TRAITÉ
D'ÉLECTRICITÉ INDUSTRIELLE
THÉORIQUE ET PRATIQUE

PAR

MARCEL DEPREZ

MEMBRE DE L'INSTITUT
PROFESSEUR D'ÉLECTRICITÉ INDUSTRIELLE AU CONSERVATOIRE NATIONAL
DES ARTS ET MÉTIERS
PROFESSEUR SUPPLÉANT AU COLLÈGE DE FRANCE

1er FASCICULE

ÉLECTRICITÉ STATIQUE ET MAGNÉTISME

ÉLECTROMÉTRIE. MAGNÉTOMÉTRIE

PARIS
LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE BAUDRY ET Cie, ÉDITEURS
15, RUE DES SAINTS-PÈRES, 15
MAISON A LIÉGE, 21, RUE DE LA RÉGENCE

1896

AVERTISSEMENT

Cet ouvrage est divisé en deux parties : la première purement théorique traite de l'Electro-statique, du Magnétisme, de l'Electro-cinétique, de l'Electro-dynamique, de l'Electro-magnétisme et de l'Induction Electro-magnétique ainsi que des méthodes et instruments de mesures qui se rapportent à chacune de ces branches de l'Electricité.

La seconde partie comprendra l'étude théorique et expérimentale des machines destinées à engendrer l'énergie électrique ou à la transformer en travail mécanique ; la transmission électrique de la force à distance ; les applications mécaniques de toute nature ; les chemins de fer électriques ; les transformateurs ; les accumulateurs ; les appareils d'éclairage, et enfin la canalisation et la distribution de l'électricité ainsi que les appareils de régulation du courant et du potentiel.

J'ai fait tous mes efforts pour réduire au minimum les calculs mathématiques nécessaires pour rendre absolument compréhensibles les déductions tirées d'un très petit nombre de lois fondamentales dues à l'expérience. J'espère que la première partie de ce traité bien que purement théorique sera lue avec intérêt par les personnes qui désirent se faire une conviction complète sur le degré de confiance que l'on doit accorder à ces déductions. Elles verront que la science de l'Electricité, comme la Mécanique rationnelle, est basée sur des principes absolument certains, et que grâce à l'emploi combiné du principe de la conservation de l'Energie d'une part et de quelques symboles mathématiques, tels que : le potentiel, le flux de force, le feuillet magnétique, d'autre part, on peut résoudre presque tous les problèmes. La simplicité et l'exactitude des solutions ainsi obtenues, leur accord complet avec l'expérience sont d'autant plus remarquables qu'il s'agit d'un agent impondérable, invisible et intangible. On peut même dire que le désaccord classique entre la théorie et la pratique existe dans l'application industrielle de l'électricité à un degré moindre que dans toute autre industrie. Les machines dynamo-électriques, par exemple, ont un rendement qui atteint et dépasse même 95 % du rendement théorique calculé.

J'ai consacré une place relativement considérable aux méthodes et aux instruments de mesure. En m'efforçant de faire ressortir l'importance et la difficulté du sujet, j'ai indiqué les moyens propres à augmenter la précision des mesures qui, il faut avoir le courage de le dire, est (au moins en ce qui concerne les courants et les potentiels) inférieure à celle que l'on atteint dans les expériences de mécanique industrielle.

Février 1896.

Marcel DEPREZ.

TRAITÉ
D'ÉLECTRICITÉ INDUSTRIELLE

PREMIÈRE PARTIE
ÉLECTRICITÉ STATIQUE

CHAPITRE PREMIER
THÉORÈMES GÉNÉRAUX. — UNITÉS FONDAMENTALES

§ 1. — GÉNÉRALITÉS

1. — Il est aussi difficile de définir l'Electricité que la Chaleur, la Lumière et en général les causes de tous les phénomènes naturels qui s'accomplissent journellement sous nos yeux.

Les phénomènes électriques, observés dès la plus haute antiquité et qui consistaient dans l'attraction et la répulsion exercées sur des corps légers par de l'ambre préalablement frotté, n'ont en eux-mêmes rien de plus mystérieux que les actions produites sur les corps par la Chaleur et la Lumière.

Les phénomènes de dilatation, de fusion, de vaporisation produits par la chaleur sont tout aussi incompréhensibles pour nous que les actions électriques; ces dernières ne sont pas les seules qui s'exercent à distance, puisque la Chaleur et la Lumière peuvent produire des effets mécaniques à des distances considérables de la source dont elles proviennent.

Il existe d'ailleurs une force dont les effets se manifestent à tout instant sous nos yeux, et dont les lois présentent la plus complète analogie avec celles des actions mécaniques de l'Electricité. Cette force, c'est la Pesanteur. Nous verrons bientôt, en effet, que les travaux de Coulomb ont démontré que les lois de l'attraction ou de la répulsion électrique et les lois de l'attraction *gravifique* ont la même expression mathématique; c'est cela qui a permis de définir avec précision ce qu'on appelle une quantité d'électricité.

En résumé, nous donnerons le nom d'Electricité à la cause inconnue d'un ensemble de phénomènes de catégorie spéciale que nous allons étudier, qui ne peuvent être attribués ni à la Pesanteur, ni à la Chaleur, ni à la Lumière et dont le point de départ est l'action mécanique exercée à distance par certains corps placés dans certaines conditions.

2. — Les actions mécaniques exercées à distance entre un corps électrisé et les corps environnants, ont été prises comme base des définitions et des calculs relatifs aux phénomènes électriques.

Avant d'entreprendre l'étude de l'Electricité, il est donc indispensable de rappeler certaines définitions et certains théorèmes de la mécanique rationnelle.

Les trois grandeurs fondamentales auxquelles l'esprit humain a été conduit par la force des choses à ramener toutes les autres, sont : *l'espace, le temps* et *la masse* ou *quantité de matière*. Ces trois genres de grandeurs ont permis de constituer ce qu'on appelle improprement des unités *absolues* et auxquelles le nom d'*irréductibles* paraîtrait mieux approprié. Il semble que la Force constitue également une quantité d'un ordre irréductible ; mais la mécanique rationnelle a permis de définir la Force au moyen des trois quantités citées plus haut.

Il existe encore d'autres quantités dont nous aurons à nous servir constamment dans la suite de ce cours, et parmi lesquelles les plus importantes sont le Travail et la Force vive. Nous allons voir brièvement comment elles sont exprimées en unités absolues; pour arriver à la notion de ces quantités, nous allons définir d'abord la vitesse et l'accélération.

§ 2. — VITESSE. — ACCÉLÉRATION

3. — Vitesse. — Supposons un corps en mouvement sur la ligne droite AB (fig. 1) ; si sur cette droite nous prenons une certaine longueur Aa_1, représentant l'espace parcouru pendant la première unité de temps, puis une longueur a_1a_2 représentant l'espace parcouru pendant la seconde unité de temps, puis une longueur a_2a_3 l'espace parcouru pendant la troisième unité de temps et ainsi de suite ; les longueurs successives Aa_1, a_1a_2, a_2a_3 ..., s'appellent les vitesses moyennes du corps pendant l'unité de temps (fig. 1).

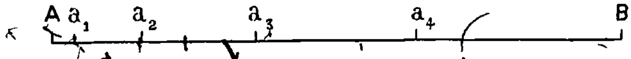


Fig. 1

Si le corps n'était soumis à aucune cause modificatrice de sa vitesse, c'est-à-dire à aucune force, les longueurs Aa_1, a_1a_2, a_2a_3 ... seraient égales entre elles ; la vitesse serait *constante* et le mouvement serait dit *uniforme*.

Si chacun des intervalles Aa_1, a_1a_2, a_2a_3 ... différait du précédent d'une quantité toujours la même, la vitesse, au lieu d'être constante, croîtrait proportionnellement au temps, et le mouvement serait dit uniformément accéléré.

On voit que si on représente par L l'espace parcouru pendant le temps T, la vitesse moyenne aura pour expression le quotient $\frac{L}{T}$. Si on prend l'unité de temps excessivement petite, l'espace L sera très petit et le quotient s'approchera de plus en plus d'une valeur limite que l'on appelle la vitesse à l'*instant* considéré.

4. — Accélération. — Les longueurs Aa_1, a_1a_2, a_2a_3 représentant les vitesses moyennes pendant les unités de temps successives, si nous retranchons l'une d'elles a_1a_2 par exemple, de celle qui la suit a_2a_3, la différence représentera l'accroissement de vitesse moyenne pendant l'unité de temps. Cet accroissement de vitesse moyenne divisé par le temps nécessaire pour le produire (qui ici est égal à l'unité), constitue ce qu'on appelle l'*accélération*.

L'accélération est donc le quotient de l'accroissement de la vitesse d'un corps, par le temps nécessaire pour produire cet accroissement; l'unité de temps étant prise extrêmement petite.

Cherchons maintenant à évaluer l'accélération moyenne connaissant les espaces parcourus pendant des temps successifs égaux, et supposons que les intervalles égaux contiennent un certain nombre d'unités de temps t; la vitesse moyenne pendant l'intervalle Aa_1, aura pour valeur $\frac{\overline{Aa_1}}{t}$ (1); de même la vitesse moyenne pendant le second intervalle de temps aura pour valeur $\frac{\overline{a_1a_2}}{t}$ et ainsi de suite. D'après la définition de l'accélération, nous aurons, en la désignant par W

$$W = \frac{\frac{\overline{a_1a_2}}{t} - \frac{\overline{Aa_1}}{t}}{t} = \frac{\overline{a_1a_2} - \overline{Aa_1}}{t^2}.$$

Le numérateur étant la différence d'une longueur est lui-même une longueur tandis que le dénominateur représente le carré d'un temps. Nous pourrons donc représenter symboliquement l'accélération par le quotient :

$$W = \frac{L}{T^2}, \qquad (1)$$

tandis que la vitesse était représentée par le symbole :

$$V = \frac{L}{T}. \qquad (2)$$

Les symboles (1) et (2) s'appellent les *dimensions* de l'accélération et de la vitesse.

§ 3. — FORCE. — TRAVAIL. — FORCE VIVE. — MOMENT D'UNE FORCE.

5. — **Force.** — Une force appliquée à un corps entièrement libre

(1) Le signe — placé au-dessus de deux lettres indique qu'elles désignent une longueur géométrique dont le commencement et la fin correspondent à ces deux lettres.

Le signe ⌒ placé au-dessus de trois lettres indique un angle dont le sommet correspond à la seconde lettre.

Le signe ⌒ placé au-dessus d'un nombre quelconque de lettres désigne un contour curviligne.

de se mouvoir lui imprime, si elle est constante en grandeur et en direction, une vitesse proportionnelle au temps pendant lequel elle agit sur lui ; ou, ce qui revient au même, augmente pendant chaque unité de temps la vitesse de ce corps d'une quantité constante. Cet accroissement de vitesse s'appelle l'*accélération,* comme nous l'avons vu plus haut.

Un décimètre cube d'eau, contenu dans un vase dont nous supposerons la masse négligeable par rapport à celle de l'eau, est suspendu par un fil que l'on vient à couper. Ce corps est alors soumis à l'action exclusive de la pesanteur qui agit sur lui avec un effort égal à un kilogramme par définition, constant en grandeur (un kilogramme) et en direction (la verticale). On démontre que pendant chaque seconde, l'accélération du corps reste constante et l'expérience a prouvé qu'elle était égale à neuf mètres quatre-vingt-un centimètres par seconde.

Si au lieu d'être égale à un kilogramme, la force qui agit sur le décimètre cube d'eau était dix fois plus petite, on démontre que l'accélération serait elle-même dix fois plus petite ; c'est-à-dire que la vitesse, exprimée en mètres par seconde, ne s'accroîtrait que de $0^m,981$ pendant chaque seconde de la chute.

6. — Si on avait plusieurs masses égales entre elles et sollicitées par des forces égales leur imprimant à chacuue la même accélération, ces forces pourraient être remplacées par une résultante unique égale à la somme des forces partielles ; d'où il résulte que, à égalité d'accélération la force est proportionnelle à la masse.

On déduit de ce qui précède que pour imprimer à un corps de masse M une accélération W, il faut lui appliquer une force proportionnelle au produit $M \times W$. Mais comme W est lui-même proportionnel à $\frac{L}{T^2}$, on en conclut que la force F peut être représentée par une expression de la forme :

$$F = \frac{ML}{T^2}.$$

L'expression numérique de la Force, dont nous aurons à nous servir souvent est la suivante : en désignant par p le poids d'un corps, g l'accélération produite par ce poids agissant sur la masse du corps lorsqu'il tombe en chute libre, par f une force quelconque substituée à la pesanteur et communiquant au même corps une accélération w, on a en vertu du théorème de la proportionnalité des forces aux accélérations :

$$\frac{f}{p} = \frac{w}{g},$$

d'où

$$f = \frac{pw}{g}.$$

Le quotient $\frac{p}{g}$ s'appelle la masse du corps.

7. — On peut trouver étonnant que les savants aient préféré ramener l'unité de force à une expression dans laquelle entre une quantité aussi complexe que l'accélération, tandis que, en apparence, il eût été si simple de choisir une unité ayant son existence propre. On aurait pu par exemple, prendre comme unité, la force élastique d'un gaz ou d'un ressort ; ou encore, avec plus de chance d'invariabilité, le poids d'un corps. C'est d'ailleurs ce qu'on a fait pendant longtemps en choisissant pour unité de force, le poids du décimètre cube d'eau à la température de 4 degrés sous la latitude de Paris et au niveau de la mer.

Ce sont les savants chargés d'établir un système de mesure des grandeurs électriques, qui, les premiers, ont, dans le but de tout ramener aux trois unités fondamentales (*espace*, *temps*, *masse*), renoncé à l'emploi si commode du poids d'un corps comme étalon de force, pour adopter la définition suivante :

L'unité de force est celle qui communique à l'unité de masse, une accélération égale à l'unité. Ou ce qui revient au même :

L'unité de force est celle qui agissant pendant l'unité de temps sur l'unité de masse partant du repos, lui imprime une vitesse égale à l'unité.

8. — **Système C. G. S.** — Dans les applications numériques relatives à l'électricité statique, les unités adoptées par les savants anglais ont été les suivantes :

Unité de longueur : *le centimètre.*

Unité de temps : *la seconde.*

Unité de masse : la masse du centimètre cube d'eau à la température de 4°. Or comme cette masse pèse un gramme sous la latitude de Paris et au niveau de la mer, on dit souvent pour abréger, que l'unité de masse adoptée est la masse d'un gramme d'eau ; tandis qu'on devrait dire que c'est la masse d'un centimètre cube d'eau.

Pour rappeler d'une façon permanente l'origine de ces unités, on a donné à l'ensemble de ces mesures le nom de système *C.G.S.* (C centimètres, G gramme, S seconde).

L'équation :

$$f = \frac{pw}{g}$$

va nous permettre d'évaluer en unités ordinaires l'unité de force du système C.G.S. En effet, si nous prenons :

$$p = 1 \text{ gramme,}$$
$$w = 1 \text{ centimètre par seconde,}$$
$$g = 9^{\mathrm{m}},81 \text{ par seconde,}$$

l'expression de la force devient :

$$f = \frac{1 \text{ gramme}}{981}.$$

On voit donc que l'unité de force adoptée, à laquelle on a donné le nom de *dyne*, diffère extrêmement peu de la millième partie d'un gramme.

9. — **Travail.** — On appelle *Travail* la valeur du produit de l'intensité d'une force par le chemin parcouru par son point d'application, ce chemin étant mesuré dans la direction de la force.

Ainsi le travail produit par un corps pesant qui passe d'une position à une autre, est égal au produit du poids de ce corps par le déplacement de son centre de gravité mesuré suivant la *verticale* ; c'est-à-dire par la différence de niveau des deux positions successives, et cela, quelle que soit la forme du chemin parcouru.

Prenons par exemple trois corps égaux (fig. 2) partant du point A et se dirigeant vers le point B en suivant les trois chemins différents ACB, ADB, AEB ; mais de manière à se trouver toujours sur une même horizontale HH'. Le travail développé par la pesanteur sur ces trois corps, depuis leur point de départ A aura la même valeur pour chacun d'eux, puisque ce travail a pour expression le produit $p \times h$, en appelant p le poids du corps et h le déplacement AH mesuré suivant la direction de la pesanteur et qui, par suite, est vertical.

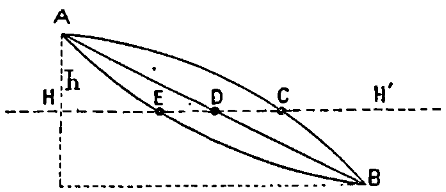


Fig. 2

L'unité de travail adoptée dans la mécanique industrielle, est comme on le sait le *kilogrammètre*, c'est-à-dire le travail produit par un poids de un kilogramme parcourant une hauteur verticale d'un mètre.

Dans le système C.G.S., l'unité de travail est nécessairement beaucoup plus petite, puisque l'unité de force est égale à

$$\frac{1 \text{ kilogramme}}{981\,000}$$

et que l'unité de longueur est égale à un centimètre. L'unité de travail étant le produit de ces deux unités sera égale à :

$$\frac{1 \text{ kilogrammètre}}{98\,100\,000}.$$

On lui a donné le nom de *Erg*. C'est le travail produit par la chute d'un corps pesant $\frac{1}{981}$ de gramme (poids d'une goutte d'eau de un millimètre un quart de diamètre) tombant d'une hauteur de un centimètre.

10. — Cherchons maintenant l'expression du travail en unités fondamentales.

D'après ce que nous venons de dire, on a :

$$\textit{Travail} = \textit{Force} \times \textit{Longueur},$$

mais la force a pour expression $\frac{ML}{T^2}$; donc le travail est représenté par :

$$\frac{ML}{T^2} \times L.$$

On a donc en désignant le travail par $\mathfrak{T}$

$$\mathfrak{T} = \frac{ML^2}{T^2}.$$

11. — On va voir tout de suite l'utilité de ces représentations symboliques, lorsqu'il s'agit d'évaluer en unités C.G.S. des résultats obtenus dans un autre système d'unités. Ainsi dans beaucoup de recherches restées classiques, Gauss avait adopté : pour unité de longueur le millimètre, pour unité de temps la seconde et pour unité de masse, la masse du milligramme. On demande de traduire en unités C.G.S. les résultats qu'il avait obtenus lorsque ces résultats s'appliquaient à une force ou à un travail.

En ce qui concerne la force, nous avons vu (6) qu'elle est représentée par :

$$F = \frac{ML}{T^2}.$$

Si les unités étaient d'un ordre de grandeur différent, cette expression deviendrait en appelant F', M', L', T' les nouvelles valeurs de F, M, L, T,

$$F' = \frac{M'L'}{T'^2};$$

on en conclut

$$\frac{F'}{F} = \frac{M'}{M} \times \frac{L'}{L} \times \left(\frac{T}{T'}\right)^2.$$

Or dans les expériences de Gauss, M' était exprimé en milligrammes, tandis que dans le système C.G.S., M est exprimé en grammes ; de même L' était exprimé en millimètres, tandis que L est exprimé en centimètres. On a donc :

$$\frac{M'}{M} = \frac{1}{1000}, \qquad \frac{L'}{L} = \frac{1}{10};$$

enfin l'unité de temps étant la même dans les deux systèmes, on a :

$$\frac{F'}{F} = \frac{1}{10\,000},$$

c'est-à-dire que l'unité de force de Gauss était égale à $\frac{1}{10\,000}$ de dyne : soit

$$\frac{1 \text{ gramme}}{9\,810\,000}.$$

Quant à l'unité de travail de Gauss, son rapport à l'unité C.G.S. ou Erg est donné par l'expression :

$$\frac{\mathfrak{T}'}{\mathfrak{T}} = \frac{M'}{M} \times \left(\frac{L'}{L}\right)^2 \times \left(\frac{T}{T'}\right)^2.$$

On trouve en remplaçant les lettres par leurs valeurs :

$$\frac{\mathfrak{T}'}{\mathfrak{T}} = \frac{1}{100\,000}.$$

12. — **Force vive.** — On appelle *force vive* d'un corps, le produit de sa masse par le carré de sa vitesse. La vitesse ayant pour valeur

$$V = \frac{L}{T},$$

on en conclut :

$$MV^2 = \frac{ML^2}{T^2},$$

expression identique à celle du travail.

On démontre en effet en mécanique que pour faire passer un corps de masse M, de l'état de repos à l'état de mouvement, sa vitesse étant V, il faut dépenser une quantité de travail égale à $\frac{1}{2}MV^2$.

Si au lieu de partir de l'état de repos, le corps est déjà en mouvement quand la force agit sur lui, le travail dépensé pour accroître sa vitesse et la faire passer de la valeur initiale V_0 à la valeur finale V_1 aura pour expression :

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} M(V_1^2 - V_0^2);$$

c'est le théorème des forces vives.

13. — Exemple numérique : Dans le but de familiariser le lecteur avec l'emploi des unités C.G.S., nous allons calculer le travail nécessaire pour faire passer un corps de masse égale à 2 kilogrammes, de la vitesse de 15 mètres par seconde à celle de 20 mètres par seconde.

On a dans ce cas :

$$M = 2000 \text{ grammes.}$$
$$V_0 = 1500 \text{ centimètres par seconde.}$$
$$V_1 = 2000 \text{ centimètres par seconde.}$$

L'équation des forces vives donne :

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\, 2000[\overline{2000}^2 - \overline{1500}^2],$$

ou

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\, 2000[4\,000\,000 - 2\,250\,000],$$

enfin

$$\mathfrak{T} = 1\,750\,000\,000 \text{ d'ergs.}$$

Or le kilogrammètre valant 98 100 000 ergs, il en résulte que

$$\mathfrak{T} = 17 \text{ kilogrammètres, } 85.$$

14. — Moment d'une force. — On appelle *moment d'une force* par rapport à un axe, dont la direction est supposée perpendiculaire à celle de la force, le produit de l'intensité de la force par sa distance à l'axe ; cette distance s'appelle bras de levier. Le moment d'une force est donc, comme le travail, représenté par le produit de cette force par une longueur.

Cette quantité n'intervient que lorsqu'il s'agit d'un corps qui ne peut prendre d'autre mouvement qu'un mouvement de rotation autour d'un axe.

La grandeur numérique de l'unité de moment est en mécanique industrielle égale à un kilogramme multiplié par un mètre, absolument comme pour l'unité de travail ; la seule différence est que dans ce dernier cas, il y a déplacement dans la direction de la force, tandis que ce déplacement n'existe pas dans la définition du moment.

Dans le système C.G.S., l'unité de moment est produite par une force de une dyne $\left(\frac{1 \text{ gramme}}{981}\right)$ appliquée perpendiculairement à un bras de levier de un centimètre de longueur. Nous verrons que les fils métalliques très fins, tels que ceux employés dans la balance de torsion de Coulomb, développent des efforts auxquels le choix de cette unité de moment convient très bien.

L'expression *symbolique* du moment, est, comme nous venons de le dire, identique à celle du travail, c'est-à-dire qu'elle a pour expression :

$$\mathcal{M} = \frac{ML^2}{T^2}.$$

§ 4. — PRINCIPE DE LA CONSERVATION DE L'ÉNERGIE. ÉQUIVALENT MÉCANIQUE DE LA CHALEUR. — APPLICATIONS.

15. — **Principe de la conservation de l'énergie.** — Pour rendre clair le principe auquel on a donné le nom de *principe de la conservation de l'énergie,* et qui domine tous les phénomènes d'ordre physique, nous allons examiner plusieurs exemples complètement distincts et dans lesquels il est mis en évidence avec une grande netteté.

Premier exemple. — Supposons d'abord, qu'une force telle que la pesanteur, soit appliquée à un corps entièrement libre de se mouvoir ; on démontre en mécanique que ce corps prend un mouvement uniformément accéléré, et que sa vitesse V, acquise lorsqu'il est tombé d'une hauteur h en partant du repos, est donnée par la formule :

$$V = \sqrt{2gh},$$

d'où :

$$h = \frac{V^2}{2g},$$

en appelant g l'accélération due à la pesanteur.

Or le travail produit est égal à $p \times h$ (9), ou en remplaçant h par sa valeur

$$\mathcal{T} = \frac{pV^2}{2g},$$

ce qui n'est autre chose que le théorème des forces vives.

Nous voyons donc que le travail produit par la chute du poids p a été entièrement employé à imprimer à ce corps la vitesse V. Sa demi-force vive, $\frac{pV^2}{2g}$, s'appelle *énergie actuelle* ou *cinétique* du corps.

Supposons maintenant que le corps arrivant sur le sol avec la vitesse V, tombe sur un ressort parfait n'ayant qu'une masse négligeable ; que va-t-il se passer ? Le corps va comprimer graduellement le ressort, sa vitesse ira en diminuant de plus en plus et finira par devenir nulle ; si à cet instant précis, on immobilise le ressort dans sa position au moyen d'un mécanisme quelconque, le travail développé par la chute du corps, aura été entièrement employé à comprimer le ressort, et si ce ressort est parfait, comme nous l'avons supposé, il sera capable à son tour, en se détendant complètement, de restituer un travail exactement égal à $p \times h$; ce qui veut dire qu'il serait capable de relancer le poids p à la hauteur dont il est tombé.

Si nous analysons rapidement les phases successives du mouvement du poids p, depuis le moment où il commence à tomber en chute libre jusqu'au moment où il revient à son point de départ, grâce à la vitesse qui lui a été imprimée de bas en haut par la détente du ressort, nous voyons que l'on peut diviser le phénomène en quatre parties :

1° *Chute libre du corps.* — Le travail ph est transformé en énergie *cinétique* qui lui est équivalente et qui a pour valeur

$$\frac{pV^2}{2g} = \frac{1}{2} MV^2.$$

2° *Compression du ressort.* — La vitesse du corps va en diminuant graduellement ainsi que son énergie cinétique pendant la compression du ressort ; et quand la vitesse du corps est devenue nulle, l'énergie cinétique est devenue nulle tandis que le ressort a emmagasiné une quantité de travail ou *énergie potentielle,* précisément égale à l'énergie cinétique disparue, c'est-à-dire encore égale à ph.

3° *Détente du ressort.* — Le ressort en se détendant graduellement jusqu'à ce qu'il ait repris sa forme naturelle, imprime au poids p une vitesse dirigée de bas en haut, et qui, la détente achevée, est précisément égale à V. A ce moment, l'*énergie potentielle* a disparu et s'est transformée entièrement en énergie cinétique qui a pour valeur $\frac{1}{2}MV^2$.

4° *Mouvement ascendant du corps.* — Le corps repartant du point le plus bas avec une vitesse V dirigée de bas en haut, parcourt la hauteur h avec une vitesse décroissante et arrive enfin avec une vitesse nulle à son point de départ. A ce moment, l'énergie cinétique, qui lui avait été communiquée par le ressort, est retransformée en énergie potentielle et la série des phénomènes analysés est prête à recommencer.

SECOND EXEMPLE. — Supposons maintenant que le ressort soit remplacé par un bloc de plomb posé sur une base inébranlable. Au moment où le poids p animé de la vitesse V va entrer en contact avec le bloc de plomb, il ne pourra continuer sa marche qu'en le comprimant graduellement, ce qui va donner lieu à des forces internes, développées par le glissement des molécules de plomb les unes sur les autres, et finalement il en résultera une force retardatrice considérable, qui, appliquée au poids p, le réduira au repos dans un temps très court. Le plomb n'étant doué d'aucune élasticité, ne tend pas à reprendre sa forme primitive et le phénomène est complètement terminé lorsque la vitesse du corps est devenue nulle.

Dans le premier exemple, l'énergie cinétique du poids s'était complètement transformée en énergie potentielle emmagasinée dans le ressort et pouvant être utilisée plus tard de façon à restituer au corps la totalité de son énergie cinétique. Dans l'exemple actuel, au contraire, l'énergie cinétique du corps paraît complètement détruite après l'écrasement du bloc de plomb. La possibilité de cette destruction a été longtemps admise, et c'est seulement depuis un peu plus d'un demi-sciècle que l'indestructibilité de l'énergie a commencé à apparaître dans les ouvrages scientifiques. On a été amené à cette découverte par la constatation d'une loi, d'une très grande généralité, et qui, on peut le dire sans exagération, s'applique à toutes les manifestations des forces physiques dans l'Univers entier.

Cette loi peut s'énoncer ainsi : *Toutes les fois que l'énergie cinétique, ou force vive, d'un système matériel, semble disparaître sans qu'on puisse retrouver son équivalent sous forme d'énergie potentielle ou emmagasinée, on peut affirmer qu'il y a eu, non pas destruction de cette énergie, mais transformation en chaleur.*

Dans le second exemple, l'écrasement du plomb a donné lieu à une consommation d'énergie, qui, n'étant pas potentielle, apparaît sous forme de chaleur développée dans le plomb : et cette chaleur, sans qu'il soit besoin de faire aucune hypothèse sur sa nature intime, représente exactement l'énergie cinétique primitive du poids p ; c'est du moins la conséquence logique à laquelle on est amené en admettant le principe de la conservation de l'énergie. Or la chaleur, n'étant pas une des formes de l'énergie potentielle, nous ne pouvons la concevoir que comme affectant elle-même la forme de l'énergie cinétique. Ce qui revient à dire, que les molécules d'un corps chaud doivent être animées de vitesses croissantes avec la température du corps, et que l'accroissement de force vive des molécules de ce corps, animées ainsi de vitesses qu'il nous est impossible de mesurer et même de constater, représente exactement la destruction apparente de la force vive du poids p.

16. — **Equivalent mécanique de la chaleur.** — Les recherches expérimentales, très nombreuses, qui ont été faites pour établir une relation numérique entre la chaleur et l'énergie, ont montré que, toutes les fois qu'un phénomène quelconque donne lieu à une destruction apparente d'une quantité d'énergie égale à 425 kilogrammètres, il y a production d'une unité de chaleur ou *calorie.* Cette unité de chaleur est celle qui est nécessaire pour élever de un degré centigrade, la température de un décimètre cube d'eau prise à la température de 4°.

On donne souvent à cette unité le nom de *grande calorie*, par opposition à l'unité mille fois plus petite appelée *petite calorie,* et dans laquelle l'unité de masse est le centimètre cube d'eau.

Remarquons en passant, que la température n'a pu jusqu'à présent, être ramenée aux unités fondamentales (espace, temps, masse), et qu'elle constitue une unité *sui generis*, absolument empirique ; tandis que la quantité de chaleur, grâce à la découverte de l'équivalence entre la chaleur et le travail, peut être ramenée aux unités fondamentales.

17. — Nous pouvons maintenant évaluer une petite calorie en unité de travail C.G.S.

Nous venons de dire (16) qu'une petite calorie équivaut à la millième partie d'une grande calorie ou à

$$\frac{425 \text{ kilogrammètres}}{1000}.$$

Or un kilogrammètre vaut 98 100 000 ergs ; donc une petite calorie a pour valeur les $\frac{425}{1000}$ de 98 100 000, c'est-à-dire 41 692 500 ergs.

Inversement un erg exprimé en petite calorie a pour valeur :

$$\frac{1}{41\ 692\ 500} = 0^c,000\ 000\ 023\ 98.$$

18. — Exemple des applications du principe de la conservation de l'énergie. — Nous avons dit plus haut que ce principe dominait toutes les sciences physiques ; il permet en effet de prévoir une foule de phénomènes dont un certain nombre peuvent être vérifiés par l'expérience ; et dans ce cas, le principe n'a jamais été mis en défaut. Dans d'autres cas, au contraire, l'expérience est impossible à faire, et cependant, on peut affirmer qu'elle ne saurait contredire les déductions tirées de ce principe.

Prenons, par exemple, une lame d'acier primitivement droite, et à laquelle on donne la forme d'un arc dont les deux extrémités sont maintenues au moyen d'un fil inextensible. Pour courber cette lame, il aura fallu dépenser une certaine quantité de travail qui va rester emmagasiné dans la lame d'acier sous forme d'énergie potentielle.

Portons maintenant le métal à une température capable de ramollir la lame d'acier et de lui faire perdre toute tendance à reprendre la forme rectiligne. (Le fil étant supposé inaltérable sous l'action de la chaleur.)

Pour porter la lame à une température capable de la ramollir, il faut dépenser une certaine quantité de chaleur qui dépend de ce que l'on appelle la chaleur spécifique du métal considéré. Cette quantité de chaleur, étant équivalente à une certaine quantité d'énergie, cela revient à dire que, pour chauffer notre lame à la température voulue, il faut lui fournir une certaine quantité d'énergie. Or elle contenait avant d'être chauffée une quantité d'énergie potentielle équivalente au travail dépensé pour lui donner la forme courbe ; cette énergie potentielle n'existe plus après le ramollissement de la lame sous l'action de la chaleur, puisque le métal perd, sous cette action, ses propriétés élastiques. Mais comme cette énergie potentielle est indestructible, elle a nécessairement dû se transformer en chaleur au moment où la lame a perdu son élasticité sous l'action de la température. Il aura donc fallu fournir au métal pour l'amener à cette température, une quantité de chaleur moindre que s'il n'avait pas été courbé à froid.

Nous voyons par cet exemple que la chaleur spécifique d'une lame d'acier courbée d'avance, doit être, *en apparence,* plus petite que celle d'une lame d'acier à l'état naturel.

Cet exemple peut être généralisé d'une foule de manières ; c'est ainsi qu'un morceau d'acier aimanté, c'est-à-dire capable de produire du travail par son attraction sur un morceau de fer, doit exiger moins de chaleur pour être porté à la température du rouge, à laquelle il perd son aimantation (sans la recouvrer après par un refroidissement), que s'il n'était pas aimanté avant d'être chauffé.

19. — Il y a beaucoup de formes de l'énergie potentielle : la gravité qui permet de restituer à un corps pesant le travail dépensé pour l'élever à un certain niveau ; l'élasticité des solides, des liquides et des gaz, qui permet de leur faire emmagasiner du travail en les déformant ou en diminuant leur volume ; les corps explosifs au moyen desquels on peut imprimer à un projectile une force vive qui représente une fraction de l'énergie potentielle qu'ils renferment; en général toutes les actions chimiques dans lesquelles il y a à la fois production de chaleur et emmagasinement d'énergie.

On pourrait même dire que la chaleur elle-même, est une des formes de l'énergie potentielle, puisque, si un corps pouvait être maintenu chaud sans déperdition, on pourrait à un instant quelconque, s'en servir comme d'une source de travail ; mais qui ne pourrait, à la vérité, restituer qu'une petite partie de l'énergie totale sous forme de travail mécanique, ainsi que nous l'apprend la théorie mécanique de la chaleur.

20. — Disons en terminant, que dans toute transformation d'énergie, il est impossible de transformer intégralement un travail mécanique en énergie cinétique ou potentielle et qu'il y a toujours une partie de ce travail qui se transforme en chaleur. Il résulte de là que la chaleur est la forme *ultime* vers laquelle tendent les transformations de l'énergie qui s'accomplissent dans un système matériel.

Nous verrons dans la suite de ce cours que le principe sur lequel nous venons de nous étendre est d'une application constante, et que beaucoup de problèmes ne pourraient être résolus sans lui.

§ 5. — POTENTIEL GRAVIFIQUE.

21. — **Potentiel.** — Le *Potentiel* est une quantité qui joue un rôle considérable en électricité, mais dont les applications ne sont pas limitées à cette science. Nous allons faire voir qu'il n'est pas nécessaire de connaître l'existence des phénomènes électriques pour être amené à la notion du potentiel.

On sait que les lois de la gravitation universelle, découvertes par Newton, peuvent se résumer dans la formule suivante : Si on désigne par m et m' la quantité de matière contenue dans deux masses matérielles supposées très petites par rapport à la distance x qui les sépare ; par f une force dont nous allons préciser la valeur dans un instant, et par F l'effort attractif mutuel des deux masses mm' dirigé suivant la droite qui les joint, on a :

$$F = \frac{fmm'}{x^2}.$$

Faisons dans cette équation

$$m = 1,$$
$$m' = 1,$$
$$x = 1;$$

on aura :

$$F = f.$$

Donc f est la valeur de l'effort attractif développé entre deux masses égales chacune à l'unité et dont les dimensions sont supposées très petites par rapport à la distance x qui les sépare ; cette distance étant égale à l'unité.

Comme nous le verrons dans la suite (lois de Coulomb), cette loi est précisément la même que celle des attractions des corps électrisés, à la condition que la masse matérielle soit remplacée par une quantité que nous appellerons masse électrique, et avec cette seule différence que les corps électrisés peuvent donner naissance à des forces répulsives aussi bien qu'à des forces attractives ; ce dont on tient compte dans la formule, par un simple changement de signe.

Supposons un certain nombre de masses matérielles M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, distribuées d'une façon quelconque dans l'espace, et agissant suivant les lois de la gravitation sur la masse m (fig. 3). La force développée par M_1 sur m, aura pour valeur :

$$F_1 = \frac{fM_1m}{x_1^2},$$

en appelant x_1 la distance M_1a et F_1 l'effort développé suivant la droite M_1a.

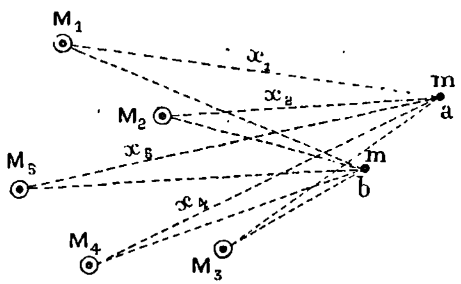


Fig. 3

De même, l'effort développé suivant M_2a, aurait pour valeur :

$$F_2 = \frac{fM_2m}{x_2^2},$$

et ainsi de suite.

Si donc on voulait connaître la force résultante à laquelle est soumise la masse m, il faudrait composer suivant les règles de la mécanique, les cinq forces F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 qui ont toutes des grandeurs et des directions différentes.

Si maintenant nous donnons à la masse m une autre position b, les forces attractives développées auront toutes de nouvelles intensités et de nouvelles directions, et on conçoit qu'il serait possible, sinon facile, d'exprimer algébriquement la grandeur et la direction de la résultante appliquée à la masse m, si l'on donnait sa position dans l'espace, cette position étant déterminée par la distance de la masse m à trois plans fixes dans l'espace.

Il est facile de voir que ce problème serait très compliqué si le nombre des masses agissantes était un peu considérable. Il serait en outre d'une utilité contestable, parce que dans tous les problèmes où on traite de l'action de forces, agissant à distance sur une masse mobile, il est bien plus important, comme on le verra dans la suite, de connaître la grandeur du *travail* développé pendant le passage de la masse mobile d'une position à une autre, que de connaître la grandeur de la *force* qui agit sur elle.

22. — Ce sont des considérations de ce genre qui ont amené le savant anglais Green, à chercher l'expression du travail développé par la masse m, quand elle passe d'une position a à une autre position b ; et ce travail a été appelé par lui, *la différence de potentiel* des positions a et b ; la masse m étant prise égale à l'unité.

23. — Si les masses attirantes ont une position invariable, ce travail est indépendant de la trajectoire suivie par la masse m (que nous appellerons masse-unité), pour aller de la position a à la position b ; absolument comme le travail développé par un corps pesant lorsqu'il passe d'un point A à un point B situé à un niveau différent ; travail indépendant de la forme du chemin parcouru pour aller du point A au point B (9).

Si nous supposons que la masse-unité soit placée à une très grande distance de l'ensemble des masses attirantes, et qu'on l'amène dans la position a, le travail développé pendant ce trajet, s'appelle le *potentiel à l'infini* du système attirant par rapport à la position a ; ou, pour abréger, *le potentiel à l'infini du point* a. De même, si on amenait la masse-unité de l'infini à la position b, le travail développé serait le potentiel à l'infini de la position b ; et la différence de ces deux travaux, serait précisément égale au travail développé, pendant le passage direct de la masse-unité, de a à b, en vertu de ce que nous avons dit plus haut.

24. — Pour bien faire comprendre par un exemple numérique ce

qu'on entend par potentiel à l'infini, nous allons calculer le potentiel de la *Terre*, en supposant qu'un corps de masse égale à l'unité tombe d'une très grande distance jusqu'au niveau de la mer ; nous aurons alors le potentiel par rapport au niveau de la mer.

Pour faire ce calcul, rappelons que l'on démontre que l'attraction mutuelle développée entre deux sphères composées de couches concentriques homogènes, est la même que si leurs masses respectives étaient supposées concentrées en leurs centres.

Désignons par M la masse de la Terre, R son rayon au niveau de la mer, par m la masse mobile (fig. 4), par x la distance Oa ; l'attraction aura pour valeur :

$$F = \frac{fMm}{x^2}. \tag{1}$$

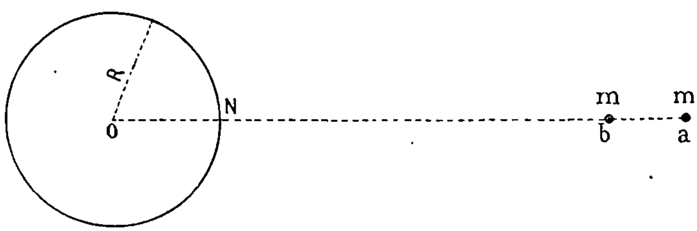


Fig. 4

Si maintenant nous laissons la masse m venir de a en b, la distance ab étant infiniment petite par rapport à Oa pour qu'on puisse considérer l'attraction comme sensiblement constante pendant tout le trajet ab, elle accomplira pendant ce trajet, un travail qui aura pour mesure le produit de la force F par la longueur

$$ab = dx,$$

c'est-à-dire

$$Fdx = \frac{fMm}{x^2}\,dx = d\mathfrak{T}.$$

En divisant la distance Na, du niveau de la mer à la position a, en parties égales à dx, nous pourrions, avec cette formule, calculer la valeur du travail $d\mathfrak{T}$ pour chaque fraction de la distance totale Na ainsi parcourue ; et en ajoutant tous ces travaux partiels, nous aurions le travail total développé par la masse m dans le trajet aN. Le résultat de cette opération, longue et fastidieuse, peut être obtenu d'un seul coup au moyen du calcul intégral[1] qui donne immédiatement la valeur du travail total cherché ; cette valeur est donnée par l'équation :

$$\mathfrak{T} = f\mathrm{M}m\left(\frac{1}{\mathrm{R}} - \frac{1}{x}\right) \tag{2}$$

dont le second membre est le produit de deux quantités ; l'une $f\mathrm{M}m$ constante, l'autre

$$\frac{1}{\mathrm{R}} - \frac{1}{x}$$

tendant vers là limite $\frac{1}{\mathrm{R}}$ lorsque x tend vers l'infini ; de sorte que si la masse m part d'une distance x très grande par rapport à R, nous pourrons écrire :

$$\mathfrak{T} = \frac{f\mathrm{M}m}{\mathrm{R}} \tag{3}$$

Faisons maintenant $m = 1$, nous aurons la valeur de ce que nous avons appelé le *Potentiel à l'infini*. On a dans ce cas :

$$\mathfrak{T} = \frac{f\mathrm{M}}{\mathrm{R}} \tag{4}$$

Pour appliquer ces résultats au globe terrestre, remarquons que, au niveau de la mer, l'effort F n'est autre chose que le poids p de la masse m. On a donc, au niveau de la mer, en appliquant l'équation générale qui donne F :

$$p = \frac{f\mathrm{M}m}{\mathrm{R}^2} \tag{5}$$

Divisons les deux membres de l'équation (3) par les deux membres de l'équation (5) ; nous aurons

$$\frac{\mathfrak{T}}{p} = \mathrm{R}$$

d'où :

$$\mathfrak{T} = p\mathrm{R}$$

Ainsi le travail développé par l'attraction terrestre sur une masse, qui au niveau de la mer, pèse le poids p et qui tombe sur le globe d'une distance très grande par rapport à son rayon, a la même valeur que si cette masse était transportée à une distance R du niveau

---

(1) Nous emploierons constamment dans la suite de ce cours les notations du calcul différentiel et intégral.

de la mer, et que son poids, au lieu de varier avec sa distance au centre de la Terre, restait constant.

En faisant le calcul, on trouve, en prenant pour unité de masse, celle du décimètre cube d'eau :

$$\mathcal{T} = 6\,371\,000 \text{ kilogrammètres}$$

C'est la valeur du potentiel terrestre.

Si on cherche la vitesse correspondante à un pareil travail, au moyen de l'équation des forces vives (12), on trouve :

$$V = 11\,180 \text{ mètres par seconde}$$

On aura une idée de la grandeur du chiffre 6 371 000 kilogrammètres, en remarquant que c'est le travail de plus de vingt-trois chevaux-vapeur, pendant une heure.

25. — Reprenons l'équation (2) :

$$\mathcal{T} = f\mathrm{M}m\left(\frac{1}{\mathrm{R}} - \frac{1}{x}\right)$$

dans laquelle nous donnerons à x deux valeurs successives x_1, x_0 ; désignons par $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_0$ les valeurs correspondantes de $\mathcal{T}$, et retranchons l'une de l'autre, nous aurons :

$$\mathcal{T}_0 - \mathcal{T}_1 = f\mathrm{M}m\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0}\right)$$

et enfin, en faisant $m = 1$,

$$\mathcal{T}_0 - \mathcal{T}_1 = f\mathrm{M}\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0}\right) :$$

c'est la *différence de potentiel* des positions x_0 et x_1.

26. — Nous pouvons donner encore une autre expression du potentiel terrestre.

Supposons (fig. 5) que du niveau de la mer, parte un tube vertical d'une longueur indéfinie et d'une section telle, que l'unité de longueur de ce tube contienne un volume d'eau égal à celui de l'unité de masse choisie. Si, par exemple, l'unité de masse choisie est celle du décimètre cube d'eau, tandis que l'unité de longueur adoptée est égale à un mètre, la section du tube doit être égale à dix centimètres carrés. Cherchons la valeur de la pression exercée à la partie inférieure du tube lorsqu'il contient une colonne d'eau d'une grande longueur. Soit R le rayon terrestre.

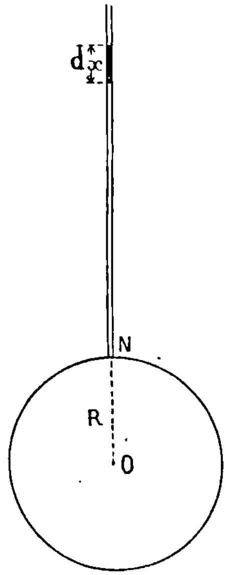


Fig. 5

L'effort dF exercé par le globe terrestre sur une colonne de longueur dx, de section a, aura pour expression, en appliquant la formule générale :

$$dF = \frac{fMm}{x^2}.$$

Mais $m = \mu a dx$, μ étant la masse de l'unité de volume d'eau ; donc la pression par unité de surface, produite par la colonne de longueur dx, a pour valeur :

$$\frac{dF}{a} = \frac{fM\mu dx}{x^2}.$$

Si l'on rapproche cette expression de l'équation

$$Fdx = \frac{fMm}{x^2}\,dx,$$

on voit que le second membre de ces deux équations, ne diffère que par le facteur μ. Il en résulte que si nous faisons varier x dans les deux équations, la première donnant le travail total produit par la chute libre d'un corps, depuis la distance x jusqu'à la distance R du centre ; la seconde donnant la pression totale de la colonne d'eau entre les mêmes limites ; le second membre de la seconde équation s'obtiendra en remplaçant m par μ dans le second membre de la première équation.

La pression totale, P par unité de surface, de l'eau à la base du tuyau, aura donc pour valeur le second membre de l'équation (2), qui donne le potentiel total et dans laquelle m sera remplacé par μ.

$$P = fM\mu\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{x}\right).$$

On trouve en faisant le calcul que cette pression totale serait égale à 637 100 kilogrammes par centimètre carré lorsque x augmente indéfiniment.

La base du tuyau ayant une section de 10 centimètres carrés, la pression totale sur cette base, située au niveau de la mer, sera égale à $637\,100 \times 10 = 6\,371\,000$ kilogrammes, c'est-à-dire sera exprimée par le même nombre que le potentiel.

Nous retiendrons donc de cet exemple, que lorsqu'un tuyau vertical indéfini contient un liquide dont la masse est égale à l'unité pour chaque unité de longueur, la pression *totale* à la base du tuyau et le travail développé en chute libre par l'attraction sur une masse égale à l'unité, tombant d'une hauteur égale à celle de la colonne liquide (ce qui est précisément la définition de la différence de potentiel des deux extrémités de la colonne liquide) sont représentés par le même nombre. Nous utiliserons ce calcul lorsque, parlant du potentiel électrique, nous remplacerons les masses matérielles par des quantités d'électricité.

27. — Quelques théorèmes relatifs au potentiel. — Nous venons de voir que la différence des potentiels de deux positions successives de la masse-unité, ou, comme on dit par abréviation, la différence de potentiel de deux points a et b, a pour valeur, lorsqu'il n'y a qu'une seule masse attirante, supposée sphérique et concentrée en son centre :

$$fM\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0}\right),$$

x_1 et x_0 désignant les distances des points a et b au centre de la masse M. Ainsi les potentiels des points a et b : $\frac{fM}{x_1}$, $\frac{fM}{x_0}$, ne dépendent que de leur distance au centre de la sphère attirante ; de sorte que si la masse-unité m se mouvait sur une sphère ayant pour centre, le centre de M, le potentiel absolu resterait invariable quelle que fût la position de m sur la sphère, et le déplacement de m *à la surface* de la sphère ne donnerait lieu à aucun travail. Une surface douée de cette propriété, est dite *équipotentielle* ou surface de niveau. Lorsqu'au lieu d'une seule masse attirante il y en a plusieurs, la détermination mathématique des surfaces équipotentielles devient extrêmement compliquée. Mais quel que soit le nombre, la grandeur et les positions des masses attirantes, il existe toujours une infinité de points de l'espace pour lesquels le potentiel absolu de l'ensemble des masses a la même valeur ; en reliant entre eux tous ces points par une surface, on obtient une surface équipotentielle.

28. — Nous allons démontrer maintenant que lorsqu'il y a plusieurs masses attirantes, le potentiel absolu d'un point est égal à la somme des potentiels respectifs de chaque masse.

Nous savons que le potentiel absolu d'un point est la valeur du travail développé par l'ensemble des masses attirantes sur la masse-unité lorsqu'on l'amène d'une très grande distance jusqu'au point considéré en suivant d'ailleurs un trajet de forme quelconque.

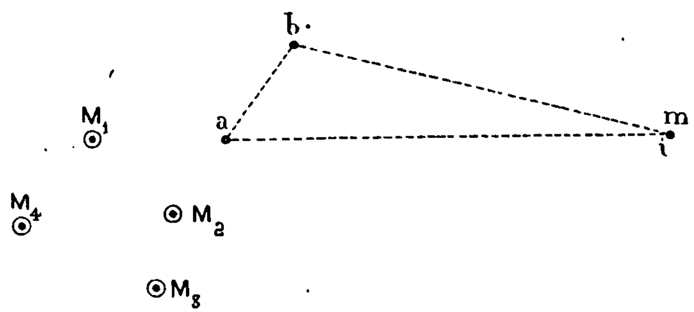


Fig. 6

Dans la figure 6, les masses attirantes sont représentées par les lettres M_1, M_2, M_3, M_4 ; leur situation dans l'espace est supposée invariable. La masse-unité m est au contraire mobile et nous supposerons qu'on l'amène de la distance très grande i où elle est d'abord représentée, à la position a. Pendant ce trajet, le travail développé par la masse M_1, a pour valeur $\frac{fM_1}{x_1}$, x_1 désignant la distance M_1a.

On trouverait de même que le travail dû à M_2M_3 ... etc. est égal à $\frac{fM_2}{x_2}$, $\frac{fM_3}{x_3}$ ... etc.

Mais on démontre en mécanique que lorsque plusieurs forces agissent simultanément sur un point mobile, on peut les remplacer par une force unique ou *résultante* capable d'imprimer au point mobile un mouvement identique à celui qu'il prend sous l'action des forces qui agissent réellement sur lui, et que, en outre, pour un déplacement quelconque du point mobile, le travail de la *résultante* est précisément égal à la somme des travaux des composantes.

Les forces émanant des masses M_1, M_2, M_3, M_4, et agissant toutes sur la masse-unité m, peuvent donc être remplacées par une résultante unique, dont le travail est, par définition, le potentiel du système $M_1M_2M_3M_4$ lorsque la masse m est amenée d'une très grande distance au point a. Or ce travail étant égal à la somme des travaux des composantes, il en résulte que le potentiel du système $M_1M_2M_3M_4$ a pour valeur :

$$\frac{fM_1}{x_1} + \frac{fM_2}{x_2} + \cdots = \Sigma \frac{fM}{x} = f\Sigma \frac{M}{x},$$

c'est-à-dire la somme des potentiels correspondant à chacune des masses composantes.

Le potentiel de l'ensemble des masses M_1, M_2, M_3, M_4 correspondant à une autre position b de la masse m, aurait de même pour valeur

$$\frac{fM_1}{x'_1} + \frac{fM_2}{x'_2} + \frac{fM_3}{x'_3} + \cdots = f\Sigma \frac{M}{x'},$$

$x'_1x'_2x'_3$ désignant les distances du point b aux masses M_1, M_2, M_3.

De sorte que, en définitive, lorsque la masse-unité m est amenée de a et b, le travail développé pendant ce trajet (différence de potentiel des positions a et b) a pour valeur :

$$fM_1\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x'_1}\right) + fM_2\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x'_2}\right) + \cdots,$$

c'est-à-dire la somme des différences de potentiel propres à chacune des masses du système.

29. — Expression de la force au moyen de la différence de potentiel. — La différence de potentiel de deux points a et b étant, par définition, égale à la valeur du travail développé par la masse-unité lorsqu'elle passe de la position a à la position b, il est facile, lorsque cette différence de potentiel est connue ainsi que la distance ab, de trouver l'intensité de la force qui, dirigée suivant ab, produirait le même travail.

Soit F cette force et dl la distance ab, le travail qu'elle produirait a pour valeur $\mathrm{F}dl$. Ce travail étant égal à la différence de potentiel $d\mathfrak{T}$, on a

$$d\mathfrak{T} = \mathrm{F}dl, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{F} = \frac{d\mathfrak{T}}{dl}.$$

Si les deux points a et b étaient situés sur une surface équipotentielle, le travail $d\mathfrak{T}$ serait nul et par conséquent la force F elle-même serait nulle quel que grand que fût dl. Or la masse m étant cependant soumise à un effort qui est la résultante de toutes les forces émanant des masses M_1, M_2, M_3, M_4, le travail developpé par son déplacement dl sur la surface équipotentielle, ne peut être nul que si ce déplacement est perpendiculaire à la résultante. D'où on conclut que la direction de la résultante de toutes les forces qui agissent sur la masse m, est perpendiculaire à la surface équipotentielle ; d'où ce théorème :

La force qui agit sur une masse soumise à l'action des forces émanant d'un système de masses M_1, M_2, ... *est en chaque point de l'espace normale à la surface équipotentielle qui passe par ce point.*

On voit de suite que si toutes les masses agissantes se réduisent à une seule, ou à une sphère homogène, les surfaces équipotentielles seront elles-mêmes des sphères ayant même centre que la masse agissante.

Si au lieu de se mouvoir tangentiellement à la surface équipotentielle, la masse m se déplaçait perpendiculairement à cette surface, elle traverserait successivement des surfaces équipotentielles S_1S_2 et le travail aurait encore pour valeur $\mathrm{F}_n \times ab$ (fig. 7).

Nous désignerons cette fois la distance ab par le symbole dn pour indiquer que ce chemin est dirigé suivant la normale commune aux

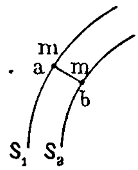


Fig. 7

deux surfaces équipotentielles supposées très voisines. Le travail aura pour valeur :

$$d\mathcal{T} = F_n dn,$$

d'où
$$F_n = \frac{d\mathcal{T}}{dn}.$$

Telle est l'expression de la force résultante agissant sur m et qui est perpendiculaire en chaque point à la surface équipotentielle passant par ce point. Elle varie avec la grandeur de dn, mais le rapport $\frac{d\mathcal{T}}{dn}$ tend en général vers une limite parfaitement déterminée lorsque dn tend vers zéro.

30. — Remarque. — Il est essentiel de remarquer que tout ce que nous venons de dire du potentiel gravifique, s'appliquerait également si les molécules matérielles étaient douées de la propriété de

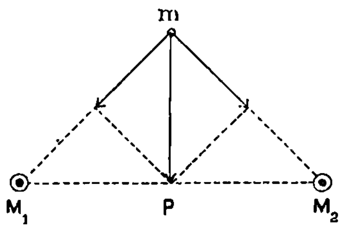


Fig. 8

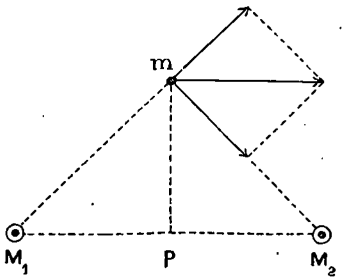


Fig. 9

se repousser et même dans le cas où certaines des masses M_1M_2... agiraient par attraction sur la masse m tandis que d'autres la repousseraient comme cela se produit dans les corps électrisés. Ce second cas présente des particularités intéressantes que nous allons faire ressortir par un exemple simple.

La figure 8 représente deux masses M_1M_2 égales entre elles et agissant par attraction sur la masse m que l'on suppose située sur la perpendiculaire MP élevée au milieu de M_1M_2. En construisant le parallélogramme des forces, la condition de symétrie de la figure exige que la résultante soit dirigée suivant mP.

Considérons maintenant le cas de la figure 9 où la force produite par la masse M_1 devient répulsive tout en conservant la même valeur numérique. Si nous construisons comme précédemment la résultante des deux forces, pour les mêmes raisons de symétrie que dans le cas précédent, cette résultante sera parallèle à la droite M_1M_2.

D'après ce que nous avons dit dans le paragraphe précédent, la surface équipotentielle qui passe par le point m, est, dans le premier cas normale à la direction mP et dans le second cas dirigée suivant cette direction.

Nous allons montrer que la gravitation elle-même, peut donner lieu à des forces qui en apparence sont répulsives. Ainsi un corps plongé dans un liquide pesant, éprouve de la part de ce liquide une poussée verticale dirigée en sens contraire de la pesanteur et égale au poids du volume de liquide déplacé par le corps. De sorte que si le corps plongé dans le liquide a une densité moindre que ce dernier, il prendra un mouvement inverse de celui que la pesanteur imprime au corps soumis à son action; en d'autres termes, il semblera éprouver une action répulsive de la part du globe terrestre.

§ 6. — LIGNES DE FORCE. — FLUX DE FORCE. — TUBES DE FORCE.

31. — Lignes de Force. — Nous avons vu, que, en chaque point de l'espace qui environne un système de masses agissantes, on peut déterminer la grandeur et la direction de la force résultante à laquelle est soumise la masse-unité, quand on connaît deux surfaces équipotentielles très voisines ainsi que la valeur du potentiel qui les caractérise. La direction de la résultante est, en effet, perpendiculaire à la surface équipotentielle au point considéré; quant à sa valeur, elle est donnée par l'équation :

$$F_n = \frac{d\mathfrak{F}}{dn} \qquad (29)$$

dans laquelle $d\mathfrak{F}$ représente la différence des potentiels correspondants à deux surfaces équipotentielles très voisines et *dn* la distance *ab* de ces deux surfaces (fig. 7).

Lorsque le système des masses agissantes se réduit à une sphère homogène, creuse ou pleine, les surfaces équipotentielles sont elles-mêmes des sphères, dont le centre coïncide avec celui de la sphère agissante et la force résultante qui sollicite la masse-unité, passe toujours par le centre. Mais ceci est un cas particulier.

Dans le cas général (fig. 10), soient S_1, S_2, S_3, S_4 des surfaces équipotentielles très voisines les unes des autres et correspondant à des accroissements égaux du potentiel, c'est-à-dire que la masse-unité tombant de l'infini et traversant chacune de ces surfaces, accomplirait pendant les trajets A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, des travaux égaux. Les éléments de droites qui en chaque point A_1, A_2, A_3, A_4 sont perpendiculaires aux courbes S_1, S_2, S_3, S_4, forment la *trajectoire orthogonale* des courbes S_1, S_2, S_3, S_4; et cette trajectoire représente

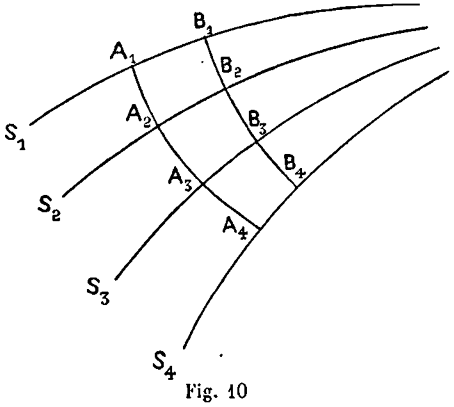


Fig. 10

exactement le chemin qui serait suivi par la masse-unité si elle se mouvait dans un liquide visqueux lui opposant une résistance croissante avec la vitesse, mais nulle pour une vitesse nulle; ou bien encore si la masse-unité était dépourvue d'inertie.

La trajectoire orthogonale $A_1A_2A_3A_4$, s'appelle une *ligne de force*. La trajectoire $B_1B_2B_3B_4$, représente une ligne de force voisine de la première et construite de même.

On peut se faire une idée très nette de la manière de construire ces lignes de force par le procédé suivant : Supposons que A_1A_2 représente le fil de suspension d'un petit pendule attaché en A_1 à la surface S_1 ; s'il est terminé par une masse pesante, elle viendra en contact avec la surface S_2 précisément au point A_2. Transportons maintenant le point de suspension du pendule en A_2 sur la surface S_2 ; le fil prendra la direction A_2A_3, le point A_3 étant le point de contact de la surface pendulaire avec S_3. En opérant ainsi, de proche en proche, on obtiendra une ligne qui sera une *ligne de force*.

32. — **Flux de force**. — Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que la masse-unité était sphérique et de dimensions très petites. Dans ce qui suit, nous allons admettre que l'unité de masse matérielle affecte la forme d'un petit carré sans épaisseur appréciable, dont la surface est égale à l'unité ; ce qui revient à dire que nous répartissons l'unité de masse sur la surface d'un carré dont le côté est égal à l'unité, cette unité étant supposée très petite.

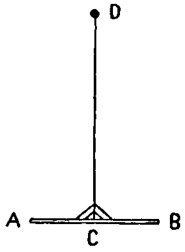


Fig. 11

Soit AB (fig. 11) ce petit plan-unité soudé en son centre C à une tige rigide CD mobile autour du point D. Si on place ce petit plan en un point de l'espace soumis à l'action des masses agissantes, ses dimensions étant très petites, on peut considérer la résultante des forces qui agissent sur lui, comme passant par le point C ; par conséquent, la tige CD se placera spontanément dans la direction de cette résultante. Pour en trouver la grandeur, écartons ce pendule, de sa position d'équilibre d'un très petit angle ; appelons f l'intensité de la résultante cherchée, m la valeur de la masse du carré AB (que nous avons supposée égale à l'unité), l la longueur de la tige de suspension, t la durée d'une oscillation simple, d'amplitude très petite.

On démontre en mécanique que la valeur de f est donnée par l'équation :

$$f = \frac{\pi^2 ml}{t^2}$$

qui devient en faisant $m = 1$

$$f = \frac{\pi^2 l}{t^2},$$

π étant le rapport de la circonférence au diamètre.

En transportant ainsi ce pendule le long d'une ligne de force, telle que $A_1A_2A_3A_4$, on pourra mesurer la force exercée sur un centimètre carré, chargé d'une masse égale à l'unité, en chacun des points de la ligne de force. Nous donnerons à la valeur de cette force, agissant sur un centimètre carré chargé d'une masse égale à l'unité et *normalement* à la ligne de force, le nom de *flux de force.*

Si nous parcourons la ligne $A_1A_2A_3A_4$ dans le sens $A_4A_3A_2A_1$, c'est-à-dire dans le sens des potentiels décroissants, l'effort exercé sur le petit plan-unité, ira en diminuant ; et si nous voulions le rendre constant, il faudrait augmenter la surface du plan, chaque unité de surface restant chargée de l'unité de masse, de manière à compenser la diminution d'effort exercé sur l'unité de masse, par l'augmentation de la masse soumise à l'attraction des masses agissantes. Pour cela, il faudra, si nous conservons au petit plan la forme carrée, donner au côté de ce carré une longueur inversement proportionnelle à la racine carrée de l'effort f développé sur un centimètre carré. Or la formule

$$f = \frac{\pi^2 l}{t^2}$$

montre qu'il suffira pour cela de donner au côté du carré AB, une longueur proportionnelle à t (durée de l'oscillation simple du carré-unité).

33. — Tubes de force. — Canaux de force. — Si en déplaçant ainsi la tige CD du pendule le long d'une ligne de force, nous faisons croître en même temps le côté du carré AB de façon à maintenir constante la valeur de f, le petit plan AB (fig. 12) engendrera une pyramide quadrangulaire à axe curviligne, jouissant de la propriété que le flux total de force y est constant, tandis que le flux de force par centimètre carré y est variable.

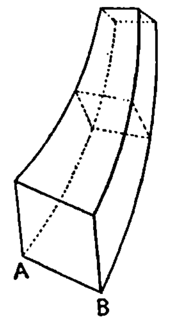


Fig. 12

Si le plan, au lieu d'être carré, avait affecté la forme circulaire, le volume engendré par le mouvement de ce petit plan, prendrait le nom de *tube de force*. L'avantage de la forme carrée consiste en ce que l'on peut juxtaposer autant de *canaux de force* que l'on veut sans perte de place, de façon à en avoir dans toutes les directions possibles. Si chacun d'eux donne passage à un flux de force total constant et égal à une dyne $\left(\frac{1}{981} \text{ de gramme}\right)$, le plan-unité ayant une masse de un gramme par centimètre carré, et qu'il soit nécessaire de juxtaposer 1000 canaux de ce genre pour remplir en tous sens l'espace dans lequel sont situées les masses agissantes, on dira que le flux total de force du système des masses attractives est égal à 1000 unités.

34. — Appliquons ce qui vient d'être exposé à un cas très simple en cherchant la valeur du flux total de force d'une sphère homogène de masse M. Nous savons que l'attraction exercée par une sphère homogène sur une masse m de dimensions très petites par rapport à elles, a pour valeur

$$f = f_1 \frac{Mm}{x^2},$$

x étant la distance du centre de la sphère à la masse m qui, dans le cas actuel, affecte, comme nous l'avons dit, la forme d'un plan sans épaisseur sensible dont la masse est égale à 1 par unité de surface; et f_1 désignant l'attraction exercée par l'unité de masse (réduite à un point) sur l'unité de masse à l'unité de distance.

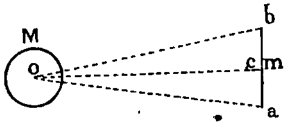


Fig. 13

On a donc, en appelant a le côté du petit carré soumis à l'attraction (fig. 13) et dont le plan est perpendiculaire à $Oc = x$,

$$m = a^2.$$

Cette équation montre immédiatement que le flux total d'un canal de force ne peut conserver une valeur constante f, que si le rapport $\frac{a^2}{x^2}$ est lui-même constant. Si cette condition est remplie, il est facile de voir que le carré ab engendrera en se mouvant perpendiculairement à Oc, une pyramide à base carrée dont le sommet est en O et dont l'axe est Oc.

Le nombre total des canaux de ce genre que l'on peut placer autour de la sphère, est égal au nombre des carrés de surface a^2 que l'on peut placer sur la sphère de rayon x.

Or, la surface de cette sphère, étant égale à $4\pi x^2$, le nombre des carrés de surface a^2 sera égal à $\frac{4\pi x^2}{a^2}$. Le flux total de force de la masse sphérique M, aura donc pour valeur

$$f \times \frac{4\pi x^2}{a^2} = \frac{f_1 M a^2}{x^2} \times \frac{4\pi x^2}{a^2} = 4\pi f_1 M.$$

35. — S'il y avait plusieurs sphères agissantes au lieu d'une seule, le calcul ne serait plus aussi simple, et il faudrait procéder de la manière suivante. Remarquons d'abord que les canaux de force sont normaux aux surfaces équipotentielles qu'ils traversent et que leur nombre restant invariable entre deux surfaces équipotentielles voisines, il en résulte que *le flux total de force est constant* quelle que

soit la distance à laquelle on se place du groupe des masses agissantes. Si donc nous pouvions trouver la valeur de ce flux total correspondante à une surface équipotentielle très éloignée du groupe des masses agissantes, cette valeur conviendrait également pour toutes les autres surfaces. Or, cela est facile, car il est presque évident qu'une surface équipotentielle très éloignée de l'ensemble des masses agissantes diffère d'autant moins d'une sphère que la distance est plus grande. Il suffit, pour s'en rendre compte, de considérer seulement les deux masses actives les plus éloignées l'une de l'autre M_1M_4 (fig. 14), parce que l'erreur commise sera alors la plus grande possible.

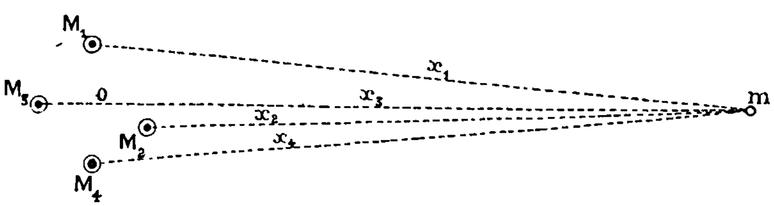


Fig. 14

Si l'on décrit du milieu O de la droite M_1M_4 une sphère d'un rayon Om extrêmement grand par rapport à M_1M_4, l'action exercée par M_1 sur m, aura pour valeur :

$$\frac{f_1M_1m}{x^2}.$$

De même l'action émanant de M_4, sera

$$\frac{f_1M_4m}{x_4^2}.$$

Ces deux forces faisant un angle extrêmement petit, leur résultante différera infiniment peu de leur somme :

$$f_1m\left(\frac{M_1}{x^2}+\frac{M_4}{x_4^2}\right).$$

Mais les distances x_1 et x_4 diffèrent aussi infiniment peu de la distance moyenne $Om = x_0$; on voit, en définitive, que nous ne commettrons qu'une *erreur relative* (1) infiniment petite en prenant

(1) On sait que l'*erreur relative* est le rapport de l'erreur absolue à la valeur exacte de la quantité considérée. Elle est dite infiniment petite, lorsqu'on est maître de la rendre aussi petite que l'on veut.

la valeur de la résultante comme égale à

$$f_1 m\left(\frac{M_1}{x_0^2}+\frac{M_4}{x_0^2}\right)=\frac{f_1 m(M_1+M_4)}{x_0^2},$$

c'est-à-dire comme ayant la même valeur que si les deux masses extrêmes M_1M_4 étaient réunies en une seule située au point O.

