrait que  $5^k,5$ .

Bien entendu, si la charge est trop grande, ou bien le fil casse, ou bien il s'allonge d'une manière permanente : nous reviendrons là-dessus plus loin. Les nombres  $E$  ne sont donnés que pour fixer

les idées : ils varient suivant l'échantillon ; les moindres impuretés les modifient considérablement. Il est curieux toutefois de remarquer que l'état physique du métal influe très peu sur leur valeur : ils restent sensiblement les mêmes, que le métal soit recuit ou martelé.

L'exactitude de la loi précédente va d'elle-même si l'on suppose que la tension se répartit uniformément sur tous les éléments de la section droite du cylindre, et que les cylindres élémentaires constituant le cylindre total se déforment, sans que la déformation de l'un intervienne dans la déformation du voisin.

Il semble donc qu'une application convenable des forces extérieures, de la charge dans le cas particulier, soit d'une nécessité primordiale. Cependant il nous est impossible de répartir la charge uniformément dans la section du cylindre : nous sommes bien forcés de saisir les extrémités du cylindre dans deux mâchoires ; l'une est fixe, l'autre supporte le poids. Les déformations au voisinage des mâchoires n'obéissent évidemment pas à la loi précédente. Mais l'expérience prouve que *la loi de distribution des forces extérieures n'intervient plus à quelque distance, et qu'alors automatiquement la déformation devient uniforme sur toute la section droite*. Si donc il s'agit de pièces assez longues par rapport aux dimensions des parties où sont appliquées les forces, on peut utiliser la loi précédente, pourvu qu'on ne tienne pas compte des déformations des extrémités du cylindre.

D'où la technique habituelle ; on trace sur le cylindre tourné deux repères à *quelque distance des bouts*, on charge le cylindre et on détermine la variation de longueur. *Si la déformation est parfaitement élastique, peu importe suivant quelle loi se fait la mise en charge ou la suppression de la charge*. Nous verrons plus loin que la déformation n'étant jamais parfaitement élastique, il est avantageux de procéder par diminution de la charge, pour trouver un module  $E$  qui soit acceptable.

Si dans la mesure du module  $E$  on utilise un fil, les phénomènes sont compliqués du fait de la non rectilinéité initiale du fil. Les premières charges le rectifient en produisant un allongement *plus grand* que si le fil était rectiligne dès le début de l'expérience ; le module apparent  $E'$  est donc trop petit. Si l'on augmente peu à peu la charge, le module apparent croît, passe par un maximum, puis décroît.

La décroissance apparente du module indique que l'on a dépassé la région des déformations à peu près élastiques et que la déformation permanente intervient. Si le fil est d'abord très éloigné de la forme rectiligne, présente de grandes courbures, on peut arriver aux déformations permanentes avant qu'il soit devenu même approximativement rectiligne ; le module apparent, même quand il prend sa valeur maxima, peut être très inférieur au module vrai.

**104. Légitimation de l'emploi du module d'Young pour les métaux.** — L'emploi du module d'Young s'est généralisé pour les métaux, parce qu'on a toujours admis qu'il est constant et indépendant de la grandeur de la déformation supposée parfaitement élastique. De fait, les expériences avec les métaux sont si difficiles et réalisables dans un champ si restreint, qu'on ne sait pas encore ce qu'il en est au juste. En d'autres termes, à supposer qu'on puisse abstraire des autres phénomènes les phénomènes parfaitement élastiques, aucune expérience sûre n'infirme l'hypothèse que la courbe de déformation élastique est une droite.

Il semble d'ailleurs, comme nous l'avons déjà dit, que le module varie peu avec la déformation permanente ou le changement d'état physique; un fil écroui par le passage à la filière et le même fil recuit ont approximativement le même module.

Enfin les déformations élastiques sont si petites, qu'aucune difficulté ne se présente dans la définition même du module; que nous choissions l'une ou l'autre des formules :

$$E = \frac{L_0}{S_0} \cdot \frac{dP}{dL}, \quad E = \frac{L}{S} \cdot \frac{dP}{dL}, \quad E = L \frac{d\left(\frac{P}{S}\right)}{dL},$$

la longueur actuelle  $L$  et la section actuelle  $S$  différant toujours très peu de la longueur initiale  $L_0$  et de la section initiale  $S_0$ , nous trouvons pratiquement des nombres identiques pour le paramètre  $E$ .

L'emploi du module d'Young devient un non-sens quand on sait, d'après la nature du corps déformé, qu'il n'est pas homogène dans toute la section droite, puisque l'explicitation au dénominateur de  $S_0$  est légitimée précisément par cette hypothèse.

**105. Courbe et module de traction pour les corps très extensibles. Caoutchouc.** — Si pour un métal les déformations doivent être extrêmement petites pour rester à peu près parfaitement élastiques, il n'en est plus de même pour certains corps très allongeables comme le caoutchouc. Par exemple, tandis qu'il est rare de trouver un métal s'allongeant de quelques millièmes de sa longueur sans déformation permanente appréciable, le caoutchouc peut s'allonger de plusieurs fois sa longueur primitive et y revenir ensuite très sensiblement. Généralement alors la courbe de traction  $P, L$  définie au § 102 n'est plus une droite.

On peut chercher à définir en un point quelconque  $A$  du plan  $P, L$  un paramètre analogue au module d'Young.

Bien des difficultés se présentent.

Tout d'abord les diverses formules que nous avons énumérées

au § précédent ne sont plus équivalentes. Pour ne rien préjuger, il paraît bon de choisir la définition :

$$E = \frac{L}{S} \frac{\Delta P}{\Delta L}$$

qui ne fait intervenir que les propriétés au point considéré.

Mais il serait tout à fait arbitraire et inutile d'introduire dans cette formule les valeurs de  $L$ ,  $S$ ,  $dP/dL$  tirées d'une courbe de traction quelconque (§ 101), car l'expérience montre que celles-ci dépendent absolument de la manière dont on a effectué les parcours antérieurs à l'arrivée au point  $A$ . Il est plus rationnel de convenir que le module sera déduit de l'inclinaison du petit cycle obtenu en faisant varier la charge entre les valeurs  $P_0$  et  $P_1$  [ $P_1 - P_0 = \Delta P$ ] et répété un grand nombre de fois; ou bien obtenu en faisant varier la longueur entre les valeurs  $L_0$  et  $L_1$  [ $L_1 - L_0 = \Delta L$ ] et répété un grand nombre de fois. Nous reviendrons plus loin sur les raisons qui militent en faveur de cette définition.

**106. Coefficient  $\sigma$  de Poisson.** — Quand un cylindre est allongé par une tension, l'expérience prouve que ses dimensions transversales diminuent, même lorsque la déformation est parfaitement élastique.

On appelle coefficient  $\sigma$  de Poisson le rapport de la diminution de l'unité de longueur dans la section droite à l'allongement de l'unité de longueur dans le sens longitudinal, quand la déformation est parfaitement élastique.

Soient  $V_0$ ,  $L_0$ ,  $D_0$  le volume, la longueur du cylindre et la longueur d'une de ses dimensions transversales (son diamètre si la section est circulaire) quand la tension est nulle; soient  $V$ ,  $L$ ,  $D$  les mêmes grandeurs quand le cylindre est tendu par une charge  $P$ .

Posons  $L : L_0 = \Lambda$ ,  $D : D_0 = \Delta$ ,  $V : V_0 = \Phi$ ;

le coefficient  $\sigma$  de Poisson est défini par l'équation :

$$\sigma = \frac{D_0 - D}{L - L_0} \cdot \frac{L_0}{D_0} = \frac{1 - \Delta}{\Lambda - 1} \quad (1)$$

$$\Phi = \Lambda \Delta^2 = \Lambda [1 - \sigma (\Lambda - 1)]^2$$

Quand la déformation est petite,  $\Lambda$  est voisin de 1; on peut négliger les termes en  $(\Lambda - 1)^2$ . Il vient alors :

$$\Phi - 1 = (1 - 2\sigma)(\Lambda - 1). \quad (2)$$

La densité du cylindre allongé varie proportionnellement à  $\Lambda - 1$ ; elle diminue par l'allongement quand  $\sigma$  est compris entre 0 et 0,5; elle augmente pour toutes les valeurs de  $\sigma$  supérieures à 0,5.

L'expérience montre que pour les substances isotropes telles que

le verre, les métaux,...  $\sigma$  est compris entre 0 et 0,50; la densité diminue toujours par l'allongement.

La valeur numérique de  $\sigma$  varie d'ailleurs d'un corps à l'autre et même d'un échantillon à l'autre d'une même matière, suivant les opérations antérieurement imposées (tréfilage, martelage...).

Il est important de ne pas confondre les petites variations de densité dont il vient d'être parlé, avec les variations qui peuvent résulter d'une déformation permanente. Elles n'ont ni même grandeur, ni quelquefois même signe. Les premières dépendent de la déformation actuelle et sont temporaires comme elle; les secondes sont permanentes et résultent du changement d'état physique dû à la déformation permanente, changement qu'on appelle *écrouissage*. Tandis que la compression élastique produit, on peut dire toujours, un accroissement temporaire de densité, il peut arriver que le martelage, le tréfilage,... *diminuent* au contraire la densité d'une manière permanente, si paradoxal que soit le phénomène.

D'ailleurs, c'est un fait très remarquable que les plus grandes déformations permanentes modifient peu la densité.

**107. Définition plus générale du coefficient de Poisson.** — *Indépendamment de toute théorie*, le coefficient  $\sigma$  doit permettre d'exprimer les variations de densité en fonction des allongements. La définition du paragraphe précédent est inacceptable pour les corps très extensibles comme le caoutchouc; il faut la généraliser.

Nous définirons le coefficient  $\sigma$  comme le rapport de la diminution, non plus totale, mais actuelle, de l'unité de longueur dans la section droite, à l'allongement, non plus total, mais actuel, de l'unité de longueur dans le sens longitudinal. Nous écrirons donc :

$$\sigma = - \frac{d\Delta}{\Delta} : \frac{d\Lambda}{\Lambda}. \quad (1')$$

On retrouve la formule (1) quand  $\Delta$  et  $\Lambda$  sont très voisins de l'unité. Lorsque  $\sigma$  est constant, la formule (1') s'intègre et devient :

$$\log \Delta = -\sigma \log \Lambda. \quad (1'')$$

Comme généralement  $\Phi = \Delta^2 \Lambda$ , on trouve, avec la définition plus générale :

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = (1 - 2\sigma) \frac{d\Lambda}{\Lambda} \quad (2'')$$

et lorsque  $\sigma$  est constant :

$$\log \Phi = (1 - 2\sigma) \log \Lambda. \quad (2''')$$

On retrouve la formule (2) quand  $\Lambda$  et par conséquent  $\Phi$  diffèrent peu de l'unité.

Pour le caoutchouc, par exemple,  $\sigma$  est constant et très voisin de 0,50; cela signifie que la densité du caoutchouc ne varie pas sensi-

blement par l'allongement. Les expériences précises montrent cependant que la densité décroît un peu :  $\sigma$  est inférieur à 0,50 d'un ou deux centièmes.

**108. Son rendu par une barre cylindrique libre aux deux bouts et invariablement fixée en son milieu. Mesure du module d'Young.** — Tous les raisonnements que nous avons faits aux § 67 et suivants peuvent être répétés mot pour mot à propos de la propagation d'un ébranlement le long d'une tige cylindrique solide. Pour que le cylindre subisse une *condensation*  $\frac{dL}{L} = \gamma$ , il faut par *unité de section* un accroissement de force égal à  $E\gamma$  (§ 103). La vitesse de propagation de l'ébranlement le long du cylindre est donc

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \text{ou} \quad V = \sqrt{\frac{gE}{\rho}},$$

si on calcule dans le système du kilogrammètre.

Par exemple, nous avons pour le fer  $E = 20\,000$  kilogrammes par millimètre carré ;  $E = 2 \cdot 10^4 \cdot 10^6 = 2 \cdot 10^{10}$  kilogrammes par mètre carré. Le mètre cube de fer pèse 7700 kilogrammes environ.

$$\text{Donc} \quad V = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 2 \cdot 10^{10}}{7700}} = 5100 \text{ mètres.}$$

Ceci posé, tout ce que nous avons dit d'un tuyau ouvert aux deux bouts (§ 148 du Cours de Mathématiques) peut être répété pour une barre cylindrique de longueur  $L$ , invariablement fixée en son milieu.

Il y a ce qu'on appelle un *nœud* au milieu de la barre, là où elle est prise dans un étau et où, par conséquent, le mouvement est nul.

Il y a des *ventres* aux extrémités libres : l'amplitude du mouvement y est maxima et la tension nulle,  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ , ce qui correspond bien aux conditions expérimentales.

La longueur du cylindre vaut une demi-longueur d'onde du son fondamental.

$$\text{On a :} \quad L = \frac{\lambda}{2} = \frac{VT}{2} = \frac{V}{2N}, \quad N = \frac{V}{2L}.$$

La mesure de la hauteur  $N$  du son rendu permet de déterminer  $E$ , car la mesure de  $L$  et de  $\rho$  ne présente pas de difficulté. Mais  $V$  étant généralement très grand, le son est très élevé et la mesure directe de la hauteur impossible.

On procède autrement. On utilise les déplacements de l'une de ses extrémités  $A$  jouant le rôle de piston (on peut coller dessus un disque léger  $A$ ) à créer un système de nœuds et de ventres dans la colonne d'air  $AC$ . Elle est contenue dans un tube de verre (dont le



rôle est seulement de la délimiter et qui ne doit pas être touché par le disque A), et terminée à un piston PC. Si on laisse dans le tube de verre un peu de poudre de liège, fine et légère, on trouve que, pour des positions convenables du piston C, la poudre forme des amas réguliers, sitôt qu'on excite les vibrations de la verge en la frottant longitudinalement avec un linge un peu humide.

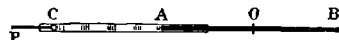


Fig. 49.

La distance  $d$  des amas est égale à une demi-longueur d'onde du son dans l'air. Soit  $v$  la vitesse de propagation dans l'air à la température de l'expérience; on a :

$$d = \frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2N}, \quad N = \frac{v}{2d}.$$

D'où enfin 
$$V = \frac{L}{d} \cdot v.$$

L'expérience consiste à mesurer la longueur  $nd$  de  $n$  intervalles; on tire de là d'abord la valeur de  $d$ , puis, connaissant  $v$ , la valeur de  $V$  qui permet enfin de calculer  $E$ .

Pour que les tas soient bien visibles, il faut que la longueur CA soit un nombre entier d'intervalles  $d$ . La poudre se rassemblant aux nœuds du mouvement vibratoire dans l'air, il est naturel qu'il y ait un tas au niveau du piston immobile C; il est, au contraire, paradoxal qu'il y ait un tas tout près de l'extrémité mobile de la tige A: c'est pourtant ce qu'une théorie un peu complète met hors de doute (voir § 175).

On peut mesurer directement le paramètre  $E$  des corps très dilatables par l'étude des ondes stationnaires.

**109. Torsion. Lois expérimentales.** — Pour tordre un fil de l'angle  $\alpha$ , il faut exercer un couple donné par la formule suivante, où

$D$  est le diamètre : 
$$C = \gamma \cdot \frac{D^4 \cdot \alpha}{L}.$$

Si les longueurs sont exprimées en millimètres, les couples en grammes-centimètre et les angles en radians, on trouve :

Fer :  $\gamma = 76.10^3$ , Cuivre :  $\gamma = 40.10^3$ , Argent :  $\gamma = 27.10^3$ .

Soit, par exemple, un fil de cuivre de 1 mètre de long ( $L = 1000$ ), d'un millimètre de diamètre ( $D = 1$ ); quel est le couple en grammes-centimètre nécessaire pour le tordre d'un radian, soit  $57^\circ$  environ ( $\alpha = 1$ )?

On a : 
$$C = 40.10^3 \frac{1}{10^3} = 40 \text{ grammes-centimètre.}$$

Pour un fil de fer on trouverait 75 grammes-centimètre.

Il est bon de se rendre compte de la petitesse des couples mis en jeu dans un appareil de torsion, afin de comprendre son rôle dans la mesure des couples. Il faut pour tordre un fil d'argent d'un millimètre de diamètre et d'un mètre de long, de l'angle d'un radian, 27 grammes-centimètre environ. Si le fil a un diamètre d'un dixième de millimètre, soit 10 fois plus petit, le couple est  $10000 = 10^4$  fois plus petit. Nous sommes ramenés à 2,7 milligrammes-centimètre, soit environ 2,64 ergs. Mais la méthode de Poggendorff permet d'apprécier aisément les 10 secondes d'arc, soit environ le  $1/20000$  de radian. En définitive, on mesure des couples qui ne dépassent pas  $1,3 \cdot 10^{-4}$  ergs. Rien n'empêche dans bien des cas de prendre un fil plus fin.

**110. Établissement de la loi précédente.** — Considérons un cylindre circulaire tordu. L'expérience prouve d'abord que pendant la torsion les sections droites ne sont pas déformées et restent des sections droites. On perce le cylindre d'un petit trou dans une section droite, on regarde au travers une vive lumière; on continue de la voir, si grandes que soient les déformations *même permanentes*.

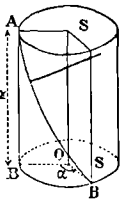


Fig. 50.

On peut donc *a fortiori* admettre la proposition pour les déformations élastiques.

Considérons deux sections droites  $S$  et  $S_1$  à une distance  $z$  l'une de l'autre : pendant la torsion, non accompagnée de traction, elles restent à cette même distance. Soit  $\alpha$  l'angle dont l'une tourne par rapport à l'autre du fait de la torsion;  $\alpha dz : z$  est l'angle dont tournent l'une par rapport à l'autre deux sections distantes de  $dz$ .

Pendant la torsion, les couches minces limitées par deux sections droites voisines conservent leur individualité. Le phénomène consiste en une rotation relative de ces couches, avec une déformation qu'on peut définir géométriquement en disant qu'un élément de droite parallèle aux génératrices du cylindre non déformé devient un élément d'hélice. Par exemple, la droite  $AB$  devient l'hélice  $AB'$ . Quant aux tubes élémentaires concentriques formant le cylindre total, ils ne tendent pas à se déplacer les uns par rapport aux autres dans la déformation.

Considérons deux points du même tube élémentaire de rayon  $r$ . Quand le tube n'est pas déformé, ils sont situés sur la même génératrice, à une distance  $dz$ . On tord le cylindre de l'angle  $\alpha$ . Les deux plans distants de  $dz$  tournent l'un par rapport à l'autre d'un angle  $\alpha dz : z$ , et la distance *horizontale* des deux points considérés (distance qui est nulle quand la déformation est nulle) devient égale à  $\alpha r dz : z$ . La déformation, identique en tous les points d'un tube élémentaire, varie d'un tube à l'autre proportionnellement au rayon.

On peut présenter les mêmes résultats sous une forme un peu dif-

férente (fig. 51). Développons le tube élémentaire de rayon  $r$ . Non déformé, il est représenté par le rectangle ABCD, où  $AB = 2\pi r$ ,  $AC = z$ . Après la déformation, il devient le parallélogramme ABD'C', et l'on a

$$\alpha r = CC' = DD'.$$

La génératrice AC devient une hélice qui est développée suivant la droite AC'.

On *admet* que pour produire cette déformation *sur le développement*, il faut appliquer aux deux bases AB et CD deux forces égales  $F$  proportionnelles :

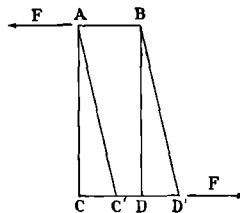


Fig. 51.

1° à la quantité  $\overline{CC'} : \overline{AC} = \alpha r : z$  qui mesure par hypothèse la déformation ;

2° à l'aire des bases rectangles AB ou CD : avant le développement c'étaient des couronnes de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$  ; leur aire est donc égale à  $2\pi r dr$  ;

3° à un coefficient  $\mu$  caractéristique de la matière considérée.

La force  $F$  a donc pour expression :

$$2\pi\mu r^2 dr \frac{\alpha}{z}.$$

Enroulons à nouveau le tube élémentaire : les forces élémentaires nécessaires pour produire la déformation sont maintenant normales au rayon aboutissant sur chaque élément ; elles donnent lieu à deux couples horizontaux, égaux et de sens opposés, appliqués sur les bases terminales et dont le moment est égal à :

$$2\pi\mu \cdot r^2 dr \cdot \frac{\alpha}{z} \cdot r = 2\pi\mu \cdot \frac{\alpha}{z} \cdot r^3 dr.$$

Pour le cylindre plein de longueur  $L$  et de rayon  $R$ , le couple qui correspond à la torsion  $\alpha$  est :

$$C = 2\pi\mu \cdot \frac{\alpha}{L} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{2} \cdot \mu \frac{\alpha R^4}{L}.$$

C'est la formule de Coulomb.

Ainsi, pour une déformation élastique, la courbe de déformation  $(C, \alpha)$  est une droite ; le couple est proportionnel à la quatrième puissance du rayon et en raison inverse de la longueur.

Il suffit de poser  $\mu = \frac{32 \cdot \gamma}{\pi}$  pour retrouver la formule expérimentale ; le paramètre  $\mu$  est le *coefficient de rigidité*.

**111. Généralisation de la formule de torsion.** — Cherchons l'expression du couple de torsion d'un cylindre dont la section droite n'est pas circulaire. Nous supposons : 1° que la torsion se fait autour

d'une droite parallèle aux génératrices du cylindre (*axe de torsion*) qui reste droite pendant la déformation; 2° que les sections droites du cylindre, non déformées par la torsion, tournent seulement les unes par rapport aux autres : toute parallèle aux génératrices se transforme donc en une hélice.

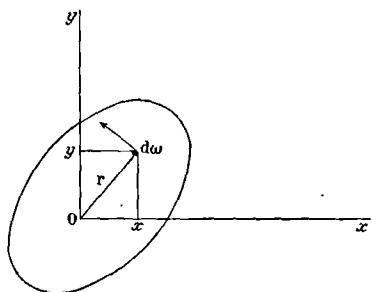


Fig. 52.

La force située dans la section droite et appliquée à chaque élément  $d\omega$  de l'une quelconque des sections droites, est proportionnelle à l'aire de cet élément et à la déformation mesurée par  $\alpha r : L$ , où  $r$  est la distance à l'axe de torsion,  $L$  la longueur du cylindre. Le couple dû à cet élément est donc  $r \cdot d\omega \cdot \alpha r : L$ . Le couple résultant est l'intégrale appliquée à toute la section droite (fig. 52) :

$$\frac{\mu\alpha}{L} \iint r^2 d\omega;$$

$\iint r^2 d\omega$  est le moment d'inertie de la section droite par rapport au point  $O$ , trace sur cette section de l'axe de torsion. Nous choisirons ce point, par la condition que la résultante de toutes les forces qui naissent des déformations soit nulle.

Menons deux axes rectangulaires quelconques  $Ox$  et  $Oy$  et projetons toutes les forces sur ces axes. La force qui résulte de l'élément  $d\omega$  est égale à  $r d\omega$ , au coefficient  $\mu\alpha : L$  près. Ses projections sur les axes  $x$  et  $y$  sont  $x d\omega$  et  $y d\omega$ . Les conditions pour que la résultante soit nulle sont donc :

$$\iint x d\omega = 0, \quad \iint y d\omega = 0,$$

les intégrales étant étendues à toute la section droite. Elles définissent le centre de gravité de la section.

Appelons  $I$  le moment d'inertie de la section droite par rapport à son centre de gravité (c'est-à-dire par rapport à l'axe de torsion : il s'appelle *le moment d'inertie polaire*); le couple de torsion a pour

$$\text{expression définitive :} \quad C = \frac{\mu\alpha I}{L}. \quad (1)$$

$$\text{Dans le cas du cercle,} \quad I = \frac{\pi}{2} R^4.$$

Substituant dans l'équation précédente, nous retrouvons la formule du § 110, qui est rigoureusement exacte.

Mais la formule (1), qui se trouve dans les traités de *Résistance des Matériaux*, est inadmissible, à moins qu'on ne l'applique à un

polygone régulier différant très peu d'un cercle, parce que les sections droites se déforment et ne restent plus planes pendant la torsion. Il suffit de tordre un ruban métallique pour s'en convaincre.

On connaît des formules plus exactes.

Pour une section elliptique la formule précédente donnerait :

$$I = \frac{\pi}{4} AB(A^2 + B^2), \quad C = \frac{\mu x}{L} \cdot \frac{\pi}{4} AB(A^2 + B^2),$$

où A et B sont les axes de l'ellipse. La formule exacte est au con-

traire :

$$C = \frac{\mu x}{L} \cdot \pi \frac{A^3 B^3}{A^2 + B^2} = \frac{\mu x}{L} \cdot \frac{s^4}{4\pi^2 \cdot I},$$

en appelant  $s = \pi AB$  l'aire de la section droite.

Ainsi, pour une aire donnée de la section droite, le couple C, loin d'être proportionnel au moment d'inertie de la section droite, est en raison inverse de ce moment.

Écrivons la formule (2) sous la forme

$$C = \frac{\mu x}{L} \cdot K' \frac{A^3 B^3}{A^2 + B^2} = \frac{\mu x}{L} K \frac{s^4}{I}. \quad (2')$$

Pour l'ellipse  $K = 3,142$ .

La théorie montre que l'expression (2') est généralement applicable, pourvu qu'on donne des valeurs numériques convenables aux coefficients K et K'. Voici les valeurs de K' pour les formes rectangulaires les plus usitées. Soient 2A et 2B les côtés du rectangle.

	$A = B,$	$A = 2B,$	$A = 4B.$	$A = 8B,$
$K' =$	4,493	4,570	4,781	4,992.

Ces formules ont une curieuse application dans les galvanomètres à cadre mobile. Imposons au fil une section d'aire invariable et, par conséquent, une résistance électrique invariable pour une longueur donnée.

D'après la formule (2'), s étant donnée et le coefficient K étant à peu près invariable, quel que soit le rapport A : B, on augmente la sensibilité en faisant I le plus grand possible. Conséquemment, on utilise un ruban métallique et non pas un fil circulaire.

**112. Flexion plane.** — Nous limiterons notre étude à la flexion dite plane. Un cylindre homogène, horizontal pour fixer les idées, est soumis à des forces verticales : on suppose que la section droite du cylindre et les forces admettent un plan de symétrie vertical P. Dans ces conditions, la flexion est plane ; tous les éléments du cylindre qui se trouvent primitivement sur une horizontale (fibre horizontale), forment après la déformation des courbes situées dans un plan vertical (fibre déformée). Le plan primitif de symétrie P reste donc plan de symétrie pour le cylindre déformé. Les sections droites du cylindre

primitif restent sections droites pour le cylindre déformé, et conservent très sensiblement leurs dimensions.

Deux sections droites infiniment voisines et distantes de  $dx$ , parallèles au début, font maintenant un petit angle  $\theta$ ; leurs plans se coupent suivant une droite dont la trace, sur le plan invariable de symétrie, est le centre de courbure des fibres déformées. Soit  $\rho$  le rayon de courbure : on a  $\rho\theta = dx$ .

La théorie qui suit suppose  $\rho$  très grand par rapport à la plus grande dimension de la section droite parallèlement au plan de symétrie.

Considérons une tranche mince du cylindre, comprise entre deux sections droites; divisons cette tranche elle-même par des plans verticaux parallèles au plan de symétrie P. Nous obtenons des éléments qui, avant toute déformation, doivent être représentés sur un plan vertical par un rectangle.

La déformation leur donne la forme de trapèzes curvilignes (fig. 53)

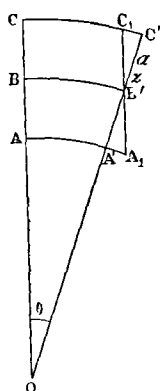


Fig. 53.

ABCC'B'A'. Les droites AC et A'C' sont les traces des sections droites; leurs plans se coupent suivant une droite normale au plan du tableau et dont la trace sur ce plan est au point O. On peut poser approximativement  $OA = OC = \rho$ .

Cherchons les conditions d'équilibre de cet élément et de la tranche à laquelle il appartient.

Les forces extérieures se réduisent à une résultante verticale dirigée sensiblement suivant CO, et à un couple dont l'axe est normal au plan de symétrie P, plan du tableau.

1° La résultante verticale produit un effort tranchant  $\mathcal{C}$ ; elle tend, comme des cisailles, à séparer la tranche des parties voisines suivant les sections droites qui la limitent. Nous pouvons négliger ici les déformations toujours faibles qui résultent de cet effort. Nous retrouverons cet effort tranchant au § 176 dans l'étude des vibrations des verges.

2° Le couple doit être équilibré par un couple égal et inverse, qui résulte de l'ensemble des forces provenant de la transformation des éléments de rectangles en trapèzes curvilignes.

Cette transformation exige l'allongement de certaines fibres (telles que  $CC_1$  qui devient  $CC'$ ) et le raccourcissement d'autres fibres (telles que  $AA_1$  qui devient  $AA'$ ). Ces allongements et raccourcissements sont dus à des forces horizontales : comme par hypothèse aucune force extérieure n'est horizontale, il faut que la somme algébrique de toutes ces forces horizontales soit nulle.

Cette condition donne la position des fibres neutres. Par fibres nous avons désigné les cylindres élémentaires qui composent au début le cylindre non déformé, et qui deviennent les baguettes élémentaires

constituant le cylindre déformé. Les *fibres neutres* sont celles qui, dans la déformation, ne subissent ni allongement ni raccourcissement. Dans le cylindre non déformé, elles forment un plan ; par la déformation ce plan devient un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires au plan du tableau. La fibre BB' de la fig. 53 est une fibre neutre.

En définitive, la section A<sub>1</sub>C<sub>1</sub> tourne autour d'une certaine droite Δ normale au plan du tableau dont la trace est en B' et qui est, avant la déformation, l'intersection du plan des fibres neutres avec la section A'C'.

Soit z la distance d'un élément dω de la section droite à la ligne que nous venons de définir.

L'allongement de la fibre de longueur dx et d'aire dω est

$$z\theta = z \cdot \frac{dx}{\rho}.$$

D'après la définition du module d'Young, la force horizontale nécessaire pour produire cette déformation est :

$$E \frac{z\theta}{dx} d\omega = \frac{Ez d\omega}{\rho};$$

elle est dirigée vers la droite.

Pour les fibres qui subissent un raccourcissement et pour lesquelles la force est dirigée vers la gauche, la formule précédente s'applique à la condition de prendre z négativement au-dessous de la droite Δ.

La condition que la somme algébrique des forces horizontales soit nulle consiste donc à écrire :  $\int \int z d\omega = 0$ ,

l'intégrale étant étendue à la section tout entière.

Elle est satisfaite si la droite Δ passe par le centre de gravité de cette section.

Donc toutes les fibres horizontales du cylindre non déformé, qui se trouvent sur l'horizontale Δ passant par le centre de gravité, ne subissent ni allongement ni raccourcissement pendant la déformation : ce sont les *fibres neutres*.

3<sup>o</sup> Il faut écrire que le couple qui résulte des déformations et dont l'axe est normal au plan du tableau fait équilibre au couple extérieur. Calculons la somme des moments des forces par rapport à la droite Δ ; elle s'exprime par l'expression :

$$C = \frac{E}{\rho} \int \int z^2 d\omega;$$

l'intégrale étant étendue à la section droite entière.

