ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Guido Fubini in Torino
Tullio Levi-Civita in Roma
Salvatore Pincherle in Bologna
Francesco Severi in Roma

SERIE QUARTA - TOMO VIII

(LXV DELLA RACCOLTA)

BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI

MCMXXX

Bologna, Cooperativa Tipografica Azzoguidi, 1930

Sulle trasformazioni birazionali delle curve algebriche interpretate come rotazioni del piano iperbolico.

Memoria di ANNIBALE COMESSATTI (a Padova).

Sunto. - *Ricorrendo all'uniformizzazione mediante funzioni fuchsiane, le trasformazioni birazionali d'una curva algebrica in sè, dotate di almeno un punto unito, possono rappresentarsi mediante rotazioni periodiche del piano iperbolico. L'Autore si vale di tale rappresentazione per la ricerca del massimo periodo corrispondente a valori assegnati del genere della curva e del numero dei punti uniti. È particolarmente approfondito, tanto dal punto di vista algebrico, quanto da quello gruppale, il caso delle curve contenenti trasformazioni a periodo massimo, restandone tra l'altro precisata, negli elementi essenziali, la determinazione geometrica di poligoni fuchsiani caratteristici.*

L'interpretazione che dà ad un tempo materia e strumento alla presente ricerca, rientra nel quadro delle suggestive ed eleganti connessioni che la teoria dell'uniformizzazione ha intrecciate fra dominî apparentemente discosti dell'indagine geometrica. Ne ho altrove indicati i termini generali (1); quì chiedo mi sia consentito trattarne con maggiore ampiezza, nell'orbita d'uno speciale problema.

Problema essenzialmente non nuovo; ma il fatto che la rappresentazione lo suggerisca spontaneamente indicandolo come il più adatto ad illustrarne le virtuosità grafico-combinatorie, coi relativi significati funzionali, credo possa bastare a giustificarne la ripresa.

Si tratta di ricercare il valor massimo che, sopra una curva C di dato genere $p(>0)$, può competere al *periodo* d'una trasformazione birazionale dotata di almeno un punto unito, o di un prefissato numero u di punti uniti, e di assegnare la costruzione algebrica delle curve contenenti trasformazioni a periodo massimo.

Nelle ipotesi più generali, il problema del massimo periodo è stato risolto dal WIMAN, attraverso ad una concisa analisi aritmetica sussidiata da alcune

(1) Nella Nota introduttiva: *Curve algebriche e funzioni fuchsiane* [« Atti del R. Istituto Veneto di S. L. A. », T. 88 (1929), pp. 771-834] che richiameremo coll'abbreviazione « Intr. ».

osservazioni funzionali ([2]). Il problema stesso vien qui ripreso, nuovamente risoluto, e completato, nel senso che l'enunciato finale specificamente dichiara.

A dir vero, nei riguardi del problema generale tutto procede qui colla riserva che le trasformazioni di cui si tratta abbiano almeno un punto unito; giacchè per le trasformazioni prive di punti uniti non si verifica l'interpretazione invocata. Ma, come mostrerò in una nota integrativa, le conclusioni di questo lavoro contribuiscono alla discussione del caso escluso, e, comunque, la riserva è di fatto superflua giacchè il massimo (assoluto) di WIMAN si raggiunge per $u = 1$.

In compenso la perfetta traduzione metrico-gruppale dei rapporti algebrici inerenti agli obbiettivi, ne favorisce in modo particolare la discussione, cui pur giova efficacemente il soccorso di adeguate premesse (§ 1). Il ponte di passaggio è dato dal *teorema di diramazione* ([3]), della cui posizione neutrale rispetto ai due ordini di rapporti si avvantaggia la ricerca, attingendo dalle subordinazioni gruppali del caso le indicazioni essenziali alla costruzione algebrica delle curve in oggetto, o viceversa assurgendo da questa alla costruzione di *poligoni fuchsiani* soggetti a domandate esigenze.

Su alcuni tipi che si segnalano per eleganti caratteristiche e multiple interferenze, mi propongo di ritornare in altro lavoro.

§ 1. **Preliminari algebrici.**

1. Sia C una curva algebrica (irriducibile) di genere p, che ammetta una trasformazione birazionale T in sè medesima, di *periodo* n. Indichiamo con I_n l'involuzione generata da T, e con f la curva di genere π che ne è l'immagine.

Le *coincidenze* di I_n cadono nei punti uniti di T e delle sue potenze, e si distribuiscono in un certo numero di gruppi, ciascuno dei quali consta di coincidenze della stessa molteplicità. Se per un gruppo H questa è $\frac{n}{\mu}$, allora H consta di μ punti distinti, e l'intero μ dà l'esponente della minima potenza

([2]) A. WIMAN, *Ueber die hyperelliptischen Curven und diejenigen vom Geschlechte $p = 3$ welche eindeutige Transformationen in sich zulassen* [« Bihang till K. Svenska Vet-Akad. Handlingar », Bd. 21 (1895), pp. 1-23] n.i 1-3. Il valor massimo trovato dal WIMAN è $4p + 2$ (cfr. i nostri §§ 2 e 3).

([3]) Vedi la mia Memoria: *Le involuzioni sulle curve algebriche ed il teorema generale di diramazione per le funzioni fuchsiane* [« Memorie Accad. Lincei, (6), vol. III (1930), pp. 1-56]. La si richiamerà coll'iniziale *D*.

di T che lascia fisso ciascun punto di H. In particolare i punti uniti di T sono n-pli per l'involuzione I_n.

L'immagine di H sulla riemanniana R dalla curva f è un *punto di diramazione regolare* [4] per la rappresentazione di C su f. Il relativo *indice di diramazione* è $\frac{n}{\mu}$, mentre μ si dirà *l'esponente della diramazione* stessa.

È ovvio e notorio che il *gruppo di monodromia* M inerente alla rappresentazione in discorso, è il *gruppo ciclico* generato da una sostituzione s che può identificarsi colla $(1, 2, \dots, n)$; bastando perciò osservare che se O è, su R, l'origine dei cammini, ed $O_1, O_2, \dots, O_n$ sono i punti corrispondenti di C ordinati in modo che sia $T(O_i) = O_{i+1}$, una circolazione sulla R che porti O_1 in O_h porta $T(O_1)$ in $T(O_h)$, quindi O_2 in O_{h+1}, ecc. Se poi D è un punto di diramazione, ed un cappio (semplice) di origine O che lo circondi produce la s^m, l'esponente μ relativo a D è il m. c. d. di m ed n, giacchè la s^m, che ha il periodo μ, si decompone in μ cicli, ciascuno di $\frac{n}{\mu}$ elementi.

È bene anche rilevare in modo esplicito, che, nel particolar caso in cui ci troviamo, la s^m relativa a D è indipendente dalla *direttrice* del cappio, in quanto è trasformata in sè medesima da tutte le operazioni di M.

In particolare se la f è *razionale* (piano complesso z) la C può, a meno d'una trasformazione birazionale, identificarsi colla

$$w^n = \varphi(z),$$

dove φ è un polinomio, il cui ordine può supporsi multiplo di n; ed allora se a è una radice di molteplicità m dell'equazione $\varphi(z) = 0$, in $z = a$ si ha una diramazione d'esponente $\mu =$ m. c. d. (m, n), giacchè nell'intorno di $z = a$ gli n valori di $\sqrt[n]{\varphi(z)}$ si permutano come quelli di $(z - a)^{\frac{m}{n}}$. Quindi affinchè in $z = a$ vi sia una diramazione di esponente μ, è necessario e basta che $\varphi(z)$ contenga il fattore $(z - a)^{\lambda\mu}$, dove λ è primo con $\frac{n}{\mu}$.

2. Tornando ora al caso generale, anzi prescindendo addirittura, almeno per il momento, dal tipo particolare (ciclico) dell'involuzione I_n, immaginiamo segnati su R i punti di diramazione $D_1, D_2, \dots, D_r$ della rappresentazione di C su f, ed indichiamo con R' la superficie dedotta da R *sopprimendo* quei punti.

---

[4] Per la terminologia, e per altri chiarimenti, vedi le mie Note: *Sulle curve di Galois* [« Rendiconti Accad. Lincei » (6), vol. IX (1929), pp. 272-278 e 372-377].

È noto (Intr. n.[i] 4, 8) che si possono tracciare per O $2p$ cicli (orientati) α_i, β_i formanti un *sistema di retrosezioni*, ed r *cappî* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ avvolgenti i punti D_i, per guisa che il ciclo

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_r + \alpha_1 + \beta_1 - \alpha_1 - \beta_1 + \ldots - \alpha_p - \beta_p,$$

risulti, sulla R', *equivalente a zero*; e ne consegue che fra le corrispondenti sostituzioni (*generatrici*) A_i, B_i, S_i del gruppo di monodromia M corre la relazione

(1) $$B_p^{-1} A_p^{-1} B_p A_p \ldots B_1 A_1 S_r \ldots S_2 S_1 = 1.$$

Si ha in essa una *condizione necessaria* per l'esistenza d'una C legata nel modo prescritto alla f; ed un'altra condizione è data da ciò che il gruppo M generato dalle sostituzioni (su n elementi) A_i, B_i, S_i risulti *transitivo*. Ed è pur noto, che, allo scopo, le condizioni stesse sono anche *sufficienti* ([5]).

Nel caso della I_n ciclica considerata al numero precedente, le generatrici predette, in quanto potenze di s, sono due a due permutabili, e la (1) si riduce quindi alla

(1') $$S_r S_{r-1} \ldots S_2 S_1 = 1,$$

la quale, indicandosi con μ_i l'esponente della diramazione in D_i, e ricordando che $S_i = s^{\lambda_i \mu_i}$, dove λ_i è primo con $\frac{n}{\mu_i}$, può porsi sotto la forma

(2) $$\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \ldots + \lambda_r \mu_r \equiv 0 \quad (\text{mod. } n).$$

Dati sulla f i punti D_i cogli esponenti μ_i (divisori di n), il verificarsi della (2) per opportuni valori delle λ_i *non nulli*, e risp. *primi con* $\frac{n}{\mu_i}$, basta, *se la f non è razionale* ad assicurare dell'esistenza di qualche C contenente una I_n ciclica le cui coincidenze si raggruppano in corrispondenza ai D_i a norma degl'interi μ_i. Ed invero dopo aver fatte le S_i eguali ad $s^{\lambda_i \mu_i}$, con che resta verificata la (1'), rimangono ancora arbitrarie (fra le potenze di s) le A_i, B_i, e di tale arbitrarietà si può disporre in modo che il gruppo M

([5]) Come si sà da A. HURWITZ, *Sulle superficie di Riemann con dati punti di diramazione* (trad. italiana di A. BRAMBILLA) [« Giornale di Matem. », T. 41 (1903), pp. 337-376], Parte V, § 1, e come del resto risulta da ciò che le condizioni in discorso son sufficienti ad assicurare dell'esistenza d'una *superficie ricoprente* la R con n fogli che si permutano a norma delle sostituzioni assegnate (e di quelle che se ne deducono per ogni altro ciclo della R relativo ad O). Alla nuova superficie si può poi conferire il carattere di *Riemanniana* (in senso funzionale) introducendo la nozione di *variabile complessa locale*, ecc. (Cfr. Intr. n.° 12).

risulti transitivo, bastando ad es. assumere una delle A_i, B_i eguale ad s. Le C così ottenute si distribuiscono in più famiglie birazionalmente distinte, del cui numero non vogliamo qui occuparci.

Invece, *quando f è razionale*, la condizione di transitività per il gruppo M porta ad *un altro vincolo tra le* μ_i, il quale si precisa subito esprimendo che un opportuno prodotto di potenze (positive o negative) delle S_i, cioè delle $s^{\lambda_i\mu_i}$ deve identificarsi colla s. Ove si osservi che, in veste di generatrici di M, alle $s^{\lambda_i\mu_i}$ posson sostituirsi le s^{μ_i}, giacchè, essendo ogni λ_i prima con $\frac{n}{\mu_i}$, la s^{μ_i} è a sua volta una potenza di $s^{\lambda_i\mu_i}$ $\left[\text{con esponente } \sigma_i \text{ tale che } \lambda_i\sigma_i \equiv 1 \left(\text{mod. } \frac{n}{\mu_i}\right)\right]$ si vede che il vincolo cercato può concretarsi nella

$$\rho_1\mu_1 + \rho_2\mu_2 + \dots + \rho_r\mu_r \equiv 1 \qquad (\text{mod. } n), \tag{3}$$

indicando con ρ_i degl'interi opportuni (anche nulli).

Com'è facile vedere, *la condizione* (3) *equivale all'altra che gl'interi* (μ_1, μ_2, ..., μ_3, n) *siano, nel complesso, primi tra di loro;* suppostala verificata, ed indicate con a_i le affisse z dei punti D_i, per ogni sistema di valori λ_i soddisfacenti alla (2) $\left(\text{e rispettivamente primi con } \frac{n}{\mu_i}\right)$, si ha una curva C di equazione

$$w^n = (z - a_1)^{\lambda_1\mu_1}(z - a_2)^{\lambda_2\mu_2} \dots (z - a_r)^{\lambda_r\mu_r}, \tag{4}$$

contenente una I_n ciclica col comportamento voluto. Il secondo membro della (4) può supporsi un *polinomio* (cioè le λ *positive*) giacchè nulla sostanzialmente muta aggiungendo alle λ_i dei multipli di $\frac{n}{\mu_i}$; e due C così costruite in relazione a due soluzioni λ_i, λ_i' della (2) sono birazionalmente distinte allora e solo che quelle soluzioni sono *incongrue* nel senso che non sia, per ogni i, $\lambda_i' \equiv \lambda_i \left(\text{mod. } \frac{n}{\mu_i}\right)$.

Notiamo infine che, a norma della formula di ZEUTHEN, fra gl'interi p, π, n, μ_i corre la relazione

$$2n(\pi - 1) + \Sigma\mu_i\left(\frac{n}{\mu_i} - 1\right) = 2p - 2,$$

che può scriversi

$$n(r + 2\pi - 2) - \Sigma\mu_i = 2p - 2, \tag{5}$$

ed in particolare per $\pi = 0$ diviene

$$(5') \qquad n(r-2) - \Sigma\mu_i = 2p - 2,$$

le sommatorie andando estese da 1 ad r (6).

3. Agli scopi del seguito fermiamo brevemente l'attenzione sul caso in cui, essendo f *razionale*, tutte le μ_i, il cui numero ora indicheremo con u, sono eguali ad 1, quindi la I_n ha quali coincidenze u punti n-pli che sono uniti per T.

La condizione (3) è soddisfatta senz'altro, e la (2) assume la forma

$$(6) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_u \equiv 0 \qquad (\text{mod. } n),$$

colle λ intere, non nulle, e *prime con n.*

Si ha intanto $u \geq 2$, e, se $u = 2$, la (5') porge $p = 0$. Inoltre la possibilità di soddisfare alla (6) è subordinata alla condizione

$$(7) \qquad u(n-1) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2),$$

la quale esprime che se u è dispari lo dev'essere anche n (quindi, se n è pari, lo dev'essere anche u) e può, volendo, dedursi anche dalla (5') tenuto conto che $\Sigma\mu_i = r$.

Verificata la (7), si posson sempre trovare degl'interi λ_i (non nulli e primi con n) che soddisfano alla (6). Se u è pari, basta allo scopo assumere $\frac{u}{2}$ delle λ eguali ad 1, e le rimanenti eguali ad $n-1$, mentre se $u = 2t+1$ è dispari, lo scopo si raggiunge dando a $t+1$ delle λ il valore 1, a $t-1$ il valore $n-1$, ed alla restante il valore $n-2$.

§ 2. Interpretazione mediante rotazioni del piano iperbolico e ricerca del massimo periodo.

4. D'ora in poi supporremo che la nostra C sia di genere $p > 0$, e che la relativa T abbia *almeno un punto unito* (7). Allora se G è il *gruppo*

(6) Sulla (5) e su alcune osservazioni relative al comportamento dei μ_i contenute nelle più complete condizioni precedenti, s'imposta l'analisi del WIMAN, la quale in un punto ha bisogno d'una breve aggiunta.

(7) Come già avvertito, qui non considereremo le T prive di punti uniti. Mostreremo in altro luogo che il loro periodo non può superare $\frac{10p}{3}$ (sempre inferiore al massimo $4p+2$ relativo alle T con punti uniti) il limite predetto essendo raggiunto solo per $p = 9$.

fuchsiano puro relativo a C, che interpreteremo come un *gruppo di movimenti del piano iperbolico* π (eccezionalmente, se $p=1$, del piano euclideo) ed O una (qualunque) delle immagini in π d'un punto unito P della T, è noto che questa può rappresentarsi in π mediante una *rotazione* Θ *dello stesso periodo*, intorno al punto O, *permutabile con* G (Intr. n.° 18).

In forza della relazione di permutabilità, la Θ è obbligata a trasformare in sè medesimo il *poligono normale* N *di centro* O relativo a G, rispettando le *relazioni d'equivalenza* che accoppiano i lati di N, e ne raggruppano i vertici nei diversi *cicli* (Intr. n.° 25).

La Θ avendo il periodo n è *d'ampiezza* $\frac{2m\pi}{n}$, m essendo primo con n. Senza pregiudizio per quel che segue, si può supporre $m=1$, bastando all'uopo surrogare Θ colla sua potenza Θ^l per cui $ml\equiv 1$ (mod. n).

Volgiamoci alla ricerca d'un limite superiore per n, e delle circostanze in cui esso può venir raggiunto.

Intanto è chiaro che n è un divisore del numero $2s$ dei lati di N; ma d'altra parte si ha (Intr. n.° 25)

$$(8) \qquad 2s \leq 12p-6,$$

risultandone un primo limite superiore, che, come vedremo, può esser notevolmente abbassato.

Poniamo $2s=\lambda n$, ed esaminiamo dapprima il caso $\lambda=1$. Allora Θ trasforma ogni lato di N nel successivo (in un verso assegnato), talchè N è un *poligono regolare di* n *lati.*

Indichiamoli, nel verso della rotazione, con $a_1, a_2, \ldots, a_n (n=2s)$, e sia a_{l+1} il lato equivalente ad a_1 (in simboli $a_1\equiv a_{l+1}$). La rotazione Θ^l muta precisamente a_1 in a_{l+1}, quindi (a motivo della permutabilità con G) dovrà trasformare a_{l+1} in un lato equivalente, cioè di nuovo in a_1. Sarà dunque $l=s=\frac{n}{2}$, e poichè a_1 è un lato arbitrario di N, così ne segue che *ogni lato di N è equivalente all'opposto.*

Da ciò, mediante la nota regola (Intr. n.° 20) si deduce che, *quando* s *è pari, i vertici di N formano un unico ciclo,* mentre *quando s è dispari si distribuiscono in due cicli,* l'uno formato dai vertici di posto dispari, l'altro da quelli di posto pari. E dopo ciò, applicando la formula (Intr. n.° 19)

$$(9) \qquad s-v+1=2p,$$

nella quale v denota il *numero dei cicli di vertici,* e ricordando che $n=2s$, si trova rispettivamente $n=4p$, $n=4p+2$.

Nel primo caso, essendoci un sol ciclo di vertici, gli angoli di N valgono ciascuno $\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{2p}$, nel secondo, attesa la presenza di due cicli, ogni angolo è misurato da $\frac{2\pi}{s} = \frac{4\pi}{n} = \frac{2\pi}{p+1}$.

Giova infine osservare che *i due casi in discorso sono effettivi per ogni valore di* p, in quanto esistono sul piano iperbolico i corrispondenti poligoni regolari cogli angoli prescritti; ed uno, N, fra questi poligoni, nel quale i lati opposti siano assunti come equivalenti, individua un gruppo fuchsiano G di genere p (Intr. n.° 21), quindi la curva C corrispondente. D'altra parte la rotazione Θ d'ampiezza $\frac{2\pi}{n}$ intorno al centro O di N è permutabile con G (perchè trasforma in sè N colle assegnate equivalenze) quindi è immagine d'una trasformazione birazionale T della C in sè stessa, ecc.

Dopo ciò un breve passo conduce alla costruzione algebrica della C, che rinviamo al prossimo paragrafo.

5. Esaminiamo ora l'ipotesi $\lambda > 1$.

Poichè $n = \frac{2s}{\lambda}$, così, se $\lambda > 2$, sarà, per la (8) $n \leq 4p - 2$. Per $\lambda > 2$ si ha così un limite superiore più basso di quello sopra ottenuto; alla stregua del nostro intento resterà quindi da esaminare soltanto il caso $\lambda = 2$.

Adottiamo per i lati del poligono N le designazioni precedenti; ed inoltre indichiamo con A_i il vertice comune ad a_{i-1}, a_i, per guisa che sarà $a_i = A_i A_{i+1}$. Sia poi, come prima, a_{l+1} il lato equivalente ad a_1.

Poichè Θ muta ogni lato di N in quello che lo segue di due posti, così, *se* l *è pari*, a_{l+1} sarà il trasformato di a_1 mediante la rotazione $\Theta^{\frac{l}{2}}$. Ragionando come precedentemente, se ne deduce che *ogni lato di* N *è equivalente all'opposto*; onde sarà $2s = 4p$ oppure $2s = 4p + 2$, a seconda che s è pari o dispari, e quindi $n = s = 2p$ oppure $2p + 1$. La rotazione Θ è evidentemente il *quadrato* di quella considerata al numero precedente.

Suppongasi invece che *l sia dispari*, e si faccia $l + 1 = 2h$. Poichè $a_1 \equiv a_{2h}$, così, operando con Θ (e sempre tenendo conto della permutabilità con G) si vede che sarà $a_3 \equiv a_{2(h+1)}$, indi $a_5 \equiv a_{2(h+2)}$, ed in generale

$$a_{2r+1} \equiv a_{2(h+r)}, \quad a_{2\rho} \equiv a_{2(\rho-h)+1}, \tag{10}$$

(gl'indici essendo presi rispetto al modulo $2s$) con che resta compiutamente determinato l'accoppiamento dei lati del poligono N.

Se ne deduce, in base alla ricordata regola, che il *ciclo di vertici* a cui appartiene A_1, è formato da $A_1, A_{2h+1}, A_{4h+1}, \ldots$, e quindi consta di λ elementi, essendo λ il minimo intero per cui $2\lambda h + 1 \equiv 1 \pmod{2s}$, cioè per cui λh è multiplo di s. Posto $t = \text{m. c. d.}\,(h, s)$ sarà quindi $\lambda = \frac{s}{t}$, e poichè il ragionamento si applica a qualunque vertice di posto dispari, così ne risulta che i vertici di posto dispari si distribuiscono in t cicli, ciascuno di $\frac{s}{t}$ elementi.

Analogamente si vede che A_2 appartiene ad un ciclo $(A_2, A_{2h}, A_{4h-2}, \ldots)$ di μ elementi, essendo μ il minimo intero tale che $\mu(h-1)$ è multiplo di s, quindi $\mu = \frac{s}{\tau}$, dove $\tau = \text{m. c. d.}\,(h-1, s)$, e quindi che i vertici di posto pari si distribuiscono in τ cicli, ciascuno di $\frac{s}{\tau}$ elementi.

Inoltre posto $h = \alpha t$, $h - 1 = \beta\tau$ risulta $\alpha t - \beta\tau = 1$; sicchè t e τ saranno primi tra loro, ed s, in quanto divisibile per entrambi, lo sarà anche per $t\tau$ [8].

Poichè il numero dei cicli è $t + \tau$, ed $n = s$, si ha dalla (9)

$$n = 2p + t + \tau - 1, \tag{11}$$

ed anche, posto $n = mt\tau$

$$mt\tau = 2p + t + \tau - 1, \tag{11'}$$

dalla quale, se t è il maggiore fra i due numeri t, τ (l'eguaglianza essendo da escludersi perchè t, τ son primi tra di loro) si deduce

$$(m\tau - 2)t \leq 2(p-1). \tag{12}$$

Ora $m\tau = \frac{s}{t} = \lambda$ è il numero dei vertici d'un ciclo del primo gruppo, quindi non può essere inferiore a 3. Se $m\tau > 3$, la (12) porge $t \leq p - 1$, quindi $\tau \leq p - 2$, e, sostituendo nella (11) risulta $n \leq 4(p-1)$ [9]; se $m\tau = 3$ posson farsi due ipotesi:

a) $\tau = 1$, $m = 3$. La (11') dà $t = p$, e, successivamente la (11) $n = 3p$.

b) $\tau = 3$, $m = 1$. Allora $t = p + 1$, $n = 3p + 3$, coll'aggiunta che $p + 1$ non dev'essere multiplo di 3 (t primo con τ). Inoltre è da escludere che

---

(8) Aggiungasi che, posto come appresso $s = mt\tau$, α e β sono primi con m; giacchè ad es. α è primo con $\frac{s}{t} = m\tau$, e, in forza della $\alpha t - \beta\tau = 1$, anche con τ.

(9) Un'analisi più minuta mostra che tal limite può esser notevolmente abbassato: ma non ha interesse il diffondervisi.

sia $p = 1$, perchè verrebbe $mt = 2$, mentre, come $m\tau$, e per la stessa ragione, anche mt è ≥ 3.

In conclusione per $\lambda > 1$ si ha sempre $n \leq 4p$ (anzi $n < 4p$, salvo il caso *b*) per $p = 3$), quindi nelle nostre ipotesi *il valor massimo del periodo è* 4p + 2, raggiunto per ogni p e per $\lambda = 1$. *Dopo questo, il più alto valor possibile è* 4p, pure raggiunto nelle stesse condizioni, salva l'eccezione avvertita, che per $p = 3$ dà luogo ad un nuovo tipo del quale discorreremo altrove.

§ 3. Passaggio alla determinazione algebrica delle curve contenenti trasformazioni a periodo $4p + 2$ o $4p$.

6. Riprendiamo la considerazione dei due casi incontrati al n.° 4, mantenendo per i lati e vertici del poligono N le notazioni precedenti, ed inoltre indicando con M_i il punto medio del lato a_i.

Il periodo n della trasformazione T è pari; dunque $\sigma = T^{\frac{n}{2}}$ è involutoria, ed ha per immagine la *rotazione di 180°*, $S = \Theta^{\frac{n}{2}}$ del piano iperbolico π intorno al punto O (*simmetria di centro* O). Vedremo subito che l'involuzione generata da σ su C è una g_2^1; dunque *C è iperellittica.*

Per determinare i punti uniti di σ basta osservare che le loro immagini in N devon esser lasciate fisse da S, o trasformate in punti equivalenti rispetto a G. Di punti del primo tipo v'ha soltanto O (immagine di P che, essendo unito per T lo è anche per σ); quelli del secondo cadono necessariamente sul contorno di N, e tra essi vi sono in ogni caso i punti M_i, che si distribuiscono in $\frac{n}{2}$ coppie simmetriche rispetto ad O (quindi associate da S), alle quali corrispondono su C, $\frac{n}{2}$ punti distinti, uniti per σ, e formanti un ciclo della T $\left(\text{con } \frac{n}{2} \text{ punti doppî}\right)$.

Avuto riguardo al modo con cui i punti dei lati opposti di N sono associati dalla corrispondente generatrice di G, si vede subito che, oltre agli M_i, possono esser punti del secondo tipo soltanto i vertici di N. Ed effettivamente la circostanza si verifica per $n = 4p$, giacchè allora tutti quei vertici sono equivalenti ed immagini d'uno stesso punto A di C; mentre per $n = 4p + 2$ due vertici opposti appartengono a cicli distinti, quindi sono immagini di due punti distinti A, A' della C (l'uno associato ai vertici di posto dispari, l'altro a quelli di posto pari) trasformati l'uno nell'altro da σ.

In definitiva *i punti uniti di σ sono, in entrambi i casi, $2p+2$*, rappresentati rispettivamente in N:

a) per $n=4p+2$ dal punto O e dalle $2p+1$ coppie di punti M_i;

b) per $n=4p$, dal punto O, dalle $2p$ coppie M_i, e dall'unico ciclo di vertici.

Nel primo caso la T ha su C il solo punto unito P, nel secondo i due punti uniti P, A. Dopo ciò è chiaro che l'immagine di T sulla retta z i cui punti rappresentano le coppie della g_2^1 (che l'involuzione generata da σ sia tale, risulta dal numero dei suoi punti doppî) è una proiettività τ a periodo $\frac{n}{2}$ (quindi risp. $2p+1$ e $2p$), e che il gruppo di diramazione risulta costituito, nel primo caso da una coincidenza di τ e da un ciclo, nel secondo, dalle due coincidenze e da un ciclo. Scelta come τ la $z'=\varepsilon z \left(\varepsilon = e^{\frac{4\pi i}{n}}\right)$, posta all'infinito l'immagine di P, si trovano così per i due tipi le equazioni

$$w^2 = z^{2p+1} - 1, \tag{13}$$

$$w^2 = z(z^{2p} - 1) \text{ } (^{10}), \tag{13'}$$

mentre la T resta rispettivamente rappresentata dalle

$$z' = \varepsilon z, \quad w' = -w \qquad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{2p+1}}\right) \tag{14}$$

$$z' = \varepsilon z, \quad w' = \eta w \qquad \left(\eta = e^{\frac{\pi i}{2p}},\ \varepsilon = \eta^2\right). \tag{14'}$$

7. Alla determinazione algebrica delle C in oggetto si può anche pervenire in base alla rappresentazione n-pla determinata dalla T.

Ogni carattere di tal rappresentazione si precisa facilmente al seguito delle osservazioni precedenti; tuttavia conferisce più espressivamente al caso, ed alla funzione illustrativa e preparatoria che vogliamo attribuirgli, il prescinderne interamente come faremo.

Consideriamo sul piano iperbolico π il triangolo OA_1A_2, che indicheremo anche brevemente con N_1. Ogni punto di N può esser portato in esso o sul suo contorno mediante una potenza di Θ; onde quel triangolo è un *campo fondamentale* per il gruppo fuchsiano Γ ottenuto *ampliando* G *mediante la* Θ, quindi relativo alla curva f immagine della I_n generata da T (D, n.i 3, 8). Rispetto a Γ i due lati OA_1, OA_2, in quanto trasformati uno nell'altro da Θ sono *equivalenti*; e lo sono pure i due segmenti A_1M_1, A_2M_1 nei quali il

[10] Cfr. WIMAN, loco cit. [2] n.i 2, 3.

lato A_1A_2 resta diviso dal suo punto medio, giacchè, indicata con H la *traslazione di asse* OM_1 che porta il lato A_1A_2 di N nell'opposto (ed è una generatrice di G) il movimento $\Theta^{\frac{n}{2}}H$ [11] di Γ, ch'è poi una rotazione di 180° intorno ad M_1, scambia A_1M_1 con A_2M_1. Pertanto N_1, in quanto poligono fondamentale di Γ va risguardato come un *quadrangolo* $OA_1M_1A_2$ con tre cicli di vertici $(O)(M_1)(A_1A_2)$; quindi *la curva* f *è razionale* (Intr. n.i 21, 23) ed inoltre l'uniformizzante η del caso (che per il teorema di diramazione è tale anche per C col gruppo G) risulta *diramata* sulla f (piano complesso x) nei tre punti $x=a$, $x=b$, $x=c$ corrispondenti ai cicli predetti.

I valori dei relativi *indici di diramazione* ν_1, ν_2, ν_3 si deducono subito dalle misure degli angoli di N_1, e sono

$$\begin{array}{llll} \nu_1=4p+2, & \nu_2=2, & \nu_3=2p+1, & \text{per } n=4p+2 \\ \nu_1=4p & \nu_2=2, & \nu_3=4p, & \text{per } n=4p. \end{array} \tag{15}$$

A norma del teorema di diramazione, la rappresentazione di C su f è diramata solo in a, b, c con indici di diramazione *divisori dei* ν_i; ma attualmente nel passaggio da f a C le diramazioni della η devono *sparire*, perchè G è *puro*, dunque quegl'indici son proprio *eguali ai* ν_i. Ciò d'altronde discende facilmente dalle osservazioni del numero precedente, in quanto esse mostrano che, per $n=4p+2$, ad $x=a$ corrisponde su C un punto $4p+2$-plo P della I_n, ad $x=b$ un gruppo con $2p+1$ punti doppî (immagini degli M_i) e ad $x=c$ un gruppo coi due punti A, A', $2p+1$-pli. Analogamente per $n=4p$.

Dai valori (15) si deducono subito quelli degli *esponenti di diramazione* (n.° 1) relativi ai punti a, b, c, che risultano

$$\begin{array}{llll} \mu_1=1, & \mu_2=2p+1, & \mu_3=2, & \text{per } n=4p+2 \\ \mu_1=1, & \mu_2=2p, & \mu_3=1, & \text{per } n=4p, \end{array} \tag{16}$$

e dopo ciò, determinate λ_1, λ_2, λ_3 $\left(\lambda_i \text{ primo con } \dfrac{n}{\mu_i}\right)$ in modo che $\lambda_1\mu_1+$ $+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3$ sia multiplo di n, l'equazione di C, a norma del § 1 può scriversi

$$y^n=(x-a)^{\lambda_1\mu_1}(x-b)^{\lambda_2\mu_2}(x-c)^{\lambda_3\mu_3}.$$

Volendo che il grado del secondo membro risulti n, si può fare nel primo caso $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=p$, oppure $\lambda_1=2p-1$, $\lambda_2=\lambda_3=1$, nel secondo

[11] Si tenga sempre presente che scriviamo i prodotti nell'ordine operatorio.

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2p - 1$, ottenendo le equazioni

$$(17)\qquad \left.\begin{aligned} y^n &= (x-a)(x-b)^{2p+1}(x-c)^{2p}, \\ y^n &= (x-a)^{2p-1}(x-b)^{2p+1}(x-c)^2, \end{aligned}\right\} \quad (n = 4p+2)$$

$$y^n = (x-a)(x-b)^{2p}(x-c)^{2p-1}, \qquad (n = 4p)$$

che, col porre i punti di diramazione, opportunamente ordinati, in 0, 1, ∞ assumono le forme semplici

$$(18)\qquad y^{4p+2} = \begin{cases} x^{2p}(x-1) \\ x^{2p+1}(x-1) \\ x^{2p-1}(x-1)^2 \\ x^{2p+1}(x-1)^2 \end{cases}$$

$$(18')\qquad y^{4p} = \begin{cases} x^{2p}(x-1) \\ x^{2p-1}(x-1). \end{cases}$$

Il lettore scriverà facilmente le equazioni delle trasformazioni birazionali che, per uno stesso valor di n, fanno passare dall'uno all'altro tipo, od alle precedenti forme (13), (13').

La via seguita in questo numero si presta anche facilmente alla determinazione algebrica delle curve che ammettono trasformazioni a periodo $3p$ o $3p+3$, dei tipi corrispondenti ai casi *a*), *b*) del n.° 5. Rinviamo ad altro luogo i particolari.

§ 4. Il problema nel caso di trasformazioni T con assegnato numero di punti uniti.

8. Passiamo a studiare, sempre in base alla rappresentazione mediante rotazioni del piano iperbolico, le trasformazioni T con assegnato numero $u > 1$ di punti uniti, col proposito di ricercare un *limite superiore*, funzione di p ed u, del periodo n.

Allo scopo non conviene più, come precedentemente, far riferimento al gruppo fuchsiano *puro* relativo a C, ma invece al gruppo G relativo ad una η (così indichiamo al solito l'uniformizzante fuchsiana) opportunamente *diramata* sulla C. E precisamente, posto $u = h + 1$, ed indicati con $P_1, P_2, \ldots, P_h, P$ i punti uniti della T, fisseremo che la η sia diramata nei P_i (ma non in P) con certi *indici di diramazione* ν_i (finiti), che per loro natura sono interi maggiori dell'unità. Di conseguenza le immagini dei P_i sul piano iperbolico π

saranno *vertici ellittici* per G, a ciascun P_i corrispondendo una *classe* di tali vertici, tutti fra di loro equivalenti.

Poichè T trasforma in se stesso il gruppo di diramazione della η associando punti del medesimo indice (nel caso attuale lasciandoli fissi), così, detta O una fra le immagini di P in π, la T potrà ancora rappresentarsi mediante una *rotazione* Θ di periodo n intorno ad O (Intr. n.° 18) permutabile con G; anzi, come al n.° 4, si potrà supporre che l'ampiezza di Θ sia $\frac{2\pi}{n}$.

Indichiamo ancora con N il *poligono normale di centro* O relativo a G, e con $2s$ il numero del suoi lati; poichè N è trasformato in se stesso dalla Θ, sarà, come prima $2s = \lambda n$.

Ogni *vertice essenziale* di N è trasformato da Θ in un vertice *equivalente*, perchè la relativa immagine su C è un punto unito della T; e siccome ogni classe di vertici ellittici ha almeno un rappresentante in N (Intr. n.° 25, *b*) così i vertici essenziali di N si distribuiscono in h cicli, ciascuno dei quali contiene un numero di elementi multiplo di n. Vi sarà poi un certo numero v di cicli formati da vertici accidentali, che per ragioni d'opportunità indicheremo con ρn, senza che ρ sia necessariamente intero.

La nota formula $s - v - m + 1 = 2p$ relativa ai poligoni fuchsiani (Intr. n.° 21) può attualmente scriversi $(\lambda - 2\rho)n = 4p + 2(h-1)$, od anche

$$n = \frac{4p + 2(h-1)}{\lambda - 2\rho}, \tag{19}$$

onde la ricerca d'un limite superiore per n vien ricondotta a quella d'un limite inferiore per $\lambda - 2\rho$.

9. Si è già visto che per $u = 1$ il massimo di n è $4p + 2$; convien considerare a parte anche il caso $u = 2$, che è pure per certi riguardi eccezionale.

Se $u = 2$, quindi $h = 1$, i vertici essenziali di N formano un unico ciclo con σn elementi; e poichè ciascun ciclo di vertici accidentali ha almeno 3 elementi, così risulta $2s \leq \sigma n + 3v$. Sostituendo nella formula dianzi ricordata, vale a dire in $s - v = 2p$ viene subito

$$n \leq \frac{4p - v}{\sigma}, \tag{20}$$

quindi in definitiva $n \leq 4p$, il massimo essendo, se possibile, raggiunto per $v = 0$, $\sigma = 1$.

La possibilità sussiste effettivamente per ogni p; e lo sappiamo dal paragrafo precedente, in cui siam pervenuti a trasformazioni di periodo $4p$

dotate precisamente di due punti uniti. Ma d'altronde da quanto precede apprendiamo che il caso del massimo può aversi e si ha effettivamente, soltanto quando N ha un sol ciclo di n vertici essenziali, il che a sua volta porta che le coppie di lati opposti siano equivalenti (n.° 4). Una tal situazione si realizza individuando G mediante un *poligono regolare* N di $4p$ lati, in cui le coppie di lati opposti siano assunte come equivalenti, e gli angoli valgano $\frac{\pi}{2p\nu}$, con ν intero arbitrario. In forza di osservazioni già svolte la curva C corrispondente a G contiene la T del tipo voluto.

Al ciclo dei vertici di N viene a corrispondere su C un punto P_1 unito per T, nel quale risiede una diramazione d'indice ν della η relativa a G. In particolare si può prendere $\nu = 1$, ed allora si ricade sul caso del paragrafo precedente; la η non è più diramata in P_1, ed i vertici di N non son più essenziali ma accidentali; insomma G è un gruppo puro ([12]).

È bene infine notare esplicitamente che *per* $\nu > 1$ *non si hanno nuovi di tipi di curve* C; cambia soltanto l'uniformizzante η, cioè il gruppo G. Basta perciò osservare che il ragionamento del n.° 6 vale integralmente anche per $\nu > 1$ ([13]).

10. Torniamo ora al caso generale, e, mantenendo per i vertici e lati di N le notazioni precedenti, fissiamo l'attenzione sopra due vertici A_1, $A_{\lambda+1}$ trasformati uno nell'altro dalla rotazione Θ. Congiungendo quei due vertici con O veniamo ad isolare entro N un poligono Π_1 di vertici $O, A_1, A_2, \dots, A_{\lambda+1}$, che potrà anche dirsi un *settore*, il quale verrà trasportato dalla Θ e dalle sue potenze in altri $n-1$ settori congruenti $\Pi_2, \dots, \Pi_n$, che, unitamente al primo, ricopriranno l'intero poligono N.

Analogamente al n.° 7 si riconosce che Π_1^* è un *poligono fondamentale* per il gruppo fuchsiano Γ ottenuto *ampliando* G *mediante la* Θ, quindi relativo alla curva f immagine delle I_n generata da T. È poi noto (D. n.° 3), e d'altronde consegue immediatamente dalla permutabilità di Θ con G, che ogni operazione di Γ è congrua (mod. G) ad una potenza Θ^i di $\Theta (i < n)$, cioè può esprimersi sotto la forma $g\Theta^i$, g essendo un'operazione di G.

([12]) Si badi però che l'ipotesi $\nu > 1$ è essenziale per il ragionamento che conduce alla (20). Ma quell'ipotesi riflette solo la posizione più opportuna (scelta del gruppo G) per la discussione del problema, senza rappresentare una condizione *necessaria* per G.

([13]) E non può esser che così, dal momento che l'analisi del paragrafo precedente ci ha dato tutti i tipi di C con T a periodo $4p$. A dir vero, per $p = 3$ si ha in più il caso accennato alla fine del n.° 5; ma si vedrà che la relativa T ha un solo punto unito.

L'accoppiamento determinato fra i lati di Π_1 dal gruppo Γ, implica intanto l'equivalenza $OA_1 \equiv OA_{\lambda+1}$ (cfr. n.° 7), e per gli altri lati $a_1, a_2, \ldots, a_\lambda$ che appartengono anche ad N resta precisato dalla regola seguente:

Sia $a_q (q \leq \lambda)$ uno dei lati in discorso, ed a_t il lato equivalente (mod. G) quindi $a_t = g(a_q)$. Se Θ^l è la potenza di Θ che porta a_t in un lato a_r di Π_1, sarà precisamente $a_r \equiv a_q$ (mod. Γ) giacchè risulta $a_r = \Theta^l g(a_q)$, e l'operazione $\Theta^l g$ appartiene a Γ. Si noti che l'indice r è poi il *resto positivo di* t (mod. λ).

Non è da escludersi che possa risultare $r = q$, cioè che qualche lato di Π_1 resti accoppiato (mod. Γ) a sè medesimo invertito di senso; ed allora (cfr. n.° 7) nasce nel suo punto medio un *vertice isolato* di Π_1, ed *il lato in oggetto si sdoppia*, cioè conta per due nel novero dei lati di Π_1.

Proseguendo nell'analisi dei rapporti fra i due poligoni Π_1, N ed i corrispondenti gruppi Γ, G, immaginiamo di associare ad ogni A_i od a_i (prescindendo dai predetti sdoppiamenti) di Π_1 gli n elementi di N che se ne deducono operando con Θ e colle sue potenze, cioè gli elementi di egual posto dei settori $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$. Resta così stabilita fra gli elementi A_i, a_i di Π_1 e quelli di N una corrispondenza $(1, n)$ la quale, in forza della permutabilità di Θ con G, muta due elementi di N equivalenti rispetto a G in due elementi di Π_1 pure equivalenti (mod. Γ).

Ne segue che ad ogni ciclo k di vertici in N, corrisponde un ciclo k_1 in Π_1; però il numero dei vertici del primo è, in generale, *multiplo* di quello relativo al secondo, in quanto ad un vertice che descriva k nell'ordine determinato dalla nota regola (Intr. n.° 20) corrisponde un vertice che descrive analogamente k_1; e quest'ultimo ritorna alla posizione iniziale dopo aver esaurito k_1, appena il primo ripassa per una delle n posizioni corrispondenti, che può non esser l'iniziale, dopo di che seguitando il percorso del primo, il secondo ripete una o più volte la precedente vicenda.

Si aggiunga che una potenza Θ^i di Θ, ove non trasformi k in sè medesimo (il che verrebbe a dire che il punto corrispondente di C è lasciato fermo dalla T^i) lo muta in un ciclo, che si potrà dir *simile*, dello stesso numero di elementi; onde ad un ciclo k_1 di Π_1 corrisponde in generale un numero finito di cicli k. Se però k è uno degli h cicli di vertici essenziali di N, ogni potenza di Θ lo trasforma in sè medesimo (n.° 8), quindi a quegli h cicli corrispondono in Π_1 altrettanti cicli *distinti* che son pure cicli di vertici *essenziali*, perchè ogni operazione di G, in particolare ogni sostituzione ellittica, appartiene anche a Γ.

Indicando con δ il numero dei vertici isolati di Π_1 (ciascuno dei quali è un vertice ellittico d'indice 2 per Γ) vediamo in conclusione che il poligono Π_1 ha $\lambda + \delta + 2$ lati (quindi $\lambda + \delta$ sarà pari) e $\delta + h + \tau + 1$ cicli di vertici, a cui contribuiscono:

a) Per $\delta + 1$ unità il punto O e i δ vertici isolati (cicli di un solo elemento);

b) Per h unità i cicli provenienti dai vertici essenziali di N;

c) Per τ unità i cicli provenienti dai vertici accidentali di N.

Detto π il genere della curva f, cioè della superficie chiusa ottenuta portando a coincidere le coppie di lati equivalenti di Π_1, si ha quindi, per la solita formula

$$\lambda + \delta + 2 - 2(\delta + h + \tau + 1) + 2 = 4\pi,$$

da cui segue

$$\lambda = 2(h + \tau - 1) + \delta + 4\pi. \tag{21}$$

Per lo scopo che abbiamo in vista, occorre ancora stabilire un' opportuna espressione per il numero ρ della (19). Perciò consideriamo uno dei τ cicli di cui in *c*); se esso contiene α elementi, gli αn vertici di N che gli corrispondono nel riferimento $(1, n)$ sopra considerato, dovranno, in forza di quel che precede, distribuirsi in un certo numero di cicli simili, ciascuno di $\alpha\nu$ vertici. Si avranno così $\frac{n}{\nu}$ cicli, quindi in totale il numero dei cicli di vertici accidentali di N si potrà esprimere con $\sum \frac{n}{\nu} = n \sum \frac{1}{\nu}$, la somma componendosi di τ addendi. Siccome, nella seconda somma, ciascuno di essi è ≤ 1, così il valore dell' espressione assegnata potrà indicarsi con $\eta\tau n$, essendo $\eta \leq 1$.

Ricordando che al n.° 8 quel valore s'era indicato con ρn, avremo $\rho = \eta\tau$, ed in definitiva tenendo conto della (21)

$$\lambda - 2\rho = 2(h - 1) + 4\pi + \delta + 2\tau(1 - \eta). \tag{22}$$

I tre ultimi addendi del secondo membro sono in ogni caso positivi o nulli, quindi il minimo per $\lambda - 2\rho$ è $2(h - 1) = 2(u - 2)$, che sostituito nella (19) porge

$$n \leq \frac{2p}{u - 2} + 1. \tag{23}$$

Il secondo membro fornisce, per $u > 2$ il cercato *limite superiore* di n in funzione di p ed u. *E tutte le volte che il secondo membro è intero si tratta d'un effettivo massimo,* come ora andiamo a provare.

§ 5. **Determinazione algebrica dei tipi previsti e costruzione dei relativi poligoni fuchsiani.**

11. L'espressione (19), completata con quella che la (22) assegna al denominatore, equivale alla *formula di* ZEUTHEN (5), adattata alle ipotesi del precedente paragrafo ed adeguatamente elaborata. La (23) avrebbe quindi potuto dedursi anche dalla (5), ma, in armonia coll' indirizzo di questo studio abbiam voluto ricavarla con procedimento indipendente, ed aderente alle nostre interpretazioni geometrico-gruppali. Lasciamo poi al lettore la cura di più intimi raffronti.

Supponiamo ora che il secondo membro della (23) sia *intero*, e vediamo se possa aver luogo l'eguaglianza, che può scriversi

$$(n-1)(u-2)=2p; \tag{24}$$

sarà allora, nella (22), $\pi=0$, $\delta=0$, $\tau(1-\eta)=0$, sicchè intanto l'involuzione I_n generata da T, quindi la curva f che la rappresenta, sarà *razionale* (piano z). Inoltre le immagini $D, D_1, \ldots, D_h$ dei punti uniti $P, P_1, \ldots, P_h$ di T saranno *punti di diramazione d'indice* n, cioè *d'esponente* 1 per la rappresentazione; ed è facile vedere che *non si hanno altre diramazioni*, cioè che la I_n non ha punti uniti all'infuori degli u punti n-pli predetti, ed infine che nessuna potenza di T può avere coincidenze in punti diversi dai P, P_i.

La verità dell'affermazione può assodarsi notando che per $r=u$ e tutte le μ_i eguali all'unità la (5') riducesi alla (25), od anche, con aderenza al paragrafo precedente, interpretando le due condizioni $\delta=0$, $\tau(1-\eta)=0$.

Basta all'uopo tener presente che alle coincidenze di I_n rispondono nel poligono N punti che son trasformati in punti equivalenti dalla Θ o da una sua potenza; e quindi, escluso O, cadono nei vertici, o nei punti medî dei lati (cfr. n.° 6). Ora la seconda possibilità resta esclusa in forza di $\delta=0$, e la prima in forza di $\tau(1-\eta)=0$, giacchè:

a) Se $\tau=0$ tutti i vertici di N sono *essenziali*, e corrispondono ai punti $P_1, \ldots, P_h$;

b) Se $\eta=1$, tutte le ν del numero precedente sono pure eguali ad 1, quindi un ciclo di vertici accidentali di N è trasformato da Θ e dalle sue potenze in n cicli *distinti*; tanto val dire che a quei cicli corrispondono su C, n punti pure *distinti* d'un gruppo della I_n.

Viceversa se u, p, n son legati dalla (24) esistono le curve corrispondenti.

Invero, come risulta dal paragrafo precedente e dalle recenti osservazioni, tutto si riduce a costruire una C contenente una I_n ciclica razionale con $u = h + 1$ diramazioni d'esponente 1 in punti assegnati del piano z, e non diramata altrove. E la possibilità di ciò venne assodata al n.° 3 dal quale risulta che nelle condizioni volute si trovano tutte le C del tipo

$$w^n = (z - a)^{\lambda}(z - a_1)^{\lambda_1} \dots (z - a_h)^{\lambda_h} \tag{25}$$

dove $a, a_1, \dots, a_h$ son le affisse dei punti di diramazione $D, D_1, \dots, D_h$ e gli esponenti (primi con n) soddisfano alla condizione $\lambda + \lambda_1 + \dots + \lambda_h \equiv 0 \pmod{n}$.

12. Alla determinazione delle nostre C si può anche pervenire in base alla *costruzione diretta* dei relativi *poligoni fuchsiani*, effettuata con rispetto di tutte le esigenze del caso. Ma per quanto un tal procedimento, per la sua indipendenza dai preliminari algebrici del § 1, possa avere interesse, tuttavia la valutazione delle accennate esigenze domanda il ricorso ad un virtuosismo combinatorio che maschera il significato intimo dei rapporti in questione. Ci sembra quindi preferibile arrivare a quei poligoni per un'altra via più sostanziale, nella quale invece giocano in pieno i legami tra la subordinazione algebrica (di C ad f) e gruppale (di G in Γ) per il tramite del *teorema di diramazione.*

Fissata una C del tipo (25), il nostro scopo sarà quello di costruire per essa un poligono fuchsiano N, che sia trasformato in sè medesimo da una rotazione Θ, d'ampiezza $\frac{2\pi}{n}$ del piano iperbolico intorno ad un punto (centro) O, immagine della relativa T. Avvertiamo però che le nostre costruzioni condurranno a poligoni, il cui tipo potrà, entro certi limiti, variarsi a piacere, ma che *in generale non sono normali,* per quanto si possa far sì ch'essi risultino tali, disponendo opportunamente degli elementi arbitrarî. Tutti gli altri rapporti del paragrafo precedente resteranno però, in ogni caso, verificati.

Ecco in brevi linee il concetto del nostro procedimento:

Volendo riprodurre i rapporti tra G e Γ intervenuti al paragrafo precedente, assegnamo quali indici di diramazione dell'uniformizzante η in D, $D_1, \dots, D_h$ i numeri $n, n\nu_1, \dots, n\nu_h$, essendo $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_h$ interi arbitrarî. Il gruppo Γ, che, al solito, interpreteremo come un gruppo di movimenti del piano iperbolico π, è, con ciò, essenzialmente determinato; ma inoltre, in forza del teorema di diramazione, la η risulta uniformizzante fuchsiana anche per C, diramata in $P_1, P_2, \dots, P_h$ cogl'indici $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_h$ e *non diramata in P* (D, n.ⁱ 5, 8) ed il relativo gruppo fuchsiano G è un sottogruppo d'indice n in Γ.

Sia O una delle immagini di D in π, e si costruisca un poligono fondamentale Π_1 relativo a Γ e di tipo qualunque, salva la condizione che O sia per esso un *vertice isolato* nel quale concorrano due lati formanti un angolo d'ampiezza $\frac{2\pi}{n}$; per il che basta scegliere sul piano z un *complesso* L per cui D sia l'estremo d'un *lato libero* (Intr. n.° 21), e, beninteso, contenga fra i suoi vertici $D_1, D_2, \ldots, D_h$.

La *rete poligonale* individuata da Π_1 confluisce in O con n poligoni congruenti $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$, il cui insieme N è trasformato in se stesso dalla rotazione Θ d'ampiezza $\frac{2\pi}{n}$ intorno ad O (in verso arbitrario). Orbene N è un poligono fondamentale per il gruppo G, e la Θ è immagine della T, purchè questa sia convenientemente fissata fra le trasformazioni a periodo n (potenze una dell'altra) che generano la I_n.

13. Spingiamoci fino al dettaglio in due casi, caratterizzati da particolarità determinate del complesso L, cioè del poligono Π_1, che varranno a chiarire *come si precisi la subordinazione di G in Γ*, e come si pervenga alla determinazione delle *sostituzioni generatrici di G*, cioè dell'*accoppiamento fra i lati del poligono N.*

Supposta la C rappresentata dalla (25), fissiamo come T la $z'=z$, $w'=\varepsilon w\left(\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)$, ed inoltre, ad evitare che la rotazione Θ risulti immagine d'una potenza di T (dello stesso periodo) facciamo $\lambda=1$. *Tal condizione non è restrittiva,* giacchè può rendersi verificata sostituendo alla curva (25) una sua trasformata birazionale ([14]); essa implica che gl'interi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ (primi con n) soddisfino alla

$$1+\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_h\equiv 0 \pmod{n} \tag{26}$$

che si sostituisce, colle notazioni attuali, alla (6) del n.° 3.

Fissata sul piano z un'origine A dei cammini, posto, come al n.° 1, $s=(123\ldots n)$, la sostituzione del gruppo di monodromia prodotta da un cappio circondante (in senso diretto) il punto D_i, sarà, come sappiamo, la s^{λ_i}.

([14]) Indicato con $\varphi(z)$ il 2° membro della (25), e determinato t in modo che sia $\lambda t\equiv 1$ (mod. n), se precisamente si ha $\lambda t=qn+1$, la trasformazione adatta allo scopo è $z'=z$, $w'=\frac{w^t}{(z-a)^q}$ che s'inverte nella $z=z'$, $w=\left\{\frac{(z'-a)^\lambda}{\varphi(z')}\right\}^q w'^\lambda$.

Assumiamo come Π_1 un *poligono tipico* (Intr. n.° 23) dedotto da un *complesso L* di lati $\tau, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{h-1}$, come quello della Fig. 1 (dove $h = 3$) ed indichiamo (Fig. 2) con $S, S_1, S_2, \ldots, S_{h-1}$ le *generatrici del gruppo* Γ che ac-

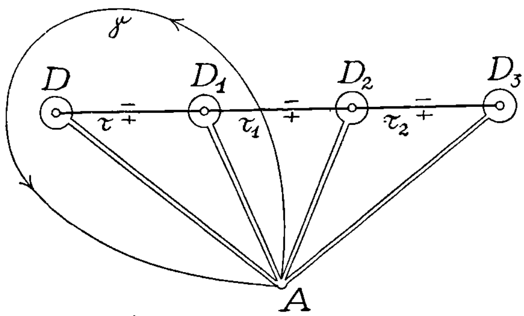

Fig. 1

coppiano nel modo indicato i lati di Π_1 provenienti dai due bordi di ciascuna linea τ. La S è in particolare una rotazione d'ampiezza $\frac{2\pi}{n}$ intorno al punto O immagine di D, che s'indicherà anche, come prima, con Θ.

Potremo anche supporre scelte le linee τ in modo che, fermo restando il loro *schema di connessione*, il poligono Π_1 sia *rettilineo* (Intr. n.° 23), per

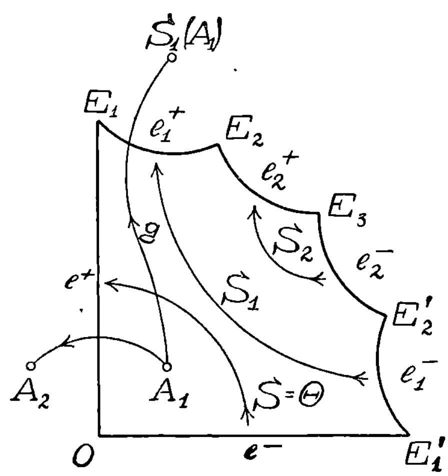

Fig. 2

quanto ciò non sia strettamente necessario. In ogni caso gli angoli in O ed E_h varranno rispettivamente $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{2\pi}{n\nu_h}$, mentre la somma degli angoli in E_i, E_i' sarà $\frac{2\pi}{n\nu_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, h - 1)$.

Ricordiamo ora che, a norma d'un' osservazione fondamentale della Memoria D (§ 5), ad ogni operazione V del gruppo fuchsiano Γ si può associare una sostituzione v del gruppo di monodromia M, determinata come appresso:

Detta A_1 l'immagine di A in Π_1, sia $B = V(A_1)$ il punto trasformato mediante V, e g un cammino qualunque tracciato da A a B. A g corrisponde sul piano z un cammino chiuso (orientato) γ, che produce appunto la v; questa risultando indipendente dal modo con cui g è tracciato fra A e B. Inoltre nella corrispondenza $(\infty, 1)$ tra Γ ed M alle operazioni di M che lasciano fisso l'indice 1 (quindi nel caso attuale all'identità) restano associate le operazioni del sottogruppo G; ed un sistema $V_1, V_2, \dots, V_n$ d'operazioni di Γ le cui omologhe $v_1, v_2, \dots, v_n$ in M mutino l'indice 1 ordinatamente in $1, 2, \dots, n$ è un *sistema completo di resti* del gruppo Γ (mod. G).

In tal condizione si trovano attualmente le $1, \Theta, \Theta^2, \dots, \Theta^{n-1}$, giacchè alla $\Theta = S$ è associata in M la $s = (12 \dots n)$. Per convincersene, basta osservare che al cammino $A_1 A_2$ della Fig. 2, congiungente A_1 con $A_2 = \Theta(A_1)$ corrisponde sul piano z (Fig. 1) un cappio che gira intorno al punto D [15].

Invece ad un cammino come g (Fig. 2) che congiunga A_1 con $S_i(A_1)$ corrisponde sul piano z un cammino come γ che circonda i punti $D, D_1, \dots, D_i$; dal che si desume che alla sostituzione S_i di Γ è associata la $s^{1+\lambda_1+\dots+\lambda_i}$.

Dopo ciò la risoluzione del problema segnalato in principio di questo numero, cioè la determinazione delle *generatrici di* G *relative al poligono* N, resta affidata ad un algoritmo sistematico.

Si parta ad es. dal lato e_i^+ del poligono Π_1. Esso è trasformato in e_i^- dello stesso poligono dalla S_i^{-1}, la quale in generale non appartiene a G, perchè l'associata $s^{-(1+\lambda_1+\dots+\lambda_i)}$ non è in generale identica. Ma poichè a Θ è associata s, così la $\Theta^{1+\lambda_1+\dots+\lambda_i} S_i^{-1}$ sta in G; e pertanto al lato e_i^+ di Π_1 è accoppiato in N il lato e_i^- del poligono $\Pi_{2+\lambda_1+\dots+\lambda_i}$ che lo *segue*, nel verso di Θ, di $1 + \lambda_1 + \dots + \lambda_i$ posti. Analogamente si vede che al lato e_i^- di Π_1 è associato il lato e_i^+ del poligono che lo *precede* del numero di posti predetto.

Infine se e_i^+ anzichè in Π_1 è assunto in Π_t, tutto va come precedentemente, ponendo al posto della S_i la $\Theta^t S_i \Theta^{-t}$, e si conclude che quel lato è accoppiato al lato e_i^- del poligono d'indice $t + 1 + \lambda_1 + \dots + \lambda_i$, come d'al-

---

[15] E ciò conferma che aggregando a Π_1 i suoi trasformati $\Pi_2, \dots, \Pi_{n-1}$ mediante le potenze di Θ si ha un poligono fondamentale per G (n.° prec.). Aggiungasi che la *permutabilità* di Θ con G risulta, se si vuole, da ciò che ad una $\Theta G \Theta^{-1}$ è associata la $s^{-1} g s$ ch'è identica, perchè lo è g: quindi $\Theta G \Theta^{-1}$ sta pure in G.

tronde dev'essere, una volta che Θ e le sue potenze trasformano in sè l'accoppiamento dei lati di N.

14. Riferiamoci, a titolo d'esempio, alle soluzioni della congruenza (26) indicate al n.° 3, ed alle corrispondenti curve C rappresentate dalla (25) con $\lambda = 1$.

A) u *pari, quindi* h *dispari.*

Si facciano le λ d'indice dispari eguali ad 1; e quelle d'indice pari ad $n - 1$; allora $1 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_i$ è $\equiv 0 \pmod{n}$ *se* i *è dispari*, e $\equiv 1$ *se* i

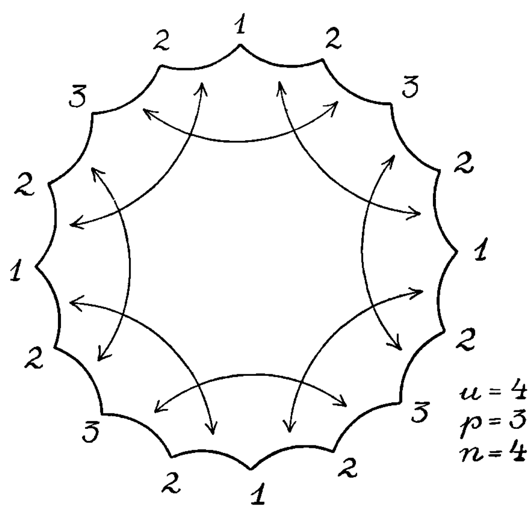

Fig. 3

è pari; onde nel primo caso il lato e_i^+ d'un qualunque Π_t è associato al lato e_i^- dello *stesso* poligono; nel secondo al lato e_i^- del poligono *successivo.*

La Fig. 3 illustra il caso particolare $u = 4$, $p = 3$, $n = 4$; la numerazione dei vertici riproduce, per ogni Π_t gl'indici delle lettere E della Fig. 2, cioè quelli dei corrispondenti punti P di C.

B) u *dispari, quindi* h *pari.*

Allora per la (7) del n.° 3, n è dispari; e si possono porre le λ fino a λ_{h-2} incluso, alternativamente eguali ad $n - 1$, 1 facendo poi $\lambda_{h-1} = n - 2$, e $\lambda_h = 1$. In tali condizioni dalla regola indicata segue che *per* i *pari,* il lato e_i^+ di Π_t è associato al lato e_i^- del poligono *successivo,* mentre *per* i *dispari e minore di* h $- 1$ resta accoppiato con e_i^- dello *stesso* poligono, ed infine *per* $i = h - 1$ col lato e_i^- del poligono *precedente.* La Fig. 4 è relativa al caso $u = 5$, $p = 3$, $n = 3$.

È infine chiaro che i poligoni così ottenuti, possono invece esser *dati a priori sul piano iperbolico,* purchè siano invarianti per una rotazione di dato periodo n intorno ad un punto O, abbiano eguali i lati associati secondo gli

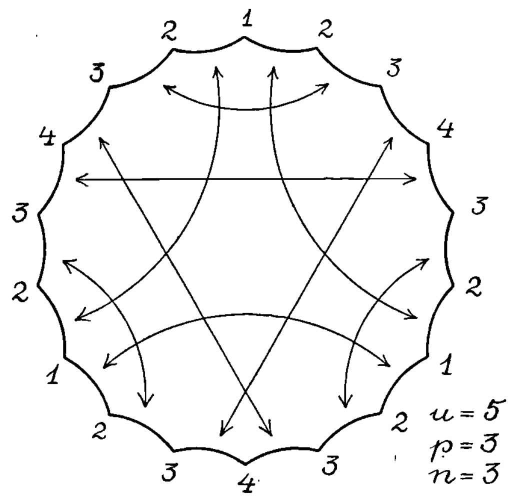

Fig. 4

schemi previsti dalla teoria, e gli angoli soddisfacenti alle relazioni prescritte; restandone individuato il gruppo G, quindi la C colla T voluta.

Tutte le condizioni sono ad esempio soddisfatte, *se il poligono scelto è regolare,* cogli angoli eguali a $\frac{\pi}{n\nu}$; ed allora l'uniformizzante η risulta diramata in $P_2, \ldots, P_{h-1}$ coll'indice ν ed in P_1, P_h coll'indice 2ν. In tal caso *il poligono* N *è anche normale,* ed inoltre Π_1 risulta simmetrico rispetto alla retta OE_h, quindi i punti di diramazione, mediante una sostituzione lineare posson esser ricondotti all'asse reale (Intr. n.° 24).

15. Rapporti e schemi di tipo semplice si ottengono anche partendo da un Π_1 come quello della Fig. 6, derivante da un complesso L collo schema della Fig. 5. Il relativo punto Q è arbitrario sul piano z e dà un ciclo di $u = h + 1$ vertici accidentali (tutti designati colla lettera Q sulla Fig. 6); la somma degli angoli in quei vertici è quindi eguale a 2π, mentre l'angolo in E_i vale $\frac{2\pi}{n\nu_i}$.

Seguendo le regole ricordate, si vede con facilità che alla generatrice S_i di Γ corrisponde in M la sostituzione prodotta da un cappio di origine A intorno al punto D_i, cioè la s^{λ_i}; e ne consegue che al lato e_i^+ del poligono Π_t è associato il lato e_i^- del poligono $\Pi_{t+\lambda_i}$ che lo segue di i posti nel verso di Θ.

Così, se u è pari, assumendo per le λ i valori del caso A, al numero

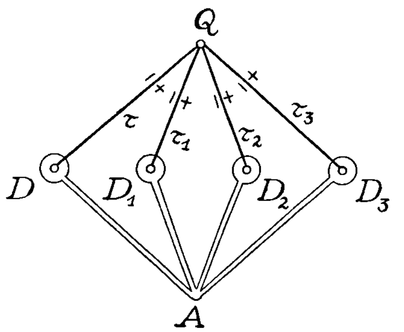

Fig. 5

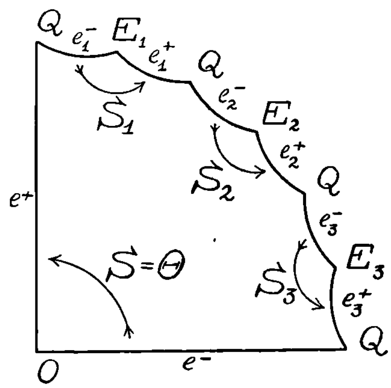

Fig. 6

precedente, si hanno gli accoppiamenti della Fig. 7 correlativa alla 3, cioè costruita per gli stessi valori di u, p, n.

Devesi osservare che gli hn vertici accidentali di N (senza numero sulla Fig. 7) si distribuiscono in n cicli, a ciascuno dei quali corrisponde su C uno

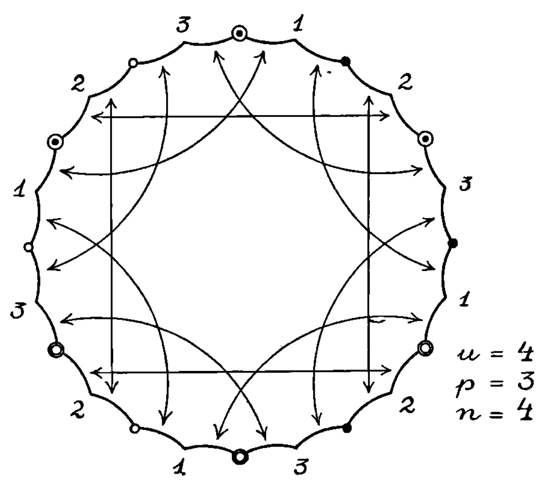

Fig. 7

degli n punti Q_1, $Q_2, \ldots, Q_n$ del gruppo di I_n omologo di Q. Sulla Fig. 7 i vertici dei quattro cicli portano diverso contrassegno.

Lasciamo al lettore l'esame del caso in cui u è dispari.

Infine anche alla situazione attuale si applicano le osservazioni con cui termina il numero precedente. Convien però fare attenzione a ciò che se il poligono N si suppone *regolare*, ogni suo angolo dovrà farsi eguale a $\frac{2\pi}{m}$, m essendo un multiplo comune di n ed h, e che dopo questo, se non è proprio $m = h$ i vertici del tipo Q non saranno più accidentali ma essenziali, e tanto il punto Q del piano z, quanto i $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ di C saranno diramazioni d'indice $\frac{m}{h}$ per l'uniformizzante η.

16. L'argomento, nei suoi varî aspetti, non consente una sintesi concisa; tuttavia le conclusioni che più strettamente aderiscono al problema direttivo, posson così enunciarsi:

Il periodo n *d'una trasformazione birazionale appartenente ad una curva algebrica* C *di genere* $p > 0$, *e dotata di* $u > 0$ *punti uniti, è limitato superiormente a norma delle disuguaglianze seguenti:*

$$\begin{aligned} &n \leq 4p + 2, && \text{se } u = 1, \\ &n \leq 4p, && \text{se } u = 2, \\ &n \leq \frac{2p}{u-2} + 1, && \text{se } u > 2. \end{aligned}$$

Nei primi due casi i valori dei secondi membri sono effettivi massimi, raggiunti per ogni p, *nel terzo il limite superiore è pure raggiunto ogni qual volta il secondo membro risulta intero. Si hanno così i seguenti casi notevoli:*

$u = 1,$	*massimo periodo*	$4p + 2,$
$u = 2,$	»	$4p,$
$u = 3,$	»	$2p + 1,$
$u = 4,$	»	$p + 1,$
$u = p + 2,$	»	$3,$
$u = 2p + 2,$	»	$2.$

Aggiungasi che, nel caso del massimo, l'involuzione generata dalla trasformazione T in discorso è sempre *razionale*. Nè il valore di u può superare $2p + 2$, come d'altronde è ben noto ([16]) giacchè per $u > 2p + 2$ *l'intero di* $\frac{n}{u-2} + 1$ è sempre 1.

([16]) Cfr. F. SEVERI, *Trattato di Geometria algebrica.* Vol. 1°, Parte 1ª [Bologna, Zanichelli (1926)], n.° 56.

Quell'intero è invece 2 per tutti i valori di u compresi fra $p+2$ e $2p+2$, estremo inferiore escluso, quindi la corrispondente T, se esiste, è involutoria, cioè genera una γ_2^1. Ma il numero dei punti doppî d'una γ_2^1 è pari, e pertanto *nell'intervallo* $\mathrm{p}+2<\mathrm{u}\leq 2\mathrm{p}+2$, u *può assumere soltanto i valori pari, e la* T *corrispondente è involutoria.* E sorvoliamo su altri particolari di minore entità.

Recherches sur la théorie des fonctions automorphes

par W. W. Golubeff (à Saratow).

§ 1. **Généralités; les exposants d'un groupe fuchsien.** — Le but de cet article est l'étude de quelques remarquables classes des fonctions automorphes par les méthodes générales de la théorie des fonctions analytiques. Les nouvelles recherches ouvrent, en effet, des nouvelles voies vers l'étude d'une fonction, définie sur tout le plan de la variable complexe, ou à l'intérieur d'un cercle C. Les fonctions que nous allons étudier, appartiennent presque exclusivement à la seconde espèce: elles sont définies à l'intérieur du cercle $|z|=1$. L'étude de la distribution des zéros, de la croissance, des valeurs, qui sont prises par la fonction fuchsienne sur le cercle C, représente le contenu de l'article suivant.

Soit G un groupe fuchsien proprement discontinu à l'intérieur du cercle $|z|=1$; on considére ce groupe, comme groupe des mouvements du plan dans la géométrie hyperbolique de Lobatschewsky-Bolyai. Soient H_0, H_1... les polygones fondamentaux du groupe; on peut toujours supposer, que les H_k sont limités par des parties de cercles orthogonaux au cercle $C(|z|=1)$. Le nombre des côtés de H_k peut être fini ou infini. Soit L_k la frontière de H_k et E_k l'ensemble de points de L_k, situés sur C. Si Ω est l'ensemble de points de C, complémentaire à l'ensemble ΣE_k, il y a

$$\text{mes}\,\Omega = 2\pi - \Sigma\,\text{mes}\,E_k,$$

et par suite

$$\Sigma\,\text{mes}\,E_k \leq 2\pi.$$

Soit a_0 un point à l'intérieur du H_0 et a_k le point équivalent à a_0 à l'intérieur du H_k; si $d_k = 1 - |a_k|$ est la distance de a_k à C, nous avons

$\lim\limits_{k \to \infty} d_k = 0$ pour chaque groupe discontinu. On peut toujours trouver un nombre $\rho \leq 2$ tel que la série $\Sigma d_k^{\rho+\varepsilon}$ converge et $\Sigma d_k^{\rho-\varepsilon}$ diverge pour tout $\varepsilon > 0$. Le nombre ρ est indépendant du choix du point a_0 et dépend seulement du groupe G; nous l'appellerons *l'exposant du groupe* G.

Nous verrons en effet, que si les substitutions T_k du groupe G sont les substitutions $z' = \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}$ $(\alpha_k\delta_k - \beta_k\gamma_k = 1)$, on peut démontrer que les séries Σd_k^α et $\Sigma \frac{1}{(\gamma_k^2)^\alpha}$ sont pour diverses α convergentes et divergentes simultanément.

Les points $\frac{\alpha_k}{\gamma_k}$ sont les transformés de $z = \infty$ par les substitutions du groupe G et dans le cas d'un groupe fuchsien ils sont situés à l'extérieur du C. Il en résulte:

(1) $$d_k < \left| \frac{\alpha_k a_0 + \beta_k}{\gamma_k a_0 + \delta_k} - \frac{\alpha_k}{\gamma_k} \right| = \frac{1}{|\gamma_k|^2 \left| a_0 + \frac{\delta_k}{\gamma_k} \right|^2}.$$

Les points $-\frac{\delta_k}{\gamma_k}$ sont transformés de $z = \infty$ par la substitution T_k^{-1} inverse à T_k et par conséquent sont aussi situés à l'extérieur de C; d'où:

$$\left| a_0 + \frac{\delta_k}{\gamma_k} \right| > 1 - |a_0| = d_0$$

et

(2) $$d_k < \frac{1}{|\gamma_k|^2} \frac{1}{d_0}.$$

D'autre part, soit s_0 un cercle qui a pour centre a_0, situé entièrement à l'intérieur de H_0 et r_0 le rayon du s_0; si s_k est transformé de s_0 par la substitution T_k et l_k est la plus courte distance de s_k à a_k, nous avons

$$d_k > l_k \geq \int \frac{|dz|}{|\gamma_k|^2 \left| z + \frac{\delta_k}{\gamma_k} \right|^2},$$

où l'intégrale est prise suivant le rayon du cercle s_0. Définitivement on a:

(3) $$d_k > \frac{r_0}{|\gamma_k|^2 |d_0 - r_0|^2}.$$

De (3) et (2) nous voyons que les séries Σd_k^α et $\Sigma \frac{1}{|\gamma_k|^2}$ pour différentes valeurs de α sont convergentes et divergentes simultanément. De là il suit que ρ dépend seulement de γ_k, c. a. d. du groupe G.

D'après les recherches classiques de H. POINCARÉ, il suit que la série $\Sigma \frac{1}{|\gamma_k|^4}$ est toujours convergente et par suite $\rho \leq 2$.

Le nombre ρ en général n'est pas entier, mais pour les applications il est souvent plus commode d'avoir un nombre entier R tel que la série Σd_k^R soit convergente et Σd_k^{R-1} soit divergente; nous appellerons un pareil nombre R *l'exposant entier du groupe* G. Le nombre R peut être égal ou à 1, ou à 2.

Prenons quelques exemples.

1) Soit G le groupe cyclique hyperbolique. Si les points fixes des substitutions hyperboliques sont μ et ν, les substitutions du groupe G sont données par la formule:

$$\frac{z'-\mu}{z'-\nu} = k^n \frac{z-\mu}{z-\nu} \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$$

d'oú

$$z' = \frac{\dfrac{k^n\nu - \mu}{\sqrt{k^n}(\mu-\nu)} z - \dfrac{\mu\nu(k^n-1)}{\sqrt{k^n}(\mu-\nu)}}{\dfrac{k^n-1}{\sqrt{k^n}(\mu-\nu)} z - \dfrac{k^n\mu-\nu}{\sqrt{k^n}(\mu-\nu)}}.$$

Pour connaitre ρ, il faut trouver l'exposant de convergence de la série $\sum_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{(k^n(\mu-\nu)^2}{(k^n-1)^2}\right)^\alpha$, ou de la série $\sum_0^\infty \frac{1}{k^{n\alpha}}$. Dans ce cas $\rho=0$ et $R=1$, puisque la série $\sum_0^\infty \frac{1}{k^{n\varepsilon}}$ est convergente pour tout $\varepsilon > 0$.

2) Soit G le groupe cyclique parabolique. Les substitutions du groupe sont alors représentées par la formule:

$$\frac{1}{z'-\mu} = \frac{1}{z-\mu} + nh \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$$

et

$$z' = \frac{z(1+nh\mu) - \mu^2 nh}{znh + (1-\mu nh)}.$$

Dans ce cas, il faut trouver l'exposant de convergence de la série $\sum_1^\infty \left\{\frac{1}{(nh)^2}\right\}^\alpha$.

On voit que $\rho = \frac{1}{2}$; $R=1$.

La détermination de ρ et R dans d'autres groupes plus compliqués est souvent très difficile. Mais on peut reçevoir des renseignements importants sur les exposants du groupe en étudiant les propriétés géometriques de ses polygones fondamentaux. Nous indiquerons les deux résultats suivants.

1. Si le polygone fondamental se trouve avec sa frontière à l'intérieur de C, la série Σd_k est divergente et par suite $R=2$ et $1 \leq \rho \leq 2$.

En effet, dans ce cas la somme de périmètres des polygones fondamentaux ΣL_k est divergente. Soit δ_0 la plus courte distance entre L_0 et C. Alors

$$L_k = \int\limits_{L_0} \frac{|dz|}{|\gamma_k|^2 \left| z + \frac{\delta_k}{\gamma_k} \right|^2} < \frac{L_0}{\delta_0^2 |\gamma_k|^2}$$

et

$$\Sigma \frac{1}{|\gamma_k|^2} > \frac{\delta_0^2}{L_0} \Sigma L_k ,$$

et par suite $\Sigma \frac{1}{|\gamma_k|^2}$ est divergente, c. q. f. d.

2. Si mes $E_0 > 0$, la série Σd_k est convergente et par suite $0 < \rho \leq 1$ et $R=1$.

En effet

$$\text{mes } E_k = \int\limits_{E_0} \frac{|dz|}{|\gamma_k|^2 \left| z + \frac{\delta_k}{\gamma_k} \right|^2} .$$

Soit M le maximum de $\left| z + \frac{\delta_k}{\gamma_k} \right|$ pour z situé sur E_0 et pour k quelconque $\Big($on peut toujours supposer, par exemple, $M=4$, puisque à l'extérieur du cercle $|z|=2$ se trouve seulement un nombre fini de points $-\frac{\delta_k}{\gamma_k}\Big)$. Alors

$$\text{mes } E_k > \frac{\text{mes } E_0}{|\gamma_k|^2 M^2}$$

et

$$\Sigma \frac{1}{|\gamma_k|^2} < \frac{M^2}{\text{mes } E_0} \Sigma \text{ Mes } E_k \leq \frac{M^2}{\text{mes } E_0} 2\pi$$

et la série $\Sigma \frac{1}{|\gamma_k|^2}$ est convergente, c. q. f. d.

Ce théorème fut trouvé par M. BOIEV par des considérations rattachées à la géométrie non-euclidienne; avec des considérations semblables on peut démontrer le théorème analogue pour les groupes des mouvements de géométrie de Lobatschewsky-Bolyai dans l'espace.

Les groupes cycliques paraboliques et hyperboliques étudiés précedemment rentrent dans les conditions de ce théorème.

Comme nous le verrons dans la suite, la grandeur du R (ou du ρ) est intimement liée aux propriétés des fonctions automorphes. Par consequent il est naturel de donner la classification suivante de groupes et de fonctions automorphes: nous dirons que le groupe (ou la fonction correspondante) est de la première classe, si $R = 1$, et de la seconde classe, si $R = 2$.

Par exemple, les groupes cycliques des substitutions paraboliques et hyperboliques, les groupes fuchsiens de la 3-me famille de H. Poincaré sont des groupes de la première classe; les groupes fuchsiens de la 1-re famille de H. Poincaré sont les groupes de seconde classe.

§ 2. **Les fonctions fuchsiennes de la 1-re classe; les valeurs des fonctions fuchsiennes sur la frontière de la région de l'existence.** — Théorème I. La fonction fuchsienne de la 1-re classe, qui prend une fois (ou un nombre fini de fois) les mêmes valeurs à l'intérieur du polygone fondamental H_0, prend presque partout sur C les valeurs déterminées suivant tous les chemins, non tangents à C.

Soit $f(z)$ une fonction fuchsienne de la première classe, qui prend à l'intérieur du H_0 les mêmes valeurs une fois; soit a_0 un point à l'intérieur du H_0, s_0 la longueur de la circonférence L_0, ayant a_0 pour centre et située tout entière à l'interieur du H_0, et s_k les longueurs des circonférences équivalentes à s_0. La série Σs_k est convergente.

En effet, soit δ la plus courte distance de s_0 à C. Alors

$$s_k = \int_{L_0} \frac{|dz|}{|\gamma_k|^2 \left| z + \frac{\delta_k}{\gamma_k} \right|^2} < \frac{s_0}{|\gamma_k|^2 \delta^2}.$$

et $\Sigma s_k < \frac{s_0}{\delta^2} \Sigma \frac{1}{|\gamma_k|^2}$ et $\Sigma \frac{1}{|\gamma_k|^2}$ est convergente pour les fonctions de la 1-re classe. Mais les distances des points a_k à C forment aussi une série convergente; on peut par conséquent construire les lignes λ_k, joignant L_k à C et telles que la série Σl_k, formée par les longueurs de λ_k soit convergente. Alors la ligne K, formée par C, L_k, λ_k, est une ligne rectifiable. D'après le théorème classique de M. Fatou, $f(z)$, qui est la fonction prejectivement bornée, puisque elle ne prend pas à l'interieur du K les valeurs qu'elle prend à l'intérieur du L_0, prend presque partout sur K les valeurs déterminées suivant tous les chemins non tangents à K. Mais pour tous les points de C, qui ne sont pas situés sur λ_k, on peut trouver des points qui sont infiniment voisins suivant C et K simultanément. Voilà pourquoi presque partout sur C les chemins, tangents à K en un point de C, sont aussi tangents à C. D'où il suit que $f(z)$ prend les valeurs déterminées presque partout sur C, suivant les chemins, qui ne sont pas tangent à C, c. q. f. d.

Théorème II. Si la fonction fuchsienne $f(z)$ prend dans un point z_0 de C en suivant un chemin λ une valeur déterminée A, elle prend la valeur A dans un des points de la frontière du polygone fondamental H_0, situé sur C (c. a. d. dans un des points de l'ensemble E_0).

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \ldots$ les parties de λ, qui se trouvent dans les différents polygones fondamentaux. Si le nombre de ces parties est fini, le théorème est demontré, puisque la dernière partie de λ, λ_m, est situé toute entière à l'interieur du polygone H_k et z_0 est un point de la frontière de H_k, situé sur C (c. à d. z_0 appartient à l'ensemble E_k); si l'on prend dans H_0 l'arc λ', équivalent a λ_m, $f(z)$ prend la valeur A dans le point de λ', situé sur E_0.

Si le nombre des λ_n est infini, soit ε un nombre positif et soit G_ε un domaine (ou des domaines) composé de points de H_0, dont la distance jusqu'aux points de E_0 est plus petite que ε. À l'intérieur de H_0 et à l'extérieur de G_ε il y a un nombre fini de points, dans lesquels la fonction est égale à A; soient $a_0, a_1, \ldots a_M$ ces points. En changeant ε, on peut toujours supposer que a_k ne se trouve pas sur la frontière Γ de G_ε. Soit δ la plus courte distance entre a_k et Γ. Construisons autour de a_k, comme centre, la circonférence de rayon $\rho < \frac{\delta}{2}$ et soient σ_k cette circonférence.

Dans les points de H_0, extérieurs à G_ε et σ_k, $|f(z) - A|$ ne peut pas être égal à 0; soit ζ le minimum de $|f(z) - A|$ dans ces points. Alors tous les points de H_0, pour lesquels $|f(z) - A| < \frac{\zeta}{2}$, se trouvent ou à l'intérieur de σ_k, ou à l'intérieur de G_ε. Puisque, sur λ, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$, on peut trouver sur λ un point b tel que sur λ, entre b et z_0, $|f(z) - \alpha| < \frac{\zeta}{2}$; soit $\bar{\lambda}$ l'arc de λ entre b et z_0.

Les images des arcs de $\bar{\lambda}$ se trouvent évidemment ou à l'intérieur d'une des σ_k, ou à l'intérieur de G_ε. On peut constater que le premier cas est inadmissible. En effet dans ce cas tout le chemin $\bar{\lambda}$ se trouve à l'intérieur du cercle σ_k', equivalent à σ_k et λ finit dans un point intérieur à C ce qui est impossible. De là on peut conclure que toutes les images des parties de $\bar{\lambda}$ se trouvent en G_ε. Vu que les nombres ε et ρ peuvent se prendre aussi petits qu'on veut, on voit, que A est une des valeurs que la fonction $f(z)$ prend dans un des points de E_0.

On peut tirer d'intéressantes conséquences des deux théorèmes démontrés. Prenons, par exemple, les fonctions fuchsiennes de la 1-re famille de H. POINCARÉ. Il résulte du théorème II, qu'il n'existe aucun chemin λ, sur lequel la fonction prend une valeur déterminée, c. a. dire toute fonction de la 1-re famille est indéterminèe sur chaque chemin λ conduisant vers un point de C.

D'une façon analogue il suit pour les fonctions de la second famille, que si cette fonction est déterminée en H_0 dans tous les sommets paraboliques, elle est indéterminée presque partout sur C. Prenons en général, que H_0 a un ensemble dénombrable de points de E_0 [1] et $f(z)$ est déterminée à l'intérieur du H_0 dans tous les points de E_0; suivant ces conditions $f(z)$ est indéterminée presque partout sur C.

En effet $f(z)$ prend dans les points de E_0 à l'intérieur du H_0 l'ensemble dénombrable des valeurs différentes; si $f(z)$ est determinée presque partout sur C, elle prend sur C presque partout les valeurs, qui forment un ensemble dénombrable, et par suite $f(z)$ prend les mêmes valeurs sur les ensembles situés sur C ayaut la mesure plus grande que zéro.

Mais cela ne peut etre admis d'après le théorème bien connu de MM. LUSIN et PRIVALOFF [2].

Des recherches classiques sur les fonctions automorphes il est connu, que si le groupe fuchsien est donné, on peut toujours construire la fonction, qui dans son polygone fondamental H_0 est partout déterminée, si H_0 a l'ensemble fini des sommets. Comme il suit des théorèmes démontrés, $f(z)$ est dans ce cas indéterminée presque partout sur C.

En somme, la fonction fuchsienne $f(z)$ peut etre déterminée presque partout sur C dans les cas suivants.

1. Si mes $E_0 > 0$. Dans ce cas à l'intérieur du H_0, $f(z)$ peut prendre les valeurs déterminées dans tous les points de E_0. En fait d'exemple on

---

[1] Comme exemple des fonctions pour lesquelles E_0 est dénombrable, on peut indiquer $lgk^2(\tau)$ ou $lglgk^2(\tau)$, où $k^2(\tau)$ est la fonction modulaire. Ces fonctions sont celles de seconde classe.

[2] Théorème de l'unicité: si la fonction est holomorphe à l'intérieur de C et prend les valeurs égales sur l'ensemble C_1 $(C_1 > 0)$, situé sur C, la fonction est constante. Voir p. ex. « Annales de l'École Normale Sup. », 42 (1925).

peut citer les fonctions fuchsiennes de la 3-me famille de H. POINCARÉ; elles sont déterminées presque partout sur C.

2. Si mes $E_0 = 0$, mais E_0 a la puissance de continu. Dans ce cas à l'intérieur du H_0, $f(z)$ peut être déterminée dans tous les points de E_0.

3. Si E_0 est dénombrable et $f(z)$ à l'intérieur du H_0 est indéterminée dans certains points de E_0. Nous verrons ci dessous, que ce cas effectivement peut se présenter.

4. Si E_0 est fini et $f(z)$ à l'intérieur du H_0 est indéterminée. Ce cas est impossible.

En effet, comme il est indiqué, dans ce cas on peut prendre une autre fonction fuchsienne $f_1(z)$, qui est déterminée dans tous les points de E_0 à l'intérieur du H_0. Si $f(z)$ prend la valeur déterminée dans un point z_0 de C suivant le chemin λ, l'image de λ dans H_0 est un ensemble d'arcs, qui ont pour ensemble dérivé un point e_0 de E_0. Mais alors $f_1(z)$ est aussi bien déterminée suivant λ et prend dans z_0 la valeur, qu'elle prend en e_0. Par suite, si $f(z)$ est déterminée presque partout sur C, la fonction $f_1(z)$ est aussi bien déterminée presque partout sur C, mais cela est impossible, comme nous l'avons vu précedemment.

D'après ce qui précéde on voit, que les fonctions de type 3 peuvent se considérer comme les plus simples des fonctions prenant presque partout sur C les valeurs déterminées. L'exemple le plus simple des fonctions de cette espéce est representé dans les fonctions automorphes bornées.

§ 3. **Les fonctions automorphes bornées.** — Parmi les fonctions de la 1-re classe les fonctions fuchsiennes bornées sont les plus simples et les plus remarquables. On peut construire de telles fonctions ou par les méthodes de la représentation conforme, ou par la combinaison des fonctions automorphes classiques, par exemple, par la combinaison de fonctions modulaires ou des fonctions de SCHWARZ.

Supposons, par exemple, que nous ayons la fonction de SCHWARZ $s(7, 3, 2; z)$ et soit H_0 son quadrilatére fondamental; H_0 est composé de deux triangles H_0' et H_0''. On peut faire la représentation conforme de H_0' sur le triangle à trois angles nuls, alors H_0'' sera représenté sur le triangle adjacent, et H sera représenté conformément sur le quadrilatére à quatres angles nuls, c. a. d. sur le polygone fondamental de la fonction modulaire $k^2(\tau)$, definie à l'intérieur du cercle $|\tau| < 1$.

Si dans le cercle $|z| < 1$, décomposé en réseau de triangles, équivalents ou à H_0', ou à H_0'', on produit la coupure, indiqué sur la figure 1, et on fait la représentation conforme du cercle ainsi décomposé sur le réseau de triangles de la fonction modulaire, nous aurons la région K, indiquée sur la figure 2,

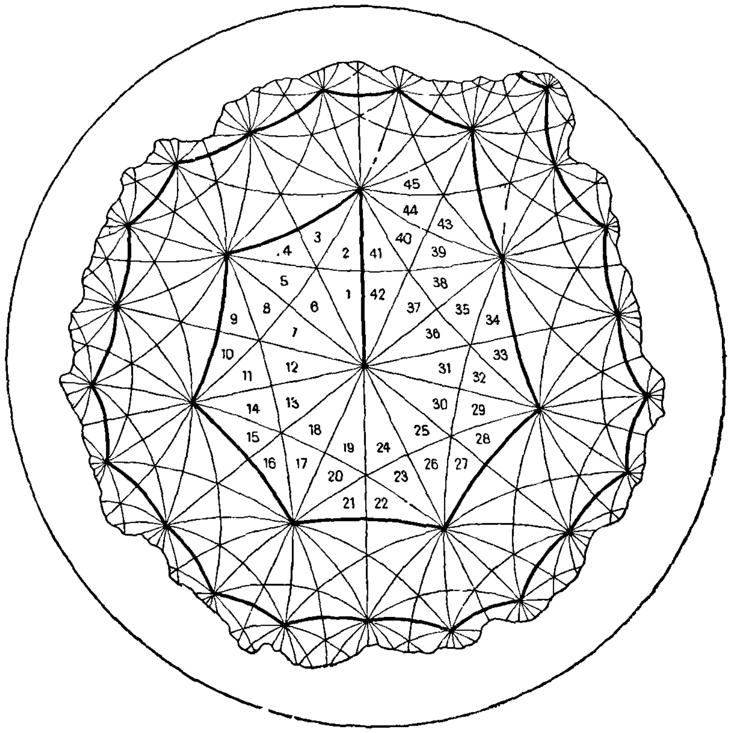

Fig. 1

et si nous faisons de nouveau la représentation conforme du demiplan supérieur de la figure 2 à l'intérieur du cercle $|\tau| < 1$, nous aurons la région K',

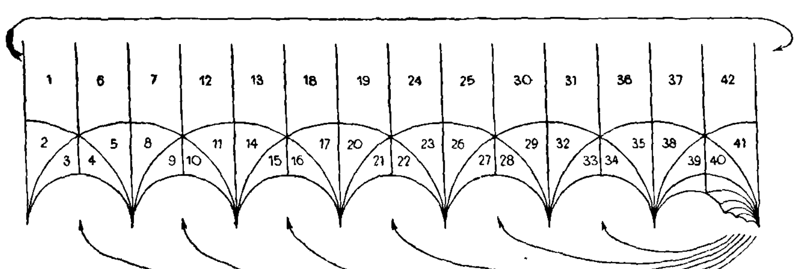

Fig. 2

indiquée schématiquement sur la figure 3. On voit de suite, que la fonction $z = \varphi(\tau)$, qui donne la représentation conforme de K' sur le cercle découpé

$|z| < 1$, est une fonction automorphe, qui a pour polygone fondamental le polygone K', qui a l'ensemble dénombrable $\mathfrak{M}$ de sommets, situés sur la circonférence $|\tau| = 1$. L'ensemble $\mathfrak{M}$ est un ensemble dénombrable et a un point limite ω. En effet, la fonction $\varphi(\tau)$ est une fonction bornée, puisque $|\varphi(\tau)| = |z| < 1$, et, d'après les résultats bien connus de M. FATOU, la fonction $\varphi(z)$ prend presque partout sur la circonférence $C(|\tau| = 1)$ les valeurs déter-

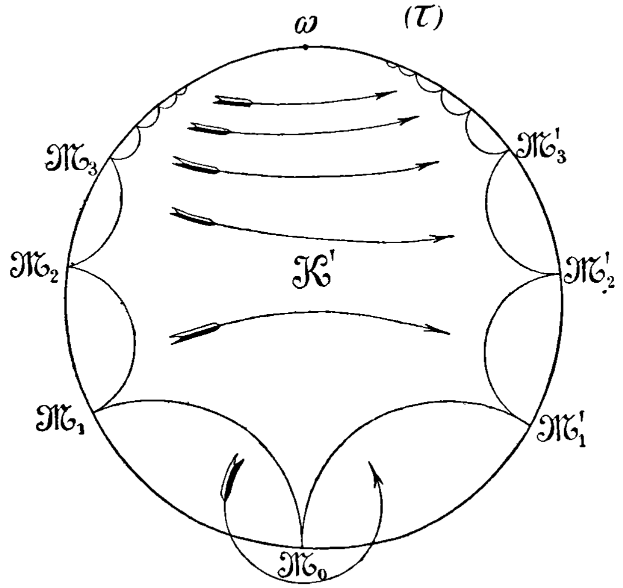

Fig. 3

minées; d'autre part, si le polygone K' avait sur C un arc $\omega'\omega''$, la fonction $\varphi(\tau)$ serait indéterminée sur tout l'arc $\omega'\omega''$ en suivant un chemin quelconque, qui aboutirait vers un point de $\omega'\omega''$ à l'intérieur du K'. Il en résulte, que l'arc $\omega'\omega''$ est un seul point ω.

D'après ce qui est exposé au paragraphe précédent, nous voyons que la fonction $\varphi(\tau)$ peut prendre presque partout sur C des valeurs déterminées, puisqu'elle est indéterminée au point ω.

Puisque la fonction $\varphi(\tau)$ est bornée, elle est une fonction automorphe de première classe; en effet, si a_0, a_1, a_2,... sont les zéros de $\varphi(z) - \alpha$ ($|\alpha| < 1$), la série $\Sigma(1 - |a_k|)$ est convergente d'après le théorème de M. VITALI.

En somme, la fonction $\varphi(\tau)$ est une fonction automorphe de 1-re classe, bornée; son polygone fondamental a un ensemble dénombrable de sommets, tous situés sur C.

On peut reproduire autrement les coupures sur le réseau des triangles de la fonction $s(7, 3, 2; z)$, en construisant, par exemple, les coupures de telle façon que la fonction automorphe correspondante aurait un polygone, dont les sommets, tous situés sur C, formeraient l'ensemble de points ayant la puissance de continu.

La méthode qui a été utilisée pour la construction des fonctions automorphes bornées, peut être généralisée de la manière suivante.

Supposons qu'à l'intérieur d'un contour fermé S il y ait l'ensemble dénombrable de points M_n, dont l'ensemble dérivé est la frontière S. Si nous faisons les coupures, joignant les points M_n avec les points de la frontière S, nous aurons une région $\mathcal{H}$ à connexion simple. En faisant l'ensemble dénombrable de régions, identiques à $\mathcal{H}$, en les superposant et unissant ces régions deux à deux suivant un seul côté de coupure, on aura une surface Riemanienne simplement connexe, qui a tous les points M_n, comme points critiques d'espèce logarithmique; soit Σ cette surface Riemannienne. Puisque Σ est simplement connexe, on peut la representer conformément à l'intérieur du cercle C du plan z; soit $u = f(z)$ la fonction qui donne cette représentation. La fonction $f(z)$ est une fonction automorphe, dont la région fondamentale est la partie du cercle C sur laquelle est représentée conformement une feuille de la surface Σ.

Si la coupure sur (u), qui passe par tous les points M_n, a la forme de spirale et s'approche asymptotiquement vers la frontière S, nous aurons les fonctions automorphes, semblables à la fonction $\varphi(\tau)$, construite ci dessus.

Cette méthode de construire des fonctions automorphes à l'aide de la représentation conforme est souvent fort utile pour la construction de diverses espèces de fonctions automorphes.

La fonction $\varphi(\tau)$, construite ci dessus, prend presque partout sur C les valeurs qu'elle prend dans les sommets de H_0, et puisque les valeurs correspondent aux sommets paraboliques, en vertu du théorème de l'unicité sur l'ensemble de mesure O, elle prend presque partout sur C les valeurs, qu'elle prend en ω, c. a. d. les valeurs de la forme $e^{\alpha i}$ (α réel).

§ 4. **Sur la représentation analytique des fonctions fuchsiennes de la 1-re classe.** — Il est bien connu par les recherches classiques de H. POINCARÉ, que les fonctions Θ-fuchsiennes donnent la méthode la plus simple et la plus parfaite pour la démonstration de l'existence des fonctions automorphes; mais dans le cas où l'existence de quelques types des fonctions automorphes est démontré, elles sont beaucoup moins commodes pour l'étude effective de ces fonctions.

En effet, les fonctions Θ-fuchsiennes sont trop compliquées pour l'étude de la croissance, pour la recherche de la situation ou de la nature des points singuliers des fonctions automorphes, qui sont représentées à l'aide des fonctions Θ. Comme on peut voir par la théorie des fonctions elliptiques, pour toutes ces questions les représentations analytiques, fondées sur le théorème de MITTAG-LEFFLER, sont plus commodes. Nous allons voir, comment on peut donner aux fonctions de la 1-re classe les expressions analytiques du type des séries de MITTAG-LEFFLER.

Supposons qu'à l'intérieur de son polygone fondamental H_0 la fonction fuchsienne de 1-re classe ait m pôles $a_0^1, a_0^2 \dots a_0^m$, et soit $G_k(z)$ la partie principale de son développement dans les environs de a_0^k. Soit C_0^k la circonférence de centre a_0^k, située toute entière à l'interieur de H_0, et soient a_j^k et C_j^k les points et les circonférences, equivalents respectivement à a_0^k et C_0^k.

Supposons, en outre, qu'à l'extérieur de toutes C_0^k la fonction fuchsienne $f(z)$ est bornée. Cette supposition n'est pas toujours vraie, puisque $f(z)$ peut être infini dans les points de E_0. Nous exclurons ce cas.

Joignons les C_j^k à C par des parties de rayons l_j^k; la ligne K composée de C, C_j^k et l_j^k est une ligne rectifiable, puisque $f(z)$ est de la 1-re classe et les séries $\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{\infty} C_j^k$ et $\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{\infty} l_j^k$ sont convergentes. A l'intérieur de la région, limitée par K, la fonction $f(z)$ est bornée et en vertu du théorème généralisé de M. FATOU [1] elle peut être représentée à l'aide de l'intégrale de CAUCHY:

$$2\pi i f(z) = \int_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt - \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{\infty}\int_{C_j^k}\frac{f(t)dt}{t-z}, \tag{1}$$

les intégrales le long de l_j^k se détruisent.

La substitution $w = \dfrac{\alpha_j z + \beta_j}{\gamma_j z + \delta_j}$ transforme H_0 en H_j; réciproquement H_j se transforme en H_0 par la substitution inverse

$$z = \frac{-\delta_j w + \beta_j}{\gamma_j w - \alpha_j} \tag{2}$$

et puisque $f(z)$ est automorphe,

$$f\left(\frac{-\delta_j w + \beta_j}{\gamma_j w - \alpha_j}\right) = f(w). \tag{3}$$

[1] Cette généralisation a été donné dans ma thése (1916); voir aussi: A. DENJOY, Paris, « C. R. », 168 (1919), p. 387.

En faisant dans l'intégrale (1) le changement de variable (2) nous aurons:

$$\int\limits_{C_j^k} \frac{f(t)\,dt}{t-z} = \int\limits_{C_0^k} \frac{f\left(\dfrac{-\delta_j w+\beta_j}{\gamma_j w-\alpha_j}\right)dw}{\left(\dfrac{-\delta_j w+\beta_j}{\gamma_j w-\alpha_j}-z\right)(\gamma_j w-\alpha_j)^2} = \int\limits_{C_0^k} \frac{f(w)dw}{(\gamma_j w-\alpha_j)[-w(\gamma_j z+\delta_j)+(\alpha_j z+\beta_j)]} =$$

$$= -\frac{1}{\gamma_j z+\delta_j}\int\limits_{C_0^k} \frac{f(w)dw}{(\gamma_j w-\alpha_j)\left[w-\dfrac{\alpha_j z+\beta_j}{\gamma_j z+\delta_j}\right]}.$$

Mais

$$\frac{1}{\gamma_j z+\delta_j}\int\limits_{C_0^k} \frac{f(w)dw}{(\gamma_j w-\alpha_j)\left(w-\dfrac{\alpha_j z+\beta_j}{\gamma_j z+\delta_j}\right)} = \int\limits_{C_0^k} \frac{f(w)\,dw}{w-\dfrac{\alpha_j}{\gamma_j}} - \int \frac{f(w)dw}{w-\dfrac{\alpha_j z+\beta_j}{\gamma_j z+\delta_j}}.$$

A l'intérieur de C_0^k

$$f(z) = G_k(z) + \varphi(z),$$

où $G_k(z)$ est la partie principale du développement et $\varphi(z)$ est holomorphe, et on a

$$\int\limits_{C_0^k} \frac{G_k(w)dw}{w-\dfrac{\alpha_j}{\gamma_j}} = -2\pi i G_k\left(\frac{\alpha_j}{\gamma_j}\right) \quad \text{et} \quad \int\limits_{C_0^k} \frac{\varphi(w)dw}{w-\dfrac{\alpha_j}{\gamma_j}} = 0,$$

puisque $\dfrac{\alpha_j}{\gamma_j}$ est à l'extérieur du C_0^k. D'une manière analogue on a

$$\int\limits_{C_0^k} \frac{G_k(w)dw}{w-\dfrac{\alpha_j z+\beta_j}{\gamma_j z+\delta_j}} = -2\pi i G_k\left(\frac{\alpha_j z+\beta_j}{\gamma_j z+\delta_j}\right).$$

De (1) nous avons

$$2\pi i f(z) = \int\limits_C \frac{f(w)dw}{w-z} - \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{C_0^k} \frac{f(w)dw}{w-z} +$$

$$+ 2\pi i \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{ G_k\left(\frac{\alpha_j z+\beta_j}{\gamma_j z+\delta_j}\right) - G_k\left(\frac{\alpha_j}{\gamma_j}\right)\right\}$$

et, puisque $\displaystyle\int\limits_{C_0^k} \frac{f(w)dw}{w-z} = -2\pi i G_k(z)$, nous avons finalement:

$$\text{(I)} \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(w)dw}{w-z} + \sum_{k=1}^{m}\left[G_k(z) + \sum_{j=1}^{\infty}\left\{ G_k\left(\frac{\alpha_j z+\beta_j}{\gamma_j z+\delta_j}\right) - G_k\left(\frac{\alpha_j}{\gamma_j}\right)\right\}\right].$$

Voici la formule générale pour la représentation des fonctions automorphes de la 1-re classe du cas étudié. Nous voyons que tous les membres de la seconde partie de (I), excepté le premier, sont déterminés par les parties principales de la fonction $f(z)$; par suite la formule (I) donne la représentation analytique très simple dans le cas où le terme intégral disparait. Etudions les cas, dans lesquels cela peut arriver.

Soit Ω l'ensemble de points situé sur C et complémentaire à ΣE_n; alors $\operatorname{mes}\Omega = 2\pi - \Sigma \operatorname{mes} E_n$ et $0 \leq \operatorname{mes}\Omega \leq 2\pi$. Il peut se présenter que

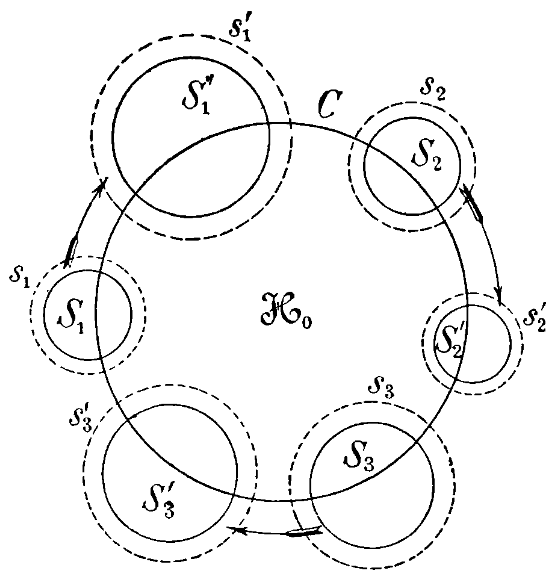

Fig. 4

$\operatorname{mes}\Omega = 0$. En effet, prenons le cas d'un groupe, dont le polygone fondamentale H_0 est limité par le nombre pair des circonférences orthogonales à ù C et liées deux à deux par les substitutions hyperboliques; soient S_0^k ces circonférences (fig. 4); soient d'autre part les s_0^k les circonférences, concentriques à S_0^k et situées toutes à l'intérieur de H_0, et soit m la plus courte distance entre S_0^k et s_0^k. Si nous appelons S_j^k et s_j^k les images de S_0^k et s_0^k par les substitutions du groupe, nous aurons:

$$\bar{s}_j^k = \int\limits_{s_0^k} \frac{|dz|}{|\gamma_j|^2 \left| z + \frac{\delta_j}{\gamma_j} \right|^2},$$

où $\bar{s}_j^k$ est la longueur de la circonférence s_j^k.

Mais tous les points $-\frac{\delta_j}{\gamma_j}$ sont situés à l'intérieur de S_0^j et par suite $\left|z+\frac{\delta_j}{\gamma_j}\right| > m$ et $\bar{s}_j^k \leq \frac{1}{m^2 |\gamma_j|^2} \cdot \bar{s}_0^k$.

Dans ce cas le groupe est de la première classe et la série $\Sigma \frac{1}{|\gamma_k|^2}$ est convergente et par conséquent la série $\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{s}_j^k$ (4) est aussi convergente.

Si nous laissons à part un nombre fini de premiers membres de la série (4), on peut toujours supposer que pour le reste on a $\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=N}^{\infty} \bar{s}_j^k < \varepsilon$, où ε un nombre donné aussi petit qu'on veut.