Cette conclusion, vraie pour les masses actives les plus éloignées l'une de l'autre, est *a fortiori* applicable aux autres masses ; l'action exercée sur m supposée placée à une très grande distance par rapport aux dimensions du groupe des masses actives, se réduit à une force unique qui a pour intensité :

$$\frac{f_1(M_1+M_2+M_3+\dots)m}{x_0^2}=\frac{f_1 m\Sigma M}{x_0^2},$$

c'est-à-dire qui est représentée par la même expression que si toutes les masses étaient concentrées en un point unique O pour lequel on peut prendre leur centre de gravité commun. Nous voici donc ramenés au cas simple traité dans le paragraphe précédent, dans lequel le flux total de force avait pour expression $4\pi f_1 M$ qui sera remplacé ici par

$$4\pi f_1 \Sigma M,$$

valeur qui, nous l'avons vu, convient à toutes les surfaces équipotentielles *enveloppant le groupe des masses agissantes.*

§ 7. — THÉORÈME DE GREEN.

36. — Soit M une masse matérielle douée des propriétés de la gravitation, *ab* le côté d'un petit plan carré perpendiculaire au plan de la figure (fig. 15), chargé d'une couche matérielle uniformément répartie sur sa surface d'étendue ds et sollicité par la masse M suivant la droite Mc qui passe par son centre de gravité. Nous supposerons que la couche matérielle dont il est recouvert, possède une masse égale à l'unité par unité de surface; de sorte que sa masse totale est exprimée par le même nombre que sa surface ds. Nous supposerons le côté *ab* de ce carré très petit par rapport à la distance Mc.

Nous allons calculer l'intensité de la force à laquelle le plan est soumis dans la directiou cF de la normale élevée en son milieu. Nous pourrons procéder pour cela de deux manières différentes qui devront évidemment nous conduire à la même valeur.

1° La force attractive f exercée par M sur ab suivant la direction Mc, a pour expression :

$$f = f_1 \frac{Mm}{x^2}$$

f_1 désignant l'attraction des deux points matériels ayant une masse

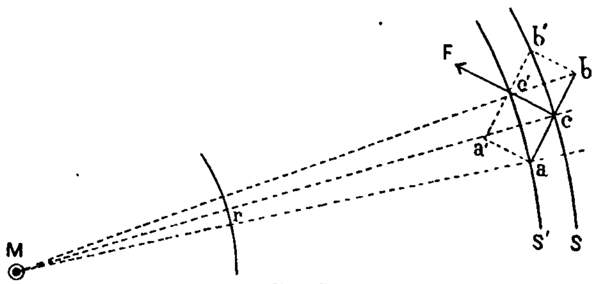


Fig. 15

égale à l'unité et séparés par une distance égale à l'unité de longueur ; m étant la masse du plan ab, masse représentée comme nous venons de le dire par le même nombre que sa surface ds ; et x étant la distance $\overline{Mc}$. La valeur de f peut donc s'écrire

$$f = f_1 \frac{Mds}{x^2}.$$

Cette force Mc, peut être décomposée en deux autres : la première tangente au plan ab et dont nous ne nous occuperons pas, la seconde cF perpendiculaire à ce plan et qui a pour valeur f cos $\widehat{McF}$, d'où en désignant par α l'angle McF et par f_N la force cF :

$$f_N = f \cos \alpha = f_1 \frac{Mds \cos \alpha}{x^2}.$$

Décrivons maintenant du point M comme centre deux sphères, l'une de rayon $Mr = 1$, l'autre de rayon $Mc = x$. Les aires interceptées sur ces deux sphères par la pyramide quadrangulaire d'ouverture très petite dont le sommet est en M et dont la base est le petit carré ab, seront entre elles comme les carrés des distances $Mr = 1$, $Mc = x$. Si on désigne par $d\omega$ l'aire interceptée sur la sphère de rayon 1, l'aire interceptée sur l'autre de rayon x aura pour valeur :

$$x^2 d\omega.$$

Mais il est facile de voir que cette petite surface sphérique représentée sur la figure par l'arc de cercle ac', peut être considérée comme égale à la projection orthogonale du carré ab sur un plan perpendiculaire à Mc. Donc

$$x^2 d\omega = ds \cos \alpha, \qquad \text{d'où :} \qquad \frac{ds \cos \alpha}{x^2} = d\omega;$$

et enfin :
$$f_N = f_1 M d\omega.$$

2° Cherchons maintenant une seconde expression de la composante normale f_N. Supposons pour cela que nous permettions au carré ab un déplacement très petit perpendiculaire à son plan et qui l'amène en $a'b'$. Soit dn la grandeur de ce déplacement, qui sur la figure est représenté par cc'.

Le travail développé par la force f_N pendant ce petit déplacement, est égal à

$$f_N \times dn.$$

D'autre part, le potentiel absolu moyen du petit carré ab peut être considéré comme égal à celui de son point milieu c, c'est-à-dire comme étant égal au travail développé par M sur la masse-unité venant d'une très grande distance jusqu'en c. Par conséquent, si le plan ab avait une masse égale à l'unité, le travail accompli pendant le déplacement cc', aurait pour expression $d\mathfrak{T}$; $d\mathfrak{T}$ étant la différence des potentiels en c et c'. Mais comme la masse du plan ab est égale non pas à l'unité, mais à ds, le travail a pour valeur :

$$d\mathfrak{T} \times ds.$$

Egalant cette valeur du travail à la précédente, nous aurons :

$$f_N \times dn = d\mathfrak{T} \times ds,$$

d'où :

$$f_N = \frac{d\mathfrak{T} ds}{dn}.$$

Or le premier mode de calcul de f_N, nous avait conduit à l'équation :

$$f_N = f_1 M d\omega.$$

On a donc :

$$\frac{d\mathfrak{T}}{dn} ds = f_1 M d\omega.$$

Le premier membre est le produit de la surface ds du petit carré ab par la force qui serait appliquée perpendiculairement à son plan s'il avait une masse égale à l'unité. *C'est le flux de force qui entre par l'élément de surface ds normalement à cet élément.*

Le second membre est proportionnel au produit de la masse agissante M par l'élément de surface intercepté sur la sphère de rayon 1 par la pyramide d'ouverture très petite construite sur l'élément ds comme base.

Supposons que la masse M soit complètement enveloppée par une surface de forme quelconque et décomposons cette surface en une infinité d'éléments ds auxquels nous appliquerons la formule que nous venons d'établir. Nous aurons donc autant d'équations que d'éléments de surface ds.

En ajoutant ensemble tous les premiers membres de ces équations, le résultat de cette addition représenté par le symbole $\Sigma \frac{d\mathfrak{V}}{dn} ds$, nous fera connaître la somme de tous les flux de force entrant dans la surface entière et perpendiculaires à cette surface en chacun de ses points.

La somme des seconds membres $\Sigma f_1 M d\omega$ est facile à trouver.

En effet, $f_1 M$ étant un facteur constant, on peut écrire :

$$\Sigma f_1 M d\omega = f_1 M \Sigma d\omega.$$

Mais $\Sigma d\omega$ étant la somme de toutes les aires élémentaires découpées sur la sphère de rayon 1, par les petites pyramides quadrangulaires juxtaposées qui ont pour base les éléments ds de la surface enveloppante, on a évidemment :

$$\Sigma d\omega = 4\pi,$$

donc, on a l'équation suivante due à Green :

$$\Sigma \frac{d\mathfrak{V}}{dn} ds = 4\pi f_1 M.$$

Mais nous avons vu (34) que $4\pi f_1 M$ représente précisément la valeur du flux total de force émané de la masse M tel que nous l'avons défini et l'équation ci-dessus montre qu'il est égal à la somme de tous les flux de force qui entrent normalement à cette surface *quelle que soit sa forme et la position du point* M *à son intérieur.*

37. — Il résulte de là, que s'il existait une seconde masse M_1 à l'intérieur de la même surface enveloppante, on trouverait de même :

$$\Sigma \frac{d\mathfrak{T}_1}{dn} ds = 4\pi f_1 M_1,$$

et pour une masse M_2 on aurait :

$$\Sigma \frac{d\mathfrak{T}_2}{dn} ds = 4\pi f_1 M_2$$

et ainsi de suite.

En faisant la somme de toutes ces quantités, et appelant $d\mathfrak{T}_R$ le travail dû à la résultante des actions de toutes les masses M_1, M_2, M_3, ..., on a :

$$\Sigma \frac{d\mathfrak{T}_R}{dn} ds = 4\pi f_1 (M + M_1 + M_2 + M_3 + \cdots).$$

38. — Considérons une seule masse agissante placée à l'intérieur de la surface enveloppante et supposons-la agissant par attraction sur la masse-unité que nous plaçons successivement en tous les points de la surface enveloppante ; alors, le flux de force agissant sur elle, sera, si la courbure ne change pas de signe, constamment dirigé vers l'intérieur (fig. 16).

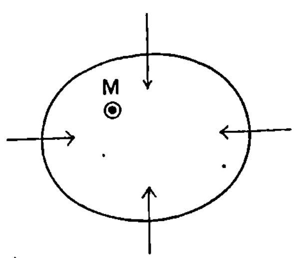


Fig. 16

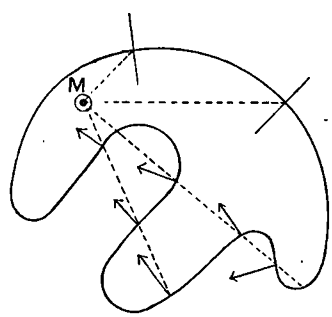


Fig. 17

Les flux de force dirigés vers l'intérieur, sont dits *entrants* dans la surface et leur somme totale est égale à $4\pi f_1 M$. Les autres sont dits *sortants* (fig. 17) et leur somme totale est encore égale à $4\pi f_1 M$. Si nous cherchons les flux entrants et sortants correspondants à un même canal de force, il est évident qu'ils seront numériquement égaux.

Si au contraire la masse M était située sur la surface même, la somme de toutes les pyramides élémentaires dont le sommet est en M, ne pourrait découper sur la sphère de rayon 1, que la moitié de la surface totale c'est-à-dire 2π ; par conséquent dans ce cas, la somme de tous les flux de force traversant la surface est égale à $2\pi f_1 M$.

39. — Dans le cas où la masse M serait à l'extérieur de la surface (fig. 18), la totalité des pyramides quadrangulaires ayant pour bases les aires élémentaires *ds* serait contenue dans un cône tangent à la surface suivant une courbe de contact AAA qui diviserait la surface

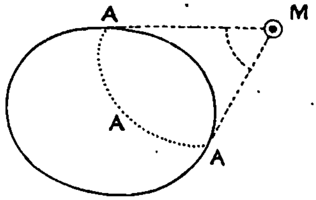


Fig. 18

en deux zônes distinctes. Dans chacune de ces zônes, le flux de force total aurait numériquement la même valeur mais avec deux signes contraires puisque ce flux total serait *entrant* dans la zône située au-delà de AAA et *sortant* dans la zône située entre AAA et le sommet M. La somme algébrique de tous les flux de force correspondant à la surface entière serait donc nulle.

CHAPITRE DEUXIÈME

ACTIONS MÉCANIQUES MUTUELLES DES CORPS ÉLECTRISÉS

§. 1 — PROPRIÉTÉS DES CORPS ÉLECTRISÉS. ASSIMILATION DE L'ÉLECTRICITÉ A UN FLUIDE. — DÉFINITIONS.

40. — Comme toutes les sciences expérimentales, l'Electricité est basée sur un certain nombre de faits révélés par l'observation. Nous n'entrerons pas dans le détail des expériences classiques que l'on trouve dans tous les traités de physique publiés depuis un siècle et qui permettent d'établir certaines lois fondamentales dont l'énoncé est très simple et que nous nous contenterons de rappeler brièvement.

1° Lorsqu'on frotte l'un contre l'autre deux corps hétérogènes dont l'un au moins n'est pas *conducteur*, ces deux corps s'électrisent, c'est-à-dire deviennent capables d'attirer à distance les corps légers ; on dit alors qu'ils sont chargés d'électricité.

2° Si l'on présente successivement chacun d'eux à un troisième corps préalablement électrisé, on constate que les actions mécaniques exercées sur ce troisième corps par chacun des deux autres, sont de sens contraire. On exprime ce fait en disant que l'un d'eux est électrisé positivement et l'autre négativement.

3° Deux corps chargés d'électricités de même signe se repoussent. Deux corps chargés d'électricités de signes contraires s'attirent.

4° Lorsqu'on frotte l'un contre l'autre deux corps ne jouissant avant le frottement d'aucune propriété électrique, et qu'on présente ces deux corps juxtaposés sans les séparer à un troisième corps préalablement électrisé, ils n'exercent sur lui aucune action mécanique, mais dès qu'on vient à séparer les deux corps juxtaposés, les actions indiquées plus haut se manifestent pour disparaître de nouveau quand on les joint; on exprime ce fait en disant que les quantités d'électricité développées par le frottement des deux corps sont égales et de signes contraires, de sorte que leur réunion ramène l'ensemble à l'état neutre.

41. — Pour expliquer cet ensemble de faits, les premiers savants qui les ont observés ont imaginé que l'Electricité était un fluide extrêmement subtil et impondérable, de nature particulière, composé en quantités égales de deux sortes de molécules douées de propriétés inverses ; les molécules de même nature exerçant les unes sur les autres des actions répulsives, les molécules de nature inverse des actions attractives.

La réunion en quantités égales de fluide négatif et de fluide positif, constituait ce qu'on appelait un fluide neutre. Cette théorie faisant de l'Electricité un fluide matériel ayant une existence propre, est complètement abandonnée aujourd'hui, mais il importe d'ajouter que l'on est encore dans l'ignorance absolue de la véritable nature de l'Electricité. Il n'est d'ailleurs nullement nécessaire de la connaître pour établir les lois des phénomènes que présentent les corps électrisés.

En ce qui nous concerne, nous ne ferons aucune hypothèse sur la nature intime de l'Electricité ; nous n'avons même pas besoin de savoir si elle existe : mais pour la clarté et la commodité des raisonnements, nous supposerons toujours qu'un corps électrisé peut se décomposer en une quantité illimitée de petits corps également électrisés, dont les actions mutuelles permettront de calculer les phénomènes mécaniques auxquels donne lieu une masse chargée d'électricité, et dont le mouvement représentera fidèlement la propagation de l'état électrique dans un corps conducteur.

42. — **Propagation de l'Electricité.** — Lorsqu'on réunit deux corps électrisés, placés à une certaine distance l'un de l'autre, par

un fil métallique, on constate que leur état électrique devient identique dans un temps très court ; l'un d'eux perd une certaine quantité d'électricité, tandis que l'autre gagne une quantité égale. Tant que dure cet échange d'électricité entre les deux corps, on dit que le fil est parcouru par un *courant électrique.* Les corps qui jouissent ainsi de la propriété de transmettre l'état électrique d'un corps à un autre, s'appellent *corps conducteurs* de l'Electricité.

Tant que l'équilibre électrique n'est pas établi entre deux corps réunis par un conducteur, ce dernier est le siège de phénomènes de nature très diverse connus sous le nom de propriétés des courants électriques. L'étude de ces phénomènes constitue ce qu'on appelle l'*Electrodynamique*; tandis que l'étude des phénomènes mécaniques, ainsi que la distribution de l'état électrique dans les corps électrisés non réunis par des conducteurs, constitue l'*Electrostatique.*

43. — **Induction.** — Enfin les corps électrisés exercent à travers l'espace sur les autres corps qui les environnent, non seulement des actions mécaniques, mais encore des actions électriques sans lesquelles les actions mécaniques n'existeraient pas ; en d'autres termes, un corps électrisé jouit de la propriété d'électriser à distance les corps qui l'environnent sans l'intermédiaire d'aucun conducteur, mais alors la quantité d'électricité qu'il contient reste invariable. Cette propriété s'appelle l'*Induction.*

44. — Nous étudierons donc dans la première partie de ce cours :

1° Les actions mécaniques mutuelles des corps électrisés. (Loi de Coulomb.)

2° Les actions électriques mutuelles exercées à distance et que l'on a désignées sous le nom d'*Induction électrostatique.* Ces deux premières divisions constituent l'*Electrostatique.*

3° Les lois du courant électrique lorsque l'on maintient constante la différence des états électriques des deux corps entre lesquels il a lieu.

Cette partie de l'électricité a reçu le nom d'*Electrocinétique.*

§ 2. — ACTIONS MÉCANIQUES DE L'ÉLECTRICITÉ. LOIS DE COULOMB.

45. — Soit A une sphère électrisée, B une sphère identique non électrisée (fig. 19) ; si nous mettons en contact la sphère B avec la sphère A, ces deux sphères vont prendre le même état électrique, comme on le constate avec la balance de Coulomb en mesurant successivement pour chacune d'elles l'effort mécanique qu'elle développe sur

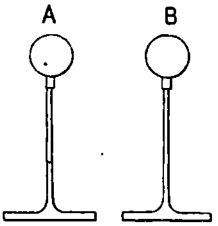


Fig. 19

un petit corps électrisé. Cet effort mécanique est précisément la moitié de ce qu'il était avant le partage de l'électricité entre les deux sphères. Il résulte de là que bien que nous ne sachions pas ce que c'est qu'une quantité d'électricité, nous pouvons diviser une quantité donnée d'électricité en deux parties égales et en généralisant le procédé, il est facile de partager une quantité d'électricité en un nombre quelconque de parties égales. C'est par un procédé de ce genre que Coulomb a pu étudier des efforts mécaniques développés entre des sphères chargées de quantités d'électricité proportionnelles à des nombres donnés. La mesure de ces efforts mécaniques extrêmement petits, se faisait au moyen de l'instrument qu'il a inventé tout exprès dans ce but et auquel on a donné le nom de balance de torsion de Coulomb. Nous la décrirons dans le chapitre consacré aux instruments de mesure.

46. — **Lois de Coulomb.** — En étudiant les actions mécaniques mutuelles développées entre deux sphères électrisées dont les centres sont à une distance d, et qui sont chargées de quantités d'électricité respectivement proportionnelles aux nombres q et q', Coulomb a

trouvé que ces actions mécaniques étaient représentées par l'équation :

$$F = f\frac{qq'}{d^2}$$

dans laquelle f est un coefficient numérique dont nous allons préciser le sens. Si nous faisons $q = 1$, $q' = 1$, $d = 1$, il vient : $F = f$; ce qui veut dire que f est égale à l'effort mécanique développé entre deux sphères chargées chacune de l'unité de quantité électrique et dont les centres sont écartés d'une quantité égale à l'unité de longueur.

Réciproquement, nous appellerons *unité de quantité électrique*, celle qui provoque entre deux sphères chargées chacune de cette unité, une action mécanique égale à 1, lorsque la distance des centres est elle-même égale à 1, et *que les sphères sont placées dans le vide ou dans l'air*. Car nous verrons que les quantités q et q' restant invariables, l'effort F et par conséquent le coefficient f varie avec le milieu qui environne les corps électrisés. Dans ce cas, le coefficient f devient égal à 1 et la formule peut s'écrire :

$$F = \frac{qq'}{d^2}.$$

Si on prend comme unité de force le dyne, comme unité de longueur le centimètre ; l'unité de quantité électrique, déterminée comme nous venons de le dire, s'appelle *le coulomb*.

Si dans la formule $F = \frac{qq'}{d^2}$, les quantités q et q' sont de même signe, la force F est positive ; c'est le cas où les deux corps se repoussent. Si au contraire les quantités q et q' sont de signes différents, F devient négatif ; c'est le cas de l'attraction.

47. — Dimensions de l'unité de quantité électrique. — Si dans l'équation ci-dessus, on fait $q = q'$, elle devient :

$$F = \frac{q^2}{d^2}$$

et par conséquent :

$$q = d\sqrt{F}.$$

Mais nous avons vu (6) que l'expression symbolique de F, rapportée aux unités fondamentales, est :

$$F = \frac{ML}{T^2}.$$

D'autre part, d peut être représenté par une longueur L ; de sorte que l'expression symbolique de q est :

$$q = L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.$$

Telles sont les dimensions de l'unité de quantité électrique.

48. — Exemples numériques de l'application de la loi de Coulomb. — Supposons deux sphères égales chargées chacune de 50 coulombs et dont les centres seraient situés à 10 centimètres l'un de l'autre ; on demande quelle est l'intensité de la répulsion développée entre ces deux sphères.

On n'a qu'à faire dans la formule

$$q = 50,$$
$$q' = 50,$$
$$d = 10 ;$$

on trouve $F = 25$ dynes ; c'est-à-dire environ un peu plus de $\frac{1}{40}$ de gramme.

Réciproquement, deux sphères chargées d'électricité s'attirent avec un effort de 25 dynes ; la distance de leurs centres étant de 10 centimètres, et les charges étant supposées égales, on demande la valeur de q et de q'.

On doit trouver $q = q' = 50$ coulombs.

On ramène donc ainsi grâce aux lois de Coulomb, la mesure d'une quantité d'électricité à celle d'une force lorsque les deux sphères sont supposées chargées de la même quantité ; ou lorsque les charges n'étant pas égales, l'une d'elles est connue. Si, en effet, dans la formule :

$$F = \frac{qq'}{d^2}$$

on suppose q connu, on en déduit l'autre quantité q'.

$$q' = \frac{Fd^2}{q}.$$

La première méthode qui fait connaître la quantité q à la condition que les charges soient égales, s'appelle *méthode idiostatique*.

La seconde méthode, dans laquelle on est obligé de connaître une des quantités pour trouver l'autre, s'appelle *méthode hétérostatique*.

49. — Nous allons voir que si l'on disposait de trois sphères chargées de quantités inégales et inconnues, on pourrait trouver la valeur absolue de ces trois quantités par trois mesures.

Supposons en effet que l'on mesure au moyen de la balance de Coulomb les actions mutuelles exercées :

1° entre q et q'. Soit F_1 la force observée.
2° entre q et q''. Soit F_2 la force observée.
3° entre q' et q''. Soit F_3 la force observée.

La distance d des centres restant la même dans les 3 expériences, on a les trois équations :

$$F_1 = \frac{qq'}{d^2}, \qquad F_2 = \frac{qq''}{d^2}, \qquad F_3 = \frac{q'q''}{d^2}.$$

On en conclut :

$$F_1F_2 = \frac{q^2q'q''}{d^4}$$

et par suite

$$\frac{F_1F_2}{F_3} = \frac{q^2}{d^2},$$

d'où on tire :

$$q = d\sqrt{\frac{F_1F_2}{F_3}}.$$

On trouverait de même :

$$q' = d\sqrt{\frac{F_1F_3}{F_2}},$$

$$q'' = d\sqrt{\frac{F_2F_3}{F_1}}.$$

50. — Remarque. — Si les corps électrisés au lieu d'être plongés dans l'air ou dans le vide étaient plongés dans un liquide isolant tel que la tébérenthine, le pétrole, etc. ; pour des valeurs égales de q et q', l'effort F ne serait plus le même et le second membre de la formule qui représente la loi de Coulomb, devrait être multiplié par un facteur K variable avec la nature du milieu. Nous reviendrons sur cette question en parlant du pouvoir inducteur des corps diélectriques.

§ 3. — DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ A LA SURFACE D'UN CORPS CONDUCTEUR.

51. — Soit une sphère creuse en métal dont l'intérieur est mis en communication avec une source d'électricité au moyen d'un conducteur C qui pénètre dans l'intérieur par une ouverture B (fig. 20) revêtue d'un tube isolant.

Si après avoir mis la paroi intérieure en communication avec la source au moyen du conducteur, on retire ce dernier, qu'on intro-

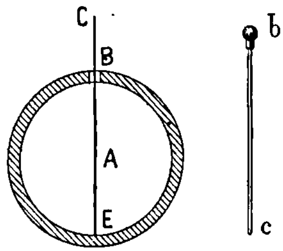


Fig. 20

duise à sa place une petite sphère d'épreuve *b* fixée à l'extrémité d'une tige isolante en verre *bc*, et qu'on la mette en contact avec la paroi intérieure de la sphère puis qu'on la retire et qu'on la mette en présence d'une boule de moelle de sureau suspendue à un fil (pendule électrique), on constate qu'il n'y a aucune action mécanique ; ce qui prouve que la sphère *b* n'a pris aucune charge d'électricité par son contact avec la paroi intérieure de la sphère. Cependant il est bien certain que la sphère A s'est chargée d'électricité, car si on établit le contact entre elle et la sphère *b* par l'extérieur, on constate en répétant les opérations décrites plus haut, que le pendule électrique est attiré.

On conclut de là que l'état électrique, ou comme l'on dit, la *charge électrique*, existe seulement à la surface extérieure des corps conducteurs.

Il y a plus, si l'on charge d'avance la petite sphère d'épreuve *b* d'une quantité d'électricité qui peut être beaucoup plus petite que celle qu'elle prendrait par son contact avec l'extérieur de la sphère A, et qu'on la mette ainsi chargée, en contact avec l'intérieur de cette sphère, elle perd toute la charge qu'elle possède, et cette charge passe intégralement à l'extérieur de la sphère A ; ce qui est une confirmation complète du principe qui vient d'être énoncé.

52. — Densité électrique. — On appelle *densité électrique* en un point d'un corps électrisé, la quantité d'électricité répartie sur l'unité de surface en ce point. Si par exemple on a une quantité d'électricité égale à dix unités C.G.S. sur un centimètre carré, on dira que la densité électrique en ce point est égale à dix.

Si nous considérons une sphère creuse métallique de rayon R chargée d'une quantité d'électricité Q, la charge sera répartie uniformément sur toute la sphère et la densité électrique en un point sera égale à $\frac{Q}{S}$, S étant la surface de la sphère. Mais $S = 4\pi R^2$, donc la densité électrique en un point est :

$$\delta = \frac{Q}{4\pi R^2}.$$

Proposons-nous de trouver l'effort p exercé sur l'unité de surface de la sphère par cette charge électrique. Pour cela, nous allons mettre à profit l'identité des lois élémentaires des actions électriques avec celles de la gravitation universelle et calculer d'abord la pression d'une couche liquide matérielle répartie sur une sphère creuse dénuée de masse.

Considérons sur la sphère dont le rayon intérieur est R_0 (fig. 21) une surface élémentaire a_0b_0 dont l'aire est égale à l'unité et soit $a_0a_1 = h$ l'épaisseur de la couche liquide uniforme qui couvre toute

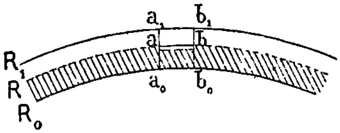


Fig. 21

la sphère. L'effort exercé sur une couche de liquide infiniment mince ab, faisant partie du petit cylindre considéré, est dû à la différence des efforts exercés sur lui par deux sphères concentriques : l'une qui lui est extérieure et qui est représentée par la zône annulaire comprise entre Ra et R_1a_1, l'autre qui lui est intérieure et qui est représentée par la zône couverte de hachures comprise entre Ra et R_0a_0. Or, comme nous l'avons déjà dit, la résultante de toutes les forces exercées par une sphère creuse homogène sur un point intérieur est nulle ; donc la couche infiniment mince ab est soumise à une force attractive qui ne dépend que de la seconde zône sphérique R_0a_0Ra; l'action de cette dernière sur la couche ab qui lui est extérieure est égale au produit de la masse totale de la zône sphérique comprise entre R_0 et R par la masse de la couche ab, divisé par le carré du rayon R de cette couche. L'attraction exercée sur la couche ab aura donc en définitive pour valeur :

$$\frac{fM\mu a dx}{R^2},$$

dx désignant l'épaisseur de la couche; f l'attraction exercée par l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance; M la masse totale de la zône sphérique comprise entre R et R_0; μ la masse de l'unité de volume du liquide; a l'aire de la base ab du cylindre.

On peut remplacer R^2 par R_0^2 sans erreur appréciable; quant à M, masse de la couche sphérique liquide comprise entre R_0 et R, sa valeur diffère très peu du produit de la surface de la sphère de rayon R_0 par la distance x de la couche ab à la surface de cette sphère. Nous écrirons donc :

$$M = 4\pi\mu R_0^2 x.$$

Donc l'action exercée sur la couche d'épaisseur dx, a pour valeur :

$$dF = f 4\pi\mu^2 a x dx.$$

En faisant varier x de 0 à h, et en ajoutant toutes les valeurs de dF correspondantes à ces variations, on trouve :

$$F = 2f\pi\mu^2 a x^2.$$

Donnons à x la valeur h, la formule devient :

$$F = 2f\pi\mu^2 a h^2.$$

Nous pouvons mettre le second membre sous la forme :

$$\frac{2f\pi\mu^2 a^2 h^2}{a} = \frac{2f\pi(\mu a h)^2}{a};$$

mais $\mu a h$ est la masse matérielle du cylindre qui a pour base l'aire a et pour hauteur h; en désignant cette masse par m, on voit que la formule devient :

$$F = \frac{2f\pi m^2}{a},$$

d'où on tire en divisant les deux membres par a

$$\frac{F}{a} = 2f\pi\left(\frac{m}{a}\right)^2.$$

Si nous voulions appliquer ces résultats au cas où, au lieu de masses matérielles il s'agit de *masses électriques*, il suffira pour interpréter la signification des coefficients, f et $\frac{m}{a}$, de se rappeler la définition de l'unité de quantité ou *unité de masse électrique* (46). On verra qu'il faut faire $f = 1$ et remplacer $\frac{m}{a}$ par la quantité d'électricité répartie sur un centimètre carré, ou densité électrique δ. La formule deviendra :

$$p = 2\pi\delta^2,$$

p étant la pression par centimètre carré.

Si on connaît la charge totale q d'électricité répartie sur une sphère de rayon R, la densité δ sera donnée par l'équation :

$$\delta = \frac{q}{4\pi R^2}$$

et la pression p sera donnée par :

$$p = \frac{q^2}{8\pi R^4}.$$

53. — Exemple numérique. — Soit une sphère de 10 centimètres de rayon contenant une charge totale de 10 000 unités ; la densité δ aura pour valeur :

$$\delta = \frac{10\,000}{4\pi \times 100} = 8.$$

La pression électrique par centimètre carré aura également pour valeur :

$$p = \frac{\overline{10\,000}^2}{8\pi \times \overline{10}^4} = 400 \text{ dynes}.$$

Il est essentiel de remarquer que, en passant du problème dans lequel nous supposions des masses matérielles soumises à l'action de la Pesanteur au problème actuel où il s'agit de masses électriques de mêmes signes, les forces attractives deviennent des forces répulsives et par conséquent, la surface sphérique métallique sur laquelle est distribuée la charge électrique, est soumise à des tensions élastiques produites par les répulsions électriques et qui sont dirigées de l'intérieur à l'extérieur, absolument comme si cette sphère était remplie d'un gaz ayant une tension électrique de 400 dynes par centimètre carré $\left(\frac{1}{2500}\text{ d'atmosphère}\right)$. Un liquide pesant réparti sur la surface de la même sphère supposée immatérielle, produirait une tendance à l'écrasement.

54. — Pouvoir des pointes. — Les physiciens ont constaté depuis longtemps qu'un corps chargé d'électricité et plongé dans l'air sec, perd sa charge très lentement si ce corps a la forme sphérique ; mais s'il a une forme irrégulière et qu'il possède des parties de très petit rayon de courbure, la déperdition augmente rapidement; enfin si ce corps porte en l'un des points de sa surface une pointe très aigüe, la déperdition est presque instantanée.

On a expliqué pendant longtemps ce phénomène en disant : que la pression électrique par centimètre carré étant d'autant plus grande que le rayon de courbure est plus petit, la pression à l'extrémité des pointes était très grande, et l'électricité, que l'on comparait à un gaz, triomphait de la pression atmosphérique, à laquelle on attribuait le pouvoir de maintenir la charge électrique sur un corps tant que la pression p était plus petite que un kilogramme par centimètre carré.

Cette assimilation grossière entre l'électricité, dont l'existence propre n'est même pas démontrée, et un gaz possédant une force élastique, ne pouvait conduire qu'à une explication erronée. Le fait qu'un corps électrisé conserve très longtemps, quelle que soit sa forme, sa charge électrique quand il est dans le vide, rend inadmissible l'explication dont nous venons de parler.

Il est parfaitement vrai que, sur un corps de rayon de courbure variable, la pression électrique par unité de surface est d'autant plus grande que le rayon de courbure est plus petit; mais cette pression est contrebalancée par la résistance élastique du métal auquel l'électricité est, pour ainsi dire, incorporée et qu'elle ne peut quitter que par l'intermédiaire d'un corps conducteur.

En réalité, la déperdition observée sur les corps portant des pointes, est due à ce que un nombre immense de molécules d'air viennent successivement en contact avec l'extrémité de ces pointes et leur enlèvent à chaque contact une charge proportionnelle à la densité électrique au point considéré. Or, comme cette densité est d'autant plus grande que le rayon de courbure est plus petit, la déperdition croît elle-même quand le rayon de courbure diminue.

Pour représenter graphiquement la valeur de la densité électrique sur un ellipsoïde O (fig. 22), nous allons porter en chaque point de la surface et suivant la normale, une longueur proportionnelle à la densité électrique en ce point, les extrémités de ces normales seront sur une sorte d'ellipsoïde $A_1A'_1B_1B'_1$. On voit sur la figure que la densité électrique sera beaucoup plus grande aux extrémités du grand axe qu'aux extrémités du petit ainsi que l'indiquent des calculs dans le détail desquels nous ne pouvons pas entrer.

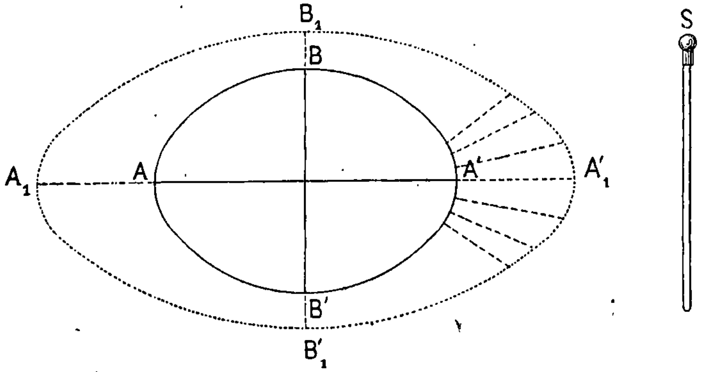


Fig. 22

Pour vérifier expérimentalement cette distribution de l'électricité, on emploie une méthode due à Coulomb, dite *méthode du plan d'épreuve*. Cette méthode consiste à toucher le point de la surface dont on veut mesurer la charge, avec une petite sphère S, ou un petit plan fixé à l'extrémité d'une tige isolante en verre. Ce plan d'épreuve prend une charge proportionnelle à celle du point touché ainsi que Coulomb a eu soin de le vérifier préalablement au moyen de la balance de torsion. On constate ainsi que les charges à l'extrémité du grand axe et à l'extrémité du petit axe par exemple, sont bien dans le rapport indiqué par la théorie.

Ces vérifications présentent une grande importance parce qu'elles démontrent que les quantités d'électricité se répartissent en chaque point du corps conducteur comme le feraient des molécules électrisées infiniment petites, dénuées de frottement et chargées chacune de la même quantité d'électricité. Elles légitiment donc ce procédé de calcul qui conduit d'ailleurs à beaucoup d'autres résultats également confirmés par l'expérience comme nous le verrons par la suite. Cependant, il faudrait bien se garder de déduire de là que cet accord entre l'expérience et le calcul permette de conclure que l'électricité est réellement un fluide spécial, composé de molécules douées de la propriété de s'attirer ou de se repousser. Cela permet simplement de conclure que les phénomènes auxquels donnent lieu les corps électrisés, sont les mêmes que ceux auxquels donnerait lieu le fluide hypothétique dont l'emploi est commode dans le calcul.

Le mécanisme de la déperdition de l'électricité par les pointes tel que nous l'avons expliqué, est d'ailleurs parfaitement mis en évidence au moyen d'un petit appareil décrit dans tous les traités de Physique et que l'on nomme le Tourniquet électrique.

§ 4. — POTENTIEL ÉLECTRIQUE.

55. — Nous avons défini et étudié dans le chapitre précédent la quantité à laquelle nous avons donné le nom de *Potentiel gravifique*. Il nous sera maintenant très facile d'appliquer ce que nous avons dit à ce sujet, au potentiel des systèmes électrisés.

Soient M et m deux corps électrisés de dimensions extrêmement petites par rapport à la distance qui les sépare; supposons le premier chargé d'une quantité d'électricité égale à q, le second chargé d'une quantité égale à 1 : Ces quantités peuvent être de même signe ou de signes contraires. Si on amène le corps m d'une distance infinie jusqu'à la distance $MA = r$, le travail développé sera facile à évaluer en appliquant les formules établies dans le chapitre précédent pour le potentiel gravifique. En effet l'attraction F de deux corps pesants de masse M et m situés à la distance x, a pour valeur :

$$F = f\frac{Mm}{x^2}.$$

Cette formule s'applique immédiatement aux corps électrisés en y faisant $f = 1$ (ce qui résulte d'ailleurs de la définition de l'unité de masse électrique) $M = q$, $m = q'$; elle devient comme nous le savons

$$F = \frac{qq'}{x^2}.$$

Le potentiel gravifique égal comme nous l'avons vu à $\frac{fM}{x}$, permettra donc de trouver immédiatement le potentiel électrique en faisant également $M = q$, $f = 1$, $x = r$; et on pourra écrire en le désignant comme c'est l'usage adopté par la lettre V :

$$V = \frac{q}{r}.$$

Telle est la valeur du Potentiel électrique ou travail nécessaire pour amener la quantité-unité depuis l'infini jusqu'à la distance r du point M chargé de q unités électro-statiques. Ce travail sera considéré comme positif si la force F est répulsive parce que son action tend à augmenter la distance r; il sera négatif dans le cas contraire.

56. — Différence de Potentiel de deux points. — Si la petite masse mobile m chargée de l'unité de quantité électrique et soumise à l'action d'une masse électrisée M chargée de q unités,

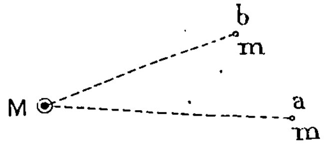


Fig. 23

passe de la position a à la position b (fig. 23), le travail développé pendant ce trajet, s'appelle *différence de potentiel* des points a et b. En vertu des théorèmes démontrés dans le chapitre I, ce travail est indépendant de la forme de la trajectoire suivie par la masse m pour se rendre de a en b. Or si nous posons

$$Ma = r_1, \qquad Mb = r_2,$$

le travail développé a pour valeur la différence des potentiels (pris depuis l'infini) correspondante aux positions a et b. En désignant par V_1 et V_2 les valeurs de ces potentiels, on a :

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}.$$

57. — Nous avons dit, en parlant de la gravitation universelle, qu'une sphère matérielle homogène, creuse ou pleine, exerce sur une masse-unité placée à l'extérieur, une attraction égale à $\frac{M}{x_2}$, absolument comme si toute la masse de la sphère était concentrée en son centre. Il en résulte que le potentiel gravifique a, dans ce cas, la même expression que celui d'un point matériel de masse M. L'identité des formules qui régissent les forces gravifiques et les forces électriques, nous permet donc de conclure que le potentiel d'une sphère uniformément électrisée, agissant sur un point extérieur, est le même que si toute la charge de la sphère était concentrée en son centre; il a donc pour valeur $\frac{q}{x}$. Si la quantité-unité venait jusqu'au contact de la surface extérieure de la sphère, on aurait $x = r$ et le potentiel deviendrait $\frac{q}{r}$. Mais si la masse-unité m pénétrait à l'intérieur de la sphère, les phénomènes changeraient complètement, parce que, comme nous l'avons dit également dans le premier chapitre, la résultante de toutes les forces gravifiques développées par une sphère creuse homogène, sur une masse matérielle intérieure, est constamment nulle.

Le potentiel n'augmenterait donc que pendant le passage de la masse-unité à travers l'épaisseur de la couche électrisée.

58. — Exemple numérique. — Soit une sphère chargée de 1000 unités ; on demande la différence de potentiel de deux points pour lesquels on a $r_1 = 10$ centimètres, $r_2 = 20$ centimètres.

On trouve $V_1 = \frac{1000}{10} = 100$, $V_2 = \frac{1000}{20} = 50$, $V_1 - V_2 = 50$.

La différence des potentiels étant égale à 50, le travail développé pendant le trajet de la masse m sera égal à 50 ergs soit

$$\frac{1}{2\,000\,000} \text{ de kilogrammètre.}$$

59. — **Potentiel d'un système de corps électrisés.** — De même que le potentiel d'un système matériel soumis aux lois de la gravitation, est égal à la somme des potentiels de chacune des masses qui le composent, le potentiel d'un système de masses électrisées est égal à la somme algébrique des potentiels de chacune d'elles. On a donc en désignant par $r_1, r_2, r_3, \ldots$ les distances de

chacune des masses électrisées M_1, M_2, M_3, au point a, position actuelle de la masse m chargée de l'unité de quantité électrique (fig. 24) ; et par $q_1 q_2 q_3$ les quantités d'électricité réparties sur

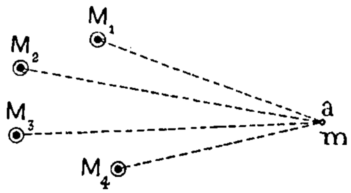


Fig. 24

chacune d'elles et affectées du signe + ou — suivant qu'elles sont chargées d'électricité de même signe que m ou de signe contraire,

$$V_a = \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \cdots$$

Pour un autre point a', les distances r_1, r_2, r_3, auraient des valeurs différentes et deviendraient r'_1, r'_2, r'_3, de sorte que le potentiel aurait pour valeur

$$V_{a'} = \frac{q_1}{r'_1} + \frac{q_2}{r'_2} + \frac{q_3}{r'_3} + \cdots$$

Enfin la différence de potentiel deviendrait :

$$V_a - V_{a'} = \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_1}{r'_1}\right) + \left(\frac{q_2}{r_2} - \frac{q_2}{r'_2}\right) + \cdots$$

c'est-à-dire égale à la somme des différences des potentiels correspondants, pour chaque masse électrisée, aux deux positions successives a et a' de la masse m.

60. — Surfaces équipotentielles. — On appelle surfaces équipotentielles ou *surfaces de niveau*, le lieu des points de l'espace pour lesquels le potentiel d'un système de corps électrisés a la même valeur.

La différence des potentiels de deux points quelconques d'une telle surface, est donc nulle, et par conséquent le travail développé par l'ensemble des masses électrisées sur la masse m, lorsqu'elle se meut en glissant sur une surface équipotentielle, est constamment nul quelle que soit la direction et la grandeur de ce glissement. Il en résulte, comme nous l'avons dit dans le premier chapitre, que la masse m n'est soumise à aucune force tangente à la surface équipotentielle sur laquelle on la fait glisser, et que la résultante des actions exercées sur elle par les masses électrisées M_1, M_2, ... est toujours dirigée suivant la normale à la surface équipotentielle. Or c'est précisément ce qui a lieu à la surface du Globe terrestre pour un point pesant placé sur une surface dont tous les points sont au même niveau. De là le nom de *surfaces de niveau* que l'on donne aussi aux surfaces équipotentielles.

61. — Expression de la Force électrique au moyen de la différence de potentiel. — La résultante des actions exercées par les masses M_1, M_2, ... sur la masse-unité m, est comme nous venons de le dire, dirigée suivant la normale à la surface équipotentielle qui passe par la position actuelle de la masse m. Quant à son intensité, elle est facile à calculer en appliquant les formules données dans le chapitre premier (29). En la désignant par F, on a :

$$F = \frac{dV}{dn},$$

dV représentant la différence de potentiel des deux surfaces équipotentielles infiniment voisines et dn leur distance comptée suivant la normale commune passant par le point m.

L'intensité de la force qui sollicite m, estimée suivant une direction quelconque, s'obtient immédiatement par l'équation du numéro 29.

Soit m la position initiale de la masse m située sur la surface

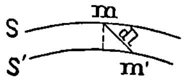


Fig. 25

équipotentielle S (fig. 25). Supposons qu'on lui fasse parcourir le chemin très petit $mm' = dl$ de façon à l'amener sur une surface équipotentielle S' très voisine de la première.

Le travail développé pendant le trajet dl par les masses électrisées M_1, M_2, ... sur la masse-unité m, a pour définition une valeur égale à la différence de potentiel dV des surfaces S et S'; mais il a aussi pour valeur, le produit de la force F estimée suivant la direction mm', par la distance dl des positions m et m'. On a donc :

$$Fdl = dV,$$

d'où :

$$F = \frac{dV}{dl}.$$

62. — Le potentiel d'un corps conducteur a la même valeur en tous les points de la surface de ce corps. — En assimilant comme nous l'avons déjà fait, la quantité d'électricité qui existe en un point d'un corps, à une collection de petites sphères chargées chacune de l'unité, le corps électrisé sera dit conducteur si ces petites sphères peuvent se mouvoir sous l'influence de leurs seules actions mutuelles ; absolument comme le ferait un fluide parfait composé de molécules pesantes réparties sur une surface immatérielle.

Nous allons démontrer que dans ce cas, l'équilibre des sphères électrisées ne sera possible que si la surface du corps conducteur sur laquelle elles se meuvent a le même potentiel en tous ses points.

En effet, s'il en était autrement, une quelconque des petites sphères électrisées que nous supposons chargées d'une quantité égale à l'unité, serait soumise à l'action d'une force F égale à

$$\frac{dV}{dl}$$

dV étant la différence de potentiel supposée existante entre deux points très voisins de la surface du corps, et dl la distance qui les sépare. La petite sphère mobile obéira donc à cette force puisque le corps est conducteur, et en venant se placer dans la position très voisine dont nous venons de parler, elle augmentera la charge et par conséquent le potentiel en ce point. Le potentiel d'un point de la surface, a en effet pour valeur, d'après nos définitions mêmes, le travail qui serait produit par la quantité d'électricité existant en ce point, sur la masse-unité venant de l'infini se placer au point considéré. Ce potentiel est donc proportionnel à la quantité q d'électricité qui existe en ce point.

Il résulte de là, que lorsqu'on charge un corps conducteur d'une forme quelconque, la quantité d'électricité se répartit en général, inégalement sur la surface du corps conducteur, à moins qu'il ne s'agisse d'une sphère, de façon à satisfaire à la condition qui vient d'être énoncée.

Supposons maintenant deux surfaces conductrices A et B réunies par un fil métallique *ab* (fig. 26) ; d'après ce qui vient d'être dit, cet ensemble formant, grâce à l'interposition du fil métallique, un seul corps conducteur, l'équilibre ne sera possible que si le poten-

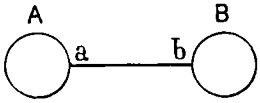


Fig. 26

tiel est le même partout. Dans le cas où les potentiels de A et de B seraient différents avant leur réunion par le fil conducteur *ab*, au moment où cette réunion aura lieu, l'équilibre de potentiel s'établira dans un temps extrêmement court. Le corps A dont le potentiel était le plus élevé perdra une partie de sa charge qui se reportera sur le corps B, de façon que la quantité totale d'électricité existante dans l'ensemble des corps A et B, reste invariable avant, pendant et après la communication, conformément à un principe auquel nous avons déjà fait allusion (40, 4°) et que nous allons énoncer avec plus de précision sous le nom de *Conservation de l'électricité.*

63. — Conservation de l'électricité. — Ce principe consiste en ceci : si l'on considère un ensemble de corps électrisés formant un groupe isolé dans l'espace, loin de toute masse matérielle, il résulte de l'ensemble des faits observés, qu'il est impossible de modifier, par quelque moyen que ce soit, la somme algébrique des quantités d'électricité qui existent dans le système.

Si par exemple on augmente la quantité d'électricité qui existait primitivement en un des points, on peut être certain que la charge va diminuer en d'autres points, de telle façon que la quantité totale d'électricité (en tenant compte bien entendu des signes algébriques des quantités d'électricité qui existent en chaque point), restera invariable.

Il y a là une analogie frappante avec la conservation de la matière ainsi qu'avec la conservation de l'énergie et de la chaleur; mais tandis qu'une quantité de chaleur, peut disparaître sous forme de chaleur pour réapparaître sous forme d'énergie potentielle ou cinétique, il n'en est pas de même de l'électricité qui ne se prête à aucune transformation. Le fait qui dans la mécanique des systèmes matériels présente le plus d'analogie avec le principe de la conservation de l'électricité, est celui de l'invariabilité de la quantité de mouvement d'un ensemble de points matériels qui n'est soumis qu'à des forces intérieures. Dans ce cas, en effet, aucune action interne, si puissante qu'elle soit, ne peut modifier la somme algébrique des quantités de mouvement obtenue en ajoutant ensemble les produits de la masse de chaque point matériel par la vitesse dont il est animé.

Peut-être cette considération permettra-t-elle d'émettre l'hypothèse qu'une quantité d'électricité peut être représentée par une quantité de mouvement. Dans ce cas, une différence de potentiel sera représentée par une vitesse; mais ce sont là des considérations qui sortiraient du cadre de cet ouvrage.

64. — Nous pouvons appliquer également le mode de représentation du potentiel gravifique (26) au potentiel électrique.

Soit A (fig. 27) une sphère creuse électrisée d'un rayon r et contenant une quantité q d'électricité. Si du point a part un conducteur indéfini chargé par unité de longueur d'une quantité d'électricité égale à 1, le calcul développé au numéro 26, nous permettra de trouver immédiatement la répulsion de la sphère A sur l'ensemble du conducteur.

Nous trouverons ainsi que cette répulsion est exprimée par un nombre d'unités de force, égal au nombre d'ergs qui représente le travail accompli par l'unité de quantité électrique, amenée de l'infini au point a c'est-à-dire égal à $\frac{q}{r}$.

Si au lieu d'être indéfinie, la tige *ab* avait une longueur finie, et qu'elle servît à réunir deux sphères de potentiels différents, placées à une distance l'une de l'autre, très grande, par rapport à leurs rayons, il est facile de voir que la tige serait poussée vers la sphère dont le potentiel serait le plus grand, avec une force égale à : $\frac{q}{r} - \frac{q'}{r'}$, r et r' étant les rayons des deux sphères, q et q' leurs charges respectives.

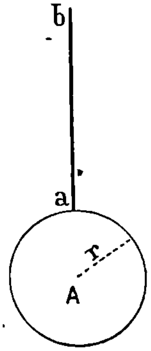


Fig. 27

Lorsque nous avons parlé du potentiel d'un corps conducteur, nous avons donné une représentation matérielle de son état électrique que nous allons appliquer dans le problème actuel. Les sphères A et B (fig. 25) ainsi que le conducteur qui les réunit étant recouverts de petites molécules électrisées égales à l'unité, l'ensemble de celles qui recouvrent le conducteur, sera sollicité par une force que nous venons d'évaluer, et cette colonne de molécules entrera en mouvement vers la sphère du potentiel le plus bas. Ce mouvement continuera jusqu'à ce que la force électro-motrice[1] devienne nulle, c'est-à-dire jusqu'à ce que l'on ait $\frac{q}{r} = \frac{q'}{r'}$, condition qui exprime l'égalité des potentiels des deux sphères.

§ 5. — EXPRESSION DU TRAVAIL ÉLECTRIQUE.

65. — Lorsqu'une molécule électrisée, chargée de l'unité de quantité, se rend d'un point A à un point B, ces points appartenant à

(1) On donne ce nom à la force qui met l'électricité en mouvement.

des surfaces équipotentielles différentes, le travail développé pendant ce trajet est égal, par définition, à la différence des potentiels des deux surfaces A et B. Si au lieu d'être égale à l'unité, la molécule électrisée contenait q unités, le travail développé serait lui-même multiplié par q ; d'où ce théorème :

Le travail W *développé par une quantité d'électricité* q *qui passe du potentiel* V_0 *au potentiel* V_1, *a pour expression :*

$$W = q(V_0 - V_1),$$

et si cette quantité était infiniment petite et égale à dq, *on aurait*

$$dW = (V_0 - V_1)dq.$$

C'est ce qu'on appelle le travail électrique.

On ne saurait suivre avec trop d'attention la série des raisonnements grâce auxquels nous sommes arrivés à cette expression et sur lesquels on n'insiste pas assez en général. En effet, lorsque nous disons qu'une molécule électrisée chargée de l'unité de quantité électrique se rend d'un point A à un point B qui est à un potentiel différent, il est bien certain que le travail développé a pour mesure la différence de potentiel des points A et B. Il est également certain que si les points A et B, au lieu d'être des points géométriques appartenant à des surfaces équipotentielles immatérielles, faisaient partie de la surface matérielle d'un corps conducteur, le travail accompli par la petite masse-unité, aurait encore la valeur $V_0 - V_1$ que nous lui avons assignée. De plus, la surface du corps conducteur A aurait perdu une unité de quantité tandis que la surface du corps B en aurait gagné une ; le trajet de cette unité se faisant le long du fil conducteur qui réunit A à B. Mais dans la réalité, les phénomènes qui s'accomplissent quand on réunit les deux corps A et B par un fil conducteur, nous sont complètement inconnus, et il est même fort probable, comme nous l'avons déjà dit, qu'il n'y a aucun courant d'aucune espèce de matière, pondérable ou non, le long du fil.

Il y a donc quelque hardiesse à affirmer que le travail électrique développé au moment de la réunion des deux corps par le conducteur, est bien réellement égal à celui qui résulterait du transport de nos petites masses-unités du corps A au corps B. La seule raison que l'on puisse donner est celle-ci : En chargeant deux sphères A et B d'un nombre de petites sphères-unités égales à Q_0 et Q_1 de façon que l'on ait :

$$\frac{Q_0}{r_0} = V_0, \qquad \frac{Q_1}{r_1} = V_1,$$

r_0 et r_1 désignant les rayons des sphères ; prenant ensuite une à une chacune des sphères-unités qui font partie de A pour les transporter sur B le long d'un fil conducteur, il arrivera un moment où l'on aura

$$\frac{Q_0}{r_0} = \frac{Q_1}{r_1}.$$

A ce moment, le chapelet de sphères-unités enfilées sur le conducteur, sera en équilibre ; les sphères A et B étant au même potentiel comme nous l'avons déjà vu. Le nombre des masses-unités recouvrant la sphère B, aura augmenté d'une quantité q précisément égale à celle qu'on a enlevée de la sphère A, et nous aurons ainsi fait disparaître une certaine quantité de l'énergie potentielle existant primitivement dans l'ensemble des deux sphères A et B.

Il est incontestable que la quantité d'énergie disparue pendant les opérations que nous venons de décrire, a pour valeur $q(V_0 - V_1)$; mais il n'est pas démontré que ces opérations hypothétiques effectuées sur des masses matérielles, conduisent à une perte d'énergie exactement égale à celle qui est produite réellement pendant *la décharge électrique* résultant de la réunion des deux sphères par un fil conducteur.

Le principe de l'indestructibilité de l'énergie fait prévoir que les raisonnements que nous avons développés doivent conduire à des résultats exacts ; mais la confirmation expérimentale était absolument nécessaire. Nous verrons bientôt qu'elle résulte des travaux de plusieurs savants qui ont mesuré la chaleur développée pendant la décharge électrique. (Riess, Joule.)

66. — Travail nécessaire pour charger une sphère au potentiel V. — Supposons une sphère métallique creuse contenant une charge d'électricité égale à q ; en désignant par r son rayon, son potentiel aura pour valeur $\frac{q}{r}$. C'est le travail qu'il faudra développer, pour amener de l'infini à la surface de la sphère, une quantité d'électricité de même signe que q égale à l'unité.

Si cette quantité, au lieu d'être égale à l'unité, est égale à dq, ce travail deviendra $\frac{qdq}{r}$ et la charge de la sphère ainsi que son potentiel augmentera de dq. De sorte que pour amener une seconde quantité dq, de l'infini sur la sphère, il faudra dépenser une seconde quantité de travail, un peu plus grande que la première et qui sera :

$$\frac{(q + dq)dq}{r}.$$

Une troisième quantité égale encore à dq, exigera un travail égal à

$$\frac{(q + 2dq)dq}{r}$$

et ainsi de suite.

Le travail total nécessaire, pour porter la charge de la valeur q à la valeur q', pourrait donc être calculé en ajoutant ensemble tous les travaux partiels dont nous venons de donner l'expression et en prenant dq suffisamment petit. Le calcul intégral permet d'obtenir immédiatement ce résultat et on trouve que ce travail total a pour valeur :

$$\frac{q'^2 - q^2}{2r}.$$

Si on suppose que l'on parte d'une charge initiale nulle, il suffit de faire $q = 0$ et on trouve, en désignant ce travail par W et en supprimant l'accent de q' :

$$\mathrm{W} = \frac{q^2}{2r}.$$

Si on remarque que le potentiel V est égal à $\frac{q}{r}$, on aura $\mathrm{W} = \frac{1}{2}\mathrm{V}q$; enfin on peut encore écrire

$$\mathrm{W} = \frac{1}{2}\,r\mathrm{V}^2.$$

Telles sont les trois formes différentes sous lesquelles on peut écrire la valeur de l'énergie intrinsèque d'une sphère.

On peut se représenter cette énergie intrinsèque comme exactement de même nature que celle qui serait développée par la formation d'un océan matériel liquide soumis aux lois de la gravitation et réparti à la surface d'une sphère creuse immatérielle. La seule différence serait que dans ce dernier cas, la formation de l'océan liquide donnerait lieu à un développement d'énergie, tandis que dans le cas de la sphère électrisée, il faut au contraire fournir de l'énergie.

67. — Exemple numérique. — Calculons l'énergie dépensée pour charger une sphère de dix centimètres de rayon, de 10.000 unités C.G.S.

Les formules précédentes donnent immédiatement :

$$W = \frac{\overline{10.000}^2}{20} = 5.000.000 \text{ d'ergs,}$$

soit environ $\frac{1}{20}$ de kilogrammètre. Le potentiel de cette sphère serait égal à $\frac{10.000}{10} = 1.000$. Or, nous verrons plus tard que l'unité de potentiel employée dans les applications industrielles et connue sous le nom de *Volt*, est égale à la 300ᵉ partie de l'unité de potentiel électrostatique dont nous nous sommes servi jusqu'à présent ; par conséquent, la sphère prise comme exemple aurait un potentiel de 300.000 volts.

Remarquons en passant que ce chiffre de 300.000 volts, serait dans la réalité presque impossible à atteindre à cause des phénomènes physiques auxquels il donnerait lieu. L'expérience apprend en effet, que les corps doués d'un potentiel aussi élevé, perdent très rapidement leur charge électrique par leur contact avec l'air, à moins que celui-ci soit d'une siccité absolue.

68. — Disons à ce propos, que avant l'introduction dans la science, de la quantité que nous appelons potentiel, on avait depuis longtemps exprimé par le mot *tension*, la tendance que possèdent les corps électrisés à céder leur charge aux corps environnants. Cette tendance se manifeste dans les corps fortement électrisés c'est-à-dire chargés d'une quantité d'électricité considérable par rapport à leur surface, par des phénomènes curieux qui consistent en aigrettes lumineuses accompagnées de sifflements qui font involontairement penser au bruit qui accompagne l'écoulement d'un gaz fortement comprimé. La tendance de notre esprit à ramener tous les phénomènes nouveaux à ceux déjà connus, a donc eu pour résultat d'assi-

miler la déperdition de l'électricité à l'écoulement d'un gaz comprimé.

La tension électrique, quoique n'ayant pas été définie autrefois, d'une façon suffisamment nette par les savants qui employaient cette expression, répond cependant à une réalité physique et ne doit pas être confondue avec le potentiel auquel elle est cependant proportionnelle dans la plupart des cas, comme nous allons le montrer.

En effet, la tension électrique, définie comme indiquant la tendance d'un corps à perdre sa charge électrique, peut être considérée ainsi que nous l'avons déjà dit, (54) comme représentée par la densité de la charge au point considéré. Or cette densité pour une sphère est égale à

$$\frac{q}{4\pi r^2},$$

tandis que le potentiel a pour valeur $\frac{q}{r}$. Donc, à valeur égale de r, la densité, ou tension électrique, et le potentiel sont proportionnels au même nombre q. Il en résulte que pour un corps électrisé de forme déterminée, le potentiel et la tension croissent proportionnellement. On comprend dès lors pourquoi les hauts potentiels donnent lieu à des phénomènes de déperdition qui, autrefois, étaient attribués à la tension électrique. Nous verrons d'ailleurs bientôt que la quantité d'électricité qui s'écoule, dans un temps donné, à travers un corps conducteur, est aussi proportionnelle à la différence de potentiel des extrémités de ce conducteur (Loi d'Ohm).

§ 6. — PHÉNOMÈNES QUI ACCOMPAGNENT LA RÉUNION DE DEUX CORPS CONDUCTEURS PAR UN FIL MÉTALLIQUE.

69. — Supposons d'abord que les deux corps aient la forme sphérique ; appelons r_0 et q_0 le rayon et la charge de la première sphère A, r_1 et q_1 le rayon et la charge de la seconde B avant qu'on établisse entre elles une communication métallique. Le potentiel de la première aura pour valeur comme nous le savons :

$$V_0 = \frac{q_0}{r_0},$$

celui de la seconde $$V_1 = \frac{q_1}{r_1}.$$

Lorsque l'égalité des potentiels aura été établie entre les deux sphères, au moyen du fil conducteur, le potentiel V'_0 de la première, sera exprimé par le même nombre que le potentiel V'_1 de la seconde ; de sorte que en remplaçant ces potentiels par leur valeur en fonction des quantités q'_0 et q'_1 d'électricité afférentes à chacune des sphères après établissement de l'équilibre, on aura :

$$V'_0 = \frac{q'_0}{r_0} = V'_1 = \frac{q'_1}{r_1}$$

tandis que le principe de la conservation des quantités d'électricité donnera

$$q'_0 + q'_1 = q_0 + q_1.$$

Les deux premières équations, combinées avec la troisième, donnent :

$$V'_0 = V'_1 = \frac{q'_0}{r_0} = \frac{q'_1}{r_1} = \frac{q'_0 + q'_1}{r_0 + r_1} = \frac{q_0 + q_1}{r_0 + r_1}.$$

Telle est la valeur du potentiel commum après la décharge.

Les charges finales de chaque sphère sont tirées des deux premières équations qui donnent :

$$q'_0 = r_0 V'_0, \qquad q'_1 = r_1 V'_1$$

ou, toute réduction faite :

$$q'_0 = \frac{r_0}{r_0 + r_1}(q_0 + q_1), \qquad q'_1 = \frac{r_1}{r_0 + r_1}(q_0 + q_1) \qquad (1).$$

70. — L'énergie intrinsèque de la sphère A avant la décharge, a pour valeur

(1) Si l'on suppose deux sphères matérielles non élastiques, ayant des masses m_0 et m_1, animées de vitesses V_0 et V_1 dirigées suivant la droite qui joint leurs centres, et que ces deux sphères viennent à se heurter, leurs quantités de mouvement respectives seront avant le choc

$$q_0 = m_0 V_0, \qquad q_1 = m_1 V_1$$

et après le choc :

$$q'_0 = \frac{m_0}{m_0 + m_1}(q_0 + q_1), \qquad q'_1 = \frac{m_1}{m_0 + m_1}(q_0 + q_1).$$

Ces équations sont identiques à celles qui donnent la valeur des charges électriques des deux sphères après leur réunion par un conducteur, à la condition de poser $m_0 = r_0$, $m_1 = r_1$. C'est un nouvel argument en faveur du parallèle que nous établissions plus haut entre une quantité d'électricité et une quantité de mouvement.

La comparaison continue à être exacte quand on calcule les pertes d'énergie qui ont lieu dans ces deux phénomènes d'ordre si différent.

$$\frac{q_0^2}{2r_0} = \frac{1}{2}V_0q_0 = \frac{1}{2}r_0V_0^2.$$

L'énergie de la sphère B aura pour valeur :

$$\frac{q_1^2}{2r_1} = \frac{1}{2}V_1q_1 = \frac{1}{2}r_1V_1^2.$$

Après leur réunion par un conducteur, l'énergie totale des deux sphères est, comme on peut le constater en faisant le calcul, toujours plus petite que la somme des énergies primitives.

Il est facile, en effet, de démontrer que la somme des énergies potentielles des deux sphères est, lorsque l'équilibre est établi, moindre que l'énergie totale primitive, d'une quantité égale à

$$\frac{1}{2}\frac{r_0r_1}{r_0+r_1}(V_0-V_1)^2.$$

Or, comme la différence $V_0 - V_1$ est élevée au carré, on voit que la diminution d'énergie est toujours positive et qu'il y a *toujours perte d'énergie potentielle* lorsqu'on réunit par un conducteur, deux sphères à des potentiels différents.

Si les sphères étaient chargées de quantités d'électricité égales, *mais de signes contraires*, on aurait :

$$q_1 = -q_0, \quad \text{d'où} \quad q_0 + q_1 = 0 \quad \text{et} \quad V_0' - V_1' = 0.$$

Il y aurait alors disparition de la totalité de l'énergie potentielle.

Si l'une des sphères était à l'état neutre et que les deux sphères fussent identiques, on aurait après la décharge :

$$q_1' = q_0' = \frac{q_0}{2}$$

c'est-à-dire que chacune d'elles contiendrait la moitié de la charge primitivement concentrée sur la première dont l'énergie potentielle serait réduite au quart de sa valeur primitive. L'énergie totale serait donc réduite après la décharge à la moitié de sa valeur primitive.

Il y aurait donc la moitié de l'énergie disparue, et comme, en vertu du principe de la conservation de l'énergie, cette disparition ne peut être qu'apparente, il faut nécessairement que la moitié de l'énergie potentielle disparue se soit transformée en chaleur.

Nous arrivons donc ainsi à conclure que toutes les fois que l'on met en communication deux sphères électrisées à des potentiels différents, par un conducteur, il y a production d'une quantité de chaleur que nous pouvons calculer en multipliant l'excès de l'énergie primitive sur l'énergie finale, par l'équivalent thermique d'un erg (17) qui est en petite calorie

$$0^c{,}000\,000\,023\,98.$$

71. — Nous avons dit (51), que lorsqu'on introduit à l'intérieur d'une sphère creuse électrisée, possédant une ouverture, une autre sphère beaucoup plus petite également électrisée, cette dernière cède *toute sa charge* à la sphère extérieure quel que soit l'état électrique de chacune des sphères. Nous allons préciser maintenant le sens de cette phrase en disant que la petite sphère cède *toute sa charge* à la sphère extérieure quels que soient les potentiels respectifs des deux sphères. Ceci peut paraître en opposition avec ce que nous venons de dire à propos des sphères extérieures l'une à l'autre réunies par un fil conducteur, puisque nous avons vu que c'est toujours la sphère dont le potentiel $\frac{q}{r}$ est le plus élevé qui cède à l'autre une partie de sa charge. Nous allons expliquer cette contradiction apparente.

Nous avons déjà rappelé à plusieurs reprises, que l'action, exercée par une sphère creuse homogène sur une masse intérieure, est nulle quelle que soit la position de la petite masse. Cela est vrai, qu'il s'agisse d'actions dues à la gravité ou d'actions électriques ; seulement, dans ce dernier cas, le mot *homogène* devra être remplacé par l'expression *uniformément électrisée.*

Il résulte de là que chacune des petites masses-unités, par lesquelles nous représentons la charge d'un corps électrisé, et qui sont situées à la surface de la petite sphère intérieure, est soumise à des actions mécaniques qui émanent exclusivement des autres masses de cette même sphère. Toutes ces masses, étant chargées d'électricité de même signe, se repoussent ; elles se répandront naturellement sur une surface conductrice, qui leur permettra de s'écarter les unes des autres, lorsqu'on mettra cette surface en communication métallique avec la petite sphère ; c'est précisément ce qui a lieu dans l'exemple considéré.

Il faut remarquer d'ailleurs que l'énergie potentielle de la charge, répartie primitivement sur la petite sphère, se trouve diminuée par le seul fait qu'elle est, après la communication, répartie sur la sphère extérieure de rayon plus grand, et que, par conséquent, la perte d'énergie signalée dans le cas des sphères extérieures, existe encore ici.

72. — De l'équation $V = \frac{q}{r}$ qui donne la valeur du potentiel d'une sphère, on tire l'égalité

$$r = \frac{q}{V}$$

qui montre que pour un potentiel donné, le rayon d'une sphère doit être proportionnel à la quantité d'électricité que l'on veut répartir sur sa surface. Pour cette raison, le quotient $\frac{q}{V}$ a reçu le nom de *capacité de la sphère ;* la capacité d'une sphère est donc une longueur.

Calculons au moyen de cette formule la capacité du globe terrestre.

La Terre diffère très peu d'une sphère, dont le rayon est de 6.371.000 mètres, sa capacité est donc égale à ce nombre exprimé en centimètres, soit 637 millions. Cela signifie que, portée au potentiel 1, la Terre contiendrait une quantité d'électricité égale à 637 millions d'unités.

Il est intéressant de chercher quelle répulsion elle exercerait sur une sphère de 10 centimètres de rayon portée au même potentiel.

La charge q de cette dernière sphère, aurait pour valeur

$$q = rV$$

ou, si l'on fait $V = 1$, $q = r = 10$.

La répulsion, tirée de la loi de Coulomb, a pour valeur $f = \frac{Q \times q}{d^2}$. Mais $Q = 637.000.000$, $d = 637.000.000$, $q = 10$; donc

$$f = \frac{1}{63.700.000} \text{ de dyne : quantité immesurable.}$$

Nous allons montrer directement que le quotient $\frac{q}{V}$ est une longueur.

Nous avons vu en effet que l'expression symbolique d'une quantité d'électricité est :

$$L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$$

et que celle du potentiel est :

$$L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1};$$

donc le quotient $\frac{q}{V}$ est représenté par une longueur.

73. — On peut généraliser la définition de la capacité de la manière suivante : soit A (fig. 28) un corps conducteur électrisé et m la masse électrique-unité occupant la position a. Si on désigne par

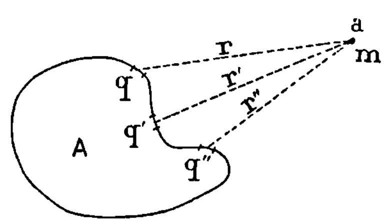


Fig. 28

q, q', q'', ... les quantités d'électricité réparties sur des aires égales à l'unité, à la surface du corps, le potentiel de chacun de ces éléments de surface aura pour valeur :

$$v = \frac{q}{r}, \qquad v' = \frac{q'}{r'}, \qquad v'' = \frac{q''}{r''},$$

r, r', r'' désignant les distances aq, aq', aq''.