Or cette intégrale représente le moment d'inertie I de cette section par rapport à la droite Δ ; nous avons en définitive :

$$C = \frac{EI}{\rho},$$

pour équation d'équilibre.

**113. Autre forme de l'équation d'équilibre. Généralisation.**  
 — Rapportons le cylindre à deux axes, l'un  $x$  horizontal, l'autre  $y$  vertical et dirigé vers le bas. On sait que le rayon de courbure a pour expression :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Par hypothèse la courbure est toujours faible, les fibres toujours à peu près horizontales. On peut poser sans erreur sensible

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

$\frac{dy}{dx}$  étant négligeable devant l'unité.

L'équation différentielle de la courbe formée par le cylindre fléchi est en définitive :  $C = EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$  ;

$C$  est une fonction de  $x$  donnée par l'énoncé du cas particulier que l'on traite.

GÉNÉRALISATION. — La théorie précédente suppose que le corps déformé est un certain cylindre : il peut être défini comme le volume engendré par le déplacement d'une aire plane ayant une droite de symétrie. Dans ce déplacement,

1° cette droite est parallèle à un plan  $P$  qui est le plan de la flexion plane ;

2° le centre de gravité de l'aire décrit une droite  $D$  qu'on appelle la *ligne moyenne* ;

3° le plan de cette aire reste normal à la droite  $D$ .

La généralisation suppose toutes les conditions précédentes sauf une : la courbe  $D$  n'est plus une droite : c'est une courbe quelconque parallèle au plan de la flexion plane, dont chaque point sera défini par sa distance  $x$  à une des extrémités comptée sur la courbe  $D$  elle-même.

En reprenant les raisonnements précédents, on verra facilement que l'équation d'équilibre est :

$$C = EI \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right);$$

$\rho_0$  est le rayon de courbure initial du solide que nous venons de définir, en un point repéré par un certain  $x$  ;  $\rho$  est le rayon de courbure au même point après la déformation ;  $C$  est le couple en ce point, couple dont l'axe est toujours supposé perpendiculaire au plan de symétrie,  $I$  est le moment d'inertie de la section droite par rapport à la droite  $\Delta$  passant par le centre de gravité et normale au plan  $P$ .



AUTRE GÉNÉRALISATION. — On peut admettre encore les mêmes équations d'équilibre, si la section droite, au lieu d'être constante, est lentement variable. Il faut alors considérer  $I$  comme une fonction de  $x$ .

114. **Étude de quelques cas particuliers. Élastique.** — Reportons-nous à la figure 24 du § 42, et faisons-la tourner de 90°. Le point  $Q$  est alors en haut, l'axe des  $x$  est vertical.

Prenons un fil d'acier long et fin. Attachons une de ses extrémités en  $Q$ , de manière que la tangente soit verticale. Fléchissons-le en boucle suivant  $QRNPRW$ , suspendons un poids  $P$  en  $W$ , lions en  $R$  avec un nœud lâche de fil à coudre. *Le fil d'acier se maintient en équilibre.* Cherchons l'équation de la courbe (élastique).

Les  $y$  étant portés normalement à l'axe des  $x$ , écrivons que le couple  $Py$  dû à la charge fait équilibre à la flexion :

$$\frac{EI}{\rho} = Py.$$

C'est précisément la courbe étudiée au § 42. On calculera aisément les modifications de la courbe quand  $P$  varie; nous engageons le lecteur à vérifier expérimentalement les résultats.

L'équilibre obtenu, il est permis de supposer rigidifiée une partie du fil. On obtient donc un morceau de l'élastique en encastrant le fil dans un étau dont le plan fait un angle quelconque avec l'horizon; si l'encastrement est vertical, on obtient la partie  $PRW$ ; s'il est horizontal, on obtient la figure symétrique de  $NMAQ$ .

Ce problème général résolu, nous allons supposer l'encastrement horizontal et ne considérer qu'une petite partie de la courbe au voisinage de l'encastrement.

115. **Barre cylindrique de longueur  $L$  encastrée à une de ses extrémités et fléchie par une force  $P$  appliquée à l'autre et normale à sa direction. Mesure de la flèche.** — On appelle flèche le déplacement de l'extrémité libre parallèlement au plan de symétrie. Comptons les  $x$  à partir du point  $A$ . Menons des tangentes en  $B$  et  $C$  au solide déformé; quand on passe de  $B$  à  $C$ , c'est-à-dire quand  $x$  croît de  $dx$ , la flèche croît de  $df$ .

Or  $\rho\theta = dx$ ,  $(L - x)\theta = df$ ;

d'où  $df = \frac{L - x}{\rho} \cdot dx$ .

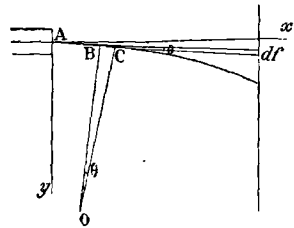


Fig. 54.

Ceci indépendamment de toute équation d'équilibre.

Appliquons maintenant l'équation d'équilibre :  $C = \frac{EI}{\rho}$ . Le

couple est dû uniquement au poids P : son moment sur l'élément  $dx$  est donc  $(L-x)P$ . D'où les relations :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{(L-x)P}{EI}, \quad df = \frac{P}{EI} \cdot (L-x)^2 dx.$$

La flèche entière est :

$$f = \frac{P}{EI} \int_0^L (L-x)^2 dx = \frac{PL^3}{3EI}.$$

FORME DE LA COURBE. — Son équation est<sup>1</sup> :

$$C = EI \frac{d^2y}{dx^2} = (L-x)P,$$

$$y = \frac{PL}{2EI} x^2 - \frac{P}{6EI} x^3.$$

Les constantes d'intégration sont fournies par les conditions que pour  $x=0$ , on ait  $y=0$  et  $\frac{dy}{dx}=0$ , cette dernière relation exprimant l'*encastrement*. Pour  $x=L$ , on retrouve évidemment  $y=f$ . La courbure  $\frac{1}{\rho}$  de la courbe est proportionnelle à la distance du point considéré à l'extrémité de la barre fléchie.

Voici dans deux cas particuliers quelles sont les valeurs de la flèche.

SECTION CIRCULAIRE. — Le moment I par rapport à un diamètre est

$$I = \frac{\pi}{4} R^4; \quad f = \frac{4}{3} \cdot \frac{PL^3}{\pi ER^4}.$$

SECTION RECTANGULAIRE. — Appelons 2A le côté parallèle au plan P de symétrie, 2B le côté parallèle à la droite  $\Delta$ . Le moment d'inertie par rapport à  $\Delta$  est :

$$I = \frac{4}{3} A^3B; \quad f = \frac{PL^3}{4EA^3B}.$$

Ces formules sont très suffisamment exactes quand il s'agit de mesurer le paramètre E, à la condition bien entendu que les déformations soient petites.

Elles ne sont pas absolument rigoureuses pas plus que la théorie qui les donne : quand on fléchit un prisme, les faces se creusent toujours plus ou moins. Leur exactitude est toutefois incomparablement plus grande que celle de la formule généralisée de la torsion (§ 111).

**116. Ressort spiral plan (ressort de montre).** — L'une des extrémités A du ressort spiral est fixe; l'autre B est solidaire d'une pièce tournant autour d'un axe vertical invariable O. On lui applique

<sup>1</sup> On remarquera que le choix des noms des axes et de l'origine des coordonnées n'est pas le même dans ce paragraphe et dans le précédent.

un couple dont l'axe est normal au plan du ressort. C'est ce qui a lieu, par exemple, dans le régulateur d'une montre. Supposons que la pièce OB tourne d'un angle  $\alpha$ . Il résulte généralement de cette rotation un couple C et une force F, dont nous appellerons X et Y les composantes sur deux axes Ox et Oy : si la pièce OB était libre et qu'on la fit tourner entre deux doigts de manière à produire un couple, elle se déplacerait parallèlement à elle-même au lieu de rester centrée sur la droite dont le point O est la trace. Il faudrait ensuite appliquer la force X, Y dans le plan  $xOy$  pour la ramener à sa position initiale. L'expérience est très facile à faire avec un ressort un peu gros (de petite pendule ou de réveille-matin).

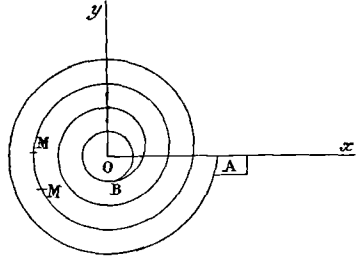


Fig. 55.

Toute rotation  $\alpha$  produit donc un couple C dont l'axe est perpendiculaire au plan  $xOy$ , et une force X, Y appliquée au point O dans le plan  $xOy$ . La déformation effectuée, solidifions toute la partie BM du ressort, comprise entre le point B et un point quelconque M ; cherchons la condition d'équilibre d'un petit élément MM' pris à partir du point M.

Nous pouvons supposer que la pièce OB est libre, à la condition d'ajouter la force X, Y. Transportons au point M le couple C et la force X, Y ; tout se passe comme si la partie BM était supprimée, et comme si nous appliquions directement en M le couple  $C + Yx - Xy$ . Naturellement la partie non solidifiée AM' exerce en M' un couple égal et opposé : l'élément MM' est en équilibre sous l'action de ces deux couples ; il est seulement déformé. La figure 56 montre comment l'équilibre a lieu en même temps que la déformation.

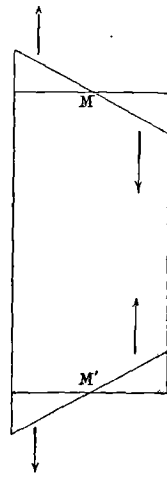


Fig. 56.

Appliquons maintenant la formule générale du § 113. Il vient :

$$C + Yx - Xy = EI \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right)$$

qui est l'équation cherchée.

Négligeons les pressions X, Y sur l'axe O.

Il reste :

$$C = EI \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right).$$

L'équation s'applique à tous les éléments : appelons  $ds$  la longueur de l'élément MM' ; multiplions les deux membres par  $ds$  et

intégrons pour toute la longueur  $L$  du spiral :  $C$  est une constante dans l'intégration et  $\int ds = L$ .

Il vient :

$$CL = EI \left( \int \frac{ds}{\rho} - \int \frac{ds}{\rho_0} \right).$$

Or  $\frac{ds}{\rho}$  est l'angle  $d\theta$  que font les deux normales menées aux extrémités de l'élément  $MM'$  ;  $\int \frac{ds}{\rho} = \int d\theta$ , est l'angle que font entre elles les normales menées aux points  $A$  et  $B$  quand le corps est déformé. La parenthèse représente donc la variation de cet angle. Puisque la normale  $A$  est invariable, cette variation est précisément égale à l'angle  $\alpha$  ; d'où l'équation qui résout le problème :

$$C = \frac{EI\alpha}{L}.$$

Quelle que soit la forme du spiral plan, le couple est donc proportionnel à l'angle de torsion, en raison inverse de la longueur, et proportionnel au produit  $EI$ , qu'on appelle quelquefois moment d'élasticité (bien entendu à la condition qu'on puisse négliger  $X$ ,  $Y$ , ce qui n'est pas toujours légitime).

On trouvera au § 13 les valeurs de  $I$  pour différentes formes de la section droite.

**117. Ressort spiral cylindrique. (Ressort à boudin.)** — Le ressort est formé d'un fil cylindrique de rayon  $R$  enroulé sur un cylindre ; nous désignerons par  $r_0$  le rayon de ce cylindre augmenté de la moitié du rayon du fil. L'hélice formée est caractérisée par l'angle  $\theta_0$  que fait la tangente en un point avec le plan normal à l'axe.

À chaque extrémité du ressort, le fil quitte l'hélice pour gagner l'axe suivant une courbe plane de *raccordement* tracée dans un plan normal à l'axe. Il se replie une seconde fois suivant l'axe. Un des bouts du fil est maintenu fixe. À l'autre on exerce :

1° une traction  $P$  suivant l'axe ; c'est le mode le plus habituel d'emploi des ressorts à boudin ;

2° un couple  $G$  dont l'axe coïncide avec l'axe de l'hélice ; cette disposition se rencontre dans certains galvanomètres, dans les ressorts pour fermer les portes, etc.

On démontre que l'inverse du rayon de courbure d'une hélice est égal à  $\cos^2 \theta : r$ . Quand une hélice définie par les paramètres  $r_0$  et  $\theta_0$  se transforme en une autre hélice définie par les paramètres  $r$  et  $\theta$ , la *flexion* est donnée par la formule

$$\varphi = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{\cos^2 \theta}{r} - \frac{\cos^2 \theta_0}{r_0}.$$

Pour produire cette flexion, il faut exercer un couple situé dans le

plan osculateur, dont par conséquent l'axe  $C_1$  est normal à ce plan et dont la grandeur est :

$$C_1 = EI \left( \frac{\cos^2 \theta}{r} - \frac{\cos^2 \theta_0}{r_0} \right) = EI \varphi.$$

Évaluons maintenant la torsion  $\tau$ .

Quand le fil est en équilibre, il est disposé suivant une hélice  $\theta_0, r_0$ ; il n'y a pas de torsion. Déplaçons-nous sur l'hélice; le plan osculateur tourne : on démontre que le taux de rotation, c'est-à-dire la rotation divisée par le chemin parcouru sur l'hélice, est

$$\sin \theta_0 \cos \theta_0 : r_0.$$

Cette quantité mesure d'ailleurs ce que les mathématiciens appellent la torsion de la courbe.

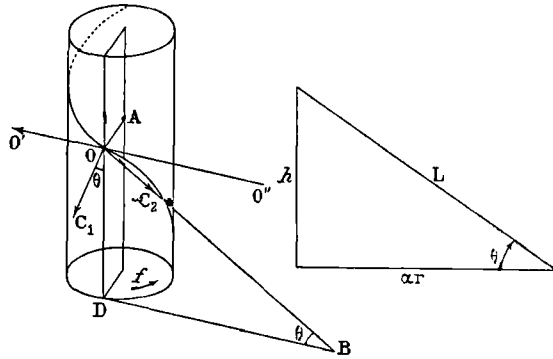


Fig. 57.

Quand l'hélice se transforme en une autre hélice caractérisée par les paramètres  $\theta, r$ , la torsion est modifiée, au sens *mathématique* du mot. On voit facilement que la torsion *physique*  $\tau$  est mesurée par la variation de la torsion mathématique :

$$\tau = \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} - \frac{\sin \theta_0 \cos \theta_0}{r_0}.$$

Pour produire cette torsion, il faut exercer un couple dont l'axe est dirigé suivant la tangente au fil, et dont la grandeur est :

$$C_2 = \frac{\pi \nu R^4}{2} \cdot \tau = A \tau.$$

Introduisons maintenant les quantités directement accessibles à l'expérience.

Soit  $h$  la hauteur du spiral et  $\alpha$  l'arc total en radians décrit par le fil sur l'hélice.

Si, par exemple, il y a dix spires,  $\alpha = 20\pi$ .

On a évidemment :

$$h = L \sin \theta, \quad \sqrt{L^2 - h^2} = L \cos \theta, \quad \alpha r = \sqrt{L^2 - h^2},$$

$$\varphi = \frac{1}{L^2} [\alpha \sqrt{L^2 - h^2} - \alpha_0 \sqrt{L^2 - h_0^2}], \quad \tau = \frac{1}{L^2} [\alpha h - \alpha_0 h_0].$$

**118. Cas particuliers.** — Il serait facile de donner la théorie du ressort à boudin dans le cas général : nous nous contenterons d'étu-

dier le seul cas important, cas où les spires sont très rapprochées sans se toucher, quand on a  $G = P = 0$ ; où par conséquent on peut négliger  $h_0$  devant  $L$ . L'angle  $\theta$  étant très petit, l'axe du couple  $C_1$  est sensiblement dirigé suivant l'axe de l'hélice; l'axe du couple  $C_2$  est sensiblement normal à cet axe.

On peut poser :  $C_1 = G, \quad C_2 = Pr_0.$

*Action du couple G.* — Il produit une flexion;  $h^2$  et  $h_0^2$  étant négligeables devant  $L^2$ , on a :

$$\varphi = \frac{\alpha - \alpha_0}{L}, \quad G = EI \cdot \frac{\alpha - \alpha_0}{L} = \frac{\pi ER^4}{4L} \cdot (\alpha - \alpha_0) = \frac{\pi ER^4}{4L} \Delta\alpha.$$

Ainsi la torsion  $\Delta\alpha$  du ressort à boudin sous l'influence d'un couple dont l'axe coïncide avec l'axe de l'hélice correspond à une déformation par flexion; elle est proportionnelle au couple et à la longueur du fil, elle est en raison inverse de la quatrième puissance du rayon du fil.

Il est facile de voir l'avantage d'un tel ressort employé comme dynamomètre pour mesurer les couples. Prenons le même fil et rectifions-le, appliquons-lui le couple  $G$ ; la torsion  $\Delta'\alpha$  est donnée par

$$\text{la formule} \quad G = \frac{\pi\mu R^4}{2L} \Delta'\alpha; \quad \frac{\Delta'\alpha}{\Delta\alpha} = \frac{E}{2\mu} = 1 + \sigma,$$

comme nous le verrons par la suite. En vérité, la torsion  $\Delta'\alpha$  est plus grande que  $\Delta\alpha$  d'un quart environ,  $\sigma$  ayant 0,25 comme valeur moyenne. Mais l'encombrement de l'appareil est incomparablement plus grand. En effet, des mètres de fil tiennent dans un ressort de quelques centimètres de hauteur : il suffit de prendre  $r_0$  assez grand.

*Action de la charge P.* — Il se produit une torsion du fil. Le rayon  $r$  et l'angle  $\alpha$  varient peu, il est légitime de poser :

$$r = r_0, \quad \alpha = \alpha_0, \quad \alpha r = \alpha_0 r_0 = L.$$

$$Pr_0 = \frac{A}{L^2} \alpha_0 \Delta h, \quad P = \frac{A}{Lr_0^2} \cdot \Delta h = \frac{\pi\mu R^4}{2Lr_0^2} \Delta h.$$

L'allongement du ressort est donc proportionnel à la charge, à la longueur du fil et en raison inverse de la quatrième puissance de son rayon. Il est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnel au carré du rayon du cylindre sur lequel le spiral est enroulé.

On s'explique aisément pourquoi dans les dynamomètres balances très sensibles, dans lesquels la déformation d'un ressort spiral sert de peson, on prend un fil fin et on l'enroule sur un cylindre de grand diamètre. Au contraire, pour avoir un ressort à boudin *rappelant* puissamment, on doit prendre un fil gros et l'enrouler sur un cylindre de faible diamètre.

**119. Réactivité.** — Pour faire comprendre en quoi consistent les phénomènes de réactivité, nous prendrons le caoutchouc pour exemple, parce qu'ils y sont particulièrement visibles.

Attachons un fil de caoutchouc par son extrémité supérieure et chargeons-le brusquement d'un poids. Il s'allonge d'abord beaucoup. Mais l'allongement ne cesse pas instantanément de se produire. Il continue pendant des heures et des jours avec des vitesses qui diminuent vite, il est vrai, mais qui n'en produisent pas moins, par leurs effets accumulés, un allongement très appréciable.

Au bout de quelque temps, déchargeons le fil : il se raccourcit instantanément beaucoup. Mais les phénomènes précédents se produisent en sens inverse : le raccourcissement ne cesse pas instantanément.

Au bout d'un temps qui est du même ordre que le temps pendant lequel le fil a été chargé, il reprend à peu près sa longueur initiale.

En somme, il se conduit comme un fil parfaitement élastique, en ce sens que l'allongement n'est pas permanent. Le phénomène est cependant bien différent, puisque la durée d'une expérience y intervient pour une part considérable.

Les phénomènes de réactivité satisfont *comme première approximation* à une loi très simple. Supposons qu'on applique une force constante : la variable géométrique est représentée par une expression de la forme  $x = x_0 \log (At + B)$  ; on prend comme origine des temps le moment où la force est appliquée. Choisissons pour déterminer les valeurs de  $x$  des temps en progression géométrique ; posons par exemple  $t = \tau^n$  ; soit  $t$  assez grand pour que  $B$  devienne négligeable devant  $At$ . Nous aurons pour deux observations consécutives :

$$x_n = x_0 (\log A + n \log \tau), \quad x_{n+1} = x_0 [\log A + (n+1) \log \tau]$$

$$x_{n+1} - x_n = x_0 \log \tau = C^c.$$

On trouve la même loi pour les forces, quand la variable géométrique est maintenue invariable. C'est une première mais importante approximation.

Les phénomènes de réactivité interviennent d'une manière fâcheuse dans beaucoup d'appareils de mesure. Les indications des baromètres anéroïdes sont de ce chef très sujettes à caution ; ils n'atteignent que lentement leur position d'équilibre. Aussi doit-on faire l'étalonnage dans les conditions mêmes d'emploi, c'est-à-dire avec des variations *très lentes* de la pression. Il ne faudrait pas, par exemple, mettre le baromètre sous une cloche et déterminer *en quelques minutes* les indications qui seraient censées correspondre à des pressions très différentes de la pression atmosphérique. La forme *quasi limite* du système déformable ne serait pas atteinte. Les indications satisfont très exactement à la loi quantitative ci-dessus énoncée.

De même on doit attribuer à la réactivité les déplacements du zéro des galvanomètres à cadre mobile. Il faut éviter d'imprimer aux fils de suspension de fortes torsions, si l'on ne veut pas avoir, après la

détorsion rapide *mais incomplète*, une détorsion de réactivité *durant des heures et des jours*.

L'emploi d'un fil métallique pour équilibrer des couples est rendu presque illusoire du fait de la réactivité. Comme le phénomène est beaucoup plus fort pour un fil étiré que pour un fil recuit, on s'explique le curieux paradoxe de l'emploi dans les balances de torsion d'un fil *recuit* (généralement en argent). On préfère risquer des déformations permanentes, plus faciles avec un fil recuit, que s'exposer à des déformations réactives. Dans ces derniers temps, on a même renoncé à l'emploi des fils métalliques; on leur a substitué un fil de quartz dont la réactivité est négligeable.

---



## CHAPITRE VIII

### ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ POUR LES CORPS ISOTROPES

120. Les éléments de la théorie de l'Élasticité comprennent trois questions :

1<sup>o</sup> l'étude abstraite de la distribution des forces autour d'un point : c'est la généralisation de la proposition d'Hydrostatique, que la pression est la même dans toutes les directions autour d'un point d'un liquide ;

2<sup>o</sup> l'étude abstraite de la déformation ;

3<sup>o</sup> les hypothèses sur les relations entre les forces et les déformations : outre l'intérêt des formules auxquelles on arrive, cette dernière étude a l'avantage de montrer comment s'introduisent les hypothèses sur la symétrie et à quelles conditions logiques générales doivent satisfaire ces formules.

#### Étude de la distribution des forces en un point d'un solide quelconque.

121. Définition des forces élastiques. — Imaginons un milieu déformé, absolument quelconque, homogène ou non, pourvu qu'il soit continu. Coupons-le par un plan MN suivant une section QR. La partie 1 du milieu exerce sur la partie 2, en chaque point de la section RQ, une certaine action, telle que, si l'on enlevait cette partie 1, il faudrait, pour maintenir l'équilibre, appliquer sur chaque point de RQ une force  $F$  dont les composantes rapportées à l'unité de surface sont  $X, Y, Z$ .

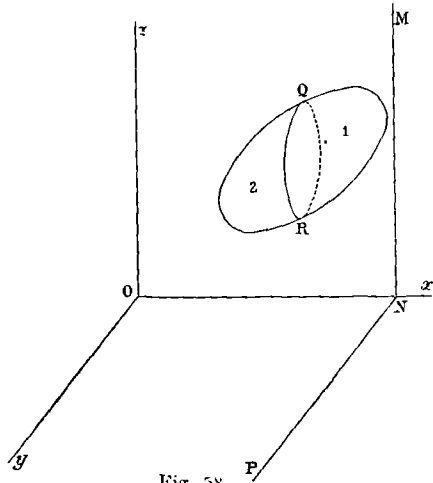


Fig. 58.

Réciproquement si on enlevait la partie 2, pour maintenir la partie 1 en l'état actuel, il faudrait appliquer en chaque point de RQ une force dont les composantes rapportées à l'unité de surface sont  $-X$ ,  $-Y$ ,  $-Z$  (comparer au § 35).

Le problème est de déterminer les relations entre toutes les forces F qu'on obtient au voisinage d'un point d'un solide quelconque déformé, quand on donne à la section passant par ce point toutes les orientations possibles.

En particulier, si la section est normale aux axes de coordonnées, nous définissons neuf composantes :  $X_x$ ,  $Y_x$ ,  $Z_x$ , si la section est normale à l'axe des  $x$ ,  $X_y$ ,... si la section est normale à l'axe des  $y$ ,  $X_z$ ,... si la section est normale à l'axe des  $z$ .

Pour trouver les relations entre toutes les forces F, nous allons écrire que les éléments constituant le milieu sont en équilibre; nous choisirons convenablement leur forme pour faciliter les raisonnements.

**122. Équilibre du tétraèdre élémentaire.** — Par le point O considéré menons trois axes  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  parallèles aux axes de coordonnées.

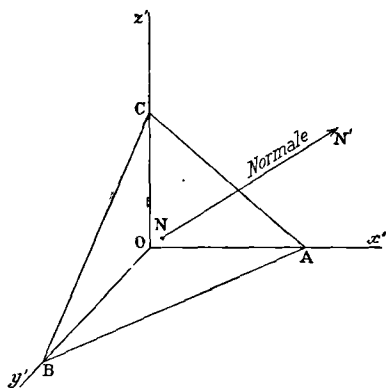


Fig. 59.

Cherchons l'expression de la force F sur un plan dont la normale fait avec les axes des angles définis par les cosinus directeurs  $m$ ,  $n$ ,  $p$ . La force est à peu près la même pour un plan parallèle ABC infiniment voisin, déterminant avec les plans  $Ox'y'$ ,  $Oy'z'$ ,  $Oz'x'$  un petit tétraèdre. Écrivons que ce tétraèdre est en équilibre. Les forces qui agissent sur le volume (pesanteur,...) diminuent indéfiniment devant les forces qui agissent sur la surface, à mesure que le tétraèdre est plus petit. *A la limite* nous devons écrire que ces dernières se font équilibre. (Comparer au raisonnement du § 27.)

Soit  $S$  l'aire du triangle  $ABC$ ; les aires des faces du tétraèdre sont les projections  $mS$ ,  $nS$ ,  $pS$  de  $S$  sur les plans coordonnés. Nous avons donc, en égalant les projections de toutes les forces parallèles à chacun des axes :

$$(1) \quad \begin{cases} SX = mSX_x + nSX_y + pSX_z \\ X = mX_x + nX_y + pX_z \\ Y = mY_x + nY_y + pY_z \\ Z = mZ_x + nZ_y + pZ_z \end{cases}$$

Donc les forces F ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) pour un plan quelconque sont complè-

tement connues, quand nous donnons les forces pour trois plans rectangulaires quelconques.

Reste à savoir si ces forces sont elles-mêmes absolument indépendantes. C'est ce que le paragraphe suivant va nous apprendre.

**123. Équilibre du parallélépipède élémentaire.** — Considérons donc un parallélépipède infiniment petit dont les faces sont parallèles aux plans de coordonnées. Leurs aires sont  $dydz$  (normalement à l'axe des  $x$ ),  $dzdx$  (normalement à l'axe des  $y$ ),  $dx dy$  (normalement à l'axe des  $z$ ).

Nous admettons qu'outre les forces élastiques agissent des forces (analogues à la pesanteur) ne pouvant donner lieu, à l'intérieur d'un volume infiniment petit, qu'à des couples dont le moment serait un infiniment petit du second ordre par rapport aux forces prises comme infiniment petits du premier. Pour que l'équilibre existe, il faut que les forces élastiques ne produisent que des couples du même ordre.

Or les forces  $F_x$  et  $F'_x$  qui agissent sur les faces ABCD et EFGH diffèrent infiniment peu en valeur absolue et sont à très peu près dirigées en sens exactement contraires. Elles fournissent des composantes  $Z_x dydz$  et  $Z'_x dydz$  à peu près égales, qui se composent en un couple de moment  $Z_x dx dy dz$  dont l'axe est dirigé suivant  $Oy$ .

De même les composantes  $F_z$  et  $F'_z$  donneront un couple d'axe dirigé suivant  $Oy$  et de moment  $X_z dx dy dz$ . Comme il n'y a pas d'autre couple de même

axe, l'équilibre exige que l'on ait  $X_z = Z_x$ . On démontrerait de même que l'on a :

$$Y_x = X_y, \quad Z_y = Y_z.$$

D'où le théorème fondamental :

Les forces  $F$  autour d'un point sur tous les plans qui passent par ce point, sont complètement déterminées par la connaissance de six quantités  $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$  au moyen des formules :

$$(1') \quad \begin{aligned} X &= mN_1 + nT_3 + pT_2 \\ Y &= mT_3 + nN_2 + pT_1 \\ Z &= mT_2 + nT_1 + pN_3. \end{aligned}$$

Nous devons poser :

$$\begin{aligned} X_x &= N_1, \quad Y_y = N_2, \quad Z_z = N_3. \\ X_y &= Y_x = T_3, \quad Y_z = Z_y = T_1, \quad Z_x = X_z = T_2. \end{aligned}$$

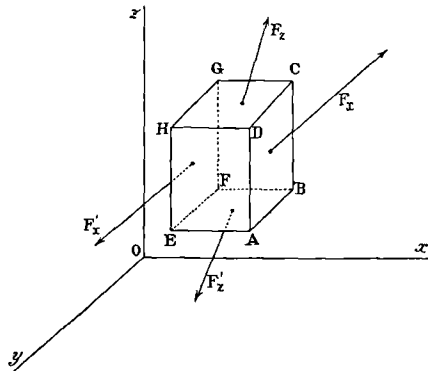


Fig. 60.

**124. Équilibre entre les forces élastiques et les forces extérieures.** — Sur les faces perpendiculaires à l'axe des  $x$  du parallélépipède sont appliquées deux tensions  $F_x$  et  $F'_x$ . Si nous admettons la continuité, les composantes de  $F_x$  étant  $N_1 dydz$ ,  $T_3 dydz$ ,  $T_2 dydz$ , les composantes de  $F'_x$  seront :

$$\begin{aligned} -\left(N_1 - \frac{\partial N_1}{\partial x} dx\right) dydz, & \quad -\left(T_3 - \frac{\partial T_3}{\partial x} dx\right) dydz, \\ & \quad -\left(T_2 - \frac{\partial T_2}{\partial x} dx\right) dydz. \end{aligned}$$

La résultante parallèle à l'axe des  $x$  a donc pour composantes :

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} d\omega, \quad \frac{\partial T_3}{\partial x} d\omega, \quad \frac{\partial T_2}{\partial x} d\omega,$$

en posant :  $d\omega = dx dy dz$ .

De même pour les autres couples de faces.

Admettons l'existence d'une force extérieure proportionnelle au volume et dont les composantes sont  $X_0 d\omega$ ,  $Y_0 d\omega$ ,  $Z_0 d\omega$ .