Mais il est clair, que $\operatorname{mes} \Omega < \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=N}^{\infty} \bar{s}_j^k < \varepsilon$, puisque les points de Ω sont intérieurs à une suite infinie de circonférences s_j^k. Finalement nous avons dans ce cas $\operatorname{mes} \Omega = 0$.

Tel cas se présente pour les fonctions fuchsiennes de la 3-me famille de H. POINCARÉ.

On peut se rendre compte, que si $\operatorname{mes} \Omega = 0$, le terme intégral dans la (I) disparait.

En effet, on peut appliquer la formule (I) dans le cas des polygones fondamentaux, extérieurs à C. D'après la discussion toute semblable à la précedente, nous aurons pour z extérieur à C la formule suivante:

$$(\mathrm{I}')\ f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)dw}{w-z} + f(\infty) + \sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} \left\{ G_k(z) + \sum_{j=1}^{\infty}\left[G_k\left(\frac{\alpha_j z+\beta_j}{\gamma_j z+\beta_j}\right) - G_k\left(\frac{\alpha_j}{\gamma_j}\right)\right]\right\}$$

ou m_1 est le nombre des pôles, situés dans H_0 et intérieurs à C et m_2 le nombre des poles, situés dans H_0 et extérieurs à C.

La formule (I) suit du théorème de CAUCHY; par conséquent, si dans (I) z est extérieur à C, la formule donne zéro au lieu de $f(z)$; d'une maniére semblable la formule (I') donne au lieu de $f(z)$ zéro pour z situé à l'intérieur de C.

La somme de (I) et (I') donne pour z, situé ou à l'intérieur, ou à l'extérieur de C:

$$(\mathrm{II})\ f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_i(w) - f_l(w)}{w-z}\,dw + f(\infty) + \sum_{k=1}^{m_1+m_2} \left\{ G_k(z) + \sum_{j=1}^{\infty}\left[G_k\left(\frac{\alpha_j z+\beta_j}{\gamma_j z+\delta_j}\right) - G_k\left(\frac{\alpha_j}{\gamma_j}\right)\right]\right\}$$

où $f_i(w)$ et $f_l(w)$ sont les valeurs de la fonction $f(z)$ sur C de l'un et de l'autre côté du C.

Soit pour la fonction $f(z)$, qui peut être prolongée à l'extérieur du C, mes $\Omega = 0$. Puisque sur les arcs de E_k $f_i(w) = f_l(w)$, nous avons:

$$\int\limits_C \frac{f_i(w) - f_l(w)}{w - z}\, dw = \int\limits_\Omega \frac{f_i(w) - f_l(w)}{w - z}\, dz = 0$$

et la formule (II) donne:

$$f(z) = f(\infty) + \sum_{k=1}^{m_1+m_2} \left\{ G_k(z) + \sum_{j=1}^{\infty} \left[G_k\left(\frac{\alpha_j z + \beta_j}{\gamma_j z + \delta_j}\right) - G_k\left(\frac{\alpha_j}{\gamma_j}\right) \right] \right\}. \tag{II'}$$

A l'aide de la formule (II) on peut représenter, par exemple, toutes les fonctions de la 3-me famille de H. POINCARÉ. L'analogie de (II') avec le développement de MITTAG-LEFFLER est évident.

Appliquons la formule (II') à quelques exemples.

1. Soit G le groupe cyclique parabolique. Dans ce cas Ω se compose d'un seul point et la formule (II') est appliquable. Si nous supposons, en outre, qu'un seul point singulier de la fonction situé à l'intérieur du H_0 est un pôle de premier ordre, situé à l'infini avec la partie principale $G(z) = z$, nous aurons dans ce cas $m_1 = 0$; $m_2 = 1$ et (II') donne le résultat suivant:

$$f(z) = z + \sum_{1}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha_j z + \beta_j}{\gamma_j z + \delta_j} - \frac{\alpha_j}{\gamma_j} \right\}. \tag{5}$$

Si le point double des substitutions est le point $z = 1$, les substitutions du groupe ont la forme

$$\frac{1}{w-1} = \frac{1}{z-1} + h \cdot j \quad \text{et} \quad w = \frac{z-1}{hj(z-1)+1}.$$

La formule (5) donne:

$$f(z) = z + \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{z-1}{hj(z-1)+1} - \frac{1}{hj} \right\}$$

si nous prenons $h = \pi$ et si au lieu de z nous introduisons la variable $z_1 = \dfrac{1}{z-1}$, nous aurons

$$f(z) - 1 = \frac{1}{z_1} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{z_1 + j \cdot \pi} - \frac{1}{j\pi} \right\} = \operatorname{ctg} z_1 .$$

Ainsi le développement bien connu de $\operatorname{ctg} z$, est un cas particulier de la formule (II').

2. Soit G le groupe cyclique hyperbolique. En supposant que les points doubles des substitutions hyperboliques sont ± 1, nous aurons les substitutions du groupe sous la forme:

$$\frac{w-1}{w+1} = h^{2n}\left(\frac{z-1}{z+1}\right), \quad \text{d'ou} \quad w = \frac{z\left(\frac{h^n + h^{-n}}{2}\right) - \left(\frac{h^n - h^{-n}}{2}\right)}{-z\left(\frac{h^n - h^{-n}}{2}\right) + \left(\frac{h^n + h^{-n}}{2}\right)}$$

si nous prenons $k = e$, nous aurons finalement

$$w = \frac{z \operatorname{ch} n - \operatorname{sh} n}{-z \operatorname{sh} n + \operatorname{ch} n}.$$

Il est bien connu qu'il existe des fonctions automorphes à groupe cyclique hyperbolique, qui ont au polygone fondamental un seul pôle de second ordre. Si nous prenons pour polygone fondamental un polygone qui a l'infini à l'intérieur et comme pôle le point $z = \infty$, en supposant la partie principale égale à z^2, nous aurons le développement de la forme:

$$f(z) = z^2 + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \left\{ \left(\frac{z \operatorname{ch} n - \operatorname{sh} n}{-z \operatorname{sh} n + \operatorname{ch} n}\right)^2 - \frac{\operatorname{ch}^2 n}{\operatorname{sh}^2 n} \right\}$$

(le cas $n = 0$ est exclu), ou

$$f(z) = z^2 + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{2z \operatorname{sh} n \operatorname{ch} n - \operatorname{ch}^2 n - \operatorname{sh}^2 n}{\operatorname{sh}^2 n (z \operatorname{sh} n - \operatorname{ch} n)^2}. \tag{6}$$

D'autre part il est facile de démontrer, que

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\lg x + 2\pi i n)^2}; \tag{7}$$

si nous prenons $x = \frac{z-1}{z+1} e^{2m}$, nous aurons de (7):

$$\frac{z^2 - 1}{4\{\operatorname{sh} m \cdot z - \operatorname{ch} m\}^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\lg \frac{z-1}{z+1} + 2\pi i n + 2m\right)^2} \tag{8}$$

et pour $z = \infty$ et $m \neq 0$:

$$\frac{1}{4 \operatorname{sh}^2 m} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi i n + 2m)^2}. \tag{9}$$

De (8) et (9) il résulte:

$$(10)\quad \frac{1}{4}\left\{\frac{z^2-1}{(z\,\mathrm{sh}\,m-\mathrm{ch}\,m)^2}-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 m}\right\}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{\left(\lg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+2\pi i n+2m\right)^2}-\frac{1}{(2\pi i n+2m)^2}\right\}$$

ou $m \neq 0$. En prenant la somme de (10) pour toutes les valeurs entières de m, à l'exception de $m=0$, nous aurons

$$(11)\quad \begin{aligned}&\frac{1}{4}\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}{}' \frac{2z\,\mathrm{sh}\,m\,\mathrm{ch}\,m-\mathrm{ch}^2 m-\mathrm{sh}^2 m}{\mathrm{sh}^2 m(\mathrm{sh}\,m\cdot z-\mathrm{ch}\,m)^2}=\\ &=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}'\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{\left(\lg\frac{z-1}{z+1}+2\pi i n+2m\right)^2}-\frac{1}{(2\pi i n+2m)^2}\right\}.\end{aligned}$$

Pour le cas $m=0$, la formule (8) donne

$$\frac{1}{4}(z^2-1)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(\lg\frac{z-1}{z+1}+2\pi i n\right)^2}=\frac{1}{\lg^2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'\frac{1}{\left(\lg\frac{z-1}{z+1}+2\pi i n\right)^2}$$

et, puisque $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}'\frac{1}{(2\pi i n)^2}=-\frac{1}{4\pi^2}2\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{1}{4\pi^2}2\cdot\frac{\pi^2}{6}=-\frac{1}{12}$:

$$(12)\quad \frac{1}{4}(z^2-1)+\frac{1}{12}=\frac{1}{\lg^2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'\left\{\frac{1}{\left(\lg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+2\pi i n\right)^2}-\frac{1}{(2\pi i n)^2}\right\}.$$

De (11) et (12) il résulte:

$$(13)\quad \begin{aligned}&\frac{1}{4}z^2-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\sum{}'\frac{2z\,\mathrm{sh}\,m\,\mathrm{ch}\,m-\mathrm{ch}^2 m-\mathrm{sh}^2 m}{\mathrm{sh}^2 m(\mathrm{sh}\,m\cdot z-\mathrm{ch}\,m)^2}=\frac{1}{\left(\lg\frac{z-1}{z+1}\right)^2}+\\ &+\sum{}'\left\{\frac{1}{\left(\lg\frac{z-1}{z+1}+2\pi i n+2m\right)^2}-\frac{1}{(2\pi i n+2m)^2}\right\}\end{aligned}$$

où dans la somme de la seconde partie entrent tous les couples des nombres entiers m, n à l'exception $m=n=0$.

Mais on voit de suite que la seconde partie est $\wp\left(\lg\frac{z-1}{z+1};\ 2\pi i;\ 2\right)$ et de (6) et (13) nous avons finalement

$$f(z)=z^2+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'\left\{\left(\frac{z\,\mathrm{ch}\,n-\mathrm{sh}\,n}{-z\,\mathrm{sh}\,n+\mathrm{ch}\,n}\right)^2-\frac{\mathrm{ch}^2 n}{\mathrm{sh}^2 n}\right\}=4\wp\left(\lg\frac{z-1}{z+1};\ 2\pi i;\ 2\right)+\frac{2}{3}.$$

On voit que $f(z)$ est effectivement la fonction automorphe qui a un groupe cyclique hyperbolique. Dans ce cas la formule (II') donne, après quelques transformations, le développement de la fonction $\wp$.

3. En appliquant la méthode de la représentation conforme, on peut construire des fonctions automorphes plus compliquées, qui peuvent être représentées par la formule (II').

Par exemple, prenons sur la partie finie de l'axe réel du plan z un nombre fini ou infini de parties l_1, $l_2, \dots$ $l_n, \dots$ toutes extérieures les unes

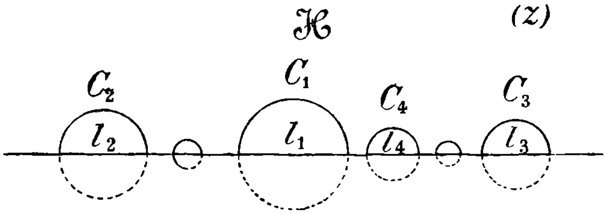

Fig. 5

aux autres et sur chaque l_k construisons les demi-cercles C_1, $C_2, \dots$ $C_n \dots$ (fig. 5). Soit H la partie du demiplan supérieur du z, extérieur à tous les C_n. Faisons la représentation conforme de H sur la partie supérieure du plan w et soit $w = f(z)$ la fonction qui donne cette représentation. On peut démontrer bien simplement, que w est une fonction automorphe. Pour la région fondamentale H_0 on peut prendre la région H et sa région symétrique par rapport à l'axe réel.

Ce cas ne fait pas partie du cas étudié plus haut puisque toutes les formules sont trouvés pour le cas où tous les points singuliers du groupe se trouvent sur la circonférence $|z| = 1$, mais on peut bien simplement transporter tous les résultats trouvés plus haut dans le cas actuel.

A l'infini $w = az + b + \frac{c}{z} + \dots$ et par un changement de la variable w on peut toujours supposer, qu'à l'infini on ait $w = z + \frac{c}{z} + \dots$ Alors, dans H_0, $f(z)$ a un seul pôle de premier ordre à l'infini, dont la partie principale est z. En appliquant la formule générale (II'), on aura

$$w = f(z) = z + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha_j z + \beta_j}{\gamma_j z + \delta_j} - \frac{\alpha_j}{\gamma_j} \right\}. \tag{14}$$

Prenons le cas extrêmement simple de la formule (14); soit une seule circonférence C_1. Alors tout le groupe se compose de deux substitutions;

si l_1 fait partie de l'axe réel entre $z = -1$ et $z = 1$, ces substitutions du groupe sont la substitution unité et la substitution $z' = \frac{1}{z}$ et la formule (8) devient

$$w = z + \frac{1}{z},$$

c'est la fonction bien connue, qui donne la representation de la partie du plan z extérieure au cercle $|z| < 1$ sur tout le plan de la variable w.

4. Dans tous les cas précédents $\operatorname{mes} \Omega = 0$. En général $\operatorname{mes} \Omega$ peut être quelconque entre 0 et 2π. Il est intéressant de remarquer qu'on peut avoir des résultats analogues aux précédents dans quelques cas ou $\operatorname{mes} \Omega \neq 0$. Tel est le cas de la fonction bornée $\varphi(\tau)$, étudiée dans le paragraphe précédent.

En vertu du théorème de M. FATOU la fonction automorphe bornée peut être représentée à l'aide de la formule:

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\varphi(t)dt}{t - \tau} \tag{15}$$

c'est le cas particulier de la formule (I) donnée précedement.

Prenons la fonction bornée du § 3 $\varphi(\tau)$ et soit

$$\varphi(\tau) = P(x, y) + iQ(x, y).$$

En appliquant la méthode des images de RIEMANN on peut construire une autre fonction automorphe $\varphi_1(\tau)$, qui existe à l'extérieur de C, de la manière suivante.

Soit $\tau_1 = x_1 + iy_1 = \frac{1}{\bar{\tau}} = \frac{1}{x - iy}$ et $\varphi_1(\tau_1) = \frac{1}{P(x, y) + iQ(x, y)}$. Si $\tau = x + iy$ se trouve à l'intérieur de C la variable $\tau_1 = x_1 + iy_1$ se trouve à l'extérieur de C et la fonction $\varphi_1(\tau)$ est définie à l'extérieur du C.

En appliquant les relations de CAUCHY-RIEMANN, on verra, que $\varphi_1(\tau)$ est une fonction analytique, définie à l'extérieur de C; $\varphi_1(\tau)$ est holomorphe partout à l'extérieur de C à l'exception des points, qui sont les images des zéros de la fonction $\varphi(z)$, où la fonction $\varphi_1(\tau)$ a des pôles simples. En outre il est évident que la fonction $\varphi_1(\tau)$ est la fonction automorphe qui a le même groupe que la fonction $\varphi(\tau)$.

La fonction $\varphi(\tau)$ est bornée et, comme nous l'avons vu, elle prend presque partout sur C les valeurs de la forme $e^{\alpha i}$ (α réel). Par suite $\varphi_1(\tau)$ prend presque partout sur C les valeurs $\frac{1}{e^{-\alpha i}} = e^{\alpha i}$ et on constate que presque partout sur C $\varphi_1(\tau) = \varphi(\tau)$. La fonction $\varphi_1(\tau)$ peut être représentée par la formule (I') et puisque on peut toujours supposer que $\varphi(0) = 0$, on aura pour les environs de l'infini le développement de la forme:

$$\varphi_1(\tau) = m\tau + C + \frac{a}{\tau} + \ldots$$

et par le changement de variable on peut supposer, que $m = 1$. Tous les autres pôles de $\varphi_1(\tau)$ sont les points équivalents à ∞, et en appliquant la formule (I') on aura:

$$\varphi_1(\tau) = -\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi_1(t)dt}{t-\tau} + \tau + C + \sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{\alpha_j\tau + \beta_j}{\gamma_j\tau + \delta_j} - \frac{\alpha_j}{\gamma_j}\right\}. \tag{16}$$

De (15) et (16) on voit, que l'expression analytique (15) est égale à zéro pour τ extérieur à C et (16) est égale à zéro de même pour τ interieur à C. Alors la somme de (15) et (16) donnera:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(t) - \varphi_1(t)}{t - \tau}\,dt + \tau + C + \sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{\alpha_j\tau + \beta_j}{\gamma_j\tau + \delta_j} = \frac{\alpha_j}{\gamma_j}\right\} = \left\{\begin{array}{ll}\varphi(\tau); & (|\tau| < 1)\\ \varphi_1(\tau); & (|\tau| > 1)\end{array}\right.$$

et, puisque sur C on a presque partout $\varphi(\tau) = \varphi_1(t)$, on peut écrire pour $|\tau| < 1$ la formule:

$$\varphi(\tau) = z + C + \sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{\alpha_j\tau + \beta_j}{\gamma_j\tau + \delta_j} - \frac{\alpha_j}{\gamma_j}\right\}. \tag{17}$$

Mais $\varphi(0) = 0$, c. a. d.

$$C + \sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{\beta_j}{\delta_j} - \frac{\alpha_j}{\gamma_j}\right\} = 0 \quad \text{et} \quad C = \sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{\alpha_j}{\gamma_j} - \frac{\beta_j}{\delta_j}\right\}. \tag{18}$$

De (17) et (18) on aura finalement

$$\varphi(\tau) = \tau + \sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{\alpha_j\tau + \beta_j}{\gamma_j\tau + \delta_j} - \frac{\beta_j}{\delta_j}\right\},$$

ou encore:

$$\varphi(\tau) = \tau + \tau\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\delta_j(\gamma_j\tau + \delta_j)}\right\}.$$

On remarque que pour la substitution identique $\alpha_0 = 1$; $\gamma_0 = 0$; $\beta_0 = 0$;

$\delta_0 = 1$ et $\dfrac{1}{\delta_0(\gamma_0\tau + \delta_0} = 1$ et on peut écrire finalement:

$$\varphi(\tau) = \tau \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_j(\gamma_j\tau + \delta_j)}. \tag{19}$$

Les fonctions $\varphi(\tau)$ et $\varphi_1(\tau)$ ne sont pas prolongeables au delà de la circonférence C, qui est la ligne singulière pour $\varphi(\tau)$ et $\varphi_1(\tau)$; les fonctions $\varphi(\tau)$ et $\varphi_1(\tau)$ sont deux fonctions distinctes d'après Weierstrass. Mais si nous prenons la définition plus générale des fonctions quasi-analytiques, les fonctions $\varphi(\tau)$ et $\varphi_1(\tau)$ forment nne seule fonction quasi-analytique, définie sur tout le plan de la variable τ.

§ 5. **Sur l'expression analytique des coefficients d'un groupe donné.** — Dans le n.° précédent nous avons donné quelques exemples de la représentation des fonctions automorphes à l'aide des séries simples, exprimées par les coefficients des substitutions du groupe donné. Si le groupe est donné par son polygone fondamental et par suite les substitutions génératrices du groupe sont données, on peut représenter tous les coefficients du groupe par les coefficients de ses substitutions génératrices. Voici les formules qui donnent ces coefficients.

Supposons, que toutes les substitutions génératrices sont des substitutions elliptiques ou hyperboliques. Soient $S\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $T\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ deux substitutions du groupe. Si α_1 et β_1 sont les points fixes de S_1, nous aurons $\dfrac{w-\alpha_1}{w-\beta_1} = k_1\left(\dfrac{z-\alpha_1}{z-\beta_1}\right)$, d'où

$$w = \frac{z\,\dfrac{k_1\beta_1 - \alpha_1}{\sqrt{k_1}(\alpha_1 - \beta_1)} - \dfrac{\alpha_1\beta_1(k_1 - 1)}{\sqrt{k_1}(\alpha_1 - \beta_1)}}{z\,\dfrac{k_1 - 1}{\sqrt{k_1}(\alpha_1 - \beta_1)} - \dfrac{k_1\alpha_1 - \beta_1}{\sqrt{k_1}(\alpha_1 - \beta_1)}} \tag{S}$$

et d'une façon semblable on aura pour T:

$$w = \frac{z\,\dfrac{k_2\beta_2 - \alpha_2}{\sqrt{k_2}(\alpha_2 - \beta_2)} - \dfrac{\alpha_2\beta_2(k_2 - 1)}{\sqrt{k_2}(\alpha_2 - \beta_2)}}{z\,\dfrac{k_2 - 1}{\sqrt{k_2}(\alpha_2 - \beta_2)} - \dfrac{k_2\alpha_2 - \beta_2}{\sqrt{k_2}(\alpha_2 - \beta_2)}}. \tag{T}$$

Soit la substitution $S(T) = \begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix}$ le produit de deux substitutions S et T;

alors, d'après les formules bien connues, on aura:

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned} A&=a_1a+b_1c=\frac{k_1k_2(\beta_1-\alpha_2)\beta_2-k_1(\beta_1-\beta_2)\alpha_2-k_2(\alpha_1-\alpha_2)\beta_2+(\alpha_1-\beta_2)\alpha_2}{\sqrt{k_1k_2}(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)}\\ B&=ba_1+db_1=\frac{-k_1k_2(\beta_1-\alpha_2)\alpha_1\beta_2+k_1(\beta_1-\beta_2)\alpha_1\alpha_2+k_2(\alpha_1-\alpha_2)\beta_1\beta_2-(\alpha_1-\beta_2)\alpha_2\beta_1}{\sqrt{k_1k_2}(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)}\\ C&=ac_1+cd_1=\frac{k_1k_2(\beta_1-\alpha_2)-k_1(\beta_1-\beta_2)-k_2(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_1-\beta_2)}{\sqrt{k_1k_2}(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)}\\ D&=bc_1+dd_1=\frac{-k_1k_2(\beta_1-\alpha_2)\alpha_1+k_1(\beta_1-\beta_2)\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)\beta_1-(\alpha_1-\beta_2)\beta_2}{\sqrt{k_1k_2}(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)}. \end{aligned}\right.$$

On peut remarquer que ces formules sont des cas particuliers des formules générales suivantes:

$$(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{aligned} A&=\frac{\Sigma k_1k_2\ldots k_n(\beta_1-\alpha_2)(\beta_2-\alpha_3)\ldots(\beta_{n-1}-\alpha_n)\beta_n}{M}\\ B&=\frac{\Sigma-k_1k_2\ldots k_n(\beta_1-\alpha_2)(\beta_2-\alpha_3)\ldots(\beta_{n-1}-\alpha_n)\alpha_n\alpha_1}{M}\\ C&=\frac{\Sigma k_1k_2\ldots k_n(\beta_1-\alpha_2)(\beta_2-\alpha_3)\ldots(\beta_{n-1}-\alpha_n)}{M}\\ D&=\frac{\Sigma-k_1k_2\ldots k_n(\beta_1-\alpha_2)(\beta_2-\alpha_1)\ldots(\beta_{n-2}-\alpha_n)\alpha_1}{M} \end{aligned}\right.$$

où

$$M=\sqrt{k_1k_2\ldots k_n}(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)\ldots(\alpha_n-\beta_n),$$

si dans les sommes qui entrent dans ces formules, tous les termes se forment du premier terme indiqué après le signe de la somme par les substitutions suivantes:

On change k_j, α_j, β_j respectivement en -1, β_j, α_j et il faut faire ces substitutions un, deux,... fois pour diverses j.

Ces formules sont vraies pour le produit de deux substitutions, comme le montrent les formules (I). On peut les démontrer pour n quelconque par la méthode de l'induction complète.

Remarquons que pour la substitution inverse de S il faut changer k_1, α_1, β_1 respectivement en k_1, β_1, α_1.

Si parmi les substitutions gènératrices se trouvent des substitutions paraboliques, il suffit de remarquer que les coefficients de la substitution parabolique

$$w=\frac{z(1+\alpha h)-\alpha^2h}{zh+(1-\alpha h)}$$

peuvent s'obtenir de la formule

$$w = \frac{z\dfrac{k\beta-\alpha}{\sqrt{k}(\alpha-\beta)} - \dfrac{\alpha\beta(k-1)}{\sqrt{k}(\alpha-\beta)}}{z\dfrac{k-1}{\sqrt{k}(\alpha-\beta)} - \dfrac{k\alpha-\beta}{\sqrt{k}(\alpha-\beta)}},$$

en posant $k = e^{-(\alpha-\beta)h}$ et en faisant tendre β vers α. De cette façon on peut de (II) obtenir les formules pour le cas où parmi les substitutions génératrices il y a des substitutions paraboliques.

Les formules (II) donnent les coefficients des substitutions du groupe, exprimés par les α_n, β_n, k_n, qui sont tous connus quand le polygone fondamental est donné.

Sulla geometria delle varietà a connessione affine. Teoria invariantiva delle trasformazioni che conservano il parallelismo.

Memoria di ENEA BORTOLOTTI (a Cagliari).

Sunto. - *La I Parte di questo lavoro contiene svariati complementi alla teoria delle varietà a connessione affine, relativi particolarmente a una nuova e più completa sistemazione della teoria degli invarianti differenziali di una tale connessione nel caso generale (asimmetrico). La II Parte svolge la teoria invariantiva delle trasformazioni di una connessione affine che conservano il parallelismo, riconducendola allo studio degli invarianti differenziali di una connessione di tipo particolare intrinsecamente legata a quella data.*

1. **Introduzione.** — Lo studio delle trasformazioni fra varietà curve che conservano il parallelismo — che indicheremo sempre nel seguito, per brevità, con T_p — è stato iniziato nel 1920 dal BOMPIANI (**9** [1]), che ha considerato il caso delle *varietà riemanniane*: in questo caso le trasformazioni cercate sono quelle in cui sono invarianti tutti i simboli di CHRISTOFFEL di seconda specie, $\left\{ {\lambda \mu \atop \nu} \right\}$ (relativi al tensore fondamentale della metrica), e la determinazione di tali trasformazioni T_p si compie agevolmente utilizzando i noti risultati del LEVI-CIVITA sulle trasformazioni geodetiche [2].

Pel caso delle varietà a connessione affine *simmetrica*, cioè definita da parametri $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ tali che $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}$, l'analogo risultato (invarianza dei parametri $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ nelle T_p) è banale giacchè le $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ $\left(\text{a differenza di quanto accade per le } \left\{ {\lambda \mu \atop \nu} \right\}\right)$ *determinano* la geometria nella varietà supposta: onde le T_p si riducono alla sola identità.

Ciò non accade pel caso più generale delle connessioni *asimmetriche*. Questo caso (insieme a quello, ancor più generale, delle connessioni *non*

---

(1) Questo numero — l'avvertenza valga anche pel seguito — si riferisce all'indice bibliografico.

(2) BOMPIANI, l. c., p. 348 e seg.; LEVI-CIVITA, **3**, 1896; RICCI e LEVI-CIVITA, **5**, 1900, pp. 187-190.

lineari) è stato preso in considerazione nel 1925 da H. FRIESECKE (3), che ha determinato la forma generale delle trasformazioni T_p per tali connessioni. Il problema è stato ripreso e trattato più ampiamente nel 1926 da J. M. THOMAS (4), che ha indicato svariati tensori invarianti in quelle trasformazioni, e anche un processo con cui da essi si possono ricavare infiniti altri tensori dotati della stessa proprietà. I più notevoli risultati di queste ricerche, con alcuni completamenti, sono stati esposti da EISENHART nella sua *Non-Riemannian Geometry* (5). Mancava però finora una *teoria invariantiva* generale delle trasformazioni T_p di una connessione affine: cioè, dei mutamenti della connessione — il che vale a dire, della legge di trasporto dei *vettori* — che mantengono inalterata la legge di trasporto delle direzioni.

Appunto di questa teoria (6) io voglio qui esporre gli elementi. Il risultato fondamentale è questo: che *una data connessione affine ne determina univocamente un'altra, invariante per le trasformazioni* T_p; tale connessione invariante (7), che d'altra parte è essa stessa una delle trasformate (per le T_p) della connessione assegnata, ha una semplice caratterizzazione geometrica: *e gli invarianti differenziali della data connessione per le trasformazioni* T_p *in parola sono tutti e soli gli invarianti differenziali di quella connessione invariante.*

La ricerca del significato geometrico della connessione invariante, e di una sistemazione conveniente della teoria degli invarianti differenziali (per le T_p) mi ha condotto a sviluppare alcune considerazioni di carattere generale sulle connessioni affini, apportando così, spero, a questa teoria generale (8) qualche utile contributo. Appunto da queste considerazioni sulle connessioni affini in generale inizierò la mia esposizione: a cui premetterò una rapida indicazione degli argomenti trattati.

---

(3) Ved. **27**, 1925, pp. 105-109.

(4) Ved. **35** e **36**, 1926.

(5) **48**, 1927; ved. p. 29 e seg.

(6) che potremmo anche chiamare, secondo il FRIESECKE (**27**, p. 105) teoria dei *trasporti lineari delle direzioni*. (« Eine Gesamtheit von Vektorübertragungen, die bei der Uebertragung eines beliebigen Vektors längs einer beliebigen Kurve stets eine Vektorfolge *derselben* Richtungsfolge ergeben, soll zu dem einheitlichen Begriff einer « Richtungsübertragung » zusammengefasst werden »).

(7) in relazione semplice con la connessione affine *simmetrica* invariante notata da J. M. THOMAS: **36**, 1926, p. 668; come sarà precisato più innanzi (n.° 8).

(8) che con le applicazioni di CARTAN e SCHOUTEN alla teoria dei gruppi finiti continui di trasformazioni, e le recenti ricerche relativistiche di EINSTEIN, ha acquistato un interesse certo non minore di quella delle connessioni affini *simmetriche*, assai più studiate sino ad ora.

Dopo aver richiamato (n.° 2) svariate definizioni e teoremi, relativi specialmente alla *torsione* e alla *curvatura* di una varietà a connessione affine, che mi è necessario supporre noti nel seguito, introduco (n.° 3) due connessioni intrinsecamente legate a una data (quelle che io chiamo: *connessione coniugata*, e *connessione simmetrica associata*): e me ne valgo per ricavarne delle interpretazioni geometriche del *tensore di torsione* $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ e del *vettore di Einstein* $\Phi_\nu = S_{\lambda\nu}^{\cdot\cdot\nu}$. Gli elementi della connessione coniugata mi servono poi (n.° 4) anche nella trattazione del *problema dell' equivalenza* di due connessioni affini asimmetriche. Indi vengo (n.° 5) ad estendere a queste connessioni la nozione di *coordinate normali* (RIEMANN, VEBLEN); ciò serve di base per generalizzare anche le nozioni di *tensori normali*, di *estensioni* di un tensore; e per trarne dei teoremi generali *di riduzione*, e *di sostituzione*, che risolvono completamente il problema degli *invarianti differenziati* della connessione.

Qui ha termine la I Parte; la II Parte è dedicata all' argomento principale di questo lavoro, cioè alle *trasformazioni* (T_p) *che conservano il parallelismo*. Anzitutto io ritrovo (n.° 6) la forma generale di queste trasformazioni: ciò conduce a determinare un sistema invariante per le trasformazioni medesime, $L_{\mu\nu}^{\lambda}$, dal quale si passa agevolmente ai parametri $P_{\mu\nu}^{\lambda}$, di una *connessione affine* ($\nabla^{(p)}$) *invariante* per le T_p. Gli elementi di questa connessione sono sufficienti per esprimere tutti gli invarianti del primo ordine [e anche, come mostro più innanzi, degli altri ordini] per le T_p. In particolare si ritrovano le *componenti della connessione proiettiva* secondo T. Y. THOMAS, $\Pi_{\lambda\mu}^{\nu}$: ciò mi dà l' occasione di esporre (n.° 7) un processo, che mi pare abbastanza interessante, con cui la connessione affine viene ricostruita a partire dalle sue geodetiche, col fissare, successivamente, la scelta degli ulteriori elementi arbitrari da cui quella dipende. Vengo poi (n.° 8) a stabilire una notevole proposizione (*teorema fondamentale*), che riconduce la teoria invariantiva di una connessione affine per le T_p alla teoria degli invarianti differenziali della sua connessione ($\nabla^{(p)}$) invariante; e determino le espressioni di un primo gruppo di tensori (T_p)-invarianti differenziali del secondo ordine (tensori di curvatura), che indubbiamente sono tra i più notevoli, ma pel diverso punto di vista dei ricercatori precedenti, non si erano ancora presentati. Lo stesso può dirsi dei *tensori* (T_p)-*normali* (d' ordine ≥ 2) che introduco al seguente n.° 9: ove mi valgo delle nozioni e dei risultati esposti ai n.i 4, 5 per le connessioni affini in generale, per trarne la risoluzione del problema della trasformabilità di due connessioni affini l' una nell' altra con una trasformazione T_p ((T_p)-*equivalenza*): per estendere alla teoria attuale le *coordinate normali*, i *tensori normali*, le *estensioni*; e infine, per ricavare dai teoremi dati al n.° 5 dei *teoremi di riduzione e di sostituzione* per questa teoria (teoria invariantiva delle varietà a connessione affine per le T_p). Vengo poi ad indicare (n.° 10) altri tensori (T_p)-invarianti (del secondo ordine), tra i quali si ritrovano tutti quelli già noti: e a dare, di essi e degli altri prima indicati, delle interpretazioni geometriche (n.° 11). Particolarmente notevole è, mi sembra, il significato del tensore $L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$: il suo annullarsi esprime che nella supposta varietà vi è un *parallelismo assoluto delle direzioni*, pur senza che sia integrabile (in generale) il trasporto per equipollenza *dei vettori*: il che porta ad introdurre una « curvatura segmentaria » come nella metrica di WEYL.

Infine io mi occupo brevemente (n.° 12) di un importante sottogruppo del gruppo delle T_p: quello delle trasformazioni (T_{pc}) *che conservano il parallelismo e la curvatura*: indicando la forma particolare che per queste trasformazioni assume il teorema fondamentale della teoria invariantiva (cfr. n.° 8): e svolgo poi alcune considerazioni sui casi particolari in cui la varietà della quale trasformiamo la connessione affine mediante uno T_{pc} sia *a curvatura nulla*, o più particolarmente, sia *uno spazio di gruppo*: il che conduce a stabilire una proprietà dei gruppi a connessione emisimmetrica.

PARTE PRIMA

Complementi sulle varietà a connessione affine (asimmetrica).

2. **Premessa: richiamo delle nozioni fondamentali sulle connessioni affini asimmetriche. I tensori di torsione e di curvatura.** — Rammentiamo [9] che la connessione affine (asimmetrica) più generale [10] è individuata dai suoi n^3 parametri, (o componenti), $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$, rispetto a un sistema di coordinate curvilinee x^ν ($\lambda, \mu, \nu, \tau, \omega, \varkappa, \rho, \sigma = 1, 2, \ldots, n$): mediante i quali la legge del trasporto per equipollenza di un vettore controvariante o covariante si esprime:

$$\overline{d}\xi^\lambda = \nabla_\nu \xi^\lambda \cdot dx^\nu = d\xi^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \xi^\mu dx^\nu = 0, \tag{1}$$

$$\overline{d}\xi_\mu = \nabla_\nu \eta_\mu \cdot dx^\nu = d\eta_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \eta_\lambda dx^\nu = 0. \tag{2}$$

I primi membri sono i *differenziali cogredienti* [11] di ξ^λ o di η_μ: i quali ri-

[9] Ved. SCHOUTEN, **14**, 1922; **22**, 1924, p. 62 e seg.; EISENHART, **48**, 1927, p. 3 e seg,

[10] « überschiebungsinvariante lineare Uebertragung »: **22**, p. 67.

[11] HESSENBERG, **4**, 1899, p. 129. Cfr. SCHOUTEN, **22**, 1924, p. 63 (« kovariante Differential »).

sultano effettivamente cogredienti a ξ^λ e ad η_μ, rispettivamente, per una qualunque trasformazione

(3) $$x^\nu = x^\nu(x'^1, x'^2, \dots, x'^n) \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

delle coordinate curvilinee, pel fatto che i parametri $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ si suppongono variare, per una tale trasformazione, secondo le formule

(4) $$\Gamma'^\delta_{\gamma\alpha} = \Gamma^\nu_{\lambda\omega} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x^\omega}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\gamma \partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\nu} \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon = 1, 2, \dots, n).$$

Se P, $P_1 = P + dP$ (di coordinate x^λ, $x^\lambda + dx^\lambda$) sono due punti infinitamente vicini della A_n (cioè, della varietà supposta ([12])), la connessione determina una rappresentazione affine (omografia vettoriale) della stella di vettori (ad es. controvarianti) di A_n che ha centro in P sulla stella di vettori di centro P_1; nella quale al vettore ξ^λ corrisponde il vettore $\xi^\lambda_1 = \xi^\lambda + d\xi^\lambda$, le $d\xi^\lambda$ ricavandosi dalle (1). E anzi, la connessione dà luogo anche a una rappresentazione (o, se si vuole, ad un trasporto) affine dell'intero *spazio affine tangente* ([13]) ad A_n in P, Σ, sullo spazio affine tangente in P_1, Σ_1: nella quale al punto Q di Σ di coordinate cartesiane u^λ (nel sistema che ha P come origine, e i *vettori fondamentali* $\underset{\nu}{e}^\lambda$ del sistema x^ν ([14]) come vettori fondamentali degli n assi) corrisponde il punto Q_1 di Σ_1 che (nel sistema cartesiano analogamente fissato in Σ_1) ha le coordinate $u^\lambda + du^\lambda$, le du^λ ricavandosi dalle equazioni ([15])

(5) $$du^\lambda + dx^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} u^\mu dx^\nu = 0.$$

Come è noto i trasporti dei punti o dei vettori, così definiti, in generale *non sono integrabili*: e questa non-integrabilità si manifesta nell'esistenza dei tensori *di torsione*, $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$, e *di curvatura* $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$. Precisamente: il divario dei valori finali e iniziali delle u^λ per effetto del trasporto, secondo le (5), lungo un ciclo infinitesimo Γ tracciato per P in A_n, su di una superficie tangente in P alla 2-direzione (d_1P, d_2P) è dato ([16]) dalle formule

(6) $$\rho D u^\lambda = 2 S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} d_1 x^\mu d_2 x^\nu + R_{\omega\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} d_1 x^\omega d_2 x^\mu u^\nu,$$

([12]) Indichiamo, secondo SCHOUTEN (che veramente aveva introdotto questa notazione pel solo caso delle connessioni affini *simmetriche*) con A_n una varietà n-dimensionale a connessione affine.

([13]) Ved. CARTAN, **20**, t. 40, 1923, p. 362.

([14]) cioè, i vettori controvarianti che nel sistema x^ν hanno le componenti 10 ... 0, 010 ... 0, 00 ... 01 (vettori-unità, *Massvektoren*).

([15]) Cfr. **20**, t. 40, p. 361, form. (3).

([16]) Cfr. **20**, t. 40, p. 372, form. (5)'.

ove

$$S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\,\lambda} = \Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}), \tag{7}$$

$$R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\Gamma^{\nu}_{\lambda\omega} - \frac{\partial}{\partial x^{\omega}}\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + \Gamma^{\varkappa}_{\lambda\omega}\Gamma^{\nu}_{\varkappa\mu} - \Gamma^{\varkappa}_{\lambda\mu}\Gamma^{\nu}_{\varkappa\omega} \tag{8}$$

e ρ è il rapporto fra l'area del parallelogrammo infinitesimo costruito (nello spazio affine tangente in P) su d_1P, d_2P e l'area racchiusa dal supposto ciclo. Le (6) definiscono, secondo il CARTAN, lo *spostamento affine associato al ciclo* Γ supposto: cioè, la rappresentazione affine dello spazio Σ su sè stesso determinata dal trasporto ciclico lungo Γ. Se il punto P per questo spostamento affine viene portato nel punto P_0 (di Σ) di coordinate cartesiane Du_0^{λ}, lo spostamento stesso può considerarsi come prodotto di una *traslazione* di Σ in sé, che porta P in P_0, per una *rotazione affine* di centro P_0 (affinità che ha P_0 come punto unito). Le componenti della traslazione associata al ciclo Γ sono le Du_0^{λ}, che si ricavano dalle (6) ponendovi $u^{\nu}=0$:

$$\rho Du_0^{\lambda} = 2S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\,\lambda} d_1x^{\mu} d_2x^{\nu} = (\overline{d}_2 d_1 - \overline{d}_1 d_2)x^{\lambda}. \tag{9}$$

Naturalmente le (6) ci dànno subito anche la rotazione affine associata al ciclo. Conviene rappresentare questa rotazione affine mediante le formule dell'omografia vettoriale che essa subordina sul corpo dei vettori di Σ: formule che possono anche ricavarsi direttamente dalle (1) per integrazione lungo il ciclo:

$$\rho D\xi^{\lambda} = R_{\omega\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda} d_1x^{\omega} d_2x^{\mu}\xi^{\nu} = (\overline{d}_2\overline{d}_1 - \overline{d}_1\overline{d}_2)\xi^{\lambda}; \tag{10}$$

ove le $D\xi^{\lambda}$ sono gli incrementi delle componenti di un vettore ξ^{λ} pel trasporto ciclico per equipollenza (relativo ad A_n) lungo il ciclo supposto. Le (9), (10) esprimono in modo preciso l'accennata relazione fra i tensori di torsione e di curvatura, e la non-integrabilità dei sistemi differenziali (1), (5): e dànno una interpretazione geometrica dei due tensori in relazione con un ciclo infinitesimo qualunque. Se abbiamo riguardo all'eguaglianza tra i secondi e i terzi membri, le (9), (10) dànno anche un'altra interpretazione dei due tensori in relazione con un parallelogrammo infinitesimo: che però è sostanzialmente un caso particolare della precedente ([17]).

Ricorderò ancora che se $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\,\lambda}=0$ la connessione affine si dice *simmetrica*

([17]) Pel tensore di torsione ved. SCHOUTEN, **22**, **1924**, p. 68. Pel tensore di curvatura ved. LEVI-CIVITA, **30**, 1925, p. 201.

(o *senza torsione*); se

$$S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = \delta^{\lambda}_{[\mu}\varphi_{\nu]} = \frac{1}{2}(\delta^{\lambda}_{\mu}\varphi_{\nu} - \delta^{\lambda}_{\nu}\varphi_{\mu}) \quad (11)$$ [18]

ove φ_ν è un arbitrario vettore covariante, *emisimmetrica*: se $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ è qualunque, *asimmetrica*. Le varietà a connessione simmetrica sono caratterizzate, come mostrano le (9), dalla « *condizione di commutabilità* » [19]. Per tali varietà sussiste pure — ciò è ovvia conseguenza della commutabilità — il noto teorema di SEVERI [20], sotto la forma seguente: *pel trasporto parallelo infinitesimale la direzione trasportata resta tangente alla superficie geodetica iniziale.* Ma tale proprietà *non è caratteristica delle varietà a connessione simmetrica, bensì di quelle a connessione emisimmetrica,* come mostreremo più innanzi (n.° 6). Intenderemo d'ora in poi (salvo avviso contrario) di riferirci al caso più generale, delle connessioni affini asimmetriche.

3. Connessioni coniugate, connessione simmetrica associata. Interpretazioni geometriche di alcuni tensori. — In una varietà a connessione affine ∇

---

[18] Qui e nel seguito è da intendersi che $\delta^{\lambda}_{\mu} = 0$ per $\lambda \neq \mu$, $\delta^{\lambda}_{\lambda} = 1$ (non somm.). Adotto per questo tensore la notazione δ^{λ}_{μ} che è quasi generalmente seguita (LEVI-CIVITA, EINSTEIN, WEYL, EISENHART, VEBLEN ..). Ricorderò che questo tensore (che gli Americani chiamano: *Kronecker's delta*) è indicato con A^{λ}_{μ} da SCHOUTEN (*Einheitsaffinor*). Nei miei precedenti lavori l'avevo indicato con a^{λ}_{μ}, in accordo con la notazione $a_{\lambda\mu}$ usata (da me e da quasi tutti in Italia, seguendo il BIANCHI) pel tensore fondamentale della metrica in V_n riemanniana: le δ^{λ}_{μ} sono le componenti miste di detto tensore.

Il simbolo [ ], che ho usato nelle (11), (7), e di cui farò uso anche nel seguito, rappresenta l'operazione dell'*alternare* rispetto al gruppo d'indici racchiuso da quelle parentesi: e ( ), usato più innanzi (ad es. nella form. (21)) rappresenta l'operazione del *mischiare* rispetto agli indici che le parentesi contengono. (Ved. SCHOUTEN, **22**, 1924, p. 25). Rammenterò che il *mischiare* [l'*alternare*] rispetto a un gruppo d'indici $\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_m$ (tutti di covarianza o di controvarianza) di un dato tensore è l'operazione che consiste nel ricavare dal tensore supposto un nuovo tensore la cui componente generica è la media aritmetica di tutte le componenti del dato tensore in cui gli indici supposti hanno i medesimi valori numerici a meno dell'ordine: ciascuna presa col suo segno [col suo segno o col segno cambiato secondo che la permutazione che vi presentano gli indici di quel gruppo ha classe eguale od opposta a quella della permutazione degli indici medesimi nella componente (del nuovo tensore) che vogliamo costruire]. Ad es. $a_{(\lambda\mu)} = \frac{1}{2}(a_{\lambda\mu} + a_{\mu\lambda})$; $a_{[\lambda\mu]} = \frac{1}{2}(a_{\lambda\mu} - a_{\mu\lambda})$; $A_{[\lambda\mu}B_{\nu]} = \frac{1}{3!}(A_{\lambda\mu}B_\nu + A_{\mu\nu}B_\lambda + A_{\nu\lambda}B_\mu - A_{\mu\lambda}B_\nu - A_{\nu\mu}B_\lambda - A_{\lambda\nu}B_\mu)$.

[19] WEYL, **7**, 1918, p. 390; LEVI-CIVITA, **30**, 1925, pp. 133-135.

[20] SEVERI, **6**, 1917 pp. 254-256; ved. anche BOMPIANI, **10**, 1921, pp. 363-365; LEVI-CIVITA, **30**, 1925, pp. 194-195.

assegnata ([21]) possiamo considerare altre due connessioni affini ∇^* e $\nabla^{(b)}$ intrinsecamente legate alla primitiva. Anzitutto: siano P_1, Q due qualunque punti infinitamente vicini al punto P in A_n. *Diremo che i vettori infinitesimi* $\overrightarrow{PP_1}$, $\overrightarrow{QQ_1}$ *sono equipollenti lungo* PQ *per la connessione* ∇^* ((∇^*)-equipollenti) *se* $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{P_1Q_1}$ *sono equipollenti lungo* PP_1 *per la connessione* ∇ ((∇)-equipollenti) ([22]). È evidente a priori, per la *linearità* del trasporto, che questa condizione basta a definire la connessione ∇^*; del resto le (9) mostrano, tenuto conto che è per definizione (posto $\overrightarrow{PP_1} = d_1P$, $\overrightarrow{PQ} = d_2P$)

$$(\overline{d}_1 d_2 - \overline{d}_2^* d_1)x^\lambda = 0, \qquad (\overline{d}^* = dx^\lambda \nabla_\lambda^*) \tag{12}$$

che detti $\Gamma^{*\lambda}_{\mu\nu}$ i parametri di tale connessione, si ha

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^{*\lambda}_{\mu\nu} = 2S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}, \tag{13}$$

onde

$$\Gamma^{*\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}, \quad S^{*\cdot\cdot\lambda}_{\mu\nu} = -S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}. \tag{14}$$

Di qui e anche dalla stessa definizione segue che la relazione fra le connessioni ∇, ∇^* è *reciproca*: diremo che esse sono *coniugate* l'una all'altra. Esse coincidono se ∇ è simmetrica, e allora soltanto; esse hanno in ogni caso le stesse linee geodetiche (autoparallele).

Mediante la considerazione della connessione coniugata, ∇^*, a una data ∇ si ha la seguente interpretazione geometrica dei *tensore di torsione*: siano P, P_1 due punti infinitamente vicini in A_n; Σ e Σ_1 siano gli spazi affini ivi tangenti ad A_n. Siano α, α^* le affinità (omografie vettoriali) che trasformano i vettori di Σ in quelli di Σ_1 secondo le leggi di trasporto per equipollenza corrispondenti alle connessioni ∇ e ∇^*, e quindi $\beta = \alpha^*\alpha^{-1}$ la trasformazione affine in Σ, nella quale si corrispondono due vettori equipollenti secondo ∇ e ∇^*, lungo PP_1, a uno stesso vettore di Σ_1. *Le* $\delta^\lambda_\mu + 2S_{\nu\mu}^{\cdot\cdot\lambda}dx^\nu$ *sono i coefficienti dell'affinità* β. E in particolare, posto

$$\Phi_\nu = S_{\nu\lambda}^{\cdot\cdot\lambda}, \tag{15}$$

vediamo che è

$$1 + 2\Phi_\nu dx^\nu \tag{16}$$

il *modulo* della stessa affinità β. Il vettore Φ_ν è stato preso in considerazione

([21]) Contrassegniamo la connessione affine col simbolo della corrispondente derivazione covariante.

([22]) Cfr. CARTAN, **42**, 1927, p. 52 e il mio lavoro **55**, 1929, p. 50 (caso degli *spazi di gruppo*).

recentemente da EINSTEIN ([23]) (con riferimento a una particolare connessione affine, anzi euclidea, *integrabile*) per la rappresentazione del potenziale elettromagnetico. Perciò lo chiamerò *vettore di Einstein* per la connessione ∇. Si ha dunque una interpretazione geometrica di questo vettore ([24]), e particolarmente, del suo *annullarsi*: le *connessioni affini per le quali il vettore di Einstein si annulla sono quelle per le quali le trasformazioni affini del corpo di vettori dello spazio affine tangente in un punto* P *per effetto dei trasporti per equipollenza da* P *a un punto infinitamente vicino* P′ *relativi alla supposta connessione e alla sua coniugata hanno lo stesso modulo* ([25]).

([23]) **52**, 1928, p. 225, form. (2).

([24]) Un'altro significato geometrico, pel caso particolare della connessione integrabile di WEITZENBÖCK-VITALI, utilizzata da EINSTEIN, ho indicato altrove: ved. **56**, 1929, p. 536. Cfr. anche LEVI-CIVITA, **57**, 1929, p. 141. Il CARTAN ha pure indicato (**20**, t. 42, 1925, pp. 33-34) una interpretazione del vettore Φ_ν, che è in relazione con le form. (9). Si noti che il *vettore di Einstein* Φ_ν coincide col « secondo tensore irriduttibile di torsione » che il CARTAN indica con $\mathcal{C}'$: mentre il « primo tensore irriduttibile di torsione », $\mathcal{C}$, può identificarsi col tensore $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ di cui sarà detto più innanzi (n.° 6).

([25]) Accennerò ancora ad altre interpretazioni pel tensore $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ e pel vettore Φ_ν. Una di queste, in relazione coi *vettori fondamentali* di un sistema coordinato (arbitrario) risulta ovviamente dalla formula

(a) $$S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}\underset{\omega}{e}^{\mu}\underset{\tau}{e}^{\nu}=\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{d}\underset{\omega}{e}^{\lambda}}{ds_\tau}-\frac{\bar{d}\underset{\tau}{e}^{\lambda}}{ds_\omega}\right). \qquad \left(\frac{\bar{d}}{ds_\tau}=\underset{\tau}{e}^{\mu}\nabla_\mu\right)$$

Più in generale, siano $\underset{i}{X}^\lambda (i, j, l=1, 2, ..., n)$ n campi di vettori controvarianti indipendenti qualunque, sotto la sola condizione che gli n campi di vettori covarianti $\overset{i}{X}_\lambda (i=1, 2, ..., n)$ che essi determinano univocamente mediante le condizioni $\overset{i}{X}_\lambda \underset{i}{X}^\mu=\delta_\lambda^\mu$ siano *n campi di gradienti*: $\overset{i}{X}_\lambda=\frac{\partial \overset{i}{\varphi}}{\partial x^\lambda}$. Si ha

(b) $$S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}\underset{i}{X}^{\mu}\underset{j}{X}^{\nu}=\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{d}\underset{i}{X}^{\lambda}}{ds_j}-\frac{\bar{d}\underset{j}{X}^{\lambda}}{ds_i}\right). \qquad \left(\frac{\bar{d}}{ds_i}=\underset{i}{X}^{\lambda}\nabla_\lambda\right)$$

Dalle (b) si ha anche

(c) $$\Phi_\lambda\underset{i}{X}^{\lambda}=\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{d}\underset{i}{X}^{\lambda}}{ds_j}-\frac{\bar{d}\underset{j}{X}^{\lambda}}{ds_i}\right)\overset{j}{X}_\lambda$$

onde risulta un nuovo significato del vettore Φ_ν. Si noti infine che la componente generica Φ_ν di tale vettore è anche la differenza fra gli *invarianti primi* Γ_ν e Γ_ν^* [ved. (17)] delle omografie vettoriali che mutano gli *n vettori fondamentali* $\underset{1}{e}, \underset{2}{e}, ..., \underset{n}{e}$ rispettivamente in $\frac{\bar{d}\underset{1}{e}}{ds_\nu}, \frac{\bar{d}\underset{2}{e}}{ds_\nu}, ..., \frac{\bar{d}\underset{n}{e}}{ds_\nu}$ e in $\frac{\bar{d}\underset{\nu}{e}}{ds_1}, \frac{\bar{d}\underset{\nu}{e}}{ds_2}, ..., \frac{\bar{d}\underset{\nu}{e}}{ds_n}$. $\left(\frac{\bar{d}}{ds_\tau}=\underset{\tau}{e}^{\mu}\nabla_\mu\right)$.

Naturalmente il modulo di β è anche il rapporto tra i moduli di α^* e di α, ma è opportuno notare che, mentre il primo è *invariante*, non lo sono gli altri due, dati da

$$(17)\qquad 1+\Gamma^*_\nu dx^\nu = 1+\Gamma^\lambda_{\nu\lambda}dx^\nu,\quad 1+\Gamma_\nu dx^\nu = 1+\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}dx^\nu.$$

In effetto Γ_ν (e così Γ^*_ν) *non è un vettore covariante*: per una trasformazione (3) esso si trasforma secondo la legge

$$(18)\qquad \Gamma'_\alpha = \Gamma_\lambda \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} + \frac{\partial \theta}{\partial x'^\alpha}$$

ove

$$(19)\qquad \theta = \log \Delta = \log \left| \frac{\partial(x^1, x^2, \ldots, x^n)}{\partial(x'^1, x'^2, \ldots, x'^n)} \right|.$$

Si noti che le (18) esprimono che Γ_ν, per una trasformazione (3) sulle x^ν, varia come $\frac{\partial \log f}{\partial x^\nu}$, ove f è un arbitrario scalare *invariante relativo, di peso* 1 ([26]).

Definiamo poi una *connessione simmetrica*, che diremo *associata* a ∇, e che indicheremo con $\nabla^{(b)}$, nel seguente modo: siano ξ_1, ξ^*_1 i vettori (∇)- e (∇^*)-equipollenti, in P_1, al vettore (controvariante) ξ uscente da P, pel trasporto infinitesimale da P in P_1: assumeremo il vettore

$$(20)\qquad \xi^{(b)} = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi^*_1)$$

(di cui risulta ovvia la costruzione geometrica) come equipollente a ξ pel trasporto lungo PP_1 relativo alla nuova connessione ([27]). Si ha subito per questa

$$(21)\qquad B^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^{(b)\lambda}{}_{\nu\mu} = \Gamma^{(b)\lambda}{}_{\nu\mu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = \Gamma^{*\lambda}_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = \Gamma^\lambda_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\nu\mu}),$$

$$(22)\qquad S^{(b)\cdot\cdot\lambda}_{\mu\nu} = 0.$$

Dunque si tratta in effetto di una connessione *simmetrica*: che ha ancora le stesse geodetiche della connessione primitiva. La derivazione covariante $\nabla^{(b)}$, di parametri $B^\lambda_{\mu\nu}$, che le corrisponde è già stata usata da J. M. THOMAS (**36**, 1926, p. 661), da EISENHART (**48**, 1927, p. 11 e seg.) e da altri in ricerche sulle connessioni affini generali. L'interesse di questa connessione $\nabla^{(b)}$ sta

([26]) Sul significato geometrico di Γ_ν si veda: VEBLEN e J. M. THOMAS, **37**, 1926, pp. 294-295. Ved. anche il n.° 7 di questo lavoro.

([27]) Cfr. CARTAN, **42**, 1927, p. 59 (pel caso degli *spazi di gruppo*).

specialmente nel fatto che *gli invarianti differenziali della connessione affine* (asimmetrica) ∇ *sono tutti e soli gli invarianti differenziali simultanei della connessione simmetrica associata* $\nabla^{(b)}$ *e del tensore di torsione* $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ [28]. Cosicchè la teoria degli invarianti delle connessioni asimmetriche si può ricondurre a quella delle connessioni simmetriche. Ma è altrettanto semplice, come mostrerò più innanzi (n.° 5), costruire direttamente la teoria relativa al caso generale.

In particolare il *tensore di curvatura* $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ della connessione ∇ si esprime per quello, $R^{(b)\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\nu} = B_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ della connessione $\nabla^{(b)}$ e pel tensore di torsione $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ con la formula [29]

$$R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = B_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + S_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}, \tag{23}$$

ove

$$\begin{aligned} S_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} &= \nabla^{(b)}_\mu S_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\nu} - \nabla^{(b)}_\omega S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} + S_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\varkappa} S_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\nu} - S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} S_{\varkappa\omega}^{\cdot\cdot\nu} \\ &= \nabla_\mu S_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\nu} - \nabla_\omega S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} - S_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\varkappa} S_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\nu} + S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} S_{\varkappa\omega}^{\cdot\cdot\nu} - 2 S_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} S_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\nu}. \end{aligned} \tag{24}$$

Analogamente, detto $R^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$ il tensore di curvatura della connessione coniugata, ∇^*,

$$R^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Gamma^\nu_{\omega\lambda} - \frac{\partial}{\partial x^\omega}\Gamma^\nu_{\mu\lambda} + \Gamma^\varkappa_{\omega\lambda}\Gamma^\nu_{\mu\varkappa} - \Gamma^\varkappa_{\mu\lambda}\Gamma^\nu_{\omega\varkappa}, \tag{25}$$

si ha:

$$\begin{aligned} R^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} &= R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - 2(\nabla^{(b)}_\mu S_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\nu} - \nabla^{(b)}_\omega S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}) = \\ &= B_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - S_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - 2(S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} S_{\varkappa\omega}^{\cdot\cdot\nu} - S_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\varkappa} S_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\nu}) \end{aligned} \tag{26}$$

onde

$$\frac{1}{2}(R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - R^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}) = \nabla^{(b)}_\mu S_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\nu} - \nabla^{(b)}_\omega S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}. \tag{27}$$

Da questa segue in particolare che: *condizione necessaria e sufficiente perchè le due connessioni coniugate* ∇, ∇^* *abbiano lo stesso tensore di curvatura è che il trasporto per* ($\nabla^{(b)}$)*-equipollenza conservi la torsione*, cioè, che detti ξ, η due qualunque vettori che variano lungo una curva per ($\nabla^{(b)}$)-equipollenza, lo stesso accada del vettore $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}\xi^\lambda\eta^\mu$: o infine, che sia

$$\nabla^{(b)}_\mu S_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\nu} = 0. \tag{28}$$

Infatti: se è

$$R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = R^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}, \tag{29}$$

---

[28] Ved. ad es. VEBLEN, **47**, 1927, p. 36.

[29] Ved. J. M. THOMAS, **36**, 1926, p. 661; EISENHART, **48**, 1927, p. 8.

ne segue, per le (27),

$$\nabla^{(b)}_{\mu} S_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\nu} = \nabla^{(b)}_{\omega} S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = - \nabla^{(b)}_{\omega} S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = - \nabla^{(b)}_{\lambda} S_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\nu} = \nabla^{(b)}_{\lambda} S_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \nabla^{(b)}_{\mu} S_{\omega\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = - \nabla^{(b)}_{\mu} S_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\nu},$$

onde si hanno le (28). L'inversa è evidente.

Dalle (23), (26) abbiamo le espressioni di $B_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $S_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ per $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $R^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$ ed $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$:

$$B_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \frac{1}{2}(R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + R^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}) + S_{\omega\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} S_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\nu} - S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} S_{\varkappa\omega}^{\cdot\cdot\nu} \tag{30}$$

$$S_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \frac{1}{2}(R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - R^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}) + S_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\varkappa} S_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\nu} - S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} S_{\varkappa\omega}^{\cdot\cdot\nu}. \tag{31}$$

Anche $\nabla_{\lambda} S_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\nu}$ e $\nabla^{(b)}_{\lambda} S_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\nu}$ si esprimono agevolmente per $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ ed $S_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$: e quindi anche, per $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$, $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $R^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$:

$$\nabla_{\lambda} S_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\nu} = S_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - \frac{3}{2} S_{[\omega\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} S_{\varkappa\omega}^{\cdot\cdot\nu} - S_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\varkappa} S_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\nu} \tag{32}$$

$$\nabla^{(b)}_{\lambda} S_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\nu} = S_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - \frac{3}{2} S_{[\omega\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + S_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} S_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\nu}. \tag{33}$$

L'annullarsi del tensore $S_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ è, per le (23), *condizione necessaria e sufficiente perchè il trasporto ciclico di un vettore* (lungo un ciclo infinitesimo) *per* (∇)-*equipollenza e per* ($\nabla^{(b)}$)-*equipollenza, dia sempre luogo allo stesso vettore.* Pel tensore $S_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ vale una formula analoga alla (9), che non mi pare sia stata finora notata:

$$\begin{aligned} &\{ \bar{d}_1(\bar{d}_2 d_3 - \bar{d}_3 d_2) + \bar{d}_2(\bar{d}_3 d_1 - \bar{d}_1 d_3) + \bar{d}_3(\bar{d}_1 d_2 - \bar{d}_2 d_1) \} x^{\nu} = \\ &= - 3 S_{[\omega\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\cdot\nu} d_1 x^{\omega} d_2 x^{\mu} d_3 x^{\lambda} = - (S_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + S_{\mu\lambda\omega}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + S_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}) d_1 x^{\omega} d_2 x^{\mu} d_3 x^{\lambda}. \end{aligned} \tag{34}$$

Ecco l'interpretazione geometrica: sia σ una superficie chiusa infinitamente piccola tracciata pel punto P in A_n su di una V_3 tangente in P alla 3-direzione $(d_1 P,\ d_2 P,\ d_3 P)$; sia τ il rapporto tra il volume da essa racchiuso e quello del parallelepipedo infinitesimo costruito (nello spazio affine tangente in P) su $d_1 P$, $d_2 P$, $d_3 P$: *il primo* [*e quindi anche il secondo*] *membro della* (34), *moltiplicato per* τ, *dà la somma geometrica dei vettori delle traslazioni associate (n.° prec.) agli elementi di* σ: vettori che s'intendono riportati, secondo la legge della (∇)-equipollenza, nello spazio affine tangente in P [30].

---

[30] Si confronti con l'interpretazione che CARTAN dà delle formule

$$R_{[\omega\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 4 S_{[\omega\mu}^{\cdot\cdot\tau} S_{\lambda]\tau}^{\cdot\cdot\nu} + 2\nabla_{[\omega} S_{\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\nu} = S_{[\omega\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\cdot\nu}, \tag{d}$$

$$\nabla_{[\tau} R_{\omega\mu]\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = - 2 S_{[\omega\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} R_{\tau]\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} \tag{e}$$

4. Il problema dell'equivalenza per le connessioni affini asimmetriche. — Il teorema che ho rammentato (n.° prec.), relativo agli invarianti differenziali di una connessione asimmetrica, non risolve il *problema dell'equivalenza* per tali connessioni ([31]). Cioè, il problema di stabilire, date due serie di n^3 funzioni $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x^1, x^2, ..., x^n)$ e $\Gamma'^{\alpha}_{\beta\gamma}(x'^1, x'^2, ..., x'^n)$, se esse possono considerarsi come le componenti di *una stessa* connessione affine, nei sistemi coordinati x^{ν}, x'^{α}: o ancora, se è possibile determinare delle formule di trasformazione (3) tali che, in corrispondenza, per le date funzioni $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, $\Gamma'^{\alpha}_{\beta\gamma}$ valgano le formule di trasformazione (4). Sotto altro punto di vista: stabilire sotto quali condizioni due date varietà a connessione affine siano rappresentabili *isomorficamente* ([32]) l'una sull'altra.

Si tratta, come nel caso classico dell'equivalenza tra forme quadratiche, di studiare le *condizioni d'integrabilità* delle (4). Poniamo

$$\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha}} = \theta^{\lambda}_{\alpha}, \tag{35}$$

e scriviamo le (4) nella forma seguente, indicati con $\overline{\nabla}$, $\overline{\nabla}^*$ i simboli delle derivazioni covarianti (secondo R. LAGRANGE ([33])), relative alle connessioni ∇ e ∇^*, pei tensori contenenti indici delle due serie $\lambda\mu\nu\tau\omega...$, $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon...$ (corrispondenti alle due serie di variabili x^{ν}, x'^{α}):

$$\overline{\nabla}_{\alpha}\theta^{\lambda}_{\gamma} = 0, \quad \overline{\nabla}^*_{\alpha}\theta^{\lambda}_{\gamma} = 0. \tag{36}$$

Siamo così ricondotti a studiare il sistema (35), (36) nelle $n + n^2$ funzioni incognite x^{λ}, $\theta^{\lambda}_{\alpha}$ delle x'^{α}. Le condizioni d'integrabilità delle (35), in forza

---

(SCHOUTEN, **22**, 1924, p. 88, form. (138) e p. 91, form. (163 d). Ved. CARTAN, **20**, t. 40, 1923, p. 373, form. (7), e p. 375 (« Théorème de la conservation de la courbure et de la torsion »). Ved. anche LAGRANGE, **31**, 1926, p. 22 form. (37) e pp. 26-27.

([31]) Cfr. CHRISTOFFEL, 2, 1869; VERMEIL, **8**, 1919, pp. 309-312; VEBLEN, **47**, 1927, pp. 76-80 per gli spazi riemanniani; VEBLEN, l. c. ed EISENHART, **48**, 1927, pp. 74-77 per le connessioni affini simmetriche. Nel libro di EISENHART si trova anche (a pag. 78) un cenno di trattazione del caso delle connessioni asimmetriche, ma la mia trattazione mi sembra più soddisfacente.

([32]) Secondo CARTAN (**42**, 1927, p. 52) chiamo *isomorfica* una trasformazione che conservi inalterata la legge di *trasporto per equipollenza* dei vettori e tensori.

([33]) Rammenterò che si ha, ad es.:

$$\nabla_{\alpha}A_{\lambda\gamma}^{\cdot\cdot\beta} = \frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}}A_{\lambda\gamma}^{\cdot\cdot\beta} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\tau}A_{\nu\gamma}^{\cdot\cdot\beta}\theta^{\tau}_{\alpha} - \Gamma'^{\delta}_{\gamma\alpha}A_{\lambda\delta}^{\cdot\cdot\beta} + \Gamma'^{\beta}_{\delta\alpha}A_{\lambda\gamma}^{\cdot\cdot\delta}.$$

Ved. **31**, 1926, p. 10 e la mia Nota **44**, 1927, pp. 134-135.

delle (36) e delle (7), si scrivono

F_0) (37) $$S'^{\cdot\cdot\delta}_{\gamma\alpha}\theta^\nu_\delta = S^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\omega}\theta^\lambda_\gamma\theta^\omega_\alpha .$$

Le condizioni d'integrabilità delle (36) sono:

F_1) (38) $$R'^{\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma}\theta^\nu_\delta = R^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}\theta^\omega_\alpha\theta^\mu_\beta\theta^\lambda_\gamma ,$$

(38*) $$R^{*'\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma}\theta^\nu_\delta = R^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}\theta^\omega_\alpha\theta^\mu_\beta\theta^\lambda_\gamma .$$

Da queste per derivazione covariaute, in forza delle (36), si ha:

F_2) (39) $$\overline{\nabla}_\varepsilon R'^{\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma}\theta^\nu_\delta = \overline{\nabla}_\tau R^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}\theta^\omega_\alpha\theta^\mu_\beta\theta^\lambda_\gamma\theta^\tau_\varepsilon ,$$

(39*) $$\overline{\nabla}_\varepsilon R^{*'\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma}\theta^\nu_\delta = \overline{\nabla}_\tau R^{*'\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}\theta^\omega_\alpha\theta^\mu_\beta\theta^\lambda_\gamma\theta^\tau_\varepsilon .$$

Siano dette F_0 le equazioni (37); F_1 le (38), (38*); F_2 le (39), (39*): proseguendo nella derivazione otterremo analogamente delle nuove serie d'equazioni F_3, F_4,..., F_m,... Non occorre ripetere gli stessi sviluppi per le (37): le conseguenze differenziali di queste rientrano, ovviamente, nelle serie di equazioni F_1, F_2,... già costruite. La condizione per l'equivalenza delle due connessioni $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, $\Gamma'^\alpha_{\beta\gamma}$ è dunque [34] *che esista un intero* N *tale che le* F_0, F_1 F_2,..., F_N, *considerate come equazioni nelle* $\theta^\lambda_\alpha = \dfrac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha}$, *siano algebricamente compatibili, e le loro soluzioni soddisfino alle* F_{N+1} [35].

Sono notevoli questi due casi particolari, in cui è certamente $N=0$: cioè le equazioni per la determinazione delle θ^ν_α si riducono alle sole (37):

1) quando è

(40) $$R^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = 0, \quad R^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = 0,$$

e analoga condizione è soddisfatta da $R'^{\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma}$, $R^{*'\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma}$. Le (40) caratterizzano gli *spazi di gruppo* secondo CARTAN e SCHOUTEN [36]. Dunque:

Una rappresentazione puntuale tra due spazi di gruppo è una isomorfia allora e solo che essa conserva la torsione, cioè è tale che, corrispondendosi le coppie di vettori ξ^λ, ξ'^α; η^λ, η'^α applicati a due punti omologhi qualunque, anche i vettori $S^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}\xi^\lambda\eta^\mu$, $S'^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta}\xi'^\alpha\eta'^\beta$ si corrispondono.

---

(34) Cfr. VEBLEN, EISENHART, l. c. (31).

(35) Ciò consegue da un noto teorema sui sistemi ai differenziali totali. Ved. VEBLEN e J. M. THOMAS, **37**, 1926, pp. 288-291; oppure VEBLEN, **47**, 1927, pp. 73-76; EISENHART, **48**, 1927, pp. 14-18.

(36) Ved. sugli spazi di gruppo, CARTAN e SCHOUTEN, **39** e **40**, 1926; CARTAN, **42**, 1927; SCHOUTEN, **41**, 1926; **49**, 1928; **60**, 1929. Circa la proprietà caratteristica espressa dalle (40), cfr. CARTAN, **42**, 1927, pp. 30, 38, 52-53.

Questa proposizione corrisponde al noto teorema della teoria dei gruppi di trasformazioni: *Due gruppi di Lie ad* n *parametri sono isomorfi allora e solo che, con opportuna scelta delle trasformazioni infinitesime generatrici, è possibile rendere uguali le loro costanti di struttura.*

2) quando è

$$R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = R^{*}{}_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = S_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\varkappa} S_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\nu} - S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} S_{\varkappa\omega}^{\cdot\cdot\nu} \tag{41}$$

e analoghe condizioni sono soddisfatte da $R'{}_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta}$, $R^{*\prime}{}_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta}$. Le (41) caratterizzano gli *spazi a connessione affine omogenea*, o a secondo tensore normale nullo, di cui avremo occasione di parlare al n.° seg. Anche per questi spazi vale dunque una proposizione analoga a quella poco sopra enunciata per gli spazi di gruppo: è inutile starla a ripetere. Va notato come gli *spazi di gruppo* e gli *spazi a connessione affine omogenea* sembrino in qualche modo, nell'attuale teoria,. prendere il ruolo che gli spazi euclidei e gli spazi a curvatura costante occupano nella geometria riemanniana.

5. **Coordinate normali in una varietà a connessione affine asimmetrica. Tensori normali, spazi a connessione affine omogenea; estensioni di un tensore. Applicazione alla teoria degli invarianti differenziali.** — La nozione di *coordinate normali,* data dal RIEMANN per gli spazi riemanniani ([37]) è stata estesa dal VEBLEN alle varietà a connessione affine *simmetrica* ([38]). È facile estenderla anche alle varietà a connessione asimmetrica: in sostanza *assumendo come coordinate normali in un punto quelle che sono tali per la connessione simmetrica associata* (n.° 3). Però è possibile ed assai più conveniente, mi sembra, darne una costruzione diretta. Rammentiamo anzitutto che, secondo la definizione di VEBLEN ([39]) — applicabile anche al nostro caso —, un sistema coordinato y^λ è *normale* in un punto P_0 di A_n se le soluzioni del sistema differenziale

$$\frac{d^2x^\nu}{dt^2} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} \frac{dx^\lambda}{dt} \frac{dx^\mu}{dt} = 0 \tag{42}$$

che rappresentano le geodetiche uscenti dal punto P_0 supposto $(y^\lambda = 0,\ x^\lambda = x_0^\lambda)$

([37]) RIEMANN, **1**, 1854; ediz. 1923, pp. 10-11. Sulle coordinate normali di RIEMANN in relazione con gli invarianti differenziali e il tensore di curvatura, ved. anche VERMEIL, **8**, 1919; HERGLOTZ, **21**, 1924.

([38]) VEBLEN, **13**, 1922. Ved. anche VEBLEN e T. Y. THOMAS, **18**, 1923, pp. 562-566.

([39]) VEBLEN, **13**, 1922, p. 193; **47**, 1927, p. 85.

acquistano in tale sistema la forma lineare

$$y^\lambda = \xi^\lambda \cdot t. \tag{43}$$

Ciò premesso: le equazioni (42) delle geodetiche dànno luogo, per successive derivazioni e sostituzioni, alle seguenti:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^3x^\nu}{dt^3} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu\tau}\dfrac{dx^\lambda}{dt}\dfrac{dx^\mu}{dt}\dfrac{dx^\tau}{dt} = 0, \\ \dfrac{d^4x^\nu}{dt^4} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu\tau\omega}\dfrac{dx^\lambda}{dt}\dfrac{dx^\mu}{dt}\dfrac{dx^\tau}{dt}\dfrac{dx^\omega}{dl} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^mx^\nu}{dt^m} + \Gamma^\nu_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_m}\dfrac{dx^{\lambda_1}}{dt}\dfrac{dx^{\lambda_2}}{dt}\dots\dfrac{dx^{\lambda_m}}{dt} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \tag{44}$$

ove le $\Gamma^\nu_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_m}$ $(m = 3, 4, \dots)$ si possono calcolare con le formule ricorrenti:

$$\Gamma^\nu_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_{q+1}} = \frac{\partial\Gamma^\nu_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_q}}{\partial x^{\lambda_{q+1}}} - \sum_1^q{}_h\Gamma^\nu_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_{h-1}\mu\lambda_{h+1}\dots\lambda_q}\Gamma^\mu_{\lambda_h\lambda_{q+1}} \text{ [40]}. \quad (q = 2, 3, \dots) \tag{45}$$

Gli effettivi coefficienti delle forme quadratiche, cubiche,... nelle $\dfrac{dx^\lambda}{dt}$ che figurano nelle (42), (44), non sono però le $\Gamma^\nu_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_q}$ $(q \geq 2)$, ma le $\Gamma^\nu_{(\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_q)}$, che se ne ottengono *mischiando* (ved. ([18])) rispetto a tutti gli indici inferiori. (È manifestamente lecito sostituire senz'altro nelle (42), (44) alle $\Gamma^\nu_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_q}$ $(q \geq 2)$ le $\Gamma^\nu_{(\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_q)}$, simmetriche rispetto agli indici inferiori).

Se le $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ si suppongono *analitiche* nei loro argomenti $x^1x^2\dots x^n$, ricaviamo subito ([41]) da quanto precede le effettive formule di passaggio dalle x^ν alle coordinate normali y^ν:

$$\begin{gathered} x^\nu - x^\nu_0 = y^\nu - \frac{1}{2}(\Gamma^\nu_{(\lambda\mu)})_0\, y^\lambda y^\mu - \\ - \frac{1}{3!}(\Gamma^\nu_{(\lambda\mu\tau)})_0\, y^\lambda y^\mu y^\tau - \dots - \frac{1}{m!}(\Gamma^\nu_{(\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_m)})_0\, y^{\lambda_1}y^{\lambda_2}\cdots y^{\lambda_m} - \dots \end{gathered} \tag{46}$$

([40]) Cfr. VEBLEN e T. Y. THOMAS, **18**, 1923, p. 561, form. (6.5). Si noti che le (45) esprimono in sostanza che $\Gamma^\nu_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_{q+1}}$ è ottenuto da $\Gamma^\nu_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_q}$ applicando a questo sistema, considerato formalmente come un tensore a q indici di covarianza (senza prendere in considerazione l'indice superiore) l'operazione di derivazione covariante $\nabla_{\lambda_{q+1}}$.

([41]) Cfr. ad es. VEBLEN, **47**, 1927, pp. 84-85.

ove l'indice $_0$ designa i valori calcolati nel punto P_0. Possiamo — senza più supporre l'*analiticità* delle $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ — sostituire ai termini di grado $> m$ $(m \geq 2)$ rispetto alle y^{λ} nei secondi membri delle funzioni delle y^{ν} che in P_0 si annullino con le loro derivate prime, seconde,..., m^{me} rispetto alle y^{ν}, e del resto arbitrarie: allora abbiamo le *coordinate normali d'ordine m.* Le coordinate normali di secondo ordine sono le coordinate *geodetiche* in P_0 ([42]). Queste sono *caratterizzate* dal fatto che, assunto un tale sistema di riferimento, i parametri $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ nel punto P_0 supposto *vanno a coincidere con le componenti del tensore di torsione*: in altri termini, in P_0 si annullano le $B^{\nu}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\nu}_{(\lambda\mu)}$.

Tutte le interessanti applicazioni che delle coordinate normali hanno dato VEBLEN, EISENHART, T. Y. THOMAS,... pel caso simmetrico si estendono alle connessioni asimmetriche: anzitutto, la nozione dei *tensori normali.* In conseguenza del fatto che, *per una qualunque trasformazione sulle* x^{ν}, *le corrispondenti coordinate normali* (con l'origine in un punto P_0) *subiscono una trasformazione lineare a coefficienti costanti,* la stessa che si ha *in quel punto* per le componenti di un vettore controvariante, si ha subito che *i sistemi multipli aventi, in ciascun punto* P_0, *come componenti i valori (ivi calcolati) delle derivate*

$$(47) \qquad \frac{\partial^q \overset{N}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial y^{\tau_1} \partial y^{\tau_2} \cdots \partial y^{\tau_q}},$$

ove le y^{τ} sono coordinate normali con l'origine in P_0 e le $\overset{N}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$ sono i parametri della connessione affine in coordinate y^{τ}, *sono tensori*: precisamente, sono i *tensori normali* ([43]). Per avere la serie completa dei tensori normali, $C_{\mu\nu}{}^{\cdot\cdot\lambda}{}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_q}$, bisogna (a differenza di quanto accade per le connessioni simmetriche) includere anche il caso $q = 0$, che ci dà il tensore avente in P_0 per componenti le $\left(\overset{N}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu}\right)_0$: esso è il *tensore di torsione* $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$, che diremo quindi anche *primo tensore normale* (o tensore normale di primo ordine): come tale lo indicheremo qualche volta con $C_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$:

$$(48) \qquad C_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}.$$

Il *secondo tensore normale* (o tensore normale del secondo ordine), $C_{\mu\nu}{}^{\cdot\cdot\lambda}{}_{\tau}$, ha

([42]) Se in particolare ai termini di grado > 2 rispetto alle y^{ν} nelle (46) si sostituisce *lo zero,* si hanno le « path coördinates » di EISENHART: ved. **17**, 1923, pp. 378-380.

([43]) Cfr. VEBLEN e T. Y. THOMAS, **18**, 1923, p. 566 e seg.; VEBLEN, **47**, 1927, p. 89 e seg.

in P_0 come componenti le quantità

$$\left(\frac{\partial \overset{N}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial y^{\tau}}\right) = (C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda})_0. \tag{49}$$

Valendoci delle (46) ([44]) e delle (4), e tenendo presenti le (7), (21), troviamo che tale tensore si esprime nel seguente modo in coordinate x^{ν} qualunque:

$$C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\tau}} - \Gamma^{\lambda}_{\omega\nu} B^{\omega}_{\mu\tau} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\omega} B^{\omega}_{\nu\tau} - \Gamma^{\lambda}_{(\mu\nu\tau)} + S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\omega} B^{\lambda}_{\omega\tau}. \tag{50}$$

Le (50) comprendono come caso particolare le note espressioni del primo tensore normale di una connessione simmetrica ([45]).

In modo analogo potremmo ottenere espressioni per le componenti dei tensori normali successivi. Tra le componenti di un tensore normale qualunque $C_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2\ldots\tau_q}^{\cdot\cdot\lambda}$ sussistono delle relazioni, e precisamente:

1) Si ha

$$C_{(\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2\ldots\tau_q)}^{\cdot\cdot\lambda} = 0. \qquad (q \geq 0) \tag{51}$$

2) $C_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2\ldots\tau_q}^{\cdot\cdot\lambda}$ $(q \geq 2)$ è simmetrico rispetto ai q indici $\tau_1\tau_2\ldots\tau_q$.

In particolare il secondo tensore normale $C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$ avrà $n^4 - n\binom{n+2}{3}$ componenti indipendenti: appunto quante ne hanno insieme $B_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ $\left(n^2\binom{n}{2} - n\binom{n}{3}\right.$, perchè $B_{(\omega\mu)\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0$, $\left.B_{[\omega\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0\right)$ e $\overset{(b)}{\nabla}_{\tau} S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ $\left(n^2\binom{n}{2}\right.$, perchè $\left.\overset{(b)}{\nabla}_{\tau} S_{(\mu\nu)}^{\cdot\cdot\lambda} = 0\right)$. È dunque prevedibile che $C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$ possa esprimersi per questi due tensori, e viceversa: infatti troviamo:

$$C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda} = \frac{1}{3}(B_{\nu\tau\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} + B_{\mu\tau\nu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}) + \overset{(b)}{\nabla}_{\tau} S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}, \tag{52}$$

onde

$$B_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \frac{1}{2}(C_{\lambda\omega\cdot\mu}^{\cdot\cdot\nu} + C_{\omega\lambda\cdot\mu}^{\cdot\cdot\nu} - C_{\lambda\mu\cdot\omega}^{\cdot\cdot\nu} - C_{\mu\lambda\cdot\omega}^{\cdot\cdot\nu}) \tag{53}$$

$$\overset{(b)}{\nabla}_{\tau} S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = \frac{1}{2}(C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda} - C_{\nu\mu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}). \tag{54}$$

([44]) ma è subito visto che l'esistenza di $C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$ non è affatto subordinata alla convergenza delle serie (46). Più in generale, per costruire l'm^{mo} tensore normale è lecito sostituire alle coordinate normali vere e proprie delle coordinate normali *d'ordine* $m+1$.

([45]) Ved. **18**, 1923, p. 568, form. (9.13).

Anche i tensori $S_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $R^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$ si potranno esprimere per $C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$, e questo per due di essi: ma in tali espressioni figura anche il tensore di torsione (primo tensore normale); ad es. abbiamo

$$(55)\quad C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda} = \frac{1}{6}\left[3R_{\nu\tau\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} + R_{\nu\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} + R_{\tau\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} + 2(R^{*\cdot\cdot\cdot\lambda}_{\mu\tau\nu} + R^{*\cdot\cdot\cdot\lambda}_{\mu\nu\tau}) + 2(2S_{\mu\tau}^{\cdot\cdot\varkappa}S_{\varkappa\nu}^{\cdot\cdot\lambda} - S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\varkappa}S_{\varkappa\tau}^{\cdot\cdot\lambda})\right],$$

$$(56)\quad R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = C_{\lambda\omega\cdot\mu}^{\cdot\cdot\nu} - C_{\lambda\mu\cdot\omega}^{\cdot\cdot\nu} + S_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\varkappa}S_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\nu} - S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}S_{\varkappa\omega}^{\cdot\cdot\nu}$$

$$(57)\quad R^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = C_{\omega\lambda\cdot\mu}^{\cdot\cdot\nu} - C_{\mu\lambda\cdot\omega}^{\cdot\cdot\nu} + S_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\varkappa}S_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\nu} - S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}S_{\varkappa\omega}^{\cdot\cdot\nu}.$$

Concludendo: come nel caso delle connessioni simmetriche — nel quale caso il tensore di curvatura, all'infuori del quale non vi sono altri invarianti differenziali del secondo ordine indipendenti, si esprime pel tensore normale $A_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$, corrispondente a $C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$, e viceversa ([46]) — così anche nel caso generale delle varietà a connessione affine asimmetrica è questo tensore $C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$ che riassume *tutte le proprietà differenziali del secondo ordine.*

Come $C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$ per $B_{\nu\tau\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}$ e $\nabla_\tau^{(b)} S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$, così più in generale l'$(m+1)^{mo}$ tensore normale $C_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2\ldots\tau_m}^{\cdot\cdot\lambda}$ si esprime in forma razionale intera per $B_{\nu\tau\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}$, $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$, le derivate covarianti di $B_{\nu\tau\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}$ (con la derivazione $\nabla^{(b)}$, o anche ∇) fino all'ordine $m-1$, di $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ fino all'ordine m. Su questo non ci fermeremo.

Ci tratterremo invece per un momento *sul significato geometrico di* $C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$, o almeno, *del suo annullarsi.* Si vede bene, per le (52), (53), (54) che le varietà per le quali

$$(58)\qquad C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda} = 0$$

possono anche caratterizzarsi mediante le condizioni

$$(59)\qquad B_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0, \quad \nabla_\tau^{(b)} S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = 0.$$

Queste esprimono anzitutto che la connessione simmetrica associata alla connessione ∇ supposta è *integrabile,* cioè, che lo spazio a connessione affine simmetrica associato alla supposta varietà *è un ordinario spazio affine.* In questo spazio sarà possibile assumere un sistema di riferimento *geodetico in tutti i punti,* cioè *cartesiano* (per la connessione $\nabla^{(b)}$), rispetto al quale le derivate $\nabla_\tau^{(b)}$ divengano le derivate parziali $\dfrac{\partial}{\partial u^\tau}$. In questo sistema coordinato le componenti del tensore di torsione diverranno *delle costanti numeriche*; lo stesso accadrà, essendo nelle attuali ipotesi

$$(60)\qquad R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = R^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = S_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = S_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\varkappa}S_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\nu} - S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}S_{\varkappa\omega}^{\cdot\cdot\nu}$$

([46]) Ved. ad es. VEBLEN, **47**, 1927, pp. 91-92.

e quindi

(61) $$\nabla_{\tau}^{(b)} R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0$$

pel tensore di curvatura. Se ξ, η, ζ sono vettori che si spostino lungo una curva per ($\nabla^{(b)}$)-equipollenza, lo stesso avviene dei vettori $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}\xi^{\lambda}\eta^{\mu}$, $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}\xi^{\omega}\eta^{\mu}\zeta^{\lambda}$. In termini più espressivi: *il trasporto per* ($\nabla^{(b)}$)-*equipollenza conserva la torsione e la curvatura* [47].

Ciascuno spazio pel quale valgono le (58) o (59), ammette poi, come risulta facilmente da quanto precede, *un gruppo* (in generale semplicemente transitivo) *ad* n *parametri di trasformazioni isomorfiche* (ved. [32]) *in sè*, che sono le ($\nabla^{(b)}$)-traslazioni (traslazioni in sè dello spazio affine associato). Tutti i punti dello spazio in parola sono dunque *equivalenti* rispetto alle isomorfie: mi sembra che ciò possa esprimersi dicendo che esso è *uno spazio a connessione affine omogenea*. Di questi spazi (che comprendono come caso particolare, per $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = 0$, lo *spazio affine*) sono proprietà caratteristiche le (58), le (59), e così pure le (60), o anche soltanto le (41) del n.° prec. Per le (59) abbiamo la seguente costruzione:

Si prenda uno spazio affine ad n dimensioni: in esso si prenda ad arbitro un tensore costante $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$, emisimmetrico rispetto a μ, ν. *Se assegniamo al supposto spazio una connessione affine asimmetrica, avente per tensore di torsione il tensore* $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ *ora detto, e per connessione simmetrica associata quella (integrabile) dello spazio affine, si fa di questo appunto uno spazio a connessione affine omogenea* (cioè, a secondo tensore normale nullo).

È particolarmente notevole il caso in cui le componenti del tensore assegnato, $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$, soddisfano alle relazioni (identità di JACOBI)

(62) $$S_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\varkappa}S_{\mu\varkappa}^{\cdot\cdot\nu} + S_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}S_{\lambda\varkappa}^{\cdot\cdot\nu} + S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}S_{\omega\varkappa}^{\cdot\cdot\nu} = 0, \qquad (\text{cioè } S_{[\lambda\omega}^{\cdot\cdot\varkappa}S_{\mu]\varkappa}^{\cdot\cdot\nu} = 0);$$

o in altri termini, tali componenti possono interpretarsi come le *costanti di struttura di un gruppo di Lie ad* n *parametri*. Questi particolari spazi a connessione affine omogenea, pei quali si ha anche

(63) $$\nabla_{\tau}S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = 0, \quad \nabla_{\tau}R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0,$$

forniscono una rappresentazione geometrica dei gruppi di LIE, diversa da quella che CARTAN e SCHOUTEN hanno indicato. Se il tensore $S_{\tau\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}S_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\tau}$ è *di rango n*, cioè il corrispondente gruppo è *semplice* o *semi-semplice* [48], lo

[47] relative, s'intende alla connessione ∇: non c'è ambiguità giacchè la connessione $\nabla^{(b)}$ è a torsione a curvatura nulle.

[48] Ved. CARTAN e SCHOUTEN, **39**, p. 810.

spazio è *a connessione euclidea*, ed ha per tensore fondamentale della metrica il tensore

(64) $$a_{\lambda\mu} = c \cdot S_{\tau\lambda}^{\cdot\cdot\,\varkappa} S_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\,\tau}. \qquad (c = \text{cost. arbitr.}).$$

Un caso assai particolare è, per $n = 3$, *lo spazio della polarizzazione rotatoria* del CARTAN [49]: spazio euclideo occupato da un mezzo omogeneo e isotropo, dotato di un potere rotatorio per la luce polarizzata: nel quale si assuma a legge di trasporto per parallelismo delle direzioni normali a una linea retta (il che basta per definire la connessione *euclidea*) la legge secondo cui varia la direzione della vibrazione luminosa quando quella linea retta sia seguita da un raggio di luce polarizzata rettilineamente.

Torniamo allo studio generale delle varietà a connessione affine.

Pel caso delle connessioni simmetriche VEBLEN e T. Y. THOMAS hanno introdotto anche un'altra nozione importante, che si collega assai da vicino a quella dei tensori normali: la nozione delle *estensioni*, dei vari ordini, di un tensore [50]. La definizione medesima di VEBLEN e T. Y. THOMAS può applicarsi senz'altro anche al caso delle connessioni asimmetriche, e dà luogo allora ad *estensioni* che coincidono con quelle relative alla connessione simmetrica associata. Indichiamo con D il simbolo di estensione: l'estensione m^{ma} $D_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_m} E_{\omega_1\ldots\omega_r}^{\cdot\cdot\,\varkappa_1\ldots\varkappa_s}$ di un qualunque tensore $E_{\omega_1\ldots\omega_r}^{\cdot\cdot\,\varkappa_1\ldots\varkappa_s}$ è un tensore (simmetrico rispetto a $\tau_1\tau_2\ldots\tau_m$) che in ciascun punto P_0 della A_n supposto ha per componenti i valori

(65) $$\left(\frac{\partial^m \overset{N}{E}{}_{\omega_1\ldots\omega_r}^{\cdot\cdot\,\varkappa_1\ldots\varkappa_s}}{\partial y^{\tau_1}\partial y^{\tau_2}\cdots\partial y^{\tau_m}} \right)_0,$$

ove le y^ν sono *coordinate normali* in A_n con l'origine in P_0: le $\overset{N}{E}{}_{\omega_1\ldots\omega_r}^{\cdot\cdot\,\varkappa_1\ldots\varkappa_s}$ sono le componenti del tensore assegnato nel sistema y^ν, e l'indice $_0$ significa che le derivate vanno calcolate nel punto P_0. Ad es. abbiamo

(66) $$D_\tau\varphi_\nu = \nabla_\tau\varphi_\nu + S_{\nu\tau}^{\cdot\cdot\,\lambda}\varphi_\lambda = \overset{(b)}{\nabla}_\tau\varphi_\nu,$$

(67) $$D_{\tau_1\tau_2}\varphi_\nu = \nabla_{\tau_2}\nabla_{\tau_1}\varphi_\nu + S_{\tau_1\tau_2}^{\cdot\cdot\,\mu}\nabla_\mu\varphi_\nu + S_{\nu\tau_2}^{\cdot\cdot\,\mu}\nabla_{\tau_1}\varphi_\mu + S_{\nu\tau_1}^{\cdot\cdot\,\mu}\nabla_{\tau_1}\varphi_\mu + \\ + (S_{\nu\tau_1}^{\cdot\cdot\,\mu}S_{\mu\tau_2}^{\cdot\cdot\,\lambda} + C_{\nu\tau_1\cdot\tau_2}^{\cdot\cdot\,\lambda})\varphi_\lambda.$$

E in generale, l'estensione m^{ma} $D_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_m} E_{\omega_1\ldots\omega_r}^{\cdot\cdot\,\varkappa_1\ldots\varkappa_s}$ di un tensore $E_{\omega_1\ldots\omega_r}^{\cdot\cdot\,\varkappa_1\ldots\varkappa_s}$ differisce dalla sua derivata covariante $\nabla_{\tau_m}\nabla_{\tau_{m-1}}\cdots\nabla_{\tau_2}\nabla_{\tau_1}E_{\omega_1\ldots\omega_r}^{\cdot\cdot\,\varkappa_1\ldots\varkappa_s}$ per un complesso

[49] Ved. CARTAN, **24**, 1924, pp. 303-305.

[50] VEBLEN e T. Y. THOMAS, **18**, 1923, pp. 571-574.

di termini additivi, combinazioni lineari del tensore stesso e delle sue derivate covarianti prima, seconda,..., $(m-1)^{ma}$, i cui coefficienti dipendono, in modo razionale intero, dai tensori normali dei primi m ordini ([51]). I tensori normali stessi possono considerarsi ottenuti applicando il processo dell'estensione (prima, seconda,..., m^{ma},...) al sistema $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$.

L'uso dei tensori normali permette, come nel caso delle connessioni simmetriche ([52]) di dare una forma particolarmente semplice ed elegante alla teoria degli *invarianti differenziali* di una connessione affine asimmetrica. (E analogamente, le *estensioni* trovano applicazione nella teoria dei *parametri differenziali*: ma su questo non potrei ora soffermarmi).

Ricorderò che un sistema di funzioni (componenti)

$$E^{\cdot\cdot\varkappa_1\dots\varkappa_s}_{\omega_1\dots\omega_r} = F^{\cdot\cdot\varkappa_1\dots\varkappa_s}_{\omega_1\dots\omega_r}\left(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}, \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\tau}}, \dots, \frac{\partial^{m-1}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\tau_1}\partial x^{\tau_2}\dots\partial x^{\tau_{m-1}}}\right) \tag{68}$$

che per effetto di una trasformazione (3) sulle x^{ν}, che induce la trasformazione (4) delle $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, si muti, secondo una determinata legge (ad es.: invarianza, covarianza o controvarianza semplice o multipla, varianza mista, ecc....) in un sistema di funzioni $E'^{\cdot\cdot\varkappa_1\dots\varkappa_s}_{\omega_1\dots\omega_r}$ delle x'^{ν} si dice *invariante differenziale* (d'ordine m) *della connessione* ∇ se la componente $E'^{\cdot\cdot\varkappa_1\dots\varkappa_s}_{\omega_1\dots\omega_r}$ si può esprimere per $\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}$ e le sue derivate rispetto alle x'^{ν} come la corrispondente componente $E^{\cdot\cdot\varkappa_1\dots\varkappa_s}_{\omega_1\dots\omega_r}$ si esprime per $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ e le sue derivate rispetto alle x^{ν} ([53]). Ciò posto, se ci limitiamo agli invarianti differenziali che, per le (3), sono tensori o scalari, abbiamo subito, tenendo presenti anche osservazioni e risultati precedentemente esposti:

TEOREMA DI RIDUZIONE. — *Gli invarianti differenziali (tensoriali o scalari) di ordine* m *di una varietà a connessione affine* ∇ *sono gli invarianti simultanei*:

a) *dei tensori normali degli ordini* 1, 2,..., m: $C_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$, $C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$, ..., $C_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2\dots\tau_{m-1}}^{\cdot\cdot\lambda}$. Oppure:

([51]) Cfr. ad es. EISENHART, **48**, 1927, p. 74.

([52]) Ved. T. Y. THOMAS e MICHAL, **43**, 1927, p. 197 e seg.

([53]) Cfr. T. Y. THOMAS e MICHAL, l. c., pp. 197-198. Veramente, secondo T. Y. THOMAS e MICHAL, $E^{\cdot\cdot\varkappa_1\dots\varkappa_s}_{\omega_1\dots\omega_r}$ verrebbe detto un *invariante differenziale d'ordine* $m-1$. Ma i parametri $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ dànno già il passaggio da un punto della varietà ad un altro qualunque nel suo intorno *del 1° ordine*.

b) *di* $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$; *di* $C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$ *e delle sue derivate* [54] (*o estensioni*) *prime, seconde,...*, $(m-2)^{me}$. Oppure:

c) *di* $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$; *di due ad arbitrio dei tensori* $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $R^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$, $B_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $S_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ *e delle loro derivate* (*c. s.*) (*o estensioni*) *prime, seconde,...*, $(m-2)^{me}$. Oppure:

d) *di* $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ *e delle sue derivate* (*o estensioni*) *prime, seconde,...*, $(m-1)^{me}$; *di uno dei tensori* $B_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $R^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$ *e delle sue derivate* (*o estensioni*) *prime, seconde,...*, $(m-2)^{me}$ [55].

TEOREMA DI SOSTITUZIONE. — *Ogni invariante differenziale* (*tensoriale o scalare*) *della connessione* ∇ *dato nella forma* (68) *può esprimersi pei tensori normali, sostituendo nella sua espressione* (68) *le* $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ *con le* $C_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}=S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$; *le* $\dfrac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\tau}}$ *con le* $C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$, ..., *in generale, ciascuna derivata* $\dfrac{\partial^r\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\tau_1}\partial x_{\tau_2}\ldots\partial x^{\tau_r}}$ *con la corrispondente componente del tensore normale* $C_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}^{\cdot\cdot\lambda}$ $(r=0, 1, ..., m-1)$ [56].

PARTE SECONDA

Le trasformazioni che conservano il parallelismo (T_p).

6. Forma delle trasformazioni (T_p) che conservano il parallelismo in una varietà (A_n) a connessione affine asimmetrica. La connessione invariante. — Le equazioni

$$\overline{d}\xi^{\lambda}=d\xi^{\lambda}+\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\xi^{\mu}dx^{\nu}=0 \tag{1}$$

che rappresentano il trasporto *per equipollenza* dei vettori (controvarianti) in A_n non sono atte a rappresentare il *trasporto parallelo delle direzioni*, perchè non sono invarianti per una trasformazione

$$\xi^{(o)}=h\cdot\xi, \tag{69}$$

ove h è uno scalare funzione arbitraria del punto in A_n (o sulla curva lungo la quale consideriamo il trasporto (1)) [escluso naturalmente il caso banale in

---

([54]) con la derivazione ∇, oppure ∇^*, oppure $\nabla^{(b)}$.

([55]) Cfr. per quest'ultimo enunciato: WEITZENBÖCK, **15**, 1923, p. 356. In questi enunciati parlando di *invarianti simultanei* di più tensori intendo limitarmi agli invarianti esprimibili in *termini finiti* pei tensori medesimi.

([56]) Cfr. T. Y. THOMAS e MICHAL, **43**, 1927, p. 199, e VEBLEN, **47**, 1927, pp. 90-91. Le denominazioni: *teorema di riduzione e di sostituzione* corrispondono a: *Reduktionssatz* secondo WEITZENBÖCK (**15**, 1023, p. 350 e seg.) e: *replacement theorem* secondo T. Y. THOMAS: ved. ad es. **33**, 1926, p. 729, e **46**, 1927, p. 558.

cui h è una costante]. Ma è facile dare alla (1) una forma invariante per le 69), analoga a quella di SYNGE per le equazioni delle geodetiche ([57]):

(70) $$\overline{d}\xi^{[\lambda}\cdot\xi^{\tau]} = d\xi^{[\lambda}\cdot\xi^{\tau]} + \Gamma^{[\lambda}_{\mu\nu}\xi^{\tau]}\xi^{\mu}dx^{\nu} = 0$$ (ved. ([18]))

cioè

(70*) $$\delta^{\omega\varkappa}_{\lambda\tau}d\xi^{\lambda}\cdot\xi^{\tau} = \delta^{\omega\varkappa}_{\lambda\tau}(d\xi^{\lambda}\cdot\xi^{\tau} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\xi^{\tau}\xi^{\mu}dx^{\nu}) = 0$$ ([58]).

Dalle (70*) ricaviamo agevolmente ([59]) che *la condizione necessaria e sufficiente perchè le* $\overline{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$ *siano i valori acquistati dalle* $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ *per una trasformazione della connessione che conservi il parallelismo delle direzioni* è che si abbia

(71) $$\overline{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} - \frac{1}{n}\delta^{\lambda}_{\mu}\overline{\Gamma}^{\tau}_{\tau\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \frac{1}{n}\delta^{\lambda}_{\mu}\Gamma^{\tau}_{\tau\nu},$$

o, infine, *che sia*

(72) $$\overline{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + 2\delta^{\lambda}_{\mu}\psi_{\nu}$$

ove ψ_{ν} *è un vettore covariante arbitrario.* Le (72) rappresentano dunque la più generale trasformazione T_p della connessione ∇ ([60]).

Le (71) possono scriversi

(73) $$\overline{L}^{\lambda}_{\mu\nu} = L^{\lambda}_{\mu\nu},$$

ove abbiamo posto (cfr. J. M. THOMAS, **36**, 1926, p. 663, form. (5.14))

(74) $$L^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \frac{1}{n}\delta^{\lambda}_{\mu}\Gamma^{\tau}_{\tau\nu}.$$

Dunque il sistema $L^{\lambda}_{\mu\nu}$ è *invariante* per le T_p, cioè per le (72) (diremo: (T_p)-invariante). Le $L^{\lambda}_{\mu\nu}$, per una trasformazione (3) delle coordinate, si trasformano secondo le formule

(75) $$L'^{\delta}_{\gamma\alpha} = L^{\nu}_{\lambda\omega}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\gamma}}\frac{\partial x^{\omega}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x'^{\gamma}\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\nu}} - \frac{1}{n}\delta^{\delta}_{\gamma}\frac{\partial\theta}{\partial x'^{\alpha}},$$

ove θ è dato dalla (19): e godono della proprietà

(76) $$L^{\tau}_{\tau\nu} = 0.$$

([57]) Ved, EISENHART, **17**, 1923, p. 369.

([58]) $\delta^{\omega k}_{\lambda\tau} = \delta^{\omega}_{\lambda}\delta^{k}_{\tau} - \delta^{\omega}_{\tau}\delta^{k}_{\lambda}$, in generale $\delta^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_m}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m} = m!\,\delta^{\tau_1}_{[\lambda_1}\delta^{\tau_2}_{\lambda_2}\ldots\delta^{\tau_m}_{\lambda_m]}$ (ved. ([18])) è il *simbolo di Kronecker generalizzato* (MURNAGHAN). Ved. ad es. VEBLEN, **47**, 1927, pp. 3-6.

([59]) con un procedimento analogo a quello seguito da VEBLEN e J. M. THOMAS pel caso delle trasformazioni che conservano le *geodetiche*: ved. **37**, 1926. pp. 281-282.

([60]) Ved. FRIESECKE, **27**, 1925, p. 106; J. M. THOMAS, **36**, 1926, p. 662; EISENHART, **48**, 1927, p. 30.

Introdotte le $L^{\lambda}_{\mu\nu}$, le (70*) possono scriversi sotto questa forma *invariante per le* T_p:

(77) $$\delta^{\omega\varkappa}_{\lambda\tau}(d\xi^{\lambda}\cdot\xi^{\tau}+L^{\lambda}_{\mu\nu}\xi^{\tau}\xi^{\mu}dx^{\nu})=0,$$

e anzi, se $\xi(t)$ è una serie di vettori le cui *direzioni* siano parallele in A_n lungo una curva Γ, onde

(78) $$d\xi^{\lambda}+\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\xi^{\mu}dx^{\nu}=kdt\cdot\xi^{\lambda},$$

(k essendo una qualunque funzione scalare del parametro t cui sono riferiti i punti di Γ), basta porre, lungo Γ

(79) $$h=C\cdot e^{\frac{1}{n}\int\Gamma^{\tau}_{\tau\nu}dx^{\nu}-\int kdt} \qquad (C=\text{cost.})$$

perchè pei vettori

(69) $$\xi^{(0)}=h\xi$$

si abbia, lungo Γ

(80) $$d\xi^{(0)\lambda}+L^{\lambda}_{\mu\nu}\cdot\xi^{(0)\mu}dx^{\nu}=0.$$

Lo studio degli invarianti per le T_p potrebbe dunque basarsi sulle $L^{\lambda}_{\mu\nu}$, cioè, costituirsi come teoria invariantiva delle equazioni (75). Ma c'è un inconveniente abbastanza sensibile: la legge di trasformazione (75) non coincide con la legge di trasformazione (4) delle $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$; e neppure con la legge secondo cui si trasformano le « *componenti della connessione proiettiva* » $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ di T. Y. THOMAS (espressa dalle (99) indicate più innanzi). Si dovrebbe dunque costruire una teoria in gran parte nuova.

Questo in effetto non è necessario. Infatti è agevole ricavare dal sistema $L^{\lambda}_{\mu\nu}$ un altro sistema, $P^{\lambda}_{\mu\nu}$, pure (T_p)-invariante, ma che si trasforma come $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. Osserviamo che per le (75) il sistema

(81) $$L^{\tau}_{\nu\tau}=\Gamma^{\tau}_{\nu\tau}-\frac{1}{n}\Gamma^{\tau}_{\tau\nu}$$

si trasforma (per effetto delle (3)) nel modo seguente:

(82) $$L'^{\beta}_{\alpha\beta}=L^{\tau}_{\omega\tau}\frac{\partial x^{\omega}}{\partial x'^{\alpha}}+\frac{n-1}{n}\frac{\partial\theta}{\partial x'^{\alpha}}.$$

Ne segue subito che, posto

(83) $$P^{\lambda}_{\mu\nu}=L^{\lambda}_{\mu\nu}+\frac{1}{n-1}\delta^{\lambda}_{\mu}L^{\tau}_{\nu\tau}$$

si ha appunto

(84) $$P'^{\delta}_{\gamma\alpha}=P^{\nu}_{\lambda\omega}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\gamma}}\frac{\partial x^{\omega}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x'^{\gamma}\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\nu}}.$$

Cioè, che le $P^{\lambda}_{\mu\nu}$ ((T_p)-invarianti) si trasformano come le $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, e perciò, *sono i parametri di una connessione affine*, $\nabla^{(p)}$, *intrinsecamente legata alla data*, ∇, *e invariante per le trasformazioni* (T_p) *che conservano il parallelismo.*

A questo risultato possiamo arrivare anche per un' altra via più semplice. Notiamo che pel cambiamento (72) della connessione si ha, per le (7),

$$\overline{S}_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} + \delta^{\lambda}_{\mu}\psi_{\nu} - \delta^{\lambda}_{\nu}\psi_{\mu} \tag{85}$$

e quindi, per le (15),

$$\overline{\Phi}_{\nu} = \Phi_{\nu} - (n-1)\psi_{\nu}. \tag{86}$$

Vi è dunque una scelta intrinseca di ψ_{ν}:

$$\psi_{\nu} = \frac{1}{n-1}\Phi_{\nu}, \tag{87}$$

tale che per la nuova connessione il vettore di Einstein si annulli; a cui corrispondono i seguenti valori delle $\overline{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$, determinati in modo invariante per le T_p:

$$P^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \frac{2}{n-1}\delta^{\lambda}_{\mu}\Phi_{\nu}. \tag{88}$$

Tenendo presenti le (74), si vede subito che queste quantità coincidono con quelle date dalle (83). Ciò prova nuovamente quanto avevamo enunciato e per di più ci mostra che *la connessione* $\nabla^{(p)}$, *intrinsecamente determinata dalla data* ∇ *in modo invariante per le* T_p, *dà luogo allo stesso trasporto parallelo delle direzioni che quella* (∇) *assegnata: e tra tutte le trasformate di questa per le* T_p, *è caratterizzata dal fatto che per essa si annulla il vettore di Einstein* Φ_{ν}: il che ha un semplice significato geometrico, che abbiamo già notato (n.° 3).