Le potentiel total du corps sera, comme nous le savons, égal à la somme des potentiels partiels, c'est-à-dire que l'on aura (59) :

$$V = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} + \frac{q''}{r''}.$$

Les grandeurs relatives des quantités q, q', q'', ne dépendent que de la forme de la surface A, mais nullement de la charge totale ; c'est-à-dire que les rapports $\frac{q'}{q}$, $\frac{q''}{q}$, $\frac{q'''}{q}$ sont absolument indépendants de la valeur absolue de q.

Il résulte de là que si l'on multiplie par un nombre quelconque K, la charge totale Q du corps, chacune des quantités partielles q, q', q'', sera multipliée par K, et alors le potentiel total

$$V = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} + \frac{q''}{r''} + \cdots$$

deviendra :

$$V_1 = K\frac{q}{r} + K\frac{q'}{r'} + K\frac{q''}{r''} + \cdots = K\left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} + \frac{q''}{r''} + \cdots\right) = KV;$$

on aura donc :

$$\frac{V_1}{V} = K = \frac{Q_1}{Q}, \quad \text{d'où :} \quad \frac{Q}{V} = \frac{Q_1}{V_1}.$$

c'est-à-dire que le rapport de la charge totale au potentiel du corps est constant comme il l'était pour la sphère. Ce rapport $\frac{Q}{V}$ s'appelle la *capacité* du corps A.

On peut donc, quelle que soit la forme d'un conducteur ou d'un système de corps conducteurs communiquant entre eux, leur appliquer à tous l'équation

$$Q = CV.$$

Nous verrons plus tard comment on calcule la capacité C, dans certains cas particuliers.

Il est à peine nécessaire de dire que la capacité d'un système de corps dépend de leurs positions relatives, et que si cette position changeait, la capacité serait elle-même modifiée.

§ 7. — MESURE DU POTENTIEL D'UN CORPS AU MOYEN DE LA BALANCE DE COULOMB.

74. — Quoique la mesure du potentiel d'un corps se fasse au moyen d'instruments que nous décrirons dans un chapitre spécial, nous croyons utile de montrer dès à présent comment on pourrait mesurer le potentiel d'un corps au moyen de la balance de torsion (fig. 29).

Soit A un corps quelconque électrisé, dont on veut connaître le potentiel. On le met en communication au moyen d'un fil conducteur OC avec le fil vertical de suspension (qui se projette en O) de la balance de torsion, au bout duquel est attaché le levier *mop*, portant d'un côté la sphère métallique creuse *m*, de rayon *r* et au côté opposé, un contre-poids p destiné à ramener le centre de gravité de pm sur le fil de suspension. Soit m_1 une seconde sphère métallique creuse de rayon r_1, communiquant avec une sphère B de grande dimension chargée à un potentiel connu V_1. Désignons par d la distance mm_1,

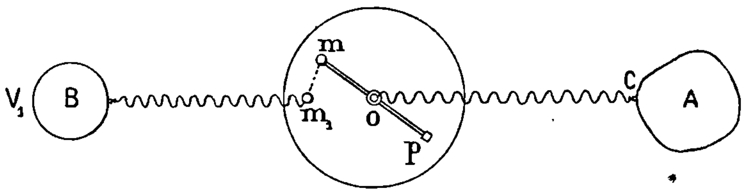


Fig. 29

que nous supposerons perpendiculaire à la direction om. En tendant plus ou moins le fil de suspension qui se projette horizontalement en O, on peut toujours équilibrer l'effort, que nous supposerons répulsif, développé entre les petites sphères m et m_1, de manière à ramener toujours dans la même position le levier pm; et la valeur de la force répulsive f, se déduit immédiatement de l'angle de torsion du fil de suspension.

Cet effort f a pour valeur, comme nous le savons :

$$f = \frac{qq_1}{d^2} ;$$

mais le potentiel V du corps A, est le même que celui de la sphère m puisque tout cet ensemble est conducteur (62). Or le potentiel de la sphère m est égal à $\frac{q}{r}$. De même le potentiel de m_1 qui communique avec la sphère B est égal à V_1 ; mais m étant aussi une sphère, on a :

$$V_1 = \frac{q_1}{r_1}.$$

On a donc en remplaçant q et q_1 par leurs valeurs en fonction des potentiels,

$$f = \frac{rV \times r_1V_1}{d^2}$$

et par conséquent : $$V = \frac{fd^2}{rr_1V_1}.$$

On voit donc que théoriquement, au moins, la balance de Coulomb permet de mesurer le potentiel d'un corps au moyen de celui d'un autre corps supposé connu ; et que la force f sera proportionnelle au produit VV_1 ; de sorte qu'il est possible d'obtenir un effort aussi grand que l'on veut en prenant V_1 suffisamment grand.

Cette méthode, dans laquelle on se sert d'un potentiel connu d'avance pour en mesurer un autre, s'appelle *méthode hétérostatique.*

Mais si l'on ne disposait pas d'un potentiel déjà connu, on résoudrait la question de la façon suivante : On supprimerait la sphère B et on joindrait la petite sphère m_1 au corps A, ou ce qui revient au même, au point o, par un conducteur. La petite sphère m_1, prendrait alors le potentiel V et la valeur de f deviendrait :

$$f = \frac{rr_1V^2}{d^2},$$

d'où :

$$V = \sqrt{\frac{d^2f}{rr_1}} = d\sqrt{\frac{f}{rr_1}}.$$

Cette méthode s'appelle *méthode idiostatique.*

75. — La balance de Coulomb n'est pas employée en pratique, parce que l'on possède des instruments plus sensibles et plus commodes, appelés *électromètres* ou *voltmètres électrostatiques* ; mais les principes théoriques sur lesquels ils sont basés, sont identiques à ceux que nous venons d'appliquer ; et c'est pourquoi nous avons cru devoir montrer comment la balance de Coulomb pouvait servir à la mesure des potentiels.

Ces instruments seront décrits plus tard.

La balance de Coulomb permettrait encore, en mettant à profit les équations du numéro 73 de calculer la charge totale du corps A.

Supposons en effet qu'on ait d'abord mesuré son potentiel par la méthode idiostatique ; la quantité d'électricité qu'il contient pourrait être considérée comme n'étant pas altérée par sa mise en communication avec la sphère m_1 à cause de son faible rayon. Appelons V la valeur du potentiel ainsi déterminé.

Mettons maintenant la sphère m_1 en communication avec la sphère B de rayon R_1, employée dans la méthode hétérostatique. Le potentiel des trois corps A, B, m_1 deviendra le même, puisqu'ils communiquent par un conducteur. De sorte que la force répulsive f_1 exercée entre m et m_1, sera donnée par l'équation :

$$f_1 = \frac{rr_1 V_1^2}{d^2},$$

$$V_1 = d\sqrt{\frac{f_1}{rr_1}}.$$

Nous connaissons donc le potentiel V du corps A lorsqu'il possédait sa charge entière Q, et son potentiel V_1 lorsqu'il a cédé une partie de sa charge à la sphère B ; cela suffit pour trouver sa charge primitive Q.

En effet, appelons Q' sa charge après qu'il a été mis en communication avec B ; d'après le numéro 73 on a :

(1) $$\frac{Q}{Q'} = \frac{V}{V_1},$$

attendu qu'il y a proportionnalité entre les charges et les potentiels d'un même corps. D'autre part, la différence entre sa charge primitive Q et la charge Q', est en vertu du principe de la conservation de l'électricité, égale à la charge Q_1 prise par le corps B ; mais le corps B étant une sphère de rayon R_1, on a la relation

$$Q_1 = R_1 V_1;$$

donc (2) $$Q - Q' = R_1 V_1.$$

De la comparaison des équations (1) et (2), on tire :

$$Q = \frac{VV_1}{V - V_1} \times R_1,$$

équation qui résout le problème.

Par conséquent, la capacité du corps A, qui, d'après la définition donnée au paragraphe précédent est égale à $\frac{Q}{V}$, a pour valeur :

$$\frac{Q}{V} = \frac{V_1}{V - V_1} \times R_1.$$

Nous savons donc dès à présent mesurer, au moins théoriquement, la quantité d'électricité, le potentiel et la capacité d'un corps conducteur.

76. — Il est évident que la précision des mesures faites avec la balance de Coulomb, comme d'ailleurs avec tout appareil dans lequel on applique les propriétés mécaniques de l'électricité, croît avec la grandeur des efforts mis en jeu. Il est donc intéressant de chercher si la balance de Coulomb permet d'accroître autant qu'on le veut les efforts produits par un potentiel donné.

Nous allons voir qu'il n'en est rien, et que l'effort produit par l'attraction ou la répulsion de deux sphères, que, pour plus de simplicité, nous supposerons identiques, ne dépend pas des dimensions de ces sphères lorsque la distance des centres est dans un rapport constant avec le rayon.

En effet, l'équation

$$f = \frac{rV \times r_1 V_1}{d^2}$$

devient en supposant $V = V_1, \quad r = r_1$

$$f = \frac{r^2 V^2}{d^2}.$$

D'où il résulte, en supposant le rapport $\frac{r}{d}$ invariable, condition qu'on doit remplir autant que possible, que f est indépendant des dimensions absolues de r. D'ailleurs, le rapport $\frac{r}{d}$, ne peut jamais quoi qu'on fasse, prendre une valeur supérieure à $\frac{1}{2}$ pour laquelle les sphères se toucheraient. Or, non seulement elles ne doivent pas se toucher, mais encore elles doivent être à une distance assez grande l'une de l'autre pour que les répulsions et les attractions mutuelles dues à leur état électrique, ne modifient pas la répartition de la charge qui est expressément supposée uniformément répartie à leur surface, parce que, sans cela, l'équation qui donne f ne serait plus applicable.

CHAPITRE TROISIÈME

INDUCTION ÉLECTROSTATIQUE

§ 1. — GÉNÉRALITÉS. — DÉFINITIONS.

77. — Soit A un corps électrisé chargé d'une certaine quantité d'électricité *positive* (fig. 30) et B un corps conducteur isolé, situé d'abord à une grande distance du corps A et approché ensuite graduellement de ce dernier. On constate que, à mesure que la distance

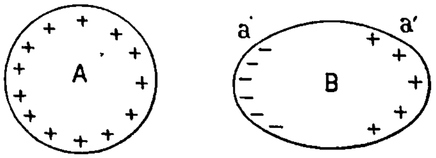


Fig. 30

diminue, l'avant *a* du corps B se charge d'une quantité d'électricité *négative* de plus en plus considérable, tandis que l'arrière *a'* se charge d'une quantité égale d'électricité positive ainsi que l'exige le principe de l'indestructibilité de l'électricité. Si le corps B était arrêté à une certaine distance de A, on met l'un quelconque de ses points en communication avec le sol au moyen d'un fil métallique, l'électricité positive disparaît et il reste chargé d'électricité négative, tandis que la charge de A reste invariable. On constate en outre que la charge négative développée en *a* augmente lorsque la distance des deux corps diminue.

Telle est l'expérience fondamentale qui démontre l'action exercée à distance par un corps électrisé sur tous les corps environnants. Elle est parfaitement conforme aux conclusions auxquelles on serait conduit par le mode de représentation figurative qui nous a servi jusqu'à présent à imiter les phénomènes électriques au moyen de petites sphères mobiles chargées de l'unité de quantité et qui sont douées les unes de propriétés attractives, les autres de propriétés répulsives ; ces deux sortes de sphères étant en nombre égal dans un corps neutre.

78. — Si le corps B (fig. 31) *enveloppe complètement* A (ce qui exige pour charger A l'emploi d'un fil conducteur C qui traverse sans la toucher la paroi de B), on trouve que la quantité d'électricité négative répartie sur B, après que l'on a laissé écouler l'électricité positive dans le sol, est numériquement égale à la charge de A, quelle que soit la forme et les dimensions de B. Pour le prouver, il

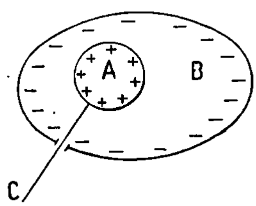


Fig. 31

suffit, après avoir supprimé la source qui alimente A et rompu la communication de B avec le sol, de réunir métalliquement A à B par le fil C devenu libre. Une décharge a lieu, toute l'électricité de A passe sur B ainsi que nous l'avons déjà dit (51) et on trouve alors que B ne donne plus trace d'électrisation ce qui exige l'égalité numérique des deux charges de signes contraires de A et de B.

Si au lieu d'affecter la forme sphérique, le corps enveloppé A (fig. 32) a la forme d'un plan complètement entouré d'une sorte de boîte plate B qui représente le corps enveloppant, les résultats sont exactement les mêmes.

Enfin, si l'on réduit les deux corps à deux plans métalliques (fig. 33) d'une très faible épaisseur situés à une distance mutuelle très petite par rapport à leurs dimensions transversales, les résultats sont encore les mêmes.

Or, comme nous allons le prouver, la charge électrique que ces

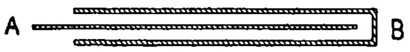


Fig. 32

Fig. 33

dispositions permettent de donner à A pour un potentiel déterminé de ce corps, peut être calculée très facilement au moyen des principes que nous avons déjà établis.

79. — Nous étudierons d'abord le cas de deux sphères concentriques. Soit OA (fig. 34) la sphère intérieure que l'on met en communication avec une source d'électricité au potentiel V_0, au moyen d'un conducteur traversant la sphère extérieure B sans la toucher. Cette seconde sphère est reliée au sol qui constitue un réservoir indéfini au potentiel zéro.

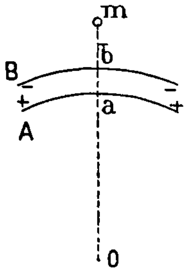


Fig. 34

Désignons les rayons Oa et Ob par a et b. La masse-unité m, est soumise de la part des deux sphères A et B à des actions de signes contraires puisque ces sphères sont chargées en quantités égales : la première d'électricité positive, la seconde d'électricité négative. En supposant que m soit chargée de l'unité de quantité positive, la force répulsive f_a à laquelle elle sera soumise de la part de la sphère intérieure, aura pour valeur

$$f_a = +\frac{q}{d^2},$$

q désignant la charge de A et d la distance Om.

De même la force *attractive* développée sur m par B aura pour expression

$$f_b = -\frac{q}{d^2}.$$

En les ajoutant, on trouve que la résultante est nulle. Ainsi l'action mécanique de cet ensemble sur un point extérieur électrisé est constamment nulle.

Mais il n'en est plus de même lorsque la masse-unité m pénètre dans l'intervalle ab en glissant le long du conducteur qui traverse la paroi de B sans la toucher et relie A à la source d'électricité de laquelle sort m.

En effet, lorsque m après avoir traversé l'épaisseur extrêmement petite de la couche électrisée qui recouvre B, pénètre à l'intérieur de B, l'action mécanique de la sphère B sur m devient nulle en vertu d'un théorème que nous avons souvent invoqué, tandis que la force répulsive émanée de A est toujours représentée par la même expression

$$f_a = \frac{q}{x^2}.$$

La distance ab étant très petite par rapport à a, on peut sans erreur sensible remplacer x qui est nécessairement compris entre les deux valeurs très voisines b et a, par a et écrire :

$$f_a = \frac{q}{a^2}.$$

Cette force qui varie très peu pendant le petit trajet ab, produit sur m un travail résistant dont l'expression diffère également très peu de

$$\frac{q(a-b)}{a^2} = \frac{q\delta}{a^2},$$

δ désignant la distance ab. C'est l'expression de la quantité de travail qu'il faut dépenser pour augmenter d'une unité la charge q déjà existante sur la sphère A. Cette augmentation d'une unité, sera d'ailleurs accompagnée d'une augmentation égale d'électricité négative empruntée au sol et amenée sur la sphère B, mais qui ne produira aucun travail parce qu'elle restera toujours extérieure au système des deux sphères.

L'expression $\frac{q\delta}{a^2}$ peut s'écrire $\frac{\delta}{a} \cdot \frac{q}{a}$.

Mais nous avons vu que le travail nécessaire pour amener la masse-unité de l'infini, à la surface d'une sphère de rayon a déjà chargée de q unités (ou en d'autres termes le potentiel de la sphère de rayon a), a pour valeur $\frac{q}{a}$. Donc ce travail se trouve réduit par la présence de la sphère extérieure B, dans le rapport de δ à a c'est-à-dire autant qu'on le veut puisqu'on peut prendre δ, c'est-à-dire l'intervalle ab, très petit et a très grand.

Le travail total nécessaire pour charger une sphère de rayon r, d'une quantité d'électricité q, a pour valeur $\frac{q^2}{2r}$ (66); chaque unité ajoutée à la charge déjà existante, exigeant un travail proportionnel à cette charge et égal à $\frac{q}{r}$. Il est évident que si chaque unité exigeait un travail n fois moindre, la charge totale exigerait elle-même un travail n fois moindre. Or nous venons de démontrer que si la sphère de rayon a est entourée d'une autre sphère de rayon $a+\delta$, le travail par unité de charge ajoutée à la charge primitive, est égal à :

$$\frac{q}{a} \cdot \frac{\delta}{a}$$

où le nombre n est représenté par $\frac{\delta}{a}$. Donc la charge totale, au lieu d'exiger un travail total $\frac{q^2}{2a}$, absorbera un travail ayant pour valeur

$$\frac{\delta}{a} \cdot \frac{q^2}{2a}.$$

Ainsi donc cet ensemble de deux sphères concentriques jouit de la propriété remarquable de diminuer dans le rapport $\frac{\delta}{a}$ le travail nécessaire pour charger de la quantité q la sphère de rayon a. En prenant δ (c'est-à-dire la différence des rayons) très petit, on peut réduire ce travail autant qu'on le veut. On peut donc *condenser* dans un petit espace une quantité d'électricité très grande en dépensant un travail dont on se donne arbitrairement la valeur.

On a, pour ce motif, donné le nom de *Condensateur* à l'appareil que nous venons de décrire.

80. — La valeur du travail total, nécessaire pour charger la

sphère A, telle qu'elle vient d'être établie, n'est qu'approximative puisque nous avons supposé la force f_a constante dans l'intervalle *ab*. Si on veut la valeur exacte, il faut faire un calcul absolument semblable à celui qui fait connaître, dans le cas d'une sphère, le travail accompli par la masse-unité lorsque sa distance au centre de la sphère passe de la valeur b à la valeur a, puisque, pour une distance plus grande que b, la masse-unité n'est plus sollicitée par aucune force.

Ce travail a pour valeur (57)

$$\frac{q}{a} - \frac{q}{b}$$

et si l'accroissement de la charge, au lieu d'être égal à l'unité était égal à une quantité infiniment petite, dq, le travail infiniment petit dW nécessité par cet accroissement de charge serait donné par l'équation :

$$d\mathrm{W} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) q dq$$

d'où on tire, en intégrant

$$\mathrm{W} = \frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{a} - \frac{q^2}{b}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{b-a}{ab}\,q^2$$

ou en posant $b = a + \delta$

$$\mathrm{W} = \frac{\delta}{a+\delta} \cdot \frac{q^2}{2a},$$

valeur qui ne diffère de la précédente que par la substitution du facteur $\frac{\delta}{a+\delta}$ au facteur $\frac{\delta}{a}$.

§ 2. — CAPACITÉ DES CONDENSATEURS.

81. — Nous avons défini dans le chapitre précédent (73) la capacité d'un système de corps conducteurs, par l'équation :

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{V}}.$$

Pour appliquer cette équation à l'ensemble de deux sphères concentriques, rappelons que V est le potentiel absolu de la surface du corps conducteur considéré, c'est-à-dire le travail accompli par la masse-unité lorsqu'elle est amenée de l'infini jusqu'à la surface du conducteur.

Dans une sphère unique, de rayon R, isolée au milieu de l'espace, le potentiel a pour valeur $\frac{Q}{R}$, ou, avec les notations employées dans le paragraphe précédent, $\frac{q}{a}$. Mais si on entoure la sphère d'une autre de rayon b, tout le travail accompli par la masse-unité depuis l'infini jusqu'au moment où elle arrive en b, est supprimé. Or ce travail a pour valeur $\frac{q}{b}$; donc la présence de la sphère extérieure a pour conséquence de réduire V, *considéré comme le potentiel de l'ensemble,* à la valeur $\frac{q}{a} - \frac{q}{b}$. La capacité C a donc pour valeur

$$C = \frac{q}{\frac{q}{a} - \frac{q}{b}} = \frac{ab}{b-a}$$

ou en remplaçant b par $a + \delta$

$$C = \frac{a(a+\delta)}{\delta}$$

qui diffère très peu de $\frac{a^2}{\delta}$; nous adopterons donc

$$C = \frac{a^2}{\delta}.$$

La capacité de la sphère A sans enveloppe, étant égale à a, on voit que l'enveloppe B l'augmente dans le rapport de a à δ.

82. — **Capacité d'un condensateur plan.** — La capacité d'un condensateur sphérique de rayon R, étant représentée par $\frac{R^2}{\delta}$, la quantité totale Q répartie sur la sphère, a pour valeur, en vertu de l'équation $Q = CV$,

$$Q = \frac{R^2V}{\delta}.$$

La quantité répartie sur l'unité de surface est donc égale à

$$\frac{R^2V}{\delta S},$$

S étant la surface de la sphère. Mais on a $S = 4\pi R^2$; donc la charge par unité de surface a pour valeur :

$$Q_1 = \frac{V}{4\pi\delta} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{Q_1}{V} = \frac{1}{4\pi\delta}.$$

Mais $\frac{Q_1}{V}$ est par définition la capacité d'une portion de la surface sphérique, égale à l'unité; en la désignant par C_1, on a

$$C_1 = \frac{1}{4\pi\delta},$$

valeur indépendante du rayon de la sphère. On peut donc prendre ce rayon assez grand pour que la portion de la surface considérée, dont l'aire est égale à 1, diffère infiniment peu d'un plan sans que la formule cesse d'être exacte. On peut donc dire, qu'un condensateur formé de deux plans parallèles dont la distance est δ et dont la surface est 1, a pour capacité :

$$C_1 = \frac{1}{4\pi\delta}.$$

Si la surface, au lieu d'être égale à 1 avait pour valeur S, on aurait évidemment

$$C = \frac{S}{4\pi\delta}.$$

83.— Capacité d'un condensateur formé de deux cylindres concentriques. — On trouve par des calculs que nous ne développerons pas ici, que la capacité d'un condensateur formé de deux cylindres conducteurs concentriques, dont les rayons intérieur et extérieur sont représentés par a et b et dont la longueur commune est l, est donnée par l'équation

$$C = \frac{l}{2 \log_e \frac{b}{a}}$$

dans laquelle $\log_e$ représente le logarithme népérien. Si on veut le remplacer par le logarithme usuel, la formule devient :

$$C = 0{,}217 \frac{l}{\log \frac{b}{a}}.$$

Si on pose

$$b = a + \delta = a\left(1 + \frac{\delta}{a}\right), \qquad \frac{b}{a} = 1 + \frac{\delta}{a},$$

δ étant la distance des deux cylindres concentriques et a le rayon de la surface intérieure, on peut considérer $\frac{\delta}{a}$ comme très petit et alors le logarithme népérien est représenté avec une grande approximation par l'équation

$$\log. \frac{b}{a} = \log \left(1 + \frac{\delta}{a}\right) = \frac{\delta}{a},$$

de sorte que la valeur de C devient

$$C = \frac{l}{\frac{2\delta}{a}} = \frac{al}{2\delta}.$$

On peut arriver immédiatement à cette dernière valeur, en considérant un condensateur cylindrique comme formé au moyen d'un condensateur plan recourbé en cylindre jusqu'à ce que les bords opposés se touchent ; opération qui ne changerait pas la capacité. Or cette capacité, avant l'opération dont nous venons de parler, a pour valeur

$$C = \frac{S}{4\pi\delta}.$$

Mais la surface S reste la même avant et après la transformation du condensateur plan en condensateur cylindrique, et, dans ce dernier cas, elle n'est autre chose que la surface latérale d'un cylindre, soit $2\pi al$; donc

$$C = \frac{2\pi al}{4\pi\delta} = \frac{al}{2\delta},$$

valeur déjà trouvée.

84. — Condensateur formé d'un plan et d'un cylindre de petit diamètre. — On trouve une formule très compliquée et par conséquent d'un usage très incommode. Mais elle se simplifie beaucoup lorsque la distance D de l'axe du cylindre au plan est très grande par rapport au rayon r du cylindre. C'est le cas d'un fil télégraphique parallèle au sol. On a alors :

$$C = \frac{l}{2 \log_e \frac{2D}{r}}$$

ou, en employant les logarithmes usuels,

$$C = \frac{0{,}217\, l}{\log \frac{2D}{r}}.$$

85. — Remarque. — Nous avons désigné par V le potentiel absolu

de l'ensemble des deux surfaces très rapprochées qui forment un condensateur. Mais comme elles sont nécessairement chargées d'électricités de signes contraires, ce potentiel absolu, égal, comme nous le savons, à la somme algébrique des potentiels individuels des deux surfaces, devient au contraire égal à la différence de leurs valeurs numériques absolues. Il résulte de là, que l'on peut considérer dans l'équation générale, $Q = CV$, V comme représentant la différence des potentiels des deux surfaces, ou, comme on dit habituellement des deux armatures.

86. — **Dimensions de C. — Unité pratique adoptée.** — En remplaçant dans l'équation $Q = \frac{C}{V}$, les quantités Q et V par les expressions symboliques que nous avons déjà fait connaître, on trouve

$$C = \frac{1}{L} = L^{-1}.$$

La capacité est donc, dans le système d'unités électro-statiques, représentée par l'inverse d'une longueur.

Quant à l'unité adoptée, elle dérive du système d'unités électro-dynamiques pratiques que nous définirons plus tard. Elle a reçu le nom de *Farad* et elle vaut comme nous le verrons 900 milliards d'unités électro-statiques. Mais dans la pratique ordinaire, pour éviter d'exprimer la capacité des condensateurs (qui est toujours bien inférieure à un Farad) par des nombres trop petits, on a adopté une unité nommée *Micro-Farad* qui est la millionnième partie d'un Farad. Par conséquent, un micro-farad vaut 900.000 unités électro-statiques de capacité ; cette dernière étant celle d'un condensateur dont les armatures ont une différence de potentiel égale à l'unité lorsqu'il est chargé de l'unité de quantité d'électricité.

87. — Exemple numérique. — Nous pouvons maintenant calculer, avec les formules établies plus haut, la capacité d'un condensateur plan ayant un mètre carré de surface et dont les armatures sont séparées par une couche d'air de 1^{cm}.

La capacité d'un condensateur plan a pour valeur :

$$C = \frac{S}{4\pi\delta}.$$

Si nous faisons $S = 1$ mètre carré, $= 10.000$ centimètres carrés; $\delta = 1$ centimètre.

$$C = 796 \text{ unités électro-statiques.}$$

ou
$$C = \frac{796}{900000} = 0{,}000884 \text{ micro-farads.}$$

On voit que pour faire un condensateur plan de 1 micro-farad, dans les conditions énoncées, il faudrait que sa surface fût égale à

$$\frac{1}{0{,}000884} = 1130 \text{ mètres carrés.}$$

Ce chiffre donne une idée de la difficulté que l'on éprouverait à construire un condensateur à lame d'air ayant une capacité de 1 micro-farad.

On pourrait, il est vrai, en diminuant beaucoup l'épaisseur de la lame d'air c'est-à-dire δ, augmenter autant qu'on le voudrait la capacité. Mais on se trouve en présence de difficultés de construction insurmontables; ainsi, par exemple, il serait très difficile de maintenir des lames métalliques de grande surface à une distance l'une de l'autre de 1 centimètre. Il semble que cette difficulté soit très facile à surmonter en intercalant des corps isolants de distance en distance pour maintenir l'écartement des armatures. Mais comme nous le verrons bientôt, la présence d'un corps isolant ou *diélectrique* entre les lames d'un condensateur, en modifie considérablement la capacité qui alors, n'est plus représentée par les formules que nous avons données.

89. — Le condensateur formé de deux sphères concentriques, séparées par une lame d'air, est le seul pour lequel les formules établies soient rigoureusement exactes; les autres formes de condensateurs, tels que condensateur plan, condensateur cylindrique (bouteille de Leyde), ne permettent pas une répartition uniforme de l'électricité dans toute leur étendue. De sorte que dans un condensateur plan de un mètre carré de surface, un petit élément ayant un centimètre carré, et situé au centre de l'armature, condense une quantité d'électricité plus grande qu'un petit élément identique, mais situé près des bords. Cette dissymétrie ne peut avoir lieu quand il s'agit de deux sphères concentriques, à cause de l'identité absolue des actions exercées par la sphère extérieure sur chacun des éléments de surface de la sphère intérieure.

90. — Si donc on voulait construire de toutes pièces, un condensateur dont les dimensions *géométriques* répondissent à une capacité *électrique* donnée, on devrait adopter le système formé de deux sphères concentriques, auquel on a donné, pour cette raison, le nom de condensateur absolu.

On peut cependant construire un condensateur plan satisfaisant à la formule donnée, au moyen de l'artifice suivant dû à William-Thomson.

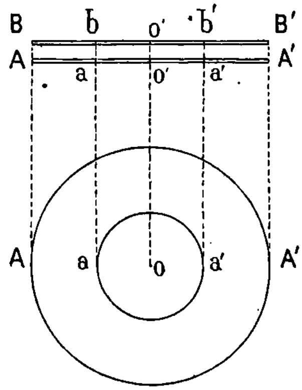


Fig. 35

Soient AA', BB' les deux armatures d'un condensateur plan de forme circulaire (fig. 35). Découpons dans ces armatures deux cercles *aa'*, *bb'* qui ne communiquent pas électriquement avec le plan dans lequel ils ont été découpés (1), mais qui doivent satisfaire à deux conditions :

1° Etre situés exactement dans les plans auxquels ils appartenaient.

2° Que la couche d'air qui sépare la portion annulaire AA' de la portion circulaire *aa'* soit aussi faible que possible sans être nulle. Il est évident que les points situés dans les cercles *aa'*, *bb'* sont soumis à des actions approchant beaucoup plus de l'uniformité que les points situés dans les régions annulaires. On peut donc considérer l'ensemble des deux armatures *aa' bb'* comme constituant un condensateur s'approchant beaucoup plus des conditions exigées par la formule que le condensateur primitif AA', BB'.

Cependant, cela ne serait absolument rigoureux que si les cercles

(1) Dans la pratique, on se contente de faire cette opération sur une seule des deux armatures ; l'autre conserve sa continuité métallique dans toute son étendue.

extérieurs AA′, BB′ étaient très grands par rapport aux cercles intérieurs.

Il va de soi que pour charger ce condensateur d'électricité, il faut commencer par mettre la zône annulaire et la zône centrale d'une même armature, en communication avec une source d'électricité.

§ 3. — DIFFÉRENTS CONDENSATEURS. — POUVOIR INDUCTEUR SPÉCIFIQUE.

91. — Condensateur absolu de William-Thomson. — Cet appareil (fig. 36) est basé sur le même principe que la disposition que nous venons de décrire. Il se compose d'une boîte cylindrique métallique BB′C′C dont les parois ont une faible épaisseur et dont la face supérieure BB′ parfaitement plane se compose de deux parties circulaires concentriques dont l'une est un disque *bb′* supporté par deux petites tiges isolantes *tt′*, l'autre une couronne annulaire appelée *anneau de garde* et séparée de *bb′* par un très petit intervalle.

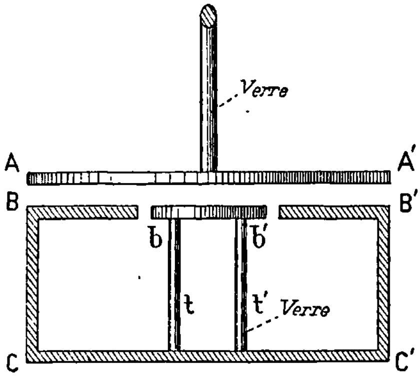


Fig. 36

Le disque AA′ rigoureusement parallèle à la face BB′ et de même diamètre qu'elle peut être élevé ou abaissé au moyen d'une vis micrométrique qui permet de connaître exactement la distance de AA′ et de BB′.

Pour se servir de l'instrument, on commence par mettre AA′ en communication avec la terre tandis que le disque *bb′* ainsi que la boîte métallique BB'C'C sont mis en communication avec une source d'électricité de potentiel constant V. La charge électrique se répartit sur la surface extérieure de la boîte et du disque ; ensuite on *supprime* la communication avec la source. La partie supérieure de la boîte Bbb'B' forme avec la plaque AA' un condensateur plan dans lequel la partie centrale *bb'* de l'armature inférieure peut être considérée comme chargée d'une quantité d'électricité uniformément répartie et qui a pour expression cV, c étant la capacité de *bb'*. Or cette capacité serait d'après la formule établie plus haut, égale à $\frac{s}{4\pi\delta}$, δ désignant la distance des deux armatures AA'BB'. Mais on démontre, par des calculs trop compliqués pour être reproduits ici, qu'on doit prendre pour s une valeur égale à la moyenne arithmétique de la surface *bb'* et de la surface de l'ouverture circulaire pratiquée dans BB'.

La quantité d'électricité uniformément répartie sur *bb'* a donc pour valeur :

$$q = \frac{s}{4\pi\delta} V.$$

Ceci posé on met en communication avec la terre la boîte extérieure BCC'B' de sorte que tout l'appareil excepté le disque *bb'* communique avec la terre et forme un condensateur dans lequel une des armatures *bb'* est entièrement enveloppée par l'autre armature AA'B'C'CBA, condition très favorable. Cette opération ne peut pas modifier la quantité d'électricité qui existe sur *bb'*, mais elle en modifie le potentiel : de sorte que l'on a, en appelant V' la nouvelle valeur du potentiel de *bb'*

$$q = c'V',$$

c' désignant la capacité du condensateur lorsque toutes ses parties, *bb'* excepté, communiquent avec la terre. On a donc

$$c'V' = q = \frac{s}{4\pi\delta} V$$

d'où on tire :

$$c' = \frac{V}{V'} \times \frac{s}{4\pi\delta}.$$

La détermination de c' exige donc que l'on connaisse le rapport des deux potentiels V et V' qui est obtenu au moyen d'électromètres que nous décrirons plus tard. Cet instrument devrait donc s'appeler plutôt *condensateur étalon* que *condensateur absolu* puisque pour connaître sa capacité, il faut procéder à des mesures autres que des mesures géométriques, inconvénient que ne présente pas le condensateur sphérique.

Remarquons en outre que lorsqu'on veut mesurer le potentiel V' de *bb'* après avoir mis tout le reste en communication avec la terre, cette mesure ne peut se faire qu'en mettant *bb'* en communication avec un électromètre qui ne peut pas avoir une capacité nulle ni même négligeable devant celle de *bb'*. La valeur trouvée *c'*, n'est donc pas rigoureusement égale à celle du condensateur étalon.

92. — **Condensateur absolu de M. Abraham.** — Cet appareil a été construit avec un soin extrême pour servir à déterminer le rapport de l'unité de quantité électrique, telle qu'elle est définie dans le système électro-dynamique, à l'unité de quantité électro-statique définie d'après la loi de Coulomb (46). C'est un condensateur à lame d'air dont la capacité, d'environ 500 unités ou $\frac{1}{1800}$ de micro-farad, peut être calculée avec une précision atteignant le dix-millième.

Il est composé de deux plateaux en glace de Saint-Gobain de 23 millimètres d'épaisseur et de 350 millimètres de diamètre entièrement argentés sur leurs deux faces et sur leur pourtour, de sorte que le verre sert uniquement de support rigide à la couche d'argent. Les faces utiles ont été dressées par les procédés employés pour faire des verres d'optique de manière à en faire des plans où un sphéromètre n'a pu déceler aucun défaut atteignant un micron (un millième de millimètre). Celui des deux plateaux qui joue le rôle de l'armature munie d'un anneau de garde, porte dans l'argenture un sillon circulaire tracé au burin d'acier, de façon à enlever l'argenture sur une largeur (dans le sens du rayon) de $\frac{1}{10}$ de millimètre et sur une épaisseur juste suffisante pour mettre le verre à nu sans l'entamer.

La circonférence ainsi obtenue a environ 22 centimètres de diamètre, de sorte que la largeur de la zône de garde est à peu près de 65 millimètres.

Les deux plateaux sont situés à une distance invariable et séparés l'un de l'autre par trois rondelles de quartz travaillées ensemble, de manière à avoir la même épaisseur ; elles sont placées sous l'anneau de garde, afin de ne pas influencer la répartition de la charge de la région centrale, isolée de l'anneau de garde, qui joue seule un rôle dans le calcul de la capacité et dont le diamètre exact mesuré avec une machine à diviser a été trouvé égal à 218m/m,19.

La mesure de l'écartement des faces argentées, séparées par les rondelles de quartz, est faite avec une précision extrême au moyen d'un procédé optique dans lequel on utilise les propriétés réfléchissantes de ces deux faces qui constituent des miroirs plans parfaits. Nous renverrons les personnes désireuses de le connaître à la note publiée par M. Abraham dans les Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences pour 1892. L'erreur possible commise dans la mesure de l'épaisseur de la lame d'air ne paraît pas devoir dépasser un micron.

93. — **Condensateurs dans lesquels la lame d'air est remplacée par un corps solide ou liquide. — Pouvoir inducteur spécifique.** — Si, dans un condensateur plan à lame d'air, on vient à glisser entre les deux armatures une lame d'un corps isolant tel que du verre ou du caoutchouc durci, on remarque que sa capacité en est considérablement augmentée, et le rapport de la nouvelle capacité à l'ancienne s'appelle le *pouvoir inducteur spécifique* de la substance interposée. Ce pouvoir inducteur spécifique, est, pour un même corps considéré, variable avec la température, avec la pression et avec la durée de l'électrisation. L'influence de ces différents éléments sur le pouvoir inducteur spécifique est très compliquée et ne paraît pas obéir à des lois définies.

Nous avons déjà mentionné l'existence du pouvoir inducteur spécifique (50) en parlant de la loi de Coulomb, dont l'expression

$$F = \frac{qq'}{d^2}$$

ne s'applique que dans le cas où les corps électrisés sont plongés dans l'air ou dans le vide ; s'ils étaient entourés d'un liquide isolant tel que l'essence de térébenthine, le pétrole, l'huile, etc., la force F n'aurait plus la valeur donnée par le second membre, et la formule deviendrait

$$F = k\frac{qq'}{d^2},$$

k étant précisément l'inverse de ce qu'on appelle le pouvoir inducteur spécifique, lorsqu'il s'agit des condensateurs, comme nous allons le démontrer.

94. — Si on se reporte, en effet, au mode de calcul que nous avons employé pour évaluer le travail développé par une masse-unité amenée de l'infini jusqu'à la surface de la sphère intérieure de rayon a, d'un condensateur sphérique, ou ce qu'on pourrait appeler le potententiel *apparent* de la sphère intérieure, on verra qu'il était égal à $\frac{q}{a}\cdot\frac{\delta}{a}$ c'est-à-dire au potentiel absolu $\frac{q}{a}$ multiplié par $\frac{\delta}{a}$.

Or ce potentiel apparent a pour valeur le travail qu'il faut dépenser pour faire parcourir à la masse-unité l'intervalle existant entre les deux sphères A et B, travail évidemment proportionnel au facteur k de la formule de Coulomb

$$F = k\frac{qq'}{d^2}$$

lorsqu'on suppose que les corps électrisés sont plongés dans un autre milieu que l'air. Si au lieu d'air, l'intervalle compris entre les deux sphères était rempli d'un liquide isolant tel que la térébenthine, l'effort répulsif exercé par la sphère intérieure A étant multiplié par k, le travail appliqué à la masse-unité serait aussi multiplié par k et deviendrait

$$k\cdot\frac{\delta}{a}\cdot\frac{q}{a}.$$

Il en serait de même de l'énergie totale qu'il faudrait dépenser pour charger le condensateur et qui serait égale à

$$k\cdot\frac{\delta}{a}\cdot\frac{q^2}{2a}$$

au lieu de

$$\frac{\delta}{a}\cdot\frac{q^2}{2a}$$

valeur trouvée lorsque l'intervalle ab est rempli d'air.

95. — Ces résultats s'appliquent évidemment à un condensateur de forme quelconque et se résument en ceci : c'est que si les forces apparentes attractives ou répulsives de deux corps électrisés plongés dans un milieu autre que l'air, sont k fois aussi grandes que dans l'air, un condensateur dont les armatures sont séparées par le milieu, exigera, *à charge égale*, la dépense d'une quantité de travail *k fois aussi grande* que si les armatures étaient séparées par de l'air.

Or en appelant c la capacité d'un condensateur à lame d'air, le travail nécessaire pour le charger sera (108)

$$W = \frac{q^2}{2c}$$

tandis que d'après ce que nous venons de dire ce même travail deviendra, en remplaçant l'air par un liquide ou un solide isolant,

$$W' = k\frac{q^2}{2c} = \frac{q^2}{2\left(\frac{c}{k}\right)} = \frac{q^2}{2c'}.$$

Nous tirons de là en divisant membre à membre

$$\frac{W'}{W} = k\,\frac{W'}{W} = \frac{c}{c'}$$

et enfin

$$c' = \frac{c}{k},$$

équation qui montre que la capacité du second condensateur deviendra *k fois moindre* que celle du condensateur à lame d'air.

C'est au coefficient $\frac{1}{k}$ que l'on a donné le nom de *pouvoir inducteur spécifique* du diélectrique qui remplace la lame d'air. Nous le désignerons par k'. Voici un tableau qui donne quelques valeurs de ce coefficient relatives aux solides, aux liquides et aux gaz. Ces derniers sont les seuls corps pour lesquels le pouvoir inducteur spécifique soit un nombre identique à lui-même dans des circonstances identiques. Les solides donnent des valeurs variables avec la pression, la température, la durée de l'électrisation, etc.

DIÉLECTRIQUE	POUVOIR INDUCTEUR	DURÉE de L'ÉLECTRISATION en secondes	NOM DES OBSERVATEURS
Paraffine	8,12	45	Boltzmann.
Id.	2,32	$\frac{1}{360}$	id.
Id.	1,99	$\frac{1}{12000}$	Gordon.
Verre :			
Flint double très dense :			
1° après la fonte	3,16	$\frac{1}{12000}$	Gordon.
2° 18 mois après	3,84	id	id.
Flint léger :			
1° après la fonte	3,01	id.	id.
2° 18 mois après	3,44	id.	id.
Soufre	2,58	$\frac{1}{12000}$	id.
Id.	3,90	$\frac{1}{360}$	Boltzmann.
Gomme laque	2,74	$\frac{1}{12000}$	Gordon.
Chatterton compound	2,55	id.	id.
Caoutchouc vulcanisé gris	2,50	id.	id.
» noir	2,22	id.	id.
Gutta-percha	2,46	id.	id.
Ebonite	2,28	id.	id.
Mica blanc	8	»	Bouty.
Sulfure de carbone	2,61	$\frac{1}{50}$	Palaz.
Id.	1,81	$\frac{1}{12000}$	Gordon.
Pétrole rectifié	2,19	$\frac{1}{50}$	Palaz.
Essence de térébenthine	2,15	$\frac{1}{25}$	Silow.
Air	1,00000	»	»
Vide	0,99941	»	Boltzmann.
Glace (Eau à l'état solide)	78		Bouty.

M. le professeur Robert Weber a publié dans les *Archives des Sciences physiques et naturelles* (juin 1893) un travail intéressant sur la valeur du pouvoir inducteur spécifique mesuré au moyen d'un procédé dont il est l'inventeur. Voici les résultats qu'il a trouvés :

Air sec à 0°	1,000	Eau (moyenne)	40,25
Air sec à 15°	0,983	Acide sulfurique	41,6
Air humide à 15°	0,997	Alcool méthylique	53,8
Sulfure de carbone	1,949	Alcool éthylique	55,2
Essence de térébenthine	1,797	Alcool amylique	25,8
Pétrole	1,658	Acide sulfurique 62,5 / Eau 37,5	47,9
Ether sulfurique	2,898	Alcool éthylique 50 / Eau 50	111,2

On voit que l'eau a un pouvoir inducteur considérable qui est encore dépassé par celui d'un mélange d'eau et d'acide sulfurique composé de 0,625 d'acide sulfurique et de 0,375 d'eau. Mais le mélange dont la capacité inductive l'emporte de beaucoup sur tous les autres est celui qui est composé de 50 parties d'alcool éthylique et de 50 parties d'eau, on obtient alors pour k' la valeur énorme de 111,2.

96. — On voit combien la durée de l'électrisation a d'influence sur le pouvoir inducteur spécifique ; ainsi le pouvoir inducteur de la paraffine qui est égal à 1,99 lorsque la durée de l'électrisation est de $\frac{1}{12\,000}$ de seconde, monte à 8,12 quand cette durée atteint 15 secondes. Il est donc absolument nécessaire, lorsque l'on donne un nombre représentant le pouvoir inducteur d'une substance, de faire connaître la durée de l'électrisation. C'est pour ce motif que Gordon, que l'on peut citer comme un de ceux dont les expériences ont été faites avec le plus de précautions de toutes natures, a toujours eu soin de donner à l'électrisation une durée invariable

$$\left(\frac{1}{12\,000} \text{ de seconde}\right).$$

Il a d'ailleurs mis ainsi hors de doute un fait qui avait été contesté par des savants distingués, à savoir que les diélectriques ont bien réellement un pouvoir inducteur spécifique plus grand que l'unité tandis que les savants auxquels nous faisons allusion, prétendaient que plus la durée de l'électrisation était courte, plus le pouvoir inducteur de tous les corps tendait vers la même limite, l'unité.

97. — Charge résiduelle. — Ces remarques sont indispensables pour bien faire comprendre qu'il n'est pas possible de faire des condensateurs étalons exacts en employant comme isolants des corps choisis simplement parmi ceux dont le pouvoir inducteur est le plus élevé. On doit se laisser guider surtout par l'invariabilité du pouvoir spécifique et par l'absence d'un phénomène dont nous allons parler, qui vient encore simplifier l'emploi des condensateurs comme appareils de mesure. Ce phénomène est ce qu'on appelle la *charge résiduelle*. Il consiste en ceci : si après avoir chargé un condensateur, on le décharge en réunissant ses deux armatures par un corps bon conducteur, et qu'ensuite on rompe la communication, pour la rétablir un certain temps après, cette communication donne lieu à une nouvelle décharge, plus faible que la première mais encore très notable. En recommençant l'expérience, on peut obtenir une troisième décharge plus faible que la seconde et ainsi de suite.

On voit donc que, en tenant compte de tous ces phénomènes, l'expression capacité, perd toute espèce de signification à moins qu'on ne définisse minutieusement sans en omettre une seule, toutes les conditions dans lesquelles le condensateur a été chargé et déchargé.

Il n'y a donc que l'emploi des condensateurs à lame d'air qui présente une sécurité absolue et au point de vue de l'invariabilité de la capacité, et en raison de l'absence de charge résiduelle ; malheureusement leur capacité est très petite.

Nous pensons que parmi tous les corps qui figurent dans le tableau ci-dessus, le mica est le seul dont les propriétés se rapprochent le plus de celles de l'air tout en présentant un coefficient d'induction beaucoup plus élevé ; on pourra consulter utilement à ce sujet, les recherches publiées par M. Bouty sur les condensateurs à lame de mica.

§ 4. — EMPLOIS DES CONDENSATEURS.

98. — Les condensateurs sont employés pour deux usages différents :

1° Comme appareils de mesure dans un certain nombre de recherches ;

2° Comme instruments servant à emmagasiner l'énergie.

On compend que le mode de construction ne soit pas le même dans les deux cas ; parce que, s'ils doivent servir comme appareils de mesure, tout doit être sacrifié à la précision des résultats qu'ils servent à obtenir. Si au contraire on les emploie pour conserver une certaine quantité d'énergie qu'ils doivent restituer quand on en a besoin, il importe peu que leur capacité soit rigoureusement déterminée, mais il est très utile qu'elle soit la plus grande possible sous un volume donné et qu'on puisse, comme nous allons le voir bientôt, employer des potentiels très élevés, sans causer de détériorations.

99. — Les condensateurs-étalons à lame d'air ne peuvent, à cause de leur faible capacité, être employés que lorsqu'on dispose de potentiels élevés, mais cependant, si la distance des deux armatures était réduite à 1 millimètre il ne faudrait pas les employer pour des potentiels supérieurs à 1000 volts à cause des étincelles qui jailliraient alors entre les deux armatures.

Ils sont les seuls qui permettent de réaliser en se servant uniquement de données géométriques, une capacité représentée par un nombre fixé à l'avance et enfin ils se prêtent avec une grande facilité à la construction d'une capacité de grandeur variable par degrés aussi petits qu'on veut. Mais les condensateurs à diélectrique liquide présentent également cette propriété en même temps qu'ils opposent une résistance beaucoup plus grande au passage des étincelles.

La figure ci-contre montre comment on peut réaliser un condensateur à lame gazeuse ou liquide à capacité variable.

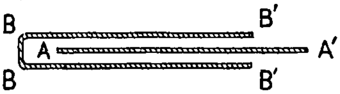


Fig. 37

L'armature plane AA' (fig. 37) est complètement enveloppée par la seconde armature BB' de façon à constituer un condensateur conforme aux définitions données au commencement de ce paragraphe ;

sa capacité est évidemment double de celle d'un condensateur plan réduit à deux lames identiques et a pour valeur

$$2\,\frac{s}{4\pi\delta}.$$

Mais la surface *active* du plan AA′ est un rectangle qui a pour base l, la longueur de AA′ comptée perpendiculairement au plan de la figure et pour hauteur la distance AB′ que nous supposerons variable et que nous désignerons par x.

On a donc

$$C = \frac{2lx}{4\pi\delta},$$

quantité proportionnelle à x. Si on se reporte à ce que nous avons dit en parlant du condensateur absolu formé de deux plans, on reconnaîtra facilement que cette équation n'est qu'approximative et que C n'est pas exactement proportionnel à x ; mais cela n'a aucune importance, cet appareil étant gradué par comparaison avec des condensateurs étalonnés qui font connaître sa capacité pour différentes valeurs de x et les valeurs intermédiaires étant calculées par interpolation.

L'emploi d'un liquide, dans lequel baigne la lame AA′, aurait pour avantage d'augmenter dans une forte proportion la capacité de l'instrument, comme on peut s'en assurer en consultant le tableau des pouvoirs inducteurs des différentes substances.

On peut aussi obtenir un condensateur à capacité variable en augmentant ou en diminuant la distance δ des deux armatures plongées dans un gaz ou dans un liquide. Mais alors les petites valeurs de δ correspondant à de grandes valeurs de C, l'instrument devient d'un maniement difficile lorsque sa capacité est notable, parce que des variations de δ très petites en valeur absolue, entraînent des variations très notables de C dans l'expression de laquelle δ figure au dénominateur.

100. — Voici une liste des applications dans lesquelles on emploie les condensateurs pour les expériences de mesure, elle montre bien l'importance du rôle joué en électricité par ces appareils.

(*a*) Mesure d'une différence de potentiel indépendante du temps.

(*b*) Mesure de la valeur instantanée d'une différence de potentiel variable, même quand cette variation est très rapide.

(*c*) Fractionnement d'une différence de potentiel dans un rapport donné.

(*d*) Maintien d'une différence de potentiel entre deux corps à une valeur constante malgré des déperditions, le condensateur faisant fonction de réservoir.

(*e*) Mesure des coefficients de self-induction.

(*f*) Mesure des résistances très grandes.

(*g*) Changement des valeurs des deux facteurs V et Q d'une quantité d'énergie constante en deux autres valeurs ayant le même produit.

Dans les applications industrielles nous citerons :

(*a*) Application aux câbles sous-marins pour atténuer les effets nuisibles de la self-induction.

(*b*) Application aux machines dynamo à courants alternatifs dans le même but.

(*c*) Transformation des deux facteurs d'une certaine quantité de travail électrique en deux autres facteurs de même produit.

(*d*) Transmission de la force au moyen de condensateurs de capacité variable.

Plusieurs de ces applications ne pourront être traitées que plus tard, en même temps que le sujet auquel elles se rattachent. Nous nous bornerons quant à présent à étudier les propriétés générales de ce genre d'appareils, le parti que l'on peut tirer de leur mode de groupement, etc...

Nous traiterons aussi à titre d'exemple intéressant, des applications que l'on peut faire des équations générales, le problème énoncé sous la rubrique (*d*) dans la liste des applications industrielles parce que nous en avons donné la solution pour la première fois dans nos leçons du Collège de France et qu'elle est restée jusqu'à présent à l'état de conception théorique.

101. Condensateurs employés comme instruments de mesures. — Les condensateurs employés comme instruments de mesures sont composés de feuilles de papier paraffiné ou de mica recouvertes de feuilles d'étain collées à la gomme-laque et fortement comprimées. La figure 38 dans laquelle les lames métalliques sont représentées par des traits de force tandis que les lames isolantes le sont par des parties hachées montre bien la disposition adoptée. On

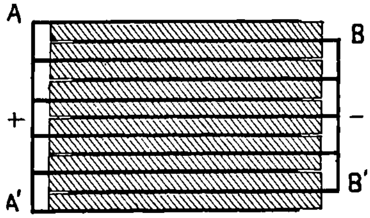


Fig. 38

voit que toutes les lames métalliques d'ordre impair sont réunies par un conducteur commun AA′ et qu'il en est de même pour les lames d'ordre pair réunies entre elles par un conducteur BB′ situé du côté opposé.

Chaque lame métallique ou armature étant comprise entre deux autres, à l'exception des deux armatures extrêmes, on voit que la capacité des lames paires est double de celle d'un plan qui ne forme condensateur que sur une seule de ses faces. Il résulte de là, en appelant N le nombre des lames paires et s la surface de l'une d'elles comptée sur une seule face, que la surface totale utile du condensateur est égale à $2Ns$ et que sa capacité tirée de la formule établie au n° 82 a pour valeur

$$C = \frac{2Ns}{4\pi\delta} \cdot k',$$

k' étant le pouvoir inducteur spécifique de la substance des lames isolantes.

D'autre part, en appelant λ l'épaisseur d'une des armatures métalliques, il est facile de voir que l'épaisseur totale de l'appareil a pour valeur

$$N\lambda + (N + 1)\lambda + 2N\delta = 2N(\lambda + \delta) + \lambda$$

ou en négligeant l'épaisseur λ d'une seule armature

$$2N(\lambda + \delta).$$

Si on suppose pour simplifier, que l'épaisseur δ de la lame isolante soit égale à λ, condition qui diffère peu de la réalité dans les condensateurs à feuilles d'étain séparées par du papier paraffiné, et que l'on désigne par h l'épaisseur totale de l'appareil on aura

$$h = 4N\delta, \qquad \text{d'où} \qquad N = \frac{h}{\delta 4}$$

et

$$C = \frac{k'hs}{8\pi\delta^2},$$

équation qui montre que la capacité est proportionnelle au volume hs de l'appareil et en raison inverse du *carré de l'épaisseur* δ des lames isolantes.

Il y a donc un grand intérêt à prendre δ et λ que nous avons supposé égaux, aussi petits que possible. Mais il faut toutefois tenir compte de l'usage auquel le condensateur est destiné, car si on le soumettait à des potentiels élevés et que δ fût très petit, une étincelle pourrait éclater à travers l'une des lames isolantes, la perforer et mettre l'appareil hors de service.

102. Condensateur de M. Bouty. — L'emploi des feuilles d'étain séparées par du papier paraffiné présente deux inconvénients. 1° L'irrégularité d'épaisseur de la couche conductrice, parce que la feuille d'étain, bien que d'épaisseur constante, s'applique inégalement sur le papier paraffiné et peut donner lieu à des surépaisseurs dues à des bulles d'air très difficiles à chasser complètement. Ces bulles d'air augmentent la valeur de δ et diminuent la capacité. 2° Le papier paraffiné a, comme nous l'avons dit, un pouvoir inducteur spécifique variable avec la durée de l'électrisation.

Ces inconvénients n'existent pas dans le condensateur à lame de mica argenté de M. Bouty. Le papier paraffiné y est remplacé par des lames de mica dont la régularité ne laisse rien à désirer et dont l'épaisseur peut facilement descendre à $\frac{1}{30}$ de millimètre; la feuille d'étain y est remplacée par une couche d'argent déposée par l'électrolyse, qui est absolument adhérente au mica et dont l'épaisseur n'atteint pas $\frac{1}{100}$ de millimètre.

103. — Exemple numérique. — Nous allons calculer la capacité

d'un condensateur à lames de mica argenté ayant 10 centimètres de côté et 1 centimètre d'épaisseur. Nous admettrons que l'épaisseur d'une lame de mica argentée sur ses deux faces soit de $\frac{1}{20}$ de millimètre et que la place perdue atteigne une valeur égale. Nous aurons ainsi 10 lames, argentées sur leurs 2 faces, par millimètre d'épaisseur, chacune de ces lames constitue un condensateur complet dont la capacité est, en prenant

$$\delta = \frac{1 \text{ centim.}}{300}, \qquad k' = 8,$$

$$C = \frac{10 \times 10}{4\pi \times \frac{1}{300}} = 2387.$$

Le nombre des lames étant de 100 par centimètre d'épaisseur, notre condensateur aura une capacité de 240 000 unités C.G.S. électro-statiques, soit en micro-farads

$$\frac{238\,700}{900\,000} = 0{,}265.$$

Nous avons pu constater qu'une lame de mica de $\frac{1}{30}$ de millimètre d'épaisseur, argentée sur ses deux faces, n'est perforée par une étincelle que lorsque la différence de potentiel de ses armatures atteint au moins 3000 volts, soit 10 unités électro-statiques.

§ 5. — GROUPEMENT DES CONDENSATEURS.

104. — Groupement en quantité ou en dérivation, ou en parallèle. — Les armatures de plusieurs condensateurs peuvent être réunies entre elles par des conducteurs, et la façon dont ces connexions sont faites constitue ce qu'on appelle le mode de groupement des condensateurs. Lorsque les condensateurs sont groupés comme l'indiquent les figures 39 et 40, on dit qu'ils sont groupés en quantité, ou en dérivation, ou en parallèle. Toutes les armatures chargées d'électricité de même signe communiquent métalliquement ensemble. Nous allons montrer que dans ce cas la capacité du condensateur unique formé par la réunion des autres est égale à la somme de leurs capacités individuelles. En effet, désignons par V_0 et V_1 les potentiels respectifs des deux armatures de chaque condensateur et par c, c', c'' la capacité de chacun d'eux et q, q', q'' les quantités d'électricité dont ils sont chargés. On a

$$q = c(V_1 - V_0), \qquad q' = c'(V_1 - V_0), \qquad q'' = c''(V_1 - V_0).$$

On en tire

$$q + q' + q'' = (c + c' + c'')(V_1 - V_0)$$

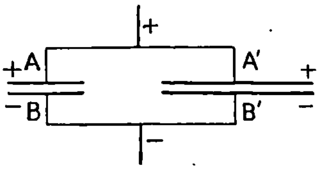


Fig. 39

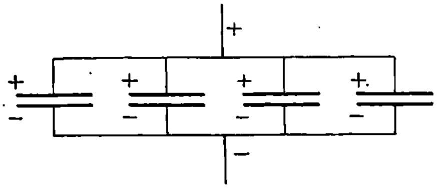


Fig. 40

et si on désigne par C la capacité totale de l'ensemble on aura par définition

$$Q = C(V_1 - V_0).$$

Mais en vertu du principe de la conservation de l'électricité

$$Q = q + q' + q'' + \cdots$$

Donc

$$C = \frac{q + q' + q'' + \cdots}{V_1 - V_0} = c + c' + c''.$$

Ce qui veut dire que lorsque des condensateurs sont groupés en dérivation, la capacité de l'ensemble est égale à la somme des capacités partielles.

105. — Groupement en série ou en tension. — Ce mode de groupement est représenté par les figures 41 et 42. Dans la pre-

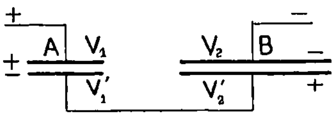


Fig. 41

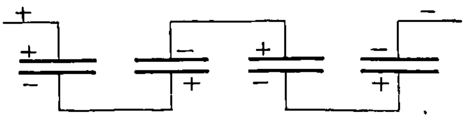


Fig. 42

mière figure, on suppose les condensateurs inégaux tandis qu'ils sont égaux dans la seconde.

Pour trouver la capacité d'un ensemble de condensateurs montés en tension, on procède de la manière suivante. Rappelons d'abord que le potentiel absolu d'un condensateur, c'est-à-dire le travail résistant développé par la masse-unité pour l'amener d'une très grande distance sur l'armature chargée d'électricité de même nom qu'elle, est égal à la différence des potentiels absolus des deux armatures.

Appelons : V_1 le potentiel absolu de l'armature supérieure du premier condensateur A, V_1' celui de l'armature inférieure, q_1 la quantité dont il est chargé, C_1 sa capacité.

Nous aurons entre ces quantités la relation :

$$q_1 = c_1(V_1 - V_1').$$

Supposons maintenant que l'armature inférieure d'un condensateur soit réunie par un conducteur à l'armature inférieure du condensateur suivant.

En employant les mêmes notations, mais en affectant les lettres de l'indice 2, pour le second condensateur on aura :

$$q_2 = c_2(V_2 - V_2').$$

Remarquons que les deux armatures inférieures communiquant ensemble, elles seront au même potentiel et l'on aura

$$V_2' = V_1'$$

et par suite $$q_2 = c_2(V_2 - V_1');$$

nous allons voir en outre que l'on a $q_2 = q_1$ si les condensateurs communiquent ensemble avant qu'on ne commence à les charger, opération qui consiste à mettre le fil du plateau supérieur du premier condensateur A en communication avec une source d'électricité au potentiel V_1 tandis que le plateau supérieur du condensateur B communique avec une source d'électricité au potentiel V_2.

Nous savons que si le plateau supérieur de A reçoit une certaine quantité d'électricité positive $+q_1$, le plateau inférieur va immédiatement se charger d'une quantité égale d'électricité négative $-q_1$, tandis qu'une quantité $+q_1$, va être refoulée par le conducteur dans le plateau inférieur du condensateur B. La somme algébrique des quantités d'électricité qui existe dans l'ensemble des deux plateaux inférieurs, reste donc nulle.

En appliquant le même raisonnement au condensateur B, on voit que la quantité $+q_1$ dont se charge le plateau inférieur, développe dans le plateau supérieur une charge égale à $-q_1$. On a donc $q_2 = q_1$ c'est-à-dire que la charge des deux condensateurs est la même.

La seconde équation devient

$$q_1 = c_2(V_2 - V'_1).$$

Nous avons donc en résumé :

$$V_1 - V'_1 = \frac{q_1}{c_1}, \tag{1}$$

$$V_2 - V' = \frac{-q_1}{c_2} \quad \text{ou} \quad (2) \quad V_1 - V_2 = \frac{q_1}{c_2}.$$

Ajoutons membre à membre les deux équations (1) et (2) : il vient :

$$V_1 - V_2 = q_1\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right). \tag{3}$$

Or $V_1 - V_2$ est la différence de potentiel des deux fils qui aboutissent aux extrémités du groupe des condensateurs, et q_1 la quantité d'électricité dont ce groupe est chargé ; par conséquent, si nous désignons par c la capacité du groupe considéré comme formant un condensateur unique, nous aurons :

$$V_1 - V_2 = \frac{q_1}{c}. \tag{4}$$

Divisons membre à membre les équations (3) et (4) : il vient :

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}.$$

106. — Le raisonnement exposé pour deux condensateurs s'applique évidemment à un nombre quelconque, chacun d'eux se chargeant de la même quantité d'électricité, de façon que la somme algébrique des quantités d'électricité, existant sur deux plateaux consécutifs réunis métalliquement, reste constamment nulle. Il en résulte que l'équation qui donne la différence de potentiel des deux armatures extrêmes d'un groupe de n condensateurs, est donnée par l'équation

$$V_1 - V_n = q\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \dots \frac{1}{c_n}\right)$$

dans laquelle q représente la charge d'un quelconque des condensateurs, abstraction faite du signe. La capacité c de l'ensemble serait donnée par l'équation

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \dots + \frac{1}{c_n},$$

d'où

$$c = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots + \frac{1}{c_n}}.$$

Un cas particulier intéressant est celui où tous les condensateurs sont égaux ; on a alors

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \dots = c_n,$$

et

$$c = \frac{1}{\frac{n}{c_1}} = \frac{c_1}{n},$$

d'où il résulte que la capacité d'un ensemble de condensateurs égaux, groupés en tension, est n fois moindre que la capacité d'un seul d'entre eux. Il est en outre facile de voir que la différence de potentiel des deux armatures d'un même condensateur, est n fois moindre que la différence de potentiel $V_1 - V_n$ des deux armatures extrêmes qui aboutissent aux sources d'électricité.

107. — Cette dernière propriété des condensateurs groupés en série a été utilisée par M. Marcel Deprez en 1892, pour ramener la mesure d'un potentiel très élevé, impossible avec les électromètres ordinaires, à celle d'un potentiel réduit dans un rapport donné d'avance.

Supposons par exemple qu'on veuille réduire une différence de po-

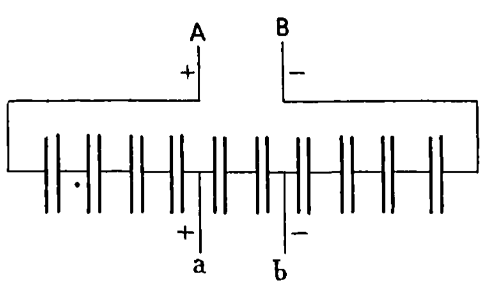


Fig. 43

tentiel existant entre deux points A et B, au dixième de sa valeur.

On prend dix condensateurs égaux de même capacité et on les groupe en série comme le représente la figure 43. On est certain alors que la différence de potentiel des deux armatures a et b d'un quelconque d'entre eux est égale à la dixième partie de la différence primitive. Il suffira donc de la mesurer par un des procédés que nous décrirons plus tard (à la condition toutefois que ce procédé ne la modifie pas), pour connaître la différence de potentiel qui existe entre A et B.

§ 6. — ÉNERGIE POTENTIELLE D'UN CONDENSATEUR.

108. — Formule générale. — Le potentiel d'un système de corps conducteurs de forme quelconque étant représenté par V, le travail nécessaire pour amener une masse infiniment petite, égale à dq, depuis l'infini jusqu'à la surface du conducteur, aura pour valeur

$$dW = Vdq.$$

Mais on a d'autre part $q = CV, \quad V = \frac{q}{C}$; donc

$$dW = \frac{qdq}{C},$$

d'où on tire en intégrant :

$$W = \frac{1}{2C}(q^2 - q_0^2)$$

dans laquelle q représente la charge actuelle et q_0 la charge initiale.

Si on suppose $-q_0 = 0$, on a

$$W = \frac{q^2}{2C},$$

formule identique à celle que nous avons trouvée pour représenter l'énergie d'une sphère de rayon C.

On trouverait de même

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}Vq = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C};$$

ces trois expressions d'une même quantité ont chacune leurs avantages et nous serviront fréquemment par la suite.

109. — Calcul de la quantité d'énergie que l'on peut accumuler dans un condensateur. — Ces équations très importantes vont nous permettre de calculer la quantité d'énergie que l'on peut accumuler dans les condensateurs habituellement employés.

Prenons par exemple les grosses bouteilles de Leyde employées dans les cabinets de physique, et calculons d'abord la capacité d'une bouteille ayant 20^{cm} de diamètre et 40 de hauteur. La formule du numéro (83) donne, pour la capacité d'un condensateur à lame d'air formé de deux cylindres concentriques très rapprochés :

$$c = \frac{al}{2\delta},$$

a étant le rayon de l'armature cylindrique intérieure, l la longueur des armatures et δ l'épaisseur de la couche d'air qui les sépare. Si l'air est remplacé par un diélectrique quelconque de pouvoir inducteur spécifique k, la formule devient

$$c = \frac{kal}{2\delta},$$

les quantités a, l et δ devant être, bien entendu, exprimées en centimètres. Pour le verre employé à la fabrication des bouteilles de Leyde, on peut prendre $k = 3$. On a d'ailleurs

$$a = 10, \qquad l = 40, \qquad \delta = 0,2,$$

d'où $$c = \frac{3 \times 10 \times 40}{0,4} = 3000 \text{ unités électro-statiques.}$$

soit $\frac{1}{300}$ de *micro-farad.* Il faudrait donc 300 bouteilles de cette dimension, groupées en dérivation, pour faire un micro-farad.

Pour calculer la quantité d'énergie emmagasinée dans une de ces bouteilles, il faut se donner la différence de potentiel des deux armatures. Or, avec les machines électro-statiques ou avec la bobine de Ruhmkorff, on obtient facilement 60000 volts ou 200 unités électro-statiques. Il en résulte que l'énergie W a pour valeur en supposant $V = 200$,

$$W = \frac{1}{2} cV^2 \times \frac{1}{2} 3000 \times \overline{200}^2 = 60\,000\,000 \text{ d'}\textit{ergs},$$

c'est-à-dire environ $\frac{6}{10}$ de kilogrammètre. Une batterie composée de 12 de ces bouteilles groupées en dérivation permettrait donc d'accumuler une quantité d'énergie dépassant 7 kilogrammètres.

110. Elévation de température du conducteur qui réunit les deux armatures d'un condensateur au moment de la décharge. — Si l'on réunit les deux armatures par un conducteur, les quantités q et $-q$ sont ramenées au même potentiel; toute l'énergie se transforme en chaleur et une partie de cette chaleur se manifeste sous la forme d'une étincelle d'un gros volume, d'un éclat éblouissant et produisant un bruit comparable à une détonation. Une autre partie sert à élever la température du conducteur et même des armatures de la batterie. Bien que l'on néglige habituellement la chaleur développée dans la batterie elle-même, il est certain qu'elle représente une fraction appréciable de l'énergie totale.

Il est impossible d'éviter qu'une partie très notable de l'énergie soit dissipée par la production de l'étincelle ; cependant, dans le calcul qui va suivre et que nous donnerons comme application de formules déjà établies dans les paragraphes précédents, nous supposerons que le conducteur qui réunit les deux armatures, transforme en chaleur la totalité de l'énergie de la décharge, et nous allons calculer l'élévation de sa température.