Les équations générales d'équilibre sont :

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} + X_0 = 0. \\ \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} + Y_0 = 0. \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} + Z_0 = 0. \end{cases}$$

Comme cas particulier de ces équations, nous retrouvons bien les équations du § 28. Mais en Hydrostatique, il n'existe qu'une pression normale, la même en chaque point quel que soit le plan  $m$ ,  $n$ ,  $p$  considéré. De plus nous comptons *positivement* : les *pressions* en Hydrostatique, les *tensions* en Élasticité.

Il faut donc faire :

$$N_1 = N_2 = N_3 = -p, \quad T_1 = T_2 = T_3 = 0.$$

**125. Plans principaux.** — Pour que la force  $F$  soit normale au plan sur lequel elle s'applique, nous avons à satisfaire :

$$X = mF, \quad Y = nF, \quad Z = pF.$$

Substituant dans (1'), il vient les conditions :

$$\begin{aligned} m(N_1 - F) + nT_3 + pT_2 &= 0, \\ mT_3 + n(N_2 - F) + pT_1 &= 0, \\ mT_2 + nT_1 + p(N_3 - F) &= 0, \end{aligned}$$

avec la condition :  $m^2 + n^2 + p^2 = 1$ .

On sait que ces quatre équations donnent 3 valeurs réelles pour  $F$  et trois systèmes de valeurs pour  $m$ ,  $n$ ,  $p$  correspondant à 3 droites rectangulaires.

*Il existe donc, en un point quelconque d'un milieu déformé quelconque, trois plans rectangulaires entre eux, tels que les forces élastiques correspondantes leur soient normales.*

On les appelle *plans principaux*.

Ces forces normales peuvent être des tractions ou des pressions, suivant que la force est dirigée vers la partie du milieu qu'on suppose enlevée (§ 121), ou vers la partie qu'on suppose maintenue. Une ou deux des forces principales peuvent être nulles. Par exemple, quand un cylindre homogène est tendu uniformément, sans compression sur ses faces latérales, un des plans principaux est normal à la direction de la tension; les deux forces principales normales à la direction de la tension sont nulles.

**126. Travail des forces élastiques.** — Supposons que le corps ne soit soumis qu'à des tractions superficielles  $X, Y, Z$ . Soit  $dS$  un élément de la surface,  $u, v, w$  les composantes de son déplacement supposé petit.

Admettons *seulement* que les déformations et par conséquent les déplacements  $u, v, w$  sont proportionnels aux forces. Dans ces conditions, le *double* du travail effectué par les forces extérieures a pour expression :

$$2W = \iint (Xu + Yv + Zw) dS,$$

étendue à toute la surface. En effet, nous n'avons qu'à représenter les forces et les déplacements par  $qX, qY, qZ, qu, qv, qw$ , et faire varier  $q$  de 0 à 1. Le travail qui correspond au passage de l'état  $q$  à l'état  $q + dq$  est :

$$\iint (qX \cdot udq + qY \cdot vdq + qZ \cdot wdq) dS.$$

Le travail nécessaire pour passer de l'état non déformé à l'état déformé est :

$$W = \int_0^1 q dq \cdot \iint (Xu + Yv + Zw) dS = \frac{1}{2} \iint (Xu + Yv + Zw) dS.$$

Nous pouvons donner une seconde expression de  $W$ . Soit  $d\omega$  un élément de volume; multiplions respectivement par  $ud\omega, vd\omega, wd\omega$  les équations (2) (dans lesquelles nous posons  $X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$ , les forces se réduisant aux forces élastiques); intégrons pour tout le volume. Il vient :

$$\iiint u \frac{\partial N_1}{\partial x} dx dy dz + u \frac{\partial T_3}{\partial y} dx dy dz + \dots = 0.$$

L'intégration par parties donne :

$$u \frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (uN_1) - \frac{\partial u}{\partial x} N_1.$$

Effectuant les intégrations précédentes possibles, il reste :

$$\int \int u(N_1 dy dz + T_2 dz dx + T_2 dx dy) + v(T_2 dy dz + \dots) + w(\dots) - \iiint \left[ N_1 \frac{\partial u}{\partial x} + N_2 \frac{\partial v}{\partial y} + \dots + T_1 \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \dots \right] d\omega.$$

Mais les parenthèses de l'intégrale double sont les produits  $X dS$ ,  $Y dS$ ,  $Z dS$  des composantes  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  (éq. (1) du § 123) de la force élastique à la surface par l'élément d'aire. L'intégrale représente donc le double du travail de ces forces. L'intégrale triple est donc une seconde expression du double de ce travail.

### Étude abstraite de la déformation.

**127. Expression approchée de la déformation supposée petite.** — Avant toute déformation, un point  $M$  a pour coordonnées  $x, y, z$ ; après la déformation ses coordonnées deviennent :

$$x + u, y + v, z + w,$$

$u, v, w$ , sont des fonctions continues des coordonnées et du temps, leurs valeurs numériques sont censées très petites.

Soit un autre point  $M'$  dont les coordonnées sont  $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ . Pendant que le point  $M$  se déplace de  $u, v, w$  nous admettons que le point  $M'$  se déplace de quantités  $u', v', w'$  données par les équations :

$$(3) \quad \begin{aligned} u' &= u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z, \\ v' &= v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \Delta z, \\ w' &= w + \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z, \end{aligned}$$

pourvu que  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  restent suffisamment petits. Les coefficients  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots$  sont dans ces équations *essentiellement constants*; ils ont les valeurs que prennent au point  $M$  les dérivées partielles des fonctions  $u, v, w$  par rapport aux coordonnées  $x, y, z$ .

Cette hypothèse implique non seulement que  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  sont petits, mais aussi que les dérivées  $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$  ont de très petites valeurs.

La théorie qu'on déduira de ces prémisses ne peut donc s'appliquer en tout état de cause qu'à de très petites déformations.

Exprimons dans ce système d'hypothèses les deux déformations fondamentales : l'allongement relatif d'une petite droite, la variation de l'angle que font deux petites droites. (On comparera utilement ces raisonnements avec ceux du § 96.)

128. **Allongement relatif d'une petite droite.** — La distance  $\overline{MM'}$  est  $L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ ; après la déformation elle devient  $L + \Delta L$  dans l'expression de laquelle je peux faire les simplifications suivantes, en vertu de la petitesse des déformations vis-à-vis des variations  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ .

$$\begin{aligned} L + \Delta L &= \sqrt{(\Delta x + u' - u)^2 + (\Delta y + v' - v)^2 + (\Delta z + w' - w)^2}, \\ &= \sqrt{L^2 + 2\Delta x(u' - u) + 2\Delta y(v' - v) + 2\Delta z(w' - w)}, \\ &= L + \frac{\Delta x}{L}(u' - u) + \frac{\Delta y}{L}(v' - v) + \frac{\Delta z}{L}(w' - w), \\ L\Delta L &= \Delta x(u' - u) + \Delta y(v' - v) + \Delta z(w' - w), \\ L\Delta L &= \overline{\Delta x^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \overline{\Delta y^2} \frac{\partial v}{\partial y} + \overline{\Delta z^2} \frac{\partial w}{\partial z} + \Delta x \Delta y \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &\quad + \Delta y \Delta z \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \Delta z \Delta x \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Prenons successivement pour la ligne  $\overline{MM'}$  les trois côtés  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  d'un parallélépipède parallèle aux axes.

$$\begin{aligned} \Delta L &= \Delta \cdot \Delta x = \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}, \text{ si le côté est parallèle à l'axe des } x, \\ \Delta L &= \Delta \cdot \Delta y = \Delta y \frac{\partial v}{\partial y} \quad \quad \quad \text{''} \quad \quad \quad \text{''} \quad \quad \quad y, \\ \Delta L &= \Delta \cdot \Delta z = \Delta z \frac{\partial w}{\partial z} \quad \quad \quad \text{''} \quad \quad \quad \text{''} \quad \quad \quad z \end{aligned}$$

Le volume qui était  $\Delta x \Delta y \Delta z$  devient :

$$\begin{aligned} \Delta x \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta y \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Delta z \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \\ \Delta x \Delta y \Delta z \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

La quantité  $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$  est la dilatation  $\frac{\Delta V}{V}$  du volume (Voir § 63 une autre démonstration).

129. **Variations des angles du parallélépipède.** — Plaçons le point M à l'origine des coordonnées et le point M' sur l'axe des  $x$ . Nous devons poser dans les formules (3) :

$$\Delta y = \Delta z = 0.$$

On a :

$$u' - u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x, \quad v' - v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x, \quad w' - w = \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x.$$

Les projections de la nouvelle arête  $\Delta x$  sur les axes sont :

$$\left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x, \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x.$$

Les cosinus de sa nouvelle direction avec les axes sont donc :

$$1 + \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial x}.$$

De même les cosinus de la nouvelle direction de l'arête  $\Delta y$  avec les axes sont :

$$\frac{\partial u}{\partial y}, \quad 1 + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Le cosinus du nouvel angle  $\left(\frac{\pi}{2} - 2g_z\right)$  des deux anciennes arêtes  $\Delta x$  et  $\Delta y$  est :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2g_z\right) = \sin 2g_z = 2g_z \\ = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Les décroissements des angles du parallélépipède s'expriment donc en fonction des quantités suivantes, qu'on appelle souvent *glissements* :

$$g_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad g_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad g_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

### Relation entre les forces et les déformations.

**130. Expressions générales. Corps homogène et isotrope.** — Nous avons vu tant dans les § précédents qu'au § 96 que les déformations peuvent s'exprimer comme *première approximation* au moyen des six fonctions

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}, \quad g_x, \quad g_y, \quad g_z.$$

Sans faire aucune autre hypothèse que d'admettre leur petitesse, on peut donc exprimer les N et les T en fonctions linéaires de ces quantités.

$$N_i = A_i \frac{\partial u}{\partial x} + B_i \frac{\partial v}{\partial y} + C_i \frac{\partial w}{\partial z} + D_i g_x + E_i g_y + F_i g_z, \\ T_i = \mathcal{A}_i \frac{\partial u}{\partial x} + \mathcal{B}_i \frac{\partial v}{\partial y} + \mathcal{C}_i \frac{\partial w}{\partial z} + \mathcal{D}_i g_x + \mathcal{E}_i g_y + \mathcal{F}_i g_z.$$

Donc en tout 36 coefficients.

Le corps étant supposé homogène, ils sont indépendants du point considéré et par conséquent de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Nous allons chercher à réduire leur nombre par des considérations de symétrie.

Supposons le corps *isotrope*.

S'il s'agit de  $N_1$ , composante normale exercée sur l'élément normal à l'axe des  $x$ , par raison de symétrie, le déplacement  $u$  et les



déplacements  $v$  et  $w$  jouent des rôles différents; mais ces derniers doivent entrer de la même manière dans l'expression des forces.

On a donc :

$$N_1 = A \frac{\partial u}{\partial x} + B \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + Dg_x + E(g_y + g_z);$$

$N_2$  et  $N_3$  s'obtiennent par permutation circulaire.

$$N_2 = A \frac{\partial v}{\partial y} + B \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + Dg_y + E(g_z + g_x),$$

et de même pour  $N_3$ .

S'il s'agit de  $T_1$ , lequel est à la fois composante tangentielle dans les plans normaux aux axes  $Oy$  et  $Oz$ ,  $v$  et  $w$  doivent jouer le même rôle et  $u$  un rôle différent. Nous avons encore :

$$T_1 = \mathfrak{A} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathfrak{B} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mathfrak{C}g_x + \mathfrak{E}(g_y + g_z).$$

Les 36 coefficients sont donc réduits à 8.

**131. Cas particuliers de la traction et de la torsion d'un cylindre.** — Pour aller plus loin, considérons deux cas particuliers pour lesquels nous connaissons par expérience les déformations et les forces qui les produisent. Leur étude permet de simplifier les équations précédentes, et prouve que certains coefficients sont identiquement nuls.

1° *Traction simple.* — Un cylindre homogène est uniformément tendu par un poids. Soit  $z$  l'axe parallèle à la tension. Faisons coïncider l'axe du cylindre déformé avec l'axe des  $z$  et son extrémité invariable avec le plan des  $xy$ .

L'expérience (§ 103 et sq) donne pour la déformation les conditions géométriques :

$$u = -ax, \quad v = -ay, \quad w = cz,$$

puisque nous savons que le cylindre, tout en s'allongeant, diminue de diamètre (§ 106).

Toutes les dérivées  $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$  sont nulles, sauf

$$\frac{\partial w}{\partial z} = c, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -a.$$

Il est d'ailleurs évident que les conditions mécaniques sont :

$$N_1 = N_2 = T_1 = T_2 = T_3 = 0.$$

Nous devons donc conclure que les coefficients  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{B}$  sont identiquement nuls.

Nous reviendrons plus loin sur les autres conséquences à tirer.

2° *Torsion simple.* — Le cylindre est tordu par un couple normal à l'axe des  $z$ . Exprimons les déformations étudiées au § 110. L'extré-

mité encastrée du cylindre coïncide avec le plan  $xy$ ; pour  $z=0$ , les déformations sont nulles, elles sont toutes choses égales d'ailleurs proportionnelles à  $z$ . La torsion rapportée à l'unité de longueur et mesurée en radians est  $\alpha$ .

$$u = -xyz, \quad v = xz, \quad w = 0.$$

D'où 
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \text{ identiquement.}$$

Considérons un point du plan  $xz$ , on a  $y=0$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = x, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \alpha z.$$

D'ailleurs, pour ce point, on doit avoir :

$$N_1 = N_2 = N_3 = 0, \quad T_2 = T_3 = 0,$$

ce qui implique identiquement

$$D = E = 0, \quad \mathcal{E} = 0.$$

En définitive, posant :

$$B = \lambda, \quad A = \lambda + 2\mu, \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

il reste :

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N_2 = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad N_3 = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$T_1 = (\lambda)g_x, \quad T_2 = (\lambda)g_y, \quad T_3 = (\lambda)g_z,$$

soit trois coefficients distincts.

La réduction n'est pas encore complète. Les formules que nous cherchons doivent être indépendantes du système d'axes de coordonnées choisi, puisque *par hypothèse* le corps est *isotrope*, et que, par conséquent, rien ne fixe *a priori* le choix des axes.

Donnons un certain système de forces produisant certaines déformations concrètes; choisissons deux systèmes d'axes de coordonnées  $x, y, z$  et  $x', y', z'$ .

Nous devons avoir dans le premier et dans le second systèmes :

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N'_1 = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u'}{\partial x'},$$

et de même pour les autres forces <sup>1</sup>.

Or nous pouvons passer des  $N$  et des  $T$  aux  $N'$  et aux  $T'$  par un changement de coordonnées; nous pouvons de même passer des  $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$  aux  $\frac{\partial(u', v', w')}{\partial(x', y', z')}$ . Nous pouvons chercher à quelle condition nous retrouvons les mêmes formes d'équations entre les forces et les déformations, quel que soit le système d'axes. Nous ne ferons

<sup>1</sup>  $\theta$  représentant la dilatation conserve la même valeur quel que soit le système d'axes.

pas le calcul, qui ne présente d'ailleurs aucune difficulté : la condition à satisfaire est :  $(h) = \mu$ .

En définitive, dans un corps homogène et isotrope et dans le système d'hypothèses admis, il existe entre les forces et les déformations les relations :

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N_2 = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad N_3 = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$T_1 = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad T_2 = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad T_3 = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

contenant deux coefficients distincts  $\lambda$  et  $\mu$ .

**132. Expressions du module E et du coefficient de Poisson  $\sigma$  en fonction des coefficients  $\lambda$  et  $\mu$ .** — Reprenons l'exemple de la traction simple traité incidemment au § précédent.

Admettons comme conditions géométriques :

$$u = -ax, \quad v = -ay, \quad w = cz,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -a, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = c, \quad \theta = -2a + c,$$

Écrivons que les pressions normales  $N_1$  et  $N_2$  sur les faces latérales sont nulles, et cherchons l'expression de la tension  $N_3$  suivant l'axe des  $z$ .

$$N_1 = N_2 = (c - 2a)\lambda - 2\mu a = 0, \quad N_3 = (c - 2a)\lambda + 2\mu c.$$

Par définition, le module E (§ 103) et le coefficient de Poisson  $\sigma$  (§ 106) ont pour expressions :

$$E = \frac{N_3}{c} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \sigma = \frac{a}{c} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad \sigma = \frac{E}{2\mu} - 1.$$

Il est clair que  $\lambda$  et  $\mu$  prenant toutes les valeurs positives possibles,  $\sigma$  ne peut varier qu'entre 0 et 0,5.

Pour  $\sigma = 0$ ,  $E = 2\mu$ ; pour  $\sigma = 0,5$ ,  $E = 3\mu$ .

Le rapport  $E:\mu$  ne peut donc varier qu'entre 2 et 3.

*Mesure de  $\sigma$ .* — On peut appliquer la formule  $E:2\mu = 1 + \sigma$  à la mesure de  $\sigma$ ; nous avons déjà indiqué plus haut une méthode (§ 118).

Il est plus simple d'étudier simultanément la flexion plane d'un barreau cylindrique (§ 115) et sa torsion (§ 110).

Transversalement à l'une des extrémités d'un barreau maintenu horizontalement par l'autre extrémité dans un étau, est fixée une tige rigide dont l'extrémité est elle-même chargée d'un poids. Il se produit donc à la fois une flexion et une torsion du barreau dont il est facile de calculer les grandeurs.

Soient  $L$  la longueur du barreau,  $P$  le poids qui le fléchit,  $f$  la flèche. Soit  $C$  le couple qui le tord de l'angle  $\alpha$ ; on a :

$$P = E \cdot \frac{3\pi R^4}{4L^3} f, \quad C = \frac{\pi}{2} R^4 \frac{\mu \alpha}{L}; \quad \frac{P}{C} = \frac{3f}{L^2 \alpha} \frac{E}{2\mu} = \frac{3f}{L^2 \alpha} (1 + \sigma).$$

Les déterminations sont faites par réflexion sur un miroir fixé horizontalement à l'extrémité du barreau et parallèlement à son axe. La flexion et la torsion produisent des déplacements rectangulaires du faisceau réfléchi. En visant un quadrillage sur verre, la mesure de  $\sigma$  se ramène à une seule lecture.

**133. Coefficient de compressibilité cubique.** — Soumettons le solide à une pression uniforme  $N$ . Il se transforme en un solide semblable; en supposant fixe l'origine des coordonnées, sa déformation est définie par les équations :

$$u = -ax, \quad v = -ay, \quad w = -az.$$

Les forces tangentielles  $T$  sont nulles en tous points, et l'on a :

$$-N = (3\lambda + 2\mu)a, \quad \theta = -3a.$$

Le coefficient de compressibilité  $\alpha$  est défini (comparer au § 33) comme le quotient de la *condensation* par unité de volume (§ 66), par la *pression* par unité de surface :

$$\alpha = \frac{\theta}{N} = \frac{3}{3\lambda + 2\mu} = \frac{3}{E} (1 - 2\sigma).$$

Pour que  $\alpha$  soit positif, il faut que  $\sigma$  soit compris entre 0 et 0,5, condition qui permet à  $\lambda$  et  $\mu$  de prendre toutes les valeurs positives comprises entre 0 et  $\infty$ .

**134. Équilibre d'élasticité d'une enveloppe sphérique.** — Nous allons étudier deux cas particuliers d'équilibre élastique dont l'importance pratique et théorique est considérable. En dehors des applications industrielles des formules que nous obtiendrons, cette étude aura l'avantage de familiariser le lecteur avec la théorie de l'Élasticité qui semble, on ne sait pourquoi, un épouvantail.

Voici le premier problème : *Une couche sphérique homogène de rayons intérieur  $R_0$  et extérieur  $R_1$  est soumise à des pressions intérieure  $p_0$  et extérieure  $p_1$ . On demande les déformations et les forces qui en résultent.*

Par raison de symétrie, il est évident que les points se déplacent radialement pendant la déformation. Soit  $r$  la distance d'un point au centre de la sphère avant la déformation; elle devient  $r + U$ . Tout doit s'exprimer en fonction de  $U$  et  $\frac{dU}{dr}$ .

Il est non moins évident par raison de symétrie qu'en chaque point deux des tensions principales sont égales et que la troisième est diri-

gée suivant le rayon. Nous la représenterons par  $N$ , et les autres égales et normales à celle-ci par  $N'$ .

L'expression de  $N$  et  $N'$  en fonction des déformations s'obtient très aisément en considérant la forme même des expressions générales du § 131.

$$N_i = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}.$$

La condensation  $\theta$  a une définition indépendante du système de coordonnées; quant au second terme, il exprime le produit par  $2\mu$  de la dilatation parallèlement à  $N_i$ .

Donc il n'est pas utile de faire d'ennuyeux changements de coordonnées pour trouver l'expression des forces que nous cherchons.

Calculons d'abord  $\theta$ . Le volume d'une couche sphérique de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$  est d'abord  $4\pi r^2 dr$ ; après la déformation, elle devient :

$$4\pi(U+r)^2 \left( dr + \frac{dU}{dr} dr \right); \text{ d'où: } \theta = \frac{2U}{r} + \frac{dU}{dr};$$

d'où immédiatement :

$$N = \lambda\theta + 2\mu \frac{dU}{dr} = (\lambda + 2\mu) \frac{dU}{dr} + 2\lambda \frac{U}{r}. \quad (1)$$

Pour avoir  $N'$  il faut calculer la dilatation dans le sens normal au rayon. Or une petite droite de longueur  $\alpha r$ , qui était à la distance  $r$  et sous-tendait un angle  $\alpha$ , se trouve maintenant à la distance  $r+U$  et sous-tend le même angle. Sa longueur est devenue  $\alpha(r+U)$ , la dilatation est  $U:r$ ; d'où :

$$N' = \lambda\theta + 2\mu \frac{U}{r} = 2(\lambda + \mu) \frac{U}{r} + \lambda \frac{dU}{dr}. \quad (2)$$

Cherchons enfin l'équation d'équilibre d'un élément conique d'angle au sommet  $2\alpha$ , et contenu entre deux sphères de rayons  $r$  et  $r+dr$ . La pression  $N$  agit sur la face intérieure d'aire  $\pi\alpha^2 r^2$ , la pression  $N + \frac{dN}{dr} dr$  agit sur la face  $\pi\alpha^2 (r+dr)^2$ . Enfin la pression  $N'$  agit sur la face latérale d'aire  $2\pi\alpha r dr$ ; cette action admet une composante radiale dirigée vers l'extérieur  $2\pi\alpha r dr \cdot \alpha N'$ ; d'où l'équation d'équilibre :

$$\begin{aligned} \pi\alpha^2 r^2 N + 2\pi\alpha^2 r dr \cdot N' - \pi\alpha^2 (r+dr)^2 \left( N + \frac{dN}{dr} dr \right) &= 0, \\ \frac{dN}{dr} + \frac{2}{r} (N - N') &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Substituant à  $N$  et  $N'$  les valeurs (1) et (2), il vient :

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{dU}{dr} - \frac{2U}{r^2} = 0, \quad U = cr + \frac{b}{r^2},$$

$$\theta = 3c, \quad N = (3\lambda + 2\mu)c - 4\mu \frac{b}{r^3}, \quad N' = (3\lambda + 2\mu)c + 2\mu \frac{b}{r^3},$$

ce qui résout complètement le problème. L'enveloppe se dilate uniformément, puisque  $\theta$  est constant. Déterminons  $c$  et  $b$  par les conditions imposées :

$$b = \frac{1}{4\mu} \frac{R_0^3 R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} (p_0 - p_1), \quad c = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \cdot \frac{R_0^3 p_0 - R_1^3 p_1}{R_1^3 - R_0^3}.$$

D'une manière générale, le déplacement d'une molécule n'est pas proportionnel à sa distance au centre. Cela n'a lieu que si  $b = 0$ .

Il en est d'abord ainsi quand  $R_0 = 0$ ; il s'agit d'une sphère pleine. Le rayon extérieur subit une variation relative égale à

$$c = \frac{-p_1}{3\lambda + 2\mu}.$$

La variation relative de volume est trois fois plus grande; nous retrouvons le problème du § 133 et la valeur du coefficient de compressibilité.

Si l'enveloppe est également pressée à l'intérieur et à l'extérieur,  $b$  est encore nul. Tout se passe comme si la sphère était pleine, ce qui est évident *à priori*.

La sphère pressée à l'intérieur est tendue par la force  $N'$  dans le sens tangentiel; la plus grande valeur de  $N'$  a lieu vers la paroi intérieure : c'est là que la déformation permanente a chance de commencer.

**135. Équilibre d'élasticité d'un tube cylindrique.** — Pour trouver les déformations, nous allons suivre la même marche, ce qui nous permettra d'être bref. Les rayons du cylindre sont  $R_0$  et  $R_1$ , les pressions  $p_0$  et  $p_1$ . Une des extrémités du cylindre est fixe. Nous admettons qu'il est fermé par des bases planes et que dans la déformation les sections droites demeurent des sections droites.

Les tensions principales sont : l'une  $N$ , dirigée suivant le rayon; la seconde  $N'$ , suivant la génératrice du cylindre; la troisième  $N''$ , à l'intersection de la section droite et du plan tangent au cylindre concentrique au tube et passant par le point considéré.

Chaque point est défini par les coordonnées  $r$  distance à l'axe et  $z$  distance à l'extrémité fixe; les déplacements correspondants sont  $U$  et  $W$ . On trouve d'abord aisément :

$$\theta = \frac{dU}{dr} + \frac{U}{r} + \frac{dW}{dz}.$$

Puis, par des considérations déjà exposées plus haut :

$$N = (\lambda + 2\mu) \frac{dU}{dr} + \lambda \left( \frac{U}{r} + \frac{dW}{dz} \right), \quad (1)$$

$$N' = (\lambda + 2\mu) \frac{dW}{dz} + \lambda \left( \frac{dU}{dr} + \frac{U}{r} \right), \quad (2)$$

$$N'' = (\lambda + 2\mu) \frac{U}{r} + \lambda \left( \frac{dU}{dr} + \frac{dW}{dz} \right). \quad (3)$$

Cherchons enfin l'équation d'équilibre d'un petit cône contenu entre deux plans distants de  $dz$  et entre deux plans méridiens faisant l'angle  $\alpha$ . Procédant comme plus haut, il vient :

$$\frac{dN}{dr} + \frac{N - N''}{r} = 0. \quad (4)$$

Substituons à  $N$  et  $N''$  leurs valeurs tirées de (1) et de (3) :

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} - \frac{U}{r^2} = 0, \quad U = ar + \frac{b}{r}.$$

Enfin, l'hypothèse admise plus haut donne  $W = cz$ ; d'où :

$$\begin{aligned} N &= 2(\lambda + \mu)a + \lambda c - 2\mu \frac{b}{r^2}, \\ N' &= (\lambda + 2\mu)c + 2\lambda a, \quad \theta = 2a + c, \\ N'' &= 2(\lambda + \mu)a + \lambda c + 2\mu \frac{b}{r^2}. \end{aligned}$$

Le problème est complètement résolu. Il faut seulement déterminer  $a$ ,  $b$ ,  $c$  par les conditions imposées.

La pression qui s'exerce sur la base intérieure est  $\pi R_0^2 p_0$ ; sur la base extérieure,  $\pi R_1^2 p_1$ . La tension  $N'$  que nous avons admise uniforme, est donc fournie par la formule :

$$(\pi R_1^2 - \pi R_0^2)N' = \pi R_1^2 p_1 - \pi R_0^2 p_0.$$

Nous connaissons d'ailleurs les valeurs de  $N$  pour  $R = R_0$  et  $R = R_1$ . Les calculs très faciles effectués, il vient :

$$a = c = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{R_1^2 p_1 - R_0^2 p_0}{R_1^2 - R_0^2}, \quad b = \frac{1}{2\mu} \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_1^2 R_0^2} (p_1 - p_0), \quad \theta = 3a,$$

L'enveloppe est donc encore uniformément dilatée. Si on exerce une *pression* intérieure, la force  $N''$  correspond à une traction dont la valeur maxima est encore près de la paroi intérieure.

Le calcul des variations du volume intérieur dans tous les cas particuliers est trop simple pour qu'il soit utile d'insister.

On trouve immédiatement :

$$N'' = \frac{R_1^2 p_1 - R_0^2 p_0}{R_1^2 - R_0^2} - \frac{R_1^2 R_0^2}{R_1^2 - R_0^2} \frac{p_1 - p_0}{r^2}.$$

Soit  $p_1$  petit devant  $p_0$ ; faisons  $r = R_0$ , il vient :  $N'' = p_0$ . Donc il ne suffit pas d'augmenter l'épaisseur d'un cylindre pour qu'il puisse supporter une pression intérieure quelconque, car la traction  $N''$  est sensiblement égale à cette pression, *quelle que soit l'épaisseur*. Pour qu'un cylindre puisse supporter une pression intérieure de 1000 atmosphères (1000 kilogrammes par centimètre carré, 10 kilogrammes par millimètre carré), il faut qu'il puisse supporter cette traction sans se déformer. S'il en est incapable, ce n'est pas parce qu'on augmentera l'épaisseur que le cylindre résistera.

Pour étudier la compressibilité des liquides, on est obligé de les enfermer dans des vases qui sont généralement des cylindres en verre terminés par des calottes sphériques. On admet que les hémisphères se déforment comme s'ils faisaient partie de la même sphère, et que le cylindre se déforme comme s'il faisait partie d'un cylindre indéfini. Il est difficile de savoir à quelle erreur correspondent ces hypothèses.

**136. Détermination de la compressibilité cubique des solides et des liquides.** — Pour déterminer la compressibilité cubique d'une matière solide, on s'arrange pour exercer *extérieurement* une pression connue sur un vase cylindro-sphérique de cette matière. Un tube fin calibré est fixé sur une des calottes; l'appareil est rempli d'eau; le déplacement de l'eau dans le tube donne la variation de volume. La pression extérieure est mesurée par un manomètre.

La variation de volume ne donne pas directement le coefficient de compressibilité cubique  $\alpha$ ; nous savons que dans ces conditions le changement de volume est plus grand que si le liquide intérieur était remplacé par un noyau solide de la matière du vase.

Une seconde expérience est nécessaire, par exemple, la mesure du coefficient E sur une barre de la même matière.

Pour déterminer la compressibilité d'un liquide, on remplit le vase précédent de ce liquide; on mesure :

1<sup>o</sup> la diminution de volume de l'enveloppe lorsque le vase ne supporte de pression qu'à l'extérieur. Connaissant d'ailleurs le coefficient E, on déduit de cette expérience les coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  relatifs au solide formant l'enveloppe.

2<sup>o</sup> le changement *apparent* de volume quand la pression s'exerce à l'intérieur et à l'extérieur du vase. La connaissance de  $\lambda$  et de  $\mu$  permet de calculer le changement de volume *réel* de l'enveloppe. L'expérience donne donc le coefficient de compressibilité cubique du liquide.

**137. Théorème de Clapeyron.** — Nous avons démontré que le travail des forces élastiques dans un milieu quelconque, ou, si l'on veut, l'énergie potentielle W d'un milieu quelconque déformé, a pour expression (§ 126) :

$$2W = \iiint \left[ N_1 \frac{\partial u}{\partial x} + N_2 \frac{\partial v}{\partial y} + \dots + T_1 \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \dots \right] d\omega.$$

Supposons le milieu homogène et isotrope, substituons aux déformations leur expression en fonction des N et des T (§ 131).