Si osservi questa conseguenza notevole: *a un trasporto lineare delle direzioni è intrinsecamente legato un trasporto delle lunghezze* (dei vettori le cui direzioni varino per parallelismo). In altri termini: *una legge* (lineare) *di trasporto per parallelismo in una varietà curva determina univocamente una legge di trasporto per equipollenza,* a cui è subordinata. Di questo risultato ci si può render conto geometricamente tenendo presente il significato dell' annullarsi del vettore di Einstein (n.° 3), e il fatto che una omografia vettoriale tra due stelle di vettori di E_n affine è individuata assegnando l' omografia che essa subordina tra le stelle di direzioni omologhe, e inoltre, secondo due direzioni omologhe, *una coppia* di vettori omologhi. Il risultato può paragonarsi a quest'altro stabilito dal CARTAN: che tra le *connessioni proiettive* aventi le stesse geodetiche ve ne è una intrinsecamente determinata, invariante per le trasformazioni (T_g) che conservano le geodetiche: *la connessione proiettiva normale* [61].

Mediante le (83) le $P^{\lambda}_{\mu\nu}$ si esprimono per le $L^{\lambda}_{\mu\nu}$: ma anche inversamente, le $L^{\lambda}_{\mu\nu}$ possono esprimersi per le $P^{\lambda}_{\mu\nu}$: dalle (74), tenendo presente che le $L^{\lambda}_{\mu\nu}$ sono (T_p)-invarianti, oppure dalle (83) risolvendo, otteniamo

$$L^{\lambda}_{\mu\nu} = P^{\lambda}_{\mu\nu} - \frac{1}{n}\delta^{\lambda}_{\mu}P^{\tau}_{\tau\nu}. \tag{89}$$

Dunque *anche le* $P^{\lambda}_{\mu\nu}$, come le $L^{\lambda}_{\mu\nu}$, *sono sufficienti a individuare il trasporto delle direzioni subordinato alla supposta connessione affine,* o, se si vuole, *a individuare questa a meno della più generale trasformazione* T_p. Corrispondentemente, abbiamo che basta sostituire alla normalizzazione espressa dalla (79) la seguente:

$$h = C\cdot e^{-\frac{2}{n-1}\int \Phi_\nu dx^\nu - \int k dt} \qquad (C = \text{cost.}) \tag{90}$$

perchè una serie di vettori $\xi(t)$ le cui direzioni sono parallele in A_n lungo una linea Γ dia luogo a una serie $\xi^{(0)}(t) = h\xi(t)$ di vettori egualmente diretti, ed equipollenti lungo Γ per la connessione $\nabla^{(p)}$: tali cioè che sia, lungo Γ,

$$\frac{d\xi^{(0)\lambda}}{dt} + P^{\lambda}_{\mu\nu}\xi^{(0)\mu}\frac{dx^\nu}{dt} = 0. \tag{91}$$

Indicando con $Q^{\lambda}_{\mu\nu}$ i parametri della connessione simmetrica $\nabla^{(q)}$ associata (n.° 3) alla connessione invariante $\nabla^{(p)}$, con $H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ il tensore di torsione di questa, avremo:

$$Q^{\lambda}_{\mu\nu} = P^{\lambda}_{(\mu\nu)} = B^{\lambda}_{\mu\nu} + \frac{1}{n-1}(\delta^{\lambda}_{\mu}\Phi_\nu + \delta^{\lambda}_{\nu}\Phi_\mu), \tag{92}$$

$$H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = P^{\lambda}_{[\mu\nu]} = S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} + \frac{1}{n-1}(\delta^{\lambda}_{\mu}\Phi_\nu - \delta^{\lambda}_{\nu}\Phi_\mu) \text{ [62]}. \tag{93}$$

Naturalmente sarà

$$H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\nu} = P^{\nu}_{[\mu\nu]} = 0. \tag{94}$$

---

[61] CARTAN, **25**, 1924, pp. 221-226. Ved. anche SCHOUTEN, **26**, 1924, pp. 423-424 e **38**, 1926, pp. 156-158.

[62] $Q^{\lambda}_{\mu\nu}$ è il sistema Σ^i_{jk} di J. M. THOMAS (**36**, 1926, p. 663, form. (5.12)); $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ è il tensore Ω^i_{jk} di J. M. THOMAS (ibid., form. (5.11)), indicato con T^i_{jk} da EISENHART (**48**, 1927, p. 35, form. (13.4)). L'invariante $P^{\lambda}_{\mu\nu}$, che ha fra i (T_p)-invarianti un ruolo essenziale, in quanto da esso *tutti gli altri* possono dedursi (n.° 8), non era invece stato notato finora.

Mediante il tensore $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ si può formare una successione di tensori, sempre (T_p)-invarianti, tutti *simmetrici* rispetto ai loro indici:

$$(95)\quad \begin{cases} q_{\lambda\tau} = H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} H_{\nu\tau}^{\cdot\cdot\mu} = S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} S_{\nu\tau}^{\cdot\cdot\mu} - \dfrac{1}{n-1}\Phi_\lambda \Phi_\tau, \\ q_{\lambda\tau\omega} = H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} H_{\nu\tau}^{\cdot\cdot\varkappa} H_{\varkappa\omega}^{\cdot\cdot\mu} \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

il primo dei quali, *se di rango n*, potrebbe servire come tensore fondamentale di una *metrica* intrinsecamente determinata dalla data connessione affine, e (T_p)-invariante.

Risulta evidente dal confronto delle (93), (11), che *l'annullarsi del tensore $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ è la condizione necessaria e sufficiente perchè la data connessione ∇ sia emisimmetrica* (n.° 2), come ha notato J. M. THOMAS ([63]). E quindi anche: *una connessione asimmetrica può rendersi simmetrica con conservazione del parallelismo allora e solo che essa è emisimmetrica* (ibid.).

Questo risultato può ottenersi anche per altra via: è evidente che sarà possibile trasformare la data connessione ∇ in una simmetrica mediante una T_p allora e solo che per la connessione supposta sussiste il *teorema di Severi*, nella forma enunciata al n.° 2; o ancora, *allora e solo che il vettore* (di torsione) $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}\xi^\mu\eta^\nu$ *associato a due qualunque vettori* ξ, η *in un punto (qualunque) della supposta* A_n *è complanare a* ξ, η. Ora: la condizione perchè quest'ultima circostanza si presenti si esprime agevolmente: troviamo appunto che deve essere

$$(96)\qquad S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = \frac{1}{n-1}(\delta_\nu^\lambda \Phi_\mu - \delta_\mu^\lambda \Phi_\nu)$$

cioè, che la data connessione deve essere emisimmetrica ([64]). Sostanzialmente

---

([63]) **36**, 1926, p. 669.

([64]) Infatti la condizione perchè $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}\xi^\lambda\eta^\mu$ sia complonare a ξ, η si scrive

$$(f)\qquad \delta_{\mu\nu\omega}^{\lambda\varkappa\sigma}\xi^\mu\eta^\nu S_{\rho\tau}^{\cdot\cdot\omega}\xi^\rho\eta^\tau = 0$$

ove $\delta_{\mu\nu\omega}^{\lambda\varkappa\sigma} = 3!\,\delta_{[\mu}^{\lambda}\delta_{\nu}^{\varkappa}\delta_{\omega]}^{\sigma}$ (ved. ([18]), ([58])). La precedente relazione varrà per ogni ξ, η allora e solo che

$$(g)\qquad \delta_{\mu\nu\omega}^{\lambda\varkappa\sigma}S_{\rho\tau}^{\cdot\cdot\omega} + \delta_{\rho\nu\omega}^{\lambda\varkappa\sigma}S_{\mu\tau}^{\cdot\cdot\omega} + \delta_{\mu\tau\omega}^{\lambda\varkappa\sigma}S_{\rho\nu}^{\cdot\cdot\omega} + \delta_{\rho\tau\omega}^{\lambda\varkappa\sigma}S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\omega} = 0.$$

Ponendo $\varkappa = \mu$, $\sigma = \lambda$ e sommando si hanno appunto le (96), e inversamente, dalle (96) conseguono agevolmente le (g). Si noti che analogamente è

$$(h)\qquad R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \frac{1}{n-1}(\delta_\omega^\nu R_{\mu\lambda} - \delta_\mu^\nu R_{\omega\lambda}) \qquad \left(R_{\mu\lambda} = R_{\tau\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\tau}\right)$$

questa proprietà era già stata data, in forma equivalente, per quanto in apparenza assai diversa, dal CARTAN: infatti il suo « primo tensore irreduttibile di torsione », $\mathfrak{T}$, può identificarsi con $H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ (cfr. n.° 3 ([24]), ([65])).

Alle due caratterizzazioni date poco sopra per le varietà a connessione affine emisimmetrica possono dunque aggiungersi queste altre due: che *in una tale varietà, pel trasporto parallelo infinitesimale, la direzione trasportata resta tangente alla superficie geodetica iniziale*, e che *la traslazione associata a un qualunque ciclo infinitesimo è rappresentata da un vettore la cui direzione appartiene alla 2-direzione del ciclo* ([66]).

Per $P_{\mu\nu}^{\lambda}$ si può agevolmente esprimere anche il sistema $\Pi_{\mu\nu}^{\lambda}$ delle *componenti della connessione proiettiva* (secondo T. Y. THOMAS ([67])) legata alla connessione affine ∇: le quali, invarianti per le T_g (che conservano le geodetiche), lo saranno a maggior ragione per le T_p. Si ha

$$\Pi_{\mu\nu}^{\lambda} = B_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{1}{n+1}(\delta_{\mu}^{\lambda} B_{\tau\nu}^{\tau} + \delta_{\nu}^{\lambda} B_{\tau\mu}^{\tau}) = Q_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{1}{n+1}(\delta_{\mu}^{\lambda} Q_{\tau\nu}^{\tau} + \delta_{\nu}^{\lambda} Q_{\tau\mu}^{\tau}). \tag{97}$$

Ricorderò che le $\Pi_{\mu\nu}^{\lambda}$ godono delle proprietà

$$\Pi_{\mu\nu}^{\lambda} = \Pi_{\nu\mu}^{\lambda}, \quad \Pi_{\tau\nu}^{\tau} = 0, \tag{98}$$

e si trasformano, per le (3), secondo le formule

$$\Pi_{\gamma\alpha}^{\prime\delta} = \Pi_{\lambda\omega}^{\nu} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\prime\gamma}} \frac{\partial x^{\omega}}{\partial x^{\prime\alpha}} \frac{\partial x^{\prime\delta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x^{\prime\gamma} \partial x^{\prime\alpha}} \frac{\partial x^{\prime\delta}}{\partial x^{\nu}} - \frac{1}{n+1} \delta_{\gamma}^{\delta} \frac{\partial \theta}{\partial x^{\prime\alpha}} - \frac{1}{n+1} \delta_{\alpha}^{\delta} \frac{\partial \theta}{\partial x^{\prime\gamma}}. \tag{99}$$

---

la condizione necessaria e sufficiente perchè il vettore $D\xi^{\lambda}$, incremento di un qualunque vettore ξ^{λ} per trasporto ciclico, appartenga al piano del ciclo. Quando la A_n è una V_n riemanniana, le (h) si riducono alla condizione $(J = K^2)$ perchè coincidano i parallelismi di LEVI-CIVITA e di SEVERI: ved. BOMPIANI, **9**, 1921, p. 384, 385.

([65]) Ved. CARTAN, **20**, t. 42, 1925, pp. 31-35. Se si osserva che

$$H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \alpha_{\lambda\mu\varkappa}^{\omega\tau\nu} S_{\omega\tau}^{\cdot\cdot\varkappa}, \text{ ove } \alpha_{\lambda\mu\varkappa}^{\omega\tau\nu} = \delta_{\lambda}^{\omega}\delta_{\mu}^{\tau}\delta_{\varkappa}^{\nu} + \frac{1}{n-1}\delta_{\varkappa}^{\tau}\left\{\delta_{\lambda}^{\nu}\delta_{\mu}^{\omega} - \delta_{\mu}^{\nu}\delta_{\lambda}^{\omega}\right\}, \text{ onde } \alpha_{\lambda\nu\varkappa}^{\omega\tau\nu} = 0, \tag{i}$$

e si confronta con le considerazioni esposte dal CARTAN a pp. 31-32, si vede che $H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ può identificarsi col tensore $\mathfrak{T}$ di CARTAN, o meglio, con una sua particolare (ma intrinseca) determinazione. Ora il CARTAN dimostra (ibid., pp. 34-35) che le varietà per le quali $\mathfrak{T}$ è nullo sono quelle per le quali « la traslazione associata a un parallelogrammo infinitesimo è rappresentata da un vettore situato nel piano del parallelogrammo ». Il CARTAN non parla affatto di connessioni emisimmetriche.

([66]) Ved., sulla geometria delle connessioni affini emisimmetriche, anche FRIEDMANN e SCHOUTEN, **23**, 1924.

([67]) T. Y. THOMAS, **28**, 1925, p. 200, form. (2.4).

Le $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ sono sufficienti a individuare, nella varietà, una *connessione proiettiva normale* secondo CARTAN ([68]), di parametri

$$(100)\qquad \Lambda^0_{0\nu}=0,\quad \Lambda^\lambda_{0\nu}=\delta^\lambda_\nu,\quad \Lambda^\lambda_{\mu\nu}=\Pi^\lambda_{\mu\nu},\quad \Lambda^0_{\mu\nu}=\frac{1}{n-1}\left(-\frac{\partial\Pi^\tau_{\nu\mu}}{\partial x^\tau}+\Pi^\tau_{\nu\omega}\Pi^\omega_{\tau\mu}\right)\ (^{69}),$$

avente le stesse geodetiche della connessione affine ∇ (comuni anche a $\nabla^{(b)}$, $\nabla^{(p)}$, $\nabla^{(q)}$).

È lo stesso assegnare le $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ o le linee geodetiche di tale connessione: le cui equazioni del resto, con riferimento a un *parametro proiettivo t* ([70]) si possono scrivere

$$(101)\qquad \frac{d^2x^\lambda}{dt^2}+\Pi^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}=0.$$

La teoria delle varietà a connessione proiettiva normale può considerarsi come una teoria geometrica dei sistemi differenziali del tipo (101); allo stesso modo la teoria invariantiva delle varietà a connessione affine per le trasformazioni T_p che conservano il parallelismo, della quale ora ci occupiamo, può dirsi una teoria geometrica dei sistemi del tipo (91).

7. Ricostruzione della varietà a connessione affine più generale a partire dalle sue geodetiche. — È interessante il vedere come dalle $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ si possa risalire alle $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ più generali a cui esse corrispondono disponendo successivamente della scelta degli altri elementi arbitrari da cui le $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ dipendono.

Anzitutto: sia dato un sistema di linee (101), cioè sia data in una varietà in cui le x^ν sono coordinate curvilinee, una connessione proiettiva normale. Nelle (101) si intenderà che le $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ soddisfino alle (98), e per una trasformazione (3) delle coordinate si trasformino con la legge (99). Le $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ dipendono da $n\left[\binom{n+1}{2}-1\right]$ parametri indipendenti.

Poi: assegniamo ad arbitrio un vettore Q_λ che si trasformi, per le (3), secondo la legge (18). Ciò equivale, come VEBLEN e J. M. THOMAS hanno notato ([71]), ad assegnare per ciascun punto della varietà, nel rispettivo spazio

([68]) CARTAN, **25**, 1924, pp. 223-224.

([69]) Cfr. CARTAN, **25**, 1924, pp. 226-227; SCHOUTEN, **26**, 1924, p. 423 e **38**, 1926, p. 157. Cfr. anche T. Y. THOMAS, **33**, 1926, p. 726, form. (9). (Le $\Lambda^a_{b\nu}$ $(a, b=0, 1,\dots n)$ non coincidono con le $\Gamma^{*i}_{\alpha\beta}$ di T. Y. THOMAS, ma ne differiscono per fattori numerici).

([70]) T. Y. THOMAS, **28**, 1925, pp. 200-201.

([71]) VEBLEN e J. M. THOMAS, **37**, 1926, pp. 294-295.

proiettivo tangente, un iperpiano. D'altra parte anche a ciascuna connessione affine, di parametri $Q^{\nu}_{\lambda\mu}$, è intrinsecamente legato un vettore, $Q^{\tau}_{\tau\lambda}$, che varia con la stessa legge (18), e quindi un iperpiano; e due connessioni affini simmetriche che abbiano le stesse geodetiche non differiscono che per l'iperpiano associato. Ciò premesso: se poniamo

$$Q^{\nu}_{\lambda\mu} = \Pi^{\nu}_{\lambda\mu} + \frac{1}{n+1}(\delta^{\nu}_{\lambda} Q_{\mu} + \delta^{\nu}_{\mu} Q_{\lambda}), \tag{102}$$

le $Q^{\nu}_{\lambda\mu}$ si trasformano secondo la legge (4), e si ha

$$Q^{\tau}_{\tau\lambda} = Q_{\lambda}. \tag{103}$$

Tenute presenti le (97), avremo che le $Q^{\nu}_{\lambda\mu}$ sono i parametri della più generale connessione affine *simmetrica* avente le stesse geodetiche della supposta connessione proiettiva normale. Le $Q^{\nu}_{\lambda\mu}$ dipendono da $n\binom{n+1}{2}$ parametri indipendenti.

Indi assegniamo un tensore $H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$, soddisfacente alle condizioni

$$H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} + H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = 0, \quad H_{\lambda\nu}^{\cdot\cdot\nu} = 0 \tag{104}$$

e del resto arbitrario, e poniamo

$$P^{\nu}_{\lambda\mu} = Q^{\nu}_{\lambda\mu} + H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}. \tag{105}$$

Le $P^{\nu}_{\lambda\mu}$ sono allora i parametri della connessione $\nabla^{(p)}$, (T_p)-invariante, corrispondente alla più generale connessione affine asimmetrica che ha le linee (101) come geodetiche: o, se si vuole, sono i parametri del più generale trasporto (lineare) parallelo delle direzioni pel quale le (101) sono le linee autoparallele; $H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ è il tensore di torsione di quella connessione $\nabla^{(p)}$. Le $P^{\nu}_{\lambda\mu}$ dipendono da $n(n^2-1)$ parametri indipendenti.

Infine: assegniamo ad arbitrio un vettore covariante Φ_{λ}: posto

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = P^{\nu}_{\lambda\mu} - \frac{2}{n-1}\delta^{\nu}_{\lambda}\Phi_{\mu} \tag{106}$$

la connessione di parametri $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ (tutti indipendenti, e in numero di n^3), per la quale è precisamente Φ_{λ} il *vettore di Einstein*, sarà la più generale connessione affine a cui è subordinato il trasporto delle direzioni definito dalle $P^{\nu}_{\lambda\mu}$, e il dato sistema (101) come sistema delle linee goodetiche.

8. **Il teorema fondamentale. Tensori di curvatura (T_p)-invarianti.** — La derivata covariante di un qualunque tensore per la derivazione $\nabla^{(p)}$ cor-

rispondente alla connessione (T_p)-invariante di parametri $P^\lambda_{\mu\nu}$ si esprime agevolmente per la derivata covariante del tensore medesimo con la derivazione ∇, di parametri $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$: abbiamo ad es.:

$$\nabla^{(p)}_\nu \xi^\lambda = \nabla_\nu \xi^\lambda + \frac{2}{n-1}\Phi_\nu \xi^\lambda, \quad \nabla^{(p)}_\nu \xi_\mu = \nabla_\nu \xi_\mu - \frac{2}{n-1}\Phi_\nu \xi_\mu. \tag{107}$$

Più in generale, se $E^{\cdot\cdot\varkappa_1 \dots \varkappa_s}_{\omega_1 \dots \omega_r}$ è un qualunque tensore ad r indici di covarianza, s di controvarianza, si ha

$$\nabla^{(p)}_\nu E^{\cdot\cdot\varkappa_1 \dots \varkappa_s}_{\omega_1 \dots \omega_r} = \nabla_\nu E^{\cdot\cdot\varkappa_1 \dots \varkappa_s}_{\omega_1 \dots \omega_r} - \frac{2(r-s)}{n-1}\Phi_\nu E^{\cdot\cdot\varkappa_1 \dots \varkappa_s}_{\omega_1 \dots \omega_r}, \tag{108}$$

onde, corrispondentemente, se $\overline{d}$, $\overline{d}^{(p)}$ sono i simboli dei *differenziali cogredienti* che corrispondono alle derivazioni covarianti ∇, $\nabla^{(p)}$, avremo

$$\overline{d}^{(p)} E^{\cdot\cdot\varkappa_1 \dots \varkappa_s}_{\omega_1 \dots \omega_r} = \overline{d} E^{\cdot\cdot\varkappa_1 \dots \varkappa_s}_{\omega_1 \dots \omega_r} - \frac{2(r-s)}{n-1}\Phi_\nu dx^\nu \cdot E^{\cdot\cdot\varkappa_1 \dots \varkappa_s}_{\omega_1 \dots \omega_r}. \tag{109}$$

Se il tensore $E^{\cdot\cdot\varkappa_1 \dots \varkappa_s}_{\omega_1 \dots \omega_r}$ è (T_p)-invariante, lo sarà anche il tensore $\nabla^{(p)}_\nu E^{\cdot\cdot\varkappa_1 \dots \varkappa_s}_{\omega_1 \dots \omega_r}$ $\left(\text{e così } \overline{d}^{(p)} E^{\cdot\cdot\varkappa_1 \dots \varkappa_s}_{\omega_1 \dots \omega_r}\right)$, e tutti i tensori derivati successivi (con la derivazione $\nabla^{(p)}$) lo saranno pure. Dunque: *mediante la derivazione* $\nabla^{(p)}$, *applicata a tensori* (T_p)-*invarianti, si possono ottenere infiniti altri tensori dotati della medesima proprietà*. Lo stesso potrà dirsi anche per la derivazione $\nabla^{(q)}$, che ha per parametri le quantità $Q^\nu_{\lambda\mu} = P^\nu_{(\lambda\mu)}$: e questo era già stato notato anche da J. M. THOMAS (**36**, 1926, p. 668). Ma c'è di più: *tutti i tensori invarianti per le* T_p *si possono ottenere come invarianti differenziali della connessione* $\nabla^{(p)}$: e quindi anche, come invarianti differenziali simultanei della connessione *simmetrica* $\nabla^{(q)}$ e del tensore di torsione $H^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}$.

In certo senso ciò è senz'altro prevedibile, in conseguenza di quanto s'è detto al n.° 6: giacchè risulta da quanto ivi è stato esposto che le condizioni

$$\overline{P}^\lambda_{\mu\nu} = P^\lambda_{\mu\nu} \tag{110}$$

equivalgono alle (73) e quindi alle (72): e perciò, *sono necessarie e sufficienti perchè le corrispondenti connessioni, di parametri* $\overline{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ *e* $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, *siano* (T_p)-*trasformate l'una dell'altra*. Dunque non possono esistere espressioni (T_p)-invarianti, *funzionalmente* indipendenti da $P^\lambda_{\mu\nu}$.

Ma valendoci del fatto che *la connessione* $\nabla^{(p)}$ *è essa stessa una* (T_p)-*trasformata della connessione* ∇ *primitiva*, è facile dimostrare in modo completo e rigoroso la proprietà enunciata. Chiamiamo d'ora innanzi, quando occorra distinguerli dai (T_p)-*invarianti*, invarianti (differenziali) *affini* di una varietà a connessione affine quelli di cui si parlò al n.° 5: invarianti propri della varietà, comuni soltanto ad essa e alle sue trasformate *isomorfiche*. Un invariante differenziale affine (d'ordine m qualunque) della connessione ∇ può sempre esprimersi nella forma (68), (n.° 5): se esso è anche (T_p)-invariante, ciò vorrà dire che i valori delle sue componenti $E_{\omega_1 \ldots \omega_r}^{\cdot\cdot\varkappa_1 \ldots \varkappa_s}$ non mutano se nelle (68) al posto delle $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ sostituiamo i parametri (dati dalle (72)) di una qualunque connessione (T_p)-trasformata della data. In particolare, essi non muteranno se al posto delle $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ sostituiamo le $P_{\lambda\mu}^{\nu}$: ora ciò equivale a dire che il *supposto invariante è anche un invariante differenziale affine (d'ordine* m*) della connessione* $\nabla^{(p)}$. Che poi, inversamente, tutti gli invarianti differenziali affini di questa connessione siano (T_p)-invarianti della primitiva, è ovvio. Abbiamo dunque il seguente

TEOREMA FONDAMENTALE. — *Gli invarianti differenziali di una connessione affine* ∇ *per le trasformazioni* $(\mathrm{T_p})$ *che conservano il parallelismo sono tutti e soli gli invarianti differenziali affini della corrispondente connessione* $(\mathrm{T_p})$-*invariante*, $\nabla^{(p)}$.

Se è nota una espressione di un tale invariante per elementi della connessione ∇, *ne ricaviamo una espressione* $(\mathrm{T_p})$-*invariante sostituendovi, a ciascun elemento di* ∇, *il corrispondente elemento della connessione* $\nabla^{(p)}$.

In particolare: gli invarianti *del primo ordine* per le T_p si esprimeranno in termini finiti per $P_{\mu\nu}^{\lambda}$: come abbiamo già veduto (n.° 6) pei principali di essi: $L_{\mu\nu}^{\lambda}$, $Q_{\mu\nu}^{\lambda}$, $\Pi_{\mu\nu}^{\lambda}$, e il tensore $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$, all'infuori del quale non vi sono altri *tensori* (T_p)-invarianti del primo ordine (indipendenti da esso).

Fra i tensori (T_p)-invarianti *del secondo ordine* si presentano anzitutto il tensore di curvatura $K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ della connessione $\nabla^{(p)}$:

$$K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \frac{\partial P_{\lambda\omega}^{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial P_{\lambda\mu}^{\nu}}{\partial x^{\omega}} + P_{\lambda\omega}^{\varkappa} P_{\varkappa\mu}^{\nu} - P_{\lambda\mu}^{\varkappa} P_{\varkappa\omega}^{\nu}, \tag{111}$$

i tensori di curvatura $K^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$, $Q_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ della connessione coniugata a $\nabla^{(p)}$ $(\nabla^{(p)*})$ e della connessione simmetrica associata $(\nabla^{(q)})$, e il tensore

$$\begin{aligned} H_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - Q_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} &= \nabla_{\mu}^{(q)} H_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\nu} - \nabla_{\omega}^{(q)} H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} + H_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\varkappa} H_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\nu} - H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} H_{\varkappa\omega}^{\cdot\cdot\nu} = \\ &= \nabla_{\mu}^{(p)} H_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\nu} - \nabla_{\omega}^{(p)} H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} - H_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\varkappa} H_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\nu} + H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} H_{\varkappa\omega}^{\cdot\cdot\nu} - 2 H_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} H_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\nu}, \end{aligned} \tag{112}$$

corrispondente al tensore $S_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ relativo alla connessione ∇. Posto

$$\Phi_{\lambda\mu} = \frac{\partial \Phi_{\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Phi_{\mu}}{\partial x^{\lambda}} = \nabla_{\mu}^{(b)} \Phi_{\lambda} - \nabla_{\lambda}^{(b)} \Phi_{\mu} = S_{\mu\lambda\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} \tag{113}$$

(*rotore* del vettore di EINSTEIN Φ_ν) troviamo agevolmente che detti tensori si esprimono nel modo seguente per gli elementi della connessione ∇:

$$(114)\quad K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + \frac{2}{n-1}\,\delta_\lambda^\nu \Phi_{\omega\mu},$$

$$(115)\quad K^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = R^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} + \frac{2}{n-1}\left[\delta_\omega^\nu \overset{*}{\nabla}_\mu \Phi_\lambda - \delta_\mu^\nu \overset{*}{\nabla}_\omega \Phi_\lambda + 2\left\{ S_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\nu} + \frac{1}{n-1}(\delta_\mu^\nu \Phi_\omega - \delta_\omega^\nu \Phi_\mu)\right\}\Phi_\lambda\right],$$

$$(116)\quad Q_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = B_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + \frac{1}{n-1}\,\delta_\lambda^\nu \Phi_{\omega\mu} + \frac{1}{n-1}\,\delta_\omega^\nu(\overset{(b)}{\nabla}_\mu \Phi_\lambda - \Phi_\mu \Phi_\lambda) - \frac{1}{n-1}\,\delta_\mu^\nu(\overset{(b)}{\nabla}_\omega \Phi_\lambda - \Phi_\omega \Phi_\lambda),$$

$$(117)\quad H_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = S_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + \frac{1}{n-1}(\delta_\lambda^\nu \Phi_{\omega\mu} + \delta_\mu^\nu \overset{(b)}{\nabla}_\omega \Phi_\lambda - \delta_\nu^\omega \overset{(b)}{\nabla}_\mu \Phi_\lambda) + \frac{1}{(n-1)}(\delta_\omega^\nu \Phi_\mu - \delta_\mu^\nu \Phi_\omega)\Phi_\lambda.$$

Notiamo incidentalmente alcune conseguenze delle (114), (115), (116), (117), che potranno servirci in seguito. Posto

$$(118)\qquad R_{\mu\lambda} = R_{\tau\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\tau},\quad \overset{*}{R}_{\mu\lambda} = R^{*\cdot\cdot\cdot\tau}_{\tau\mu\lambda},\quad B_{\mu\lambda} = B_{\tau\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\tau},\quad S_{\mu\lambda} = S_{\tau\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\tau},$$

e analogamente

$$(119)\qquad K_{\mu\lambda} = K_{\tau\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\tau},\quad \overset{*}{K}_{\mu\lambda} = K^{*\cdot\cdot\cdot\tau}_{\tau\mu\lambda},\quad Q_{\mu\lambda} = Q_{\tau\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\tau},\quad H_{\mu\lambda} = H_{\tau\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\tau},$$

si ha:

$$(120)\quad K_{\lambda\mu} = R_{\lambda\mu} - \frac{2}{n-1}\,\Phi_{\lambda\mu},\quad \overset{*}{K}_{\lambda\mu} = \overset{*}{R}_{\lambda\mu} + 2\overset{*}{\nabla}_\lambda \Phi_\mu,$$

$$(121)\quad \begin{cases} K_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = R_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} + \dfrac{2n}{n-1}\,\Phi_{\lambda\mu} = B_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} + \dfrac{n+1}{n-1}\,\Phi_{\lambda\mu} = \dfrac{n}{n-1}\left(\dfrac{\partial}{\partial x^\mu} L_{\lambda\tau}^\tau - \dfrac{\partial}{\partial x^\lambda} L_{\mu\tau}^\tau\right), \\ K^{*\cdot\cdot\cdot\tau}_{\lambda\mu\tau} = R^{*\cdot\cdot\cdot\tau}_{\lambda\mu\tau} + \dfrac{2}{n-1}\,\Phi_{\lambda\mu}, \end{cases}$$

$$(122)\quad Q_{\lambda\mu} = B_{\lambda\mu} - \frac{1}{n-1}\,\Phi_{\lambda\mu} + \overset{(b)}{\nabla}_\lambda \Phi_\mu - \Phi_\lambda \Phi_\mu,\quad Q_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = B_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} + \frac{n+1}{n-1}\,\Phi_{\lambda\mu}$$

$$(123)\quad H_{\lambda\mu} = S_{\lambda\mu} - \frac{1}{n-1}\,\Phi_{\lambda\mu} - \overset{(b)}{\nabla}_\lambda \Phi_\mu + \Phi_\lambda \Phi_\mu,\quad H_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = 0.$$

Fra i tensori $K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $K^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$, $Q_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $H_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ ed $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$, $\overset{(p)}{\nabla}_\tau H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$, $\overset{(q)}{\nabla}_\tau H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ sussistono naturalmente relazioni analoghe a quelle indicate al n.° 3 pei corrispondenti tensori relativi alla connessione ∇, e che non importa stare a scrivere.

9. **Connessioni (T_p)-equivalenti. Coordinate (T_p)-normali, tensori (T_p)-normali, estensioni (T_p)-invarianti. Teoremi di riduzione e di sostituzione per la teoria invariantiva delle trasformazioni T_p.** — Valendoci del teorema fondamentale dato al n.° prec. e delle altre nozioni e formule esposte possiamo assai agevolmente dedurre dai risultati ottenuti ai n.i 4 e 5 per le connessioni

affini in generale altrettanti risultati relativi alla teoria delle trasformazioni (T_p) che conservano il parallelismo.

Anzitutto: potremo valerci delle considerazioni esposte al n.° 4 per ottenere la risoluzione del problema dell'*equivalenza per le* $\mathrm{T_p}$, o $(\mathrm{T_p})$-*equivalenza* di due connessioni affini asimmetriche. Rammentiamo che le $P^{\lambda}_{\mu\nu}$, per una trasformazione (3) delle coordinate x^{ν} in A_n, si trasformano secondo le (84), che non differiscono dalle formule (4) di trasformazione delle $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. Indichiamo con $F^{(p)}_0$ le formule di trasformazione per $H^{\cdot\cdot\lambda}_{\mu\nu}$, con $F^{(p)}_1$ le formule di trasformazione per $K^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$ e $K^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$, analoghe alle F_0, F_1 del n.° 4, cioè alle (37), (38) e (38*); da cui si ottengono, come le (84) dalle (4), sostituendo agli elementi della connessione ∇ i corrispondenti della connessione $\nabla^{(p)}$. Indichiamo infine con $F^{(p)}_2$, $F^{(p)}_3, \ldots, F^{(p)}_m, \ldots$ le formule analoghe alle F_2, $F_3, \ldots, F_m$ del n.° 4, ottenute dalle $F^{(p)}_1$ oon successive derivazioni covarianti $(\nabla^{(p)})$. Avremo senz'altro che:

La condizione perchè due connessioni affini di parametri $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$, $\Gamma'^{\delta}_{\gamma\alpha}$ *siano* $(\mathrm{T_p})$-*equivalenti, cioè diano luogo allo stesso trasporto per parallelismo delle direzioni, è che esista un intero* $\mathrm{N}\,(\geq 0)$ *tale che le* $\mathrm{F}^{(p)}_0$, $\mathrm{F}^{(p)}_1, \ldots, \mathrm{F}^{(p)}_{\mathrm{N}}$ *siano algebricamente compatibili, e le loro soluzioni soddisfino alle* $\mathrm{F}^{(p)}_{\mathrm{N}+1}$. Se $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$, $\Gamma'^{\delta}_{\gamma\alpha}$ si interpretano come i parametri delle connessioni affini in due distinte varietà, *la condizione ora detta sarà necessaria e sufficiente perchè queste due varietà si possano rappresentare l'una sull'altra con conservazione del parallelismo.* In particolare: le varietà a connessione affine per le quali è

(124) $$H^{\cdot\cdot\lambda}_{\mu\nu} = 0, \quad K^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = 0 \qquad (\text{e quindi anche } K^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = 0)$$

ossia

(125) $$S^{\cdot\cdot\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{n-1}\,(\delta^{\lambda}_{\nu}\Phi_{\mu} - \delta^{\lambda}_{\mu}\Phi_{\nu}), \quad R^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = \frac{2}{n-1}\,a^{\nu}_{\lambda}\Phi_{\mu\omega},$$

ed esse soltanto, sono (T_p)-equivalenti a uno spazio affine, cioè rappresentabili con conservazione del parallelismo, e anzi in $\infty^{\frac{n(n-1)}{2}}$ modi, su di uno spazio affine: e anche su altre (qualunque) varietà della stessa classe, e in particolare su sè stesse. Vedremo poi (n.° 11), più in generale, quali siano le varietà (T_p)-equivalenti a uno spazio a connessione affine *integrabile*, cioè *a curvatura nulla.*

Veniamo ora ad applicare alla teoria delle trasformazioni T_p le considerazioni svolte al n.° 5. In una A_n si potranno definire dei *sistemi di coordinate normali* $(\mathrm{T_p})$-*invarianti* (diremo: $(\mathrm{T_p})$-*normali*) aventi per origine un punto arbitrario: tali saranno le coordinate normali per la connessione $\nabla^{(p)}$. Sia z^ν un tale sistema di coordinate (T_p)-normali, con l'origine in P_0: e precisamente, sia quel sistema (univocamente determinato) che corrisponde a un dato sistema coordinato x^ν. Se indichiamo (come al n.° 5) con y^ν le coordinate normali per la connessione ∇ — diremo: le *coordinate normali affini* in A_n — corrispondenti allo stesso sistema x^ν, abbiamo subito

$$(126)\qquad \begin{aligned} &\left(\frac{\partial y^\nu}{\partial z^\lambda}\right)_0 = \delta^\nu_\lambda, \quad \left(\frac{\partial^2 y^\nu}{\partial z^\lambda \partial z^\mu}\right)_0 = -\left(\overset{N}{P}{}^\nu_{(\lambda\mu)}\right)_0 = -\frac{2}{n-1}(\delta^\nu_{(\lambda}\Phi_{\mu)})_0, \\ &\left(\frac{\partial^3 y^\nu}{\partial z^\lambda \partial z^\mu \partial z^\tau}\right)_0 = -\left(\overset{N}{P}{}^\nu_{(\lambda\mu\tau)}\right)_0 = -\frac{2}{n-1}\left[\delta^\nu_{(\lambda}D_\mu\Phi_{\tau)} - \frac{4}{n-1}\delta^\nu_{(\lambda}\Phi_\mu\Phi_{\tau)}\right]_0, \text{ ecc...}, \end{aligned}$$

ove le $P^\nu_{\lambda\mu\tau}, \ldots, P^\nu_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m}, \ldots$, sono le quantità costruite per le $P^\nu_{\lambda\mu}$ come $\Gamma^\nu_{\lambda\mu\tau}, \ldots$, $\Gamma^\nu_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m}, \ldots$ (n.¹ 5, form. (44), (45)) per le $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$: l'indice $_N$ significa che esse sono calcolate nel sistema coordinato normale affine y^ν, l'indice $_0$ contrassegna, al solito, i valori calcolati in P_0; infine D è il simbolo dell'*estensione* (n.° 5) corrispondente alla connessione ∇.

Mediante queste formule, e tenendo presenti le (88), esprimiamo agevolmente i *tensori* normali per la connessione $\nabla^{(p)}$ (diremo: *tensori* $(\mathrm{T_p})$*-normali*) $G_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2\ldots\tau_m}^{\cdot\cdot\lambda}$, definiti dalle condizioni — da supporsi soddisfatte in ciascun punto P_0 della A_n in relazione con un sistema coordinato z^ν ivi (T_p)-normale —:

$$(127)\qquad (G_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2\ldots\tau_m}^{\cdot\cdot\lambda})_0 = \left(\frac{\partial^m \overset{N}{P}{}^\lambda_{\mu\nu}}{\partial z^{\tau_1}\partial z^{\tau_2}\ldots\partial z^{\tau_m}}\right)_0$$

pei tensori normali $C_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2\ldots\tau_m}^{\cdot\cdot\lambda}$ relativi alla connessione ∇ — diremo: pei *tensori normali affini* di questa connessione —, e inoltre, pel vettore Φ_ν e le sue *derivate* covarianti; o, che è lo stesso, per le sue *estensioni*: ad es.

$$(128)\qquad G_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda} = C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda} + \frac{2}{n-1}\delta^\lambda_\mu D_\tau\Phi_\nu,$$

$$(129)\qquad G_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2}^{\cdot\cdot\lambda} = C_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2}^{\cdot\cdot\lambda} - \frac{1}{n-1}C_{\mu\nu\cdot\varkappa}^{\cdot\cdot\lambda}(\delta^\varkappa_{\tau_1}\Phi_{\tau_2} + \delta^\varkappa_{\tau_2}\Phi_{\tau_1}) + \frac{2}{n-1}\delta^\lambda_\mu D_{\tau_2\tau_1}\Phi_\nu,$$

. . . .

In generale, abbiamo che il tensore (T_p)-normale d'ordine m, $G_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2\ldots\tau_{m-1}}^{\cdot\cdot\lambda}$, differisce dal tensore normale affine dello stesso ordine soltanto per un gruppo di termini additivi, che dipendono (omogeneamente) dai vettore Φ_ν e dalle sue estensioni degli ordini $1, 2, \ldots m-3, m-1$.

Come i tensori normali per la connessione $\nabla^{(p)}$ si possono interpretare quali tensori (T_p)-normali per la connessione ∇ primitiva, così si potranno definire per questa anche delle *estensioni* (T_p)-*invarianti*, che saranno le estensioni costruite in relazione alla connessione $\nabla^{(p)}$, cioè, a un sistema di coordinate, z^ν, (T_p)-normali. Su questo non occorre fermarci.

Terminiamo indicando i seguenti teoremi di riduzione e di sostituzione per la teoria degli invarianti differenziali di una connessione affine per le trasformazioni T_p: conseguenze immediate di quanto precede e degli analoghi teoremi dati al n.° 5 per gli invarianti differenziali affini:

TEOREMA DI RIDUZIONE. — *Gli invarianti differenziali (tensori o scalari) di ordine* m *di una varietà a connessione affine* ∇ *per le trasformazioni* T_p *che conservano il parallelismo sono gli invarianti simultanei:*

a) *dei tensori* (T_p)-*normali degli ordini* $1, 2, \dots$ m: $G_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$, $G_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}, \dots$, $G_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2\dots\tau_{m-1}}^{\cdot\cdot\lambda}$. Oppure:

b) *di* $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$; *di* $G_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$ *e delle sue derivate* [72] (*o estensioni* $[(T_p)$-*invarianti*]) *prima, seconda,...,* $(m-2)^{ma}$. Oppure:

c) *di* $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$: *di due ad arbitrio dei tensori* $K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $K^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$, $Q_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $H_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ *e delle loro derivate (o estensioni) prime, seconde,...,* $(m-2)^{me}$. Oppure:

d) *di* $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ *e delle sue derivate (o estensioni) prima, seconda,...,* $(m-1)^{ma}$; *di uno dei tensori* $Q_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $K^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$ *e delle sue derivate (o estensioni) prima, seconda,...,* $(m-2)^{ma}$.

TEOREMA DI SOSTITUZIONE. — *Data l'espressione di un invariante differenziale (tensore o scalare) d'ordine* m *della connessione* ∇ *per le trasformazioni* T_p, *in funzione di* $P_{\mu\nu}^\lambda, \dfrac{\partial P_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\tau}, \dots, \dfrac{\partial^{m-1} P_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^{\tau_1}\partial x^{\tau_2}\dots\partial x^{\tau_{m-1}}}$, *o anche di* $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \dfrac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^{\tau_1}}, \dots, \dfrac{\partial^{m-1} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^{\tau_1}\partial x^{\tau_2}\dots\partial x^{\tau_{m-1}}}$, *è lecito sostituire dovunque, in tale espressione, a* $P_{\mu\nu}^\lambda$ (*o* $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$) *e alle sue derivate prime, seconde,...,* $(m-1)^{me}$ *le corrispondenti componenti dei tensori* (T_p)-*normali* $G_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$, $G_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}, \dots$, $G_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2\dots\tau_{m-1}}^{\cdot\cdot\lambda}$.

10. **Altri tensori (T_p)-invarianti (del secondo ordine).** — Vi sono altri notevoli tensori (T_p)-invarianti, oltre a quelli che finora ci si sono presentati. Un importante tensore (T_p)-invariante (del secondo ordine) si esprime (come $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ per $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, o $K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ per $P_{\mu\nu}^\lambda$) per gli elementi del sistema (T_p)-invariante $L_{\mu\nu}^\lambda$ trovato al n.° 6:

$$L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} L_{\lambda\omega}^\nu - \frac{\partial}{\partial x^\omega} L_{\lambda\mu}^\nu + L_{\lambda\omega}^\varkappa L_{\varkappa\mu}^\nu - L_{\lambda\mu}^\varkappa L_{\varkappa\omega}^\nu . \tag{130}$$

[72] mediante la derivazione $\nabla^{(p)}$, o $\nabla^{(p)*}$, o $\nabla^{(q)}$. Cfr. [51].

Che in effetto $L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ sia un tensore, segue ad es. dal fatto che, tra le condizioni d'integrabilità delle (75) troviamo:

$$L'^{\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\delta} = L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} \frac{\partial x^\omega}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\gamma}. \tag{131}$$

Del resto: per le (130), (74) abbiamo agevolmente

$$L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - \frac{1}{n} \delta_\lambda^\nu R_{\omega\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau}, \tag{132}$$ (73)

onde anche, essendo $L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ (T_p)-invariante (oppure: mediante le (114), (121)):

$$L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - \frac{1}{n} \delta_\lambda^\nu K_{\omega\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau}. \tag{133}$$

Dalle (132), (133) abbiamo:

$$L_{\lambda\mu} = L_{\tau\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = R_{\lambda\mu} + \frac{1}{n} R_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = K_{\lambda\mu} + \frac{1}{n} K_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau}, \tag{134}$$

$$L_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = 0. \tag{135}$$

Un altro tensore (T_p)-invariante è

$$\Lambda_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + \delta_\lambda^\nu R_{\omega\mu} \tag{136}$$ (74).

Infatti è anche:

$$\Lambda_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + \delta_\lambda^\nu K_{\omega\mu} = L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + \delta_\lambda^\nu L_{\omega\mu}. \tag{137}$$

Come $\Lambda_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ per $L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, così si può esprimere il secondo tensore pel primo:

$$L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \Lambda_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - \frac{1}{n} \delta_\lambda^\nu \Lambda_{\omega\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau}. \tag{138}$$

Notiamo ancora che si ha:

$$\Lambda_{\lambda\mu} = \Lambda_{\tau\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = R_{\lambda\mu} + R_{\mu\lambda} = K_{\lambda\mu} + K_{\mu\lambda} = L_{\lambda\mu} + L_{\mu\lambda} \tag{139}$$

e che è pure (T_p)-invariante

$$Z_{\lambda\mu} = R_{\lambda\mu} - R_{\mu\lambda} - \frac{4}{n-1} \Phi_{\lambda\mu} = K_{\lambda\mu} - K_{\mu\lambda}. \tag{140}$$

---

(73) Il tensore $L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ anche da J. M. THOMAS, da cui è ottenuto per altra via, è espresso mediante le (132). Ved. **36**, 1926, p. 668. Ved. anche EISENHART, **48**, 1927, p. 35, form. (13.2).

(74) Questo tensore è dato anche da EISENHART, **48**, 1927, p. 35, form. (13.1) $[\Lambda^i_{jkl}]$.

Un tensore (T_p)-invariante, che per tutt'altra via si era presentato a J. M. THOMAS ([75]), si ricava da $H_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$:

$$(141) \qquad T_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = H_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + \frac{1}{n-1}(\delta_\mu^\nu H_{\omega\lambda} - \delta_\omega^\nu H_{\mu\lambda}).$$

La formula data per questo tensore da J. M. THOMAS (l. c.) e da EISENHART ([76]), che nelle nostre notazioni si scrive

$$(142) \quad T_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = S_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + \frac{1}{n-1}(\delta_\lambda^\nu \Phi_{\omega\mu} + \delta_\mu^\nu S_{\omega\lambda} - \delta_\omega^\nu S_{\mu\lambda}) + \frac{1}{(n-1)^2}(\delta_\mu^\nu \Phi_{\lambda\omega} - \delta_\omega^\nu \Phi_{\lambda\mu})$$

si ricava agevolmente dalle (141), tenendo presenti le (117), (123). Si ha

$$(143) \quad T_{\tau\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = 0, \quad T_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = \frac{1}{n-1}(H'_{\lambda\mu} - H_{\mu\lambda}) = \frac{1}{n-1}(S_{\lambda\mu} - S_{\mu\lambda}) + \frac{n-3}{(n-1)^2}\Phi_{\lambda\mu} \ ([77]).$$

Infine: è naturalmente invariante per le T_p, essendolo per le trasformazioni geodetiche T_g, il *tensore di curvatura proiettiva*, o *tensore di Weyl*, $W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ ([78]). Ricorderò che, posto (ved. n.° 6, form. (97)):

$$(144) \qquad \Pi_{\omega\mu\lambda}^{\nu} = \frac{\partial \Pi_{\lambda\omega}^{\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Pi_{\lambda\mu}^{\nu}}{\partial x^\omega} + \Pi_{\lambda\omega}^{\varkappa}\Pi_{\varkappa\mu}^{\nu} - \Pi_{\lambda\mu}^{\varkappa}\Pi_{\varkappa\omega}^{\nu}, \ ([79])$$

$$(145) \qquad \Pi_{\lambda\mu} = \Pi_{\tau\lambda\mu}^{\tau},$$

si ha ([80])

$$(146) \qquad W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \Pi_{\omega\mu\lambda}^{\nu} + \frac{1}{n-1}(\delta_\mu^\nu \Pi_{\omega\lambda} - \delta_\omega^\nu \Pi_{\mu\lambda}),$$

([75]) **36**, 1926, p. 667, form. (7.5).

([76]) **48**, 1927, p. 35, form. (13.5) $[T^{i}_{jkl}]$.

([77]) Cfr. EISENHART, **48**, 1927, form. (13.6); J. M. THOMAS, **36**, 1926, p. 668, form. (7.6). Un altro tensore (T_p)-invariante introdotto da J. M. THOMAS (ibid., form. (7.7)) è, nelle nostre notazioni, $-\frac{1}{n+1}K_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = \frac{S_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau}}{n-1} - \frac{B_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau}}{n+1}$. (Ved. form. (121), (113)).

([78]) WEYL, **11**, 1921, p. 101 [proj. F^{α}_{ikl}]. SCHOUTEN, **22**, 1924, p. 131 $[P_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}]$. EISENHART, **48**, 1927, p. 88 $[W^{i}_{jkl}]$.

([79]) Ved. J. M. THOMAS, **29**, 1925, p. 208, form. (4); T. Y. THOMAS, **28**, 1925, p. 203 o **33**, 1926, p. 726 (*equi-projective curvature tensor*). Si tratta in effetto, secondo la denominazione proposta da T. Y. THOMAS (**28**, ibid.) di un *equi-tensore*, non di un *tensore*. EISENHART, **48**, 1927, p. 99 $[\Pi^{h}_{ijk}]$.

([80]) Ved. J. M. THOMAS, **29**, 1925, p. 208, form. (6).

onde segue

$$W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = B_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + \frac{1}{n+1}\delta_\lambda^\nu(B_{\omega\mu} - B_{\mu\omega}) + \tag{147}$$
$$+ \frac{1}{n^2-1}[\delta_\mu^\nu(nB_{\omega\lambda} + B_{\lambda\omega}) - \delta_\omega^\nu(nB_{\mu\lambda} + B_{\lambda\mu})],$$ [81]

$$W_{\tau\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = 0, \quad W_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = 0. \tag{148}$$

Dalla (147) ricaviamo subito, pel fatto che $W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ è (T_p)-invariante, questa sua espressione in funzione degli elementi della connessione (simmetrica) invariante $\nabla^{(q)}$:

$$W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = Q_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + \frac{1}{n+1}\delta_\lambda^\nu(Q_{\omega\mu} - Q_{\mu\omega}) + \tag{149}$$
$$+ \frac{1}{n^2-1}[\delta_\mu^\nu(nQ_{\omega\lambda} + Q_{\lambda\omega}) - \delta_\omega^\nu(nQ_{\mu\lambda} + Q_{\lambda\mu})].$$

Indicherò ancora una formula, interessante specialmente nel caso in cui è $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0$, che pone in relazione i due tensori $W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ e $T_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ [82]:

$$\begin{aligned} W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} &= R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + \frac{1}{n-1}(\delta_\mu^\nu R_{\omega\lambda} - \delta_\omega^\nu R_{\mu\lambda}) + \\ &+ \frac{1}{n+1}\delta_\lambda^\nu R_{\mu\omega\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} - \frac{1}{n^2-1}(\delta_\mu^\nu R_{\lambda\omega\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} - \delta_\omega^\nu R_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau}) - \\ &- T_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + \frac{2}{n^2-1}\delta_\lambda^\nu\Phi_{\omega\mu} + \frac{2}{(n+1)(n-1)^2}(\delta_\mu^\nu\Phi_{\lambda\omega} - \delta_\omega^\nu\Phi_{\lambda\mu}). \end{aligned} \tag{150}$$

11. **Interpretazioni geometriche.** — Veniamo ad alcune interpretazioni geometriche dei tensori (T_p)-invarianti che abbiamo indicato: o almeno del loro annullarsi.

Quale sia il significato dell'annullarsi di $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ (tensore di torsione della connessione (T_p)-invariante $\nabla^{(p)}$, e primo tensore (T_p)-normale, abbiamo già visto al n.° 6. Aggiungiamo che, nel caso generale, $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ esprime il divario fra la connessione (∇) supposta e la *connessione emisimmetrica*, ad essa intrinsecamente legata, che ha la stessa connessione simmetrica associata (e in particolare, le stesse geodetiche) e ha per tensore di torsione il tensore

$$\frac{1}{n-1}(\delta_\nu^\lambda\Phi_\mu - \delta_\mu^\lambda\Phi_\nu). \tag{151}$$

---

[81] Ved. ad es. EISENHART, 48, 1927, p. 89, form. (32.12).
[82] Si osservi anche la notevole analogia delle (146), (141).

In forma più geometrica: la presenza di un tensore $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ non nullo denota lo scostarsi, anche nel trasporto parallelo *infinitesimale,* della direzione trasportata dalla superficie geodetica iniziale. *Per* n $= 2$ *il tensore* $\mathrm{H}_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ *è sempre nullo,* come è ben naturale.

L'annullarsi, *insieme ad* $\mathrm{H}_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = \mathrm{G}_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$, del secondo tensore (T_p)-normale $G_{\lambda\mu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\nu}$, equivale all'annullarsi di $H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ e $K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ (e quindi anche $K^{*}{}_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$). Come abbiamo già osservato (n.° 9) questa è la condizione perchè la supposta varietà *sia rappresentabile, con conservazione del parallelismo, su di uno spazio affine.* L'annullarsi di $G_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$ soltanto ha, per la connessione (T_p)-invariante $\nabla^{(p)}$, il significato (indicato al n.° 5) che ha l'annullarsi di $C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$ per la connessione ∇: non ho presente una interpretazione semplice e diretta della condizione $G_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda} = 0$ per la connessione ∇.

L'annullarsi di $K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ è, naturalmente, *la condizione necessaria e sufficiente perchè la connessione* $(\mathrm{T_p})$-*invariante,* $\nabla^{(\mathrm{p})}$, *sia integrabile*: e quindi anche, *è condizione sufficiente perchè il trasporto lineare delle direzioni subordinato alla connessione* ∇ *sia integrabile* (dia luogo cioè a una *direzione* parallela che non dipende dalla curva di trasporto). Ma *non è, in generale, condizione necessaria,* perchè ciò avvenga. Infatti se esprimiamo che, nel trasporto ciclico secondo la legge d'equipollenza della connessione ∇, un qualunque vettore ξ si porta in un vettore $\xi + D\xi$ (le $D\xi^\lambda$ essendo date dalle (10)) che ha la stessa direzione di ξ, troviamo subito che deve essere

$$(152) \qquad \delta_{\lambda\tau}^{\varkappa\sigma} R_{\omega\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} + \delta_{\lambda\nu}^{\varkappa\sigma} R_{\omega\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} = 0 \qquad \text{(ved. ([58]), ([18]))}$$

onde, ponendo $\sigma = \nu$ e sommando, ricaviamo

$$(153) \qquad R_{\omega\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} = \frac{1}{n}\delta_\tau^\varkappa R_{\omega\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}, \quad \text{cioè} \quad L_{\omega\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} = 0.$$

Viceversa, dalle (153) seguono subito le (152). Dunque: *perchè alla connessione* ∇ *sia subordinato un parallelismo assoluto delle direzioni è necessario e sufficiente che sia nullo il tensore* $\mathrm{L}_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$. (O, che è lo stesso, $\Lambda_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$). Ciò avverrà certamente, come mostrano anche le (133), se è nullo $K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$: ma non viceversa, giacchè l'annullarsi di $L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ porta soltanto

$$(154) \qquad K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \frac{1}{n}\,\delta_\lambda^\nu K_{\omega\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau}.$$

Notiamo questa interpretazione geometrica: è ovvio che, in generale, in una varietà a connessione affine, *la connessione determina una legge di con-*

fronto delle lunghezze, cioè una metrica, pei vettori le cui direzioni appartengono a una serie di direzioni parallele ([83]), nello stesso modo che in uno spazio affine è sempre possibile il confronto delle lunghezze di due vettori paralleli. Se il parallelismo (delle direzioni) è integrabile $\left(L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=0\right)$ e allora soltanto ha senso il considerare il divario tra le lunghezze iniziale e finale di un vettore per trasporto ciclico: troviamo che tale divario, per la connessione $\nabla^{(p)}$ (e anche per la connessione ∇ e tutte le sue (T_p)-trasformate), è allora *indipendente dalla direzione del vettore trasportato,* ma non nullo in generale: precisamente è per le (10), (154), supposto per semplicità che il ciclo sia un *parallelogrammo* infinitesimo,

$$\frac{Dl}{l}=-\frac{1}{n}K_{\omega\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau}d_1x^{\omega}d_2x^{\mu}. \tag{155}$$

Dunque: nelle A_n in cui $L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=0$, entro ciascuna totalità di vettori paralleli, viene determinata (dalla connessione $\nabla^{(p)}$) una metrica di WEYL, invariante per le trasformazioni T_p, che ha una curvatura segmentaria (« Streckenkrümmung », o « Streckenwirbel » ([84])), (la stessa per tutte le totalità di vettori paralleli), espressa dal tensore

$$\frac{1}{n}K_{\omega\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau}=\frac{1}{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}L_{\omega\tau}^{\tau}-\frac{\partial}{\partial x^{\omega}}L_{\mu\tau}^{\tau}\right). \tag{156}$$

Questo è, come lo « Streckenwirbel » di WEYL, il rotore di un vettore ([85]), Ψ_ν, determinato a meno di un gradiente additivo. Se il vettore Ψ_ν è esso stesso il gradiente di uno scalare, cioè, se la connessione $\nabla^{(p)}$ è *equiaffine,* e allora soltanto, nella supposta A_n la metrica di WEYL detta poco sopra è anch'essa integrabile.

Le varietà in cui $L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=0$ sono anche caratterizzate dal fatto che per esse è possibile una rappresentazione puntuale, con conservazione del parallelismo, su di una varietà a connessione affine *integrabile*: cioè, che per esse possibile mediante una trasformazione (72), con opportuna scelta del vettore ψ_ν, rendere

---

([83]) Ved. FRIESECKE, **27**, 1925, p. 110 (« Da Vektoren derselben Richtung miteinander verglichen werden können, so hat jede parallele Richtungsfolge durch die Vektorübertragung eine Metrik erhalten »).

([84]) Ved. per es. WEYL, **16**, 1923, p. 21.

([85]) Più in generale, per ogni connessione affine $R_{\omega\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau}$ è il rotore di un vettore: ved. EISENHART, **48**, 1927, p. 9.

nullo il tensore di curvatura, $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ ([86]). In altri termini, esse sono le varietà (T_p)-*equivalenti* ad A_n a curvatura nulla, a cui avevamo accennato al n.° 9; ed è assai facile provare questa proprietà appunto in base a quanto allora fu stabilito ([87]).

Veniamo infine ai tensori $T_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$. Essi sono sempre nulli per $n=2$: pel primo di essi ciò è evidente, essendo per $n=2$ (come abbiamo già notato) sempre $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}=0$ e quindi anche $H_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=0$. Ma è opportuno osservare che dalla stessa forma delle (141), (146) risulta *a priori* che i tensori $T_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ si annullano per $n=2$. In effetto è agevole verificare che più in generale *se* $P_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ *è un sistema emisimmetrico rispetto ad* ω, μ *e del resto arbitrario, il sistema*

$$P_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}+\frac{1}{n-1}(\delta_\mu^\nu P_{\omega\lambda}-\delta_\omega^\nu P_{\mu\lambda}) \qquad (P_{\lambda\mu}=P_{\tau\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\tau}) \tag{157}$$

per $n=2$ *è sempre nullo.* Se $n\neq 2$, $T_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=0$ esprime che la differenza fra gli incrementi che subisce, nel trasporto ciclico relativo alle connessioni (T_p)-invarianti $\nabla^{(p)}$ e $\nabla^{(q)}$, un qualunque vettore, giace nella 2-direzione del ciclo. E infine $W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=0$, come è ben noto, è *la condizione, perchè la varietà sia rappresentabile, con conservazione delle geodetiche, su di uno spazio affine:* o anche, perchè la connessione simmetrica associata ad essa sia, come si dice, proiettivo-euclidea ([88]).

([86]) EISENHART ha dimostrato (48, 1927, pp. 35-36) che per questo è necessario e sufficiente che sia nullo il tensore $\Lambda_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$: ma per le (137), (138), ciò equivale all'annullarsi di $L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$.

([87]) Basta osservare che, data una A_n a curvatura nulla e una varietà A_n' (T_p)-equivalente ad essa, per la (114) e la prima delle $F_1^{(p)}$ (n.° 9) si dovrà avere

$$K'^{\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma}\theta_\delta^\nu=\frac{2}{n-1}\Phi_{\omega\mu}\theta_\alpha^\omega\theta_\beta^\mu\theta_\gamma^\nu$$

onde $K'^{\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma}=\frac{2}{n-1}\Phi_{\omega\mu}\theta_\alpha^\omega\theta_\beta^\mu\delta_\gamma^\delta$, e infine $K'^{\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{n}\delta_\gamma^\delta K'^{\cdot\cdot\cdot\varepsilon}_{\alpha\beta\varepsilon}$, cioè $L'^{\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma}=0$.

E viceversa, se questa condizione è soddisfatta, prese le θ_α^ω ad arbitrio, la A_n' risulterà in effetto rappresentata con conservazione del parallelismo su di una A_n a curvatura nulla, il cui tensore di torsione $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ ha in coordinate x'^α le componenti $S'^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta}=H'^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta}-\frac{1}{n-1}(\delta_\alpha^\gamma\Phi'_\beta-\delta_\beta^\gamma\Phi'_\alpha)$. $H'^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta}$ essendo il tensore di torsione della connessione (T_p)-invariante, $\nabla'^{(p)}$, corrispondente alla connessione affine di A_n', e Φ'_α essendo il vettore, determinato a meno di un arbitrario gradiente additivo, che ha per rotore $\frac{n-1}{2n}K'^{\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\delta}$.

([88]) Cfr. per es. SCHOUTEN, 22, 1924, p. 130.

12. **Trasformazioni (T_{pc}) che conservano il parallelismo e la curvatura. Caso delle connessioni integrabili. Caso degli spazi di gruppo.** — Una importante sottoclasse di trasformazioni T_p è formata dalle trasformazioni, T_{pc}, che *conservano il parallelismo e la curvatura:* cioè, dalle T_p per le quali anche il tensore di curvatura $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ è invariante. Come EISENHART osserva (**48**, 1927, p. 32), queste trasformazioni si ottengono dalle (72) facendovi l'ipotesi particolare che *il vettore ψ_ν sia il gradiente di uno scalare* (arbitrario).

Vediamo subito che per le T_{pc} è invariante anche il tensore emisimmetrico $\Phi_{\lambda\mu}$ (dato dalle (113)), rotore del vettore d'EINSTEIN Φ_ν. In effetto per una (72) qualunque si ha [89]

$$\Phi_{\lambda\mu} = \Phi_{\lambda\mu} + (n-1)\left(\frac{\partial\psi_\mu}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial\psi_\lambda}{\partial x^\mu}\right). \tag{158}$$

Dunque sarà $\Phi_{\lambda\mu} = \Phi_{\lambda\mu}$ se ψ_ν è il gradiente di uno scalare. Ma anche inversamente: se in una T_p il tensore $\Phi_{\lambda\mu}$ è invariante, il corrispondente vettore ψ_ν è di necessità un gradiente, cioè la T_p è una T_{pc}. Dunque: le T_{pc} *sono le T_p per le quali il tensore $\Phi_{\lambda\mu}$ è invariante.* E anzi:

Gli invarianti differenziali di una varietà a connessione affine ∇ per le trasformazioni $\mathrm{T_{pc}}$ *che conservano il parallelismo e la curvatura sono gli invarianti differenziali simultanei della connessione* ($\mathrm{T_p}$)*-invariante* $\nabla^{(\mathrm{p})}$ *e del tensore* $\Phi_{\lambda\mu}$. Naturalmente però la connessione $\nabla^{(p)}$ non è una (T_{pc})-trasformata della connessione primitiva ∇: a meno che per questa il tensore $\Phi_{\lambda\mu}$ non si annulli.

Supponiamo in particolare che la connessione primitiva ∇ sia *integrabile*, cioè *a curvatura nulla* ($\mathrm{R}_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0$): o ancora, che ammetta un trasporto *assoluto* per equipollenza dei vettori. Questo è il caso che mi si è presentato in un recente lavoro [90]. In questo caso, il tensore $\Phi_{\lambda\mu}$ rientra esso stesso fra gli invarianti della connessione $\nabla^{(p)}$: infatti per la (121) si ha

$$K_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = \frac{2n}{n-1}\,\Phi_{\lambda\mu} \tag{159}$$

cosicchè $\dfrac{2n}{n-1}\Phi_{\lambda\mu}$ *è il tensore di curvatura segmentaria della connessione* $\nabla^{(\mathrm{p})}$, che naturalmente nell'attuale ipotesi ammette un *parallelismo assoluto* delle direzioni. Di più, essendo in generale

$$\begin{aligned} S_{\lambda\mu} - S_{\mu\lambda} &= R_{\lambda\mu} - R_{\mu\lambda} - (B_{\lambda\mu} - B_{\mu\lambda}) = R_{\lambda\mu} - R_{\mu\lambda} + B_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = \\ &= R_{\lambda\mu} - R_{\mu\lambda} + R_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} - S_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = R_{\lambda\mu} - R_{\mu\lambda} + R_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} + \Phi_{\lambda\mu}, \end{aligned} \tag{160}$$

---

[89] Ved. EISENHART, **48**, **1927**, p. 33.

[90] Ved. **55**, **1929**, p. 54 e seg.

nel caso attuale ($R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0$) è

(161) $$S_{\lambda\mu} - S_{\mu\lambda} = \Phi_{\lambda\mu},$$

e quindi, per le (143), si ha

(162) $$2(n-2)\Phi_{\lambda\mu} = (n-1)(H_{\lambda\mu} - H_{\mu\lambda}) = (n-1)^2 T_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau}.$$

Ne segue facilmente, tenendo presente la (114), che: *per* n > 2 *gli invarianti differenziali, di ordine* m *qualunque, di una connessione integrabile* ∇ *per le* $\mathrm{T_{pc}}$ *sono gli invarianti simultanei del tensore* $\mathrm{H}_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ *e delle sue derivate covarianti* (con la derivazione $\nabla^{(p)}$) *fino all'ordine* m $- 1$ [91]. Notiamo ancora che le (150), (161) mostrano che, nelle attuali ipotesi ($R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0$, $n > 2$) $W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ può esprimersi (omogeneamente) pel solo tensore $T_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$: cosicchè l'annullarsi di $T_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ porta anche l'annullarsi di $W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ [92].

Per $n = 2$, essendo allora necessariamente $H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = 0$, gli invarianti cercati sono gli invarianti simultanei del tensore $\Phi_{\lambda\mu}$ e delle sue derivate covarianti (con la derivazione $\nabla^{(p)}$) fino all'ordine $m-2$ [93].

Ho mostrato (nel lav. **55** già cit.) come questa teoria possa servire di base per una possibile modificazione della più recente teoria unitaria del campo elettromagnetico e gravitazionale di EINSTEIN (**52**, 1928; **54**, **58**, 1929): tale da permettere di rappresentare il potenziale elettromagnetico mediante un vettore *determinato soltanto a meno di un gradiente additivo arbitrario* [94].

Sia ora la supposta varietà (a connessione affine, senza curvatura) uno *spazio di gruppo* (ved. l. c. [36]), tale cioè che $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0$, $R^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = 0$. Essa *non resta tale*, in generale, per una trasformazione T_p, e neppure per una T_{pc}: condizione necessaria e sufficiente perchè una trasformazione (72) muti uno spazio di gruppo in un nuovo spazio di gruppo è, come si vede agevolmente, che sia

(163) $$H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = 0,$$

e inoltre, che il vettore ψ_λ nelle (72) sia soluzione del sistema ai differenziali totali, *completamente integrabile,*

(164) $$\nabla_\mu\psi_\lambda = 2\psi_\mu\left(\psi_\lambda - \frac{1}{n-1}\Phi_\lambda\right);$$

---

[91] Ved. **55**, 1929, p. 55. Ivi non avevo notato esplicitamente che il caso $n = 2$ va escluso.

[92] Ved. **55**, 1929, p. 55, form. (41). I tensori (T_{pc})-invarianti del 2° ordine possono tutti esprimersi pei due (indipendenti) $H_{\lambda\mu} + H_{\mu\lambda}$ e $T_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$.

[93] Il solo tensore (T_{pc})-invariante del 2° ordine è $\Phi_{\lambda\mu}$. (Cfr. nota prec.).

[94] Cfr. SCHOUTEN, **19**, 1923, p. 855.

onde segue anche, per le (163), tenuto presente che negli spazi di gruppo è $\nabla_\mu \Phi_\lambda = 0$, che *il vettore* ψ_ν *è il gradiente di uno scalare:*

$$\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x^\lambda} = 0, \tag{165}$$

(cosa del resto *a priori* prevedibile, perchè una trasformazione T_p di uno spazio di gruppo in un altro spazio di gruppo non potrà essere che una T_{pc}).

Dunque: *soltanto gli spazi di gruppo a connessione affine emisimmetrica ammettono delle trasformazioni* (non identiche, nè isomorfiche) *in altri spazi di gruppo, che conservino il parallelismo.* Queste rappresentazioni sono date dalle (72), ove però ψ_λ è un vettore covariante soddisfacente alle (164), (165).

Il *vettore di Einstein* Φ_λ nelle attuali ipotesi soddisfa esso stesso a queste condizioni (164), (165): cosicchè nel caso attuale la connessione $\nabla^{(p)}$ (manifestamente a curvatura e torsione nulle) è una (T_{pc})-trasformata della connessione primitiva. *Gli spazi di gruppo a connessione emisimmetrica, ed essi soltanto, tra gli spazi di gruppo, sono dunque rappresentabili, con conservazione del parallelismo, su di uno spazio affine.* Se si tiene presente che lo spazio affine è lo spazio *dei gruppi abeliani*, si ha dunque una relazione molto semplice, almeno nell'interpretazione geometrica, tra questi gruppi e quelli a connessione emisimmetrica [95]. Tale relazione appare, in certo modo, come una generalizzazione dell'*isomorfismo* classico, che corrisponde invece [96] alla rappresentabilità *con conservazione dell'equipollenza.*

INDICE BIBLIOGRAFICO

1854 - **1.** B. Riemann, *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen,* « Göttinger Akad. Abh. », 13, 1868; « Ges. Mathem. Werke », (2ª ediz, 1892, pp. 272-287). Neu herausgegebeu und erläutert von H. Weyl, Berlin, Springer, 1923.

1869 - **2.** E. B. Christoffel, *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades,* « Journal für r. a. Mathem. (Crelle) », B. 70, 1869, pp. 46-70.

1896 - **3.** T. Levi-Civita, *Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche.* « Annali di Matem. », (2), t. 24, 1896, pp. 255-300.

1899 - **4.** G. Hessenberg, *Ueber die Invarianten linearer und quadratischer Differentialformen und ihre Anwendung auf die Deformation der Flächen.* « Acta Mathem. » t. 23, 1899, pp. 121-170.

1900 - **5.** G. Ricci e T. Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications.* « Mathem. Annalen », B. 54, 1900, pp. 125-201.

---

(95) dei quali Schouten ha dato (**41**, 1926), appunto per via geometrica, una semplice caratterizzazione.

(96) Ved. Cartan, **42**, 1927, p. 10 e seg.

1917 - **6.** F. SEVERI, *Sulla curvatura delle superficie e varietà.* « Rendiconti Circolo Matem. Palermo », t. 42, 1917, pp, 227-259.

1918 - **7.** H. WEYL, *Reine Infinitesimalgeometrie.* « Mathem. Zeitschrift », B. 2, 1918, pp. 384-411.

1919 - **8.** H. VERMEIL, *Bestimmung einer quadratischer Differentialform aus den Riemannschen und den Christoffelschen Differentialinvarianten mit Hilfe von Normalkoordinaten.* « Mathem. Annalen », B. 79, 1919, pp. 289-312.

1920 - **9.** E. BOMPIANI, *Le trasformazioni puntuali fra varietà che conservano il parallelismo di Levi-Civita.* « Rendiconti Accad. Lincei », (5), vol. 29, 1920, 1° sem., pp. 347-351.

1921 - **10.** E. BOMPIANI, *Studi sugli spazi curvi. Del parallelismo in una varietà qualunque.* « Atti Istit. Veneto », t. 80, 1920-21, pp. 355-386, 839-859.

» - **11.** H. WEYL, *Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung.* « Göttinger Nachrichten », 1921, pp. 99-112.

1922 - **12.** L. P. EISENHART e O. VEBLEN, *The Riemann geometry and its generalisation.* « Proceedings Nat. Acad. of Sciences », vol. 8, 1922, pp. 19-24.

» - **13.** O. VEBLEN, *Normal coordinates for the geometry of paths.* Ibid., pp. 192-197.

» - **14.** J. A. SCHOUTEN, *Ueber die verschiedenen Arten der Uebertragung in einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die einer Differentialgeometrie zu Grunde gelegt werden können.* « Mathem. Zeitschrift », B. 13, 1922, pp. 56-81.

1923 - **15.** R. WEITZENBÖCK, *Invariantentheorie.* P. Noordhoff, Groningen, 1923.

» - **16.** H. WEYL, *Mathematische Analyse des Raumproblems.* Berlin, Springer 1923.

» - **17.** L. P. EISENHART, *The geometry of paths and general relativity.* « Annals of Mathem. », (2), vol. 24, 1923, pp. 367-392.

» - **18.** O. VEBLEN e T. Y. THOMAS, *The geometry of paths.* « Transactions of the Amer. Mathem. Society », vol, 25, 1923, pp. 551-608.

» - **19.** J. A. SCHOUTEN, *On a non-symmetrical affine field theory.* « Proceedings Koninklijke Akad. v. Wetenschappen », Amsterdam, vol. 26, 1923, pp. 850-857.

» - **20.** É. CARTAN, *Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée.* « Annales de l'École Norm. Supérieure », Paris, (3), 1ère Partie: t. 40, 1923, pp. 325-412; t. 41, 1924, pp. 1-25, 2ème Partie: ibid. t. 42, 1925, pp. 17-88.

1924 - **21.** G. HERGLOTZ, *Ueber die Bestimmung eines Linielements in Normalkoordinaten aus dem Riemannschen Krümmungstensor.* « Mathem. Annalen », B. 93, 1924, pp. 46-53.

» - **22.** J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül.* Berlin, Springer 1924.

» - **23.** A. FRIEDMANN e J. A. SCHOUTEN, *Ueber die Geometrie der halbsymmetrischen Uebertragungen.* « Mathem. Zeitschrift », B. 21, 1924, pp. 211-223.

» - **24.** É. CARTAN, *Les récentes généralisations de la notion d'espace.* « Bulletin des Sciences Mathém. », t. 48, 1924, pp. 294-320.

» - **25.** É. CARTAN, *Sur les variétés à connexion projective,* « Bulletin de la Soc. Mathém. de France », vol. 52, 1924, pp. 205-241.

» - **26.** J. A. SCHOUTEN, *On the place of conformal and projective geometry in the theory of linear displacements.* « Proceedings Koninklijke Akad. v. Wetenschappen », Amsterdam, vol. 27, 1924, pp. 407-424.

1925 - **27.** H. FRIESECKE, *Vektorübertragung, Richtungsübertragung, Metrik.* « Mathem. Annalen », B. 94, 1925, pp. 101-118.

» - **28.** T. Y. THOMAS, *On the projective and equi-projective geometry of paths.* « Proceedings Nat. Acad. of Sciences », vol. 11, 1925, pp. 199-203.

1925 - **29.** J. M. THOMAS, *Note on the projective geometry of paths.* Ibid., pp. 207-209.

» - **30.** T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto.* Roma, Stock, 1925.

1926 - **31.** R. LAGRANGE, *Calcul différentiel absolu.* « Mémorial des Sciences Mathématiques », XIX, Paris, Gauthier-Villars, 1926.

» - **32.** T. Y. THOMAS, *The identities of affinely connected manifolds.* « Mathem Zeitschrift », B, 25, 1926, pp. 714-722.

» - **33.** T. Y. THOMAS, *A projective theory of affinely connected manifolds.* Ibid., pp. 723-733.

» - **34.** J. M. THOMAS, *On normal coördinates in the geometry of paths.* « Proceedings Nat. Acad. of Sciences », vol. 12, 1926, pp. 58-63.

» - **35.** J. M. THOMAS, *On various geometries giving a unified electric and gravitational theory.* Ibid., pp. 187-191.

» - **36.** J. M. THOMAS, *Asymmetric displacement of a vector.* « Transactions of the Amer. Mathem. Society », vol. 28, 1926, pp. 658-670.

» - **37.** O. VEBLEN e J. M. THOMAS, *Projective invariants of affine geometry of paths.* « Annals of Mathematics », (2), vol. 27, 1926, pp. 279-296.

» - **38.** J. A. SCHOUTEN, *Erlanger Programm und Uebertragungslehre. Neue Gesichtpunkt zur Grundlegung der Geometrie.* « Rendiconti Circolo Matem. di Palermo », t. 50, 1926, pp. 142-169.

» - **39.** É. CARTAN e J. A. SCHOUTEN, *On the Geometry of Group-manifold of simple and semi-simple Groups.* « Proceedings Koninklijke Akad. v. Wetenschappen ». Amsterdam, vol. 29, 1926, pp. 803-815.

» - **40.** É. CARTAN e J. A. SCHOUTEN, *On Riemannian Geometries admitting an absolute parallelism.* Ibid., pp. 933-946.

» - **41.** J. A. SCHOUTEN, *Sur les groupes à connexion sémisymétrique.* « Compte rendu au Congrès de Lyon 1926 de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences ».

1927 - **42.** É. CARTAN, *La géométrie des groupes de trasformations,* « Journal de Mathématiques », t. 6, 1927, pp, 1-119.

» - **43.** T. Y. THOMAS e A. D. MICHAL, *Differential invariants of affinely connected manifolds.* « Annals of Matematics », (2), vol. 28, 1927, pp. 196-236.

» - **44.** E. BORTOLOTTI, *Spazi subordinati: equazioni di Gauss e Codazzi.* « Bollettino Un. Matem. Italiana », VI, 1927, pp. 134-137.

» - **45.** E. BORTOLOTTI, *Reti di Cebiceff e sistemi coniugati nelle* V_n *riemanniane.* « Rendiconti Accad. Lincei », (6), vol. 5, 1927, pp. 741-747.

» - **46.** T. Y. THOMAS, *The replacement theorem and related questions in the projective geometry of paths.* « Annals of Mathematics », (2), vol. 28, 1927, pp. 549-561.

» - **47.** O. VEBLEN, *Invariants of quadratic differential forms.* « Cambridge Tracts », 24. Cambridge, University Press, 1927.

» - **48.** L. P. EISENHART, *Non-Riemannian Geometry.* « American Mathem. Society Colloquium Publications », vol. VIII, New York, 1927.

1928 - **49.** J. A. SCHOUTEN, *Die Geometrien der kontinuirlichen Transformationsgruppen.* « Jahresb. d. Deut. Mathem. Vereinigung », 2 Abt. (Angelegenheiten), B. 37, 1928, pp. 20-23.

» - **50.** V. HLAVATY, *Bemerkung zur Arbeit von Herrn T. Y. Thomas: « A projective theory of affinely connected manifolds ».* « Mathem. Zeitschrift », B. 28, 1928, pp. 142-146.

» - **51.** A. EINSTEIN, *Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus.* « Sitzungsber. Preuss. Akad. d. Wissenschaften », Berlin, 1928, pp. 217-221.

1928 - **52.** A. EINSTEIN, *Neue Möglichkeit für eine einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität.* Ibid., pp. 224-227.

» - **53.** R. WEITZENBÖCK, *Differentialinvarianten in der Einsteinschen Theorie des Fernparallelismus.* Ibid., pp. 466-474.

1929 - **54.** A. EINSTEIN, *Zur einheitlichen Feldtheorie.* Ibid., 1929, pp. 2-7.

» - **55.** E. BORTOLOTTI, *Parallelismo assoluto nelle varietà a connessione affine e nuove vedute sulla Relatività.* « Memorie Accad. Bologna », (8), t. 6, 1928-29, pp. 45-58.

» - **56.** E. BORTOLOTTI, *Stelle di congruenze e parallelismo assoluto: basi geometriche di una recente teoria di Einstein.* « Rendiconti Accad. Lincei », (6), vol. 9, 1929, pp. 530-538.

» - **57.** T. LEVI-CIVITA, *Vereinfachste Herstellung der Einsteinschen einheitlichen Feldgleichungen.* « Sitzungsber. Preuss. Akad. d. Wissenschaften », Berlin, 1929, pp. 137-153.

» - **58.** A. EINSTEIN, *Einheitliche Feldtheorie und Hamiltonsches Prinzip.* Ibid., pp. 156-159.

» - **59.** T. Y. THOMAS, *Determination of affine and metric spaces by their differential invariants.* « Mathem. Annalen », B. 101, 1929, pp. 713-728.

» - **60.** J. A. SCHOUTEN, *Zur Geometrie der kontinuierlichen Transformationsgruppen.* « Mathem. Annalen », B. 102, 1929, pp, 244-272.

Sull'Algebra delle successioni.

Memoria 1ª di ANTONIO MAMBRIANI (a Bologna).

Sunto. - *L'A. espone i primi elementi di un' « Algebra delle successioni » (Algebra che viene ad includere l'Algebra ordinaria), ed i procedimenti seguiti sono* l'immagine nell'elementare *di quei procedimenti trascendenti che consistono nell'operare formalmente sulle serie infinite (convergenti o no) formate colle successioni considerate.*

Il presente lavoro (suddiviso in due Memorie per esigenze di stampa) contiene i primi tre capitoli della mia Tesi, dal titolo *Algoritmia per la risoluzione di equazioni alle differenze e differenziali, lineari,* presentata nel *novembre 1926* all'Università di Bologna pel conseguimento della laurea in Matematica pura. (Ho lasciato quasi inalterato l'ordinamento dell'originale: ho, solamente, apportato ad alcune parti una maggiore concisione e fatto qualche aggiunta).

Alcune importanti questioni, propostemi dal prof. S. PINCHERLE, relative ad una notevole classe di equazioni funzionali, mi portarono a considerare particolari successioni, alle quali applicai, al fine di potere esprimere le soluzioni di quelle equazioni, degli speciali algoritmi: fu, appunto, dallo studio di tali algoritmi che mi nacque l'idea di costruire la presente *Algebra delle successioni.* Non passerò sotto silenzio che tale idea mi suscitò, dapprima, diverse titubanze e riflessioni. « Una successione (i cui elementi siano o numeri, o funzioni, o ecc.) — pensavo — viene ora considerata come *una quantità a sè stante,* dipendente esclusivamente e dal valore, o dalla natura dei singoli suoi elementi, e dall'ordine secondo cui sono disposti questi elementi (come, dunque, una *quantità complessa ad un' infinità numerabile di unità*): basta pensare alle successioni di numeri individuanti funzioni analitiche. Così riguardate, le successioni hanno, senza alcun dubbio, nelle Matematiche, un' importanza estremamente grande; tuttavia, non si è venuti ancora nella decisione, per quanto a me consta, di tracciare le prime vere basi di un'Algebra delle successioni. Nè si può dire che il bisogno di una tale Algebra non sia sentito, perchè spessissimo si ricorre ai metodi trascendenti (voglio dire all' aiuto delle serie infinite di numeri e di funzioni) per dedurre delle identità e delle formule che appartengono a quell'Algebra e che potrebbero stabilirsi invece, sovente, per via breve e del tutto elementare ». Vinsi, poi, a poco a poco, le dette esitazioni cercando di rendermi conto dei vantaggi che l'Algebra stessa poteva apportare nelle applicazioni; ed a Tesi ultimata mi sentii veramente contento del passo compiuto. Ora, dopo ben più di tre anni, mi ritrovo con le stesse idee e direi più sentite pel fatto che, nel frattempo, un matematico di valore già riconosciuto, il RENÉ LAGRANGE, ha creduto opportuno di proporre algoritmi [1] del tipo di quelli da me studiati, che ha poi applicati in due Note successive [2].

Nel presente lavoro ho cercato di esporre, in modo ordinato, i primi elementi della detta Algebra delle successioni (Algebra che viene ad includere l'Algebra ordinaria); ed i procedimenti seguiti sono ***l'immagine nell'elementare*** *di quei procedimenti trascendenti che consistono nell'operare formalmente sulle serie infinite (convergenti o no) formate colle successioni considerate.*

Il lavoro è diviso in tre capitoli; nel primo di essi si studiano due operazioni sulle successioni, che ho chiamate *moltiplicazione isobarica* e *moltiplicazione binomiale*, nel secondo capitolo vengono studiate le operazioni inverse di quelle, e cioè *la divisione isobarica* e *la divisione binomiale*, nel terzo capitolo, infine (e ciò forma l'argomento della 2ª Memoria), viene sviluppata, coll'intervento delle nominate operazioni, l'Algebra delle successioni.

Non si deve credere, però, che quanto ho svolto possa bastare; qui pure si sbocca naturalmente in procedimenti più complicati e non più elementari, come si avrà modo di comprendere anche nel presente scritto. Intanto, è bene che abbia una certa sistemazione ed approvazione questa prima parte elementare.

Faranno seguito a questo lavoro le relative applicazioni, trattate quasi tutte nella Tesi, allo studio dei cosidetti polinomi di APPELL, dei numeri di BERNOULLI e di EULERO, delle differenze e dei valori medi di 0^n, delle somme di potenze simili, dei fattoriali, delle serie di fattoriali, delle equazioni ricorrenti, delle equazioni alle differenze e differenziali lineari. L'intervento della nominata Algebra permetterà di giungere, con metodo elementare e con notevole semplicità, a formule conosciute su tali argomenti ed anche ad altre nuove.

Terminando questa breve introduzione, mi è caro ringraziare qui vivamente coloro che, con tanta benevolenza, mi incitarono alla pubblicazione del presente lavoro.

---

(1) R. LAGRANGE, *Sur un algorithme des suites.* « Comptes Rendus », T. 184 (1927), pp. 1405-1407 (séance du 13 juin).

(2) R. LAGRANGE, *Sur certaines suites de polynomes.* « Comptes Rendus », T. 185 (1927), pp. 175-178 (séance du 11 juillet); idem, pp. 444-446 (séance du 8 août).

CAPITOLO PRIMO

Moltiplicazione isobarica e moltiplicazione binomiale.

§ 1. Definizioni.

1. Considerate due successioni di elementi (numeri o funzioni)

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \dots, \quad a_n, \dots,$$
$$b_0, \quad b_1, \quad b_2, \dots, \quad b_n, \dots, \text{ (1)}$$

diremo che

le (a_n) e (b_n) sono successioni *inizialmente uguali* se è $a_0 = b_0$, e, precisamente, *inizialmente uguali d'ordine* m se è $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \dots$, $a_{m-1} = b_{m-1}$, $a_m \neq b_m$ (2);

le (a_n) e (b_n) sono successioni *ultimamente uguali* se è sempre, da un indice in poi, $a_n = b_n$, e, precisamente, *ultimamente uguali d'ordine* m se è $a_{m-1} \neq b_{m-1}$, $a_m = b_m$, $a_{m+1} = b_{m+1}$, $a_{m+2} = b_{m+2}, \dots$;

le (a_n) e (b_n) sono successioni *totalmente uguali* o, più semplicemente, *uguali* od *identiche* se è $a_n = b_n$ per ogni valore dell'indice n (si scriverà $a_n \equiv b_n$). Tali successioni potrebbero anche dirsi « inizialmente uguali d'ordine ∞ » od « ultimamente uguali d'ordine 0 » (3).

Parallelamente, diremo che

la (a_n) è successione *inizialmente nulla* se è $a_0 = 0$, e, precisamente, *inizialmente nulla d'ordine* m se è $a_0 = 0$, $a_1 = 0, \dots$, $a_{m-1} = 0$, $a_m \neq 0$;

la (a_n) è successione *ultimamente nulla* se è sempre, da un indice in poi, $a_n = 0$, e, precisamente, *ultimamente nulla d'ordine* m se è $a_{m-1} \neq 0$, $a_m = 0$, $a_{m+1} = 0$, $a_{m+2} = 0, \dots$;

la (a_n) è successione *totalmente nulla*, o, più semplicemente, è successione *nulla*, se è $a_n = 0$ per ogni valore dell'indice n (si scriverà $a_n \equiv 0$). Tale successione potrebbe anche dirsi « inizialmente nulla d'ordine ∞ » od « ultimamente nulla d'ordine 0 » (4).

---

(1) Per indicare brevemente una successione, quale la prima di quelle soprascritte, si scriverà a_n, $(n = 0, 1, 2, \dots)$; oppure, ancora più brevemente, s'adotterà il simbolo (a_n) dove sarà sempre sottinteso, a meno di espressa menzione contraria, che *la variabile* n *assume come primo valore lo zero*.

(2) Il vocabolo *ordine* è stato suggerito da certe analogie che si capiranno nel seguito.

(3) È evidente il significato da attribuire alle frasi « successioni inizialmente uguali d'ordine zero », « successioni ultimamente uguali d'ordine ∞ ».

(4) È pure evidente il significato da attribuire alle frasi « successione inizialmente nulla d'ordine zero », « successione ultimamente nulla d'ordine ∞ ».

ESEMPI. — α) Le due successioni

$$x^n, \ (n=0,\ 1,\ 2,\dots); \quad y^n, \ (n=0,\ 1,\ 2,\dots),$$

sono inizialmente uguali [1]: d'ordine 1 se è $x \neq y$, identiche se è $x=y$. Le due successioni

$$x^n, \ (n=0,\ 1,\ 2,\dots); \quad x^n + \binom{n}{m}, \ (n=0,\ 1,\ 2,\dots),$$

dove m è un intero non negativo, sono inizialmente uguali d'ordine m; invece

$$x^n, \ (n=0,\ 1,\ 2,\dots); \quad x^n + \binom{m}{n}, \ (n=0,\ 1,\ 2,\dots),$$

sono ultimamente uguali d'ordine $m+1$.

β) La successione

$$x^n - y^n, \ (n=0,\ 1,\ 2,\dots),$$

è inizialmente nulla: d'ordine 1 se è $x \neq y$, totalmente nulla se è $x=y$; ed in generale la successione

$$a_n - b_n, \ (n=0,\ 1,\ 2,\dots),$$

dove (a_n) e (b_n) sono inizialmente uguali d'ordine m, è inizialmente nulla d'ordine m; se, invece, le (a_n) e (b_n) fossero ultimamente uguali d'ordine m, la $(a_n - b_n)$ sarebbe ultimamente nulla d'ordine m. Le successioni

$$nx^n, \ (n=0,\ 1,\ 2,\dots); \quad n(n-1)x^n, \ (n=0,\ 1,\ 2,\dots),$$

sono inizialmente nulle degli ordini rispettivi 1 e 2.

2. Posto

$$\dots = \varepsilon_{-3} = \varepsilon_{-2} = \varepsilon_{-1} = 0, \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \dots = 0,$$

considereremo frequentemente nel seguito le successioni

$$\begin{array}{llllll} 1, & 0, & 0, & 0,\dots, & \varepsilon_n & ,\dots, \\ 0, & 1, & 0, & 0,\dots, & \varepsilon_{n-1}, & \dots, \\ 0, & 0, & 1, & 0,\dots, & \varepsilon_{n-2}, & \dots, \\ \dots & & & & & \dots : \end{array}$$

la successione generica è, essendo m un intero non negativo,

$$\varepsilon_{n-m}, \ (n=0,\ 1,\ 2,\dots),$$

la quale è, ad un tempo, inizialmente nulla d'ordine m ed ultimamente nulla d'ordine $m+1$ [2].

---

[1] Escludiamo, per ora, il caso di x ed y nulli.

[2] Si può notare che si ha $\varepsilon_{n-m} = \binom{m}{n}\binom{n}{m}$.

Essendo poi (a_n) una successione qualsiasi, si ha

(1) $$\varepsilon_{n-m} a_n = \varepsilon_{n-m} a_m .$$

Le successioni (ε_{n-m}) si prestano molto bene ad esprimere l'elemento generale delle successioni inizialmente nulle od ultimamente nulle. Invero, se (a_n) è una successione qualsiasi, gli elementi generali delle successioni

$$\begin{array}{llllll} 0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, \ldots, \\ 0, & 0, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, \ldots, \\ 0, & 0, & 0, & a_3, & a_4, & a_5, \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \end{array}$$

si possono scrivere, rispettivamente, nella forma

$$a_n - a_0\varepsilon_n; \quad a_n - a_0\varepsilon_n - a_1\varepsilon_{n-1}; \quad a_n - a_0\varepsilon_n - a_1\varepsilon_{n-1} - a_2\varepsilon_{n-2}; \ldots,$$

oppure, per (1),

$$(1-\varepsilon_n)a_n; \quad (1-\varepsilon_n-\varepsilon_{n-1})a_n; \quad (1-\varepsilon_n-\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_{n-2})a_n; \ldots .$$

Così pure, gli elementi generali delle successioni

$$\begin{array}{llllll} a_0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \ldots, \\ a_0, & a_1, & 0, & 0, & 0, & 0, \ldots, \\ a_0, & a_1, & a_2, & 0, & 0, & 0, \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \end{array}$$

si possono scrivere, rispettivamente, nella forma

$$a_0\varepsilon_n; \quad a_0\varepsilon_n + a_1\varepsilon_{n-1}; \quad a_0\varepsilon_n + a_1\varepsilon_{n-1} + a_2\varepsilon_{n-2}; \ldots,$$

oppure

$$\varepsilon_n a_n; \quad (\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1})a_n; \quad (\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_{n-2})a_n; \ldots$$ [1].

3. Notiamo ancora che, considerata una successione (a_n) qualsiasi, gli elementi generali delle successioni

$$\begin{array}{llllllll} a_0, & 0, & a_2, & 0, & a_4, & 0, & a_6, & 0, \ldots, \\ 0, & a_1, & 0, & a_3, & 0, & a_5, & 0, & a_7, \ldots, \\ a_0, & 0, & -a_2, & 0, & a_4, & 0, & -a_6, & 0, \ldots, \\ 0, & a_1, & 0, & -a_3, & 0, & a_5, & 0, & -a_7, \ldots, \end{array}$$

[1] Possiamo osservare che l'elemento generale di una successione (a_n) si può scrivere nella forma

$$a_n = a_0\varepsilon_n + a_1\varepsilon_{n-1} + \ldots + a_\nu\varepsilon_{n-\nu} + \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_{n-\nu} .$$

si possono scrivere, rispettivamente,

$$\frac{1^n + (-1)^n}{2} a_n; \quad \frac{1^n - (-1)^n}{2} a_n; \quad \frac{i^n + (-i)^n}{2} a_n; \quad \frac{i^n - (-i)^n}{2i} a_n,$$

dove i è l'unità immaginaria.

4. Ciò premesso, poniamo le seguenti definizioni:

α) Si diranno *somma* e *differenza* delle due successioni (a_n) e (b_n) rispettivamente le successioni

$$a_0 + b_0, \quad a_1 + b_1, \quad a_2 + b_2, \ldots, \quad a_n + b_n, \ldots,$$
$$a_0 - b_0, \quad a_1 - b_1, \quad a_2 - b_2, \ldots, \quad a_n - b_n, \ldots.$$

Le operazioni corrispondenti si diranno *addizione* e *sottrazione* di successioni.

β) Si diranno *prodotto ordinario, prodotto isobarico* e *prodotto binomiale* delle due successioni (a_n) e (b_n) rispettivamente le successioni

$$\begin{array}{llll}
a_0 b_0, & a_1 b_1, & a_2 b_2, & a_3 b_3, \ldots, \\
a_0 b_0, & a_0 b_1 + a_1 b_0, & a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, & a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0, \ldots, \\
a_0 b_0, & a_0 b_1 + a_1 b_0, & a_0 b_2 + 2a_1 b_1 + a_2 b_0, & a_0 b_3 + 3a_1 b_2 + 3a_2 b_1 + a_3 b_0, \ldots,
\end{array}$$

di elementi generali, ordinatamente,

$$a_n b_n,$$
$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_{n-2} b_2 + a_{n-1} b_1 + a_n b_0,$$
$$\binom{n}{0} a_0 b_n + \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-2} a_{n-2} b_2 + \binom{n}{n-1} a_{n-1} b_1 + \binom{n}{n} a_n b_0.$$

Le (a_n) e (b_n) si diranno i *fattori* dei prodotti ora definiti, le operazioni corrispondenti si diranno, rispettivamente, *moltiplicazione ordinaria* di successioni, *moltiplicazione isobarica* e *moltiplicazione binomiale*.

Quando si vorrà porre in molta evidenza il modo di formazione degli elementi generali dei prodotti isobarici e binomiali, si scriverà:

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \left\{ \begin{array}{llll} a_0 & a_1 & \ldots a_{n-1} & a_n \\ b_n & b_{n-1} & \ldots b_1 & b_0 \end{array} \right\}, \tag{2}$$

$$\binom{n}{0} a_0 b_n + \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1} a_{n-1} b_1 + \binom{n}{n} a_n b_0 = \left\{ \begin{array}{llll} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \ldots \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \\ a_0 & a_1 & \ldots a_{n-1} & a_n \\ b_n & b_{n-1} & \ldots b_1 & b_0 \end{array} \right\}; \tag{3}$$

quando, invece, si vorrà usare una maggiore concisione; si farà uso del segno sommatorio:

(2') $$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r},$$

(3') $$\binom{n}{0} a_0 b_n + \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1} a_{n-1} b_1 + \binom{n}{n} a_n b_0 = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a_r b_{n-r},$$

oppure si porrà:

(2'') $$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = a_n \overset{.}{_n} b_n,$$

(3'') $$\binom{n}{0} a_0 b_n + \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1} a_{n-1} b_1 + \binom{n}{n} a_n b_0 = a_n \overset{n}{\cdot} b_n.$$

Le notazioni dei secondi membri di (2'') e (3'') saranno usate sistematicamente nel seguito e si avrà così largo modo di apprezzarne i vantaggi; tali secondi membri si potranno leggere, rispettivamente,

a_n moltiplicato, isobarico n, b_n; a_n moltiplicato, binomiale n, b_n;

si dirà poi che n è l'*indice* di moltiplicazione isobarica o binomiale. La seconda notazione viene a coincidere col simbolo, già in uso,

$$(a + b)^n,$$

che sarà usato qui solo di rado, perchè esso, oltre a presentare l'inconveniente di non potere stabilire, *a priori*, se si tratta o no di scrittura simbolica, non si presta a scrivere direttamente i vari casi speciali.

Risulta poi, dalle definizioni date, il significato di somma, prodotto ordinario, prodotto isobarico e prodotto binomiale di più di due successioni, in numero finito ([1]).

5. Si ha $a_n + 0 = a_n$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$: ciò si esprimerà dicendo che la successione totalmente nulla (n.° 1) è modulo dell'addizione di successioni. Similmente, il fatto $a_n 1^n = a_n$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ si esprimerà dicendo che la successione (1^n) è modulo della moltiplicazione ordinaria di successioni.

È poi, manifestamente, (ε_n) essendo la successione definita al n.° 2,

$$a_n \overset{.}{_n} \varepsilon_n = a_n, \quad a_n \overset{n}{\cdot} \varepsilon_n = a_n, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

la qual cosa si esprimerà dicendo che *la successione* (ε_n) *è modulo delle moltiplicazioni isobarica e binomiale.*

([1]) Ho qui omesso, per non accrescere troppo l'estensione del presente lavoro, di considerare le espressioni (esaminate nell'Appendice della nominata mia Tesi di laurea (cfr., anche, i lavori del LAGRANGE citati a pag. 104)) che generalizzano i prodotti isobarici e binomiali: su tali espressioni intendo ritornare in una prossima pubblicazione.

6. Ritornando ora alle definizioni del n.° 4, nel caso particolare in cui le due successioni (a_n) e (b_n) sono uguali (n.° 1), analogamente ad

$$a_n a_n = a_n^2, \qquad (n = 0, 1, 2, ...),$$

si porrà

$$a_n \dot{n}\, a_n = a_n^{2)_n}, \quad a_n \overset{n}{\cdot} a_n = a_n^{2)^n}, \qquad (n = 0, 1, 2, ...):$$

questi tre prodotti si diranno, rispettivamente, quadrato ordinario, quadrato isobarico e quadrato binomiale della successione (a_n). In generale, essendo m un intero ≥ 2, analogamente ad

$$a_n^m, \qquad (n = 0, 1, 2, ...),$$

si scriverà

$$a_n^{m)_n}, \quad a_n^{m)^n}, \qquad (n = 0, 1, 2, ...),$$

per indicare, rispettivamente, i prodotti isobarico e binomiale di m fattori uguali ad (a_n): le tre successioni precedenti si diranno, ordinatamente, *potenza* m^esima^ *ordinaria, potenza* m^esima^ *isobarica* e *potenza* m^esima^ *binomiale* della successione (a_n). Essendo poi μ un altro intero ≥ 2, si ha, manifestamente,

(4) $$a_n^{m)_n} \dot{n}\, a_n^{\mu)_n} = a_n^{m+\mu)_n}, \quad a_n^{m)^n} \overset{n}{\cdot} a_n^{\mu)^n} = a_n^{m+\mu)^n},$$

ed anche

(5) $$\left[a_n^{m)_n}\right]^{\mu)_n} = a_n^{m\mu)_n}, \quad \left[a_n^{m)^n}\right]^{\mu)^n} = a_n^{m\mu)^n}.$$

Abbiamo:

$$a_n^1 \equiv a_n, \quad a_n^0 \equiv 1,$$

nella seconda richiedendosi che sia $a_n \neq 0$ per ogni n. Similmente, quale sarà il significato da attribuire alle scritture analoghe

$$a_n^{1)_n}, \; a_n^{0)_n}; \quad a_n^{1)^n}, \; a_n^{0)^n} \;?$$

Per stabilirlo, ricorriamo al principio di permanenza delle proprietà formali, richiedendo la conservazione delle (4). Per le potenze isobariche si ha:

$$a_n^{m)_n} \dot{n}\, a_n^{1)_n} = a_n^{m+1)_n} = a_n^{m)_n} \dot{n}\, a_n, \quad a_n^{m)_n} \dot{n}\, a_n^{0)_n} = a_n^{m+0)_n} = a_n^{m)_n};$$

perciò converremo di porre

(6) $$a_n^{1)_n} \equiv a_n, \quad a_n^{0)_n} \equiv \varepsilon_n.$$

Con motivazione simile si converrà, per le potenze binomiali, di porre

(7) $$a_n^{1)^n} \equiv a_n, \quad a_n^{0)^n} \equiv \varepsilon_n.$$

Nel caso che (a_n) sia totalmente nulla (n.° 1), non si attribuirà alcun significato alle potenze isobarica e binomiale con esponente zero.

§ 2. Prime proprietà delle moltiplicazioni isobarica e binomiale.

7. α) *Le moltiplicazioni isobarica e binomiale godono della legge commutativa,* si ha cioè:

$$a_n \underset{n}{\dot{}} b_n = b_n \underset{n}{\dot{}} a_n, \quad a_n \overset{n}{\cdot} b_n = b_n \overset{n}{\cdot} a_n .$$

Ciò risulta immediatamente dalle definizioni del n.° 4.

β) *Le moltiplicazioni isobarica e binomiale godono della legge associativa,* si ha cioè:

$$a_n \underset{n}{\dot{}} (b_n \underset{n}{\dot{}} c_n) = (a_n \underset{n}{\dot{}} b_n) \underset{n}{\dot{}} c_n, \quad a_n \overset{n}{\cdot} (b_n \overset{n}{\cdot} c_n) = (a_n \overset{n}{\cdot} b_n) \overset{n}{\cdot} c_n .$$

Nel caso della moltiplicazione binomiale abbiamo, invero,

$$a_n \overset{n}{\cdot} (b_n \overset{n}{\cdot} c_n) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a_{n-r} \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} b_{r-s} c_s = \sum_{s=0}^{n} c_s \sum_{r=s}^{n} \binom{n}{r}\binom{r}{s} a_{n-r} b_{r-s},$$

ma, come si verifica facilmente, è $\binom{n}{r}\binom{r}{s} = \binom{n}{s}\binom{n-s}{r-s}$, onde

$$a_n \overset{n}{\cdot} (b_n \overset{n}{\cdot} c_n) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} c_s \sum_{r=s}^{n} \binom{n-s}{r-s} a_{n-r} b_{r-s} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} c_s \sum_{r=0}^{n-s} \binom{n-s}{r} a_{n-s-r} b_r,$$

ossia, proprio la seconda formula da dimostrare. Analoga dimostrazione per la moltiplicazione isobarica. Si scriverà dunque, senza parentisi,

$$a_n \underset{n}{\dot{}} b_n \underset{n}{\dot{}} c_n, \quad a_n \overset{n}{\cdot} b_n \overset{n}{\cdot} c_n .$$

In generale, considerate $p+1$ successioni $(a_{n,0})$, $(a_{n,1}), \dots, (a_{n,p})$, avremo:

$$a_{n,0} \underset{n}{\dot{}} a_{n,1} \underset{n}{\dot{}} \cdots \underset{n}{\dot{}} a_{n,p} = \sum_{r_1=0}^{n} \sum_{r_2=0}^{r_1} \cdots \sum_{r_p=0}^{r_{p-1}} a_{n-r_1,0} a_{r_1-r_2,1} \cdots a_{r_{p-1}-r_p,p-1} a_{r_p,p}, \tag{8}$$

$$a_{n,0} \overset{n}{\cdot} a_{n,1} \overset{n}{\cdot} \cdots \overset{n}{\cdot} a_{n,p} = \sum_{r_1=0}^{n} \sum_{r_2=0}^{r_1} \cdots \sum_{r_p=0}^{r_{p-1}} \binom{n}{r_1}\binom{r_1}{r_2} \cdots \binom{r_{p-1}}{r_p} a_{n-r_1,0} a_{r_1-r_2,1} \cdots a_{r_p,p}; \tag{9}$$

od anche, servendosi degli elementi del calcolo combinatorio,

$$a_{n,0} \underset{n}{\dot{}} a_{n,1} \underset{n}{\dot{}} \cdots \underset{n}{\dot{}} a_{n,p} = \sum a_{r_0,0} a_{r_1,1} \cdots a_{r_p,p}, \tag{8'}$$

$$a_{n,0} \overset{n}{\cdot} a_{n,1} \overset{n}{\cdot} \cdots \overset{n}{\cdot} a_{n,p} = \sum \frac{n!}{r_0!\, r_1! \dots r_p!} a_{r_0,0} a_{r_1,1} \cdots a_{r_p,p}, \tag{9'}$$

dove, tanto in (8′) che in (9′), è da sommare per tutti gli $r_0, r_1, \dots, r_p$ con $r_0 + r_1 + \dots + r_p = n$.

γ) *Le moltiplicazioni isobarica e binomiale godono della legge distributiva*, si ha cioè:

$$a_n \overset{\cdot}{n} (b_n + c_n) = a_n \overset{\cdot}{n} b_n + a_n \overset{\cdot}{n} c_n, \quad a_n \overset{n}{\cdot} (b_n + c_n) = a_n \overset{n}{\cdot} b_n + a_n \overset{n}{\cdot} c_n.$$

Ciò discende subito dalle definizioni del n.° 4. Applicando le formule ora scritte in senso inverso, consegue la proprietà del *raccoglimento a fattore, isobarico o binomiale, comune.*

δ) *Le moltiplicazioni isobarica e binomiale godono della legge di annullamento del prodotto*; precisamente: *condizione necessaria e sufficiente affinchè un prodotto isobarico o binomiale sia nullo* (n.° 1), *è che sia nullo uno dei suoi fattori.* La condizione è sufficiente, come risulta subito dalle definizioni del n.° 4. Proviamo che la condizione è necessaria: si abbia

$$a_n \overset{\cdot}{n} b_n \equiv 0,$$

dove (a_n) non è totalmente nulla, diciamo che è totalmente nulla (b_n); ed infatti, supposto, per maggiore generalità, che (a_n) sia inizialmente nulla d'ordine m, si deduce dalla precedente, ove si faccia $n = m, m+1, \ldots$,

$$a_m b_0 = 0, \text{ da cui } b_0 = 0; \quad a_{m+1} b_0 + a_m b_1 = 0, \text{ da cui } b_1 = 0;$$
$$a_{m+2} b_0 + a_{m+1} b_1 + a_m b_2 = 0, \text{ da cui } b_2 = 0,$$

e così via, come si è asserito. Similmente per la moltiplicazione binomiale.