Soit d le diamètre du fil en centimètres, l sa longueur ; m la masse (en grammes) d'un centimètre cube de métal du fil, k la capacité calorifique du métal du fil exprimée en calories-grammes, degré ou petite calorie; C, la capacité de la batterie ; V la différence de potentiel des armatures ; T l'élévation de température du fil.

La quantité de chaleur nécessaire pour élever la température du fil de un degré centigrade, a pour valeur, sa masse $\frac{\pi d^2 lm}{4}$ multipliée par la capacité calorifique k. Cette quantité de chaleur équivaut (17) à une énergie de 41.692.500 ergs. L'énergie calorifique développée pour un échauffement de T degrés, a donc pour valeur :

$$\frac{\pi d^2 lmk\mathrm{T}}{4} \times 41\,692\,500.$$

Nous avons admis qu'elle représente la totalité de l'énergie potentielle de la batterie, nous avons donc l'équation

$$\frac{1}{2}\mathrm{CV}^2 = \frac{\pi d^2 lmk\mathrm{T}}{4} \times 41\,692\,500,$$

d'où
$$T = 0{,}00000001526 \frac{CV^2}{md^2lk}.$$

111. — Exemple numérique. — Si nous prenons comme exemple la batterie de 12 bouteilles dont la capacité est de 36.000 unités, la différence de potentiel étant égale à 200 unités, et que nous supposions les deux armatures réunies par un fil de fer, de un mètre de long, de $\frac{1}{10}$ de millimètre de diamètre ; pour le fer, $m = 8$, $k = 0{,}12$; nous aurons :

$$T = 0{,}00000001526 \frac{36000 \times \overline{200}^2}{8 \times \overline{0{,}01}^2 \times 100 \times 0{,}12} = 2100 \text{ degrés.}$$

Or, le fer fond à une température bien inférieure à ce chiffre ; mais d'autre part, l'étincelle absorbe une certaine quantité d'énergie, de sorte que, on peut estimer la température atteinte par le fil, comme devant être peu différente de celle qui produirait sa fusion. En laissant de côté les coefficients numériques qui entrent dans la formule qui donne T, on voit que cette valeur est proportionnelle à la capacité de la batterie, au carré de la différence de potentiel des armatures, en raison inverse du carré du diamètre du fil, en raison inverse de sa longueur.

Les expériences du professeur Riess sont complètement d'accord avec ces déductions de la théorie.

112. — **Capacité d'un câble sous-marin.** — On vient de voir l'énergie que peut emmagasiner une simple batterie dont les armatures ont une surface totale de 3 mètres carrés à peine. Il est intéressant de calculer la capacité que présentent les câbles sous-marins pour la comparer à celle d'une batterie.

On peut calculer la capacité d'un câble par la formule

$$C = 0{,}217 \frac{L}{\log \frac{b}{a}}$$

donnée pour un condensateur cylindrique à lame d'air, les rayons des armatures intérieures et extérieures étant représentés par a et par b. Si la lame d'air est remplacée par un diélectrique de pouvoir inducteur k', la formule devient

$$C = 0{,}217 \frac{k'L}{\log \frac{b}{a}}.$$

Le logarithme indiqué est le logarithme ordinaire.

Le diélectrique employé est ordinairement la gutta-percha pour laquelle le pouvoir inducteur est égal à 3.

Si nous appliquons cette formule à un câble pour lequel

$$a = 0^{c},2,$$
$$b = 0^{c},6,$$
$$L = 1 \text{ kilomètre} = 100.000 \text{ centimètres},$$

nous trouvons en prenant $k' = 3$

$$C = 136.500\,;$$

la capacité d'un câble équivaut donc, par kilomètre, à celle d'une batterie d'au moins 45 bouteilles de 20 centimètres de diamètre et de 40 centimètres de hauteur.

Mais le coefficient k' pouvant varier d'une façon assez notable, il est plus prudent de se référer aux mesures directes de capacité, et nous allons donner quelques exemples de mesures de ce genre.

113. — Câble transatlantique français de 1869. — Longueur 5.340 kilomètres. Capacité par kilomètre 209.000 unités. Capacité totale 1.116.000.000 d'unités.

La capacité totale du câble de 1869 équivaut à une batterie de 372.000 bouteilles présentant ensemble une surface de 93.000 mètres carrés. La capacité la plus petite qu'on ait encore réalisée pour les câbles sous-marins, est de 124.000 unités par kilomètre, chiffre qui diffère peu du nombre 136.500 que nous avons calculé plus haut.

114. — Capacité d'une ligne télégraphique aérienne. — Nous avons donné plus haut la formule qui fait connaître la capacité d'un condensateur formé d'un cylindre et d'un plan indéfini parallèle à l'axe du cylindre. Cette formule est : (84)

$$C = \frac{0,217\,l}{\log \frac{2D}{r}},$$

dans laquelle l représente la longueur du cylindre, r son rayon et D sa distance au plan qui est ici représenté par le sol.

Si nous appliquons cette formule aux lignes télégraphiques ordinaires, et que nous prenions

$$l = 1 \text{ kilomètre} = 100.000 \text{ centimètres},$$
$$r = 2 \text{ millimètres} = 0^{c},2,$$

$$D = 4 \text{ mètres} = 400 \text{ centimètres},$$

nous trouvons $C = 6000$, c'est-à-dire la capacité de deux bouteilles de Leyde de 20 centimètres de diamètre et de 40 centimètres de hauteur montées en quantité.

On peut trouver étonnant que la capacité d'une ligne télégraphique puisse être aussi considérable, surtout quand on compare l'énergie d'une grande bouteille de Leyde aux secousses inappréciables que l'on reçoit lorsque l'on touche un fil télégraphique. Cela tient à ce qu'il n'y a aucune comparaison entre le potentiel maximum auxquels sont portés les fils télégraphiques (une centaine de volts c'est-à-dire $\frac{1}{3}$ d'unité électro-statique) et le potentiel de la batterie que nous avons prise comme exemple et que nous avons supposé de 60.000 volts ; nombre facilement atteint et même dépassé par les machines électro-statiques.

Remarquons en outre que la surface latérale d'un fil télégraphique est de 12 mètres carrés et demi par kilomètre, c'est-à-dire 50 fois aussi grande que celle de la bouteille de Leyde prise pour comparaison.

115. — Equilibre électrique de deux condensateurs quelconques après leur réunion par un conducteur. — Soient deux condensateurs indépendants chargés d'électricité et isolés AB et A'B' (fig. 44). Si on réunit une des armatures B du premier, à

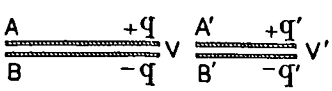


Fig. 44

une quelconque des armatures B' du second, il ne se produit qu'un très faible mouvement d'électricité dans le conducteur dont on se sert pour cette opération parce que les deux autres armatures A, A' ne communiquent avec aucun réservoir d'électricité et les armatures B, B' se mettent au même potentiel sans qu'il y ait dépense notable d'énergie.

Mais si après avoir établi cette première communication, on vient ensuite à en établir une seconde entre les armatures A et A′, il se produit généralement une décharge de l'un des condensateurs dans l'autre et lorsque l'équilibre est établi, l'ensemble ABA′B′ forme un condensateur unique dont nous allons calculer la charge et le potentiel.

Soit c, V et q la capacité, la différence de potentiel des deux armatures, et la quantité d'électricité relatives au condensateur AB, c', V′, q' les mêmes éléments pour le second condensateur.

Appelons V_1 la différence de potentiel entre l'ensemble des armatures AA′ d'une part (lorsqu'elles sont réunies par un conducteur qui les met au même potentiel) et les armatures BB′ d'autre part (lorsqu'elles sont également réunies par un conducteur.) Le problème est exactement le même que celui que nous avons déjà traité à propos de deux sphères électrisées réunies par un conducteur. Chacune des sphères se comportant comme un condensateur dont la capacité est représentée par son rayon, nous n'avons, pour appliquer au cas actuel les équations auxquelles nous sommes arrivés, qu'à remplacer les rayons r et r' des deux sphères par les capacités c et c' des deux condensateurs. Nous trouvons ainsi :

$$V_1 = \frac{q + q'}{c + c'} = \frac{cV + c'V'}{c + c'}.$$

La charge du condensateur AB, après établissement de l'équilibre, aura pour valeur

$$\frac{c}{c + c'}(q + q')$$

et celle du second

$$\frac{c'}{c + c'}(q + q').$$

L'énergie potentielle transformée en chaleur est également donnée par l'équation

$$\frac{1}{2}\,\frac{cc'(V - V')^2}{c + c'}$$

qui montre qu'il y a toujours une perte d'énergie lorsqu'on réunit deux à deux les armatures de deux condensateurs dont les différences de potentiel ne sont pas les mêmes.

§ 7. — CONDENSATEURS A CAPACITÉ VARIABLE.

116. — Phénomènes présentés par les condensateurs à capacité variable. — Soit AB, A'B' (fig. 45) deux condensateurs plans, de forme circulaire, dont les armatures sont reliées entre elles par des conducteurs flexibles permettant d'augmenter ou de diminuer la distance des armatures A et B ainsi que celle des armatures A' et B', de manière à donner à chacun d'eux une capacité arbitraire, cette capacité étant, comme nous le savons, inversement proportionnelle à la distance des armatures, à la condition que cette distance ne dépasse pas une fraction du diamètre des armatures.

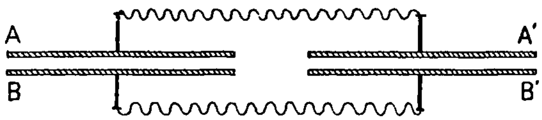


Fig. 45

Nous avons déjà donné les formules qui font connaître la charge et la différence de potentiel des armatures de deux condensateurs dont les quatre armatures sont réunies deux à deux par des conducteurs. En désignant par q, V, c, q', V', c', la charge, la différence de potentiel des armatures, et la capacité de chacun des deux condensateurs, on a, en appliquant ces équations et en désignant par Q la quantité *invariable* d'électricité existant dans l'ensemble des deux condensateurs

$$q + q' = Q, \qquad V = V' = \frac{Q}{c+c'}, \qquad q = \frac{c}{c+c'}\,Q, \qquad q' = \frac{c'}{c+c'}\,Q.$$

Ces équations montrent, que suivant que le rapport $\frac{c}{c'}$ est très grand ou très petit, la charge totale Q se porte presqu'entièrement sur le condensateur AB ou sur A'B' tandis que la différence de potentiel V des armatures de AB, nécessairement égale à celle des armatures de A'B', est en raison inverse de la somme $c + c'$ des deux capacités.

Quant à l'énergie potentielle de la charge de chaque condensateur, on la détermine au moyen des formules générales

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{c} = \frac{1}{2} QV$$

données au n° 108 et on trouve :

$$W = \frac{1}{2} \frac{cQ^2}{(c+c')^2}, \qquad W' = \frac{1}{2} \frac{c'Q^2}{(c+c')^2}, \qquad W + W' = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{c+c'} = W.$$

On voit que l'énergie totale $\frac{1}{2} \frac{Q^2}{c+c'}$, est en raison inverse de la somme des deux capacités mais qu'elle se partage entre les deux condensateurs, proportionnellement à leurs capacités respectives c et c'. L'énergie totale W est donc variable mais elle repasse par la même valeur chaque fois que la somme des deux capacités $c + c'$ repasse elle-même par la même valeur, tandis que l'énergie individuelle de chaque condensateur a une valeur absolument arbitraire.

Si la quantité totale Q d'électricité est invariable, ce qui exige un isolement parfait, il y aura déplacement d'électricité d'un condensateur vers l'autre, et il est facile de trouver le sens et la grandeur de la variation de charge qui en résulte pour chacun d'eux et qui a pour effet de créer dans les fils conducteurs un véritable *courant électrique* de grandeur et de sens variables.

Soit dc l'accroissement positif ou négatif, supposé très petit, de la capacité du condensateur AB, dc' celui de la capacité de A'B', dq et dq' les accroissements de charge qui en résultent pour chaque condensateur et qui sont nécessairement de signe contraire puisque la charge totale est invariable ; on aura, avec une grande approximation, en différentiant les équations qui donnent q et q'

$$dq = \frac{c'dc - cdc'}{(c+c')^2} Q, \qquad dq' = - dq = \frac{cdc' - c'dc}{(c+c')^2} Q.$$

Pour que le *courant* aille de AB vers A'B', il faut que l'accroissement de charge de A'B' soit positif, c'est-à-dire que l'on ait $cdc' > c'dc$ ou

$$\frac{dc'}{c'} > \frac{dc}{c}$$

c'est-à-dire que l'*accroissement relatif* de A'B' doit être plus grand que l'*accroissement relatif* de AB. Le sens du courant ne dépend donc pas des grandeurs absolues des capacités, ni même de celles de leur accroissement. Si par exemple la capacité de chaque condensateur s'accroît de 5 0/0 de sa valeur, il n'y aura aucun courant, même si l'un des condensateurs est beaucoup plus grand que l'autre.

Si on imprime aux plateaux des deux condensateurs un mouvement alternatif, les conducteurs seront parcourus par des courants qui seront aussi alternatifs et l'énergie potentielle du système oscillera, comme nous l'avons vu, entre des limites d'autant plus écartées que les variations de capacité sont elles-mêmes plus grandes.

Or, nous avons admis jusqu'à présent comme un axiome, que la quantité d'énergie potentielle d'un condensateur, ou d'un système de condensateurs, était invariable ou ne pouvait que diminuer en se transformant en chaleur lorsqu'on réunit deux condensateurs à des potentiels différents par un conducteur.

117. — Nous sommes donc ici en présence d'un fait nouveau et très important, celui de l'augmentation ou de la diminution de l'énergie d'un des condensateurs sans qu'elle soit nécessairement accompagnée d'une variation de sens inverse de l'énergie de l'autre condensateur, et sans que ces variations d'énergie donnent nécessairement lieu à des pertes qui se manifestent par un dégagement de chaleur. Il est facile d'établir ce dernier point. Nous avons vu en effet (115) que la réunion de deux condensateurs à des potentiels différents donne lieu à une perte d'énergie égale à

$$\frac{1}{2} \frac{cc'(V - V')^2}{c + c'}.$$

Or, dans le problème actuel, on a constamment $V = V'$ et par conséquent la perte est nulle. Disons cependant que l'égalité $V = V'$ ne peut être réalisée que si les fils conducteurs qui réunissent les deux condensateurs n'offrent pas une *résistance* notable au passage du courant électrique dont nous avons constaté l'existence, et si en outre, ce courant n'est pas intense. Cette dernière condition impose l'obligation de ne pas faire varier les capacités c et c' trop brusquement.

Il nous faut expliquer maintenant comment l'énergie potentielle totale W du système peut augmenter ou diminuer sans production de chaleur.

Lorsque l'énergie potentielle augmente dans l'ensemble des deux condensateurs qui ne peuvent rien recevoir d'une source extérieure, c'est qu'elle est la manifestation d'un travail mécanique qui a été appliqué aux armatures et qui a eu pour conséquence une diminution de la capacité totale ainsi que le montre la formule

$$W = \frac{Q^2}{c + c'}$$

qui donne pour W une valeur d'autant plus grande que la capacité totale $c + c'$ est plus petite.

Cet accroissement de l'énergie totale est donc nécessairement accompagné d'une dépense de travail mécanique emprunté à une source extérieure, mais si on cherche comment ce travail est réparti entre les deux armatures mobiles A et A', on trouve qu'il n'est pas nécessairement de même signe pour chacune d'elles ; l'armature A exigera par exemple une dépense de travail si elle s'éloigne de B, puisqu'elles sont chargées d'électricité de signe contraire et tendent par suite à se rapprocher, tandis que A' et B', animées d'un mouvementr elatif qui diminue leur distance, développeront un travail positif ou moteur qui pourra être utilisé.

La somme algébrique de ces deux travaux, c'est-à-dire dans le cas actuel leur différence numérique, est équivalente à l'énergie potentielle. Si le travail dû à l'augmentation de distance de A et de B, est plus grand que le travail développé par le rapprochement de A' et de B', il y a accroissement de l'énergie potentielle totale, il y aurait diminution dans l'hypothèse inverse.

118. — Energie potentielle d'un Condensateur à capacité variable chargé d'une quantité constante d'électricité. — Pour calculer le travail mécanique développé par chaque condensateur, nous allons étudier ce qui se passe dans un condensateur chargé d'abord d'une quantité d'électricité q_0 au potentiel V_0, au moyen d'une source quelconque d'électricité, puis séparé d'elle et soumis à des variations de capacité. Au moment où on l'isole de la source on a

$$q_0 = c_0 V_0.$$

Si on augmente la capacité en lui donnant la valeur c_1, on a l'équation

$$q_0 = c_1 V_1.$$

Le potentiel qui était d'abord V_0, est donc devenu

$$V_1 = \frac{q_0}{c_1} = \frac{c_0 V_0}{c_1},$$

c'est-à-dire plus petit que V_0. Donc, lorsqu'on diminue la distance des armatures, la différence de potentiel diminue. Voyons maintenant ce qu'est devenue l'énergie potentielle.

Elle avait d'abord pour valeur

$$W_0 = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{c_0},$$

elle devient, lorsque la capacité est égale à c_1,

$$W_1 = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{c_1};$$

elle a donc diminué puisque c_1 est plus grand que c_0. Cette diminution a pour valeur

$$W_0 - W_1 = \frac{q_0^2}{2}\left(\frac{1}{c_0} - \frac{1}{c_1}\right).$$

119. — Energie d'un condensateur à capacité variable maintenu à un potentiel constant. — Si, au lieu d'être isolé de toute communication avec les corps environnants, comme nous venons de le supposer, le condensateur est maintenu constamment en rapport avec une source capable de maintenir les deux armatures à une différence de potentiel constante, les phénomènes sont notablement modifiés.

La quantité d'électricité q, au lieu d'être constante, devient variable ; elle est donnée par l'équation

$$q = c V_0,$$

V_0 désignant la différence de potentiel constante. En y faisant successivement $c = c_0$, $c = c_1$, elle donne

$$q_0 = c_0 V_0, \qquad q_1 = c_1 V_0.$$

La quantité d'électricité augmente ou diminue proportionnellement à c. Quant à l'énergie W, elle est donnée immédiatement par les équations

$$W_0 = \frac{1}{2} c_0 V_0^2, \qquad W_1 = \frac{1}{2} c_1 V_0^2,$$

d'où

$$W_1 - W_0 = \frac{1}{2} V_0^2 (c_1 - c_0).$$

La différence de potentiel étant toujours égale à celle des deux pôles de la source, les variations de charge du condensateur ne peuvent donner lieu à aucune transformation inutile d'énergie en chaleur, et l'énergie potentielle fournie par le réservoir est exactement égale à la somme obtenue en ajoutant l'accroissement d'énergie potentielle du condensateur, au travail mécanique développé pendant la variation de capacité. Or, nous avons trouvé en traitant le problème du condensateur à charge constante et à potentiel variable, que le travail mécanique développé pendant une variation infiniment petite dc de capacité, avait pour expression

$$d\mathcal{T} = \frac{1}{2} V^2 dc,$$

quelle que fût la valeur de V ; cette expression s'applique donc aussi au cas actuel où V est constant et égal à V_0, et elle donne pour la valeur de $\mathcal{T}$

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} V_0^2 (c_1 - c_0),$$

valeur précisément égale à celle de $W_1 - W_0$.

Ainsi, lorsque la capacité passe de la valeur c_0 à la valeur plus grande c_1, il y a production de travail mécanique moteur, puisque l'augmentation de capacité correspond au cas où les plateaux se rapprochent, la charge électrique augmente et par conséquent aussi l'énergie potentielle, de sorte que l'accroissement total d'énergie du système a pour expression

$$(W_1 - W_0) + \mathcal{T} = \frac{1}{2} V_0^2 (c_1 - c_0) + \frac{1}{2} V_0^2 (c_1 - c_0) = V_0^2 (c_1 - c_0) = V_0 (c_1 - c_0) V_0.$$

Or

$$V_0 (c_1 - c_0) = V_0 c_1 - V_0 c_0 = q_1 - q_0,$$

valeur égale à celle de la quantité d'électricité sortie du réservoir.

Donc

$$(W_1 - W_0) + \mathcal{T} = (q_1 - q_0) V_0.$$

Nous aurions pu trouver directement cette dernière valeur de l'énergie totale qui passe du réservoir dans le condensateur. Car le travail électrique fourni par le réservoir, a pour valeur le produit de la quantité d'électricité $(q_1 - q_0)$, cédée au condensateur, par la différence constante de potentiel V_0 des deux pôles du réservoir. Ce réservoir peut lui-même être constitué par un condensateur de très grande capacité, dans lequel une variation de charge égale à $(q_1 - q_0)$ n'entraîne qu'une variation de potentiel négligeable.

L'intensité de la force attractive F, développée entre les deux armatures, est donnée immédiatement par l'équation

$$F = \frac{V^2}{2} \frac{dc}{dx}$$

établie précédemment et, si nous l'appliquons aux deux genres de condensateur pris pour exemple dans le cas d'une charge constante, nous trouverons que, lorsque les armatures maintenues à un potentiel constant sont des plateaux circulaires parallèles séparés par une lame d'air d'épaisseur x, la valeur de F est, en remplaçant $\frac{dc}{dx}$ par sa valeur tirée de l'équation

$$c = \frac{r^2}{4x}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dc}{dx} = -\frac{r^2}{4x^2},$$

$$F = \frac{r^2}{8x^2} V_0^2.$$

Si le condensateur avait la forme indiquée au n° 122, on aurait

$$c = \frac{lx}{2\pi\delta}, \qquad \frac{dc}{dx} = \frac{l}{2\pi\delta}, \qquad F = \frac{l}{2\pi\delta} V_0^2.$$

Ainsi, dans ce cas, la force tendant à enfoncer la lame mobile BB′ entre les deux lames fixes AA′ serait *indépendante de la position de* BB′.

Ce résultat ne doit être considéré comme suffisamment exact que si la lame BB′ n'est enfoncée que d'une fraction de sa longueur.

Tous ces exemples nous seront utiles dans la suite, lorsque nous parlerons des électromètres.

§ 8. — PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES DES CONDENSATEURS A LAME D'AIR.

120. — Travail mécanique développé par le rapprochement des armatures d'un condensateur. — En vertu du principe de la conservation de l'énergie, cette disparition d'énergie potentielle est nécessairement accompagnée de l'apparition d'un développement de chaleur ou d'un travail mécanique. Mais il ne peut y avoir de développement de chaleur, puisqu'il n'y a pas déplacement d'électricité, tous les points d'une même armature ayant le même potentiel, et sa charge restant constante.

La seule forme sous laquelle puisse se manifester l'énergie potentielle disparue est donc un travail mécanique, c'est précisément celui qui est développé par le rapprochement des armatures chargées de quantités égales d'électricités de signe contraire.

Par conséquent la valeur $\mathfrak{T}$ de ce travail, est donnée par l'équation

$$\mathfrak{T} = \frac{q_0^2}{2}\left(\frac{1}{c_0} - \frac{1}{c_1}\right).$$

Si la différence $c_1 - c_0$ des deux capacités successives est suffisamment petite, nous aurons, en la désignant par dc et par $d\mathfrak{T}$ le travail très petit correspondant

$$d\mathfrak{T} = \frac{q_0^2}{2}\frac{dc_0}{c_0^2}$$

ou, d'une façon plus générale, si la capacité passe d'une valeur quelconque c à une valeur infiniment voisine

$$d\mathfrak{T} = \frac{q_0^2}{2}\frac{dc}{c^2} = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{c^2}dc.$$

Mais on a, à chaque instant $\frac{q_0}{c} = \mathrm{V}$.

Donc

$$d\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{c^2}dc = \frac{1}{2}\mathrm{V}^2 dc.$$

121. — Expression de la force attractive développée entre les deux armatures d'un condensateur. — Cette équation va nous permettre de trouver l'expression de la force attractive développée entre les deux armatures. Supposons en effet que l'on permette à celle qui est mobile, un déplacement infiniment petit dx, la force attractive F donnera lieu pendant ce déplacement à un travail qui a pour mesure $\mathrm{F}dx$.

Ce travail étant précisément celui que nous avons désigné par $d\mathfrak{T}$, il vient

$$\mathrm{F}dx = \frac{q_0^2}{2c^2}dc = \frac{\mathrm{V}^2}{2}dc \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{F} = \frac{q_0^2}{2c^2}\frac{dc}{dx} = \frac{\mathrm{V}^2}{2}\frac{dc}{dx}.$$

Ces équations sont très importantes et nous serviront dans plusieurs circonstances ; elles permettent en effet de calculer l'attraction développée entre deux corps électrisés, quand on connaît leur différence de potentiel et la variation de la capacité de leur ensemble correspondante à un déplacement dans une direction quelconque, la force étant mesurée dans cette direction. Il est facile de voir d'ailleurs que l'équation

$$F = \frac{q_0^2}{2c^2}\,\frac{dc}{dx}$$

étant toujours vraie quelle que soit la valeur de q_0, nous pouvons supposer q_0 variable et l'écrire sous la forme plus générale

$$F = \frac{q^2}{2c^2}\,\frac{dc}{dx}.$$

$\frac{dc}{dx}$ est un coefficient qui ne dépend ni de la quantité d'électricité ni de la différence de potentiel des armatures, mais seulement de la forme du système de corps formant condensateur, c'est-à-dire de données purement géométriques.

Nous allons donner deux exemples de l'application de ces formules. Supposons d'abord que le condensateur soit composé de 2 plateaux circulaires de rayon r et dont la distance variable est représentée par x. La capacité c d'un tel condensateur est donnée par la formule

$$c = \frac{\pi r^2}{4\pi x} = \frac{r^2}{4x}.$$

Si on le charge d'une quantité q_0 d'électricité lorsque la distance est x_0, qu'on l'isole ensuite de la source d'électricité et que l'on porte la valeur de x_0 à x_1, on aura

$$d\mathfrak{T} = \frac{q_0^2}{2}\left(\frac{1}{c_0} - \frac{1}{c_1}\right) = \frac{q_0^2}{2}\left(\frac{4x_0}{r^2} - \frac{4x_1}{r^2}\right) = \frac{2q_0^2}{r^2}(x_0 - x_1).$$

Ainsi le travail mécanique est dans ce cas, proportionnel à la variation $(x_0 - x_1)$ de l'écart des deux armatures. Or, lorsque le travail d'une force est proportionnel au déplacement de son point d'application, c'est que cette force est constante. La valeur de cette force s'obtient immédiatement en divisant le travail par le déplacement, c'est-à-dire

$$\frac{2q_0^2}{r^2}(x_0 - x_1) \quad \text{par} \quad (x_0 - x_1).$$

L'attraction mutuelle des deux plateaux a donc pour valeur

$$F = \frac{2q_0^2}{r^2}.$$

On voit qu'elle est indépendante de l'écart des armatures. Mais nous le répétons : ceci ne peut être considéré comme vrai que si la densité de la charge électrique est constante dans toute l'étendue des deux armatures, et si leur distance x est une petite fraction de leur rayon r.

122. — Nous choisirons comme second exemple un condensateur formé de deux lames métalliques AA (fig. 46), reliées par un conducteur, et dans l'intervalle desquelles peut s'enfoncer plus ou moins

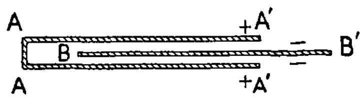


Fig. 46

une lame mobile B qui forme la seconde armature. La variation de capacité résulte de celle de la surface efficace de la lame B (nous désignons ainsi la surface comprise entre l'extrémité B de la lame mobile et l'extrémité A' des deux lames fixes) qui a pour mesure le produit de sa largeur l par la distance x du bord B aux bords AA'.

La formule qui donne la capacité des condensateurs plans

$$c = \frac{S}{4\pi\delta}$$

devient ici, en remarquant que l'ensemble des deux lames AA'BB', peut être considéré comme constitué par la réunion de deux condensateurs égaux :

$$c = \frac{2S}{4\pi\delta} = \frac{lx}{2\pi\delta}.$$

Remplaçant c par cette valeur dans l'équation qui donne $\mathcal{T}$, nous avons .

$$\mathcal{T} = \frac{q_0^2}{2}\left(\frac{2\pi\delta}{lx_0} - \frac{2\pi\delta}{lx_1}\right) = \frac{\pi\delta}{2l}\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}\right) q^2.$$

Le potentiel V de l'ensemble est donné par l'équation

$$V = \frac{q_0}{c} = \frac{2\pi\delta}{lx} q_0.$$

Quant à la force F, mesurée parallèlement à la direction BB′, elle est donnée par l'équation

$$F = \frac{q_0^2}{2c^2} \frac{dc}{dx},$$

ou, en remplaçant $\frac{dc}{dx}$ par sa valeur tirée de l'équation qui donne c en fonction de x

$$F = \frac{q_0^2}{2c^2} \cdot \frac{l}{2\pi\delta} = \frac{\pi\delta}{lx^2} q_0^2.$$

On voit que F est ici en raison inverse du carré de x, tandis que dans l'exemple précédent F était indépendant de la distance. Il faut toutefois se garder d'accepter ces résultats sans les discuter attentivement, car ils sont obtenus au moyen de calculs qui ne sont exacts que dans des conditions déterminées. Si par exemple on fait, dans l'équation ci-dessus, $x = 0$, c'est-à-dire si l'on suppose le bord B de la lame mobile en face des rebords AA′ des armatures fixes, on trouve $F = \infty$, tandis que en réalité, F aurait une valeur très petite. Si au contraire on fait $x = l$, on trouve pour F une valeur finie, tandis que cette valeur est nulle lorsque la longueur de BB′ est égale à celle de AA′. La formule n'est donc applicable que lorsque x a une valeur notablement différente de l et de zéro. Il est donc nécessaire, avant d'appliquer la formule générale qui donne la valeur de F, d'examiner si la formule qui donne c en fonction de x, est conforme aux hypothèses qui servent de point de départ pour l'établir, et si la valeur algébrique du rapport $\frac{dc}{dx}$ est conforme à la réalité.

123. — Attraction exercée par l'une des armatures d'un condensateur sur un élément de surface de l'autre armature. — Nous venons de donner la valeur de l'attraction mutuelle des deux armatures d'un condensateur, nous n'en pouvons pas conclure l'attraction exercée sur un élément de surface appartenant à l'une d'elles ; parce que, un élément de surface situé au centre d'une armature est soumis, de la part des éléments de surface de l'autre, à des forces dont la grandeur et la direction sont tout autres que si cet élément de surface était placé au bord de l'armature.

Pour résoudre cette question, nous allons nous servir du théorème de Green que nous avons démontré en supposant que la force mise en jeu était la gravitation.

Il nous sera facile de l'appliquer aux forces électriques en procédant comme nous l'avons fait jusqu'à présent, c'est-à-dire en remplaçant le coefficient f_1 des forces gravifiques, par l'unité.

Soit a un élément de surface très petit appartenant à l'une des armatures d'un condensateur, BB′ la seconde armature (fig. 47). Du point a comme sommet, décrivons un cône d'ouverture très petite, dont l'axe ac passe par le centre du petit élément elliptique c, intercepté par le cône sur l'armature BB′.

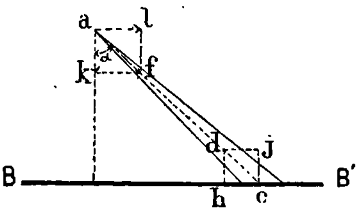


Fig. 47

L'attraction mutuelle exercée entre les deux éléments de surface a et c, dirigée suivant la droite ac qui les joint, a pour expression :

$$\frac{qq'}{\overline{ac}^2}$$

en appelant q et q' les quantités d'électricité dont sont chargés les éléments c et a.

En supposant que les armatures du condensateur soient chargées de l'unité de quantité électrique par unité de surface, et en désignant l'élément c de l'armature BB′ par ds et l'élément a par ds', les quantités q et q' seront remplacées dans l'expression de la force, par ds et $-ds'$. De sorte que l'équation deviendra

$$f = \frac{ds.ds'}{x^2}.$$

La force appliquée à l'élément a, peut être décomposée en deux autres perpendiculaires entre elles : l'une, al dirigée dans le plan même de la première armature ; nous n'avons pas à nous en occuper. La seconde ak perpendiculaire à l'armature, est précisément celle dont nous cherchons la valeur ; elle est égale à $f \cos \alpha$, en désignant par α l'angle $\widehat{fak}$. Désignons cette force ak par f_n, et remplaçons f par sa valeur, nous avons :

$$f_n = \frac{ds.ds'}{x^2} \cos \alpha.$$

Élevons maintenant au point c une perpendiculaire cj, qui représente en grandeur et en direction la composante normale à BB' de la force f. Cette composante a pour expression $f \cos \widehat{dcj}$; mais l'angle $\widehat{dcj}$ est égal à l'angle α, donc la composante cj est égale à ;

$$\frac{ds.ds'}{x^2} \cos \alpha,$$

c'est-à-dire à la force f_n.

Il est facile de voir, en se reportant au théorème de Green (36), que cette expression n'est autre que celle du *flux de force* qui est :

$$f_N = f \cos \alpha = \frac{M.ds.\cos.\alpha}{x^2},$$

à la condition de remplacer M par ds'.

La force totale appliquée en a est donc égale à la somme de tous les flux de force émanant de l'armature BB'. Or, le théorème de Green nous apprend que, lorsque la masse agissante M (ici l'élément a) est située sur la surface même d'où émanent les flux de force, le flux total a pour valeur

$$\frac{1}{2} 4\pi M,$$

c'est-à-dire la moitié de ce qu'il serait s'il était complètement enveloppé par la surface. C'est le cas présent, puisque l'armature BB' est un plan indéfini et que le cône décrit du point a comme sommet, intercepte une surface égale à 2π sur la sphère de rayon 1.

La force totale F_n a donc pour expression :

$$F_n = 2\pi ds'.$$

Mais nous avons supposé que les deux armatures étaient chargées de l'unité de quantité électrique par unité de surface ; s'il en était autrement, il serait facile de trouver la valeur de F_n. L'attraction mutuelle de deux éléments de surface ds et ds', au lieu d'être représentée par le produit

$$\frac{ds.ds'}{x^2}$$

deviendrait égale à

$$\frac{(ds \times \delta)(ds' \times \delta)}{x^2} = \frac{ds.ds'}{x^2}\delta^2,$$

désignant la quantité d'électricité par unité de surface.

On aurait donc ainsi :

$$F_n = 2\pi\delta^2 . ds'.$$

124. — Valeur de la densité électrique. — Cherchons maintenant la valeur de δ lorsqu'on connaît la différence de potentiel V des deux armatures du condensateur.

L'équation

$$Q = cV$$

donne, en remplaçant la capacité c par sa valeur, dans un condensateur plan de surface S, dont les armatures sont à une distance x :

$$c = \frac{S}{4\pi x},$$

d'où

$$Q = \frac{SV}{4\pi x}.$$

Mais la charge δ par unité de surface est égale à

$$\frac{Q}{S},$$

donc

$$\delta = \frac{V}{4\pi x}.$$

Remplaçant δ par sa valeur dans l'équation de F_n, il vient :

$$F_n = \frac{ds'}{8\pi x^2}V^2.$$

Si l'élément ds', au lieu d'être infiniment petit, avait une valeur assez petite pour que l'on pût toujours admettre que le cône décrit d'un de ses points comme centre eût une ouverture peu différente de 2π, la formule serait encore applicable. Nous adopterons donc pour la valeur de F_n, lorsque l'élément de surface attiré est représenté par a, l'expression

$$F = \frac{aV^2}{8\pi x^2},$$

de laquelle on tire

$$V = 2x\sqrt{\frac{2\pi F}{a}}.$$

L'électromètre absolu de William Thomson (Lord Kelvin) est basé sur l'emploi de cette formule. Nous le décrirons en parlant des instruments de mesure.

Il est à peine nécessaire de rappeler que dans toutes les formules que nous venons d'établir, les forces sont exprimées en *dynes*, les longueurs en centimètres, les surfaces en centimètres carrés, et que les potentiels, pour être traduits en volts, doivent être multipliés par le nombre 300.

§ 9. — PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES DES CONDENSATEURS A LAME DIÉLECTRIQUE.

125. — Variation de capacité d'un condensateur sans mouvement des armatures. — Efforts mécaniques exercés sur le diélectrique. — Si entre les armatures d'un condensateur plan à lame d'air, on introduit une lame en métal moins épaisse que l'intervalle qui les sépare, ou une lame isolante d'une épaisseur quelconque, on augmente dans les deux cas la capacité du condensateur d'une quantité qu'il est facile de calculer en s'appuyant sur les principes développés dans ce chapitre. Si le condensateur est chargé d'avance d'une quantité Q d'électricité et qu'il soit isolé dans l'espace, la charge qu'il contient ne peut varier, et son énergie potentielle, avant l'introduction de la plaque additionnelle entre les deux armatures, a pour valeur, en désignant sa capacité initiale par C_0

$$W_0 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_0}.$$

Après l'introduction de la lame métallique ou isolante entre les deux armatures, la capacité prend une nouvelle valeur C_1, plus grande que C_0, et l'énergie potentielle du condensateur devient

$$W_1 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1}$$

de sorte que l'énergie potentielle a diminué d'une quantité

$$W_0 - W_1 = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{C_0} - \frac{1}{C_1}\right).$$

En vertu du principe de la conservation de l'énergie, cette quantité d'énergie $W_0 - W_1$ qui semble disparue, doit se retrouver ailleurs. Or elle ne peut se retrouver sous forme d'énergie potentielle électrique, ni dans la lame métallique dont les deux faces sont toujours au même potentiel et ne peuvent par conséquent donner lieu à aucun travail électrique ; ni dans le diélectrique, qui étant isolant, ne permet à aucun courant de se produire pendant que le potentiel de ses deux faces varie, par suite de son introduction entre les armatures du condensateur.

Cette quantité d'énergie, $W_0 - W_1$ ne peut donc disparaître qu'à la condition de se transformer en travail mécanique extérieur qui est évidemment appliqué à la lame pendant son introduction dans l'intervalle des armatures. Cette lame est donc attirée, et l'attraction est d'autant plus grande, que la variation de capacité correspondante à un enfoncement déterminé, est plus considérable ; c'est-à-dire que l'épaisseur de la lame est plus grande.

Si les deux armatures du condensateur, au lieu d'être séparées par de l'air étaient plongées dans un liquide isolant, l'introduction d'une lame métallique entre elles augmenterait encore la capacité, mais il n'en serait pas nécessairement ainsi avec une lame isolante. Car si cette dernière était faite d'une substance dont le pouvoir inducteur spécifique fût plus petit que celui du liquide, son introduction aurait au contraire pour effet une diminution de la capacité, puisqu'une certaine épaisseur de la lame liquide serait remplacée dans ce cas par une épaisseur égale d'un corps doué d'un pouvoir inducteur moindre. Les raisonnements que nous venons d'exposer, montrent que dans ce dernier cas, les armatures du condensateur plongées dans le liquide exerceraient sur la lame métallique une action attractive, tandis qu'elles exerceraient au contraire sur la lame isolante une action *attractive*, *nulle* ou *répulsive* suivant que le pouvoir inducteur spécifique de la substance de cette lame serait supérieur, égal ou inférieur à celui du liquide.

126. — Si au lieu d'être chargées d'une quantité constante d'électricité, les deux armatures étaient maintenues à un potentiel constant au moyen d'une source d'électricité, le travail moteur produit sur la lame métallique ou isolante pendant son introduction, aurait pour expression

$$W = \frac{V^2}{2}(C_1 - C_0)$$

et en même temps l'énergie potentielle du conducteur augmenterait d'une quantité précisément égale ; de sorte que le réservoir fournirait en réalité une quantité d'énergie égale à

$$V^2(C_1 - C_0).$$

L'accroissement de capacité, étant proportionnel à la quantité dont la lame pénètre dans l'intervalle des armatures du condensateur, on voit que le travail mécanique produit est proportionnel à cette même quantité, et que par conséquent l'effort appliqué à la lame dans la direction du mouvement est constant. Le principe de la conservation de l'énergie nous apprend que la différence de potentiel des deux armatures doit nécessairement diminuer, mais il ne nous apprend rien sur les causes physiques de cette diminution ; ou en d'autres termes quels sont les phénomènes électriques qui la produisent. Nous devons donc, en nous appuyant sur les lois que nous connaissons, chercher comment elle s'accomplit. Pour cela remarquons d'abord que l'existence d'un travail mécanique, accompli par la lame diélectrique, entraîne nécessairement l'existence d'une force qui lui est appliquée, et que l'existence de cette force, due aux armatures, ne peut s'expliquer que si la lame diélectrique est elle-même électrisée par induction. Mais cette électrisation ne peut se produire, comme nous venons de le dire plus haut, de la même manière que dans un corps conducteur, puisque le diélectrique étant absolument isolant, aucun déplacement d'électricité ne peut se produire à son intérieur. On est donc forcé d'admettre que les diélectriques sont capables de s'électriser, mais d'une façon toute particulière, et nous verrons plus tard en étudiant les corps magnétiques, que les phénomènes qu'ils présentent, alors qu'on les place dans un champ magnétique, ont une grande analogie avec ceux des corps diélectriques mis en présence de corps électrisés.

127. — Calculons maintenant la valeur de la force dont nous venons de constater l'existence nécessaire. Nous n'avons pour cela qu'à appliquer l'équation générale qui nous a permis de calculer la force attractive mutuelle des deux armatures d'un condensateur plan (121)

$$F = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx}.$$

Cette équation est toujours vraie pourvu que la variation infiniment petite de capacité dC soit due au mouvement d'un corps dont un des points, en se déplaçant de la quantité dx, exigera l'application en ce point de la force F mesurée dans la direction du déplacement dx. Elle s'applique donc à tous les cas où la variation de capacité du condensateur est due : soit au déplacement relatif des armatures (problème que nous avons déjà traité) ; soit à l'introduction d'un diélectrique dans l'intervalle qui les sépare. C'est ce dernier problème que nous allons étudier.

Soit AA′ et BB′ (fig. 48) les deux armatures d'un condensateur à lame d'air dont nous représenterons l'écartement par a ; DD′ la lame diélectrique d'épaisseur a et dont le pouvoir inducteur spécifique est k.

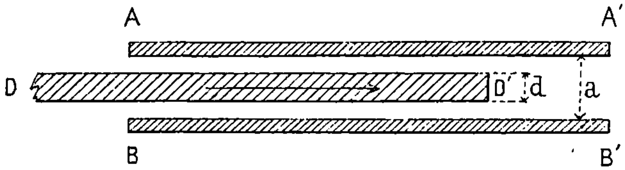


Fig. 48

Désignons par l la largeur des armatures et de la lame DD′ dans le sens perpendiculaire au plan de la figure.

Si on fait avancer horizontalement la lame DD′ dans le sens de la flèche d'une quantité x, la capacité de l'ensemble augmentera d'une quantité c égale à la différence entre la capacité d'un condensateur à lame d'air d'épaisseur a, de longueur x, de largeur l, et celle d'un second condensateur également à lame d'air de longueur x, de largeur l, et dont l'écart entre les armatures serait égal à l'épaisseur totale des couches d'air comprises entre les armatures et le diélectrique, augmentée d'une épaisseur d'air *équivalente* à celle du diélectrique.

Or, l'épaisseur d'air totale comprise entre les armatures et la lame est égale à $a-d$; l'épaisseur d'air *équivalente* à celle du diélectrique a pour valeur $\frac{d}{k}$; donc l'épaisseur de la couche d'air de ce second condensateur serait

$$a-d+\frac{d}{k},$$

et l'accroissement de capacité aurait pour expression, en appliquant la formule générale des condensateurs plans

$$C=\frac{lx}{4\pi\left(a-d+\frac{d}{k}\right)}-\frac{lx}{4\pi a}.$$

On trouve en différentiant par rapport à x

$$\frac{dC}{dx}=\frac{l}{4\pi}\left[\frac{k}{ka-(k-1)d}-\frac{1}{a}\right].$$

La valeur de la force F est donc

$$F=\frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx}=\frac{lV^2}{8\pi}\left[\frac{k}{ka-(k-1)d}-\frac{1}{a}\right].$$

Si l'épaisseur de la lame DD′ était égale à a, c'est-à-dire si elle remplissait complètement l'intervalle des deux armatures, on aurait

$$F=\frac{(k-1)lV^2}{8\pi a}.$$

On voit que cet effort est constant, en raison inverse de a, et proportionnel à l'excès du pouvoir inducteur de la lame sur celui de l'air.

128. — Si au lieu d'une seule lame diélectrique DD′, on suppose qu'il en existe deux collées bout à bout de façon que l'arête D′ constitue leur ligne de séparation et si, pour plus de généralité, on admet qu'elles soient plongées dans un milieu autre que l'air, on arrive à la formule suivante [1]

$$F = \frac{lk'V^2}{8\pi}\left[\frac{k_2}{(a-d)k_2 + dk'} - \frac{k_1}{(a-d)k_1 + dk'}\right]$$

dans laquelle k_1, k_2, k', désignent respectivement le pouvoir inducteur de la lame DD', le pouvoir inducteur de la seconde lame (non représentée sur la figure) située dans son prolongement, et le pouvoir inducteur du milieu gazeux ou liquide dans lequel l'appareil est plongé.

Il est facile de voir d'ailleurs, que l'ensemble des lames diélectriques n'est soumis à aucun effort dans le sens perpendiculaire au plan des armatures, parce qu'un déplacement des lames dans ce sens n'amènerait aucune variation de capacité et que par conséquent dC étant nul pour une valeur quelconque de dx, $\frac{dC}{dx}$ est également nul ainsi que la force F qui lui est proportionnelle.

Il serait toutefois plus exact de dire que la résultante des forces normales au plan des lames diélectriques est nulle, que de dire que ces lames ne sont soumises à aucune force, et ce n'est pas simplement le désir d'employer des expressions absolument correctes qui nous fait faire cette remarque ; car une force normale au plan de la lame diélectrique, ne pouvant émaner que des armatures, aurait pour conséquence nécessaire l'existence d'une force égale et contraire appliquée aux armatures, et aurait ainsi pour effet de modifier leur force attractive mutuelle sans que la lame diélectrique parût soumise à aucune force normale. Or, nous verrons bientôt que l'introduction d'une lame diélectrique entre les armatures d'un condensateur, modifie beaucoup leur attraction apparente.

Pour terminer ce qui est relatif à l'effort longitudinal dont nous venons de donner l'expression, nous ajouterons que si dans la formule générale on suppose que l'épaisseur d des lames diélectriques est

---

(1) *Pellat.* Force agissant à la surface de séparation de deux diélectriques. — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Tome 119, page 675.

égale à l'écartement a des armatures, la valeur de F devient

$$F = \frac{fV^2}{8\pi a}(k_2 - k_1)$$

et que mise sous cette forme, elle a été, de la part de M. Pellat, l'objet de vérifications expérimentales qui en ont démontré l'exactitude.

129. — Influence d'un diélectrique sur l'attraction mutuelle des armatures d'un condensateur. — L'introduction d'une lame diélectrique modifie profondément l'attraction mutuelle des armatures d'un condensateur à lame d'air ainsi que nous allons le voir en appliquant encore la formule

$$F = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{da}$$

dans laquelle nous supposons maintenant que le déplacement infiniment petit da, est imprimé à l'une des armatures perpendiculairement à son plan. Lorsque l'intervalle compris entre les deux armatures ne contient que de l'air dont le pouvoir inducteur spécifique est considéré comme égal à 1, cette formule donne, en conservant les mêmes notations que dans le problème précédent

$$C = \frac{S}{4\pi a}, \qquad \frac{dC}{da} = -\frac{S}{4\pi a^2},$$

d'où

$$F = -\frac{SV^2}{8\pi a^2} \text{ (1)}$$

formule déjà établie précédemment (124).

Introduisons maintenant entre les armatures une lame diélectrique d'une étendue au moins égale, de façon à les séparer entièrement, la

(1) La formule du n° 124 à laquelle nous renvoyons le lecteur, est la suivante :

$$F = \frac{aV^2}{8\pi x^2}$$

dans laquelle a et x représentent respectivement les quantités désignées par S et par a dans la formule actuelle.

capacité deviendra

$$C' = \frac{S}{4\pi\left(a - d + \frac{d}{k}\right)} = \frac{kS}{4\pi[ka - (k-1)d]}$$

le dénominateur étant le produit du nombre 4π, par l'épaisseur *réelle* $a - d$ de la couche d'air, augmentée de l'épaisseur équivalente $\frac{d}{k}$.

On a d'ailleurs

$$\frac{dC'}{da} = \frac{-k^2 S}{4\pi[ka - (k-1)d]^2},$$

d'où

$$F' = -\frac{k^2 S V^2}{8\pi[ka - (k-1)d]^2},$$

d'où enfin

$$\frac{F'}{F} = \frac{k^2 a^2}{[ka - (k-1)d]^2} = \left[\frac{ka}{ka - (k-1)d}\right]^2 = \left[\frac{a}{a - d + \frac{d}{k}}\right]^2.$$

Si l'épaisseur d de la lame diélectrique diffère très peu de l'écartement a des armatures, le rapport $\frac{F'}{F}$ est comme on le voit très peu différent de k^2. On aurait donc à la limite

$$\frac{F'}{F} = k^2.$$

Le rapport de l'attraction de deux armatures, séparées par un diélectrique dont l'épaisseur diffère *extrêmement peu* de leur écartement, à cette même attraction lorsqu'elles ne sont séparées que par de l'air, est donc sensiblement proportionnel au *carré* du pouvoir inducteur spécifique du diélectrique.

La formule qui, dans le cas le plus général, donne la valeur du rapport $\frac{F'}{F}$, a été l'objet de vérifications expérimentales parmi lesquelles nous citerons celles de M. J. Lefèvre (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Tomes 113 et 114). Elles ont montré que l'action mécanique mutuelle de deux corps électrisés est augmentée.

lorsqu'on interpose entre eux une lame diélectrique, d'une quantité égale à celle qui résulterait de la substitution, à la lame diélectrique, d'une couche d'air d'épaisseur $\frac{d}{k}$, d étant l'épaisseur de la lame et k son pouvoir inducteur spécifique. C'est d'ailleurs la conclusion à laquelle nous sommes déjà arrivés en étudiant les conséquences qui découlent de la propriété fondamentale que possèdent les diélectriques, d'augmenter dans le rapport de k à 1 la charge d'un condensateur à lame d'air lorsque cette dernière est remplacée par une lame diélectrique de même épaisseur, et que la différence de potentiel entre les deux armatures est maintenue constante.

Voici au surplus quelques-uns des résultats expérimentaux obtenus par M. Lefèvre :

Diélectriques	a	d	F	F′	k
Paraffine	2,90	2,20	17,25	39,5	2
Soufre	4,10	3,56	9,75	48,5	2,6
Ebonite	2,36	2,04	18,75	72,75	2,3
Sulfure de carbone. . . .	3,69	2,60	11,50	22	1,7
Essence de térébentine . .	3,56	2,77	13	26,25	1,5
Pétrole	3,59	2,88	8	19,50	1,9

Dans ce tableau, a désigne l'écartement des armatures exprimé en centimètres,

d l'épaisseur de la lame diélectrique,

F l'attraction (en dynes) des deux armatures, lorsque leur intervalle ne contient que de l'air,

F′ leur attraction lorsque le diélectrique d'épaisseur d est introduit entre elles,

k le pouvoir inducteur spécifique déduit d'expériences analogues faites avec la balance de Coulomb et basées sur les mêmes principes.

On voit que les valeurs de k trouvées par cette méthode diffèrent peu de celles qui ont été déterminées par des méthodes toutes différentes (voir le tableau du n° 95). C'est d'ailleurs en employant une méthode basée sur le même principe, réalisé d'une manière différente, que M. Pellat a mesuré le pouvoir inducteur des solides et des liquides.

130. — Valeur du Flux total de Force qui traverse le diélectrique d'un Condensateur. — La connaissance de la force attractive qui existe entre les deux armatures, permet de trouver facilement le flux total de force qui traverserait un plan situé dans leur intervalle, puisque le flux total est égal à la force totale qui solliciterait ce plan perpendiculairement à sa direction, *s'il était chargé de l'unité de quantité par unité de surface*. Or, cette force est indépendante de la distance du plan aux armatures, comme nous l'avons vu en cherchant l'expression de l'attraction mutuelle de deux armatures *chargées d'une quantité constante d'électricité* (121), et elle est proportionnelle à la densité électrique de la charge du plan, celle des armatures restant inaltérée. Il suffit donc, pour trouver la valeur du flux total de force, de diviser la force totale due à l'attraction mutuelle des deux armatures, par la densité électrique de la charge de l'une d'elles; on a ainsi, en désignant le flux total de force par $\mathfrak{F}$; l'attraction mutuelle des deux armatures par F; leur surface par S et la charge totale de chacune d'elles par Q

$$\mathfrak{F} = \frac{F}{\left(\frac{Q}{S}\right)} = \frac{SF}{Q}.$$

Mais la force F a pour valeur, lorsque le diélectrique remplit presqu'exactement l'intervalle compris entre les armatures

$$F = \frac{k^2SV^2}{8\pi d^2} \qquad \text{d'où} \qquad \mathfrak{F} = \frac{k^2S^2V^2}{8\pi Qd^2}.$$

Mais on a

$$Q = CV \qquad C = \frac{kS}{4\pi d}. \qquad \text{(Capacité d'un condensateur plan).}$$

Donc

$$\mathfrak{F} = \frac{kSV}{2d}.$$

Mais on n'obtient ainsi que la moitié du flux total qui traverse le plan, car $\mathcal{F}$ représente ici l'attraction ou la répulsion exercée par une des armatures seulement, sur le plan chargé d'une unité électrique (de signe quelconque mais invariable une fois choisie) par unité de surface ; il faut y ajouter la répulsion ou l'attraction numériquement égale à $\mathcal{F}$, exercée par la seconde armature. On a donc finalement, en désignant le flux total par $2\mathcal{F}$

$$2\mathcal{F} = \frac{k\mathrm{SV}}{d} = \frac{\mathrm{V}}{\left(\frac{d}{k\mathrm{S}}\right)},$$

équation importante que nous retrouverons dans les phénomènes magnétiques.

131. — Transmission du travail au moyen de deux condensateurs à capacité variable. — Revenons maintenant à la question traitée au n° 116 et cherchons la valeur du travail mécanique, positif ou négatif, développé par chacune des armatures mobiles des deux condensateurs. Supposons d'abord que les deux condensateurs AB, A'B' aient leur capacité maxima et qu'on mette les deux conducteurs qui les réunissent en rapport avec une source d'électricité qui fournit aux armatures A et B du premier, A' et B' du second, une charge $+Q-Q$, $+Q'-Q'$. Nous admettons que les condensateurs sont identiques, de sorte que leur capacité maxima C a la même valeur ainsi que leur capacité minima c, il en est de même par conséquent de la quantité d'électricité $Q = Q'$ que chacun d'eux reçoit de la source dans la position du maximum de capacité.

La quantité *totale* d'électricité fournie par le réservoir, lorsqu'ils ont tous deux la capacité maxima C, est donc égale à 2Q, et la différence de potentiel entre les deux armatures A, B, A', B' a pour valeur $\frac{Q}{C}$.

Ceci posé, imprimons aux armatures supérieures des mouvements alternatifs de même amplitude mais non simultanés, de façon que la capacité de chacun des condensateurs oscille périodiquement entre C et c, les phases de ce mouvement n'étant pas concordantes, comme le montre le diagramme ci-contre (fig. 49) dans lequel on a porté sur l'axe des x des longueurs égales représentant des unités de temps, et sur l'axe des y des longueurs proportionnelles à la capacité. La courbe représentative de la capacité de chaque condensateur

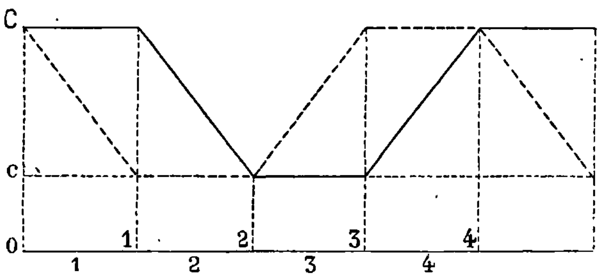


Fig. 49

est ainsi figurée par un tracé en traits pleins pour le condensateur A'B' et en traits ponctués pour AB.

On voit que la période du mouvement de chaque armature se décompose en quatre phases au bout desquelles les deux capacités ont repris les valeurs respectives qu'elles avaient au commencement. Il est facile de trouver la quantité d'électricité, la différence de potentiel et l'énergie potentielle de chaque condensateur à la fin de chacune de ces phases, au moyen des formules démontrées (115).

Mais il n'en est pas de même du travail mécanique développé par chacune des armatures mobiles. Nous n'avons en effet traité jusqu'à présent que deux cas : celui d'un condensateur à charge constante et celui d'un condensateur à potentiel constant. L'ensemble des deux appareils constitue bien ici un condensateur à charge constante, mais la charge et le potentiel de chacun d'eux varient à la fois, de sorte que le travail mécanique développé au bout d'une période, nul si on considère leur ensemble, pourrait très bien avoir une valeur numérique différente de zéro si on considère chacun d'eux en particulier. C'est là un point très important à constater, parce que s'il est exact, on réaliserait ainsi une véritable transmission de travail mécanique.

L'expression du travail mécanique donnée au n° 120 va nous permettre de résoudre ce problème. Cette expression

$$d\mathfrak{T} = \frac{1}{2} V^2 dc$$

s'applique au travail mécanique infiniment petit développé par l'armature mobile d'un condensateur de capacité variable et donne par intégration

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \int V^2 dc.$$

Mais les équations du n° 115 font connaître la différence de potentiel V des armatures de deux condensateurs de capacités c et c' communiquant entre eux. On a en effet

$$V = \frac{Q}{c + c'},$$

Q étant la *charge totale* collective des deux appareils qui est invariable dans le problème actuel. En remplaçant V par sa valeur, l'expression du travail mécanique devient

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \int V^2 dc = \frac{1}{2} \int \frac{Q^2 dc}{(c + c')^2} = \frac{Q^2}{2} \int \frac{dc}{(c + c')^2}.$$

Pour trouver la valeur de cette intégrale, il faudrait connaître la relation analytique qui existe entre c et c', ou entre chacune d'elles et une troisième variable telle que le temps, comme nous l'avons supposé sur notre diagramme.

Le cas le plus simple, est celui où on suppose que la capacité c' de l'un des condensateurs reste constante pendant que la capacité de l'autre passe de la valeur minima c à la valeur maxima C. L'intégration peut se faire immédiatement et donne

$$\mathfrak{T} = \frac{Q^2}{2} \left(\frac{1}{c + c'} - \frac{1}{C + c'} \right) \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{T} = \frac{Q^2}{2} \frac{C - c}{(C + c')(c + c')}.$$

132. — Voici maintenant un tableau détaillé des valeurs de la charge, du potentiel, de l'énergie potentielle et du travail mécanique de chaque condensateur, correspondantes à chacune des quatre phases d'une période. Nous avons représenté par 2Q la charge totale collective des 2 condensateurs.

CONDENSATEUR AB		CONDENSATEUR A'B'	

1re Phase.

La capacité diminue depuis	C jusqu'à c.	La capacité reste constante et égale à . .	C.
La charge diminue depuis	Q id. $\frac{2c}{C+c}$ Q.	La charge augmente depuis	Q jusqu'à $\frac{2CQ}{C+c}$.
Le potentiel augmente depuis	$\frac{2Q}{2C}$ id. $\frac{2Q}{C+c}$.	Le potentiel augmente depuis	$\frac{2Q}{2C}$ id. $\frac{2Q}{C+c}$.
L'énergie potentielle diminue depuis . .	$\frac{2CQ^2}{(C+C)^2}$ id. $\frac{2cQ^2}{(C+c)^2}$.	L'énergie potentielle augmente depuis .	$\frac{2CQ^2}{(C+C)^2}$ id. $\frac{2CQ^2}{(C+c)^2}$.
Travail mécanique *résistant*.	$\frac{Q^2(C-c)}{(C+c)C}$.	Travail mécanique *nul*.	

2e Phase.

La capacité reste constante et égale à . .	c.	La capacité diminue depuis	C jusqu'à c.
La charge augmente depuis	$\frac{2cQ}{C+c}$ jusqu'à Q.	La charge diminue depuis	$\frac{2CQ}{C+c}$ id. Q.
Le potentiel augmente depuis	$\frac{2Q}{C+c}$ id. $\frac{2Q}{c+c}$.	Le potentiel augmente depuis	$\frac{2Q}{C+c}$ id. $\frac{2Q}{c+c}$.
L'énergie potentielle augmente depuis .	$\frac{2cQ^2}{(C+c)^2}$ id. $\frac{2cQ^2}{(c+c)^2}$.	L'énergie potentielle augmente depuis .	$\frac{2CQ^2}{(C+c)^2}$ id. $\frac{2cQ^2}{(c+c)^2}$.
Le travail mécanique est *nul*.		Le travail mécanique *résistant* est égal à.	$\frac{2Q^2(C-c)}{2c(C+c)}$.

3e Phase.

La capacité augmente depuis	c jusqu'à C.	La capacité reste constante et égale à. .	c.
La charge augmente depuis	Q id. $\frac{2QC}{C+c}$.	La charge diminue depuis	Q jusqu'à $\frac{2cQ}{C+c}$.
Le potentiel diminue depuis	$\frac{Q}{c}$ id. $\frac{2Q}{C+c}$.	Le potentiel diminue depuis	$\frac{Q}{c}$ id. $\frac{2Q}{C+c}$.
L'énergie potentielle diminue depuis . .	$\frac{Q^2}{2c}$ id. $\frac{2CQ^2}{(C+c)^2}$.	L'énergie potentielle diminue depuis . .	$\frac{Q^2}{2c}$ id. $\frac{2cQ^2}{(C+c)^2}$.
Le travail mécanique *moteur* est. . . .	$\frac{2Q^2(C-c)}{2c(C+c)}$.	Le travail mécanique est *nul*.	

4e Phase.

La capacité reste constante et égale à . .	C.	La capacité augmente depuis	c jusqu'à C.
La charge diminue depuis	$\frac{2CQ}{C+c}$ jusqu'à Q.	La charge augmente depuis	$\frac{2cQ}{C+c}$ id. Q.
Le potentiel diminue depuis	$\frac{2Q}{C+c}$ id. $\frac{Q}{C}$.	Le potentiel diminue depuis	$\frac{2Q}{C+c}$ id. $\frac{Q}{C}$.
L'énergie potentielle diminue depuis . .	$\frac{2CQ^2}{(C+c)^2}$ id. $\frac{Q^2}{2C}$.	L'énergie potentielle augmente depuis .	$\frac{2cQ^2}{(C+c)^2}$ id. $\frac{Q^2}{2C}$.
Le travail mécanique est *nul*.		Le travail mécanique *moteur* est égal a.	$\frac{2Q^2(C-c)}{2C(C+c)}$.

On voit qu'au bout d'une période complète, la capacité, la charge, le potentiel et l'énergie potentielle de chaque condensateur ont repris leurs valeurs initiales, tandis que le travail mécanique total de AB, pendant une période, a pour valeur la différence des travaux accomplis pendant la première et la troisième phase.

Ce travail est *résistant* pendant la première phase parce qu'il correspond à une *diminution* de la capacité, c'est-à-dire à une *augmentation* de distance des plateaux A et B qui, étant chargés d'électricités de signe contraire, tendent à s'approcher le plus possible. Il est *moteur* pendant la troisième phase pour des raisons de même ordre. Si sa valeur numérique correspondante à la troisième phase l'emporte sur celle de la première phase, l'appareil sera un *moteur* capable d'accomplir un travail mécanique extérieur. Or c'est précisément ce qui a lieu, et la différence des travaux moteur et résistant est, après simplification,

$$\frac{Q^2(C-c)}{c(C+c)} - \frac{Q^2(C-c)}{C(C+c)} = Q^2 \frac{(C-c)^2}{cC(C+c)}.$$

On verrait de même que le travail total accompli pendant une période complète par l'armature mobile A'B' est *résistant*, c'est-à-dire exige l'intervention d'un moteur extérieur, et que sa valeur numérique est précisément la même que celle du travail *moteur* développé par l'armature de AB. Cet ensemble de condensateurs constitue donc un mécanisme capable de transmettre intégralement, d'un endroit à un autre, un travail mécanique fourni par un moteur quelconque ; c'est là un fait très remarquable, qui croyons-nous n'avait pas encore été signalé et étudié comme nous venons de le faire.

Il faut toutefois remarquer une fois de plus, que nos conclusions ne sont rigoureuses que si les conducteurs qui réunissent les 2 condensateurs, n'opposent pas de résistance à la propagation des courants alternatifs que nous avons signalés au n° 116, c'est-à-dire s'il n'y a pas de différence de potentiel entre les deux armatures reliées par un conducteur.

Un autre point très important, c'est qu'il y ait entre les mouvements des armatures des deux condensateurs, la différence de phase dont nous avons déjà signalé la nécessité. Sans cela le travail moteur développé dans un des condensateurs pendant une certaine phase serait annulé par un travail résistant égal développé dans une autre phase ; et le travail transmis pendant une période au second condensateur serait algébriquement nul.

133. — Exemple numérique. — Nous allons faire une application numérique de la formule qui donne la valeur du travail mécanique pendant une période. Mais nous devons, auparavant, chercher à éviter de prendre pour C et c des valeurs qui rendraient la formule illusoire. Ainsi il semble que la valeur de $\mathfrak{T}$ tende vers l'infini lorsque la limite inférieure de la capacité des condensateurs tend vers zéro ; cela est vrai algébriquement, mais ne l'est pas en réalité, pas plus qu'il n'est vrai que l'énergie potentielle d'un condensateur de capacité variable, à charge constante, tende vers l'infini quand les deux armatures s'éloignent indéfiniment l'une de l'autre.

Il faut se rappeler ce que nous avons déjà dit à ce sujet lorsque nous avons calculé la force attractive développée entre les armatures de deux condensateurs (121). Nous choisirons donc les valeurs minima et maxima de la capacité variable, de manière qu'elles soient comprises entre les limites où la formule

$$C = \frac{A}{4\pi\delta}$$

est applicable, et nous nous donnerons la valeur du potentiel correspondante à la capacité minima, parce que c'est précisément dans ce cas qu'elle atteint le chiffre le plus élevé.

Supposons qu'il s'agisse de deux condensateurs plans ayant 1 mètre carré et dont les armatures soient séparées par une lame de verre de 5 millimètres d'épaisseur ; le pouvoir inducteur spécifique du verre étant pris égal à 3, la capacité maxima sera égale à

$$\frac{100 \times 100 \times 3}{4\pi \times 0,5} = 4800.$$

Si nous augmentons ensuite l'écart des armatures de manière à réduire la capacité au quart de sa valeur primitive, soit 1200 unités, et si nous attribuons au potentiel la limite de 400 unités (120 000 volts), qui ne paraît pas exagérée, puisqu'une lame de mica de $\frac{1}{20}$ de millimètre résiste à 10 unités ou 3000 volts, nous trouvons pour la quantité d'électricité afférente à un des condensateurs lorsque la capacité est minima

$$Q = CV = 1200 \times 400 = 480\,000.$$

Nous admettrons une charge égale pour l'autre condensateur lorsqu'il a aussi sa capacité minima, de sorte que la charge constante de l'ensemble est de 960 000 unités. Le travail mécanique utile développé par AB pendant une période, aura alors pour valeur

$$\overline{480\,000}^2 \times \frac{\overline{3600}^2}{1200 \times 4800 \times 6000} = 86\,400\,000 \text{ ergs},$$

soit environ 0,88 de kilogrammètre.

134. — Nous avons supposé que la capacité oscillait entre 4800 et 1200 unités. Cette variation peut être obtenue, soit en imprimant à la lame AA un mouvement dirigé suivant la normale commune aux deux armatures (fig. 50), soit en la faisant glisser parallèlement à l'armature inférieure (fig. 51), le diélectrique DD empêchant dans

Fig. 50

Fig. 51

les deux cas l'échange d'étincelles entre les armatures et ayant en outre l'avantage d'augmenter beaucoup la valeur de la capacité maxima C. Ces deux moyens, identiques comme résultat, en ce qui concerne la variation de capacité, ont au point de vue pratique des qualités très différentes. Le premier entraîne comme conséquence l'emploi d'un mouvement alternatif, tandis que le second permet l'emploi d'un mouvement de rotation continu, ce qui constitue une très grande supériorité. Car le travail mécanique de 0,88 kilogrammètre trouvé plus haut est médiocre, et devrait être répété 85 fois par seconde si on voulait obtenir la puissance d'un cheval-vapeur. Il faudrait donc imprimer au plateau AB un mouvement alternatif de 85 oscillations doubles par seconde, tandis que le dispositif de la figure 51 permettrait, au moyen d'un artifice très simple que nous allons indiquer, d'obtenir au moyen d'un mouvement de rotation continu, un nombre de périodes aussi grand que l'on veut pour une vitesse angulaire donnée.

135. — Soit ABCDEA un plateau de verre divisé en huit parties égales (fig. 52); quatre de ces parties sont recouvertes de feuilles métalliques affectant la forme de secteurs circulaires dont la hauteur Cc est égale à la moitié du rayon.

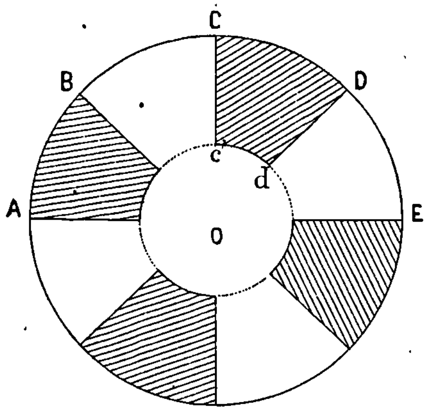


Fig. 52

Ce plateau est placé devant un second plateau [1] qui lui est concentrique et qui en est écarté d'une distance telle que le premier plateau peut tourner librement sans frotter le second. Si l'on suppose que les secteurs métalliques ou armatures de ces deux plateaux soient placés exactement en face les uns des autres, et que l'on fasse communiquer toutes les pièces métalliques du premier avec le pôle positif d'une source d'électricité tandis que les armatures du second communiquent avec le pôle négatif, l'appareil constituera un condensateur dont la surface de chaque armature sera égale à la somme des surfaces des armatures d'un des plateaux, c'est-à-dire les $\frac{3}{8}$ de celle du cercle.