On trouve facilement, en posant :

$$N_1 + N_2 + N_3 = F, \quad N_2 N_3 + N_3 N_1 + N_1 N_2 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2 = G^2 :$$

$$2W = \iiint \left( \frac{F^2}{E} - \frac{G^2}{\mu} \right) d\omega,$$

où E est le module d'allongement.



On pourrait, en éliminant les forces, donner de  $W$  une expression ne contenant que les déformations.

## ONDES PLANES DANS UN SOLIDE ISOTROPE

138. **Propagation d'une onde plane dans un milieu isotrope indéfini.** — Reprenons les équations (2) du § 124; substituons aux  $N$  et aux  $T$  leurs valeurs en fonction des déformations, et supposons que  $X_0, Y_0, Z_0$  sont les forces d'inertie. Si  $\rho$  est la densité de la matière, on trouve :

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Telles sont les équations générales de la propagation d'un mouvement à l'intérieur d'un solide indéfini isotrope dont les déformations sont petites. Nous les appliquerons à la propagation des *ondes planes*. Le solide étant isotrope, nous pouvons prendre pour axe des  $x$  la direction de propagation.

ONDES LONGITUDINALES. — Supposons d'abord que le mouvement s'exécute suivant la direction de propagation :

$$v = w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

puisque l'onde est plane, c'est-à-dire puisque le mouvement est identique à chaque instant en tous les points d'un plan normal à la direction de propagation. Il reste :

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Nous retrouvons une forme d'équation différentielle déjà rencontrée. La vitesse de propagation est :

$$V_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}.$$

Elle n'est pas identique à la vitesse de propagation longitudinale

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\S 108)$$

le long d'une barre. Cela tient à ce qu'un milieu indéfini n'est pas libre, comme une barre, de se contracter latéralement lorsqu'il s'allonge. La dilatation longitudinale  $\frac{\partial u}{\partial x}$  ne peut aller sans des tensions latérales.

On a en effet :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad N_1 = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N_2 = \lambda \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N_3 = \lambda \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Pour produire le même allongement  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , il faut une tension normale plus grande que si l'on avait  $N_2 = N_3 = 0$ . La vitesse  $V_1$  est plus grande que la vitesse  $V$ .

ONDES TRANSVERSALES. — Supposons en second lieu que le mouvement s'exécute dans le plan normal à la direction de propagation; il faut poser :

$$u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

puisque l'onde est plane;  $\theta = 0$ .

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Nous retrouvons la même forme; la vitesse de propagation est :

$$V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

C'est une caractéristique des solides de transmettre des ondes transversales; nous verrons qu'en Optique on est conduit à les supposer telles, l'éther est donc assimilé à un solide.

En particulier, le milieu peut transmettre la vibration elliptique

$$w = w_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_0} \right), \quad v = v_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_0} - \alpha \right),$$

$\lambda_0$  (qui représente ici la longueur d'onde et n'a aucun rapport avec le coefficient  $\lambda$  ci-dessus défini; il n'y a aucune ambiguïté à craindre dans l'emploi de la lettre  $\lambda$  dans ces deux sens; ils sont d'ailleurs suffisamment distingués par l'indice) est déterminé par la condition

$$\lambda_0 = V_2 T.$$

$\alpha$  est une constante,  $2\pi\alpha$  mesure la différence de *phase* entre les composantes  $v$  et  $w$ .

139. **Distribution de l'énergie dans une onde longitudinale sinusoïdale.** — L'onde longitudinale, plane et indéfinie dans le sens  $yz$ , a pour expression :

$$u = u_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_0} \right),$$

où  $\lambda_0$  désigne la longueur d'onde.

L'énergie cinétique  $C$  contenue dans un cylindre de longueur  $\lambda_0$  et de section droite égale à un centimètre carré, est :

$$C = \frac{\rho}{2} \int_0^{\lambda_0} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{u_0^2 \rho}{2} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \int_0^{\lambda_0} \cos^2 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_0} \right) dx = \frac{\rho u_0^2 \pi^2 \lambda_0}{T^2}.$$

Pour calculer l'énergie potentielle correspondante, appliquons le théorème de Clapeyron. Les tensions  $T_1, T_2, T_3$  sont nulles. Les tensions normales égales  $N_2$  et  $N_3$  sont données par la relation (§ 138) :

$$N_2 : N_1 = \lambda : (\lambda + 2\mu).$$

On a donc :

$$F = N_1 \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad G^2 = N_1^2 \frac{3\lambda^2 + 4\lambda\mu}{(\lambda + 2\mu)^2};$$

$$\text{d'où : } P = \int_0^{\lambda_0} \frac{\lambda + 2\mu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx, \quad V = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \frac{\lambda_0}{T}.$$

Il reste, tous calculs faits :  $P = C$ . Ainsi l'énergie potentielle moyenne est égale à l'énergie cinétique moyenne.

On trouve le même résultat pour une onde qui se déplace longitudinalement le long d'une *barre* cylindrique. Les tensions normales latérales sont alors nulles :  $G = 0$ .

La quantité  $F$  se réduit à la tension parallèle à la direction de propagation :

$$N_1 = E \frac{\partial u}{\partial x}.$$

On a par centimètre carré de section droite :

$$H = \int_0^{\lambda_0} \frac{E}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx, \quad V = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{\lambda_0}{T};$$

d'où le résultat annoncé.

**140. Distribution de l'énergie dans une onde transversale sinusoïdale.** — Ne considérons d'abord que la composante du mouvement parallèle à l'axe des  $z$ ; elle a pour expression :

$$w = w_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_0} \right).$$

L'énergie cinétique  $C$  contenue dans un cylindre de longueur  $\lambda_0$  parallèlement à la direction  $Ox$  de propagation et de section droite égale à un centimètre carré, est :

$$C = \frac{\rho}{2} \int_0^{\lambda_0} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{w_0^2 \rho}{2} \frac{4\pi^2}{T^2} \int_0^{\lambda_0} \cos^2 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_0} \right) dx = \frac{\rho w_0^2 \pi^2 \lambda_0}{T^2}.$$

L'énergie potentielle se tire immédiatement du théorème de Clapeyron :

$$P = \int_0^{\lambda_0} \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{\rho w_0^2 \pi^2 \lambda_0}{T^2},$$

grâce à la relation 
$$V = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \frac{\lambda_0}{T}.$$

Donc l'énergie potentielle moyenne est égale à l'énergie cinétique moyenne.

L'énergie totale moyenne par unité de volume est  $\frac{2\rho\pi^2w_0^2}{T^2}$ , proportionnelle au carré de l'amplitude et en raison inverse du carré de la période.

*Représentation de la déformation.* — Pendant la propagation de l'onde plane  $w$ , tous les points d'un plan normal à l'axe des  $x$  subissent simultanément le même déplacement  $w$  parallèle à l'axe des  $z$ . Tous les points qui sont primitivement sur une droite parallèle à l'axe des  $x$  sont à chaque instant sur une sinusoïde.

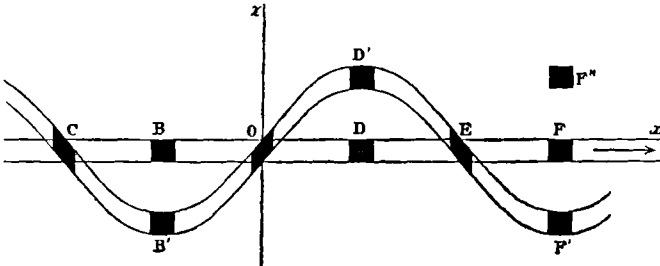


Fig. 61.

Considérons le milieu primitivement compris entre deux plans parallèles au plan  $xOz$ , et deux autres plans parallèles au plan  $xOy$  : étudions la déformation de la baguette ainsi délimitée. De rectiligne qu'elle était primitivement, elle est passée sous l'influence de l'onde à la forme sinusoïdale, tout en demeurant entre les plans parallèles à  $xOz$  qui la déterminent.

Pendant la propagation dans le sens de la flèche, tout se passe comme si la sinusoïde se déplaçait dans ce sens. Donc le petit prisme primitivement en F, actuellement en F', et dont la déformation actuelle est nulle, prendra successivement toutes les positions comprises entre F' et F'' et toutes les formes F'ED'OB'C.

La déformation mesurée par la variation des angles dièdres (toujours supposée très petite) est nulle quand le déplacement est maximum ; elle est maxima quand le déplacement est nul.

Analytiquement, la chose va de soi.

La déformation est mesurée par  $\frac{\partial w}{\partial x}$ , et l'on a :

$$w = w_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_0} \right), \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot w_0 \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

On peut représenter la déformation par un vecteur parallèle aux arêtes non déformées des petits volumes considérés. Il est par conséquent dirigé dans le plan de l'onde, et normal à la direction du vecteur  $w$  qui représente le déplacement, ou du vecteur  $\frac{\partial w}{\partial t}$  qui représente la vitesse.

Les déformations égales et inverses représentées en O et en E sont figurées par deux vecteurs égaux, normaux au plan de la figure et dirigés en sens inverses.

En définitive, nous pouvons représenter complètement ce qui se passe dans la propagation de l'onde plane transversale à l'aide de deux vecteurs à angle droit, situés dans le plan de l'onde, et représentant respectivement la *vitesse* et la *déformation*.

Si l'énergie moyenne totale est constante, elle est à chaque instant très inégalement répartie entre les énergies cinétique et potentielle. Ainsi, au moment auquel correspond la figure, la tranche perpendiculaire à  $Ox$  et passant par le point O est animée de sa vitesse maxima, et simultanément subit la déformation maxima; la tranche passant par B a une vitesse et une déformation nulles. C'est analytiquement évident : les quantités  $\frac{\partial w}{\partial t}$  et  $\frac{\partial w}{\partial x}$  sont synchrones.

Nous supposons que le déplacement est rectiligne, que l'onde est *rectilignement polarisée*. Tout ce qui précède s'applique aussi au mouvement vibratoire le plus général compatible avec les hypothèses, c'est-à-dire à l'onde *elliptiquement polarisée*. Les déformations définies et représentées comme nous l'avons fait, se composent; la déformation résultante est représentée par le vecteur résultant. Dans le cas où le vecteur *vitesse* est le rayon vecteur d'une ellipse, le vecteur *déformation* est aussi le rayon vecteur d'une ellipse. Sa composante parallèle à l'axe des  $y$  est  $\frac{\partial w}{\partial x}$ , sa composante parallèle à l'axe des  $z$  est  $\frac{\partial v}{\partial x}$ .

## CHAPITRE IX

### DÉFORMATIONS PERMANENTES. FROTTEMENTS

141. **Déformations permanentes. Courbe de traction.** — Opérons sur un fil métallique invariablement fixé par son extrémité supérieure et portant attaché à son extrémité inférieure un seau dans lequel nous pouvons faire écouler de l'eau. Le seau est équilibré à l'aide d'un contrepoids et de deux poulies sur lesquelles passe une cordelette le reliant au contrepoids. On peut donc partir d'une charge à peu près nulle et la faire croître à son gré. Supposons le fil bien

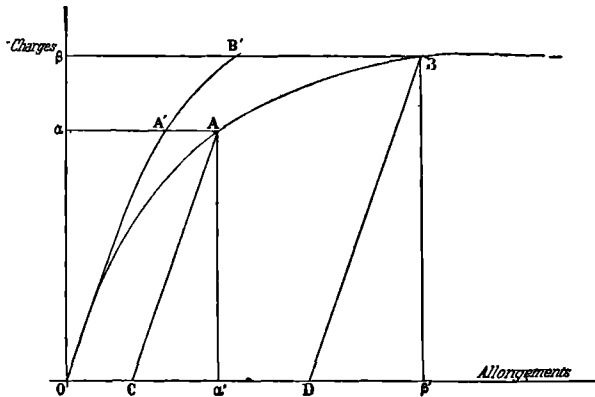


Fig. 62.

recuit : nous versons de l'eau dans le seau et nous déterminons la relation qui existe entre l'allongement et la charge.

L'expérience montre que *dès les plus petites charges*, le fil s'allonge d'une manière très apparente ; la courbe OAB (fig. 62) représente le phénomène. A mesure que la charge croît, une même variation de charge produit des allongements de plus en plus grands. Si le fil est bien recuit, on peut obtenir des allongements énormes, de 40 % par exemple pour le cuivre, avant que le fil casse : c'est-à-dire que le fil, ayant primitivement 1 mètre de longueur, ne casse que lorsqu'il a atteint 1<sup>m</sup>,40.

142. **Déformations permanentes NON VISQUEUSES. Écrouissage. Principe de Coulomb.** — Lorsque la charge atteint la valeur quelconque  $Ox$ , et que par conséquent le point figuratif de l'expérience est en A, diminuons-la jusqu'à la ramener à être nulle. La longueur du fil diminue : tout l'allongement n'est pas permanent. De plus, la courbe AC est sensiblement rectiligne : le fil est devenu parfaitement élastique entre la charge nulle et la charge  $Ox$ . Si on augmente de nouveau la charge, la courbe figurative est de nouveau CA, tant que la charge ne dépasse pas la valeur  $Ox$ .

Dépassons la charge  $Ox$  : nous décrivons la courbe AB qui est la prolongation de la courbe OA, celle même que nous aurions obtenue en une fois, si nous ne nous étions pas arrêtés au point A. Si nous déchargeons au point B, le fil est devenu parfaitement élastique jusqu'à la charge  $O\beta$  : la courbe parcourue est la droite BD.

L'allongement et le raccourcissement élastique ( $D\beta'$  pour la charge  $O\beta$ ) sont très petits, comme nous le savons : la figure 62 n'est pas faite à l'échelle ; les droites AC et BD seraient presque verticales.

Les règles que nous venons d'énoncer ne sont que de premières approximations ; en vérité il n'existe jamais de points anguleux, mais des raccordements plus ou moins courts.

*Écrouissage.* Nous avons appris par ce qui précède à écrouir un métal : il était mou au début ; nous l'avons allongé, il est devenu moins malléable. Simultanément, il est devenu élastique, capable de déformations purement temporaires et proportionnelles au poids tenseur. Il ne jouit de cette propriété que pour des charges inférieures à celles qu'il a déjà subies : on dit qu'il a une limite d'élasticité, et cette limite, qui n'a de sens que comme première et assez grossière approximation, est précisément la plus grande des charges précédemment imposées.

On remarquera que le mot *écrouissage* a un sens très vague : il est équivalent de dire qu'un métal s'écrouit ou que sa matière se modifie. *Un corps écroui signifiera donc un corps dont la matière a été plus ou moins modifiée par des déformations permanentes.*

Il ne faut pas croire que parce qu'un métal s'est allongé, il est devenu moins solide. C'est tout le contraire ; un allongement lui permet ensuite de subir, sans déformation permanente, les charges qui antérieurement l'avaient déformé.

Si le fil n'avait pas été recuit, on aurait obtenu des courbes plus redressées, telles que  $OA'B'$ . Si, en particulier, le fil a été passé à la filière, il peut être parfaitement écroui, incapable de s'allonger d'une manière permanente, sans qu'il en résulte immédiatement une rupture.

Bien entendu, dans ces conditions, la charge de rupture dépend du métal, et mesure ce qu'on appelle sa *ténacité*, propriété fort mal définie, la rupture se faisant plus ou moins tôt suivant l'homo-

générité initiale de matière et de forme. Ainsi un fil de fer de  $1\text{ mm}^2$  de section ne peut supporter plus de 60 kilogrammes sans se rompre ; un fil de cuivre n'en supporte guère que 40. Les ingénieurs ont à se préoccuper de ne pas dépasser, dans l'emploi des matériaux, leur charge de rupture. Comme, d'autre part, ces matériaux ne sont pas bien homogènes, on reste pratiquement fort au-dessous ; on ne dépasse guère le quart ou le tiers de la charge que les matériaux seraient censés devoir supporter.

*Influence de la vitesse de déformation.* Cette influence est généralement très petite et négligeable comme première approximation.

*Courbes de traction des fers et aciers.* Certains fers donnent des

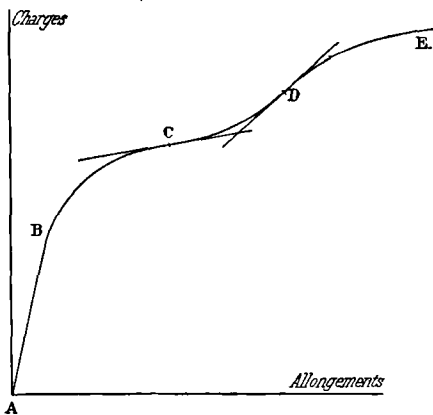


Fig. 63.

courbes d'une forme particulière (fig. 63). La courbe à charge croissant proportionnellement au temps est au début, suivant ABC, tout à fait analogue à la courbe de traction des métaux tels que le cuivre, l'argent, le platine. Mais à partir du point C, elle remonte suivant CD ; elle reprend alors suivant DE une courbure de sens habituel. Elle possède donc deux points d'inflexion en C et en D ; par conséquent, un minimum d'inclinaison  $dP : dL$  en C et un maximum d'inclinaison en D.

**143. Déformations permanentes VISQUEUSES.** — Étudions maintenant la courbe de charge et de décharge d'un fil de plomb,

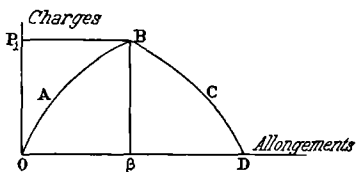


Fig. 64.

d'étain et encore mieux d'eutectique de plomb et d'étain qui est caractéristique à cet égard. La courbe de charge OAB ne présente rien de particulier ; elle ressemble aux courbes de première traction des métaux usuels, tels que le cuivre, l'argent, le platine. Mais parvenus en un point B, déchargeons progressivement. La courbe de décharge est BCD. Le fil n'est donc pas devenu à peu près parfaitement élastique pour les charges inférieures à la charge maxima supportée  $OP_1$ .

La vitesse de déformation permanente est fonction de la charge actuelle, et plus ou moins indépendante des charges antérieures.



Schématiquement, l'augmentation de longueur n'est plus qu'une fonction de la charge par unité de section et du temps pendant lequel cette charge est appliquée.

Les courbes de traction des corps visqueux sont sous la dépendance prépondérante de la vitesse de charge. Si la charge est rapide, on peut arriver à des tensions relativement considérables avant qu'il se soit produit une déformation appréciable. Il est curieux de constater, par exemple, qu'un fil d'alliage eutectique de plomb et d'étain, qui s'allonge de plusieurs fois sa longueur sous des charges de 50 grammes, peut supporter quelques secondes une charge pouvant aller à près de 3 kilogrammes. La vitesse de déformation est alors bien entendu considérablement plus grande : pour fixer les idées, plus de 100 fois plus grande.

Le fil qui a supporté une certaine charge, serait-ce pendant un temps notable, n'est pas devenu parfaitement élastique pour une charge inférieure, même comme première approximation. L'écrasement a maintenant une tout autre forme ; c'est une variation dans la grandeur de la viscosité.

Si le frottement est strictement visqueux, le corps s'allonge à température rigoureusement constante sous une charge faible qui peut se réduire à son propre poids. La vitesse augmente beaucoup, ou, si l'on veut, la viscosité diminue beaucoup, quand la température s'élève.

Tous les corps se rapprochent de réaliser ce type à mesure que la température augmente.

**144. Définition des cycles. Accommodation.** — 1<sup>o</sup> On répète un cycle quand on fait varier la charge entre deux valeurs toujours les mêmes  $P_1$  et  $P_2$  suivant une loi périodique par rapport au temps. Par exemple, on peut charger et décharger en faisant varier la charge proportionnellement au temps  $P = P_1 + a_1 t$ ,  $P = P_2 - a_2 t$ , et maintenir aux deux bouts du cycle les charges  $P_1$  et  $P_2$  constantes pendant des temps  $T_1$  et  $T_2$ . Ainsi, même avec cette définition particulièrement simple, le cycle n'est défini que si on se donne les quatre constantes :  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ .

2<sup>o</sup> On répète un cycle quand on fait varier la longueur entre deux valeurs toujours les mêmes  $L_1$  et  $L_2$  suivant une loi périodique par rapport au temps. Le cas le plus simple est encore celui où les variations de longueur se font proportionnellement au temps, avec des arrêts plus ou moins longs pour les longueurs limites.

Les cycles se classent en deux groupes absolument distincts suivant qu'il y a ou qu'il n'y a pas *accommodation*.

**CYCLES A ACCOMMODATION.** — On dit qu'il y a *accommodation*, si la courbe de déformation tend vers une forme limite, quand on répète indéfiniment le cycle qui finit alors par se fermer. Quand le cycle

est parcouru entre charges invariables  $P_1$  et  $P_2$ , il se ferme si les longueurs correspondant à ces charges tendent vers des valeurs limites  $L'_1$  et  $L'_2$ . Quand le cycle est parcouru entre longueurs invariables  $L_1$  et  $L_2$ , il se ferme si les charges correspondant à ces longueurs tendent vers des valeurs limites  $P'_1$  et  $P'_2$ .

Les formes limites vers lesquelles tendent les cycles à accommodation, dépendent de la définition complète des cycles ; elles ne dépendent pas seulement des charges ou des longueurs entre lesquelles le cycle est parcouru.

Les cycles sont à accommodation quand les déformations permanentes à frottement visqueux n'interviennent pas.

CYCLES SANS ACCOMMODATION. — Quand les frottements visqueux interviennent, la courbe de déformation ne tend pas vers une forme limite.

Ces définitions, qui s'appliquent à toute espèce de déformations, peuvent se généraliser pour le cas de plusieurs variables.

**143. Cycles limites, limite des limites. Accommodation.** Soit, par exemple, un fil de cuivre étiré qui supporte une charge  $P$ . Faisons varier  $P$  systématiquement entre  $P_0$  et  $P_1$  suivant une loi déterminée en fonction du temps : nous décrivons *un cycle*. Admettons que le cycle soit à *accommodation* : nous obtiendrons bientôt le cycle *limite*.

Chauffons le fil à  $T^0$ . Maintenons-le un temps  $t$  à cette température et refroidissons-le. Re commençons à décrire des cycles entre  $P_0$  et  $P_1$ . Le fil est recuit seulement en partie, si le temps  $t$  est assez court, car le recuit demande pour se faire complet un temps d'autant plus grand que la température est plus basse. Nous allons obtenir un nouveau cycle limite. Re commençons cette opération un certain nombre de fois ; les cycles limites diffèrent entre eux de moins en moins et tendent vers un cycle que nous pouvons appeler *limite des limites*. En effet, le fil a pris peu à peu le recuit définitif qui convient à la température  $T$  et à la loi de refroidissement.

On peut présenter ces considérations sous une forme un peu différente.

Supposons que nous mettions successivement en jeu deux variables, la charge  $P$  et la température  $T$ . Nous parcourons une série de cycles dans le plan figuratif  $(P, L)$  ; nous admettons qu'il y a *accommodation* : peu à peu la courbe qui représente la longueur en fonction de la charge se ferme ; le cycle se fixe, il tend vers sa limite.

Nous décrivons alors un parcours dans le plan *longueur-température* ; ce parcours n'est pas fixé. Si nous revenons aux premiers parcours, nous obtiendrons un nouveau cycle limite. Re commençons cette même série d'opérations un grand nombre de fois ; peu à peu le système complet des parcours devient périodique ; si l'on veut, la

courbe gauche décrite dans l'espace charge-température-longueur tend à se fermer.

Sous cette dernière forme on retrouve à peine modifié l'énoncé général de la proposition qui nous a servi à définir l'accommodation au § 144. L'existence du cycle limite des limites provient de son application à deux variables distinctes qu'on fait varier successivement et périodiquement.

**146. Cycles de torsion.** — Nous pourrions répéter, à propos des courbes de torsion, tout ce que nous avons dit des courbes de traction. Nous aurions à distinguer les métaux non visqueux des métaux visqueux.

Les conditions particulières d'observation des torsions nous permettent d'aborder sur les métaux des questions quasiment insolubles pour les tractions. Telles sont les oscillations de grande étendue pour lesquelles les déformations ne sont cependant pas très loin d'être parfaitement élastiques.

Un cas, en outre, a une extrême importance pratique, celui où l'on impose une loi de variation des azimuts *sinusoïdale en fonction du temps*. Il est, en effet, très approximativement réalisé quand un corps suspendu à un fil métallique oscille autour de lui comme axe sous l'influence de son élasticité de torsion.

La méthode d'étude la plus simple consiste à suspendre le fil à un dynamomètre de torsion (bifilaire, par exemple), à lui imposer des cycles de torsion suivant la loi *sinusoïdale* et à enregistrer les indications du dynamomètre, par la méthode de Poggenorff, sur une plaque photographique animée d'un mouvement *sinusoïdal normal* au mouvement du spot et de même période : les déplacements linéaires de la plaque sont proportionnels aux torsions. On obtient ainsi directement l'enregistrement de la courbe, couples en fonction des torsions.

On conçoit la variété des recherches que cette méthode rend possible : on peut modifier la période du mouvement *sinusoïdal* et son amplitude ; on peut dresser un catalogue des résultats obtenus avec des métaux visqueux et non visqueux, à différentes températures, dans des champs variés si le métal est magnétique, etc.

**147. Courbes d'amortissement.** — A ces cycles se rattache la mesure de l'amortissement des oscillations d'un corps suspendu à un fil métallique et oscillant autour de lui comme axe, sous l'influence de son élasticité de torsion. Elle permet de déterminer le travail total par période des forces amortissantes, c'est-à-dire l'aire comprise dans la courbe couples-azimuts supposée tracée.

On observe la grandeur des oscillations sur un disque transparent divisé en degrés : on lit les azimuts dans lesquels le disque s'arrête aux deux bouts de l'oscillation ; la différence des lectures est ce que

nous appellerons l'étendue du parcours. Soient  $A_1, A_2, \dots$  les étendues successives.

On appelle *décément* le nombre  $\delta = \frac{A_1 - A_2}{A_2}$  qui permet de définir la décroissance des étendues (comparer au § 18). Nous pouvons étudier la courbe  $\delta = f(A)$ , où  $A$  est l'étendue moyenne  $\frac{A_1 + A_2}{2}$ .

L'expérience ne nous fournit, à la vérité, que quelques points de cette courbe qui n'existe que par un artifice de raisonnement. Mais quand nous remplaçons un phénomène essentiellement discontinu par un phénomène continu, cela revient à dire que si l'étendue initiale du premier parcours avait été un peu différente, nous aurions trouvé une autre série de points qui se seraient placés sur la même courbe.

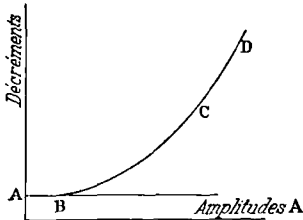


Fig. 65.

Pour de très petites oscillations, l'amplitude diminue en progression géométrique; donc le décrement  $\delta$  est constant, puisque d'après sa définition pour obtenir  $A_2$ , il faut diviser  $A_1$  par  $1 + \delta$ . La courbe des décrets est donc pour les petites amplitudes une droite horizontale AB (fig. 65). Mais quand l'amplitude n'est pas très petite, la courbe se relève; elle a généralement la forme ABCD et aboutit en A normalement à l'axe des décrets.

Il est facile de montrer en partant de ces résultats que l'absorption d'énergie, pour chacune des oscillations, est sensiblement proportionnelle au carré de l'amplitude, *quand celle-ci est petite*. L'énergie potentielle  $W$  d'un fil tordu est en effet proportionnelle au carré de la torsion; nous pouvons poser:  $W = KA^2$ ;  $\Delta W = 2KA \cdot \Delta A$ . Nous pouvons encore écrire:  $\Delta W = 2KA^2 \cdot \delta$ , puisque  $\delta = \Delta A : A$ . Si  $\delta$  est constant, la perte d'énergie  $\Delta W$  par oscillation est proportionnelle au carré de  $A$ , ou, si l'on veut, au carré de l'amplitude.

Si l'amplitude n'est pas très petite, la perte d'énergie pour chacun des parcours croît plus vite que le carré de l'amplitude.

Il est difficile d'obtenir des valeurs absolues des décrets relatifs à l'amortissement uniquement dû aux frottements intérieurs, parce que l'air intervient d'une manière complexe pour augmenter l'amortissement total. Mais les valeurs absolues de  $\delta$  intéressent bien moins que leurs variations en fonction des déformations que l'on impose au fil. Or, quelles que soient les hypothèses qu'on admette pour la résistance de l'air, toujours est-il qu'elle reste constante, d'une expérience à l'autre, pour une même période et pour une même étendue de l'oscillation: elle ne changera donc pas la forme de la courbe  $\delta = f(A)$ .

Nous voici donc en possession d'un nouveau réactif très sensible avec lequel nous mettrons en évidence de très légères modifications dans la structure du fil.

**148. Modification de la courbe  $\delta = f(A)$  par les déformations permanentes.** — On détermine la courbe des décrets en imposant successivement à un même fil des torsions initiales d'amplitudes différentes. Par exemple le disque, qui fait fonction d'*oscillateur*, étant d'abord en repos, dans une première expérience, on tord l'extrémité supérieure du fil d'un angle  $\mathcal{C}_1$  que nous appellerons le *lancement*; on laisse revenir au repos, tout en déterminant les étendues successives des parcours, ce qui permet de calculer la courbe des décrets. Au bout d'un certain temps de repos, on recommence avec un nouvel angle de lancement  $\mathcal{C}_2$ , et ainsi de suite.

Opérons d'abord sur un fil *fortement étiré* à la filière. Faisons une série de déterminations avec deux lancements  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , les expériences impaires avec le lancement  $\mathcal{C}_1$ , les paires avec le lancement  $\mathcal{C}_2$ . Nous obtenons deux faisceaux de courbes  $\delta_1$  et  $\delta_2$  qui tendent chacun vers une courbe limite : il y a comme une sorte d'accommodation. Il semble que dans les parties qui correspondent aux mêmes amplitudes, les deux courbes limites doivent se confondre. Tout au contraire l'expérience montre que le décrement dépend des parcours antérieurs, de sorte que la courbe qui correspond au plus grand parcours initial est, *pour les mêmes amplitudes A*, au-dessus de celle qui correspond au plus petit parcours initial.

Autre expérience : imposons d'abord à un fil *étiré* le lancement  $\mathcal{C}_1$  relativement petit, déterminons la courbe 1 des décrets. Puis imposons le lancement  $\mathcal{C}_2$  beaucoup plus grand, et recommençons ensuite plusieurs fois avec le lancement  $\mathcal{C}_1$ , en espaçant les expériences; nous obtenons des courbes 2, 3, ... D'après ce que nous avons dit plus haut, il n'est pas surprenant que 2 soit au-dessus de 1; mais le fait nouveau est que 3 est au-dessous de 2, 4 au-dessous de 3, etc. Il semble que peu à peu le fil oublie l'effet du parcours étendu  $\mathcal{C}_2$  : l'accroissement des décrets est en grande partie *subpermanent*.

On a donné à ces phénomènes, qui sont intéressants, parce qu'ils prouvent nettement les variations spontanées des propriétés des solides et l'influence de toutes les opérations antérieurement imposées, le nom de *fatigue d'élasticité*.