8. *Le moltiplicazioni isobarica e binomiale sono intimamente legate fra loro*, come esprime la formula

$$a_n \overset{\cdot}{n} b_n = \frac{n!\, a_n \overset{n}{\cdot} n!\, b_n}{n!}, \tag{10}$$

od anche

$$\frac{a_n}{n!} \overset{\cdot}{n} \frac{b_n}{n!} = \frac{a_n \overset{n}{\cdot} b_n}{n!}. \tag{10'}$$

La dimostrazione di (10') — che è equivalente a (10) — è immediata:

$$\frac{a_n}{n!} \overset{\cdot}{n} \frac{b_n}{n!} = \sum_{r=0}^{n} \frac{a_r}{r!} \frac{b_{n-r}}{(n-r)!} = \frac{1}{n!} \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} a_r b_{n-r},$$

ossia, per essere $\dfrac{n!}{r!(n-r)!} = \dbinom{n}{r}$, il secondo membro di (10').

Segue, fra potenze isobariche e binomiali, il legame

$$a_n^{m)_n} = \frac{1}{n!} (n!\, a_n)^{m)^n}, \tag{11}$$

od anche

$$\left(\frac{a_n}{n\,!}\right)^{m)^n} = \frac{1}{n\,!}\, a_n^{m)^n}. \tag{11'}$$

9. α) Dalle definizioni del n.° 4 segue subito, essendo c una costante (ossia, una quantità indipendente da n),

$$c(a_n \underset{n}{\cdot} b_n) = c a_n \underset{n}{\cdot} b_n = a_n \underset{n}{\cdot} c b_n, \quad c(a_n \overset{n}{\cdot} b_n) = c a_n \overset{n}{\cdot} b_n = a_n \overset{n}{\cdot} c b_n,$$

$$c^n(a_n \underset{n}{\cdot} b_n) = c^n a_n \underset{n}{\cdot} c^n b_n, \quad c^n(a_n \overset{n}{\cdot} b_n) = c^n a_n \overset{n}{\cdot} c^n b_n,$$

$$(c a_n)^{m)_n} = c^m a_n^{m)_n}, \ (c^n a_n)^{m)_n} = c^n a_n^{m)_n}; \quad (c a_n)^{m)^n} = c^m a_n^{m)^n}, \ (c^n a_n)^{m)^n} = c^n a_n^{m)^n}.$$

β) Dall' uguaglianza

$$a_n = b_n, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

segue, qualunque sia la successione (c_n),

$$a_n \underset{n}{\cdot} c_n = b_n \underset{n}{\cdot} c_n, \quad a_n \overset{n}{\cdot} c_n = b_n \overset{n}{\cdot} c_n, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

cioè *si può moltiplicare isobaricamente o binomialmente ambo i membri della data uguaglianza per una stessa successione* (c_n). Inversamente, dalle relazioni ottenute si deduce la data uguaglianza, purchè (c_n) non sia nulla (n.° 1).

γ) Da

$$a_n \underset{n}{\cdot} b_n = c_n, \quad a_n \overset{n}{\cdot} b_n = \gamma_n,$$

moltiplicando isobaricamente m volte per se stessa la prima relazione e binomialmente m volte per se stessa la seconda relazione, si ricava

$$a_n^{m)_n} \underset{n}{\cdot} b_n^{m)_n} = c_n^{m)_n}, \quad a_n^{m)^n} \overset{n}{\cdot} b_n^{m)^n} = \gamma_n^{m)^n},$$

formule che dànno la regola per innalzare un prodotto isobarico o binomiale rispettivamente a potenza m^{esima} isobarica o binomiale.

10. *Se due successioni* (a_n) *e* (b_n) *sono inizialmente nulle degli ordini rispettivi* m *e* μ, *i loro prodotti isobarico e binomiale sono inizialmente nulli d' ordine* $m + \mu$.

Invero, posto $c_n = a_n \underset{n}{\cdot} b_n$ ed adottando una notazione indicata al n.° 4, si ha:

$$c_0 = a_0 b_0, \quad c_1 = \begin{Bmatrix} a_0 & a_1 \\ b_1 & b_0 \end{Bmatrix}, \quad c_2 = \begin{Bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_2 & b_1 & b_0 \end{Bmatrix}, \ldots,$$

$$c_{m+\mu-1} = \begin{Bmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{m-1} & a_m & a_{m+1} & \ldots & a_{m+\mu-1} \\ b_{m+\mu-1} & b_{m+\mu-2} & \ldots & b_\mu & b_{\mu-1} & b_{\mu-2} & \ldots & b_0 \end{Bmatrix},$$

da cui si vede chiaramente che da $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$, $b_0 = b_1 = \ldots =$

$= b_{\mu-1} = 0$ consegue $c_0 = c_1 = \dots = c_{m+\mu-1} = 0$. Similmente pel prodotto binomiale. In particolare:

La potenza m^esima^ *isobarica o binomiale di una successione inizialmente nulla d'ordine* μ *è inizialmente nulla d'ordine* $m\mu$.

11. α) *Se due successioni* (a_n) *e* (b_n) *hanno simultaneamente nulli tutti gli elementi d'indice dispari, oppure tutti gli elementi d'indice pari, i loro prodotti isobarico e binomiale hanno nulli tutti gli elementi d'indice dispari.*

Infatti, per indice dispari, il prodotto isobarico è dato nella 1ª ipotesi da

$$\begin{Bmatrix} a_0 & 0 & a_2 \dots 0 & a_{2n} & 0 \\ 0 & b_{2n} & 0 \dots b_2 & 0 & b_0 \end{Bmatrix}, \text{ e nella 2ª ipotesi da } \begin{Bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots a_{2n-1} & 0 & a_{2n+1} \\ b_{2n+1} & 0 & b_{2n-1} & \dots 0 & b_1 & 0 \end{Bmatrix}.$$

Similmente pel prodotto binomiale.

β) *Se una delle due successioni* (a_n) *e* (b_n) *ha gli elementi di indice dispari tutti nulli, valgono le formule*

$$a_{2n} \overset{\cdot}{_{2n}} b_{2n} = a_{2n} \overset{\cdot}{_n} b_{2n}, \tag{12}$$

$$a_{2n} \overset{2n}{\cdot} b_{2n} = \frac{(2n)!}{n!}\left[\frac{n!\,a_{2n}}{(2n)!} \overset{n}{\cdot} \frac{n!\,b_{2n}}{(2n)!}\right]. \tag{13}$$

Infatti, se è, ad es., $b_{2r+1} = 0$, $(r = 0, 1, 2, \dots)$, segue:

$$a_{2n} \overset{\cdot}{_{2n}} b_{2n} = \sum_{r=0}^{2n} a_{2n-r} b_r = \sum_{r=0}^{n} a_{2n-2r} b_{2r},$$

cioè la (12); ed inoltre

$$a_{2n} \overset{2n}{\cdot} b_{2n} = \sum_{r=0}^{2n} \binom{2n}{r} a_{2n-r} b_r = \sum_{r=0}^{n} \binom{2n}{2r} a_{2n-2r} b_{2r},$$

cioè la (13), se si nota che è

$$\binom{2n}{2r} = \frac{(2n)!}{(2r)!\,(2n-2r)!} = \frac{(2n)!}{n!} \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \frac{(n-r)!}{(2n-2r)!} \frac{r!}{(2r)!}.$$

La (13), in virtù della (10), si può anche scrivere:

$$a_{2n} \overset{2n}{\cdot} b_{2n} = (2n)!\left[\frac{a_{2n}}{(2n)!} \overset{\cdot}{_n} \frac{b_{2n}}{(2n)!}\right]. \tag{13'}$$

Se è poi $b_n \equiv a_n$, le formule precedenti dànno:

$$a_{2n}^{2)_{2n}} = a_{2n}^{2)_n}, \tag{14}$$

$$a_{2n}^{2)^{2n}} = \frac{(2n)!}{n!}\left[\frac{n!\,a_{2n}}{(2n)!}\right]^{2)^n} = (2n)!\left[\frac{a_{2n}}{(2n)!}\right]^{2)_n}, \tag{15}$$

valide, dunque, sotto l'ipotesi $a_{2n+1} = 0$, $(n = 0, 1, 2, \dots)$.

12. *Se, nelle relazioni*

(16) $$a_n \dot{{}_n} b_n = c_n ,$$

(17) $$a_n \overset{n}{\cdot} b_n = \gamma_n ,$$

la successione (a_n) *è inizialmente nulla d'ordine* m, *si ha, per ogni intero positivo* $\mu \leq m$,

(18) $$a_{n+\mu} \dot{{}_n} b_n = c_{n+\mu} ,$$

(19) $$\frac{n!\, a_{n+\mu}}{(n+\mu)!} \overset{n}{\cdot} b_n = \frac{n!\, \gamma_{n+\mu}}{(n+\mu)!} \text{ (}^1\text{)}.$$

Infatti, da (16) segue

$$\sum_{r=0}^{n+\mu} a_{n+\mu-r} b_r = c_{n+\mu} ,$$

ed anche più semplicemente, per essere $a_0 = a_1 = \ldots = a_{\mu-1} = 0$,

$$\sum_{r=0}^{n} a_{n+\mu-r} b_r = c_{n+\mu} ,$$

cioè la (18). Per provare la (19) notiamo che da (17) segue, applicando (10'),

$$\frac{a_n}{n!} \dot{{}_n} \frac{b_n}{n!} = \frac{\gamma_n}{n!} ,$$

ed essendo $a_0 = a_1 = \ldots = a_{\mu-1} = 0$ ed applicando la (18) or ora dimostrata, abbiamo:

$$\frac{a_{n+\mu}}{(n+\mu)!} \dot{{}_n} \frac{b_n}{n!} = \frac{\gamma_{n+\mu}}{(n+\mu)!} ,$$

ossia la (19), in virtù della (10).

13. La proposizione del numero precedente sarà applicata molto spesso, unitamente alle seguenti osservazioni e conseguenze.

α) Si vede facilmente come si possono modificare le (18) e (19) quando anche (b_n) sia inizialmente nulla.

β) Se tanto (a_n) che (b_n) sono inizialmente nulle, si ha, in virtù di (18) e (19),

(20) $$a_{n+1} \dot{{}_n} b_n = a_n \dot{{}_n} b_{n+1} , \quad \frac{a_{n+1}}{n+1} \overset{n}{\cdot} b_n = a_n \overset{n}{\cdot} \frac{b_{n+1}}{n+1} ,$$

---

(1) La (19) si può anche scrivere nella forma

(19') $$\frac{a_{n+\mu}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+\mu)} \overset{n}{\cdot} b_n = \frac{\gamma_{n+\mu}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+\mu)} ,$$

di qui, però, non risulta bene che per $\mu = 0$ si ricade nella (17).

formule che si generalizzano facilmente nel caso in cui (a_n) e (b_n) siano inizialmente nulle d'ordine > 1. Ad es., se è $a_n \equiv 1^n - \varepsilon_n$, $b_n \equiv n$, dalla seconda delle (20) si ha:

$$\frac{1^{n+1} - \varepsilon_{n+1}}{n+1} \overset{n}{:} n = (1^n - \varepsilon_n) \overset{n}{:} \frac{n+1}{n+1},$$

da cui, per essere $\varepsilon_{n+1} \equiv 0$ e per la proprietà distributiva,

$$\frac{1}{n+1} \overset{n}{:} n = 1^n \overset{n}{:} 1^n - \varepsilon_n \overset{n}{:} 1^n,$$

ossia

$$\frac{1}{n+1} \overset{n}{:} n = 2^n - 1,$$

γ) *Se* (a_n) *è inizialmente nulla d'ordine* m, *si ha, per ogni intero positivo* $\mu \leq m$,

$$a_n = \varepsilon_{n-\mu} \overset{\cdot}{n}\, a_{n+\mu}, \tag{21}$$

$$a_n = \varepsilon_{n-\mu} \overset{n}{:} \frac{n!\,\mu!}{(n+\mu)!} a_{n+\mu}. \tag{22}$$

Queste formule si controllano immediatamente applicando ad esse la proposizione del numero precedente. Si può notare, poi, che, *se* (a_n) *è una successione qualsiasi, si può sempre scrivere, per ogni intero positivo* μ,

$$a_n = (a_0\varepsilon_n + a_1\varepsilon_{n-1} + \dots + a_{\mu-1}\varepsilon_{n-\mu+1}) + \varepsilon_{n-\mu} \overset{\cdot}{n}\, a_{n+\mu}, \tag{23}$$

$$a_n = (a_0\varepsilon_n + a_1\varepsilon_{n-1} + \dots + a_{\mu-1}\varepsilon_{n-\mu+1}) + \varepsilon_{n-\mu} \overset{n}{:} \frac{n!\,\mu!}{(n+\mu)!} a_{n+\mu}. \tag{24}$$

δ) *Dalle* (16) *e* (17), *comunque siano le successioni che vi compaiono, segue, per ogni intero positivo* μ,

$$a_{n-\mu} \overset{\cdot}{n}\, b_n = c_{n-\mu}, \tag{25}$$

$$n(n-1)\dots(n-\mu+1)a_{n-\mu} \overset{n}{:} b_n = n(n-1)\dots(n-\mu+1)\gamma_{n-\mu}, \tag{26}$$

sotto la condizione di porre nella (25)

$$a_{-1} = a_{-2} = \dots = a_{-\mu} = 0, \quad c_{-1} = c_{-2} = \dots = c_{-\mu} = 0,$$

e di porre nella (26), *per*

$$a_{-1},\ a_{-2}, \dots,\ a_{-\mu};\quad \gamma_{-1},\ \gamma_{-2}, \dots,\ \gamma_{-\mu},$$

degli elementi finiti qualsiasi. Questa conclusione si prova subito applicando le proposizioni del n.° 10 e del numero precedente. Notiamo che la (26) si può anche scrivere nella forma

$$(26') \qquad \binom{n}{\mu} a_{n-\mu} \overset{n}{\cdot} b_n = \binom{n}{\mu} \gamma_{n-\mu} .$$

Si vede poi, facilmente, come si modificano le (25) e (26) facendo anche su (b_n) quello che è stato fatto su (a_n) nel passare dalle (16) e (17) alle (25) e (26).

Analogamente a β), si può notare che *da* (16) *e* (17), *comunque siano le successioni che vi compaiono, discende*

$$(27) \qquad a_{n-1} \overset{\cdot}{{}_n} b_n = a_n \overset{\cdot}{{}_n} b_{n-1}, \quad n a_{n-1} \overset{n}{\cdot} b_n = a_n \overset{n}{\cdot} n b_{n-1},$$

sotto la condizione di porre $a_{-1} = b_{-1} = 0$ *nella prima e di prendere nella seconda, per* a_{-1} *e* b_{-1}, *due elementi finiti qualsiasi.* Le (27) si generalizzano, poi, facilmente.

Infine, *considerata una successione* (a_n) *qualsiasi, si ha, per ogni intero positivo* μ,

$$(28) \qquad a_{n-\mu} = \varepsilon_{n-\mu} \overset{\cdot}{{}_n} a_n ,$$

$$(29) \qquad \binom{n}{\mu} a_{n-\mu} = \varepsilon_{n-\mu} \overset{n}{\cdot} a_n ,$$

sotto la condizione di porre nella prima formula $a_{-1} = a_{-2} = \ldots = a_{-\mu} = 0$, *e di prendere nella seconda, per* $a_{-1}, a_{-2}, \ldots, a_{-\mu}$, *elementi finiti qualsiasi.*

§ 3. Sul calcolo dei prodotti isobarici e binomiali. Esempi.

14. Volendo calcolare effettivamente i successivi elementi di prodotti isobarici e binomiali di successioni espressamente date, conviene servirsi, nella pratica, di schemi opportuni. Ad es., sia da calcolare il prodotto binomiale

$$c_n = \frac{1}{n+1} \overset{n}{\cdot} n.$$

Converrà disporre il calcolo nel seguente modo:

$$\begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{1} \\ 0 \\ \hline c_0 = 0, \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1} \\ 0 \quad 1 \\ \hline c_1 = 0 + 1 = 1, \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 1 \\ \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1} \\ 0 \quad 1 \quad 2 \\ \hline c_2 = 0 + 1 + 2 = 3, \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1} \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \\ \hline c_3 = 0 + 1 + 3 + 3 = 7, \ldots, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \ldots & \binom{n}{n-2} & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \ldots & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{1} \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n-2 & n-1 & n \\ \hline \multicolumn{5}{l}{c_n = 0 + 1 + n + \ldots} & & = \ldots, \ldots . \end{array}$$

Nel calcolo di un prodotto isobarico si procederà anche più semplicemente, non dovendosi scrivere la linea dei coefficienti binomiali. Spesse volte, però, l'applicazione delle proposizioni precedenti e di altre seguenti ci permetterà di giungere, senz'altro, alla espressione dell'elemento generale del prodotto cercato: così, il prodotto binomiale precedente si è già trovato, al n.° 13, β), che è uguale a $2^n - 1$.

Facciamo ora parecchi *esempi* che ci saranno utili nelle applicazioni.

15. α) Si trova subito che è

$$a_n \dot{{}_n} \binom{1}{n} = \begin{cases} a_0 & \text{per } n = 0, \\ a_n + a_{n-1} & \text{per } n = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{30}$$

Facendo qui, in particolare, $a_n \equiv \binom{m}{n}$, con m intero non negativo, e notando che è $\binom{m}{n} + \binom{m}{n-1} = \binom{m+1}{n}$, s'ottiene

$$\binom{m}{n} \dot{{}_n} \binom{1}{n} = \binom{m+1}{n}.$$

Cambiando, in questa, m successivamente in $0, 1, 2, \ldots, m-1$, moltiplicando poi isobaricamente n, membro a membro, tutte le relazioni ottenute, ed infine riducendo, si ricava

$$\binom{1}{n}^{m)_n} = \binom{m}{n}, \tag{31}$$

la quale esprime che le successive linee (completate con degli zeri) del noto triangolo dei coefficienti binomiali non sono altro che le successive potenze isobariche della linea data da $\binom{1}{n}$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Applicando a (31) la (11) e notando che è $n!\binom{1}{n} = \binom{1}{n}$, s'ottiene

$$\binom{1}{n}^{m)^n} = n!\binom{m}{n}. \tag{31'}$$

β) Da (31) discende subito, per la definizione di potenza isobarica, μ essendo un altro intero positivo,

$$\binom{m}{n} \dot{{}_n} \binom{\mu}{n} = \binom{m+\mu}{n},$$

ossia, usando il segno sommatorio,

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{m}{r}\binom{\mu}{n-r}=\binom{m+\mu}{n}. \tag{32}$$

Facendo qui $m=\mu=n$, viene la formula

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}^2=\binom{2n}{n}. \tag{33}$$

Questa identità si può anche scrivere nella forma

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{1}{r!(n-r)!}=\frac{1}{n!}\binom{2n}{n},$$

ossia

$$\frac{1}{n!}\overset{n}{\cdot}\frac{1}{n!}=\frac{1}{n!}\binom{2n}{n}. \tag{34}$$

Facendo invece, in (32), solo $\mu=n$, si ottiene

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{m}{r}\binom{n}{r}=\binom{m+n}{n},$$

ossia

$$\binom{m}{n}\overset{n}{\cdot}1^n=\binom{m+n}{n}. \tag{35}$$

16. α) Dalla definizione di prodotto isobarico segue

$$a_n\dot{{}_n}1^n=a_0+a_1+a_2+\dots+a_n.$$

Facendo qui, in particolare, $a_n\equiv\binom{n}{m}$, con m intero non negativo, e notando che è $\binom{0}{m}+\binom{1}{m}+\dots+\binom{n-1}{m}+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m+1}$, s'ottiene:

$$\binom{n}{m}\dot{{}_n}1^n=\binom{n+1}{m+1},$$

ed anche, per la proposizione del n.° 12,

$$\binom{n+m}{m}\dot{{}_n}1^n=\binom{n+m+1}{m+1}. \tag{36}$$

Cambiando, in questa, m successivamente in 0, 1, 2,..., $m-1$, moltiplicando poi isobaricamente n, membro a membro, tutte le relazioni ottenute, ed infine riducendo, si ricava

$$(1^n)^{m)}{}_n = \binom{n+m-1}{m-1}, \tag{37}$$

la quale esprime che le successive colonne del triangolo dei coefficienti binomiali non sono altro che le successive potenze isobariche della prima colonna. Applicando a (37) la (11), s' ottiene

$$(n!)^{m)^n} = n!\binom{n+m-1}{m-1} = \frac{(n+m-1)!}{(m-1)!}. \tag{37'}$$

β) Facendo, in (37), $m=2$, viene

$$1^n \dot{{}_n} 1^n = n+1,$$

e perciò, per la (37) stessa,

$$(n+1)^{m)}{}_n = \binom{n+2m-1}{2m-1}, \tag{38}$$

da cui

$$[(n+1)!]^{m)^n} = n!\binom{n+2m-1}{2m-1}. \tag{38'}$$

17. α) Per la definizione di prodotto isobarico abbiamo, indicando con a e b due costanti non nulle,

$$a^n \dot{{}_n} b^n = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1} + b^n,$$

e quindi

$$a^n \dot{{}_n} b^n = \begin{cases} (n+1)a^n & \text{per } a=b, \\ \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} & \text{per } a \neq b. \end{cases} \tag{39}$$

Essendo c un'altra costante non nulla, si trova:

$$a^n \dot{{}_n} b^n \dot{{}_n} c^n = \begin{cases} \dbinom{n+2}{2}a^n & \text{per } a=b=c, \\ \dfrac{a^{n+2}-(n+2)ab^{n+1}+(n+1)b^{n+2}}{(a-b)^2} & \text{per } a \neq b = c, \\ \dfrac{(b-c)a^{n+2}+(c-a)b^{n+2}+(a-b)c^{n+2}}{(a-b)(a-c)(b-c)} & \text{per } a,\, b,\, c \text{ diversi fra loro.} \end{cases} \tag{40}$$

Invero, per $a=b=c$ viene, in virtù del n.° 9, α) e della (37),

$$a^n \dot{{}_n} a^n \dot{{}_n} a^n = (1^n \dot{{}_n} 1^n \dot{{}_n} 1^n)a^n = \binom{n+2}{2}a^n;$$

per $a \neq b = c$ abbiamo, applicando (39),

$$a^n \underset{n}{\cdot} b^n \underset{n}{\cdot} b^n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} \underset{n}{\cdot} b^n = \frac{1}{a-b}[aa^n \underset{n}{\cdot} b^n - bb^n \underset{n}{\cdot} b^n]$$

$$= \frac{1}{a-b}\left[a \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} - (n+1)b^{n+1}\right],$$

cioè, riducendo, l'espressione indicata in (40); infine, per a, b, c tutti diversi fra loro e con procedimento analogo, si trova pure quant'è scritto in (40).

β) Si può osservare che, *nel caso in cui* a, b, c *sono tutti diversi fra loro,* le espressioni dei secondi membri di (39) e (40) si possono scrivere nella forma seguente:

$$a^n \underset{n}{\cdot} b^n = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^{n+1} & b^{n+1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix},$$

$$a^n \underset{n}{\cdot} b^n \underset{n}{\cdot} c^n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^{n+2} & b^{n+2} & c^{n+2} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

La simmetria presentata dai secondi membri ci spinge senz'altro a verificare la validità di una formula generale, ma ciò verrà fatto nel Capitolo seguente quando sarà introdotto il concetto di successione reciproca di una data successione.

18. Per la definizione di prodotto binomiale e per lo sviluppo del binomio di NEWTON, si ha subito, indicato con a e b due costanti non nulle,

(41) $$a^n \overset{n}{\cdot} b^n = (a+b)^n,$$

da cui, per (10'),

(41') $$\frac{a^n}{n!} \underset{n}{\cdot} \frac{b^n}{n!} = \frac{(a+b)^n}{n!}.$$

α) Per $a = b = 1$ la (41) diventa $1^n \overset{n}{\cdot} 1^n = 2^n$, ossia

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

In generale si ha

(42) $$(1^n)^{m)^n} = m^n,$$

da cui, per (11'),

(42') $$\left(\frac{1}{n!}\right)^{m)_n} = \frac{m^n}{n!}.$$

β) Per $a = 1$, $b = -1$, da (41) si ha

$$1^n \overset{n}{\cdot} (-1)^n = \varepsilon_n \text{ [1]}, \tag{43}$$

ossia, per esteso,

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = \varepsilon_n .$$

Da (43) viene poi, in virtù di (10′),

$$\frac{1}{n!} \overset{n}{\cdot} \frac{(-1)^n}{n!} = \varepsilon_n . \tag{43′}$$

γ) Sommando membro a membro le relazioni $1^n \overset{n}{\cdot} 1^n = 2^n$, $1^n \overset{n}{\cdot} (-1)^n = \varepsilon_n$, si ricava

$$1^n \overset{n}{\cdot} \frac{1^n + (-1)^n}{2} = \frac{2^n + \varepsilon_n}{2}, \tag{44}$$

ossia, scrivendo per esteso,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \begin{cases} 1 & \text{per } n = 0, \\ 2^{n-1} & \text{per } n = 1, 2, \dots . \end{cases}$$

Sottraendo invece membro a membro le relazioni $1^n \overset{n}{\cdot} 1^n = 2^n$, $1^n \overset{n}{\cdot} (-1)^n = \varepsilon_n$, viene

$$1^n \overset{n}{\cdot} \frac{1^n - (-1)^n}{2} = \frac{2^n - \varepsilon_n}{2}, \tag{45}$$

ossia, per esteso,

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = \begin{cases} 0 & \text{per } n = 0, \\ 2^{n-1} & \text{per } n = 1, 2, \dots . \end{cases}$$

Da (45), poichè il secondo fattore del primo membro è inizialmente nullo, si ha anche, pel n.° 12,

$$1^n \overset{n}{\cdot} \frac{1^n + (-1)^n}{2(n+1)} = \frac{2^n}{n+1}, \tag{46}$$

e per esteso

$$\frac{\binom{n}{0}}{1} + \frac{\binom{n}{2}}{3} + \frac{\binom{n}{4}}{5} + \dots = \frac{2^n}{n+1} .$$

---

[1] Nel secondo membro si doveva scrivere, in realtà, 0^n, ma dal primo membro si ha:

$$(1-1)^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} = \begin{cases} \binom{0}{0} = 1 & \text{per } n = 0, \\ 0 & \text{per } n = 1, 2, \dots . \end{cases}$$

Si deve dunque porre $0^n \equiv \varepsilon_n$.

19. Si voglia calcolare il prodotto binomiale

$$\frac{1}{n+1} \overset{n}{\cdot} x^n .$$

A tale scopo, partiamo dalla relazione

$$(1^n - \varepsilon_n) \overset{n}{\cdot} x^n = (x+1)^n - x^n ,$$

da cui, pel n.° 12, essendo $(1^n - \varepsilon_n)$ inizialmente nulla,

$$\frac{1}{n+1} \overset{n}{\cdot} x^n = \frac{(x+1)^{n+1} - x^{n+1}}{n+1} . \tag{47}$$

Di qui si deduce, per $x = 1$ ed $x = -1$ e scrivendo per esteso i primi membri,

$$\frac{\binom{n}{0}}{1} + \frac{\binom{n}{1}}{2} + \frac{\binom{n}{2}}{3} + \frac{\binom{n}{3}}{4} + \ldots + \frac{\binom{n}{n}}{n+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} ,$$

$$\frac{\binom{n}{0}}{1} - \frac{\binom{n}{1}}{2} + \frac{\binom{n}{2}}{3} - \frac{\binom{n}{3}}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{\binom{n}{n}}{n+1} = \frac{1}{n+1} ,$$

che sommate membro a membro dànno l'ultima formula del numero precedente, mentre sottraendo dalla prima la seconda si ricava

$$\frac{\binom{n}{1}}{2} + \frac{\binom{n}{3}}{4} + \frac{\binom{n}{5}}{6} + \ldots = \frac{2^n - 1}{n+1} ,$$

ossia, più brevemente,

$$1^n \overset{n}{\cdot} \frac{1^n - (-1)^n}{2(n+1)} = \frac{2^n - 1}{n+1} ; \tag{48}$$

da qui, applicando la proposizione del n.° 12, segue

$$1^n \overset{n}{\cdot} \frac{1^n + (-1)^n}{2(n+1)(n+2)} = \frac{2^{n+1} - 1}{(n+1)(n+2)} , \tag{49}$$

ossia, per esteso,

$$\frac{\binom{n}{0}}{1 \cdot 2} + \frac{\binom{n}{2}}{3 \cdot 4} + \frac{\binom{n}{4}}{5 \cdot 6} + \ldots = \frac{2^{n+1} - 1}{(n+1)(n+2)} .$$

OSSERVAZIONE. — La (47) si può generalizzare: all'uopo partiamo da

$$(1^n - \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_{n-2} - \dots - \varepsilon_{n-m+1}) \overset{n}{\cdot} x^n =$$
$$= (x+1)^n - \binom{n}{0}x^n - \binom{n}{1}x^{n-1} - \dots - \binom{n}{m-1}x^{n-m+1}$$
$$= \binom{n}{m}x^{n-m} + \binom{n}{m+1}x^{n-m-1} + \dots + \binom{n}{n-1}x + \binom{n}{n},$$

da cui, per la proposizione del n.° 12,

$$\text{(50)} \qquad \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)} \overset{n}{\cdot} x^n =$$
$$= \frac{\binom{n+m}{m}x^n + \binom{n+m}{m+1}x^{n-1} + \dots + \binom{n+m}{n+m-1}x + \binom{n+m}{n+m}}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}.$$

In particolare, per $x = -1$ viene, a riduzioni fatte,

$$\text{(51)} \qquad \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)} \overset{n}{\cdot} (-1)^n = \frac{(-1)^n}{(m-1)!\,(n+m)},$$

od anche

$$\text{(51')} \qquad \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)} \overset{n}{\cdot} 1^n = \frac{1}{(m-1)!\,(n+m)},$$

da cui, per $m = 2, 3$,

$$\frac{\binom{n}{0}}{1\cdot 2} - \frac{\binom{n}{1}}{2\cdot 3} + \frac{\binom{n}{2}}{3\cdot 4} - \frac{\binom{n}{3}}{4\cdot 5} + \dots + \frac{(-1)^n\binom{n}{n}}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+2},$$

$$\frac{\binom{n}{0}}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{\binom{n}{1}}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{\binom{n}{2}}{3\cdot 4\cdot 5} - \frac{\binom{n}{3}}{4\cdot 5\cdot 6} + \dots + \frac{(-1)^n\binom{n}{n}}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{2(n+3)}.$$

20. Per ciò che segue e per le applicazioni, è utile sapere calcolare i prodotti isobarici e binomiali fra le successioni considerate al n.° 2.

α) Essendo p, q, r interi non negativi, s'ottiene, applicando la proposizione del n.° 12,

$$\text{(52)} \qquad \varepsilon_{n-p} \overset{\cdot}{n} \varepsilon_{n-q} = \varepsilon_{n-(p+q)}, \qquad \varepsilon_{n-p} \overset{\cdot}{n} \varepsilon_{n-q} \overset{\cdot}{n} \varepsilon_{n-r} = \varepsilon_{n-(p+q+r)},$$

$$\text{(53)} \qquad \varepsilon_{n-p} \overset{n}{\cdot} \varepsilon_{n-q} = \frac{(p+q)!}{p!\,q!}\varepsilon_{n-(p+q)}, \qquad \varepsilon_{n-p} \overset{n}{\cdot} \varepsilon_{n-q} \overset{n}{\cdot} \varepsilon_{n-r} = \frac{(p+q+r)!}{p!\,q!\,r!}\varepsilon_{n-(p+q+r)}.$$

β) Ed ancora, essendo p ed m interi non negativi, si ha:

(54) $$\varepsilon_{n-p}^{m)n} = \varepsilon_{n-mp}, \quad \varepsilon_{n-p}^{m)^n} = \frac{(mp)!}{(p!)^m}\varepsilon_{n-mp}.$$

CAPITOLO SECONDO

Divisione isobarica e divisione binomiale.

§ 1. Definizioni e prime conseguenze.

21. Abbiamo visto (n.° 5) che la successione (1^n) è modulo della moltiplicazione ordinaria di successioni, e che la (ε_n) è modulo delle moltiplicazioni isobarica e binomiale. Considerato, ora, una successione (a_n) qualsiasi, poniamo le seguenti definizioni:

Si diranno *reciproca ordinaria, reciproca isobarica, reciproca binomiale,* della successione (a_n), rispettivamente le successioni (α_n), (α'_n), (α''_n), se esistono (¹), definite da

(1) $$a_n \alpha_n = 1^n,$$

(2) $$a_n \overset{\cdot}{_n} \alpha'_n = \varepsilon_n,$$

(3) $$a_n \overset{n}{\cdot} \alpha''_n = \varepsilon_n.$$

Da (1) risulta subito che « condizione necessaria e sufficiente affinchè esista la reciproca ordinaria (α_n), della data successione (a_n), è che sia $a_n \neq 0$ per ogni n ». Sotto tale condizione si ha

(1') $$\alpha_n = \frac{1^n}{a_n} = a_n^{-1}.$$

Scrivendo per esteso le successive relazioni definite da (2) e (3), abbiamo:

$$\begin{array}{ll} a_0\alpha'_0 = 1, & a_0\alpha''_0 = 1, \\ a_1\alpha'_0 + a_0\alpha'_1 = 0, & a_1\alpha''_0 + a_0\alpha''_1 = 0, \\ a_2\alpha'_0 + a_1\alpha'_1 + a_0\alpha'_2 = 0, & a_2\alpha''_0 + 2a_1\alpha''_1 + a_0\alpha''_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots; \end{array}$$

dalle quali si vede chiaramente che per la determinazione di (α'_n) ed (α''_n) occorre e basta che sia $a_0 \neq 0$; cioè:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista la reciproca isobarica

(¹) Una successione si dirà *esistere,* se esistono tutti i suoi elementi, determinati e finiti.

o la reciproca binomiale di una data successione (a_n), *è che la* (a_n) *non sia inizialmente nulla.*

Sotto tale condizione $a_0 \neq 0$, si porrà, conformemente ad (1'),

$$\alpha'_n = \frac{\varepsilon_n}{a_n}{}_{|n} = a_n^{-1)_n}, \tag{2'}$$

$$\alpha''_n = \frac{\varepsilon_n{}_{|n}}{a_n} = a_n^{-1)^n}. \tag{3'}$$

22. Considerate due successioni (a_n) e (c_n) qualsiasi, poniamo le seguenti altre definizioni:

Si diranno *quoziente ordinario, quoziente isobarico, quoziente binomiale,* della successione (c_n) per la successione (a_n), rispettivamente le successioni (β_n), (β'_n), (β''_n), se esistono, definite da

$$a_n \beta_n = c_n, \tag{4}$$

$$a_n \,\dot{n}\, \beta'_n = c_n, \tag{5}$$

$$a_n \overset{n}{.} \beta''_n = c_n. \tag{6}$$

Alle operazioni di determinazione (quando esistono) di tali quozienti, si daranno, rispettivamente, i nomi di *divisione ordinaria, divisione isobarica* e *divisione binomiale* di successioni; la (c_n) si dirà successione *dividendo* e la (a_n) successione *divisore.*

Ne discende che le successioni definite al numero precedente non sono che dei particolari quozienti.

Da (4) si ricava subito che « condizione necessaria e sufficiente affinchè esista il quoziente ordinario (β_n), è che sia $a_n \neq 0$ per ogni n ». Sotto tale condizione si ha

$$\beta_n = \frac{c_n}{a_n} = c_n a_n^{-1}. \tag{4'}$$

Cerchiamo ora le condizioni d'esistenza degli altri quozienti. Diciamo subito che, quando esistono, si porrà, conformemente a (4') e parallelamente a (2') e (3'),

$$\beta'_n = \frac{c_n}{a_n}{}_{|n}, \tag{5'}$$

$$\beta''_n = \frac{c_n{}_{|n}}{a_n}, \tag{6'}$$

ed i secondi membri si potranno leggere, rispettivamente,

c_n diviso, isobarico n, a_n; c_n diviso, binomiale n, a_n.

Distinguiamo ora due casi:

1°) *La* (a_n) *non è inizialmente nulla.* Allora, in virtù del numero precedente, esistono le reciproche isobarica e binomiale della (a_n). Pertanto dalla (5) segue (n.° 9, β)):

$$a_n \overset{\cdot}{_n} a_n^{-1)_n} \overset{\cdot}{_n} \beta'_n = c_n \overset{\cdot}{_n} a_n^{-1)_n},$$

ed essendo, per la definizione di reciproca isobarica, $a_n \overset{\cdot}{_n} a_n^{-1)_n} = \varepsilon_n$, viene

$$\beta'_n = c_n \overset{\cdot}{_n} a_n^{-1)_n};$$

dunque, in tale caso, esiste effettivamente il quoziente (β'_n) ed abbiamo, completando (5'),

$$(5'') \qquad \beta'_n = \frac{c_n}{a_n}\Big|_n = c_n \overset{\cdot}{_n} a_n^{-1)_n}.$$

Analogamente, nell'ipotesi $a_0 \neq 0$, segue

$$(6'') \qquad \beta''_n = \frac{c_n}{a_n}\Big|^n = c_n \overset{n}{\cdot} a_n^{-1)^n}.$$

2°) *La* (a_n) *è inizialmente nulla d'ordine (finito)* m. Allora, affinchè esistano (β'_n) e (β''_n) soddisfacenti alle (5) e (6), bisognerà anzitutto (n.° 10) che la (c_n) sia inizialmente nulla d'ordine almeno uguale ad m. Supposto ciò, da (5) e (6) segue (n.° 12):

$$a_{n+m} \overset{\cdot}{_n} \beta'_n = c_{n+m},$$

$$\frac{n!\, a_{n+m}}{(n+m)!} \overset{n}{\cdot} \beta''_n = \frac{n!\, c_{n+m}}{(n+m)!},$$

e qui, poichè i primi fattori dei primi membri non sono più inizialmente nulli, si è nelle condizioni del caso precedente, ed abbiamo:

$$\beta'_n = c_{n+m} \overset{\cdot}{_n} a_{n+m}^{-1)_n},$$

$$\beta''_n = \frac{n!\, c_{n+m}}{(n+m)!} \overset{n}{\cdot} \left[\frac{n!\, a_{n+m}}{(n+m)!}\right]^{-1)^n};$$

ossia, completando (5') e (6'),

$$(5''') \qquad \beta'_n = \frac{c_n}{a_n}\Big|_n = \frac{c_{n+m}}{a_{n+m}}\Big|_n = c_{n+m} \overset{\cdot}{_n} a_{n+m}^{-1)_n},$$

$$(6''') \qquad \beta''_n = \frac{c_n}{a_n}\Big|^n = \frac{\dfrac{n!\, c_{n+m}}{(n+m)!}}{\dfrac{n!\, a_{n+m}}{(n+m)!}}\Bigg|^n = \frac{n!\, c_{n+m}}{(n+m)!} \overset{n}{\cdot} \left[\frac{n!\, a_{n+m}}{(n+m)!}\right]^{-1)^n},$$

le quali si riducono, per $m = 0$, rispettivamente alle (5'') e (6'').

Riassumendo: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè esistano i quozienti isobarico e binomiale di due date successioni, è che la successione divisore sia inizialmente nulla d'ordine non maggiore di quello del dividendo: se il divisore è inizialmente nullo d'ordine* m(≥ 0), *le espressioni di tali quozienti sono date dalle* (5‴) *e* (6‴).

ESEMPIO. — Sia da risolvere l'equazione (6) particolare

$$(1^n - \varepsilon_n) \overset{n}{\cdot} \beta''_n = n.$$

Qui, la successione $(1^n - \varepsilon_n)$ è inizialmente nulla d'ordine 1 e del pari la successione (n); perciò la successione (β''_n) esiste, e si ricava, applicando la (6‴) per $m = 1$,

$$\beta''_n = \frac{n}{1^n - \varepsilon_n}\Big|^n = \frac{\dfrac{n+1}{n+1}}{\dfrac{1^{n+1} - \varepsilon_{n+1}}{n+1}}\Big|^n = \frac{1^n}{\dfrac{1}{n+1}}\Big|^n = 1^n \overset{n}{\cdot} \left(\frac{1}{n+1}\right)^{-1)^n};$$

vedremo poi, nelle applicazioni che tale successione è molto notevole in Analisi, non essendo altro che la così detta successione dei numeri di BERNOULLI, lievemente modificata.

23. α) Le espressioni del numero precedente,

$$\frac{c_n}{a_n}, \quad \frac{c_n}{a_n}\Big|^n, \quad \frac{c_n}{a_n}\Big|^n,$$

si diranno che sono, rispettivamente, una *frazione ordinaria*, una *frazione isobarica* e una *frazione binomiale* (d'indice n): anche per le due ultime frazioni, si parlerà di termini, di numeratore e di denominatore delle frazioni. Dal numero precedente risulta poi, in modo chiaro, quand'è che tali frazioni hanno significato, vale a dire, rappresentano effettivamente delle determinate successioni. Una frazione, isobarica o binomiale, il cui denominatore sia inizialmente nullo d'ordine maggiore di quello del denominatore, è da riguardare come *simbolo d'impossibilità*, se, poi, numeratore e denominatore sono entrambi totalmente nulli, la frazione stessa è manifestamente da riguardare come *simbolo d'indeterminazione*. Qualche volta, in luogo delle due ultime notazioni, si scriverà, rispettivamente,

$$c_n \underset{n}{\vdots} a_n, \quad c_n \overset{n}{:} a_n.$$

β) Se (a_n) è inizialmente nulla d'ordine (finito) $m > 0$, le successioni, presentatesi spontaneamente al numero precedente,

$$a_{n+m}^{-1)_n}, \qquad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

$$\left[\frac{n!\,a_{n+m}}{(n+m)!}\right]^{-1)^n} = \left[\frac{a_{n+m}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}\right]^{-1)^n}, \qquad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

si diranno, rispettivamente, *reciproca generalizzata isobarica* e *reciproca generalizzata binomiale* della successione (a_n). Per $m=0$, le due successioni precedenti si riducono alle reciproche isobarica e binomiale definite al n.° 21.

Essendo sempre (a_n) inizialmente nulla d'ordine m, valgono le (21) e (22) del Capitolo precedente (n.° 13), dalle quali si ricava, per $\mu = m$,

$$a_n \,\dot{_n}\, a_{n+m}^{-1)_n} = \varepsilon_{n-m}, \quad a_n \stackrel{n}{\cdot} \left[\frac{n!\,a_{n+m}}{(n+m)!}\right]^{-1)^n} = m!\,\varepsilon_{n-m},$$

ed anche

(7) $$a_{n+m}^{-1)_n} = \frac{\varepsilon_{n-m}}{a_n}\Big|_n,$$

(8) $$\left[\frac{n!\,a_{n+m}}{(n+m)!}\right]^{-1)^n} = \frac{m!\,\varepsilon_{n-m}}{a_n}\Big|^n,$$

formule esprimenti le reciproche generalizzate della (a_n) in forma di frazioni isobarica e binomiale, rispettivamente; per $m=0$, poi, si ricade nelle (2') e (3').

γ) Ricorrendo al principio di permanenza delle proprietà formali, col volere la conservazione delle (4) del Capitolo precedente (n.° 6) anche per l'esponente -1, si trova che, analogamente alla

$$a_n^{-m} = \left[a_n^{-1}\right]^m,$$

si deve porre

$$a_n^{-m)_n} = \left[a_n^{-1)_n}\right]^{m)_n}, \quad a_n^{-m)^n} = \left[a_n^{-1)^n}\right]^{m)^n}.$$

Con ciò *resta stabilito il significato di potenza, isobarica o binomiale, ad esponente intero qualsiasi.*

§ 2. Osservazioni sulle frazioni isobariche e binomiali.

24. Fra le frazioni isobariche e binomiali intercede il legame espresso da

(9) $$\frac{b_n}{a_n}\Big|_n = \frac{1}{n!}\,\frac{n!\,b_n}{n!\,a_n}\Big|^n,$$

od anche

$$(9') \qquad \frac{\dfrac{b_n}{n!}}{\dfrac{a_n}{n!}}{}_{|n} = \frac{1}{n!}\,\frac{b_n}{a_n}{}^{|n}.$$

Ciò è una conseguenza del n.° 8.

25. α) Dal n.° 9, α) discende, essendo c una costante non nulla,

$$c\,\frac{b_n}{a_n}{}_{|n} = \frac{cb_n}{a_n}{}_{|n} = \frac{b_n}{c^{-1}a_n}{}_{|n}, \quad c\,\frac{b_n}{a_n}{}^{|n} = \frac{cb_n}{a_n}{}^{|n} = \frac{b_n}{c^{-1}a_n}{}^{|n},$$

$$c^n\,\frac{b_n}{a_n}{}_{|n} = \frac{c^n b_n}{c^n a_n}{}_{|n}, \quad c^n\,\frac{b_n}{a_n}{}^{|n} = \frac{c^n b_n}{c^n a_n}{}^{|n}.$$

Notare, in particolare, il caso $b_n \equiv \varepsilon_n$.

β) Indicando con (c_n) una successione qualsiasi non nulla, si ha:

$$\frac{b_n}{a_n}{}_{|n} = \frac{b_n \,\dot{n}\, c_n}{a_n \,\dot{n}\, c_n}{}_{|n}, \quad \frac{b_n}{a_n}{}^{|n} = \frac{b_n \overset{n}{\cdot} c_n}{a_n \overset{n}{\cdot} c_n}{}^{|n};$$

ed in particolare, per $c_n \equiv c\varepsilon_n$,

$$\frac{b_n}{a_n}{}_{|n} = \frac{cb_n}{ca_n}{}_{|n}, \quad \frac{b_n}{a_n}{}^{|n} = \frac{cb_n}{ca_n}{}^{|n}.$$

Queste formule, applicate in senso inverso, servono alla semplificazione delle frazioni isobariche e binomiali. Ad es.:

$$\frac{n}{2^n - 1}{}^{|n} = \frac{\varepsilon_{n-1} \overset{n}{\cdot} 1^n}{(1^n - \varepsilon_n) \overset{n}{\cdot} 1^n} = \frac{\varepsilon_{n-1}}{1^n - \varepsilon_n}{}^{|n},$$

dove l'ultimo quoziente rappresenta precisamente, come vedremo nelle applicazioni, la successione dei numeri di BERNOULLI.

26. α) *Addizione delle frazioni isobariche e binomiali.* Si ha anzitutto, per le frazioni d'uguale denominatore,

$$\frac{b_n}{a_n}{}_{n} + \frac{c_n}{a_n}{}_{n} = \frac{b_n + c_n}{a_n}{}_{|n}, \quad \frac{b_n}{a_n}{}^{|n} + \frac{c_n}{a_n}{}^{|n} = \frac{b_n + c_n}{a_n}{}^{|n}.$$

Invero, riferendoci, ad es., al caso isobarico ed indicate con γ_n e γ'_n le due frazioni del primo membro, è

$$\gamma_n \underset{n}{\cdot} a_n = b_n, \quad \gamma'_n \underset{n}{\cdot} a_n = c_n, \quad \text{onde} \quad (\gamma_n + \gamma'_n) \underset{n}{\cdot} a_n = b_n + c_n,$$

da cui, dividendo isobaricamente per a_n, la formula da dimostrare.

Più in generale, nel caso dei denominatori diversi, si ha:

$$\frac{b_n}{a_n}\Big|_n + \frac{c_n}{\alpha_n}\Big|_n = \frac{b_n \underset{n}{\cdot} \alpha_n + c_n \underset{n}{\cdot} a_n}{a_n \underset{n}{\cdot} \alpha_n}\Big|_n, \quad \frac{b_n}{a_n}\Big|^n + \frac{c_n}{\alpha_n}\Big|^n = \frac{b_n \overset{n}{\cdot} \alpha_n + c_n \overset{n}{\cdot} a_n}{a_n \overset{n}{\cdot} \alpha_n}\Big|^n.$$

Circa la scelta di un denominatore comune differente dal prodotto isobarico o binomiale dei denominatori, si può vedere il Capitolo seguente.

La sottrazione si fa analogamente.

β) *Moltiplicazione delle frazioni isobariche e binomiali.* Si ha:

$$\frac{b_n}{a_n}\Big|_n \underset{n}{\cdot} \frac{c_n}{\alpha_n}\Big|_n = \frac{b_n \underset{n}{\cdot} c_n}{a_n \underset{n}{\cdot} \alpha_n}\Big|_n, \quad \frac{b_n}{a_n}\Big|^n \overset{n}{\cdot} \frac{c_n}{\alpha_n}\Big|^n = \frac{b_n \overset{n}{\cdot} c_n}{a_n \overset{n}{\cdot} \alpha_n}\Big|^n,$$

le quali si dimostrano analogamente a quanto è stato fatto ad α). In particolare:

$$\left(\frac{b_n}{a_n}\Big|_n\right)^{m)_n} = \frac{b_n^{m)_n}}{a_n^{m)_n}}\Big|_n, \quad \left(\frac{b_n}{a_n}\Big|^n\right)^{m)^n} = \frac{b_n^{m)^n}}{a_n^{m)^n}}\Big|^n.$$

γ) *Divisione delle frazioni isobariche e binomiali.* Si ha:

$$\frac{b_n}{a_n}\Big|_n \underset{n}{:} \frac{c_n}{\alpha_n}\Big|_n = \frac{b_n \underset{n}{\cdot} \alpha_n}{a_n \underset{n}{\cdot} c_n}\Big|_n, \quad \frac{b_n}{a_n}\Big|^n \overset{n}{:} \frac{c_n}{\alpha_n}\Big|^n = \frac{b_n \overset{n}{\cdot} \alpha_n}{a_n \overset{n}{\cdot} c_n}\Big|^n,$$

le quali si dimostrano immediatamente applicando le formule, scritte a β), per la moltiplicazione. I primi membri (e quindi i secondi membri), delle due formule ora scritte, hanno significato se e solo se le frazioni a divisore sono inizialmente nulle d'ordine $\leq$ all'ordine corrispondente delle frazioni a dividendo. In particolare, segue che le frazioni

$$\frac{b_n}{a_n}\Big|_n, \quad \frac{b_n}{a_n}\Big|^n$$

avranno per reciproche isobarica e binomiale, rispettivamente, le frazioni

$$\frac{a_n}{b_n}\Big|_n, \quad \frac{a_n}{b_n}\Big|^n,$$

se e solo se le (a_n) e (b_n) sono inizialmente nulle dello stesso ordine.

27. Dalla definizione dei quozienti isobarico e binomiale è risultato che *in una relazione fra successioni un fattore isobarico o binomiale di un membro si può portare a divisore isobarico o binomiale, rispettivamente, dell'altro membro.*

In particolare, dalle relazioni

$$a_n \underset{n}{\cdot} b_n = c_n, \quad a_n \overset{n}{\cdot} b_n = \gamma_n,$$

quando (c_n) e (γ_n) non siano inizialmente nulle (ed allora saranno tali anche (a_n) e (b_n)), si può dedurre

$$a_n^{-1)_n} \underset{n}{\cdot} b_n^{-1)_n} = c_n^{-1)_n}, \quad a_n^{-1)^n} \overset{n}{\cdot} b_n^{-1)^n} = \gamma_n^{-1)^n}.$$

Nell'eseguire un tale passaggio si dirà, talvolta, che *si è passato alle successioni reciproche in ambo i membri* delle date relazioni.

28. α) *Se in una successione* $(\mathrm{a_n})$, *non inizialmente nulla, gli elementi di indice dispari sono tutti nulli, altrettanto accade per le sue reciproche isobarica e binomiale.* Infatti, dalla definizione di reciproca isobarica segue subito, nelle ipotesi fatte, che è $a_1^{-1)_1} = 0$, $a_3^{-1)_3} = 0$; ammesso, poi, che sia $a_5^{-1)_5} = a_7^{-1)_7} = \ldots = a_{2n-1}^{-1)_{2n-1}} = 0$, si trova $a_0 a_{2n+1}^{-1)_{2n+1}} = 0$, da cui $a_{2n+1}^{-1)_{2n+1}} = 0$. Analogamente per la reciproca binomiale.

β) *Se la successione* $(\mathrm{a_n})$, *non inizialmente nulla, ha gli elementi d'indice dispari nulli, si ha*

$$a_{2n}^{-1)_{2n}} = a_{2n}^{-1)_n}, \quad a_n^{-1)^{2n}} = \frac{(2n)!}{n!}\left[\frac{n!\,a_{2n}}{(2n)!}\right]^{-1)^n} \tag{10}$$

Invero, basta applicare alle

$$a_{2n} \underset{2n}{\cdot} a_{2n}^{-1)_{2n}} = \varepsilon_n, \quad a_{2n} \overset{2n}{\cdot} a_{2n}^{-1)^{2n}} = \varepsilon_n$$

le (12) e (13) del Capitolo precedente (n.° 11, β)), e quindi risolvere le relazioni ottenute rispetto ai primi membri delle (10).

§ 3. Sul calcolo delle successioni reciproche. Esempi.

29. Considerata una successione (a_n) non inizialmente nulla, la reciproca isobarica $\left(a_n^{-1)_n}\right)$ e la reciproca binomiale $\left(a_n^{-1)^n}\right)$ sono definite, rispettivamente, da (n.° 21)

$$a_n \underset{n}{\cdot} a_n^{-1)_n} = \varepsilon_n, \quad a_n \overset{n}{\cdot} a_n^{-1)^n} = \varepsilon_n,$$

ossia, scrivendo per esteso le successive relazioni per $n=0,\ 1,\ 2, \ldots,$

$$
(11)\quad \begin{cases}
a_0 a_0^{-1)_0} = 1 \\
a_1 a_0^{-1)_0} + a_0 a_1^{-1)_1} = 0 \\
a_2 a_0^{-1)_0} + a_1 a_1^{-1)_1} + a_0 a_2^{-1)_2} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_n a_0^{-1)_0} + a_{n-1} a_1^{-1)_1} + a_{n-2} a_2^{-1)_2} + \ldots + a_1 a_{n-1}^{-1)_{n-1}} + a_0 a_n^{-1)_n} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,
\end{cases}
$$

$$
(12)\quad \begin{cases}
a_0 a_0^{-1)^0} = 1 \\
a_1 a_0^{-1)^0} + a_0 a_1^{-1)^1} = 0 \\
a_2 a_0^{-1)^0} + 2 a_1 a_1^{-1)^1} + a_0 a_2^{-1)^2} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\binom{n}{0} a_n a_0^{-1)^0} + \binom{n}{1} a_{n-1} a_1^{-1)^1} + \binom{n}{2} a_{n-2} a_2^{-1)^2} + \ldots + \binom{n}{n-1} a_1 a_{n-1}^{-1)^{n-1}} + \binom{n}{n} a_0 a_n^{-1)^n} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

Le espressioni di $a_n^{-1)_n}$ ed $a_n^{-1)^n}$ si possono ottenere applicando la regola di CRAMER ai sistemi delle prime $n+1$ equazioni di (11) e (12); infatti, il determinante dei coefficienti di ciascuno dei due sistemi, non omogenei, che si ottengono, è dato, in entrambi i casi, da a_0^{n+1}, diverso da zero per l'ipotesi che (a_n) non sia inizialmente nulla. S'ottengono così, con una piccola semplificazione, le espressioni:

$$
(13)\qquad a_n^{-1)_n} = \frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}} \begin{vmatrix}
a_1 & a_0 & 0 & \ldots 0 & 0 \\
a_2 & a_1 & a_0 & \ldots 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots a_1 & a_0 \\
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots a_2 & a_1
\end{vmatrix}, \qquad (n=0,\ 1,\ 2, \ldots),
$$

$$
(14)\qquad a_n^{-1)^n} = \frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}} \begin{vmatrix}
a_1 & a_0 & \ldots 0 & 0 \\
a_2 & 2a_1 & \ldots 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\binom{n-1}{0} a_{n-1} & \binom{n-1}{1} a_{n-2} & \ldots \binom{n-1}{n-2} a_1 & \binom{n-1}{n-1} a_0 \\
\binom{n}{0} a_n & \binom{n}{1} a_{n-1} & \ldots \binom{n}{n-2} a_2 & \binom{n}{n-1} a_1
\end{vmatrix}, \quad (n=0,\ 1,\ 2, \ldots),
$$

dove i determinanti d'ordine n, dei secondi membri, si possono riguardare come una generalizzazione dei così detti *determinanti delle funzioni fratte* [1], e, in (13), si ha proprio un tale determinante se si suppone $a_0 = 1$.

---

[1] Cfr. E. PASCAL, *I determinanti*. Milano (1923), pag. 218.

30. Volendo procedere al calcolo effettivo dei singoli elementi delle reciproche isobarica e binomiale di successioni espressamente date, anzichè applicare le (13) e (14), riesce praticamente più comodo l'uso di schemi opportuni, analoghi a quelli indicati al n.° 13 pel calcolo dei prodotti isobarici e binomiali.

Supposti, ad es., già calcolati, a mezzo di tali schemi, gli elementi $a_0^{-1)^0}$, $a_1^{-1)^1}$, $a_2^{-1)^2}, \dots, a_{n-1}^{-1)^{n-1}}$, per calcolare $a_n^{-1)^n}$ si formerà lo schema:

$$\begin{array}{cccccc:c}
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \overrightarrow{\cdots} & \binom{n}{n-2} & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \\
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \overleftarrow{\cdots} & a_2 & a_1 & a_0 \\
a_0^{-1)^0} & a_1^{-1)^1} & a_2^{-1)^2} & \overrightarrow{\cdots} & a_{n-2}^{-1)^{n-2}} & a_{n-1}^{-1)^{n-1}} & \\
\hline
\end{array}$$

(dove le freccie stanno solo a porre in evidenza l'ordine secondo cui vengono scritti gli elementi), si faranno poi, separatamente, i prodotti degli elementi posti in ciascuna colonna a sinistra della linea punteggiata, e si dividerà la somma di tali prodotti per $-a_0$. Analogamente pei reciproci isobarici. In tale modo, si trova facilmente:

$$\begin{aligned}
a_0^{-1)_0} &= a_0^{-1} \\
a_1^{-1)_1} &= -a_0^{-2} a_1 \\
a_2^{-1)_2} &= a_0^{-3} a_1^2 - a_0^{-2} a_2 \\
a_3^{-1)_3} &= -a_0^{-4} a_1^3 + 2a_0^{-3} a_1 a_2 - a_0^{-2} a_3 \\
a_4^{-1)_4} &= a_0^{-5} a_1^4 - 3a_0^{-4} a_1^2 a_2 + a_0^{-3}(a_1^2 + 2a_1 a_3) - a_0^{-2} a_4,
\end{aligned}$$

ed analogamente:

$$\begin{aligned}
a_0^{-1)^0} &= a_0^{-1} \\
a_1^{-1)^1} &= -a_0^{-2} a_1 \\
a_2^{-1)^2} &= 2a_0^{-3} a_1^2 - a_0^{-2} a_2 \\
a_3^{-1)^3} &= -6a_0^{-4} a_1^3 + 6a_0^{-3} a_1 a_2 - a_0^{-2} a_3 \\
a_4^{-1)^4} &= 24a_0^{-5} a_1^4 - 36a_0^{-4} a_1^2 a_2 + a_0^{-3}(6a_2^2 + 8a_1 a_3) - a_0^{-2} a_4 .
\end{aligned}$$

Si vede qui, in entrambi i casi, che ogni elemento reciproco ha un peso, negli elementi della successione (a_n), dato dal proprio indice, e, inoltre, che passando dai reciproci isobarici a quelli binomiali variano solo i valori assoluti dei coefficienti numerici.

Alcune volte, però, l'applicazione delle proposizioni precedenti e di altre seguenti permetterà di giungere direttamente alla espressione dell'elemento generale della successione reciproca cercata: in tali casi, applicando poi le (13) e (14), si ottengono delle formule sui determinanti. Diamo, ora, alcuni esempi che ci saranno utilissimi nelle applicazioni.

31. α) Da (n.° 15)

$$\binom{1}{n} \dot{_n}\, a_n = \begin{cases} a_0 & \text{per } n=0, \\ a_n + a_{n-1} & \text{per } n=1, 2, \ldots, \end{cases}$$

si ricava, facendo $a_n \equiv (-1)^n$,

$$(15) \qquad \binom{1}{n} \dot{_n} (-1)^n = \varepsilon_n,$$

cioè le due successioni

$$\begin{matrix} 1, & 1, & 0, & 0, & 0, \ldots, \\ 1, & -1, & 1, & -1, & 1, \ldots, \end{matrix}$$

sono l'una reciproca isobarica dell'altra. Essendo a una costante non nulla, si ricava da (15), in virtù del n.° 9, α),

$$(15') \qquad \binom{1}{n} a^n \dot{_n} (-1)^n a^n = \varepsilon_n, \quad \text{ed anche} \quad (-1)^n \binom{1}{n} a^n \dot{_n}\, a^n = \varepsilon_n,$$

le quali si possono scrivere, per essere $\binom{1}{n} a^n = \varepsilon_n + a\varepsilon_{n-1}$,

$$(\varepsilon_n + a\varepsilon_{n-1}) \dot{_n} (-1)^n a^n = \varepsilon_n, \quad (\varepsilon_n - a\varepsilon_{n-1}) \dot{_n}\, a^n = \varepsilon_n.$$

Innalzando la (15) a potenza m^{esima} isobarica s'ottiene, per le (31) e (37) del Capitolo precedente,

$$(16) \qquad \binom{m}{n} \dot{_n} (-1)^n \binom{n+m-1}{m-1} = \varepsilon_n,$$

che si può scrivere nella forma

$$\frac{\varepsilon_n}{(\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1})^{m)_n}} \Big|_n = (-1)^n \binom{n+m-1}{m-1},$$

ed anche nell'altra

$$\binom{m}{n} \dot{_n} \binom{-m}{n} = \varepsilon_n.$$

Di qui segue che la formula (31) del n.° 15, ossia $\binom{1}{n}^{m)_n} = \binom{m}{n}$, vale per ogni intero m positivo, nullo o negativo.

β) Abbiamo già trovato (n.° 18, (43′)) la formula

$$\frac{1}{n!} \overset{\cdot}{_n} \frac{(-1)^n}{n!} = \varepsilon_n, \tag{17}$$

da cui più in generale, essendo a una costante non nulla,

$$\frac{a^n}{n!} \overset{\cdot}{_n} \frac{(-1)^n a^n}{n!} = \varepsilon_n. \tag{17′}$$

Ricordando la formula (42′) del n.° 18, ossia $\left(\frac{1}{n!}\right)^{m)_n} = \frac{m^n}{n!}$, si conclude da (17′), ove si faccia $a = m$, che tale potenza m^{esima} vale per ogni intero m positivo, nullo o negativo.

32. Siamo ora in grado, sapendo da (15′) che la reciproca isobarica di (a^n) è data da $(-1)^n \binom{1}{n} a^n = \varepsilon_n - a\varepsilon_{n-1}$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, di dimostrare la formula generale accennata al n.° 17, β); precisamente, indicato con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ delle costanti tutte diverse fra loro, di dimostrare la formula

$$\alpha_1^n \overset{\cdot}{_n} \alpha_2^n \overset{\cdot}{_n} \cdots \overset{\cdot}{_n} \alpha_p^n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_p \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_p^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{p-2} & \alpha_2^{p-2} & \ldots & \alpha_p^{p-2} \\ \alpha_1^{n+p-1} & \alpha_2^{n+p-1} & \ldots & \alpha_p^{n+p-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_p \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_p^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_2^{p-2} & \alpha_1^{p-2} & \ldots & \alpha_p^{p-2} \\ \alpha_1^{p-1} & \alpha_2^{p-1} & \ldots & \alpha_p^{p-1} \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Invero, come si è visto al n.° 17, β), la formula vale per $p = 2$:

$$\alpha_1^n \overset{\cdot}{_n} \alpha_2^n = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1^{n+1} & \alpha_2^{n+1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}. \tag{0}$$

Partendo da questa, è facile dimostrare che la formula vale per $p = 3$; invero, abbiamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1^{n+2} & \alpha_2^{n+2} & \alpha_3^{n+2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2^{n+2} & \alpha_3^{n+2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_1^{n+2} & \alpha_3^{n+2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1^{n+2} & \alpha_2^{n+2} \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_2\alpha_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_2^{n+1} & \alpha_3^{n+1} \end{vmatrix} - \alpha_1\alpha_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1^{n+1} & \alpha_3^{n+1} \end{vmatrix} + \alpha_1\alpha_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1^{n+1} & \alpha_2^{n+1} \end{vmatrix},$$

da cui, applicando la (0),

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1^{n+2} & \alpha_2^{n+2} & \alpha_3^{n+2} \end{vmatrix} = \alpha_2\alpha_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} \left(\alpha_2^n \underset{n}{\cdot} \alpha_3^n\right) - \alpha_1\alpha_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_3 \end{vmatrix} \left(\alpha_1^n \underset{n}{\cdot} \alpha_3^n\right) + \alpha_1\alpha_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} \left(\alpha_1^n \underset{n}{\cdot} \alpha_2^n\right)$$

$$= \alpha_1^n \underset{n}{\cdot} \alpha_2^n \underset{n}{\cdot} \alpha_3^n \underset{n}{\cdot} \left\{ \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} (\varepsilon_n - \alpha_1\varepsilon_{n-1}) - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_1^2 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} (\varepsilon_n - \alpha_2\varepsilon_{n-1}) + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{vmatrix} (\varepsilon_n - \alpha_3\varepsilon_{n-1}) \right\}$$

$$= \alpha_1^n \underset{n}{\cdot} \alpha_2^n \underset{n}{\cdot} \alpha_3^n \underset{n}{\cdot} \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} \varepsilon_n - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} \varepsilon_{n-1} \right\},$$

e quindi

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1^{n+2} & \alpha_2^{n+2} & \alpha_3^{n+2} \end{vmatrix} = \left(\alpha_1^n \underset{n}{\cdot} \alpha_2^n \underset{n}{\cdot} \alpha_3^n\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{vmatrix},$$

cioè, la formula da dimostrare per $p = 3$. Ammesso ora vera l' identità da dimostrare pel valore $p - 1$, si vede, con lo stesso procedimento precedente, che la stessa identità vale pel valore p: in virtù del principio d' induzione completa la (18) è dunque dimostrata.

Si può notare che la (18) asserisce che il prodotto isobarico

$$\alpha_1^n \underset{n}{\cdot} \alpha_2^n \underset{n}{\cdot} \dots \underset{n}{\cdot} \alpha_p^n$$

non è altro che la funzione interpolare d' ordine $p - 1$, o, come dice il Nörlund [1], la differenza divisa d' ordine $p - 1$, relativa ai punti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, della funzione

$$x^{n+p-1}.$$

33. Essendo α e β due costanti non nulle, la successione

$$\alpha^n \underset{n}{\cdot} \beta^n, \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ha per reciproca isobarica, in virtù di (15'),

$$(\varepsilon_n - \alpha\varepsilon_{n-1}) \underset{n}{\cdot} (\varepsilon_n - \beta\varepsilon_{n-1}) \equiv \varepsilon_n - (\alpha + \beta)\varepsilon_{n-1} + \alpha\beta\varepsilon_{n-2}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

ossia la successione, ultimamente nulla d' ordine 3,

$$1, \quad -(\alpha + \beta), \quad \alpha\beta, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \dots .$$

---

[1] N. E. Nörlund, *Leçons sur les Séries d' interpolation.* Paris (1926), cfr. pp. 1-2, (3).

Analogamente, essendo γ un'altra costante, la successione

$$\alpha^n \;\dot{{}_n}\; \beta^n \;\dot{{}_n}\; \gamma^n, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ha per reciproca isobarica

$$(\varepsilon_n - \alpha\varepsilon_{n-1}) \,\dot{{}_n}\, (\varepsilon_n - \beta\varepsilon_{n-1}) \,\dot{{}_n}\, (\varepsilon_n - \gamma\varepsilon_{n-1}) \equiv$$
$$\equiv \varepsilon_n - (\alpha + \beta + \gamma)\varepsilon_{n-1} + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)\varepsilon_{n-2} - \alpha\beta\gamma\varepsilon_{n-3}, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

ossia la successione, ultimamente nulla d'ordine 4,

$$1, \quad -(\alpha + \beta + \gamma), \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma, \quad -\alpha\beta\gamma, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \ldots .$$

Col principio d'induzione completa si conclude facilmente che, essendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ delle costanti, si ha:

$$(19) \qquad \frac{\varepsilon_n}{\alpha_1^n \,\dot{{}_n}\, \alpha_2^n \,\dot{{}_n}\, \cdots \,\dot{{}_n}\, \alpha_p^n}\Big|_n = \varepsilon_n - \Sigma\alpha_r \cdot \varepsilon_{n-1} + \Sigma\alpha_r\alpha_s \cdot \varepsilon_{n-2} - \Sigma\alpha_r\alpha_s\alpha_t \cdot \varepsilon_{n-3} + \ldots +$$
$$+ (-1)^p \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p \varepsilon_{n-p},$$

dove è manifesto il significato dei simboli sommatori.

OSSERVAZIONE. — Posto

$$-\Sigma\alpha_r = a_1, \quad \Sigma\alpha_r\alpha_s = a_2, \quad -\Sigma\alpha_r\alpha_s\alpha_t = a_3, \ldots, \quad (-1)^p\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p = a_p,$$

consideriamo l'equazione algebrica

$$x^p + a_1 x^{p-1} + a_2 x^{p-2} + \ldots + a_p = 0,$$

le cui radici sono manifestamente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. La (19) si può allora scrivere

$$(19') \qquad \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n + a_1\varepsilon_{n-1} + a_2\varepsilon_{n-2} + \ldots + a_p\varepsilon_{n-p}}\Big|_n = \alpha_1^n \,\dot{{}_n}\, \alpha_2^n \,\dot{{}_n}\, \cdots \,\dot{{}_n}\, \alpha_p^n,$$

dove al secondo membro, se le α_r sono tutte radici semplici, si può sostituire l'espressione data da (18). Si ha in (19′) *un notevole legame fra i coefficienti e le radici di un'equazione algebrica*: la funzione razionale intera dei coefficienti data dal primo membro di (19′) ha per espressione simmetrica nelle radici la semplice espressione del secondo membro. La (19′), nel tempo stesso, dà il modo di calcolare la reciproca isobarica di una successione qualsiasi, ultimamente nulla,

$$1, \quad a_1, \quad a_2, \ldots, a_p, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \ldots,$$

quando si sappiano determinare i numeri α_r legati agli a_r nel modo visto; più avanti troveremo l'espressione effettiva dell'elemento generale della detta successione reciproca, anche senza conoscere gli α_r.

34. α) Abbiamo già visto che è (n.° 18, (43))

(20) $$1^n \overset{n}{:} (-1)^n = \varepsilon_n,$$

ed anche, più in generale,

(20') $$a^n \overset{n}{:} (-1)^n a^n = \varepsilon_n.$$

β) Dalla precedente (15) si deduce, applicando la (10) del n.° 8,

(21) $$\binom{1}{n} \overset{n}{:} (-1)^n n! = \varepsilon_n,$$

e più in generale

(21') $$\binom{1}{n} a^n \overset{n}{:} (-1)^n n!\, a^n = \varepsilon_n.$$

35. α) Se nella (22) del n.° 13 si fa $a_n \equiv 1^n - \varepsilon_n$, s'ottiene

$$1^n - \varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} \overset{n}{:} \frac{1}{n+1},$$

da cui

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1^n - \varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}}\Big|_n,$$

e quindi (n.° 26, γ))

(22) $$\left(\frac{1}{n+1}\right)^{-1)^n} = \frac{\varepsilon_{n-1}}{1^n - \varepsilon_n}\Big|_n.$$

Vedremo, nelle applicazioni, che questa successione reciproca è quella dei numeri di BERNOULLI.

β) La (22) si può generalizzare facendo, nella richiamata formula (22) del n.° 13, $a_n \equiv 1^n - \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} - \dots - \varepsilon_{n-m+1}$. S' ottiene allora, procedendo analogamente,

(22') $$\left[\frac{m!}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}\right]^{-1)^n} = \frac{\varepsilon_{n-m}}{1^n - \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} - \dots - \varepsilon_{n-m+1}}\Big|_n.$$

Ueber projektive Uebertragungen und Ableitungen II.

von J. A. SCHOUTEN (in Delft) und ST. GOLAB (in Krakow).

EINLEITUNG

In einer unter demselben Titel in der « Mathematischen Zeitschrift » erschienenen Arbeit (¹) haben wir gezeigt, dasz die verschiedenen von E. CARTAN und J. A. SCHOUTEN, T. Y. THOMAS und O. VEBLEN aufgestellten, scheinbar nicht miteinander übereinzubringenden Theorien über die projektiven Uebertragungen und Ableitungen, Teile eines Ganzen sind und sich aus diesem Ganzen durch Spezialisierung in einfacher Weise zurückgewinnen lassen. Kurz gesagt kommt es an auf die Konstruktion einer Punktdichtenübertragung woraus sich dann alles andere von selbst ergibt.

Inzwischen hat nun H. WEYL in einer eben erschienenen Arbeit (²) die Untersuchung aufs neue aufgenommen. Das wesentlich Neue seines Ansatzes ist, dasz er mit inhomogenen Koordinaten in der lokalen Mannigfaltigkeit anfängt. Diese von allen anderen Untersuchern bis jetzt als hoffnungslos zurückgewiesene Methode erweist sich bei ihm gerade als überaus fruchtbar. Sie eröffnet einen in mancher Hinsicht neuen Weg zur Konstruktion der gesuchten Uebertragung, einen Weg, der zu interessanten geometrischen Deutungen Anlasz gibt, und wird sich, richtig angewandt, sicher auch für die Theorie der konformen Uebertragungen, sowie für jede Geometrie, die auf der Abbildung benachbarter Mannigfaltigkeiten aufeinander beruht, als überaus nützlich erweisen.

Leider ist diese sehr wichtige Weylsche Arbeit recht kurz und dadurch etwas fragmentarisch gehalten. Sie bringt an manchen Stellen nur dem Kenner genügende Andeutungen und dringt nicht bis zur expliziten Darstellung der gesuchten Uebertragung vor. Auch die Beziehungen zu den Arbeiten anderer Autoren sind nur gestreift. Damit hängt wohl zusammen, dasz da, wo bei der Ableitung eine letzte Forderung eingeführt werden musz, nur auf eine

(¹) « Mathematische Zeitschrift », (30) 1-29.

(²) *On the foundations of general infinitesimal Geometry*, « Bull. Amer. Math. Soc. », 35 (29), 716-725, weiterhin zitiert als F. G.

schon in der Litteratur aufgetretene Forderung hingewiesen wird, die eigentlich nicht im Ramen der Untersuchung hineinpaszt, während eine vollständig aus dieser Untersuchung herauswachsende Forderung, die an dieser Stelle einzusetzen gewesen wäre, übersehen wird. In einer zweiten, gemeinschaftlich mit H. P. ROBERTSON verfaszten Arbeit [3], weiterhin zitiert als P. G., wird die Darstellungstheorie linearer Gruppen zur Fundierung einer der Hauptformeln herangezogen.

Wir bringen im ersten § eine kurze Uebersicht des Gedankenganges unserer oben zitierten Arbeit, der von den aufgestellten zehn Forderungen zur Punktdichtenübertragung führt. Dieser Gedankengang liesz sich durch frühere Einführung der holonomen Bezugssysteme (§ 1, (IV)) noch bedeutend kürzer fassen und ist hier rein ohne irgendwelche Nebenbetrachtungen dargestellt. Im zweiten § folgt dann eine Darstellung der Weylschen Methode. Wir verwenden dort zwecks besseren Vergleichs die Schreibweise des § 1, setzen Andeutungen in Formeln um und füllen Lücken aus, halten uns aber stets an den Gedankengang der Weylschen Arbeit. Dabei sind die beiden Paragraphen so redigiert, dasz der Vergleich möglichst einfach ist. Dieser Vergleich lehrt, dasz die beiden Methoden nicht wesentlich verschieden sind, dasz aber die glückliche Heranziehung der nichthomogenen Koordinaten und der Darstellungstheorie bei der zweiten es ermöglicht, manchen der aufgestellten Forderungen ihren formalen Charakter zu nehmen und eine natürliche geometrische Deutung zu geben.

Eine dieser Forderungen ist die Symmetrieforderung, die in Beziehung gesetzt wird zur Cartanschen Torsion. Von diesem Gedanken ausgehend liegt es nahe die Betrachtung zu verallgemeinern und auch solche bis auf bahntreue Transformationen gegebene lineare Uebertragungen zu betrachten, die nicht symmetrisch sind, oder, was dasselbe ist, deren Cartansche Torsion nicht verschwindet. In der Tat ist eine solche Verallgemeinerung möglich, wie im § 3 kurz angedeutet wird.

§ 1. **Festlegung der Punktdichtenübertragung.**

Jedem Punkte einer X_n mit den Urvariablen ξ^ν, $\alpha, \ldots, \omega = 1, 2, \ldots, n$, wird eine P_n [4] mit den homogenen Koordinaten $\mathfrak{r}^c$, $a, \ldots, g = 0, 1, \ldots, n$, zugeordnet.

[3] H. P. ROBERTSON and H. WEYL, *On a problem in the theory of groups arising in the foundations of infinitesimal geometry*, « Bull. Amer. Math. Soc. », 35 (29), 686-690; weiterhin zitiert als P. G.

[4] Unter einer X_n verstehen wir eine allgemeine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, unter einer P_n eine X_n mit einer gewöhnlichen projektiven Geometrie.

In der X_n soll eine symmetrische lineare Uebertragung bis auf bahntreue Transformationen der Parameter $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$:

$$(1) \qquad {}'\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + A^{\nu}_{\lambda} p_{\mu} + A^{\nu}_{\mu} p_{\lambda}$$

gegeben sein. Es gilt dieser Uebertragung in eineindeutiger Weise eine projektive Uebertragung, d. i. eine Uebertragung, die benachbarte P_n projektiv aufeinander abbildet, zuzuordnen. Forderung (I) ist, dasz diese Uebertragung nicht nur in den $\mathfrak{r}^c$ sondern auch in den $d\xi^{\nu}$ linear sein soll, sodasz die pseudoparallele Verschiebung also gegeben wird durch eine Gleichung von der Form

$$(\mathrm{I}) \qquad \boxed{d\mathfrak{r}^c = -\Lambda^c_{a\mu} \mathfrak{r}^a d\xi^{\mu}}\,.$$

Die $\mathfrak{r}^c$ können als Bestimmungszahlen eines mit einem Gewicht versehenen kontravarianten Punktes aufgefaszt werden, den wir hier lieber direkt *Punktdichte* nennen wollen, da das Wort *Punkt* frei bleiben soll für später auftretende Gröszen mit einfacherer Transformationsweise. Dementsprechend ist auch der Kernbuchstabe gothisch gewählt (5).

Der Uebergang zu neuen homogenen Koordinaten $\mathfrak{r}^C$; $A, \ldots, G = \odot, \bar{1}, \ldots, \bar{n}$, ist gegeben durch

$$(2) \qquad \mathfrak{r}^C = \mathbf{E}^C_a \mathfrak{r}^a, \quad |\mathbf{E}^C_a| \neq 0.$$

Forderung (II) ist nun, dasz die Punktdichte, deren Koordinaten auszer $\mathfrak{r}^o$ alle Null sind, diese Eigenschaft bei der Transformation behält

$$(\mathrm{II}) \qquad \boxed{\mathbf{E}^K_o = 0}\,, \quad H, \ldots, M = \bar{1}, \ldots, \bar{n}.$$

Es ist nichts dagegen diese Punktdichte an demselben Ort zu denken wie den Punkt der X_n dem die P_n zugeordnet ist.

Beim Uebergang zu den neuen homogenen Koordinaten $\mathfrak{r}^C$ gilt für die $\Lambda^c_{a\mu}$ folgende Transformationsformel

$$(3) \qquad \Lambda^C_{A\mu} = \mathbf{E}^{Ca}_{cA} \Lambda^c_{a\mu} + \mathbf{E}^C_b \partial_{\mu} \mathbf{E}^b_A; \quad \partial_{\mu} = \partial/\partial\xi^{\mu} \ (6).$$

(5) Wir verwenden lateinische Kernbuchstaben ausschlieszlich für Vektor-und Punktgröszen (S 146), gothische nur für Vektor-und Punktdichten und grosze griechische nur für geometrische Objekte, deren Bestimmungszahlen sich nicht linear transformieren. Der Gebrauch kleiner griechischer Kernbuchstaben bleibt frei. Letztere werden aus historischen Gründen manchmal für Skalare und Vektoren verwendet und treten auch überall da auf, wo die Transformationsweise noch nicht vollständig bestimmt ist (z. B. bei den π^c_a im § 2 dieser Arbeit).

(6) Hier und im Folgenden schreiben wir $\mathbf{E}^{Ca}_{cA}$ statt $\mathbf{E}^C_c \mathbf{E}^a_A$.

Daraus und aus (II) folgt

(4) $$\Lambda^{K}_{\odot\mu} = \mathfrak{E}^{Ko}_{k\odot}\Lambda^{k}_{o\mu}, \quad h, \ldots, m = 1, \ldots, n.$$

Stellen wir also als Forderung (III)

(III) $$\boxed{\left|\Lambda^{k}_{o\mu}\right| \neq 0},$$

so lassen sich die $\Lambda^{k}_{o\mu}$ bis auf einen von vornherein für alle Bezugssysteme festgelegten konstanten Zahlenfaktor c [7] als Bestimmungszahlen von n Maszvektoren $\overset{k}{e}_{\mu}$ der X_n auffassen:

(5) $$\Lambda^{k}_{o\mu} = c\overset{k}{e}_{\mu}$$

und bei dem Uebergang zu dem transformierten System $\overset{K}{e}_{\mu}$ ergibt sich dann aus (4) die Gleichung

(6) $$\mathfrak{E}^{Ko}_{k\odot} = A^{K}_{k}; \quad A^{K}_{k} = \frac{\partial\xi^{K}}{\partial\xi^{k}}.$$

Dieser Umstand läszt sich dazu ausnutzen, das System der Maszpunktdichten in der P_n näher festzulegen. Man kann nämlich die $\overset{k}{e}_{\lambda}$ mit den zu den Urvariablen ξ^{ν} gehörigen Maszvektoren $\overset{\nu}{e}_{\lambda}$ zusammenfallen lassen:

(7) $$\overset{k}{e}_{\lambda} = \delta^{k}_{\nu}\overset{\nu}{e}_{\lambda} \overset{*}{=} \delta^{k}_{\lambda} \text{ [8]},$$

denn aus (4) lassen sich dann bei beliebig gegebenen $\Lambda^{K}_{\odot\mu}$ infolge (III) die $\mathfrak{E}^{Ko}_{k\odot}$ eindeutig bestimmen. Wir können also im Folgenden von vornherein die Forderung (IV) aufstellen, dasz

(8) $$\Lambda^{k}_{o\mu} \overset{*}{=} c\delta^{k}_{\mu}.$$

Geben wir dementsprechend jetzt auch den Urvariablen der X_n die lateinischen Indizes $h, \ldots, m$, sodasz $\xi^{\nu} \rightarrow \xi^{k}$, dann nimmt diese Forderung die Gestalt

(IV) $$\boxed{\Lambda^{k}_{oj} \overset{*}{=} cA^{k}_{j}}$$

---

[7] Dieser Zahlenfaktor dient dazu die beiden Theorien von O. VEBLEN und T. Y. THOMAS zu umfassen; diese Theorien entstehen, wenn man $c = 1$ bzw. $c = -\frac{1}{n+1}$ setzt.

[8] δ^{k}_{λ} ist das erweiterte Kroneckersche Symbol. Es ist δ^{k}_{λ} gleich 1 oder 0 je nachdem die für k und μ eingesetzten Zeichen aus den Reihen $1, \ldots, n$ und $1, \ldots, n$ in diesen Reihen korrespondierende Stellen einnehmen oder nicht. Das Zeichen $\overset{*}{=}$ bedeutet stets, dass eine Formel nur für das in der Formel verwendete Bezugssystem gilt: in (7) steht links ein System von n Vektoren, rechts ein System von n^2 Skalaren.

an und die durch (6) zum Ausdruck gebrachte Kupplung der Transformationen der $d\xi^k$ mit den Transformationen der homogenen Koordinaten der P_n bewirkt, dasz (IV) invariant ist.

Zwecks weiterer Festmachung dieser Kupplung stellen wir jetzt noch drei weitere Forderungen auf. Da die Uebertragung der P_n invariant ist bei Aenderungen der Λ^c_{aj} von der Form

$$(9) \qquad '\Lambda^c_{aj} = \Lambda^c_{aj} + \mathbb{E}^c_a \mathfrak{r}_j ; \qquad \mathbb{E}^c_a \overset{*}{=} \delta^c_a ; \qquad \mathfrak{r}_j = \text{beliebiger Vektor,}$$

kann man sich ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit beschränken auf solche Werte der Λ^c_{aj} die der Forderung (V):

$$(\mathrm{V}) \qquad \boxed{\Lambda^b_{bj} = 0}$$

genügen. Diese Bedingung ist dann und nur dann invariant wenn

$$(10) \qquad |\mathbb{E}^C_a| = \text{Const.}$$

Da

$$(11) \qquad \Lambda^{\odot}_{\odot J} = \Lambda^o_{oj} A^j_J + c\,\mathbb{E}^{\odot o}_{k \odot} A^k_J + \mathbb{E}^{\odot}_o \partial_J \mathbb{E}^o_{\odot}$$

kann man die homogenen Variablen in P_n, ohne die Bedingungen (6) und (10) zu verletzen, so transformieren, dasz $\Lambda^{\odot}_{\odot J} = 0$ wird. Wir können also von vornherein als Forderung (VI) einführen:

$$(\mathrm{VI}) \qquad \boxed{\Lambda^o_{oj} = 0}$$

und die Invarianz dieser Bedingung fordert dann laut (11) das Bestehen der Gleichung

$$(12) \qquad c\,\mathbb{E}^{\odot o}_{j \odot} + \mathbb{E}^{\odot}_o \partial_j \mathbb{E}^o_{\odot} = 0$$

oder in anderer Form

$$(13) \qquad \mathbb{E}^{\odot}_j = -\frac{1}{c}\,\mathbb{E}^{\odot}_o \partial_j \log \mathbb{E}^o_{\odot},$$

welche Gleichung eine weitere Einschränkung der zugelassenen Transformationen der homogenen Koordinaten in P_n bedeutet. Die Konstante in (10) kann jetzt noch einfachheitshalber durch eine proportionale Aenderung aller $\mathbb{E}^C_a$ gleich 1 gemacht werden ohne dasz dadurch die Bedingung (6) verletzt wird und ohne dasz sich die Bewegung der Punktdichten bei der Parallelverschiebung ändert (Forderung (VII)):

$$(\mathrm{VII}) \qquad |\mathbb{E}^C_a| = 1.$$

Aus (3), (VII), (2), (6) und (13) ergibt sich nun aber die vollständige Kupplung der $\mathfrak{E}_a^C$ mit der Transformation der $d\xi^k$:

$$(14)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_0^{\odot} \overset{*}{=} \Delta^{-\mathfrak{n}} \\ \mathfrak{E}_i^{\odot} \overset{*}{=} \Delta^{-\mathfrak{n}}\left(-\frac{\mathfrak{n}}{c}\partial_i \log \Delta\right); \\ \mathfrak{E}_0^K \overset{*}{=} 0 \\ \mathfrak{E}_i^K \overset{*}{=} \Delta^{-\mathfrak{n}} A_i^K \end{cases} \qquad \mathfrak{n} = \frac{1}{n+1}$$

und daraus folgt, dasz jedem System von Urvariablen der X_n in jedem Punkte infolge der aufgestellten Forderungen ein System von homogenen Koordinaten $\mathfrak{r}^c$ der lokalen P_n in eindeutiger Weise zugeordnet ist. Es ist zu beachten, dasz aus (V) und (VI)

$$(15)\qquad \Lambda_{ij}^i = 0$$

folgt und dasz auch diese Gleichung bei (14) invariant ist.

Die $\mathfrak{E}_a^C$ besitzen alle einen Faktor $\Delta^{-\mathfrak{n}}$. Wir schreiben jetzt

$$(16)\qquad E_a^C = \Delta^{\mathfrak{n}} \mathfrak{E}_a^C$$

und nennen eine Grösze r^c mit der einfacheren Transformationsweise

$$(17)\qquad r'^C = E_a^C r^a$$

einen (kontravarianten) *Punkt* und die Gröszen mit der Transformationsweise

$$(18)\qquad \mathfrak{w}^C = \Delta^{-\mathfrak{k}} E_a^C \mathfrak{w}^a$$

(kontravariante) *Punktdichten* vom Gewicht $\mathfrak{k}$. $\mathfrak{r}^c$ in (2) ist also eine Punktdichte vom Gewicht $\mathfrak{n}$.

Die weiteren Forderungen bezwecken die eben erwähnte eindeutige Festlegung der projektiven Uebertragung. Die Forderung (VIII), die Symmetrie der Λ_{ij}^k:

$$(\mathrm{VIII})\qquad \boxed{\Lambda_{[ij]}^k = 0}$$

ist invariant bei den Transformationen der $d\xi^k$ und den jetzt mit diesen fest gekuppelten Transformationen in der P_n. Die Forderung (IX), Uebereinstimmung der zu Γ_{ij}^k und der zu Λ_{aj}^c gehörigen geodätischen Linien der X_n, drückt sich unter Berücksichtigung von (15) und (VIII) analytisch aus durch die Gleichung:

$$(\mathrm{IX})\qquad \boxed{\Lambda_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \mathfrak{n}(A_i^k \Gamma_{lj}^l + A_j^k \Gamma_{li}^l)}.$$

Da rechts die bei (1) invarianten Thomas'schen Parameter auftreten, ist diese Gleichung bei (1) invariant. Infolge (3), (IV) und (13) ist sie auch bei Koordinatentransformationen invariant.

Die Krümmungsgrösze der projektiven Uebertragung

(19) $$\mathfrak{P}_{lja}^{\cdot\cdot\cdot c} = 2\partial_{[j}\Lambda^{c}_{|a|l]} + 2\Lambda^{c}_{b[j}\Lambda^{b}_{|a|l]}$$

hat die merkwürdige Eigenschaft, dasz die Bestimmungszahlen $\mathfrak{P}_{lji}^{\cdot\cdot\cdot k}$ sich wie die Bestimmungszahlen einer Grösze der X_n transformieren:

(20) $$P_{lji}^{\cdot\cdot\cdot k} \overset{*}{=} \mathfrak{P}_{lji}^{\cdot\cdot\cdot k}.$$

Diese Grösze musz also eine Komitante der durch Γ^k_{ij} und (1) charakterisierten Uebertragung sein und dasselbe gilt für die Faltungen $P_{kji}^{\cdot\cdot\cdot k}$ und $P_{ljk}^{\cdot\cdot\cdot k}$.

Wählt man als Forderung (X) das Verschwinden der Komitante $P_{kji}^{\cdot\cdot\cdot k}$

(X) $$\boxed{P_{kji}^{\cdot\cdot\cdot k} = 0},$$

so folgt für die Λ^{o}_{ij}:

(21) $$\Lambda^{o}_{ij} \overset{*}{=} \frac{1}{c(n-1)}\left\{ \Lambda^{k}_{li}\Lambda^{l}_{kj} - \partial_k\Lambda^{k}_{ij} \right\}$$

und durch diese Gleichung, (IX), (IV) und (VI) sind die Λ^{c}_{aj} jetzt vollständig bestimmt. Aus (VIII) und (21) folgt, dasz auch die Λ^{o}_{ij} symmetrisch in i, j sind. Das Nullsetzen der anderen Komitante $P_{ljk}^{\cdot\cdot\cdot k}$ ist infolge (15) and (IV) gleichbedeutend mit

(22) $$\Lambda^{o}_{[ij]} = 0,$$

sodasz $P_{ljk}^{\cdot\cdot\cdot k}$ schon infolge der gestellten Forderungen verschwindet.

§ 2. **Die Weylsche Methode.**

Betrachten wir jetzt den Weylschen Gedankengang. WEYL ordnet zunächst jedem Punkte der X_n eine X_m zu mit den nichthomogenen Koordinaten η^k; $h, \ldots, m = 1, \ldots,$ n. Die Uebertragung, die benachbarte X_m aufeinander abbildet, genüge der Forderung (A): Linearität in den $d\xi^\nu$. Analytisch drückt sich diese Forderung aus durch die Bedingungsgleichung für die Parallelverschiebung

(A) $$\boxed{d\eta^k = -\,v_{\mu}^{\cdot k}(\xi, \eta)d\xi^\mu}\ (^9).$$

(9) F. G., S. 717.

Wir setzen jetzt (etwas früher als WEYL, der zunächst den allgemeinen Fall noch weiter erörtert) fest, dasz die Abbildung eine projektive ist, dasz die η lineare nichthomogene Koordinaten sind und dasz $m = n$. Damit haben wir den Fall der jedem Punkte zugeordneten P_n des § 1. Die zugelassenen Transformationen der η^k, die von der Form

(23) $$\eta^K = \frac{\pi_k^K \eta^k + \pi_0^K}{\pi_k^{\odot} \eta^k + \pi_0^{\odot}} \text{ (}^{10}\text{)}$$

sind, sollen der Forderung (B) genügen, dasz die Koordinaten des Punktes $\eta^k = 0$ Null bleiben:

(B) $$\boxed{\pi_0^K = 0, \quad \pi_0^{\odot} \neq 0}$$

woraus folgt

(24) $$\pi_{0\,\odot}^{\odot 0} = 1.$$

Die Gleichung (A) lautet für $\eta^k = 0$

(25) $$(d\eta^k)_0 = - v_\mu^{\cdot k}(\xi, 0) d\xi^\mu \text{ (}^{11}\text{)}$$

und jeder Verrückung $d\xi^\nu$ ist also eine Verrückung

(26) $$d\eta^k = v_\mu^{\cdot k}(\xi, 0) d\xi^\mu$$

des Punktes $\eta^k = 0$ zugeordnet. Es wird jetzt die Forderung (C) gestellt, dasz diese Zuordnung eindeutig umkehrbar sei:

(C) $$\boxed{\left| v_\mu^{\cdot k}(\xi, 0) \right| \neq 0}.$$

Aus (23) ergibt sich nun für die Transformation von $v_\mu^{\cdot k}(\xi, 0)$

(27) $$v_\mu^{\cdot K}(\xi, 0) = \pi_{\odot}^{0} \pi_k^K v_\mu^{\cdot k}(\xi, 0).$$

Diese Gleichung kann also infolge (C) dazu ausgenutzt werden die $v_\mu^{\cdot K}(\xi, 0)$ gleich $c\delta_\mu^K$ zu machen, wo c eine von vornherein für alle Bezugssysteme festgelegte Konstante ist ([12]). Wir dürfen also von vornherein die Forderung (D) aufstellen, dasz $v_\mu^{\cdot k}(\xi, 0)$ gleich $c\delta_\mu^k$ ist. Werden von da an, wie im § 1, auch die ξ mit lateinischen Indizes versehen ([13]), so drückt sich diese

([10]) Diese Gleichung tritt in F. G. nicht explicit auf.
([11]) F. G., S. 718.
([12]) F. G., S. 719; bei Weyl ist $c = 1$.
([13]) In F. G. wird von dieser Vereinfachung kein Gebrauch gemacht.

Forderung analytisch aus durch

(D) $$\boxed{\nu_j^{\cdot k}(\xi, 0) = cA_j^k}$$

und die Transformation (23) ist jetzt eingeschränkt durch die Invarianzbedingung von (D):

(28) $$\pi_{\odot k}^{oK} = A_k^K \ (^{14}),$$

welche Gleichung gleichbedeutend ist mit der Gleichung

(29) $$\left(\frac{\partial\eta^K}{\partial\eta^k}\right)_0 = \frac{\partial\xi^K}{\partial\xi^k} \ (^{15}).$$

Bildet man links und rechts die Determinante

(30) $$\left|\frac{\partial\eta^K}{\partial\eta^k}\right|_0 = \left|\frac{\partial\xi^K}{\partial\xi^k}\right| = \Delta,$$

so entsteht eine Gleichung, die zum Ausdruck bringt, dasz die Transformation des infinitesimalen Volumelements in einem Punkte der X_n dieselbe ist wie die korrespondierende in demselben Punkte der zugeordneten P_n [16].

Infolge der Forderung (D) nimmt die Gleichung (23) folgende Gestalt an:

(31) $$\eta^K = \frac{A_k^K \eta^k}{1 + \pi_{\odot k}^{o\odot} \eta^k}$$

und (26) geht jetzt über in

(32) $$d\eta^k = cd\xi^k,$$

woraus hervergeht, dasz jedem *infinitesimalen* Vektor $d\xi^k$ in einem Punkte der X_n ein infinitesimaler Vektor $d\eta^k$ im selben Punkte der zugeordneten lokalen P_n entspricht, dessen Bestimmungszahlen das $+c$-fache der Bestimmungszahlen des erstgenannten Vektors sind.

Wir gehen jetzt (zwecks Vereinfachung der Rechnung etwas früher als Weyl) zu den homogenen Koordinaten ρ^c über, deren Beziehungen zu den η^k sich ausdrücken in

(33) $$\eta^k = \frac{\rho^k}{\rho^o}$$

---

[14] Diese Formel tritt in F. G. nicht explizit auf.

[15] F. G., S. 721.

[16] Auf diese geometrische Deutung hat zuerst H. P. Robertson hingewiesen, *Note on projective coordinates*, « Proc. Nat. Ac. Sc. », 14 (1928), 153-154, vergl. Fuszn. [23] S. 152.

und die den Transformationsgleichungen

$$\rho^C = \pi_a^C \rho^a \tag{34}$$

genügen mögen. In bezug auf diese Koordinaten ist die Uebertragung, da sie eine projektive Abbildung darstellt, linear und also von der Form

$$d\rho^c = -\Omega_{aj}^c \rho^a d\xi^j \text{ [17]}, \tag{35}$$

wo die Ω_{aj}^c sich folgendermaszen transformieren

$$\Omega_{AJ}^C = \pi_{cA}^{Ca} A_J^j \Omega_{aj}^c + \pi_b^C \partial_J \pi_A^b. \tag{36}$$

Aus (35), (33) und (A) ergibt sich

$$\nu_j^{\cdot k}(\xi, \eta) = \Omega_{oj}^k + (\Omega_{ij}^k - A_i^k \Omega_{oj}^o)\eta^i - \Omega_{ij}^o \eta^i \eta^k. \tag{37}$$

Umgekehrt zeigt man leicht, dasz die Ω_{aj}^c durch die $\nu_j^{\cdot k}$ festgelegt sind bis auf Transformationen von der Form

$$'\Omega_{aj}^c = \Omega_{aj}^c + \pi_a^c w_j; \quad \pi_a^c \overset{*}{=} \delta_a^c; \quad w_j = \text{beliebiger Vektor.} \tag{38}$$

Aus (37) folgt, dasz (D) gleichbedeutend ist mit

$$\Omega_{oj}^k = c A_j^k \text{ [18]}, \tag{39}$$

sodasz jetzt

$$\nu_j^{\cdot k}(\xi, \eta) = c A_j^k + (\Omega_{ij}^k - A_i^k \Omega_{oj}^o)\eta^i - \Omega_{ij}^o \eta^i \eta^k. \tag{40}$$

Zur Aufstellung der Forderung (E) (bei Weyl semi-osculation der P_n genannt) betrachten wir den infinitesimalen n-Vektor der Vektoren $\underset{1}{e}^k dt, \ldots, \underset{n}{e}^k dt$, dem in der lokalen P_n der n-Vektor

$$c^n (dt)^n \underset{1}{e}^{[k_1} \ldots \underset{n}{e}^{k_n]} \tag{41}$$

entspricht, und verlangen, dasz dieser n-Vektor bei der Uebertragung in sich übergehen soll. Infolge (37) und (A) ist, da wir nur die Terme von der Gröszenordnung $(dt)^n d\xi^j$ zu berücksichtigen brauchen,

$$\left\{\begin{aligned} dc^n (dt)^n \underset{1}{e}^{[k_1} \ldots \underset{n}{e}^{k_n]} &= nc^n (dt)^n (\Omega_{ij}^{[k_n} - A_i^{[k_n} \Omega_{oj}^{|o|}) \underset{1}{e}^{k_1} \ldots \underset{n-1}{e}^{k_{n-1}]} \underset{n}{e}^i d\xi^j = \\ &= nc^n (dt)^n (\Omega_{ij}^i - n\Omega_{oj}^o) \underset{1}{e}^{[k_1} \ldots \underset{n}{e}^{k_n]} d\xi^j \end{aligned}\right. \tag{42}$$

[17] F. G., S. 722.
[18] F. G., S. 722.

und die Forderung (E) lautet also analytisch

$$\text{(E)} \qquad \boxed{\Omega^{i}_{ij} - n\Omega^{o}_{oj} = 0} \quad ({}^{19}).$$

Aus (36) folgt

$$\text{(43)} \quad \Omega^{I}_{IJ} - n\Omega^{\odot}_{\odot J} = (\Omega^{i}_{ij} - n\Omega^{o}_{oj})A^{j}_{J} - c(n+1)\pi^{\odot o}_{j\odot}A^{j}_{J} - \partial_J \log D - (n+1)\partial_J \log \pi^{o}_{\odot},$$

wo wir der Kürze wegen D statt $\left|\pi^{C}_{a}\right|$ schreiben, und daraus ergibt sich also die Invarianzbedingung von (E), die zusammen mit (B) und (28) zu den Gleichungen

$$\text{(44)} \quad \left\{\begin{aligned} \pi^{\odot}_{o} &= \left(\frac{\Delta}{D}\right)^{-\mathfrak{n}} \\ \pi^{\odot}_{i} &= \left(\frac{\Delta}{D}\right)^{-\mathfrak{n}}\left(-\frac{\mathfrak{n}}{c}\,\partial_i \log \Delta\right) \\ \pi^{K}_{o} &= 0 \\ \pi^{K}_{i} &= \left(\frac{\Delta}{D}\right)^{-\mathfrak{n}} A^{K}_{i} \quad ({}^{20}) \end{aligned}\right. \qquad \mathfrak{n} = \frac{1}{n+1}$$

führt, wodurch die π bis auf den noch frei wählbaren Faktor D an die Transformation der $d\xi^k$ gekuppelt werden. Nun folgt aus (44) und (24), dasz

$$\text{(45)} \qquad \pi^{\odot o}_{k\odot} = -\frac{\mathfrak{n}}{c}\,\partial_k \log \Delta,$$

infolge welcher Gleichung (31) übergeht in

$$\text{(46)} \qquad \eta^{K} = \frac{A^{K}_{k}\eta^{k}}{1 - \dfrac{\mathfrak{n}}{c}\,\eta^{k}\partial_k \log \Delta} \quad ({}^{21}),$$

welche Gleichung besagt, dasz durch die Forderungen (A)-(E) die Transformation der η^k fest mit der Transformation der $d\xi^k$ gekuppelt ist und somit jedem System von Urvariablen der X_n in jedem Punkte ein System von nichthomogenen Koordinaten der lokalen P_n in eindeutiger Weise zugeordnet ist.

Geht man von den Forderungen $(A - D)$ aus, so gilt schon die Reihenentwicklung

$$\text{(47)} \qquad \frac{\partial\eta^{K}}{\partial\eta^{k}} = A^{K}_{k} - (A^{K}_{k}\pi^{o\odot}_{\odot j} + A^{K}_{j}\pi^{o\odot}_{\odot k})\eta^{j} + \dots.$$

---

(19) Diese Gleichung tritt in F. G. nur in Verbindung mit (*F*) auf, F. G., S. 722.

(20) Diese Gleichungen treten in F. G. nicht explizit auf.

(21) Diese Gleichung tritt in F. G. nicht explizit auf, wird aber in P. G. abgeleitet (vgl. Fusznote (3) S. 142).

Setzt man also

$$\text{(E')} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial \eta^j} \left| \frac{\partial \eta^K}{\partial \eta^k} \right| \right)_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left| \frac{\partial \xi^K}{\partial \xi^k} \right| = \frac{1}{c} \partial_j \Delta,$$

so folgt (45) und es läszt sich zeigen, dasz durch die Forderung (E') die Allgemeinheit der Transformationen der Urvariablen ξ^k *nicht* eingeschränkt wird ([22]). Somit folgt unter Berücksichtigung von (B) und (28) auch (44). (E) läszt sich also, was die Festlegung der π_a^C betrifft, vollständig durch die Forderung (E') ersetzen, die besagt, dasz nicht nur die Transformation des infinitesimalen Volumelements in jedem Punkte der X_n dieselbe ist wie die korrespondierende in demselben Punkte der zugeordneten P_n (vgl. (30)), sondern dasz auch die ersten Ableitungen der Determinante dieser Transformation in dem betreffenden Punkte in beiden Mannigfaltigkeiten, natürlich unter Berücksichtigung der durch (32) zum Ausdruck gebrachten Korrespondenz zwischen den beiden Linienelementen, gleich sind ([23]). Die Forderung (E') ist schwächer als (E), sie stellt in Wirklichkeit unter Berücksichtigung von $(A - D)$ nur die Invarianzbedingung von (E) dar. Auch legt sie im Gegensatz zu (E) der Uebertragung keine weiteren Bedingungen auf. Es ist natürlich nicht möglich in derselben Weise (D) durch (29) zu ersetzen und somit die Bestimmung der π_a^C ganz von der Uebertragung unabhängig zu machen, da die Zuordnung der Verrückungen in X_n und P_n ja erst durch (A) zustande kommt.

Ueber D ist bis jetzt noch nichts vorausgesetzt worden. Nun soll jeder Transformation der $d\xi^k$ eine einzige bestimmte lineare Transformation der ρ^c entsprechen und die Gruppe dieser letzten Transformationen ist also eine *Darstellung* der Gruppe der Transformationen der $d\xi^k$. Sogar bilden die jeder Transformation der letzten Gruppe zugeordneten Werte von D, als Faktor auf

---

([22]) Wird statt (E') die stärkere Forderung (E''):

$$\text{(E'')} \qquad \left(\frac{\partial^2 \eta^K}{\partial \eta^j \partial \eta^k}\right)_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \xi^K}{\partial \xi^j \partial \xi^k}$$

aufgestellt, so folgt aus dieser ebenfalls (45), gleichzeitig aber werden die Transformationen der Urvariablen ξ^k einer Bedingung unterworfen. Aus (E'') folgt nämlich

$$\text{(47 a)} \qquad \partial_j A_i^K = \mathfrak{n}(A_i^K \partial_j \log \Delta + A_j^K \partial_i \log \Delta).$$

Dieses System von Differentialgleichungen läszt sich integrieren und es ergibt sich daraus, dasz (47 a) dann und nur dann erfüllt ist, wenn die Transformation $\xi^k \to \xi^K$ eine gebrochene lineare mit konstanten Koeffizienten ist. (O. VEBLEN und J. M. THOMAS, *Projective invariants of affine geometry of paths*, « Annals of Math. », 27 (1926), S. 283, vgl. EISENHART, *Non Riemannian Geometry*, S. 108).