Si l'on fait tourner l'un des plateaux d'un angle égal à l'espace recouvert par un des secteurs, les pièces métalliques de l'un des

(1) Dans la figure 52, les secteurs métalliques (représentés par les parties hachées) ont une étendue angulaire égale à celle des secteurs isolants. Si le second plateau était identique au premier, la capacité de l'ensemble passerait quatre fois dans un tour par zéro et par sa valeur maxima sans jamais rester constante ; on ne réaliserait donc pas ainsi les conditions représentées par le graphique de la figure 49. Pour les réaliser, il faudrait que les secteurs métalliques du second plateau eussent une étendue égale à une fois et demie celle des secteurs métalliques du premier plateau.

plateaux seront en face des espaces non recouverts de l'autre; de sorte que dans cette seconde position, l'appareil ne forme plus condensateur. Il nous est donc possible, par une simple rotation d'un huitième de tour, de faire passer la capacité de l'appareil, de sa valeur maxima à zéro.

Si au lieu de diviser chaque plateau de verre en huit parties, on le divisait en seize parties, la capacité maxima resterait la même que dans l'exemple précédent, la surface totale métallique restant toujours égale aux $\frac{3}{8}$ de celle du cercle; mais il y aurait une différence importante entre les deux dispositions; cette différence consiste en ce que pour faire passer la capacité totale de l'appareil, de sa valeur maxima à zéro, il suffit de faire décrire au plateau mobile un angle égal à $\frac{1}{16}$ de circonférence, c'est-à-dire deux fois moindre que dans l'exemple précédent.

Il est facile de voir que si le nombre des secteurs était n fois aussi grand que nous l'avons supposé, la capacité totale resterait toujours la même, tandis que l'angle qu'il faudrait faire décrire au plateau mobile pour faire varier la capacité entre sa valeur maxima et zéro, deviendrait n fois moindre. Nous sommes donc en possession d'un procédé permettant de faire osciller la capacité d'un condensateur entre deux limites données, autant de fois qu'on le veut dans l'unité de temps, sans qu'il soit nécessaire d'imprimer aux pièces mobiles une vitesse dépassant certaines limites.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur ce sujet; ce que nous avons dit suffit pour établir la possibilité de la transmission d'un travail, à une distance quelconque, au moyen de condensateurs à capacité variable [1].

---

(1) Nous nous sommes assuré au moyen de calculs trop longs pour être reproduits ici de la possibilité de transmettre, par le procédé que nous venons de décrire, un travail de plusieurs chevaux au moyen de plateaux de verre recouverts de secteurs équidistants en feuille d'étain, les dimensions et les vitesses restant dans les limites industriellement admises.

§ 10. — EMPLOI DES CONDENSATEURS COMME TRANSFORMATEURS. MACHINES ÉLECTRO-STATIQUES.

136. — Emploi des condensateurs pour changer la valeur des facteurs d'une quantité d'énergie. — Soit AB A′B′ (fig. 53) deux condensateurs identiques chargés d'abord séparément avec la même source (1) qui communique au plateau A une charge $+q$ et un potentiel V_1, et au plateau B une charge $-q$ et un potentiel V_0 (celui de la terre par exemple). Le condensateur A′B′ étant identique recevra de même une charge $+q$ au potentiel V_1 sur le plateau A′, et une charge $-q$ au potentiel V_0 sur le plateau B′.

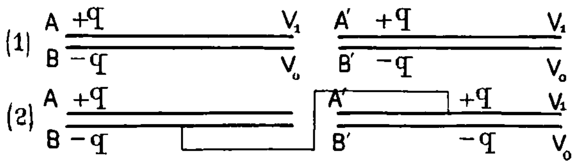


Fig. 53

Réunissons maintenant par un conducteur (2) le plateau B au plateau A′. Les potentiels de ces plateaux étant différents et leur charge de signe contraire, il semble que leur réunion par un conducteur doive provoquer un mouvement électrique entraînant une perte d'énergie, comme nous l'avons vu en étudiant l'équilibre électrique de deux sphères à des potentiels différents que l'on réunit par un conducteur (70). Mais il n'en va pas de même dans le cas actuel, parce que l'équilibre électrique de l'ensemble des deux condensateurs ne peut exister que si les charges des plateaux restés libres, A et B′, sont égales et de signe contraire à celles des plateaux B et A′. Si le plateau B cédait par exemple une certaine quantité d'électricité au plateau A′, l'équilibre des forces électriques du système serait rompu, le plateau A contenant une quantité plus grande que B et le plateau B′ contenant au contraire moins que A′, les choses tendraient à revenir à l'état primitif qui est un état d'équilibre stable.

Il peut sembler étrange que deux corps à des potentiels différents puissent se mettre au même potentiel sans dépense d'énergie lorsqu'on les met brusquement en communication par un conducteur. Mais cette dépense d'énergie ne peut avoir lieu que s'il y a échange d'électricité entre les corps, et cet échange ne peut se produire ici à cause de la présence des armatures A et B′ chargées de quantités d'électricités égales et de signe contraire à celles des armatures B et A′.

Mettons maintenant l'armature B′ au potentiel V_0 en la mettant par exemple en communication avec la terre, ce qui ne change pas sa charge, et cherchons à déterminer les potentiels des armatures A′ et A que nous désignerons par les lettres V_1 et V_2.

Le condensateur A′B′ devant satisfaire à l'équation fondamentale

$$q = c(V_1 - V_0)$$

d'où

$$V_1 - V_0 = \frac{q}{c}.$$

Le condensateur AB donnerait de même

$$V_2 - V_1 = \frac{q}{c}$$

d'où ajoutant membre à membre

$$V_2 - V_0 = 2\,\frac{q}{c}.$$

Ainsi la différence de potentiel des deux armatures extrêmes sera double de celle d'un seul condensateur, mais la capacité de cet ensemble de condensateurs groupés en cascade n'est plus que la moitié de celle de chacun d'eux (106). Donc la quantité d'énergie potentielle totale qui a pour expression générale

$$\frac{1}{2}\,CV^2$$

est ici représentée par

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{2}\left[2\left(V_1 - V_0\right)\right]^2 = 2\cdot\frac{1}{2}c(V_1 - V_0)^2,$$

c'est-à-dire par le double de la valeur qu'avait l'énergie potentielle de chacun d'eux avant leur réunion par un conducteur. L'énergie totale est donc restée intacte.

Si au lieu de les grouper en série *après les avoir chargés séparément,* on les groupait en quantité, en réunissant A et A′ d'une part, B et B′ d'autre part, il n'y aurait cette fois aucun changement dans la différence de potentiel des deux armatures. On aurait seulement ainsi un condensateur unique dont la capacité serait double de celle de AB ou de A′B′ et qui contiendrait une charge double $2q$ mais au même potentiel $(V_1 - V_0)$. L'énergie potentielle serait égale à

$$\frac{1}{2}\cdot 2c.(V_1 - V_0)^2 = 2\cdot\frac{1}{2}c(V_1 - V_0)^2$$

c'est-à-dire à la somme des énergies potentielles primitives.

Ainsi, quel que soit le mode de groupement des deux condensateurs, l'énergie totale disponible reste inaltérée tandis que la différence de potentiel des armatures extrêmes dépend absolument du mode de groupement ainsi que la quantité d'électricité mise en mouvement dans le circuit extérieur au moment de la décharge.

Avec le groupement en tension, la quantité d'électricité mise en mouvement dans le circuit extérieur est égale à q, et la différence de potentiel est égale à $2(V_1 - V_0)$.

Avec le groupement en quantité, la quantité d'électricité mise en mouvement par la décharge est égale à $2q$ tandis que la différence de potentiel est égale à $(V_1 - V_0)$.

137. — Il est facile d'étendre à un nombre quelconque de condensateurs identiques les raisonnements qui précèdent, et on trouve alors que si on charge séparément, avec la même source, n condensateurs identiques au potentiel $(V_1 - V_0)$ et qu'on les groupe en tension, on aura, en désignant par c, q, v, w la capacité, la charge, la différence de potentiel et l'énergie d'un seul de ces condensateurs, et par c', q', v', w' les mêmes quantités relatives à l'ensemble,

$$c' = \frac{c}{n}, \qquad q' = q, \qquad v' = nv, \qquad w' = nw.$$

Si on les groupait au contraire en quantité, on aurait

$$c'' = nc, \qquad q'' = nq, \qquad v'' = v, \qquad w'' = nw.$$

D'où on tire enfin :

$$\frac{c''}{c'} = n^2, \qquad \frac{q''}{q'} = n, \qquad \frac{v''}{v'} = \frac{1}{n}, \qquad w'' = w',$$

ou inversement

$$\frac{c'}{c''} = \frac{1}{n^2}, \qquad \frac{q'}{q''} = \frac{1}{n}, \qquad \frac{v'}{v''} = n, \qquad w' = w''.$$

Ces équations montrent les modifications considérables et inverses l'une de l'autre qui ont lieu dans la quantité d'électricité mise en mouvement pendant la décharge, et dans la différence de potentiel des armatures extrêmes, suivant qu'on emploie l'un ou l'autre des modes de groupement, tandis que la quantité d'énergie transformée en chaleur pendant la décharge reste la même. Nous voyons donc que les condensateurs permettent d'obtenir, avec une source d'électricité donnée, des effets totalement différents de ceux que la source elle-même permettrait d'obtenir directement, et qu'ils constituent de véritables *transformateurs* d'énergie. Ce sont ces propriétés qui ont été utilisées par M. Planté dans sa machine rhéostatique (Compte-rendu de l'Académie des sciences, 29 octobre 1877).

138. — Machine rhéostatique. — L'organe fondamental de la machine rhéostatique est une batterie de condensateurs qui, au moyen d'un commutateur, peuvent être groupés en surface ou en tension. Lorsque le commutateur est dans la position correspondante au groupement en surface, les armatures destinées à recevoir l'électricité positive sont mises en communication avec le pôle positif d'une pile quelconque, telle qu'une pile Leclanché, composée d'un grand nombre de couples de petit modèle. La quantité d'électricité que peut produire dans l'unité de temps une pile, même de très petite dimension, étant immense par rapport à celle que peut emmagasiner un condensateur de très grande surface, la charge a lieu dans un temps très court. Si alors on tourne le commutateur de manière à rompre la communication avec la pile et à produire le groupement des condensateurs en tension, la différence de potentiel des armatures extrêmes devient égale à celle de la pile multipliée par le nombre des condensateurs. Si, par exemple, la pile est composée de 50 couples Leclanché et s'il a 50 condensateurs, la différence de potentiel des armatures extrêmes atteindra 3700 volts environ.

Les figures 54 et 55 montrent la disposition du commutateur qui permet d'obtenir instantanément l'un des deux modes de groupement. Les pièces numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6, représentent des frotteurs aboutissant, les uns aux armatures positives, les autres aux armatures négatives des condensateurs supposés au nombre de 6.

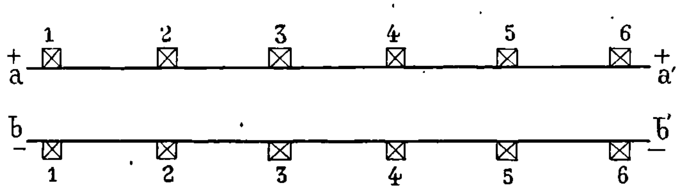


Fig. 54

Dans la position correspondante à la figure 54, tous les frotteurs positifs sont réunis par la barre métallique *aa'* et tous les frotteurs négatifs par la barre *bb'*, ces deux barres étant incrustées dans un cylindre en ébonite qui peut recevoir un mouvement de rotation. En outre ces mêmes barres appuient contre deux pièces métalliques non représentées et qui communiquent avec les pôles de la pile. C'est le groupement en surface.

Dans la figure 55 les deux barres entraînées par la rotation du cylindre ne communiquent plus avec aucune pièce; elles sont remplacées par des pièces métalliques également inscrustées dans le cylindre d'ébonite et disposées, comme la figure le montre clairement, de manière à grouper tous les condensateurs en tension, toute communication étant supprimée avec la pile. L'armature — 1 et l'armature + 6 présentent alors une différence de potentiel 6 fois aussi grande que celle des armatures d'un seul condensateur, et si les pièces 1 et 6 sont en communication permanente avec deux conducteurs terminés par de petites sphères situées à une distance convenable, les condensateurs se déchargent en produisant une étincelle. Voici quelques-uns des résultats obtenus par M. Planté.

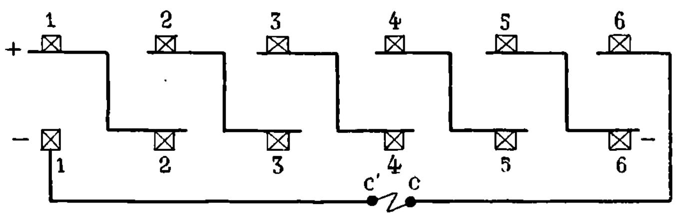


Fig. 55

La pile employée pour charger les condensateurs groupés en surface, était une pile secondaire de Planté, de huits cents couples, donnant par conséquent aux bornes une différence de potentiel peu différente de 1 750 volts. Cette pile servant à charger une machine rhéostatique a donné des étincelles de 15 millimètres avec 10 condensateurs; de 45 millimètres avec 30 condensateurs et de 120 millimètres avec 80 condensateurs. La longueur des étincelles était donc proportionnelle à la différence de potentiel. Il est intéressant de remarquer qu'avec 80 condensateurs, la différence de potentiel devait atteindre $1\,750 \times 80 = 140\,000$ volts ou 470 unités électrostatiques. Mais c'est là un chiffre maximum probablement supérieur à la valeur réelle.

La machine rhéostatique (fig. 56) a servi également à M. Planté, pour déterminer approximativement la quantité de zinc qui doit être dissous dans une pile pour charger un condensateur d'une surface

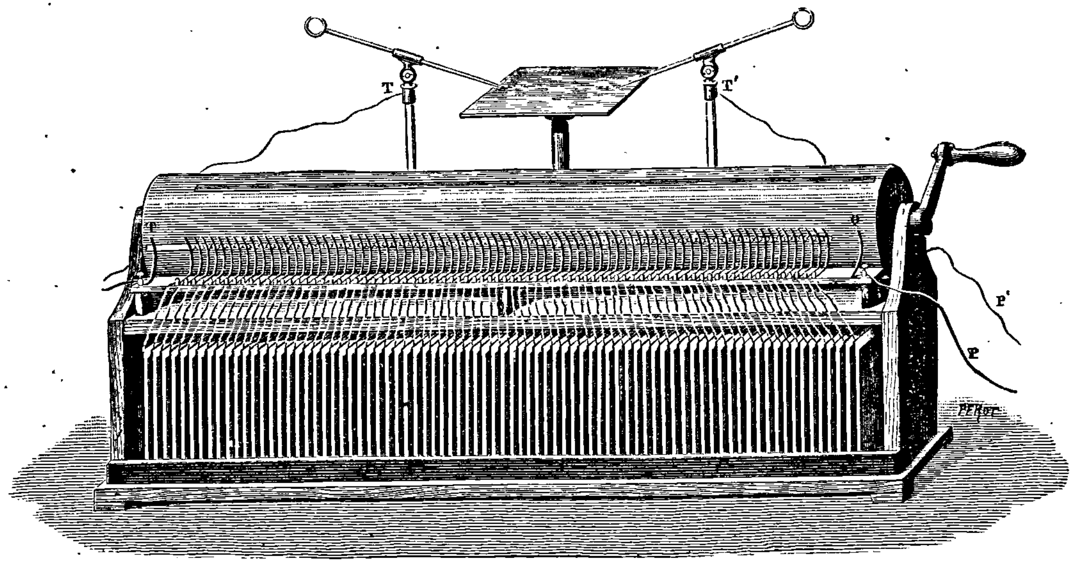


Fig. 56. — Machine rhéostatique de M. Planté.

déterminée, et en obtenir ensuite des étincelles après le changement de groupement, mais le manque de données numériques indispensables ne permet d'en tirer aucune conclusion utile.

139. — Machines électro-statiques. — Bien que les machines électro-statiques ne soient employées à aucun usage industriel, elles constituent une application trop immédiate des principes qui précèdent et elles ont joué un rôle trop important dans l'histoire de l'électricité, pour que nous n'en parlions pas. Nous choisirons, parmi les types très nombreux basés sur l'induction électro-statique, la machine imaginée par M. Varley et employée par William Thomson, sous le nom de *replenisher*, dans son électromètre absolu et dans le cracheur d'encre de son *syphon-recorder*.

Cette machine, réduite à des dimensions si exigües, qu'elle est enfermée dans un cylindre d'ébonite que l'on tient dans la main fermée, est encore assez puissante pour produire des étincelles d'environ 2 millimètres de longueur, capables d'allumer un bec de gaz.

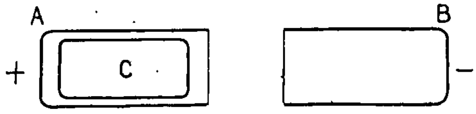


Fig. 57

Elle est basée sur les principes suivants : supposons placés en face l'un de l'autre deux cylindres creux A et B (fig. 57) en ébonite, recouverts d'une feuille d'étain et chargés d'avance d'une quantité d'électricité égale à $+1$ pour A, et à -1 pour B. Introduisons dans A un cylindre C également en ébonite recouverte d'étain, de dimensions un peu plus petites que A de manière à ne le toucher en aucun point. Lorsqu'il est complètement entré dans A, mettons C en communication avec la terre, il va immédiatement se charger d'une quantité d'électricité égale à -1. Transportons-le alors rapidement dans l'intérieur de B et mettons-le en communication avec B. Etant complètement enveloppé par B, C lui cédera toute sa charge -1, de sorte que la charge de B deviendra — 2; rompons alors la communication de B et de C et mettons comme précédemment C en communication avec la terre, il va se charger par induction d'une quantité égale et de signe contraire à la charge de B, va par conséquent contenir + 2 unités de quantités. Transportons-le de nouveau en A et recommençons les mêmes opérations dans le même ordre, nous verrons que la charge de A deviendra $+1+2=+3$ et que, après communication avec la terre, celle de C deviendra — 3 qu'il reportera ensuite sur C, qui étant déjà chargé de — 2, acquerra ainsi une charge égale à — 5. En continuant indéfiniment ce cycle d'opérations, on augmentera de plus en plus rapidement la charge de A et B, comme il est facile de le voir par le tableau suivant qui fait connaître les charges successives de C, abstraction faite du signe, chaque fois qu'il vient d'être mis en communication avec le sol. La première colonne renferme les charges successives correspondantes aux dix premières oscillations du cylindre mobile; la seconde colonne les charges du même cylindre de cinq en cinq oscillations jusqu'à la 50e oscillation où elle dépasse 20 billions de fois la charge primitive.

Oscillations	Charges	Oscillations	Charges
1	1	15 . . .	987
2	2	20 . . .	10 946
3	3	25 . . .	121 393
4	5	30 . . .	1 346 269
5	8	35 . . .	14 930 352
6	13	40 . . .	165 580 141
7	21	45 . . .	1,836,311,903
8	34	50 . . .	20 365 011 074
9	55		
10	89		

La loi de formation de ces nombres est évidente; chacun d'eux est égal à la somme des deux précédents; c'est donc une série récurrente qui tend très rapidement à se confondre avec une progression géométrique dont la raison serait égale à

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}618.$$

Il est à peine nécessaire de dire que, dans la réalité, la charge s'accroît beaucoup moins vite que ne l'indique le calcul à cause des pertes de toute nature que subissent les charges successives qui sont portées à des potentiels de plus en plus élevés (qui leur sont d'ailleurs proportionnels). Mais la conséquence pratique de ces calculs, c'est que, malgré ces pertes, les potentiels successifs de A et de B s'accroissent avec une extrême rapidité et que, en partant d'une différence de potentiel infiniment petite, on arrive rapidement à un potentiel très élevé. Ainsi une différence de potentiel initiale de *un millionnième* de volt entre A et B deviendrait, au bout de 50 oscillations du cylindre mobile, égale à 20 365 volts. Or la cinquième partie de ce chiffre suffirait à produire des étincelles de plus de 3 millimètres. Il n'est donc pas étonnant qu'une machine de ce genre donne toujours des étincelles, par tous les temps et sans qu'il soit nécessaire d'électriser préalablement les cylindres A ou B.

140. — **Machine Varley.** — Dans sa réalisation matérielle, la machine dont nous venons d'exposer le principe ne comporte pas de mouvement oscillatoire. Le cylindre mobile C est remplacé par deux feuilles d'étain collées sur un disque d'ébonite et les cylindres fixes A et B sont transformés en secteurs qui enveloppent une partie du disque mobile, $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{6}$ par exemple. La figure 58 représente la machine ainsi réalisée par M. Varley. Le mouvement circulaire continu du disque produit exactement les mêmes effets que le mouvement alternatif que nous avions supposé d'abord, parce que les secteurs sont alternativement positifs et négatifs et que tous les secteurs de même nom communiquent entre eux. Lorsqu'un secteur du plateau mobile est complètement enveloppé par un secteur fixe, il doit, pendant un temps très court, être mis en communication avec lui pour lui céder la charge de même nom qu'il a acquise par induction en traversant le secteur précédent, puis il doit être mis, pendant un temps également très court, en communication avec la terre pour prendre par induction une charge égale et contraire à celle que possède le secteur fixe. Tout cela est obtenu très sim-

plement au moyen de très légers balais métalliques, établissant les communications voulues, au moment convenable, comme on le voit sur la figure. Les balais *t* communiquent avec la terre et les balais *a* avec les secteurs fixes.

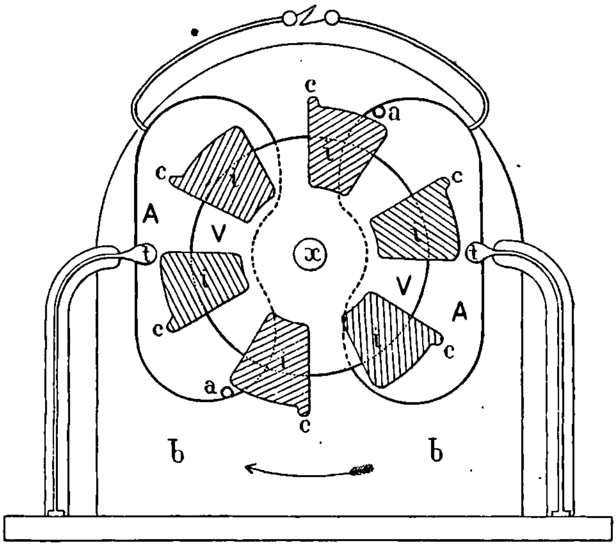


Fig. 58

Cet appareil peut être considéré comme un des meilleurs types de machine électro-statique. Pour la description des autres machines usuelles telles que celles de Holtz, de Winshurt, nous renverrons aux traités de physique ou mieux encore à la monographie très intéressante publiée sur la machine électrique à influence par M. John Gray et traduite par M. Pélissier. Mais nous ferons remarquer qu'elles portent toutes des peignes garnis de pointes ayant pour but de colliger le courant électrique et qui opposent à son passage une énorme résistance, inconvénient qui n'existe pas dans celle que nous venons de décrire.

CHAPITRE QUATRIÈME

ÉLECTROMÉTRIE

§ 1. — ÉLECTROMÈTRES ABSOLUS.

141. — Les grandeurs que l'on peut avoir à mesurer en Electrostatique sont : le Potentiel, la Quantité d'électricité, la Capacité électrique d'un Conducteur, le Pouvoir inducteur spécifique d'un diélectrique. Nous passerons successivement en revue les divers procédés qui servent à effectuer ces mesures.

Les instruments destinés à la mesure du Potentiel électro-statique sont généralement connus sous le nom d'Electromètres. Le plus ancien de tous est l'électromètre à pendule composé d'un fil auquel est suspendue une boule de sureau. En plaçant l'appareil sur un corps électrisé, la boule de sureau, se chargeant d'électricité de même signe que le corps, est repoussée, et de l'angle que fait avec la verticale le fil de suspension, on pourrait déduire le potentiel. Mais ce serait là un procédé peu exact, et ce genre d'électromètre n'est guère employé que pour montrer le degré plus ou moins grand de charge des batteries destinées aux expériences de fusion et de volatilisation des fils métalliques.

142. — **Balance de torsion de Coulomb.** — Nous avons vu (74) que la balance de torsion de Coulomb (fig. 59) peut servir à mesurer le potentiel ou la différence de potentiel de deux corps électrisés, et qu'elle constitue même un appareil que l'on pourrait qua-

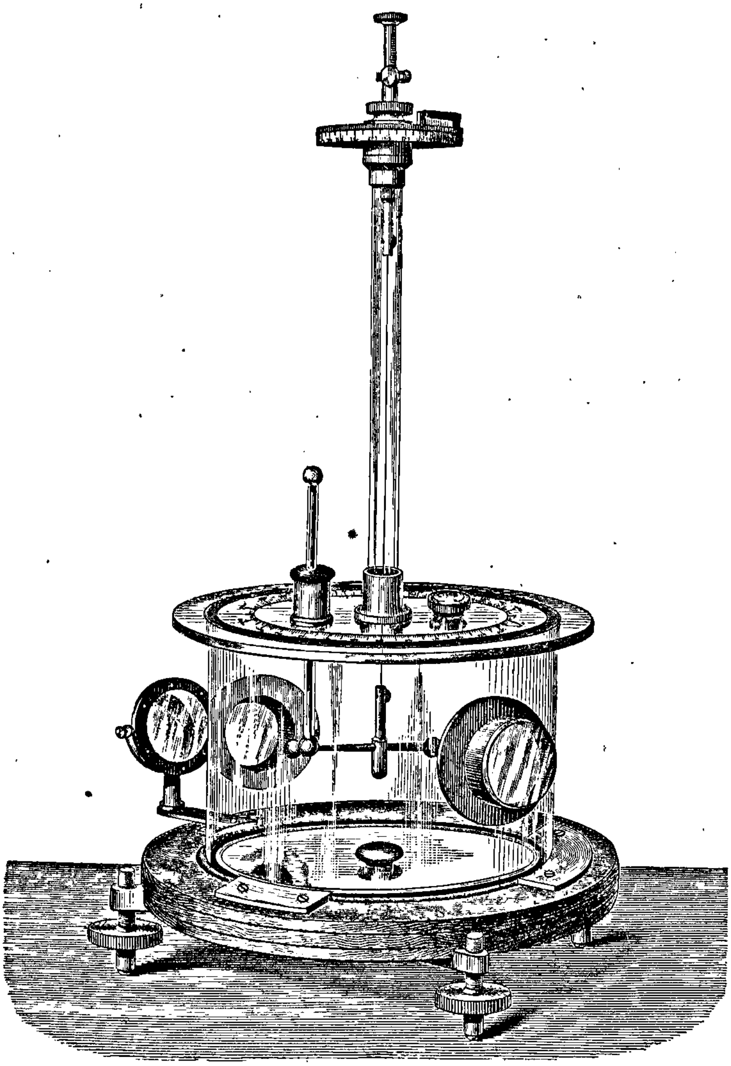


Fig. 59. — Balance de torsion de Coulomb.

lifier d'*absolu*, puisqu'il suffit de mesurer l'effort attractif ou répulsif de deux sphères dont le rayon et la distance sont connus, pour en déduire la différence de potentiel cherchée. Nous avons déjà indiqué (74) la manière de se servir de cet appareil ; quant à sa description, les lecteurs la trouveront dans tous les traités de physique. Nous avons également expliqué les motifs pour lesquels son usage ne s'est pas répandu et pourquoi on a dû chercher des appareils plus sensibles, plus faciles à manier, en un mot plus pratiques. Il en existe de deux sortes : les instruments dits *absolus* parce qu'on peut calculer d'avance, en fonction de leurs dimensions, l'effort développé sur les pièces mobiles par une différence de potentiel donnée ; et les instruments usuels gradués par comparaison avec les premiers. Nous allons décrire d'abord les *Electromètres absolus*.

143. — Electromètre absolu de William Thomson. — *Principe.* — Nous avons vu (123) que l'effort attractif exercé par l'armature d'un condensateur, supposée indéfinie, sur une portion de l'autre armature est représenté par l'expression

$$F = \frac{aV^2}{8\pi x^2}$$

dans laquelle F est l'effort en dynes mesuré perpendiculairement au plan des armatures ; a la surface en centimètres carrés de la portion d'armature considérée ; V la différence de potentiel des deux armatures, exprimée en unités électro-statiques ; x la distance des deux armatures en centimètres. On en tire

$$V = x\sqrt{\frac{8\pi F}{a}}.$$

Si on prend F constant, on voit que V est proportionnel à x.

La figure schématique 60 fait voir les dispositions principales de l'appareil. La partie électrique se compose d'un condensateur plan de forme circulaire AA, BB, à lame d'air, dont le plateau inférieur peut être rapproché ou éloigné du plateau supérieur fixe AA, au moyen d'une vis micrométrique CD. Le plateau supérieur est percé d'une ouverture circulaire dans laquelle peut se mouvoir un disque a

d'un diamètre très peu différent de celui de l'ouverture, et dont la face inférieure doit, lorsqu'on fait une expérience, se trouver exactement dans le plan de l'armature AA. Pour s'assurer que cette condition est remplie, on amène avant l'expérience l'armature BB, qui est parfaitement plane, au contact de l'armature AA, et on fait descendre le plateau *a* jusqu'à ce qu'il soit lui-même en contact avec BB; on note alors la position du levier KH auquel est suspendu *a*, au moyen d'un index J visé avec une petite lunette.

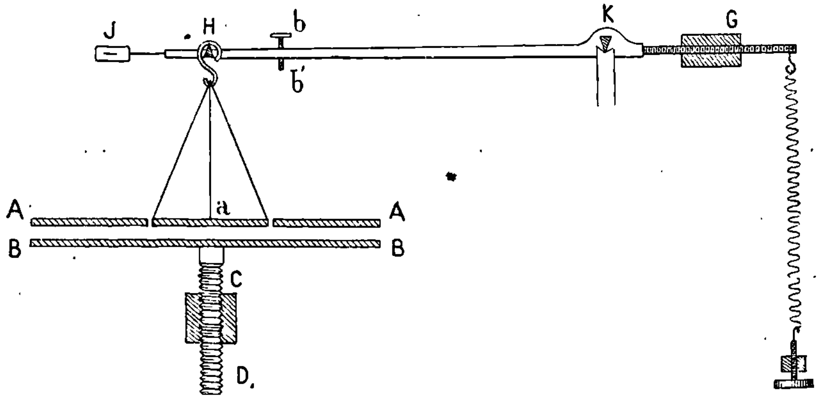


Fig. 60

Le plateau *a* est suspendu à un crochet qui repose sur un couteau H situé à l'extrémité du levier GH, qui porte un second couteau en K et un contrepoids d'équilibre G, que l'on peut avancer ou reculer parce qu'il forme écrou sur la tige KG. L'équilibre étant établi, on pose sur le plateau *a* un poids taré qui le ferait chavirer si on ne le ramenait dans la position primitive en agissant sur un délicat ressort à boudin que l'on peut tendre plus ou moins avec le bouton L. Si alors on enlève le poids taré, le levier sollicité par le ressort LG se soulève d'une très petite quantité et vient buter contre la vis *b*, que l'on tourne alors de manière à ramener l'index J devant le repère.

Les choses ainsi réglées, il est clair que si l'on fait agir sur *a* une force, qui, partant de zéro, aille en croissant graduellement, il arrivera un moment où elle atteindra une valeur égale à celle du poids taré, et par conséquent équivalente à l'effort développé par le ressort GL. A ce moment, a est en équilibre instable, et la cause la plus légère le précipitera vers BB, car l'attraction des deux plateaux est en raison inverse du carré de leur distance lorsque le potentiel est maintenu constant.

Il suffira donc, pour mesurer V, de régler d'abord l'instrument comme nous l'avons dit, le plateau BB étant aussi éloigné que possible de AA, puis de mettre les deux plateaux AA et BB en communication avec les deux pôles de la source, et enfin de tourner la vis micrométrique de façon à rapprocher BB de AA jusqu'à ce que le chavirement se produise, c'est-à-dire jusqu'à ce que le levier KHJ quitte le butoir b pour venir se poser sur le butoir inférieur b'. On lit alors sur la vis micrométrique la distance des deux armatures, et on a, en appelant p le poids taré *exprimé en dynes*

$$V = x\sqrt{\frac{8\pi p}{a}}.$$

Cette formule se simplifie lorsqu'on remplace a par πr^2, r étant le rayon du disque a, et elle devient

$$V = \frac{x}{r}\sqrt{8p} = \frac{4x}{2r}\sqrt{2p},$$

$2r$ étant le diamètre de a.

144. — Exemple numérique. — Supposons :

$$x = 1 \text{ centimètre},$$
$$2r = 5 \text{ centimètres},$$
$$p = 1 \text{ gramme} = 981 \text{ dynes}.$$

On trouve :

$$V = 35{,}43 \text{ unités}$$

ou

$$V = 35{,}43 \times 300 = 10629 \text{ Volts}.$$

William Thomson a démontré par le calcul qu'il est plus exact de remplacer la valeur de a, par la moyenne arithmétique de a et de la surface de l'ouverture dans laquelle le disque a se meut, de sorte que si on désigne par $2r'$ le diamètre de cette ouverture, la formule devient

$$V = 8x\sqrt{\frac{p}{(2r)^2 + (2r')^2}}.$$

En comparant la description que nous venons de donner de la partie dynamométrique de l'électromètre absolu de Thomson, à celle qui est reproduite dans tous les ouvrages, on verra qu'elle en diffère par quelques détails que nous avons modifiés parce qu'il nous a semblé que la facilité et la précision des mesures seraient améliorées par ces modifications.

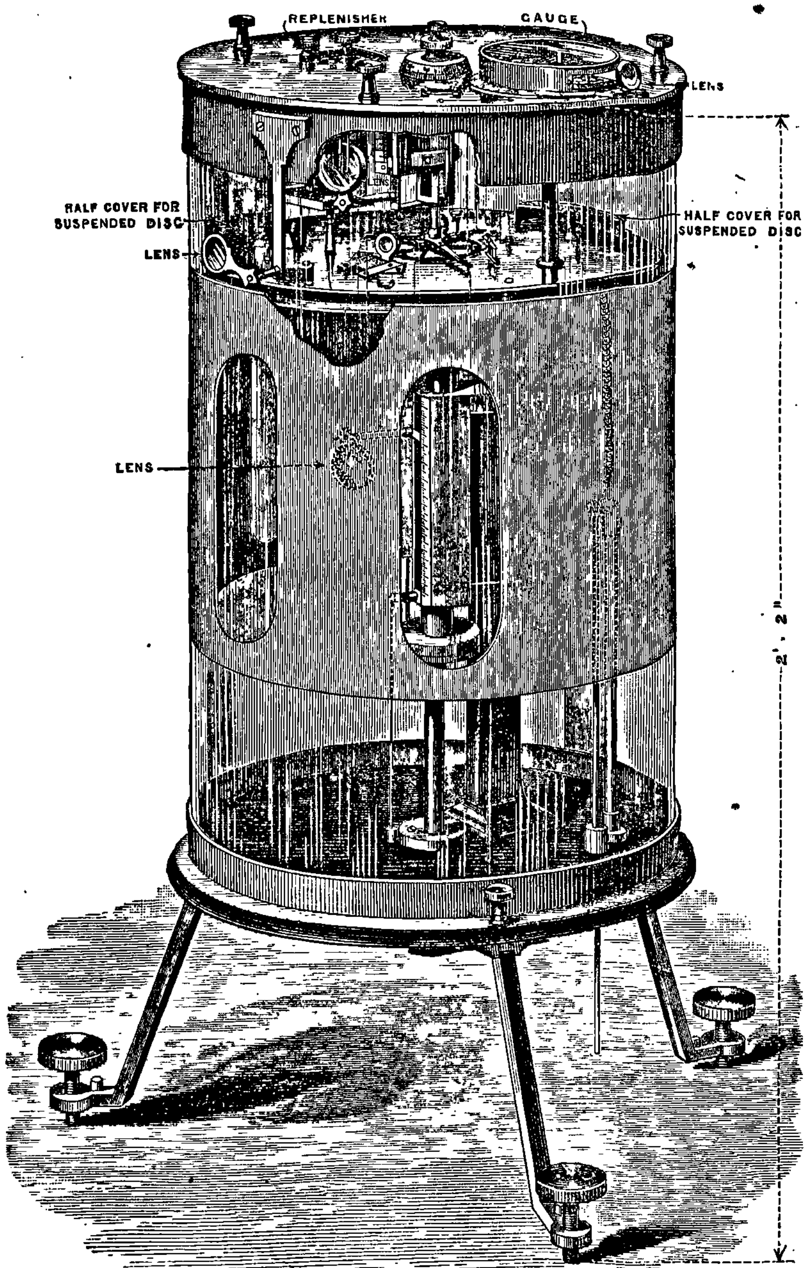


Fig. 61. — Grand électromètre absolu de W. Thomson.

Légende :

Replenisher = *Rechargeur*.
Gauge = *Jauge*.
Lens = *Lentille*.

Half Cover for suspended disc = *Moitié du couvercle du disque suspendu*.

145. — Accessoires destinés à maintenir constante la charge de l'électromètre. — L'appareil que nous venons de décrire constitue en définitive la partie essentielle de l'électromètre absolu. Mais cet appareil, représenté sur la figure 61, tel que l'a réalisé W. Thomson, contient un certain nombre de dispositions accessoires destinées surtout à assurer l'invariabilité de la différence de potentiel pendant une mesure. On y arrive au moyen de la jauge et du rechargeur.

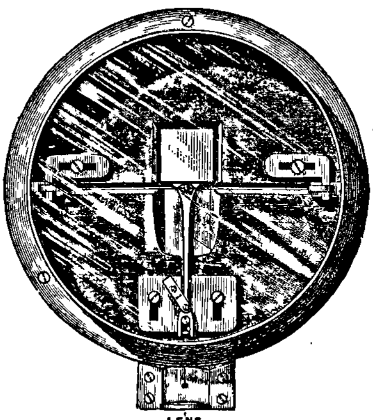


Fig. 62

La Jauge (fig. 62) n'est autre chose qu'un petit électromètre absolu extrêmement sensible et réduit au nombre de pièces strictement nécessaire. Le plateau a (fig. 60) est remplacé dans la jauge par un petit plan carré d'aluminium extrêmement léger qui doit se tenir en équilibre entre deux butoirs très rapprochés; les forces qui agissent sur lui étant, d'une part l'attraction électrique due à la différence de potentiel, et d'autre part la force élastique d'un ressort que l'on tend jusqu'à ce qu'on obtienne l'équilibre. Si le potentiel reste constant, cet équilibre persiste, mais, s'il augmente ou diminue, le petit plan d'aluminium se meut vers l'un ou l'autre des butoirs et on est averti qu'il faut ramener le potentiel à sa valeur primitive.

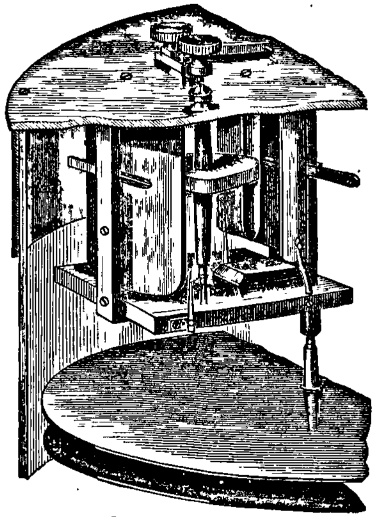
Le Replenisher (fig. 63) ou rechargeur, sert précisément à ramener le potentiel à la valeur constante qu'il doit garder pendant l'expérience. Pour cela la différence de potentiel est obtenue au moyen d'une grande bouteille de Leyde ou *Jarre* chargée d'avance au potentiel que l'on veut mesurer, et mise ensuite en communication avec les deux armatures de l'électromètre absolu. En désignant par Q, C et V, la charge, la capacité et le potentiel de cette jarre, on a

$$Q = CV.$$

Si la charge éprouve un accroissement dQ, le potentiel éprouve de son côté un accroissement dV et l'on a

$$dQ = C dV \qquad \text{d'où} \qquad dV = \frac{dQ}{C}.$$

Cette équation nous montre que pour une variation dQ de la charge, la variation du potentiel est en raison inverse de la capacité ; la fixité du potentiel sera donc d'autant plus grande que la capacité de la jarre est elle-même plus considérable, et elle a pour conséquence, que pour maintenir V constant, il faut réparer à chaque instant les



REPLENISHER

Fig. 63

pertes de charge dues, soit à l'humidité de l'air, soit à toute autre cause. C'est ce à quoi on arrive au moyen du Replenisher, qui n'est autre chose qu'une petite machine électro-statique analogue à celle de Varley, avec cette différence qu'elle est toujours amorcée au potentiel de la jarre elle-même. Elle est située en dérivation sur les armatures de la jarre. En la tournant dans un sens on augmente la charge de la jarre, en tournant en sens contraire on la diminue.

Disons enfin que la jarre est constituée par l'enveloppe en verre, de l'appareil lui-même, qui est garnie à cet effet de deux feuilles d'étain, l'une intérieure, l'autre extérieure.

Dans les derniers modèles, le plateau dynamométrique a est suspendu à trois ressorts à pincettes auxquels on donne une tension plus ou moins grande au moyen d'une vis micrométrique. Dans l'appareil construit pour l'Université de Glascow, il faut deux tours de la vis du dynamomètre pour produire sur le plateau a (qui a 46 millimètres de diamètre) un effort de 6 grammes. On peut donc facilement apprécier 3 dynes. Ce dernier modèle permet donc de faire varier la distance x des deux plateaux AA, BB, et l'effort antagoniste F, comme nous l'avons supposé plus haut dans la disposition représentée figure 60.

146. — Graduation d'un électromètre. — Dans la pratique, ces dispositions ou plutôt ces raffinements, très ingénieux d'ailleurs, ne sont pas employés. Il est en effet facile, lorsqu'on veut se servir de l'électromètre absolu pour graduer par comparaison d'autres

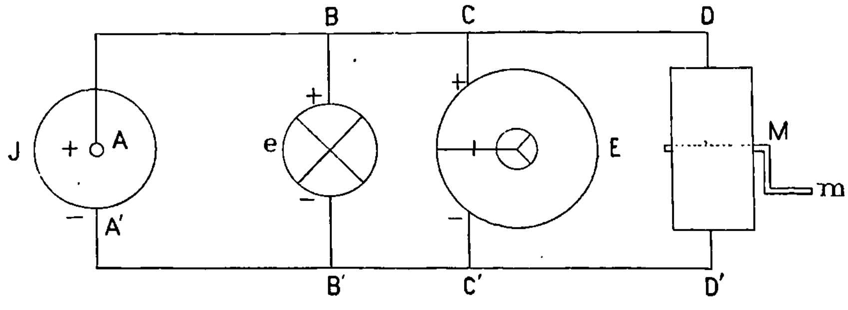


Fig. 64

appareils, de maintenir la différence de potentiel constante pendant un temps aussi considérable qu'on veut sans avoir recours ni à la *jauge* ni au *replenisher*.

La figure 64 montre la disposition que nous avons adoptée pour graduer un électromètre e, destiné à des usages industriels, au moyen de l'électromètre absolu E.

L'ensemble se compose : 1° d'une petite machine électro-statique à influence M, dont les deux pôles aboutissent à deux fils parfaitement isolés et recouverts de gutta-percha DBA, D'B'A' ;

2° d'une grande bouteille de Leyde ou Jarre J, placée sur un support isolant et dont les armatures communiquent, l'une avec le fil ABCD, l'autre avec le fil A'B'C'D' ;

3° d'un électromètre absolu E et de l'électromètre e que l'on veut graduer, les armatures positives et négatives de ces deux instruments communiquant respectivement avec les fils AD et A'D'.

L'électromètre absolu est d'abord disposé de façon à chavirer lorsque le potentiel atteint la valeur que l'on s'est fixée d'avance. Pour cela, le ressort antagoniste du plateau mobile est tendu au moyen d'un poids exprimé en dynes par la formule

$$p = \frac{r^2 + r'^2}{16x^2} V^2,$$

et le levier mobile HK (fig. 60), vient heurter contre le butoir à vis b contre lequel il reste appliqué tant que l'attraction électrique, développée sur le plateau mobile a, n'est pas au moins égale à P.

On met alors en mouvement la machine électrique M, la bouteille J se charge de plus en plus et il arrive un moment où la différence de potentiel de ses armatures atteint la valeur V ; si elle la dépasse d'une très petite quantité, le plateau de l'électromètre chavire et le levier HK vient heurter le butoir inférieur ; on attend alors que la charge ait un peu diminué par les pertes légères qui existent toujours malgré les précautions prises, et si cette diminution est trop lente, il est facile de l'accélérer par plusieurs moyens, dont le plus simple est de mettre pendant quelques instants les fils AD, A'D' en communication avec deux pointes qui créent une perte que l'on peut régler à volonté en les écartant plus ou moins.

On arrive ainsi très facilement à maintenir une différence de potentiel absolument constante, pendant un temps aussi long que l'on veut, en tournant lentement la manivelle m de la machine électrique. Pour avoir la preuve de cette invariabilité, il suffit de regarder l'aiguille ou l'image lumineuse projetée par le miroir de l'électromètre *e* si cet instrument est muni d'un amortisseur (l'un des plus parfaits à ce dernier point de vue, est l'électromètre industriel de M. Carpentier que nous décrivons plus loin) ; dans le cas contraire, il faudrait ajouter à l'installation que nous venons de décrire un électromètre témoin, gradué ou non, mais muni d'amortisseurs.

Lorsqu'on a noté la déviation de l'électromètre *e*, correspondante à un potentiel donné, il est très facile de donner au potentiel une valeur plus élevée sans changer la tension du ressort antagoniste de l'électromètre E. Il suffit d'augmenter l'écart x des plateaux de cet instrument d'une quantité proportionnelle à la variation du potentiel que l'on veut obtenir, car l'équation donne

$$x = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{r^2 + r'^2}{p}}\,V.$$

On tourne donc la vis micrométrique du plateau BB de façon à donner à x la valeur indiquée par cette équation, et on imprime à la machine électrique un mouvement de rotation plus rapide de manière à accroître la charge et, par suite, le potentiel de la bouteille de Leyde, jusqu'à ce que le plateau *a* chavire de nouveau. On note alors la déviation de l'électromètre *e* et en continuant ainsi pour des valeurs de V croissant régulièrement, on arrive rapidement à dresser une table de graduation de l'électromètre *e*.

147. — Le poids p étant proportionnel au carré de V, on voit immédiatement que l'erreur relative des mesures effectuées, par la méthode qui vient d'être exposée, est d'autant plus grande que V est plus petit ; aussi l'emploi de l'électromètre absolu à plateau n'est-il pas à recommander pour des potentiels inférieurs à 1000 volts. Il est au contraire très exact pour des potentiels très élevés. Il y a donc lieu de chercher les modifications à apporter à cette méthode lorsqu'il s'agit de mesurer les potentiels très-bas tel que celui d'une pile Daniell ; car la méthode électro-statique est la seule qui permette de mesurer *directement* une différence de potentiel au moyen d'une pesée et sans avoir recours à des moyens détournés qui augmentent les chances d'erreur.

Pour augmenter l'effort attractif développé entre les armatures de l'électromètre, lorsque la différence de potentiel est faible, on peut procéder de deux manières différentes. La plus simple consiste en ceci : on augmente le potentiel faible que nous désignerons par v, d'une valeur V_0 connue et beaucoup plus grande, on mesure l'attraction F' produite, puis on change le signe de v et on mesure de nouveau l'attraction F'' exercée par le plateau BB sur le plateau a ; enfin on suppose connue l'attraction F_0 des deux plateaux lorsque leur différence de potentiel est égale à V_0. Ces trois mesures donnent les équations suivantes, dans lesquelles f_1 désigne l'attraction des plateaux lorsque leur différence de potentiel est égale à l'unité

$$F_0 = f_1 V_0^2, \qquad F' = f_1(V_0 + v)^2, \qquad F'' = f_1(V_0 - v)^2$$

desquelles on tire

$$\frac{F' - F''}{F_0} = 4\frac{v}{V_0} \qquad \text{ou} \qquad v = \frac{1}{4}\,\frac{F' - F''}{F_0}\,V_0.$$

148. — Graduation en maintenant la force antagoniste constante. — La méthode précédente suppose que la mesure des trois forces, F_0, F', F'', est faite en tendant plus ou moins le ressort antagoniste GL (fig. 60) de manière à ramener toujours le plateau a à sa position réglementaire. Le ressort doit, dans ce cas, être taré préalablement en mettant des poids croissants dans le plateau a et en mesurant au moyen d'une vis micrométrique l'allongement qu'il faut lui donner pour ramener l'index J en face du repère.

Voici une seconde méthode où l'effort attractif des deux plateaux, et par suite l'allongement du ressort, reste constant et où on fait varier la distance x des deux plateaux. En désignant, par p_0 l'effort attractif constant ; par x' la distance qu'il faut donner aux deux armatures pour obtenir l'équilibre correspondant à la différence de potentiel $V_0 + v$; par x'' cette même distance lorsque la différence de potentiel devient $V_0 - v$, on a les équations suivantes :

$$V_0 + v = 4\sqrt{\frac{p_0}{r^2 + r'^2}}\,x', \qquad V_0 - v = 4\sqrt{\frac{p_0}{r^2 + r'^2}}\,x''$$

desquelles on tire

$$V_0 = 2\sqrt{\frac{p_0}{r^2 + r'^2}}\,(x' + x''), \qquad v = 2\sqrt{\frac{p_0}{r^2 + r'^2}}\,(x' - x'').$$

On peut, en employant ces deux méthodes, accroître autant qu'on le veut la précision des mesures en choisissant le potentiel V_0 suffisamment grand. Pour rendre l'action du potentiel v additive ou soustractive, il suffit d'intercaler en un point quelconque du circuit ADD'A', la source d'électricité dont les deux pôles ont une différence de potentiel v.

149. — Dans les instruments construits il y a quelques années d'après le modèle représenté figure 65, et qui diffère en plusieurs points de la disposition que nous avons décrite (143), le disque *a* en aluminium a 45 millimètres de diamètre, l'ouverture dans laquelle il se meut a $46^{mm},5$; il est suspendu à l'extrémité d'un levier qui, au lieu d'être supporté par un couteau, est soudé à un fil métallique en acier d'un très petit diamètre et fortement tendu entre

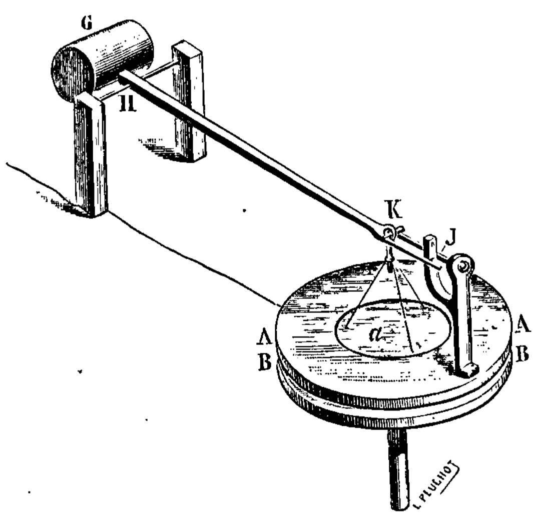


Fig. 65

deux montants. Ce système de suspension, que nous avons employé dans plusieurs appareils, constitue une véritable balance de torsion dont le fil est horizontal. Le contrepoids G, la force élastique de torsion du fil, le poids du levier et du plateau donnent lieu à diverses forces dont on peut disposer séparément, mais qui restent constantes lorsque la position du levier HK est invariable, et l'on s'arrange alors de manière que l'effort constant auquel est soumis le plateau a soit dirigé de bas en haut. Pour déterminer cet effort constant, on met dans a des poids tarés p, en quantité suffisante pour amener l'index J devant le repère, position dans laquelle le plan inférieur du plateau a coïncide exactement avec le plan de l'anneau de garde. Si on enlève le poids, le levier HK se relève d'une petite qnantité et vient buter contre un arrêt. Il est évident que si on soumet ensuite le plateau a à l'action d'une force quelconque qui le ramène dans la position réglementaire, cette force sera exactement égale à p somme des poids tarés. L'instrument constitue donc un *électromètre à force constante* et le potentiel se détermine, par la formule donnée plus haut, en faisant varier la distance des plateaux AA, BB, au moyen de la vis micrométrique dont le pas, dans les instruments cités plus haut, est de $\frac{1}{2}$ millimètre; la tête de la vis est divisée en 100 parties, de sorte qu'on peut évaluer la distance des deux plateaux avec une approximation de $\frac{1}{200}$ de millimètre.

150. — Pour montrer la nécessité absolue d'employer un potentiel auxiliaire, comme nous l'avons indiqué dans le numéro précédent, lorsqu'on veut mesurer en unités électro-statiques les potentiels faibles tels que ceux des piles, cherchons l'attraction exercée sur un disque de 5 centimètres de diamètre, à 1 millimètre de distance, par l'armature inférieure BB, en supposant que les deux armatures soient mises en communication avec les pôles d'un couple Daniell. Les mesures faites par William Thomson ont donné pour valeur de la différence de potentiel de cette pile, à circuit ouvert, le nombre 0,00374 d'unité électro-statique.

L'attraction calculée par la formule

$$p = \frac{r^2 + r'^2}{16x^2} V^2$$

serait donc égale à

$$\frac{\overline{2{,}5}^2 + \overline{2{,}5}^2}{16 \times \overline{0{,}1}^2} \overline{0{,}00374}^2 = \frac{1 \text{ dyne}}{1830} \qquad \text{soit environ} \qquad \frac{1 \text{ milligr.}}{1800}$$

Ainsi le poids taré, capable de ramener le plateau a dans sa position réglementaire, serait d'environ $\frac{1}{1800}$ de milligramme. La formule précédente peut, en supposant $r = r'$, se mettre sous la forme

$$p = \frac{r^2}{8}\left(\frac{V}{x}\right)^2$$

qui va nous permettre de calculer ce que doit être le poids taré dans les instruments dont nous parlions plus haut (149) et dans lesquels une variation de distance des deux plateaux égale à 1 millimètre, correspondait à une variation de potentiel de 200 Daniell, soit 0,748 unité électro-statique. On tire de là

$$p = \frac{\overline{2,25}^2}{8} \cdot \left(\frac{0,748}{0,1}\right)^2 = 35^d,4$$

ou 36 milligrammes.

151. — On voit en résumé, que les attractions développées dans les électromètres par des différences de potentiel telles que celles qui sont employées dans l'industrie (dont le maximum est de 10 000 volts ou 33,3 unités C.G.S., tandis que la valeur ordinaire est de 100 volts ou $\frac{1}{3}$ d'unité), sont toujours très petites et qu'elles deviennent presque immesurables, au moins par la méthode idiostatique, lorsque la différence de potentiel est de quelques volts. Les électromètres sont donc nécessairement des instruments très délicats, dont la construction exige beaucoup de précision et le maniement beaucoup de précautions. Cependant ils présentent, au point de vue théorique, des avantages si marqués sur les appareils nommés voltmètres et basés sur l'emploi des courants électriques, que l'on a fait de grands efforts pour les rendre d'un emploi facile, et on peut dire que ces efforts ont été en partie couronnés de succès, du moins lorsqu'il s'agit de potentiels d'au moins 100 volts.

152. — Nous venons de voir que l'emploi d'un potentiel auxiliaire élevé augmente beaucoup l'exactitude de la mesure d'un potentiel faible auquel on l'ajoute; mais cet artifice n'est pas toujours possible, ou du moins il existe certains cas où l'avantage dont nous venons de parler n'existe plus ; tel est le cas des potentiels qui changent de signe un grand nombre de fois, dans l'unité de temps, comme cela a lieu avec les courants alternatifs. On est obligé alors de se contenter de l'emploi de la méthode idiostatique dans laquelle les deux armatures de l'électromètre sont portées simplement au potentiel qu'il s'agit de mesurer.

Il est alors indispensable de posséder des instruments idiostatiques d'une sensibilité suffisante pour qu'une variation de 2 ou 3 volts sur 100 volts soit nettement accusée, et en outre, il est nécessaire de pouvoir les graduer par comparaison avec des électromètres absolus fonctionnant dans les conditions d'exactitude les plus favorables, c'est-à-dire avec des potentiels de plusieurs milliers de volts. Il faut en un mot employer un procédé qui permette de réduire, dans une proportion exactement connue, la différence de potentiel élevée que mesure l'électromètre-étalon, et qui ainsi réduite, agit sur l'électromètre que l'on veut graduer. C'est pour obtenir ce résultat que nous avons imaginé en 1892 la méthode de réduction du potentiel au moyen de condensateurs dont nous avons déjà parlé (107), et qui consiste à avoir une série de condensateurs égaux montés en tension ; les armatures extrêmes de la série étant mises en communication avec les deux pôles d'une source d'électricité, la différence de potentiel des deux armatures d'un quelconque des condensateurs est égale à celle des pôles de la source divisée par le nombre des condensateurs. Mais il n'est pas nécessaire d'avoir pour cela un certain nombre de condensateurs égaux ; deux condensateurs inégaux peuvent parfaitement atteindre le but que l'on se propose. Considérons en effet deux condensateurs inégaux AB, *ab*, de capacité C et *c*, montés en série (fig. 66), l'armature *a* du petit condensateur communiquant avec le pôle positif de la source au potentiel V_0, et l'armature A du grand, avec le pôle négatif de la même source dont le potentiel a pour valeur V_2, de sorte que la différence totale de potentiel des armatures *a* et A, a pour valeur $V_0 - V_2$. Cherchons le potentiel V_1 commun aux deux armatures inférieures, *b* et B, réunies par un conducteur. Appliquons pour cela le théorème déjà démontré de l'égalité des quantités d'électricité $+q$ et $-q$ qui sont réparties sur les armatures de plusieurs condensateurs grou-

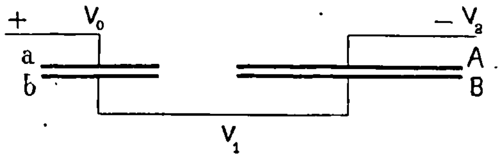


Fig. 66

pés en série (105). Nous aurons alors (en vertu de l'équation générale $Q = CV$), pour les deux condensateurs, *ab*, AB,

$$V_0 - V_1 = \frac{q}{c}, \qquad V_1 - V_2 = \frac{q}{C}$$

d'où, ajoutant membre à membre

$$V_0 - V_2 = q\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{C}\right) \qquad \text{d'où} \qquad q = \frac{Cc}{C+c}(V_0 - V_2)$$

et enfin

$$V_0 - V_1 = \frac{C}{C+c}(V_0 - V_2), \qquad V_1 - V_2 = \frac{c}{C+c}(V_0 - V_2),$$

$$\frac{V_1 - V_2}{V_0 - V_2} = \frac{C}{C+c}.$$

Ces équations montrent que le rapport de la différence de potentiel des armatures du grand condensateur, à la différence totale $V_0 - V_2$ est égal à $\frac{c}{C+c}$, c'est-à-dire aussi petit qu'on veut. C'est donc avec les armatures du grand condensateur que les pôles de l'électromètre à faible potentiel doivent communiquer. Mais il ne faut pas oublier alors de tenir compte de la capacité de cet électromètre, qui peut ne pas être négligeable, et l'ajouter dans la formule à celle de AB.

Pour que cette méthode donne des résultats exacts, il faut que le rapport $\frac{c}{C+c}$ soit connu avec une exactitude suffisante. C'est donc une question qui est ramenée à celle de la détermination de la capacité d'un condensateur ; nous renverrons donc au paragraphe où cette dernière est traitée (82).

153. — Nous sommes entrés dans des développements assez grands sur les moyens de graduer les électromètres à bas potentiel en se servant d'électromètres à haut potentiel, tandis qu'il semblerait bien plus naturel d'employer directement les bas potentiels fournis directement par les piles. Il n'est pas inutile de retracer en peu de mots les motifs qui nous ont déterminé à adopter la méthode dont la représentation figurative se trouve au numéro 146.

1° On ne connaît, dans l'état actuel de la science, aucun moyen *direct et simple* de mesurer un potentiel en unités absolues électro-magnétiques. La valeur du *Volt*, unité industrielle adoptée dans le monde des électriciens, n'est représentée que par des piles-étalons dont la force électro-motrice dépend de tant de conditions et varie avec tant de causes, comme nous le verrons dans la suite, que personne ne peut assurer aujourd'hui que les Voltmètres donnent des indications exactes à 2 °/₀ près.

2° Le potentiel électro-statique peut, au contraire, être mesuré à chaque instant au moyen d'une simple pesée dont l'exactitude peut être aussi grande que l'on veut à la condition que le potentiel soit élevé et que les dimensions géométriques de l'électromètre soient bien connues.

3° Ce potentiel élevé est très facile à obtenir au moyen d'une machine électro-statique de *très petites dimensions*. C'est ainsi que les machines à influence (du genre de celle de Varley), qui sont enfermées dans la poignée des allumoirs à gaz dont nous avons déjà parlé (139), permettent d'obtenir facilement une différence de potentiel de 3000 volts au moins et de la maintenir absolument fixe pendant plusieurs minutes, à la condition de se servir comme réservoir-régulateur d'un condensateur Bouty formé d'une feuille de mica argentée de moins de 100 centimètres carrés de surface.

4° Enfin le potentiel élevé, connu en unités absolues avec toute l'exactitude désirable, peut servir à la graduation d'instruments destinés à la mesure de potentiels beaucoup plus faibles, et par les procédés que nous avons exposés dans ce paragraphe et par d'autres que nous ne pourrons décrire que plus tard. On peut même, comme nous le verrons, graduer directement des voltmètres électro-magnétiques à bas potentiel, en partant de la mesure directe d'un haut potentiel, au moyen de l'électromètre absolu.

Tout ce que nous venons de dire suppose bien entendu que le rapport de l'unité C. G. S. de potentiel électro-statique à l'unité C. G. S. de potentiel électro-magnétique est connu avec précision. Or les recherches théoriques de Maxwell ont montré que ce rapport doit être égal à la vitesse de la lumière exprimée également en unités C. G. S., c'est-à-dire en centimètres par seconde ; il doit donc différer très peu de trente billions, mais comme le *Volt*, *unité industrielle* adoptée par le congrès des électriciens en 1881, a été pris égal à cent millions d'unités C. G. S. électro-magnétiques, il en résulte finalement que l'unité de potentiel électro-statique équivaut à très peu près à $\frac{30\,000\,000\,000}{100\,000\,000} = 300$ volts.

Les recherches expérimentales faites par de nombreux savants pour déterminer la valeur exacte de ce rapport, recherches dont nous ne pourrons faire connaître le principe que lorsque nous traiterons de l'électro-magnétisme, ont confirmé complètement les déductions théoriques de Maxwell et on peut considérer le nombre de 300 volts comme représentant, avec une erreur relative probablement moindre que $\frac{1}{1000}$, la valeur de l'unité de potentiel électro-statique.

On voit combien la précision des mesures électriques laisse encore à désirer et combien elle est inférieure à celle des mesures de longueur, de temps, et de masse, dont les étalons les plus grossiers sont certainement reproduits avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{1000}$.

154. — Electromètre absolu de MM. Abraham et Lemoine. — C'est une modification de l'électromètre absolu de sir William Thomson.

Il se compose (fig. 67) d'une balance dont le fléau n'a que 6 centimètres de rayon, et dont les oscillations sont limitées par des butoirs. Le disque mobile en aluminium, a 119 millimètres de diamètre ; il est entouré d'un anneau de garde qui a $119^{mm},5$ de diamètre intérieur et 220 millimètres de diamètre extérieur. Le centrage du disque mobile est obtenu au moyen de trois fils horizontaux faiblement tendus attachés d'une part à son centre et d'autre part à trois points fixes formant les trois sommets d'un triangle équilatéral.

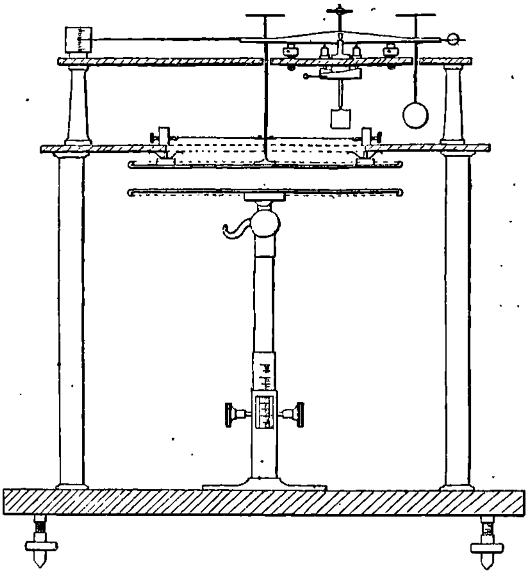


Fig. 67

Le disque mobile est équilibré par un contrepoids attaché à l'autre fléau ; et ces deux pièces (disque et contrepoids), sont suspendues à leurs couteaux respectifs par des tiges verticales dont les prolongements portent chacun un plateau dans lequel on place les poids servant à la mesure de l'attraction. Les plateaux sont donc situés *au-dessus* des couteaux de suspension. La balance est sensible au milligramme.

Le plateau attirant a 220 millimètres de diamètre ; on peut l'élever ou l'abaisser, de façon à faire varier sa distance au plateau mobile, au moyen d'une crémaillère guidée en ligne droite. Le déplacement qui peut aller jusqu'à 50 millimètres, est mesuré au moyen d'un curseur à vernier qui donne le centième de millimètre.

Les expériences faites avec cet appareil, ont donné les résultats suivants :

Le plateau ayant été chargé à 10000 volts, on en tire encore une étincelle au bout de 24 heures.

Aucune étincelle ni effluve lumineuse n'est visible, même quand le potentiel atteint 45000 volts.

Comme expérience de contrôle, on a mesuré la distance des deux plateaux correspondante, pour un potentiel constant, à des forces attractives différentes choisies à l'avance, et on a obtenu les résultats suivants :

D Distances des plateaux en millimètres —	F Force attractive en grammes —	Valeur du produit $D\sqrt{F}$ —
6,33	9	18,99
4,75	16	19,00
3,79	25	18,95
3,16	36	18,96

On voit que le produit $D\sqrt{F}$, de la distance des plateaux par la racine carrée de la force attractive, qui aurait dû rester constant pour un potentiel constant, a éprouvé des variations très petites s'élevant à peine à $\frac{1}{500}$ de la moyenne des quatre expériences. Pour trouver exactement la distance des deux plateaux correspondante à une force attractive donnée par les poids, on soulève doucement le plateau attirant jusqu'à ce que la balance trébuche en raison de l'instabilité de l'équilibre, comme nous l'avons déjà expliqué en parlant de l'électromètre de William Thomson.

155. — MM. Abraham et Lemoine ont fait construire un modèle simplifié, représenté par la figure 68, dans lequel les réglages délicats ont été supprimés. Le disque mobile et l'anneau de garde sont mis en place par des flexions de leurs tiges de support.

La balance est du système Roberval de façon que le plateau mobile de l'électromètre est parfaitement centré.

L'isolement est renforcé. Les colonnes montantes sont entourées de tubes de verre et la tige du plateau inférieur supporte un large disque de verre qui empêche les effluves vers le socle de l'appareil.

Les auteurs de cet électromètre, affirment que le premier modèle donne une précision relative de $\frac{1}{1000}$, pour des potentiels dépassant 40000 volts, et que le modèle simplifié permet de mesurer à $\frac{1}{100}$ près, des potentiels qui atteignent 100000 volts.

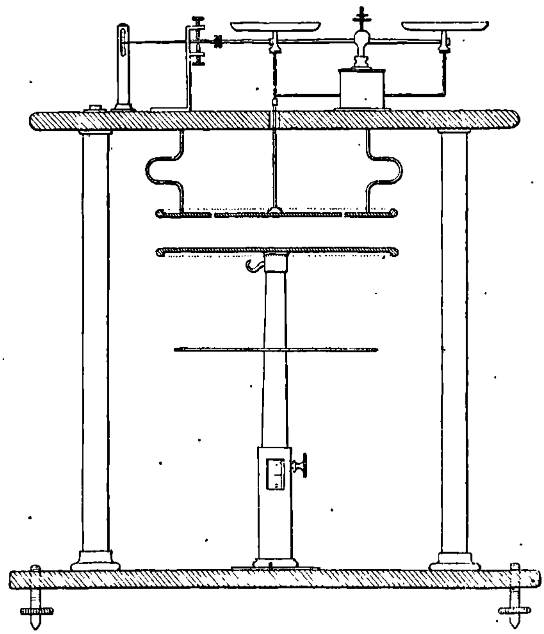


Fig. 68

Leur opinion est que, *l'emploi de l'électromètre à disque plan et anneau de garde comme instrument absolu est légitime si la distance des plateaux ne dépasse pas la moitié de la largeur de l'anneau de garde.*

§ 2. — AUTRES ÉLECTROMÈTRES ABSOLUS.

156. — Tout système de corps électrisés dont les actions mécaniques peuvent être calculées théoriquement et traduites en formules simples, peut constituer un électromètre absolu, pourvu toutefois que les conditions théoriques imposées, ne présentent pas dans la pratique de difficultés considérables. En outre, les actions électriques ne sont stables et intenses que si le système de corps considéré constitue un condensateur. Nous pouvons donc pressentir que les électromètres absolus doivent être de véritables condensateurs dont la capacité est calculable théoriquement avec une exactitude suffisante. Or, les formes géométriques satisfaisant à ces conditions sont au nombre de trois : la sphère, le plan, le cylindre. Nous avons établi pour chacune d'elles la formule qui donne la capacité en fonction des dimensions et celle qui permet de calculer l'intensité de l'effort développé entre les armatures, chargées d'électricités de signe contraire, dont la différence de potentiel est connue. Chacune de ces trois formes permet donc de réaliser un électromètre *absolu.* La forme plane, dont dérive l'électromètre de W. Thomson, a été étudiée plus haut avec tous les détails que ce sujet comporte. La forme cylindrique et la forme sphérique ont été proposées, la première par MM. Bichat et Blondlot, la seconde par M. Lippmann.