## FROTTEMENTS

149. **Frottement de glissement des solides.** — Nous avons toujours négligé les frottements : l'expérience la plus vulgaire montre que ce n'est pas légitime. Si d'ailleurs les corps étaient parfaitement glissants, la vie, telle que nous la connaissons, serait impossible.

On dit que deux corps *glissent* l'un contre l'autre quand leurs points de contact éprouvent à chaque instant des déplacements relatifs. Il naît pendant ce déplacement, en chaque point de contact, une force parallèle et toujours opposée au mouvement, et dont le point d'application est au point de contact lui-même. Soit  $f$  cette force,  $s$  le déplacement relatif, le travail absorbé est  $fs$ .

Les cas les plus simples que nous puissions considérer sont ceux où les corps : 1° sont limités par deux plans qui glissent l'un contre l'autre; 2° sont deux cylindres qui tournent l'un contre l'autre. Dans le premier cas, la force *frottement* est parallèle aux plans de contact; dans le second, elle est tangente aux surfaces de contact et normale aux génératrices et aux rayons des cylindres. Le second cas d'ailleurs se ramène au premier.

Imaginons un traîneau de poids  $P$ , dont la base  $AB$  est un plan qui glisse sur un plan horizontal  $CD$  (fig. 66), et qu'on charge

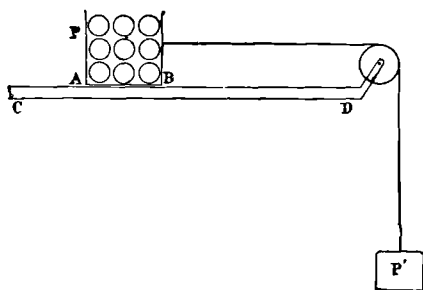


Fig. 66.

uniformément de manière que la pression (c'est-à-dire le quotient du poids par la surface) soit la même en tous les points. Il est tiré par le poids  $P'$  à l'aide d'une corde qui passe sur une poulie. L'expérience démontre que le mouvement que prend ce système est uniformément accéléré : donc la force  $f$  de frottement est indépendante de la vitesse.

On peut d'ailleurs le calculer facilement.

Soit  $\gamma$  l'accélération de ce mouvement expérimentalement déterminée et exprimée en mètres par seconde; soit  $g = 9^m81$  l'accélération de la pesanteur. La force motrice est le poids  $P'$ ; la force retardatrice est le frottement  $f$ ; la masse à mouvoir est  $P' + P$ , en négligeant la masse de la corde et celle de la poulie. D'où :

$$\gamma = g \frac{P' - f}{P' + P}.$$

L'appareil est une machine d'Atwood dont les frottements sont exagérés.

Modifions le poids  $P$  : l'expérience montre que  $f$  est proportionnel à  $P$ . Tout en conservant le même poids  $P$ , modifions l'aire du plan de contact  $AB$  : le frottement est indépendant de cette aire.

On peut donc poser simplement  $f = KP$ , où  $K$  est un coefficient qui caractérise les surfaces frottantes, quelle que soit l'aire de la surface de contact.

Voici quelques nombres pour fixer les idées.

Lorsqu'on fait frotter du chêne sur du chêne sans enduit,  $K = 0,4$  environ, c'est-à-dire que pour entraîner 100 kilogrammes, il faut exercer une traction de 40 kilogrammes, avec une vitesse nulle, il est vrai. Si on exerce une force de  $40 + p$  kilogrammes, c'est comme s'il n'y avait pas frottement et si la force était seulement de  $p$  kilogrammes.

Mais si on savonne les surfaces avec du savon sec,  $K = 0,16$ ; il ne faut plus que 16 kilogrammes pour en tirer 100. Lorsque de la fonte frotte sur de la fonte sans enduit,  $K = 0,15$  : la valeur de ce coefficient tombe à 0,05, si les surfaces sont grasses et le lubrifiant convenablement renouvelé : une traction de 5 kilogrammes suffit pour entraîner 100 kilogrammes.

*Tourillons.* — Quand un arbre cylindrique d'axe  $O'$  (tourillon) tourne sur son coussinet d'axe  $O$ , il y a frottement. L'expérience montre que les lois sont exactement les mêmes que dans le cas de deux surfaces planes et que la force tangentielle est encore  $KP$ , au moins très approximativement. Ce n'est plus rigoureusement vrai, parce qu'à cause même du frottement le contact ne se produit pas à la base  $B$  du coussinet; le tourillon tend à remonter : il n'y a plus qu'une composante  $P \cos \alpha$  du poids qui agit pour engendrer le frottement. Écrivons que la résultante des forces  $P$  et  $f$  est normale au plan tangent de contact :

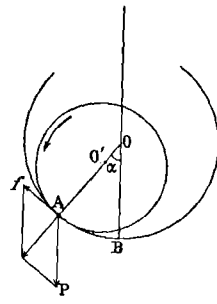


Fig. 67.

$$f = KP \cos \alpha = P \sin \alpha, \quad \text{tg } \alpha = K, \quad f = \frac{KP}{\sqrt{1 + K^2}}.$$

**150. Conditions d'équilibre quand le frottement intervient.**

— Par sa nature même, le frottement s'oppose au mouvement; sa direction n'est donc pas connue *a priori*: elle dépend essentiellement de la direction dans laquelle le déplacement tend à se produire. Les conditions d'équilibre se traduisent donc par des inégalités; il existe pour chaque position d'un mécanisme une infinité de systèmes de forces pour lesquels l'équilibre a lieu en vertu des frottements.

Le problème est encore notablement compliqué par ce qu'on appelle *frottement au départ*. Quand deux solides ont été longtemps au contact, ils sont toujours plus ou moins collés; le frottement est plus grand qu'il ne devrait d'après les lois énoncées. Or c'est précisément cette valeur anormale qui intervient dans les inégalités d'équilibre. En définitive, dans ces inégalités elles-mêmes, la valeur du frottement est grossièrement déterminée, du fait que, par hypothèse, les surfaces frottantes ont été plus ou moins longtemps en contact.

On verra par l'exemple suivant comment se présentent les conditions d'équilibre.

*Angle du plan incliné à partir duquel les corps commencent à glisser.* — Plaçons un corps de poids  $P$  sur un plan incliné faisant l'angle  $\alpha$  avec le plan horizontal. La composante de la pesanteur qui presse normalement les surfaces l'une contre l'autre est  $P \cos \alpha$ ; il en résulte un frottement  $KP \cos \alpha$ . La composante de la pesanteur dirigée suivant le plan incliné et qui tend à faire descendre le corps  $P$  est  $P \sin \alpha$ . Pour que le mouvement ait lieu, on doit avoir :

$$P \sin \alpha > KP \cos \alpha, \quad \text{tg } \alpha > K.$$

Ainsi l'angle  $\alpha$  est indépendant du poids du corps et ne dépend que du coefficient de frottement. Pour les valeurs de  $K$  dont il est parlé ci-dessus, on a les angles  $\alpha$  suivants :

$$K = 0,15, \quad \alpha = 8^{\circ}30'; \quad K = 0,40, \quad \alpha = 22^{\circ}.$$

Si on cherchait à déterminer les valeurs de  $K$  par la mesure de l'angle  $\alpha$ , on s'exposerait à des erreurs grossières par excès, d'après ce que nous avons dit plus haut du frottement au départ.

**151. Applications. Adhérence des locomotives. Freins. Rampes.** — Quand on veut diminuer le frottement, il faut polir les surfaces en contact; d'ailleurs le frottement produit ce résultat, le coefficient diminue peu à peu jusqu'à une limite.

Le frottement est indépendant des aires des surfaces en contact; il faut cependant qu'elles soient convenablement proportionnées. Si elles sont restreintes, 1<sup>o</sup> il tend à se faire une usure trop profonde et irrégulière; 2<sup>o</sup> les enduits sont trop rapidement éliminés par la pression.

L'enduit ne doit être ni trop fluide ni pas assez. Trop fluide comme l'eau, il est expulsé par la pression; mais si par un procédé quelconque on maintient un courant d'eau entre deux corps durs, elle constitue un excellent lubrifiant. L'eau de savon est très employée pour lubrifier et rafraîchir les surfaces (forage de la fonte, expérience du frein de Prony). Le suif et les graisses conviennent aux fortes pressions : ils ne sont pas assez fluides pour les petites.

Comme application du frottement, nous citerons l'adhérence des



locomotives. La machine ne peut faire progresser elle et son train que grâce à une force parallèle à la voie. Elle trouve son point d'appui dans le frottement qui se développe entre le bandage des roues *motrices* et les rails. Bien que le contact n'ait lieu que sur un petit nombre de centimètres carrés, le frottement (acier sur acier) qui s'oppose au *glissement* des roues, et que nous savons indépendant de la surface de contact, est environ 14 0/0, non du poids de la machine, mais du *poids supporté par les essieux moteurs*; à la condition cependant qu'aucun lubrifiant (pluie, verglas) ne diminue le coefficient de frottement. Si le poids *utile* est 20 tonnes, la traction maxima dont la machine soit capable (pourvu que ses organes mécaniques la permettent) est de  $0,14 \times 20 = 2,8$  tonnes. Si ses organes sont plus puissants ou si le frottement diminue pour une cause quelconque, le frottement ne suffit pas à éviter le glissement : les roues tournent sans avancer, la machine patine.

La théorie du frein est toute semblable. Bloquons toutes les roues d'un train de 200 tonnes<sup>1</sup>. C'est exactement comme si nous agissions contre le train avec une force de  $200 \times 0,14 = 28$  tonnes; c'est comme si le train avait à tirer ce poids. C'est encore comme si nous produisions une accélération retardatrice qui serait les 0,14 de l'accélération de la pesanteur.

Soit  $g = 9^m,81$  l'accélération de la pesanteur;  $9,81 \times 0,14 = 1,37$ . Soit  $v$  la vitesse du train à chaque instant,  $v_0$  la vitesse initiale au temps 0 quand on bloque les freins,  $e$  l'espace parcouru à partir de la position au temps 0. On a :

$$v = v_0 - 1,37t, \quad e = v_0t - 0,69t^2.$$

Le temps que met le train à s'arrêter et l'espace alors parcouru sont donnés par les formules :

$$t = v_0 : 1,37, \quad e = v_0^2 : 2,74.$$

Si la vitesse est de 20 mètres à la seconde (72 kilomètres à l'heure) quand on bloque les roues, le train ne peut s'arrêter qu'après avoir parcouru 145 mètres environ, en mettant les choses au mieux.

Soit  $\alpha$  l'angle du plan de la voie avec le plan horizontal, tel que la composante de la pesanteur parallèlement à la voie fasse équilibre au frottement. Il est donné par la condition (§ 150)  $\text{tg } \alpha = 0,14$ ; d'où sensiblement  $\alpha$  (en radians)  $= 0,14$ . Donc, *en utilisant l'adhérence de toutes les roues*, il est impossible à un train de gravir des rampes dont la pente est supérieure à 14 0/0, c'est-à-dire qui s'élèvent de plus de 14 mètres pour 100 mètres. C'est là un maximum dont cependant on s'approche : on a construit des voies parcourues par

<sup>1</sup> On admet que l'effet des freins est plus grand si les roues ne sont pas absolument bloquées. Cela tient à ce que sur la jante bloquée l'usure du frottement crée un métal parfaitement poli, pour lequel le coefficient de frottement est plus petit.

des voitures *automobiles*, dont tous les essieux sont moteurs, avec des rampes de 10 %.

On admet que l'adhérence est 0,14 lorsque les surfaces des roues et des rails en contact sont propres et sèches; mais par les temps humides et dans les souterrains, on ne compte plus que sur 0,10 environ. En matière de tramway, on est exposé à ce que le rail soit non seulement humide, mais sale et gras; l'adhérence diminue beaucoup.

Pour augmenter la fraction du poids de la locomotive servant à l'adhérence, on accouple les roues de manière à rendre leurs mouvements de rotation solidaires. On arrive ainsi à rendre *adhérente* la presque totalité du poids. On a par exemple, pour remorquer des trains de grande vitesse sur fortes rampes, des machines dont 40 tonnes sur 55 reposent sur des essieux couplés.

152. Équilibre de deux forces  $F_1$  et  $F_2$  agissant aux bouts d'une corde enroulée sur un cylindre fixe. — Soit  $R$  le rayon

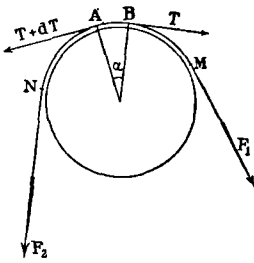


Fig. 68.

du cylindre,  $K$  le coefficient de frottement de la corde sur le cylindre. Posons  $F_2 > F_1$ ; le frottement s'exerce pour empêcher la corde de glisser dans le sens  $MN$ .

Soit  $s$  la longueur de la corde, comptée dans le sens  $MN$  à partir du point  $M$  où elle commence à toucher le cylindre. Aux bouts d'un élément  $ds$  s'exercent deux tensions  $T + dT$  et  $T$  dont les composantes tangentielles s'équilibrent grâce au frottement dû à la pression de la corde sur le cylindre. Cette pression elle-même est égale à la résultante normale des tensions.

Les deux tensions étant presque dans le prolongement l'une de l'autre, la résultante tangentielle est égale à  $dT$ . Écrivons donc que  $dT$  est égale au frottement qui résulte de la pression. La résultante normale est  $2T \sin \frac{\alpha}{2} = \alpha T$ , puisque  $\alpha$  est infiniment petit. On a d'ailleurs  $\alpha R = ds$ .

L'équation d'équilibre est donc :

$$dT = K\alpha T = \frac{KTds}{R}.$$

D'où : 
$$\log \text{nép. } T = \frac{Ks}{R} + \text{Cte.}$$

Pour déterminer la constante, écrivons que pour  $s = 0$ ,  $T = F_1$ ; on a d'ailleurs  $T = F_2$ , pour  $s = l =$  la longueur de la corde. D'où :

$$F_2 = F_1 e^{\frac{Kl}{R}}.$$

Or  $\frac{l}{R}$  est l'arc en radians suivant lequel la corde touche le cylindre; appelons-le  $\rho$ . La formule définitive et très remarquable devient :

$$F_2 = F_1 e^{K\rho}.$$

*Le rayon du cylindre a disparu.* Il est clair que la formule n'est admissible que pour des rayons tels que la raideur de la corde intervienne peu; autrement dit, tels que la corde épouse sans trop de difficulté la forme du corps sur lequel elle s'appuie.

Voici pour fixer les idées quelques valeurs de l'exponentielle quand on prend  $K = 0,5$ ; c'est à peu près le coefficient de frottement d'une corde contre le chêne. On exprime en tours l'arc de contact: la valeur numérique de  $\rho$  pour un tour est évidemment égale à  $2\pi$ .

Tours	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00.
$F_2 : F_1$	4,82	10,5	23,2	51	112	245	537.

On voit avec quelle rapidité croît le rapport des forces. On s'explique ainsi qu'avec une force  $F_1$  minime on puisse résister à une force considérable  $F_2$ . Application : amarrage des bateaux aux pontons, etc.

*Remarque.* — La résultante normale due à la tension  $T$  a pour expression :

$$\alpha T = \frac{T ds}{R}.$$

La pression normale rapportée à l'unité de longueur de la corde est donc :  $N = \frac{\alpha T}{ds} = \frac{T}{R}$ . Nous aurons l'occasion de retrouver, à propos de l'équilibre des fils, cette formule qui est très générale; nous en avons vu en Capillarité une application (§ 38) et une importante généralisation pour le cas des surfaces.

**153. Frottement de roulement.** — Quand un cylindre roule sur une surface plane, on constate une certaine résistance au roulement qui provient d'une déformation des corps. La roue entre dans le plan et s'aplatit elle-même. Cette déformation est très apparente sur le pneumatique d'une roue de bicyclette. L'expérience montre que la grandeur de cette résistance est proportionnelle au poids du corps roulant et, pour un même poids, diminue quand augmentent le rayon du cylindre et la largeur des bandes sur lesquelles s'opère le contact. Comparé au frottement de glissement, le frottement de roulement est très petit.

## CHAPITRE X

### ÉQUILIBRE DES FILS. CORDES VIBRANTES

154. **Équilibre d'un fil sans raideur.** — La matière dont le fil est constitué, ne peut se maintenir sous forme de fil que grâce à des forces de liaison.

Nous pouvons les choisir arbitrairement, sauf à vérifier si notre hypothèse est réalisée dans la nature. Par définition dans un fil sans raideur, l'action réciproque des parties AM et MB du fil aboutissant en un point M, se réduit à une force T *tangentielle* appelée *tension*. Nous pouvons donc supprimer la partie AM, par exemple, à la condition d'appliquer en M, sur le bout MB, une force tangentielle convenable T.

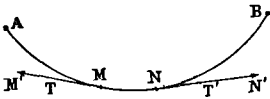


Fig. 69.

Pour qu'un élément MN du fil soit en équilibre, il faut donc que le système des tensions (T en M, T' en N), et les forces *extérieures* appliquées sur l'élément, se fassent équilibre.

Représentons par  $Xds$ ,  $Yds$ ,  $Zds$  les composantes parallèles à trois axes de la force extérieure  $Fds$  appliquée à l'élément  $\overline{MN} = ds$ ; elles s'annulent évidemment si l'élément devient nul; d'où la forme choisie. La tension T et sa direction sont fonctions de la position du point M considérée et par conséquent de la distance  $s = \overline{AM}$  qui fixe la position de ce point. Les composantes de la tension T en M sont, par un choix convenable de signes :

$$-T \frac{dx}{ds}, \quad -T \frac{dy}{ds}, \quad -T \frac{dz}{ds}.$$

Comme les quotients  $\frac{dx}{ds}$ ,  $\frac{dy}{ds}$ ,  $\frac{dz}{ds}$  (cosinus directeurs de la tangente au fil) sont eux-mêmes des fonctions de  $s$ , on peut repré-

senter la tension en N, c'est-à-dire après l'accroissement  $ds$  de la variable, par :

$$T \frac{dx}{ds} + \frac{d}{ds} \left( T \frac{dx}{ds} \right) ds, \quad T \frac{dy}{ds} + \frac{d}{ds} \left( T \frac{dy}{ds} \right) ds,$$

$$T \frac{dz}{ds} + \frac{d}{ds} \left( T \frac{dz}{ds} \right) ds.$$

Écrivons maintenant les équations d'équilibre. On a évidemment :

$$\frac{d}{ds} \left( T \frac{dx}{ds} \right) + X = 0, \quad \frac{d}{ds} \left( T \frac{dy}{ds} \right) + Y = 0, \quad \frac{d}{ds} \left( T \frac{dz}{ds} \right) + Z = 0.$$

Le fil s'attache aux points A et B; il est clair que les tensions en A et en B doivent équilibrer l'ensemble des forces extérieures. C'est ce que prouvent immédiatement les équations précédentes intégrées entre  $s=0$  (point A) et  $s=s_1$  (point B). On a par exemple :

$$\left( T \frac{dx}{ds} \right)_B - \left( T \frac{dx}{ds} \right)_A + \int_0^{s_1} X ds = 0.$$

Multiplions les équations d'équilibre respectivement par  $\frac{dx}{ds}$ ,  $\frac{dy}{ds}$ ,  $\frac{dz}{ds}$ , puis additionnons-les.

Remarquons que  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ .

$$0 = \frac{dx}{ds} \cdot d \frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} \cdot d \frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds} \cdot d \frac{dz}{ds}.$$

Il vient :  $dT + (Xdx + Ydy + Zdz) = 0$ .

En particulier si les forces extérieures sont toujours normales au fil,  $Xdx + Ydy + Zdz$ , qui représente le travail de ces forces quand on se déplace sur le fil, est nul :  $dT = 0$ .

La tension est alors constante tout le long du fil.

**155. Autre forme intéressante de ces résultats.** — En un point M, considérons le plan osculateur à la courbe formée par le fil. Il est défini par les tangentes en deux points très voisins de la courbe. Donc il contient les tensions T et T', et la force  $Fds$ , qui doit leur faire équilibre. Par conséquent, le plan osculateur du fil en un point contient certainement la force extérieure.

Établissons les équations d'équilibre dans le plan osculateur. Les deux tensions admettent une résultante tangentielle  $dT$  et une résultante normale égale à  $\frac{Tds}{\rho}$ , où  $\rho$  est le rayon de courbure. En effet, les tangentes en deux points de la courbe distants de  $ds$  font un angle  $ds:\rho$  dont le cosinus est égal à l'unité et le sinus à l'angle lui-même. Si nous projetons les deux tensions — T et T + dT

sur la direction de l'une d'entre elles, la résultante est bien  $dT$ . Si nous projetons sur la normale à la courbe en un point situé par exemple à égale distance de  $MN$ , la somme des projections est :

$$\frac{T}{\rho} \frac{ds}{2} + \frac{T+dT}{\rho} \frac{ds}{2} = \frac{Tds}{\rho}.$$

En définitive, il y a équilibre entre les trois forces,  $dT$  tangentielle,  $T \frac{ds}{\rho}$  normale,  $Fds$  dirigée n'importe comment dans le plan osculateur.

Il y a donc équilibre entre  $dT$  et la composante de  $Fds$  parallèle à la courbe; on peut donc écrire immédiatement :

$$dT + (Xdx + Ydy + Zdz) = 0.$$

Si  $Fds$  est normale à la courbe, on a  $dT = 0$ , et aussi :

$$Fds = Tds : \rho, \quad F = T : \rho.$$

Nous avons vu en Capillarité une intéressante application de ce résultat. Nous supposons que les forces  $F$ , normales à la courbe, étaient dans un plan; nécessairement le fil avait une forme plane. Mais nous pourrions lui donner une forme gauche, la condition de normalité restant automatiquement satisfaite, puisqu'elle provient de la nature même de la surface liquide. Il suffit d'attacher les bouts du fil en deux points d'un bâti contourné n'importe comment; la surface liquide qui s'attache à ce bâti et au fil n'est plus plane. Cela n'empêche pas la tension de rester constante le long du fil.

Imaginons un fil tendu sur une surface parfaitement polie; les forces exercées par la réaction de la surface sur le fil sont normales, donc la tension est constante. Le plan osculateur du fil est en chaque point normal à la surface; on démontre que, dans ces conditions, le fil trace sur la surface la ligne la plus courte entre deux quelconques de ses points.

**156. Fil pesant et homogène. Chainette.** — Supposons que les forces extérieures se réduisent à la pesanteur et que le fil soit homogène. Il se place dans le plan vertical passant par ses points d'attache. Prenons ce plan pour plan des  $xy$ , menons l'axe  $Oy$  verticalement et comptons les  $y$  positivement vers le haut. Les équations d'équilibre deviennent

$$T \frac{dx}{ds} = \text{Constante} = T_0,$$

$$\frac{d}{ds} \left( T \frac{dy}{ds} \right) = p,$$

où  $p$  désigne le poids du fil par unité de longueur.

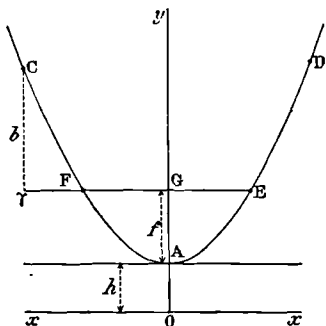


Fig. 70.

L'équation différentielle de la courbe s'obtient en éliminant  $T$  entre ces deux équations ; il vient :

$$\frac{d}{ds} \frac{dy}{dx} = \frac{p}{T_0}.$$

Posons  $h = T_0 : p$ . On vérifiera aisément que pour satisfaire cette équation, il faut poser les conditions équivalentes :

$$y = \frac{h}{2} \left( e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}} \right), \quad s = \frac{h}{2} \left( e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}} \right), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}} \right),$$

à la condition de prendre pour axe des  $y$  la verticale qui passe par le point A le plus bas de la courbe  $\left( x = 0, \frac{dy}{dx} = 0 \right)$ , et de placer l'axe des  $x$  à une distance  $\overline{OA} = h$  de la tangente horizontale dont le point de contact a les coordonnées  $x = 0, y = h$ .

La courbe ainsi définie s'appelle *chaînette*.

*Tension le long de la chaînette.*

$$\text{On a :} \quad T = T_0 \frac{ds}{dx} = T_0 \frac{y}{h} = py.$$

La tension le long de la chaînette est donc proportionnelle à l'ordonnée du point considéré ; elle est minimum au point A et égale à  $T_0 = ph$ .

**157. Applications. Fils télégraphiques ou lignes électriques de faible portée.** — Plaçons-nous d'abord dans le cas le plus ordinaire où les points d'attache E et F sont sur la même horizontale d'ordonnée  $y_1$  ; on a :  $\overline{EF} = 2\overline{EG} = 2x_1$ . Appelons flèche  $f$  la différence  $f = y - h$ . Supposons la portée  $a = 2x_1$  suffisamment petite par rapport à  $h$  ; on peut développer en série les exponentielles, et borner les développements aux trois premiers termes. Il vient alors :

$$y = h + \frac{x^2}{2h}, \quad f = y_1 - h = \frac{x_1^2}{2h} = \frac{p}{8T_0} \cdot a^2.$$

D'où les lois suivantes d'une application journalière :

1<sup>o</sup> pour une même forme de courbe (même portée et même flèche), la tension  $T_0$  au point le plus bas est proportionnelle au poids par unité de longueur ; pour un métal donné, elle est proportionnelle à la section ou au carré du diamètre ;

2<sup>o</sup> pour une même tension, la flèche est proportionnelle au carré  $a^2$  de la portée ;

3<sup>o</sup> pour une même portée, la flèche est en raison inverse de la tension.

Par exemple, on emploie pour les lignes télégraphiques ordinaires du fil de fer de 4 millimètres de diamètre, avec une portée de 80 mètres et une flèche de 43 centimètres. En admettant 7,82 pour

poids spécifique du fer, le poids du mètre est  $p = 100$  grammes. Nous tirons de ces données la valeur de  $h = 1780$  mètres et la tension  $T_0$  au point le plus bas :  $T_0 = 175$  kilogrammes. Comme le fil a environ  $12\text{mm}^2,6$  de section, cela ne fait que 14 kilogrammes par millimètre carré, charge égale au tiers environ de ce que le fil peut supporter sans rompre.

Nous savons que la tension n'est pas la même en tous les points ; elle est  $T_0$  et minima au point A, elle est généralement  $T = py$ . En particulier aux points d'attache, elle est :

$$T_1 = p \left( h + \frac{x_1^2}{2h} \right) = T_0 + pf = ph + pf,$$

$pf$  est généralement négligeable devant  $T_0$ , puisque  $f$  est négligeable devant  $h$ . Ainsi dans l'exemple précédent où  $T_0$  vaut 175 kilogrammes,  $pf = 48$  grammes. On peut considérer la tension comme constante.

Ce que nous venons de dire s'applique aux lignes électriques pour transport d'énergie ; il faut changer seulement le poids spécifique du métal (8,9 pour le cuivre) et la tension admissible sans danger par millimètre carré.

On peut encore appliquer ces formules aux câbles télédynamiques pour transmissions directes de puissance.

La longueur du fil varie avec la température ; il est facile de voir que les moindres variations de longueur influent considérablement sur la flèche. Développant la formule donnant  $s$ , on trouve en effet pour la longueur  $l$  :

$$l = 2x_1 + \frac{x_1^3}{3h^2} = 2x_1 + \frac{4f^2}{3x_1}, \quad l - a = \frac{8a}{3} \left( \frac{f}{a} \right)^2 = \frac{8f^2}{3a}.$$

Dans cette formule,  $l - a$  est la différence entre la longueur du fil et la portée. Calculons la longueur pour un rapport  $f : a = 1 : 300$  de la flèche à la portée, et une portée de  $a = 100$  mètres. C'est à peu près les conditions normales des fils télégraphiques. On trouve :

$$l - a = \frac{100}{90000} \cdot \frac{8}{3} = 0^{\text{m}},003.$$

La différence entre la longueur et la portée n'est que 3 millimètres.

Comme première approximation, la longueur est donc constante.

Donc si l'on pose des fils en été, il faut les tendre moins que si on les pose en hiver ; autrement ils risquent de se rompre quand survient le froid.

**158. Lignes de longue portée. Cas général.** — Le cas général se présente quand une ligne télégraphique doit traverser une vallée. Les extrémités C et E ne sont plus sur le même plan horizontal ;



on est libre de prendre une flèche assez grande, de manière à diminuer la tension. Posons

$$\overline{E\gamma} = a, \quad \overline{C\gamma} = b, \quad \overline{EAF\overline{C}} = l:$$

$a$  et  $b$  sont les données topographiques du problème,  $l$  est la longueur du fil qu'on veut utiliser. Appelons  $x', y', x'', y''$  les coordonnées des points C et E. Nous avons immédiatement en fonction de  $x'$  et  $x''$  les quantités  $l = s' - s''$  et  $b = y' - y''$ . D'où  $l - b$  et  $l + b$ ; d'où enfin aisément la condition :

$$\sqrt{l^2 - b^2} = h \left( e^{\frac{a}{2h}} - e^{-\frac{a}{2h}} \right),$$

équation qui permet de calculer  $h$ . On tire ensuite facilement les autres inconnues, en remarquant que  $x' - x'' = a$  et en utilisant une des équations donnant  $l - b$  ou  $l + b$ .

La tension *maxima*, qui, d'après l'équation générale  $T = py$ , correspond au point C le plus haut, pour une longueur donnée, passe par un minimum quand  $l$  croît à partir de la valeur minimum à vol d'oiseau  $\overline{CE}$  théoriquement admissible jusqu'à une valeur très grande. Quand  $l = \overline{CE}$ , la tension est évidemment infinie, puisque cela suppose le câble rectifié. Quand  $l$  croît à partir de cette valeur, la tension en C décroît tout d'abord. Mais si la longueur du câble devient très grande, la tension est alors sensiblement proportionnelle à cette longueur; et redevient par conséquent très grande. Il existe donc une certaine longueur pour laquelle la tension au point le plus haut est minimum.

La tension au point le plus bas (ou, ce qui revient au même, la quantité  $h$  tirée de l'équation  $T_0 = ph$ ), diminue au contraire d'une manière continue quand  $l$  augmente, pour tendre vers 0 quand  $l$  tend vers l'infini.

Il faut cependant observer qu'il est rare de pouvoir donner la flèche qui correspond au minimum de tension au point le plus haut; la règle pratique est donc de placer autant que possible les points d'attache sur le même niveau, et de prendre la flèche la plus longue possible.

### Vibrations très petites des cordes et des membranes.

159. **Cordes vibrantes.** — Pour traiter des vibrations petites des cordes sans raideur propre, nous ferons d'abord des hypothèses simplificatrices. Nous avons vu par un exemple numérique (§ 157) à quel point le fil s'allonge peu, même pour une flèche notable. Cet allongement dépend évidemment de la forme de la courbe; nous l'avons calculé pour une parabole. Mais quelle que soit cette forme,

l'allongement est toujours proportionnel au carré de la flèche et en raison inverse de la portée; le coefficient numérique est seul modifié.