([23]) H. P. ROBERTSON, l. c. ([16]), S. 149.

eine einzige Variable angewandt, für sich eine eindimensionale Darstellung dieser Gruppe. Es zeigt sich nun leicht, dasz daraus folgt, dasz D die Form

$$D = \Delta^s \tag{48}$$

haben musz, wo s eine beliebige Konstante ist. Wird dieser Wert in (44) eingesetzt, so stellt sich heraus, dasz wir gerade die Transformationskoeffizienten gefunden haben die im § 1 für die verschiedenen Punktdichten abgeleitet wurden. Insbesondere werden die π_α^C für $D = 1$ (Forderung (VII) des § 1) identisch mit den $\mathfrak{E}_\alpha^C$ des § 1 und ρ^c mit der Punktdichte $\mathfrak{r}^c$ vom Gewicht $\mathfrak{n}$. Es ist bemerkenswert, dasz also zur Festlegung der $\mathfrak{E}_\alpha^C$ im § 1 die dort verwendeten Forderungen (V) und (VI) durch die schwächere Forderung (E), und sogar durch (E'), ersetzt werden können. Wählt man $D = \Delta$, so werden die π_α^C identisch mit den einfacheren Transformationskoeffizienten eines Punktes und ρ^c mit dem Punkt r^c. Infolge (44) gilt für die Ω_{oj}^o folgende Transformationsformel

$$\Omega_{\odot J}^{\odot} = \Omega_{oj}^o A_J^j - \mathfrak{n}\, \partial_J \log D \tag{49}$$

oder infolge (48)

$$\Omega_{\odot J}^{\odot} = \Omega_{oj}^o A_J^j - s\mathfrak{n}\, \partial_J \log \Delta. \tag{50}$$

Nun haben wir aber in der oben zitierten Arbeit bewiesen, dasz sich im Falle, wo sich aus den Γ_{ij}^k und ihren Ableitungen ein bei (1) invariantes nicht verschwindendes geometrisches Obiekt Φ_i mit der Transformationsweise

$$\Phi_J = A_J^j \Phi_j - \frac{\mathfrak{n}}{c}\, \partial_J \log \Delta \tag{51}$$

ableiten läszt, unter allen möglichen affinen Uebertragungen, die sich aus den Γ_{ij}^k durch bahntreue Transformationen erzeugen lassen, eine bestimmte in einer bei (1) invarianten Weise auszeichnen läszt, und alles somit zur Geometrie einer gewöhnlichen A_n zurückkehrt. Nun wäre aber $s^{-1}c^{-1}\Omega_{oi}^o$ ein solches geometrisches Objekt und um diesen Fall auszuschliessen ist es also notwendig als Forderung (F) einzuführen:

$$\boxed{\Omega_{oi}^o = 0} \;\; ([24]). \tag{F}$$

Die Invarianzbedingung dieser Forderung nimmt dann infolge der Forderung,

([24]) F. G., S. 722, (vgl. Fusznote (19)), S. 151.

dasz die Gruppe der π_a^C eine Darstellung der Gruppe der A_i^K sein soll, die Gestalt an

(G) $$D=1.$$

Wir sind damit zu einem System von Forderungen (A-G) gekommen, das mit dem System (I)-(VII) des § 1 aequivalent ist, und das zu den Werten der π_a^C führt die mit den in (14) zum Ausdruck gebrachten Werten $\mathfrak{E}_a^C$ identisch sind [25].

Die Bedingungen (A-G) seien jetzt nach der Weylschen Methode ergänzt zwecks eindeutiger Festlegung der projektiven Uebertragung (A). Wo die π jetzt mit den $\mathfrak{E}$ identisch geworden sind, schreiben wir auch Λ stat Ω.

Die zur projektiven Uebertragung gehörige Krümmungsgrösze

(52) $$\Upsilon_{ij}{}^{k}(\xi,\eta)=2\frac{\partial}{\partial\xi^{[l}}\nu_{j]}^{\cdot k}-2\nu_{[l}^{\cdot m}\frac{\partial}{\partial\eta^{|m|}}\nu_{j]}^{\cdot k}\ [26]$$

geht bei Berücksichtigung von (40) über in

(53) $$\Upsilon_{ij}{}^{k}(\xi,\eta)=U_{ij}{}^{k}(\xi)+Q_{iji}{}^{k}(\xi)\eta^{i}+\Psi_{iji}(\xi)\eta^{i}\eta^{k}\ [27],$$

---

[25] Die Berechnung der $\mathfrak{E}_a^C$ tritt in F. G. nicht explizit auf, es kommt also auch nicht zur Festlegung von D. Der hier zu dieser Festlegung gefolgte Weg ist aber dem Geiste der Weylschen Methode durchaus angemessen. Tatsächlich verwendet er in P. G. die Darstellungstheorie schon in einem früheren Stadium und leitet mit Hilfe dieser Theorie, ohne die Forderung (E) oder sogar (E′) zu benutzen, aber unter der Voraussetzung, dasz die π_a^C nur von den Ableitungen erster und zweiter Ordnung der ξ^K nach den ξ^k abhängen, eine Gleichung ab, die mit (46) aequivalent ist. (E′) und (G) lassen sich also durch die Forderung ersetzen, dasz die Gruppe von π_a^C eine Darstellung der Gruppe von A_i^K ist und dasz in den π_a^C keine Ableitungen der ξ^K von höherer als der zweiten Ordnung auftreten. Der Leser von F. G. und P. G. gebe darauf acht, dasz in der ersten Arbeit auf S. 722 tatsächlich die ($D=$ Const. fordernde) Bedingung $\Omega_{oj}^{o}=0$ eingeführt wird, dasz aber auf S. 723 eine Formel vorkommt, die sich mit $D=$ const. nur dann in Einklang bringen läszt, wenn man annimmt, dasz die η, die auf S. 722 unseren $\mathfrak{r}$ entsprechen, auf S. 723 eine andere Bedeutung haben, die sich mit der unserer r deckt. Die Formeln stören sich aber gegenseitig nicht, da sie zwei verschiedenen Gedankengängen angehören, die auch später nicht zusammenkommen. Ferner ist zu beachten, dasz die Γ_{ij}^{k} in dem ersten Gedankengang mit unseren $\Omega_{ij}^{k}-A_i^k\Omega_{oj}^{o}$ (S. 151), in dem zweiten mit unseren Ω_{ij}^{k} identisch sind. In dem zweiten Gedankengang, sowie in P. G., haben die η die Bedeutung von unseren r.

[26] F. G., S. 717.

[27] Vgl. F. G., S. 719.

wo

$$U_{lj}^{\cdot\cdot k}(\xi) = 2c\Lambda_{[lj]}^{k} \tag{54}$$

$$Q_{lji}^{\cdot\cdot\cdot k}(\xi) = 2\,\partial_{[j}\Lambda_{|i|l]}^{k} + 2\Lambda_{m[j}^{k}\Lambda_{|i|l]}^{m} + 2cA_{i}^{k}\Lambda_{[jl]}^{o} + 2cA_{[j}^{k}\Lambda_{|i|l]}^{o} \tag{55}$$

$$\Psi_{lji}(\xi) = 2\,\partial_{[l}\Lambda_{|i|j]}^{o} + 2\Lambda_{m[l}^{o}\Lambda_{|i|j]}^{m} \;\; ({}^{28}). \tag{56}$$

Es läszt sich leicht zeigen, dasz sowohl $U_{lj}^{\cdot\cdot k}(\xi)$ als $Q_{lji}^{\cdot\cdot\cdot k}(\xi)$ Affinoren der X_n sind, Ψ_{lji} dagegen *nicht*. Die Krümmungsgrösze $\Upsilon_{lj}^{\cdot\cdot k}(\xi, \eta)$ ergibt in der üblichen Weise die Aenderung $\Delta\eta^k$ von η^k bei Umkreisung des Parallelogramms $\underset{1}{d\xi^k}$, $\underset{2}{d\xi^k}$:

$$\Delta\eta^k = -\Upsilon_{lj}^{\cdot\cdot k}(\xi, \eta)\underset{1}{d\xi^j}\underset{2}{d\xi^l}, \tag{57}$$

Die entsprechende Verrückung des Punktes $\eta^k = 0$, die von Cartan *Torsion* genannt wurde, beträgt:

$$(\Delta\eta^k)_0 = -U_{lj}^{\cdot\cdot k}(\xi)\underset{1}{d\xi^j}\underset{2}{d\xi^l}. \tag{58}$$

Forderung (H) ist nun *Torsionslosigkeit* der Uebertragung

$$\boxed{U_{lj}^{\cdot\cdot k}(\xi) = 0} \;\; ({}^{29}), \tag{H}$$

welche Gleichung infolge (54) gleichbedeutend ist mit

$$\Lambda_{[lj]}^{k} = 0, \tag{59}$$

d. i. also mit Forderung (VIII) des § 1, die hierdurch eine einfache geometrische Deutung erhält. Weyl setzt dazu die Forderung

$$Q_{ljk}^{\cdot\cdot\cdot k} = 0 \;\; ({}^{30}), \tag{60}$$

infolge (55) gleichbedeutend mit

$$\Lambda_{[lj]}^{o} = 0, \tag{61}$$

führt dann aber die Rechnung nicht weiter durch und begnügt sich mit einer Verweisung [31] nach einer älteren Arbeit von einem von uns, wo für die weitere Rechnung wie im § 1 dieser Arbeit die Forderungen (IX) und (X) zugrunde gelegt werden. Die Forderung (I) des Zusammenfallens der geodäti-

[28] Macht man noch keinen Gebrauch von (F), so tritt in den Formeln (54)-(56) einfach $\Omega_{ij}^{k} - A_i^k\Omega_{oj}^{o}$ an Stelle von Λ_{ij}^{k}.

[29] F. G., S. 719.

[30] F. G., S. 719.

[31] F. G., S. 722.

schen Linien, analytisch ausgedrückt durch

(I) $$\boxed{\Lambda_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k} - \mathfrak{n}(A_i^k \Gamma_{lj}^l + A_j^k \Gamma_{li}^l)},$$

gleichbedeutend mit (IX), läszt sich auch auf dem Weylschen Wege nicht entgehen ([32]). Dagegen kann aber die Forderung (X), die in das Weylsche System, das mit der Krümmungsgrösze $\Upsilon_{ij}^{\cdot\cdot k}$ und nicht mit $\mathfrak{P}_{lija}^{\cdot\cdot\cdot c}$ arbeitet, gar nicht hineinpaszt, durch eine hier naturgemäszere Forderung ersetzt werden, nämlich durch die Forderung (J) des Verschwindens der *zweiten* möglichen Faltung von $Q_{lji}^{\cdot\cdot\cdot k}$:

(J) $$\boxed{Q_{kji}^{\cdot\cdot\cdot k} = 0},$$

woraus folgt

(62) $$\Lambda_{ij}^{o} = \frac{1}{c(n-1)} \{ \Lambda_{mj}^{k} \Lambda_{ki}^{m} - \partial_k \Lambda_{ij}^{k} \} \text{ ([33]).}$$

Die Λ_{aj}^{c} bekommen also dieselben Werte wie im § 1. Man überzeugt sich leicht davon, dasz die Grösze $Q_{lji}^{\cdot\cdot\cdot k}$ mit der Projektivkrümmungsgrösze $P_{lji}^{\cdot\cdot\cdot k}$ identisch ist, und dasz die Weylsche Forderung (60) jetzt überflüssig ist, da die Symmetrie der Λ_{ij}^{o} schon aus der ohne Verwendung von (60) abgeleiteten Gleichung (62) folgt.

§ 3. Nichtsymmetrische Uebertragungen.

Die Weylsche Auffassung von $\Lambda_{[ij]}^{k}$ als eine für die Cartansche Torsion charakteristische Grösze, legt es nahe die Behandlung auszudehnen auf den Fall wo eine im allgemeinen nich symmetrische Uebertragung bis auf bahntreue Transformationen der Art

(63) $$'\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k} + A_i^k p_j + A_j^k q_i$$

gegeben ist. Es sind dies diejenigen bahntreuen Transformationen, die eine halbsymmetrische Uebertragung halbsymmetrisch lassen. Wir deuten den Gedankengang nur ganz kurz an. Die Cartansche Torsion einer Uebertragung

---

([32]) F. G., S. 722.

([33]) Auch in dieser Gleichung käme, wenn (*F*) nicht berücksichtigt wird, $\Omega_{ij}^{k} - A_i^k \Omega_{oj}^{o}$ statt Λ_{ij}^{k}, sodasz in dem Falle alles erledigt wäre bis auf die Bestimmung der Ω_{oj}^{o}.

mit den Parametern Γ_{ij}^k ist charakterisiert durch die bei (63) nicht invariante Grösze $S_{ij}^{\cdot\cdot k}$. Diese Grösze besitzt aber die bei (63) invariante Komitante

$$(64) \qquad W_{ij}^{\cdot\cdot k} = S_{ij}^{\cdot\cdot k} - \frac{2}{n-1} A_{[i}^k S_{j]}, \quad S_{ij}^{\cdot\cdot k} = \Gamma_{[ij]}^k; \quad S_j = S_{ij}^{\cdot\cdot i} \text{ (}^{34}\text{)}$$

und die Gleichung (60) kann also ersetzt werden durch die invariante Forderung

$$(65) \qquad \Lambda_{[ij]}^k = W_{ij}^{\cdot\cdot k}.$$

Die Forderung des Zusammenfallens der geodätischen Linien führt jetzt zu

$$(66) \qquad \Lambda_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{n^2-1} \{ A_i^k[\Gamma_{jl}^l - n\Gamma_{lj}^l] + A_j^k[\Gamma_{li}^l - n\Gamma_{il}^l] \}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist natürlich invariant bei (63) [35]. Der Prozesz wickelt sich im übrigen in derselben Weise ab wie oben, zwar sind die $\mathfrak{P}_{iji}^{\cdot\cdot\cdot k}$ sowie die $\mathfrak{P}_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot k}$ keine Bestimmungszahlen von Gröszen der X_n mehr, die $\mathfrak{P}_{kji}^{\cdot\cdot\cdot k}$ behalten aber diese Eigenschaft und dies ermöglicht wie im § 1 die Aufstellung der invarianten und auch hier abschlieszenden Forderung (X).

Man kann das Problem auch folgendermaszen fassen, wodurch die Gleichung (65) eine natürliche Deutung erhält. Unter allen Uebertragungen (63) des Systems gibt es ein bei (63) invariantes Untersystem für welches beide Faltungen von $S_{ij}^{\cdot\cdot k}$ verschwinden. Dieses Untersystem bestimmt das System (63) vollständig, und seine Transformationsformel hat die einfachere Gestalt ((1), § 1). Alle Uebertragungen des Untersystems haben also dieselbe Torsion, charakterisiert durch $S_{ij}^{\cdot\cdot k} = W_{ij}^{\cdot\cdot k}$. Legt man nun dieses Untersystem zu Grunde se bedeutet (65) einfach, dasz die Torsion der zu bestimmenden Uebertragung der Torsion des Untersystems gleichgesetzt wird.

---

[34] V. Hlavaty, *Déplacements isohodoiques*, « Ens. Math. », 26 (27), 84-97.

[35] Diese Invarianz wurde zuerst bemerkt von V. Hlavaty, l. c. [32], S. 85.

ISTITUTO NAZIONALE DELLE ASSICURAZIONI

DIREZIONE GENERALE: ROMA

Avviso di concorso.

È indetto un *concorso per titoli* ad un posto di attuario.

Gli aspiranti, non più tardi del 30 settembre p. v., dovranno presentare (facendosene rilasciare ricevuta) o far pervenire (per posta, in piego raccomandato con ricevuta di ritorno) alla Direzione Generale dell'Istituto (Servizio Personale) in Roma, Via S. Basilio n. 38, i seguenti documenti:

1) Domanda di ammissione al concorso, nella quale gli aspiranti dovranno indicare il preciso indirizzo della loro abitazione e dichiarare di conoscere e di accettare tutte le condizioni del presente bando di concorso.
2) Certificato di cittadinanza italiana (legalizzato dal Presidente del Tribunale per gli aspiranti che non siano nati nel Comune di Roma).
3) Estratto dell'atto di nascita (legalizzato dal Presidente del Tribunale per gli aspiranti i quali non siano nati nel Comune di Roma), dal quale risulti che il concorrente alla data del presente avviso abbia compiuto l'età di 28 anni e non abbia superato l'età di 50 anni.
4) Certificato generale negativo del casellario giudiziario, vidimato dal Presidente del Tribunale.
5) Certificato di buona condotta (legalizzato dal Prefetto per gli aspiranti non residenti nel Comune di Roma).
6) Certificato di sana costituzione fisica, debitamente legalizzato.
7) Stato di famiglia.
8) Stato di servizio militare, prestato quale cittadino italiano.
9) *Curriculum vitae.*
10) Diploma di Laurea in Matematica, o di Laurea mista in Matematica e Fisica, o di Laurea in Scienze Statistiche ed Attuariali, o di Laurea in Matematica Finanziaria ed Attuariale conseguita presso un R. Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali, o di Laurea in Ingegneria.
11) Certificato dei punti riportati nel corso degli studi superiori.
12) Ogni altro titolo scientifico e professionale atto a comprovare la speciale competenza teorica e pratica del candidato nelle discipline attuariali e statistiche e la sua attitudine a coprire il posto direttivo messo a concorso.

I certificati di cui ai num. 4), 5), 6), dovranno essere di data non anteriore di tre mesi a quella del presente avviso.

I diplomi ed i certificati di cui ai num. 10) ed 11) dovranno essere esibiti in originale od in copia notarile.

Non sarà tenuto conto delle domande pervenute tardivamente o tardivamente documentate.

L'aspirante, che ricopra un posto di ruolo in Amministrazioni dello Stato o parastatali, è dispensato dal presentare i documenti di cui ai num. 3), 4), 5), ma dovrà presentare un' attestazione, rilasciata dalla propria Amministrazione Centrale, da cui risulti che egli trovasi in attività di servizio.

Saranno presi in considerazione come titoli speciali:

a) le cariche direttive ricoperte in Compagnie di Assicurazione ed il servizio prestato negli Uffici attuariali delle Compagnie predette;

b) l'insegnamento della Matematica finanziaria ed attuariale, o di materia affine, in R. Università, in R. Istituti superiori, od in R. Istituti medi di 2° grado;

c) le pubblicazioni scientifiche di Matematica finanziaria ed attuariale e di Economia e Finanza.

Le pubblicazioni debbono essere presentate in triplice esemplare.

I titoli saranno valutati da un'apposita Commissione giudicatrice, la quale graduerà i candidati ammessi al concorso in ordine di merito, secondo la votazione da ciascuno di essi raggiunta.

Al Consiglio di Amministrazione dell'Istituto è riservata la facoltà di scelta fra i primi tre classificati in graduatoria. Contro le deliberazioni relative non è ammesso ricorso.

L'assunzione in servizio avverrà dopo che il Sanitario di fiducia dell'Istituto avrà riconosciuto il candidato, vincitore del concorso, di sana costituzione fisica, salvo quanto è stabilito per gli invalidi di guerra.

Al vincitore del concorso sarà conferita la nomina di Capo Servizio di II classe, in esperimento per un periodo di mesi sei. Alla fine dell'esperimento il Comitato Permanente ed il Consiglio di Amministrazione dell'Istituto delibereranno — su proposta del Direttore Generale — in ordine al definitivo passaggio in ruolo.

Il vincitore del concorso godrà lo stipendio e le indennità relative al grado che assume, stabilite dalle Tabelle organiche in vigore (retribuzione iniziale complessiva annua lorda di L. 35.000) e, dopo il passaggio in ruolo, il contributo per il trattamento di quiescenza previsto dal Regolamento Interno del Personale, oltre la doppia mensilità, la quota di cointeressenza ed il premio annuale.

Per informazioni gli aspiranti potranno rivolgersi alla Direzione Generale dell'Istituto Nazionale delle Assicurazioni (Servizio Personale) Via S. Basilio n. 38.

Roma, 8 Maggio 1930-VIII.

IL DIRETTORE GENERALE
f.to: GIORDANI

IL PRESIDENTE
DEL CONSIGLIO DI AMMINISTRAZIONE
f.to: BEVIONE

Evoluta (?) di una qualsiasi varietà dello spazio hilbertiano.

Memoria di GIUSEPPE VITALI (a Padova).

Sunto. - *L'A. definisce per qualunque varietà dello spazio hilbertiano una varietà che egli indica con* E *e che può essere sotto molti riguardi considerata come la naturale estensione della evoluta delle curve piane e delle superficie ordinarie.*

Nella presente Memoria io osservo come nel Π_2 corrispondente ad un punto P di una qualunque varietà W, vi sia da considerare una ipersuperficie algebrica che io indico con E_p (I; 1) la quale ammette una semplice generazione proiettiva (I; 2) e che è strettamente legata attraverso ad una questione di estremi relativi alle curvature delle geodetiche di W per P (I; 5, 6, 7). Per mettere in evidenza questi legami ho dovuto introdurre certi iperpiani del Π_2 che ho chiamato spazi centrali (I; 4) ed io dimostro che gli iperpiani tangenti alla E_p sono degli spazi centrali (I; 9).

La considerazione della E_p mi conduce ad associare ad ogni direzione di Π_2 uscente da P un vettore che chiamo curvatura gaussiana secondo tale direzione (I; 10). Gli estremi della grandezza di questo vettore, nel caso in cui W sia una superficie, corrispondono alle normali principali da me introdotte (1) (I; 11).

Indico poi con E l'insieme delle E_p corrispondenti ai vari punti di W (II; 1). La E ha alcune proprietà che ricordano proprietà godute dalle evolute delle curve piane e delle superficie ordinarie (II; 2, 3, 4, 5, 6), fra le quali una (II; 5, 6) segnalata dal BONNET per le curve piane e recentemente estesa in vari sensi dal MINEO e dall'ALIPRANDI.

I.

1. Sia W una varietà qualunque ad n dimensioni dello spazio hilbertiano. Sia $f(t; u)$ una sua determinante. Sia P un punto di W. Sia ν $\left[\nu \leq \binom{n+1}{2}\right]$ il numero delle dimensioni del Π_2 corrispondente a P (2).

(1) G. VITALI, *Geometria nello spazio hilbertiano* [Ed. N. Zanichelli, Bologna (1929), p. 256]. In seguito questo libro si indicherà con « G. H. ».

(2) Per le notazioni v. « G. H. ». Parti II e V.

Consideriamo ν parametri normali e fra loro ortogonali del Π_2

$$\underset{i}{X} \qquad (i = 1, 2, \dots, \nu).$$

Assumiamo poi come sistema cartesiano ortogonale in Π_2 le ν rette uscenti da P aventi i parametri $\underset{i}{X}$ ed orientate in modo che il punto $f + \underset{i}{X}$ sia sulla parte positiva.

Si ponga al solito

$$\underset{i}{x}_{h,k} = \int_g f_{h,k} \underset{i}{X} dt, \qquad a_{h,k} = \int_g f_h f_k dt,$$

ed essendo $\underset{i}{x}$ le coordinate, rispetto al cartesiano considerato, di un punto del Π_2, si ponga inoltre

$$\varphi = | a_{h,k} - \Sigma_i \underset{i}{x} \cdot \underset{i}{x}_{h,k} | .$$

DEF. — Chiamerò E_p la ipersuperficie del Π_2 che ha per equazione la $\varphi = 0$.

2. La E_p è una varietà algebrica che ha una generazione molto semplice.

Si considerino gli n sistemi S_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ lineari di iperpiani che si ottengono facendo variare le μ_h nelle equazioni

$$\Sigma_h \mu_h (a_{h,k} - \Sigma_i \underset{i}{x} \cdot \underset{i}{x}_{h,k}) = 0.$$

Facendo corrispondere in due S_k gli iperpiani che corrispondono al medesimo sistema di valori delle μ_h, si vede che questi sistemi S_k si corrispondono in una proiettività (magari singolare), e che la E_p è il luogo dei punti comuni alle n-uple di iperpiani corrispondenti in tale proiettività.

Se $\nu > n$, n iperpiani di una tale n-upla hanno in comune uno spazio lineare di $\nu - n$ dimensioni, e quindi la E_p è costituita da ∞^{n-1} spazi lineari a $\nu - n$ dimensioni.

3. Nel caso di $n = \nu = 1$ la E_p si riduce al 1° centro di curvatura della curva W. Se $n = 2$ e $\nu = 1$, la E_p si riduce alla coppia dei centri di curvatura delle geodetiche tangenti alle linee di curvatura della superficie W. Nel caso $n = \nu = 2$, la E_p coincide con una conica che si è presentata al TONOLO (1).

(1) A. TONOLO, *Relazioni geometriche fra due sistemi di normali di una superficie dello spazio hilbertiano*, [« Annales de la Société Polonaise de Math. », T. VIII (1929), p. 5].

Per $n = \nu = 3$ la E_p si è presentata alla SACILOTTO [1]. Per $n = \nu$, essa poi fa capolino in un mio lavoro [2].

4. Sia d una direzione di W uscente da P.

La geodetica di W tangente a d in P ha corrispondentemente a P una normale principale che (quando la d non è una direzione asintotica della W), è una retta r di Π_2. Questa geodetica ha poi corrispondentemente a P un centro di curvatura che sarà un punto Q di r.

DEF. 1. — Chiamo *spazio centrale* corrispondente alla direzione d l'iperpiano di Π_2 ortogonale alla retta r nel punto Q.

Gli spazi centrali corrispondenti alle varie direzioni uscenti da P formano una configurazione contenuta in Π_2 che noi avremo occasione di esaminare.

DEF. 2. — Se s è una retta di Π_2 uscente da P, e se J è lo spazio centrale corrispondente alla direzione d, il punto intersezione di s e di J si chiamerà il *centro* sulla s della W corrispondente alla direzione d.

I centri sulla s della W sono ∞^{n-1}, il che dimostra che un medesimo centro può corrispondere ad infinite direzioni di W.

DEF. 3. — Se C è il centro sulla s corrispondente alla direzione d, la lunghezza del segmento PC si chiamerà il *raggio* sulla s della W corrispondente alla direzione d.

5. I raggi sulla s sono funzioni delle $du_1, du_2, \dots, du_n$ che individuano la d alla quale corrispondono.

Indichiamo con Q' il punto principale [3] sulla r corrispondente alla direzione d, e con C' la proiezione ortogonale di Q' sopra s.

Poichè si ha per definizione $PQ \cdot PQ' = 1$, e dai triangoli simili PQC e $PC'Q'$ si ricava $PQ : PC' = PC : PQ'$, si ha $PC \cdot PC' = 1$.

Se Z è un parametro normale di s, indichiamo con ρ la lunghezza di PC presa con segno + o — secondo che C cade dalla parte di $f + Z$ rispetto a P oppure dalla opposta. Si ha allora che il punto $f + (1 : \rho)Z$ è il punto C'. Ma C' è la proiezione ortogonale di Q' sulla s, inoltre Q' è il punto

$$f + (\Sigma_{hk} f_{h,k} du_h du_k) : (\Sigma_{hk} a_{h,k} du_h du_k),$$

(1) I. SACILOTTO, ***Normali associate alle direzioni di una varietà generica a tre dimensioni giacente in uno spazio lineare a sei dimensioni***, [« Atti del R. Ist. Veneto », T. LXXXVIII, p. 357]. La equazione di E_p si ottiene eliminando le du_r dalle formule (3') di tale nota.

(2) G. VITALI, ***Forme differenziali a carattere proiettivo associate a certe varietà***, [« Atti del R. Ist. Veneto », T. LXXXVIII, p. 364]. La equazione di E_p si ottiene eliminando le du_r dalle equazioni (6) di tale nota.

(3) « G. H. », p. 222.

dunque

$$1:\rho=\int_g(\Sigma_{hk}f_{h,k}du_hdu_k)Zdt:(\Sigma_{hk}a_{h,k}du_hdu_k),$$

e quindi

(1) $$\rho=(\Sigma_{hk}a_{h,k}du_hdu_k):(\Sigma_{hk}z_{h,k}du_hdu_k),$$

dove, al solito,

$$z_{h,k}=\int_g f_{h,k}Zdt.$$

6. Tenuta fissa la s cerchiamo gli estremi di ρ, ossia i valori di ρ per i quali risultano nulle tutte le derivate parziali prime del secondo membro di (1) rispetto alle singole du_k. Per tali ρ e per le corrispondenti du_h dovranno essere soddisfatte le relazioni

$$\Sigma_h a_{h,k}du_h-\rho\Sigma_h z_{h,k}du_h=0 \qquad (k=1,\ 2,\ldots,\ n),$$

ossia le

(2) $$\Sigma_h(a_{h,k}-\rho z_{h,k})du_h=0 \qquad (k=1,\ 2,\ldots,\ n).$$

Ma perchè le (2) siano soddisfatte da delle du_h non tutte nulle, deve essere nullo il determinante dei coefficienti delle (2), e quindi ρ deve soddisfare la equazione

(3) $$|a_{h,k}-\rho z_{h,k}|=0$$

e poichè la forma $\Sigma_{hk}a_{h,k}du_hdu_k$ è definita e generica [1], la (3) è una equazione secolare che ha n radici reali regolari [2].

7. Riferendoci al sistema cartesiano introdotto al n.° 1 avremo

(4) $$Z=\sum_{1}^{\nu}{}_i\lambda_i X_i,$$

con $\Sigma_i\lambda_i^2=1$, come si vede quadrando la (4) ed integrando lungo g. Se ρ è un raggio di W sulla s, le

$$x_i=\rho\lambda_i \qquad (i=1,\ 2,\ldots,\ \nu)$$

saranno le coordinate del corrispondente centro rispetto al nostro sistema cartesiano.

---

[1] « G. H. », p. 130 e 111.
[2] « G. H. », p. 138.

Tenendo conto di ciò noi possiamo dire che i centri su s che corrispondono agli estremi di ρ sono i punti

$$f + \rho Z = f + \rho \Sigma_i \underset{i}{\lambda} \underset{i}{X} = f + \Sigma_i (\rho \underset{i}{\lambda}) \underset{i}{X} = f + \Sigma_i \underset{i}{x} \underset{i}{X}$$

per i quali le $\underset{i}{x}$ oltre a risultare proporzionali alle $\underset{i}{\lambda}$ soddisfano alla equazione $\varphi = 0$, poichè a questa si riduce la (3), essendo

$$z_{h,k} = \Sigma_i \underset{i}{\lambda} \underset{i}{x}_{h,k} \quad \text{e} \quad \rho z_{h,k} = \Sigma_i \underset{i}{x} \underset{i}{x}_{h,k}.$$

In altri termini si ha il

TEOR. — Gli estremi di ρ sono le distanze di P dalle intersezioni della s colla E_p.

8. Consideriamo la funzione φ delle ν variabili $\underset{i}{x}$.

Come sappiamo la φ è un determinante e noi indicheremo con φ_{hk} il complemento algebrico del termine $a_{h,k} - \Sigma_i \underset{i}{x} \cdot \underset{i}{x}_{h,k}$ in φ. Inoltre indicheremo con φ_i la derivata parziale prima della φ rispetto ad $\underset{i}{x}$. Naturalmente le φ_{hk} e le φ_i saranno anch'esse funzioni delle $\underset{i}{x}$.

Si ha subito

$$n\varphi = \Sigma_{hk}(a_{h,k} - \Sigma_i \underset{i}{x} \cdot \underset{i}{x}_{h,k}) \cdot \varphi_{hk} = \Sigma_{hk} a_{h,k} \varphi_{hk} - \Sigma_i \underset{i}{x} (\Sigma_{hk} \underset{i}{x}_{h,k} \varphi_{hk}), \tag{5}$$

e

$$\varphi_i = - \Sigma_{hk} \underset{i}{x}_{h,k} \varphi_{hk}, \tag{6}$$

e quindi

$$n\varphi = \Sigma_{hk} a_{h,k} \varphi_{hk} + \Sigma_i \underset{i}{x} \cdot \varphi_i. \tag{7}$$

9. Sia ora C un punto di E_p, in C è $\varphi = 0$. Supponiamo che la E_p abbia in C un iperpiano tangente determinato e indichiamolo con J:

I coseni direttori della normale ad J sono proporzionali alle φ_i. Le φ_i non possono essere nel nostro caso tutte nulle e quindi per le (6) non possono essere tutte nulle le φ_{hk}. Inoltre a causa della $\varphi = 0$ si avrà $\varphi_{hk} = \varepsilon \delta_h \delta_k$, dove le δ_h sono numeri reali convenienti ed ε è uno dei numeri $+1$ o -1 (lo stesso per tutte le coppie hk).

Allora la normale per P ad J ha il parametro

$$\begin{aligned} \psi &= -\varepsilon \Sigma_i \varphi_i \underset{i}{X} = \varepsilon \Sigma_{hk} \varphi_{hk} (\Sigma_i \underset{i}{x}_{h,k} \underset{i}{X}) \quad \text{[v. la (6)]} \\ &= \Sigma_{hk} f_{h,k} \delta_h \delta_k. \end{aligned}$$

Indicando con Y un parametro normale di questa retta si avrà $\psi = \theta Y$, dove θ è un numero conveniente.

Il piede Q della perpendicolare r a ~~J cond~~otta da P sarà un punto $f + \omega Y$, dove $\omega = \int_g (\Sigma_i \underset{i}{x} \cdot \underset{i}{X}) Y dt$, poichè Q è anche la proiezione di C sulla r. Ora

$$\omega = \int_g (\Sigma_i \underset{i}{x} \cdot \underset{i}{X}) \psi dt : \theta = \frac{1}{\theta} \cdot \int_g (\Sigma_i \underset{i}{x} \cdot \underset{i}{X})(\Sigma_{hk} f_{h,k} \delta_h \cdot \delta_k) dt =$$
$$= \frac{1}{\theta} \cdot \Sigma_i \Sigma_{hk} \underset{i}{x} \cdot \underset{i}{x}_{h,k} \delta_h \cdot \delta_k$$

e, per la (5), tenendo conto del fatto che è $\varphi = 0$, si ha

$$\omega = \frac{1}{\theta} \cdot \Sigma_{hk} a_{h,k} \delta_h \delta_k .$$

Consegue che Q è il centro di curvatura della geodetica tangente alla direzione d di W per cui le du_h sono proporzionali alle δ_h. Infatti il punto Q' di r che si trova rispetto a P dalla stessa banda di Q e tale per cui $PQ \cdot PQ' = 1$ è il punto

$$f + Y : \omega = f + \theta Y : (\Sigma_{hk} a_{h,k} \delta_h \cdot \delta_k)$$
$$= f + (\Sigma_{hk} f_{h,k} \delta_h \cdot \delta_k) : (\Sigma_{hk} a_{h,k} \delta_h \cdot \delta_k),$$

e quindi Q' è il punto principale corrispondente alla direzione d. Si ha così il

Teor. — Gli iperpiani tangenti ad E_p sono spazi centrali.

Si noti che, essendo gli spazi centrali ∞^{n-1} e gli iperpiani tangenti ad E_p essendo $\infty^{\nu-1}$, se $\nu > n$ ogni spazio centrale deve essere tangente ad E_p in $\infty^{\nu-n}$ punti. Lo sarà nei punti di un medesimo spazio lineare a $\nu - n$ dimensioni appartenenti ad E_p.

Nel caso di $n \leq \nu$ la E_p è l'inviluppo degli spazi centrali.

Nel caso di $n > \nu$ solo una parte degli spazi centrali saranno tangenti ad E_p.

10. Sia s una retta di Π_2 passante per P, e sia Z un suo parametro normale. Si avrà la (4) con $\Sigma_i \underset{i}{\lambda}^2 = 1$, ed i punti di intersezione della s con E_p saranno i punti di coordinate $\underset{i}{x} = \rho \underset{i}{\lambda}$, per i quali il ρ soddisfa alla equazione $| a_{h,k} - \rho \Sigma_i \underset{i}{\lambda} \cdot \underset{i}{x}_{h,k} | = 0$.

Questa equazione ha tutte radici reali, e diverse da zero, e quindi è reale e finito l'inverso del prodotto delle sue n soluzioni. Indichiamolo con Ω. Sia T il punto $f + \Omega \Sigma_i \underset{i}{\lambda} \cdot \underset{i}{X}$.

DEF. — Il vettore PT si chiamerà la *curvatura gaussiana* di W in P secondo la s.

Data la direzione positiva della s è, per continuità, determinata la direzione positiva di tutte le rette di Π_2 che cadono in un piccolo intorno della s. In tal modo e per tali rette resta individuato il numero Ω anche nel segno.

Variando la s il numero Ω risulta funzione delle n variabili $\underset{i}{\lambda}$ legate dalla relazione $\Sigma_i \underset{i}{\lambda}^2 = 1$.

Le $\underset{i}{\lambda}$ così legate si possono esprimere in funzione di altre $n - 1$ variabili indipendenti $\underset{j}{\mu}$ $(j = 1, 2, \ldots, n - 1)$.

11. Cerchiamo ora gli estremi di Ω, ossia i valori di Ω corrispondenti a valori delle $\underset{j}{\mu}$ per cui siano nulle tutte le derivate parziali prime di Ω rispetto alle $\underset{j}{\mu}$.

Cominciamo coll'osservare che $\Omega = |\Sigma_i \underset{i}{\lambda} \cdot \underset{i}{x}_{h,k}| : a$, dove $a = |a_{h,k}|$. Allora per gli estremi di Ω si annulleranno tutte le derivate rispetto alle $\underset{j}{\mu}$ di $|\Sigma_i \underset{i}{\lambda} \cdot \underset{i}{x}_{h,k}| = a\Omega$.

Per fare la nostra ricerca supponiamo che la retta di parametro $\underset{1}{X}$ corrisponda ad un estremo di Ω. Allora il valore di Ω corrispondente alla direzione $\underset{1}{X}$ è estremo dei valori di Ω corrispondenti a tutte le direzioni del piano per P che ha i parametri $\underset{1}{X}$ ed $\underset{i}{X}$, $i > 1$. Ma una direzione di questo piano avrà un parametro normale della forma $\cos\alpha \underset{1}{X} + \operatorname{sen}\alpha \underset{i}{X}$, ed il corrispondente valore di $a\Omega$ sarà dato da $|\cos\alpha \cdot \underset{1}{x}_{h,k} + \operatorname{sen}\alpha \cdot \underset{i}{x}_{h,k}|$.

Per $\alpha = 0$ si ha il valore corrispondente alla retta di parametro $\underset{1}{X}$, e siccome per questa retta si ha un estremo di Ω, per $\alpha = 0$ dovrà essere nulla la derivata rispetto ad α di

$$\xi = |\cos\alpha \cdot \underset{1}{x}_{h,k} + \operatorname{sen}\alpha \cdot \underset{i}{x}_{h,k}|.$$

Ora indicando con ξ_{hk} il complemento algebrico di $\cos\alpha \cdot \underset{1}{x}_{h,k} + \operatorname{sen}\alpha \cdot \underset{i}{x}_{h,k}$ in ξ, si ha

$$\frac{\partial\xi}{\partial\alpha} = \Sigma_{hk}(-\operatorname{sen}\alpha \cdot \underset{1}{x}_{h,k} + \cos\alpha \cdot \underset{i}{x}_{h,k})\xi_{hk}.$$

Ma per $\alpha = 0$ la ξ_{hk} diventa il complemento algebrico di $\underset{1}{x}_{h,k}$ nel determinante $|\underset{1}{x}_{h,k}|$, complemento che indicherò con $\underset{1}{x}^{hk}$, dunque

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0} = \Sigma_{hk}\underset{i}{x}_{h,k}\cdot\underset{1}{x}^{hk}.$$

Si conclude che se ad $\underset{1}{X}$ corrisponde un estremo di Ω, si dovrà avere

$$\Sigma_{hk}\underset{i}{x}_{h,k}\underset{1}{x}^{hk} = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, \nu).$$

Si ha così il

TEOR. — Gli estremi di Ω corrispondono a quelle rette s per le quali, essendo $z_{h,k}$ il covariante associato, e z^{hk} il complemento algebrico di $z_{h,k}$ nel determinante $|z_{h,k}|$, si abbia $\Sigma_{hk}x_{h,k}z^{hk} = 0$ per ogni covariante associato ad una retta di Π_2 perpendicolare ad s.

Segue il

COR. — Se $n = 2$ gli estremi di Ω corrispondono alle normali principali, nel Π_2 (1).

II.

1. DEF. — L'insieme delle E_p corrispondenti ai vari punti di W forma una varietà ad $n + \nu - 1$ dimensioni che chiamerò la E di W (2).

---

(1) « G. H. », p. 458. Le normali principali nel Π_2 furono da me introdotte per le superficie in *Sopra alcuni invarianti associati ad una varietà e sopra i sistemi principali di normali delle superficie*, [« Ann. de la Soc. Pol. de math. », T. VII (1928), pp. 43-67]. Il concetto di normali principali è stato da me successivamente esteso a tutte le varietà in *Sistemi principali di normali ad una varietà giacenti nel suo* σ_2 [« Ann. de la Soc. Pol. de Math. », T. VII (1928), pp. 242-251], ma la estensione da me data (che sotto certi altri punti di vista apparisce naturale ed utile) non ha in rapporto alla quistione geometrica trattata nella presente memoria per $n > 2$ la stessa importanza che la nozione di normali principali ha per $n = 2$. Sorge qui un problema: « Esaminare nel caso di $n > 0$ quali rette s del Π_2 hanno la proprietà che, essendo $z_{h,k}$ il covariante associato ad s, e z^{hk} il complemento algebrico di $z_{h,k}$ in $|z_{h,k}|$, si ha $\Sigma_{hk}x_{h,k}z^{hk} = 0$ per ogni covariante $x_{h,k}$ associato a qualunque direzione di Π_2 perpendicolare ad s ». A prima vista sembra che il problema debba presentare qualche difficoltà.

(2) Per moltissime ragioni la E si potrebbe chiamare la *evoluta* di W. Essa è difatti le evoluta di W nel senso ordinario quando W è una curva piana o una superficie ordinaria (superficie contenuta in uno spazio lineare a tre dimensioni). Inoltre la E ha in tutti i casi delle proprietà che si possono ritenere estensioni di proprietà importanti godute dalle citate evolute. Ma siccome la denominazione di evoluta si usa in casi in cui nè l'evoluta

2. Conduciamo per ogni punto P di W una retta s nel corrispondente Π_2, ed indichiamo con Z un parametro normale di s.

Evidentemente Z risulterà funzione delle n variabili u_h. Imaginiamo di avere scelto le varie s ed i parametri Z in modo che Z risulti continua e derivabile rispetto alle u_h.

Ogni retta s incontra la E in un numero finito di punti, e tutti questi punti formano una varietà Δ ad n dimensioni.

La punto-funzione $f + \rho Z$, dove ρ è radice della equazione

$$(8) \qquad | a_{h,k} - \rho z_{h,k} | = 0$$

è una determinante di Δ, ed in essa le f, ρ, Z sono funzioni delle u_h.

Consideriamo un particolare punto P di W, ed un punto C di Δ posto sulla s corrispondente a P. Evidentemente ad ogni direzione di W per P corrisponde una direzione di Δ uscente da C, ed inversamente.

Mi pongo la domanda: Esiste una direzione di Δ uscente da C che sia perpendicolare al σ_1 di W in P?

Una direzione di Δ uscente da C ha il parametro

$$df + d\rho \cdot Z + \rho \cdot dZ,$$

e perchè sia perpendicolare al σ_1 di W in P dovrà essere

$$(9) \qquad \int_g df \cdot f_k dt + d\rho \int_g Z \cdot f_k dt + \rho \int_g dZ \cdot f_k dt = 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ora Z è ortogonale alle f_k e quindi è $\int_g Z \cdot f_k dt = 0$, da cui derivando rispetto ad u_h risulta $\int_g Z_h \cdot f_k dt = -\int_g Z \cdot f_{h,k} dt = -z_{h,k}$. Inoltre

$$\int_g df \cdot f_k dt = \Sigma_h du_h \int_g f_h \cdot f_k dt = \Sigma_k a_{h,k} du_h ,$$

e

$$\int_g dZ \cdot f_k dt = \Sigma_h du_h \int_g Z_h \cdot f_k dt = -\Sigma_h z_{h,k} du_h .$$

---

nel senso ordinario è determinata, nè la nostra E è una evoluta (v. p. es. il caso in cui W è una linea gobba) così mi sono limitato nella denominazione alla sola iniziale della parola evoluta. In tal modo ho ritenuto di conseguire due scopi:

1.° Ricordare l'affinità della E colle più note evolute.

2.° Non disturbare l'uso corrente della parola evoluta.

Allora le (9) diventano

$$\Sigma_h(a_{h,k} - \rho z_{h,k})du_h = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{9'}$$

Le (9′) sono n relazioni lineari omogenee nelle n variabili du_h che a causa della (8) hanno il determinante dei coefficienti uguale a zero. Allora se ρ è radice semplice di (8) e quindi se il primo membro di (8) ha per tale ρ caratteristica $n-1$ le (9′) hanno una soluzione determinata all'infuori di un fattore. Ne consegue che in tal caso esiste una ed una sola direzione di Δ per C che sia perpendicolare al σ_1 di W in P. Questa direzione corrisponde a quella direzione di W per P che ha per spazio centrale corrispondente l'iperpiano tangente alla E_P in C. Infatti le (9′) non sono altro che le (2).

3. Se, al solito, P è un punto determinato di W e C è un punto della E_P, l'iperpiano di Π_2 tangente ad E_P in C ha tutte le sue direzioni tangenti ad E in C e nello stesso tempo perpendicolari al σ_1 di W in P. Inoltre, come abbiamo visto, se il ρ corrispondente a C è radice semplice della (8), esiste per ogni Δ una ed una sola direzione uscente da C appartenente a Δ e perpendicolare al σ_1. Si conclude facilmente che in questa condizione la E ha in C uno spazio lineare ad n dimensioni tangente ad essa e perpendicolare al σ_1.

4. Se P è un punto di W, se s è una retta per P del Π_2, se Z è un parametro normale di s, se infine la (8) ha n radici a due a due distinte la s incontra la E in n punti diversi $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Si ha il

TEOR. — Le n direzioni di W che hanno come spazi centrali gli iperpiani tangenti ad E_P nei punti $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sono a due a due ortogonali.

DIM. — Infatti se alle direzioni che hanno come spazi centrali gli iperpiani tangenti ad E_P in C_1 e C_2 sono individuati dagli incrementi du_h e δu_h delle u_h, se ρ_1 e ρ_2 sono i valori di ρ corrispondenti a C_1 e a C_2, si ha per le (9′)

$$\Sigma_h(a_{h,k} - \rho_1 z_{h,k})du_h = 0$$
$$\Sigma_h(a_{h,k} - \rho_2 z_{h,k})\delta u_h = 0.$$

Moltiplicando la prima di queste per δu_k e sommando ed inoltre moltiplicando la seconda per du_k e sommando si ha

$$\Sigma_{hk} a_{h,k} du_h \delta u_k = \rho_1 \Sigma_{hk} z_{h,k} du_h \delta u_k$$
$$\Sigma_{hk} a_{h,k} \delta u_h du_k = \rho_2 \Sigma_{hk} z_{h,k} \delta u_h du_k,$$

da cui, essendo $\rho_1 \neq \rho_2$, consegue che $\Sigma_{hk} a_{h,k} \delta u_h du_k = 0$, che esprime appunto che le due direzioni considerate sono ortogonali.

5. Continuiamo a considerare la solita varietà W ed insieme un'altra varietà W' sempre collo stesso numero n di dimensioni, poi imaginiamo associato ad ogni P di W un punto Q di W' in guisa che il segmento PQ risulti perpendicolare alla W in P.

Supposto che $F(t;\, v)$ sia una determinante di W', il punto Q associato al punto $P = f(t;\, u)$ sarà dato da $F(t;\, v)$, dove le v sono convenienti funzioni delle u. Queste funzioni sono definite implicitamente dalle relazioni che esprimono la condizione che PQ è perpendicolare a W in P.

Infatti questa condizione equivale alle relazioni

$$\int_g (f - F) f_h dt = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

che in generale saranno fra loro indipendenti.

6. Detta δ la lunghezza della corda PQ, la δ sarà funzione delle u. Noi ci proporremo di determinare gli estremi di δ, ossia quelle δ per le quali si annullano le prime derivate parziali di δ, o se si vuole di δ^2, rispetto alle u.

Ora $\delta^2 = \int_g (f - F)^2 dt$, ed annullandone le derivate prime rispetto alle u, si hanno le relazioni

$$\int_g (f - F)\left(f_h - \Sigma_k F_k \frac{\partial v_k}{\partial u_h}\right) dt = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

dove, chiaramente, è $F_k = \dfrac{\partial F}{\partial v_k}$.

Tenendo conto delle (10), le (11) diventano

$$\int_g (f - F) \Sigma_k F_k \frac{\partial v_k}{\partial u_h} dt = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

ossia

$$\Sigma_k \frac{\partial v_k}{\partial u_h} \left[\int_g (f - F) F_k dt\right] = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Le (12) sono n relazioni lineari omogenee nelle n quantità

$$\int_g (f - F) F_k dt = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{13}$$

col determinante dei coefficienti uguale al determinante funzionale delle v rispetto alle u.

Allora saranno estremi di δ quei valori di δ per i quali si annullano le n quantità (13), ossia quelli per i quali il segmento PQ risulta anche perpendicolare a W' in Q.

Altri estremi potranno trovarsi per quei sistemi di valori delle u per i quali risulta nullo il determinante funzionale delle v rispetto alle u.

Derivando rispetto alle u le (10) si ha

$$\int_g \left(f_k - \Sigma_r F_r \frac{\partial v_r}{\partial u_k}\right) f_h dt + \int_g (f - F) f_{hk} dt = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

Ma, essendo il parametro $f - F$ ortogonale a W, nell'ultimo integrale che figura in (14) si può sostituire la f_{hk} con la $f_{h,k}$, inoltre è $F - f = \delta Z$, dove Z è un parametro normale, ed allora

$$\int_g (f - F) f_{hk} dt = -\delta \int_g Z \cdot f_{h,k} dt = -\delta z_{h,k},$$

e le (14) diventano

$$a_{h,k} - \delta z_{h,k} = \Sigma_r P_{r,h} \frac{\partial v_r}{\partial u_h} \qquad \left(P_{r,h} = \int_g F_r f_h dt\right),$$

dalle quali si ha

$$|a_{h,k} - \delta z_{h,k}| = |P_{h,k}| \frac{\partial(v_1, v_2, \ldots, v_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)},$$

Si vede così che la condizione che si annulli il determinante funzionale delle v rispetto alle u porta che il punto Q deve trovarsi sulla E di W.

Così si vede in un caso molto più generale ripetersi un fatto che era stato prima segnalato per le curve piane dal BONNET (1), che è poi stato recentemente richiamato ed esteso alle superficie ordinarie dal MINEO (2), e ripreso anche da un punto di vista più largo e colla notazione funzionale dall'ALIPRANDI (3). In tutti i casi considerati da questi autori si presenta la considerazione della curvatura là dove in queste ultime considerazioni compare la varietà E.

(1) O. BONNET, *Sur les maxima et les minima*, [« Nouv. Ann. de math. », serie I, vol. II, pp. 420-425].

(2) C. MINEO, *Sui massimi e minimi di corde normali a una superficie*, [« Boll. dell'U. M. I. », VIII, n. 4 (1929), pp. 194-195].

(3) G. ALIPRANDI, *Sugli estremi di corde normali a una linea e a una superficie*, [« Boll. dell'U. M. I. », IX, n. 2 (1930), pp. 90-95].

L'inviluppo di un sistema più volte infinito di curve piane.

Memoria di F. SEVERI e B. SEGRE (a Roma).

Sunto. - *In questo lavoro vien esteso ai* sistemi più volte infiniti *il noto concetto di inviluppo d'una famiglia* ∞^1 *di curve piane; e, introdotta la nozione di* rango *dell'inviluppo, vengono approfondite diverse questioni che si presentano in quest'ordine d'idee.*

La considerazione e lo studio approfondito dell'inviluppo di un sistema continuo più volte infinito di curve piane, furon oggetto di un lavoro presentato dal SEVERI al R. Istituto Veneto nel 1921 (1). Questo lavoro però non fu mai pubblicato, perchè occorreva completarlo in qualche dettaglio; nè l'Autore trovò da allora modo di occuparsene.

L'inviluppo di un sistema ∞^r di curve piane C, veniva dal SEVERI definito così: *punto caratteristico principale* è un punto (semplice) di una C, pel quale passano *tutte* le ∞^{r-1} curve del sistema infinitamente vicine a C; *inviluppo* del sistema è il luogo dei punti caratteristici principali, al variare di C.

Durante il Congresso internazionale dei matematici tenutosi a Bologna nel 1928, a proposito di un'interessante comunicazione del prof. G. FANO sulle trasformazioni birazionali di contatto, nella quale si ammetteva implicitamente che il luogo dei punti caratteristici principali delle curve di un sistema ∞^2 è sempre una curva (non invade cioè un campo a due dimensioni), il SEVERI, senza ricordare il risultato già ottenuto in proposito nel 1921, osservò di essersi posto in passato la questione per un sistema ∞^r, affermando la necessità di stabilire il fatto con tutto il rigore. Nella seduta successiva del Congresso, B. SEGRE comunicò di aver dimostrato il teorema, col ragionamento qui esposto al n.° 3.

Avendo poi il SEVERI ritrovato le sue carte del 1921, in cui questo teorema era pure stabilito da un punto di vista (iperspaziale) più generale, che associa alla considerazione dell'inviluppo di un sistema ∞^r, quella del *rango* dell'inviluppo medesimo, egli passò quei fogli al SEGRE perché volesse completarne i dettagli. Il che B. SEGRE fece, aggiungendovi risultati propri; e cioè

(1) Cfr. « Atti del R. Ist. Ven. di Scienze, Lettere ed Arti », t. LXXXI (1921-22), p. 3.

quelli contenuti nei §§ II, III, V e nei nn. 16, 19; dando portata più generale al lemma del n.° 4, di cui già il SEVERI si giovava, e completando altresì qualche punto dei nn. 14, 17.

È notevole che possano esistere inviluppi di tutti i ranghi (nn. 18, 19), intendendosi per *rango* l'infinità delle curve del sistema dato, che posseggono punti caratteristici principali. Qui inoltre trovasi il modo di determinare l'inviluppo ed il suo rango, dato che sia il sistema colla sua equazione (§ III) o come insieme delle curve integrali di una data equazione differenziale (§ V), e varie proposizioni sugli inviluppi di inviluppi (nn. 14, 17). Nelle trattazioni usuali, s'introduce il concetto d'inviluppo solo per i sistemi *semplicemente infiniti* di curve piane: ciò perchè è questo il caso che interessa la teoria delle equazioni differenziali, e che si presenta come più semplice. La definizione solita dell'inviluppo di un sistema ∞^1 di curve piane, rientra come caso particolare in quella da noi addottata per un sistema ∞^r; ed è bene rilevare che le considerazioni del § II, forniscono, anche per $r=1$, risultati nuovi (v. n.° 8).

L'estensione che qui vien data, per r qualunque, del concetto di inviluppo [1], si mostrerà specialmente utile nella teoria dei sistemi continui di curve piane algebriche, secondo l'indirizzo inaugurato da F. SEVERI e recentemente ripreso da B. SEGRE [2]. Va avvertito che un cenno di tale estensione trovasi già in CAYLEY, che, a quanto riferisce il SALMON [3], « ha trattato il « caso di una curva $U=0$, la cui equazione contenga due o più parametri « indipendenti. Se α, β sono i due parametri, dalle equazioni

$$U=0, \quad \frac{\partial U}{\partial \alpha}=0, \quad \frac{\partial U}{\partial \beta}=0,$$

« per eliminazione di α, β si trae l'equazione dell'inviluppo... ». Però l'inviluppo così definito non è relativo solo al dato sistema di curve, ma piuttosto a questo considerato in relazione colla particolare scelta dei parametri α, β (cfr. n. 6). CAYLEY poi non si preoccupa degli eventuali punti multipli variabili della curva $U=0$, nè esclude che l'inviluppo possa invadere una porzione

(1) Essa potrebbe agevolmente venir trasportata ai sistemi continui ∞^r di V_{n-1} appartenenti ad una stessa V_n.

(2) Detta estensione è già stata sfruttata da G. FANO, nello sviluppo delle ricerche comunicate al Congresso del 1928: ved. la Nota *Trasformazioni di contatto birazionali del piano*, « Atti R. Acc. dei Lincei », t. VIII $(1928)_2$, p. 449.

(3) G. SALMON-W. FIEDLER, *Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven.* (Leipzig, Teubner, 1873), p. 87.

del piano; e da ultimo egli afferma che il coesistere delle suddette tre equazioni, implica un legame fra i parametri, ossia che il dato sistema è sempre di rango 1, mentre così non è (v. nn. 18, 19).

I.

1. Consideriamo in un piano π un sistema continuo Σ ∞^r $(r \geq 1)$, di curve C. Un punto P di una C può esser comune a *tutte* le ∞^{r-1} curve di Σ infinitamente vicine a C, nel senso ch'esso risulti sempre la posizione limite di un punto comune a C e ad una curva di Σ prossima a C, *comunque* quest'ultima — muovendosi entro a Σ — tenda a C. Godono ad esempio di questa proprietà gli eventuali punti multipli di C, limiti di punti multipli variabili della generica curva di Σ ([1]). Un punto *semplice* di C, che sia comune a tutte le ∞^{r-1} curve di Σ infinitamente vicine a C, verrà detto un *punto caratteristico principale* di Σ, mentre C si dirà una *curva principale* di Σ. È chiaro che ogni sistema continuo costituito da curve di Σ e contenente C, ammette ancora questa curva come principale, e collo stesso punto caratteristico principale.

Risulterà dal seguito (n. 19) che Σ può anche non contenere alcuna curva principale, e quindi neppure possedere punti caratteristici principali; in nessun caso, però, questi ultimi posson esser più che una semplice infinità (n. 2 e seg.), mentre l'infinità delle curve principali di Σ può assumere tutti i valori da 1 ad r (nn. 18 e 19).

Denomineremo *inviluppo* di Σ, il luogo dei suoi punti caratteristici principali; e *rango* dell'inviluppo l'infinità delle curve principali di Σ. L'inviluppo può mancare o ridursi ad un insieme discreto di punti, ma in generale è una curva Γ (n. 11); se esso è di rango k, ogni punto di Γ è caratteristico per ∞^{k-1} curve principali di Σ, le quali risultano tangenti in P a Γ.

2. Incominciamo col dimostrare che:

I punti caratteristici principali di un sistema continuo Σ di curve piane, non possono invadere un campo a due dimensioni.

Basterà all'uopo far vedere che se P è un punto caratteristico principale, semplice e variabile, per la curva C di Σ, variando C in Σ a partire da una

---

([1]) Cfr. F. SEVERI, *Trattato di geometria algebrica* (Bologna, Zanichelli, 1926), vol. I. parte I, p. 40, oppure B. SEGRE, *Sui sistemi continui di curve piane con tacnodo*, « Rendic. R. Acc. dei Lincei », vol. IX, serie 6ª $(1929)_1$, p. 973.

posizione iniziale generica C_0, il punto P, partendo dalla corrispondente posizione iniziale P_0 su C_0, non può muoversi che in una ben determinata direzione, indipendente da C_0. Ora, effettivamente, un qualsiasi sistema continuo ∞^1, Σ_0, di curve di Σ aventi un punto caratteristico principale variabile, ammette il luogo di questi punti come parte dell'inviluppo; e se Σ_0 contiene C_0, detto luogo ha necessariamente in P_0 la stessa tangente di C_0.

Da questo ragionamento resta poi escluso che Σ ammetta ∞^1 punti caratteristici principali, ciascuno dei quali sia relativo ad infinite curve principali aventi in esso tangente *variabile*. Si ha dunque in più che:

*Le curve principali di un sistema continuo avente una **curva** inviluppo, risultano a questa tangenti nei relativi punti caratteristici principali.*

3. I precedenti risultati posson confermarsi analiticamente così. Le curve C di Σ sien date in coordinate cartesiane (x, y) dall'equazione

$$f(x, y; \lambda_1, \dots, \lambda_r) = 0, \tag{1}$$

al variare dei parametri λ; supponiamo che la f, in un dato campo, abbia derivate parziali del 1° ordine finite e continue. Si tratta in sostanza di provare che, per $r \geq 2$, se **ogni** curva C di Σ ammette un punto (semplice) P caratteristico principale, questo o è **fisso** al variare di C, oppure è punto di contatto di C con una curva **fissa**.

Le coordinate (x, y) del punto P relativo alla curva (1), saranno funzioni dei parametri λ:

$$x = x(\lambda_1, \dots, \lambda_r), \quad y = y(\lambda_1, \dots, \lambda_r); \tag{2}$$

e poichè, per ipotesi, per P passan la (1) e tutte le curve di Σ ad essa infinitamente vicine, si vede facilmente che le (2) devon verificare la (1) e le

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} f(x, y; \lambda_1, \dots, \lambda_r) = 0, \dots, \frac{\partial}{\partial \lambda_r} f(x, y; \lambda_1, \dots, \lambda_r) = 0. \tag{3}$$

Avendo supposto che P sia un punto semplice della (1), in esso non potrà contemporaneamente aversi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

D'altro canto, se sostituiamo nella (1) alle x, y le funzioni date dalle (2), e deriviamo rispetto a $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ambo i membri dell'identità risultante, tenendo presenti le (3), otteniamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \lambda_1} = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \lambda_r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \lambda_r} = 0. \tag{4}$$

Ne consegue che la matrice

$$\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial x}{\partial \lambda_1} \cdots\cdots \dfrac{\partial x}{\partial \lambda_r} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \lambda_1} \cdots\cdots \dfrac{\partial y}{\partial \lambda_r} \end{matrix}\right|$$

deve annullarsi identicamente; onde il punto P, se non risulta fisso al variare dei parametri $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, descrive una curva, che — in base alle (4) — tocca le singole curve (1) nel relativo punto caratteristico principale.

Nel precedente ragionamento, si è ammesso senza dimostrazione che le funzioni x ed y date dalle (2) sieno derivabili; ed un' obbiezione analoga si potrebbe opporre al n. 3. Per evitare questa difficoltà (a cui, volendo, si potrebbe ovviare direttamente), daremo una terza dimostrazione, basata su considerazioni iperspaziali, che ci porgeranno il destro di **caratterizzare**, mediante proprietà differenziali, certe varietà a più dimensioni.

4. Premettiamo il lemma seguente:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè gli $\mathrm{S_k}$ *tangenti di una* $\mathrm{V_k}$ *di* $\mathrm{S_n}$ *si appoggino ad un dato* $\mathrm{S_h}$ *secondo spazi di dimensione* $\mathrm{k} - \sigma - 1$ $(\mathrm{n} > \mathrm{h} + \sigma;\ \mathrm{k} - 1 \geq \sigma \geq \mathrm{k} - \mathrm{h} - 1)$, *è che* $\mathrm{V_k}$ *consti di* ∞^σ $\mathrm{V_{k-\sigma}}$ *contenute in spazi lineari di dimensione* $\mathrm{h} + 1$ *passanti pel dato* $\mathrm{S_h}$.

Per provare la necessità della condizione enunciata, incominciamo col supporre $\sigma = 0$ $(n > h \geq k - 1)$; per $h = n - 1$ la cosa essendo evidente, ammetteremo altresì che si abbia $h \leq n - 2$. Occorre far vedere che se gli S_k tangenti di V_k si appoggiano ad S_h secondo S_{k-1} (ossia se tutte le rette tangenti di V_k risultano incidenti ad S_h), V_k sta in uno S_{h+1} per S_h, o per lo meno consta di un numero discreto di varietà siffatte.

Poichè la proprietà da stabilirsi ha manifesto carattere proiettivo, possiam supporre S_h all' infinito e V_k (che non sta in S_h) al finito, ed inoltre introdurre in S_n coordinate cartesiane $x_1, x_2, \ldots, x_n$, in guisa tale che S_h risulti lo spazio congiungente i punti impropri degli assi delle $x_1, \ldots, x_{h+1}$. Per ipotesi, un qualunque spostamento infinitesimo — di componenti $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ — deve risultare parallelo a detto S_h, se effettuato su V_k; lungo V_k deve adunque identicamente esser

$$dx_{h+2} = 0, \ldots, dx_n = 0,$$

eppertanto:

$$x_{h+2} = \text{cost.}, \ldots, x_n = \text{cost.},$$

il che prova la verità del fatto enunciato.

Nel caso di $\sigma > 0$, effettueremo per induzione la dimostrazione della parte diretta del lemma, ammettendola quando in luogo di n, h, k, σ si prenda rispettivamente $n_1 = n - 1$, $h_1 = h$, $k_1 = k - 1$, $\sigma_1 = \sigma - 1$ (onde le limitazioni $n > h + \sigma$ e $k - 1 \geq \sigma \geq k - h - 1$ si mutano nelle $n_1 > h_1 + \sigma_1$ e $k_1 - 1 \geq \sigma_1 \geq k_1 - h_1 - 1$).

Fissiamo in S_n uno spazio Ω generico passante per S_h, di dimensione $n-2$, il che è certo possibile, essendo $n > h + \sigma$, $\sigma > 0$, eppertanto $n - 2 \geq h$. Poichè gli S_k tangenti di V_k si appoggiano ad S_h secondo $S_{k-\sigma-1}$, un iperpiano S_{n_1} passante per Ω dovrà segare V_k lungo una V_{k_1}, i cui S_{k_1} tangenti si appoggiano ad $S_h \equiv S_{h_1}$ secondo spazi di dimensione

$$k - \sigma - 1 = k_1 - \sigma_1 - 1.$$

In base alle fatte ipotesi, V_{k_1} consta di ∞^{σ_1} varietà, di dimensione

$$k_1 - \sigma_1 = k - \sigma,$$

situate in spazi lineari di dimensione $h_1 + 1 = h + 1$, giacenti in S_{n_1} e passanti per S_h. In corrispondenza alle ∞^1 posizioni di S_{n_1} attorno ad Ω, si ottengon così effettivamente $\infty^{\sigma_1+1} = \infty^{\sigma}$ $V_{k-\sigma}$ generanti la data V_k, ognuna delle quali sta in un S_{h+1} per S_h.

La sufficienza della condizione enunciata nel lemma, è di assai facile dimostrazione. Invero, se V_k può generarsi mediante ∞^{σ} $V_{k-\sigma}$ situate in S_{h+1} passanti per un S_h fisso, l'S_k tangente a V_k in un suo punto Q generico contiene l'$S_{k-\sigma}$ ivi tangente alla $V_{k-\sigma}$ generatrice che passa per Q. Questo $S_{k-\sigma}$ sta nell'S_{h+1} per S_h che contiene tale $V_{k-\sigma}$, onde si appoggia ad S_h secondo un $S_{k-\sigma-1}$. Ne consegue che l'S_k tangente a V_k in Q ha con S_h quest'ultimo $S_{k-\sigma-1}$ a comune; nè (in base alla parte diretta del lemma) esso può appoggiarsi ad S_h secondo uno spazio di dimensione maggiore, se si ammette che V_k consti di varietà situate in S_{h+1} per S_h aventi la dimensione $k - \sigma$, e non superiore.

OSSERVAZIONE. — La proposizione che abbiamo dianzi stabilita, e di cui faremo uso al numero seguente, può trovare applicazione in svariate questioni. Così, per es., è noto che i piani tangenti di una V_2^4 di VERONESE risultan tutti incidenti ad uno, S_2, arbitrariamente fissato di essi; e d'altro canto — conformemente al lemma — V_2^4 contiene ∞^1 coniche che si appoggiano ad S_2 in due punti, e quindi tali che ciascuna di esse sta in un S_3 per S_2 [1].

---

[1] Cfr. p. es. E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* (Messina, Principato, 1923), p. 412.

5. Riprendiamo ora le questioni dei nn. 2 e 3, dal seguente punto di vista iperspaziale. Conservando le notazioni del n.° 3, interpretiamo le $x, y, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ come coordinate cartesiane ortogonali in uno spazio ad $n = r + 2$ dimensioni. La (1) rappresenta in S_n un'ipersuperficie f, la quale vien segata dai piani

$$\lambda_1 = \text{cost.}, \dots, \lambda_r = \text{cost.}$$

paralleli al piano $\pi \equiv xy$, lungo curve che si proiettan ortogonalmente su π, precisamente secondo le curve C di Σ. Viceversa, ad un punto $P(x, y)$ di una C di Σ, proveniente da valori $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ fissati dei parametri, risponde in S_n un punto $Q(x, y, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$ di f; e si noti che se P è semplice per C, anche Q è semplice per f, poichè in esso una almeno delle $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ non si annulla.

Ai punti P caratteristici principali di Σ, rispondon così su f punti *semplici* per cui passano le ipersuperficie (3); ora queste segano V_k — fuori dei punti multipli — secondo una V_k *luogo dei punti (semplici) di* f *in cui l'iperpiano tangente passa per l'* S_{r-1} *comune ai punti impropri degli assi delle* $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Ne consegue che ogni S_k tangente di V_k sta in un S_{r+1} passante pel suddetto S_{r-1} fisso, onde ha con quest'ultimo a comune un $S_{k-\sigma-1}$, ove σ può solo valere 0 od 1.

Nel primo caso — per il lemma del numero precedente — V_k consta di un numero discreto di varietà situate in S_r per l'S_{r-1}, onde da quest'ultimo V_k si proietta (ortogonalmente) su π secondo un *numero discreto di punti.* Nel secondo caso, V_k consta di $\infty^1 V_{k-1}$, ciascuna appartenente ad un S_r per l'S_{r-1}, e quindi si proietta (ortogonalmente) da S_{r-1} su π secondo una *curva* Γ. Poichè l'S_k tangente a V_k in un punto Q generico si appoggia ad S_{r-1} secondo un S_{r-2}, la proiezione ortogonale di S_k su π è una retta, che palesemente tocca Γ nel punto P proiezione di Q; e siccome l'S_{r+1} proiettante non è altro che l'iperpiano tangente in Q ad f, così la curva C di Σ, proiezione ortogonale su π della sezione di f col piano per Q parallelo a π, risulta *tangente* in P a Γ.

Restan così stabilite per altra via le proposizioni del n.° 2.

II.

6. Si è già detto al n.° 3, che per i punti dell'inviluppo di un sistema Σ rappresentato dalla (1), debbon coesistere le (1), (3), senza che contemporaneamente si annullino $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Tali condizioni non bastan però per caratterizzare l'inviluppo, quale da noi è stato definito (n.° 1). Ed infatti la curva che — seguendo Cayley — si verrebbe a determinare limitandoci alle suddette condizioni, resta legata alla scelta dei parametri con cui si definiscono le curve di Σ.

Così, per es., se il sistema che si ha da Σ per $\lambda_1 = c$ (cost.) ammette un inviluppo Γ_1 distinto dall'inviluppo di Σ, posto $\lambda_1 = c + \mu_1^2$ si viene a rappresentare Σ coll'equazione

$$f(x, y;\ c + \mu_1^2, \dots, \lambda_r) = 0;$$

ed è subito visto che la curva Γ_1 viene a far parte dell'inviluppo di Σ inteso nella suddetta accezione, quando a determinare le curve di Σ si scelgano i parametri $\mu_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$.

Un altro esempio istruttivo è il seguente. Consideriamo il sistema continuo ∞^1 di curve piane rappresentato dall'equazione

$$(5) \qquad f(x, y, t) \equiv \alpha(x, y) + t^2 \cdot \beta(x, y) + t^3 \cdot \gamma(x, y) + t^4 \cdot \delta(x, y) = 0,$$

al variare del parametro t. Per $t = 0$ ed $\alpha(x, y) = 0$ risulta

$$f(x, y;\ t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} f(x, y;\ t) = 0;$$

e tuttavia in generale la curva $\alpha(x, y) = 0$ non fa parte dell'inviluppo del dato sistema. Infatti la $\alpha(x, y) = 0$ si ha dalla (5) per $t = 0$; e, poichè i gruppi di punti determinati su di essa dalle altre curve (5), posson anche venir segati dalle

$$\beta(x, y) + t \cdot \gamma(x, y) + t^2 \cdot \delta(x, y) = 0,$$

la curva suddetta non contiene altri punti caratteristici (principali) ad essa relativi, all'infuori delle intersezioni colla curva $\beta(x, y) = 0$. Può però ben darsi che la $\alpha(x, y) = 0$ contenga *altri* punti caratteristici del sistema (5), relativi ad altre curve del sistema stesso: ed anzi, con una particolare scelta delle funzioni α, β, γ e δ, si può far sì che la curva $\alpha(x, y) = 0$ sia luogo di punti caratteristici siffatti, e quindi faccia parte dell'inviluppo del sistema (5); in generale, però, così non sarà.

Le precedenti considerazioni, mostrano la necessità di aggiungere alle (1), (3) delle condizioni che bastino a caratterizzare l'inviluppo di un sistema Σ; e ciò appunto ci proponiamo di fare nei numeri seguenti.

7. Nel seguito ci limiteremo, per semplicità, a *funzioni analitiche* considerate nel campo complesso, per quanto alcune delle cose che diremo possano anche estendersi — sotto ipotesi convenienti — al caso non analitico.

Avendo una funzione analitica $\psi(x, t)$, nulla per $x = x_0$, $t = t_0$, quand'è che l'equazione

$$\psi(x, t) = 0 \tag{6}$$

ammette per t prossimo a t_0 delle radici x prossime ad x_0, cioè tendenti ad x_0 col tender di t a t_0? In base ad un classico teorema di WEIERSTRASS [1], affinché ciò sia, basta che nel punto (x_0, t_0) non si annulli qualcuna delle derivate parziali della ψ fatte rispetto alla sola x; in caso opposto, e cioè se la funzione

$$\chi(x) = \psi(x, t_0) \tag{7}$$

si annulla identicamente, la (6) può avere o non avere i requisiti voluti, e per distinguere i due casi occorrerebbe un'analisi ulteriore.

Ciò premesso, supponiamo che le due curve (analitiche)

$$f(x, y;\ t) = 0 \tag{8}$$

$$\varphi(x, y;\ t) = 0 \tag{9}$$

abbian per $t = t_0$ in comune il punto $P_0(x_0, y_0)$, in cui risulti p. es.

$$\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0; \tag{10}$$

e domandiamoci sotto quali ipotesi esse hanno a comune, per t prossimo a t_0, qualche punto prossimo a P_0, e cioè tendente a P_0 col tender di t a t_0. La (8), in virtù della (10), definisce implicitamente una funzione analitica

$$y = y(x, t), \tag{11}$$

che si riduce ad y_0 per $x = x_0$, $t = t_0$; sostituendo la (11) nella (9), siamo ricondotti ad un'equazione come la (6), alla quale si posson applicare le precedenti considerazioni. Basterà dunque esprimere che per $x = x_0$ *la* (7) *ammette qualche derivata diversa da zero.* Ora, le successive derivate di questa funzione si calcolano direttamente, senza che occorra determinare la (11), applicando la regola di derivazione delle funzioni composte, e ben noti teoremi sulle funzioni implicite. Si ottiene così:

$$\frac{d\chi}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x};\quad \frac{d^2\chi}{d^2x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2};\ \text{ecc.,} \tag{12}$$

---

[1] Ved. p. es. É. GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique* (Paris, Gauthier-Villars, 1911), t. II, p. 273 e seg.i.

ove le $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \dots$ si calcolano colle:

(13) $$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}; \text{ ecc.}$$

OSSERVAZIONE. — Nei secondi membri delle (12), (13) compaiono le derivate delle f, φ fatte rispetto *alle sole* x, y. Dovendo porsi in essi $x = x_0$, $y = y_0$, $t = t_0$, si può addirittura supporre che f *e* φ *indichino ciò che diventano le* (8), (9) *quando vi si faccia* $\mathrm{t} = \mathrm{t}_0$.

8. Dato nel piano un sistema ∞^1, Σ_1, di curve analitiche, di equazione

(14) $$f(x, y; t) = 0,$$

possiam assegnare delle condizioni che ci assicurino che un punto semplice $P_0(x_0, y_0)$ di una sua curva C_0, di equazione

(15) $$f(x, y; t_0) = 0,$$

é un *punto caratteristico* ad essa relativo, e cioè è la posizione limite, per $t \to t_0$, di un punto P segato dalla (14) su C_0.

Un punto P siffatto (se esiste), può anche manifestamente venir determinato su C_0 dalla curva

(16) $$\varphi(x, y; t) \equiv \frac{f(x, y; t) - f(x, y; t_0)}{t - t_0} = 0.$$

Notiamo che la $\varphi(x, y; t)$ nell'intorno di (x_0, y_0, t_0) è certamente una funzione analitica *regolare*, che per $t = t_0$ si riduce a

(17) $$\varphi(x, y; t_0) \equiv \frac{\partial f(x, y; t_0)}{\partial t} \text{ (1)}.$$

---

(1) È questo un fatto ben noto, che si può provare osservando che — in base alla formula di CAUCHY — risulta

$$f(x, y; t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(x, y; z)}{z - t}\,dz, \quad f(x, y; t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(x, y; z)}{z - t_0}\,dz$$

(γ essendo una linea chiusa del piano della variabile complessa z, racchiudente i punti t_0 e t), onde, in virtù della (16), si ha:

$$\varphi(x, y; t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(x, y; z)}{(z - t)(z - t_0)}\,dz.$$

Siamo dunque ricondotti alla questione già trattata al numero precedente per le curve (8), (9), che attualmente vanno sostituite dalle (15), (16). Se si suppone che in P_0 valga la (10), avuto anche riguardo all' *Osservazione* fatta alla fine di quel numero, possiamo esprimere le condizioni volute dicendo che

Affinchè P_0 *sia su* C_0 *un punto caratteristico (principale) di* Σ_1, *basta che in esso si annullino il primo membro della* (15) *e la* (17), *e risulti diversa da zero una (almeno) delle* (12); *queste espressioni si calcolano usufruendo delle* (13), *e ponendo in esse per* f *e* φ *rispettivamente il primo membro della* (15) *e la* (17).

Se — come p. es. accade pel sistema (5) considerato al n. 6 — tutte le espressioni (12) si annullano, occorre approfondire l'analisi. Vi è un caso in cui ciò si effettua agevolmente, ed è quello in cui — come nell'esempio surricordato — la funzione (17) si annulla **identicamente**; basta allora, in luogo della funzione φ data dalla (16), assumere la

$$\varphi(x,\ y;\ t) \equiv \frac{f(x,\ y;\ t) - f(x,\ y;\ t_0)}{(t-t_0)^2}:$$

questa, nelle ipotesi attuali, è analitica in P_0 anche per $t = t_0$, risultando

$$\varphi(x,\ y;\ t_0) \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x,\ y;\ t_0)}{\partial t^2}.$$

Aggiungasi poi, che è assai facile di esplicitare le disuguaglianze di cui tratta il precedente enunciato. Così, p. es., la prima si può anche scrivere

$$\text{(18)}\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \end{vmatrix} \neq 0;$$

ed è chiaro che s'essa è soddisfatta per $x = x_0$, $y = y_0$, $t = t_0$, risulta in questo punto diverso da zero il determinante funzionale dei primi membri delle (15), (16) rispetto alle x, y; le curve (14), (15) hanno allora a comune un punto P, che tende a P_0 al tender di t a t_0, le cui coordinate x, y son appunto definite implicitamente in funzione di t dalle (15), (16). Tale ragionamento vale anche nel campo non analitico, ed in questo caso già si trovava nel manoscritto di F. Severi del 1921 (1).

(1) Ved. anche G. Peano, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Torino, Bocca, 1887), p 309. È chiaro che, se si sta nel campo reale, alla funzione φ data dalla (16) si può, applicando il teorema della media, sostituire la $\dfrac{\partial f(x,\ y;\ t_1)}{\partial t}$, con t_1 compreso fra t_0 e t.

La nostra analisi ci permette però di approfondire la discussione anche nel caso in cui in P_0 non valga la (18). Basta ricorrere alla seconda espressione (12), che ridotta a forma intera si può scrivere nel modo seguente

$$(19)\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \end{vmatrix} - 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \end{vmatrix} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \end{vmatrix},$$

e verificare se essa è diversa da zero in P_0. Se si annulla, ci si può similmente valere della (12) successiva; e così via.

9. Ora siamo in grado di soddisfare alla richiesta espressa alla fine del n. 6. Dato in π il sistema Σ ∞^r $(r \geq 2)$ rappresentato dalla (1), consideriamone la curva C_0, proveniente dai valori $c_1, \ldots, c_r$ dei parametri, e su di essa un punto semplice $P_0(x_0, y_0)$, in cui ad es. valga la (10). Affinchè P_0 sia su C_0 un punto caratteristico principale di Σ, è necessario e sufficiente che scelta comunque in Σ una famiglia di curve, Σ_1, semplicemente infinita e regolare, contenente C_0, sempre essa ammetta P_0 come punto caratteristico principale su C_0 (n. 1). La questione resta così ricondotta a quella trattata al numero precedente.

La più generale famiglia Σ_1 si potrà rappresentare colla (1), ove si pongano per $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ delle funzioni analitiche arbitrarie di un parametro t, riducentesi ordinatamente a $c_1, \ldots, c_r$ per $t = t_0$: va rilevato che le derivate di tali funzioni assumono per $t = t_0$ valori $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ **arbitrari**, purchè non tutti nulli. Con ciò la (1) si riduce ad un'equazione del tipo (14), e — in base al teorema di derivazione delle funzioni composte — la relativa espressione (17) si scrive:

$$(20)\qquad \gamma_1 \frac{\partial f(x, y; c_1, \ldots, c_r)}{\partial \lambda_1} + \ldots + \gamma_r \frac{\partial f(x, y; c_1, \ldots, c_r)}{\partial \lambda_r};$$

questa deve annullarsi in P_0, qualunque siano le $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$, e ciò si traduce nel fatto che per $x = x_0$, $y = y_0$, $\lambda_1 = c_1, \ldots, \lambda_r = c_r$ [oltre alla (1)] valgano le (3).

A queste occorre aggiungere altre condizioni, per esprimere che P_0 è un punto caratteristico principale di Σ. In base al n. 8, risulta che all'uopo basta che certe equazioni lineari omogenee nelle $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ non coesistano che per valori tutti nulli di queste quantità; e tali equazioni, in virtù delle (18), (19),..., sono

$$\sum_{i=1}^{r}\gamma_i\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda_i\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda_i\partial y}\end{vmatrix}=0,$$

(21)
$$\sum_{i=1}^{r}\gamma_i\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial^3 f}{\partial\lambda_i\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda_i\partial y}\end{vmatrix}-2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial^3 f}{\partial\lambda_i\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda_i\partial y}\end{vmatrix}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial^3 f}{\partial\lambda_i\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda_i\partial y}\end{vmatrix}\right\}, \text{ ecc.};$$

esse sono in numero infinito, ed i loro coefficienti vanno naturalmente calcolati per $x=x_0$, $y=y_0$, $\lambda_1=c_1,\dots,\lambda_r=c_r$. Possiamo in conclusione dire che:

Affinchè P_0 *risulti un punto caratteristico principale di* Σ, *basta che in esso — oltre ad esser verificate le* (1), (3) — *non si annullino tutti i minori d'ordine* r *estratti dalla matrice (di* r *verticali ed infinite orizzontali) dei coefficienti delle* (21).

Se la matrice suddetta si annulla, occorre un'analisi ulteriore. Questo caso si presenta, ad es., se l'espressione (20) si annulla identicamente rispetto alle x, y, per valori non tutti nulli delle $\gamma_1,\dots,\gamma_r$; ma non è difficile in quest'ipotesi di approfondire l'indagine, tenendo presente quanto è stato detto al n. 8.

Osservazione 1.ª — Va rilevato il *significato intrinseco delle* (21), nel senso che se esse sussistono per valori non tutti nulli delle $\gamma_1,\dots,\gamma_r$ in corrispondenza ad una determinata scelta dei parametri $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ con cui si definiscono le curve di Σ, lo stesso può dirsi quando si cambino i parametri, operando su di essi una trasformazione il cui jacobiano J non si annulli. Infatti, nei coefficienti delle $\gamma_1,\dots,\gamma_r$ nelle (21), le derivate della f rispetto alle $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ compaiono linearmente ed omogeneamente, ed esse son solo del primo ordine rispetto a queste variabili. Ne consegue che colla suddetta trasformazione, quei coefficienti subiscono una sostituzione lineare di modulo J; e basta operare sulle $\gamma_1,\dots,\gamma_r$ colla sostituzione inversa, per soddisfare alle trasformate delle (21).

Osservazione 2.ª — Se in P_0 la matrice di cui al precedente enunciato non si annulla, P_0 è certamente un punto *semplice* di C_0, poichè se in esso fosse $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$, tutti gli elementi di quella matrice sarebbero nulli. Sotto la stessa ipotesi, si può asserire che i parametri $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ sono *essenziali* (e cioè Σ ha dimensione r e non inferiore): in caso opposto, infatti, esisterebbero valori non tutti nulli delle $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ per cui l'espressione (20) si annullerebbe identicamente.

III.

10. Esaminiamo ora più da vicino come si possa determinare l'*inviluppo* di un sistema Σ, dato mediante l'equazione (1), ed il *rango* dell'inviluppo medesimo. Escludiamo che tutte le curve di Σ abbiano una parte fissa in comune (che, naturalmente, verrebbe a far parte dell'inviluppo): con ciò, su ogni curva principale di Σ vi potrà solo essere un numero **discreto** di punti caratteristici principali di Σ ad essa relativi.

Ci sarà utile ritornare alle considerazioni iperspaziali del n. 5. Le $r+1=n-1$ ipersuperficie (1), (3) di S_n, se hanno punti a comune fuori dei punti multipli della f, si segano lungo una o più varietà (analitiche): l'inviluppo di Σ può solo esser costituito dalle proiezioni ortogonali su π di tali varietà (n. 5). Se V_k è una di queste ultime, basta che in un suo punto $Q_0(x_0, y_0, c_1, \dots, c_r)$ non si annulli la matrice di cui all'enunciato del n. 9, perchè lo stesso valga pei punti di un intorno di Q_0 su V_k: in tal caso *la proiezione ortogonale di* V_k *su* π *è un insieme* I *d'un numero discreto di punti od una curva* Γ, *che certamente fa parte dell'inviluppo di* Σ.

Inoltre *il rango di* I *o di* Γ *coincide colla dimensione* k *di* V_k, *e non può assumere che uno dei valori* 1, 2,..., r. Infatti — in base alla definizione del n. 1, ed al n. 5 — il rango cercato non è altro che la infinità dei piani di S_n paralleli a π che contengono punti di V_k; e non è possibile che un piano parallelo a π abbia **una curva** a comune con V_k, poichè, in corrispondenza alla sezione di f con un piano siffatto, si avrebbe su π una curva di Σ, luogo di punti caratteristici principali ad essa relativi. La suddetta infinità coincide dunque effettivamente colla dimensione k di V_k. E questa può solo valere $1, 2, \dots, r$. Infatti, $n-1$ ipersuperficie (analitiche) di S_n non posson segarsi in un punto Q_0, senza necessariamente avere in comune almeno una curva per esso [1]; nè, d'altro canto, le (1), (3) posson avere una parte (ad $n-1=r+1$ dimensioni) in comune, poichè questa dovrebbe ridursi ad un cilindro proiettante ortogonalmente una curva di π (n. 5), che risulterebbe parte comune alle varie curve di Σ.

---

[1] Si può anzi dire che *in generale* l'intersezione consta precisamente di una curva, che si proietta ortogonalmente su π secondo una curva. Tutto ciò discende dal teorema sulle funzioni implicite, inteso nella sua accezione più generale: cfr. ad es. le *Vorlesungen ueber algebraische Geometrie* di F. SEVERI (Leipzig, Teubner, 1921), p. 312.

Aggiungasi che a seconda che l'inviluppo, di rango k, è un insieme I discreto di punti od una curva Γ, un suo punto P_0 generico risulta caratteristico principale per ∞^k o per ∞^{k-1} curve principali di Σ; nel secondo caso le ∞^{k-1} curve principali toccano in P la linea Γ (n. 2).

11. Dal numero precedente risulta che *un sistema continuo di curve piane ammette in generale come inviluppo una curva di rango* 1. La cosa può ulteriormente venir precisata, osservando che *affinchè il sistema* Σ *rappresentato dalla* (1) *ammetta una curva inviluppo di rango* 1, *basta che in un suo punto caratteristico principale* P_0 — *in cui non si annulli la matrice del n. 9* — *risulti anche diverso da zero il determinante hessiano:*

$$(22)\qquad H=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial\lambda_1^2} \cdots \dfrac{\partial^2 f}{\partial\lambda_1\partial\lambda_r} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial\lambda_r\partial\lambda_1} \cdots \dfrac{\partial^2 f}{\partial\lambda_r^2} \end{vmatrix}.$$

In tale ipotesi, infatti, le (3) determinano le λ come funzioni implicite (analitiche) delle x, y:

$$(23)\qquad \lambda_1=\lambda_1(x,\ y),\dots,\ \lambda_r=\lambda_r(x,\ y),$$

riducentesi rispettivamente a $c_1,\dots,c_r$ per $x=x_0$, $y=y_0$. Sostituendo nella (1) alle λ queste espressioni, si ottiene un'equazione

$$(24)\qquad F(x,\ y)=0,$$

che non svanisce identicamente: in caso opposto, infatti, le (23) rappresenterebbero in S_n una superficie comune alle (1), (3), la cui proiezione ortogonale su π invaderebbe l'intorno (a due dimensioni) di P_0; e ciò non può essere (n. 5) ([1]). La (24) rappresenta dunque in π una **curva** passante per P_0, inviluppo **di rango 1** di Σ, perchè proiezione ortogonale su π della **curva** di S_n intersezione delle (1), (3), che ha per equazioni le (23), (24).

Ogni punto $P(x,\ y)$ dell'inviluppo suddetto, è caratteristico principale per **una** curva di Σ, e precisamente per la curva (1) che proviene dai valori dei parametri che si determinano in corrispondenza colle (23). E possiamo agevolmente verificare che questa curva tocca in P l'inviluppo: infatti, pel

([1]) Allo stesso risultato si perviene osservando che — in virtù delle equazioni che diamo più sotto — in P_0 una almeno delle $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ deve risultare diversa da zero.

modo come si è ottenuto la (24), risulta

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}\frac{\partial \lambda_i}{\partial x},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}\frac{\partial \lambda_i}{\partial y},$$

ossia, poichè in P valgono le (3),

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}.$$

12. Se il determinante H di cui al numero precedente si annulla in P_0, la sua matrice avendo la caratteristica $r-\rho$, il punto P_0 appartiene ad una parte dell'inviluppo di Σ, *il cui rango* — che si determina in base alle considerazioni del n. 10 — *vale al più* $\rho+1$. Infatti, la matrice funzionale delle (1), (3) rispetto alle x, y, $\lambda_1,\dots,\lambda_r$, si ottiene orlando il determinante (22) con due verticali ed una orizzontale, i cui elementi sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial \lambda_1},\dots,\ \frac{\partial f}{\partial \lambda_r};$$

di questi, i primi due non son entrambi nulli in Q_0, mentre gli altri r si annullano. Ne consegue che la caratteristica di tale matrice vale almeno $r-\rho+1$, onde le ipersuperficie (1), (3) non possono nell'intorno di Q_0 segarsi secondo una varietà di dimensione maggiore di

$$n-(r-\rho+1)=\rho+1.$$

Se l'inviluppo considerato è di rango $k>1$, onde i suoi punti saranno caratteristici principali per ∞^k curve principali di Σ, consideriamo entro a Σ un generico sistema Σ' di dimensione h. Se si suppone $h+k>r$, Σ' contiene ∞^{h+k-r} di quelle curve principali di Σ, le quali (n. 1) son ancora principali per Σ', e cogli stessi punti caratteristici principali: *il luogo di questi punti* (fra cui havvi P_0) *è in pari tempo inviluppo di* Σ *e di* Σ'; *il suo rango, come inviluppo di* Σ', *vale almeno* $\mathrm{h+k-r}$, e generalmente non di più.

OSSERVAZIONE. — Sempre che si supponga $k>1$, si può prendere $h=r-k+1(<r)$, ed in generale il sistema Σ' risulta di rango 1; ma se così non è, si può su di esso procedere come con Σ, e così via replicatamente, fino a giungere ad un sistema collo stesso inviluppo di Σ e di rango 1, il che accadrà almeno quando si sarà ottenuto un sistema ∞^1. In tal guisa *la determinazione dell'inviluppo d'un sistema* Σ *di rango* $\mathrm{k}>1$, *si può sempre ricondurre a quella d'un inviluppo di rango* 1.

13. Si presenta come particolarmente interessante il caso in cui, la matrice (22) avendo la caratteristica $r-\rho$ $(0<\rho<r)$, il rango k raggiunga il suo valor massimo $\rho+1$ (n. 12).

Possiamo intanto supporre che non si annulli in P_0 il minore costituito dalle ultime $r-\rho$ righe e dalle ultime $r-\rho$ colonne di H, effettuando ove così non fosse un conveniente cambiamento dei parametri λ [1]. Sotto tale ipotesi, le equazioni

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_{\rho+1}}=0,\dots,\ \frac{\partial f}{\partial \lambda_r}=0, \tag{25}$$

determinano le $\lambda_{\rho+1},\dots,\lambda_r$ come funzioni (analitiche) delle x, y, $\lambda_1,\dots,\lambda_\rho$:

$$\lambda_{\rho+1}=\lambda_{\rho+1}(x,\ y;\ \lambda_1,\dots,\lambda_\rho),\dots,\ \lambda_r=\lambda_r(x,\ y;\ \lambda_1,\dots,\lambda_\rho), \tag{26}$$

riducentesi a $c_{\rho+1},\dots,c_r$, per $x=x_0$, $y=y_0$, $\lambda_1=c_1,\dots,\lambda_\rho=c_\rho$. Sostituendo queste espressioni nella (1), si ottiene un'equazione

$$F(x,\ y;\ \lambda_1,\dots,\lambda_\rho)=0 \tag{27}$$

soddisfatta per $x=x_0$, $y=y_0$, $\lambda_1=c_1,\dots,\lambda_\rho=c_\rho$; avuto riguardo al fatto che le (26) equivalgono alle (25), si ha, come alla fine del n. 11,

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{28}$$

e del pari

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}=\frac{\partial f}{\partial \lambda_1},\dots,\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_\rho}=\frac{\partial f}{\partial \lambda_\rho}. \tag{29}$$

Osserviamo ora che la (27) non può esser identicamente soddisfatta, poichè, in virtù delle (28), in P_0 una almeno delle $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ risulta diversa da zero. Le (26), (27) rappresentano dunque in S_n una varietà di dimensione $\rho+1$, comune alle ipersuperficie (1), (25), e passante per Q_0. Per l'ipotesi fatta, anche le (1), (3) devon segarsi nell'intorno di Q_0 secondo una varietà di dimensione $\rho+1$, e ciò non è possibile se non supponendo che le (26), (27) portino di conseguenza le

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_1}=0,\dots,\ \frac{\partial f}{\partial \lambda_\rho}=0. \tag{30}$$

---

[1] Così p. es. se si opera sulle λ con *una sostituzione lineare* a coefficienti costanti, in luogo di H occorre considerare un determinante, che può ottenersi moltiplicando il modulo della sostituzione inversa — preso per orizzontali — pel determinante — preso per verticali — prodotto di H per detto modulo; e si soddisfa alla condizione voluta, scegliendo in modo generico la sostituzione lineare.

In base alle (29), deve dunque — in forza della (27) — risultare:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial \lambda_\rho} = 0. \tag{31}$$

Applicando il lemma del n. 4, da qui segue che le curve rappresentate dalla (27), al variare dei parametri $\lambda_1, \ldots, \lambda_\rho$, hanno una parte fissa in comune, passante per P_0, che può p. es. rappresentarsi coll'equazione:

$$F(x, y; c_1, \ldots, c_\rho) = 0.$$

E *questa curva è l'inviluppo cercato*, poichè lungo di essa coesistono le (1), (25), (30).

Ciò è d'accordo coll'*Osservazione* del n. 12, che nelle ipotesi attuali conduce, per avere l'inviluppo di Σ, a considerare entro a Σ un sistema Σ' generico di dimensione $h = r - k + 1 = r - \rho$ — ad esempio quello che si ottiene da Σ dando a $\lambda_1, \ldots, \lambda_\rho$ determinati valori costanti — ed a trovare l'inviluppo di Σ'.

Aggiungiamo che dalle precedenti considerazioni risulta che:

Se è possibile distribuire le curve di un sistema Σ ∞^{r} in ∞^ρ sistemi di dimensione $\mathrm{r} - \rho$ e rango 1, aventi ***un medesimo inviluppo****, questo fa anche generalmente parte dell'inviluppo di Σ, e come tale ha il rango $\rho + 1$.*

IV.

14. Ci proponiamo in questo § di dare alcune proposizioni sugli *inviluppi di inviluppi*, e di mostrare che

Posson esistere inviluppi — costituiti da curve o da punti in numero discreto — di tutti i ranghi compatibili colla dimensione del sistema continuo (n. 10).

Incominciamo coll'estendere la portata delle considerazioni del n. 13. Dato colla (1) il sistema Σ, ∞^r e di rango k, affinchè un sistema Σ' contenuto in Σ sia di rango 1, occorre abbia la dimensione h non superiore ad $r - k + 1$ (n. 12), ed anzi inferiore a questo numero, se si vuole che l'inviluppo di Σ non stia nell'inviluppo di Σ'. Reciprocamente, un sistema Σ' contenuto in Σ, di dimensione $h = r - \rho$, con $\rho \geq k$, ammette in generale una curva Γ' inviluppo, di rango 1 (n. 11), distinta dall'inviluppo di Σ. Ebbene:

Distribuite le curve di Σ in ∞^ρ sistemi continui Σ' di dimensione $\mathrm{r} - \rho$, con $\rho \geq \mathrm{k}$, le curve Γ' inviluppi di questi ultimi costituiscono un nuovo sistema continuo $\infty^{\mathrm{r}-\rho}$, che ammette in generale lo stesso inviluppo di Σ, e collo stesso rango k.

Possiam supporre, senza scapito di generalità, che i vari sistemi Σ' si abbiano dalla (1) dando ai parametri $\lambda_1, \ldots, \lambda_\rho$ valori costanti; ed inoltre, poichè essi son di rango 1, che le (25) sien (in un certo campo) risolubili rispetto ai parametri variabili $\lambda_{\rho+1}, \ldots, \lambda_r$. In tali ipotesi l'equazione (27), che si ottiene sostituendo nella (1) a $\lambda_{\rho+1}, \ldots, \lambda_r$ le funzioni (26) definite implicitamente dalle (25), al variare dei parametri $\lambda_1, \ldots, \lambda_\rho$ rappresenta le curve Γ' inviluppi dei vari sistemi Σ'. In forza delle (26), sussistono le (25, (29), e la (1) s'identifica colla (27): dunque il sistema (1), (25), (30) **equivale** a quello costituito dalle (27), (31). In particolare, i due sistemi avranno la stessa infinità di soluzioni e cogli stessi valori delle (x, y), da una soluzione $(x, y, \lambda_1, \ldots, \lambda_\rho)$ del secondo sistema avendosene una $(x, y, \lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ del primo, determinando le $\lambda_{\rho+1}, \ldots, \lambda_r$ mediante le (26). In corrispondenza ad una siffatta coppia di soluzioni, saranno generalmente soddisfatte le condizioni che assicurano che il relativo punto (x, y) è caratteristico principale per i sistemi continui (1) e (27) [tali condizioni consistendo solo più in disuguaglianze (n. 9)]; e ciò dimostra l'asserto.

In casi speciali può però ben darsi che le disuguaglianze a cui dianzi si è alluso valgano per uno solo dei due sistemi continui, e che quindi una parte dell'inviluppo di Σ non faccia parte dell'inviluppo degli inviluppi dei vari Σ', oppure viceversa. Nei numeri successivi daremo di tali casi eccezionali degli esempi, che saranno istruttivi anche perchè ancora una volta mostreranno che, dato un sistema (1), per caratterizzarne l'inviluppo non sempre bastino le equazioni (1) e (3).

15. Consideriamo nel piano π un cerchio Γ, e gli ∞^1 cerchi Γ' di raggio metà che lo toccano internamente. Le tangenti ad un dato Γ' forniscon una famiglia Σ' semplicemente infinita di rette, di cui Γ' è l'inviluppo; e le ∞^1 famiglie Σ' costituiscono alla lor volta un sistema Σ ∞^2 di rette, che manifestamente non possiede alcun punto caratteristico principale. Dunque Σ *non ammette inviluppo, per quanto gli inviluppi* Γ' *dei vari* Σ' *abbiano* Γ *per inviluppo.*

La cosa si conferma analiticamente così. Sia:

$$x^2 + y^2 = 4 \tag{32}$$

l'equazione di Γ, ed indichiamo con (λ_1, μ_1) le coordinate del centro di un cerchio Γ', e con (λ_2, μ_2) quelle di un suo punto generico, talchè la retta in esso tangente a Γ' ha l'equazione:

$$(x - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1) + (y - \mu_2)(\mu_2 - \mu_1) = 0. \tag{33}$$

I parametri λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 che quivi figurano, sono legati dalle:

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 = 1, \tag{34}$$

$$(\lambda_2 - \lambda_1)^2 + (\mu_2 - \mu_1)^2 = 1, \tag{35}$$

esprimenti rispettivamente che Γ' tocca internamente Γ, e che (λ_2, μ_2) è un punto di Γ'. Avuto riguardo alla (34), la (35) si scrive:

$$\lambda_2^2 + \mu_2^2 = 2(\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2); \tag{36}$$

questa e la (34) definiscon implicitamente μ_1 e μ_2 come funzioni rispettivamente della sola λ_1 e di λ_1, λ_2. In definitiva, le varie rette di Σ son date dalla (33), al variare dei parametri λ_1 e λ_2, che vi figurano direttamente e per il tramite di μ_1, μ_2; in virtù della (36), quest'ultima equazione può venire sostituita dalla

$$f(x, y;\, \lambda_1, \lambda_2) \equiv x(\lambda_2 - \lambda_1) + y(\mu_2 - \mu_1) - (\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2) = 0.$$

Ora, dalle (34), (36) discende:

$$\frac{d\mu_1}{d\lambda_1} = -\frac{\lambda_1}{\mu_1}, \quad \frac{\partial\mu_2}{\partial\lambda_1} = \frac{\mu_1\lambda_2 - \mu_2\lambda_1}{\mu_1(\mu_2 - \mu_1)}, \quad \frac{\partial\mu_2}{\partial\lambda_2} = -\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\mu_2 - \mu_1},$$

onde risulta:

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda_1} = -(x + \lambda_2) - (y + \mu_2)\frac{d\mu_1}{d\lambda_1} + (y - \mu_1)\frac{\partial\mu_2}{\partial\lambda_1} =$$

$$= -x + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\mu_2 - \mu_1}\,y + \frac{\mu_2}{\mu_1}.\frac{\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1}{\mu_2 - \mu_1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda_2} = (x - \lambda_1) + (y - \mu_1)\frac{\partial\mu_2}{\partial\lambda_2} = x - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\mu_2 - \mu_1}\,y - \frac{\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1}{\mu_2 - \mu_1}.$$

Se si pone:

$$2\lambda_1 = \lambda_2 = x, \quad 2\mu_1 = \mu_2 = y,$$

si soddisfa alle

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial\lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial\lambda_2} = 0,$$

ed alla (36), mentre la (34) diventa l'equazione (32) di Γ; però questo cerchio non è l'inviluppo del sistema Σ, poichè dalle

$$2\lambda_1 = \lambda_2, \quad 2\mu_1 = \mu_2,$$

consegue

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda_1} + \frac{\partial f}{\partial\lambda_2} = 0$$

identicamente rispetto alle variabili x ed y (n. 9).

16. Consideriamo nel piano il sistema continuo Σ delle ∞^2 coniche rappresentate al variare dei parametri λ_1 e λ_2 dall'equazione

$$
\begin{aligned}
(37) \qquad f(x,\, y;\, \lambda_1,\, \lambda_2) \equiv \lambda_1^2 \{ (y+3)(y+4) + 2(x^2 - y^2)\cdot\lambda_2 + \alpha\cdot\lambda_2^2 \} + \\
+ 2\lambda_1 \{ (x-3)(x-4) + (x+3)(x+4)\cdot\lambda_2 + \beta\cdot\lambda_2^2 \} + \\
+ \{ (x^2+y^2-25) + 2(y-3)(y-4)\cdot\lambda_2 + \gamma\cdot\lambda_2^2 \} = 0,
\end{aligned}
$$

in cui α, β e γ sono polinomi di secondo grado in x, y, scelti genericamente. Dalla (37) si trae:

$$
(38) \quad
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \lambda_1} &= 2\lambda_1 \{ (y+3)(y+4) + 2(x^2-y^2)\cdot\lambda_2 + \alpha\cdot\lambda_2^2 \} + \\
&\qquad + 2 \{ (x-3)(x-4) + (x+3)(x+4)\cdot\lambda_2 + \beta\cdot\lambda_2^2 \} \\
\frac{\partial f}{\partial \lambda_2} &= 2\lambda_1^2 \{ (x^2-y^2) + \alpha\cdot\lambda_2^2 \} + 2\lambda_1 \{ (x+3)(x+4) + 2\lambda_2\cdot\beta \} + \\
&\qquad + 2 \{ (y-3)(y-4) + \gamma\cdot\lambda_2 \}.
\end{aligned}
$$

Per $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, la (37) rappresenta il cerchio

$$
(39) \qquad x^2 + y^2 = 25,
$$

che passa (semplicemente) pel punto P di coordinate $x=3$, $y=4$. In virtù delle (38), per

$$
(40) \qquad x=3,\ y=4,\ \lambda_1=0,\ \lambda_2=0,
$$

risulta altresì

$$
(41) \qquad \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} = 0.
$$

ed inoltre per $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, si ha:

$$
(42) \qquad \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} = 2(x-3)(x-4), \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} = 2(y-3)(y-4).
$$

Da qui discende facilmente che *P è un punto caratteristico principale del dato sistema*, relativo alla curva (39). Basta invero in base al n. 9 osservare, che la funzione y della x definita implicitamente dalla (39) nell'intorno di P, non può soddisfare **identicamente** all'equazione

$$
\gamma_1 \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} + \gamma_2 \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} = 0
$$

in cui si ponga $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, tranne che per $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$; ed infatti le (42) mostrano che quest'equazione rappresenta un fascio di coniche, avente un punto base nel punto $x = y = 3$, non situato sul cerchio (39).

Un calcolo facile mostra che nel punto (40) l'hessiano

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial \lambda_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \lambda_2^2} \end{vmatrix}$$

risulta diverso da zero, solo che per $x = 3$, $y = 4$ si supponga $\gamma \neq \frac{63}{2}$. In tale ipotesi le (41) definiscono nell'intorno di quel punto le λ_1, λ_2 come funzioni delle x, y; sostituendo nella (37) alle λ_1, λ_2 queste funzioni, si ottiene l'equazione di una curva Γ passante per P, che fa certamente parte dell'inviluppo di Σ.

Determineremo nel modo più semplice tale equazione, procedendo così. Ricaviamo λ_1 dalla prima delle (41), e sostituiamo nella (37) e nella restante equazione (41). Avuto riguardo alle (38), riducendo a forma intera abbiamo:

$$\begin{aligned} (43)\quad & \{(x-3)(x-4) + (x+3)(x+4)\cdot\lambda_2 + \beta\cdot\lambda_2^2\}^2 - \\ & - \{(y+3)(y+4) + 2(x^2-y^2)\cdot\lambda_2 + \alpha\cdot\lambda_2^2\} \times \\ & \qquad \times \{(x^2+y^2-25) + 2(y-3)(y-4)\cdot\lambda_2 + \gamma\cdot\lambda_2^2\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (44)\quad & \{(x^2-y^2) + \alpha\cdot\lambda_2^2\}\{(x-3)(x-4) + (x+3)(x+4)\cdot\lambda_2 + \beta\cdot\lambda_2^2\}^2 - \\ & - \{(x+3)(x+4) + 2\lambda_2\cdot\beta\}\{(x-3)(x-4) + (x+3)(x+4)\cdot\lambda_2 + \beta\cdot\lambda_2^2\} \times \\ & \qquad \times \{(y+3)(y+4) + 2(x^2-y^2)\cdot\lambda_2 + \alpha\cdot\lambda_2^2\} + \\ & + \{(y-3)(y-4) + \gamma\cdot\lambda_2\}\{(y+3)(y+4) + 2(x^2-y^2)\cdot\lambda_2 + \alpha\cdot\lambda_2^2\}^2 = 0. \end{aligned}$$

I termini di queste equazioni indipendenti da λ_2, valgono rispettivamente:

$$(x-3)^2(x-4)^2 - (y+3)(y+4)(x^2+y^2-25)$$

e

$$\begin{aligned} & (x^2-y^2)(x-3)^2(x-4)^2 - (x+3)(x+4)(x-3)(x-4)(y+3)(y+4) + \\ & \qquad + (y-3)(y-4)(y+3)^2(y+4)^2, \end{aligned}$$

ed è facile verificare che il secondo differisce dal primo solo pel fattore $x^2 - y^2$. Se dunque sommiamo a membro a membro le (43), (44), dopo avere moltiplicati ambo i membri della prima per $-(x^2-y^2)$, otteniamo un'equazione del tipo:

$$(45)\qquad \lambda_2[A_0 + A_1\lambda_2 + A_2\lambda_2^2 + A_3\lambda_2^3 + A_4\lambda_2^4 + A_5\lambda_2^5] = 0,$$

ove le A son polinomi di 6° grado nelle x, y, che non occorre precisare: basta solo osservare che per $x = 3$, $y = 4$ risulta $A_0 \neq 0$, essendo per ipotesi $\gamma \neq \frac{63}{2}$.

La funzione λ_2 delle x, y definita implicitamente dalla (45), che si annulla per $x = 3$, $y = 4$, è dunque

$$\lambda_2 \equiv 0;$$

in corrispondenza le (41) forniscono concordemente

$$\lambda_1 = -\frac{(x-3)(x-4)}{(y+3)(y+4)},$$

e sostituendo nella (37) si ha *l'equazione dell'inviluppo* Γ *cercato di* Σ:

$$(46) \qquad (y+3)(y+4)(x^2+y^2-25)-(x-3)^2(x-4)^2=0;$$

esso è una quartica piana passante semplicemente per P, ed ivi tangente al cerchio (39).