157. — **Electromètre cylindrique.** — Il se compose de deux cylindres concentriques verticaux, AA', BB' (fig. 69), le premier en aluminium, le second en laiton, électrisés à des potentiels différents. Ces deux cylindres qui ont des rayons peu différents et une grande

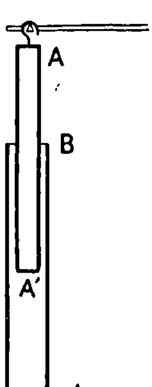


Fig. 69

longueur, présentent une partie commune BA' qui constitue les deux armatures d'un condensateur et doit être d'une faible longueur par rapport à leur longueur totale AA', BB'. Les formules du n° 121 vont nous permettre de calculer l'effort longitudinal dû aux attractions mutuelles de tous les éléments de surface électrisée. En appelant r_1 et r_2 les rayons des cylindres intérieur et extérieur et l la longueur commune BA′, on a pour la capacité C (83)

$$C = 0{,}217 \frac{l}{\log \frac{r_2}{r_1}};$$

d'autre part, la force développée suivant une direction quelconque entre les deux armatures d'un condensateur, a pour valeur

$$F = \frac{1}{2} V^2 \frac{dc}{dx},$$

dC étant la variation de capacité qui correspond à une translation de grandeur dx, de l'armature mobile dans la direction suivant laquelle on veut mesurer la force. Or, dans le cas présent, la force cherchée étant dirigée parallèlement à l'axe des cylindres concentriques, on a $dx = dl$, donc

$$F = \frac{1}{2} V^2 \frac{dc}{dl}.$$

Mais

$$\frac{dc}{dl} = 0{,}217 \times \frac{1}{\log \frac{r_2}{r_1}}$$

d'où

$$F = 0{,}1085 \frac{V^2}{\log \frac{r_2}{r_1}}, \qquad V = 3{,}035\sqrt{F \log \frac{r_2}{r_1}}.$$

Si l'on voulait exprimer V en *volts*, il faudrait multiplier la dernière expression par 300, F étant exprimé en dynes.

158. — Electromètre cylindrique de MM. Bichat et Blondlot. — Dans l'appareil construit par MM. Bichat et Blondlot (fig. 70), le cylindre mobile B est soutenu vers le milieu de sa longueur. A cet effet, il porte dans son intérieur un couteau présentant une échancrure arrondie, lequel repose sur un autre couteau également échancré, disposé en croix avec le premier et fixé à l'extrémité du fléau de la balance, qui est coudé aux points F, F′, F″ de façon que les arêtes des couteaux de suspension du cylindre mobile et du fléau soient sur un même plan horizontal.

A sa partie inférieure, le cylindre B porte un *amortisseur* formé d'un cylindre creux en papier C qui oscille dans un cylindre en verre d'un diamètre un peu supérieur.

Un plateau P suspendu au cylindre B sert à mesurer l'attraction mutuelle du cylindre A et du cylindre B. Le point de suspension du cylindre mobile étant placé dans sa portion moyenne, les moments des attractions latérales, d'une part sont très faibles et d'autre part se compensent partiellement. En outre l'amortisseur C étant placé très bas, tend à maintenir vertical le cylindre mobile.

On obtient ainsi une grande stabilité et on peut mesurer jusqu'à des potentiels correspondants à des distances explosives de 25 millimètres.

MM. Bichat et Blondlot ont appliqué cet appareil à la mesure des potentiels correspondants à des distances explosives variant entre 1 et 22 millimètres entre deux boules de 1 centimètre de diamètre.

Voici les résultats qu'ils ont obtenus et en face desquels sont inscrits : les nombres trouvés par M. Baille avec un électromètre absolu de Thomson, les résultats des expériences de M. Mascart avec des sphères de 22 millimètres de diamètre, et les expériences de W. Thomson avec des plateaux. Nous y avons joint les expériences de Warren de la Rue et Muller dans lesquelles la source d'électricité était une pile au chlorure d'argent et les électrodes étaient deux disques.

Distance explosive	Différence de Potentiel (W de la Rue)	Distance explosive	Différence de potentiel (Blondlot)	Différence de potentiel (Baille)	Distance explosive	Potentiel (Bichat et Blondlot)	Distance explosive	Potentiel (Mascart)	Distance explosive	Potentiel (W. Thomson)
Millim.	Volts	Millim.	Volts	Volts	Millim.	Volts	Millim.	Volts	Millim.	Volts
0,205	1000	1	4830	4575	12	27390	1	5490	0,086	690
0,430	2000	2	8250	8046	13	28140				
0,660	3000	3	11460	11196	14	28740	10	48600	0,190	1278
0,914	4000	4	14310	14286	15	29340	20	64800	0,408	1854
1,176	5000	5	16890	16400	16	29760				
1,473	6000	6	19470	19569	17	30240	50	94800	0,584	2445
1,800	7000	7	21480	21684	18	30540	100	119100	0,688	2907
2,146	8000	8	23100	23280	19	30960	120	124200	0,904	3660
2,495	9000	9	24480	24040	20	31350				
2,863	10000	10	25410	24915	21	31620	150	127800	1,036	4185
3,235	11000	11	26610		22	31920			1,325	5200

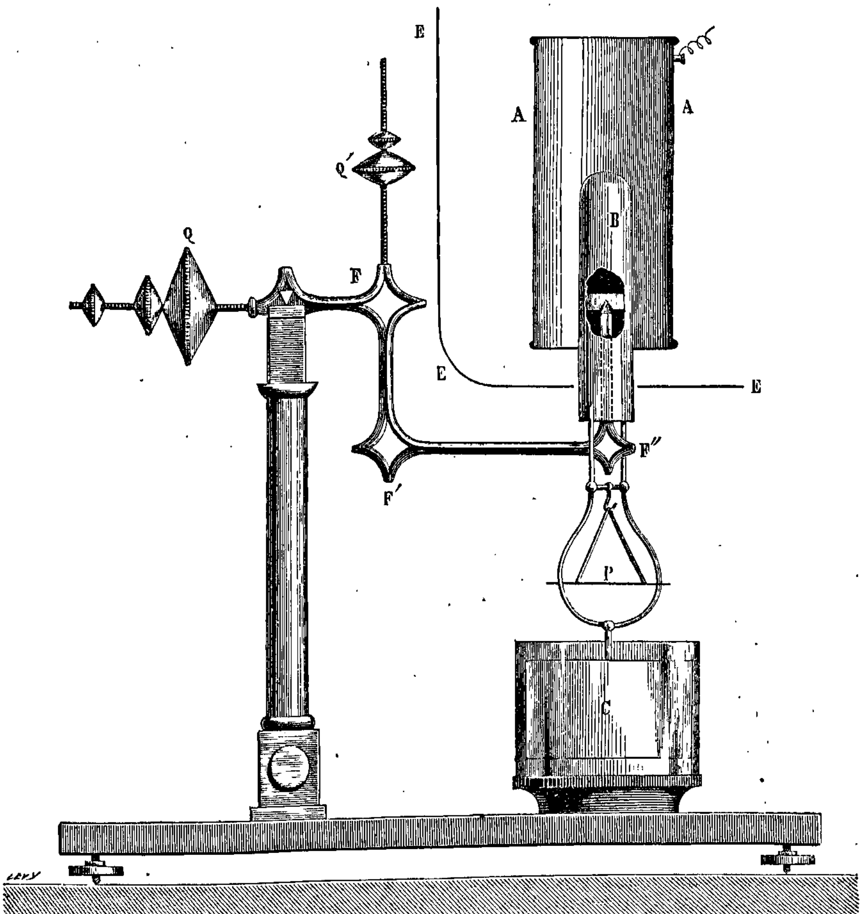


Fig. 70. — Electromètre cylindrique de MM. Bichat et Blondlot.

159. — Electromètre sphérique. — Nous avons vu (52) que la pression normale, exercée sur l'unité de surface d'une sphère métallique électrisée, a pour expression

$$p = \frac{q^2}{8\pi r^4}$$

q, désignant la charge totale de la sphère et r son rayon. Nous avons en outre entre ces deux quantités et le potentiel V la relation

$$q = rV \qquad \text{d'où} \qquad p = \frac{V^2}{8\pi r^2}.$$

La pression normale p ayant la même valeur en chaque point de la sphère, est absolument assimilable à celle d'un fluide élastique contenu dans la sphère et qui tendrait à la faire éclater. Or si nous considérons une capacité close ADBC (fig. 71) formée d'une demi-sphère creuse fermée par un plan AB et remplie d'un fluide élastique, il est évident que la pression intérieure de ce fluide ne tendra

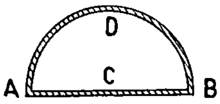


Fig. 71

à déplacer le vase dans aucune direction ; la résultante des forces appliquées à l'hémisphère ADB est donc égale et de signe contraire à celle des forces appliquées au cercle de diamètre AB, qui a pour valeur $p \times \pi r^2$. Le même raisonnement appliqué à l'hémisphère inférieure, nous montre que finalement chaque hémisphère est sollicitée par une résultante F égale à $p . \pi r^2$, ou en remplaçant p par sa valeur en fonction de V

$$F = \frac{V^2}{8} \qquad \text{d'où} \qquad V = 2\sqrt{2F}.$$

Il suffit donc de couper une sphère creuse par un plan diamétral et de mesurer par un moyen quelconque la force répulsive qui tend à séparer les deux hémisphères, pour en déduire V.

Si on remplace la sphère creuse par un ensemble de deux sphères concentriques, la sphère extérieure seule étant divisée en deux parties égales dont l'une mobile, l'effort devient attractif et un calcul absolument semblable aux précédents montre que cet effort a pour valeur, en désignant par r_1 le rayon de la sphère extérieure

$$F = \frac{1}{8}\left(\frac{r_1}{r_1 - r}\right)^2 V^2 \qquad \text{ou} \qquad V = 2\sqrt{2F}\left(\frac{r_1 - r}{r_1}\right).$$

Cette disposition, très rationnelle au point de vue théorique, puisque c'est la seule pour laquelle l'équation qui donne F en fonction de V soit rigoureusement exacte, n'a pas été adoptée. Elle a été proposée par M. Lippmann.

§ 3. — DES ÉLECTROMÈTRES GRADUÉS EXPÉRIMENTALEMENT.

160. — Les instruments que nous venons de décrire ne sont pas d'un usage commode dans la pratique lorsqu'on a besoin de connaître à chaque instant, et par une simple lecture rapidement faite, la différence de potentiel de deux conducteurs. On a donc dû imaginer des appareils spéciaux dont les indications ne peuvent plus être calculées à l'avance parce qu'ils sortent des conditions très simples que nous avons admises dans les électromètres absolus. Il faut donc les graduer par comparaison avec ces derniers et nous avons indiqué la méthode à suivre pour cela avec des détails suffisants pour n'y plus revenir.

161. — Electromètre à quadrants de William Thomson. — Cet appareil duquel découlent presque tous les types d'électromètres connus, peut être considéré comme composé de deux petits condensateurs plans dont les armatures extérieures AA, BB, enveloppent complètement l'armature intérieure commune CC qui est mobile et qui en se déplaçant dans le sens de sa longueur fait varier en sens inverse les capacités des deux condensateurs. Or nous avons donné (122) l'équation qui fait connaître l'effort mutuel des deux armatures d'un condensateur, de même forme que celui représenté par la figure 72, en fonction de la différence de potentiel de ces deux armatures. En supposant que le potentiel de l'armature A soit représenté par V_1, celui de l'armature B par V_2 et celui de l'arma-

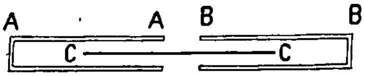


Fig. 72

ture intérieure mobile C par V, cette formule donnera pour la valeur de l'effort qui tend à enfoncer l'armature CC dans chacune des armatures creuses A et B :

$$F_1 = \frac{l}{2\pi\delta}(V_1 - V)^2, \qquad F_2 = \frac{l}{2\pi\delta}(V_2 - V)^2,$$

d'où

$$F_1 - F_2 = \frac{l}{2\pi\delta}\left[(V_1 - V)^2 - (V_2 - V)^2\right] = \frac{l}{\pi\delta}(V_2 - V_1)\left(V - \frac{V_2 + V_1}{2}\right),$$

équation dans laquelle l représente la largeur de CC comptée perpendiculairement au plan de la figure et δ la distance de CC à chacune des armatures AA, BB.

162. — Tel est le principe des électromètres à quadrants et nous allons voir maintenant comment on a modifié la forme des conden-

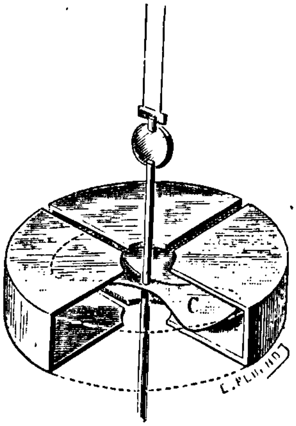


Fig. 73

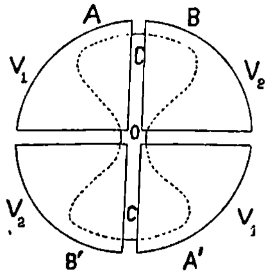


Fig. 74

sateurs AA, BB et de l'armature mobile pour faire de cet ensemble un appareil de mesure. Les armatures extérieures au lieu d'être des parallélipipèdes creux, comme nous l'avons supposé, prennent la forme représentée par la figure 73 et qui diffère peu de celle qu'on obtiendrait en coupant en quatre parties égales un cylindre creux de faible hauteur par rapport au diamètre de la base. L'armature mobile C prend la forme d'un secteur circulaire dont le mouvement de translation est remplacé par un mouvement de rotation autour du centre O (fig. 74); enfin pour donner de la symétrie à l'appareil, et réduire à des couples toutes les actions mutuelles de l'armature mobile C et des armatures creuses ou *quadrants* A, B, A', B', on double toutes les pièces de façon à les rendre symétriques par rapport au point O. On obtient ainsi l'électromètre à *quadrants*.

163. — Valeur du couple produit par les actions électriques. — Il est facile de trouver l'expression du moment des forces développées par les actions électriques, en partant des équations du n° 119 qui donnent l'accroissement $d\mathfrak{T}$ du travail produit dans un condensateur à capacité variable, en fonction de l'accroissement dC de la capacité. Dans ce cas, en effet, on a en appelant $d\theta$ l'angle infiniment petit décrit par l'armature et $\mathfrak{M}$ le moment des forces qui la sollicitent,

$$d\mathfrak{T} = \mathfrak{M}d\theta = \frac{1}{2} V^2 dC,$$

V, étant dans l'équation du n° 118, la différence de potentiel des deux armatures du condensateur considéré, doit être remplacé ici par $V_1 - V$ pour le condensateur formé par le *quadrant* A et l'armature mobile C (fig. 74), et par $V_2 - V$ pour le *quadrant* B. Enfin le travail $d\mathfrak{T}$ étant égal à la somme algébrique des travaux développés par chacun des deux quadrants, on a

$$d\mathfrak{T} = d\mathfrak{T}_1 + d\mathfrak{T}_2.$$

Or

$$d\mathfrak{T}_1 = \frac{1}{2} (V_1 - V)^2 dC_1, \qquad d\mathfrak{T}_2 = \frac{1}{2} (V_2 - V)^2 dC_2.$$

Donc

$$d\mathfrak{T}_1 + d\mathfrak{T}_2 = \frac{1}{2} (V_1 - V)^2 dC_1 + \frac{1}{2} (V_2 - V)^2 dC_2.$$

Mais le travail résultant $d\mathfrak{T} = \mathfrak{M}d\theta$, donne pour $\mathfrak{M}$ la valeur

$$\mathfrak{M} = \frac{d\mathfrak{T}}{d\theta} = \frac{d\mathfrak{T}_1 + d\mathfrak{T}_2}{d\theta} = \frac{1}{2} (V_1 - V)^2 \frac{dC_1}{d\theta} + \frac{1}{2} (V_2 - V)^2 \frac{dC_2}{d\theta}.$$

Il reste à déterminer les valeurs de $\frac{dC_1}{d\theta}, \frac{dC_2}{d\theta}$.

Il faut pour cela connaître l'équation qui donne C_1 et C_2 en fonction de θ. Si nous appliquons la formule relative aux condensateurs plans, nous aurons, en supposant que l'intervalle qui sépare les quadrants est négligeable et que l'armature mobile a la forme d'un sec-

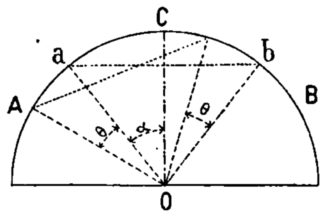


Fig. 75

teur abO (fig. 75) soustendant un angle $aOb = 2\alpha$ et qu'elle ait tourné d'un angle $aOA = \theta$,

$$C_1 = \frac{\text{Surface AOC}}{4\pi\delta} = \frac{1}{4\pi\delta} \times \frac{1}{2}\, r^2(\alpha + \theta), \qquad C_2 = \frac{1}{4\pi\delta} \cdot \frac{1}{2}\, r^2(\alpha - \theta),$$

$$dC_1 = \frac{1}{8\pi\delta}\, r^2 d\theta, \qquad dC_2 = \frac{-1}{8\pi\delta}\, r^2 d\theta,$$

$$\frac{dC_1}{d\theta} = -\frac{dC_2}{d\theta} = \frac{r^2}{8\pi\delta}.$$

Remplaçant $\frac{dC_1}{d\theta}$ et $\frac{dC_2}{d\theta}$ par leurs valeurs dans l'équation qui fait connaître $\mathcal{M}$ il vient

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{8\pi\delta}\left[(V_1 - V)^2 - (V_2 - V)^2\right] = \frac{r^2}{8\pi\delta}(V_2 - V_1)\left(V - \frac{V_2 + V_1}{2}\right).$$

Enfin en remarquant que le moment des forces appliquées à la seconde moitié de l'appareil est égal à $\mathcal{M}$ et de même signe que lui, il vient pour la valeur du couple total

$$2\mathcal{M} = \frac{r^2}{4\pi\delta}(V_2 - V_1)\left(V - \frac{V_2 + V_1}{2}\right).$$

Cette valeur quoique n'étant pas rigoureusement exacte à cause des hypothèses que nous avons dû faire pour pouvoir exprimer C en fonction de θ, nous montre que : 1° le moment des forces électriques est *proportionnel au carré du rayon* de l'armature mobile à laquelle, pour nous conformer à l'usage, nous donnerons le nom d'*aiguille* bien qu'elle n'en ait nullement la forme ; 2° le moment est indépendant de la déviation θ de l'aiguille.

164. — L'aiguille est suspendue soit à un fil de cocon, soit à un fil métallique très fin encastré à son autre extrémité qui permet de la mettre en communication avec un corps électrisé au potentiel V ; la torsion de ce fil développe un couple élastique qui doit être égal à $\mathcal{M}$ pour qu'il y ait équilibre. En désignant par d le diamètre du fil, par l sa longueur et par k un coefficient qui dépend du métal dont il est fait, le couple de torsion qu'il développe, lorsque l'aiguille à laquelle est soudée son extrémité libre décrit un angle θ, a pour valeur d'après les recherches de Coulomb $\frac{kd^4}{l}\theta$.

L'équation d'équilibre est donc

$$\frac{kd^4}{l}\theta = \frac{r^2}{4\pi\delta}(V_2 - V_1)\left(V - \frac{V_2 + V_1}{2}\right),$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\theta = \theta_1(V_2 - V_1)\left(V - \frac{V_2 + V_1}{2}\right),$$

θ_1 désignant une constante que l'on détermine expérimentalement en faisant par exemple $V = V_1$, ce qui réduit l'équation à celle-ci

$$\theta = \theta_1 \frac{(V_2 - V_1)^2}{2} \qquad \text{d'où} \qquad \theta_1 = \frac{2\theta}{(V_2 - V_1)^2}.$$

La différence de potentiel $V_2 - V_1$, est donnée directement par un électromètre absolu. Il est du reste prudent de tarer complètement l'appareil par comparaison avec un électromètre absolu.

165. **Couple électrique directeur.** — Les formules qui donnent la valeur de $\mathcal{M}$ ne sont pas absolument exactes pour des raisons que nous avons déjà expliquées en calculant l'effort attractif exercé par une des armatures d'un condensateur sur l'autre (122).

En étudiant cette question d'une façon plus approfondie, M. Gouy a trouvé que le moment $\mathcal{M}$ des forces électriques doit avoir une expression de la forme

$$k(V_1 - V_2)\left(V - \frac{V_1 + V_2}{2}\right) - k'(V_1 - V_2)^2\theta,$$

k et k' étant deux constantes qui dépendent des dimensions de l'appareil. On voit que le premier terme est celui que nous avons déjà donné comme représentant la valeur de $\mathcal{M}$ et qu'il est indépendant de θ, tandis que le second terme, proportionnel à θ, agit exactement comme la force élastique du fil de suspension, s'ajoute à celle-ci et diminue par conséquent la sensibilité de l'appareil.

Pour éliminer ce terme correcteur, auquel on a donné le nom de *couple électrique directeur* et que l'on pourrait appeler *couple électrique antagoniste proportionnel*, il faut opérer en donnant aux quadrants une différence de potentiel $(V_1 - V_2)$ constante. Si cette différence est petite, son carré devient négligeable et on peut ne pas tenir compte du terme correcteur.

Ces considérations sont importantes ; elles montrent que si l'instrument est destiné à mesurer de grandes différences de potentiel, on ne peut plus disposer arbitrairement des trois potentiels V, V_1, V_2 ; et que, même en établissant une relation entre ces trois potentiels, en prenant par exemple $V = V_1$, l'équation de l'équilibre deviendrait

$$\frac{k}{2}(V_1 - V_2)^2 - k'(V_1 - V_2)\theta = k_1\theta,$$

k_1 désignant le couple élastique de torsion pour $\theta = 1 = 57°,296$ d'où

$$\theta = \frac{1}{2}\,\frac{k(V_1 - V_2)^2}{c + k'(V_1 - V_2)^2},$$

qui montre que lorsque $V_1 - V_2$ devient très grand, la déviation θ de l'aiguille tend vers la limite $\frac{k}{k'}$, c'est-à-dire devient indépendante de la force élastique du ressort.

Toutefois, si la valeur du couple de torsion élastique k_1 est grande par rapport à k', on peut encore obtenir des déviations sensiblement proportionnelles à $V_1 - V_2$.

166. — Il y a deux moyens de supprimer complètement l'influence fâcheuse du couple électrique directeur :

1° De ramener toujours l'aiguille au zéro en tordant le fil à la partie supérieure comme dans la balance de Coulomb. Le couple électrique directeur étant proportionnel à θ est nul dans ce cas puisque $\theta = 0$.

2° Comme nous l'avons dit plus haut, prendre $V_1 - V_2$ constant, c'est-à-dire employer la méthode hétérostatique, mais alors l'appareil ne peut plus servir à mesurer les différences de potentiel qui changent de signe un grand nombre de fois dans l'unité de temps, comme cela peut se faire lorsqu'on emploie la méthode idiostatique et comme nous le verrons plus loin.

Nous pensons que le premier moyen est le meilleur, non seulement dans le cas actuel, mais dans toutes les expériences de mesure où il n'est pas absolument impossible de l'employer. Il n'y a guère que dans les applications industrielles où les appareils de mesure doivent indiquer à chaque instant la valeur du potentiel, sans exiger l'intervention de l'observateur, que l'emploi des appareils à aiguille libre puisse être justifié.

Quel que soit le mode de lecture adopté, il faut si l'on veut une grande sensibilité, remplacer le fil métallique par un fil de cocon ; mais alors l'aiguille doit être reliée électriquement au corps dont le potentiel est V, par un fil vertical métallique très fin, soudé au centre de la face inférieure et dont l'extrémité plonge dans un liquide conducteur et avide d'eau comme l'acide sulfurique. En outre, pour éviter les oscillations indéfinies de l'aiguille lorsque la valeur des forces qui agissent sur elle vient à changer, il faut la pourvoir d'un amortisseur qui peut consister en un petit poids cylindrique servant à tendre le fil métallique vertical dont nous venons de parler et qui plonge dans l'acide sulfurique.

§ 4. — MESURE DU POTENTIEL.

167. — Mesure du potentiel au moyen de l'électromètre à quadrants. — Nous allons maintenant passer en revue les diverses méthodes employées, lorsqu'on se sert de l'électromètre à quadrants comme appareil de mesures scientifiques, pour trouver le rapport d'une différence de potentiel à une autre supposée connue.

Si on néglige le couple directeur électrique, l'équation d'équilibre (164) peut s'écrire, en désignant par k_1 le couple (dynes × centimètres) de torsion du fil pour un angle égal à 1 ou 57°,296, et par c le couple indépendant de θ dû aux forces électriques :

$$k_1\theta = c(V_1 - V_2)\left(V - \frac{V_1 + V_2}{2}\right).$$

Puisqu'il ne s'agit que de trouver le rapport de deux différences de potentiel, il n'est pas nécessaire de connaître les constantes k_1 et c. Elles s'éliminent d'elles-mêmes comme on va le voir.

L'appareil permet de mettre en jeu simultanément trois potentiels V, V_1, V_2, il se prête donc à beaucoup de combinaisons, mais il ne faut pas perdre de vue que la formule de laquelle nous sommes partis (164) pour arriver à la formule actuelle, montre bien que, en réalité, il ne donne directement que la *différence des carrés de deux différences de potentiel,* et que le potentiel V que l'on trouve isolé dans la dernière formule n'a de sens défini que si l'on a soin de définir également un potentiel auxiliaire servant de zéro, tel que celui de la terre, car le potentiel absolu des corps qui nous environnent nous est nécessairement inconnu de même que leur vitesse absolue dans l'espace ; nous ne pouvons mesurer que les différences de leur potentiel de même que nous ne pouvons connaître que leur mouvement relatif.

Par conséquent, lorsque nous dirons que nous mettons l'aiguille de l'instrument au potentiel V, cela voudra dire que l'un des pôles de la source d'électricité dont nous nous servons étant en communication avec l'aiguille, l'autre pôle est mis en communication avec la terre ; le changement de signe du potentiel V sera obtenu en mettant à la terre le pôle qui était précédemment relié à l'aiguille et inversement. Voici maintenant les différents procédés en usage dans les laboratoires, pour utiliser l'électromètre à quadrants à la détermination du rapport des différences de potentiel de plusieurs sources.

168. Méthode hétérostatique. — *Première méthode.* — Soit P une source d'électricité dont les deux pôles présentent une différence de potentiel $V_1 - V_2$, et P′ une seconde source pour laquelle cette différence de potentiel est représentée par V (fig. 76).

On met l'un des pôles de P en communication avec la paire de quadrants en diagonale Q_1, l'autre pôle avec la seconde paire de quadrants Q_2.

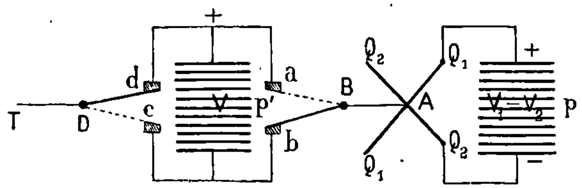


Fig. 76

Puis, au moyen d'un commutateur inverseur B*b*, on réunit l'aiguille A à l'un des pôles de la seconde source, le second pôle étant mis à la terre par le levier D*d*.

La déviation θ_1 de l'aiguille est donnée alors par la formule (167) :

$$\theta_1 = \frac{c}{k_1}(V_1 - V_2)\left(V - \frac{V_1 + V_2}{2}\right).$$

Au moyen des inverseurs B*b*, D*d*, on intervertit l'ordre des communications de la seconde source P′ avec l'aiguille et la terre, c'est-à-dire qu'on met l'aiguille au potentiel $-V$ et le pôle positif de P′ au potentiel zéro, et on fait une seconde lecture qui donne

$$\theta_2 = \frac{c}{k_1}(V_1 - V_2)\left(-V - \frac{V_1 + V_2}{2}\right).$$

En retranchant θ_2 de θ_1, on trouve

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{2c}{k_1}(V_1 - V_2)V.$$

D'après ce que nous avons dit du couple électrique antagoniste ou directeur, cette équation sera d'autant plus près de l'exactitude rigoureuse que $V_1 - V_2$ est plus petit, puisque le couple est proportionnel au carré de $(V_1 - V_2)$.

Mais comme $\theta_1 - \theta_2$ est proportionnel au produit $(V_1 - V_2)V$, on voit que pour conserver à $\theta_1 - \theta_2$ la même valeur, il faut diminuer $(V_1 - V_2)$ et augmenter V, c'est-à-dire que l'on a intérêt à mettre en communication avec l'aiguille, celle des deux sources dont le potentiel est le plus élevé.

Pour utiliser la formule que nous venons d'établir, il faut connaître la valeur du coefficient $\frac{c}{k_1}$, ce qui exige que l'instrument ait été gradué.

Mais on peut éviter cette graduation si on désire seulement trouver le rapport du potentiel V à un autre potentiel V_0 pris pour étalon. Il suffira en effet de recommencer avec la source au potentiel V_0 les opérations que nous venons de décrire ; en désignant par θ_0 la différence des deux lectures successives obtenues dans cette seconde expérience, on aura

$$\theta_0 = \frac{2c}{k_1}(V_1 - V_2)V_0$$

et en posant $\theta_1 - \theta_2 = \theta$ et divisant membre à membre, on a

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{V}{V_0}.$$

En suivant cette méthode et en conservant $(V_1 - V_2)$ constant, on élimine l'influence du couple électrique directeur, parce que sa valeur $k'(V_1 - V_2)^2\theta$ (165), peut alors s'écrire $k''\theta$, et modifie simplement d'une façon constante le coefficient de torsion élastique k_1 du fil de suspension.

Seconde méthode. — Voici une autre méthode qui réduit à deux le nombre des lectures à faire tout en éliminant également l'influence du couple électrique directeur.

L'aiguille A est reliée d'une part à la terre par le conducteur ABCT, d'autre part à l'un des pôles E d'une source d'électricité EF, par le conducteur CDE (fig. 77).

La première paire de quadrants QQ est reliée à la source ML dont les deux pôles ont entre eux une différence de potentiel constante que nous désignerons par v.

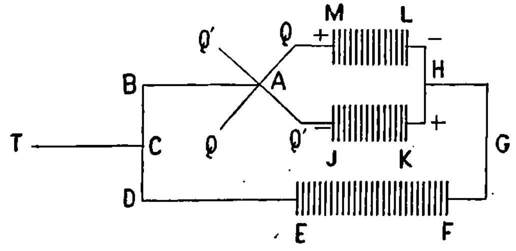


Fig. 77

La deuxième paire de quadrants Q'Q' est reliée à la source JK dont les deux pôles ont entre eux une différence de potentiel égale à $-v$.

Les extrémités libres L et K des deux sources qui sont électrisées en sens contraire, sont reliées par un fil métallique LHK dont le milieu H communique avec la seconde extrémité F, de la source EF, par le conducteur HGF. Les deux pôles E, F sont maintenus à une différence de potentiel V.

Le conducteur ABCDE communiquant en C avec la terre, est au potentiel zéro ; le point F, situé au second pôle de la source EF est alors au potentiel V ainsi que les pôles K et L des deux sources KJ, LM. Par conséquent, le potentiel des quadrants QQ est égal à $V+v$ et celui des quadrants Q'Q' à $V-v$.

On a donc

$$V_1 = V + v, \qquad V_2 = V - v,$$

et la déviation θ de l'aiguille est donnée par la formule

$$\theta = \frac{c}{k_1}\left(V_1 - V_2\right)\left(V' - \frac{V_1 + V_2}{2}\right)$$

dans laquelle V' désigne le potentiel de l'aiguille ; or, ce potentiel est nul puisqu'elle communique avec la terre par le conducteur T. Cette formule devient donc

$$\theta = -\frac{c}{k_1} 2vV.$$

En remplaçant la source EF par une autre à un potentiel différent

V_0, on aura

$$\theta_0 = -\frac{c}{k_1}2vV$$

d'où

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{V}{V_0}.$$

Troisième méthode. — Elle exige comme la première quatre lectures et élimine aussi l'influence du couple directeur parce que l'on maintient constante la différence de potentiel des deux paires de quadrants.

L'aiguille A est reliée à un levier Oc mobile autour du point O, (fig. 78) que l'on peut mettre en contact avec le pôle a ou avec le pôle b d'une source d'électricité EF capable de maintenir entre eux une différence de potentiel que nous désignerons par V_0.

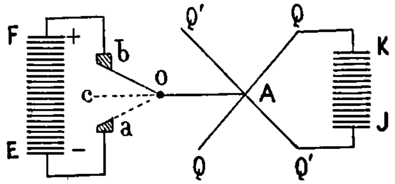


Fig. 78

Les quadrants QQ et Q'Q' sont d'autre part reliés aux deux pôles d'une source qui maintient entre eux une différence de potentiel v.

On a donc $V = V$ ou V', suivant que l'on met le levier Oc en contact avec a ou avec b ; $V_1 - V_2 = v$. Si on désigne par θ_1 ou θ_2 les déviations obtenues en mettant d'abord le levier Oc en contact avec a, puis avec b, on aura

$$\theta_1 = \frac{c}{k_1}v\left(V - \frac{V_1 + V_2}{2}\right), \qquad \theta_2 = \frac{c}{k_1}v\left(V' - \frac{V_1 + V_2}{2}\right)$$

d'où

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{c}{k_1}v(V - V') = \frac{c}{k_1}vV_0 = \theta.$$

En recommençant les deux opérations avec une autre source EF dont les pôles auraient entre eux une différence de potentiel V'_0 et en appelant θ' la différence des deux lectures, on aurait

$$\frac{c}{k_1} v V'_0 = \theta'.$$

On en conclut

$$\frac{\theta}{\theta'} = \frac{V_0}{V'_0}.$$

Quatrième méthode. — L'aiguille A est mise en communication avec un corps électrisé dont on veut connaître le potentiel V, celui de la terre étant zéro.

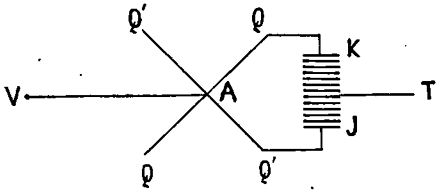


Fig. 79

Les quadrants QQ, Q'Q' (fig. 79) aboutissent comme dans la méthode précédente aux extrémités d'une source d'électricité JK dans laquelle le potentiel croît régulièrement et proportionnellement à la longueur depuis J jusqu'à K, le milieu de cette source est mis à la terre de sorte que, en appelant comme ci-dessus v, la différence de potentiel constante maintenue entre J et K, on a

$$V_1 = \frac{v}{2}, \qquad V_2 = -\frac{v}{2}, \qquad V_1 + V_2 = 0$$

d'où

$$\theta = \frac{c}{k_1} v V.$$

Cette équation donnera la valeur de V par une seule lecture, à la condition que l'instrument ait été gradué par comparaison avec un électromètre absolu. On pourrait aussi, au moyen d'une des méthodes précédentes, le graduer en divisions arbitraires correspondantes à des accroissements égaux du potentiel de l'aiguille A au-dessus du potentiel de la terre, l'unité adoptée étant égale à la différence constante de potentiel des deux quadrants obtenue au moyen d'une pile telle que celles que nous décrirons plus tard.

169. — Méthode idiostatique. — Dans les méthodes que nous venons d'exposer, les quadrants sont chargés au potentiel $V_1 - V_2$ au moyen d'une source autre que celle dont on veut mesurer le potentiel ; dans la méthode idiostatique au contraire, l'aiguille est mise en communication avec une des paires de quadrants. Soit V_1 son potentiel. On a alors $V = V_1$. La formule qui donne θ devient alors

$$\theta = \frac{c}{k_1}(V_1 - V_2)\left(V_1 - \frac{V_1 + V_2}{2}\right) = \frac{c}{2k_1}(V_1 - V_2)^2.$$

La déviation est donc proportionnelle au carré de la différence de potentiel.

Le couple électrique directeur ayant une expression de la forme $k'(V_1 - V_2)^2$ intervient ici comme le ferait une augmentation de raideur du fil de suspension et altère d'autant plus l'exactitude de la formule qui donne θ que $(V_1 - V_2)^2$ est plus considérable. On a donc intérêt, lorsqu'on veut appliquer cette méthode, à employer un fil dont le coefficient de torsion soit assez considérable pour limiter l'amplitude de θ à 5 ou 6 degrés. Mais nous répèterons ce que nous avons déjà dit à ce sujet; c'est que la seule méthode de mesure qui soit irréprochable, aussi bien dans le cas actuel que dans toutes les circonstances où il s'agit de mesurer une force produite par un phénomène quelconque, est la méthode dite de *réduction à zéro*, c'est-à-dire celle dans laquelle on ramène toujours à la même position l'organe soumis à la force qu'il s'agit de mesurer.

Nous verrons dans la suite de nombreux exemples de mesures de forces produites par des actions électriques de toute nature, qui ne feront que confirmer ce que nous venons de dire.

170. — Amortissement des oscillations. — La libre déviation de l'organe soumis à la force que l'on veut mesurer, n'est acceptable dans les mesures de précision, que lorsqu'elle est très petite et que les organes mobiles sont pourvus d'*amortisseurs* qui développent une force antagoniste croissant avec leur vitesse et devenant nulle lorsqu'elle est nulle. Nous avons déjà indiqué précédemment la disposition adoptée dans certains électromètres (166) et qui consiste dans l'emploi d'un petit cylindre participant aux oscillations de l'aiguille et qui, se mouvant dans un liquide (acide sulfurique), en éprouve un frottement proportionnel au carré de la vitesse.

Un autre procédé dont nous trouverons de nombreux exemples dans les instruments de mesure, est une application des courants d'induction qui prennent naissance dans une masse métallique en mouvement dans un champ magnétique. Ces courants développent des efforts mécaniques dirigés en sens contraire du mouvement et proportionnels à la vitesse, de sorte que les oscillations de l'organe mobile de l'instrument auquel est liée la masse métallique, diminuent très rapidement d'amplitude et que la position d'équilibre est atteinte presqu'instantanément. La figure 80 montre une des nombreuses dispositions que l'on peut adopter dans l'application de ce principe.

dd' est un disque de cuivre (vu en coupe verticale) lié à l'axe vertical *aa'* de l'*aiguille* de l'instrument de mesure.

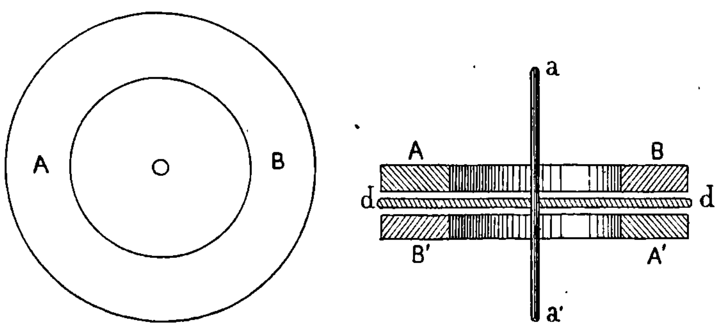


Fig. 80

AB est la coupe d'un aimant circulaire comme ceux qui ont été employés par M. Duchemin dans sa boussole circulaire. A'B' est la coupe d'un second aimant identique au premier, mais placé en sens inverse, de façon que chacun des pôles d'un aimant soit en face d'un pôle de nom contraire appartenant à l'autre aimant. On peut aussi, dans le cas où on voudrait donner aux aimants une grande puissance, leur donner la forme indiquée dans la figure 81, et en placer plusieurs dirigés suivant des plans verticaux passant par l'axe *aa'* et formant entre eux des angles égaux. Les pôles de ces aimants devraient bien entendu être alternés [1].

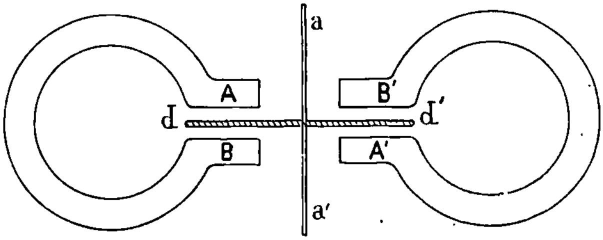


Fig. 81

Un électromètre dans lequel l'amortissement a été l'objet d'une étude toute particulière, est celui de M. Carpentier, que nous décrirons plus loin.

171. — Mesure d'une différence de potentiel oscillant périodiquement entre deux valeurs extrêmes. — Les électromètres sont les seuls appareils qui permettent de mesurer, avec certitude, la différence moyenne de potentiel de deux points d'un circuit parcouru par un courant alternatif périodique. Tous les autres procédés, que nous examinerons après avoir étudié l'électro-magnétisme, soulèvent des objections de plusieurs sortes. Mais comme cette question est intimement liée à l'étude des courants alternatifs et que nous ne nous occupons ici que des phénomènes permanents, c'est-à-dire indépendants du temps, nous ne les traiterons que plus tard. Nous pouvons cependant dire dès à présent que si la différence de potentiel qu'il s'agit de mesurer prend alternativement des valeurs égales et de signe contraire, il est évident sans démonstration que l'emploi de la méthode hétérostatique est impossible parce que les actions électriques variables appliquées à l'aiguille seront aussi alternativement égales et de signe contraire et ne pourront lui imprimer qu'un mouvement vibratoire d'amplitude extrêmement petite, de sorte qu'elle paraîtra rester au zéro. Il faut donc dans ce cas, employer la méthode

(1) Cette disposition est identique à celle que nous avons imaginée et décrite en 1884 (voir le journal " La Lumière Électrique " ; 2 février 1884, page 224) pour rendre exactes les indications d'un compteur d'énergie électrique construit par la maison Siemens ; elle a été appliquée plusieurs années après par Elihu Thomson dans le même but.

idiostatique pour laquelle les forces appliquées à l'aiguille, étant proportionnelles au carré de la différence de potentiel, sont toujours positives.

172. — Mesure instantanée d'une diffférence de potentiel. — L'emploi combiné d'un condensateur et de l'électromètre permet de résoudre facilement une question intéressante à plusieurs points de vue, comme nous le verrons plus tard ; c'est celle de la mesure instantanée de la différence de potentiel des deux pôles d'une source d'électricité. Il suffit pour cela : 1° de charger un condensateur de capacité connue en mettant ses deux armatures en communication, pendant un temps très court, avec les deux pôles de la source, condition d'ailleurs très facile à réaliser ; 2° de mettre ensuite le condensateur en communication avec l'électromètre qui, par sa déviation permanente (puisqu'elle dure tant que le condensateur reste chargé), fait connaître la différence de potentiel cherchée.

Mais il peut être nécessaire dans ce cas de tenir compte de la capacité de l'électromètre, laquelle est variable avec la position de l'aiguille ; on devra donc ramener celle-ci au zéro en tordant le fil de suspension, c'est-à-dire employer la méthode de réduction au zéro. Si nous désignons par C la capacité du condensateur, par c celle de l'électromètre, et si nous supposons qu'on emploie la méthode idiostatique (quoique cela ne soit nullement nécessaire), nous aurons, si le condensateur est mis en communication avec l'électromètre *après* avoir été chargé :

$$x = \frac{C + c}{C} V,$$

x désignant la différence de potentiel instantanée des deux pôles de la source au moment où elle est mise en communication pendant un temps très court avec le condensateur ; V étant la valeur de la différence de potentiel lue sur la graduation de l'électromètre.

Cette méthode de mesure instantanée d'une différence de potentiel, est susceptibte d'une grande exactitude et peut rendre de grands services dans l'étude des phénomènes qui s'accomplissent dans les machines dynamo-électriques, qu'elles soient à courant continu ou à courants alternatifs. Elle suppose bien entendu que le condensateur se charge dans un temps extrêmement faible de toute la quantité d'électricité que comporte sa capacité et la différence de potentiel des pôles de la source. C'est ce que nous démontrerons plus tard.

§ 5. — ÉLECTROMÈTRES DE LABORATOIRES.

173. — Il existe de nombreux types d'électromètres ; les uns sont destinés plus spécialement aux mesures de laboratoires, ils comportent généralement l'emploi d'un miroir et d'une image lumineuse qui se déplace sur une règle graduée; dans les autres destinés aux usages industriels, le miroir est remplacé par une aiguille de paille ou d'aluminium qui se meut devant un cadran. En outre, dans les appareils de laboratoires, on emploie fréquemment la méthode hétérostatique et la différence de potentiel auxiliaire est alors généralement produite par une petite pile à eau pure, composée d'une centaine de petits vases en porcelaine, contenant une lame de zinc et une lame de cuivre plongées dans de l'eau pure. Le vase de porcelaine est lui-même entouré de paraffine jusqu'à sa partie supérieure, de façon à assurer une isolation parfaite. Tous ces petits couples à eau sont groupés en tension, c'est-à-dire que la lame de cuivre de chacun d'eux (pôle positif) est soudée à la lame de zinc (pôle négatif) du couple suivant. Cet ensemble, comme nous le verrons plus tard, jouit de la propriété de posséder à ses deux extrémités libres, une différence de potentiel un peu moindre qu'un volt. Les deux pôles de cette pile sont mis en communication avec les deux paires de quadrants auxquels ils communiquent ainsi la différence de potentiel constante nécessaire pour l'emploi de la méthode hétérostatique. Cette dernière s'impose quand il s'agit de mesurer de très faibles différences de potentiel, parce que le moment des forces électriques étant, lorsqu'on emploie la méthode idiostatique proportionnel au carré de la différence de potentiel, deviendrait infiniment petit. Pour rendre ceci plus clair, supposons d'abord que l'on emploie la méthode hétérostatique telle qu'elle est décrite au n° 168 (4° méthode), c'est-à-dire que l'on ait $V_1 + V_2 = 0$. Le moment des actions électriques sera dans ce cas proportionnel à $(V_1 - V_2)V$. Si au contraire on emploie la méthode idiostatique en mettant l'aiguille en communication avec la paire de secteurs au potentiel V_1, ce même moment sera proportionnel à $(V_1 - V_2)^2$. Le rapport du premier moment au second sera donc égal à

$$\frac{(V_1 - V_2)V}{(V_1 - V_2)^2} = \frac{V}{V_1 - V_2},$$

c'est-à-dire d'autant plus grand que la différence de potentiel $V_1 - V_2$ est plus petite.

Dans l'industrie, au contraire, les potentiels étant toujours élevés, la méthode idiostatique donne une sensibilité plus grande, précisément parce que le moment des forces électriques est proportionnel à $(V_1 - V_2)^2$; en outre, les courants sont souvent alternatifs et par conséquent aussi les différences de potentiels. Alors la méthode idiostatique est non seulement avantageuse, mais indispensable, comme nous l'avons déjà dit.

Nous décrirons les électromètres de Thomson, de Mascart, de Blondlot.

174. — Electromètre à quadrants de Thomson. — Il est destiné aux mesures comparatives de faibles différences de potentiel et représenté par les figures 82 et 83. Outre la partie essentielle qui est constituée par les quadrants, il contient les organes accessoires dont nous avons déjà parlé à propos de l'électromètre absolu, c'est-à-dire : la *jauge* et le *replenisher*.

La *jauge* est en réalité, comme nous l'avons déjà dit, un petit électromètre témoin très sensible, destiné à faire savoir si le potentiel de l'aiguille reste constant.

Le *replenisher*, véritable petite machine à influence, sert à augmenter ou à diminuer (suivant le sens dans lequel on le tourne) la charge de l'aiguille, de manière à la ramener toujours au même potentiel.

Enfin l'appareil est pourvu d'une *plaque d'induction* (fig. 84), employée lorsqu'on veut l'utiliser pour la mesure de potentiels élevés. Elle consiste en une petite plaque métallique *e* parallèle à un quadrant *c* et située à une certaine distance de lui, de façon

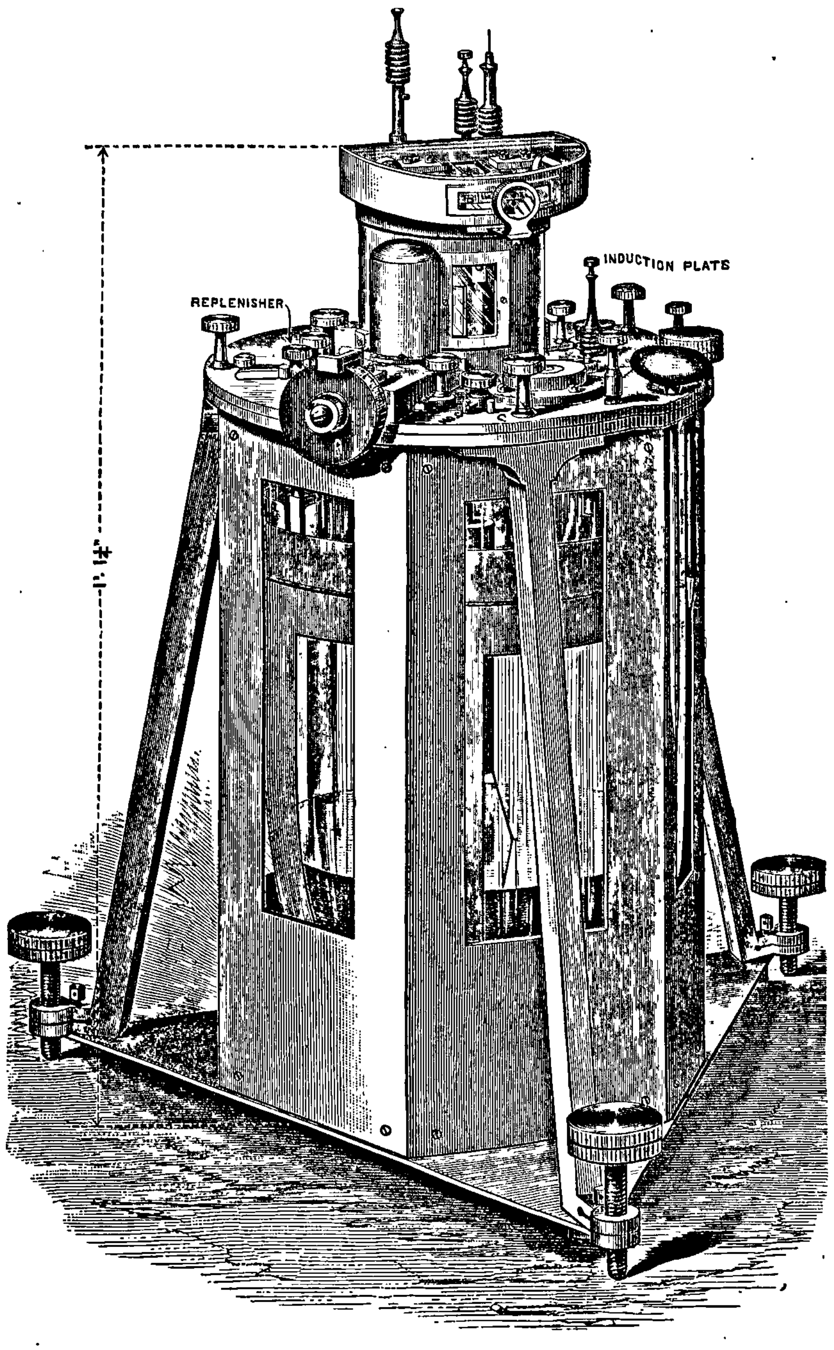


Fig. 82. — Electromètre à quadrants de W. Thomson.

Légende.

Replenisher = *Rechargeur.* | Induction plate = *Plaque d'induction.*

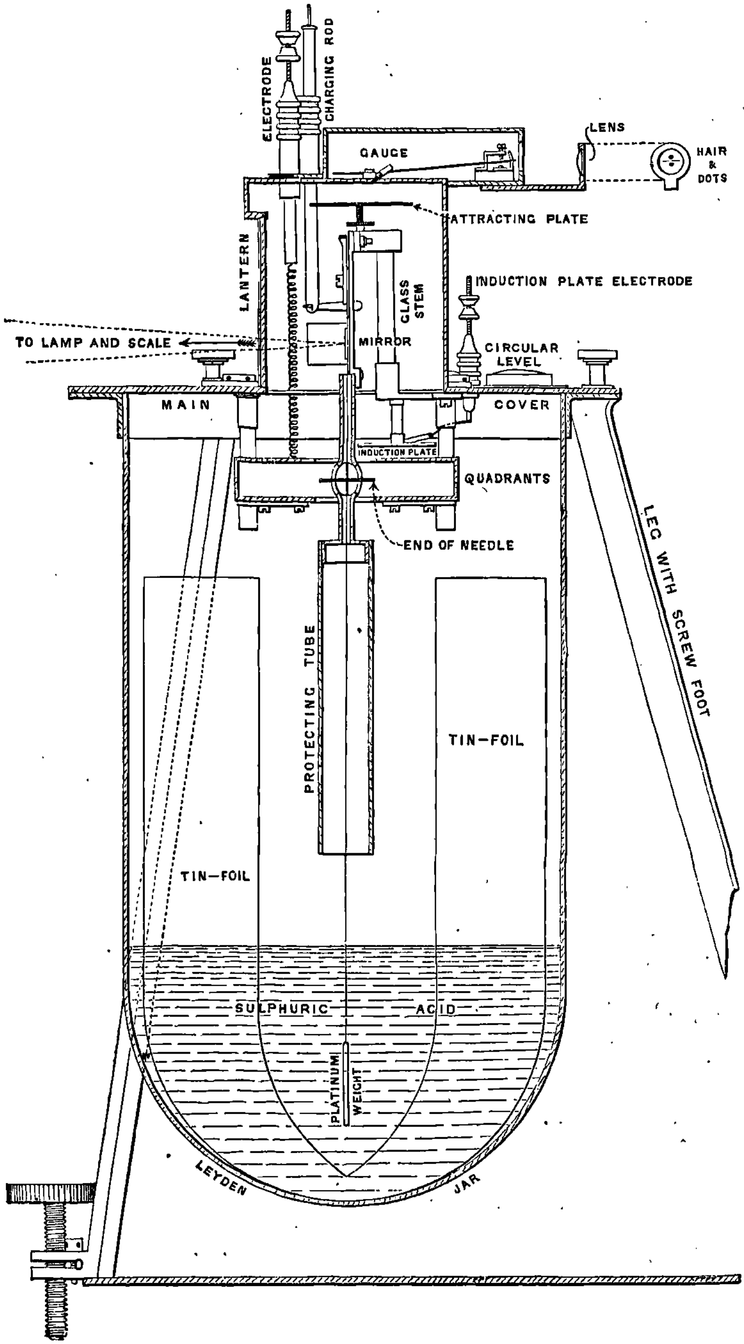


Fig. 83. — Coupe de l'électromètre à quadrants de W. Thomson.

que si on la met en rapport avec une source d'électricité, elle se charge et provoque par induction dans le quadrant une charge de signe contraire. Cette charge dépend naturellement de la distance de la plaque au quadrant; elle est par conséquent aussi faible qu'on le veut. L'usage de la plaque d'induction exige un tarage préalable faisant connaître le rapport de la charge des quadrants lorsqu'on l'emploie, à celle qu'ils prennent directement lorsqu'ils communiquent avec la source qui sert à charger la plaque d'induction,

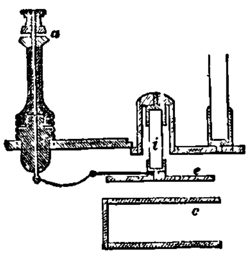


Fig. 81

Tous ces organes fort ingénieux, d'ailleurs, sont d'un emploi très rares; ils sont inutiles lorsqu'on emploie des piles comme sources d'électricité, puisqu'elles maintiennent d'elles-mêmes et sans difficulté un potentiel constant.

Aussi le modèle suivant, dans lequel ils ont été supprimés, est-il de beaucoup le plus employé.

175. — Electromètre Thomson, simplifié par M. Mascart. — C'est l'électromètre de Thomson, dans lequel on a supprimé la *jauge*, le *replenisher* et la plaque d'induction. Lès quadrants sont électrisés au moyen de la pile à eau dont nous avons déjà parlé et dont le milieu est en communication avec la terre. L'aiguille est en communication avec le corps au potentiel V que l'on veut mesurer. La suspension est bifilaire comme dans l'instrument précédent, mais plus simple; l'aiguille est pourvue d'un amortisseur à acide sulfurique qui sert en même temps à établir la communication entre elle et le corps au potentiel V.

Enfin tout l'instrument (fig. 85) est contenu dans une cage métal-

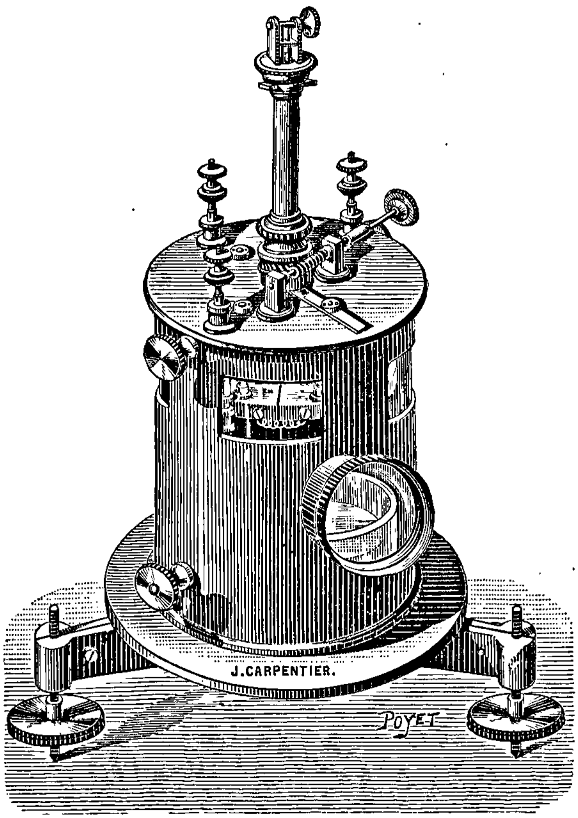


Fig. 85. — Electromètre à quadrants de M. Mascart.

lique en communication avec le sol et qui protège ainsi les quadrants et l'aiguille contre toute espèce d'influence électrique extérieure.

176. — Electromètre à quadrants de MM. Blondlot et Curie. — Dans les électromètres précédents, l'aiguille a la forme d'un huit. Mais Maxwell a démontré que la forme qui donne les meilleurs résultats, c'est-à-dire celle pour laquelle le moment des forces électriques est le plus près possible d'être indépendant de l'angle θ, est celle représentée par la figure 86. Les quadrants sont séparés par un faible intervalle et agissent sur l'aiguille qui affecte la forme de deux secteurs embrassant chacun un angle de 90 degrés et opposés par le sommet. On obtient ainsi, paraît-il, des déviations proportionnelles aux potentiels de l'aiguille (la différence de potentiel des quadrants étant maintenue constante) jusqu'à 10 degrés.

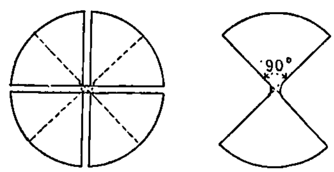


Fig. 86

MM. Blondlot et Curie ont modifié d'une façon très notable la forme classique des quadrants et de l'aiguille telle que l'avait imaginée William Thomson et telle qu'elle a été reproduite par la plupart des physiciens. L'*aiguille* (fig. 87) est constituée par deux demi-cercles A_1, A_2 reliés par une petite pièce d'ébonite *dd'*. Les quadrants sont remplacés par deux plateaux de construction identique à celle de l'*aiguille*.

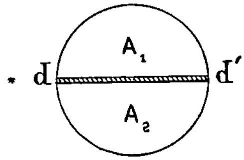


Fig. 87

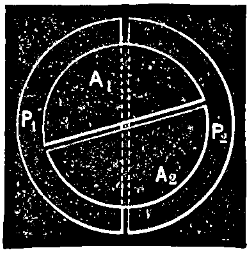


Fig. 88

On a ainsi un système formé de quatre demi-cercles dont deux sont fixes, deux mobiles, et qui n'ont entre eux aucune communication électrique de sorte qu'ils peuvent être portés à quatre potentiels différents. La figure 88 représente l'aiguille superposée au plateau inférieur du système qui remplace les quadrants.

La figure 89 représente cette aiguille telle qu'elle est construite réellement. Dans le but d'unir une grande légèreté à une grande rigidité, MM. Blondlot et Curie l'ont fait découper dans une feuille d'aluminium ondulée.

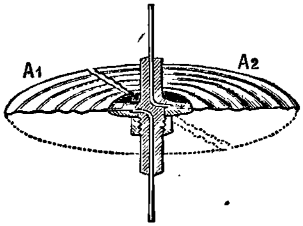


Fig. 89

Si l'on désigne par V_1 et V_2 les potentiels respectifs des deux moitiés de l'aiguille A_1, A_2, par V'_1 et V'_2 ceux des deux autres moitiés du plateau P_1, P_2 et si l'angle des deux diamètres isolants de l'aiguille et des plateaux diffère peu d'un angle droit, le couple développé par les actions électriques est indépendant de cet angle et a pour valeur

$$2c_1(V_1 - V_2)(V'_1 - V'_2).$$

Le couple électrique directeur dont nous avons signalé les inconvénients dans l'électromètre à quadrants, n'existe pas dans la disposition de MM. Blondlot et Curie. Le couple de torsion du fil métallique de suspension (qui a $\frac{1}{50}$ de millimètre de diamètre) a pour expression $k_1\theta$, de sorte que l'équation de l'équilibre est

$$k_1\theta = 2c_1(V_1 - V_2)(V'_1 - V'_2) \qquad \text{d'où} \qquad \theta = \frac{2c_1}{k_1}(V_1 - V_2)(V'_1 - V'_2),$$

dans laquelle θ représente la déviation angulaire de l'aiguille comptée à partir de la position représentée dans la figure 87 ; k_1 le coefficient de torsion élastique du fil déjà défini (165) et c_1 la capacité du système par unité d'angle (l'unité d'angle $= 57^\circ,296$).

La symétrie complète des deux organes qui remplacent les quadrants d'une part et l'aiguille d'autre part a pour conséquence la symétrie que l'on remarque dans la formule.

Pour régler l'instrument qui est représenté par la figure 90, on commence par le caler à l'aide de trois vis et d'un niveau à bulle d'air N que l'on voit sur la figure, on tourne le tambour B placé à la partie supérieure jusqu'à ce que le diamètre isolant de l'aiguille soit perpendiculaire au diamètre isolant des plateaux fixes, on fait communiquer les demi-cercles fixes P_2 et P_4 avec la terre et les deux autres P_1 et P_3 avec la source, puis on crée entre les demi-cercles

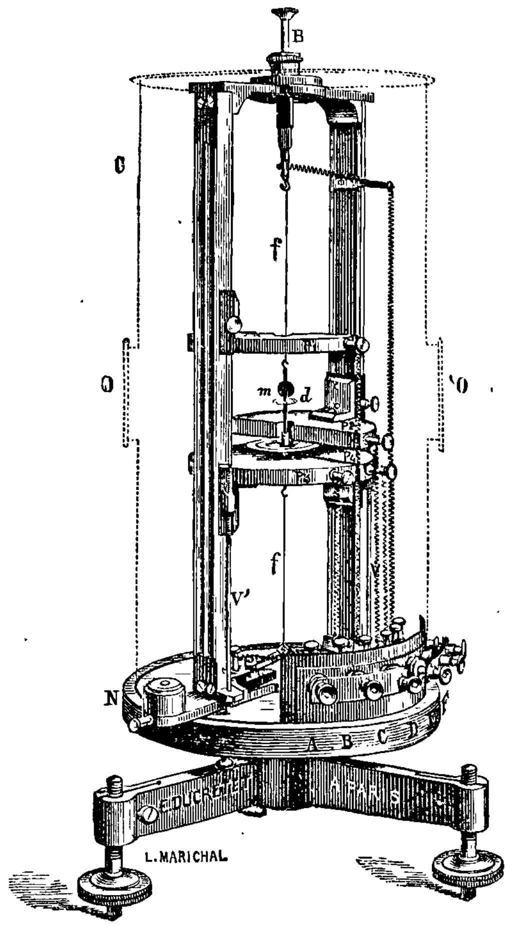


Fig. 90. — Electromètre à quadrants de MM. Blondlot et Curie.

de l'aiguille mobile une différence de potentiel aussi élevée qu'on le peut sans faire éclater d'étincelles. Si l'appareil est bien réglé il ne doit donner aucune déviation ; dans le cas contraire, on déplace l'un des plateaux jusqu'à ce que la déviation disparaisse.

L'amortissement des oscillations est obtenu par l'aimantation des plateaux fixes qui font naître dans l'aiguille d'aluminium des courants induits lorsqu'elle oscille ; c'est un procédé identique au fond à celui que nous avons décrit au numéro 170.

Voici un tableau emprunté à un mémoire des auteurs de cet électromètre. La première colonne indique le nombre d'unités de différence de potentiel existant entre les deux moitiés du cercle mobile et entre les deux moitiés du cercle fixe, l'instrument étant employé suivant la méthode idiostatique. On avait donc $V_1 - V_2 = V'_1 - V'_2$.

La seconde colonne donne la déviation θ obtenue dans ces conditions et qui doit être proportionnelle au carré de $(V_1 - V_2)$. θ est exprimé en secondes d'arc.

La troisième colonne contient la valeur du rapport de la déviation θ au carré du nombre proportionnel à $(V_1 - V_2)$. Si l'instrument était parfait ce rapport devrait être constant. L'unité de différence de potentiel adoptée dans ce tableau est celle qui existe à circuit ouvert entre les deux pôles d'une pile étalon de Gouy ($1^{\text{volt}},39$).

$V_1 - V_2$	θ	$\frac{\theta}{(V_1-V_2)^2}$	$V_1 - V_2$	θ	$\frac{\theta}{(V_1-V_2)^2}$	$V_1 - V_2$	θ	$\frac{\theta}{(V_1-V_2)^2}$
4	1072	67,00	12	9666	67,12	20	26745	66,86
6	2412	67,00	14	13143	67,05	22	31920	65,95
8	4290	67,03	16	17205	67,20	24	37620	65,31
10	6705	67,05	18	21785	67,20			

On voit que la proportionnalité entre la déviation et le carré de la différence de potentiel subit une variation presque brusque à partir de 21 785 secondes d'arc. Il n'est donc pas prudent de dépasser une déviation de 6 degrés.

177. — Electromètre à quadrants cylindriques de M. Carpentier. — Les quatre quadrants au lieu d'être plans et d'être des secteurs circulaires, ont une forme cylindrique et forment les quatre quarts de la surface latérale d'un cylindre (fig. 91).

L'aiguille affecte aussi une forme cylindrique, elle a la forme d'une sorte de cadre (fig. 92) dont les côtés horizontaux sont plans tandis que les côtés verticaux sont des portions de la surface latérale d'un cylindre occupant un espace angulaire voisin de 90°. L'aiguille est suspendue en O par un fil métallique très fin dont la torsion sert à équilibrer le couple dû aux actions électriques. Le principe et la

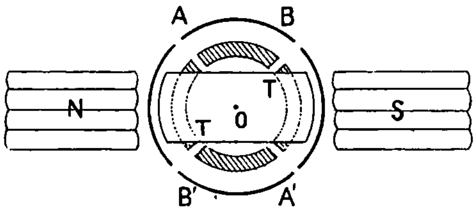


Fig. 91

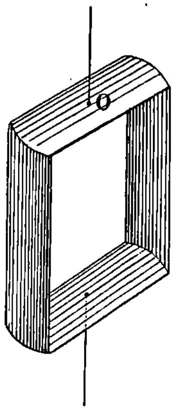


Fig. 92

théorie de cet instrument sont donc exactement les mêmes que ceux de l'électromètre à quadrants de Thomson, mais il présente une particularité intéressante qui consiste dans le moyen employé pour obtenir un amortissement très énergique des oscillations de l'appareil. Pour atteindre ce but M. Carpentier n'a eu qu'à reproduire la disposition bien connue du galvanomètre Deprez-d'Arsonval. L'aiguille en aluminium constitue un circuit métallique entièrement fermé qui oscille dans un champ magnétique puissant constitué par un aimant en fer à cheval NS entre les pôles duquel se trouve un tube de fer TT intérieur à l'aiguille. Cette disposition, que nous avons adoptée dans le galvanomètre Deprez-d'Arsonval au lieu de l'arête de fer primitivement proposée par M. d'Arsonval, renforce beaucoup plus le champ magnétique.

La figure 93 représente cet électromètre tel qu'il est construit par M. Carpentier.

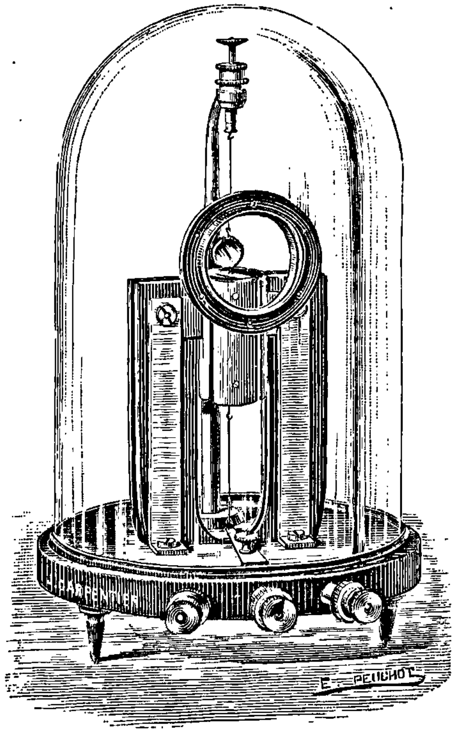


Fig. 93. — Electromètre à quadrants cylindriques de M. Carpentier.

178. — Electromètre à bilame de quartz de MM. J. et P. Curie. — Cet appareil est basé sur la dilatation ou la contraction qu'éprouve une lame de quartz électrisée. Deux plaques de quartz sont taillées parallèlement dans un même bloc de quartz ; elles sont normales à l'axe électrique, leur contour a la forme d'un rectangle allongé et le côté le plus long de ce rectangle est normal à la fois aux axes optiques et électrique. Les deux plaques, identiques entre elles, sont amincies jusqu'à ce qu'elles n'aient plus qu'une très faible épaisseur et collées l'une sur l'autre, l'une d'elles étant retournée face pour face en sorte que les axes électriques soient de sens inverse dans les deux lames. On réalise ainsi une bilame dont on argente les deux faces extérieures jusqu'à une petite distance des bords.

Electrisées à des potentiels différents, l'une des lames tend à se dilater, l'autre à se contracter dans la direction de leur plus grande longueur. Comme elles sont collées l'une sur l'autre, ce double effet a pour conséquence une courbure de la bilame dont l'une des extrémités est fixe tandis que l'autre porte une aiguille amplificatrice qui transforme cette courbure en une déviation linéaire que l'on mesure au microscope. Pour cela l'extrémité de l'aiguille porte un petit micromètre obtenu photographiquement et divisé en cinquantièmes de millimètre. Ce procédé de lecture est plus sensible, beaucoup moins encombrant et bien plus commode que l'installation d'un miroir et d'une échelle divisée sur laquelle se meut une tache lumineuse.