Supposons maintenant que le fil soit tendu entre deux points fixes avec une force telle que la pesanteur soit négligeable devant elle. Quand le fil se déforme et s'allonge, la tension croît; mais nous venons de voir que cet allongement est toujours extrêmement petit. *Nous pouvons donc considérer la tension comme constante en grandeur; nous admettrons de plus qu'elle est seule à intervenir et qu'elle n'agit que par ses variations de direction le long du fil.*

Chaque point du fil conserve dans son mouvement un  $x$  ou un  $s$  constant: cela résulte immédiatement de la petitesse des allongements; sa trajectoire est donc comprise dans un plan perpendiculaire à l'axe des  $x$  ou des  $s$ , direction d'équilibre, et nous avons à déterminer deux fonctions de  $s$  et du temps

$$y = f(s, t), \quad z = f_1(s, t).$$

Soit  $m$  la masse du fil par unité de longueur: les forces d'inertie sont

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{et} \quad m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Substituons-les à  $Y$  et  $Z$  dans les équations générales du § 154; la tension étant constante, les équations du mouvement sont:

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad T \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Nous pouvons traiter séparément ces deux équations; à cause de leur forme linéaire, nous savons que le mouvement le plus général est la résultante des mouvements dans les plans  $(s, y)$  et  $(s, z)$ .

**160. Intégration des équations au moyen de fonctions arbitraires.** — Posons:

$$V = \sqrt{\frac{T}{m}} = \sqrt{\frac{gT}{p}};$$

en appelant  $p$  le poids du fil par unité de longueur. Si  $g$  est exprimé en mètres par seconde ( $9^m,81$ ),  $T$  et  $p$  peuvent être exprimés dans la même unité *quelconque* de force, mais  $p$  doit être énoncé en cette unité par mètre de fil.

L'équation à intégrer devient:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}.$$

On peut donner à l'intégrale générale deux formes très différentes; nous utiliserons d'abord ce qu'on appelle *l'intégration par fonctions arbitraires* pour étudier le phénomène de réflexion. L'expression

$$y = f(Vt + s) + F(Vt - s),$$

où  $f$  et  $F$  sont arbitraires, satisfait à l'équation différentielle. On le vérifie immédiatement en faisant les dérivations indiquées.

*Propagation d'un ébranlement le long d'un fil indéfini.*

Au temps 0 le fil AB est en équilibre, sauf entre deux points M et P d'abscisses  $s_1$  et  $s_2$ . Entre ces abscisses, il a la forme MNP,  $y = \chi(s)$ ; au delà et en deçà de ces points,  $y$  est constant, mais n'a

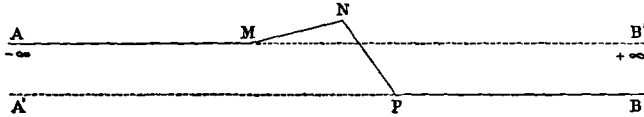


Fig. 71.

pas nécessairement la même valeur : en effet, le passage d'un ébranlement peut laisser le fil déplacé de sa position initiale (comparer au § 70).

Le problème ne serait pas déterminé par la connaissance de la forme seule de la courbe au temps 0 ; il faut encore nous donner soit la vitesse  $\frac{\partial y}{\partial t} = \psi(s)$  pour tous les points d'abscisses comprises entre  $s_1$  et  $s_2$  (en dehors de ces limites,  $\psi(s)$  est identiquement nulle), soit entre les mêmes limites l'inclinaison  $\frac{\partial y}{\partial s} = \varphi(s)$ , qui joue le rôle de la dilatation dans la propagation d'une onde longitudinale ; ( $\varphi(s)$  est identiquement nulle hors de l'intervalle  $s_1, s_2$ ).

Il est même encore plus commode pour la discussion de supposer données au temps  $t=0$  les deux fonctions  $\psi$  et  $\varphi$ . On retombe exactement sur la discussion faite à propos des ondes longitudinales (§ 68).

$$f'(s) - F'(-s) = \varphi(s), \quad V[f'(s) + F'(-s)] = \psi(s).$$

$$2f'(s) = \varphi(s) + \frac{1}{V} \psi(s), \quad 2F'(-s) = -\varphi(s) + \frac{1}{V} \psi(s).$$

On démontre comme précédemment l'existence de deux ébranlements  $f(Vt+s)$  et  $F(Vt-s)$ , se propageant indépendamment l'un de l'autre et avec une vitesse constante  $V$ , l'un dans le sens des  $s$  décroissants, l'autre dans le sens des  $s$  croissants.

On peut imaginer d'ailleurs qu'à une époque très antérieure au temps 0 le premier est parti d'une abscisse positive grande, le second d'une abscisse négative grande ; qu'ils se superposent et interfèrent précisément entre les abscisses  $s_1$  et  $s_2$  au temps 0, continuent ensuite leurs chemins, se séparent et reprennent leurs existences indépendantes.

Pour qu'un seul de ces ébranlements existe, les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  doivent satisfaire à l'une des conditions :

$$\pm V \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Il va de soi que les ébranlements  $f(Vt+s)$  et  $F(Vt-s)$  sont dans ce cas.

Le passage de l'ébranlement  $F$  laisse généralement le fil déplacé de la quantité  $y_0$ , le passage de l'ébranlement  $f$  le laisse déplacé de  $y'_0$ . Admettons  $y=0$  pour tous les points du fil avant le passage (fictif) des deux ébranlements, c'est-à-dire à une époque très antérieure au temps 0. Au temps 0, les points d'abscisses comprises entre  $-\infty$  et  $s_1$  ont été traversés par l'onde  $F$ ; on a pour tous  $y=y_0$ . Les points d'abscisses comprises entre  $s_2$  et  $+\infty$  ont été traversés par l'onde  $f$  : on doit poser pour tous  $y=y'_0$ . Pour un temps positif grand, tous les points de  $-\infty$  à  $+\infty$  ont été traversés par les deux ébranlements : on a pour tous  $y=y_0+y'_0$ .

On calculerait  $y_0$  et  $y'_0$  à l'aide des fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  par des formules tout à fait analogues à celles du § 70.

**161. Réflexion sur un obstacle immuable.** — Supposons que le point A soit invariablement fixé : prenons-le pour origine des coordonnées. Le mouvement  $y=f(Vt+s)$  ne peut à lui seul satisfaire à la condition  $y=0$  pour  $s=0$ . Nous sommes forcés de lui adjoindre un autre mouvement satisfaisant à l'équation différentielle et qui, par sa composition avec le premier, annule identiquement le déplacement  $y$  pour  $s=0$ .

Le mouvement est évidemment :  $y_1 = -f(Vt-s)$ .

Il se propage avec la vitesse  $V$  dans le sens AB des  $s$  croissants.

On peut se représenter le phénomène de la manière suivante.

Supposons le fil indéfini et le point A redevenu libre. Considérons les deux mouvements  $y=f(Vt+s)$  et  $y_1=-f(Vt-s)$ , se déplaçant en sens inverses le long du fil.

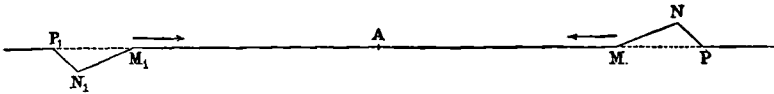


Fig. 72.

Comparons-les au même instant pour deux positions symétriques par rapport au point A.

Il faut poser, dans  $y$ ,  $s=s'$ ; dans  $y_1$ ,  $s=-s'$ .

On a :  $y=f(Vt+s')$ ,  $y_1=-f(Vt+s')$ ;  $y=-y_1$ .

Les deux ébranlements sont donc symétriques par rapport au

point d'attache A. Ils arrivent simultanément en ce point; évidemment ils s'y détruisent. L'ébranlement MNP continue son chemin au delà de A, il devient fictif; l'ébranlement  $M_1N_1P_1$  arrive sur le fil réel, il constitue l'ébranlement réfléchi.

Nous retrouvons ainsi les règles énoncées au § 158 du Cours de Mathématiques.

La vitesse de propagation de l'ébranlement est  $V = \sqrt{\frac{gP}{p}}$ .

Supposons un fil télégraphique ordinaire pesant 100 grammes par mètre, et ayant 200 kilogrammes de tension;  $P:p = 2000$ ,  $V = 140$  mètres environ. Pour voir se propager et se réfléchir l'ébranlement le long d'un fil, il faut le tendre le moins possible. Peu importe d'ailleurs en quelle matière il est fait : la vitesse ne dépend que du rapport  $P:p$ .

#### 162. Propagation et réflexion d'un mouvement périodique.

**Ondes stationnaires.** — Le mouvement  $y = y_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{s}{\lambda} \right)$  est la forme générale d'un mouvement périodique sinusoïdal, se propageant le long d'un fil indéfini dans le sens des  $s$  décroissants, pourvu qu'on ait  $\lambda = VT$ . Dans ce mouvement, la période est  $T$ , la longueur d'onde  $\lambda$ . Cela veut dire qu'à partir d'un point quelconque, il faut se déplacer de  $\lambda$  dans l'un ou l'autre sens, pour trouver un point ayant au même instant le même déplacement.

Le mouvement ci-dessus rentre, en effet, dans la forme

$$y = f(Vt + s).$$

Supposons qu'il rencontre le point fixe A; il faut lui superposer le mouvement

$$y_1 = -y_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{s}{\lambda} \right).$$

L'ensemble du mouvement incident et du mouvement réfléchi donne l'onde stationnaire :

$$Y = y + y_1 = 2y_0 \cos 2\pi \frac{t}{T} \sin 2\pi \frac{s}{\lambda}.$$

Il existe des nœuds ( $s = 0$ , quel que soit  $t$ ) pour  $s = 0$ ,  $s = \frac{\lambda}{2}$ , et généralement  $s = \frac{K\lambda}{2}$ , où  $K$  est un nombre entier positif quelconque. Il existe des ventres, c'est-à-dire l'amplitude est maxima et égale à  $2y_0$ , pour les points équidistants des nœuds consécutifs.

Le calcul de  $\frac{\partial Y}{\partial s}$  montre qu'aux ventres le fil est toujours parallèle à sa direction d'équilibre ( $\frac{\partial Y}{\partial s} = 0$  identiquement); qu'aux

nœuds la tangente au fil subit les plus grandes variations possibles de direction.

**163. Fil fixé à ses deux extrémités. Harmoniques.** — Si le fil de longueur  $L$  est fixé à ses deux extrémités A et B, le point B est un nœud du système stationnaire.

Nous devons donc écrire  $K\lambda = 2L$ , ce qui définit la longueur d'onde  $\lambda$  du mouvement formant l'onde stationnaire. Mais la vitesse  $V$  de propagation étant indépendante de la période, et la condition  $\lambda = VT$  devant rester satisfaite, on doit avoir corrélativement :

$$T = \frac{\lambda}{V} = \frac{2L}{KV}.$$

Le mouvement sinusoïdal le plus général compatible avec la fixité des extrémités du fil d'une part et l'équation différentielle de l'autre,

est donc :

$$Y = 2y_0 \cos \frac{K\pi Vt}{L} \cdot \sin \frac{K\pi s}{L}.$$

Le fil peut donc émettre séparément une série de sons simples harmoniques; le plus grave correspond à  $K=1$ , le nombre de ses vibrations par seconde est :

$$N_0 = \frac{1}{T} = \frac{V}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{gP}{p}} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{P}{m}}.$$

C'est la formule du § 159 du Cours de Mathématiques.

Les autres ont  $K$  fois plus de vibrations à la seconde. On peut écrire le mouvement le plus général sous la forme

$$Y = 2y_0 \cos 2\pi KN_0 t \cdot \sin \frac{K\pi s}{L}.$$

**164. Superposition des harmoniques. Séries trigonométriques.** — Les harmoniques peuvent coexister, puisque l'équation différentielle à satisfaire est linéaire. On a la solution générale en additionnant toutes les solutions particulières. Mais comme rien ne fixe l'origine des temps pour chacun des harmoniques, nous devons introduire des phases variables avec l'harmonique.

Le mouvement le plus général est donc :

$$Y = \sum_{K=1}^{K=\infty} 2y_{0K} \cos(2\pi KN_0 t - \alpha_K) \sin \frac{K\pi s}{L},$$

que nous pouvons écrire, en développant la parenthèse :

$$Y = \sum_{K=1}^{K=\infty} \left[ A_K \sin \frac{K\pi s}{L} \cos 2\pi KN_0 t + B_K \sin \frac{K\pi s}{L} \sin 2\pi KN_0 t \right].$$

Le problème qui se pose généralement est celui-ci. Pour une certaine valeur de  $t$  ( $t=0$  par exemple), on se donne les valeurs de  $Y$  pour toutes les valeurs de  $s$  comprises entre 0 et  $L$ ; on se donne

aussi les vitesses  $\frac{\partial Y}{\partial t}$  de tous les points du fil. On demande de déterminer les coefficients A et B.

Voici la méthode générale (§ 74). Pour  $t=0$ , on a :

$$Y = \Phi(s), \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = \Phi_1(s),$$

$$Y = \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \sin \frac{K\pi s}{L}, \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = 2\pi N_0 \sum_{k=1}^{k=\infty} K B_k \sin \frac{K\pi s}{L}.$$

Il faut identifier les deux valeurs de Y et de  $\frac{\partial Y}{\partial t}$ .

Pour déterminer le coefficient  $A_k$ , multiplions les deux membres de l'identité

$$\sum_{k_1=1}^{k_1=\infty} A_{k_1} \sin \frac{K_1\pi s}{L} = \Phi(s),$$

par  $\sin \frac{K\pi s}{L}$  et intégrons entre 0 et L.

Toutes les intégrales du premier membre sont nulles, sauf pour  $K=K_1$ ; il reste en définitive, comme on le trouvera aisément :

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L \Phi(s) \sin \frac{K\pi s}{L} \cdot ds.$$

Opérant de même pour la seconde identité, il vient :

$$B_k = \frac{1}{\pi N_0 K L} \int_0^L \Phi_1(s) \sin \frac{K\pi s}{L} \cdot ds.$$

### 165. Applications.

CORDE TIRÉE HORS DE LA POSITION INITIALE ET LÂCHÉE SANS VITESSE. — Tous les coefficients B sont nuls, puisqu'au temps  $t=0$  on doit avoir identiquement :  $\Phi_1(s) = 0$ , ( $0 < s < L$ ).

Les valeurs de A dépendent de la forme imposée au moment où la corde est lâchée. Pour faciliter les intégrations, nous supposons qu'elle est tirée avec un poinçon ou un plectre (guitare et approximativement harpe). Elle est donc formée de deux parties rectilignes AC, CB.

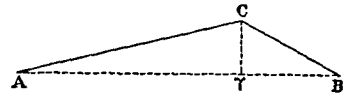


Fig. 73.

Posons :  $\overline{AY} = a$ ,  $\overline{\gamma C} = b$ .

On a :

$$\Phi(s) = \frac{bs}{a} \quad \text{entre } s=0 \text{ et } s=a;$$

$$\Phi(s) = b \frac{L-s}{L-a} \quad \text{entre } s=a \text{ et } s=L;$$

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^a \frac{bs}{a} \sin \frac{K\pi s}{L} \cdot ds + \frac{2}{L} \int_a^L b \frac{L-s}{L-a} \sin \frac{K\pi s}{L} \cdot ds.$$

Les intégrations ne présentent aucune difficulté; on trouve :

$$A_K = \frac{2bL^2}{K^2\pi^2a(L-a)} \sin \frac{K\pi a}{L}.$$

1° Les amplitudes des harmoniques varient comme les inverses des carrés de leurs numéros d'ordre; leurs intensités (proportionnelles aux carrés des amplitudes) décroissent donc extrêmement vite, en raison inverse de la quatrième puissance du numéro d'ordre.

2° Manquent tous les harmoniques pour lesquels  $\frac{Ka}{L}$  est un nombre entier. Or l'harmonique  $K$  a des nœuds aux points

$$s = \frac{L}{K}, \quad \frac{2L}{K}, \quad \frac{3L}{K}, \quad \dots \quad \frac{(K-1)L}{K}, \quad L.$$

Plaçons le poinçon en l'un de ces nœuds, au  $m^{\text{ième}}$  par exemple. Nous satisferons la condition

$$a = \frac{mL}{K}, \quad \frac{Ka}{L} = m = \text{un nombre entier.}$$

Donc pour empêcher un harmonique de se produire, il suffit que le poinçon soit placé en un point du fil où cet harmonique aurait un nœud.

Si on écarte le fil non plus avec un poinçon, mais avec le gras du doigt (harpe), les harmoniques supérieurs ont une intensité encore plus petite, et le son devient très doux.

CORDE FRAPPÉE A L'AIDE D'UN MARTEAU PLUS OU MOINS TRANCHANT. — Au temps 0, on a  $Y=0$  pour tous les points de la corde; donc  $\Phi(s)$  est identiquement nulle: tous les  $A$  sont nuls.

La vitesse est nulle pour tous les points, sauf sur une très petite longueur  $l$ , d'abscisse  $a$ , où la vitesse est  $v$ . Les intégrales donnant  $B_K$  se réduisent donc à un de leurs éléments. On a :

$$\int_0^L \Phi_1(s) \sin \frac{K\pi s}{L} ds = (vl) \sin \frac{K\pi a}{L}.$$

Posons :  $(vl) = I.$

Il vient :  $B_K = \frac{I}{\pi N_0 KL} \sin \frac{K\pi a}{L}.$

1° Les amplitudes des harmoniques diminuent en raison inverse de leurs numéros d'ordre. Les sons seront donc généralement plus criards dans ce cas que dans le précédent.

2° Si le marteau frappe en un point où l'un des harmoniques a un nœud, cet harmonique manque dans le son complexe.

Le piano réalise très sensiblement ce problème. Mais pour diminuer encore l'intensité des harmoniques supérieurs, on prend un marteau arrondi et feutré. On utilise le résultat 2° pour éliminer le septième ou le neuvième harmoniques qui sonnent faux. Le point touché est au septième ou au neuvième de la corde.



**166. Membranes.** — Les membranes sont des lames très minces et parfaitement flexibles, tendues sur un contour rigide.

En se bornant au cas :

1<sup>o</sup> où la tension est *uniforme* ;

2<sup>o</sup> où les déformations sont assez petites pour qu'elle reste constante malgré ces déformations (hypothèse que nous avons faite dans le cas des fils) ;

3<sup>o</sup> où le contour est plan ;

on peut considérer une membrane comme un tissu de fils élastiques se croisant rectangulairement. L'équation différentielle à satisfaire est la généralisation de celle des fils.

Soit  $w$  le déplacement normal à la lame,  $x, y$  les coordonnées d'un point,  $T$  la tension constante,  $m$  la masse par unité de surface ; un raisonnement analogue à celui du § 159 donne :

$$(1) \quad m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = T \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

Il faut poser  $w = 0$  pour tous les points du contour.

L'équation (1) admet généralement un très grand nombre de solutions.

La méthode de vérification expérimentale consiste à produire isolément chacun des sons partiels. On détermine la forme des lignes *nodales* en saupoudrant avec du sable, qui se rassemble en nervures indiquant le lieu des points immobiles.

Pour montrer comment on traite ce genre de problèmes, nous développerons la solution dans les cas simples des membranes rectangulaires et circulaires.

**167. Membranes rectangulaires.** — La membrane a pour contour fixe et rigide un rectangle dont un sommet est l'origine des coordonnées ; les côtés adjacents ont pour longueurs  $l$  sur l'axe des  $x$  et  $l'$  sur l'axe des  $y$ . Les solutions doivent satisfaire l'équation différentielle et s'annuler identiquement pour  $x = 0$ ,  $x = l$ , quel que soit  $y$  ; pour  $y = 0$ ,  $y = l'$ , quel que soit  $x$ . La solution générale sera la somme de toutes ces solutions partielles. Le mouvement

$$(1) \quad w = A \sin(\omega t + \varphi) \sin n\pi \frac{x}{l} \sin n'\pi \frac{y}{l'},$$

satisfait à ces conditions, en posant :

$$(2) \quad \omega = V\pi \sqrt{\frac{n^2}{l^2} + \frac{n'^2}{l'^2}}, \quad V^2 = T : m ;$$

$n$  et  $n'$  sont des nombres entiers quelconques. Ces nombres choisis,  $\omega$  est déterminé, ainsi que la période  $2\pi : \omega$  du son partiel correspondant.

Les nodales sont des droites parallèles aux axes de coordonnées.

Il résulte immédiatement de l'équation (2) qu'à chaque son partiel  $\omega$  donné correspondent plusieurs solutions, puisqu'on peut se donner arbitrairement  $n$  ou  $n'$ .

Le mouvement le plus général est dû à la coexistence de tous les mouvements simples précédents. Une forme initiale étant donnée pour la membrane, on détermine les coefficients  $A$  et  $\varphi$  des différents termes de la série par des procédés mathématiques analogues à ceux qui servent pour les cordes vibrantes (§ 164).

Lorsque deux systèmes de nodales parallèles aux axes coexistent, le sable se réunit en petits monticules formant un quadrillage régulier. Les expériences réussissent au mieux en collant du papier *plus ou moins mouillé* sur un cadre rectangulaire. On le laisse sécher, il se tend; on excite les vibrations avec un tuyau d'orgue convenablement accordé : il suffit de le boucher plus ou moins.

**168. Membranes circulaires.** — Prenons pour coordonnées polaires la distance  $r$  du point considéré au centre de la membrane et l'angle  $\alpha$  du rayon vecteur avec un rayon quelconque origine :

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha.$$

Il faut faire le changement de variables. Rappelons que l'on a :

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} = -\frac{\partial w}{\partial x} r \sin \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} r \cos \alpha,$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \alpha;$$

d où :

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\cos \alpha}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \sin \alpha,$$

$$(1) \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\sin \alpha}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \cos \alpha.$$

Puisque  $w$  est une fonction quelconque, les relations précédentes subsistent si on remplace  $w$  par  $\frac{\partial w}{\partial x}$  ou par  $\frac{\partial w}{\partial y}$ .

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\cos \alpha}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \sin \alpha,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\sin \alpha}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos \alpha.$$

Substituant les valeurs (1) précédemment calculées pour

$$\frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial x},$$

il vient facilement :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = V^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right).$$

Les solutions sont de la forme

$$w = A \sin(\omega t + \varphi) \sin n(\alpha - \alpha_1) \cdot Q.$$

$n$  est un nombre entier quelconque,  $Q$  est une fonction de  $r$ , satisfaisant à la condition

$$(2) \quad r^2 \frac{d^2 Q}{dr^2} + r \frac{dQ}{dr} - \left( n^2 - \frac{\omega^2 r^2}{V^2} \right) Q = 0,$$

comme on le vérifiera par substitution.

Posons  $2\lambda = \omega : V.$

L'intégration par séries de l'équation (2) donne la solution :

$$(3) \quad Q = Q_0 r^n \left[ 1 - \frac{(\lambda r)^2}{1 \cdot (n+1)} + \frac{(\lambda r)^4}{1 \cdot 2 \cdot (n+1)(n+2)} - \frac{(\lambda r)^6}{1 \cdot 2 \cdot 3(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right].$$

L'équation en  $\tau$

$$(4) \quad 1 - \frac{\tau^2}{1 \cdot (n+1)} + \frac{\tau^4}{1 \cdot 2 \cdot (n+1)(n+2)} - \frac{\tau^6}{1 \cdot 2 \cdot 3(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots = 0,$$

a une infinité de racines positives  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$  qu'on sait calculer et que nous supposons rangées par ordre de grandeur croissante.

Ceci posé, prenons pour  $n$  un nombre entier quelconque ;  $\sin n(\alpha - \alpha_1)$  est nul pour toutes les valeurs de  $\alpha$  qui satisfont à la

condition  $n(\alpha - \alpha_1) = K\pi, \quad \alpha = \alpha_1 + \frac{K\pi}{n}.$

On a donc pour lignes nodales  $n$  diamètres qui divisent la circonférence en  $2n$  parties égales.

Passons aux nœuds circulaires qui correspondent à  $Q = 0$ . Nous en avons certainement une pour  $r = R$ , si  $R$  est le rayon du contour rigide sur lequel la membrane est tendue.

Posons arbitrairement  $\lambda R = \tau_s$ , où  $\tau_s$  est la  $s^{\text{ième}}$  racine de l'équation (4). Nous définissons ainsi la hauteur du son partiel considéré. Il lui correspond  $s - 1$  nœuds circulaires dont les rayons sont :

$$\tau_1 : \lambda, \quad \tau_2 : \lambda, \quad \dots \quad \tau_{s-1} : \lambda.$$

Il y a donc une extraordinaire variété de sons pouvant faire vibrer la membrane.

L'expérience a confirmé ces raisonnements.

## CHAPITRE XI

### RÉSONANCE. VIBRATIONS DES VERGES, DIAPASONS.

#### Transmission d'une vibration d'un corps à un autre.

**169. Résonance. On impose directement au corps à mouvoir une force sinusoïdale.** — Voici, pour fixer les idées, une manière de réaliser l'énoncé du problème.

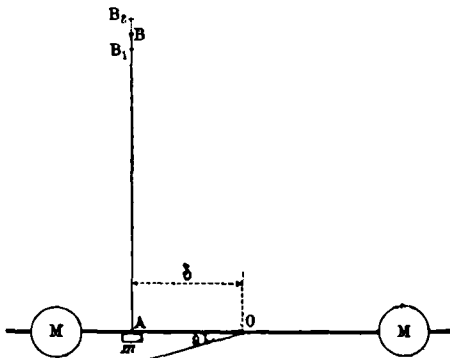


Fig. 74.

Une barre tourne autour de l'axe horizontal O et porte deux masses M dont on peut faire varier la distance à l'axe. Le centre de gravité du système coïncide avec l'axe O, la pesanteur n'intervient pas.

Attachons en A un caoutchouc dont l'extrémité supérieure est fixée en B. Pour équilibrer la tension que possède le caoutchouc quand la barre est horizontale, ajoutons

une masselotte  $m$ . Dans ces conditions, le moment d'inertie du système oscillant est I.

Imprimons au point B une oscillation verticale définie par l'équation :  $x = x_0 \sin \omega t$ . Le système MOM se met lui-même en mouvement. Sa position à chaque instant est définie par l'angle  $\theta$ . Écrivons l'équation du mouvement :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} + \Gamma = 0.$$

Nous supposons une force amortissante proportionnelle à la vitesse

(§ 18); il s'agit de trouver l'expression de  $\Gamma$ , moment du couple dû au caoutchouc. Soit  $L$  la longueur  $AB$  du caoutchouc pour l'équilibre. La longueur au temps  $t$  quelconque est  $L + \delta\theta - x$ . Quand la longueur est  $L$ , la tension est équilibrée par le poids de la masse  $m$ . Nous n'avons à tenir compte que de l'accroissement de tension que nous pouvons admettre proportionnel à l'accroissement de longueur  $(\delta\theta - x)$ , à la condition que l'ébranlement se propage d'un bout à l'autre du caoutchouc en un temps négligeable par rapport à la durée d'oscillation du mouvement imposé au point  $B$ , ou, ce qui revient au même, à la condition que l'accroissement de longueur se répartisse à tout instant uniformément le long du caoutchouc. Cette condition ne peut être réalisée que si la période d'oscillation du point  $B$  est assez grande. Par exemple, la vitesse de propagation d'un ébranlement dans le caoutchouc étant de l'ordre de 50 à 100 mètres par seconde suivant la tension, si le caoutchouc a 1 mètre de long, il faut que la durée d'oscillation du point  $B$  soit au moins de l'ordre de la seconde.

Le couple  $\Gamma$  est alors proportionnel à  $(\delta\theta - x)\delta$ ; l'équation du mouvement est :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} + K\delta(\delta\theta - x) = 0,$$

équation que nous pouvons écrire :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} + C\theta = A \sin \omega t.$$

L'intégrale générale de cette équation se compose de deux parties. L'une est l'intégrale de l'équation privée du second membre; nous l'avons longuement étudiée aux § 18 et suivants. Nous savons qu'elle fournit un mouvement oscillatoire de période

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C - \frac{f^2}{4I}}},$$

amorti, soit périodique, soit apériodique. La période  $T'$  diffère d'ailleurs généralement fort peu de la période

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}}.$$

L'intégrale qui nous intéresse ici est périodique non amortie.

En effet, l'équation différentielle est vérifiée par le mouvement :

$$\theta = \frac{A \sin \varepsilon}{f\omega} \sin(\omega t - \varepsilon) = \theta_0 \sin(\omega t - \varepsilon), \quad \text{tg } \varepsilon = \frac{f\omega}{C - \omega^2 I}.$$

**170. Discussion de la solution précédente.** — L'amplitude  $\theta$  du mouvement excité est maxima pour  $\sin \varepsilon = 1$ . On a alors :  $C = \omega^2 I$ . L'amplitude est donc maxima quand la période du son

excitateur est égale à ce que serait la période propre du corps excité, si l'amortissement  $f$  était nul.

C'est pourquoi le son de période  $T = 2\pi\sqrt{I:C}$  s'appelle son de plus forte résonance. Sa période diffère d'ailleurs très peu de la période  $T'$  du son propre.

Posons :

$$\Omega = 2\pi : T;$$

il vient :

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{f\omega}{I(\Omega^2 - \omega^2)}.$$

Il existe toujours une différence de phase  $\varepsilon$  entre le son excitateur et le son excité; si l'excitation est maxima,  $\Omega = \omega$ ,  $\operatorname{tg} \varepsilon = \infty$ ,  $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ . Si  $\Omega > \omega$ , si par conséquent la période de la force est plus grande que la période du son de plus forte résonance,  $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$ . Si  $\Omega < \omega$ , si la période de la force est plus petite que la période du son de plus forte résonance,  $\varepsilon > \frac{\pi}{2}$ .

Quand le décalage entre les deux mouvements est égal à  $\frac{\pi}{2}$ , la barre est horizontale et le point A va vers le bas ( $\theta$  croissants); le point B est en  $B_1$  à l'extrémité inférieure de sa course et commence à se mouvoir vers le haut. Le point B est donc par rapport au point A en avance d'un quart de période.

*Énergie transmise au corps excité.* — A chaque instant le couple qui tend à faire tourner l'oscillateur vers le bas est  $A \sin \omega t - C\theta$ ; quand l'oscillateur se déplace de  $d\theta$ , il lui est donc fourni un travail  $(A \sin \omega t - C\theta)d\theta$ . Pendant une oscillation complète, il reçoit une énergie :

$$\int_0^{2\pi} (A \sin \omega t - C\theta)d\theta = A\theta_0\pi \sin \varepsilon.$$

Enfin l'énergie moyenne reçue est :

$$\frac{A\theta_0\pi \sin \varepsilon}{T} = \frac{A^2 \sin^2 \varepsilon}{2f}.$$

Elle est maxima quand le son excitateur est à l'unisson du son de plus forte résonance. A mesure que  $\varepsilon$  s'éloigne de  $\frac{\pi}{2}$ , l'énergie décroît très rapidement.

RELATION ENTRE L'AMORTISSEMENT ET LE CHAMP DE RÉSONANCE. — Ce qu'il importe de comparer, c'est bien plutôt les quantités d'énergie transmises au corps excité que les amplitudes. Appelons  $w$  l'énergie transmise moyenne pour un son excitateur  $\omega$  quelconque,  $W$  l'énergie transmise pour le son de plus forte résonance  $\Omega$ . On a alors :

$$\sin^2 \varepsilon = 1; \quad \text{d'où : } w = W \cdot \sin^2 \varepsilon.$$

Introduisons maintenant deux nouvelles variables pour préciser la discussion.