Possiamo ora mostrare che, distribuite le curve di Σ negli ∞^1 sistemi semplicemente infiniti Σ' che si hanno dando a λ_2 valori costanti, ciascuno di questi ammette un inviluppo Γ': e *la quartica* (46) *non fa parte dell'inviluppo delle* Γ'. Invero le Γ' son quartiche piane che si rappresentano al variare del parametro λ_2 coll'equazione

$$\{(y+3)(y+4)+2(x^2-y^2)\cdot\lambda_2+\alpha\cdot\lambda_2^2\}\{(x^2+y^2-25)+2(y-3)(y-4)\lambda_2+\gamma\cdot\lambda_2^2\}-$$
$$-\{(x-3)(x-4)+(x+3)(x+4)\cdot\lambda_2+\beta\cdot\lambda_2^2\}^2=0;$$

questa è del tipo:

$$[(y+3)(y+4)(x^2+y^2-25)-(x-3)^2(x-4)^2]+$$
$$+B(x,y)\cdot\lambda_2^2+C(x,y)\cdot\lambda_2^3+D(x,y)\cdot\lambda_2^4=0,$$

e quindi analoga alla (5) del n.° 6. Da ciò che si è detto quivi a proposito del sistema continuo (5), segue l'asserto.

17. Ai n.i 15 e 16 abbiam fatto vedere che il secondo teorema del n.° 14 — ivi dimostrato per sistemi Σ *generali* — può cadere in difetto in casi speciali. Ci proponiamo ora — sotto analoga riserva — di dare un'ulteriore estensione di detto teorema, provando che:

Dato un sistema Σ ∞^r, *si distribuiscano le sue curve in* ∞^ρ *sistemi continui* Σ' *di dimensioni* $r-\rho$, *ciascuno dei quali abbia una curva inviluppo* Γ', *di rango* σ $(1 \leq \sigma \leq r-\rho)$; *se queste* ∞^ρ *curve* Γ' *ammettono alla loro volta un inviluppo* Γ *di rango* τ $(1 \leq \tau \leq \rho)$, *in generale questo fa parte dell'inviluppo di* Σ, *e come tale ha il rango* $\sigma+\tau-1$.

Per stabilire questa proposizione, consideriamo entro a Σ un generico sistema Ξ di dimensione $d=r-\sigma+1$; esso vien intersecato dai vari Σ' secondo ∞^ρ sistemi continui $\infty^{d-\rho}$, che ammettono come inviluppi **di rango 1** le relative curve Γ' (n.° 12, *Oss.*). In base al surricordato teorema del n.° 14, la curva Γ, inviluppo di rango τ del sistema delle Γ', è pure inviluppo di rango τ di Ξ. Se distribuiamo genericamente le curve di Ξ in $\infty^{\tau-1}$ sistemi continui Ξ', di dimensione $d-\tau+1$, ciascuno di questi ammette Γ come inviluppo di **rango 1** (n.° 12, *Oss.*); facendo descrivere a Ξ entro Σ un sistema $\infty^{\sigma-1}$, otteniamo così la ripartizione delle curve di Σ in $\infty^{\sigma+\tau-2}$ sistemi Ξ', tutti aventi Γ come inviluppo di rango 1. In base al teorema dato alla fine del n. 13, da qui segue appunto che Γ fa parte dell'inviluppo di Σ, col rango $\sigma+\tau-1$.

18. Possiamo ora facilmente provare il fatto enunciato al principio del n.° 14. Se un sistema continuo Σ ammette una curva Γ inviluppo, *di rango uguale alla dimensione* r *del sistema,* ogni punto P di Γ è caratteristico principale per ∞^{r-1} curve di Σ, che risultan tangenti in P alla linea Γ (n.° 10): dunque **tutte** le curve di Σ toccano Γ. Reciprocamente, avendo *un sistema* Σ ∞^r *di curve tangenti in punti variabili ad una linea fissa* Γ, questa fa parte dell'inviluppo di Σ, e come tale ha il rango r; ciò discende da una nota proprietà differenziale, e può anche stabilirsi in base al teorema dato alla fine del n.° 13, distribuendo le curve di Σ in ∞^{r-1} sistemi semplicemente infiniti aventi Γ come inviluppo. Così intanto abbiamo modo di costruire il più generale sistema avente una curva inviluppo di rango uguale alla dimensione del sistema.

Per ottenere *un sistema continuo* ∞^r, *che ammetta una curva inviluppo di rango* k $(1 \leq k \leq r)$, basta prender nel piano un sistema Σ' di dimensione k, avente una curva inviluppo Γ' di rango k. Se Σ' varia nel piano con continuità in modo generico, assumendo ∞^{r-k} posizioni, e generando un sistema continuo Σ ∞^r, la curva Γ' descrive un sistema continuo che ammette una curva inviluppo Γ di rango 1 (n.° 11); in base al teorema del numero precedente, Γ fa parte dell'inviluppo di Σ, e come tale ha il rango k voluto.

19. Ci resta da ultimo da considerare il caso in cui l'inviluppo si riduce ad un gruppo di punti.

Un *punto isolato* dell'inviluppo, avente il rango uguale alla dimensione del sistema, è comune a **tutte** le curve del medesimo (n.° 10). Per ottenere *un sistema* ∞^r *con un inviluppo costituito da un numero discreto di punti, di rango* k $(1 \leq k \leq r)$, basta dunque, se $k=r$, prendere un sistema continuo con un gruppo di punti base (semplici). Per $r > k$, basta per es. considerare il sistema rappresentato dalla:

$$(47) \quad f(x, y; \lambda_1, \dots, \lambda_r) \equiv \varphi_0 + 2\lambda_1\varphi_1 + \dots + 2\lambda_r\varphi_r + \lambda_1^2\psi_1 + \dots + \lambda^2_{r-k}\psi_{r-k} = 0,$$

ove le φ, ψ son funzioni delle x, y tali che le curve:

$$(48)\qquad \varphi_{r-k+1}=0, \dots, \quad \varphi_r=0, \quad \varphi_0-\frac{\varphi_1^2}{\psi_1}-\dots-\frac{\varphi^2_{r-k}}{\psi_{r-k}}=0,$$

abbiano un gruppo I di punti a comune.

La coesistenza delle

$$(49)\qquad \begin{aligned} &f=0, \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda_1}\equiv 2(\varphi_1+\lambda_1\psi_1)=0, \dots, \frac{\partial f}{\partial \lambda_{r-k}}\equiv 2(\varphi_{r-k}+\lambda_{r-k}\psi_{r-k})=0,\\ &\frac{\partial f}{\partial \lambda_{r-k+1}}\equiv 2\varphi_{r-k+1}=0, \dots, \frac{\partial f}{\partial \lambda_r}\equiv 2\varphi_r=0,\end{aligned}$$

conduce alle condizioni

$$(50)\qquad \lambda_1=-\frac{\varphi_1}{\psi_1}, \dots, \lambda_{r-k}=-\frac{\varphi_{r-k}}{\psi_{r-k}}$$

ed alle (48). Per ipotesi queste ultime son soddisfatte nei punti di I, i quali effettivamente *sono punti caratteristici principali per* ∞^k *curve del sistema* (47), in quanto in essi le (49) coesistono dando alle $\lambda_{r-k+1}, \dots, \lambda_r$ valori arbitrari, le altre λ essendo determinate dalle (50); e si può d'altro lato supporre che nei punti suddetti non si annulli la matrice considerata al n.° 9, stante l'arbitrarietà della scelta delle funzioni φ e ψ.

Rileviamo infine che *un sistema continuo può anche non ammetter nessun punto caratteristico principale.* Tale è ad es. il sistema (47), nell'ipotesi che le curve (48) non abbiano punti a comune. Un altro esempio notevole è dato da un sistema di curve piane, che sia mutato in sè da un gruppo continuo transitivo di collineazioni.

V.

20. Termineremo coll'estendere l'*Osservazione 1.ª* del n. 9, il che ci permetterà (n. 21) di trasportare alle equazioni differenziali alle derivate ordinarie d'ordine qualunque, un noto risultato relativo all'*integrale singolare* delle equazioni differenziali del primo ordine.

Accanto al solito sistema continuo ∞^r di curve (1), consideriamone un altro, pure ∞^r,

$$(51)\qquad F(x, y; \mu_1, \dots, \mu_r)=0,$$

e supponiamo che si possa passare dal primo al secondo effettuando sui parametri una trasformazione contenente pure le x, y, cioè del tipo:

$$(52)\qquad \lambda_1=\lambda_1(x, y; \mu_1, \dots, \mu_r), \dots, \lambda_r=\lambda_r(x, y; \mu_1, \dots, \mu_r).$$

Ebbene, *se il sistema continuo* (1) *ammette un inviluppo di rango* k, *lungo cui lo Jacobiano*

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\lambda_1}{\partial\mu_1} \cdots \frac{\partial\lambda_1}{\partial\mu_r} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial\lambda_r}{\partial\mu_1} \cdots \frac{\partial\lambda_r}{\partial\mu_r} \end{vmatrix}$$

non si annulla, in generale esso fa parte altresì dell'inviluppo del sistema (51), *e collo stesso rango* k.

Per stabilire questo fatto, basta osservare che, in forza delle (52), risulta

$$\frac{\partial F}{\partial\mu_1} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial\lambda_i}\frac{\partial\lambda_i}{\partial\mu_1}, \ldots, \; \frac{\partial F}{\partial\mu_r} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial\lambda_i}\frac{\partial\lambda_i}{\partial\mu_r},$$

onde, essendo $J \neq 0$, le (1), (3) **equivalgono** alle

$$F=0, \quad \frac{\partial F}{\partial\mu_1}=0, \ldots, \; \frac{\partial F}{\partial\mu_r}=0;$$

precisamente, in virtù delle (52), si ha una corrispondenza biunivoca e continua fra le soluzioni $(x, y, \lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ del primo sistema, e le soluzioni $(x, y, \mu_1, \ldots, \mu_r)$ del secondo, due soluzioni omologhe avendo **gli stessi valori per le** x, y. Se per una $(x, y, \lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ delle prime risulta p. es. $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, per la soluzione $(x, y, \mu_1, \ldots, \mu_r)$ corrispondente si ha pure $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, essendo:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial\lambda_i}\frac{\partial\lambda_i}{\partial y}.$$

Le condizioni ulteriori perchè si abbia effettivamente un inviluppo, possono esprimersi mediante disuguaglianze (n. 9); e possiamo supporre ch'esse siano soddisfatte, stante l'ammessa genericità delle funzioni considerate.

21. Dimostreremo ora che:

Data un'equazione differenziale alle derivate ordinarie di ordine r *qualsiasi:*

(53) $$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(r)}) = 0,$$

si può, in generale, determinare l'inviluppo del sistema continuo ∞^r *costituito dalle sue curve integrali, senza che per ciò occorra integrare l'equazione stessa. Basta all'uopo interpretare nella* (53) *le* y', y'',..., y^(r) *come parametri, e trovare l'inviluppo del sistema continuo ∞^r di curve piane che così si ottiene; gli inviluppi dei due sistemi ∞^r hanno anzi lo stesso rango.*

Se infatti

$$f(x,\ y;\ \lambda_1, \dots,\ \lambda_r) = 0 \tag{54}$$

è l'integrale generale della (53), la (53) stessa può notoriamente ottenersi eliminando i parametri $\lambda_1, \dots,\ \lambda_r$ fra la (54) e le

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0 \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\frac{\partial^r f}{\partial x^r} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y} y^{(r)} = 0. \end{aligned} \tag{55}$$

Solo che si supponga $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, queste equazioni forniscono le $y', \dots, y^{(r)}$ in funzione delle $x,\ y,\ \lambda_1, \dots,\ \lambda_r$. In generale le (55) potranno pure risolversi rispetto a $\lambda_1, \dots,\ \lambda_r$, ottenendosi questi parametri espressi mediante le $x,\ y,\ y', \dots,\ y^{(r)}$: e la (53) si ha appunto sostituendo nella (54) a $\lambda_1, \dots,\ \lambda_r$ tali espressioni. In base al numero precedente (i parametri $\mu_1, \dots,\ \mu_r$ son ora sostituiti da $y', \dots,\ y^{(r)}$!), si conclude nel modo enunciato.

Intorno alle congruenze sulle cui superficie focali si corrispondono le linee di curvatura.

Memoria di PASQUALE CALAPSO (a Messina).

Sunto. - *Nel presente lavoro è stabilita una trasformazione delle congruenze* W, *secondo la quale il problema della determinazione di tali congruenze è ridotto alla formazione di una rete* O *dello spazio a quattro dimensioni, e di due altre tali reti equivalenti ad* O *per trasformazioni conformi. Il caso in cui sulle superficie focali della congruenza si corrispondono le linee di curvatura, è caratterizzato da una relazione fra le curvature isotrope delle reti* O, *da cui dipende il problema.*

Il problema delle congruenze, sulle cui superficie focali si corrispondono le linee di curvatura (*congruenze* B), è stato da me trattato in un precedente lavoro [« Annali di Matematica », serie IV, tomo V (1927-28), pag. 231 e seguenti].

Escludendo le congruenza di GUICHARD (vedasi BIANCHI, *Lezioni*, vol. I, anno 1902, pag. 325), sulle focali di una congruenza B si corrispondono due sistemi coniugati distinti (quello corrispondente alle sviluppabili e quello delle linee di curvatura) e perciò *tutti* i sistemi coniugati; frattanto la B è una *congruenza* W.

Nel lavoro citato ho già stabilito che il problema della determinazione delle congruenze richieste è di *quarto ordine*; i casi noti delle *congruenze pseudosferiche* e delle *congruenze di* THYBAUT sono soltanto soluzioni particolari.

Ho anche trovato una nuova classe di congruenze B, caratterizzata da un'equazione alle derivate parziali seconde per la superficie focale [formola (44), l. c.].

Qui procedo ad una trasformazione del problema, che si basa sulla considerazione seguente:

È noto da un teorema di DARBOUX (¹) che *condizione necessaria e sufficiente affinchè una retta* [dipendente da due parametri] *generi una congruenza* W, *è che le sei coordinate soddisfino ad una stessa equazione*

(¹) *Leçons*, deuxième partie: 1915, pag. 557.

lineare alle derivate parziali seconde, che assume la forma di LAPLACE *quando si prendono come variabili i parametri delle asintotiche che si corrispondono sulle superficie focali.*

Ciò premesso, dette $\overline{X}_r$ le *coordinate di retta* secondo KLEIN $\left[\sum_1^6 \overline{X}_r^2 = 0\right]$, si interpretino queste come *coordinate pentasferiche di punto* in uno spazio S_4 a quattro dimensioni; ne risulta una superficie S di questo spazio che ammette una rete ortogonale; anzi se la congruenza W è qualunque, la S è una qualunque superficie che ammette una rete ortogonale.

Ed allora si presenta la questione: *come deve prendersi la* S *per ottenere una congruenza* B?

Risulta dalle presenti ricerche che se (x_1, x_2, x_3, x_4) sono le coordinate metriche di punto nell' S_4 e si vuole determinare la S mediante equazioni della forma

$$x_3 = f(x_1, x_2), \quad x_4 = \varphi(x_1, x_2),$$

la condizione caratteristica è un' equazione alle derivate parziali seconde nelle funzioni f *e* φ, *che deve essere soddisfatta insieme all' altra esprimente che la superficie ammette una rete ortogonale,*

Infine è fatta un' interpretazione geometrica dei risultati, in relazione alla teoria delle trasformazioni conformi.

§ 1. Congruenze *W* in generale.

1. Siano $\overline{X}_r$ le coordinate di una retta secondo KLEIN $\left[\sum_6^1 \overline{X}_r^2 = 0\right]$, e supponiamo che questa retta (dipendente da due parametri) generi una congruenza W.

Si sa da un teorema di DARBOUX che in tale ipotesi le sei coordinate X_r soddisfano ad una stessa equazione lineare alle derivate parziali seconde, che assume la forma di LAPLACE quando si prendono come variabili i parametri delle asintotiche che si corrispondono sulle superficie focali.

Se indichiamo con u e v questi parametri, sarà dunque soddisfatta un' equazione

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial^2 \overline{X}_r}{\partial u \partial v} = M \frac{\partial \overline{X}_r}{\partial u} + N \frac{\partial \overline{X}_r}{\partial v} + P \overline{X}_r\,;$$

di più il fatto che le funzioni $\overline{X}_r$ soddisfano la (I), unitamente alla relazione $\Sigma \overline{X}_r^2 = 0$, importa di conseguenza

$$\Sigma \frac{\partial \overline{X}_r}{\partial u} \frac{\partial \overline{X}_r}{\partial v} = 0.$$

Segue da ciò che, *interpretando le* $\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{r}}$ *come coordinate pentasferiche di punto in uno spazio* S_4 *a quattro dimensioni*, il punto (X_r) genera una superficie riferita alle sue linee di curvatura.

2. Inversamente, partiamo da una superficie S di un S_4, e indichiamo con x_1, x_2, x_3, x_4 le coordinate metriche del punto mobile su S; si sa che una superficie dell' S_4 ammette in generale una rete ed una sola; supponiamo questa ortogonale e siano:

u, v i parametri della rete;

ξ_r ed η_r rispettivamente i coseni direttori delle tangenti alle curve di questa rete;

x_{1r} ed x_{2r} rispettivamente i coseni direttori di due normali [1], ortogonali tra loro.

Le coordinate x_r e gli elementi del determinante ortogonale

$$\text{(1)} \qquad \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix}$$

soddisfano ad un sistema della forma:

$$\text{(2)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial x_r}{\partial u} = h\xi_r, && \frac{\partial x_r}{\partial v} = l\eta_r \\ &\frac{\partial x_{kr}}{\partial u} = a_k\xi_r, && \frac{\partial x_{kr}}{\partial v} = b_k\eta_r \\ &\frac{\partial \xi_r}{\partial u} = -a_1x_{1r} - a_2x_{2r} - p\eta_r, && \frac{\partial \xi_r}{\partial v} = q\eta_r \\ &\frac{\partial \eta_r}{\partial u} = p\xi_r, && \frac{\partial \eta_r}{\partial v} = -b_1x_{1r} - b_2x_{2r} - q\xi_r, \end{aligned} \right.$$

---

[1] Per *normale* ad una superficie dell' S_4 (che ammette una rete ortogonale u, v) intendesi una perpendicolare comune alle tangenti alle curve della rete, tale che *quando varia soltanto* u, *o soltanto* v, *generi una superficie sviluppabile*, Guichard [*Les Systèmes cycliques et les Systèmes orthogonaux*; « Annales de l'École normale »; 1897, 1898, 1903].

le cui condizioni d'integrabilità *(equazioni di Gauss e Codazzi)* sono

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial v} = pl, \quad \dfrac{\partial l}{\partial u} = qh \\ \dfrac{\partial a_r}{\partial v} = pb_r, \quad \dfrac{\partial b_r}{\partial u} = qa_r \\ \dfrac{\partial p}{\partial v} + \dfrac{\partial q}{\partial u} + a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0 \text{ (1)}. \end{cases}$$

Se consideriamo a parte uno spazio S_3, ove facciamo variare un punto (x, y, z), ed in questo spazio assumiamo la retta di equazioni

$$(4)\qquad \begin{cases} x = (x_1 + ix_2)z + (x_3 - ix_4) \\ y = (x_3 + ix_4)z - (x_1 - ix_2); \end{cases} \qquad [i = \sqrt{-1}]$$

questa retta genera una congruenza W che per quanto è detto al numero precedente è del tutto generale.

3. Per formare le superficie focali descriviamo il procedimento noto, semplicemente accennando.

Se (x, y, z) è il fuoco sul raggio (u, v), dovrà essere soddisfatta [oltre le (4)] l'equazione nuova

$$\begin{vmatrix} z\dfrac{\partial}{\partial u}(x_1 + ix_2) + \dfrac{\partial}{\partial u}(x_3 - ix_4), & z\dfrac{\partial}{\partial v}(x_1 + ix_2) + \dfrac{\partial}{\partial v}(x_3 - ix_4) \\ z\dfrac{\partial}{\partial u}(x_3 + ix_4) - \dfrac{\partial}{\partial u}(x_1 - ix_2), & z\dfrac{\partial}{\partial v}(x_3 + ix_4) - \dfrac{\partial}{\partial v}(x_1 - ix_2) \end{vmatrix} = 0;$$

questa, osservando le (2), si può scrivere

$$\begin{vmatrix} (\xi_1 + i\xi_2)z + (\xi_3 - i\xi_4) & (\eta_1 + i\eta_2)z + (\eta_3 - i\eta_4) \\ (\xi_3 + i\xi_4)z - (\xi_1 - i\xi_2) & (\eta_3 + i\eta_4)z - (\eta_1 - i\eta_2) \end{vmatrix} = 0$$

che è un'equazione di secondo grado nella z.

Per separare i due valori è comodo introdurre un fattore di proporzionalità ε, ponendo

$$(5)\qquad \begin{cases} (\xi_1 + i\xi_2)z + (\xi_3 - i\xi_4) = -\varepsilon[(\eta_1 + i\eta_2)z + (\eta_3 - i\eta_4)] \\ (\xi_3 + i\xi_4)z - (\xi_1 - i\xi_2) = -\varepsilon[(\eta_3 + i\eta_4)z - (\eta_1 - i\eta_2)]; \end{cases}$$

se allora teniamo conto delle relazioni che legano gli elementi di un deter-

(1) GUICHARD, l. c.

minante ortogonale, l'eliminazione di z porta

$$\varepsilon^2 = -1. \tag{6}$$

È da notare che l'ortogonalità del determinante (1) permette di sostituire le (5), con l'equazione

$$(x_{11} + ix_{12})z + (x_{13} - ix_{14}) = -\varepsilon[(x_{21} + ix_{22})z + (x_{23} - ix_{24})]. \tag{7}$$

4. Questa osservazione conduce ad una semplificazione notevole. Invero derivando la (7) rispetto ad u e rispetto a v, osservando le (2) si trovano le espressioni

$$\left\{\begin{aligned} &[(x_{11} + ix_{12}) + \varepsilon(x_{21} + ix_{22})]\frac{\partial z}{\partial u} = -(a_1 + \varepsilon a_2)[(\xi_1 + i\xi_2)z + (\xi_2 - i\xi_4)] \\ &[(x_{11} + ix_{12}) + \varepsilon(x_{21} + ix_{22})]\frac{\partial z}{\partial v} = -(b_1 + \varepsilon b_2)[(\eta_1 + i\eta_2)z + (\eta_3 - i\eta_4)]; \end{aligned}\right. \tag{8}$$

di più se poniamo

$$\theta = -\frac{(x_{11} + ix_{12}) + \varepsilon(x_{21} + ix_{22})}{(\xi_1 + i\xi_2)z + (\xi_3 - i\xi_4)}$$

si avrà ancora per le (5)

$$\varepsilon\theta = \frac{(x_{11} + ix_{12}) + \varepsilon(x_{21} + ix_{22})}{(\eta_1 + i\eta_2)z + (\eta_3 - i\eta_4)}$$

e le (8) si scriveranno

$$\left\{\begin{aligned} \theta\frac{\partial z}{\partial u} &= a_1 + \varepsilon a_2 \\ -\varepsilon\theta\frac{\partial z}{\partial v} &= b_1 + \varepsilon b_2 . \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Note così le derivate di z, sono deducibili dalle (4) le derivate delle funzioni x ed y, e si trova

$$\left\{\begin{aligned} \theta\frac{\partial x}{\partial u} &= (a_1 + \varepsilon a_3)(x_1 + ix_3) - h[(x_{11} + \varepsilon x_{21}) + i(x_{12} + \varepsilon x_{22})] \\ -\varepsilon\theta\frac{\partial x}{\partial v} &= (b_1 + \varepsilon b_2)(x_1 + ix_2) - l[(x_{11} + \varepsilon x_{21}) + i(x_{12} + \varepsilon x_{22})] \end{aligned}\right. \tag{10}$$

$$\left\{\begin{aligned} \theta\frac{\partial y}{\partial u} &= (a_1 + \varepsilon a_2)(x_3 + ix_4) - h[(x_{13} + \varepsilon x_{23}) + i(x_{14} + \varepsilon x_{24})] \\ -\varepsilon\theta\frac{\partial y}{\partial v} &= (b_1 + \varepsilon b_2)(x_3 + ix_4) - l[(x_{13} + \varepsilon x_{23}) + i(x_{14} + \varepsilon x_{24})]. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

§ 2. Curvature isotrope.

4. Riprendiamo la superficie S dello spazio a quattro dimensioni, che per ipotesi ammette una rete ortogonale, e consideriamo le due *normali isotrope*; se la superficie è riferita ad un sistema qualunque (α, β) di coordinate curvilinee, i parametri direttori (omogenei) delle normali isotrope si hanno dal sistema di secondo grado

$$\Sigma Y_r \frac{\partial x_r}{\partial \alpha} = 0, \quad \Sigma Y_r \frac{\partial x_r}{\partial \beta} = 0, \quad \Sigma Y_r^2 = 0. \tag{12}$$

I parametri direttori Y_r si possono *normare* in guisa che (pensando le Y_r come coordinate di punto) la superficie descritta dal punto di Y_r e la *S si corrispondano per parallelismo di piani tangenti.*

Si sa dalle ricerche di GUICHARD che *se, la superficie* S *è data* (senz' altro) *assegnando le coordinate* x_r *in funzione di* α *e* β, *la determinazione del fattore normante si compie per quadratura* (che introduce una costante moltiplicativa).

Nelle formole superiori i *parametri direttori normali* delle due normali isotrope sono rispettivamente

$$X_r = x_{1r} + ix_{2r}, \quad X_r' = x_{1r} - ix_{2r}. \tag{13}$$

Nelle presenti ricerche dicendo *parametri direttori di una normale isotropa,* li intenderemo già *normati*; quando questi interessano solo omogeneamente, saranno chiamati espressamente *parametri direttori omogenei.*

5. Ritornando alle notazioni del precedente paragrafo, dimostreremo che a ciascuna normale isotropa compete la proprietà che variando soltanto u, o soltanto v, la retta genera una superficie sviluppabile.

Ed infatti le coordinate di un punto qualunque della normale isotropa sono

$$x_r' = x_r - \rho X_r; \qquad [X_r \text{ parametri normali}] \tag{14}$$

se deriviamo rispetto ad u, osservando le (2), troviamo

$$\frac{\partial x_r'}{\partial u} = h\xi_r - \rho(a_1 + ia_2)\xi_r - \frac{\partial \rho}{\partial u} X_r$$

e prendendo

$$\rho = \frac{h}{a_1 + ia_2} \tag{15}$$

rimane

$$\frac{\partial x_r'}{\partial u} = -\frac{\partial \rho}{\partial u} X_r;$$

cioè il punto (x_r'), al variare di u, descrive una curva tangente alla normale, e la proposizione è stabilita.

Il valore di ρ dato dalla (15) lo diremo *raggio di curvatura isotropa*; il valore inverso $\frac{1}{\rho}$ si dirà *curvatura isotropa.*

Si hanno quattro raggi dati dalle formole

$$(16) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho_1} = \dfrac{a_1 + ia_2}{h}, & \dfrac{1}{\rho_2} = \dfrac{b_1 + ib_2}{l} \\ \dfrac{1}{\bar{\rho}_1} = \dfrac{a_1 - ia_2}{h}, & \dfrac{1}{\bar{\rho}_2} = \dfrac{b_1 - ib_2}{l}. \end{cases}$$

6. Introduciamo per l'elemento lineare

$$\Sigma dx_r^2 = h^2du^2 + l^2dv^2$$

i parametri differenziali; si ha facilmente

$$\Delta_2 x_r = -\left(\frac{a_1}{h} + \frac{b_1}{l}\right)x_{1r} - \left(\frac{a_2}{h} + \frac{b_2}{l}\right)x_{2r},$$

da cui

$$\frac{a_1}{h} + \frac{b_1}{l} = -x_{11}\Delta_2 x_1 - x_{12}\Delta_2 x_2 - x_{13}\Delta_2 x_3 - x_{14}\Delta_2 x_4$$

$$\frac{a_2}{h} + \frac{b_2}{l} = -x_{21}\Delta_2 x_1 - x_{22}\Delta_2 x_2 - x_{23}\Delta_2 x_3 - x_{24}\Delta_2 x_4$$

epperò, per le (16), troviamo

$$(17) \qquad \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = -\Sigma X_r \Delta_2 x_r.$$

Similmente si ricava

$$(18) \qquad \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = \Sigma \Delta_1 X_r.$$

Per la proprietà invariantiva dei parametri differenziali i valori delle curvature isotrope sono calcolabili dalle (17) e (18) anche se la superficie [1]

[1] È sempre fatta l'ipotesi che la superficie ammette una rete ortogonale.

è riferita ad un sistema *qualunque di* coordinate curvilinee; ma occorre in precedenza aver *normato* i parametri direttori della normale isotropa.

§ 3. Le congruenze B.

7. I risultati ora ottenuti per le superficie dell' S_4 permettono di dare alle (9), (10), (11) una forma, che meglio si presti alle interpretazioni geometriche.

Se facciamo $\varepsilon = i$ e teniamo presenti le espressioni delle curvature isotrope, le (9), (10), (11) danno

$$\left\{\begin{aligned} \theta\frac{\partial x}{\partial u} &= h\left[\frac{1}{\rho_1}(x_1+ix_2)-(X_1+iX_2)\right]\\ \theta\frac{\partial y}{\partial u} &= h\left[\frac{1}{\rho_1}(x_3+ix_4)-(X_3+iX_4)\right]\\ \theta\frac{\partial z}{\partial u} &= h\frac{1}{\rho_1}\end{aligned}\right. \tag{19}$$

$$\left\{\begin{aligned} -i\theta\frac{\partial x}{\partial v} &= l\left[\frac{1}{\rho_2}(x_1+ix_2)-(X_1+iX_2)\right]\\ -i\theta\frac{\partial y}{\partial v} &= l\left[\frac{1}{\rho_2}(x_3+ix_4)-(X_3+ix_4)\right]\\ -i\theta\frac{\partial z}{\partial v} &= l\frac{1}{\rho_2}.\end{aligned}\right. \tag{20}$$

D' altra parte possiamo trasformare queste formole introducendo i *parametri direttori omogenei* della normale isotropa.

Allo scopo poniamo

$$Y_r = \lambda X_r \tag{21}$$

essendo λ un fattore arbitrario, ed introduciamo le quantità R_1, R_2 mediante le equazioni

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} &= -\Sigma Y_r\Delta_2 x_r\\ \frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2} &= \Sigma\Delta_1 Y_r;\end{aligned}\right. \tag{22}$$

abbiamo subito

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} = \lambda\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right). \tag{23}$$

Di più calcolando il parametro differenziale primo della funzione Y_r troviamo

$$\Delta_1 Y_r = \lambda^2 \Delta_1 X_r + \left[\frac{1}{l^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{h^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2\right] X_r^2 + 2\lambda \frac{\partial\lambda}{\partial v} X_r \frac{\partial X_r}{\partial v} + 2\lambda \frac{\partial\lambda}{\partial u} X_r \frac{\partial X_r}{\partial u};$$

e tenendo presente che ΣX_r^2 è nullo, risulta

$$\Sigma\Delta_1 Y_r = \lambda^2 \Sigma\Delta_1 X_r$$

e cioè

$$\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} = \lambda^2\left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}\right). \tag{24}$$

Infine dalla (23) e (24) ricaviamo

$$\frac{1}{R_1} = \lambda \frac{1}{\rho_1}, \quad \frac{1}{R_2} = \lambda \frac{1}{\rho_2}. \tag{25}$$

8. Ed ora moltiplichiamo i due membri di ciascuna delle equazioni (19) e (20) per il fattore λ; tenendo conto delle (21) e (25) troviamo

$$\left\{\begin{aligned} \theta\lambda \frac{\partial x}{\partial u} &= h\left[\frac{1}{R_1}(x_1 + i x_2) - (Y_1 + i Y_2)\right] \\ \theta\lambda \frac{\partial y}{\partial u} &= h\left[\frac{1}{R_1}(x_3 + i x_4) - (Y_3 + i Y_4)\right] \\ \theta\lambda \frac{\partial z}{\partial u} &= h \frac{1}{R_1} \end{aligned}\right. \tag{26}$$

$$\left\{\begin{aligned} -i\theta\lambda \frac{\partial x}{\partial v} &= l\left[\frac{1}{R_2}(x_1 + i x_2) - (Y_1 + i Y_2)\right] \\ -i\theta\lambda \frac{\partial y}{\partial v} &= l\left[\frac{1}{R_2}(x_3 + i x_4) - (Y_3 + i Y_4)\right] \\ -i\theta\lambda \frac{\partial z}{\partial v} &= l \frac{1}{R_2}. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Questi risultati valgono per le congruenze W generali.

9. Qui occorre caratterizzare le superficie S dello spazio a quattro dimensioni, per le quali la corrispondente congruenza è B.

Se vogliamo determinare una tale superficie mediante equazioni della forma

$$x_3 = f(x_1, x_2), \quad x_4 = \varphi(x_1, x_2), \tag{28}$$

la condizione affinchè essa ammetta una rete ortogonale importa una relazione *alle derivate parziali seconde* per le funzioni f e φ.

D' altra parte dalle (26) e (27) si ottiene una relazione della forma

$$\frac{\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2}{\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}=\frac{h^2}{l^2}\frac{M}{N};$$

in cui, per la proprietà invariantiva dei parametri differenziali, l' espressione $\frac{M}{N}$ è calcolabile dalle (12) e (22) nelle attuali variabili x_1, x_2.

Per la seconda superficie focale della congruenza W si ha una relazione analoga

$$\frac{\Sigma\left(\frac{\partial x'}{\partial u}\right)^2}{\Sigma\left(\frac{\partial x'}{\partial v}\right)^3}=\frac{h^2}{l^2}\frac{M'}{N'};$$

la congruenza è B allora (ed allora soltanto) che sia soddisfatta la condizione

$$MN'-NM'=0. \tag{29}$$

È questa la condizione caratteristica richiesta, che si traduce in una nuova equazione alle derivate parziali seconde per le funzioni f e φ.

§ 4. **Trasformazioni conformi.**

10. Ritorniamo alle congruenze W generali, allo scopo di dare un' interpretazione geometrica delle (19) e (20).

Allo scopo, riprendiamo la superficie S generata dal punto (x_r) ed operiamo la trasformazione

$$x_1'=\frac{x_1}{x_3+ix_4},\quad x_2'=\frac{x_2}{x_3+ix_4},\quad x_3'=\frac{1-\Sigma x_r^2}{2(x_3+ix_4)},\quad x_4'=-i\frac{1+\Sigma x_r^2}{2(x_3+ix_4)}; \tag{30}$$

ne risulta una nuova superficie S', pèr la quale

$$\Sigma dx_r'^2=\frac{\Sigma dx_r^2}{(x_3+ix_4)^2}. \tag{31}$$

Le due superficie S ed S' sono equivalenti nel gruppo conforme.

Se introduciamo per il punto di S le coordinate pentasferiche

$$(32)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = 2x_1, \quad \alpha_2 = 2x_2, \quad \alpha_3 = 2x_3, \quad \alpha_4 = 2x_4, \\ \alpha_5 = 1 - \Sigma x_r^2, \quad \alpha_6 = -i(1 + \Sigma x_r^2), \end{cases}$$

e similmente per il punto di S'

$$(32)\qquad \beta_1 = 2x_1', \dots, \quad \beta_4 = 2x_4', \quad \beta_5 = 1 - \Sigma x_r'^2, \quad \beta_6 = -i(1 + \Sigma x_r'^2),$$

si ha subito dalle (30)

$$\beta_1 = \frac{2x_1}{x_3 + ix_4}, \quad \beta_2 = \frac{2x_2}{x_3 + ix_4}, \quad \beta_3 = \frac{1 - \Sigma x_r^2}{x_3 + ix_4},$$
$$\beta_4 = -i\,\frac{1 + \Sigma x_r^2}{x_3 + ix_4}, \quad \beta_5 = \frac{2x_3}{x_3 + ix_4}, \quad \beta_6 = \frac{2x_4}{x_3 + ix_4};$$

donde, a meno di un fattore, deduciamo

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2, \quad \beta_3 = \alpha_5, \quad \beta_4 = \alpha_6, \quad \beta_5 = \alpha_3, \quad \beta_6 = \alpha_4;$$

cioè *punti corrispondenti di* S *ed* S′ *hanno* (salvo l'ordine) *le stesse coordinate pentasferiche.*

11. Gli elementi della nuova superficie si ottengono senza difficoltà, e si trova

$$(33)\qquad \begin{cases} h' = \dfrac{h}{x_2 + ix_4}, \quad l' = \dfrac{l}{x_3 + ix_4} \\ a_r' = a_r - \dfrac{h(x_{r3} + ix_{r4})}{x_3 + ix_4}, \quad b_r' = b_r - \dfrac{l(x_{r3} + ix_{r4})}{x_3 + ix_4} \end{cases}$$

e per conseguenza le curvature isotrope della superficie S' hanno le espressioni

$$(34)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho_1'} = \dfrac{1}{\rho_1}(x_3 + iy_4) - (X_3 + iX_4) \\ \dfrac{1}{\rho_2'} = \dfrac{1}{\rho_2}(x_3 + ix_4) - (X_3 + iX_4). \end{cases}$$

Insieme alla superficie S ed S' ne considereremo una terza S'', che si deduce dalla prima colla trasformazione

$$(35)\qquad \begin{cases} x_1'' = \dfrac{1 - \Sigma x_r^2}{2(x_1 + ix_2)}, \quad x_2'' = -i\,\dfrac{1 + \Sigma x_r^2}{2(x_1 + ix_2)} \\ x_3'' = \dfrac{x_3}{x_1 + ix_2}, \quad x_4'' = \dfrac{x_4}{x_1 + ix_2}; \end{cases}$$

per le curvature isotrope di quest' ultima si ha

$$(36)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho_1''} = \dfrac{1}{\rho_1}(x_1 + ix_2) - (X_1 + iX_2) \\ \dfrac{1}{\rho_2''} = \dfrac{1}{\rho_2})x_1 + ix_2) - (X_1 + iX_2). \end{cases}$$

Dopo ciò le (19) e (20) prendono la forma

$$(37)\qquad \begin{cases} \theta\dfrac{\partial x}{\partial u} = h\dfrac{1}{\rho_1''}, \quad \theta\dfrac{\partial y}{\partial u} = h\dfrac{1}{\rho_1'}, \quad \theta\dfrac{\partial z}{\partial u} = h\dfrac{1}{\rho_1} \\ -i\theta\dfrac{\partial x}{\partial v} = l\dfrac{1}{\rho_2''}, \quad -i\theta\dfrac{\partial y}{\partial v} = l\dfrac{1}{\rho_2'}, \quad -i\theta\dfrac{\partial z}{\partial v} = l\dfrac{1}{\rho_2}. \end{cases}$$

Osservazione. — Dal punto di vista delle congruenze W, le formole ora ottenute fanno conoscere (a meno del fattore θ) le derivate delle coordinate del punto che descrive la prima focale; per la seconda focale sussistono le medesime, ove intervengono le curvature $\dfrac{1}{\bar{\rho}_1}, \dfrac{1}{\bar{\rho}_2}, \ldots,$ relative alla seconda normale isotropa.

Il caso delle congruenze in cui le focali si corrispondono per linee di curvatura è caratterizzato da una relazione fra le dette curvature isotrope della superficie S, e cioè

$$(38)\qquad \frac{\Sigma\left(\dfrac{1}{\rho_1}\right)^2}{\Sigma\left(\dfrac{1}{\rho_2}\right)^2} = \frac{\Sigma\left(\dfrac{1}{\bar{\rho}_1}\right)^2}{\Sigma\left(\dfrac{1}{\bar{\rho}_2}\right)^2}.$$

12. Terminiamo il presente lavoro considerando una superficie $\bar{S}$ *dello spazio ellittico a quattro dimensioni*, che corrisponda ad S in qualcuna delle note rappresentazioni conformi dello spazio ellittico nello spazio euclideo.

Dette y_r le coordinate di Weierstrass $\left(\sum_1^5 y_r^2 = 1\right)$ del punto che descrive la superficie $\bar{S}$, riteniamo le formole

$$(39)\qquad y_1 = \frac{ix_1}{x_4}, \quad y_2 = \frac{ix_2}{x_4}, \quad y_3 = \frac{ix_3}{x_4}, \quad y_4 + iy_5 = \frac{i}{x_4}.$$

Se α_r indicano le coordinate di direzione di una normale isotropa nel punto (y_r) della superficie si dovrà avere

$$(40)\qquad \Sigma y_r\alpha_r = 0, \quad \Sigma\frac{\partial y_r}{\partial u}\alpha_r = 0, \quad \Sigma\frac{\partial y_r}{\partial v}\alpha_r = 0, \quad \Sigma\alpha_r^2 = 0;$$

e tenendo presenti le formole fondamentali (2) della superficie S e le posizioni (13), si trova facilmente

$$(41)\quad \alpha_1 = \frac{x_1}{x_4} X_4 - X_1, \quad \alpha_2 = \frac{x_2}{x_4} X_4 - X_2, \quad \alpha_3 = \frac{x_3}{x_4} X_4 - X_3, \quad \alpha_4 + i\alpha_5 = \frac{X_4}{x_4},$$

e le quantità α_r così scritte sono *normate* nel senso del n.° 4, § 2.

Le curvature isotrope della $\overline{S}$ sono subito calcolabili dalle formole

$$\frac{\partial}{\partial u}(\alpha_4 + i\alpha_5) = \frac{i}{\rho_1'}\frac{\partial}{\partial u}(y_4 + iy_5)$$
$$\frac{\partial}{\partial v}(\alpha_4 + i\alpha_5) = \frac{i}{\rho_2'}\frac{\partial}{\partial v}(y_4 + iy_5)$$

e si ha

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1'} &= \frac{1}{\rho_1} x_4 - X_4 \\ \frac{1}{\rho_2'} &= \frac{1}{\rho_2} x_4 - X_4 . \end{aligned}\right.$$

Quest' ultimo risultato sarà da me utilizzato in un prossimo lavoro.

Oscillazioni di un corpo rigido in sospensione elastica.

Memoria di GIULIO KRALL (a Roma).

Sunto. - *Interesse pratico del problema. Equazione dei piccoli moti. Corpo rigido su un suolo elastico. Esempi. Moti forzati. Forzamenti vincolari continui ed impulsivi; problemi dell'asismica. Spostamento e costrizione; corrispondenti limitazioni superiori.*

§ 1. In vista di applicazioni concrete allo studio dinamico di certe costruzioni assai frequenti nella pratica, e, con riferimento specifico ad alcuni tipi notevoli di fondazioni, qui cominciamo a considerare, in linea del tutto generale, il moto oscillatorio, *libero* e *forzato*, di un corpo rigido, vincolato da vincoli elastici privi d'inerzia. Nell'ambito dei quali vincoli includeremo, attraverso ad un accorgimento adeguato, i suoli cosidetti elastici. Elasticità questa, ai cultori di statica ormai ben nota, e di cui, in pratica, la considerazione non è certo da trascurare.

Come vedremo, gli sviluppi che andremo svolgendo hanno effettivamente un certo interesse tecnico, anche se dal punto di vista meccanico, a prescindere forse da qualche schematizzazione più o meno indovinata, non valgono assai più di una modesta esercitazione.

A confermare l'interesse suddetto basti ricordare certe fondazioni di motori progettate senza riflesso alle azioni dinamiche, le quali, tosto che sieno soddisfatte certe condizioni, cosidette di risonanza, cioè a dire, di eguaglianza tra periodo dell'azione perturbante ed uno dei loro periodi propri, vibrano, pericolosamente per la loro stabilità e quella del macchinario o, quanto meno, con talvolta insopportabile disturbo dell'esercizio, perdita di potenza per dissipazione d'energia nel suolo stesso e così via dicendo.

Senza enumerare tanti altri esempi, primissimi quelli forniti dall'asismica, rileveremo che, in questa ricerca, ci siamo preoccupati in primo luogo dello studio delle oscillazioni libere intorno ad una configurazione d'equilibrio e quindi della determinazione dei corrispondenti periodi fondamentali, di cui la nozione è notoriamente sufficiente a premunire se non altro dal pericolo gravissimo delle nominate circostanze di risonanza. Indi, passando ai moti forzati, abbiamo considerato con particolare attenzione quelli dovuti alla variabilità dei vincoli. Attenzione per vero giustificata, quando si pensi che è proprio allo studio di siffatti, chiamiamoli così, *forzamenti vincolari*, intesi secondo i criteri della moderna sismologia, che si riducono tutti i problemi dell'asismica.

Deliberatamente abbiamo evitati certi dettagli per non far ricorso a metodi e terminologie troppo proprie della tecnica che, necessariamente, male si inquadrerebbero in questa esposizione a carattere generale.

§ 2. **Equazione dei piccoli moti.** — Sia dunque S un corpo rigido o praticamente tale, e sieno N i vincoli cui esso è sottoposto. Siffatti vincoli li immagineremo costituiti da sistemi elastici qualsivogliono, privi d'inerzia o pressochè, caratterizzabili, per quanto riguarda la capacità a reagire ad uno spostamento del punto terminale P di attacco col solido, mediante gli spostamenti prodotti in direzioni determinate da forze convenientemente scelte. Ed infatti si vede che, ove si prenda riferimento ad un sistema di assi definiti da tre versori $\mathbf{j}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ spiccati da P, quando con e_{ik} si indichi lo spostamento provocato secondo $\mathbf{j}_k$ da una forza unitaria agente secondo $\mathbf{j}_i$, purchè siano noti tutti i $3 \times 3 = 9$ valori di e_{ik} tra loro simmetrici, corrispondenti a $i, k = 1, 2, 3$; il vincolo, per quanto concerne la capacità reattiva terminale è esaurientemente caratterizzato. Poichè evidentemente, se si tratta d'uno spostamento generico $\mathbf{u}$ (di componenti u_i $(i = 1, 2, 3)$ di P) la reazione $\mathbf{R}$ (di componenti R_i) opposta dal vincolo sarà data, in modo immediato, dalle relazioni

$$u_k = \sum_1^3{}_i\, e_{ik} R_i, \qquad (k = 1, 2, 3)$$

ovvero, risolvendole,

$$R_i = \sum_1^3{}_k\, e^{(ik)} u_k, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$e^{(ik)} = e^{(ki)}$ essendo l'elemento reciproco generico, che chiameremo *caratteristico di elasticità*, della matrice di terzo ordine formata con gli *elementi* e_{ik} dianzi definiti.

Quanto alle caratteristiche d'inerzia del corpo S, supporremo determinati: *gli assi principali*, spiccati dal baricentro, caratterizzati con tre versori che chiameremo fondamentali $\mathbf{J}_i$ $(i = 1, 2, 3)$; i momenti di second'ordine A_i ad essi relativi ed infine la massa totale M. Ciò posto, resta ad individuare i parametri del sistema. Trattandosi di piccole oscillazioni, intese nel senso ordinario, assumeremo per questi i tre spostamenti U_1, U_2, U_3, del baricentro O rispettivamente le tre rotazioni U_4, U_5, U_6, di S secondo i tre versori fondamentali sopranominati. Ne scende in tal modo che, se con $\boldsymbol{u}^{(\rho)}$ si indica lo spostamento del generico punto di contatto P_ρ del corpo S col ρ^{imo} tra gli N vincoli, si avrà, per una ben nota relazione di cinematica (¹)

$$\boldsymbol{u}^{(\rho)} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{\omega} \wedge (P_\rho - O) \tag{1}$$

essendo

$$\boldsymbol{U} = \sum_1^3 {}_i U_i \boldsymbol{J}_i, \quad \boldsymbol{\omega} = \sum_1^3 {}_i U_{3+i} \boldsymbol{J}_i.$$

Quindi, ponendo $u_i^{(\rho)} = \boldsymbol{u}^{(\rho)} \times \boldsymbol{j}_i^{(\rho)}$, il potenziale elastico W corrispondente a tutti gli N vincoli sarà

$$W = \frac{1}{2} \sum_1^N {}_\rho \sum_1^3 {}_{ik} e_\rho^{ik} u_i^{(\rho)} u_k^{(\rho)},$$

dunque, come manifestamente si vede, una forma *quadratica* necessariamente *positiva* e *definita*, nei sei parametri U_i, U_{i+3} $(i = 1, 2, 3)$. L'energia cinetica T a sua volta, com'è facile controllare, pel riferimento preso si scrive facilmente

$$2T = M \sum_1^3 {}_i \dot{U}_i^2 + \sum_1^3 {}_i A_i \dot{U}_{i+3}^2.$$

Si à quindi, in assenza di sollecitazioni esterne, quanto occorre per scrivere le equazioni del moto nella seconda forma loro attribuita da LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{U}_i}\right) + \frac{\partial (T + W)}{\partial U_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots 6).$$

Come da queste equazioni differenziali, del second'ordine, lineari ed omogenee, si risalga poi all'equazione delle frequenze è cosa risaputa e non è certo il caso di far richiami, se non al più attraverso qualche esempio espressivo, come faremo tra poco.

Piuttosto rileveremo che, nella circostanza frequente in cui al solido S sia, pel tramite d'un certo vincolo, collegato un punto materiale Q di massa m, le equazioni si possono scrivere ancora con tutta facilità. Basterà aggiungere all'espressione di W il termine w competente al potenziale elastico del vincolo nominato ed all'energia cinetica T il termine addizionale Θ, spettante all'energia cinetica di m.

Convenendo d'indicare all'uopo con $\boldsymbol{k}_i$ tre versori ortogonali spiccati da Q, con V_i le tre componenti dello spostamento $\boldsymbol{V}$ del punto suddetto, se

(¹) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Vol. I (2ª ediz.), pag. 183, Bologna, Zanichelli, 1930.

con $\varepsilon^{(ik)}$ si indicano gli *elementi caratteristici di elasticità* del nuovo vincolo (valutati, fermo restando il solido, dunque immaginando irrigiditi gli altri vincoli) avremo

$$w = \frac{1}{2}\sum_1^3{}_{ik}\varepsilon^{(ik)}v_i v_k$$

dove v_i è manifestamente la componente rispetto a $\boldsymbol{k}_i$ dello spostamento relativo di Q per raffronto ad S, dunque eguale a

$$v_i = V_i - \{ \boldsymbol{U} + \boldsymbol{\omega} \wedge (Q - O) \} \times \boldsymbol{k}_i .$$

Per il termine addizionale Θ dell'energia cinetica T ricaviamo infine

$$\Theta = \frac{1}{2}\, m \sum_1^3{}_i \dot{V}_i^2 .$$

Trattandosi più in generale di ν punti $Q_1, Q_2, \ldots Q_\nu$ siffattamente collegati, avremo, con notazione ovvia, $w = \sum_1^\nu{}_\tau w_\tau$, $\Theta = \sum_1^\nu{}_\tau \Theta_\tau$, dunque, in luogo delle 6 equazioni di prima, $6 + 3\nu$ equazioni nei 6 parametri $U_i (i = 1, 2, \ldots 6)$ di S e nei 3ν parametri $V_i^{(\tau)} (i = 1, 2, 3;\ \tau = 1, 2, \ldots \nu)$ dei ν punti Q_τ.

Questa schematizzazione è notevole; una vasta classe di sistemi vi rientra infatti senza difficoltà. Si pensi ad esempio ai ritti d'una costruzione, sostenenti delle masse ed infissi in una platea (il corpo rigido S) di fondazione, o ad una ruota calettata su un asse flessibile sostenuto, pel tramite di adeguati supporti, da un blocco robusto e pesante.

§ 3. **Distribuzione continua di vincoli. Corpo rigido su suolo elastico.** — Consideriamo ora il nostro sistema appoggiato, secondo una superficie F su di un terreno elastico. Caratterizziamo questa elasticità attribuendo al terreno suddetto la capacità a reagire ad uno spostamento locale $z = z(P)$, misurato secondo il versore $\boldsymbol{n}$ della normale ad F spiccata da un punto P generico, (di cui dF sia l'intorno spostato), secondo la relazione

$$\boldsymbol{n} dR = \boldsymbol{n} C(P) z(P) dF,$$

$C = C(P)$ essendo una costante fisica (la cosidetta *Bettungsziffer* dei tedeschi) specifica di ogni terreno, che potremo considerare variabile o no nel campo F.

Tale legge rende ben evidente il suo carattere *locale*, in quanto la reazione dR è funzione del solo spostamento $z = z(P)$ dell'intorno dF di P, e non dipende in modo alcuno dagli spostamenti vicini o lontani, degli altri punti di F, eventualmente provocati da cause qualsivogliono. Che le cose non procedano proprio così è chiaro sia all'intuizione sia ai lumi delle ordinarie teorie matematiche dei suoli elastici. Comunque conviene accettare codesta schematizzazione, ove si pensi all'uso costante che, forse in mancanza di meglio, certo con qualche profitto, se ne fa in statica.

Convenendo ancora di trascurare l'elasticità laterale del suolo, vale a dire, di ritenere trascurabili gli spostamenti tangenti alla F, passiamo ad applicare senz'altro i risultati prima acquisiti per arrivare all'espressione del potenziale W e dell'energia cinetica T.

Rileviamo anzitutto che, trattandosi di infiniti vincoli, converrà sostituire l'indice ρ con l'indicazione del punto generico P di cui si considera l'intorno dF. Il quale intorno, poichè si fanno intervenire i soli spostamenti nel senso della normate $\boldsymbol{n}$, ove si ponga $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{j}_3(P)$ potrà esser riguardato come un vincolo elastico di cui son nulli, o quanto meno non si fanno intervenire, tutti gli elementi caratteristici $e^{(ik)}$, salvo l'ultimo $e^{(33)}$, evidentemente eguale a CdF. Ad uno spostamento $u_3(P) = u(P)$ (non si considerano le componenti $u_1(P)$ ed $u_2(P)$) corrisponderà un potenziale elastico del vincolo $dW = \frac{1}{2} e^{(33)} u_3^2(P) = \frac{1}{2} u^2(P) CdF$. Quindi, ad uno spostamento generale $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{\omega}$ di S, un potenziale globale

$$W = \frac{1}{2} \int_F C(P) u^2(P) dF$$

essendo, in conformità con la (1)

$$u(P) = \{ \boldsymbol{U} + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O) \} \times \boldsymbol{n}(P).$$

Ovvero, più esplicitamente, indicando con α_1, α_2, α_3 i coseni direttori di $\boldsymbol{n}$, con x_1, x_2, x_3 le coordinate di P rimpetto al sistema fondamentale $\boldsymbol{J}_i$,

$$u(P) = \sum_1^3{}_i U_i \alpha_i + D(U_4, U_5, U_6)$$

con

$$D = D(U_4, U_5, U_6) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ U_4 & U_5 & U_6 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}.$$

Rilevando infine che alla T compete proprio la forma generale prima attribuita, le equazioni del moto assumono l'aspetto

$$M\ddot{U}_i + \int_F \left\{ \sum_1^3{}_k U_k \alpha_k + D \right\} \alpha_i CdF = 0,$$

$$A_i \ddot{U}_{i+3} + \int_F \left\{ \sum_1^3{}_k U_k \alpha_k + D \right\} \frac{\partial D}{\partial U_{i+3}} CdF = 0, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

È questo un sistema di equazioni differenziali del second'ordine, lineari ed omogenee, di cui l'integrale generale si scrive nella forma

$$U_i = \sum_{\alpha=1}^{6} U_i^{(\alpha)} \{ a_\alpha \sin(\lambda_\alpha t) + b_\alpha \cos(\lambda_\alpha t) \}, \tag{2}$$

a_α, b_α essendo costanti arbitrarie d'integrazione, le $U_i^{(\alpha)}$ soluzioni del sistema di equazioni algebriche lineari ed omogenee

$$\begin{aligned} &- MU_i\lambda^2 + \int_F \{ \sum_{k=1}^{3} U_k\alpha_k + D \} \alpha_i C dF = 0, \\ &- A_i U_{i+3}\lambda^2 + \int_F \{ \sum_{k=1}^{3} U_k\alpha_k + D \} \frac{\partial D}{\partial U_{i+3}} C dF = 0, \qquad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{3}$$

corrispondenti a determinati valori λ_α di λ, ottenuti come radici dell'equazione, cosidetta *equazione delle frequenze*, che si ottiene annullando il discriminante del sistema suddetto.

Ma detti valori di λ, chiamati *autovalori*, come risulta dalla (2), danno, a meno del fattore $(2\pi)^{-1}$, l'inverso del periodo di ogni vibrazione di cui l'insieme caratterizza l'integrale U_i. Concettualmente dunque, a meno di una risoluzione d'una equazione algebrica di 6° grado, il problema concernente la determinazione dei periodi propri di vibrazione, si può considerare risoluto.

§ 4. **Un esempio concreto. Blocco paralellepipedo omogeneo poggiato su un suolo elastico.** — Supponiamo che la superficie di contatto si identifichi con la faccia del paralellepipedo $x_3 = \text{cost.}$ e che

$$\int_F C x_i dF = 0, \qquad (i = 1, 2),$$

$$\int_F C x_i x_k dF = 0, \qquad (i, k = 1, 2, \text{ per } i \neq k).$$

Soddisfatte queste condizioni (esprimenti tra l'altro che il baricentro della distribuzione di C su F, o in particolare per $C = \text{cost}$, di F semplicemente, sta sul versore J_3 poichè manifestamente $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$) le (3) diventano

$$-\lambda^2 MU_3 + U_3 \int_F C dF = 0, \quad -\lambda^2 A_1 U_4 + U_4 \int_F C x_2^2 dF = 0,$$

$$-\lambda^2 A_2 U_5 + U_5 \int_F C x_1^2 dF = 0$$

dalle quali si ricava senz'altro

$$\lambda_1^2 = \frac{\int_F C\,dF}{M}, \quad \lambda_2^2 = \frac{\int_F C x_2^2\,dF}{A_1}, \quad \lambda_3^2 = \frac{\int_F C x_1^2\,dF}{A_2}$$

ovvero, indicando con a_1, a_2, a_3 i lati misurati secondo l'ordine dei versori fondamentali, con μ la massa specifica, per C costante,

$$\lambda_1^2 = \frac{C}{a_3\mu}, \quad \lambda_2^2 = C\,\frac{a_2^2}{a_3(a_2^2 + a_3^2)\mu}, \quad \lambda_3^2 = C\,\frac{a_1^2}{a_3(a_1^2 + a_3^2)\mu}.$$

Posto a titolo di esempio numerico che sia $C = 3{,}00\ \mathrm{kgcm}^{-3}$ (corrispondentemente ad un terreno sabbioso) $\mu = \frac{0.0022}{g}\ \mathrm{kgcm}^{-3}$,

$$g = 981\ \mathrm{cmsec}^{-2}, \quad a_1 = 500\ \mathrm{cm}, \quad a_2 = 1000\ \mathrm{cm}, \quad a_3 = 200\ \mathrm{cm},$$

ricordando che la frequenza ν è legata ai valori caratteristici λ dalla relazione $\nu = \frac{\lambda}{2\pi}$, troviamo

$$\nu_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi} = 13{,}02\ \mathrm{sec}^{-1}, \qquad \nu_2 = \frac{\lambda_2}{2\pi} = 12{,}76\ \mathrm{sec}^{-1}, \qquad \nu_3 = \frac{\lambda_3}{2\pi} = 12{,}08\ \mathrm{sec}^{-1}.$$

Ove invece non fosse nullo l'integrale $\int_F C x_2\,dF$, vale a dire, ove il baricentro della distribuzione di C sulla sezione non si trovasse su J_3, ma spostato, sempre però su J_1 pur essendo soddisfatte tutte le altre condizioni di paralellismo tra gli assi, le (3) assumerebbero la forma

$$\left(-\lambda^2 M + \int_F C\,dF\right)U_3' - \left(\int_F C x_2\,dF\right)U_4' = 0$$

$$\left(-\int_F C x_2\,dF\right)U_3' + \left(-\lambda^2 A_1 + \int_F C x_2^2\,dF\right)U_4' = 0$$

$$\left(\lambda^2 A_2 + \int_F C x_1^2\,dF\right)U_5' = 0.$$

Da queste si ricava senza difficoltà,

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{k_1 + \varepsilon}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 + \varepsilon}{2}\right)^2 + \gamma_1^2 - \varepsilon k_1}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{k_2}$$

essendo

$$\varepsilon=\frac{\int_F C dF}{M},\quad k_1=\frac{\int_F Cx_2^2 dF}{A_1},\quad k_2=\frac{\int_F Cx_1^2 dF}{A_2},\quad r_1=\frac{\int_F Cx_2 dF}{\sqrt{MA_1}}.$$

Che i valori qui trovati per λ_1 e λ_2 risultino sempre reali e positivi occorre appena rilevare. Ciò segue dal carattere necessariamente positivo della T e definito della W o, se si vuole, il che è lo stesso, dall' esser in ogni caso $k_1\varepsilon \geq r_1^2$ (¹) dunque

$$\left(\frac{k_1+\varepsilon}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{k_1+\varepsilon}{2}\right)^2 + r_1^2 - \varepsilon k_1 = \left(\frac{k_1-\varepsilon}{2}\right)^2 + r_1^2 \geq 0.$$

Consideriamo ora, come ultima illustrazione, un sistema schematizzabile ad una massa puntiforme m collegata elasticamente ad un blocco rigido poggiato su un suolo elastico.

Che un siffatto sistema abbia interesse è chiaro, pur che si pensi ch' esso costituisce la più naturale — se non la più precisa — rappresentazione schematica d' una ruota fissata su un asse elastico rigidamente unito ad una fondazione a blocco.

Ritenendo pur sempre trascurabili i movimenti U_1, U_2, U_6, e ritenendo che, delle coordinate di Q, due, le ξ_1, ξ_2 sieno nulle, si trova

$$W=\frac{1}{2}\int_F \left\{ U_3 + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ U_4 & U_5 & U_6 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \right\}^2 CdF$$

$$w=\frac{1}{2}\left\{ \varepsilon^{(11)}\left(V_1 - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ U_4 & U_5 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{vmatrix}\right)^2 + \varepsilon^{(22)}\left(V_2 - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ U_4 & U_5 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{vmatrix}\right)^2 + \varepsilon^{(33)}(V_3 - U_3)^2 \right\}$$

e

$$T=\frac{1}{2}\left\{ M\dot{U}_3^2 + \sum_1^3{}_i A_i \dot{U}_{i+3}^2 \right\} + \frac{1}{2}\sum_1^3{}_i m_i \dot{V}_i^2.$$

Ove si ponga quindi, convenendo di scrivere per semplicità formale ε_i (²) in luogo di $\varepsilon^{(ii)}$

$$\rho_1=\int_F Cx_1^2 dF + \varepsilon_1\xi_3^2,\qquad \rho_2=\int_F Cx_2^2 dF + \varepsilon_2\xi_3^2,\qquad \rho_3=\int_F CdF + \varepsilon_3$$

(¹) Questa disuguaglianza altro non esprime che in ogni caso

$$\left(\int_F CdF\right)\left(\int_F Cx_2{}^2 dF\right) \geq \left(\int_F Cx_2 dF\right)^2,$$

il che è un ben ovvio aspetto d' una fondamentale disuguaglianza di SCHWARZ.

(²) Da non confondere con ε_{ii}.

le equazioni di LAGRANGE porgono subito, scrivendo z in luogo di ξ_3,

$$M\ddot{U}_3+\rho_3 U_3-\varepsilon_3 V_3=0,\quad A_1\ddot{U}_4+\rho_2 U_4+\varepsilon_2 z V_2=0$$
$$m\ddot{V}_3+\varepsilon_3 V_3-\varepsilon_3 U_3=0;\quad m\ddot{V}_2+\varepsilon_2 V_2+\varepsilon_2 z U_4=0;$$
$$A_2\ddot{U}_5+\rho_1 U_5-\varepsilon_1 z V_1=0$$
$$m\ddot{V}_1+\varepsilon_1 V_1-\varepsilon_1 z U_5=0.$$

Alla maniera solita si hanno le equazioni secolari, o delle frequenze,

$$\begin{vmatrix}(-M\lambda^2+\rho_3), & -\varepsilon_3\\ -\varepsilon_3, & (-m\lambda^2+\varepsilon_3)\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}(-A_1\lambda^2+\rho_2), & \varepsilon_2 z\\ \varepsilon_2 z & (-m\lambda^2+\varepsilon_2)\end{vmatrix}=0,$$
$$\begin{vmatrix}(-A_2\lambda^2+\varepsilon_1), & -\varepsilon_1 z\\ -\varepsilon_1 z & (-m\lambda^2+\varepsilon_1)\end{vmatrix}=0.$$

Risolvendole si ottengono i 6 valori

$$\lambda_{1,2}=\sqrt{\frac{m\rho_3+M\varepsilon_3}{2Mm}\pm\sqrt{\left(\frac{m\rho_3+M\varepsilon_3}{2Mm}\right)^2-\frac{\varepsilon_3\rho_3-\varepsilon_3^2}{Mm}}}$$
$$\lambda_{3,4}=\sqrt{\frac{m\rho_2+A_1\varepsilon_2}{2A_1 m}\pm\sqrt{\left(\frac{m\rho_2+A_1\varepsilon_2}{2A_1 m}\right)^2-\frac{\varepsilon_2\rho_2-\varepsilon_2^2 z^2}{A_1 m}}}$$
$$\lambda_{5,6}=\sqrt{\frac{m\rho_1+A_2\varepsilon_1}{2A_2 m}\pm\sqrt{\left(\frac{m\rho_1+A_2\varepsilon_1}{2A_2 m}\right)^2-\frac{\varepsilon_1\rho_1-\varepsilon_1^2 z^2}{A_2 m}}}.$$

Osservando appena che necessariamente siffatte radici sono reali e positive, rileveremo che, se con $\varkappa_1$ e $\varkappa_2$ si indicano le frequenze di oscillazione che avrebbero i sistemi S_1 ed S_2 (m col suo vincolo) separati, vale a dire, se si pone

$$\varkappa_1^2=\frac{\int_F C dF}{M},\quad \varkappa_2^2=\frac{\varepsilon_3}{m}$$

le frequenze λ_1, λ_2; ora definite sono esterne all'intervallo $\varkappa_1-\varkappa_2$. E così analogamente si può dire per le λ_3, λ_4; λ_5, λ_6; ove si considerino gli intervalli $\varkappa_3-\varkappa_4$ rispettivamente $\varkappa_5-\varkappa_6$, essendo

$$\varkappa_3^2=\frac{\int_F C x_2^2 dF}{A_1},\quad \varkappa_4^2=\frac{\varepsilon_2}{m},$$
$$\varkappa_5^2=\frac{\int_P C x_1^2 dF}{A_2},\quad \varkappa_6^2=\frac{\varepsilon_1}{m}.$$

Rileveremo che in particolare, se la frequenza della fondazione, poniamo la $\varkappa_1$, è assai piccola per raffronto alla $\varkappa_2$ (del motore), intendendo che sia ε_3 grande per raffronto a CF, m piccolo per raffronto ad M, la superiore delle radici λ_1, λ_2 è

$$\lambda^2 \backsimeq \frac{\varepsilon_3}{m}\left(1+\frac{m}{M}\right)$$

e così se la $\varkappa_3$ è piccola per raffronto alla $\varkappa_4$ ed analogamente la $\varkappa_5$ rispetto alla $\varkappa_6$ si ha, per la maggiore delle λ_3, λ_4; rispettivamente λ_5, λ_6;

$$\lambda^2 \backsimeq \frac{\varepsilon_2}{m}\left(1+\frac{mz^2}{A_1}\right), \quad \lambda^2 \backsimeq \frac{\varepsilon_1}{m}\left(1+\frac{mz^2}{A_2}\right).$$

§ 5. **Moti forzati.** — Abbiamo studiato le oscillazioni libere o spontanee del corpo rigido, resta ora a studiarne il moto forzato, mantenendosi, s'intende, pur sempre nell'ambito dei piccoli movimenti.

In linea generale, in verità, niuna difficoltà si oppone alla costruzione delle equazioni del moto. Infatti, se sul corpo agisce un sistema di forze funzioni del solo tempo t di cui siano $\boldsymbol{R}$ ed $\boldsymbol{M}$ il risultante e rispettivamente il momento risultante, basterà procurarsi l'espressione del potenziale (delle forze) Φ corrispondente allo spostamento rigido (infinitesimo) U, $\boldsymbol{\omega}$ e scrivere nelle equazioni lagrangiane $W+\Phi$ in luogo di W.

Ora troviamo subito per Φ

$$\Phi = -\{(\boldsymbol{R}\times U)+\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{\omega}\}$$

ovvero, indicando con R_i, M_i, $(i=1, 2, 3)$ le componenti di $\boldsymbol{R}$ ed $\boldsymbol{M}$ rispetto ai tre versori fondamentali $\boldsymbol{J}_i$,

$$\Phi = -\sum_{1}^{3}{}_i \{R_i U_i + M_i U_{i+3}\}.$$

Noti i termini perturbanti, l'integrazione delle equazioni, concettualmente, e pei casi più consueti anche formalmente, non presenta certo difficoltà.

A titolo di esempio illustrativo, vogliamo considerare qui la circostanza in cui su un blocco di fondazione per macchine agisca una forza periodica.

Sia dunque, con riflesso ad un blocco del tipo considerato al paragrafo precedente, $R_1=R_2=0$, $R_3=R\sin 2\pi\frac{t}{T}$; con $R=mr\omega^2$, $M_1=M_2=M_3=0$ la forza agente, dovuta, supponiamo, a masse rotanti con periodo T o, se si vuole, con velocità angolare $\omega = \frac{2\pi}{T}$. In tal caso si ha manifestamente

$$\Phi = - R_3 U_3,$$

quindi

$$M \frac{d^2 U_3}{dt^2} + CFU_3 = R_3(t),$$

per il moto secondo U_3. Trascuriamo di scrivere le altre, relative agli altri parametri, non sensibili a siffatta pertubazione, come pure di discutere codesta ben nota equazione.

§ 6. **Forzamenti vincolari.** — Passiamo ora a considerare un tipo di azioni perturbanti notevolissime pei problemi dell'asismica. Vogliamo precisamente alludere all'effetto prodotto da un movimento (rigido) infinitesimale del terreno su cui poggiano, o meglio, sono fissati i vincoli.

Siffatto movimento noi lo immagineremo definito come movimento d'una terna di assi solidale col terreno (terna locale $L(\boldsymbol{K}_1', \boldsymbol{K}_2', \boldsymbol{K}_3')$ rispetto ad una terna fissa (terna geoidica $G(\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2, \boldsymbol{K}_3)$ invariabilmente collegata col geoide terrestre, terna che assumeremo come riferimento meccanico (¹).

Ciò premesso, sempre seguendo il metodo di LAGRANGE, passiamo a determinare l'espressione del potenziale W.

All'uopo basterà rilevare che nella forma

$$W = \frac{1}{2} \sum_{1}^{3}{}_{ik} e^{(ik)} u_i u_k \quad (^2), \tag{5}$$

u_i sta a rappresentare la componente dello spostamento del punto terminale P del vincolo producente deformazione elastica, cioè a dire, la componente dello spostamento effettivo assoluto $\boldsymbol{s}^{(a)}$ meno la componente dello spostamento di trascinamento $\boldsymbol{s}^{(\tau)}$. Dunque, ove il moto infinitesimale della terna L sia definito con due vettori $\boldsymbol{U}^{(\tau)}$ ed $\boldsymbol{\omega}^{(\tau)}$, poichè sarà

$$\boldsymbol{s}^{(\tau)} = \boldsymbol{U}^{(\tau)} + \boldsymbol{\omega}^{(\tau)} \wedge (P - L)$$

dovremo porre $u_i = u_i^{(r)} = \boldsymbol{s}^{(r)} \times \boldsymbol{j}_i$ con $\boldsymbol{s}^{(r)}$ spostamento relativo, (il solo che produce deformazione) dato da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s}^{(r)} = \boldsymbol{s}^{(a)} - \boldsymbol{s}^{(\tau)} &= (\boldsymbol{U}^{(a)} - \boldsymbol{U}^{(\tau)}) + \boldsymbol{\omega}^{(a)} \wedge (P - O) - \boldsymbol{\omega}^{(\tau)} \wedge (P - L) = \\ &= (\boldsymbol{U}^{(a)} - \boldsymbol{U}^{(\tau)}) + (\boldsymbol{\omega}^{(a)} - \boldsymbol{\omega}^{(\tau)}) \wedge (P - O) - \boldsymbol{\omega}^{(\tau)} \wedge (O - L). \end{aligned} \tag{6}$$

(¹) Cfr. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, op. cit., vol. II, parte I, pag. 383 e seguito.

(²) Tralasciamo per semplicità formale la scrittura dell'indice ρ caratterizzante il vincolo, con che la sommazione rispetto ad esso rimane sottintesa.

Quanto all'energia cinetica T, essa resta pur sempre espressa dalla relazione di prima, quando si apponga ai parametri U un indice $^{(a)}$ per maggior chiarezza,

$$2T = M\sum_{1}^{3}{}_i(\dot{U}_i^{(a)})^2 + \sum_{1}^{3}{}_i A_i(\dot{U}_{i+3}^{(a)})^2. \tag{7}$$

Si potrebbe porsi però sotto un altro punto di vista, e precisamente definire come parametri $\boldsymbol{U}^{(r)}$ ed $\boldsymbol{\omega}^{(r)}$, spostamenti di S misurati rispetto alla terna locale L. Allora il potenziale W mantiene ancora la forma (5) con

$$u_i^{(r)} = [\boldsymbol{U}^{(r)} + \boldsymbol{\omega}^{(r)} \wedge (P-O)] \times \boldsymbol{j}_i,$$

mentre nell'espressione (7) dell'energia cinetica, $U_i^{(a)}$ ed $U_{i+3}^{(a)}$ vanno esplicitati nei termini di $U_i^{(r)}$ ed $U_{i+3}^{(r)}$, secondo le relazioni ovvie

$$U_i^{(a)} = [\boldsymbol{U}^{(r)} + \boldsymbol{U}^{(\tau)} + \boldsymbol{\omega}^{(\tau)} \wedge (O-L)] \times \boldsymbol{J}_i$$

$$U_{i+3}^{(a)} = (\boldsymbol{\omega}^{(r)} + \boldsymbol{\omega}^{(\tau)}) \times \boldsymbol{J}_i$$

ovvero, con evidente posizione,

$$U_{i+3}^{(a)} = U_{i+3}^{(r)} + U_{i+3}^{(\tau)}. \qquad (i=1,2,3)$$

Comunque sieno formate le equazioni, bisogna star bene attenti che, nel primo caso, ad integrazione fatta, i vettori $\boldsymbol{U}^{(a)}$ e $\boldsymbol{\omega}^{(a)}$ definiscono il moto assoluto del sistema rispetto alla terna geoidica, talchè per avere quello relativo, $\boldsymbol{U}^{(r)}$ ed $\boldsymbol{\omega}^{(r)}$ *che è quello che può interessare ove si voglia valutare la costrizione dei vincoli*, bisogna porre

$$\boldsymbol{U}^{(r)} = \boldsymbol{U}^{(a)} - \boldsymbol{U}^{(\tau)} - \boldsymbol{\omega}^{(\tau)} \wedge (O-L); \quad \boldsymbol{\omega}^{(r)} = \boldsymbol{\omega}^{(a)} - \boldsymbol{\omega}^{(\tau)}.$$

Nel secondo caso invece, $\boldsymbol{U}^{(r)}$ ed $\boldsymbol{\omega}^{(r)}$ forniscono il moto relativo, rispetto alla terna locale, dunque direttamente gli elementi dello spostamento producente deformazione e quindi cimento dei vincoli.

Come primo e più semplice esempio consideriamo un punto materiale di massa M (ultima riduzione del corpo rigido S) sorretto da un'asta elastica infissa nel suolo. Assumiamo gli assi della terna locale L paralleli agli assi fondamentali $\boldsymbol{J}$ spiccati da M, assi $\boldsymbol{J}$ che riterremo coincidenti con gli assi di riferimento $\boldsymbol{j}$ dell'unico vincolo.

Scegliendo la prima impostazione, quindi attribuendo il significato di parametri agli spostamenti assoluti $U_i^{(a)}$ avremo anzitutto,

$$2T = M\sum_{1}^{3}{}_i(\dot{U}_i^{(a)})^2.$$

Quanto al potenziale $W = \frac{1}{2}\sum_{1}^{3}{}_{i,k} e^{(ik)} u_i^{(r)} u_k^{(r)}$ rileviamo in primo luogo che, per la (6), essendo inutile, trattandosi di un punto, parlare di $\boldsymbol{\omega}$, sarà

$$u_i^{(r)} = \boldsymbol{s}^{(r)} \times \boldsymbol{j}_i$$

dove, poichè $P = O$,

$$\boldsymbol{s}^{(r)} = \boldsymbol{s}^{(a)} - \boldsymbol{s}^{(\tau)} = \boldsymbol{U}^{(a)} - \boldsymbol{U}^{(\tau)} - \boldsymbol{\omega}^{(\tau)} \wedge (O - L).$$

Ma $O - L = x_3 \boldsymbol{J}_3$, $x_1 = x_2 = 0$; avremo quindi in forma più esplicita,

$$u_1^{(r)} = U_1^{(a)} - U_1^{(\tau)} - U_4^{(\tau)} x_3, \quad u_2^{(r)} = U_2^{(a)} - U_2^{(\tau)} - U_5^{(\tau)} x_3, \quad u_3^{(r)} = U_3^{(a)} - U_3^{(\tau)}.$$

Dunque, se in tal caso $e^{(ik)} \equiv 0$ per $i \neq k$, sarà $\dfrac{\partial W}{\partial U_i^{(a)}} = e^{(ii)} u_i^{(r)}$, $(i = 1, 2, 3)$
e le equazioni lagrangiane diventano in conformità

$$M \ddot{U}_i^{(a)} + e^{(ii)} \cdot u_i^{(r)} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

con le $u_i^{(r)}$ dianzi definite.

Integrando siffatte eqnazioni, si arriverà alle funzioni $U_i^{(a)} = U_i^{(a)}(t)$ caratterizzanti le elongazioni elastiche effettive assolute del punto materiale.

Ove ci si ponga a considerare il secondo punto di vista e si assumano dunque come parametri le $U_i^{(r)}$, si avrebbe

$$\begin{aligned} 2T &= M \sum_1^3{}_i \{ (\dot{\boldsymbol{U}}^{(r)} + \dot{\boldsymbol{U}}^{(\tau)} + \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(\tau)} \wedge (O - L)) \times \boldsymbol{J}_i \}^2 \\ &= M \sum_1^3{}_i (\dot{U}_i^{(a)})^2 \end{aligned}$$

e, con le stesse ipotesi di prima,

$$2W = \sum_1^3{}_i e^{(ii)} [U_i^{(r)}]^2$$

sempre perchè $P = O$, $\boldsymbol{J}_i = \boldsymbol{j}_i$ e quindi $U_i^{(r)} = u_i^{(r)}$.

Le equazioni nelle $U_i^{(r)}$ diventano

$$\begin{aligned} &M(\ddot{U}_1^{(r)} + \ddot{U}_1^{(\tau)} + \ddot{U}_4^{(\tau)} x_3) + e^{(11)} U_1^{(r)} = 0, \\ &M(\ddot{U}_2^{(r)} + \ddot{U}_2^{(\tau)} + \ddot{U}_5^{(\tau)} x_3) + e^{(22)} U_2^{(r)} = 0, \\ &M(\ddot{U}_3^{(r)} + \ddot{U}_3^{(\tau)}) \qquad\qquad + e^{(33)} U_3^{(r)} = 0. \end{aligned}$$

Che queste sieno equivalenti alle precedenti è appena necessario osservare. Basta infatti sostituire in esse $U_i^{[r]} = U_i^{(a)} - U_i^{(\tau)} - \boldsymbol{\omega}^{(\tau)} \wedge (O - L) \times \boldsymbol{J}_i$, per ritrovarle immediatamente.

§ 7. **Spostamento massimo di un punto generico del sistema. Costrizione massima di un vincolo.** — Qui giunti osserveremo che, almeno in generale, nei problemi pratici, più che la descrizione istante per istante del moto interessa conoscerne le elongazioni massime onde desumere da quelle criterî per l'effettivo cimento dei vincoli.

Tale intento si persegue pel tramite di una formula limite che abbiamo assegnata per lo spostamento di un corpo elastico vibrante (¹), del tipo

$$[U_i]_{\max} \leq \left(1 + \sqrt{\frac{\Pi_d}{P_d}}\right)\sqrt{2S^{(ii)}P_d} \tag{8}$$

con

$$P_d = \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{E}{P_s}} \right\}^2 P_s .$$

In questa, E definisce l'energia totale del sistema all'inizio del moto, P_s l'energia potenziale elastica sotto l'azione dei carichi statici, $S^{(ii)}$ lo spostamento in direzione i prodotto da una forza unitaria agente nella stessa direzione, Π_d infine è una espressione che in generale, ove con X_i si indichino le componenti lagrangiane della sollecitazione attiva su S, è data dalla relazione

$$\Pi_d = \frac{t}{2}\int_0^t \sum_1^6{}_{ik} b^{(ik)} X_i X_k dt,$$

i coefficienti $b^{(ik)}$ essendo gli elementi reciproci degli elementi b_{ik}, spettanti all'espressione dell'energia cinetica che, per un sistema a 6 gradi di libertà, scriveremo

$$2T = \sum_1^6{}_{ik} b_{ik} \dot{U}_i \dot{U}_k .$$

Nel caso nostro dunque, mancando all'espressione di T i termini rettangoli, $b^{(ii)} = \frac{1}{M}$ per $i = 1, 2, 3$, $b^{(ii)} = \frac{1}{A_i}$ per $i = 4, 5, 6$. Per cui in particolare, per $P_s = E = 0$, si avrà, caratterizzando le componenti lagrangiane della sollecitazione attiva con R_i rispettivamente M_i

$$[U_i]_{\max} \leq \sqrt{S^{(ii)} t \int_0^t \sum_1^3{}_i \left(\frac{R_i^2}{M} + \frac{M_i^2}{A_i}\right) dt}$$

(¹) G. KRALL, *Limitazioni superiori per lo spostamento dinamico.* « Rend. R. Accademia dei Lincei », vol. IX, serie 6ª, I sem., fasc. 2, Roma 1929.

o, trattandosi di una sollecitazione impulsiva di cui siano **R** ed **M** [1] il risultante ed il momento risultante degli impulsi,

$$[U_i]_{\max} \leq \sqrt{S^{(ii)} \sum_1^3 \left(\frac{\mathrm{R}_i^2}{M} + \frac{\mathrm{M}_i^2}{A_i}\right)}. \tag{9}$$

Che la nozione dello spostamento possa far risalire alla nozione del cimento del vincolo è chiaro; comunque, a titolo d'illustrazione, vogliamo considerare brevemente un esempio.

Una piastra rigida poggia su un terreno elastico. Da una certa altezza H cade un corpo pesante, schematizzato ad un punto, di massa m.

Si richiede una limitazione per la pressione specifica σ sul terreno in un punto qualunque.

Passando ad applicare la (7), se rispetto ai vettori $\boldsymbol{J}_1$, $\boldsymbol{J}_2$ (orientati nel piano della piastra) indichiamo con ξ_1, ξ_2 le coordinate del punto battuto, avremo

$$\mathrm{R}_1 = 0, \quad \mathrm{R}_2 = 0, \quad \mathrm{R}_3 = mv_0, \quad v_0 = \sqrt{2Hg},$$
$$\mathrm{M}_1 = mv_0\xi_2, \quad \mathrm{M}_2 = -mv_0\xi_1, \quad \mathrm{M}_3 = 0.$$

Se la massa della piastra è uniformemente distribuita e la superficie dl contatto F col terreno è piana, l'energia iniziale E sarà uguale al valore negativo del potenziale elastico P_s del terreno, $P_s = \frac{1}{2}\frac{(Mg)^2}{FC}$, e quindi $P_d = P_s$. Infine, se con $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ si indicano le coordinate del punto sotto cui si vuol valutare la pressione massima, sarà d'uopo procurarsi il termine $S^{33}(Q)$. Con facili considerazioni si trova, ove i versori $\boldsymbol{J}_1$, $\boldsymbol{J}_2$ coincidano con gli assi principali della distribuzione di C su F,

$$S^{(33)} = \frac{\bar{x}_1^2}{\alpha} + \frac{\bar{x}_2^2}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$$

essendo

$$\alpha = \int_F Cx_1^2 dx_1 dx_2, \quad \beta = \int_F Cx_2^2 dx_1 dx_2, \quad \gamma = \int_F C dx_1 dx_2.$$

---

[1] Per il risultante, il momento risultante e rispettive componenti di sollecitazioni impulsive usiamo il carattere ritto (**R** ed **M**) onde evitare equivoci con enti analoghi corrispondenti a sollecitazioni esterne ordinarie.

Avendosi infine $\sigma_{\max} = (U_3)_{\max} C$, otteniamo

$$\sigma_{\max} \leq C(U_3)_d =$$

$$= C\left\{1 + \sqrt{\frac{R_3^2}{2P_s}\left(\frac{\xi_1^2}{A_1} + \frac{\xi_2^2}{A_2} + \frac{1}{M}\right)}\right\}\sqrt{2\left(\frac{\bar{x}_1^2}{\alpha} + \frac{\bar{x}_2^2}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)P_s}.$$

Ed in particolare, ove sia $\xi_1 = \xi_2 = 0$, $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$,

$$R_3 = m\sqrt{2Hg}, \quad P_s = \frac{(Mg)^2}{2CF}, \quad \frac{Mg}{F} = \sigma_0, \quad \frac{m}{M} = \mu$$

$$\sigma = \sigma_0\left(1 + \mu\sqrt{\frac{2HCF}{Mg}}\right).$$

Come ultimo esempio, consideriamo il caso in cui la terna locale venga *istantaneamente* posta in movimento con velocità $\dot{\boldsymbol{U}}^{(\tau)}$ ed $\dot{\boldsymbol{\omega}}^{(\tau)}$. Si tratta di determinare lo spostamento relativo massimo d'un punto generico del corpo S.

Convenendo di adottare la (9) basterà procurarsi l'espressione della costrizione Π_d; il che riesce purchè sieno note le componenti della sollecitazione impulsiva applicata ad S.

Queste si hanno facilmente, quando si applichino le equazioni di Lagrange per il moto impulsivo, le quali, con terminologia nota si scrivono [1]

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{U}_i^{(r)}}\right)_+ - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{U}_i^{(r)}}\right)_- = \begin{cases} R_i & \text{per } i = 1, 2, 3, \\ M_i & \text{per } i = 4, 5, 6. \end{cases}$$

Nel caso nostro, con riflesso alla (7) poichè supponiamo il sistema, prima della sollecitazione impulsiva, in quiete, relativa ed assoluta, avremo senz'altro, convenendo di porre $\boldsymbol{J}_i \times \boldsymbol{K}_k' = \alpha_{ik}$, $(O - L) \times \boldsymbol{K}_k' = x_k$, ed infine

$$\mathfrak{U}_k^{(r)} = \boldsymbol{U}^{(\tau)} \times \boldsymbol{K}_k', \quad \mathfrak{U}_{k+3}^{(\tau)} = \boldsymbol{\omega}^{(\tau)} \times \boldsymbol{K}_k',$$

$$-M\left\{\sum_1^3{}_k \alpha_{ik} \dot{\mathfrak{U}}_k^{(\tau)} + \Delta_i\right\} = R_i, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$-A_i\left\{\sum_1^3 \dot{\mathfrak{U}}_{k+3}^{(\tau)} \alpha_{ik}\right\} = M_i, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

essendo

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \alpha_{i3} \\ \dot{\mathfrak{U}}_4^{(\tau)} & \dot{\mathfrak{U}}_5^{(\tau)} & \dot{\mathfrak{U}}_6^{(\tau)} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

(1) Cfr. Levi-Civita e U. Amaldi, op. cit., vol. II, parte II, pag. 630-32.

e quindi, con queste specificazioni,

$$\Pi_d = \frac{1}{2}\sum_1^3 \left\{ \frac{\mathrm{R}_i^2}{M} + \frac{\mathrm{M}_i^2}{A_i} \right\}.$$

In particolare, pel sistema, punto materiale sostenuto da un'asta, posto

$$\dot{\mathfrak{U}}_2^{(\tau)} = \dot{\mathfrak{U}}_3^{(\tau)} = 0, \quad \dot{\mathfrak{U}}_4^{(\tau)} = \dot{\mathfrak{U}}_5^{(\tau)} = \dot{\mathfrak{U}}_6^{(\tau)} = 0$$
$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = h, \quad \alpha_{33} = 1$$

essendo, ove con E e Θ si indichi il modulo d'elasticità rispettivamente il momento di inerzia della sezione,

$$S_{(P)}^{(11)} = \frac{h^3}{3E\Theta},$$

e

$$\Pi_d = \frac{1}{2} M(\dot{\mathfrak{U}}_1^{(\tau)})^2$$

si trova

$$[U_1]_{\max} \leq \dot{\mathfrak{U}}_1^{(\tau)} \sqrt{\frac{Mh^3}{3E\Theta}}$$

e per il momento flettente $\mathfrak{M}$ alla base dell'asta, in questo caso,

$$\mathfrak{M} \leq \dot{\mathfrak{U}}_1^{(\tau)} \sqrt{\frac{3E\Theta M}{h}},$$

la qual relazione, s'intende, va considerata soltanto come una limitazione superiore.

Sull'integrazione delle equazioni elettromagnetiche di Maxwell-Hertz.

Memoria di ANGELO TONOLO (a Padova).

Sunto. - *In questo lavoro l'A. risolve il problema seguente. Siano assegnate:* a) *per ogni istante di tempo le forze elettriche e magnetiche in ogni punto di una superficie chiusa fissa o mobile in un campo elettromagnetico;* b) *nell'istante iniziale queste stesse forze in ogni punto del campo da essa racchiuso.*

Si domanda l'univoca determinazione delle forze nei punti interni alla superficie e in ogni istante di tempo.

Nel caso della superficie fissa le formule finali mostrano che nei mezzi non assorbenti sono sufficienti soltanto i dati a) *per la risoluzione del problema, mentre nei mezzi di natura qualsivoglia sono richiesti anche i dati* b).

Le ragioni che mi hanno spinto alla pubblicazione di questa ricerca, il criterio direttivo del metodo che ho seguito per l'integrazione delle equazioni di MAXWELL-HERTZ dell'elettrodinamica dei corpi in riposo, lo studio riassuntivo di qualche caso particolare, sono stati esposti in nna Nota preventiva dei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei » [vol. X, serie 6ª, 2° sem., (1929)], che ha il medesimo titolo della presente Memoria. Ritengo pertanto opportuno entrare subito in argomento.

PRELIMINARI

In un campo S omogeneo, isotropo, in riposo, in cui avvengono fenomeni elettromagnetici, indichiamo con $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ la forza elettrica e la forza magnetica in un punto di S di coordinate cartesiane ortogonali ξ, η, ζ e all'istante di tempo τ. Denotiamo con ε, λ, μ, c rispettivamente il potere induttore specifico, la conducibilità elettrica, la permeabilità magnetica del campo, la velocità della luce nell'etere. Infine chiamiamo $\mathfrak{k}$ la densità delle correnti di convezione.

Le equazioni di MAXWELL-HERTZ dell'elettrodinamica dei corpi in riposo sono le seguenti:

$$
\text{(I)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
& c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \tau} + 4\pi\lambda \mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{k} \\
& c \operatorname{rot} \mathfrak{E} = - \mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \tau} \\
& \operatorname{div} \mathfrak{E} = \overset{*}{\rho_e} \\
& \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Per il nostro scopo è essenziale ricavare dalle (I) due equazioni vettoriali, ad una delle quali soddisfa la forza elettrica, e all'altra la forza magnetica. Per avere queste equazioni nella forma più adatta alla loro integrazione col metodo VOLTERRA-TEDONE che in seguito esporremo, cominciamo ad eseguire nelle (I) il cambiamento di variabili indipendenti

$$
\text{(1)} \qquad \xi = c\sqrt{\varepsilon\mu}\, x \quad \eta = c\sqrt{\varepsilon\mu}\, y \quad \zeta = c\sqrt{\varepsilon\mu}\, z \quad \tau = \varepsilon\mu t,
$$

e di funzioni

$$
\text{(2)} \qquad \mathfrak{E} = e^{-2\pi\lambda\mu t} \boldsymbol{E}, \quad \mathfrak{H} = e^{-2\pi\lambda\mu t} \boldsymbol{H}.
$$

Le equazioni (I) si cambiano allora nelle altre:

$$
\text{(II)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + 2\pi\lambda\mu \boldsymbol{E} + 4\pi\mu \boldsymbol{k} \\
& \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = - \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + 2\pi\lambda\mu \boldsymbol{H} \\
& \operatorname{div} \boldsymbol{E} = \rho_e \\
& \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

avendo posto:

$$
\text{(3)} \qquad \boldsymbol{k} = e^{2\pi\lambda\mu t} \mathfrak{k}, \quad \rho_e = c\sqrt{\varepsilon\mu}\, e^{2\pi\lambda\mu t} \overset{*}{\rho_e}.
$$

Scriviamo ora l'equazione cui soddisfa la funzione $\boldsymbol{E}$. Dalla seconda equazione del gruppo (II), ricaviamo:

$$
\text{(4)} \qquad \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} + 2\pi\lambda\mu \operatorname{rot} \boldsymbol{H}.
$$

Il primo membro della (4) vale notoriamente

$$
\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{E} - \underset{2}{\Delta} \boldsymbol{E}),
$$

ovvero, per la terza equazione del sistema (II),

$$
\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\operatorname{grad} \rho_e - \underset{2}{\Delta} \boldsymbol{E}),
$$

intendendo che il $\underset{2}{\Delta}$ si riferisca soltanto alle coordinate spaziali x, y, z.

Il secondo membro della (4), in forza della prima equazione del gruppo (II), è uguale a

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left[-\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}+2\pi\lambda\mu\boldsymbol{E}+4\pi\mu\boldsymbol{k}\right\}+2\pi\lambda\mu\left\{\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}+2\pi\lambda\mu\boldsymbol{E}+4\pi\mu\boldsymbol{k}\right\}\right].$$

Si ottiene pertanto l' equazione vettoriale nella sola funzione $\boldsymbol{E}$,

$$\text{(III)}\qquad \underset{2}{\Delta}\boldsymbol{E}-\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}+\alpha^2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{X},$$

avendo posto:

$$\text{(5)}\qquad \boldsymbol{X}=4\pi\mu\frac{\partial\boldsymbol{k}}{\partial t}-8\lambda\pi^2\mu^2\boldsymbol{k}+\operatorname{grad}\rho_e,\qquad \alpha=2\pi\lambda\mu.$$

Procedendo in modo analogo, si ottiene l' equazione vettoriale nella sola funzione $\boldsymbol{H}$,

$$\text{(IV)}\qquad \underset{2}{\Delta}\boldsymbol{H}-\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}+\alpha^2\boldsymbol{H}=\boldsymbol{Y},$$

dove:

$$\text{(6)}\qquad \boldsymbol{Y}=-4\pi\sqrt{\varepsilon\mu}\operatorname{rot}\boldsymbol{k}.$$

CAPITOLO PRIMO

Enunciato del problema generale e sua risoluzione.

1. **Enunciato del problema generale.** — Nel campo S si consideri una superficie σ chiusa fissa, o variabile col tempo. Siano assegnati:

a) per ogni istante di tempo i valori delle componenti delle forze elettriche e magnetiche in ogni punto della superficie, in modo da soddisfare a due delle otto equazioni scalari del sistema (I) [1];

[1] Questa condizione è necessaria per la seguente ragione: Sia P un punto di σ, e si assuma come asse delle ζ la normale positiva in P a σ; con ciò gli altri due assi ξ, η saranno situati sul piano tangente in P.

Fra le otto equazioni scalari del sistema (I), soltanto le due seguenti

$$\varepsilon\frac{\partial\mathfrak{E}_\zeta}{\partial\tau}=c\left(\frac{\partial\mathfrak{H}_\eta}{\partial\xi}-\frac{\partial\mathfrak{H}_\xi}{\partial\eta}\right)-4\pi\lambda\mathfrak{E}_\zeta-4\pi\mathfrak{k}_\zeta$$

$$-\mu\frac{\partial\mathfrak{H}_\zeta}{\partial\tau}=c\left(\frac{\partial\mathfrak{E}_\eta}{\partial\xi}-\frac{\partial\mathfrak{E}_\xi}{\partial\eta}\right),$$

contengono derivate tangenziali, e devono perciò essere soddisfatte identicamente dai valori assegnati sopra σ delle componenti delle forze elettriche e magnetiche.

b) nell'istante iniziale i valori di queste componenti nei punti interni alla superficie.

Si domanda l'univoca determinazione di queste componenti nello spazio racchiuso da σ in qualunque istante di tempo.

Osserviamo che in forza delle relazioni (2) le ipotesi *a)*, *b)* ci fanno conoscere le funzioni $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ in qualunque istante di tempo nei punti della superficie σ, e nell'istante iniziale nei punti dello spazio da essa racchiuso. Determinate poi queste funzioni in qualunque istante nei punti interni alla superficie, le (2) stesse ci daranno ivi in ogni tempo il valore del campo elettromagnetico.

2. **Espressione delle derivate spaziali di E_x nei punti della superficie.** Sia

$$\psi(x, y, z, t) = 0$$

l'equazione della superficie σ: prendiamone un pezzo per cui valga la rappresentazione

$$z = z(x, y, t),$$

e poniamo

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Su questa porzione di σ, la componente $E_u(x, y, z, t)$ $(u = x, y, z)$ del vettore $\boldsymbol{E}$, diviene la funzione $E_u[x, y, z(x, y, t), t]$ la quale è conosciuta per ipotesi in ogni istante di tempo. Si consideri allora il sistema di nove equazioni:

$$(7) \quad \frac{dE_x}{dx} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} p, \qquad (8) \quad \frac{dE_x}{dy} = \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_x}{\partial z} q,$$

$$(9) \quad \frac{dE_y}{dx} = \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial z} p, \qquad (10) \quad \frac{dE_y}{dy} = \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z} q,$$

$$(11) \quad \frac{dE_z}{dx} = \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} p, \qquad (12) \quad \frac{dE_z}{dy} = \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} q,$$

$$(13) \qquad \frac{\partial H_x}{\partial t} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}\right) + 2\pi\lambda\mu H_x,$$

$$(14) \qquad \frac{\partial H_y}{\partial t} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) + 2\pi\lambda\mu H_y,$$

$$(15) \qquad \frac{\partial H_z}{\partial t} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}\right) + 2\pi\lambda\mu H_z.$$

In queste equazioni, col simbolo $\frac{dE_u}{dx}$, $\frac{dE_u}{dy}$ intendiamo le derivate eseguite rispetto alle variabili x, y quando si pensa che queste variabili figurano nella funzione E_u sia esplicitamente, sia per il tramite della z.

Dimostriamo che nell'ipotesi $a)$ i valori delle derivate prime spaziali di $\boldsymbol{E}$ e di $\boldsymbol{H}$ sono pure conosciuti nei punti della superficie σ. Facciamo, per fissare le idee, il calcolo per le derivate della E_x. Sottraendo la (8) dalla (9), e tenendo presente la (15), si ottiene:

$$\frac{dE_y}{dx}-\frac{dE_x}{dy}=\frac{\partial E_y}{\partial z}p-\frac{\partial E_x}{\partial z}q+2\pi\lambda\mu\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H_z-\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\partial H_z}{\partial t}. \tag{16}$$

Sommando le (7), (10) e ricordando che

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=\rho_e,$$

si ricava:

$$\frac{dE_x}{dx}+\frac{dE_y}{dy}=\rho_e-\frac{\partial E_z}{\partial z}+\frac{\partial E_x}{\partial z}p+\frac{\partial E_y}{\partial z}q. \tag{17}$$

Eliminando dalle (11), (14) la $\frac{\partial E_z}{\partial x}$, si trova:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{dE_z}{dx}-\frac{\partial H_y}{\partial t}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}+\frac{\partial E_z}{\partial z}p\right)-2\pi\lambda\mu H_y. \tag{18}$$

Moltiplicando la (17) per $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,p$, e sommandola poi con la (18), si ha:

$$\begin{aligned}\left(\frac{dE_x}{dx}+\frac{dE_y}{dy}\right)p+\frac{dE_z}{dx}-\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\partial H_y}{\partial t}&=\\ =\rho_e p+\frac{\partial E_x}{\partial z}+\frac{\partial E_x}{\partial z}p^2+\frac{\partial E_y}{\partial z}pq-2\pi\lambda\mu\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H_y&.\end{aligned} \tag{19}$$

Finalmente, eliminando da questa e dalla (17) la $\frac{\partial E_y}{\partial z}$, si perviene alla equazione:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial z}=\frac{1}{1+p^2+q^2}&\left[\left(\frac{dE_x}{dx}+\frac{dE_y}{dy}\right)p+\left(\frac{dE_x}{dy}-\frac{dE_y}{dx}\right)q\right.\\ &\left.+\frac{dE_z}{dx}+2\pi\lambda\mu\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(H_y+qH_z)-\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(\frac{\partial H_y}{\partial t}+q\frac{\partial H_z}{\partial t}\right)-\rho_e p\right].\end{aligned} \tag{20}$$

Abbiamo ancora:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{dE_x}{dy} - \frac{\partial E_x}{\partial z} q = \frac{dE_x}{dy} - \frac{q}{1+p^2+q^2}\left[\left(\frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy}\right)p \right. \tag{21}$$

$$+\left(\frac{dE_x}{dy} - \frac{dE_y}{dx}\right)q + \frac{dE_z}{dx} + 2\pi\lambda\mu\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(H_y + qH_z)$$

$$\left. - \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(\frac{\partial H_y}{\partial t} + q\frac{\partial H_z}{\partial t}\right) - \rho_e p\right],$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{dE_x}{dx} - \frac{\partial E_x}{\partial z} p = \frac{dE_x}{dx} - \frac{p}{1+p^2+q^2}\left[\left(\frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy}\right)p \right. \tag{22}$$

$$+\left(\frac{dE_x}{dy} - \frac{dE_y}{dx}\right)q + \frac{dE_z}{dx} + 2\pi\lambda\mu\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(H_y + qH_z)$$

$$\left. - \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(\frac{\partial H_y}{\partial t} + q\frac{\partial H_z}{\partial t}\right) - \rho_e p\right].$$

I secondi membri delle formule (20), (21), (22) contengono quantità che sono tutte note nei punti della superficie e per ogni istante di tempo. Il nostro asserto è quindi provato.

Introduciamo ora i coseni direttori $\cos nx$, $\cos ny$, $\cos nz$ della normale in un punto della superficie vôlta verso lo spazio da essa racchiuso, e moltiplichiamo le (20), (21), (22) rispettivamente per $\cos nz$, $\cos ny$, $\cos nx$; sommando le equazioni così ottenute, si trova, dopo ovvie semplificazioni,

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial E_x}{\partial y}\cos ny + \frac{\partial E_x}{\partial z}\cos nz =$$

$$= \frac{dE_y}{dx}\cos ny + \frac{dE_z}{dx}\cos nz - \frac{dE_y}{dy}\cos nx +$$

$$+\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left\{\frac{\partial H_z}{\partial t}\cos ny - \frac{\partial H_y}{\partial t}\cos nz + 2\pi\lambda\mu(H_y\cos nz - H_z\cos ny)\right\} + \rho_e\cos nx.$$

Per una trasformazione d'integrali che dovremo fare al numero seguente, conviene dare un'altra forma alla espressione precedente della derivata normale. Questa si ottiene surrogando le derivate totali $\frac{dE_y}{dx}$, $\frac{dE_y}{dy}$, $\frac{dE_z}{dx}$ con i secondi membri delle (9), (10), (11). Dopo semplici riduzioni, si ricava:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial E_x}{\partial y}\cos ny + \frac{\partial E_x}{\partial z}\cos nz = \tag{23}$$

$$= \frac{\partial E_y}{\partial x}\cos ny - \frac{\partial E_y}{\partial y}\cos nx + \frac{\partial E_z}{\partial x}\cos nz - \frac{\partial E_z}{\partial z}\cos nx +$$

$$+\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left\{\frac{\partial H_z}{\partial t}\cos ny - \frac{\partial H_y}{\partial t}\cos nz + 2\pi\lambda\mu(H_y\cos nz - H_z\cos ny)\right\} + \rho_e\cos nx.$$

Noi abbiamo supposto per la deduzione della formula (23) di aver preso una porzione di superficie σ di equazione $z = z(x, y, t)$. Importa notare che questa espressione è valevole in ogni caso; basta infatti osservare che la (23) si può anche ottenere usufruendo delle sole equazioni di MAXWELL-HERTZ.

3. **Integrazione dell'equazione** $\underset{2}{\Delta} E_x - \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \alpha^2 E_x = X_x$ **col metodo di Volterra-Tedone.** — L'equazione

$$\psi(x, y, z, t) = 0$$

della nostra superficie, è l'equazione di una varietà a tre dimensioni dello spazio lineare a quattro dimensioni, nel quale il tempo t e le variabili x, y, z dello spazio fisico, indicano le coordinate cartesiane ortogonali dei suoi punti.

Questa varietà, che noi chiameremo Σ_1, nel procedimento d'integrazione che qui verrà esposto, è obbligata a soddisfare certe condizioni restrittive.

Queste, tradotte in linguaggio ordinario, fanno sì che la superficie σ non possa muoversi in modo qualsivoglia nello spazio fisico. Ne consegue, che per poter assumere come valori delle forze elettromagnetiche quelli che qui daremo, e con i quali intendiamo di risolvere la questione proposta, occorrerà esaminare se le ipotesi cinematiche che presiedono alla mobilità di σ sono tali per cui la corrispondente varietà Σ_1 ottempera alle condizioni restrittive sopradette. Questo premesso, passiamo all'integrazione della equazione

$$\text{(V)} \qquad \underset{2}{\Delta} E_x - \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \alpha^2 E_x = X_x .$$

La varietà Σ_1, ove non si riduca ad una porzione di varietà cilindrica con le generatrici parallele all'asse delle t (1), sia incontrata al più in un punto da ogni parallela a quest'asse.

Fissato un punto $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$, si consideri l'ipercono caratteristico C

$$\text{(24)} \qquad t_1 - t = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2} = r,$$

il quale stacchi sulla varietà Σ_1 una porzione finita Σ. Per fissare le idee supporremo che nella parte di spazio limitata da C e da Σ, che diremo S_4, sia sempre $t_1 \geq t$, e $t_1 - t \geq r$.

Posto

$$\text{(25)} \qquad \rho = \alpha \sqrt{(t_1 - t)^2 - r^2},$$

(1) Se la superficie σ è immobile nello spazio fisico, la corrispondente varietà Σ_1 è proprio una varietà cilindrica le cui generatrici sono parallele all'asse delle t,

si costruisca la funzione

$$\varphi_1 = \left(\frac{t_1 - t}{r} - 1\right)\frac{I_1(\rho)}{\rho}, \tag{26}$$

dove $I_1(\rho)$ è la funzione di BESSEL di primo ordine dell'argomento ρ.

Dallo spazio S_4 togliamo quella porzione racchiusa dalla varietà cilindrica Γ di equazione

$$\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2} = \varepsilon, \tag{27}$$

ε essendo una costante che poi faremo tendere a zero. Diciamo Σ' ciò che resta di Σ quando venga tolta quella parte che vi stacca la varietà Γ, e sia infine S_4' quella porzione di spazio S_4 limitata da Σ', C, Γ. In questa regione la funzione φ_1 è regolare e soddisfa all'equazione [1]

$$\Delta_2 \varphi_1 - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + \alpha^2 \varphi_1 = 0.$$

Applichiamo il teorema di reciprocità all'equazione (V) e alle funzioni E_x, φ_1 nello spazio S_4', assumendo come direzione positiva della normale in un punto del contorno di S_4' quella che entra in questo spazio. Abbiamo:

$$\int_{C+\Gamma+\Sigma'} (E_x D\varphi_1 - \varphi_1 DE_x) d\Sigma = \int_{S_4'} \varphi_1 X_x dS_4, \tag{28}$$

essendo D simbolo di derivazione conormale, cioè ponendo per una generica funzione $h = h(x, y, z, t)$,

$$Dh = \frac{\partial h}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial h}{\partial y}\cos ny + \frac{\partial h}{\partial z}\cos nz - \frac{\partial h}{\partial t}\cos nt.$$

Facciamo, per comodità, le posizioni seguenti:

$$\begin{aligned} M = -\int_{C+\Gamma+\Sigma'} \varphi_1 DE_x d\Sigma &= \int_{C+\Gamma+\Sigma'} \varphi_1 \frac{\partial E_x}{\partial t}\cos nt\, d\Sigma \\ &- \int_{C+\Gamma+\Sigma'} \varphi_1 \left\{\frac{\partial E_x}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial E_x}{\partial y}\cos ny + \frac{\partial E_x}{\partial z}\cos nz\right\} d\Sigma, \end{aligned} \tag{29}$$

$$M_1 = \int_{C+\Gamma+\Sigma'} \varphi_1 \frac{\partial E_x}{\partial t}\cos nt\, d\Sigma, \tag{30}$$

$$M_2 = -\int_{C+\Gamma+\Sigma'} \varphi_1 \left\{\frac{\partial E_x}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial E_x}{\partial y}\cos ny + \frac{\partial E_x}{\partial z}\cos nz\right\} d\Sigma. \tag{31}$$

---

[1] Cfr. O. TEDONE, *Sull'integrazione delle equazioni a derivate parziali lineari ed a coefficienti costanti del second'ordine* [« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XXIII, serie 5ª, 2° sem. (1914)].