En désignant par l la longueur de la bilame ; par e son épaisseur ; par L la longueur de l'aiguille amplificatrice ; par δ la déviation linéaire de l'extrémité de l'aiguille et par V la différence de potentiel des deux faces argentées de la bilame, on a d'après M. Curie, la formule suivante en unités C.G.S :

$$\delta = \frac{6.32}{100000000} \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{l}{e}\right)^2 \frac{2L + l}{l} V.$$

La sensibilité n'est jamais très grande et l'instrument est surtout destiné à la mesure des potentiels élevés. En choisissant convenablement l'épaisseur des lames on peut obtenir, d'après M. Curie, des instruments donnant, à $\frac{1}{2}$ volt près, les potentiels compris entre 0 et 600 volts ; on peut en construire d'autres donnant à 20 volts près des potentiels de plusieurs milliers de volts.

§ 6. — ÉLECTROMÈTRES INDUSTRIELS.

179. Les instruments que nous venons de passer en revue sont destinés aux mesures de laboratoire. Ils pourraient à la rigueur servir aux mesures industrielles, mais leur fragilité, l'emploi d'un miroir et d'une source de lumière pour les lectures, en font des appareils d'un maniement peu en rapport avec les usages et les exigences de l'industrie.

On a donc renoncé à la suspension monofilaire ou bifilaire ainsi qu'à l'emploi du miroir et de l'image lumineuse et on a créé des modèles spéciaux portant une aiguille montée sur couteaux ou sur pivots et se mouvant devant un cadran divisé. Nous allons décrire les modèles d'électromètres les plus employés dans l'industrie.

180. — Electromètre industriel de William Thomson. — Le premier de ces appareils est un grand électromètre idiostatique à quadrants (fig. 94) à axe horizontal dans lequel on a supprimé deux des quadrants sur quatre ; la force antagoniste est produite par un petit poids suspendu à la partie inférieure de l'aiguille. Si on désigne par θ l'angle de l'aiguille avec la position qu'elle prend lorsque l'aiguille et les quadrants sont au même potentiel, le couple produit par les actions électriques a pour valeur une fonction de θ que nous n'avons pas besoin de connaître puisque l'appareil est gradué par comparaison ; nous savons seulement que ce couple est proportionnel au carré de la différence de potentiel V, qui existe entre les quadrants communiquant tous deux avec un des pôles d'une source d'électricité d'une part, et l'aiguille mobile qui communique avec l'autre pôle d'autre part.

Nous pouvons donc écrire, en désignant par $\mathcal{M}$ le couple (exprimé en dynes $\times$ centimètres) dû aux actions électriques exercées entre l'aiguille et les quadrants, par p le poids antagoniste ; par l son bras de levier ; par $\mathcal{M}_1$ la valeur du couple dû aux actions électriques lorsque $V = 1$,

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 f(\theta) V^2 ;$$

d'autre part le moment du poids p est $pl \sin \theta$; donc la position d'équilibre est donnée par l'équation

$$pl \sin \theta = \mathcal{M}_1 f(\theta) V^2$$

d'où

$$V^2 = \frac{pl \sin \theta}{\mathcal{M}_1 (f\theta)} .$$

Cette équation nous montre que V^2 est proportionnel à p. Il suffit donc de remplacer le poids p par un autre p', pour que les degrés de la graduation représentent de nouvelles valeurs de potentiel qui sont aux anciennes dans le rapport de $\sqrt{p'}$ à $\sqrt{p}$. L'instrument a donc une sensibilité arbitraire.

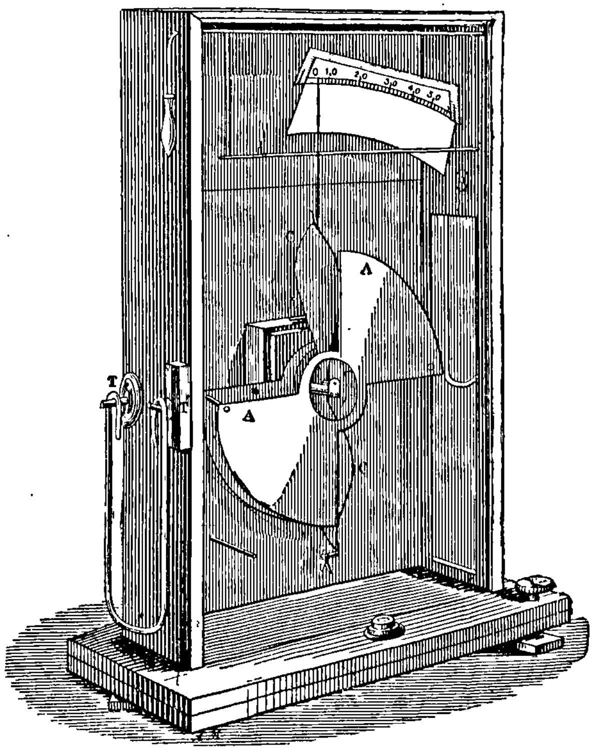


Fig. 94. — Électromètre industriel de W. Thomson.

L'emploi des électromètres industriels destinés à la mesure des hauts potentiels exige certaines précautions sans lesquelles il pourrait se produire des accidents dont le moindre serait la mise hors de service des appareils. Ils doivent être parfaitement isolés de la terre et n'être mis en communication avec la source d'électricité que par l'intermédiaire de corps très médiocrement conducteurs. S'il en était autrement une étincelle pourrait jaillir entre l'aiguille et les quadrants et l'échauffement de l'air qui en résulterait pourrait frayer la route à un arc voltaïque qui brûlerait l'appareil et amènerait des désordres dans la machine génératrice d'électricité. Cet accident est arrivé sous nos yeux dans des expériences où nous avions atteint seulement 4000 volts, et a causé de graves avaries. Pour l'éviter nous avons toujours soin d'établir la communication entre les électromètres et les machines au moyen de deux petits tubes de verre pleins d'eau pure de quelques décimètres de longueur.

181. — **Electromètre multicellulaire.** — Nous avons vu que le couple (dynes-centimètres), appliqué à l'aiguille par les forces électriques, était proportionnel au carré du rayon de l'aiguille (163). Or le poids de cette aiguille, en supposant bien entendu que sa forme reste semblable à elle-même, est aussi proportionnel au carré de son rayon, en supposant que son épaisseur reste la même. Il est donc indifférent, au point de vue du poids de l'aiguille, lorsqu'on veut obtenir un couple donné, d'en avoir plusieurs enfilées sur le même axe ou une seule d'une dimension plus considérable. Mais dans ce dernier cas, l'aiguille ayant une épaisseur constante, fléchirait bien plus facilement sous son propre poids ; il est donc préférable d'employer plusieurs aiguilles identiques que d'en d'employer une seule produisant le même couple et l'on a, en outre, l'avantage de dimensions restreintes. Si l'on ajoute à cela la possibilité d'assembler les

Ensemble de l'appareil.

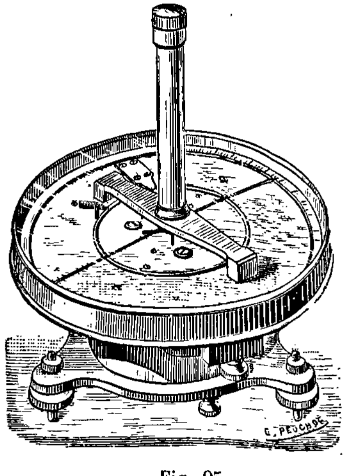


Fig. 95

Partie supérieure enlevée et retournée.

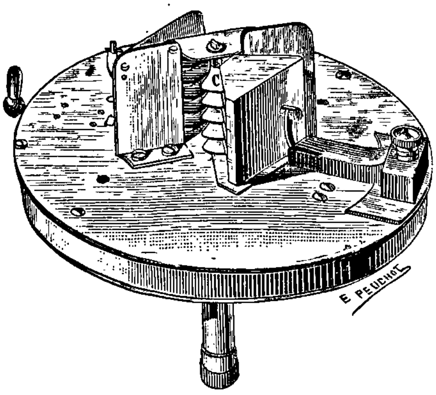


Fig. 96

Electromètre multicellulaire de W. Thomson.

divers groupes de quadrants en tension de manière à rendre possible la mesure de potentiels très élevés sans risque d'étincelles entre les diverses parties de l'appareil, on comprendra les raisons qui ont probablement guidé Lord Kelvin (William Thomson) dans la construction de son électromètre multicellulaire (fig. 95) qui se compose en réalité de 5 électromètres à quadrants identiques superposés verticalement et dont les 5 aiguilles sont fixées sur une même tige (fig. 96) suspendue à un fil de platine iridié. Tous ces électromètres sont groupés en surface.

L'appareil porte un amortisseur constitué par un disque de laiton suspendu à l'axe des aiguilles et oscillant dans un bain d'huile de pétrole. L'instrument est gradué de 60 à 240 volts, mais les divisions en sont très inégales et les lectures ne se font avec précision qu'entre 70 et 130 volts.

182. — **Electromètre industriel de M. Carpentier.** — M. Carpentier a construit un modèle qui contient les mêmes organes que son modèle de laboratoire, mais disposés d'une manière différente (fig. 97).

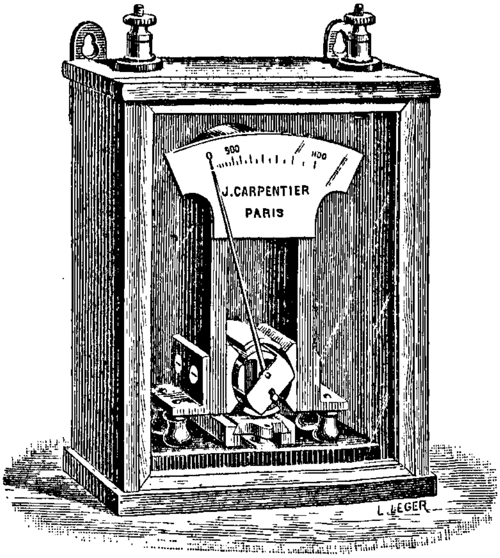


Fig. 97. — Electromètre industriel de M. Carpentier.

L'aiguille et les quadrants sont des portions de cylindre ; l'axe de l'aiguille est horizontal et monté sur couteaux ; l'amortissement est obtenu au moyen d'un puissant aimant en fer à cheval vertical, comme on le voit dans la figure. Les divisions sont sensiblement égales entre 2000 et 3500 volts. C'est au moyen de cet appareil dont les indications sont remarquablement fixes que nous avons appliqué le procédé de graduation des électromètres décrit au n° 146.

§ 7. — MESURE D'UNE QUANTITÉ D'ÉLECTRICITÉ.

183. — Nous avons déjà indiqué le moyen de mesurer la charge électrique d'un corps au moyen de la balance de Coulomb ; le principe de la méthode consiste dans la mesure de la chute de potentiel éprouvée par le corps lorsqu'on lui enlève une quantité connue d'électricité. L'équation fondamentale $Q = CV$ qui lie le potentiel à la quantité d'électricité, devient en supposant que la charge passe de la valeur Q à la valeur Q',

$$Q' = CV'$$

d'où

$$Q - Q' = C(V - V') \qquad \text{ou} \qquad \frac{Q - Q'}{Q} = \frac{V - V'}{V}$$

d'où on tire

$$Q = \frac{V}{V - V'}(Q - Q').$$

Il suffit donc de connaître la quantité d'électricité $Q - Q'$ enlevée au corps ainsi que la valeur initiale et finale de son potentiel, pour trouver la quantité d'électricité qu'il contenait.

Or la quantité $Q - Q'$ peut se déterminer facilement au moyen d'un condensateur de capacité connue dont on se sert pour enlever au corps en expérience une portion de sa charge qui est précisément $Q - Q'$. En désignant par c la capacité du condensateur, par V' le potentiel de l'armature mis en contact avec le corps tandis que l'autre armature communique avec le sol, on a

$$Q - Q' = cV' \qquad \text{d'où} \qquad Q = \frac{cVV'}{V - V'}.$$

La mesure de Q est donc ramenée à celle de V et de V' que l'on effectue au moyen d'un électromètre. On pourrait d'ailleurs procéder d'une manière un peu différente en augmentant la charge du corps d'une quantité connue au lieu de la diminuer. Si V' différait trop peu de V, ce qui aurait pour résultat de rendre incertaine la véritable valeur de $V - V'$, on ferait plusieurs opérations successives.

184. — Mais on peut procéder aussi de la manière suivante qui permet de trouver avec une grande exactitude le rapport de la capacité inconnue C du corps à la capacité supposée connue c du condensateur.

Pour faciliter notre démonstration nous allons modifier les notations employées plus haut et désigner par Q_0, Q_1, Q_2, etc., les charges successives du corps en expérience, par V_0, V_1, V_2, ... les potentiels correspondants.

Au moment où le corps au potentiel V_0 est mis en communication avec le condensateur, le potentiel éprouve comme nous le savons un chargement brusque et on a, la charge *totale* Q_0 répartie entre le corps et le condensateur restant invariable,

$$V_1 = \frac{Q_0}{C + c},$$

mais

$$Q_0 = CV_0,$$

donc

$$V_1 = \frac{C}{C + c} V_0.$$

Le condensateur étant déchargé puis remis en contact avec le corps, on aura entre le nouveau potentiel V_2 et le précédent V_1, la même relation qu'entre V_1 et V_0 et en poursuivant ainsi indéfiniment la même série d'opérations, on obtiendra entre les potentiels successivement décroissants une série d'équations de même forme. On aura donc

$$V_1 = \frac{C}{C + c} V_0,$$

$$V_2 = \frac{C}{C + c} V_1,$$

$$V_3 = \frac{C}{C + c} V_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$V_n = \frac{C}{C + c} V_{n-1}.$$

Multipliant ces égalités membre à membre il vient

$$V_n = \left(\frac{C}{C+c}\right)^n V_0,$$

qui résolue par rapport à C donne

$$C = \frac{1}{\left(\frac{V_0}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}} - 1} c.$$

Lorsqu'on connaît C, on trouve immédiatement Q_0 au moyen de la relation $Q_0 = CV_0$.

On n'a donc à faire que deux mesures de potentiel, celle du potentiel initial V_0, et celle du potentiel V_n du condensateur après n contacts successifs avec le corps électrisé. Quant aux charges et décharges successives du condensateur, elles pourraient se faire avec une grande rapidité au moyen d'un commutateur automatique.

185. — Cette méthode est satisfaisante, mais elle doit être appliquée avec circonspection, parce que si on poussait trop loin le nombre d'opérations, le potentiel V_n tendrait vers zéro et serait mesuré avec une précision insuffisante. On fera bien en pratique d'arrêter l'opération au moment où le potentiel sera tombé à une valeur peu différente de la moitié de la valeur primitive V_0. La mesure d'une quantité d'électricité est ainsi ramenée à celle du *rapport* de deux différences de potentiel et à la connaissance de la capacité c d'un condensateur. Nous allons voir comment on procède à cette dernière mesure.

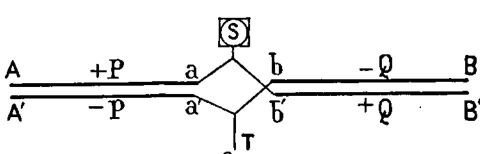
§ 8. — MESURE DE LA CAPACITÉ DES CONDENSATEURS.

186. — Nous avons vu (91) comment on peut réaliser un condensateur absolu, c'est-à-dire un appareil dont les dimensions géométriques seules suffisent pour calculer sa capacité électro-statique comme elles suffisent pour calculer son volume.

Nous allons étudier maintenant les procédés qui permettent de trouver le rapport de la capacité d'un condensateur de forme quelconque, à la capacité du condensateur étalon ou, si l'on veut, le nombre d'unités de capacité qu'il contient et qui est exprimé, comme nous l'avons démontré, par le nombre d'unités de longueur contenues dans le rayon d'une sphère de même capacité.

187. — **Recherche de l'égalité de deux condensateurs.** — Soit deux condensateurs AA′, BB′ (fig. 98) dont on veut constater l'égalité ou l'inégalité des capacités. On les met en communication avec une source S d'électricité au potentiel V (au-dessus du potentiel terrestre), de façon que l'armature A du premier et l'armature B′ du second communiquent avec la source par les conducteurs Sa, Sb' tandis que l'armature A′ du premier et l'armature B du second communiquent avec la terre par les conducteurs Ta', Tb ; on les charge ainsi au même potentiel et leurs charges P et Q sont, en désignant par C_a, C_b leurs capacités respectives, $P = C_aV$, $Q = C_bV$.

Fig. 98



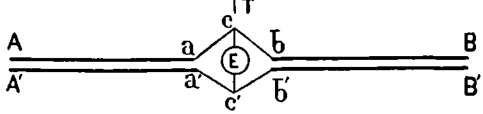


Fig. 99

On enlève ensuite les communications avec la source et avec la terre (fig. 99) et on relie l'armature A du premier avec l'armature B au moyen du conducteur *acb,* on relie de même l'armature A′ avec l'armature B′ au moyen du conducteur *a′c′b′* ; enfin on relie les milieux *c* et *c′* des deux conducteurs par un électromètre très sensible. Toutes ces opérations se font, bien entendu, presqu'instantanément au moyen d'un commutateur dont la disposition est facile à imaginer. Ce second groupement donne des résultats que nous pouvons calculer facilement au moyen des équations générales de l'équilibre de deux condensateurs (115). La différence de potentiel V_1 des points c et c', ou des armatures auxquelles ils aboutissent, sera donnée par l'équation

$$V_1 = \frac{P + (-Q)}{C_a + C_b} = \frac{P - Q}{C_a + C_b}.$$

Mais on a

$$P = C_a V, \qquad Q = C_b V,$$

donc

$$V_1 = \frac{C_a - C_b}{C_a + C_b} V.$$

Si les capacités C_a et C_b sont égales, on trouve

$$V_1 = 0.$$

Dans le cas contraire on a

$$\frac{C_a + C_b}{C_a - C_b} = \frac{V}{V_1},$$

d'où

$$\frac{C_b}{C_a} = \frac{V - V_1}{V + V_1} = \frac{\frac{V}{V_1} - 1}{\frac{V}{V_1} + 1}.$$

Ainsi donc, si les capacités sont égales, l'électromètre indiquera un potentiel nul après la seconde opération ; si elles sont inégales, leur rapport sera donné par le *rapport* $\frac{V}{V_1}$, du potentiel initial au potentiel final. Il suffira donc d'avoir un électromètre gradué en parties proportionnelles dont la valeur peut être absolument arbitraire.

188. — Mesure d'une capacité au moyen de condensateurs étalonnés. — Les premières mesures de capacité électrique sont dues à Cavendish ; il procédait par une méthode analogue à celle que nous venons de décrire, mais cherchait dans une série de condensateurs étalonnés, deux condensateurs différant entre eux d'une unité de capacité, l'un trop grand, l'autre trop petit par rapport à la capacité du condensateur en expérience. Il fallait ensuite évaluer les fractions d'unités ; nous verrons bientôt comment on peut y arriver sans se servir des déviations de l'électromètre qui n'est plus alors qu'un *électroscope* dont la seule fonction est d'indiquer s'il reste des traces d'électricité dans les condensateurs supposés égaux lorsqu'on les groupe comme l'indique la figure 99. Pour obtenir une série de condensateurs étalonnés, il faut naturellement en posséder un servant d'unité-étalon et qui peut être un condensateur *absolu* constitué soit par deux sphères concentriques, soit par deux plans dont l'un est entouré d'un anneau de garde. On pourrait aussi employer une sphère parfaitement isolée dont la capacité est représentée par le nombre d'unités de longueur contenues dans son rayon, pourvu qu'elle soit placée à une distance suffisante de tout corps conducteur.

L'égalité rigoureuse de la capacité de l'étalon et de celle du condensateur absolu, s'obtient par des tâtonnements systématiques dans lesquels on fait varier la surface de la feuille d'étain d'une des armatures jusqu'à ce que l'égalité soit atteinte. Mais on ne peut avoir recours à ce moyen que lorsque le condensateur se compose de deux feuilles d'étain collées sur un diélectrique. S'il n'en est pas ainsi et si, pour éviter tous les phénomènes secondaires dus au diélectrique (tels que charge résiduelle, variation dans le pouvoir inducteur spécifique avec la durée de l'électrisation, etc...), les lames du condensateur en construction sont séparées par une lame d'air, les petites variations de capacité nécessaires pour le réglage peuvent s'obtenir, soit en faisant glisser légèrement les lames l'une par rapport à l'autre de façon à diminuer les surfaces en présence, soit en faisant varier très faiblement leur distance au moyen d'une petite cale en forme de coin.

Quand on a obtenu deux appareils ayant rigoureusement la même capacité que l'étalon, on peut, en les groupant en surface, réaliser un condensateur de capacité double, puis un second également de capacité double. En groupant ces deux condensateurs, on obtient un condensateur de capacité quadruple et ainsi de suite. En continuant ainsi, on arrive à construire deux séries identiques d'appareils dont les capacités seront représentées par les nombres de la progression géométrique 1, 2, 4, 8, 16, etc... En groupant en surface des condensateurs choisis dans cette progression, on peut obtenir toute la série des nombres entiers depuis 1 jusqu'à $2^n - 1$, n étant le nombre de condensateurs.

189. — **Condensateur glissant à capacité variable.** — La méthode d'opposition décrite plus haut permet, au moyen des condensateurs étalonnés, de trouver une valeur approchée, à une unité près, de la capacité à mesurer qui est ainsi comprise entre deux nombres entiers consécutifs n et $n+1$. Si on veut obtenir une approximation plus grande sans utiliser les indications de l'électromètre qui ne sert que d'électroscope, il faut employer un condensateur à capacité variable dont les divisions représentent des fractions d'unité et chercher la division à laquelle il faut s'arrêter pour que, étant groupé en surface avec l'ensemble des condensateurs étalonnés de capacité n, il permette de réduire à zéro les indications de l'électroscope en équilibrant exactement la décharge du condensateur à mesurer. Le condensateur glissant à capacité variable (fig. 100) se compose de deux tubes A, A' très longs par rapport à leur diamètre, dans l'intérieur desquels se trouve un troisième tube B d'un diamètre plus petit de quelques millimètres et d'une longueur également assez grande par rapport à son diamètre.

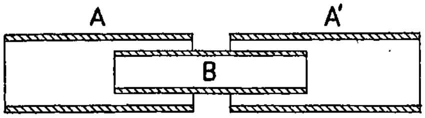


Fig. 100

Le tube A' étant mis en communication avec la terre, les tubes A et B constituent les deux armatures d'un condensateur dont la *capacité absolue* ne peut pas être calculée exactement parce que la distribution de l'électricité aux extrémités du tube B dépend d'équations très compliquées ; mais, par contre, l'*accroissement* positif ou négatif de cette capacité, correspondant à un déplacement du tube mobile B par rapport à A, peut être calculé au moyen des formules que nous avons déjà données pour exprimer la capacité d'un condensateur formé de deux cylindres concentriques indéfinis (83). L'accroissement dc de la capacité est lié au déplacement dl du cylindre B, par la formule

$$dc = \frac{dl}{2 \log_e \frac{r'}{r}}.$$

Si par exemple le rayon intérieur du cylindre A est égal à 50 millimètres et si le rayon extérieur de B est de 45, la variation de capacité du système pour un déplacement de B égal à 1 centimètre, aura pour valeur

$$dc = \frac{1}{2 \log \frac{5}{4,5}} = 4,76,$$

c'est-à-dire sera égale à la capacité d'une sphère de près de 5 centimètres de rayon.

La capacité d'un condensateur-étalon absolu, dont le plateau circulaire central aurait 5 centimètres de rayon et serait espacé du plateau inférieur de $\frac{1}{2}$ centimètre, aurait pour valeur

$$\frac{\pi \times \overline{5}^2}{4\pi \times \frac{1}{2}} = 12,5,$$

Il faudrait déplacer le condensateur glissant de 38 millimètres pour produire dans sa capacité une variation égale à la capacité totale du condensateur absolu adopté. Si on trouvait cette longueur insuffisante pour l'approximation que l'on veut atteindre, on devrait donner aux cylindres extérieur et intérieur des diamètres plus petits, de façon à changer le rapport $\frac{r'}{r}$.

Etant en possession d'un appareil qui permet d'évaluer les fractions d'unité, il devient très facile d'appliquer la méthode d'opposition en ajoutant à la série des condensateurs étalonnés 1, 2, 4, 8, 16, etc., le condensateur glissant qui permet de produire une variation totale d'une unité tout en estimant le centième d'unité.

190. — Variante de la méthode d'opposition. — Platymètre. — Dans la méthode d'opposition telle que nous venons de la décrire, on charge directement les deux condensateurs au moyen d'une source dont le potentiel est d'autant plus élevé que l'on désire une sensibilité plus grande dans les indications de l'électroscope. Si l'on veut éviter cette communication directe pour des raisons quelconques, on peut avoir recours à l'emploi du *Platymètre.* C'est un condensateur double composé d'un cylindre métallique C (fig. 101) entouré de deux autres cylindres absolument identiques entre eux A, B, et situés d'une façon absolument symétrique par rapport au centre de figure du cylindre intérieur C. Les deux condensateurs formés par A, C d'une part, et B, C d'autre part, ont donc exactement la même capacité. Voici comment on emploie cet instrument pour reconnaître si deux condensateurs sont égaux :

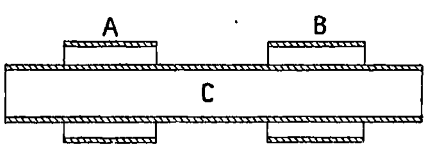


Fig. 101

On met le cylindre C en communication avec le sol et on charge A à un potentiel V, puis on rompt sa communication avec la source qui a servi à le charger et on supprime la communication de C avec le sol ; on établit ensuite une communication entre A et B de sorte que l'appareil peut être considéré à ce moment comme formé de deux condensateurs égaux que l'on réunit en surface. Or comme la charge de B était nulle avant la réunion, il résulte des lois de l'équilibre électrique de plusieurs condensateurs (115), qu'après la réunion de B avec A, B prend la moitié de la charge de A, tandis que le potentiel de B égal à celui de A, puisqu'ils communiquent, a une valeur égale à $\frac{1}{2}$V. Le potentiel de C, nul lorsque C communiquait avec le sol, doit rester nul après qu'on l'a isolé et encore après la réunion de A à B; c'est ce que montre l'électroscope dont une paire de quadrants est à la terre tandis que l'autre paire communique avec C. On constate ainsi que les capacités des deux moitiés du platymètre sont bien égales.

Pour voir si deux condensateurs que l'on veut comparer sont égaux, on réunit une armature de l'un d'eux à A, une armature de l'autre à B, et on réunit à C les deux armatures restées libres. On doit bien entendu s'assurer, avant d'effectuer cette réunion, que les condensateurs sont exempts de toute charge, et même, par précaution, les mettre un instant en communication avec la terre. Si les condensateurs sont égaux et que l'on recommence la série d'opérations qui avait été faite avec le platymètre seul, l'électroscope devra finalement rester au zéro. Dans le cas contraire on remplacera l'un d'eux par un condensateur à glissement que l'on fera manœuvrer jusqu'à ce que l'électromètre reste au zéro ; la graduation de condensateur glissant fera alors connaître la capacité de l'autre condensateur.

191. — Mesure d'une capacité au moyen de l'électromètre. Nous avons vu précédemment (184) comment on peut mesurer la charge d'un corps électrisé au moyen de la chute de potentiel de ce corps, lorsqu'on lui enlève en plusieurs fois une portion de sa charge. L'équation qui donne la capacité de ce corps peut nous servir dans le problème qui nous occupe actuellement. Cette équation donne en effet la valeur du rapport de la capacité C du corps à la capacité c d'un condensateur servant à prendre au corps une quantité d'électricité qui va d'ailleurs en diminuant à chaque opération. Ce rapport a pour valeur

$$\frac{C}{c} = \frac{1}{\left(\frac{V_0}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}.$$

On a donc là un procédé permettant de comparer les capacités de deux condensateurs.

Il existe encore d'autres moyens de trouver ce rapport, mais comme ils sont basés sur l'emploi des courants électriques, nous les ferons connaître lorsque nous traiterons de l'électro-magnétisme.

§ 9. — MESURE DU POUVOIR INDUCTEUR SPÉCIFIQUE.

192. — Méthode du condensateur à diélectrique. — Si l'on mesure la capacité d'un condensateur à lame d'air, qu'on remplace ensuite l'air par un corps quelconque qui remplisse exactement l'espace occupé précédemment par l'air, et qu'on mesure de nouveau la capacité du condensateur ainsi modifié, le rapport des deux mesures successives est évidemment égal au pouvoir inducteur spécifique de la substance qui remplace l'air. Tel est le principe sur lequel se sont appuyés presque tous les expérimentateurs qui ont fait des recherches sur le pouvoir inducteur spécifique. M. Boltzmann seul a employé une méthode basée sur un principe tout différent et que nous croyons devoir faire connaître à cause de son originalité.

193. — Méthode de M. Boltzmann. — Lorsque une sphère métallique est soumise à l'action attractive d'une autre sphère également métallique, la grandeur de la force attractive est régie, comme nous l'avons déjà dit, par la loi de Coulomb, pourvu que les sphères soient suffisamment éloignées pour que la distribution de l'électricité à leur surface soit uniforme ou que la densité électrique soit constante en chaque point.

Mais si on remplace l'une des sphères métalliques par une sphère en matière isolante telle que de la paraffine, du soufre, du verre, etc., la loi est complètement modifiée et la grandeur de la force attractive dépend, non seulement de la distance et de la charge des sphères, mais encore du pouvoir inducteur spécifique de la substance de la sphère non métallique. Pour démontrer ce fait remarquable, M. Boltzmann employait le procédé suivant :

a et *b* (fig. 102) sont deux petites sphères égales suspendues à deux fils de cocon *ap*, *bq* de deux mètres de longueur. Elles ont le même diamètre (7 millimètres), mais la première est en métal et la seconde en soufre; leur distance est de 90 millimètres et les fils de suspension se meuvent devant une règle divisée qui permet de mesurer l'angle qu'ils font avec la verticale lorsque l'attraction électrique agit sur elles. Cette attraction est produite par une sphère métallique C de 26 millimètres de diamètre, dont le centre est placé exactement au milieu de la distance des centres des sphères a et b. La force ainsi dévelop-

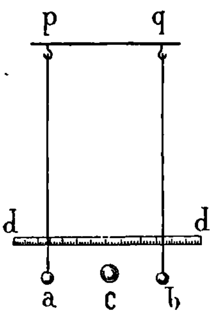


Fig. 102

pée sur chacune des petites sphères étant très petite, produit des déviations des fils ab et bq, proportionnelles à l'intensité cherchée. En appelant F_m l'attraction exercée par C sur la sphère métallique, F_d celle exercée sur la sphère de soufre, et E le rapport de ces deux attractions, M. Boltzmann a démontré mathématiquement que le pouvoir inducteur spécifique K était lié au rapport

$$E = \frac{F_m}{F_d}.$$

par la formule

$$E = \frac{K+2}{K-1}$$

d'où

$$K = \frac{E+2}{E-1}.$$

Ce rapport permet donc de déterminer le pouvoir inducteur spécifique.

Ainsi dans une expérience faite avec une sphère en soufre, on avait

$$\frac{F_m}{F_d} = 1,90$$

d'où

$$K = \frac{1,90 + 2}{1,90 - 1} = 4,33.$$

Pour permettre d'apprécier la justesse du principe appliqué par M. Boltzmann, nous donnons ici la valeur du pouvoir inducteur K déterminé par la méthode ordinaire (condensateur à diélectrique), telle que nous l'avons définie au commencement de ce paragraphe, comparée à la valeur obtenue par la méthode imaginée par M. Boltzmann.

	Méthode ordinaire	Méthode Boltzmann
Soufre	3,84	3,90
Ebonite	3,15	3,48
Paraffine	2,32	2,32
Résine	2,55	2,48

Nous devons dire tout de suite que la méthode de M. Boltzmann était en pratique notablement plus compliquée que le dispositif rudimentaire que nous venons de décrire uniquement pour en faire comprendre le principe. Quant à la démonstration de la formule qui donne K en fonction de E, elle est trop longue pour trouver place ici et nous renverrons les lecteurs désireux de la connaître au mémoire original de M. Boltzmann ou au Traité d'électricité de Gordon.

194. — Appareil de M. Pellat pour mesurer le pouvoir inducteur spécifique. — La capacité d'un condensateur plan, dont les armatures de surface S sont séparées par une couche d'air a à laquelle vient s'ajouter l'épaisseur d d'une lame de diélectrique, dont le pouvoir inducteur est k, est donnée par la formule suivante :

$$C = \frac{S}{4\pi\left(a + \frac{d}{k}\right)} = \frac{kS}{4\pi(ka + d)}$$

qui ne diffère de celle que nous avons déjà démontrée (127) qu'en ce que la lettre a représente ici une couche d'air, et non l'écart des armatures.

D'autre part l'attraction mutuelle F de ces deux armatures est, en désignant par V leur différence de potentiel, donnée par la formule (121)

$$F = \frac{1}{2} V^2 \frac{dc}{dx}$$

dC étant la variation de capacité qui résulte d'une variation infiniment petite dx de la distance des deux armatures. Mais cette variation dx de la distance des deux armatures, ayant pour effet de produire dans l'épaisseur a de la couche d'air une variation exactement égale, on peut remplacer dx par da. On aura donc en différentiant la première équation par rapport à a

$$\frac{dc}{dx} = \frac{dc}{da} = \frac{S}{4\pi}\left(\frac{k}{ka+d}\right)^2 \qquad \text{d'où} \qquad F = \frac{S}{8\pi}\left(\frac{k}{ka+d}\right)^2 V^2.$$

Supposons que l'armature supérieure de ce condensateur plan (supposé horizontal) soit suspendue à l'une des extrémités du fléau d'une balance dont l'autre extrémité supporte l'armature d'un second condensateur à lame d'air de dimensions sensiblement égales à celles du premier et, au moyen de poids placés dans l'un des plateaux de la balance, établissons l'équilibre du système lorsque les quatre armatures des deux condensateurs communiquent avec la terre. Supprimons ensuite cette communication et mettons chacune des deux armatures supérieures en communication avec l'un des pôles d'une source d'électricité, et les deux armatures inférieures avec l'autre pôle. L'effort F_1 exercé sur l'armature supérieure du premier condensateur sera donné par la formule ci-dessus. Quant à l'effort F_2 exercé sur l'armature du second, il pourra être exprimé par une formule plus simple. On peut en effet le mettre sous la forme

$$F_2 = fV^2$$

f étant la valeur de F_2 lorsque $V = 1$, c'est-à-dire lorsque la différence de potentiel des deux armatures est égale à l'unité.

Ces deux valeurs F_1 et F_2 sont en général très différentes l'une de l'autre puisque le premier condensateur contient un diélectrique et que le second n'en contient pas. Mais on peut les rendre égales en faisant varier la distance des armatures du premier condensateur au moyen d'une vis micrométrique attachée à l'armature inférieure.

En procédant ainsi on pourra rétablir l'équilibre du fléau de la balance et on aura alors l'équation $F_1 = F_2$ ou en remplaçant F_1 et F_2 par leur valeur

$$\frac{S}{8\pi}\left(\frac{k}{ka+d}\right)^2 V^2 = f V^2$$

d'où

$$f = \frac{S}{8\pi}\left(\frac{k}{ka+d}\right)^2.$$

Retirons maintenant la lame diélectrique placée entre les armatures du premier condensateur ; la balance trébuchera, mais nous pourrons rétablir l'équilibre en diminuant la distance des deux armatures au moyen de la vis micrométrique, nous aurons alors en désignant par F'_1 et F'_2 les efforts exercés sur les armatures supérieures des deux condensateurs, par V' la différence de potentiel (*qui peut varier sans inconvénient pendant l'expérience* comme nous allons le voir) et par a' la couche d'air qui sépare les deux armatures après la suppression de la lame diélectrique

$$F'_1 = F'_2, \qquad F'_1 = \frac{S}{8\pi}\left(\frac{1}{a'}\right)^2 V'^2, \qquad F'_2 = f V'^2$$

d'où

$$f = \frac{S}{8\pi}\left(\frac{1}{a'}\right)^2.$$

Egalant cette dernière valeur de f à la précédente nous avons

$$\left(\frac{1}{a'}\right)^2 = \left(\frac{k}{ka+d}\right)^2$$

d'où on tire la valeur de k

$$k = \frac{d}{a'-a}.$$

On voit que les différences de potentiel V et V' disparaissent des équations et que par conséquent elles peuvent varier pendant l'expérience sans qu'il en résulte aucune erreur dans la mesure de k. On constate d'ailleurs que lorsque l'équilibre est établi entre les attractions des deux armatures mobiles, il subsiste malgré les variations qui peuvent survenir dans la valeur du potentiel.

Pour trouver la valeur de k il suffit donc de connaître l'épaisseur d de la lame diélectrique et la différence $a' - a$ des valeurs de la couche d'air interposée entre les armatures du premier condensateur dans les deux expériences successives. L'épaisseur d de la lame diélectrique s'obtient facilement au moyen de la vis micrométrique qui agit sur l'armature inférieure, en faisant deux lectures : la première après avoir amené les deux armatures en contact, la seconde lorsqu'elles sont en contact intime avec la lame diélectrique intercalée entre elles. Quant à la différence d'épaisseur $a' - a$ des couches d'air, il est facile de voir qu'elle est précisément égale à la différence $d - e$ de l'épaisseur de la lame diélectrique et de la quantité e dont on est obligé de rapprocher l'armature inférieure de l'autre armature pour rétablir l'équilibre de la balance dans la seconde expérience. Cette quantité $d - e = a' - a$ est donc donnée directement par le déplacement de la vis micrométrique.

Tel est le principe de la méthode employée par M. Pellat. Mais, dans l'instrument dont il s'est servi pour l'appliquer, les deux condensateurs sont des électromètres absolus de William Thomson dont les plateaux mobiles sont attachés à la même extrémité du fléau de la balance et exerçant sur lui des efforts de signes contraires produits par l'attraction des plateaux fixes. Les deux plateaux de l'électromètre inférieur sont à une distance constante tandis que le plateau fixe A de l'électromètre supérieur (fig. 103) peut être éloigné ou rapproché à volonté du plateau mobile M (entouré de son anneau de garde G) au moyen de la vis micrométrique V. Les deux plateaux mobiles sont en aluminium et ont 40 millimètres de diamètre ; les deux plateaux fixes ont 80 millimètres de diamètre. Les anneaux de garde des plateaux mobiles sont reliés par un cylindre métallique de manière que l'ensemble forme une boîte percée seulement des ouvertures nécessaires.

Ce cylindre ainsi que la balance toute entière communiquent avec la cage et sont au même potentiel qu'elle. Les plateaux attirants communiquent aussi entre eux, mais leur ensemble est isolé des parois de la cage de façon à pouvoir être porté à un autre potentiel.

Un microscope fixe, pourvu d'une croisée de fils, vise un autre réticule porté par la tige qui relie les deux plateaux mobiles. Les

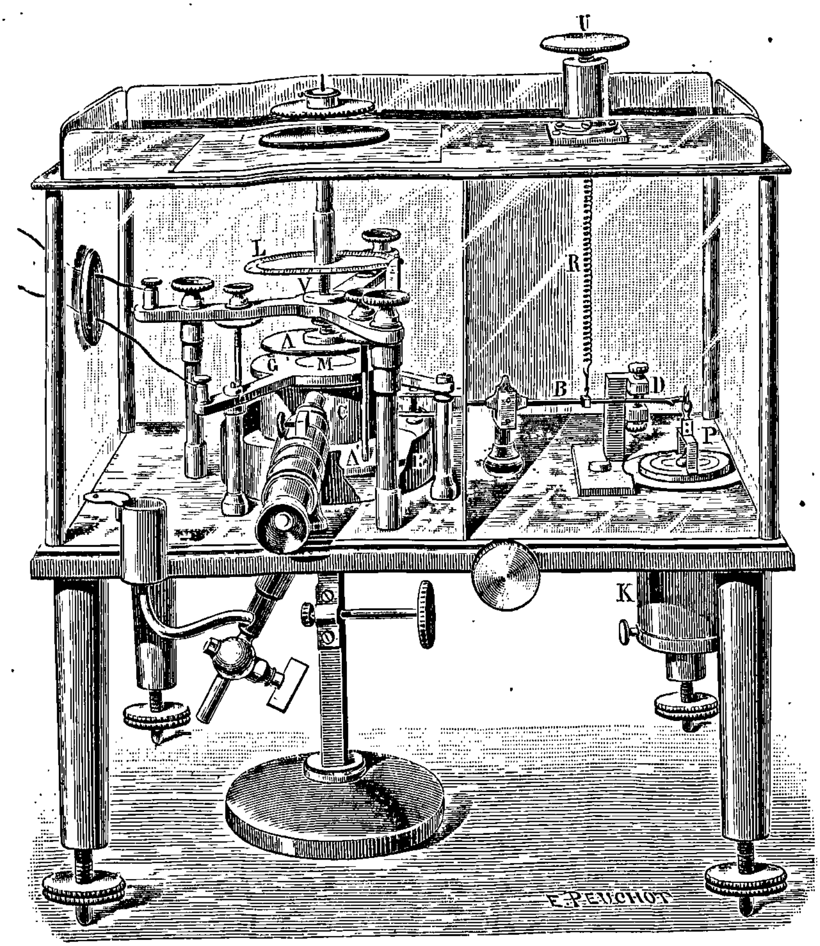


Fig. 103. — Appareil de M. Pellat pour mesurer le pouvoir inducteur spécifique.

images des deux réticules coïncident quand le plateau supérieur mobile M est exactement dans le plan de son anneau de garde G.

La balance est sensible au $\frac{1}{20}$ de milligramme; un ressort à boudin en argent R est fixé à sa partie inférieure sur l'un des bras B du fléau et tendu en haut par une vis U que l'on tourne à la main. En tendant ou détendant le ressort, on peut faire la tare d'une façon très-commode et très-délicate.

Pour déterminer le pouvoir inducteur spécifique d'un solide, on le fait tailler en forme de disque de $80^{m}/^{m}$ de diamètre et de 7 à $8^{m}/^{m}$ d'épaisseur et on introduit ce disque entre le plateau à vis A de même diamètre et le plateau mobile M de 40^{mm} et on le fait reposer sur l'anneau de garde G au moyen de trois petites cales en verre de $1^{m}/^{m}$ de diamètre. On procède ensuite comme nous l'avons dit plus haut en exposant le principe de la méthode.

195. — Nous n'en dirons pas davantage sur les moyens employés pour comparer les pouvoirs inducteurs spécifiques, puisque cette comparaison se ramène à celle de la capacité d'un condensateur, mais nous devons cependant signaler la nécessité de mesurer très exactement l'épaisseur du diélectrique et celle de la couche d'air restant entre les deux lames si le diélectrique ne remplit pas complètement leur

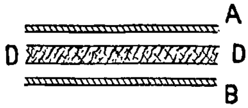


Fig. 104

intervalle. Il faut alors faire une correction dont il est facile de trouver la grandeur, si nous voulons évaluer la capacité C' d'un condensateur plan de surface S dont les lames parallèles sont à la distance $d + a'$, d étant l'épaisseur du diélectrique DD (fig. 104) et a' la somme des épaisseurs des couches d'air comprises entre chaque armature et le diélectrique, il faut nous rappeler qu'une épaisseur donnée d du diélectrique, équivaut à une épaisseur d'air égale à $\frac{d}{k}$,

k étant le pouvoir inducteur spécifique. C'est une conséquence directe de la formule générale du condensateur plan :

$$C = \frac{kS}{4\pi x},$$

que l'on peut écrire

$$C = \frac{S}{4\pi\left(\frac{x}{k}\right)}.$$

Ceci posé, la capacité C' du condensateur, dont les armatures sont séparées par une couche de diélectrique d, comprise entre deux couches d'air dont l'épaisseur collective est a', aura pour valeur

$$C' = \frac{S}{4\pi\left(a' + \frac{d}{k}\right)},$$

tandis que le même condensateur ne contenant qu'une couche d'air d'épaisseur a, aura, le diélectrique étant enlevé, une capacité C donnée par la formule

$$C = \frac{S}{4\pi a}.$$

Divisant membre à membre, il vient

$$\frac{C'}{C} = \frac{ka}{ka' + d},$$

d'où l'on tire

$$k = \frac{C'd}{Ca - C'a'}.$$

Il résulte de là que si l'on fait varier l'épaisseur a de la couche d'air du condensateur sans diélectrique, de façon que les deux capacités C' et C soient égales, on aura

$$k = \frac{d}{a - a'}.$$

Il faut, pour appliquer ce procédé, avoir un condensateur plan dont l'une des lames soit attachée à une vis micrométrique permettant de l'écarter ou de la rapprocher de l'autre lame, de façon à obtenir la même valeur de la capacité, qu'il y ait ou qu'il n'y ait pas de diélectrique. Il sera utile, pour éviter tout effet secondaire étranger à l'influence du pouvoir inducteur, d'empêcher tout contact entre le diélectrique et les armatures. On y arrive facilement en supportant la lame diélectrique, au moyen de petits pieds en verre de $1^{m}/^{m}$ de diamètre.

DEUXIÈME PARTIE

MAGNÉTISME

CHAPITRE PREMIER

DÉFINITIONS ET LOIS DES PHÉNOMÈNES MAGNÉTIQUES

§ 1. — PHÉNOMÈNES FONDAMENTAUX PRÉSENTÉS PAR LES AIMANTS.

196. — Généralités. — Les propriétés magnétiques du fer et de certains de ses composés ont été connues des anciens, mais de même que les propriétés des corps électrisés, elles n'ont été l'objet d'études et de recherches sérieuses, qu'à une époque relativement assez rapprochée de nous. Les lois de l'Electricité et celles du Magnétisme présentent au surplus de grandes analogies ; elles seraient même identiques si on trouvait des corps conduisant le magnétisme aussi bien que les métaux conduisent l'électricité. C'est d'ailleurs, surtout entre les diélectriques et les aimants, que l'analogie est frappante, comme nous le verrons dans la suite.

Sans nous arrêter à définir ce qu'on appelle un aimant, nous rappellerons brièvement les propriétés fondamentales de ce genre de corps, c'est-à-dire celles qui permettent de reconnaître immédiatement et sans avoir recours à aucune méthode de précision, des phénomènes auxquels on peut donner le nom de loi.

197. — Pôles. — Ce qui frappe tout d'abord, lorsqu'on examine un aimant, c'est que ses propriétés attractives ou répulsives paraissent presqu'entièrement concentrées en deux points situés très près de ses extrémités, auxquelles on a donné le nom de *pôles*.

Si on présente successivement les deux pôles *a* et *b* d'une aiguille aimantée A, au même pôle d'une seconde aiguille qui ne peut que tourner librement autour de son centre de figure (et que nous appellerons boussole), on constate deux actions de sens contraire, l'une attractive, l'autre répulsive.

Si on répète la même expérience avec une seconde aiguille aimantée A′, identique à la première, on obtient naturellement les mêmes effets. Si l'on veut déterminer la nature des pôles de cette seconde aiguille, on appellera *a′* celui qui exerce sur les extrémités de la boussole des actions de même sens que celles qui sont exercées par le pôle *a* de la première aiguille, et *b′* le second pôle. On est certain en opérant ainsi, que les pôles *a′* et *b′* sont respectivement de même nature que les pôles *a* et *b*. Ceci posé, il est facile de constater que les pôles de même nature *a* et *a′* se repoussent, tandis que les pôles de nom contraire *a* et *b′* s'attirent. C'est la première loi fondamentale du magnétisme.

198. — Egalité des quantités de magnétisme à chaque pôle d'un aimant. — Prenons un aimant *acb* constitué d'une lame d'acier flexible comme celles qui servent à faire les scies à rubans, et aimantons-la lorsqu'elle a la forme rectiligne, puis courbons-la comme l'indique la figure 105 de façon à amener le pôle *b* en contact intime

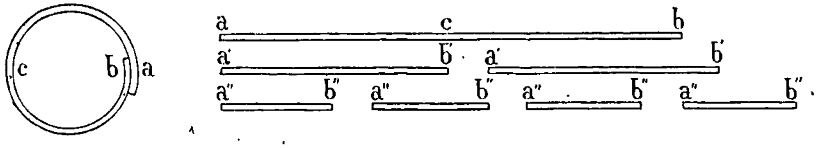


Fig. 105

avec le pôle *a* et présentons la région *ab* à l'un quelconque des pôles d'une boussole ; nous constaterons qu'il n'y a ni attraction ni répulsion. On conclut de là, que les quantités de magnétisme de signe contraire existant à chaque pôle d'un aimant sont égales. Si on sépare la région *a* de la région *b* de façon à transformer la figure *ac* en une circonférence interrompue en un point, les propriétés distinctives des deux pôles réapparaissent.

199. — Constitution des aimants. — Enfin, si on casse en deux parties égales la lame aimantée, on trouve que le milieu *c* de cette lame qui, présenté à la boussole avant la rupture, ne produisait aucun effet, se transforme après la rupture en un double pôle *b'a'* dont les effets égaux et de signe contraire se neutralisent tant que l'on ne sépare pas les deux moitiés de la lame, mais apparaissent avec leurs signes distinctifs aussitôt que la séparation a lieu. On constatera ainsi que la moitié *a'b'* présente en *a'* un pôle de même signe que le pôle primitif *a* et que le nouveau pôle *b'* est de signe contraire. Il en est de même du second tronçon. En cassant en deux parties chacun des tronçons, on constate également que chacune de ces parties se transforme en un aimant complet doué de deux pôles, et qui contient des quantités égales de magnétisme contraire. En réunissant tous les tronçons, de manière à reconstituer dans son intégrité la lame *acb*, on trouve qu'elle ne présente plus que les deux pôles primitifs *a* et *b*.

Cette expérience, très importante quoique très élémentaire, prouve : 1° qu'un aimant peut être considéré comme constitué par une infinité de petits aimants placés bout à bout de façon que leurs pôles de nom contraire soient en contact ; 2° que les quantités de magnétisme afférentes à chaque moitié de l'aimant sont toujours égales et de signe contraire.

C'est la seconde loi fondamentale.

200. — Lois de Coulomb. — Les deux lois que nous venons d'exposer ne nous donnent que des notions qualitatives sur le magnétisme ; mais elles ne nous permettent pas de mesurer des quantités de magnétisme comme nous mesurons des quantités d'électricité. Cette lacune a été comblée par la découverte des lois auxquelles Coulomb a donné son nom. Elles sont, comme nous l'avons déjà dit, identiques à celles de l'électricité et de la pesanteur, et peuvent s'énoncer ainsi :

Deux quantités de magnétisme q et q' ou, pour parler d'une manière plus rigoureuse, deux corps magnétiques chargés de quantités q et q' de magnétisme, s'attirent ou se repoussent, suivant que les quantités sont de signe contraire ou de même signe et la valeur numérique de cette action de la force qui les sollicite, est donnée par la formule

$$f = f_1 \frac{qq'}{d^2}$$

dans laquelle d représente la distance des corps magnétiques supposée très grande par rapport à leurs dimensions, et f_1 l'action attractive ou répulsive lorsque les quantités q et q' sont égales à l'unité magnétique et que la distance d est égale à l'unité de longueur.

Cette force f_1 dépend essentiellement du milieu à travers lequel se propage l'action magnétique. Si ce milieu est constitué par des gaz ou par des corps dépourvus de propriétés magnétiques, la valeur de f_1 est toujours la même, et nous conviendrons de choisir pour unité de quantité magnétique celle qui, agissant sur une quantité égale répartie sur un corps de très petites dimensions placé à l'unité de distance, exerce sur elle une action mécanique égale à l'unité de force. L'équation fondamentale deviendrait alors

$$1 = f_1 \frac{1 \times 1}{\overline{1}^2} \qquad \text{d'où} \qquad f_1 = 1$$

de sorte que dans les milieux dont nous venons de parler la formule de Coulomb peut s'écrire

$$f = \frac{qq'}{d^2}.$$

Si on pose $q = q'$, l'équation résolue par rapport à q devient

$$q = d\sqrt{f}.$$

En remplaçant d et f par leur représentation symbolique en unités absolues, il vient

$$Q = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1},$$

symbole identique à celui qui représente une quantité d'électricité.

§ 2. — POTENTIEL MAGNÉTIQUE.

201. — Potentiel d'une masse magnétique. — La définition du potentiel magnétique est la même que celle du potentiel gravifique et du potentiel électrique ; c'est le travail développé par un point matériel chargé de l'unité de quantité magnétique et soumis à l'action d'un système magnétique (qui dans la réalité sera toujours composé d'aimants contenant des quantités de magnétisme égales et de signe contraire), lorsqu'on l'amène d'une très grande distance jusqu'à une position donnée de l'espace. Dans le cas le plus général, la position finale de la masse-unité est déterminée par ses coordonnées rapportées à trois plans fixes dans l'espace ; les masses magnétiques agissantes sont fixes ; alors le travail ainsi défini est une fonction des coordonnées de la position finale, et s'appelle le potentiel du système par rapport à cette position ou, pour abréger, le potentiel du point.

Si on réunit par une surface tous les points ayant le même potentiel, c'est-à-dire pour lesquels le travail de la masse-unité amenée de l'infini a la même valeur, on constitue ce qu'on appelle une surface équipotentielle.

Enfin, le travail positif ou négatif développé par la masse-unité lorsqu'on la transporte d'un point A à un point B, ces deux points se trouvant dans le champ d'action du système magnétique, s'appelle différence de potentiel des points A et B.

202. — Potentiel d'un aimant. — Nous venons de dire plus haut que le système magnétique agissant est, dans la réalité, toujours composé de couples de masses magnétiques égales et de signe contraire, c'est-à-dire que toute masse magnétique contenant une quantité $+q$ de magnétisme, est nécessairement accompagnée d'une autre masse contenant une quantité de magnétisme égale à $-q$, et cependant nous venons de définir le potentiel par le travail d'une masse magnétique unique. La raison de cette contradiction apparente est qu'il est toujours facile, lorsqu'on connaît le potentiel tel que nous venons de le définir, de trouver le potentiel d'une seconde masse-unité de signe contraire à la première (puisqu'il n'y a pour cela qu'à changer le signe du travail), et assujettie à la seule condition d'être à une distance invariable de celle-ci. Le potentiel d'un aimant composé de deux masses-unités de signe contraire maintenues à une distance invariable, s'obtiendra donc en cherchant d'abord le travail de la masse affectée du signe +, lorsqu'elle est amenée de l'infini jusqu'à une surface équipotentielle, et à lui ajouter le travail changé de signe de la seconde masse placée sur une autre surface équipotentielle; pourvu que la distance minima de ces deux surfaces ne soit pas supérieure à la distance à laquelle les deux masses-unités doivent être l'une de l'autre.

Mais nous allons voir qu'il n'est nullement nécessaire de supposer que chacune des masses-unités arrive d'une grande distance, car quelle que soit cette distance et quelle que soit la trajectoire parcourue, la valeur du travail accompli ne dépend que de la surface équipotentielle à laquelle chacune des masses s'arrête. Si cette surface est la même, chaque masse-unité a accompli le même travail, positif pour l'une, négatif pour l'autre, nul par conséquent pour leur ensemble. Le travail accompli par cet ensemble (qui constitue un aimant) ne peut donc avoir une valeur différente de zéro que si les deux masses s'arrêtent sur deux surfaces équipotentielles différentes. Les surfaces équipotentielles peuvent porter des indications numériques représentant le potentiel auquel elles correspondent et on peut les construire pour une série de valeurs équidistantes du potentiel; de sorte que si l'on considère, par exemple, deux surfaces consécutives *cotées* 120 et 130, cela voudra dire qu'une masse-unité amenée de l'infini sur la première surface accomplira, sous l'influence des forces émanant du système magnétique fixe, un travail de 120 ergs (dyne $\times$ centimètre), tandis que ce travail atteindra 130 ergs lorsqu'elle touchera la seconde surface. Avec cette convention on voit immédiatement que si deux masses-unités de signe contraire liées ensemble traversent en même temps la même surface, le travail accompli par leur ensemble sera nul, mais que si l'une d'elles s'arrête sur une surface dont *la cote* est de dix unités plus élevée que la surface où s'arrête l'autre, leur ensemble (ou aimant-unité) aura accompli un travail positif ou négatif de dix unités.

Nous voyons donc que la connaissance des surfaces équipotentielles correspondantes à une masse-unité, permet parfaitement de calculer le potentiel d'un aimant dont les pôles occupent des positions définies par les surfaces équipotentielles sur lesquelles ils sont situés.

203. — **Théorèmes relatifs au potentiel magnétique.** — Tous les théorèmes que nous avons démontrés en parlant du potentiel électrique, s'appliquent naturellement au potentiel magnétique, puisque les lois élémentaires des actions électriques sont les mêmes que celles des actions magnétiques. La seule différence consiste en ce qu'on peut séparer les deux électricités de signe contraire, grâce aux corps conducteurs, tandis que cela n'est pas possible pour le magnétisme. Ainsi le théorème concernant l'égalité du potentiel en tous les points de la surface d'un corps conducteur électrisé, n'a pas de correspondant lorsqu'il s'agit du magnétisme.

Cette réserve faite, nous pouvons énoncer les théorèmes suivants, dont le lecteur trouvera la démonstration dans le premier chapitre (Potentiel gravifique) de la première partie de cet ouvrage.

Théorème I. — Le potentiel d'une masse magnétique de très petites dimensions, chargée de q unités magnétiques, a pour valeur $\frac{q}{x}$, x étant la distance à laquelle se trouve la masse-unité magnétique de la masse agissante. Le travail mécanique positif ou négatif développé par cette masse-unité, lorsque sa distance à la masse agissante varie entre x et l'infini, a donc pour valeur $\frac{q}{x}$.

Le potentiel correspondant à une autre distance x', étant $\frac{q}{x'}$, on voit que la différence de potentiel de deux points de l'espace se réduit, lorsqu'il n'y a qu'une masse agissante, à l'expression

$$\frac{q}{x} - \frac{q}{x'} = q\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}\right).$$

La différence de potentiel ne dépend donc, dans ce cas, que de la différence des distances à la masse agissante, des deux positions considérées. C'est le travail développé sur la masse-unité lorsque sa distance à la masse agissante, passe de la valeur x à la valeur x', en suivant un trajet quelconque.

Théorème II. — Le potentiel d'un système de masses agissantes est égal à la somme des potentiels correspondant à chacune d'elles. C'est-à-dire que le travail développé par la masse-unité magnétique amenée d'une très grande distance, jusqu'à une position définie par les distances x_1, x_2, x_3, ... auxquelles elle se trouve de chacune des masses magnétiques agissantes q_1, q_2, q_3, a pour valeur

$$V = \frac{q_1}{x_1} + \frac{q_2}{x_2} + \frac{q_3}{x_3} + \dots = \Sigma \frac{q}{x}.$$

Théorème III. — La résultante des forces appliquées à la masse-unité magnétique est normale à la surface équipotentielle passant par ce point, et son intensité est donnée par l'expression

$$F = \frac{dV}{dn}$$

dV étant la différence de potentiel de deux surfaces de niveau infiniment voisines, dont la distance au point considéré est égale à dn.

En général, si on imprime à la masse-unité un déplacement dx dans une direction quelconque, la force attractive ou répulsive mesurée dans cette direction, aura pour valeur

$$F = \frac{dV}{dx}$$

dV étant la différence de potentiel des deux extrémités de l'élément de longueur dx, ou la différence de cote des surfaces de niveau qui passent par ces extrémités.

204. — Surfaces équipotentielles d'un aimant. — Supposons que les masses agissantes se réduisent à deux, A et B (fig. 106) et qu'elles soient chargées de quantités de magnétisme égales et de signe contraire $+q$, $-q$, et cherchons à déterminer la forme des surfaces équipotentielles.

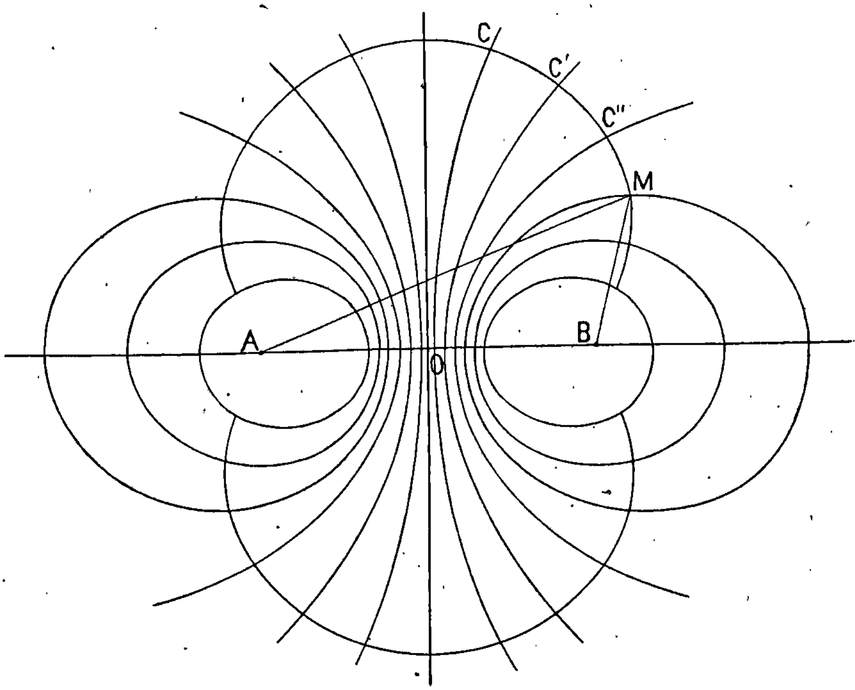


Fig. 106

Un point quelconque M appartenant à l'une de ces surfaces, devra satisfaire à l'équation

$$V_0 = \frac{q}{r} + \frac{(-q)}{r'} = q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right),$$

V_0 désignant la valeur du potentiel qui est la même par définition pour tous les points de la surface, r et r' représentant respectivement les distances du point M aux points A et B. L'équation en coordonnées bi-polaires, de l'intersection de la surface cherchée avec le plan du papier, sera donc

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \frac{V_0}{q}.$$

En coordonnées rectangulaires, cette équation deviendra, si on prend pour axe des x la droite AB ; pour axe des y une perpendiculaire à cette droite passant par le milieu O de AB, et si on désigne par $2a$ la distance AB et par C le rapport $\frac{V_0}{q}$,

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} = C.$$

205. — Lignes de force. — Fantômes magnétiques. — La construction de ces courbes peut se faire par points, en donnant à $C = \frac{V_0}{q}$ une valeur déterminée. En faisant varier la valeur de V_0, on obtient autant de courbes que l'on veut. Comme nous l'avons démontré dans l'électricité statique, une ligne de force quelconque CC′C″ (fig. 106) passant par le point M, est en chaque point perpendiculaire à la surface équipotentielle qu'elle traverse. Il résulte de là, que si on place le long d'une de ces lignes de force magnétique une série de petits aimants, chacun d'eux s'orientera suivant la direction de la tangente à la ligne de force au point où il est situé, et leur ensemble reproduira précisément la forme de la ligne de force. L'expérience confirme complètement ces déductions de la théorie. En jetant sur une feuille de papier qui recouvre complètement un aimant rectiligne, une certaine quantité de limaille de fer, chacune des particules de cette limaille se transforme en aimant sous l'influence des forces magnétiques émanant des deux pôles (de même qu'un corps conducteur neutre s'électrise à distance lorsqu'il est placé dans le voisinage d'un corps électrisé), et les petits aimants ainsi formés se dirigent suivant les lignes de force sur le trajet desquelles ils se trouvent et leur ensemble reproduit ainsi, d'une façon très fidèle, la forme des lignes de force. Les figures ainsi obtenues s'appellent des *fantômes magnétiques*, et leur aspect est absolument le même que celui que présentent une série de lignes de force tracées d'après les indications de la théorie que nous venons d'exposer.

Dans la figure 107, les pôles A et B appartiennent aux deux branches d'un aimant en fer à cheval dont l'axe est supposé perpendiculaire au plan de la figure. Les courbes tracées en traits pleins représentent l'intersection des surfaces équipotentielles avec ce plan, et celles qui sont en pointillé sont les lignes de force suivant

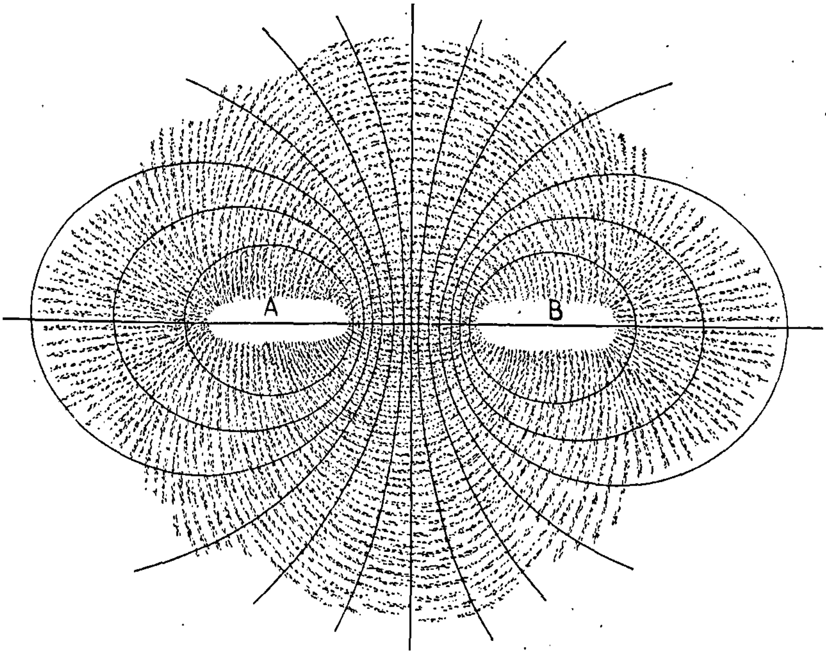


Fig. 107

lesquelles s'alignent les particules de limaille de fer projetée sur le papier recouvrant les deux pôles A et B.

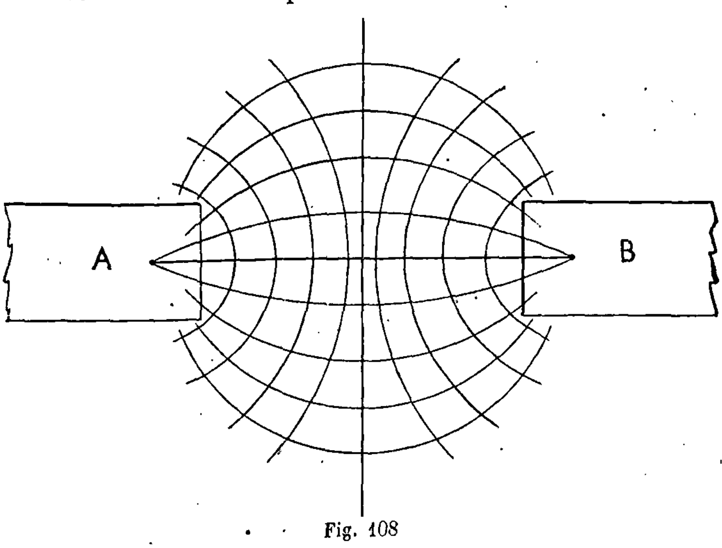


Fig. 108

La figure 108 correspond au cas de deux aimants rectilignes placés sur la même ligne droite et dont les pôles en regard A et B sont de nom contraire.

Enfin dans la figure 109, on a supposé que les pôles en regard A, A des deux aimants rectilignes étaient de même sens.

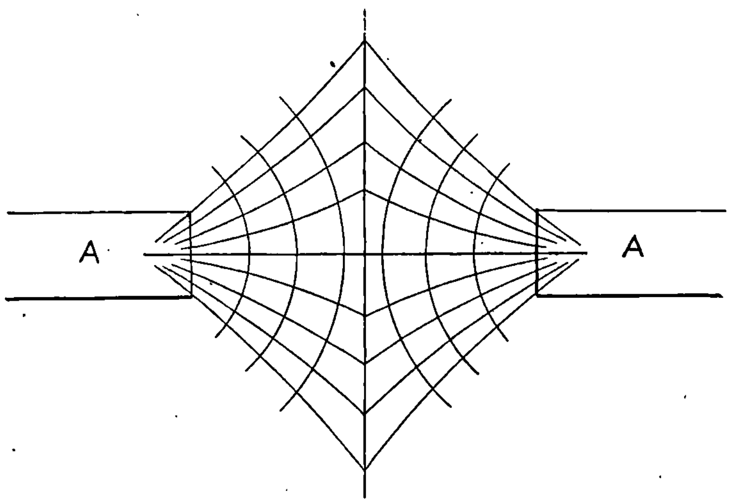


Fig. 109

On pourrait obtenir facilement l'équation de ces lignes de force, ou du moins déterminer leurs coordonnées en fonction de celles des courbes équipotentielles, en employant le mode de calcul qui permet de construire les *trajectoires orthogonales* d'une série de courbes astreintes à certaines conditions.

206. — Application du Théorème de Green aux forces magnétiques. — Si nous découpons sur une surface équipotentielle, un petit élément ayant une aire de 1 centimètre carré, et que nous le supposions chargé d'une couche magnétique uniformément répartie, égale à l'unité, la résultante des forces qui lui sont appliquées aura pour valeur, comme nous venons de le dire, $\frac{dV}{dn}$, et si, au lieu d'être égale à l'unité, cette aire est égale à ds, la force deviendra

$$\frac{dV}{dn}\,ds.$$

C'est ce que nous avons déjà appelé le Flux de force total appliqué à l'élément *ds*.

Si nous considérons le lieu des positions successives d'un petit plan ainsi chargé de l'unité de quantité magnétique par centimètre carré, dont nous augmentons graduellement les dimensions, afin que l'effort exercé sur lui par les masses agissantes reste constant malgré la distance de plus en plus grande à laquelle nous le plaçons, et si nous le faisons mouvoir de manière à le maintenir constamment perpendiculaire aux lignes de force le long desquelles il glisse, le solide engendré pendant ce mouvement s'appelle *un canal ou un tube de force* (33).

Si nous donnons à ces canaux une forme carrée, nous pourrons juxtaposer sans perte de place un nombre de canaux suffisant pour remplir complètement l'espace qui entoure les masses agissantes, et si chaque canal correspond à un flux total de 1 dyne, le nombre de canaux représentera le Flux total de force magnétique du système agissant.