La quantité  $\lambda = f : 2I$  est définie au § 19; c'est d'elle que dépend l'amortissement d'après le terme  $e^{-\lambda t}$ . Pendant une période  $T$  du son de plus forte résonance, et par conséquent très sensiblement pendant une période  $T'$  du son propre, l'amplitude de l'oscillation du corps est diminuée dans le rapport

$$e^{-\lambda T} = e^{-\frac{2\pi\lambda}{\Omega}}$$

Prenons comme nouvelles variables : 1° la quantité  $\alpha = \lambda : \Omega$ ; 2° l'intervalle  $i = \omega : \Omega$  entre le son exciteur et le son de plus forte résonance. On a alors :

$$w = W \sin^2 \varepsilon, \quad \text{tg } \varepsilon = \frac{2\alpha i}{1 - i^2}.$$

$\text{tg } \varepsilon$  et par conséquent  $\varepsilon$  puis  $w : W$  ne sont donc fonction que de l'intervalle  $i$ , et de l'amortissement par période des oscillations du corps d'abord excité puis abandonné à lui-même.

Comme la  $\text{tg}$  et le  $\sin$  d'un angle varient toujours dans le même sens, la discussion de  $\text{tg } \varepsilon$  nous donne immédiatement la loi qualitative de variation de  $w : W$ .

Ce rapport est naturellement égal à 1 pour  $i = 1$ . Il devient nul quel que soit  $\alpha$  pour  $i = 0$  et  $i = \infty$ , qui sont les limites de variation de  $i$ . Comme  $\alpha$  est généralement petit,  $w : W$  passe de 1 à une très petite valeur pour des variations très faibles de  $i$  à partir de 1. En particulier il passe brusquement de 1 à 0, si  $\alpha$  est pratiquement nul, si l'amortissement est extrêmement faible.

En définitive, pour un  $\alpha$  donné,  $w : W$  est représenté à partir de  $\omega$  par une sorte de courbe en cloche dont le maximum correspond à  $\omega = \Omega$  (fig. 75).

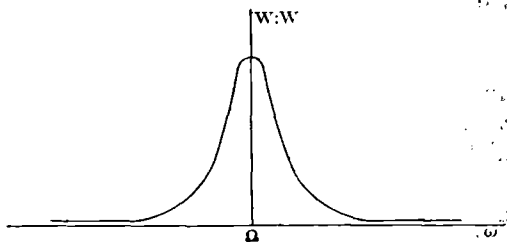


Fig. 75.

Si nous voulons maintenir  $w : W$  constant, il suffit de choisir  $\alpha$  et  $i$  de

manière à maintenir constant  $\text{tg } \varepsilon$ . Différencions la condition obtenue entre  $\alpha$  et  $i$ , nous aurons entre  $d\alpha$  et  $di$  une relation de la forme

$$-\left(\frac{1}{i} - i\right)\left(\frac{1}{i^2} + 1\right)di = K\alpha d\alpha.$$

Or  $\alpha$  est toujours positif. Donc soit  $i < 1$  :  $d\alpha$  et  $di$  sont de signes contraires. Cela veut dire que si l'amortissement  $\alpha$  croît, il faut que le son  $\omega$  s'écarte davantage du son  $\Omega$ , pour que  $w : W$  demeure

constant. En effet  $i = \omega : \Omega$  par définition,  $\omega < \Omega$  par hypothèse et  $i$  doit décroître d'après l'équation.

Soit  $i > 1$  :  $dx$  et  $di$  sont de même signe. Nous arrivons à la même conclusion ; si l'amortissement  $\alpha$  croît, il faut que le son  $\omega$  s'écarte davantage du son  $\Omega$  pour que le rapport  $w : W$  reste constant. En effet, on a maintenant  $\omega > \Omega$  et  $i = \omega : \Omega$  doit croître d'après l'équation.

Si l'amortissement du corps excité est grand, l'amplitude de la vibration n'est pas très grande ; mais le son exciteur peut différer notablement du son de plus forte résonance sans que cette amplitude tombe à une très petite fraction de sa valeur maxima.

Si au contraire l'amortissement est très petit, l'amplitude maxima est énorme ; mais la moindre variation du son exciteur la fait tomber à une très petite fraction de sa valeur maxima. Les diminutions *relatives* sont beaucoup plus rapides.

**171. Résonance sous l'influence d'un son complexe. Résonateurs.** — Nous devons supposer le son complexe exciteur décomposé en sons simples. Pour qu'il y ait résonance d'un corps, il faut que le son propre de ce corps se rapproche suffisamment de l'un des sons constituant le son exciteur. D'où la théorie des résonateurs.

Un bon résonateur est un corps : 1<sup>o</sup> ne pouvant émettre qu'un son simple ; 2<sup>o</sup> ayant un amortissement  $\alpha$  extrêmement petit. La première condition n'est pas indispensable, pourvu que les sons propres du corps soient assez distants pour qu'on ne puisse les confondre. La seconde est essentielle : si elle n'est pas réalisée, le corps vibre pour toute une série de sons voisins du son propre.

Les cordes et les diapasons sont d'excellents résonateurs. Il suffit d'écartier les étouffoirs d'un piano et de chanter devant. Si l'on donne un des sons des cordes libérées de leurs étouffoirs, ou l'un des *harmoniques de ces sons*, la corde se met à vibrer. Le son d'une corde n'étant pas simple, elle entre en vibration non seulement pour le son fondamental, mais sous l'influence de l'un quelconque de ses harmoniques.

La membrane d'un phonographe est un mauvais résonateur ; ce n'est que grâce à son imperfection comme résonateur qu'elle peut jouer le rôle qu'on lui assigne.

**172. Applications. Synchronisation des horloges.** — Les propositions démontrées au § 170 ont des applications remarquables.

Un corps qui, une fois excité, résonne pendant longtemps, comme un diapason, peut prendre sous l'influence d'un son exactement à l'unisson une amplitude considérable. Mais pour peu qu'on modifie la hauteur du son exciteur, l'amplitude tombe sensiblement à zéro.



Pour exciter au contraire une vibration notable d'une membrane tendue, il faut une action relativement énorme, parce que l'amortissement est très grand; mais le son exciteur n'a besoin que d'être très grossièrement accordé sur le son de plus forte résonance de la membrane.

On peut synchroniser deux horloges dont les pendules ne battent pas exactement dans le même temps. Il suffit d'utiliser la seconde horloge à produire une force *périodique* agissant sur le pendule de la première. Mais si les pendules ne battent pas rigoureusement dans le même temps, il faut imposer au pendule excité un amortissement (voir § 42 du Cours de Math.) d'autant plus grand que l'intervalle  $\omega : \Omega$  des deux périodes est lui-même plus grand.

**173. Loi d'Ohm. Analyse des sons par l'oreille. Timbre.** — L'analyse des sons par l'oreille résulte d'une loi physiologique soupçonnée par Rameau et formulée par Ohm.

*L'oreille perçoit séparément, et comme les sons constituant un accord, les sons simples en lesquels le théorème de Fourier (§ 74) nous apprend à décomposer un son complexe.*

L'oreille peut donc *analyser* les sons.

L'oreille n'a la sensation d'un son *unique* que pour les vibrations sinusoïdales. Un son complexe produit donc exactement la même sensation qu'un accord; naturellement, l'effet musical dépend du nombre des sons simples et de leurs intensités relatives: c'est en cela que consiste le *timbre*.

On sait que les vibrations excitées dans l'oreille s'y amortissent vite. Toutefois l'amortissement n'est pas instantané; si les sons ne sont pas assez espacés dans le temps, on ne les entend plus distincts. On conclut de là immédiatement que les parties de l'oreille qui sont excitées au maximum par un certain son, le sont encore *assez notablement* pour un son faisant avec le premier un intervalle musical très appréciable. On admet que l'énergie moyenne de la vibration par influence d'un des organes récepteurs de l'oreille est réduite à peu près au  $1/10$  de sa valeur maxima pour un écart de  $1/2$  ton. Cela revient à admettre<sup>1</sup> que, cet organe *vibrant seul*, l'oscillation y tombe au  $1/10$  de son intensité en dix périodes.

Il peut donc exister sans contradiction dans l'oreille des organes récepteurs distincts et en nombre fini, et cependant, le son montant d'une manière continue, la sensation peut varier d'une manière continue. C'est qu'un son simple de hauteur donnée n'agit pas uniquement sur un organe récepteur, *un résonateur auriculaire*; il agit principalement sur un organe, mais encore notablement sur les

<sup>1</sup> Il faut poser dans les formules du § 170,  $w : W = 0,1$ ;  $\log i = 0,025$ . On tire alors la valeur de  $\alpha$ .

organes voisins. C'est l'ensemble de ces sensations qui forme la sensation d'un son simple.

L'oreille n'est donc pas absolument assimilable à un piano.

On appelle *son musical* une vibration périodique, exprimable par conséquent au moyen d'une série trigonométrique (§ 74) :

$$F(t) = B_0 + a_1 \sin(\omega t - \alpha_1) + a_2 \sin(2\omega t - \alpha_2) + \dots$$

*A priori*, le timbre est donc une fonction des paramètres  $a_1, a_2, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ . Toutefois, si l'on admet que l'un quelconque des organes récepteurs de l'oreille ne peut simultanément vibrer pour un fondamental et ses harmoniques (ce qui résulte des considérations précédentes), on ne s'explique pas que les phases puissent intervenir. Il semble bien qu'en fait seules les amplitudes  $a_1, a_2, \dots$  fixent le timbre par leurs valeurs relatives. Quelques physiciens ont prétendu qu'il dépendait aussi des phases, mais leurs expériences ne sont rien moins que démonstratives. Nous avons déjà dit (*Cours de Math.*, § 119 et 122) que le timbre est d'autant plus criard que les harmoniques supérieurs ont des intensités plus grandes par rapport à l'intensité du fondamental <sup>1</sup>.

**174. Sons résultants.** — Nous supposons dans les pages précédentes que le corps excité jouit de propriétés mécaniques particulièrement simples; éloigné de sa position d'équilibre, il tend à y revenir proportionnellement à l'écart. Mais cette hypothèse n'est pas nécessaire; *le corps excité peut être dissymétrique, comme le tympan*. La théorie et l'expérience montrent qu'alors un son simple faisant  $p$  vibrations par seconde peut exciter non seulement le son de hauteur  $p$ , mais tous les harmoniques de hauteur  $2p, 3p, \dots$ ; que deux sons simples, faisant  $p$  et  $q$  vibrations par seconde et agissant simultanément, peuvent exciter, outre leurs propres harmoniques, les sons  $p - q$  (différentiel du premier ordre),  $p + q$  (additionnel du premier ordre),  $2p - q, 2q - p, 2p + q, 2q + p, \dots$

On les nomme *sons résultants*.

L'analyse suivante démontre cette proposition. L'équation générale du mouvement est (en négligeant le terme amortisseur) de la forme :

$$(1) \quad -m \frac{d^2x}{dt^2} = ax + bx^2 + P \sin 2\pi pt + Q \sin (2\pi qt + \delta).$$

Le corps écarté de sa position d'équilibre et abandonné à lui-même ( $P = 0, Q = 0$ ), y revient sous l'influence de la force *dissymétrique*  $ax + bx^2$  : elle n'est pas la même pour deux valeurs égales et de signes contraires de  $x$ .

<sup>1</sup> Je renvoie le lecteur désireux de connaître ces questions avec plus de détail à un volume de la collection *Scientia, Bases physiques de la Musique*.

Il s'agit de trouver l'intégrale générale.

Développons la solution en série par rapport à une variable auxiliaire  $\epsilon$ . Nous poserons :

$$x = \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \epsilon^3 x_3 + \dots; \quad P = \epsilon P_1, \quad Q = \epsilon Q_1.$$

Substituons dans (1) et égalons séparément à 0 les coefficients des diverses puissances de  $\epsilon$ . Nous faisons ainsi une série d'approximations.

Comme première approximation nous aurons :

$$(2) \quad m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + ax_1 + P_1 \sin 2\pi p t + Q_1 \sin (2\pi q t + \delta) = 0.$$

Cela revient à négliger le terme en  $x^2$ . Nous savons que le corps ainsi excité (§ 169) donne les deux sons de hauteur  $p$  et  $q$ . C'est le problème habituel de la résonance traité dans les pages précédentes : il y a superposition pure et simple des effets des sons excitateurs.

La seconde approximation donne :

$$(3) \quad m \frac{d^2 x_2}{dt^2} + ax_2 + bx_1^2 = 0.$$

Il faut introduire à la place de  $x_1$  l'intégrale précédemment trouvée dont la partie permanente est de la forme :

$$x_1 = P'_1 \sin 2\pi p t + Q'_1 \sin (2\pi q t + \delta).$$

Développons les carrés des sinus et leurs produits : nous aurons l'expression de  $x_1^2$  en fonction de

$$\sin 2\pi(2p)t, \quad \sin 2\pi(2q)t, \quad \sin 2\pi(p - q)t, \quad \sin 2\pi(p + q)t.$$

Substituant dans (3), nous retombons sur une équation de la forme (2) : elle nous apprend que, *comme seconde approximation*, le corps excité donne, outre les deux premiers harmoniques de hauteurs  $2p$  et  $2q$ , les sons résultant du premier ordre de hauteurs  $p - q$  et  $p + q$ . Naturellement si les sons excitateurs sont faibles, l'amplitude des harmoniques et des sons résultants est très petite; mais elle croît vite quand les sons excitateurs deviennent de plus en plus forts.

La troisième approximation donne :

$$(4) \quad m \frac{d^2 x_3}{dt^2} + ax_3 + 2bx_1 x_2 = 0.$$

Nous n'aurions qu'à répéter les raisonnements et les calculs précédents pour prouver l'existence des sons de hauteurs :

$$3p, 3q, 2p + q, 2q + p, 2p - q, 2q - p.$$

Bien entendu, si  $P$  ou  $Q$  sont nuls, il ne reste que les harmoniques  $2q, 3q \dots$  ou  $2p, 3p \dots$

On connaît depuis très longtemps l'existence des sons résultants (1740).

Le tympan est particulièrement dissymétrique; il est fortement tiré vers l'intérieur par le manche du marteau; il n'y a donc rien d'étonnant à ce que l'oreille, excitée par un son simple intense, fasse entendre non seulement ce son, mais encore les harmoniques; excitée par deux sons simples intenses, fasse entendre les sons résultants.

Ces sons ne prennent d'ailleurs pas naissance nécessairement dans l'oreille; ils peuvent parfaitement exister dans une masse d'air fortement ébranlée, et généralement dans un corps quelconque où l'on ne peut pas supposer que la force est linéaire en fonction de la déformation.

**175. Amortissement des vibrations du sol par les suspensions en caoutchouc.** — Reprenons le problème énoncé au § 169. Mais supposons que la vibration imposée au point B ait une période assez courte pour qu'on ne puisse plus admettre une répartition égale de la déformation tout le long du caoutchouc AB. Dans ces conditions, la théorie précédemment donnée ne s'applique pas : nous allons reprendre le problème, en supposant pour simplifier que les frottements sont nuls.

Nous savons que les ébranlements (§ 67 et 108) se transmettent dans un cylindre très long par rapport à son diamètre d'après l'équation aux dérivées partielles :

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

où  $u$  est ici le déplacement vertical du point dont la distance au point B est  $x$ . Nous aurons une solution de cette équation en posant :

$$(2) \quad u = U \sin \left( \frac{2\pi x}{\lambda} + \varepsilon \right) \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

$VT = \lambda$ ,  $V$  est la vitesse de propagation  $\sqrt{\frac{gE}{\rho}}$  (§ 108),  $U$  et  $\varepsilon$  sont des paramètres à déterminer.

Imposons au point B une oscillation d'amplitude déterminée; nous devons avoir, pour  $x = 0$ ,  $u = U_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}$ . L'intégrale prend donc la forme :

$$(3) \quad u = \frac{U_0}{\sin \varepsilon} \sin \left( \frac{2\pi x}{\lambda} + \varepsilon \right) \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Elle ne contient qu'une arbitraire  $\varepsilon$  que nous déterminerons à l'aide de l'équation du mouvement du corps suspendu. Pour simplifier, nous supposerons que le système se réduit à la masse  $m$ , le reste de l'oscillateur étant supprimé (fig. 74).

Ecrivons que l'oscillation de cette masse est due à la force qui résulte de la déformation du dernier élément. Par unité de section

droite cette forme est  $E \frac{\partial u}{\partial x}$ . Soit  $S$  l'aire de la section droite; la force totale en grandeur et en signe est donc :

$$- E \frac{\partial u}{\partial x} S,$$

$\frac{\partial u}{\partial x}$  étant bien entendu la valeur de ce quotient pour l'extrémité  $A$  du caoutchouc, c'est-à-dire pour  $x=L$ . D'où l'équation du mouvement de la masse  $m$  :

$$(4) \quad m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - E \frac{\partial u}{\partial x} S = - \frac{(\rho S \lambda) \lambda}{g T^2} = - \frac{p \lambda}{T^2};$$

$p$  est le poids de l'unité de longueur du caoutchouc;  $p \lambda$  est le poids d'une longueur du caoutchouc égale à longueur d'onde dans le caoutchouc du son imposé au point  $B$ .

Ecrivons que pour  $x=L$ , l'intégrale (3) satisfait à la condition (4),

il vient :

$$\operatorname{tg} \left( 2\pi \frac{L}{\lambda} + \varepsilon \right) = \frac{p \lambda}{2\pi m}.$$

Soit  $U_1$  l'amplitude de l'oscillation de la masse  $m$  que nous supposons grande vis-à-vis de  $p \lambda$ ; on obtient, en confondant le sinus et la tangente d'angles petits :

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{1}{\sin \varepsilon} \sin \left( \frac{2\pi L}{\lambda} + \varepsilon \right) = \frac{p \lambda}{2\pi m} \frac{1}{\sin \varepsilon}.$$

Si donc la masse  $m$  est grande vis-à-vis de la masse  $p \lambda$  d'une longueur du caoutchouc égale à la longueur d'onde  $\lambda$  du son imposé,  $U_1$  est toujours très petit par rapport à  $U_0$ , excepté quand  $\sin \varepsilon = 0$ . Il y a toujours un nœud près de la masse  $m$ ; elle joue approximativement le rôle de point fixe. Il n'existe donc pas nécessairement un ventre au niveau du point  $B$ , puisque la longueur  $L$  du caoutchouc n'est pas nécessairement un nombre impair de quarts de longueur d'onde.

Mais il peut arriver que  $L$  soit un nombre entier de demi-longueurs d'onde, ou plus exactement soit tel que  $\varepsilon$  égale 0. Le calcul donne alors pour  $U_1$  une valeur infinie. Il ne faut pas prendre cette solution au pied de la lettre; il y a dans les hypothèses des simplifications illégitimes qui sont la cause de ce résultat *quantitativement* inadmissible.

Si nous tenions compte de l'absorption d'énergie dans la transmission par le caoutchouc, nous trouverions que cette amplitude, *toutes choses égales d'ailleurs*, diminue rapidement avec la longueur  $L$ . Mais, à cet amortissement près,  $U_1$  est pour un son donné une fonction périodique de  $L$ .

Pratiquement, quand  $L$  n'est pas voisin d'un nombre entier de demi-

longueurs d'onde du mouvement vibratoire imposé au point B, l'amplitude  $U_1$  de l'oscillation de la masse suspendue est très petite.

Quand  $L$  est un nombre entier de demi-longueurs d'onde, il existe simultanément un nœud au voisinage de la masse  $m$  et un nœud au point B; la solution *quantitativement* inadmissible  $U_1 = \infty$  tient à ce que ce dernier nœud coïncide avec une amplitude qui est imposée et qui par conséquent n'est pas nulle. Corrélativement, bien qu'il y ait un nœud au voisinage de la masse  $m$ , c'est alors que l'amplitude de son mouvement est la plus grande possible. Au ventre intermédiaire, l'amplitude peut être considérablement plus grande que l'amplitude imposée en B.

Cette théorie s'applique exactement à l'expérience du § 108 : les tas sont le plus visibles et par conséquent les mouvements vibratoires le plus intenses, quand la longueur du tube AC est un nombre entier de demi-longueurs d'onde, et que, par conséquent, il y a un nœud au point A (fig. 49), où l'amplitude est imposée.

C'est par ces considérations qu'on explique l'amortissement des trépidations du sol par une suspension en tubes de caoutchouc. La période de ces trépidations est de l'ordre de 0,01; on ne peut admettre que la déformation se répartisse uniformément le long du caoutchouc : c'est bien la théorie actuelle qui s'applique et non celle du § 169. Si la trépidation était un son simple, il serait avantageux que la longueur du tube soit un nombre impair de quarts de longueur d'onde du son imposé. Il y aurait très approximativement un nœud *effectif* au point d'attache de la masse suspendue. Bien entendu, la trépidation n'étant pas un son simple, le phénomène n'est plus périodique en fonction de la longueur du caoutchouc. Il y a avantage à prendre le tube le plus long possible à cause de l'amortissement.

Il faudrait aussi tenir compte des vibrations transversales; le problème est tout à fait analogue.

## VIBRATIONS DES VERGES, DIAPASONS

176. **Expression de l'effort tranchant.** — Considérons un prisme tel que celui que nous avons défini au § 112 (*poutre*). Il est toujours très peu déformé. Cherchons les conditions d'équilibre d'un élément CDC'D' à la distance  $x$  de l'origine O.

Les seules forces que nous supposons appliquées sont normales aux arêtes du prisme.

Sur un élément d'épaisseur  $dx'$  et situé à la distance  $x'$  de l'origine des coordonnées, la force appliquée est  $Pdx'$ . Solidifions la partie ACA'C' de la *poutre*.

Les forces  $P$  produisent (§ 90) une composante tangentielle  $\mathfrak{C}$  dirigée dans le plan  $CC'$ , appelée *effort tranchant*, et dont la grandeur

est :

$$\mathfrak{C} = \int_x^l P dx',$$

où  $l$  est la distance de l'extrémité de la poutre à l'origine.

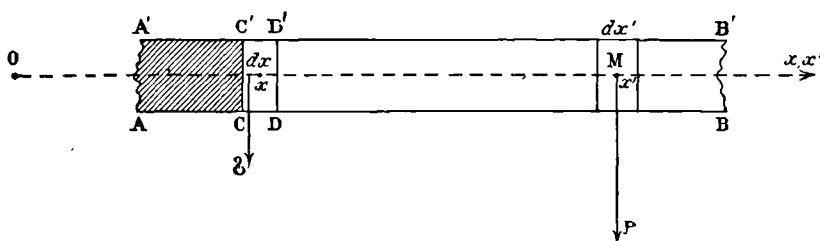


Fig. 76.

Le couple produit par les forces  $P$  et équilibré par les déformations de flexion, a pour expression :

$$C = \int_x^l P(x' - x) dx'.$$

On a évidemment :

$$\frac{dC}{dx} = - \int_x^l P dx' = - \mathfrak{C}. \tag{1}$$

Si les forces sont toutes appliquées dans le même sens (verticalement et vers le bas pour fixer les idées), il est clair que le couple  $C$  décroît quand  $x$  croît;  $\frac{dC}{dx}$  est négatif,  $\mathfrak{C}$  positif. Dans ces conditions, l'effort tranchant exercé par la partie solidifiée sur la surface  $CC'$  appartenant à la partie non solidifiée est dirigé vers le haut.

On peut se rendre compte directement de la signification de cette formule (fondamentale dans la Théorie de la résistance des maté-

riaux) :  $\frac{dC}{dx} = - \mathfrak{C}$ .

Représentons l'élément  $CC'DD'$  à plus grande échelle et exprimons qu'il est en équilibre sous l'influence des forces exercées sur lui de l'extérieur. En supposant que les forces sont verticales, c'est la fibre supérieure qui est allongée ;

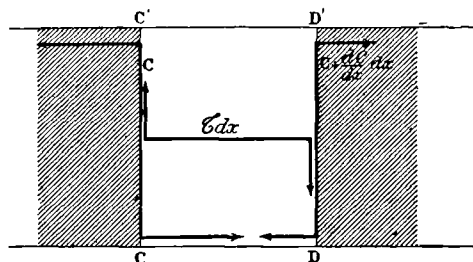


Fig. 77.

les couples  $C$  et  $C + \frac{dC}{dx} dx$  ont donc les dispositions indiquées. S'ils

ne sont pas égaux, ils ne peuvent se faire équilibre : l'élément tournera. Donc il faut admettre un autre couple  $\mathfrak{C}dx$ , dont les forces sont tangentielles aux faces  $CC'$  et  $DD'$ . Égalant ces couples, on retrouve la formule (1).

### 177. Equation des vibrations transversales d'une verge.

— Soit  $\rho$  la densité du milieu,  $s$  l'aire de sa section droite.

Admettons que les vibrations sont transversales, c'est-à-dire normales à la barre. Seules les forces normales à la barre peuvent entrer en jeu pour produire le mouvement. Le couple  $C$  et l'effort  $\mathfrak{C}$  sont maintenant des fonctions de l'abscisse  $x$  et du temps  $t$ .

Sur la face  $CC'$  et vers le haut agit de l'extérieur une force  $\mathfrak{C}$ ; sur la face  $DD'$  et vers le bas agit de l'extérieur une force  $(\mathfrak{C} + \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial x} dx)$ ; la résultante de ces forces, dirigée vers le bas, est donc  $\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial x} dx$ .

Prenons l'axe des  $y$  normal à la barre et comptons les  $y$  positivement vers le bas : l'équation du mouvement est :

$$s\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial x} = - \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}.$$

Or les seules forces agissantes sont dues aux déformations, la pesanteur n'ayant qu'une action insignifiante. D'ailleurs, les courbures restent toujours petites par hypothèse. Posons  $EI : s\rho = a^2$ ; on vérifie aisément qu'en grandeur (§ 113) et en signe, on a :

$$s\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0.$$

*Propagation d'une onde sinusoïdale permanente.* Une barre indéfinie peut propager une onde permanente sinusoïdale de la forme

$$y = y_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Posons  $\lambda = VT$ ; substituons dans l'équation, il vient :

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda} = \sqrt{\frac{2\pi a}{T}}.$$

La vitesse de propagation n'est pas constante, elle varie en raison inverse de la longueur d'onde.

Nous avons dit (§ 91) ce que deviennent généralement les phénomènes dans ce cas complexe.

*Vibrations d'une verge limitée, conditions aux limites.* — Il y a six cas principaux suivant qu'à chacun des bouts la verge est *encastrée*, *appuyée* ou *libre*. Si elle est encastrée, le point d'encastrement est fixe, la direction de la tangente en ce point invariable; si elle est appuyée, la seconde condition disparaît; si elle est libre, les deux conditions disparaissent.



Mais il y a des conditions mécaniques à satisfaire. Quand le bout est libre, il faut écrire que le couple et l'effort tranchant y sont nuls. Quand la verge est appuyée en un point, il faut écrire qu'il y a un nœud en ce point; les cas 1<sup>o</sup> d'une verge encastrée à un bout et appuyée à l'autre, 2<sup>o</sup> libre à un bout et appuyée à l'autre, se ramènent donc aux cas d'une verge de longueur double encastrée aux deux bouts ou libre aux deux bouts, avec un nœud au milieu.

Tous les cas se traitent analytiquement de même, nous n'envisageons que celui d'une verge encastrée à l'une de ses extrémités et libre à l'autre, déjà traité pour l'équilibre au § 115 et auquel se ramènent les diapasons.

**178. Verge encastrée à l'une des extrémités, libre à l'autre.**

— Soit 
$$y = Y \sin \frac{\omega^2 a}{L^2} t$$

une intégrale particulière de l'équation établie au § 177; Y est une fonction de  $x$  à déterminer. Substituons dans l'équation générale, il vient comme condition :

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} = \frac{\omega^4}{L^4} Y.$$

L'intégrale générale est :

$$Y = Y_0 \cos \frac{\omega x}{L} + Y_1 \sin \frac{\omega x}{L} + Y_2 e^{\frac{\omega x}{L}} + Y_3 e^{-\frac{\omega x}{L}}.$$

Les conditions  $x=0$ ,  $Y=0$ ,  $\frac{dY}{dx}=0$  expriment l'encastrement à l'origine des coordonnées.

Les conditions  $C = \frac{d^2 Y}{dx^2} = 0$ ,  $\mathfrak{C} = \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{d^3 Y}{dx^3} = 0$  expriment qu'au bout libre le couple et l'effort tranchant sont nuls. D'où les quatre équations suivantes :

$$\begin{aligned} Y_0 + Y_2 + Y_3 &= 0, & Y_1 + Y_2 - Y_3 &= 0, \\ -Y_0 \cos \omega - Y_1 \sin \omega + Y_2 e^\omega + Y_3 e^{-\omega} &= 0, \\ Y_0 \sin \omega - Y_1 \cos \omega + Y_2 e^\omega - Y_3 e^{-\omega} &= 0. \end{aligned}$$

Tirons  $Y_2$  et  $Y_3$  des deux premières, transportons dans les deux dernières, éliminons enfin  $Y_0$  et  $Y_1$ ; il reste comme condition :

$$\cos \omega (e^\omega + e^{-\omega}) + 2 = 0.$$

Cherchons les racines de cette équation.

Posons : 
$$\omega = \frac{\pi}{2} + K\pi \pm \varepsilon;$$

$\varepsilon$ , toujours inférieur à  $\frac{\pi}{2}$ , est positif si K est pair, négatif si K est

impair, puisqu'il faut que  $\cos \omega$  soit négatif. Remarquons que  $e^\omega$  croît très vite avec  $\omega$ , de sorte que le coefficient de  $\cos \omega$  devient très rapidement énorme.

Ceci posé, on trouve par tâtonnements pour première racine

$$\omega_0 = 1,870,$$

comprise entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\pi$ . Les autres racines correspondent à  $\cos \omega$  très petit; elles rentrent à peu près dans la formule

$$\omega_K = \frac{\pi}{2} + K\pi,$$

où  $K$  vaut 1, 2, 3, ...

On peut encore mettre les racines sous la forme

$$1,194 \left(\frac{\pi}{2}\right), \quad 2,989 \left(\frac{\pi}{2}\right), \quad 5 \left(\frac{\pi}{2}\right), \quad 7 \left(\frac{\pi}{2}\right), \quad 9 \left(\frac{\pi}{2}\right) \dots$$

Le nombre de vibrations  $N_i$  par seconde est  $N_i = \omega_i^2 a : 2\pi L^2$ . Pour une barre donnée,  $a$  et  $L$  sont donnés : les sons partiels  $N_1, N_2 \dots$  à partir du deuxième, sont donc entre eux comme les carrés des nombres impairs consécutifs :

$$N_K = (2K + 1)^2 \cdot \frac{a\pi}{8L^2}.$$

Le rapport  $N_1 : N_0$  est donné par la formule :

$$\frac{N_1}{N_0} = \left(\frac{2,989}{1,194}\right)^2 = (2,50)^2 = \frac{25}{4}.$$

résultat d'expérience bien antérieur à la théorie.

Reste à déterminer la position des nœuds. Il faut résoudre par rapport à  $Y_0$ , par exemple, les équations donnant  $Y_1, Y_2, Y_3$ , et transporter les valeurs obtenues dans l'expression générale de  $Y$ . On choisit alors une des racines  $\omega_K$ , et l'on cherche les racines correspondantes de l'équation  $Y = 0$ .