Sarà:

$$M = M_1 + M_2.$$

Sopra C si annulla la funzione φ_1, mentre sopra Γ si annulla $\cos nt$; risulta pertanto:

$$M_1 = \int_{\Sigma'} \varphi_1 \frac{\partial E_x}{\partial t} \cos nt \, d\Sigma'. \tag{32}$$

Supponiamo per un momento di conoscere le funzioni $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ anche sopra C e Γ; allora la espressione (23) che abbiamo dimostrato essere valida sopra Σ, conserva la sua validità anche sopra le varietà C e Γ. Quiudi si ha:

$$\begin{aligned} M_2 = \int_{C+\Gamma+\Sigma'} \varphi_1 \left\{ \left(\frac{\partial E_y}{\partial y} \cos nx - \frac{\partial E_y}{\partial x} \cos ny \right) + \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \cos nx - \frac{\partial E_z}{\partial x} \cos nz \right) \right\} d\Sigma \\ + \int_{C+\Gamma+\Sigma'} \varphi_1 \left\{ \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left[\left(\frac{\partial H_y}{\partial t} \cos nz - \frac{\partial H_z}{\partial t} \cos ny \right) + 2\pi\lambda\mu (H_z \cos ny - H_y \cos nz) \right] \right. \\ \left. - \rho_e \cos nx \right\} d\Sigma. \end{aligned} \tag{33}$$

Nello spazio S_4' possiamo applicare il lemma di Green alle funzioni $\frac{\partial \varphi_1 E_y}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi_1 E_y}{\partial y}$. Si ricava allora:

$$\int_{S_4'} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi_1 E_y}{\partial x} dS_4' = -\int_{C+\Gamma+\Sigma'} \frac{\partial \varphi_1 E_y}{\partial x} \cos ny \, d\Sigma,$$

$$\int_{S_4'} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1 E_y}{\partial y} dS_4' = -\int_{C+\Gamma+\Sigma'} \frac{\partial \varphi_1 E_y}{\partial y} \cos nx \, d\Sigma.$$

Da queste, sottraendo, ed osservando che è nullo il primo membro della differenza, si ottiene:

$$\int_{C+\Gamma+\Sigma'} \left(\varphi_1 \frac{\partial E_y}{\partial y} + E_y \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) \cos nx \, d\Sigma = \int_{C+\Gamma+\Sigma'} \left(\varphi_1 \frac{\partial E_y}{\partial x} + E_y \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \cos ny \, d\Sigma,$$

cioè:

$$\int_{C+\Gamma+\Sigma'} \varphi_1 \left\{ \frac{\partial E_y}{\partial y} \cos nx - \frac{\partial E_y}{\partial x} \cos ny \right\} d\Sigma =$$

$$= \int_{C+\Gamma+\Sigma'} E_y \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cos ny - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cos nx \right\} d\Sigma.$$

Procedendo in modo analogo si ricava:

$$\int\limits_{C+\Gamma+\Sigma'} \varphi_1 \left\{ \frac{\partial E_z}{\partial z} \cos nx - \frac{\partial E_z}{\partial x} \cos nz \right\} d\Sigma =$$

$$= \int\limits_{C+\Gamma+\Sigma'} E_z \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cos nz - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \cos nx \right\} d\Sigma.$$

Quindi:

$$M_2 = \int\limits_{C+\Gamma+\Sigma'} \left[E_y \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cos ny - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cos nx \right\} + E_z \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cos nz - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \cos nx \right\} \right] d\Sigma$$

$$+ \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \int\limits_{C+\Gamma+\Sigma'} \varphi_1 \left\{ \frac{\partial H_y}{\partial t} \cos nz - \frac{\partial H_z}{\partial t} \cos ny + 2\pi\lambda\mu (H_z \cos ny - H_y \cos nz \right\} d\Sigma$$

$$- \int\limits_{C+\Gamma+\Sigma'} \rho_e \varphi_1 \cos nx \, d\Sigma.$$

Sulle varietà C e Γ le espressioni

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cos ny - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cos nx, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cos nz - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \cos nx$$

sono identicamente nulle. Infatti, ricordando note proprietà delle funzioni di Bessel, si ha:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \left(\frac{t_1 - t}{r} - 1 \right) \alpha^2 \frac{I_2(\rho)}{\rho^2} (x_1 - x) + \frac{I_1(\rho)}{\rho} \frac{t_1 - t}{r^3} (x_1 - x).$$

Sull'ipercono C si annullano $\dfrac{t_1 - t}{r} - 1$ e ρ, mentre $\dfrac{I_1(\rho)}{\rho}$ e $\dfrac{I_2(\rho)}{\rho^2}$ si mantengono finite. Ma sulla varietà C abbiamo:

$$\cos nx = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial r}{\partial x} \qquad \cos ny = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\cos nz = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial r}{\partial z} \qquad \cos nt = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

mentre sulla varietà cilindrica Γ,

$$\cos nx = \frac{\partial r}{\partial x} \quad \cos ny = \frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\cos nz = \frac{\partial r}{\partial z} \quad \cos nt = 0.$$

Ne consegue che le differenze soprascritte si annullano tanto su C quanto su Γ. Se si osserva ancora che sull'ipercono C la funzione φ_1 è identicamente nulla, risulta:

$$M_2 = \int_{\Sigma'} \left[E_y \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cos ny - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cos nx \right\} + E_z \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cos nz - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \cos nx \right\} \right] d\Sigma'$$
$$+ \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \int_{\Gamma+\Sigma'} \varphi_1 \left\{ \frac{\partial H_y}{\partial t} \cos nz - \frac{\partial H_z}{\partial t} \cos ny + 2\pi\lambda\mu (H_z \cos ny - H_y \cos nz) \right\} d\Sigma$$
$$- \int_{\Gamma+\Sigma'} \varphi_1 \rho_e \cos nx \, d\Sigma.$$

Perciò:

$$(34) \quad M = \int_{\Sigma'} \varphi_1 \frac{\partial E_x}{\partial t} \cos nt \, d\Sigma' + \int_{\Sigma'} E_y \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cos ny - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cos nx \right\} d\Sigma'$$
$$+ \int_{\Sigma'} E_z \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cos nz - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \cos nx \right\} d\Sigma'$$
$$+ \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \int_{\Sigma'} \varphi_1 \left\{ \frac{\partial H_y}{\partial t} \cos nz - \frac{\partial H_z}{\partial t} \cos ny + 2\pi\lambda\mu (H_z \cos ny - H_y \cos nz \right\} d\Sigma'$$
$$+ \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \int_{\Gamma} \varphi_1 \left\{ \frac{\partial H_y}{\partial t} \cos nz - \frac{\partial H_z}{\partial t} \cos ny + 2\pi\lambda\mu (H_z \cos ny - H_y \cos nz \right\} d\Gamma$$
$$- \int_{\Sigma'} \rho_e \varphi_1 \cos nx \, d\Sigma' - \int_{\Gamma} \rho_e \varphi_1 \cos nx \, d\Gamma.$$

Si ponga:

$$(35) \qquad P = \int_{C+\Gamma+\Sigma'} E_x D\varphi_1 d\Sigma.$$

Poichè sulla varietà C è $D\varphi_1 = 0$, come è facile verificare, si ha pure:

$$P = \int_{\Gamma+\Sigma'} E_x D\varphi_1 d\Sigma.$$

Inoltre sulla varietà cilindrica Γ è:

$$D\varphi_1 = - \frac{I_1(\rho)}{\rho} \frac{t_1 - t}{\varepsilon^2} - \alpha^2 \frac{I_2(\rho)}{\rho^2} \left(\frac{t_1 - t}{\varepsilon} - 1 \right) \varepsilon.$$

Perciò, la (35) diventa:

$$(36) \quad P = \int_{\Sigma'} E_x D\varphi_1 d\Sigma' - \int_{\Gamma} \frac{I_1(\rho)}{\rho} \frac{t_1 - t}{\varepsilon^2} E_x d\Gamma - \alpha^2 \int_{\Gamma} \frac{I_2(\rho)}{\rho^2} \left(\frac{t_1 - t}{\varepsilon} - 1 \right) \varepsilon E_x d\Gamma.$$

In forza delle (34), (36), l'identità (28) può scriversi così:

$$(37)\quad \int_{\Sigma'} E_x D\varphi_1 d\Sigma' + \int_{\Sigma'} \varphi_1 \left[\frac{\partial E_x}{\partial t}\cos nt + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left\{\frac{\partial H_y}{\partial t}\cos nz - \frac{\partial H_z}{\partial t}\cos ny\right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\pi\lambda\mu(H_z \cos ny - H_y \cos nz)\right\}\right] d\Sigma'$$

$$+ \int_{\Sigma'} \left\{ E_y\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\cos ny - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\cos nx\right) + E_z\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\cos nz - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\cos nx\right)\right\} d\Sigma'$$

$$- \int_{\Sigma'} \varphi_1 \rho_e \cos nx \, d\Sigma'$$

$$+ \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_\Gamma \varphi_1 \left\{\frac{\partial H_y}{\partial t}\cos nz - \frac{\partial H_z}{\partial t}\cos ny + 2\pi\lambda\mu(H_z \cos ny - H_y \cos nz)\right\} d\Gamma$$

$$- \int_\Gamma \frac{I_1(\rho)}{\rho}\frac{t_1 - t}{\varepsilon^2} E_x d\Gamma - \alpha^2 \int_\Gamma \frac{I_2(\rho)}{\rho^2}\left(\frac{t_1 - t}{\varepsilon} - 1\right)\varepsilon E_x d\Gamma$$

$$- \int_\Gamma \varphi_1 \rho_e \cos nx \, d\Gamma = \int_{S_4'} \varphi_1 X_x dS_4'.$$

Indicando con $d\omega$ l'elemento di ipersuperficie sferica di raggio unitario col centro nel punto P_1, sarà $\varepsilon^2 d\omega dt$ l'elemento di varietà cilindrica Γ. Perciò se t_0 è il valore della coordinata t del punto ove la retta $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ incontra la varietà Σ, passando al limite nella (37) per ε tendente a zero, risulta la formula:

$$(38)\quad \frac{4\pi}{\alpha}\int_{t_0}^{t_1} E_x(x_1, y_1, z_1, t) I_1[\alpha(t_1 - t)]\, dt =$$

$$\int_\Sigma E_x D\varphi_1 d\Sigma + \int_\Sigma \varphi_1 \left[\frac{\partial E_x}{\partial t}\cos nt + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left\{\frac{\partial H_y}{\partial t}\cos nz - \frac{\partial H_z}{\partial t}\cos ny\right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\pi\lambda\mu(H_z \cos ny - H_y \cos nz)\right\}\right] d\Sigma$$

$$+ \int_\Sigma \left\{ E_y\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\cos ny - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\cos nx\right) + E_z\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\cos nz - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\cos nx\right)\right\} d\Sigma$$

$$- \int_\Sigma \rho_e \varphi_1 \cos nx \, d\Sigma - \int_{S_4} \varphi_1 X_x dS_4.$$

Formule analoghe valgono naturalmente quando si prendono in esame le altre funzioni E_y, E_z. Possiamo pertanto scrivere la seguente relazione ([1]) (vettoriale nello spazio fisico x, y, z):

$$(39)\qquad \frac{4\pi}{\alpha}\int_{t_1}^{t_0} \boldsymbol{E}(x_1, y_1, z_1, t) I_1[\alpha(t_1 - t)]\,dt = \int_\Sigma \left(\varphi_1 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \boldsymbol{E}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\right)\cos nt\, d\Sigma$$
$$+ \int_\Sigma \varphi_1 \left[\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \wedge \boldsymbol{n} + 2\pi\lambda\mu\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{H} \right\} - \rho_e \boldsymbol{n}\right] d\Sigma$$
$$+ \int_\Sigma \left\{ (\operatorname{grad}\varphi_1 \wedge \boldsymbol{n}) \wedge \boldsymbol{E} - (\operatorname{grad}\varphi_1 \times \boldsymbol{n})\boldsymbol{E} \right\} d\Sigma - \int_{S_4} \varphi_1 \boldsymbol{X}\, dS_4 .$$

In questa espressione intendiamo che $\boldsymbol{n}$ rappresenti un vettore unitario situato sulla normale positiva alla varietà Σ, e che il grad φ_1 sia calcolato rispetto alle variabili x_1, y_1, z_1. Ora ricordiamo che:

$$(\operatorname{grad}\varphi_1 \wedge \boldsymbol{n}) \wedge \boldsymbol{E} = (\boldsymbol{E} \times \operatorname{grad}\varphi_1)\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n}) \operatorname{grad}\varphi_1 .$$

Perciò la (39) si può scrivere così:

$$(40)\qquad \frac{4\pi}{\alpha}\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{E}(x_1, y_1, z_1, t) I_1[\alpha(t_1 - t)]\,dt = \Phi_1^{(e)},$$

avendo posto:

$$(41)\qquad \Phi_1^{(e)} = \int_\Sigma \left(\varphi_1 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \boldsymbol{E}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\right)\cos nt\, d\Sigma$$
$$+ \int_\Sigma \varphi_1 \left[\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \wedge \boldsymbol{n} + 2\pi\lambda\mu\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{H} \right\} - \rho_e \boldsymbol{n}\right] d\Sigma$$
$$+ \int_\Sigma \left\{ (\boldsymbol{E} \times \operatorname{grad}\varphi_1)\boldsymbol{n} - (\operatorname{grad}\varphi_1 \times \boldsymbol{n})\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n}) \operatorname{grad}\varphi_1 \right\} d\Sigma$$
$$- \int_{S_4} \varphi_1 \boldsymbol{X}\, dS_4 .$$

Un procedimento analogo al precedente, assumendo come soluzione fondamentale anzichè la φ_1, la funzione

$$(42)\qquad \varphi_2 = r\left(\frac{t_1 - t}{r} - 1\right)^2 \frac{I_2(\rho)}{\rho^2},$$

dove $I_2(\rho)$ è la funzione di Bessel di second'ordine dell'argomento ρ, darebbe

([1]) Si tenga presente che grad φ_1 (calcolato con referenza alle variabili x, y, z), $= -$ grad φ_1 (calcolato con referenza alle variabili x_1, y_1, z_1).

la relazione

(43) $$\frac{4\pi}{\alpha^2}\int_{t_0}^{t_1} E(x_1, y_1, z_1, t) I_2[\alpha(t_1 - t)]\, dt = \Phi_2^{(e)},$$

dove:

(44) $$\Phi_2^{(e)} = \int_\Sigma \left(\varphi_2 \frac{\partial E}{\partial t} - E \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\right) \cos nt\, d\Sigma$$

$$+ \int_\Sigma \varphi_2 \left[\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \wedge \boldsymbol{n} + 2\pi\lambda\mu \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{H} \right\} - \rho_e \boldsymbol{n}\right] d\Sigma$$

$$+ \int_\Sigma \left\{ (\boldsymbol{E} \times \operatorname{grad} \varphi_2) \boldsymbol{n} - (\operatorname{grad} \varphi_2 \times \boldsymbol{n}) \boldsymbol{E} - (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n}) \operatorname{grad} \varphi_2 \right\} d\Sigma$$

$$- \int_{S_4} \varphi_2 \boldsymbol{X}\, dS_4 .$$

Deriviamo la (40) rispetto alla variabile t_1, e ricordiamo che

(45) $$2 \frac{dI_1(\rho)}{d\rho} = I_0(\rho) + I_2(\rho);$$

si trae:

(46) $$4\pi \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{E}(x_1, y_1, z_1, t) I_0[\alpha(t_1 - t)]\, dt = 2 \frac{\partial \Phi_1^{(e)}}{\partial t_1} - \alpha^2 \Phi_2^{(e)}.$$

Derivando ancora la (46) rispetto a t_1, poichè $(I_0)_{\rho=0} = 1$, e $\frac{dI_0(\rho)}{d\rho} = I_1$, si arriva alla formula finale:

(VI) $$4\pi \boldsymbol{E}(x_1, y_1, z_1, t_1) = -\alpha^2 \Phi_1^{(e)} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_1^{(e)}}{\partial t_1^2} - \alpha^2 \frac{\partial \Phi_2^{(e)}}{\partial t_1}.$$

Un analogo procedimento applicato alla determinazione della funzione $\boldsymbol{H}$ nel punto (x_1, y_1, z_1, t_1) conduce alla formula:

(VII) $$\boldsymbol{H}(x_1, y_1, z_1, t_1) = -\alpha^2 \Phi_1^{(m)} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_1^{(m)}}{\partial t_1^2} - \alpha^2 \frac{\partial \Phi_2^{(m)}}{\partial t_1},$$

essendo:

(47) $$\Phi_i^{(m)} = \int_\Sigma \left(\varphi_i \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \boldsymbol{H} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\right) \cos nt\, d\Sigma$$

$$+ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_\Sigma \varphi_i \left\{ \boldsymbol{n} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + 2\pi\lambda\mu \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{E} + 4\pi\mu \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{k} \right\} d\Sigma$$

$$+ \int_\Sigma \left\{ (\boldsymbol{H} \times \operatorname{grad} \varphi_i) \boldsymbol{n} - (\operatorname{grad} \varphi_i \times \boldsymbol{n}) \boldsymbol{H} - (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{n}) \operatorname{grad} \varphi_i \right\} d\Sigma$$

$$- \int_{S_4} \varphi_i \boldsymbol{Y}\, dS_4 \qquad (i = 1, 2).$$

4. **Integrazione delle equazioni di Maxwell-Hertz.** — Dimostreremo ora che dal fatto che le funzioni E, H soddisfano in ogni istante di tempo alle equazioni (II) nei punti della varietà Σ, e nello spazio S_4 alle equazioni (III), (IV), segue che esse sono integrali del sistema (II) in questo spazio. A questo scopo si fissi, ad esempio, la funzione

$$f = \frac{\partial H_y}{\partial t} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) - 2\pi\lambda\mu H_y. \tag{48}$$

Questa è identicamente nulla per ogni istante di tempo quando il punto (x, y, z, t) è sulla varietà Σ.

Perciò in questi punti anche $\frac{\partial f}{\partial t}$ è zero. Deriviamo due volte la f rispetto alla variabile x: si trae:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}\right) - 2\pi\lambda\mu\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}.$$

Tenendo conto che le funzioni E_x, E_z, H_y soddisfano alle equazioni (III), (IV), si ottiene:

$$\begin{aligned}\underset{2}{\Delta} f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}(Y_y - \alpha^2 H_y) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left\{\frac{\partial}{\partial z}(X_x - \alpha^2 E_x) - \frac{\partial}{\partial x}(X_z - \alpha^2 E_z) - \right. \\ &\left. - 2\pi\lambda\mu(Y_y - \alpha^2 H_y)\right\} = -\alpha^2 f + \frac{\partial Y_y}{\partial t} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(\frac{\partial X_x}{\partial z} - \frac{\partial X_z}{\partial x}\right) - 2\pi\lambda\mu Y_y.\end{aligned} \tag{49}$$

Ponendo al posto delle X_x, X_z, Y_y le loro espressioni che si traggono dalle (5), (6), si verifica che

$$\frac{\partial Y_y}{\partial t} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(\frac{\partial X_x}{\partial z} - \frac{\partial X_z}{\partial x}\right) - 2\pi\lambda\mu Y_y$$

vale zero. Quindi dalla (49) si trae che nei punti interni di S_4 la funzione f soddisfa all'equazione

$$\underset{2}{\Delta} f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \alpha^2 f = 0.$$

Pertanto il suo valore nel punto $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ è dato dalla seguente formula di Tedone [1]:

$$4\pi f(x_1, y_1, z_1, t_1) = -\alpha^2\tilde{\omega}_1 + 2\frac{\partial^2\tilde{\omega}_1}{\partial t_1^2} - \alpha^2\tilde{\omega}_2,$$

(1) Cfr. O. Tedone, loc. cit., pag. 150.

ove:

$$\tilde{\omega}_i = \int_\Sigma (f D\varphi_i - \varphi_i Df) d\Sigma \qquad (i = 1, 2).$$

Ma nel caso nostro f e $\frac{\partial f}{\partial t}$ hanno valore zero sopra Σ, quindi le funzioni $\tilde{\omega}_i$ si riducono alle

$$\tilde{\omega}_i = -\int_\Sigma \varphi_i \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial f}{\partial y} \cos ny + \frac{\partial f}{\partial z} \cos nz \right) d\Sigma. \tag{50}$$

Dimostreremo che sopra Σ l'espressione tra parentesi è nulla. A questo scopo si fissi un punto P qualsivoglia di Σ, e si assuma come asse delle z la normale positiva in P a Σ: gli assi x, y, t saranno situati perciò nell'iperpiano tangente in P alla varietà Σ.

Con questa scelta di assi la espressione $\frac{\partial f}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial f}{\partial y} \cos ny + \frac{\partial f}{\partial z} \cos nz$ si riduce alla $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Ora dalla (49) si trae:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} \right) - 2\pi\lambda\mu \frac{\partial H_y}{\partial z}. \tag{51}$$

Ma E_x soddisfa all'equazione (V), quindi:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} - \alpha^2 E_x + \frac{\partial \rho_e}{\partial x} + 4\pi\mu \frac{\partial k_x}{\partial t} - 8\pi^2\lambda\mu^2 k_x. \tag{52}$$

Inoltre, sopra Σ,

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \rho_e,$$

e derivando rispetto ad x sussisterà l'identità: perciò:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} = \frac{\partial \rho_e}{\partial x} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y}. \tag{53}$$

D'altra parte, sempre nei punti di Σ, si ha, per ogni istante di tempo,

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} + 2\pi\lambda\mu E_x + 4\pi\mu k_x \right) + \frac{\partial H_z}{\partial y},$$

d'onde, derivando rispetto al tempo, si ricava:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial z} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + 2\pi\lambda\mu \frac{\partial E_x}{\partial t} + 4\pi\mu \frac{\partial k_x}{\partial t} \right) + \frac{\partial^2 H_z}{\partial t \partial y}. \tag{54}$$

Sostituendo nella (51) le (52), (53), (54), si trae:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial H_z}{\partial t} - 2\pi\lambda\mu H_z \right\}.$$

Ma sui punti della varietà Σ la quantità fra parentesi è identicamente nulla; perciò anche la sua derivata rispetto alla direzione y, che giace nell'iperpiano tangente, ha valore zero. Concludiamo

$$\frac{\partial f}{\partial z} \equiv 0, \qquad \text{c. d. d.}$$

CAPITOLO SECONDO

Casi particolari.

1. **Superficie mobile in un mezzo a conducibilità nulla.** — Si supponga che il mezzo S abbia conducibilità nulla. Essendo $\lambda = 0$, sarà $\alpha = 0$, e in tal caso le formule ottenute si semplificano notevolmente. Poichè per $\alpha = 0$, la funzione $\boldsymbol{E}$ diventa proprio la forza elettrica $\mathfrak{E}$, limitando, per fissare le idee, i calcoli a questa forza, la (VI) ci dà:

$$(55) \qquad 4\pi \boldsymbol{E}(x_1, y_1, z_1, t_1) = 2 \frac{\partial^2 \Phi_1^{(e)}}{\partial t_1^2}.$$

Ma per $\alpha = 0$, si ha $\rho = 0$, e quindi la soluzione fondamentale φ_1 si riduce a

$$\frac{1}{2}\left(\frac{t_1 - t}{r} - 1\right),$$

perchè

$$\left[\frac{I_1(\rho)}{\rho}\right]_{\rho=0} = \frac{1}{2}.$$

Ne consegue:

$$(56) \quad 2\Phi_1^{(e)} = \int_\Sigma \frac{\boldsymbol{E} \cos nt}{r} d\Sigma + \int_\Sigma \left(\frac{t_1 - t}{r} - 1\right) \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \cos nt + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \wedge \boldsymbol{n} - \rho_e \boldsymbol{n} \right\} d\Sigma$$
$$+ \int_\Sigma \frac{t_1 - t}{r^2} \left\{ \boldsymbol{E} \cos rn + E_n \operatorname{grad} r - E_r \boldsymbol{n} \right\} d\Sigma - \int_{S_1} \left(\frac{t_1 - t}{r} - 1\right) \boldsymbol{X} dS_1,$$

avendo posto:

$$E_n = E_x \cos nx + E_y \cos ny + E_z \cos nz$$
$$E_r = E_x \cos rx + E_y \cos ry + E_z \cos rz,$$

nella quale ultima formula il raggio r va da un punto generico di Σ al punto P_1.

Ricordando che sull' intersezione dell' ipercono C con l' ipersuperficie Σ, vale l' identità

$$\frac{t_1 - t}{r} - 1 = 0,$$

ciò che permette di derivare rispetto a t_1 il secondo integrale della (56) come se la varietà Σ fosse indipendente da t_1, abbiamo la formula finale:

$$4\pi \boldsymbol{E}(x_1, y_1, z_1, t_1) = \frac{\partial}{\partial t_1} \int_\Sigma \left[\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \wedge \boldsymbol{n} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \cos nt - \rho_e \boldsymbol{n} \right] \frac{d\Sigma}{r} \tag{57}$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_\Sigma \frac{t_1 - t}{r^2} \left\{ \boldsymbol{E} \cos rn + E_n \operatorname{grad} r - E_r \boldsymbol{n} \right\} d\Sigma$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_\Sigma \frac{\boldsymbol{E} \cos nt}{r} d\Sigma - \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{S_4} \left(\frac{t_1 - t}{r} - 1 \right) \boldsymbol{X} dS_4 .$$

Analogamente si trae:

$$4\pi \boldsymbol{H}(x_1, y_1, z_1, t_1) = \frac{\partial}{\partial t_1} \int_\Sigma \left[\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left\{ \boldsymbol{n} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + 4\pi\mu \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{k} \right\} + \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \cos nt \right] \frac{d\Sigma}{r} \tag{58}$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_\Sigma \frac{t_1 - t}{r^2} \left\{ \boldsymbol{H} \cos rn + H_n \operatorname{grad} r - H_r \boldsymbol{n} \right\} d\Sigma$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_\Sigma \frac{\boldsymbol{H} \cos nt}{r} d\Sigma - \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{S_4} \left(\frac{t_1 - t}{r} - 1 \right) \boldsymbol{Y} dS_4 .$$

Se infine supponiamo $\rho_e = 0$, $\boldsymbol{k} = 0$, $\varepsilon = \mu = 1$, dalle formule (57), (58), coll' ovvio passaggio alle variabili $\xi = cx$, $\eta = cy$, $\zeta = cz$, $\tau = t$, si traggono quelle che avevamo dato già nel 1910 con l' avvertenza di cambiare in queste formule $\boldsymbol{H}$ in $-\boldsymbol{H}$, e di supporre che il raggio r vada da un punto generico di Σ al punto P_1 [1].

---

[1] A. Tonolo, *Sull' integrazione delle equazioni fondamentali dell' elettrodinamica.* [« Annali di Matematica pura e applicata », tomo XVII, serie III (1910)]. La ragione di questi cambiamenti sta nel fatto che in questa ricerca siamo partiti dalle equazioni

$$c \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \quad c \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = -\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},$$

e che il raggio r va dal punto P_1 ad un punto generico di Σ.

2. **Superficie fissa in un mezzo qualunque.** — Sia σ una superficie chiusa immobile dello spazio fisico; nello spazio a quattro dimensioni (x, y, z, t) introduciamo la varietà cilindrica che ha per direttrice la superficie σ, e per generatrici le parallele all'asse delle t condotte dai punti di σ. Limitiamo questa varietà con l'iperpiano Ω^* di equazione $t = t_0$ (t_0 istante iniziale), e indichiamo con Λ^* quella porzione di ipercilindro nella quale $t > t_0$. Prendiamo in esame la varietà $\Lambda^* + \Omega^*$, che soddisfa manifestamente alle condizioni imposte alla varietà Σ_1. Supponiamo ancora che la coordinata t_1 del vertice della varietà conica caratteristica C sia così grande che questa varietà incontri effettivamente la varietà cilindrica Λ^*.

Su questa varietà abbiamo:

$$\cos nt = 0, \tag{59}$$

mentre sull'iperpiano Ω^* risulta:

$$t = t_0, \quad \cos nx = \cos ny = \cos nz = 0, \quad \cos nt = 1. \tag{60}$$

Per fissare le idee, prendiamo in considerazione le formule (41), (44).

La varietà Σ è formata ora dalla porzione Ω di iperpiano Ω^* racchiusa dalla superficie σ, e dalla porzione Λ di varietà cilindrica Λ^* limitata dalla superficie σ e dall'intersezione dell'ipercono C con l'ipercilindro Λ^*. Abbiamo pertanto, in forza delle (59), (60):

$$\begin{aligned}\Phi_i^{(e)} &= \int_\Lambda \varphi_i \left[\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \wedge \boldsymbol{n} + 2\pi\lambda\mu \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{H} \right\} - \rho_e \boldsymbol{n} \right] d\Lambda \\ &+ \int_\Lambda \left\{ (\boldsymbol{E} \times \operatorname{grad} \varphi_i)\, \boldsymbol{n} - (\operatorname{grad} \varphi_i \times \boldsymbol{n})\, \boldsymbol{E} - (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n}) \operatorname{grad} \varphi_i \right\} d\Lambda \\ &+ \int_\Omega \left(\varphi_i \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \boldsymbol{E} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right)_{t=t_0} d\Omega - \int_{S_4} \varphi_i \boldsymbol{X}\, dS_4 .\end{aligned} \tag{61}$$

Supponiamo di conoscere i valori delle forze elettriche e magnetiche nell'istante iniziale t_0 *in tutti i punti dello spazio* Ω *racchiuso dalla superficie* σ. Saranno allora conosciuti i valori iniziali $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{H}_0$ delle funzioni $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ nei punti di Ω. In virtù della prima equazione del gruppo (II) risulta pertanto:

$$\int_\Omega \left(\varphi_i \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right)_{t=t_0} d\Omega = \int_\Omega \varphi_i \left\{ \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \operatorname{rot} \boldsymbol{H}_0 - 2\pi\lambda\mu \boldsymbol{E}_0 - 4\pi\mu \boldsymbol{k}_0 \right\} d\Omega. \tag{62}$$

Ma si ha, per lecita applicazione di una nota formula,

$$\int_\Omega \operatorname{rot} \varphi_i \boldsymbol{H}_0 d\Omega = \int_\sigma (\varphi_i \boldsymbol{H}_0 \wedge \boldsymbol{n}) d\sigma. \tag{63}$$

E poichè

$$\int_\Omega \operatorname{rot} \varphi_i \boldsymbol{H}_0 d\Omega = \int_\Omega \varphi_i \operatorname{rot} \boldsymbol{H}_0 d\Omega - \int_\Omega (\operatorname{grad} \varphi_i \wedge \boldsymbol{H}_0) d\Omega, \tag{64}$$

(si ricordi che il grad φ_i si riferisce sempre alle variabili x_1, y_1, z_1), si trae:

$$\int_\Omega \varphi_i \operatorname{rot} \boldsymbol{H}_0 d\Omega = \int_\sigma (\varphi_i \boldsymbol{H}_0 \wedge \boldsymbol{n}) d\sigma + \int_\Omega (\operatorname{grad} \varphi_i \wedge \boldsymbol{H}_0) d\Omega. \tag{65}$$

Perciò, surrogando la (65) nella (62), si trova:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\varphi_i \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)_{t=t_0} d\Omega = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \int_\sigma (\varphi_i \boldsymbol{H}_0 \wedge \boldsymbol{n}) d\sigma + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \int_\Omega (\operatorname{grad} \varphi_i \wedge \boldsymbol{H}_0) d\Omega \\ - 2\pi\lambda\mu \int_\Omega \varphi_i \boldsymbol{E}_0 d\Omega - 4\pi\mu \int_\Omega \varphi_i \boldsymbol{k}_0 d\Omega. \end{aligned} \tag{66}$$

Quindi intanto:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\varphi_i \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \boldsymbol{E} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\right)_{t=t_0} d\Omega = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \int_\sigma (\varphi_i \boldsymbol{H}_0 \wedge \boldsymbol{n}) d\sigma + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \int_\Omega (\operatorname{grad} \varphi_i \wedge \boldsymbol{H}_0) d\Omega \\ - 2\pi\lambda\mu \int_\Omega \varphi_i \boldsymbol{E}_0 d\Omega - 4\pi\mu \int_\Omega \varphi_i \boldsymbol{k}_0 d\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{E}_0 \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} d\Omega. \end{aligned} \tag{67}$$

Mettiamo in evidenza nelle integrazioni della (61) estese alla varietà Λ lo spazio fisico e il tempo, decomponendo l'ipercilindro Λ in ipercilindri elementari di base $d\sigma$ (elemento di superficie σ di coordinate x, y, z, t_0) e le cui altezze hanno per estremi rispetto alla coordinata t, t_0 e $t_1 - r$, perchè sull'intersezione dell'ipercono C con l'ipercilindro Λ, si ha $\frac{t_1 - t}{r} - 1 = 0$, d'onde $t = t_1 - r$. Si ha allora:

$$\begin{aligned} &\int_\Lambda \varphi_i \left[\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left\{\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \wedge \boldsymbol{n} + 2\pi\lambda\mu \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{H}\right\} - \rho_e \boldsymbol{n}\right] d\Lambda \\ &+ \int_\Lambda \left\{(\boldsymbol{E} \times \operatorname{grad} \varphi_i) \boldsymbol{n} - (\operatorname{grad} \varphi_i \times \boldsymbol{n}) \boldsymbol{E} - (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n}) \operatorname{grad} \varphi_i\right\} d\Lambda \\ &= \int_\sigma d\sigma \int_{t_0}^{t_1 - r} \varphi_i \left[\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left\{\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \wedge \boldsymbol{n} + 2\pi\lambda\mu \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{H}\right\} - \rho_e \boldsymbol{n}\right] dt \\ &+ \int_\sigma d\sigma \int_{t_0}^{t_1 - r} \left\{(\boldsymbol{E} \times \operatorname{grad} \varphi_i) \boldsymbol{n} - (\operatorname{grad} \varphi_i \times \boldsymbol{n}) \boldsymbol{E} - (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n}) \operatorname{grad} \varphi_i\right\} dt. \end{aligned} \tag{68}$$

Surrogando le (67), (68) nella (61) si ottiene in definitiva:

$$(69)\qquad \Phi_i^{(e)} = \int_\sigma d\sigma \int_{t_0}^{t_1-r} \varphi_i \left[\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \wedge \boldsymbol{n} + 2\pi\lambda\mu\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{H} \right\} \quad \rho_e \boldsymbol{n} \right] dt$$

$$+ \int_\sigma d\sigma \int_{t_0}^{t_1-r} \left\{ (\boldsymbol{E} \times \operatorname{grad} \varphi_i)\, \boldsymbol{n} - (\operatorname{grad} \varphi_i \times \boldsymbol{n})\, \boldsymbol{E} - (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n}) \operatorname{grad} \varphi_i \right\} dt$$

$$+ \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \int_\sigma (\varphi_i \boldsymbol{H}_0 \wedge \boldsymbol{n}) d\sigma$$

$$+ \int_\Omega \left[\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \operatorname{grad} \varphi_i \wedge \boldsymbol{H}_0 - 2\pi\lambda\mu\varphi_i \boldsymbol{E}_0 - 4\pi\mu\varphi_i \boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{E}_0 \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right] d\Omega$$

$$- \int_\Omega d\Omega \int_{t_0}^{t_1-r} \varphi_i \boldsymbol{X}\, dt.$$

Determinate così le funzioni $\Phi_i^{(e)}$ si trae la funzione $\boldsymbol{E}(x_1, y_1, z_1, t_1)$ a mezzo della formula (VI), e da questa con la prima delle (2), il valore della forza elettrica nel punto (x_1, y_1, z_1) e all'istante t_1. Un analogo procedimento applicato alle funzioni $\Phi_i^{(m)}$ conduce alle formule seguenti:

$$(70)\qquad \Phi_i^{(m)} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_\Lambda \varphi_i \left\{ \boldsymbol{n} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + 2\pi\lambda\mu\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{E} + 4\pi\mu\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{k} \right\} d\Lambda$$

$$+ \int_\Lambda \left\{ (\boldsymbol{H} \times \operatorname{grad} \varphi_i)\, \boldsymbol{n} - (\operatorname{grad} \varphi_i \times \boldsymbol{n})\, \boldsymbol{H} - (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{n}) \operatorname{grad} \varphi_i \right\} d\Lambda$$

$$+ \int_\Omega \left(\varphi_i \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \boldsymbol{H} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right)_{t=t_0} d\Omega - \int_{S_4} \varphi_i \boldsymbol{Y} dS_4 .$$

Eseguendo sull'integrale $\int_\Omega \left(\varphi_i \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \right)_{t=t_0} d\Omega$ quelle trasformazioni che abbiamo applicato all'integrale $\int_\Omega \left(\varphi_i \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right)_{t=t_0} d\Omega$, notando che nel caso attuale, in virtù delle equazioni (II),

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \right)_{t=t_0} = 2\pi\lambda\mu \boldsymbol{H}_0 - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \operatorname{rot} \boldsymbol{E}_0 ,$$

si traggono le formule finali:

$$\Phi_i^{(m)} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_\sigma d\sigma \int_{t_0}^{t_1-r} \varphi_i \left\{ n \wedge \frac{\partial E}{\partial t} + 2\pi\lambda\mu n \wedge E + 4\pi\mu n \wedge k \right\} dt \tag{71}$$

$$+ \int_\sigma d\sigma \int_{t_0}^{t_1-r} \left\{ (H \times \operatorname{grad} \varphi_i) n - (\operatorname{grad} \varphi_i \times n) H - (H \times n) \operatorname{grad} \varphi_i \right\} dt$$

$$+ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_\sigma (n \wedge \varphi_i E_0) d\sigma$$

$$+ \int_\Omega \left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 \wedge \operatorname{grad} \varphi_i + 2\pi\lambda\mu\varphi_i H_0 - H_0 \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right\} d\Omega$$

$$- \int_\Omega d\Omega \int_{t_0}^{t_1-r} \varphi_i Y dt.$$

Da queste funzioni $\Phi_i^{(m)}$ con la formula (VII) si ricava la funzione $H(x_1, y_1, z_1, t_1)$, e da questa la forza magnetica nel punto (x_1, y_1, z_1) e all'istante t_1, a mezzo della seconda delle (2).

Si osservi che nelle espressioni (69), (71) delle $\Phi_i^{(e)}$, $\Phi_i^{(m)}$ figurano:

a) le forze elettriche e magnetiche nei punti della superficie σ per ogni istante di tempo;

b) queste stesse forze nell'istante iniziale nei punti dello spazio Ω, e inoltre altri elementi che si suppongono conosciuti.

3. **Superficie fissa in un mezzo a conducibilità nulla.** — Nel caso della superficie immobile in un mezzo non assorbente (presa in considerazione, per fissare le idee, la forza elettrica) sappiamo che la forza elettrica [1] è data da

$$4\pi E(x_1, y_1, z_1, t_1) = 2 \frac{\partial^2 \Phi_1^{(e)}}{\partial t_1^2}, \tag{72}$$

ove, per la (69), fattovi $\lambda = 0$,

$$2\Phi_1^{(e)} = \int_\sigma d\sigma \int_{t_0}^{t_1-r} \left[\left(\frac{t_1 - t}{r} - 1 \right) \left\{ \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\partial H}{\partial t} \wedge n - \rho_e n \right\} \right] dt \tag{73}$$

$$+ \int_\sigma d\sigma \int_{t_0}^{t_1-r} \frac{t_1 - t}{r^2} \left\{ E \cos rn + E_n \operatorname{grad} r - E_r n \right\} dt$$

[1] Si ricordi che nei mezzi non assorbenti $\lambda = 0$, e perciò $E(x_1, y_1, z_1, t_1) = \mathbf{E}(x_1, y_1, z_1, t_1)$.

$$+\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_\sigma\left(\frac{t_1-t_0}{r}-1\right)\boldsymbol{H}_0\wedge\boldsymbol{n}\,d\sigma$$

$$+\int_\Omega\left[\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{t_1-t_0}{r^2}\boldsymbol{H}_0\wedge\operatorname{grad}r-4\pi\mu\left(\frac{t_1-t_0}{r}-1\right)\boldsymbol{k}_0+\frac{\boldsymbol{E}_0}{r}\right]d\Omega$$

$$-\int_\Omega d\Omega\int_{t_0}^{t_1-r}\left(\frac{t_1-t}{r}-1\right)\boldsymbol{X}\,dt.$$

Le derivate seconde rapporto a t_1 del terzo e quarto integrale sono manifestamente nulle: perciò si ha:

$$4\pi\boldsymbol{E}(x_1,y_1,z_1,t_1)=\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_\sigma d\sigma\int_{t_0}^{t_1-r}\left[\left(\frac{t_1-t}{r}-1\right)\left\{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\wedge\boldsymbol{n}-\rho_e\boldsymbol{n}\right\}\right]dt \tag{74}$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_\sigma d\sigma\int_{t_0}^{t_1-r}\frac{t_1-t}{r^2}\left\{\boldsymbol{E}\cos rn+E_n\operatorname{grad}r-E_r\boldsymbol{n}\right\}dt$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_\Omega d\Omega\int_{t_0}^{t_1-r}\left(\frac{t_1-t}{r}-1\right)\boldsymbol{X}\,dt.$$

Ora abbiamo, tenendo conto che la funzione $\frac{t_1-t}{r}-1$ si annulla per $t=t_1-r$,

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_\sigma d\sigma\int_{t_0}^{t_1-r}\left(\frac{t_1-t}{r}-1\right)\left\{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\wedge\boldsymbol{n}-\rho_e\boldsymbol{n}\right\}dt= \tag{75}$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_\sigma\frac{\boldsymbol{H}'(t_1-r)\wedge\boldsymbol{n}}{r}d\sigma-\int_\sigma\frac{\rho_e(t_1-r)\boldsymbol{n}}{r}d\sigma,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_\sigma d\sigma\int_{t_0}^{t_1-r}\frac{t_1-t}{r^2}\left\{\boldsymbol{E}\cos rn+E_n\operatorname{grad}r-E_r\boldsymbol{n}\right\}dt= \tag{76}$$

$$\int_\sigma\left\{\boldsymbol{E}'(t_1-r)\cos rn+E_n'(t_1-r)\operatorname{grad}r-E_r'(t_1-r)\boldsymbol{n}\right\}\frac{d\sigma}{r}$$

$$+\int_\sigma\left\{\boldsymbol{E}(t_1-r)\cos rn+E_n(t_1-r)\operatorname{grad}r-E_r(t_1-r)\boldsymbol{n}\right\}\frac{d\sigma}{r^2},$$

gli accenti, ora e nel seguito, denotando derivazioni rispetto alla variabile t

delle funzioni alle quali essi si riferiscono. Risulta perciò, in definitiva, in forza delle (75), (76):

$$
\begin{aligned}
(77) \qquad 4\pi \boldsymbol{E}(x_1,\, y_1,\, z_1,\, t_1) = & \int_\sigma \Big\{ \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, \boldsymbol{H}'(t_1 - r) \wedge \boldsymbol{n} \\
& + \boldsymbol{E}'(t_1 - r) \cos rn + E_n'(t_1 - r) \operatorname{grad} r \quad E_r'(t_1 - r)\, \boldsymbol{n} \Big\} \frac{d\sigma}{r} \\
& + \int_\sigma \Big\{ \boldsymbol{E}(t_1 - r) \cos rn + E_n(t_1 - r) \operatorname{grad} r - E_r(t_1 - r)\, \boldsymbol{n} \Big\} \frac{d\sigma}{r^2} \\
& - \int_\sigma \rho_e(t_1 - r)\, \boldsymbol{n}\, \frac{d\sigma}{r} - \int_\Omega \boldsymbol{X}(t_1 - r) \frac{d\Omega}{r}.
\end{aligned}
$$

Poniamo:

$$
\boldsymbol{N} = \int_\Omega \boldsymbol{X}(t_1 - r) \frac{d\Omega}{r} + \int_\sigma \rho_e(t_1 - r)\, \boldsymbol{n}\, \frac{d\sigma}{r}.
$$

Sostituiamo al posto della $\boldsymbol{X}$ la (5); si trae:

$$
(78) \qquad \boldsymbol{N} = \int_\Omega [\operatorname{grad} \rho_e]_{t=t_1-r} \frac{d\Omega}{r} + \int_\sigma \rho_e(t_1 - r)\, \boldsymbol{n}\, \frac{d\sigma}{r} + 4\pi\mu \int_\Omega \boldsymbol{K}'(t_1 - r) \frac{d\Omega}{r}.
$$

Denotiamo con $[\rho_e]$ ciò che diventa la funzione $\rho_e(x, y, z, t)$, quando al posto della variabile t poniamo $t_1 - r$; si ha, intendendo che ora il grad si riferisca alle variabili x, y, z,

$$
\operatorname{grad} \frac{[\rho_e]}{r} = \left[\operatorname{grad} \frac{\rho_e}{r} - \frac{1}{r} \operatorname{grad} r \frac{\partial \rho_e}{\partial t} \right]_{t=t_1-r}.
$$

Da questa si ricava:

$$
(79) \qquad \int_\Omega \operatorname{grad} \frac{[\rho_e]}{r}\, d\Omega = \int_\Omega \left[\frac{1}{r} \operatorname{grad} \rho_e + \rho_e \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right]_{t=t_1-r} d\Omega - \int_\Omega \rho_e'(t_1 - r) \operatorname{grad} r \frac{d\Omega}{r}.
$$

Ma il primo membro, per lecita applicazione del lemma di Green, vale

$$
- \int_\sigma \frac{\rho_e(t_1 - r)}{r}\, \boldsymbol{n}\, d\sigma :
$$

quindi, dalla precedente (79), si ottiene:

$$
\begin{aligned}
& \int_\Omega [\operatorname{grad} \rho_e]_{t=t_1-r} \frac{d\Omega}{r} + \int_\sigma \frac{\rho_e(t_1 - r)}{r}\, \boldsymbol{n}\, d\sigma = \\
& \qquad = \int_\Omega \left\{ \frac{\rho'(t_1 - r)}{r} \operatorname{grad} r - \rho_e(t_1 - r) \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right\} d\Omega,
\end{aligned}
$$

ovvero:

$$\int_\Omega [\operatorname{grad} \rho_e]_{t=t_1-r} \frac{d\Omega}{r} + \int_\sigma \frac{\rho_e(t_1 - r)}{r} \, n \, d\sigma = \operatorname{grad} \int_\Omega \frac{\rho_e(t_1 - r)}{r} \, d\Omega, \tag{80}$$

intendendo ora che il *grad* del secondo membro si riferisca alle variabili x_1, y_1, z_1.

Surrogando la (80) nella (77), si trae in definitiva:

$$\begin{aligned}(81)\qquad 4\pi \boldsymbol{E}(x_1, y_1, z_1, t_1) = \int_\sigma \Big\{ & \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \boldsymbol{H}'(t_1 - r) \wedge \boldsymbol{n} \\ & + \boldsymbol{E}'(t_1 - r) \cos rn + E_n'(t_1 - r) \operatorname{grad} r - E_r'(t_1 - r) \boldsymbol{n} \Big\} \frac{d\sigma}{r} \\ & + \int_\sigma \Big\{ \boldsymbol{E}(t_1 - r) \cos rn + E_n(t_1 - r) \operatorname{grad} r - E_r(t_1 - r) \boldsymbol{n} \Big\} \frac{d\sigma}{r^2} \\ & - \operatorname{grad} \int_\Omega \frac{\rho_e(t_1 - r)}{r} \, d\Omega - 4\pi\mu \int_\Omega \frac{\boldsymbol{k}'(t_1 - r)}{r} \, d\Omega. \end{aligned}$$

Un calcolo simile a quello sviluppato per ottenere la (77) conduce intanto alla seguente espressione della forza magnetica nel punto (x_1, y_1, z_1) e all'istante t_1:

$$\begin{aligned}(82)\qquad 4\pi \boldsymbol{H}(x_1, y_1, z_1, t_1) = \int_\sigma \Big\{ & \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \, \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{E}'(t_1 - r) + \\ & + \boldsymbol{H}'(t_1 - r) \cos rn + H_n'(t_1 - r) \operatorname{grad} r - H_r'(t_1 - r) \boldsymbol{n} \Big\} \frac{d\sigma}{r} \\ & + \int_\sigma \Big\{ \boldsymbol{H}(t_1 - r) \cos rn + H_n(t_1 - r) \operatorname{grad} r - H_r(t_1 - r) \boldsymbol{n} \Big\} \frac{d\sigma}{r^2} \\ & + 4\pi \sqrt{\varepsilon\mu} \int_\sigma \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{k}(t_1 - r) \frac{d\sigma}{r} - \int_\Omega \boldsymbol{Y}(t_1 - r) \frac{d\Omega}{r}. \end{aligned}$$

Poniamo:

$$\boldsymbol{N}_1 = 4\pi \sqrt{\varepsilon\mu} \int_\sigma \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{k}(t_1 - r) \frac{d\sigma}{r} - \int_\Omega \boldsymbol{Y}(t_1 - r) \frac{d\Omega}{r}. \tag{83}$$

Surrogando la $\boldsymbol{Y}$ con la sua espressione (6) si ottiene:

$$\boldsymbol{N}_1 = 4\pi \sqrt{\varepsilon\mu} \left\{ \int_\sigma \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{k}(t_1 - r) \frac{d\sigma}{r} + \int_\Omega [\operatorname{rot} \boldsymbol{k}]_{t=t_1-r} \frac{d\Omega}{r} \right\}. \tag{84}$$

Indichiamo con $[\boldsymbol{k}]$ ciò che diventa la funzione $\boldsymbol{k}(x, y, z, t)$ quando al posto della variabile t poniamo $t_1 - r$.

Si ha, con referenza alle variabili x, y, z,

$$\operatorname{rot}\frac{[\boldsymbol{k}]}{r} = \left[\operatorname{rot}\frac{\boldsymbol{k}}{r} - \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial t}\frac{1}{r}\operatorname{rot} r\right]_{t=t_1-r},$$

d' onde:

$$(85)\qquad \int_\Omega \operatorname{rot}\frac{[\boldsymbol{k}]}{r}\,d\Omega = \int_\Omega \left[\frac{1}{r}\operatorname{rot}\boldsymbol{k} + \operatorname{grad}\frac{1}{r}\wedge \boldsymbol{k}\right]_{t=t_1-r} d\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{k}'(t_1 - r)\operatorname{rot} r\,\frac{d\Omega}{r}.$$

Il primo membro vale

$$-\int_\sigma \frac{\boldsymbol{n}\wedge \boldsymbol{k}(t_1 - r)}{r}\,d\sigma.$$

Quindi, dalla (85) si trae:

$$(86)\qquad \int_\sigma \frac{\boldsymbol{n}\wedge \boldsymbol{k}(t_1 - r)}{r}\,d\sigma + \int_\Omega [\operatorname{rot}\boldsymbol{k}]_{t=t_1-r}\frac{d\Omega}{r} =$$

$$= \int_\Omega \left\{\frac{\boldsymbol{k}'(t_1 - r)}{r}\operatorname{rot} r - \operatorname{grad}\frac{1}{r}\wedge \boldsymbol{k}\right\} d\Omega,$$

ovvero:

$$(87)\qquad \int_\sigma \frac{\boldsymbol{n}\wedge \boldsymbol{k}(t_1 - r)}{r}\,d\sigma + \int_\Omega [\operatorname{rot}\boldsymbol{k}]_{t=t_1-r}\frac{d\Omega}{r} = \operatorname{rot}\int_\Omega \frac{\boldsymbol{k}(t_1 - r)}{r}\,d\Omega,$$

nella quale formula il simbolo *rot* del secondo membro si riferisce ora alle variabili x_1, y_1, z_1.

Sostituendo la (87) nella (84), si ottiene in definitiva:

$$(88)\qquad 4\pi \boldsymbol{H}(x_1, y_1, z_1, t_1) = \int_\sigma \left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\boldsymbol{n}\wedge \boldsymbol{E}'(t_1 - r) + \right.$$

$$\left. + \boldsymbol{H}'(t_1 - r)\cos rn + H_n'(t_1 - r)\operatorname{grad} r - H_r'(t_1 - r)\boldsymbol{n} \right\}\frac{d\sigma}{r}$$

$$+ \int_\sigma \left\{ \boldsymbol{H}(t_1 - r)\cos rn + H_n(t_1 - r)\operatorname{grad} r - H_r(t_1 - r)\boldsymbol{n} \right\}\frac{d\sigma}{r^2}$$

$$+ 4\pi\sqrt{\varepsilon\mu}\operatorname{rot}\int_\Omega \frac{\boldsymbol{k}(t_1 - r)}{r}\,d\Omega.$$

Nelle espressioni (81), (88) figurano *soltanto i valori delle forze elettriche e magnetiche nei punti della superficie per ogni istante di tempo,* oltre la distribuzione — che si suppone nota — in tutto il campo Ω, della densità $\boldsymbol{k}$ delle correnti di convezione. Cosicchè, *mentre per la risoluzione del problema che ci siamo proposti, relativo alla superficie fissa situata in un campo elettromagnetico di natura qualsivoglia, sono richiesti i dati* a) *e* b) *del Cap. I, per l'analogo problema, quando la superficie è invece immersa in un mezzo non assorbente, sono sufficienti soltanto i dati* a).

Questo risultato, che ci sembra non privo d'interesse, non figura nelle formule del TEDONE, perchè Egli non considera a parte il problema della superficie fissa situata in un campo qualesivoglia.

Nelle formule (81), (88) facciamo $\rho_e = 0$, $\boldsymbol{k} = 0$, $\varepsilon = \mu = 1$; otteniamo:

$$
\begin{aligned}
(89) \qquad 4\pi \boldsymbol{E}(x_1, y_1, z_1, t_1) = \int_\sigma \Big\{ & \boldsymbol{H}'(t_1 - r) \wedge \boldsymbol{n} \\
& + \boldsymbol{E}'(t_1 - r) \cos rn + E_n'(t_1 - r) \operatorname{grad} r - E_r'(t_1 - r)\boldsymbol{n} \Big\} \frac{d\sigma}{r} \\
& + \int_\sigma \Big\{ \boldsymbol{E}(t_1 - r) \cos rn + E_n(t_1 - r) \operatorname{grad} r - E_r(t_1 - r)\boldsymbol{n} \Big\} \frac{d\sigma}{r^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(90) \qquad 4\pi \boldsymbol{H}(x_1, y_1, z_1, t_1) = \int_\sigma \Big\{ & \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{E}'(t_1 - r) \\
& + \boldsymbol{H}'(t_1 - r) \cos rn + H_n'(t_1 - r) \operatorname{grad} r - H_r'(t_1 - r)\boldsymbol{n} \Big\} \frac{d\sigma}{r} \\
& + \int_\sigma \Big\{ \boldsymbol{H}(t_1 - r) \cos rn + H_n(t_1 - r) \operatorname{grad} r - H_r(t_1 - r)\boldsymbol{n} \Big\} \frac{d\sigma}{r^2}.
\end{aligned}
$$

Da queste espressioni che danno $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ nel punto (x_1, y_1, z_1) e all'istante t_1, si ottengono le componenti di queste forze le quali (a meno dell'ovvio passaggio alle variabili $\xi = cx$, $\eta = cy$, $\zeta = cz$, $\tau = t$) coincidono con quelle che figurano nella nostra citata Memoria, con l'avvertenza di eseguire in queste quei cambiamenti di segno già menzionati a pag. 250 della presente ricerca.

Per ottenere poi le formule date dal TEDONE nel caso qui considerato, trasformiamo le (89), (90) nel modo che segue. Notando che

$$\frac{\partial E_n(t_1 - r)}{\partial t_1} = - \frac{\partial E_n(t_1 - r)}{\partial r},$$

abbiamo:

$$\text{(91)} \qquad \operatorname{grad} r \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial E_n(t_1 - r)}{\partial t_1} + \frac{E_n(t_1 - r)}{r^2} \right\} = - \frac{1}{r} \frac{\partial E_n(t_1 - r)}{\partial r} \operatorname{grad} r +$$

$$+ \frac{E_n(t_1 - r)}{r^2} \operatorname{grad} r = - \frac{1}{r} \operatorname{grad} \boldsymbol{E}(t_1 - r) \times \boldsymbol{n} - \boldsymbol{E}(t_1 - r) \times \boldsymbol{n} \operatorname{grad} \frac{1}{r} =$$

$$= - \operatorname{grad} \frac{\boldsymbol{E}(t_1 - r) \times \boldsymbol{n}}{r}.$$

Osserviamo ancora che

$$E_r(t_1 - r)\,\boldsymbol{n} - \boldsymbol{E}(t_1 - r) \cos rn = (\boldsymbol{E}(t_1 - r) \times \operatorname{grad} r)\,\boldsymbol{n} -$$

$$- (\boldsymbol{n} \times \operatorname{grad} r)\,\boldsymbol{E}(t_1 - r) = (\boldsymbol{E}(t_1 - r) \wedge \boldsymbol{n}) \wedge \operatorname{grad} r.$$

Perciò:

$$\frac{1}{r} \left\{ E_r'(t_1 - r)\,\boldsymbol{n} - \boldsymbol{E}'(t_1 - r) \cos rn \right\}$$

$$+ \frac{1}{r^2} \left\{ E_r(t_1 - r)\,\boldsymbol{n} - \boldsymbol{E}(t_1 - r) \cos rn \right\} =$$

$$\frac{1}{r} \left\{ (\boldsymbol{E}'(t_1 - r) \wedge \boldsymbol{n}) \wedge \operatorname{grad} r \right\} + \frac{1}{r^2} \left\{ (\boldsymbol{E}(t_1 - r) \wedge \boldsymbol{n}) \wedge \operatorname{grad} r \right\} =$$

$$= \frac{1}{r} \left\{ \left(\boldsymbol{n} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{E}(t_1 - r)}{\partial r} \right) \wedge \operatorname{grad} r \right\} + \operatorname{grad} \frac{1}{r} \wedge (\boldsymbol{E}(t_1 - r) \wedge \boldsymbol{n}) =$$

$$= \frac{1}{r} \operatorname{rot} (\boldsymbol{E}(t_1 - r) \wedge \boldsymbol{n}) + \operatorname{grad} \frac{1}{r} \wedge (\boldsymbol{E}(t_1 - r) \wedge \boldsymbol{n}).$$

Il secondo membro vale, per formula nota,

$$\operatorname{rot} \frac{\boldsymbol{E}(t_1 - r) \wedge \boldsymbol{n}}{r}.$$

Quindi:

$$\text{(92)} \qquad \frac{1}{r} \left\{ E_r'(t_1 - r)\,\boldsymbol{n} - \boldsymbol{E}'(t_1 - r) \cos rn \right\}$$

$$+ \frac{1}{r^2} \left\{ E_r(t_1 - r)\,\boldsymbol{n} - \boldsymbol{E}(t_1 - r) \cos rn \right\} =$$

$$\operatorname{rot} \frac{\boldsymbol{E}(t_1 - r) \wedge \boldsymbol{n}}{r}.$$

In virtù delle (91), (92) le formule (89), (90) si trasformano in quelle ottenute dal Tedone [1] (a meno dell'ovvio passaggio alle variabili ξ, η, ζ, τ e nelle quali si faccia $\mu = \varepsilon = 1$):

$$\begin{aligned} 4\pi \boldsymbol{E}(x_1,\, y_1,\, z_1,\, t_1) = & \int_\sigma \frac{\boldsymbol{H}'(t_1 - r) \wedge \boldsymbol{n}}{r}\, d\sigma \\ & - \operatorname{rot} \int_\sigma \frac{\boldsymbol{E}(t_1 - r) \wedge \boldsymbol{n}}{r}\, d\sigma \\ & - \operatorname{grad} \int_\sigma \frac{\boldsymbol{E}(t_1 - r) \times \boldsymbol{n}}{r}\, d\sigma, \\ 4\pi \boldsymbol{H}(x_1,\, y_1,\, z_1,\, t_1) = & \int_\sigma \frac{\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{E}'(t_1 - r)}{r}\, d\sigma \\ & - \operatorname{rot} \int_\sigma \frac{\boldsymbol{H}(t_1 - r) \wedge \boldsymbol{n}}{r}\, d\sigma \\ & - \operatorname{grad} \int_\sigma \frac{\boldsymbol{H}(t_1 - r) \times \boldsymbol{n}}{r}\, d\sigma. \end{aligned}$$

---

(1) O. Tedone, *Sull'integrazione delle equazioni di Maxwell.* [« Rend. della R. Acc. dei Lincei », vol. XXV, serie 5ª, 1° sem. (1916)]. Due Note.

Les séries de polynomes à deux variables complexes.

Par N. ABRAMESCO (à Cluj - Roumanie).

1. Les séries de polynomes à deux variables complexes, $\Sigma\Sigma A_{m,n}P_{m,n}(x, y)$, $\Sigma\Sigma \frac{A_{m,n}}{P_m(x)Q_n(y)}$, apparaissent comme une généralisation des séries $\Sigma\Sigma A_{m,n}x^m y^n$ (¹), $\Sigma\Sigma \frac{A_{m,n}}{x^m y^n}$. En commençant par les séries $\Sigma\Sigma A_{m,n}P_{m,n}(x, y)$, on peut en faire l'étude comme pour les séries d'une seule variable. Premièrement, étant donnée une fonction $F(x, y)$, régulière dans les champs (D) et (Δ), limités par les courbes (C) et (Γ), respectivement sur les plans x et y, trouver le développement de la fonction $F(x, y)$ en séries de polynomes, $F(x, y) = \Sigma\Sigma A_{m,n}P_{m,n}(x, y)$ (²). Nous considérons seulement le cas où les courbes (C) et (Γ) sont à simple connexion et nous montrons que le développement de la fonction $F(x, y)$ est valable seulement à l'intérieur des champs (D) et (Δ), que les polynomes $P_{m,n}(x, y)$ dépendent des courbes (C) et (Γ) et que les coefficients $A_{m,n}$ dépendent des courbes (C) et (Γ) et de la fonction $F(x, y)$ (³).

Nous étudions de même le cas où l'on se donne les polynomes $P_{m,n}(x, y)$ et les coefficients $A_{m,n}$, et on demande les champs de convergence (ou les courbes associées de convergence) sur les plans x et y des séries $\Sigma\Sigma A_{m,n}P_{m,n}(x, y)$. Nous considérons le cas où $P_{m,n} = P_m(x)Q_n(y)$, les polynomes $P_m(x)$, $Q_n(y)$ étant donnés par des relations de récurrence de POINCARÉ (⁴), ou quand on connait $\lim \sqrt[m]{|P_m(x)|}$, $\lim \sqrt[n]{|Q_n(y)|}$.

(¹) LEMAIRE, *Sur les séries entières à plusieures variables indépendantes* [« Bulletin des Sciences math. », 2ᵉ série, t. XX (1896), pp, 286-292].

(²) Voir, pour le cas d'une seule variable, FABER, *Ueber polynomische Entwickelungen* (« Math. Annalen », 1903, n. 389; 1907, p. 118).

(³) Voir ma Note, « Comptes Rendus », t. 175, 1922, p. 203.

(⁴) POINCARÉ, *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* (« American Journal of Mathematics », 1885). Voir ma Note, « Comptes Rendus », t. 175, 1922, p, 305.

En considérant les séries $\Sigma\Sigma \frac{A_{m,n}}{P_m(x)Q_n(y)}$ suivant les inverses de polynomes donnés, nous étudions les champs de convergence quand on donne les coefficients $A_{m,n}$ et les polynomes $P_m(x)$, $Q_n(y)$. Nous considérons les cas où les polynomes P_m, Q_n sont donnés par des relations de récurrence de POINCARÉ [5], ou quand on connait $\lim \sqrt[m]{|P_m(x)|}$, $\lim \sqrt[n]{|Q_n(y)|}$. De même pour les séries $\Sigma\Sigma A_{m,n}P_m(x)Q_n(y) + \Sigma\Sigma \frac{B_{m,n}}{P_m(x)Q_n(y)}$ [6].

2. Développement d'une fonction $F(x, y)$ en série de polynomes. — I. Faisons dans l'intégrale double

$$\iint F(x, y)dx\,dy \tag{1}$$

le changement de variables

$$x = \varphi(X, Y), \quad y = \psi(X, Y). \tag{2}$$

Par définition, on sait [7] que l'intégrale (1) est égale à

$$\iint F(x, y)\frac{D(x, y)}{D(\alpha, \beta)}d\alpha\,d\beta, \tag{3}$$

étendue à la portion de surface de l'espace à quatre dimensions (x_1, x_2, x_3, x_4), $x = x_1 + ix_2$, $y = x_3 + ix_4$, correspondante à l'aire donnée (A) sur le plan (α, β), x_1, x_2, x_3, x_4, et donc x et y, étant fonctions des deux paramètres α et β.

Des relations (2), on déduit

$$\frac{D(x, y)}{D(\alpha, \beta)} = \frac{D(x, y)}{D(X, Y)}\frac{D(X, Y)}{D(\alpha, \beta)}$$

et l'intégrale (3) devient

$$\iint F(x, y)dxdy = \iint \left[F(\varphi, \psi)\frac{D(\varphi, \psi)}{D(X, Y)}\right]\left[\frac{D(X, Y)}{D(\alpha, \beta)}\,dxdy\right],$$

---

[5] Voir ma Note, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. XLVII, 1923.

[6] Voir aussi S. PINCHERLE, *Alcune osservazioni sopra i sistemi di funzioni associate...* [« Annali di Matematica » (2), t. II, 1883-1884; t. 21, 1894; « Mem. Acc. Bologna » (6), t. XI, 1912]; *Sopra alcuni nuclei analitici* (« Rendiconti dell'Accademia di Bologna », 1916).

[7] Voir PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 273.

et, avec la même définition de l'intégrale double de variables complexes, on obtient

$$\iint F(x, y)dxdy = \iint F[\varphi(X, Y), \psi(X, Y)] \frac{D(\varphi, \psi)}{D(X, Y)} dXdY,$$

qui est la *formule qui donne le changement de variables dans une intégrale double à variables complexes.*

II. Soit $F(u, v)$ une fonction régulière à l'intérieur des courbes (C) et (Γ) et le long de ces courbes, situées respectivement dans les plans u et v. x et y étant deux points intérieurs respectivement aux courbes (C) et (Γ), faisons dans l'intégrale double

$$F(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{(C)}\int_{(\Gamma)} \frac{F(u, v)}{(u-x)(v-y)} dudv \tag{4}$$

le changement de variables

$$u = g(U, V), \quad v = h(U, V), \quad (u = x_1 + iy_1, \ v = x_2 + iy_2). \tag{5}$$

À l'ensemble des deux courbes (C) et (Γ) de l'espace (u, v) à quatre dimensions, vont correspondre, avec la transformation (5), dans les plans U et V, les courbes (c) et (γ),

$$U = X_1 + iY_1, \quad V = X_2 + iY_2.$$

Nous prendrons les fonctions g et h, telles que, aux domaines extérieurs aux courbes (C) et (Γ), correspondent les champs intérieurs aux cercles (c) et (γ) de rayons égaux à l'unité, et aux points $u = \infty$, $v = \infty$, les centres des cercles, $U = 0$, $V = 0$,

$$\left\{\begin{aligned} & u = \frac{P(V)}{U} + f(U, V), \quad v = \frac{Q(U)}{V} + \varphi(U, V), \\ & P(V) = \sum_{i=0} \alpha_i V^i, \quad f(U, V) = \sum_{m=0}\sum_{n=0} a_{m,n} U^m V^n, \\ & Q(U) = \sum_{i=0} \beta_i U^i, \quad \varphi(U, V) = \sum_{m=0}\sum_{n=0} b_{m,n} U^m V^n, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

les fonctions P, f, Q, φ étant régulières dans les cercles (c) et (γ). La détermination de ces fonctions dépend de la correspondance qu'on établit entre les points u et v des courbes (C) et (Γ) et les points U, V des courbes (c) et (γ) et encore de la correspondance qu'on établit entre les rayons $r < 1$, $\rho < 1$ des cercles associés intérieurs aux cercles (c) et (γ), à qui on correspond des courbes extérieures aux courbes (C) et (Γ), sur les plans u et v.

En remplaçant dans (4), on a

$$F(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{(c)}\int_{(\gamma)} \frac{F(g, h)}{(g-x)(h-y)} \frac{D(u, v)}{D(U, V)} dU dV; \tag{7}$$

$$\frac{D(u, v)}{D(U, V)} = \frac{\partial u}{\partial U}\frac{\partial v}{\partial V} - \frac{\partial u}{\partial V}\frac{\partial v}{\partial U} =$$

$$= \left[-\frac{P(V)}{U^2} + \frac{\partial f}{\partial U}\right]\left[-\frac{Q(U)}{V^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial V}\right] - \left[\frac{1}{U}\frac{\partial P}{\partial V} + \frac{\partial f}{\partial V}\right]\left[\frac{1}{V}\frac{\partial Q}{\partial U} + \frac{\partial \varphi}{\partial U}\right],$$

$$\frac{D(u, v)}{D(U, V)} = \frac{1}{U^2 V^2}\left[\left(-\alpha_0 - \alpha_1 V - \ldots + U^2 \frac{\partial f}{\partial U}\right)\left(-\beta_0 - \beta_1 U - \ldots + V^2 \frac{\partial \varphi}{\partial V}\right) - \right.$$

$$\left. -\left(\alpha_1 U + 2\alpha_2 UV + \ldots + U^2 \frac{\partial f}{\partial V}\right)\left(\beta_1 V + 2\beta_2 UV + \ldots + V^2 \frac{\partial \varphi}{\partial U}\right)\right],$$

$$\psi(U, V) = \frac{\frac{D(u, v)}{D(U, V)}}{(u-x)(v-y)} = \frac{\left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_0} V + \ldots\right)\left(1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} U + \ldots\right) - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0} U + \ldots\right)\left(\frac{\beta_1}{\beta_0} V + \ldots\right)}{UV(1-R)(1-S)}, \tag{8}$$

où

$$R = \frac{x - a_{0,0}}{\alpha_0} U + c_{0,1} V + c_{2,0} U^2 + c_{1,1} UV + c_{0,2} V^2 + \ldots,$$

$$S = \frac{y - b_{0,0}}{\beta_0} V + d_{1,0} U + d_{2,0} U^2 + d_{1,1} UV + d_{0,2} V^2 + \ldots.$$

Pour des valeurs assez petites de U et V, on peut supposer $|R| < 1$, $|S| < 1$, et donc

$$\frac{1}{1-R} = 1 + Q_{1,0} U + Q_{0,1} V + Q_{2,0} U^2 + Q_{1,1} UV + Q_{0,2} V^2 + \ldots,$$

$$\frac{1}{1-S} = 1 + T_{1,0} U + T_{0,1} V + T_{2,0} U^2 + T_{1,1} UV + T_{0,2} V^2 + \ldots,$$

où $Q_{p,q}$ sont des polynomes de degré p par rapport à $\frac{x - a_{0,0}}{\alpha_0}$ et $T_{r,s}$ de degré s par rapport à $\frac{y - b_{0,0}}{\beta_0}$.

Donc

$$\frac{1}{(1-R)(1-S)} = 1 + \Sigma\Sigma\, U^m V^n \Pi_{m,n}(x, y),$$

$\Pi_{m,n}(x, y)$ étant des polynomes de degré m en $\frac{x - a_{0,0}}{\alpha_0}$ et n en $\frac{y - b_{0,0}}{\beta_0}$.

En remplaçant en (8), on a

$$\psi(U, V) = \frac{1}{UV}[1 + \Sigma\Sigma U^m V^n P_{m,n}(x, y)],$$

$P_{m,n}(x, y)$ étant des polynomes de degré m en $\dfrac{x - a_{0,0}}{\alpha_0}$ et de degré n en $\dfrac{y - b_{0,0}}{\beta_0}$.

Ce développement est valable à l'intérieur des cercles (c) et (γ); donc, en remplaçant en (7), et en intégrant, nous avons, pour tous les points x et y intérieurs respectivement aux champs limités par les courbes (C) et (Γ),

$$F(x, y) = \Sigma\Sigma A_{m,n} P_{m,n}(x, y),$$

$$A_{m,n} = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{(c)}\int_{(\gamma)} F[h(U, V), g(U, V)] U^{m-1} V^{n-1} dU dV.$$

Nous avons obtenu ainsi le développement de la fonction $F(x, y)$ en série de polynomes de deux variables complexes, valable seulement à l'intérieur des courbes (C) et (Γ), les polynomes dépendant seulement des contours (C) et (Γ) et les coefficients $A_{m,n}$, des contours et de la fonction $F(x, y)$.

EXEMPLES. 1°) $u = \dfrac{r}{U} + x_0$, $v = \dfrac{\rho}{V} + y_0$; les courbes (C) et (Γ) sont les cercles de centres x_0 et y_0 et de rayons r et ρ. On trouve

$$P_{m,n}(x, y) = \left(\frac{x - x_0}{r}\right)^m \left(\frac{y - y_0}{\rho}\right)^n.$$

2°) $u = \dfrac{\alpha_0}{U} + f(U)$, $v = \dfrac{\beta_0}{V} + \varphi(V)$; $P_{m,n}(x, y) = P_m(x) Q_n(y)$, $P_m(x)$ et $Q_n(y)$ étant les polynomes de M. FABER qui correspondent respectivement aux contours (C) et (Γ), dans le cas d'une variable complexe.

3°) $u = \dfrac{1}{2}\left(2U + \dfrac{1}{U} - \dfrac{V^2}{U}\right)$, $v = \dfrac{1}{2}\left(2V + \dfrac{1}{V} - \dfrac{U^2}{V}\right)$. Si U et V décrivent les cercles (c_1) et (γ_1) de rayons égaux, $\rho < 1$, avec la correspondance $U = \rho e^{i\omega}$, $V = \rho e^{i\omega}$, on obtient, sur les plans $u = x_1 + iy_1$, $v = x_2 + iy_2$, les courbes associées (C_1) et (Γ_1),

$$x_1 + iy_1 = \frac{1}{2}\left(\rho e^{i\omega} + \frac{1}{\rho} e^{-i\omega}\right), \quad x_2 + iy_2 = \frac{1}{2}\left(\rho e^{i\omega} + \frac{1}{\rho} e^{-i\omega}\right),$$

qui sont des ellipses homofocales égales, de foyers -1 et $+1$.

3. Les courbes associées de convergence des séries $\Sigma\Sigma A_{m,n} P_m(x) Q_n(y)$. — On sait (¹) que si $\lambda(k)$ est une fonction donnée et les coefficients $A_{m,n}$ tels que

$$\overline{\lim_{m+n\to\infty}} \sqrt[m+n]{|A_{m,n}|k^n} = \frac{1}{\lambda(k)},$$

alors $r = \lambda(k)$, $\rho = \frac{\lambda(k)}{k}$ forment un système de cercles associés de convergence pour la série $\Sigma\Sigma A_{m,n} x^m y^n$, (r, ρ) étant un point intérieur à la courbe $r = \lambda\left(\frac{r}{\rho}\right)$ [par rapport à deux axes rectangulaires Or, $O\rho$, la région intérieure étant celle où se trouve l'origine O].

I. Considérons les séries $\Sigma\Sigma A_{m,n} P_m(x) Q_n(y)$, *les polynomes* $P_m(x)$ *et* $Q_n(y)$ *étant donnés par des relations de Poincaré* (⁴)

$$\begin{aligned} R_p(x)P_{m+p}(x) + \ldots + R_0(x)P_m(x) &= 0, \\ S_q(y)Q_{n+q}(y) + \ldots + S_0(y)Q_n(y) &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

p et q étant des nombres donnés et $R_s(x)$, $S_t(y)$ des fonctions données qui dépendent respectivement de x et du rang m, de y et du rang n.

On sait que, si $\frac{P_{m+1}(x)}{P_m(x)}$, $\frac{Q_{n+1}(y)}{Q_n(y)}$ ont des limites, on a

$$\lim_{m\to\infty} \frac{P_{m+1}(x)}{P_m(x)} = \alpha(x), \quad \lim_{n\to\infty} \frac{Q_{n+1}(y)}{Q_n(y)} = \beta(y),$$

$\alpha(x)$ et $\beta(y)$ étant les racines de plus grand module respectivement des équations

$$\begin{aligned} z^p + a_{p-1}z^{p-1} + \ldots + a_0 &= 0, \quad a_s = \lim_{m\to\infty} \frac{R_s}{R_p} \\ z^q + b_{q-1}z^{q-1} + \ldots + b_0 &= 0, \quad b_t = \lim_{n\to\infty} \frac{S_t}{S_q}. \end{aligned} \tag{10}$$

Supposons que les coefficients $A_{m,n}$ soient donnés au sens de MM. HADAMARD, LEMAIRE, tels que

$$\overline{\lim_{m+n\to\infty}} \sqrt[m+n]{|A_{m,n}|k^n} = \frac{1}{\lambda(k)}$$

et proposons-nous de trouver les courbes associées de convergence des séries $\Sigma\Sigma A_{m,n} P_m(x) Q_n(y)$.

Supposons d'abord $|\alpha(x)| < \lambda$, $|\beta(y)| < \frac{\lambda}{k}$; on peut déterminer r_1 et ρ_1, tels que $|\alpha| < r_1 < \lambda$, $|\beta| < \rho_1 < \frac{\lambda}{k}$. Alors, on a

$$\lim \frac{P_{m+1}(x)}{P_m(x)} = \alpha(x), \quad \left|\frac{P_{m+1}}{P_m}\right| < |\alpha| + \varepsilon; \quad \left|\frac{Q_{n+1}}{Q_n}\right| < |\beta| + \varepsilon;$$

$$\left|\frac{P_{m+1}}{P_m}\right| < r_1, \quad \left|\frac{Q_{n+1}}{Q_n}\right| < \rho_1,$$

et, si nous supposons que ces relations ont lieu en partant de $m=0$ et $n=0$, on a

$$\left|\frac{P_1}{P_0}\right| < r_1, \dots \left|\frac{P_m}{P_{m-1}}\right| < r_1; \quad |P_m| < |P_0|\, r_1^m, \quad |Q_n| < |Q_0|\, \rho_1^n,$$

$$|A_{m,n}P_m(x)Q_n(y)| < |P_0|\,|Q_0|\,|A_{m,n}r_1^m\rho_1^n|.$$

Cette relation montre que la série considérée est valable dans l'ensemble $|\alpha| < \lambda$, $|\beta| < \frac{\lambda}{k}$, car les termes de ce développement sont plus petits que ceux de la série convergente $\Sigma\Sigma A_{m,n}r_1^m\rho_1^n$, $r_1 < \lambda$, $\rho_1 < \frac{\lambda}{k}$.

Supposons, au contraire, $|\alpha| > \lambda$, $|\beta| > \frac{\lambda}{k}$; on peut trouver r_2 et ρ_2, tels que $\lambda < r_2 < |\alpha|$, $\frac{\lambda}{k} < \rho_2 < |\beta|$. On a dans ces conditions

$$\left|\frac{P_{m+1}}{P_m}\right| > |\alpha| - \varepsilon, \quad \left|\frac{P_{m+1}}{P_m}\right| > r_2, \quad \left|\frac{Q_{n+1}}{Q_n}\right| > \rho_2,$$

$$|A_{m,n}P_m(x)Q_n(y)| > |P_0|\,|Q_0|\,|A_{m,n}r_2^m\rho_2^n|,$$

relation qui prouve que la série considérée diverge dans l'ensemble $|\alpha| > \lambda$, $|\beta| > \frac{\lambda}{k}$, comme ayant les termes plus grands que ceux de la série divergente $\Sigma\Sigma A_{m,n}r_2^m\rho_2^n$, $r_2 > \lambda$, $\rho_2 > \frac{\lambda}{k}$.

Donc, les courbes associées de convergence des séries $\Sigma\Sigma A_{m,n}P_m(x)Q_n(y)$ sont données sur les plans x et y par les équations $|\alpha(x)| = \lambda$, $|\beta(y)| = \frac{\lambda(k)}{k}$, et les champs de convergence sont les régions intérieures aux courbes

$|\alpha(x)| = r$, $|\beta(y)| = \rho$, (r, ρ) étant un point intérieur (où se trouve l'origine O des axes Or, $O\rho$) de la courbe $r = \lambda\left(\frac{r}{\rho}\right)$.

EXEMPLE. Supposons que $P_m(x)$ et $Q_n(y)$ soient les polynomes de LEGENDRE

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!}\frac{d^m(x^2-1)^m}{dx^m}, \quad Q_n(y) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(y^2-1)^n}{dy^n}.$$

Les relations (9) et les équations (10) sont

$$mP_m(x) - (2m-1)xP_{m-1}(x) + (m-1)P_{m-2}(x) = 0, \qquad z^2 - 2zx + 1 = 0,$$
$$nQ_n(y) - (2n-1)yQ_{n-1}(y) + (n-1)Q_{n-2}(y) = 0, \qquad u^2 - 2uy + 1 = 0.$$

Les courbes associées de convergence sont les ellipses

$$x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right), \qquad |z| = r, \ |u| = \rho,$$

(r, ρ) étant un point intérieur à la courbe $r = \lambda\left(\frac{r}{\rho}\right)$.

II. *Considérons les séries* $\Sigma\Sigma A_{m,n}P_m(x)Q_n(y)$, *pour les quelles les coefficients* $A_{m,n}$ *sont donnés au sens de MM. Hadamard-Lemaire* [1] *et les polynômes* $P_m(x)$ *et* $Q_n(y)$ *tels que* $\lim \sqrt[m]{|P_m(x)|} = |p(x)|$, $\lim \sqrt[n]{|Q_n(y)|} = |q(y)|$. Pour trouver les courbes associées de convergence, supposons d'abord $|p(x)| < \lambda$, $|q(y)| < \frac{\lambda}{k}$. On peut déterminer r_1 et ρ_1, tels que $|p| < r_1 < \lambda$, $|q| < \rho_1 < \frac{\lambda}{k}$. On a $\sqrt[m]{|P_m(x)|} < r_1$, $\sqrt[n]{|Q_n(y)|} < \rho_1$,

$$|A_{m,n}P_m(x)Q_n(y)| < |A_{m,n}|\, r_1^m \rho_1^n,$$

relation qui prouve que le développement est valable dans l'ensemble $|p(x)| < \lambda$, $|q(y)| < \frac{\lambda}{k}$, car ses termes sont plus petits que ceux de la série convergente $\Sigma\Sigma A_{m,n} r_1^m \rho_1^n$, $r_1 < \lambda$, $\rho_1 < \frac{\lambda}{k}$.

Supposons au contraire, $|p(x)| > \lambda$, $|q(y)| > \frac{\lambda}{k}$. On peut déterminer r_2 et ρ_2, tels que $\lambda < r_2 < |p|$, $\frac{\lambda}{k} < \rho_2 < |q|$. On a, dans ces conditions,

$$\sqrt[m]{|P_m(x)|} > r_2, \quad \sqrt[n]{|Q_n(y)|} > \rho_2, \quad |A_{m,n}P_m(x)Q_n(y)| > |A_{m,n}|\, r_2^m \rho_2^n,$$

relation qui prouve que la série diverge, comme ayant ses termes plus grands que ceux d'une série divergente $\Sigma\Sigma A_{m,n} r_2^m \rho_2^n$, $r_2 > \lambda$, $\rho_2 > \frac{\lambda}{k}$ [Voir (1)].

Donc les courbes de convergence des séries considérées sont données sur les plans x et y par les équations $|p(x)| = \lambda$, $|q(y)| = \frac{\lambda}{k}$, et la série est valable pour les points intérieurs à ces courbes. Les champs de convergence sont les régions intérieures aux courbes $|p(x)| = r$, $|q(y)| = \rho$, (r, ρ) étant un point intérieur (où se trouve l'origine O des axes Or, $O\rho$) de la courbe $r = \lambda\left(\frac{r}{\rho}\right)$.

EXEMPLES. 1°) Supposons que $P_m(x)$ et $Q_n(y)$ sont des *polynomes de M. Faber*. Par ex., $P_m(x)$ les polynomes de M. FABER, attachés à la représentation conforme

$$z = \frac{a}{Z} + \varphi(Z), \quad \varphi(Z) = a_0 + a_1 Z + \ldots + a_m Z^m + \ldots,$$

qui vérifient la relation de récurrence

$$(11) \qquad aP_{m+1}(t) = atP_m(t) - a_1 P_{m-1}(t) - \ldots - a_{m-1} P_1(t) + (m+1)a_m,$$
$$t = \frac{x - a_0}{a}, \quad P_1 = -t,$$

les quantités a_m étant telles que $\lim \sqrt[m]{|a_m|} = \frac{1}{r}$.

Etant données les relations (11)

$$(12) \qquad \begin{aligned} aP_1 &= -(x - a_0), \\ aP_2 &= (x - a_0)P_1 + 2a_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

il résulte que, x appartenant à une certaine région de convergence, la série en Z (Z assez petit)

$$P_1 + ZP_2 + \ldots + Z^m P_{m+1} + \ldots$$

est le quotient des deux séries

$$(13) \quad \frac{c_1 + c_2 Z + \ldots + c_{m+1} Z^m + \ldots}{b_1 + b_2 Z + \ldots + b_{m+1} Z^m + \ldots} = P_1 + ZP_2 + \ldots + Z^m P_{m+1} + \ldots, \quad b_1 \gtrless 0.$$

D'où, par identification, les relations trouvées

$$\begin{aligned} &P_1 b_1 = c_1, \\ &P_2 b_1 + P_1 b_1 = c_2, \\ &P_3 b_1 + P_2 b_2 + P_1 b_3 = c_3, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

doivent être les relations (12). Donc

$$\begin{aligned} &c_1 = -(x - a_0),\ c_2 = 2a_1,\ c_3 = 3a_2, \dots\ c_{m+1} = (m+1)a_m, \dots \\ &b_1 = a,\ b_2 = -(x - a_0),\ b_3 = a_1, \dots\ b_{m+1} = a_{m-1}, \dots \end{aligned}$$

et la relation (13) devient

$$\frac{-\frac{a}{Z^2} + \varphi'(Z)}{\frac{a}{Z} + \varphi(Z) - x} = -\frac{1}{Z} + P_1(x) + ZP_2(x) + \dots,$$

la fonction $\varphi(Z)$ étant holomorphe dans le cercle de rayon r.

Posant

$$z = \frac{a}{Z} + \varphi(Z),$$

nous aurons le développement

(14) $$\frac{z'}{z - x} = -\frac{1}{Z} + P_1(x) + ZP_2(x) + \dots,$$

valable pour les points x intérieurs à une certaine région de convergence.

Or, la série $P_1(x) + ZP_2(x) + \dots$, ou $\Sigma Z^m P_m(x)$, a pour rayon de convergence $|Z| = \dfrac{1}{\lim \sqrt[m]{|P_m(x)|}}$ et le développement (14) est valable seulement pour les points x intérieurs à la courbe (Γ) obtenue par la transformation

$$z = \frac{a}{Z} + \varphi(Z).$$

Donc

$$\lim \sqrt[m]{|P_m(x)|} = \frac{1}{|Z|}, \quad x = \frac{a}{Z} + a_0 + a_1 Z + \dots + a_m Z^m + \dots.$$

De même, pour les polynomes $Q_n(y)$ de M. FABER, attachés à la représentation conforme

$$z = \frac{b}{Z} + \psi(Z),$$

$$\lim \sqrt[n]{|Q_n(y)|} = \frac{1}{|Z|}, \quad y = \frac{b}{Z} + b_0 + b_1 Z + \ldots + b_n Z^n + \ldots .$$

Les courbes de convergence associées des séries $\Sigma\Sigma A_{m,n} P_m(x) Q_n(y)$, P_m, Q_n étant des polynomes de M. FABER, sont données par

$$x = \frac{a}{Z} + a_1 Z + \ldots + a_m Z^m + \ldots, \quad \frac{1}{|Z|} = r,$$

$$y = \frac{b}{Z} + b_1 Z + \ldots + b_n Z^n + \ldots, \quad \frac{1}{|Z|} = \rho,$$

(r, ρ) étant un point intérieur à la courbe $r = \lambda\left(\frac{r}{\rho}\right)$.

2°) Supposons que $P_m(x)$ et $Q_n(y)$ sont des *polynomes orthogonaux*. Par ex., considérons les polynomes orthogonaux $P_m(x)$ donnés par

$$\int_a^b \varphi(x) P_m(x) P_n(x) dx = 0, \quad m \gtrless n, \quad \int_a^b \varphi(x) P_m^2(x) dx = \dot{I}_m = \text{const.}$$

On sait que $P_m = x^m + c_{m,m-1} x^{m-1} + \ldots + c_{m,0}$ peut se mettre sous la forme [8]

$$P_m(x) = \frac{D_{m-1}(F)}{D_{m-1}(\varphi)}, \quad F = (x-t)\varphi(t), \quad D_m(\varphi) = \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \cdots g_m \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ g_m & g_{m+1} & \cdots g_{2m} \end{vmatrix}, \quad g_s = \int_a^b \varphi(t) t^s dt,$$

$D_{m-1}(F)$ et $D_{m-1}(\varphi)$ étant les déterminants des formes quadratiques

$$\int_a^b (x-t)\varphi(t)(y_0 + y_1 t + \ldots + y_{m-1} t^{m-1})^2 dt = \sum_p \sum_q (x g_{p+q} - g_{p+q+1}) y_p y_q,$$

$$\int_a^b \varphi(t)(y_0 + y_1 t + \ldots + y_{m-1} t^{m-1})^2 dt = \Sigma\Sigma g_{p+q} y_p y_q, \quad p, q = 0, 1, 2, \ldots \; m-1.$$

---

[8] Voir mes Notes: *Sulle serie di polinomi di una variabile complessa. Le serie di Darboux* (« Annali di Matematica », t. XXXI, serie III, 1922; p. 207); *Résumé des principales propriétés des polynomes orthogonaux* (« Nouvelles Annales de Math. », février 1924).

En faisant le changement $t = \frac{1}{2}[(b-a)\cos\pi\theta + a + b]$, on a

$$P_m(x) = \frac{\Delta_{m-1}(\Psi)}{\Delta_{m-1}(\psi)}, \quad \Delta_{m-1}(\Psi) = |d_{pq}|, \quad \Delta_{m-1}(\psi) = |e_{pq}|,$$

$$d_{p,q} = \int_0^1 \Psi(\pi\theta)\cos p\pi\theta\cos q\pi\theta\, d\theta, \quad e_{p,q} = \int_0^1 \psi(\pi\theta)\cos p\pi\theta\cos q\pi\theta\, d\theta,$$

$$\Psi(\pi\theta) = (x-t)\varphi(t)\sin\pi\theta, \quad \psi(\pi\theta) = \varphi(t)\sin\pi\theta,$$

$$t = \frac{1}{2}[(b-a)\cos\pi\theta + a + b].$$

Faisant une transformation orthogonale, telle qu'une forme quadratique devienne une somme de carrés, $\lambda_0 X_0^2 + \lambda_1 X_1^2 + \ldots + \lambda_{m-1} X^2_{m-1}$, on a $\Delta_{m-1}(\Psi) = \lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{m-1}$ et donc

$$\sqrt[m]{\Delta_{m-1}(\Psi)} = \sqrt[m]{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{m-1}}.$$

Mais cette limite est connue et égale à [9]

$$e^{\int_0^1 \log\Psi\, d\theta}.$$

Donc

$$\sqrt[m]{\Delta_{m-1}(\Psi)} \to e^{\int_0^1 \log\Psi\, d\theta}, \quad \sqrt[m]{\Delta_{m-1}(\psi)} \to e^{\int_0^1 \log\psi\, d\theta},$$

$$\sqrt[m]{P_m(x)} \to e^{\int_0^1 \log(x-t)\, d\theta}, \quad t = \frac{1}{2}[(b-a)\cos\pi\theta + a + b].$$

Faisant $\pi\theta = \omega$, on a

(15)
$$\sqrt[m]{|P_m(x)|} \to e^{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \log|M + N\cos\omega|\, d\omega},$$

$$M = x - \frac{a+b}{2}, \quad N = \frac{a-b}{2} \lessgtr 0.$$

---

[9] Proposée comme problème dans l'*Intermédiaire des math*., 21 (1914), Question 4340, par M. POLYA, et dont la solution a été donnée par M. SZEGÖ, *Ein Greenwertsatz über die Toeplitzschen Determinanten*... (« Math. Annalen », 76 Band, 1915, p. 490). L'expression de cette limite a été trouvée autrement par M. SZEGÖ, *A Hankelfelé formákrol.... (Les formes de Hankel)* (« Mathematikai és Természettudomanyi Ertesitö », 1918, p. 492).

Mais

$$|M+N\cos\omega| = \left|\frac{N}{2}z^2 + Mz + \frac{N}{2}\right| = \frac{|N|}{2}|z-z_1||z-z_2|, \quad z = e^{i\omega},$$

où $z_1 \cdot z_2 = 1$, z_1 et z_2 étant les racines de l'équation

$$\frac{N}{2}z^2 + Mz + \frac{N}{2} = 0, \quad z^2 - \frac{4}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)z + 1 = 0.$$

Considérant l'intégrale

$$I = \int_0^\pi \log|z-\xi|\,d\omega, \quad z = e^{i\omega}, \quad \xi = \rho e^{i\alpha}, \quad \rho = |\xi|,$$

on a

$$I = \int_0^\pi \log\sqrt{1 - 2\rho\cos(\omega-\alpha) + \rho^2}\,d\omega,$$

qui est une intégrale de POISSON, dont la valeur est égale à zéro si $\rho < 1$ et à $\pi\log\rho$ si $\rho > 1$.

Or, $|z_1||z_2| = 1$, et supposant que $|z_1| > 1$, on a

$$\int_0^\pi \log|z-z_1|\,d\omega = \pi\log|z_1|, \quad \int_0^\pi \log|z-z_2|\,d\omega = 0.$$

Donc

$$\int_0^\pi \log|M+N\cos\omega|\,d\omega = \int_0^\pi \log\frac{|N|}{2}|z-z_1||z-z_2|\,d\omega = \pi\log\frac{|N|}{2}|z_1|,$$

et observant (15), on trouve

$$\sqrt[m]{|P_m(x)|} \to \frac{b-a}{4}|z_1|,$$

$|z_1|$ étant la racine de plus grand module de l'équation

$$z^2 - \frac{4}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)z + 1 = 0.$$

De même

$$\sqrt[n]{|Q_n(y)|} \to \frac{d-c}{4}|z_1|,$$

$|z_1|$ étant la racine de plus grand module de l'équation

$$z^2 - \frac{4}{d-c}\left(y - \frac{c+d}{2}\right)z + 1 = 0.$$

Les courbes de convergence des séries $\Sigma\Sigma A_{m,n} P_m(x) Q_n(y)$,

$$\overline{\lim_{m+n\to\infty}} \sqrt[m+n]{|A_{m,n}|k^n} = \frac{1}{\lambda(k)},$$

$P_m(x)$ et $Q_n(y)$ les polynomes orthogonaux, sont données par

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{4}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad |z|\frac{b-a}{4} = r,$$
$$y = \frac{c+d}{2} + \frac{d-c}{4}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad |z|\frac{d-c}{4} = \rho,$$

(r, ρ) étant un point intérieur à la courbe $r = \lambda\left(\frac{r}{\rho}\right)$, et sont des ellipses de centres $\frac{a+b}{2}$, $\frac{c+d}{2}$, de foyers a et b, c et d.

4. Les cercles associés de convergence des séries $\Sigma\Sigma \frac{A_{m,n}}{x^m y^n}$. — Étant donnés les coefficients $A_{m,n}$, tels que $\overline{\lim\limits_{m+n\to\infty}} \sqrt[m+n]{|A_{m,n}|k^n} = \lambda(k)$, les quantités $r = \lambda(k)$, $\rho = \frac{\lambda(k)}{k}$ forment un système de cercles associés de convergence pour la série $\Sigma\Sigma \frac{A_{m,n}}{x^m y^n}$, (r, ρ) étant un point extérieur de la courbe $r = \lambda\left(\frac{r}{\rho}\right)$. En effet, nous avons

$$\sqrt[m+n]{|A_{m,n}|k^n} < \lambda(k) + \varepsilon, \quad |A_{m,n}|\left(\frac{1}{\lambda+\varepsilon}\right)^m\left(\frac{k}{\lambda+\varepsilon}\right)^n < 1,$$

ce qui prouve la convergence de la série dans l'ensemble

$$|x| > \lambda + \varepsilon, \quad |y| > \frac{\lambda+\varepsilon}{k}.$$

Nous avons, de même,

$$\sqrt[m+n]{|A_{m,n}|k^n} > \lambda - \varepsilon, \quad |A_{m,n}|\left(\frac{1}{\lambda-\varepsilon}\right)^m\left(\frac{k}{\lambda-\varepsilon}\right)^n > 1,$$

ce qui prouve que la série diverge dans l'ensemble

$$|x| < \lambda - \varepsilon, \quad |y| < \frac{k}{\lambda-\varepsilon}.$$

Donc, la série $\Sigma\Sigma \frac{A_{m,n}}{x^m y^n}$ est valable pour tout point x extérieur au cercle

$|x| = \lambda(k)$ et pour tout point y extérieur au cercle $|y| = \frac{\lambda(k)}{k}$. Les quantités $r = \lambda(k)$, $\rho = \frac{\lambda(k)}{k}$ forment donc un système de cercles associés de convergence pour la série donnée.

Considérant la série des modules $\Sigma\Sigma \frac{|A_{m,n}|}{r^m \rho^n}$, il existe, dans le plan des axes Or, $O\rho$, sur chaque droite OM, dont l'équation est $r = k\rho$, un point séparatif, tel que la série donnée converge pour tout point de la droite OM, extérieur au segment OM et diverge pour tout point du segment OM (entre O et M). En éliminant k entre les équations $r = \lambda(k)$, $\rho = \frac{\lambda(k)}{k}$, on obtient

$$r = \lambda\left(\frac{r}{\rho}\right),$$

et construisant cette courbe, il résulte que la série donnée converge pour tous les point x et y, extérieurs respectivement aux cercles ayant les centres à l'origine et pour rayons r, ρ, (r, ρ) étant un point extérieur à la courbe $r = \lambda\left(\frac{r}{\rho}\right)$. (La région intérieure est celle où se trouve l'origine O des axes Or, $O\rho$).

5. Les courbes associées de convergence des séries $\Sigma\Sigma \frac{A_{m,n}}{P_m(x) Q_n(y)}$. — I. Supposons que les polynômes $P_m(x)$, $Q_n(y)$ soient donnés avec les relations (9) de POINCARÉ, et les coefficients $A_{m,n}$, au sens de MM. HADAMARD-LEMAIRE, $\overline{\lim_{m+n \to \infty}} \sqrt[m+n]{|A_{m,n}| k^n} = \lambda(k)$, $P_m(x)$, $Q_n(y)$ ayant leurs racines intérieures respectivement aux courbes (C) et (Γ) sur les plans x et y.

Ponr trouver les courbes de convergence, supposons que $\alpha(x)$ et $\beta(y)$ soient les racines de plus grand module des équations (10). Soient, d'abord, $|\alpha| > \lambda(k)$, $|\beta| > \frac{\lambda(k)}{k}$. On peut déterminer r_1 et ρ_1, tels que $\lambda < r_1 < |\alpha|$, $\frac{\lambda}{k} < \rho_1 < |\beta|$. Alors

$$\lim \left|\frac{P_{m+1}}{P_m}\right| = |\alpha(x)|, \quad \left|\frac{P_{m+1}}{P_m}\right| > |\alpha| - \varepsilon, \quad \left|\frac{Q_{n+1}}{Q_n}\right| > |\beta| - \varepsilon,$$

$$\left|\frac{P_{m+1}}{P_m}\right| > r_1, \quad \left|\frac{Q_{n+1}}{Q_n}\right| > \rho_1, \quad \left|\frac{A_{m,n}}{P_m Q_n}\right| < \frac{1}{|P_0 Q_0|} \frac{|A_{m,n}|}{r_1^m \rho_1^n}.$$

Cette relation prouve qne le développement $\Sigma\Sigma\frac{A_{m,n}}{P_m Q_n}$ est valable dans l'ensemble $|\alpha| > \lambda$, $|\beta| > \frac{\lambda}{k}$, car ses termes sont plus petits que ceux de la série convergente $\Sigma\Sigma\frac{|A_{m,n}|}{r_1{}^m \rho_1{}^n}$, $r_1 > \lambda(k)$, $\rho_1 > \frac{\lambda(k)}{k}$ (n.° 4).

Supposons, au contraire $|\alpha| < \lambda$, $|\beta| < \frac{\lambda}{k}$; on peut déterminer r_2 et ρ_2, tels que $|\alpha| < r_2 < \lambda$, $|\beta| < \rho_2 < \frac{\lambda}{k}$. On a, dans ces conditions,

$$\left|\frac{P_{m+1}}{P_m}\right| < |\alpha| + \varepsilon, \quad \left|\frac{P_{m+1}}{P_m}\right| < r_2, \quad \left|\frac{Q_{n+1}}{Q_n}\right| < \rho_2,$$

$$\left|\frac{A_{m,n}}{P_m Q_n}\right| > \frac{1}{|P_0 Q_0|}\frac{|A_{m,n}|}{r_2{}^m \rho_2{}^n},$$

relation qui prouve que la série considérée diverge, comme ayant les termes plus grands que ceux de la série divergente $\Sigma\Sigma\frac{A_{m,n}}{r_2{}^m \rho_2{}^n}$, $r_2 < \lambda$, $\rho_2 < \frac{\lambda}{k}$ (n.° 4).

Les courbes associées de convergence des séries $\Sigma\Sigma\frac{A_{m,n}}{P_m(x)\, Q_n(y)}$ sont données sur les plans x et y par les relations

$$|\alpha| = \lambda(k), \quad |\beta(y)| = \frac{\lambda(k)}{k},$$

et la série est valable pour les points extérieurs à ces courbes. Les champs de convergence de ces séries sont les régions extérieures aux courbes $|\alpha(x)| = r$, $|\beta(y)| = \rho$, (r, ρ) étant un point extérieur à la courbe $r = \lambda\left(\frac{r}{\rho}\right)$, et extérieures aux courbes (C) et (Γ) où se trouvent les racines des polynomes donnés $P_m(x)$, $Q_n(y)$.

II. Considérons une série $\Sigma\Sigma\frac{A_{m,n}}{P_m(x)\, Q_n(y)}$, les coefficients $A_{m,n}$ étant donnés par $\overline{\lim}\sqrt[m+n]{|A_{m,n}|\, k^n} = \lambda(k)$ et les polynomes $P_m(x)$ et $Q_n(y)$ ayant les racines intérieures aux courbes (C) et (Γ) à simple connexion et tels que $\lim\sqrt[m]{|P_m(x)|} = |\alpha(x)|$, $\lim\sqrt[n]{|Q_n(y)|} = |\beta(y)|$.

Supposons d'abord $|\alpha| > \lambda$, $|\beta| > \frac{\lambda}{k}$. On peut déterminer les nombres r_1

et ρ_1, tels que $\lambda < r_1 < |\alpha|$, $\frac{\lambda}{k} < \rho_1 < |\beta|$. On a

$$\sqrt[m]{|P_m(x)|} > |\alpha| - \varepsilon, \quad \sqrt[m]{|P_m|} > r_1, \quad \sqrt[n]{|Q_n|} > \rho_1,$$
$$\left|\frac{A_{m,n}}{P_m Q_n}\right| < \frac{A_{m,n}}{r_1^{\,m} \rho_1^{\,n}},$$

relation qui prouve que le développement $\Sigma\Sigma \frac{A_{m,n}}{P_m(x)\, Q_n(y)}$ est valable dans l'ensemble $|\alpha| > \lambda$, $|\beta| > \frac{\lambda}{k}$, car ses termes sont plus petits que ceux de la série convergente $\Sigma\Sigma \frac{A_{m,n}}{r_1^{\,m} \rho_1^{\,n}}$, $r_1 > \lambda$, $\rho_1 > \frac{\lambda}{k}$ [voir n.° 4].

Supposons, au contraire, $|\alpha| < \lambda$, $|\beta| < \frac{\lambda}{k}$; on peut déterminer r_2 et ρ_2, tels que $|\alpha| < r_2 < \lambda$, $|\beta| < \rho_2 < \frac{\lambda}{k}$. On a, dans ces conditions,

$$\sqrt[m]{|P_m|} < |\alpha| + \varepsilon, \quad \sqrt[n]{|P_m|} < r_2, \quad \sqrt[n]{|Q_n|} < \rho_2, \quad \left|\frac{A_{m,n}}{P_m Q_n}\right| > \frac{|A_{m,n}|}{r_2^{\,m} \rho_2^{\,n}},$$

relation qui prouve que la série considérée diverge, comme ayant ses termes plus grands que ceux de la série divergente $\Sigma\Sigma \frac{A_{m,n}}{r_2^{\,m} \rho_2^{\,n}}$, $r_2 < \lambda$, $\rho_2 < \frac{\lambda}{k}$ (n.° 4).

Donc, les courbes de convergence des séries $\Sigma\Sigma \frac{A_{m,n}}{P_m(x) Q_n(y)}$ sont données sur les plans x et y par les relations $|\alpha(x)| = \lambda(k)$, $|\beta(y)| = \frac{\lambda(k)}{k}$, et la série est valable pour les points extérieurs à ces courbes. Les champs de convergence de ces séries sont les régions extérieures aux courbes $|\alpha(x)| = r$, $|\beta(y)| = \rho$, (r, ρ) étant un point extérieur à la courbe $r = \lambda\left(\frac{r}{\rho}\right)$, et extérieures aux courbes (C) et (Γ) où se trouvent les racines des polynomes donnés $P_m(x)$, $Q_n(y)$.

APPLICATIONS. 1° Supposons que $P_m(x)$, $Q_n(y)$ sont des *polynomes de M. Faber* [n.° 3, II, Exemple 1°] attachés aux transformations conformes

$$z = \frac{a}{Z} + \varphi(Z), \quad z = \frac{b}{Z} + \psi(Z).$$

On a

$$\lim \sqrt[m]{|P_m(x)|} = \frac{1}{|Z|}, \quad x = \frac{a}{Z} + a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots$$

$$\lim \sqrt[n]{|Q_n(y)|} = \frac{1}{|U|}, \quad y = \frac{b}{U} + b_1 U + b_2 U^2 + \dots .$$

Les courbes de convergence sont données par

$$x = \frac{a}{Z} + a_1 Z + \dots + a_m Z^m + \dots, \quad \frac{1}{|Z|} = r,$$

$$y = \frac{b}{U} + b_1 U + \dots + b_n U^n + \dots, \quad \frac{1}{|U|} = \rho,$$

(r, ρ) étant un point extérieur à la courbe $r = \lambda\left(\frac{r}{\rho}\right)$. Les champs de convergence sont les régions extérieures à ces courbes et extérieures aux courbes (C) et (Γ) où se trouvent les racines des polynomes $P_m(x)$, $Q_n(y)$.

EXEMPLES. 1) Considerons les polynômes de TCHEBISCHEF, donnés par la fonction génératrice

$$\frac{2Z - 2x}{1 - 2xZ + Z^2} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{Z^2}\right)}{\frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{Z}\right) - x} + \frac{1}{Z} = \frac{-\frac{a}{Z^2} + \varphi'(Z)}{\frac{a}{Z} + \varphi(Z) - x},$$

$$\frac{a}{Z} + \varphi(Z) = \frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{Z}\right), \quad P_m(x) = (x - \sqrt{x^2 - 1})^m + (x + \sqrt{x^2 - 1})^m.$$

De même pour les $Q_n(y)$. Les courbes de convergence sont des ellipses

$$x = \frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{Z}\right), \quad |Z| = \frac{1}{r}, \quad y = \frac{1}{2}\left(U + \frac{1}{U}\right), \quad |U| = \frac{1}{\rho},$$

(r, ρ) étant un point extérieur à la courbe $r = \lambda\left(\frac{r}{\rho}\right)$.

2) La fonction génératrice étant

$$\frac{Z - x\sqrt{1 + Z^2}}{1 + Z^2 - xZ\sqrt{1 + Z^2}} = \frac{1}{Z} + \frac{\frac{1}{\sqrt{1 + Z^2}} - \frac{1}{Z^2}\sqrt{1 + Z^2}}{\frac{\sqrt{1 + Z^2}}{Z} - x},$$

on a $\frac{a}{Z} + \varphi(Z) = \frac{\sqrt{1 + Z^2}}{Z}$; donc les courbes de convergence sont données par

$$x = \frac{\sqrt{1 + Z^2}}{Z}, \quad \frac{1}{|Z|} = r, \quad y = \frac{\sqrt{1 + U^2}}{U}, \quad \frac{1}{|U|} = \rho,$$

(r, ρ) étant un point extérieur à la courbe $r = \lambda\left(\frac{r}{\rho}\right)$, et parceque $\sqrt{|x-1||x+1|} = \frac{1}{|Z|} = r = \text{const.}$, les courbes de convergence sont des ovales de CASSINI.