Pour  $\omega_0$ , il n'y a qu'une racine; on trouve naturellement un nœud au point d'encastrement. Pour  $\omega_1$ , il y a une seconde racine qui est à la distance 0,226  $L$  du bout libre. Et ainsi de suite.

**179. Applications.** — Un très grand nombre d'instruments de musique utilisent les vibrations des verges. Dans le *xylophone*, employé dans l'enseignement pour prouver qu'un bruit ne diffère pas essentiellement d'un son, les verges de bois sont *libres aux deux bouts*; elles sont maintenues par des fils tordus qui les touchent là où doivent se trouver les deux nœuds. On frappe au milieu et on obtient le *fondamental*. Les nœuds divisent la verge en trois parties dont les extrêmes sont notablement moindres que la moitié de la médiane.

On peut remplacer le bois par du verre.

Dans l'harmonium, les boîtes à musique, l'accordéon, les jeux d'orgue à anches, les verges sont encastées à une de leurs extrémités.

Les diapasons ne rentrent pas exactement dans le cas d'une verge rectiligne encastée à l'un des bouts. Cette assimilation permet cependant de calculer approximativement les phénomènes; les nœuds sont à quelque distance de la base. On a trouvé, conformément à la formule du § précédent, que le nombre de vibrations est indépendant de la largeur, en raison inverse du carré de la longueur (à une petite correction près), et proportionnel à l'épaisseur.

Effectivement, pour une verge de largeur  $2B$  et d'épaisseur  $2A$ , la valeur de  $a$  est (§ 115) :

$$a = \sqrt{\frac{EI}{s\rho}} = \sqrt{\frac{1}{3} \frac{A^3 B}{AB} \frac{E}{\rho}} = A \sqrt{\frac{E}{3\rho}}.$$

A la rigueur, on pourrait utiliser un diapason pour mesurer sinon les valeurs absolues du paramètre  $E$ , du moins ses variations avec la température.



## APPENDICE

---

### MOYENNES. MOINDRES CARRÉS. RÉPARTITION DES ERREURS.

#### LOI DES GRANDS NOMBRES

**180. Erreurs systématiques. Erreurs fortuites et accidentelles.** — En logique pure, il n'y a pas deux catégories d'erreurs expérimentales; *plus exactement, il n'y a pas d'erreurs expérimentales*; il y a seulement une mauvaise définition du résultat obtenu. Les mots *hasard* et *accident*, au sens vulgaire, sont de pures absurdités.

Quand on dit qu'un pistolet mal réglé donne une erreur *systématique*, cela signifie seulement qu'il y a écart sur le plan du but entre la trace de la ligne de mire et le point où la balle *devrait* toucher, *si toute une série de conditions plus ou moins faciles à définir étaient satisfaites*. On pose arbitrairement que la balle devrait aller à tel endroit, on appelle *erreur* l'écart; c'est une erreur *de définition* et non *d'expérience*.

On dit quelquefois que le type des erreurs *fortuites* est la distance au but de balles envoyées sur une cible par un tireur exercé, avec une arme sans défaut. Une pareille définition est un non sens. Où s'arrêter dans l'énumération des conditions? doit-on ajouter avec des balles identiques entre elles, poussées par des charges identiques, déviées par des vents identiques, ...? Mais si toutes ces conditions étaient réalisées, il n'y aurait pas d'erreur; du moins si on ajoute que le tireur est aussi toujours identique à lui-même! D'ailleurs, si l'une de ces conditions n'est pas réalisée, que signifie le mot *erreur*?

En définitive, les erreurs *fortuites* sont des erreurs *systématiques* dont on ne connaît pas la cause; les erreurs systématiques sont les effets d'un petit phénomène surajouté dont il est possible de tenir compte.

**181. Moyennes. Poids des expériences.** — On pose *arbitrairement* qu'une expérience doit toujours donner le même résultat; *en fait*, on trouve des nombres différents. Comme par hypothèse il faut se décider pour *un certain nombre*, on introduit une *convention* sur la manière d'utiliser les résultats.

La plus simple, et par conséquent la plus légitime, est de prendre leur moyenne.

Soit  $n_0, n_1, n_2, \dots$  les  $p$  nombres trouvés. La moyenne est :

$$n = \frac{n_0 + n_1 + n_2 + \dots}{p} = \frac{\Sigma n_0}{p}.$$

Considérons les différences :

$$\epsilon_0 = n - n_0, \quad \epsilon_1 = n - n_1, \quad \epsilon_2 = n - n_2 \dots$$

On a :  $\Sigma \epsilon = 0$

Montrons que  $\Sigma \epsilon^2$  est minimum. On a en effet :

$$\Sigma \epsilon^2 = \Sigma (n - n_0)^2 = pn^2 - 2n\Sigma n_0 + \Sigma n_0^2.$$

Considérons  $\Sigma \epsilon^2$  comme une fonction de  $n$ ; écrivons qu'elle est minimum. La condition est :

$$0 = 2np - 2\Sigma n_0, \quad n = \Sigma n_0 : p.$$

On convient d'appeler *erreur moyenne* la quantité  $\sqrt{\frac{\Sigma \epsilon^2}{p}}$  qui est la racine carrée de la moyenne des carrés. Il serait plus rationnel d'appeler *erreur moyenne* la moyenne des différences prises en valeur absolue  $\frac{\Sigma |\epsilon|}{p}$ . Nous verrons tout à l'heure pourquoi la première définition a prévalu.

Il arrive que certaines expériences d'une série paraissent meilleures que les autres. On veut donner à leurs résultats une importance plus grande. La sagesse conseille de ne pas céder à ces préférences, de prendre la moyenne des meilleurs résultats et de laisser de côté ceux en lesquels, pour une raison quelconque, on n'a pas confiance. Sinon l'arbitraire le plus complet se glisse dans la discussion, et des entraînements, qui n'ont rien de scientifique, risquent de se produire.

Ceux qui ne veulent rien perdre usent d'un procédé insoutenable en théorie comme en pratique. Ils donnent un *poids* à chaque résultat et le font entrer dans la moyenne un nombre de fois d'autant plus grand qu'ils l'apprécient davantage. Soient, par exemple :

les résultats	550	540	535,
avec les poids	2	10	3.

La moyenne est :

$$(2 \cdot 550 + 10 \cdot 540 + 3 \cdot 535) : 15 = 540,3.$$

Heureusement les physiciens renoncent aujourd'hui à cette méthode qui ne sert qu'à jeter de la poudre aux yeux.

**182. Méthode des moindres carrés.** — On pose arbitrairement que les résultats  $y$  doivent être représentés, en fonction de la variable

$x$ , par une expression  $y = f(x, A, B, C \dots)$  dont on se donne la forme. Elle contient  $m$  constantes arbitraires  $A, B, C, \dots$  On demande de choisir au mieux ces constantes. C'est la généralisation du problème précédent.

On possède par hypothèse un nombre  $p$  de résultats très supérieur à  $m$  : aucune courbe  $y = f(x)$  de la forme donnée ne passe donc exactement par tous les points.

Soient connues les constantes  $A, B, C \dots$  Pour les valeurs  $x_0, x_1, \dots$  de la variable, le calcul donne les valeurs  $y_0, y_1, \dots$ ; l'expérience donne les valeurs  $y'_0, y'_1, \dots$

Posons :  $\epsilon_0 = y_0 - y'_0, \quad \epsilon_1 = y_1 - y'_1, \dots$ ;

ce sont par définition les erreurs.

Il serait rationnel de choisir  $A, B, C, \dots$  de manière que la somme des valeurs absolues  $\Sigma|\epsilon|$  des différences soit minimum. Mais on se heurte à des difficultés mathématiques inextricables. Conséquemment, on impose comme condition, justifiée seulement par la simplicité de son expression mathématique, que la somme des carrés  $\Sigma\epsilon^2$  soit minimum.

On peut calculer facilement les valeurs exactes  $A, B, C, \dots$  des constantes qui satisfont à cette condition, pourvu qu'on en connaisse des valeurs approchées  $a, b, c, \dots$

Posons :  $A = a + \alpha, \quad B = b + \beta, \dots$

Nous pouvons écrire :

$$f(A, B, C, \dots) = f(a, b, c, \dots) + \alpha \frac{\partial f}{\partial a} + \beta \frac{\partial f}{\partial b} + \dots$$

$f, \frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}, \dots$  sont des fonctions de  $x$ ;  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  sont des variables par hypothèse assez petites pour qu'on puisse ne conserver que leurs premières puissances. Posons pour simplifier l'écriture :

$$f(a, b, c, \dots, x_0) = f_0, \quad \frac{\partial f(a, b, c, \dots, x_0)}{\partial a} = f_0^a, \dots;$$

$$y_0 = f_0 + \alpha f_0^a + \beta f_0^b + \dots$$

$$\epsilon_0 = y_0 - y'_0 = (f_0 - y'_0) + \alpha f_0^a + \beta f_0^b + \dots = \delta_0 + \alpha f_0^a + \beta f_0^b + \dots$$

Calculons  $\Sigma\epsilon^2$  et écrivons que  $\alpha, \beta, \dots$  rendent cette expression minimum. Cela revient à écrire que les dérivées partielles de  $\Sigma\epsilon^2$  par rapport à  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  sont séparément nulles.

$$\begin{aligned} \Sigma\epsilon^2 = & \Sigma\delta^2 + 2\alpha\Sigma\delta f^a + 2\beta\Sigma\delta f^b + \dots \\ & + \alpha^2\Sigma f^a f^a + \beta^2\Sigma f^b f^b + \dots + 2\alpha\beta\Sigma f^a f^b + \dots \\ & \left\{ \begin{aligned} \alpha\Sigma f^a f^a + \beta\Sigma f^a f^b + \dots &= \Sigma\delta f^a \\ \alpha\Sigma f^b f^a + \beta\Sigma f^b f^b + \dots &= \Sigma\delta f^b \\ \dots & \dots \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

On est conduit, en définitive, à un système de  $m$  équations du 1<sup>er</sup> degré à  $m$  inconnues.

Dans la pratique on calcule par tâtonnements les valeurs approchées  $a, b, c, \dots$ , en se laissant guider par des analogies ou des hypothèses. La méthode précédente fournit alors les valeurs exactes des constantes qui satisfont à la condition imposée.

Le défaut capital de la méthode est d'exagérer l'influence des erreurs grossières et des expériences particulièrement mauvaises.

Nous avons  $m$  constantes arbitraires et  $p$  résultats; on appelle *erreur moyenne* la quantité  $\sqrt{\frac{\Sigma \epsilon^2}{p-m}}$ . Si on n'a que  $m$  résultats pour  $m$  constantes à déterminer,  $\Sigma \epsilon^2$  et  $p-m$  s'annulent simultanément: l'erreur est évidemment indéterminée.

*Il est bien entendu que l'erreur moyenne n'a aucun rapport avec la précision réelle du résultat.* Tout physicien sérieux prend pour énoncé de la *régularité* de ses expériences la plus grande valeur de  $\epsilon$ , c'est-à-dire la plus grande distance des points expérimentaux à la courbe qui doit les remplacer. Nous nous garderons d'insister sur *les erreurs moyenne et probable du résultat*, ... notions qui ne sont qu'un trompe-l'œil et qui doivent disparaître des traités de Physique.

**183. Répartition expérimentale et théorique des erreurs. Courbe en cloche.** — Supposons effectuées un très grand nombre  $N$  d'expériences devant donner par définition le même résultat numérique; prenons la moyenne des résultats et calculons les écarts  $\epsilon$  à la moyenne. Soit  $\Delta n$  le nombre d'expériences pour lesquelles l'écart est compris entre  $\epsilon$  et  $\epsilon + \Delta \epsilon$ . Traçons un graphique en procédant comme suit (fig. 78):

Portons les erreurs  $\epsilon$  en abscisses; soit:

$$\overline{OA} = \epsilon, \quad \overline{OB} = \epsilon + \Delta \epsilon.$$

Construisons sur  $\overline{AB}$  comme base un rectangle de hauteur  $y$  telle que l'on ait, à un facteur constant près:

$$y \cdot \Delta \epsilon = \Delta n.$$

Nous déterminons ainsi l'ordonnée  $y$  qui correspond au milieu de l'intervalle  $AB$ ; nous obtenons donc point par point une courbe dont nous pouvons prévoir la forme générale.

D'habitude, en effet, pour des  $\Delta \epsilon$  égaux pris le long de l'axe des  $\epsilon$ , les nombres  $\Delta n$  et par conséquent les ordonnées  $y$  diminuent à mesure que  $\epsilon$  augmente: les résultats se groupent autour de la moyenne. S'il y a symétrie pour les écarts  $\epsilon$  de part et d'autre de la valeur moyenne, la courbe  $y = f(\epsilon)$  est symétrique par rapport à son



ordonnée maxima. En définitive, elle a généralement une forme en cloche (fig. 78).

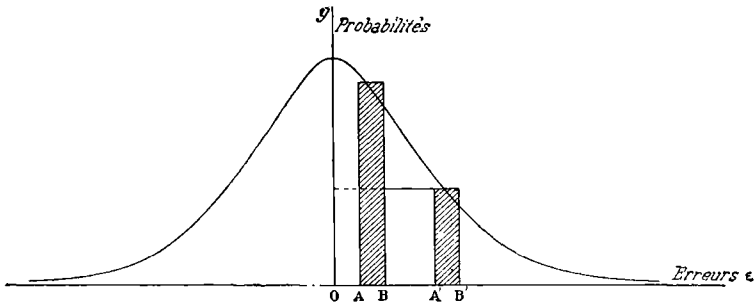


Fig. 78.

On a évidemment :

$$N = \Sigma \Delta n = \int_{-\infty}^{+\infty} y d\varepsilon.$$

On appelle *probabilité de trouver une erreur comprise entre  $\varepsilon$  et  $\varepsilon + \Delta\varepsilon$* , le rapport :

$$\frac{\Delta n}{N} = \frac{y \Delta \varepsilon}{N}.$$

C'est le rapport de l'aire du rectangle AB à l'aire totale délimitée par la courbe.

Tout ce qui précède n'a évidemment de sens que si le nombre d'expériences est considérable.

*Répartition théorique des erreurs.* — *A priori*, nous ne pouvons pas prévoir la forme exacte de la courbe; il se peut même que les hypothèses faites plus haut ne conviennent pas au cas particulier que nous étudions. Si, dans un concours, un examinateur veut favoriser systématiquement les candidats forts en une matière, si par conséquent il cote ou très haut ou très bas, la courbe de répartition de ses notes peut n'avoir aucune analogie avec une courbe en cloche.

En s'appuyant sur des hypothèses que nous ne discuterons pas faute de place, la *théorie des probabilités* attribuée à la courbe en

cloche l'équation :

$$y = y_0 e^{-h^2 \varepsilon^2}.$$

Le nombre total d'expériences est N :

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} y_0 e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = y_0 \frac{\sqrt{\pi}}{h}.$$

Nous pouvons expliciter le nombre  $N$  et écrire :

$$y = \frac{hN}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}.$$

La courbe est d'autant plus ramassée vers l'axe des  $y$ , elle arrive d'autant plus vite à se confondre avec l'axe des  $\varepsilon$ , que  $h$  est plus grand : d'où le nom de *module de précision* qu'on donne à cette quantité.

La probabilité pour que l'erreur d'une expérience soit comprise entre 0 et  $\pm \varepsilon$  est :

$$\frac{1}{N} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} y d\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon.$$

On a calculé des tables de cette dernière intégrale.

C'est se tromper lourdement que de faire servir la courbe en cloche *théorique* à la prévision de l'*erreur* que l'on fait en admettant comme exacte la moyenne des résultats expérimentaux. Si elle n'avait pas d'autre application, nous n'en aurions pas parlé. Mais des questions *statistiques* analogues se retrouvent souvent, et en particulier dans la Théorie cinétique des Gaz. On est ramené à la fonction précédente comme la plus naturelle, quand il s'agit de grouper autour d'une valeur moyenne les valeurs d'une quantité présentant un très grand nombre de déterminations diverses *inaccessibles à l'expérience*. La forme précédente exprime ce qu'on est convenu d'appeler la *loi des grands nombres*.

---

# TABLE DES MATIÈRES

## CHAPITRE I

### Principes généraux de la mécanique.

§	1. Principe général de la statique. . . . .	3
§	2. Expression algébrique du principe du travail. . . . .	4
§	3. Exemples d'application du principe. . . . .	5
§	4. Suspension bifilaire . . . . .	6
§	5. Détermination algébrique des coordonnées du centre de gravité . . . . .	7
§	6. Théorèmes généraux de la mécanique. . . . .	8
§	7. Théorème des forces vives. . . . .	10
§	8. Théorème des quantités de mouvement projetées . . . . .	10
§	9. Mouvements du centre de gravité. . . . .	11
§	10. Théorèmes sur les moments . . . . .	12
§	11. Théorème des aires . . . . .	13
§	12. Théorèmes sur les moments d'inertie . . . . .	14
§	13. Ellipsoïde et axes principaux d'inertie . . . . .	17
§	14. Propriétés des axes principaux d'inertie relatifs au centre de gravité. . . . .	17
§	15. Pendules. Pendules compensateurs. Métronome . . . . .	19
§	16. Pendule de Kater (à retournement) . . . . .	20
§	17. Méthode des coïncidences . . . . .	23
§	18. Corps oscillant autour d'un axe sous l'influence d'un couple proportionnel à l'angle d'écart avec la position d'équilibre. Frottement proportionnel à la vitesse . . . . .	25
§	19. Mouvements apériodiques . . . . .	26
§	20. Détermination en valeur absolue d'un couple et d'un moment d'inertie. . . . .	27
§	21. Impulsion. Choc des corps. . . . .	28
§	22. Impulsion appliquée à un corps tournant autour d'un axe fixe. . . . .	30
§	23. Impulsion appliquée sur un corps mobile autour d'un axe dans le cas où il y a frottement proportionnel à la vitesse. . . . .	32
§	24. Influence d'une ou plusieurs percussions à certains points d'une oscillation sinusoïdale. . . . .	33
§	25. Oscillations à peu près sinusoïdales. . . . .	35
§	26. Condition pour qu'une percussion appliquée à un corps tournant autour d'un axe ne produise aucune percussion sur cet axe. . . . .	36

## CHAPITRE II

## Propriétés générales des fluides. Hydrostatique.

§	27. Définition de la pression en un point d'un fluide . . . . .	38
§	28. Équation générale d'équilibre . . . . .	39
§	29. Liquide incompressible soumis à l'action de la pesanteur . . . . .	42
§	30. Résultante des forces exercées par un liquide sur les parois du vase qui le contient. Proposition réciproque : principe d'Archimède . . . . .	43
§	31. Équilibre des corps flottants. Théorie élémentaire du navire . . . . .	44
§	32. Mesure de la stabilité. Durée des petites oscillations . . . . .	46
§	33. Variations de la pression dans un fluide pesant compressible . . . . .	48
§	34. Équilibre des couches superposées d'un fluide pesant quand la température varie avec la hauteur . . . . .	50

## CHAPITRE III

## Capillarité.

§	35. Classification générale des tensions ou pressions . . . . .	52
§	36. Phénomènes capillaires . . . . .	53
§	37. Rayons d'activité moléculaire . . . . .	54
§	38. Équilibre d'une lame liquide limitée par un fil de poids négligeable et parfaitement flexible . . . . .	55
§	39. Pression normale exercée par une surface dont la tension $A$ est uniforme et normale aux coupures . . . . .	56
§	40. Systèmes laminaires . . . . .	57
§	41. Formation des gouttes . . . . .	59
§	42. Ascension d'un liquide le long d'une paroi plane indéfinie qu'il mouille . . . . .	60
§	43. Définition de la tension superficielle dans le cas de deux liquides en contact ou dans le cas d'un solide et d'un liquide . . . . .	62
§	44. Liquides ne mouillant pas le solide avec lequel il est en contact. Caléfaction . . . . .	65
§	45. Mouvements dus aux phénomènes capillaires . . . . .	67
§	46. Phénomènes au contact de deux liquides . . . . .	68
§	47. Émulsions . . . . .	69
§	48. Variation de la constante capillaire avec la température . . . . .	69
§	49. Relation entre la constante capillaire et le poids moléculaire . . . . .	70

## CHAPITRE IV

## Écoulement des fluides. Viscosité. Résistance au mouvement.

§	50. Écoulement d'un liquide en paroi mince . . . . .	73
§	51. Forme de la veine. Causes de la contraction . . . . .	74
§	52. Sectionnement de la veine . . . . .	76
§	53. Généralisation de la règle de Torricelli. Théorème de Bernoulli . . . . .	77
§	54. Écoulement à travers des tuyaux cylindriques . . . . .	78
§	55. Viscosité des liquides. Frottement intérieur . . . . .	80

§ 56.	Écoulement dans un tuyau cylindrique rectiligne de rayon $R$ . . . .	81
§ 57.	Filtration . . . . .	82
§ 58.	Écoulement des gaz à travers les tubes fins . . . . .	83
§ 59.	Entraînement d'un milieu indéfini par un plan indéfini tournant autour d'un axe d'un mouvement sinusoïdal par rapport au temps . . . . .	84
§ 60.	Oscillation dans son plan d'un disque circulaire de rayon $R$ immergé dans un liquide et tournant sous l'influence d'un couple proportionnel à l'écart. . . . .	85
§ 61.	Entraînement d'un cylindre par un cylindre concentrique séparé du premier par un liquide visqueux . . . . .	86
§ 62.	Résistance opposée par les fluides aux déplacements lents . . . . .	87
§ 63.	Résistance opposée par les fluides indéfinis aux déplacements rapides. . . . .	88
§ 64.	Autres applications . . . . .	89

## CHAPITRE V

### Transmission d'un ébranlement à travers un fluide compressible.

§ 65.	Définition de la condensation ou de la dilatation . . . . .	91
§ 66.	Pression ou variation de pression résultant d'une condensation . . . . .	93
§ 67.	Propagation d'une onde plane dans un tuyau cylindrique indéfini . . . . .	93
§ 68.	Intégration de l'équation différentielle par des fonctions arbitraires . . . . .	94
§ 69.	Cas d'une onde unique . . . . .	96
§ 70.	Détermination complète des fonctions $f$ et $F$ . . . . .	97
§ 71.	Piston fermant l'extrémité d'un tuyau et animé d'un mouvement quelconque. . . . .	98
§ 72.	Vitesse de propagation. . . . .	99
§ 73.	Phénomènes de réflexion. . . . .	99
§ 74.	Représentation d'une fonction d'une variable $t$ par une série de sinus et de cosinus. . . . .	101
§ 75.	Mouvements périodiques. Intégration de l'équation différentielle par des séries trigonométriques . . . . .	102
§ 76.	Phénomènes de réflexion dans le cas d'un ébranlement périodique. Ondes stationnaires. . . . .	102
§ 77.	Pression exercée par une onde sur le plan réfléchissant . . . . .	102
§ 78.	Propagation d'une onde sphérique . . . . .	103
§ 79.	Discussion du mode de propagation fourni par l'équation précédente. . . . .	105
§ 80.	Mouvement vibratoire entretenu par une sphère pulsante. . . . .	107
§ 81.	Variation de l'amplitude avec le rayon et transport de l'énergie mécanique . . . . .	107
§ 82.	Principe d'Huyghens . . . . .	109
§ 83.	Problème général de l'entretien d'un son dans une cavité de forme quelconque . . . . .	110
§ 84.	Théorie des résonateurs . . . . .	111

## CHAPITRE VI

## Hydrodynamique.

§ 85. Notations de l'hydrodynamique. Équation de continuité. . . . .	114
§ 86. Équations de l'hydrodynamique . . . . .	115
§ 87. Conditions aux limites. . . . .	116
§ 88. Cas particuliers les plus importants. Potentiel des forces et des vitesses . . . . .	117
§ 89. Mouvements stationnaires . . . . .	117
§ 90. Théorie de la houle. Ondes oscillantes en eau profonde. . . . .	118
§ 91. Conséquences de la dépendance entre la vitesse de propagation et la longueur d'onde . . . . .	121
§ 92. Onde solitaire ou de translation . . . . .	122
§ 93. Influence de la tension superficielle. Rides à la surface d'un liquide. Petites ondulations.	123
§ 94. Simplification des équations . . . . .	124
§ 95. Application à une masse gazeuse se dilatant adiabatiquement. . . .	124
Tourbillons.	
§ 96. Mouvement le plus général d'un élément d'un corps . . . . .	126
§ 97. Interprétation géométrique de l'existence d'un potentiel des vitesses.	128
§ 98. Tourbillons. . . . .	128
§ 99. Tourbillons rectilignes. . . . .	129
§ 100. Tourbillons circulaires. . . . .	131

## CHAPITRE VII

## Déformations parfaitement élastiques des solides. Réactivité.

§ 101. Représentation des déformations. Hystérésis . . . . .	133
§ 102. Déformations parfaitement élastiques. . . . .	134
§ 103. Traction d'un cylindre. Module d'Young. . . . .	135
§ 104. Légitimation de l'emploi du module d'Young pour les métaux. . . .	137
§ 105. Courbe et module de traction pour les corps très extensibles. Caoutchouc . . . . .	137
§ 106. Coefficient $\sigma$ de Poisson. . . . .	138
§ 107. Définition plus générale du coefficient de Poisson . . . . .	139
§ 108. Son rendu par une barre cylindrique libre aux deux bouts et invariablement fixée en son milieu. Mesure du module d'Young. . . . .	140
§ 109. Torsion. Lois expérimentales. . . . .	141
§ 110. Établissement théorique de la loi précédente . . . . .	142
§ 111. Généralisation de la formule de torsion . . . . .	143
§ 112. Flexion plane . . . . .	145
§ 113. Autre forme de l'équation d'équilibre. Généralisation. . . . .	148
§ 114. Étude de quelques cas particuliers. Élastique . . . . .	149
§ 115. Barre cylindrique de longueur L encastrée à une de ses extrémités et fléchie par une force P appliquée à l'autre et normale à sa direction. Mesure de la flèche. . . . .	149
§ 116. Ressort spiral plan (ressort de montre) . . . . .	150
§ 117. Ressort spiral cylindrique (ressort à boudin) . . . . .	152
§ 118. Cas particuliers. . . . .	153
§ 119. Réactivité. . . . .	154

## CHAPITRE VIII

## Éléments de la théorie de l'élasticité pour les corps isotropes.

§ 120. Les éléments de la théorie de l'élasticité comprennent trois questions. Distribution des forces autour d'un point.	157
§ 121. Définition des forces élastiques.	157
§ 122. Équilibre du tétraèdre élémentaire	158
§ 123. Équilibre du parallépipède élémentaire	159
§ 124. Équilibre entre les forces élastiques et les forces extérieures	160
§ 125. Plans principaux	160
§ 126. Travail des forces élastiques	161
Étude abstraite de la Déformation.	
§ 127. Expression approchée de la déformation supposée petite	162
§ 128. Allongement relatif d'une petite droite	163
Relation entre les forces et les déformations.	
§ 129. Variations des angles du parallépipède	163
§ 130. Expressions générales. Corps homogène et isotrope	164
§ 131. Cas particulier de la traction et de la torsion d'un cylindre	165
§ 132. Expressions du module $E$ et du coefficient de Poisson $\sigma$ en fonction des coefficients $\lambda$ et $\mu$	167
§ 133. Coefficient de compressibilité cubique	168
§ 134. Équilibre d'élasticité d'une enveloppe sphérique	168
§ 135. Équilibre d'élasticité d'un tube cylindrique	170
§ 136. Détermination de la compressibilité cubique des solides et des liquides	172
§ 137. Théorème de Clapeyron	172
§ 138. Propagation d'une onde plane dans un milieu isotrope indéfini	173
§ 139. Distribution de l'énergie dans une onde longitudinale sinusoïdale	174
§ 140. Distribution de l'énergie dans une onde transversale sinusoïdale	175

## CHAPITRE IX

## Déformations permanentes. Frottements.

§ 141. Déformations permanentes. Courbe de traction	178
§ 142. Déformations permanentes non visqueuses. Écrouissage. Principe de Coulomb	179
§ 143. Déformations permanentes visqueuses	180
§ 144. Définition des cycles. Accommodation	181
§ 145. Cycles limites, limite des limites. Accommodation	182
§ 146. Cycles de torsion	183
§ 147. Courbes d'amortissement	183
§ 148. Modification de la courbe $\delta = f(A)$ par les déformations permanentes	185
Frottements.	
§ 149. Frottement de glissement des solides	186
§ 150. Conditions d'équilibre quand le frottement intervient	187
§ 151. Applications. Adhérence des locomotives. Freins. Rampes	188
§ 152. Équilibre de deux forces $F_1$ et $F_2$ agissant aux bouts d'une corde enroulée sur un cylindre fixe	190
§ 153. Frottement de roulement	191

## CHAPITRE X

## Équilibre des fils. Cordes vibrantes.

§ 154.	Équilibre d'un fil sans raideur . . . . .	192
§ 155.	Autre forme intéressante des résultats . . . . .	193
§ 156.	Fil pesant et homogène. Chaînette . . . . .	194
§ 157.	Fils télégraphiques ou lignes électriques de faible portée . . . . .	193
§ 158.	Lignes de longue portée. Cas général . . . . .	196
§ 159.	Cordes vibrantes . . . . .	197
§ 160.	Intégration des équations au moyen de fonctions arbitraires . . . . .	198
§ 161.	Réflexion sur un obstacle immuable. . . . .	200
§ 162.	Propagation et réflexion d'un mouvement périodique. Ondes stationnaires . . . . .	201
§ 163.	Fil fixé à ses deux extrémités. Harmoniques. . . . .	202
§ 164.	Superposition des harmoniques. Séries trigonométriques. . . . .	202
§ 165.	Applications . . . . .	203
§ 166.	Membranes. . . . .	205
§ 167.	Membranes rectangulaires. . . . .	205
§ 168.	Membranes circulaires. . . . .	206

## CHAPITRE XI

## Résonance. Vibrations des verges. Diapasons.

§ 169.	Résonance. On impose directement au corps à mouvoir une force sinusoïdale. . . . .	208
§ 170.	Discussion de la solution précédente . . . . .	209
§ 171.	Résonance sous l'influence d'un son complexe. Résonateurs. . . . .	212
§ 172.	Applications. Synchronisation des horloges . . . . .	212
§ 173.	Loi d'Ohm. Analyse des sons par l'oreille. Timbre. . . . .	213
§ 174.	Sons résultants . . . . .	214
§ 175.	Amortissement des vibrations du sol par les suspensions en caoutchouc . . . . .	216
Verges.		
§ 176.	Expression de l'effort tranchant . . . . .	218
§ 177.	Équation des vibrations transversales d'une verge . . . . .	220
§ 178.	Verge encastrée à l'une des extrémités, libre à l'autre . . . . .	221
§ 179.	Applications . . . . .	222

## APPENDICE

§ 180.	Erreurs systématiques. Erreurs fortuites et accidentelles. . . . .	225
§ 181.	Moyennes. Poids des expériences . . . . .	225
§ 182.	Méthode des moindres carrés . . . . .	226
§ 183.	Répartition expérimentale et théorique des <del>erreurs</del> . Courbe en cloche. . . . .	228