2° Supposons que $P_m(x)$, $Q_n(y)$ sont de *polynomes orthogonaux* (n.° 3, II, Exemple 2°). Les courbes de convergence sont des ellipses

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{4}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad |z|\frac{b-a}{4} = r,$$

$$y = \frac{c+d}{2} + \frac{d-c}{4}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad |z|\frac{d-c}{4} = \rho,$$

(r, ρ) étant un point extérieur à la courbe $r = \lambda\left(\frac{r}{\rho}\right)$.

Comme cas particuliers des polynomes orthogonaux, on a les polynomes de LEGENDRE, $\varphi(x) = 1$, $a = -1$, $b = 1$, les polynomes de JACOBI, $\varphi(x) = (1-x)^{\lambda}\cdot(1+x)^{\mu}$, $a = -1$, $b = 1$, $\lambda + 1 > 0$, $\mu + 1 > 0$ [voir ([8])].

6. Etant donnée la série $\Sigma\Sigma A_{m,n} P_m(x) Q_n(y) + \Sigma\Sigma \frac{B_{m,n}}{P_m(x) Q_n(y)}$, où $\overline{\lim} \sqrt[m+n]{|A_{m,n}| k^n} = \frac{1}{\lambda(k)}$, $\overline{\lim} \sqrt[m+n]{|B_{m,n}| k^n} = \mu(k)$, et les polynomes $P_m(x)$ et $Q_n(y)$ donnés, soit par des relations de récurrence, soit par $\lim \sqrt[m]{|P_m(x)|} = ||p(x)|$, $\lim \sqrt[n]{|Q_n(y)|} = |q(y)|$, on obtient de la même manière les champs de convergence. Par ex., si P_m et Q_n sont les polynomes de M. FABER, attachés respectivement aux transformations $x = \frac{a}{Z} + \varphi(Z)$, $y = \frac{b}{U} + \psi(U)$, soient (C) et (Γ) les courbes correspondant aux valeurs $|Z| = \frac{1}{r}$, $|U| = \frac{1}{\rho}$, (r, ρ) étant un point intérieur à la courbe $r = \lambda\left(\frac{r}{\rho}\right)$ et (C_1), (Γ_1) les courbes correspondant aux valeurs $|Z| = \frac{1}{r}$, $|U| = \frac{1}{\rho}$, (r, ρ) étant un point extérieur à la courbe $r = \mu\left(\frac{r}{\rho}\right)$. La série considérée est valable dans les régions intérieures aux courbes (C) et (Γ) et extérieures aux courbes (C_1) et (Γ_1), et extérieures aux courbes où se trouvent les racines des polynômes $P_m(x)$, $Q_n(y)$.

Sopra le connessioni lineari generali. Estensione d'un teorema di Bompiani nel caso più generale.

Memoria di ST. GOLAB (a Cracovia).

Siano Γ_{ij}^k i parametri della generale connessione lineare [1]. Con $R_{lji}^{\cdot\cdot\cdot k}$ notiamo il tensore della curvatura che appartiene a questa connessione

$$(1) \qquad R_{lji}^{\cdot\cdot\cdot k} = \partial_j \Gamma_{il}^k - \partial_l \Gamma_{ij}^k + \Gamma_{mj}^k \Gamma_{il}^m - \Gamma_{ml}^k \Gamma_{ij}^m ; \quad \partial_j = \partial/\partial x^j .$$

Questo tensore è emmisimmetrico rispetto agli indici l, j. Saturando gli indici si ottengono da questo tensore due tensori del secondo ordine

$$(2) \qquad R_{ji} = R_{kji}^{\cdot\cdot\cdot k}$$

e

$$(3) \qquad V_{lj} = R_{ljk}^{\cdot\cdot\cdot k}.$$

L'ultimo tensore è un bivettore. Insieme a questo introduciamo un altro bivettore W_{ij}:

$$(4) \qquad W_{ij} = R_{ji} - R_{ij}.$$

I bivettori V_{ij} e W_{ij} sono generalmente diversi fra loro. Soltanto nel caso $n = 2$ sono sempre uguali. Nel § 3 citiamo una semplice condizione necessaria e sufficiente per le connessioni emmisimmetriche, affinchè questi due bivettori coincidano. Per connessione emmisimmetrica intendiamo con J. A. SCHOUTEN una connessione tale che sussistano le relazioni

$$(5) \qquad \Gamma_{[ij]}^k = S_{ij}^{\cdot\cdot k} = S_{[i} A_{j]}^k \ \text{[2]},$$

dove S_i è un vettore covariante.

---

[1] Accettiamo le notazioni di J. A. SCHOUTEN (*Der Ricci-Kalkül*). Queste notazioni differiscono da quelle di L. P. EISENHART stabilite nel suo libro *Non-Riemannian Geometry*. Osserviamo infatti il principio di denotare i tensori e soltanto i tensori con lettere latine. Ai nostri Γ_{ij}^k corrispondono da EISENHART le L_{ij}^k, ai nostri $\overset{o}{\Gamma}{}_{ij}^k$, le Γ_{ij}^k, ai nostri $S_{ij}^{\cdot\cdot k}$, le Ω_{ij}^k, ai nostri $R_{lji}^{\cdot\cdot\cdot k}$, le L_{ijl}^k, ai nostri V_{lj}, le S_{jl}, ai nostri R_{ij}, le $B_{ij} + \Omega_{ij}$ etc.

[2] J. A, SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül*, p. 69.

Per le connessioni simmetriche (affini) abbiamo sempre

(6) $$W_{ij} = V_{ij}\ ([3]).$$

L'equazione

(7) $$V_{ij} = 0$$

è caratteristica per le connessioni che conservano i volumi ([4]).

Se la connessione è nello stesso tempo affine la condizione suddetta equivale alla seguente

(8) $$R_{ij} = R_{ji}\ ([5]).$$

Nel caso della connessione riemanniana (8) è — come ben noto — soddisfatta. Il tensore R_{ij} si chiama il tensore di Ricci.

Si deve al Bompiani ([6]) una interpretazione geometrica del tensore di Ricci nel caso riemanniano. Nel § 4 ci occupiamo della generalizzazione ed estensione di questo teorema nel caso generale della connessione lineare. Riguardo al fatto, che il tensore di Ricci non è simmetrico nel caso più generale, conseguiamo un completo significato del tensore di Ricci dopo aver ottenuto una interpretazione del bivettore W_{ij}. Questa questione fa oggetto del § 6. Nello stesso tempo arriviamo ad una interpretazione geometrica del bivettore V_{ij} per tutte le connessioni per le quali sussiste la (6) (in particolare per tutte le connessioni affini).

Il significato geometrico del bivettore V_{ij} nel caso più generale non è ancora posseduto.

Il § 3 contiene per le geometrie a due dimensioni un teorema che dà una condizione sufficiente affinche la connessione conservi i volumi.

§ **1.** Separando le Γ_{ij}^k nella parte simmetrica e emmisimmetrica possiamo scrivere

(9) $$\Gamma_{ij}^k = \overset{0}{\Gamma}{}_{ij}^k + S_{ij}^{\cdot\cdot k}, \quad \overset{0}{\Gamma}{}_{[ij]}^k = 0, \quad S_{(ij)}^{\cdot\cdot k} = 0.$$

$S_{ij}^{\cdot\cdot k}$ è — come ben noto — un tensore del terzo ordine.

Introduciamo per brevità le notazioni

(10) $$\Gamma_{kj}^k = \Gamma_j, \quad \Gamma_{jk}^k = \Lambda_j$$

(11) $$Z_j = S_{jk}^{\cdot\cdot k} = \frac{1}{2}(\Lambda_j - \Gamma_j).$$

([3]) Loc. cit. ([2]), p. 88.

([4]) Chiamate da Schouten, *inhaltstreu*, l. c, ([2]), p. 89.

([5]) Loc. cit. ([2]), p. 90.

([6]) E. Bompiani, *La géométrie des espaces courbes et le tenseur d'énérgie d'Einstein*, « C. R. », Paris, 174 (1922), p. 737.

Ne segue che

(12) $$V_{ij} = \partial_j \Gamma_i - \partial_i \Gamma_j.$$

Dopo qualche trasformazioni si ottiene

(13) $$W_{ij} = \partial_j \Lambda_i - \partial_i \Lambda_j - 2\partial_k S_{ij}^{\cdot\cdot k} - 2\Lambda_k S_{ij}^{\cdot\cdot k} + 2\overset{o}{\Gamma}{}^m_{kj} S_{im}^{\cdot\cdot k} + 2\overset{o}{\Gamma}{}^m_{ik} S_{mj}^{\cdot\cdot k}.$$

Denotando poi

(14) $$N_{ij} = \frac{1}{2}(V_{ij} - W_{ij})$$

otteniamo

(15) $$N_{ij} = \partial_i Z_j - \partial_j Z_i + \partial_k S_{ij}^{\cdot\cdot k} + \Lambda_k S_{ij}^{\cdot\cdot k} - \overset{o}{\Gamma}{}^m_{kj} S_{im}^{\cdot\cdot k} - \overset{o}{\Gamma}{}^m_{ik} S_{mj}^{\cdot\cdot k}.$$

Per condurre quest' espressione alla forma, nella quale tutti termini hanno un significato covariante serviamoci delle equazioni

(16) $$\nabla_j Z_i = \partial_j Z_i - \Gamma^k_{ij} Z_k$$

(17) $$\nabla_k S_{ij}^{\cdot\cdot k} = \partial_k S_{ij}^{\cdot\cdot k} + \Lambda_k S_{ij}^{\cdot\cdot k} - \left(\overset{o}{\Gamma}{}^m_{ik} + S_{ik}^{\cdot\cdot m}\right) S_{mj}^{\cdot\cdot k} - \left(\overset{o}{\Gamma}{}^m_{jk} + S_{jk}^{\cdot\cdot m}\right) S_{im}^{\cdot\cdot k}$$

donde segue la forma finale

(18) $$N_{ij} = \nabla_i Z_j - \nabla_j Z_i - 2 Z_k S_{ij}^{\cdot\cdot k} + \nabla_k S_{ij}^{\cdot\cdot k}.$$

Allora:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè i bivettori V_{ij} e W_{ij} siano identici, è che sia soddisfatta l' equazione seguente

(19) $$\nabla_i Z_j - \nabla_j Z_i - 2 Z_k S_{ij}^{\cdot\cdot k} + \nabla_k S_{ij}^{\cdot\cdot k} = 0.$$

§ **2.** Supponiamo che la connessione coi parametri Γ^k_{ij} sia emmisimmetrica. Allora sussiste l' identità:

(20) $$Z_i = -\frac{n-1}{2} S_i.$$

In questo caso abbiamo

(21) $$\nabla_k S_{ij}^{\cdot\cdot k} = \frac{1}{n-1}(\nabla_j Z_i - \nabla_i Z_j)$$

(22) $$Z_k S_{ij}^{\cdot\cdot k} = \frac{1}{n-1}(Z_j Z_i - Z_i Z_j) = 0.$$

Ne segue che

(23) $$N_{ij} = \frac{n-2}{n-1}(\nabla_i Z_j - \nabla_j Z_i).$$

Quindi risulta che per $n=2$ è sempre $N_{ij}=0$. Osserviamo però che per $n=2$ ogni connessione è emmisimmetrica. Ponendo infatti

$$S_1 = \Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{21}, \quad S_2 = \Gamma^1_{21} - \Gamma^1_{12} \tag{24}$$

vediamo che la (5) è soddisfatta identicamente.

Abbiamo dunque il

Teorema 1. *Nel caso* n = 2 *i bivettori* V_{ij} *e* W_{ij} *coincidono per tutte le connessioni lineari.*

Nel caso $n>2$ la condizione necessaria e sufficiente affinchè i bivettori V_{ij} e W_{ij} non differiscano è data dalla equazione

$$\nabla_{[j} Z_{i]} = 0. \tag{25}$$

A questa condizione daremo un'altra forma. Abbiamo

$$\nabla_{[j} Z_{i]} = \partial_{[j} Z_{i]} - \Gamma^k_{[ij]} Z_k = \partial_{[j} Z_{i]} - Z_k S_{ij}^{\cdot\cdot k}.$$

Il secondo termine del secondo membro sparisce in virtù della (22), di modo che

$$\nabla_{[j} Z_{i]} = \partial_{[j} Z_{i]}. \tag{26}$$

Badando alle (20) ne possiamo dedurre che la condizione (25) prende la forma

$$\partial_{[j} S_{i]} = 0. \tag{27}$$

Ora abbiamo il

Teorema 2. *Se* $n>2$, *la condizione necessaria e sufficiente affinchè per la connessione emmisimmetrica sia* $W_{ij} = V_{ij}$ *è che il vettore* S_i *sia un vettore-gradiente.*

§ **3.** Teorema. *Se* $n=2$ *e la connessione soddisfa la condizione*

$$\nabla_j R_{ik} = 0, \tag{28}$$

la connessione conserva i volumi.

Dimostrazione. Dalla (4) e (28) risulta

$$\nabla_j W_{ik} = 0. \tag{29}$$

Ci sono due casi da distinguere

(I) $$W_{ik} = 0,$$

(II) $$W_{ik} \neq 0.$$

Nel caso (I) abbiamo in virtù del teorema 1 del § 1 $V_{ik} = W_{ik} = 0$ e in base al teorema di Schouten [7] che la connessione conserva i volumi. Nel caso (II)

[7] Loc. cit. [2], p. 89.

W_{ik} è un effettivo bivettore e dalla identità (29) segue che l'incremento di un qualsiasi bivettore dopo lo spostamento pseudoparallelo lungo una curva chiusa è zero, dunque la connessione conserva i volumi. È chiaro che questo teorema non può essere esteso ad un numero di dimensioni più grande di due.

§ 4. Il teorema di BOMPIANI menzionato nella introduzione, permette nel caso della geometria riemanniana, di applicare un semplice procedimento geometrico ad un qualsiasi vettore controvariante v^k; procedimento che conduce ad un vettore covariante w_i, dato per mezzo dell'equazione

$$w_i = R_{ki} v^k. \tag{30}$$

Generalizzaremo questo procedimento nel caso della geometria con la più generale connessione lineare.

Sia $v^k = \underset{1}{v^k}$ un qualunque vettore controvariante infinitesimo nel punto P. Nello stesso punto P prendiamo $(n-1)$ vettori controvarianti infinitesimi

$$\underset{2}{v^k}, \dots, \underset{n}{v^k} \tag{31}$$

in modo che

$$\underset{1}{v^k}, \underset{2}{v^k}, \dots, \underset{n}{v^k} \tag{32}$$

siano indipendenti fra loro, cioè

$$| \underset{i}{v^k} | \neq 0. \tag{33}$$

A questo sistema corrisponde nel punto P un sistema di vettori covarianti

$$\overset{1}{v_i}, \overset{2}{v_i}, \dots, \overset{n}{v_i}, \tag{34}$$

definito univocamente e detto sistema reciproco [8]. I vettori di questo sistema reciproco sono definiti senza ambiguità dalle equazioni

$$\sum_{j=1}^{n} \underset{j}{v^k} \overset{j}{v_i} = A_i^k \text{ [9]}. \tag{35}$$

---

[8] Non ha però nessun senso dire che il vettore $\overset{j}{v_i}$ corrisponde al vettore $\underset{j}{v^k}$, perchè mancando il tensore fondamentale non si può parlare di abbassamento e innalzamento dei indici. Nondimeno l'uso della stessa lettera v per i vettori del sistema reciproco non conduce a nessuna confusione.

[9] Con A_i^k intendiamo indicare quel tensore del secondo ordine, chiamato dallo SCHOUTEN *Einheitsaffinor*, l. c. [2], pp. 27 e 28.

Ad ogni vettore $\underset{j}{v}^k$ della serie (32) (oppure ad ogni vettore $\overset{j}{v}_i$ della serie (34)) si può aggiungere il bivettore $\underset{j}{B}^{lm}$ definito per mezzo dell'equazione

(36) $$\underset{j}{B}^{lm} = \underset{j}{v}^{[l}\underset{1}{v}^{m]}.$$

Fra questi bivettori uno ($j=1$) è degenere e il corrispondente parallelogramma si riduce al doppio segmento.

Scegliamo adesso dalla serie (34) un qualsiasi vettore $\overset{j}{v}_i$ e trasportiamolo pseudoparallelamente lungo il contorno del parallelogramma del bivettore $\underset{j}{B}$. Il corrispondente incremento denotiamolo con $D\overset{j}{v}_i$. Se applicheremo questa operazione a tutti i vettori della serie (34) e sommeremo i corrispondenti incrementi *otterremo come risultato un vettore covariante* w_i *che è appunto uguale a quello definito mediante l'equazione* (30).

Infatti, sussiste la formula ([10]):

(37) $$D\overset{j}{v}_i = - R_{mli}{}^{\cdot\cdot\cdot k}\overset{j}{v}_k \underset{j}{B}^{lm} = R_{lmi}{}^{\cdot\cdot\cdot k}\overset{j}{v}_k \underset{j}{v}^l \underset{1}{v}^m$$

(non sommando rispetto a j!). Badando alle (35) e (2) ne segue che

(38) $$w_i = \sum_{j=1}^{n} D\overset{j}{v}_i = \sum_{j=1}^{n} R_{lmi}{}^{\cdot\cdot\cdot k} A_k^l \underset{1}{v}^m = R_{mi}\underset{1}{v}^m = R_{ki} v^k.$$

Si vede subito che il vettore w_i non dipende dalla scelta dei vettori (31) e dipende soltanto dal vettore v^k.

§ **5.** Invece del procedimento anzidetto si può applicare il seguente procedimento geometrico: Prendiamo uno qualunque dei vettori (32) e spostiamolo pseudoparallelamente lungo il contorno del parallelogramma del bivettore $\underset{j}{B}$. Il corrispondente incremento sia $D\underset{j}{v}^k$. Consideriamo poi la serie di vettori

(39) $$\underset{1}{v}^k + D\underset{1}{v}^k,\ \underset{2}{v}^k + D\underset{2}{v}^k, \dots,\ \underset{n}{v}^k + D\underset{n}{v}^k$$

e formiamo il sistema reciproco

(40) $$\overset{1}{u}_i,\ \overset{2}{u}_i, \dots,\ \overset{n}{u}_i.$$

([10]) Loc. cit. ([2]), p. 84.

Nasce la questione se il vettore $\overline{w}_i$, determinato per mezzo dell'equazione

$$\overline{w}_i = \sum_{j}^{n} \Big(\overset{j}{u}_i - \overset{j}{v}_i\Big) \tag{41}$$

sia identico con il vettore w_i ottenuto nel § 4?

A questa questione bisogna rispondere negativamente. Anzi, anche nel caso in cui i vettori (39) siano indipendenti fra loro (quando quindi è possibile costruire il vettore $\overline{w}_i$), il vettore $\overline{w}_i$ risulta generalmente diverso da w_i. Nella nota a piè di pagine citiamo un esempio nel quale i vettori della serie (39) risultano dipendenti linearmente [11].

Esiste però una classe vasta, precisamente la classe di tutte le connessioni riemanniane, per quale con una restrizione nella scelta dei vettori (31) fatta in modo che il sistema (32) sia un sistema ortogonale, *il vettore* $\overline{\mathrm{w}}_{\mathrm{i}}$ *coincide col vettore* w_{i}.

Infatti, se la connessione è riemanniana (con g_{ik} come tensore fondamentale) e se i vettori (32) sono ortogonali fra loro, allora i vettori della serie (34) si ottengono dai vettori (32) per mezzo dell'operazione del abbassamento dei indici

$$\overset{j}{v}_i = g_{ki} \underset{j}{v}^k \tag{42}$$

e reciprocamente

$$\underset{j}{v}^k = g^{ik} \overset{j}{v}_i . \tag{43}$$

Dunque

$$D\underset{j}{v}^k = g^{ik} D\overset{j}{v}_i + \overset{j}{v}_i D g^{ik}.$$

Ma

$$Dg^{ki} = (R_{mlr}^{\cdot\cdot\cdot k} g^{ri} + R_{mlr}^{\cdot\cdot\cdot i} g^{kr}) \underset{j}{B}^{lm} = 2\underset{j}{B}^{lm} \nabla_{[m} \nabla_{l]} g^{ki} = 0 \ [12]$$

e quindi

$$\underset{j}{v}^k + D\underset{j}{v}^k = \underset{j}{v}^k + g^{ik} R_{lmi}^{\cdot\cdot\cdot r} \overset{j}{v}_r \underset{j}{v}^l \underset{1}{v}^m \tag{44}$$

---

(11) Se supponiamo che in un certo sistema di riferimento i parametri della connessione Γ_{ij}^k $(n = 2)$ abbiano i valori $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0$, $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 1$, $\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = -1$ e se prendiamo $\underset{1}{v}^k = \underset{1}{e}^k dt$, $\underset{2}{v}^k = \underset{2}{e}^k dt$ (dove $\underset{1}{e}$, $\underset{2}{e}$ sono i vettori-unità), allora — come un facile calcolo mostra — i vettori $\underset{1}{v}^k + D\underset{1}{v}^k$, $\underset{2}{v}^k + D\underset{2}{v}^k$ risultano dipendenti fra loro e il sistema (40) non è definito univocamente.

(12) Cfr. p. e. (2), p. 85.

(non sommare rispetto a j!). I vettori $\overset{j}{u}_i$ del sistema (40) soddisfano alle relazioni

$$(45) \qquad \overset{j}{u}_i = (\underset{j}{v}^k + D\underset{j}{v}^k) g_{ki} = \overset{j}{v}_i + g_{ki} g^{ks} R_{lms}^{\cdot\cdot\cdot r} \overset{j}{v}_r \underset{j}{v}^l v^m = \overset{j}{v}_i + R_{lmi}^{\cdot\cdot\cdot r} \overset{j}{v}_r \underset{j}{v}^l v^m$$

(non sommare rispetto a j!). Ne segue che

$$(46) \qquad \overline{w}_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\overset{j}{u}_i - \overset{j}{v}_i \right) = \sum_{j=1}^{n} R_{lmi}^{\cdot\cdot\cdot r} A_r^l v^m = R_{mi} v^m = w_i .$$

Per le connessioni riemanniane si può dare ancora un terzo procedimento geometrico che conduce al vettore w_i. Esso si appogia su una modificazione dell'ultimo procedimento (non può essere però generalizzato a connessioni non riemanniane).

Sommiamo a tal scopo dapprima tutti gli incrementi $D\underset{j}{v}^k$

$$(47) \qquad \overline{\overline{w}}^k = \sum_{j=1}^{n} D\underset{j}{v}^k$$

e poi definiamo

$$(48) \qquad \overline{\overline{w}}_i = g_{ik} \overline{\overline{w}}^k .$$

Ora in base alle (44) abbiamo

$$\overline{\overline{w}}^k = \sum_{j=1}^{n} g^{ki} R_{lmi}^{\cdot\cdot\cdot r} \overset{j}{v}_r \underset{j}{v}^l v^m = g^{ki} R_{lmi}^{\cdot\cdot\cdot r} A_r^l v^m = g^{ki} R_{mi} v^m$$

da cui

$$(49) \qquad \overline{\overline{w}}_i = g_{ik} \overline{\overline{w}}^k = g^{lk} R_{mk} v^m g_{il} = R_{mi} v^m = w_i .$$

L'ultimo procedimento viene applicato a proposito da Bompiani. In esso la supposizione della ortogonalità del sistema (32) è essenziale, mentre nel nostro procedimento primitivo nel caso della geometria riemanniana i vettori della serie (32) non dovevano essere necessariamente ortogonali fra loro.

§ **6.** Poichè nel caso generale il tensore di Ricci non è simmetrico, il vettore z_i definito dall'equazione

$$(50) \qquad z_i = v^k R_{ik}$$

è diverso dal vettore w_i determinato con l'equazione (30). Sorge la questione se esiste una interpretazione analoga per il vettore z_i? Otterremo la cercata interpretazione dando un significato geometrico del bivettore W_{ij}, perchè

$$(51) \qquad z_i = w_i + v^k W_{ki} .$$

Per tale scopo consideriamo, insieme con i bivettori controvarianti (36), la corrispondente serie dei bivettori covarianti

$$\overset{j}{B}_{lm} = \overset{j}{v}_{[l}\overset{1}{v}_{m]}\,. \tag{52}$$

Spostiamo ciascuno dei bivettori (52) pseudoparallelamente lungo il contorno del parallelogramma del corrispondente bivettore (36). L'incremento $D\overset{j}{B}_{ik}$ relativo a questo spostamento ciclico è

$$D\overset{j}{B}_{ik} = - R_{mli}^{\cdot\cdot\cdot r}\overset{j}{B}_{rk}\underset{j}{B}^{lm} - R_{mlk}^{\cdot\cdot\cdot r}\overset{j}{B}_{ir}\underset{j}{B}^{lm} \text{ (}^{13}\text{)}. \tag{53}$$

Sommando tutti questi incrementi otteniamo

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} D\overset{j}{B}_{ik} = \sum_{j=1}^{n}\left\{ R_{lmi}^{\cdot\cdot\cdot r}\overset{j}{B}_{rk}\underset{j}{v}^{l}\underset{1}{v}^{m} + R_{lmk}^{\cdot\cdot\cdot r}\overset{j}{B}_{ir}\underset{j}{v}^{l}\underset{1}{v}^{m}\right\} = \\ &= \frac{1}{2}\left\{ R_{mi}\overset{1}{v}_{k}\underset{1}{v}^{m} + R_{mki}^{\cdot\cdot\cdot r}\overset{1}{v}_{r}\underset{1}{v}^{m} - R_{mik}^{\cdot\cdot\cdot r}\overset{1}{v}_{r}\underset{1}{v}^{m} - R_{mk}\overset{1}{v}_{i}\underset{1}{v}^{m}\right\}. \end{aligned}\right. \tag{54}$$

Se adesso lo stesso procedimento, che abbiamo applicato prendendo il vettore $\underset{1}{v}^{k}$ come punto di partenza, lo applichiamo prendendo uno qualunque dei vettori $\underset{j}{v}^{k}$ come punto di partenza, otterremo il risultato

$$\overset{j}{Z}_{ik} = R_{m[i}\overset{j}{v}_{k]}\underset{j}{v}^{m} + R_{m[ik]}^{\cdot\cdot\cdot r}\overset{j}{v}_{r}\underset{j}{v}^{m} \tag{55}$$

(non sommare rispetto a j!).

La somma geometrica di tutti i bivettori in tal modo ottenuti è uguale a

$$\sum_{j=1}^{n}\overset{j}{Z}_{ik} = \frac{1}{2}(R_{ki} - R_{ik} + R_{ki} - R_{ik}) = R_{ki} - R_{ik} = W_{ik}\,. \tag{56}$$

Con questo abbiamo ottenuto il significato geometrico del bivettore W_{ik}. Il procedimento citato non dipende dalla scelta dei vettori (32). Essenziale é solo questo, che il sistema (34) sia reciproco rispetto al sistema (32).

Nello stesso tempo lo stesso procedimento ci fornisce un significato geometrico per il bivettore V_{ik} nei casi in cui N_{ij} si annulla identicamente, cioè quando è soddisfatta l'equazione (19). In particolare questo ha luogo per tutte le connessioni affini.

([13]) Loc. cit. ([2]), p. 84.

Method of integration of equations with partial derivatives of the second order with 2 dependent and 2 independent variables.

By M. KOURENSKY (a Kieff).

1. Let it be given for integration a system of equations of the second order with 2 dependent variables z_1, z_2 and 2 independent x_1, x_2:

$$(1)\qquad \begin{cases} F_1(x_1, x_2;\ z_1, z_2;\ p_1^1, p_2^1;\ p_1^2, p_2^2, p_{11}^1, p_{12}^1, p_{22}^1;\ p_{11}^2, p_{12}^2, p_{22}^2) = 0 \\ F_2(x_1, x_2;\ z_1, z_2;\ p_1^1, p_2^1;\ p_1^2, p_2^2, p_{11}^1, p_{12}^1, p_{22}^1;\ p_{11}^2, p_{12}^2, p_{22}^2) = 0, \end{cases}$$

where is designated

$$p_i^k = \frac{\partial z_k}{\partial x_i};\quad p_{ij}^k = \frac{\partial^2 z_k}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (i, j, k = 1, 2).$$

Let us add to the system (1) such a 3rd equation

$$(2)\quad \Phi(x_1, x_2;\ z_1, z_2;\ p_1^1, p_2^1;\ p_1^2, p_2^2;\ p_{11}^1, p_{12}^1, p_{22}^1,\ p_{11}^2, p_{12}^2, p_{22}^2) = \text{Const.},$$

that the system (1)-(2) be compatible. For this, designating

$$\underset{g}{X}_i = \frac{\partial F_g}{\partial x_i} + \frac{\partial F_g}{\partial z_1} p_i^1 + \frac{\partial F_g}{\partial z_2} p_i^2 + \frac{\partial F_g}{\partial p_1^1} p_{1i}^1 + \frac{\partial F_g}{\partial p_1^2} p_{1i}^2 + \frac{\partial F_g}{\partial p_2^1} p_{2i}^1 + \frac{\partial F_g}{\partial p_2^2} p_{2i}^2 = \frac{dF_g}{dx_i}$$

$$\underset{g}{P}{}_{ij}^1 = \frac{\partial F_g}{\partial p_{ij}^1};\quad \underset{g}{P}{}_{ij}^2 = \frac{\partial F_g}{\partial p_{ij}^2}$$

$$\underset{3}{X}_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} p_i^1 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} p_i^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^1} p_{1i}^1 + \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} p_{1i}^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^1} p_{2i}^1 + \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} p_{2i}^2 = \frac{d\Phi}{dx_i}$$

$$\underset{3}{P}{}_{ij}^1 = \frac{\partial \Phi}{\partial p_{ij}^1};\quad \underset{3}{P}{}_{ij}^2 = \frac{\partial \Phi}{\partial p_{ij}^2} \qquad (g, i, j = 1, 2),$$

we obtain that all the determinants of the 6th order of matrix

$$(3)\qquad \left\| \begin{matrix} \underset{3}{X}_1 & \underset{3}{P}{}_{11}^1 & \underset{3}{P}{}_{12}^1 & \underset{3}{P}{}_{22}^1 & 0 & \underset{3}{P}{}_{11}^2 & 0 & \underset{3}{P}{}_{12}^2 & \underset{3}{P}{}_{22}^2 \\ \underset{1}{X}_1 & \underset{1}{P}{}_{11}^1 & \underset{1}{P}{}_{12}^1 & \underset{1}{P}{}_{22}^1 & 0 & \underset{1}{P}{}_{11}^2 & 0 & \underset{1}{P}{}_{12}^2 & \underset{1}{P}{}_{22}^2 \\ \underset{2}{X}_1 & \underset{2}{P}{}_{11}^1 & \underset{2}{P}{}_{12}^1 & \underset{2}{P}{}_{22}^1 & 0 & \underset{2}{P}{}_{11}^2 & 0 & \underset{2}{P}{}_{12}^2 & \underset{2}{P}{}_{22}^2 \\ \underset{1}{X}_2 & 0 & \underset{1}{P}{}_{11}^1 & \underset{1}{P}{}_{12}^1 & \underset{1}{P}{}_{22}^1 & 0 & \underset{1}{P}{}_{22}^2 & \underset{1}{P}{}_{11}^2 & \underset{1}{P}{}_{12}^2 \\ \underset{2}{X}_2 & 0 & \underset{2}{P}{}_{11}^1 & \underset{2}{P}{}_{12}^1 & \underset{2}{P}{}_{22}^1 & 0 & \underset{2}{P}{}_{22}^2 & \underset{2}{P}{}_{11}^2 & \underset{2}{P}{}_{12}^2 \\ \underset{3}{X}_2 & 0 & \underset{3}{P}{}_{11}^1 & \underset{3}{P}{}_{12}^1 & \underset{3}{P}{}_{22}^1 & 0 & \underset{3}{P}{}_{22}^2 & \underset{3}{P}{}_{11}^2 & \underset{3}{P}{}_{12}^2 \end{matrix} \right\|$$

are null.

This matrix, as it is shown in my former papers (¹), may be obtained by means of slight generalization of the investigations of E. von Weber (²).

If one of the determinants, Δ, of the 5th order of this matrix, is different from nought, then, in order that all the determinants of the 6th order be equal to null, it is necessary and sufficient to make null the 4 determinants, obtained from the addition of one of the remainings horizontal lines and one af the 4 remainings columns to the elements of the determinant Δ.

Let us cancel the first horizontal line and the 1, 7, 8, 9 columns. By such means we obtain a determinant of the 5th order Δ_{1789}; when he is not equal to null, this brings us to limitations

$$D\left(\frac{F_1, F_2}{p_{11}^1, p_{11}^2}\right) \neq 0; \quad D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^1, p_{12}^1, p_{22}^1}\right) \neq 0, \tag{4}$$

where is designated

$$D\left(\frac{F_1, F_2}{p_{11}^1, p_{11}^2}\right) = \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(p_{11}^1, p_{11}^2)}; \ldots$$

Thus we obtain a system of 4 non linear equations of the first order with one unknown function Φ:

$$\begin{aligned}
&D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{12}^1, p_{22}^1, p_{22}^2}\right)\alpha && = D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^1, p_{22}^1, p_{22}^2}\right)\gamma \\
&D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{12}^1, p_{22}^1, p_{11}^2}\right)\alpha + D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^1, p_{11}^2, p_{12}^2}\right)\beta && = D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^1, p_{22}^1, p_{11}^2}\right)\gamma \\
&D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{12}^1, p_{22}^1, p_{12}^2}\right)\alpha + D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^1, p_{11}^2, p_{22}^2}\right)\beta && = D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^1, p_{22}^1, p_{12}^2}\right)\gamma \\
&D\left[\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{12}^1, p_{22}^1, x_2}\right]\alpha + D\left[\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^1, p_{11}^2, x_1}\right]\beta && = D\left[\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^1, p_{22}^1, x_2}\right]\gamma,
\end{aligned} \tag{5}$$

where is

$$\alpha = D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^1, p_{12}^1, p_{11}^2}\right); \quad \beta = D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^1, p_{12}^1, p_{22}^1}\right); \quad \gamma = D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^1, p_{22}^1, p_{11}^2}\right),$$

(¹) M. Kourensky, *Sur l'intégration des équations dif. aux dérivées partielles avec plusieurs variables dépendantes* (« Mémoires de la Cl. Phys.-Math., Académie des Sc. de l'Ukraine », t. V, livre 3, 1927, pp. 79-92); *Die Grundformeln zur Integration der Gleichungen mit partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung mit mehreren abhändigen und unabhändigen Variablen* (« Sitzungsberichte der M.-N.-Ar. Section Sewcenko Gesellsch. «, Lemberg, 1929).

(²) E. von Weber, « Mathem. Annalen », Bd. 49, 1897; ss. 544-550.

so, that

$$\begin{vmatrix} D\left(\dfrac{F_1, F_2, \Phi}{p_{12}^{1}, p_{22}^{1}, p_{11}^{2}}\right), & D\left(\dfrac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^{1}, p_{11}^{2}, p_{12}^{2}}\right), & D\left(\dfrac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^{1}, p_{22}^{1}, p_{11}^{2}}\right) \\ D\left(\dfrac{F_1, F_2, \Phi}{p_{12}^{1}, p_{22}^{1}, p_{12}^{2}}\right), & D\left(\dfrac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^{1}, p_{11}^{2}, p_{22}^{2}}\right), & D\left(\dfrac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^{1}, p_{22}^{1}, p_{12}^{2}}\right) \\ D\left[\dfrac{F_1, F_2, \Phi}{p_{12}^{1}, p_{22}^{1}, x_2}\right], & D\left[\dfrac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^{1}, p_{11}^{2}, x_1}\right], & D\left[\dfrac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^{1}, p_{22}^{1}, x_2}\right] \end{vmatrix} = 0;$$

$$(5') \qquad \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} D\left(\dfrac{F_1, F_2, \Phi}{p_{12}^{1}, p_{22}^{1}, p_{11}^{2}}\right), & D\left(\dfrac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^{1}, p_{11}^{2}, p_{12}^{2}}\right) \\ D\left(\dfrac{F_1, F_2, \Phi}{p_{12}^{1}, p_{22}^{1}, p_{12}^{2}}\right), & D\left(\dfrac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^{1}, p_{11}^{2}, p_{22}^{2}}\right) \end{vmatrix}; & D\left(\dfrac{F_1, F_2, \Phi}{p_{12}^{1}, p_{22}^{1}, p_{22}^{2}}\right) \\ \begin{vmatrix} D\left(\dfrac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^{1}, p_{22}^{1}, p_{11}^{2}}\right), & D\left(\dfrac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^{1}, p_{11}^{2}, p_{12}^{2}}\right) \\ D\left(\dfrac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^{1}, p_{22}^{1}, p_{12}^{2}}\right), & D\left(\dfrac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^{1}, p_{11}^{2}, p_{22}^{2}}\right) \end{vmatrix}; & D\left(\dfrac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^{1}, p_{22}^{1}, p_{22}^{2}}\right) \end{vmatrix} = 0.$$

Having found the particular integral $\Phi_1 = C_1$ of this system (in the case, certainly, if this system can be integrated, so that the POISSON-JACOBI's conditions be satisfied for each pair of these 4 equations (5)), we shall have a system of 3 equations

$$F_1 = 0; \quad F_2 = 0; \quad \Phi_1 = C_1,$$

compatible between themselves. If $\Phi_2 = C_2$ means some other particular integral of the system (5), then the system of three equations

$$F_1 = 0; \quad F_2 = 0; \quad \Phi_2 = C_2$$

will, also, be compatible. The integrals $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2$ are obliged to satisfy the system (5′).

The compatibility of the system of 4 equations

$$F_1 = 0; \quad F_2 = 0; \quad \Phi_1 = C_1; \quad \Phi_2 = C_2$$

is verified by the conditions of compatibility for each of the two systems:

$$\text{(I)} \qquad F_1 = 0; \quad \Phi_1 = C_1; \quad \Phi_2 = C_2$$

$$\text{(II)} \qquad F_2 = 0; \quad \Phi_1 = C_1; \quad \Phi_2 = C_2.$$

Assume, that we have found such 4 integrals of the system (5):

$$\Phi_1 = C_1; \dots \quad \Phi_4 = C_4,$$

which make, together with the given system $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, a compatible system of 6 equations, then the derivatives p_{ij}^k, obtained from these 6 equations, satisfy the identity

$$\frac{dp_{ij}^k}{dx_h} = \frac{dp_{ih}^k}{dx_j} \qquad (i, j, h, k = 1, 2)$$

(any 3 equations of all the 6 equations

$$F_1 = 0; \quad F_2 = 0; \quad \Phi_1 = C_1; \ldots \quad \Phi_4 = C_4$$

will be compatible).

Then, we come to the determination of the unknown functions z_1, z_2 by means of quadratures of the equations

$$\begin{aligned} dp_i^k &= p_{i1}^k dx_1 + p_{i2}^k dx_2 \\ dz_k &= p_1^k dx_1 + p_2^k dx_2 \qquad (i, k = 1, 2). \end{aligned}$$

2. Let us show, how the integration of the system of non linear equations (5) can be brought to the integration of the system of linear equations of first order with one dependent variable Φ.

Let us introduce the significations

$$(6) \qquad \frac{\alpha}{\gamma} = \lambda; \quad \frac{\beta}{\gamma} = \mu.$$

Then the system (5) will be as follows:

$$(7) \qquad \begin{aligned} \frac{D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^1, p_{12}^1, p_{11}^2}\right)}{D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^1, p_{22}^1, p_{11}^2}\right)} &= \frac{D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^1, p_{22}^1, p_{11}^2}\right)}{D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{12}^1, p_{22}^1, p_{11}^2}\right)} - \mu \frac{D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^1, p_{11}^2, p_{12}^2}\right)}{D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{12}^1, p_{22}^1, p_{11}^2}\right)} = \\ &= \frac{D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^1, p_{22}^1, p_{12}^2}\right)}{D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{12}^1, p_{22}^1, p_{12}^2}\right)} - \mu \frac{D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^1, p_{11}^2, p_{22}^2}\right)}{D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{12}^1, p_{22}^1, p_{12}^2}\right)} = \\ &= \frac{D\left[\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^1, p_{22}^1, x_2}\right]}{D\left[\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{12}^1, p_{22}^1, x_2}\right]} - \mu \frac{D\left[\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^1, p_{11}^2, x_1}\right]}{D\left[\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{12}^1, p_{22}^1, x_2}\right]} = \frac{D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{11}^1, p_{22}^1, p_{22}^2}\right)}{D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_{12}^1, p_{22}^1, p_{22}^2}\right)} = \lambda. \end{aligned}$$

By using the significations of the form

$$D\left(\frac{F_1, F_2}{p_{i_1 i_2}^k, p_{j_1 j_2}^l}\right) = D_{i_1 i_2 j_1 j_2}^{k\ l}; \quad D\left[\frac{F_1, F_2}{p_{i_1 i_2}^k, x_j}\right] = D_{i_1 i_2 j}^{k\ o}$$

$$(i_1, i_2; j_1, j_2; j, k, l = 1, 2),$$

so that it will be

$$D^{k\ \ l}_{i_1i_2\,j_1j_2} = - D^{l\ \ k}_{j_1j_2\,i_1i_2}; \quad D^{k\ o}_{i_1i_2\,j} = - D^{o\ k}_{j\ i_1i_2},$$

from the last relation (6), from the first, the last and the 3rd of the middle members of the equations (7), we shall obtain the following system of linear equations of the 1rst order, equivalent to the system (5):

$$\begin{aligned}
&(D_{12}{}^{1}{}_{22}{}^{1} + \mu D_{11}{}^{2}{}_{22}{}^{1})\frac{\partial\Phi}{\partial p_{11}{}^{1}} + D_{22}{}^{1}{}_{11}{}^{1}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{12}{}^{1}} + (D_{11}{}^{1}{}_{12}{}^{1} + \mu D_{11}{}^{1}{}_{11}{}^{2})\frac{\partial\Phi}{\partial p_{22}{}^{1}} + \\
&\qquad + \mu D_{22}{}^{1}{}_{11}{}^{1}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{11}{}^{2}} = 0 \\
&(D_{12}{}^{1}{}_{11}{}^{2} + \lambda D_{11}{}^{2}{}_{22}{}^{1})\frac{\partial\Phi}{\partial p_{11}{}^{1}} + D_{11}{}^{2}{}_{11}{}^{1}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{12}{}^{1}} + \lambda D_{11}{}^{1}{}_{11}{}^{2}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{22}{}^{1}} + \\
&\qquad + (D_{11}{}^{1}{}_{12}{}^{1} + \lambda D_{22}{}^{1}{}_{11}{}^{1})\frac{\partial\Phi}{\partial p_{11}{}^{2}} = 0 \\
&D_{22}{}^{1}{}_{22}{}^{2}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{11}{}^{1}} + \lambda D_{22}{}^{2}{}_{22}{}^{1}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{12}{}^{1}} + (D_{22}{}^{2}{}_{11}{}^{1} + \lambda D_{12}{}^{1}{}_{22}{}^{2})\frac{\partial\Phi}{\partial p_{22}{}^{1}} + \\
&\qquad + (D_{11}{}^{1}{}_{22}{}^{1} + \lambda D_{22}{}^{1}{}_{12}{}^{1})\frac{\partial\Phi}{\partial p_{22}{}^{2}} = 0 \\
(8)\quad &(D_{22}{}^{1}{}_{11}{}^{2} + \mu D_{12}{}^{2}{}_{11}{}^{2})\frac{\partial\Phi}{\partial p_{11}{}^{1}} + \lambda D_{11}{}^{2}{}_{22}{}^{1}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{12}{}^{1}} + (D_{11}{}^{2}{}_{11}{}^{1} + \lambda D_{12}{}^{1}{}_{11}{}^{2})\frac{\partial\Phi}{\partial p_{22}{}^{1}} + \\
&\qquad + (D_{11}{}^{1}{}_{22}{}^{1} + \lambda D_{22}{}^{1}{}_{12}{}^{1} + \mu D_{11}{}^{1}{}_{12}{}^{2})\frac{\partial\Phi}{\partial p_{11}{}^{2}} + \mu D_{11}{}^{2}{}_{11}{}^{1}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{12}{}^{2}} = 0 \\
&(D_{22}{}^{1}{}_{12}{}^{2} + \mu D_{22}{}^{2}{}_{11}{}^{2})\frac{\partial\Phi}{\partial p_{11}{}^{1}} + \lambda D_{12}{}^{2}{}_{22}{}^{1}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{12}{}^{1}} + (D_{12}{}^{2}{}_{11}{}^{1} + \lambda D_{12}{}^{1}{}_{12}{}^{2})\frac{\partial\Phi}{\partial p_{22}{}^{1}} + \\
&\qquad + \mu D_{11}{}^{1}{}_{22}{}^{2}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{11}{}^{2}} + (D_{11}{}^{1}{}_{22}{}^{1} + \lambda D_{22}{}^{1}{}_{12}{}^{1})\frac{\partial\Phi}{\partial p_{12}{}^{2}} + \\
&\qquad + \mu D_{11}{}^{2}{}_{11}{}^{1}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{22}{}^{2}} = 0 \\
&(D_{22}{}^{1}{}_{2}{}^{0} + \mu D_{1}{}^{0}{}_{11}{}^{2})\frac{\partial\Phi}{\partial p_{11}{}^{1}} + \lambda D_{2}{}^{0}{}_{22}{}^{1}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{12}{}^{1}} + (D_{2}{}^{0}{}_{11}{}^{1} + \lambda D_{12}{}^{1}{}_{2}{}^{0})\frac{\partial\Phi}{\partial p_{22}{}^{1}} + \\
&\qquad + \mu D_{11}{}^{1}{}_{1}{}^{0}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{11}{}^{2}} + \mu D_{11}{}^{2}{}_{11}{}^{1}\frac{d\Phi}{dx_1} + \\
&\qquad + (D_{11}{}^{1}{}_{22}{}^{1} + \lambda D_{22}{}^{1}{}_{12}{}^{1})\frac{d\Phi}{dx_2} = 0.
\end{aligned}$$

The first and the second of these equations will be dependent on one an other, if

$$\frac{D_{11}{}^{2}{}_{11}{}^{1}}{D_{22}{}^{1}{}_{11}{}^{1}} = \frac{\lambda D_{11}{}^{1}{}_{11}{}^{2}}{D_{11}{}^{1}{}_{12}{}^{1} + \mu D_{11}{}^{1}{}_{11}{}^{2}} = \frac{D_{11}{}^{1}{}_{12}{}^{1} + \lambda D_{22}{}^{1}{}_{11}{}^{1}}{\mu D_{22}{}^{1}{}_{11}{}^{1}} = \frac{D_{12}{}^{1}{}_{11}{}^{2} + \lambda D_{11}{}^{2}{}_{22}{}^{1}}{D_{12}{}^{1}{}_{22}{}^{1} + \mu D_{11}{}^{2}{}_{22}{}^{1}},$$

or

$$
\begin{aligned}
&D_{11}{}^{2}{}_{11}{}^{1}(D_{22}{}^{1}{}_{11}{}^{1}\lambda + D_{11}{}^{1}{}_{11}{}^{2}\mu + D_{11}{}^{1}{}_{12}{}^{1}) = 0\\
(9)\qquad &D_{11}{}^{1}{}_{22}{}^{1}(D_{22}{}^{1}{}_{11}{}^{1}\lambda + D_{11}{}^{1}{}_{11}{}^{2}\mu + D_{11}{}^{1}{}_{12}{}^{1}) = 0\\
&D_{22}{}^{1}{}_{11}{}^{2}(D_{22}{}^{1}{}_{11}{}^{1}\lambda + D_{11}{}^{1}{}_{11}{}^{2}\mu + D_{11}{}^{1}{}_{12}{}^{1}) = 0;
\end{aligned}
$$

the last of these equations was obtained because of the identity

$$D_{11}{}^{1}{}_{12}{}^{1}D_{11}{}^{2}{}_{22}{}^{1} + D_{11}{}^{2}{}_{11}{}^{1}D_{12}{}^{1}{}_{22}{}^{1} + D_{11}{}^{2}{}_{12}{}^{1}D_{22}{}^{1}{}_{11}{}^{1} \equiv 0.$$

When we determine λ and μ from the equations (9), then, on the basis of the 1rst of the limitations (4), we shall satisfy only the equation

$$(10)\qquad D_{22}{}^{1}{}_{11}{}^{1}\lambda + D_{11}{}^{1}{}_{11}{}^{2}\mu + D_{11}{}^{1}{}_{12}{}^{1} = 0.$$

The second equation for λ and μ we shall draw up so, that we can simplify as much as possible the system (8):

$$(11)\qquad D_{22}{}^{1}{}_{12}{}^{1}\lambda + D_{11}{}^{1}{}_{22}{}^{1} = 0.$$

On the basis of the equation (11) and the identity

$$D_{22}{}^{2}{}_{11}{}^{1}D_{22}{}^{1}{}_{12}{}^{1} + D_{12}{}^{1}{}_{22}{}^{2}D_{22}{}^{1}{}_{11}{}^{1} + D_{22}{}^{2}{}_{12}{}^{1}D_{12}{}^{1}{}_{11}{}^{1} \equiv 0,$$

the first equation of our system will change as follows:

$$D_{22}{}^{1}{}_{22}{}^{2}\left(D_{22}{}^{1}{}_{12}{}^{1}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{11}{}^{1}} + D_{11}{}^{1}{}_{22}{}^{1}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{12}{}^{1}} + D_{12}{}^{1}{}_{11}{}^{1}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{22}{}^{1}}\right) = 0.$$

On account of this, *if*

$$D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p_{22}{}^{1},\ p_{22}{}^{2}}\right) \neq 0,$$

then the integration of the system (5) *comes to the integration of the system of 5 linear equations of the 1rst order with one unknown function* Φ:

$$
\begin{aligned}
&D_{12}{}^{1}{}_{22}{}^{1}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{11}{}^{1}} + D_{22}{}^{1}{}_{11}{}^{1}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{12}{}^{1}} + D_{11}{}^{1}{}_{12}{}^{1}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{22}{}^{1}} = 0\\
&(D_{12}{}^{1}{}_{11}{}^{2} + \lambda D_{11}{}^{2}{}_{22}{}^{1})\frac{\partial\Phi}{\partial p_{11}{}^{1}} + D_{11}{}^{2}{}_{11}{}^{1}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{12}{}^{1}} + \lambda D_{11}{}^{1}{}_{11}{}^{2}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{22}{}^{1}} +\\
&\qquad + (D_{11}{}^{1}{}_{12}{}^{1} + \lambda D_{22}{}^{1}{}_{11}{}^{1})\frac{\partial\Phi}{\partial p_{11}{}^{2}} = 0\\
(12)\quad &(D_{22}{}^{1}{}_{11}{}^{2} + \mu D_{12}{}^{2}{}_{11}{}^{2})\frac{\partial\Phi}{\partial p_{11}{}^{1}} + \lambda D_{11}{}^{2}{}_{22}{}^{1}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{12}{}^{1}} + (D_{11}{}^{2}{}_{11}{}^{1} + \lambda D_{12}{}^{1}{}_{11}{}^{2})\frac{\partial\Phi}{\partial p_{22}{}^{1}} +\\
&\qquad + \mu D_{11}{}^{1}{}_{12}{}^{2}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{11}{}^{2}} +\\
&\qquad + \mu D_{11}{}^{2}{}_{11}{}^{1}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{12}{}^{2}} = 0
\end{aligned}
$$

$$
(12) \quad
\begin{aligned}
&(D_{22}{}^{1}{}_{12}{}^{2} + \mu D_{22}{}^{2}{}_{11}{}^{2}) \frac{\partial \Phi}{\partial p_{11}{}^{1}} + \lambda D_{12}{}^{2}{}_{22}{}^{1} \frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}{}^{1}} + (D_{12}{}^{2}{}_{11}{}^{1} + \lambda D_{12}{}^{1}{}_{12}{}^{2}) \frac{\partial \Phi}{\partial p_{22}{}^{1}} + \\
&\qquad + \mu D_{11}{}^{1}{}_{22}{}^{2} \frac{\partial \Phi}{\partial p_{11}{}^{2}} + \\
&\qquad + \mu D_{11}{}^{2}{}_{11}{}^{1} \frac{\partial \Phi}{\partial p_{22}{}^{2}} = 0 \\
&(D_{22}{}^{1}{}_{2}{}^{0} + \mu D_{1}{}^{0}{}_{11}{}^{2}) \frac{\partial \Phi}{\partial p_{11}{}^{1}} + \lambda D_{2}{}^{0}{}_{22}{}^{1} \frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}{}^{1}} + (D_{2}{}^{0}{}_{11}{}^{1} + \lambda D_{12}{}^{1}{}_{2}{}^{0}) \frac{\partial \Phi}{\partial p_{22}{}^{1}} + \\
&\qquad + \mu D_{11}{}^{1}{}_{1}{}^{0} \frac{\partial \Phi}{\partial p_{11}{}^{2}} + \\
&\qquad + \mu D_{11}{}^{2}{}_{11}{}^{1} \frac{d \Phi}{d x_{1}} = 0;
\end{aligned}
$$

but if

$$
D\left(\frac{E_1, \ F_2}{p_{22}{}^{1}, \ p_{22}{}^{2}}\right) = 0,
$$

then the system (12) *is substitudet by the system only of the 4 last equations.*

If we take another, not equal to null, determinant Δ of the 5$^{\text{th}}$ order, then we shall come to one or two limitations, different from the limitations (4).

3. In a particular case, when we have an equation of the 2$^{\text{rd}}$ order with only one function z:

$$
F(x, \ y, \ z; \ p, \ q, \ r, \ s, \ t) = 0, \tag{13}
$$

the addition to it of the equation

$$
\Phi(x, \ y, \ z; \ p, \ q, \ r, \ s, \ t) = \text{const},
$$

brings to the conditions of compatibility under the form of the equality to null of 2 determinants of the 4$^{\text{th}}$ order of the matrix

$$
\left\| \begin{matrix}
\frac{dF}{dx} & \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t} & 0 \\
\frac{d\Phi}{dx} & \frac{\partial \Phi}{\partial r} & \frac{\partial \Phi}{\partial s} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} & 0 \\
\frac{dF}{dy} & 0 & \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t} \\
\frac{d\Phi}{dy} & 0 & \frac{\partial \Phi}{\partial r} & \frac{\partial \Phi}{\partial s} & \frac{\partial \Phi}{\partial t}
\end{matrix} \right\|.
$$

It represent a particular case of the matrice (3). The limitations (4) are substituted by the following:

$$\frac{\partial F}{\partial r} \neq 0; \quad D\left(\frac{F, \Phi}{r, s}\right) \neq 0,$$

if we chose a minor of the 3rd order Δ_{15}^2, not equal to null, cancelling the 2rd horizontal line and the 1rst, 5th column. Adding to Δ_{15}^2 one of the horizontal lines, which is left, and one of the 1rst, 5th column, we obtain a known system of the two equations with one unknown function Φ; it will be the particular case of the system (5).

Determining λ from the square equation

$$\frac{\partial F}{\partial r}\lambda^2 - \frac{\partial F}{\partial s}\lambda + \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

we come to the integration of the system of 2 linear equations

$$\frac{\partial F}{\partial r}\frac{d\Phi}{dx} + \left(\frac{\partial F}{\partial s} - \lambda\frac{\partial F}{\partial r}\right)\frac{d\Phi}{dy} + \left(\lambda\frac{dF}{dy} - \frac{dF}{dx}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{dF}{dy}\frac{\partial\Phi}{\partial s} = 0$$

$$\lambda\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial\Phi}{\partial s} + \left(\frac{\partial F}{\partial s} - \lambda\frac{\partial F}{\partial r}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0,$$

by which *I* replace [1] the known system [2] of the form

$$\frac{d\Phi}{dx} + \lambda_i\frac{d\Phi}{dy} - \frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{\partial F}{\partial r}}\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \lambda_i\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{\partial F}{\partial t}}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$$

$$\lambda_j^2\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \lambda_j\frac{\partial\Phi}{\partial s} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0.$$

The above stated method of integration of the system (1) represents, thus, a generalization of the DARBOUX's method of integration of the equation (13), stated in cours of A. R. FORSYTH.

---

(1) M. KOURENSKY, *Sur la méthode d'intégration de l'équation aux dérivées partielles du second ordre avec une seule fonction inconnue et deux variables indépendantes.* (« Rendiconti della R. Accad. Naz. dei Lincei », vol. X, 1929, pp. 148-154).

(2) A. R. FORSYTH, *Theory of differ. equations*, vol. VI, Cambridge, 1906, pp. 314-317.

Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Kurve vierter Ordnung, inbesondere über den Aronholdschen Satz.

von E. Bodewig (Köln a. Rh., Germania).

EDUARDO STUDY IN MEMORIAM

In den Berliner Monatsberichten von 1864 gab Aronhold über die Doppeltangenten einer ebenen C_4 zwei berühmte Sätze bekannt, die seit dieser Zeit seinen Namen tragen. Insbesondere enthält der zweite Satz — dass (mit einer gewissen Einschränkung) sieben beliebige Geraden immer als ein System von 7 Doppeltangenten einer C_4 aufgefasst werden können, aus denen man die übrigen 21 Doppeltangenten rational finden kann — eine der schönsten Aufgaben der ganzen Geometrie. Die Aronholdschen Beweise dieser beiden Sätze gingen unverändert in alle späteren Lehrbücher über. Erst Study hatte starke Bedenken gegen den zweiten dieser Sätze. Worauf sich seine Vermutung stützte, ist mir nicht bekannt. Jedenfalls veranlasste er mich noch kurz vor seinem Tode, mich mit dem Problem zu beschäftigen. Zu meinem eigenen Erstaunen fand ich seine Vermutung bestätigt. Es ist mir daher eine Pflicht der Dankbarkeit, diese Arbeit dem Andenken meines hochverehrten Lehrers zu widmen.

Die Darstellung benutzt durchgängig die symbolische Methode, die ja auch den Arbeiten Studys und Aronholds am nächsten kommt. Gleichzeitig erhalten dadurch die Resultate eine gefälligere und symmetrische Form. Die Theorie der Doppeltangenten wurde nochmal von Anfang an behandelt, jedoch nur dort, wo sich Abkürzungen gegenüber der üblichen Darstellung ergaben. Zugrunde gelegt wurde der Gedankengang, wie ihn Weber in seinem Lehrbuch entwickelt, da dieser bei dem Problem selbst bleibt und nicht mit Dingen, wie Flächen dritter Ordnung, arbeitet, die dem Problem im Anfange fremd sind. Doch konnte die Webersche Darstellung in zwei Punkten wesentlich abgekürzt und durch das Ausscheiden von fremden Elementen natürlicher gestaltet werden, nämlich an den Stellen (11)-(13) des Textes, wo es sich um die Gradbestimmung der die Berührungspunkte ausschneidenden Kurve handelt, und bei den syzygetischen Tripeln. Bei dem Aronholdschen Satz selbst finden sich in (23) zwei Ausdrücke für die λ sowie die Beziehung (24), die bei Weber fehlen und die doch das Ganze so sehr vereinfachen. Dadurch folgt (25a) und (26a) auf einfache Weise, während bei Aronhold wieder umständliche Rechnungen nötig sind. Aehnlich (33) und (33a). Gleichung (42) und (43) führen dann das Problem zu Ende. Es ergibt sich, dass *für den zweiten Satz die Aronholdsche Bedingung allein nicht ausreicht, sondern dass noch eine weitere Bedingung hinzutreten muss.*

Die Berechnung der Zahl der Doppeltangenten.

Die Kurve sei $(ax)^4 = 0$. Setze ich $\xi + \lambda\eta$ anstelle von x, so ist

$$(a, \xi + \lambda\eta)^4 = (a\xi)^4 + 4\lambda(a\xi)^3(a\eta) + 6\lambda^2(a\xi)^2(a\eta)^2 + 4\lambda^3(a\xi)(a\eta)^3 + \lambda^4(a\eta)^4.$$

Icb nehme nun an, die beiden ersten Glieder in obigem Ausdruck verschwänden, d. h. es sei

(1) $(a\xi)^4 = 0$: d. h. ξ sei ein Kurvenpunkt

(2) $(a\xi)^3(a\eta) = 0$: d. h. η liege auf der Tangente in ξ.

Es bleibt demnach für die weiteren Schnittpunkte der Tangente mit der Kurve die Gleichung übrig:

$$6(a\xi)^2(a\eta)^2 + 4\lambda(a\xi)(a\eta)^3 + \lambda^2(a\eta)^4 = 0.$$

Soll die Tangente Doppeltangente sein, so muss die Diskriminante

(3) $$\Delta(\overset{2}{\xi}, \overset{6}{\eta}) = 3(a\xi)^2(a\eta)^2(b\eta)^4 - 2(a\xi)(a\eta)^3(b\xi)(b\eta)^3 = 0.$$

(Die Gradzahlen 2 und 6 in ξ und η sind darübergesetzt worden). Diese Gleichung soll umgewandelt werden in eine Gleichung *in ξ allein.*

Für η gilt nun Gleichung (2); man kann also setzen

$$(\eta u) \equiv (a\xi)^3(aku) \quad \text{identisch in } u,$$

wobei k unbestimmt ist. Geometrisch heisst dies: Man wählt denjenigen Punkt η aus, in welchem die Tangente in ξ von der Geraden $(kx) = 0$ geschnitten wird; k ist wie gesagt willkürlich, unterliegt aber doch der Beschränkung, dass

(4) $$(k\xi) \neq 0,$$

d. h. k darf nicht durch unseren Kurvenpunkt ξ gehen, da sonst ξ mit η zusammenfiele.

Trägt man obigen Ausdruck für η in die Diskriminante ein, so erhält man

(5) $$\Delta(\xi, ak(a\xi)^3) \equiv D(\overset{20}{\xi}, \overset{6}{k}),$$

d. h. man erhält eine Funktion, die in ξ vom Grade 20 und in k vom Grade 6 ist. Das Verschwinden von D ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ξ der Berührungspunkt einer Doppeltangente ist. Ausserdem muss aber noch $(k\xi) \neq 0$. Verstehe ich nun unter ξ einen der vier Schnittpunkte von k mit der Kurve, so folgt $\xi = \eta$, da ja η der Schnittpunkt von k mit der Tangente in ξ ist. Wegen $\xi = \eta$ wird dann $\Delta(\xi, \xi) = 0$, da ξ auf der Kurve liegt. Demnach ist auch für die umgeformte Diskriminante $D(\xi, k) = 0$, d. h. die Kurve 20. Grades $D(x, k) = 0$ läuft für alle k durch die vier Schnittpunkte von k mit der Kurve. Diese vier Schnittpunkte sind unserem Problem fremd, sie müssen daher eliminiert werden.

Man nimmt dazu statt η einen anderen Punkt ζ der Tangente, den man etwa durch die Gerade m mit der Gleichung $(mx) = 0$ auf der Tangente $(a\xi)^3(ax) = 0$ ausschneidet. Dann ist also $(\zeta u) \equiv (a\xi)^3(amu)$ identisch in u. Man sucht den Wert, den jetzt die Diskriminante $\Delta(\xi, \zeta)$ annimmt. Da ζ auf der Tangente liegt, so gibt es gewisse Zahlen λ, μ, so dass $\zeta = \lambda\xi + \mu\eta$. Wegen $(a\xi)^4 = (a\xi)^3(a\eta) = 0$ gehen jetzt die in der Diskriminante Δ auftretenden Ausdrücke in folgende Werte über:

$$
\begin{aligned}
(a\xi)^2(a\zeta)^2 &= \mu^2(a\xi)^2(a\eta)^2 \\
(b\zeta)^4 &= 6\lambda^2\mu^2(b\xi)^2(b\eta)^2 + 4\lambda\mu^3(b\xi)(b\eta)^3 + \mu^4(b\eta)^4 \\
(a\xi)(a\zeta)^3 &= 3\lambda\mu^2(a\xi)^2(a\eta)^2 + \mu^3(a\xi)(a\eta)^3.
\end{aligned}
$$

Danach wird

$$\Delta(\xi, \zeta) = \mu^6 \cdot \Delta(\xi, \eta), \tag{6}$$

natürlich nur, wenn ξ ein Kurvenpunkt und η und ζ Punkte der Tangente in ξ sind. Für diese Werte von ξ und η ist demnach $\Delta(\xi, \eta)$ eine Kovariante vom Gewichte 6 gegenüber Transformationen der Form $\xi' = \xi$, $\eta' = \lambda\xi + \mu\eta$. Führt man statt η und ζ die Grössen k und m ein, so geht jedesmal die Diskriminante Δ in die zugehörige D über, so dass auch

$$D(\xi, \overset{6}{m}) = \mu^6 \cdot D(\xi, \overset{6}{k}). \tag{7}$$

Man darf vermuten, dass, wenn man durch die sechste Potenz eines Linearausdruckes in m dividiert, man einen von m freien Ausdruck erhält. Es handelt sich zunächst darum, *die Grösse* μ *aus* k *und* m *allein zu bestimmen.* Nun ist

$$
\begin{aligned}
(m\zeta) &= \lambda(m\xi) + \mu(m\eta) = 0 \\
(k\zeta) &= (a\xi)^3(amk) = \lambda(k\xi), \quad \text{da} \quad (k\eta) = 0 \\
(m\eta) &= (a\xi)^3(akm) = -\lambda(k\xi).
\end{aligned}
$$

Jetzt ist also

$$\mu(m\eta) = -\lambda(m\xi) = -\lambda\mu(k\xi), \text{ d. h.}$$
$$\mu = (m\xi):(k\xi).$$

Demnach ist

$$D(\xi, m):(m\xi)^6 = D(\xi, k):(k\xi)^6, \tag{8}$$

d. h. der Ausdruck

$$D(\xi, m):(m\xi)^6 \textit{ ist von } m \textit{ unabhängig.} \tag{9}$$

Da die Beziehung (8) für alle Kurvenpunkte ξ gilt, so enthält die Kurve 26. Grades

$$(kx)^6 \cdot D(x, m) - (mx)^6 \cdot D(x, k) = 0 \tag{10}$$

die C_4 als Teilkurve. Es ist demnach

$$(kx)^6 \cdot D(\overset{20}{x}, \overset{6}{m}) - (mx)^6 \cdot D(\overset{20}{x}, \overset{6}{k}) = (ax)^4 \cdot f(\overset{22}{x}, \overset{6}{k}, \overset{6}{m}). \tag{11}$$

Wir wollen den Bau der Funktion f näher bestimmen. In (11) steht links eine Zerlegung nach dem Modul $(kx)^6$, $(mx)^6$. Angenommen, f lasse bei der Zerlegung einen Rest R, so müsste $R \cdot (ax)^4 \equiv 0$ modd $(kx)^6$, $(mx)^6$. Man zerlege nun $(ax)^4$ modd (kx), (mx). Sind $(kx) = 0$, $(mx) = 0$ so gewählt, dass sie sich nicht auf der C_4 schneiden, so bleibt auch bei dieser Zerlegung ein Rest r, der mit R multipliziert $\not\equiv 0$ modd $(kx)^6$, $(mx)^6$ wäre. Demnach ist $R = 0$. Ich setze daher

$$f(\overset{22}{x}, \overset{6}{k}, \overset{6}{m}) = (kx)^6 \cdot f_1(x, k, m) - (mx)^6 \cdot f_2(x, k, m).$$

f_1 hat nun in k den Grad Null, da ja f in k den Grad 6 hat; ähnlich f_2. Wir schreiben daher besser

$$f(\overset{22}{x}, \overset{6}{k}, \overset{6}{m}) = (kx)^6 \cdot f_1(\overset{16}{x}, \overset{6}{m}) - (mx)^6 \cdot f_2(\overset{16}{x}, \overset{6}{k}). \tag{12}$$

Setzen wir dies in (11) ein, so erhalten wir

$$(kx)^6[D(x, m) - (ax)^4 \cdot f_1(x, m)] = (mx)^6[D(x, k) - (ax)^4 \cdot f_2(x, k)].$$

Es ist demnach die Klammer links durch $(mx)^6$ teilbar, diejenige rechts durch $(kx)^6$. Die Quotienten können aber nicht mehr von k bzw. m abhängen, da ja die Klammern in m bzw. k jedesmal nur den Grad 6 haben: Also ist

$$\begin{aligned} D(\overset{20}{x}, \overset{6}{m}) - (ax)^4 \cdot f_1(\overset{16}{x}, \overset{6}{m}) &= (mx)^6 \cdot F(\overset{14}{x}) \\ D(x, k) - (ax)^4 \cdot f_2(x, k) &= (kx)^6 \cdot F(x). \end{aligned} \tag{13}$$

Diese ganze Funktion F(x), *die von keinem Parameter mehr abhängt, verschwindet nun ebenfalls für alle Berührungspunkte der Doppeltangenten,* wie sich ja aus jeder der beiden Gleichnngen (13) ergibt. Bringe ich sie also mit der C_4 zum Schnitt, so erhalte ich die Höchstzahl der Berührungspunkte der Doppeltangenten, nämlich 56. Demnach ist die Höchstzahl der Doppeltangenten selbst gleich 28. Da es andererseits Kurven gibt, wie die Kleinsche Kurve, welche wirklich 28 Doppeltangenten haben, so hat *jede* C_4 *28 Doppeltangenten.*

Die Steinerschen Komplexe.

Sei t_1 eine Doppeltangente (kurz: *DT*). Dann lässt sich zerlegen:

$$(ax)^4 = (t_1 x)\cdot(Ax)^3 - (Bx)^4.$$

Da aber die C_4, mit t_1 zum Schnitt gebracht, zwei Doppelpunkte ergibt, so muss $(Bx)^4$ zerfallen in ein Quadrat:

$$(ax)^4 = (t_1 x)(Ax)^3 - [(Bx)^2]^2.$$

Setzt man jedoch

$$\begin{aligned} (Ax)^3 + 2(\lambda x)(Bx)^2 + (\lambda x)^2(t_1 x) &= (A_\lambda x)^3 \\ (Bx)^2 + (\lambda x)(t_1 x) &= (B_\lambda x)^2, \end{aligned}$$

wo (λx) eine beliebige Linearform ist, so gilt auch jetzt noch die Gleichung:

$$(ax)^4 = (t_1 x)(A_\lambda x)^3 - [(B_\lambda x)^2]^2.$$

u_1 sei eine zweite *DT*. Ihre Berührungspunkte seien p und q. (λx) soll jetzt so gewählt werden, dass $(B_\lambda x)^2 = 0$ durch p und q läuft, so dass demnach

$$(A_\lambda p)^3 = (A_\lambda q)^3 = (B_\lambda p)^2 = (B_\lambda q)^2 = 0.$$

Bilde ich jetzt die Tangente in p:

$$\begin{aligned} (ap)^3(ax) = 3(t_1 p)(A_\lambda p)^2(A_\lambda x) + (t_1 x)(A_\lambda p)^3 - \\ - 4(B_\lambda p)^2\cdot(B_\lambda p)(B_\lambda x) = 3(t_1 p)(A_\lambda p)^2(A_\lambda x) = 0, \end{aligned}$$

so sieht man, dass diese Tangente u_1 auch Tangente von $(A_\lambda x)^3 = 0$ ist, und zwar in p und q, dass sie also *DT* ist. $(A_\lambda x)^3$ zerfällt daher in $(u_1 x)(Cx)^2$. (Dabei muss $(t_1 p) \neq 0$, da sonst C_4 einen Doppelpunkt hätte). Wir haben also jetzt:

$$(ax)^4 = (t_1 x)(u_1 x)(Cx)^2 - [(Bx)^2]^2.$$

Setzt man

$$\begin{aligned} (Bx)^2 + \mu(t_1 x)(u_1 x) &= (B_\mu x)^2 \\ (Cx)^2 + 2\mu(Bx)^2 + \mu^2(t_1 x)(u_1 x) &= (C_\mu x)^2, \end{aligned}$$

so ist auch dann noch

$$(ax)^4 = (t_1 x)(u_1 x)(C_\mu x)^2 - [(B_\mu x)^2]^2.$$

Bestimmen wir μ so, dass $(C_\mu x)^2$ zerfällt, so erhalten wir eine Gleichung vom Grade 5 in μ. Danach haben wir die Zerlegungen für $(C_\mu x)^2$:

$$(t_2x)(u_2x);\quad (t_3x)(u_3x);\quad ....;\quad (t_6x)(u_6x).$$

Also ist auch

$$(ax)^4 = (t_1x)(u_1x)(t_kx)(u_kx) - [(B_kx)^2]^2, \qquad k = 2, ..., 6. \tag{14}$$

Daraus ergibt sich auf die bei Weber-Fricke beschriebene Weise schlieslich die Darstellung

$$\begin{aligned}(ax)^4 = {} & 2(t_2x)(u_2x)(t_3x)(u_3x) + 2(t_3x)(u_3x)(t_1x)(u_1x) + \\ & + 2(t_1x)(u_1x)(t_2x)(u_2x) - (t_1x)^2(u_1x)^2 - (t_2x)^2(u_2x)^2 - \\ & - (t_3x)^2(u_3x)^2.\end{aligned} \tag{15}$$

Schneidet man die C_4 mit t_k oder u_k, so folgt aus (14), dass man jedesmal zwei Doppelpunkte erhält, d. h. auch die t_k und u_k sind *DT*. Auf jedem $(B_kx)^2 = 0$ liegen demnach die 8 Berührungspunkte von 4 *DT*: t_1, u_1, t_k, u_k. Ein solches System von 6 *DT*-Paaren heisst ein Steinerscher Komplex. In Verbindung mit (15) folgt in bekannter Weise, dass die Berührungspunkte je zweier Paare eines Steinerschen Komplexes auf einem Kegelschnitt liegen.

Syzygetische Tripel.

Daraus ergibt sich auf bekannte Weise der Begriff des syzygetischen und azygetischen Tripels. Ein syzygetisches Tripel liegt immer vor, wenn aus einem Steinerschen Komplex ein Paar und noch eine *DT* herausgegriffen wird. Es fragt sich, ob dies die einzige Art dieser Tripel ist, oder ob auch ein Tripel, das drei verschiedenen Paaren eines Steinerschen Komplexes angehört, syzygetisch sein kann. Wir wählen dazu das Tripel (t_1x), (t_2x), (t_3x). Aus der Darstellung

$$(ax)^4 = 4(t_1x)(u_1x)(t_2x)(u_2x) - [(t_1x)(u_1x) + (t_2x)\, u_2x) - (t_3x)(u_3x)]^2$$

ergibt sich, dass die Berührungspunkte von t_1, t_2, u_1 auf dem Kegelschnitt

$$(t_1x)(u_1x) + (t_2x)(u_2x) - (t_3x)(u_3x) = 0,$$

die Berührungspunkte von t_1, t_2 allein also auf dem Büschel

$$(t_1x)(u_1x) + (t_2x)(u_2x) - (t_3x)(u_3x) + \lambda(t_1x)(t_2x) = 0,$$

wo λ ein Parameter ist, liegen. Aehnlich liegen die Berührungspunkte von t_2, t_3 auf

$$(t_2x)(u_2x) + (t_3x)(u_3x) - (t_1x)(u_1x) + \mu(t_2x)(t_3x) = 0.$$

Da aber beide Büschel kein Element gemeinsam haben, liegen die Berührungspunkte von t_1, t_2, t_3 nicht auf einem Kegelschnitt. Das Tripel ist also azygetisch.

Daraus folgt, wiederum auf bekannte Weise, die Existenz der Aronhold'schen Systeme.

Wir kommen dann zu unserem Hauptteil: dem Aronholdschen Satz.

Der Aronholdsche Satz.

Es sei

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ t_5,\ t_6,\ t_7 \tag{16}$$

ein beliebiges Aronholdsches System. Da jedes aus ihm bildbare Tripel azygetisch ist, so laufen keine drei dieser Tangenten durch einen Punkt, d. h. *jede aus diesen Grössen gebildete Determinante ist von Null verschieden.*

Wir nehmen aus (16) der Reihe nach die DT t_1 bzw. t_2 bzw. t_3 heraus und bilden für die übrigen DT jedesmal den zugehörigen Steinerschen Komplex, in dem sie enthalten sind. Nach bekannten Resultaten bekommen wir so, wenn wir statt t_i nur i, statt u_i nur i' setzen, die Komplexe:

$$\begin{array}{lllllll} 2,\ 3' & 3,\ 2' & 4,\ u_{41} & 5,\ u_{51} & 6,\ u_{61} & 7,\ u_{71} \\ 3,\ 1' & 1,\ 3' & 4,\ u_{42} & 5,\ u_{52} & 6,\ u_{62} & 7,\ u_{72} \\ 1,\ 2' & 2,\ 1' & 4,\ u_{43} & 5,\ u_{53} & 6,\ u_{63} & 7,\ u_{73}. \end{array} \tag{17}$$

Dabei bedeutet z. B. u_{52} die in dem durch die Heraushebung von 2 entstehenden Komplex mit 5 gepaarte DT. Aus (17) folgt noch als weiterer Komplex:

$$1,\ 1' \quad 2,\ 2' \quad 3,\ 3' \ \ldots., \tag{18}$$

der mit jedem Komplex aus (17) ein syzygetisches Paar bildet und demnach keine der vier DT 4, 5, 6, 7 enthält.

Unser Ziel ist, die *DT* 1', 2', 3' als Funktionen der 1, 2, 3 anzugeben.

Für unsere C_4 haben wir die Darstellungen:

$$\begin{aligned} (ax)^4 &= 4(2x)(2'x)(3x)(3'x) - [(f_1x)^2]^2 \\ &= 4(3x)(3'x)(1x)(1'x) - [(f_2x)^2]^2 \\ &= 4(1x)(1'x)(2x)(2'x) - [(f_3x)^2]^2 \\ &= 4(2x)(3'x)(4x)(u_{41}x) - [(kx)^2]^2, \end{aligned} \tag{19}$$

denn auch letzteres Quadrupel ist syzygetisch. Dabei bedeuten:

$$
\begin{aligned}
(f_1x)^2 &= -(1x)(1'x) + (2x)(2'x) + (3x)(3'x)\\
(20)\qquad (f_2x)^2 &= +(1x)(1'x) - (2x)(2'x) + (3x)(3'x)\\
(f_3x)^2 &= +(1x)(1'x) + (2x)(2'x) - (3x)(3'x).
\end{aligned}
$$

Aus der ersten und letzten Darstellung in (19) folgt:

$$4(2x)(3'x)[(3x)(2'x) - (4x)(u_{41}x)] = [(f_1x)^2]^2 - [(kx)^2]^2,$$

d. h., da $(2x)(3'x)$ nur in einem der beiden Faktoren der rechten Seite enthalten ist,

$$
\begin{aligned}
(f_1x)^2 - (kx)^2 &= 2\lambda(2x)(3'x)\\
\lambda[(f_1x)^2 + (kx)^2] &= 2[(3x)(2'x) - (4x)(u_{41}x)].
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$\lambda(f_1x)^2 = \lambda^2(2x)(3'x) + (3x)(2'x) - (4x)(u_{41}x).$$

Setzen wir für $(f_1x)^2$ seinen Wert aus (20) und fügen zu λ den Index 1 hinzu (da wir später zyklisch weiter gehen), so ist

$$
\begin{aligned}
(4x)(u_{41}x) &= (3x)(2'x) - \lambda_1[-(1x)(1'x) + (2x)(2'x) + (3x)(3'x)] + \lambda_1^2(2x)(3'x)\\
(21)\quad (4x)(u_{42}x) &= (1x)(3'x) - \lambda_2[-(2x)(2'x) + (3x)(3'x) + (1x)(1'x)] + \lambda_2^2(3x)(1'x)\\
(4x)(u_{43}x) &= (2x)(1'x) - \lambda_3[-(3x)(3'x) + (1x)(1'x) + (2x)(2'x)] + \lambda_3^2(1x)(2'x).
\end{aligned}
$$

Setzen wir in den beiden letzten Gleichungen $x = 41$, multiplizieren sie mit λ_3 bzw. λ_2 und addieren, so erhalten wir, da 1, 1′, 4 azygetisch sind, ihre Determinante also nicht verschwindet:

$$
\begin{aligned}
\lambda_2\lambda_3 &= -(124):(134)\\
\lambda_3\lambda_1 &= -(234):(214)\\
\lambda_1\lambda_2 &= -(314):(324),
\end{aligned}
$$

Durch Produktbildung folgt $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2 = 1$, also $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \pm 1$. Also ist

$$(22)\qquad \lambda_1 = \mp(134):(124),\quad \lambda_2 = \mp(214):(234),\quad \lambda_3 = \mp(324):(314).$$

Dabei gelten gleichzeitig die oberen oder unteren Vorzeichen, worüber vorläufig noch Unklarheit herrscht.

Setzen wir in den beiden letzten Gleichungen (21) nunmehr $x = 41'$, so folgt nach Multiplikation mit λ_2 und λ_3 und Division durch $(141')$:

$$
\begin{aligned}
\lambda_2\lambda_3 &= -(1'3'4):(1'2'4)\\
\lambda_3\lambda_1 &= -(2'1'4):(2'3'4)\\
\lambda_1\lambda_2 &= -(3'2'4):(3'1'4)
\end{aligned}
$$

und wieder $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \pm 1$, also

(22a) $\lambda_1 = \mp(1'2'4):(1'3'4), \quad \lambda_2 = \mp(2'3'4):(2'1'4), \quad \lambda_3 = \mp(3'1'4):(3'2'4).$

Dabei gelten in (22) und (22a) *gleichzeitig* die Minuszeichen oder Pluszeichen. Setze ich, um die Vorzeichen der λ zu bestimmen, in (21_2) wieder $x = 41'$ und ersetze λ_2 durch seinen Wert aus (22), so erhalte ich

$$-(214)(241')(2'41') + (341')(3'41')(214) = \mp(141')(3'41')(234),$$
$$(3'41')[(341')(214) \pm (141')(234)] = (214)(241')(2'41').$$

Nimmt man in der Klammer das *Minuszeichen*, so ergibt sich die Klammer als $(241')(314)$, d. h. es ist

$$(3'41')(241')(314) = (214)(241')(2'41').$$

Da aber nach (22) und (22a) $(1'2'4):(1'3'4) = (134):(124)$, so ist auch die vorhergehende Gleichung richtig, also auch das angenommene Minuszeichen. Es gelten demnach in (22) und (22a) die unteren Vorzeichen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (413):(412) = (41'2'):(41'3') \\ \lambda_2 &= (421):(423) = (42'3'):(42'1'), \\ \lambda_3 &= (432):(431) = (43'1'):(43'2'). \end{aligned} \qquad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1 \tag{23}$$

Vermöge der hieraus bildbaren Gleichungen $(413)(41'3') - (412)(41'2') = 0$ usw. folgt

$$(412)(41'2') = (423)(42'3') = (431)(43'1') = k. - \tag{24}$$

Bei Verwendung der zwischen vier Geraden der Ebene bestehenden Identität (oder, was dasselbe ist, bei Verwendung von Dreieckskoordinaten) erhält man nun die beiden Gleichungen:

$$(4x) = \frac{(423)}{(123)}(1x) + \frac{(431)}{(231)}(2x) + \frac{(412)}{(312)}(3x) \tag{25}$$

$$(4x) = \frac{(42'3')}{(1'2'3')}(1'x) + \frac{(43'1')}{(2'3'1')}(2'x) + \frac{(41'2')}{(3'1'2')}(3'x). \tag{26}$$

Vormöge (24) gehen aber diese Darstellungen über in:

$$\begin{aligned} \nu \cdot (4x) &= \frac{(1'2'3')}{(42'3')}(1x) + \frac{(2'3'1')}{(43'1')}(2x) + \frac{(3'1'2')}{(41'2')}(3x) \\ &= \nu_1'(1x) + \nu_2'(2x) + \nu_3'(3x) \end{aligned} \tag{25a}$$

$$\begin{aligned} \nu \cdot (4x) &= \frac{(123)}{(423)}(1'x) + \frac{(231)}{(431)}(2'x) + \frac{(312)}{(412)}(3'x) \\ &= \nu_1(1'x) + \nu_2(2'x) + \nu_3(3'x), \end{aligned} \tag{26a}$$

wo

(27) $$k \cdot \nu = (123)(1'2'3').$$

Aus (23) schliessen wir ferner, weil $(421) - \lambda_2(423) = 0$ usw.:

$$
\begin{array}{llll}
 & (Ax) \equiv (1x) - \lambda_2(3x) = 0, & (2x) = 0, & (4x) = 0 \text{ laufen durch einen Punkt} \\
(28) & (Bx) \equiv (2x) - \lambda_3(1x) = 0, & (3x) = 0, & (4x) = 0 \text{ » » » »} \\
 & (Cx) \equiv (3x) - \lambda_1(2x) = 0, & (1x) = 0, & (4x) = 0 \text{ » » » »}
\end{array}
$$

sowie

$$
\begin{array}{llll}
 & (A'x) \equiv (1'x) - \lambda_3(2'x) = 0, & (3'x) = 0, & (4x) = 0 \text{ » » » »} \\
(29) & (B'x) \equiv (2'x) - \lambda_1(3'x) = 0, & (1'x) = 0, & (4x) = 0 \text{ » » » »} \\
 & (C'x) \equiv (3'x) - \lambda_2(1'x) = 0, & (2'x) = 0, & (4x) = 0 \text{ » » » »}
\end{array}
$$

Dabei ist ABC bzw. $A'B'C'$ das Diagonaldreieck des Vierseits 1234 bzw. 1'2'3'4. Aus (29) folgt, dass es Zahlen μ_1, ρ_1 gibt, für die

(29a) $$(Ax) \equiv (1x) - \lambda_2(3x) = \mu_1(2x) + \rho_1(4x).$$

Setzt man $x = 34$ bzw. 32, so erhält man hieraus und aus den entsprechenden Beziehungen:

(30) $$\begin{array}{ll} \mu_1 = \lambda_3^{-1} & \\ \mu_2 = \lambda_1^{-1} & \qquad \rho_i = \nu_i. \\ \mu_3 = \lambda_2^{-1} & \end{array}$$

Aehnlich ist

$$(A'x) \equiv (1'x) - \lambda_3(2'x) = \mu_1'(3'x) + \rho_1'(4x)$$

usw. wo

(30a) $$\begin{array}{ll} \mu_1' = \mu_3 = \lambda_2^{-1} & \\ \mu_2' = \mu_1 = \lambda_3^{-1} & \qquad \rho_i' = \nu_i'. \\ \mu_3' = \mu_2 = \lambda_1^{-1} & \end{array}$$

Ferner ist noch wegen (25a), (26a), (27) und (24)

(31) $$\nu_1\nu_1' = \nu_2\nu_2' = \nu_3\nu_3' = \nu. —$$

Dividiere ich jetzt die Gleichungen (21) der Reihe nach durch λ_1, λ_2, λ_3 und addiere, so erhalte ich

$$(4x)[(u_{41}x):\lambda_1 + (u_{42}x):\lambda_2 + (u_{43}x):\lambda_3] = (1'x)[(2x):\lambda_3 + \lambda_2(3x) - (1x)] +$$
$$+ (2'x)[(3x):\lambda_1 + \lambda_3(1x) - (2x)] + (3'x)[(1x):\lambda_2 + \lambda_1(2x) - (3x)].$$

Nun ist aber nach (29a) und (30):

$$(2x):\lambda_3 + \lambda_2(3x) = (1x) - \nu_1(4x).$$

Setzt man dies und die ähnlichen Resultate in obige Gleichung ein, so folgt:

$$(u_{41}x):\lambda_1 + (u_{42}x):\lambda_2 + (u_{43}x):\lambda_3 = -\nu_1(1'x) - \nu_2(2'x) - \nu_3(3'x). \tag{32}$$

Setzt man die linke Seite dieser Gleichung gleich Null, so erhält man nach (26a) die Gerade $(4x) = 0$. —

Dividiert man die Gleichung (21_1) durch λ_1, die zweite durch λ_2 und addiert, so folgt

$$-(4x)[\nu_1(1'x) + \nu_2(2'x) + \nu_3(3'x) + (u_{43}x):\lambda_3] = -\nu_3(3'x)(4x) - \nu_3'(3x)(4x),$$

also

$$\begin{aligned} (u_{41}x):\lambda_1 &= -\nu_2(2'x) - \nu_3(3'x) + \nu_1'(1x) \\ (u_{42}x):\lambda_2 &= -\nu_3(3'x) - \nu_1(1'x) + \nu_2'(2x) \\ (u_{43}x):\lambda_3 &= -\nu_1(1'x) - \nu_2(2'x) + \nu_3'(3x). \end{aligned} \tag{33}$$

Durch Addition erhält man hieraus und aus (32):

$$\nu_1(1'x) + \nu_2(2'x) + \nu_3(3'x) = \nu_1'(1x) + \nu_2'(2x) + \nu_3'(3x), \tag{34}$$

was übereinstimmt mit (25a), (26a). Daher lassen sich die Gleichungen (33) auch in die Form kleiden:

$$\begin{aligned} (u_{41}x):\lambda_1 &= -\nu_2'(2x) - \nu_3'(3x) + \nu_1(1'x) \\ (u_{42}x):\lambda_2 &= -\nu_3'(3x) - \nu_1'(1x) + \nu_2(2'x) \\ (u_{43}x):\lambda_3 &= -\nu_1'(1x) - \nu_2'(2x) + \nu_3(3'x). \end{aligned} \tag{33a}$$

Wie man sieht, ist die Konstruktion der Doppeltangenten aus einem Aronholdschen System fertig, wenn wir die Tangenten $1'$, $2'$, $3'$ *kennen*: Denn z. B. ist nach (26a) $\nu_2(2'x) + \nu_3(3'x) = 0$ diejenige Gerade, welche den Punkt $41'$ mit dem Punkte $2'3'$ verbindet. Ihr Schnittpunkt mit 1 ist nach (33) ein Punkt von u_{41}. Einen anderen Punkt von u_{41} erhalte ich nach (33a), wenn ich die, die Punkte 41 und 23 verbindende Gerade zum Schnitt bringe mit $1'$. —

Es handelt sich also jetzt darum die Tangenten $1'$, $2'$, 3 *aus dem Aronholdschen System zu finden.*

In (26a) hatten wir eine Darstellung der Geraden 4 durch $1'$, $2'$, $3'$. Drei entsprechende Darstellungen erhalten wir für 5, 6, 7. Infolgedessen bekommen wir auch noch drei weitere Wertsysteme der Art wie ν_1, ν_2, ν_3, die wir daher insgesamt mit ν_{41}, ν_{42}, ν_{43}; ν_{51}, ν_{52}, $\nu_{53}, \ldots,$ ν_{73} bezeichnen. Daher haben wir jetzt:

$$(35)\qquad \begin{aligned} \nu_4(4x) &= \nu_{41}(1'x) + \nu_{42}(2'x) + \nu_{43}(3'x) \\ \nu_5(5x) &= \nu_{51}(1'x) + \nu_{52}(2'x) + \nu_{53}(3'x) \\ \nu_6(6x) &= \nu_{61}(1'x) + \nu_{62}(2'x) + \nu_{63}(3'x) \\ \nu_7(7x) &= \nu_{71}(1'x) + \nu_{72}(2'x) + \nu_{73}(3'x), \end{aligned} \qquad \text{(vgl. (26a))}$$

Diese vier Gleichungen sind voneinander abhängig, also verschwindet ihre Determinante:

$$(36)\quad \nu_4(\nu_{51}\nu_{61}\nu_{71})(4x) - \nu_5(\nu_{61}\nu_{71}\nu_{41})(5x) + \nu_6(\nu_{71}\nu_{41}\nu_{51})(6x) - \nu_7(\nu_{41}\nu_{51}\nu_{61})(7x) = 0.$$

Andererseits haben wir aber die zwischen vier Geraden der Ebene bestehende Identität [1]:

$$(37)\qquad (567)(4x) - (674)(5x) + (745)(6x) - (456)(7x) \equiv 0.$$

Daher sind die ν_i bis auf einen Faktor g durch die Gleichungen bestimmt:

$$(38)\qquad \begin{aligned} g\cdot\nu_4 &= (567):(\nu_{51}\nu_{61}\nu_{71}) \\ g\cdot\nu_5 &= (674):(\nu_{61}\nu_{71}\nu_{41}) \\ g\cdot\nu_6 &= (745):(\nu_{71}\nu_{41}\nu_{51}) \\ g\cdot\nu_7 &= (456):(\nu_{41}\nu_{51}\nu_{61}). \end{aligned}$$

Danach drücken sich die $1'$, $2'$, $3'$ folgendermassen durch die 4, 5, 6 aus:

$$(39)\qquad \begin{aligned} (\nu_{41}\nu_{51}\nu_{61})(1'x) &= \nu_4(\nu_{52}\nu_{63} - \nu_{62}\nu_{53})(4x) + \nu_5(\nu_{43}\nu_{62} - \nu_{42}\nu_{63})(5x) + \\ &\quad + \nu_6(\nu_{42}\nu_{53} - \nu_{43}\nu_{52})(6x) \\ (\nu_{41}\nu_{51}\nu_{61})(2'x) &= \nu_4(\nu_{53}\nu_{61} - \nu_{63}\nu_{51})(4x) + \nu_5(\nu_{63}\nu_{41} - \nu_{43}\nu_{61})(5x) + \\ &\quad + \nu_6(\nu_{43}\nu_{51} - \nu_{53}\nu_{41})(6x) \\ (\nu_{41}\nu_{51}\nu_{61})(3'x) &= \nu_4(\nu_{51}\nu_{62} - \nu_{61}\nu_{52})(4x) + \nu_5(\nu_{61}\nu_{42} - \nu_{41}\nu_{62})(5x) + \\ &\quad + \nu_6(\nu_{41}\nu_{52} - \nu_{51}\nu_{42})(6x). \end{aligned}$$

Aehnliche Darstellungen erhalten wir, wenn irgend eine andere aus 4, 5, 6, 7 herausgegriffene Basis verwendet wird.

Die einzelnen Determinanten sollen nun genauer untersucht werden.

Nach (26a) ist:

$$(40)\qquad \begin{aligned} \nu_{52}\nu_{63} - \nu_{62}\nu_{53} &= (123)^2\left[\frac{1}{(531)(612)} - \frac{1}{(631)(512)}\right] \\ &= (123)^3\,(651):(531)(631)(512)(612) \end{aligned}$$

---

(1) Vgl. etwa WEITZENBÖCK, *Invariantentheorie*, 1923, Groningen, § 19.

(nach der schon bei (37) verwendeten Identität). Entsprechend ist:

$$\nu_{43}\nu_{62} - \nu_{42}\nu_{63} = (123)^3(461):(631)(431)(612)(412) \text{ usw.}$$

$$\begin{aligned}(41)\quad (\nu_{41}\nu_{51}\nu_{61}) &= \nu_{41}(\nu_{52}\nu_{63} - \nu_{53}\nu_{62}) + \nu_{42}(\nu_{53}\nu_{61} - \nu_{51}\nu_{63}) + \nu_{43}(\nu_{51}\nu_{62} - \nu_{52}\nu_{61}) \\ &= (123)^4[(651)(523)(623)(431)(412) + (652)(531)(631)(412)(423) + \\ &\qquad + (653)(512)(612)(423)(431)]:(412)(423)(431)(512)(523) \\ &\qquad (531)(612)(623)(631) \\ &= (123)^4 Z_{456} : N_{456}.\end{aligned}$$

Setzt man diese Werte aus (38), (40) und (41) in (39) ein, so erhält man als erste Gleichung:

$$\begin{aligned}(42)\quad g\cdot(123)^5 Z_{456}\cdot N_{456}^{-1}\cdot(1'x) &= (567)(651)[(531)(631)(512)(612)]^{-1}N_{567}Z_{567}^{-1}(4x) \\ &+ (674)(461)[(631)(431)(612)(412)]^{-1}N_{674}Z_{674}^{-1}(5x) \\ &+ (745)(541)[(431)(531)(412)(512)]^{-1}N_{745}Z_{745}^{-1}(6x).\end{aligned}$$

Es handelt sich jetzt darum, die Natur der Koeffizienten genauer zu bestimmen; mit Ausnahme der Z sind alles dreireihige Determinanten, so dass nur die Z in Frage kommen. Nun ist aber z. B., wenn man das erste der drei Glieder von Z_{456} mittels der schon mehrfach benutzten Identität umformt:

$$\begin{aligned}Z_{456} &= -(652)(153)(623)(412)(431) + (653)(152)(623)(412)(431) + \\ &\quad + (652)(531)(631)(412)(423) + (653)(512)(612)(423)(431) \\ (49)\qquad &= (652)(531)(412)[(631)(423) - (623)(431)] + \\ &\quad + (653)(512)(431)[(612)(423) - (623)(412)] \\ &= (123)[-(652)(531)(412)(643) + (653)(512)(431)(642)].\end{aligned}$$

Das Verschwinden der eckigen Klammer ist aber die Bedingung dafür, dass die 6 Geraden 1, 2,..., 5, 6 *auf einem Kegelschnitt liegen* (¹). Aehnlich mit den anderen Z. — Dasselbe Resultat lässt sich aus der Determinante $(\nu_{41}\nu_{51}\nu_{61})$ auch ohne Symbolik ableiten: Es ist nämlich

$$(\nu_{41}\nu_{51}\nu_{61}) = (123)^3\cdot\begin{vmatrix}(423)^{-1} & (523)^{-1} & (623)^{-1} \\ (431)^{-1} & (531)^{-1} & (631)^{-1} \\ (412)^{-1} & (512)^{-1} & (612)^{-1}\end{vmatrix}.$$

Das Verschwinden der letzteren Determinante bedeutet aber ebenfalls, dass die 6 Geraden, 1,..., 6 auf einem Kegelschnitt liegen (²). —

(¹) Vgl. STUDY, *Einf. in die Theorie der Invarianten*, p. 66, oder WEITZENBÖCK, *Invariantentheorie*, § 13 (4).

(²) Vgl. den Artikel, *Two Theorems upon conjugate Conics*, im « Tohoku Math. J. », Sept. 1929, wo an diese Determinante erinnert wurde.

Verschwindet nun Z_{456}, *so zeigt* (42), *dass dann* 4, 5, 6 *durch einen Punkt laufen.* Ist aber $Z_{456} \neq 0$, so kann 1′ nach (42) nur dann etwa mit 4 zusammenfallen, wenn 4, 5, 6 durch einen Punkt laufen. — Liefe schliesslich 1′ durch den Schnittpunkt von etwa 4 und 5, so würden, wie sich wiederum aus (42) ergibt, auch irgend drei andere Doppeltangenten des Aronholdschen Systems durch einen Punkt laufen, was aber der Bedingung des Aronholdschen Systems widerspricht.

Damit haben wir exakt den Aronholdschen Satz und seine Umkehrung gewonnen:

I. Wenn von einer allgemeinen ebenen Kurve vierter Ordnung ein Aronholdsches System von *DT* gegeben ist, dann liegen keine 6 Tangenten dieses Systems auf einem Kegelschnitt. Denn dies würde zur Folge haben, dass drei asizygetische Tangenten der Kurve durch einen Punkt laufen, was der Allgemeinheit der Kurve widerspräche. Die übrigen 21 *DT* lassen sich aus dem Aronholdschen System rational finden.

II. Sind 7 Geraden der Ebene gegeben, von denen keine drei durch einen Punkt laufen und keine 6 auf einem Kegelschnitt liegen, so lassen sich diese immer als ein Aronholdsches System einer Kurve vierter Ordnung auffassen, und es lassen sich aus ihnen die übrigen 21 *DT* und die C_4 selbst finden. Ist hingegen nur die Bedingung erfüllt, dass keine drei der Geraden des Systems durch einen Punkt laufen, während wohl 6 Geraden des Systems auf einem Kegelschnitt liegen, so bilden die 7 Geraden kein Aronholdsches System einer Kurve vierter Ordnung, da alsdann Gleichung (42) auf der linken Seite verschwinden würde, während ihre rechte Seite nach Voraussetzung immer von Null verschieden ist.

Mit andern Worten: *Damit 7 Geraden der Ebene ein Aronholdsches System bilden, ist notwendig und hinreichend, dass 1) keine drei von ihnen durch einen Punkt laufen, aber auch 2) dass keine sechs von ihnen auf einem Kegelschnitt liegen.*

Piastre rettangolari con nervature anisotrope vincolate su due lati.

Memoria di GIULIO KRALL (a Roma).

Sunto. - *Si considera una piastra rettangolare con nervature costituenti un'orditura ortogonale anisotropa, poggiata su due lati non contigui, cimentata da carichi concentrati. Attraverso opportune schematizzazioni si riduce il problema elastico (determinazione degli spostamenti e sforzi) a problemi elementari dell'ordinaria scienza delle costruzioni.*

§ 1. Consideriamo una piastra elastica S, rettangolare, poggiata in condizioni di vincolo qualisivogliono su due lati non contigui, libera sugli altri, irrobustita da nervature ortogonali *prevalenti* nel senso longitudinale della portata.

In un punto generico Q del suo piano mediano Γ e normalmente a questo agisce un carico P.

Si tratta di determinare spostamenti e sforzi.

La quistione è notevole. Ad essa si riducono infatti tutti i problemi cosidetti di ripartizione dei carichi tra più strutture (nervature spinte sino ad esser travi od archi adirittura) collaboranti per virtù di collegamenti trasversali e piastre ripartitrici.

§ 2. Indichiamo con $2l$ e $2b$ i lati della piastra, con xy due assi ortogonali coincidenti con quelli di simmetria, dunque tali che, per rispetto ad essi, le rette d'appoggio e di bordo libero sieno le $x = \pm l$, rispettivamente $y = \pm b$.

Chiameremo infine con $\xi\eta$ le coordinate del punto Q di applicazione del carico unitario, con $w(xy, \xi\eta)$ la corrispondente deformata di Γ.

Ci proponiamo di determinarla attraverso il principio cosidetto della minima energia potenziale totale, cui potremo, con plausibile approssimazione, attribuire una forma ridotta, tenendo conto delle circostanze geometriche e strutturali or ora specificate.

Il problema analitico si troverà con ciò risolubile mediante un artificio che si potrebbe dire di separazione delle variabili, potendosi far dipendere la determinazione della funzione da equazioni differenziali ordinarie di tipo noto, familiare ai cultori di teoria dell' elasticità. Ne discenderà tra l' altro una notevole estensione del metodo ordinario delle linee di influenza.

Cominciamo dunque a procurarci l' espressione per l' energia totale W, somma di quella elastica di deformazione E e posizionale U dei carichi.

Converremo di designare con $i_x = i_x(x)$ il medio momento d' inerzia per unità di lunghezza della generica sezione $x = x$, con $i_y = i_y(x)$ il momento, sempre per unità di lunghezza, per ipotesi indipendente da y, della $y = y$.

Assunto per brevità $= 1$ il modulo d' elasticità E del materiale, $= \infty$ il coefficiente di POISSON (il che è legittimo pei materiali porosi, il cemento armato in particolare) trattandosi di un' orditura ortogonale, avremo con approssimazione

$$E = \frac{1}{2}\int_S \left\{ i_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + i_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 \right\} dxdy$$

e, evidentemente,

$$U = - w(\xi\eta, \xi\eta) \cdot 1.$$

Per la speciale forma attribuita alla E, nella $W = E + U$ da render minima poniamo

$$w(xy, \xi\eta) = \varphi(x\xi)\psi(y\eta)$$

con: $\varphi = \varphi(x\xi)$ funzione della sola x, che, soddisfacendo automaticamente alle condizioni di vincolo, caratterizziamo come linea elastica, $= 1$ in $x = \xi$ punto di applicazione dell' unico carico cui essa corrisponde, di una nervatura ideale s di S, di momento d' inerzia $i = i_x$;

$\psi = \psi(y\eta)$ funzione incognita, da determinare in conformità col nominato principio.

Per tali posizioni la W diventa

$$W = - \varphi(\xi\xi)\psi(\eta\eta) + \frac{1}{2}\left\{ M(\xi)\int_{-b}^{b}\psi^2 dy + S(\xi)\int_{-b}^{b}\left(\frac{d^2\psi}{dy^2}\right)^2 dy \right\}$$

dove

$$M(\xi) = \int_{-l}^{l} i_x(x)\left[\frac{d^2\varphi(x\xi)}{dx^2}\right]^2 dx, \quad S(\xi) = \int_{-l}^{l} i_y(x)\varphi^2(x, \xi)dx$$

con l' osservazione che, per la φ testè definita ($\varphi(\xi\xi) = 1$),

$$M(\xi) = \frac{1}{f(\xi)}$$

$f(\xi)$ designando lo spostamento che un carico 1 applicato in ξ di s provoca nel suo senso d' azione.

La condizione di stazionarietà

$$\delta W = \delta(E + U) = 0$$

porge, badando che, su $y = \pm b$ è nullo momento e taglio, dunque derivata seconda e terza,

$$S(\xi)\frac{d^4\psi}{dy^4} + M(\xi)\psi = 0 \quad \text{per} \quad y \lesseqgtr \eta$$

con un salto unitario della $S(\xi)\dfrac{d^3\psi}{dy^3}$ in $y = \eta$.

La corrispondente soluzione si calcola immediatamente in modo noto.

Convenendo di scrivere

$$\psi_\xi(y\eta) = f(\xi)\overline{\psi}_\xi(y\eta),$$

l'indice ξ stando ad indicare che la ψ è calcolata per $S = S(\xi)$, $M = M(\xi)$, avremo

$$w(xy,\, \xi\eta) = f(\xi)\varphi(x\xi)\overline{\psi}_\xi(y\eta).$$

Derivando due volte rispetto ad x rispettivamente y otteniamo i momenti (per unità di lunghezza) secondo x, rispettivamente y,

$$m_x(xy,\, \xi\eta) = -\, i_x f(\xi)\frac{d^2\varphi}{dx^2}\overline{\psi}_\xi(y,\, \eta) = \overline{m}(x\xi)\overline{\psi}_\xi$$

$\overline{m}(x\xi)$ designando il momento che $P = 1$ in ξ provoca in x di s;

$$m_y(xy,\, \xi\eta) = -\, i_y f(\xi)\varphi(x\xi)\frac{d^2\overline{\psi}_\xi}{dy^2}.$$

Se più sono i carichi $P(\xi_i\eta_j)$ nei punti $\xi_i\eta_j$, posto

$$\Pi_i = \Sigma_j P(\xi_i\eta_j)\overline{\psi}_{\xi_i}(y\eta_j),$$

poichè, per un noto teorema di reciprocità, oltre a $\overline{\psi}(y\eta) = \overline{\psi}(\eta y)$

$$f(\xi)\varphi(x\xi) = f(x)\varphi(\xi x),$$

avremo

$$w(xy) = \Sigma_i f(x)\varphi(\xi_i x)\Pi_i$$
$$m_x(xy) = \Sigma_i \mu(\xi_i x)\Pi_i.$$

Da cui risulta manifesta l'estensione annunciata: *spostamenti* e *momenti* di un punto y d'una generica sezione $x = x$, si possono calcolare con le ordinarie linee di influenza, $f(x)\varphi(\xi, x)$ rispettivamente $\mu(\xi x)$, salvo a sostituire i carichi effettivi P coi carichi Π_i, funzioni della sola y.

In particolare, a titolo d'esempio illustrativo, consideriamo un carico P nel punto $\xi = \eta = 0$.

Posto

$$\lambda_0 = \sqrt[4]{4f(0)S(0)}, \quad v_0 = \frac{2 + \mathrm{Ch}\,\frac{2b}{\lambda_0} + \cos\frac{2b}{\lambda_0}}{\mathrm{Sh}\,\frac{2b}{\lambda_0} + \sin\frac{2b}{\lambda_0}}, \quad n_0 = \frac{\mathrm{Ch}\,\frac{2b}{\lambda_0} - \cos\frac{2b}{\lambda_0}}{\mathrm{Sh}\,\frac{2b}{\lambda_0} + \sin\frac{2b}{\lambda_0}}$$

risulta per lo spostamento ed i momenti in $x = y = 0$

$$w_0 = \frac{Pf(0)}{2\lambda_0} v_0, \quad m_x(0) = \frac{\mu(00)P}{2\lambda_0} v_0, \quad m_y(0) = \frac{i_y}{S(0)} \frac{P\lambda_0}{4} n_0$$

in cui, per condizioni di libero appoggio,

$$f(0) = \frac{l^3}{6i_x}, \quad \mu(00) = \frac{l}{2}.$$

Rileveremo, concludendo, che da queste relazioni si traggono notevoli risultati pratici. Di ciò tratta una nota di prossima pubblicazione negli « Annali dei Lavori Pubblici ».

INDICE DEL TOMO VIII DELLA SERIE 4ª