Nous avons vu (32) que ce flux total, compté normalement à chacune des surfaces équipotentielles, a pour valeur, lorsqu'il s'agit de la pesanteur

$$4\pi f_1 \Sigma m$$

Σm étant la somme de toutes les masses agissantes. Pour appliquer ce théorème aux forces magnétiques, nous n'avons qu'à remplacer Σm par Σq et f_1 par l'unité et nous trouvons ainsi en posant $\Sigma q = Q$

$$\mathfrak{F} = 4\pi Q.$$

207. Valeur du flux de force total qui traverse normalement une surface quelconque. — Enfin, si au lieu du flux de force total qui traverse normalement toutes les surfaces équipotentielles, nous cherchons la valeur du flux de force total qui traverse normalement une surface de forme absolument quelconque, nous savons que, en chaque point de la surface, ce flux de force est égal à

$$\frac{dV}{dn}\, ds$$

dn étant la longueur de la normale au point considéré, dV la différence de potentiel des deux extrémités de cette normale, et ds un élément de cette surface chargé de l'unité de quantité magnétique par centimètre carré.

La valeur du flux total est donc égale à l'intégrale

$$\int \frac{dV}{dn}\, ds$$

dont le théorème de Green nous donne la valeur (36).

Cette valeur convient naturellement aussi aux forces magnétiques, à la condition d'y remplacer comme nous venons de le dire, les masses matérielles par les quantités de magnétisme, et le coefficient f_1 par l'unité. Nous aurons donc, si la surface considérée enveloppe complètement l'ensemble des masses agissantes Q,

$$\int \frac{dV}{dn}\, ds = 4\pi Q.$$

Le second membre se réduira à $2\pi Q$ si l'ensemble des masses magnétiques agissantes est situé sur la surface considérée, ou à zéro si les masses magnétiques sont extérieures à la surface.

Disons à propos des flux de force dont le nom et l'usage se sont répandus depuis un certain nombre d'années, au point de remplacer complètement les anciennes appellations, que leur emploi constitue un simple artifice géométrique destiné à nous permettre de *voir*, pour ainsi dire, la façon dont sont distribuées les forces émanées d'un ensemble de centres qui exercent sur un point matériel une action attractive ou répulsive. Ce terme n'implique aucune espèce d'hypothèse sur l'origine ni sur le mode de transmission des forces électriques ou magnétiques, et l'emploi des flux de force, tout en permettant dans nombre de cas de résoudre plus rapidement et plus simplement certaines questions que si on les traitait par l'analyse, ne constitue nullement une découverte permettant de trouver des résultats nouveaux.

§ 3. — CHAMP MAGNÉTIQUE. — MOMENT MAGNÉTIQUE.

208. — **Champ magnétique.** — C'est le nom que l'on donne à toute région de l'espace douée de la propriété d'agir sur un aimant. En réalité, on n'a pas d'exemple d'une force agissant sur *un corps* sans qu'il existe *un autre corps* d'où elle paraît émaner, l'espace intermédiaire *transmettant* cette action par un mécanisme qui nous est inconnu, mais ne l'engendrant jamais. Aussi est-ce pour abréger le langage que l'on dit qu'un corps est soumis à l'action d'un champ magnétique, qu'un champ magnétique développe une force etc... En réalité, et pour être rigoureux, on devrait dire qu'un corps est soumis à l'action d'un aimant qui exerce sur lui un effort mécanique.

L'intensité d'un champ magnétique en un point, a pour mesure l'effort développé sur une masse très petite, chargée de l'unité de quantité magnétique et située en ce point. Comme il est impossible de séparer les deux magnétismes et que, ainsi que nous l'avons vu, un corps aimanté les contient toujours en quantité égale, la mesure du champ magnétique telle que nous venons de la définir constitue une abstraction irréalisable. Mais on peut facilement tourner cette difficulté de la manière suivante. Considérons un petit aimant *ab* (fig. 110), placé dans un champ magnétique dont les lignes de force

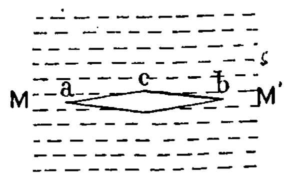


Fig. 110

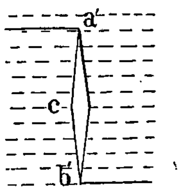


Fig. 111

sont représentées par les lignes ponctuées parallèles à la direction MM'. Si nous désignons par h l'intensité du champ telle que nous venons de la définir, et si nous supposons qu'aux points a et b se trouve concentrée une quantité de magnétisme égale à $+1$ pour le premier et à -1 pour le second, il est facile de voir que l'effort développé par le champ sur chacun d'eux, a respectivement pour mesure $+h$ et $-h$. Ces deux forces égales, parallèles et de signe contraire, constituent un couple qui a pour effet de placer l'aimant ab dans la direction MM′ des lignes de force du champ.

Cette première expérience nous fait donc connaître la direction des lignes de force du champ ; une seconde expérience va nous donner son intensité. Le petit aimant étant placé dans sa position d'équilibre naturel ab (fig. 110), faisons-le tourner d'un angle droit, de façon à placer la ligne $a'b'$ perpendiculairement à la direction des lignes de force (fig. 111). L'intensité du couple qui tend à le ramener à sa position d'équilibre, est alors exprimée par le produit de l'une quelconque des deux forces parallèles, par la distance qui les sépare et qui est ici égale à $a'b'$. En désignant la longueur $a'b'$ par 2λ, l'intensité du champ par h et celle du couple par $\mathfrak{M}_1$, nous aurons donc

$$\mathfrak{M}_1 = 2\lambda h \qquad \text{d'où} \qquad h = \frac{\mathfrak{M}_1}{2\lambda}$$

et si nous prenons 2λ égal à l'unité, nous aurons simplement

$$\mathfrak{M}_1 = h.$$

Il est donc facile de lever la difficulté que nous signalions et de mesurer l'effort auquel serait soumise la quantité-unité, si on pouvait l'isoler de la quantité de signe contraire puisque si cette séparation était réalisable, on aurait en vertu de notre première définition de l'intensité du champ

$$F_1 = h$$

équation qui rapprochée de la précédente donne

$$F_1 = \mathfrak{M}_1.$$

209. — Moment magnétique. — Nous venons de voir que l'on peut mesurer l'intensité d'un champ magnétique au moyen d'un petit aimant dont les pôles sont chargés de quantités de magnétisme de signe contraire et égales à l'unité. Si pour plus de généralité, nous supposons que la quantité de magnétisme concentrée à chaque pôle soit $+q$ pour l'un et $-q$ pour l'autre, le couple produit par le champ magnétique, lorsque la ligne des pôles est perpendiculaire aux lignes de forces, aura une intensité égale à

$$\mathcal{M} = qh \times 2\lambda = 2\lambda qh.$$

Le produit de la quantité q de magnétisme qui existe à chaque pôle par la distance 2λ qui les sépare, a reçu le nom de *Moment magnétique*. C'est un élément très important qui joue un rôle considérable dans la théorie du magnétisme et dans le calcul des effets mécaniques que peuvent produire les aimants, comme nous le verrons par la suite.

210. — Moment magnétique d'un ensemble d'aimants égaux — Soit ab (fig. 112) un aimant placé dans un champ magnétique, de façon que la ligne polaire ab soit perpendiculaire aux lignes de force du champ, que nous supposerons parallèles au plan de la figure. Soit O la projection d'un axe de rotation perpendiculaire au plan de la figure et lié invariablement à l'aimant ab, de sorte que le seul mou-

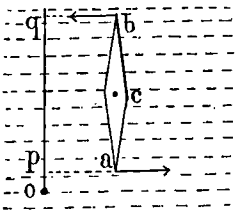


Fig. 112

vement que puisse prendre celui-ci est une rotation autour de l'axe projeté en O. Calculons l'intensité du couple qui tend à faire tourner l'aimant. Pour cela, menons par le point O une parallèle à l'aimant ab et projetons sur cette parallèle les deux pôles a et b, en p et q. Les forces appliquées aux pôles a et b, ont pour valeur, en conservant les notations que nous venons d'employer, qh pour le pôle a et $-qh$ pour le pôle b.

Les moments de ces forces pris par rapport à l'axe O sont respectivement

$$qh \times \overline{op} \qquad \text{et} \qquad -qh \times \overline{oq}.$$

La somme algébrique de ces deux moments, égale au moment résultant, a pour valeur

$$-qh(\overline{oq}-\overline{op}).$$

Mais

$$\overline{oq}-\overline{op}=\overline{ab}=2\lambda,$$

la distance $\overline{ab}$ des deux pôles étant désignée par 2λ.

Le moment du couple qui tend à faire tourner l'aimant $\overline{ab}$ autour d'un axe O perpendiculaire au plan formé par la ligne de force et par l'aimant, est donc absolument indépendant de la distance du milieu C de ce dernier à l'axe O, et sa valeur numérique, abstraction faite du signe, est égale à $2\lambda qh$, c'est-à-dire égale à celle que nous avons déjà obtenue lorsque nous supposions que l'axe de rotation passait par le milieu C de l'aimant.

211. — Influence du groupement de plusieurs aimants sur la distribution du magnétisme aux pôles. — Ceci posé, considérons (fig. 113) une série d'aimants A, B, C, D.., invariablement liés à l'axe O, identiques à l'aimant $\overline{ab}$, parallèles entre eux, perpendiculaires aux lignes de force du champ et ne pouvant, comme $\overline{ab}$, que prendre un mouvement de rotation autour de l'axe O perpen-

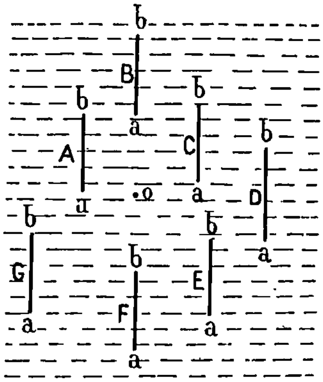


Fig. 113

diculaire au plan de la figure. Si leurs lignes polaires ont toutes la même direction, tous les couples auront le même sens, et le couple total, égal à leur somme, aura pour expression

$$2\lambda qh \times n = 2\lambda q \times n \times h$$

n désignant le nombre des aimants. Ce résultat est donc le même que celui qu'on obtiendrait avec un aimant unique dont le moment magnétique serait égal à n fois le moment magnétique de $\overline{ab}$.

Rapprochons maintenant tous ces aimants en les maintenant parallèles jusqu'à ce qu'ils se touchent, et *supposons que leur contact n'altère en rien leur moment magnétique individuel*, le couple con-

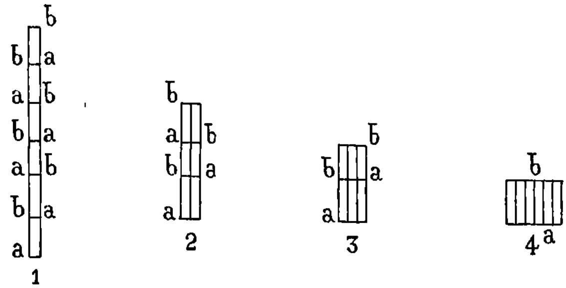


Fig. 114

servera toujours la même valeur $2\lambda qnh$ et le moment magnétique d'un aimant unique, capable de produire le même couple, aura encore pour valeur $n \times 2\lambda q$, et cela restera vrai de quelque façon que nous les groupions pourvu, bien entendu, que leurs lignes polaires aient toutes la même direction. Si le nombre des aimants était par exemple de 6, nous pourrions les grouper de 4 façons différentes comme le représente la figure 114 et le moment du couple produit par le champ magnétique, resterait toujours le même et par conséquent aussi le moment magnétique total de chacun des groupes d'aimants.

Si nous examinons attentivement l'influence de ces divers groupements sur la distribution du magnétisme libre aux deux pôles, nous trouvons que dans le groupement 1 où tous les aimants sont alignés bout à bout, les pôles extrêmes sont chargés de quantités de magnétisme respectivement égales à $+q$ et à $-q$, tandis que tous les pôles intermédiaires s'annulent mutuellement, chacun d'eux étant en contact avec un pôle de nom contraire. La surface séparative de chaque aimant contient donc des quantités de magnétisme égales et de signe contraire qui, tout en conservant leur individualité, si on peut s'exprimer ainsi, sont sollicitées en sens contraire par le champ magnétique, de façon que l'effet mécanique final ne dépend que des quantités $+q$ et $-q$ existant aux extrémités de l'aimant 1 qui est six fois aussi long que chacun des aimants partiels dont il est composé. Le couple mécanique est donc six fois aussi considérable, puisqu'il est produit par la force qh agissant sur un bras de levier six fois aussi considérable que celui d'un seul aimant.

Dans le groupement 2, le nombre des aimants placés bout à bout est réduit à trois, mais chacun d'eux est composé de deux aimants juxtaposés ayant les pôles de même nom tournés du même côté. La quantité de magnétisme existant aux pôles libres de cet ensemble est donc $+2q$ et $-2q$ et le bras de levier est égal au triple du bras de levier de l'aimant élémentaire.

Dans le groupement 3, la quantité de magnétisme libre à chaque pôle est $+3q$, $-3q$ et le bras de levier est double de celui d'un aimant élémentaire.

Enfin dans le groupement 4, tous les aimants élémentaires ont leurs pôles de même nom placés à côté les uns des autres et la quantité de magnétisme libre à chaque pôle est égale à $+6q$ et $-6q$. Le bras de levier est réduit à celui d'un seul aimant élémentaire.

212. — La conclusion qui ressort nettement de ce qui précède, c'est que quel que soit le mode de groupement adopté, le moment magnétique de l'aimant résultant de chaque groupement est invariable, tandis que la quantité de magnétisme libre à chaque pôle et par conséquent aussi, comme nous le verrons bientôt, la *force portante* de chaque groupe dépend au contraire essentiellement du mode de groupement. Cette conclusion est d'ailleurs subordonnée, comme nous l'avons déjà dit, à la condition de l'invariabilité des aimants élémentaires. Or, cette invariabilité ne se rencontre jamais dans les aimants permanents et on a toujours observé que, si l'on prend plusieurs aimants, qui séparément ont conservé leurs propriétés magnétiques pendant longtemps et si on les place côte à côte comme dans le groupement 4, ils perdent rapidement une partie très notable de la quantité de magnétisme qu'ils contenaient primitivement, de sorte que leur moment magnétique collectif est inférieur à la somme de leurs moments individuels. Mais, s'il n'en était pas ainsi, on aurait un moyen très simple de trouver le moment magnétique d'un aimant individuel, ce serait de diviser le moment magnétique total d'un aimant par le nombre d'aimants individuels qu'il est capable de contenir ou, ce qui revient au même, par le rapport de son volume à celui de l'aimant individuel pris comme étalon.

213. — Intensité d'aimantation. — Nous arrivons ainsi à nous faire une idée nette de la puissance des aimants élémentaires dont l'ensemble constitue un aimant de dimensions quelconques. En désignant par M le moment magnétique d'un aimant, par U son volume, par m et u les quantités correspondantes de l'aimant-étalon et par n le nombre d'aimants-étalons nécessaires pour former l'aimant de volume U, on aurait

$$U = nu \qquad M = nm$$

d'où

$$\frac{M}{U} = \frac{m}{u} \qquad \text{ou} \qquad m = \frac{M}{U} u.$$

Le volume de l'aimant-étalon étant pris égal à l'unité, on voit que son moment magnétique est représenté par le quotient $\frac{M}{U}$ que l'on désigne par la lettre $\mathfrak{J}$.

Ce quotient a reçu, pour ces motifs, le nom d'*Intensité d'aimantation*. Sa valeur numérique représente donc le moment magnétique d'un petit aimant de volume égal à l'unité, lorsqu'il fait partie de l'aimant de volume U.

214. — Intensité d'aimantation des aimants permanents. — L'intensité d'aimantation des aimants permanents en acier, varie beaucoup avec la nature de l'acier et avec les dimensions du barreau qui les constitue. Nous allons donner à cet égard quelques chiffres qui montreront combien il est difficile de se faire à l'avance une idée exacte de ce que doit être le moment magnétique d'un barreau. Nous devons faire remarquer en passant que la définition même du moment magnétique implique qu'il s'agit d'un barreau rectiligne ; car s'il en était autrement, on pourrait en le courbant en arc de cercle et en rapprochant convenablement ses extrémités, trouver pour ce moment toutes les valeurs comprises entre le maximum, qui correspond à la forme rectiligne, et zéro, qui correspond au cas où les deux pôles seraient amenés à se toucher. La détermination de l'intensité d'aimantation suppose donc toujours ou que le barreau est rectiligne ou que l'on a fait les corrections nécessaires dans le cas contraire.

D'après Kohlrausch, la valeur maxima de $\mathfrak{J}$, lorsqu'il s'agit d'aiguilles d'acier longues et minces, est de 100 unités C. G. S. environ par gramme d'acier. La densité de l'acier différant très peu de 8, on voit que cela correspond à 800 unités par centimètre cube. Ce nombre est le plus élevé que l'on connaisse relativement aux *aimants permanents* et il est essentiel de remarquer qu'il a été trouvé sur des barreaux *longs et minces*.

Gauss a trouvé, pour une aiguille pesant 96 grammes et ayant par conséquent un volume de 12 centimètres cubes, un moment magnétique égal à 10 090 unités C. G. S. L'intensité d'aimantation $\mathfrak{J}$ avait donc une valeur de

$$\frac{10\,090}{12} = 841.$$

(Blavier, Grandeurs électriques, page 275). Mais d'après Gordon (page 340, Ier volume), l'aimant en question aurait pesé 453 grammes au lieu de 96, ce qui réduirait $\mathfrak{J}$ à la valeur de 171 unités au lieu de 841.

MM. Barus et Strouhal ont trouvé, sur des aiguilles d'acier de $1^{mm},5$ de diamètre, une intensité d'aimantation permanente variant entre 80 et 400 suivant que leur longueur variait de 15 millimètres à 75 millimètres. Avec des barreaux encore plus longs recuits *au bleu*, ils ont même obtenu pour $\mathfrak{J}$ une valeur voisine de 800.

215. — M. Limb, dans des mesures récentes prises sur des aimants d'assez fortes dimensions provenant de l'usine d'Allevard, a trouvé des nombres bien différents de ceux que nous venons de citer. Il a opéré : 1° sur un barreau rectiligne en acier d'Allevard ayant comme section un carré de 4 millimètres de côté, une longueur de $83^{m}/^{m},5$ et un volume de $1^{\text{cent. cube}},336$; il a trouvé

$$\mathfrak{J} = 229,56.$$

2° Sur un barreau en acier fondu ordinaire ayant une section carrée de 5^{mm} de côté et une longueur de 84^{mm}, il a trouvé

$$\mathfrak{J} = 143,04.$$

3° Sur un faisceau de barreaux en acier d'Allevard ayant une section carrée de 4^{mm} de côté et une longueur comprise entre 60^{mm} et 80^{mm}. Ces barreaux au nombre de 65 étaient groupés parallèlement, ils avaient leurs pôles distribués sur la surface d'un rectangle qui en contenait 13 dans un sens et 5 dans l'autre formant ainsi

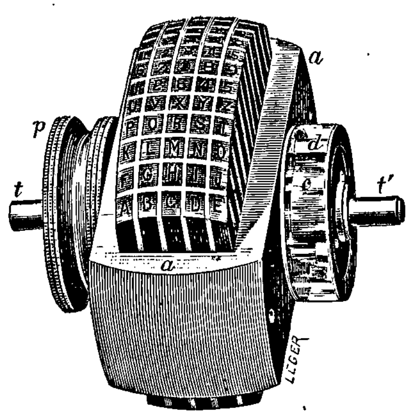


Fig. 115

deux pôles de grande surface. Les barreaux étaient séparés l'un de l'autre par des lames d'aluminium de 1^{mm} d'épaisseur pour diminuer les réactions nuisibles qui s'exercent entre les pôles de même nom (fig. 115). Il a trouvé, pour le moment magnétique total, une valeur presque constante pendant plus d'une année et égale à 3300. Le volume du faisceau magnétique étant de $78^{\text{cent. cubes}},2$, la valeur de $\mathfrak{J}$ est dans ce cas égale à 42,2, valeur bien plus faible que celle qui correspond à un barreau isolé.

4° Enfin, M. Limb a mesuré le moment magnétique d'un bloc d'acier fondu de forme parallélipipèdique dont les trois arêtes avaient respectivement 29^{mm}, 59^{mm} et 89^{mm} et dont le volume était de $142^{cent. cubes},013$. Il a trouvé pour le moment magnétique 843,27 et pour $\mathfrak{I}$ la valeur 5,94 qui est très faible et tient probablement à la nature de l'acier. Nous verrons que la valeur de $\mathfrak{I}$, atteinte par les barreaux de fer dense soumis à des forces magnétisantes intenses, dépasse de beaucoup les nombres que nous venons de donner et qui se rapportent aux aimants permanents en acier. Nous nous bornerons, quant à présent, à dire que cette valeur atteint facilement 1400 et que le chiffre le plus élevé qu'on ait constaté est d'environ 2000 unités.

216. — Exemple numérique. — Supposons que le faisceau aimanté dont nous venons de parler soit mobile sans frottement autour d'un axe horizontal (fig. 116) passant par son centre de gravité et perpendiculaire au méridien magnétique. Sous l'action du champ magnétique terrestre, la

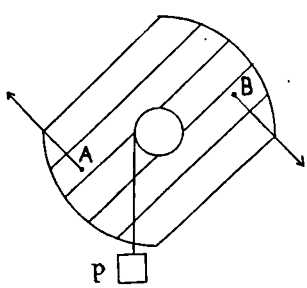


Fig. 116

ligne des pôles va prendre une certaine direction qui est précisément celle des lignes de force de ce champ. Si on écarte le faisceau de sa position d'équilibre, il tendra à y revenir sous l'action d'un couple proportionnel au sinus de l'angle de déviation, comme nous le verrons bientôt, et ce couple sera maximum pour une déviation égale à un angle droit. Dans cette position, il a pour valeur $2\lambda q H$. Or, la valeur de $2\lambda q$ étant égale à 3300 et l'intensité totale H du champ magnétique terrestre, étant à Paris égale à 0,466, il vient pour la valeur du couple exprimée en dynes-centimètres :

$$3300 \times 0{,}466 = 1538^{dyn\text{-}cent} = 1568 \text{ milligrammes-centimètres.}$$

Si on voulait équilibrer ce couple au moyen de l'action d'un poids P, attaché à un fil enroulé sur une poulie de un centimètre de rayon, il faudrait le prendre égal à 1568 milligrammes.

§ 4. — DURÉE DES OSCILLATIONS D'UN BARREAU AIMANTÉ DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE.

217. — Lorsqu'un barreau aimanté pouvant osciller librement autour d'un axe passant par son centre de gravité (que nous supposerons coïncider avec le centre de figure), est placé dans un champ magnétique et qu'on vient à l'écarter de sa position d'équilibre, il y revient en exécutant une série d'oscillations, dont la rapidité dépend du moment magnétique et du moment d'inertie du barreau ainsi que de l'intensité du champ magnétique. Nous allons calculer la durée d'une de ces oscillations. Lorsqu'un corps solide est, comme notre barreau aimanté, suspendu sur un axe passant par son centre de gravité et autour duquel il peut tourner ou osciller sans aucun frottement, qu'il est sollicité par un ensemble de forces qui tendent à le ramener dans une position déterminée avec une intensité proportionnelle à l'angle dont il en a été écarté, la durée T d'une oscillation simple (c'est-à-dire comprise entre les deux positions extrêmes), est donnée par la formule

$$T = \pi\sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{c_1}}$$

dans laquelle on désigne par π le rapport de la circonférence au diamètre $= 3{,}1416$; Σmr^2 le moment d'inertie du corps pris par rapport à l'axe de suspension; c_1 la valeur du couple qui tend à ramener le corps dans sa position d'équilibre lorsqu'on l'en écarte d'un angle égal à l'unité ($57°{,}295$). Cette formule va nous servir à résoudre le problème qui nous occupe.

Soit AB un barreau aimanté (fig. 117) placé dans un champ

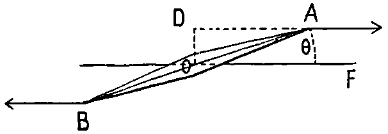


Fig. 117

magnétique d'intensité h, dont les lignes de force sont parallèles à OF, et pouvant osciller librement autour de son centre de gravité et de figure O. Si nous l'écartons de sa position d'équilibre OF, de l'angle AOF $= \theta$, chaque pôle d'intensité q est sollicité par une force qh dont le bras de levier a pour valeur $\overline{OA}$ sin θ; de sorte que le moment de chacune de ces forces a pour valeur

$$\overline{OA} \times qh \times \sin\theta.$$

Le couple total est donc

$$2\overline{OA}qh \sin\theta.$$

Mais $2OA \times q$ est précisément le moment magnétique $\mathfrak{M}$ du barreau, de sorte que le couple a pour valeur

$$\mathfrak{M}h \sin\theta.$$

Lorsque l'angle θ est suffisamment petit pour qu'on puisse, sans erreur relative sensible, remplacer le sinus par l'arc, on peut écrire en désignant ce couple par C

$$C = \mathfrak{M}h\theta$$

d'où

$$\frac{C}{\theta} = \mathfrak{M}h.$$

Mais $\frac{C}{\theta}$ n'est autre chose que la valeur que prendrait le couple lorsque $\theta = 1$, si ce couple restait proportionnel à l'arc. Nous avons donc

$$c_1 = \mathfrak{M}h$$

Quant à la valeur du moment d'inertie Σmr^2, qui est la somme de tous les produits obtenus en multipliant la masse de chaque molécule du barreau par le carré de sa distance à l'axe O, on peut la mettre sous une forme qui permet de faire ressortir l'influence de l'intensité d'aimantation $\mathfrak{I}$ du barreau. En désignant en effet par M la masse totale du barreau, par ρ son rayon de gyration autour de l'axe O, on a par définition

$$\rho^2 = \frac{\Sigma mr^2}{M}.$$

En outre, si l'acier qui compose le barreau a une masse égale à m par unité de volume, et si son volume total est représenté par v, on a

$$\Sigma mr^2 = M\rho^2 = mv\rho^2.$$

Enfin le moment magnétique $\mathfrak{M}$ est lié à l'intensité d'aimantation et au volume par la relation

$$\mathcal{M} = \mathfrak{J}v \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{M}h = \mathfrak{J}vh \qquad \text{d'où} \qquad c_1 = \mathfrak{J}vh.$$

Remplaçant dans l'équation qui donne T, les quantités Σmr^2 et c_1 par les valeurs que nous venons de trouver, il vient enfin

$$T = \pi\rho\sqrt{\frac{m}{\mathfrak{J}h}}.$$

Les quantités $\mathfrak{J}$ et h ont une limite qu'il est impossible de dépasser et qu'on peut fixer approximativement à 1500 unités pour $\mathfrak{J}$ et à 20 000 unités pour h. La valeur de m diffère très peu de 8 grammes (masse) par centimètre cube, de sorte que l'extrême limite de T serait égale à

$$\pi\rho\sqrt{\frac{8}{30\,000\,000}}.$$

En supposant que le rayon de gyration ρ de l'aiguille soit égal à 1 centimètre, on trouverait $T < \frac{1}{600}$ de seconde. Mais cette valeur que nous venons d'admettre pour le rayon de gyration est beaucoup trop grande. Car si le barreau affecte par exemple la forme d'un petit cylindre de 10^{mm} de longueur et de 1^{mm} de diamètre, le rayon de gyration n'aurait pas plus de 3^{mm} de longueur, de sorte que la durée d'une oscillation simple serait inférieure à $\frac{1}{2000}$ de seconde.

Si la même aiguille avait une intensité d'aimantation égale à celle des aiguilles de Kohlrausch (800 unités), et si elle était mobile autour d'un axe vertical sous la seule influence du champ magnétique terrestre, la durée d'une oscillation simple s'élèverait à $\frac{2}{10}$ de seconde environ, ce qui paraîtra très rapide comparé à la durée d'oscillations des boussoles ordinaires. Cela tient à deux causes : 1° aux grandes dimensions de ces dernières qui ont un rayon de gyration considérable ; 2° à la petitesse de l'intensité d'aimantation qui n'atteint la valeur trouvée par Kohlrausch que dans les aiguilles de très petites dimensions ($1^{mm},5$ de diamètre).

La conclusion à tirer de tout cela, c'est que si l'on veut construire une boussole très rapide dans ses indications, il faut employer des aiguilles très petites.

218. — Faisons remarquer en passant l'énorme rapidité que peuvent prendre les oscillations, lorsqu'on se sert d'aiguilles pour lesquelles $\mathfrak{J}$ atteint la valeur maxima, condition facile à réaliser, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, en se servant d'une aiguille *en fer doux* placée dans le champ magnétique très puissant, dont nous avons supposé l'intensité égale à 20 000 unités. Cette dernière valeur ne peut être obtenue qu'au moyen d'électro-aimants puissants, dont les pôles A et B (fig. 118) sont munis de pièces de fer doux en forme de coins ayant leurs extrémités DD' très rapprochées et de faible section. Ces extrémités donnent passage à un flux magnétique extrêmement intense dans lequel est placée la petite aiguille de fer doux *ba* mobile autour d'un axe vertical.

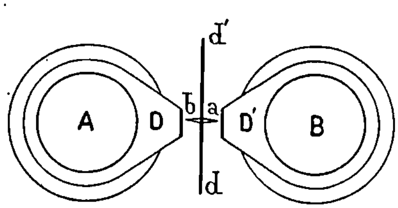


Fig. 118

219. — Pour donner une idée de l'énorme force directrice d'un pareil système, nous allons calculer l'intensité de la force tangentielle développée à l'extrémité de l'aiguille que nous supposerons affecter la forme d'un petit carré de tôle douce, de 1 centimètre de côté

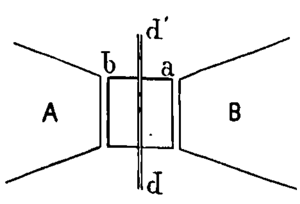


Fig. 119

(fig. 119) et de 1/2 millimètre d'épaisseur, mobile autour de l'axe *dd'*, lorsqu'on écarte cette extrémité de 1^{mm} de sa position d'équilibre.

L'équation

$$C = \mathfrak{M}bh\theta = \mathfrak{J}vh\theta$$

nous donne immédiatement la valeur de cette force. En prenant $\mathfrak{J} = 1\,500$, le volume v de l'aiguille égal (en centimètres cubes) à $1 \times 1 \times \frac{1}{20} = \frac{1}{20}$, $h = 20\,000$; l'angle θ dont on fait dévier l'aiguille a pour expression le rapport de la déviation linéaire (1^{mm}) de l'extrémité de l'aiguille à sa demi-longueur, soit $\frac{1}{5}$. Donc

$$C = 1\,500 \times \frac{1}{20} \times 20\,000 \times \frac{1}{5} = 300\,000 \text{ dynes-centimètres.}$$

Mais le couple C a aussi pour valeur le produit de la force cherchée f, par le bras de levier (5^{mm}) auquel elle est appliquée. Donc

$$300000 = f \times 0{,}5 \qquad \text{d'où} \qquad f = 600000 \text{ dynes}$$

soit environ 612 grammes ! Telle serait la valeur de la force qu'il faudrait appliquer à l'extrémité de l'aiguille pour la dévier d'une quantité aussi petite que un millimètre.

Ce sont ces considérations qui nous ont guidé, lorsque nous avons imaginé en 1879, le galvanomètre à indications rapides, dont l'organe essentiel est une aiguille de *fer doux* plongée dans un champ magnétique puissant et dont la longueur, parallèlement à l'axe, peut être aussi grande qu'on veut sans modifier la durée des oscillations; tandis que la longueur comptée perpendiculairement à l'axe est très restreinte. Cette dernière dimension est en effet la seule qui ait de l'influence sur le rayon de gyration. On obtient ainsi une force directrice aussi grande qu'on veut, qualité précieuse s'il y a des frottements à vaincre, sans modifier la durée des oscillations de l'aiguille qui ont le caractère des vibrations d'un diapason et témoignent ainsi de l'énergie des actions mises en jeu (Séances de la Société Française de Physique, Janvier, Avril 1880, Page 41).

220. — Durée de l'oscillation d'une aiguille en forme de losange. — Il est à peine nécessaire de dire que si on veut réduire à sa dernière limite la durée de l'oscillation de l'aiguille, il ne faut pas lui donner une section constante, comme cela aurait lieu si elle avait la forme d'un cylindre. Il est préférable d'adopter la forme que l'on donne généralement aux aiguilles de boussoles, c'est-à-dire un losange ABCD (fig. 120) dont le plan est perpendiculaire à l'axe de rotation. En désignant par $2a$ la longueur de la diagonale AB,

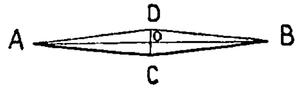


Fig. 120

par $2b$ celle de la diagonale CD, le rayon de gyration ρ est donné par la formule

$$\rho = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{6}}$$

que l'on peut écrire

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{6}}\, a,$$

si b est négligeable par rapport à a. Si au contraire, l'épaisseur n'allait pas en décroissant et qu'elle fût constante dans toute la longueur $2a$ de l'aiguille, on aurait

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{3}}\, a.$$

La durée de l'oscillation correspondante à la forme de losange est donc environ les 0,71 de celle qui correspond à la forme rectangulaire.

§ 5. — ACTION D'UN AIMANT SUR UNE MASSE MAGNÉTIQUE.

221. — Action d'un aimant sur une masse magnétique très éloignée située sur son prolongement. — Soit AB (fig. 121) un aimant dont les pôles A et B sont chargés d'une quantité de magnétisme $+q$ et $-q$, et soit M une masse magnétique contenant une quantité de magnétisme égale à $+q'$ et située sur le prolongement de la droite AB qui passe par les deux pôles de l'aimant. Nous allons chercher la valeur de la résultante des actions mutuelles de la masse M et de l'aimant AB, résultante qui est évidemment dirigée suivant la droite ABM.

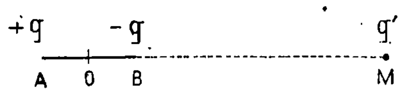


Fig. 121

La force exercée par q sur q', a pour valeur,

$$\frac{qq'}{\overline{AM}^2}.$$

La force exercée par $-q$ sur q'

$$-\frac{qq'}{\overline{BM}^2}.$$

Mais

$$AM = MO + OA, \qquad BM = MO - OB,$$

de sorte que si l'on désigne par x la distance du point neutre O de l'aimant à la masse M, et par λ la longueur $AO = OB$, il vient pour la force totale développée entre l'aimant et la masse M

$$f = \frac{qq'}{(x+\lambda)^2} - \frac{qq'}{(x-\lambda)^2} = -\frac{4\lambda x}{(x^2-\lambda^2)^2}qq'$$

que l'on peut écrire

$$f = -\frac{2}{x^3\left(1 - \frac{2\lambda^2}{x^2} + \frac{\lambda^4}{x^4}\right)} \cdot 2\lambda qq'.$$

Si le rapport $\frac{\lambda}{x}$ est suffisamment petit pour que l'on puisse négliger les puissances de ce rapport supérieures à la première, l'expression se simplifie et devient

$$f = -\frac{2 . 2\lambda q}{x^3}q'.$$

On reconnaît ici la présence de la quantité $2\lambda q$ ou moment magnétique du barreau AB. En le désignant par $\mathcal{M}$, il vient enfin

$$f = -\frac{2\mathcal{M}}{x^3}q'.$$

Ainsi la résultante cherchée est proportionnelle au moment magnétique de l'aimant et en raison inverse du cube de la distance.

222. — Supposons maintenant que, à la quantité q', nous adjoignions une seconde quantité $-q'$ égale et de signe contraire située sur la droite ABM (fig. 122), et à une distance $2\lambda'$ de la quantité q', de façon à remplacer la masse M par un aimant rectiligne doué de deux pôles égaux et contraires. Le calcul à faire pour trouver l'intensité de la force qui agit sur chacun des aimants se conduit abso-

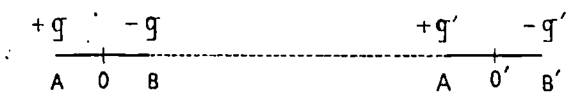


Fig. 122

lument de la même manière. L'intensité de la force f, exercée par le pôle A', contenant une quantité q' de magnétisme, a pour valeur, comme nous venons de le voir

$$f = -\frac{2\mathfrak{M}}{x^3} q'.$$

L'intensité de la force f', développée entre AB et le pôle B', s'obtiendrait immédiatement en changeant q' en $-q'$ et x en $x + 2\lambda'$, ce qui donne

$$f' = \frac{2\mathfrak{M}}{(x + 2\lambda')^3} q'.$$

La somme algébrique de ces deux forces est, après avoir supprimé tous les termes qui tendent vers zéro par rapport à ceux que l'on conserve lorsque le rapport $\frac{x}{\lambda}$ va en augmentant indéfiniment,

$$f + f' = -\frac{12\mathfrak{M}\lambda' q'}{x^4},$$

ou en remarquant que $2\lambda' q'$ est le moment magnétique du second aimant A'B'

$$f + f' = -\frac{6\mathfrak{M}\mathfrak{M}'}{x^4}.$$

On voit donc que la force est attractive ou répulsive suivant que les moments magnétiques sont dirigés dans le même sens ou en sens contraire (car la force attractive est affectée du signe *moins* et la force répulsive du signe *plus*), et qu'elle est en raison inverse de la 4^{me} puissance de la distance des centres des aimants, à la condition, bien entendu, que cette distance soit grande par rapport à λ.

223. — Les deux derniers problèmes que nous venons de traiter montrent que, même lorsqu'il s'agit de calculer, non pas le *moment* de la force exercée par deux aimants l'un sur l'autre, mais simplement l'intensité de cette force, leur *moment magnétique* intervient encore seul dans la valeur finale de la force cherchée. C'est donc un élément de grande importance et on comprend parfaitement qu'il ait été choisi comme définissant un aimant, beaucoup mieux qu'on ne pourrait le faire en donnant la valeur des quantités q et $-q$ de magnétisme de chaque pôle, d'autant plus que les pôles eux-mêmes sont souvent impossibles à déterminer et sont remplacés par des *zônes* polaires. Le moment magnétique, par l'indécision dans laquelle il laisse, relativement à la situation et à l'intensité des pôles, convient beaucoup mieux à notre ignorance de la véritable nature du magnétisme que les autres grandeurs magnétiques. Aussi, les théories mathématiques les plus récentes de la constitution des aimants reposent-elles exclusivement sur l'emploi du moment magnétique comme quantité fondamentale.

§ 6. — ACTION DES AIMANTS SUR LES AIMANTS.

224. — Calcul du moment des actions mutuelles de deux aimants situés dans le même plan. — Nous allons traiter maintenant un autre problème très important pour la mesure des moments magnétiques. C'est le calcul du moment des actions mutuelles de deux aimants situés dans le même plan, dont l'un est fixe tandis que l'autre est mobile autour d'un axe passant par son centre et perpendiculaire

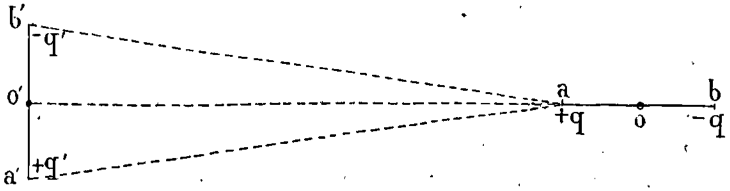


Fig. 123

au plan des deux aimants. Nous supposerons enfin que l'aimant mobile $a'b'$ (fig. 123) est perpendiculaire à la droite O'O qui joint son centre à celui de l'aimant fixe ab dont les pôles a et b sont aussi placés sur cette droite.

La force attractive exercée par a sur b', a pour valeur

$$\frac{qq'}{\overline{ab'}^2} = f.$$

Sa composante perpendiculaire à l'aimant $a'b'$, est $f \cos \widehat{b'aO'}$. Le moment de cette composante est

$$f \cos \widehat{b'aO'} \times \overline{O'b'} = \frac{\overline{O'b'} \cdot \cos \widehat{b'aO'}}{\overline{ab'}^2} qq'.$$

Remplaçons dans cette expression $O'b'$ par λ', $\cos b'aO'$ par sa valeur $\frac{O'a}{\overline{ab'}}$, il vient pour la valeur du moment de f.

$$\frac{\lambda' . \overline{O'a}}{\overline{ab'}^3} qq'.$$

Mais si nous désignons par x la distance OO' et par λ la longueur $\overline{Oa}$, nous aurons, en remarquant que

$$\overline{ab'} = \sqrt{(x-\lambda)^2 + \lambda'^2},$$

$$\textit{Moment de } f = \frac{x-\lambda}{[(x-\lambda)^2 + \lambda'^2]^{\frac{3}{2}}} qq'\lambda'.$$

On aurait de même, pour le moment de la force répulsive exercée par a sur a', en remarquant que ce moment est de même signe que le précédent puisqu'il tend à faire tourner l'aimant mobile $a'b'$ dans le même sens,

Moment de la force dirigée suivant aa' = *Moment de* f.

D'où,

$$\textit{Moment total produit par le pôle } a = \frac{(x-\lambda)q}{[(x-\lambda)^2 + \lambda'^2]^{\frac{3}{2}}} \times 2\lambda' q'.$$

Pour trouver le moment total produit par le pôle b, il suffit de changer dans le second membre $-\lambda$ en $+\lambda$ et de changer le signe du moment ; on a alors

$$\textit{Moment total produit par le pôle } b = -\frac{(x+\lambda)q}{[(x+\lambda)^2 + \lambda'^2]^{\frac{3}{2}}} \times 2\lambda' q'.$$

La somme algébrique de ces deux moments donne alors le moment total exercé par l'aimant fixe ab sur l'aimant mobile $a'b'$.

Pour faire cette addition sans arriver à une expression extrêmement compliquée, nous mettrons les deux dénominateurs sous la forme suivante

$$[(x-\lambda)^2+\lambda'^2]^{\frac{3}{2}} = x^3\left[1-\frac{2\lambda}{x}+\frac{\lambda^2+\lambda'^2}{x^2}\right]^{\frac{3}{2}}$$

$$[(x+\lambda)^2+\lambda'^2]^{\frac{3}{2}} = x^3\left[1+\frac{2\lambda}{x}+\frac{\lambda^2+\lambda'^2}{x^2}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Supposons que la demi-distance λ' des pôles de l'aimant mobile $a'b'$ soit assez petite, en comparaison de la distance OO' des centres des deux aimants, pour que l'on puisse négliger le carré du rapport $\frac{\lambda'}{x}$ ou $\frac{\lambda'^2}{x^2}\cdot$ Alors, les deux dénominateurs pourront s'écrire

$$x^3\left(1-\frac{\lambda}{x}\right)^3 \qquad \text{et} \qquad x^3\left(1+\frac{\lambda}{x}\right)^3$$

et la somme algébrique des deux moments deviendra

$$\left[\frac{x\left(1-\frac{\lambda}{x}\right)}{x^3\left(1-\frac{\lambda}{x}\right)^3}-\frac{x\left(1+\frac{\lambda}{x}\right)}{x^3\left(1+\frac{\lambda}{x}\right)}\right]\times 2\lambda' qq'$$

ou encore

$$\frac{2\lambda' qq'}{x^2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{x}\right)^2}-\frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{x}\right)^2}\right) = \frac{2\lambda' qq'}{x^2}\cdot\frac{\frac{4\lambda}{x}}{\left(1-\frac{\lambda^2}{x^2}\right)^2}.$$

Si nous négligeons le carré du rapport $\frac{\lambda}{x}$, comme nous avons négligé celui du rapport $\frac{\lambda'}{x}$, il vient finalement

$$\textit{Moment total appliqué à } \ a'b' = \frac{8\lambda\lambda' qq'}{x^3},$$

ou, en désignant par $\mathcal{M}$ et par $\mathcal{M}'$ les moments magnétiques des deux aimants ab, $a'b'$ et par C' le moment mécanique (dynes-centimètres) appliqué à $a'b'$,

$$C' = \frac{2\mathcal{M}\mathcal{M}'}{x^3}.$$

Une remarque intéressante que nous devons faire à l'occasion de ce problème, consiste en ce que si, au lieu de calculer le moment des forces appliquées à l'aimant $a'b'$, on calcule celui des forces appliquées à l'aimant ab considéré comme mobile autour de son centre O, on trouve une valeur deux fois moindre que celle de C'. On a donc, en désignant le moment mécanique appliqué à ab par C,

$$C = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{M}'}{x^3}.$$

Si on voulait calculer *rigoureusement* la valeur des couples C et C', il ne serait plus permis de négliger les valeurs $\frac{\lambda^2}{x^2}$ et $\frac{\lambda'^2}{x^2}$ et on serait obligé alors de déterminer λ et λ'. Nous verrons, en parlant des procédés et instruments de mesures magnétiques, comment cette détermination peut être faite.

225. — Applications numériques. — Avant d'appliquer à quelques exemples les formules simplifiées que nous venons de donner, il est nécessaire de nous faire une idée exacte de l'erreur relative commise en les substituant aux formules rigoureuses. Car, la mesure des moments magnétiques et le calcul du moment mécanique développé par un aimant fixe sur un aimant mobile jouent, comme nous le verrons, un rôle considérable dans la détermination de l'unité fondamentale de courant, l'Ampère, employée dans l'industrie électrique, et on ne saurait apporter trop de rigueur aux méthodes expérimentales et aux calculs sur lesquels repose la connaissance exacte d'un élément aussi important. Il ne faut pas se dissimuler en effet que les unités électriques industrielles ne peuvent pas, comme les unités de longueur, de masse et de temps, être déterminées d'abord et reproduites ensuite, pour les usages industriels, avec une précision qui n'a pour ainsi dire pas de limite. On assure que l'unité de résistance est maintenant connue avec une erreur relative certainement inférieure à $\frac{1}{1000}$. Mais personne n'oserait donner la même assurance pour la mesure de l'unité de potentiel et encore moins pour celle de l'unité d'intensité, qui sont non seulement extrêmement difficiles à déterminer à cause de la faiblesse des actions mises en jeu, mais encore ne se prêtent nullement à la reproduction d'étalons faciles à contrôler.

Aussi la science électrique est-elle, au point de vue de la précision relative des mesures, dans un état d'infériorité considérable par rapport aux autres branches de la physique.

Ces observations ont pour but de faire comprendre que la discussion des formules simplifiées de l'action mutuelle de deux aimants n'est pas un simple exercice d'analyse et qu'elle s'impose en raison de l'importance du sujet.

L'expression rigoureuse du couple total produit par l'aimant fixe *ab* sur l'aimant mobile *a'b'*, est donnée par la formule

$$C' = \left[\frac{x-\lambda}{[(x-\lambda)^2+\lambda'^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{x+\lambda}{[(x+\lambda)^2+\lambda'^2]^{\frac{3}{2}}}\right] \times 2\lambda' qq'$$

que l'on peut écrire ainsi

$$C' = \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{x}{\lambda}-1}{\left(1-\frac{2\lambda}{x}+\frac{\lambda^2+\lambda'^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\frac{x}{\lambda}+1}{\left(1+\frac{2\lambda}{x}+\frac{\lambda^2+\lambda'^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right]\frac{4\lambda\lambda' qq'}{x^3}.$$

Mais le facteur $4\lambda\lambda' qq'$ n'est autre chose que le produit des moments magnétiques des deux aimants, de sorte que la valeur de C' peut s'écrire

$$C' = \frac{1}{2}\, K \times 2\mathfrak{M}.\mathfrak{M}',$$

K représentant la somme des deux termes compris dans la parenthèse.

Si la formule simplifiée était exacte, la somme de ces deux termes devrait être égale au nombre 4. Nous allons voir si cette condition est remplie et calculer la valeur exacte de K :

1° lorsque $\frac{\lambda}{x} = \frac{\lambda'}{x} = \frac{1}{10}$.

On trouve alors

$$K = 3{,}9576\,;$$

2° pour $\frac{\lambda}{x} = \frac{\lambda'}{x} = \frac{1}{20}$

on trouve $K = 3{,}990.$

Le premier nombre diffère de 4 d'un peu plus de un centième de sa propre valeur et le second de $\frac{1}{400}$.

Il sera donc prudent de placer les aimants supposés égaux, à une distance d'au moins quinze fois leur demi-longueur, si on veut n'avoir pas à tenir compte de λ, tout en ayant une précision supérieure au centième.

226. — Si les rôles des deux aimants étaient intervertis, c'est-à-dire si l'aimant $a'b'$ était fixe et l'aimant ab mobile, des calculs absolument semblables à ceux que nous avons développés, conduiraient à la formule suivante, dans laquelle aucun terme n'a été négligé

$$C = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\left[1 - \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^2} + \frac{\lambda'^2}{x^2}\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left[1 + \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^2} + \frac{\lambda'^2}{2}\right]^{\frac{3}{2}}}\right] \times \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{M}'}{x^3}.$$

Si nous prenons successivement, comme dans l'exemple précédent, $\lambda = \lambda' = 1$ et $x = 10$ ou $x = 20$; nous trouvons, pour $x = 10$

$$C = 1{,}044\,\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{M}'}{x^3}$$

et pour $x = 20$

$$C = 1{,}0112\,\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{M}'}{x^3}.$$

On voit que, avec cette disposition des aimants, le moment des forces appliquées à l'aimant mobile est sensiblement deux fois moindre qu'avec la disposition précédente et que, en outre, l'erreur relative commise sur la valeur de ce moment, en considérant le rapport $\frac{\lambda}{x}$ comme négligeable, est quatre fois plus forte pour des valeurs égales de ce rapport. Il résulte donc de ces deux circonstances que la disposition dans laquelle l'axe de rotation de l'aimant mobile est situé sur le prolongement de la ligne des pôles de l'aimant fixe, les lignes polaires des deux aimants étant rectangulaires entre elles, est préférable à l'autre.

227. — Il existe enfin une troisième disposition des aimants qui ne paraît pas avoir été employée, bien qu'elle présente une grande symétrie et permette d'employer des aimants courbés suivant un arc de cercle ou une demi-circonférence, comme on le voit dans les figures perspectives (fig. 124), et même de les rapprocher jusqu'à ce que leurs quatre pôles soient dans le même plan (fig. 125).

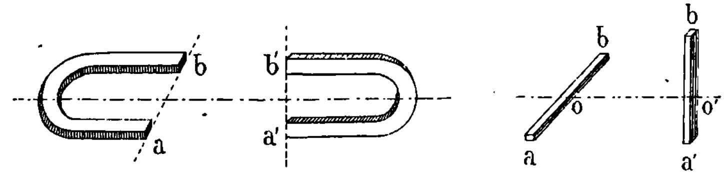


Fig. 124

Les couples développés sont les mêmes sur chaque aimant, et on peut rapprocher leurs pôles beaucoup plus que dans les dispositions précédentes sans risquer de troubler la distribution du magnétisme dans chacun d'eux. *Si on les suppose égaux* et si on désigne par x la distance OO′ des milieux des droites polaires de chaque aimant,

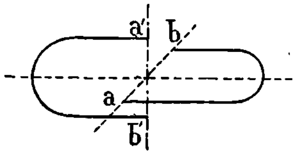


Fig. 125

par 2λ la distance polaire (c'est-à-dire la longueur de la droite qui joint les deux pôles d'un même aimant, quelle que soit sa forme), le couple exercé sur chacun d'eux, a pour valeur

$$C = \frac{\mathcal{M}^2}{(x^2 + 2\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Il est à peine nécessaire de dire que l'on ne doit pas rapprocher outre mesure les pôles, jusqu'à les placer tous les quatre dans le même plan, parce que les pôles n'étant pas dans la réalité des points mathématiques, les calculs que nous avons faits deviendraient inexacts.

Il paraît toutefois possible, en formant les aimants avec des aiguilles d'acier cylindriques d'un faible diamètre, d'une grande longueur et courbés en demi-circonférence, de rapprocher les pôles fixes des pôles mobiles beaucoup plus qu'on ne le fait habituellement, et d'augmenter par conséquent beaucoup, le couple moteur, sans que les formules cessent d'être applicables, ce qui serait un avantage très réel.

228. — **Force portante des aimants.** — Dans tout ce qui précède, nous nous sommes exclusivement occupé des actions mutuelles de deux aimants séparés par une distance que l'on puisse considérer comme grande par rapport à leurs dimensions. Au point de vue des applications aux mesures électriques, cette étude est certainement très importante comme nous le verrons en traitant de l'électro-magnétisme ; mais il est un autre genre d'action produite par les aimants et qui présente aussi un certain intérêt, c'est la force qui se développe au contact des pôles contraires de deux aimants ou d'un aimant et d'un morceau de fer aimanté par son contact avec l'aimant contre lequel il est appliqué.

Cette action a reçu le nom de *force portante* ou *force portative* et pendant longtemps elle a, pour ainsi dire, seule captivé l'attention des anciens physiciens qui attachaient une grande importance à la production d'aimants capables de porter un grand nombre de fois leur poids propre. Il est facile de voir d'ailleurs que c'était là une manière très erronée d'apprécier la puissance d'un aimant, et qu'il ne peut exister de rapport défini entre son poids et sa force portante, sans avoir besoin, pour comprendre cela de se livrer à des calculs plus ou moins savants. Si on superpose en effet une série d'aimants rectilignes identiques (comme nous l'avons déjà fait [N° 211, fig. 114] en parlant des moments magnétiques), de façon que chacun d'eux touche ceux entre lesquels il est compris par des pôles de nom contraire aux siens, tous les pôles intermédiaires se neutralisent et il ne reste de magnétisme libre qu'aux extrémités de cet ensemble. Or, il est clair que cette quantité de magnétisme ne dépend pas du nombre des aimants superposés ; l'attraction qu'elle exercera sur une quantité égale de magnétisme contraire (force portante), est donc également indépendante de ce nombre, tandis que le poids de l'ensemble lui est proportionnel. On peut donc pressentir que le rapport de la force portante d'un aimant à son poids, est d'autant plus grand que l'aimant est plus petit, et c'est en effet ce qui a lieu.

229. — **Attraction exercée au contact d'un aimant et d'une armature en fer doux.** — Ce problème est de même nature que celui de l'attraction de deux plans électrisés chargés de quantités d'électricité égales et de signe contraire par unité de surface, problème que nous avons déjà résolu (121). Les pôles A et B (fig. 126) de l'aimant ACB étant placés en *contact intime* avec l'armature en fer doux ADB, l'expérience apprend que si cette armature a des dimensions suffisantes (longueur, largeur, épaisseur), les pôles de l'aimant ne paraissent plus contenir de magnétisme libre en quantité notable, lorsque le contact de l'armature et de l'aimant est devenu parfait. On conclut de là que l'armature en fer s'est elle-même transformée en aimant, et que les deux pôles de ce nouvel aimant contiennent des quantités de magnétisme égales et contraires aux quantités de magnétisme répandues sur les pôles de l'aimant ACB et situées à une distance extrêmement petite de ces derniers. On se trouve donc ainsi abso-

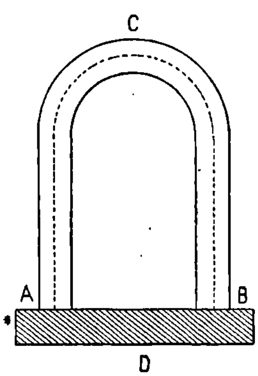


Fig. 126

lument dans les conditions du problème rappelé plus haut, avec cette différence que les quantités d'électricité sont ici remplacées par des quantités de magnétisme. Les unités de quantité électrique et magnétique ayant la même définition, et les lois qui régissent les effets mécaniques de ces deux agents étant les mêmes, nous pouvons appliquer immédiatement l'équation qui donne la valeur de l'effort exercé sur un élément ds de surface électrisée, par un plan parallèle à cet élément, situé à une très-petite distance de lui et contenant par unité de surface, une quantité d'électricité égale mais de signe contraire. On a donc, en appelant δ la quantité de magnétisme répandu sur un centimètre carré de la section polaire de l'aimant ; ds' un élément de cette surface, et df_n la force attractive développée entre cet élément et la surface entière de l'armature chargée de magnétisme contraire,

$$df_n = 2\pi\delta^2 ds'.$$

Pour la surface entière s' d'un pôle, on aura donc, la densité magnétique δ étant constante,

$$f_n = 2\pi\delta^2 s'.$$

Mais en appelant q la quantité de magnétisme existant à chaque pôle, on a

$$\delta = \frac{q}{s'}$$

donc, supprimant l'indice de f_n et l'accent de s', on a

$$f = \frac{2\pi q^2}{s} \qquad \text{d'où} \qquad q = \sqrt{\frac{fs}{2\pi}}.$$

Cette première équation permet donc de trouver la quantité de magnétisme existant à chaque pôle, quand on connaît la section polaire et l'effort $2f$ qu'il faut appliquer au milieu D de l'armature pour l'arracher complètement de l'aimant.

Il est facile, connaissant q, de trouver le moment magnétique et l'intensité d'aimantation de l'aimant ACB et de l'armature ADB considérée comme un aimant.

230. — Calcul du moment magnétique et de l'intensité d'aimantation. — Le moment magnétique de l'aimant ACB doit être calculé en supposant l'aimant développé en ligne droite ; sa longueur serait alors égale à celle de la ligne représentée en pointillé et le moment magnétique aurait pour valeur $2lq$, $2l$ désignant la longueur de cette ligne ponctuée.

On aurait alors

$$\mathcal{M} = 2l\sqrt{\frac{fs}{2\pi}},$$

d'où

$$f = \frac{2\pi\mathcal{M}^2}{4l^2s},$$

ou, en remarquant que le volume de l'aimant est égal à $2ls$ et en le désignant par u,

$$f = \frac{2\pi\mathcal{M}^2}{2lu}.$$

Mais nous savons que l'intensité d'aimantation $\mathfrak{J}$ est égale à $\frac{\mathcal{M}}{u}$, d'où

$$\mathcal{M} = \mathfrak{J}u = 2\mathfrak{J}ls.$$

Remplaçant $\mathcal{M}$ par cette valeur, nous avons

$$f = 2\pi\mathfrak{J}^2s \qquad \text{ou} \qquad \frac{f}{s} = 2\pi\mathfrak{J}^2,$$

ou enfin

$$\mathfrak{J} = \sqrt{\frac{f}{2\pi s}}.$$

Cette dernière équation permet de trouver la force portante d'un barreau aimanté, par une unité de surface de la section polaire, lorsqu'on connaît son intensité d'aimantation ou réciproquement.

C'est par ce procédé que Joule, Henry, Sturgeon, Wilde, ont déterminé la valeur maxima de $\mathfrak{J}$ pour le fer doux. Joule avait trouvé qu'un électro-aimant en fer doux pouvait, étant aimanté par les moyens les plus énergiques, supporter 19 340 grammes par centimètre carré de section polaire. Sachant qu'un gramme vaut 981 dynes, la formule précédente qui donne la valeur de $\mathfrak{J}$ en fonction de celle de $\frac{f}{s}$ devient

$$\mathfrak{J} = \sqrt{19340 \times 981 \times \frac{1}{2\pi}} = 1740.$$

Mais les autres expérimentateurs que nous venons de citer ont trouvé des nombres différents, tenant probablement à la nature du fer. Henry a trouvé pour $\frac{f}{s}$ la valeur 13 360 grammes par centimètre carré ; Sturgeon 17 930 grammes et Nesbit 22 290 grammes. Enfin il y a peu de temps, M. Henry Wild, en employant des moyens d'aimantation d'une extrême énergie, est parvenu à obtenir pour $\frac{f}{s}$ le nombre 26 790 grammes par centimètre carré, ce qui donne pour l'intensité d'aimantation dont le fer doux est capable, la valeur $\mathfrak{J} = 2045$, nombre supérieur d'un tiers à celui que Joule croyait être le maximum.

En réalité, il n'y a probablement pas de maximum dans le sens absolu du mot, mais un accroissement de plus en plus lent de $\frac{f}{s}$, à mesure qu'on augmente l'énergie des forces magnétisantes.

231. Autre démonstration de la formule $f = 2\pi\delta^2 s$. — La formule

$$\frac{f}{s} = 2\pi\delta^2$$

dont nous venons de nous servir, est assez importante pour que nous la confirmions par une autre démonstration. Nous avons vu (121) que l'attraction mutuelle des deux armatures d'un condensateur plan, a pour expression

$$f = \frac{q^2}{2c^2} \cdot \frac{dc}{dx},$$

q étant la quantité d'électricité répartie sur chaque armature, c la capacité et x la distance des deux armatures. D'autre part on a, en appelant s la surface de chaque armature,

$$c = \frac{s}{4\pi x} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dc}{dx} = -\frac{s}{4\pi x^2}$$

et enfin

$$f = -\frac{2\pi q^2}{s}.$$

Supprimons le signe *moins* qui indique que la force est attractive, nous trouvons

$$f = \frac{2\pi q^2}{s} = \frac{2\pi q^2}{s^2}\, s\,;$$

mais on a

$$\frac{q}{s} = \delta.$$

Donc enfin

$$f = 2\pi\delta^2 s,$$

formule identique à celle que nous avons obtenue plus haut et qui, rapprochée de la formule $f = 2\pi\mathfrak{J}^2 s$, donne

$$\delta = \mathfrak{J}.$$

232. — Remarques. — L'effort $2f$ nécessaire pour arracher l'armature de fer doux permet, comme nous venons de le démontrer, de trouver le moment magnétique et l'intensité d'aimantation de l'aimant ACB *pendant que ses pôles sont réunis par l'armature de fer*. Mais il ne faudrait pas regarder les nombres ainsi trouvés comme s'appliquant sans restriction lorsque l'armature est enlevée, car c'est un fait d'expérience que les aimants dont les pôles *sont armés*, éprouvent un accroissement graduel de puissance qui peut même devenir considérable lorsque le contact dure très longtemps.

On doit donc considérer les nombres obtenus par l'arrachement, comme étant des maximums en ce qui concerne l'aimant, et ils devront toujours être contrôlés par d'autres procédés que nous ferons connaître dans le chapitre qui traite des mesures magnétiques.

Nous avons dit que l'armature n'est attirée que parce qu'elle-même se transforme en aimant, en vertu des lois de l'induction magnétique que nous étudierons dans le chapitre suivant. En la considérant comme telle, on peut lui appliquer toutes les formules que nous venons de développer et calculer son moment magnétique et son intensité d'aimantation, mais en tenant compte de ce fait que dans l'armature, la distance des pôles est plus petite que sa longueur, tandis que dans l'aimant, la distance des pôles est, *lorsqu'il est armé*, égale à la longueur de cet aimant supposé développé en ligne droite et transformé en barreau rectiligne.

§ 7. — PROPRIÉTÉS DES FEUILLETS MAGNÉTIQUES.

233. — **Définition**. — Dans tous les calculs précédents, relatifs au moment magnétique, nous avons implicitement admis l'existence de

pôles ou de zônes polaires assez étroites pour que, à une certaine distance de l'aimant, on puisse sans erreur sensible les considérer comme se réduisant à des points. Mais il y a certains problèmes dans lesquels cette hypothèse ne saurait être admise, et on a été ainsi conduit à l'étude des propriétés de ce qu'on appelle un *Feuillet magnétique*.

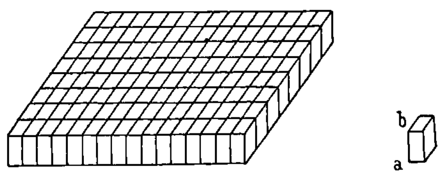


Fig. 127

Soit un barreau *ab* très petit, de forme parallélépipédique et dont les pôles coïncident avec les extrémités. En plaçant à côté les uns des autres un certain nombre de barreaux semblables (fig. 127), nous aurons constitué un feuillet magnétique dont les deux faces polaires contiennent des quantités de magnétisme égales, de signe contraire, et proportionnelles au nombre des barreaux, c'est-à-dire à la surface du feuillet. Si on désigne par $\mathfrak{J}$ (symbole déjà employé pour représenter l'intensité d'aimantation) la quantité de magnétisme existant par unité de *surface* (1) en un point a de la face supérieure AA′ du feuillet (fig. 128), le point b situé sur la face inférieure BB′, à l'intersection de la perpendiculaire commune aux deux faces, con-

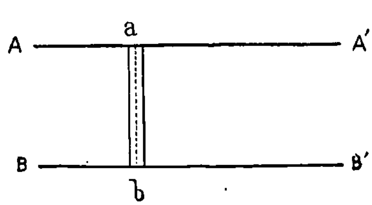


Fig. 128

tiendra une quantité de magnétisme égale à $-\mathfrak{J}$ par unité de surface, et le produit $\lambda\mathfrak{J}$ de la *densité magnétique superficielle* $\mathfrak{J}$ par la

(1) Voir N° 231 la démonstration de l'égalité de $\mathfrak{J}$ et de la densité magnétique.

distance $\overline{ab} = \lambda$ des deux faces, sera ce qu'on appelle la *puissance magnétique* du feuillet au point considéré. On la désigne par la lettre Φ. On voit que ce produit n'est autre chose que le moment magnétique d'un barreau de section égale à l'unité, de longueur *ab*, et dont les pôles contiendraient une quantité de magnétisme égale à $\mathfrak{J}$ unités. Lorsque le produit $\lambda\mathfrak{J}$ est le même pour tous les points du feuillet, celui-ci est dit *simple*. Il est d'ailleurs à peine besoin de dire que les deux faces opposées du feuillet ne sont pas nécessairement planes et que le contour du feuillet est de forme absolument quelconque.

234. — Potentiel d'un Feuillet magnétique. — Proposons-nous de trouver le potentiel d'un feuillet magnétique, c'est-à-dire le travail développé par l'attraction ou la répulsion exercée par ce feuillet, sur une masse magnétique m égale à l'unité et amenée d'une très grande distance jusqu'à la position M. La valeur de ce travail s'appelle, comme nous le savons, le potentiel du point M.

Soient AA′, BB′ (fig. 129) les deux faces infiniment voisines d'un feuillet magnétique contenant des quantités de magnétisme égales et de signe contraire. Considérons deux éléments de surface identique ds, ds', infiniment petits et dont le contour est déterminé par une droite décrivant une courbe fermée quelconque, en restant parallèle à la normale O′ON commune aux deux faces.

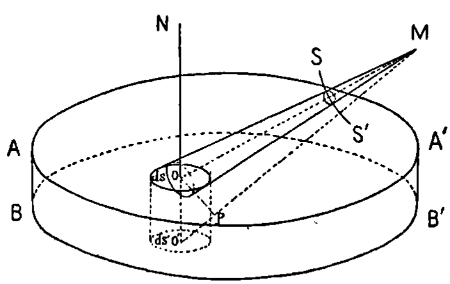


Fig. 129

Ces deux éléments contiennent des quantités de magnétisme respectivement égales à $+\mathfrak{J}ds$ et $-\mathfrak{J}ds$. En désignant par r et r' les distances OM et O′M des centres de gravité de ds et de ds' au point M, le potentiel de chacun de ces éléments pris par rapport à M, aura pour valeur (203, théorème I)

$$+\frac{\mathfrak{J}ds}{r}, \qquad -\frac{\mathfrak{J}ds}{r};$$

le potentiel résultant sera donc, en posant $r' = r + dr$, donné par la formule

$$dV = \mathfrak{J}ds\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+dr}\right) = \mathfrak{J}ds\,\frac{dr}{r^2}.$$

Mais, en désignant par λ la distance OO' des deux éléments ds et ds', et par θ l'angle de MO avec la normale ON, on a

$$dr = \overline{O'P} = \overline{OO'}\cos\theta = \lambda\cos\theta \qquad \text{d'où} \qquad dV = \mathfrak{J}ds\,\frac{\lambda\cos\theta}{r^2},$$

d'où remplaçant $\mathfrak{J}\lambda$ (puissance magnétique du feuillet) par le symbole Φ, on a

$$dV = \Phi\,\frac{ds\cos\theta}{r^2}.$$

Pour transformer cette expression en une autre d'une interprétation géométrique plus facile, décrivons du point M comme centre une sphère de rayon $MS = MS' = 1$, et prenons en même temps le point M comme sommet d'un cône oblique dont les génératrices s'appuient sur le contour de l'élément ds. Menons par le point O' un plan perpendiculaire à l'axe OM du cône, et cherchons à évaluer l'aire interceptée par le cône sur la sphère et sur ce plan.

L'aire interceptée sur la sphère de rayon 1 s'appelle, comme nous le savons, l'*angle solide* du cône au point M ou encore l'*angle sous lequel on voit* un contour quelconque (tel que celui de l'élément ds) sur lequel s'appuient toutes les génératrices du cône. Ce cône étant d'ouverture infiniment petite, la surface sphérique interceptée en SS' et la surface plane interceptée par le plan OP normal à OM, peuvent être considérées comme appartenant à deux sphères de même centre M et possèdent par conséquent des aires proportionnelles au carré de leurs rayons MS et MO. On a donc

$$\frac{\textit{section suivant } \mathrm{OP}}{\textit{section suivant } \mathrm{SS'}} = \frac{\overline{OM}^2}{\overline{MS}^2} = \frac{r^2}{1}.$$

L'angle des génératrices entre elles étant infiniment petit, on peut les considérer comme parallèles, et admettre que l'aire de la section faite suivant OP est la projection orthogonale de l'aire de l'élément ds sur un plan perpendiculaire à OM. On a donc :

$$\textit{Aire de la section suivant } \overline{\mathrm{OP}} = ds \cos \theta,$$

de sorte qu'en représentant par $d\omega$ l'aire interceptée sur la sphère de rayon $\mathrm{SS}' = 1$

$$\frac{\textit{section suivant } \mathrm{OP}}{\textit{section suivant } \mathrm{SS}'} = \frac{ds \cos \theta}{d\omega} = \frac{r^2}{1},$$

d'où

$$\frac{ds \cos \theta}{r^2} = d\omega,$$

et enfin

$$d\mathrm{V} = \Phi d\omega.$$

Si la puissance Φ du feuillet est la même dans tous ses points, on peut intégrer immédiatement et écrire la valeur $\mathrm{V} - \mathrm{V}'$ de la différence de potentiel

$$\mathrm{V} - \mathrm{V}' = \Phi\omega$$

ou en remplaçant Φ par sa valeur $\mathfrak{J}\lambda$

$$\mathrm{V} - \mathrm{V}' = \mathfrak{J}\lambda\omega.$$

Si la masse-unité m est d'abord située à une très grande distance, l'angle solide ω est très petit ; mais il grandit à mesure qu'elle se rapproche de la face AA′ du feuillet et devient égal à 2π lorsqu'elle se confond avec AA′, quelle que soit la forme du contour du feuillet.

Le travail total *qu'il faut appliquer à la masse-unité, pour l'amener d'une très grande distance sur la face* AA′ *chargée de magnétisme de même signe, a donc pour valeur*

$$\mathrm{V} = 2\pi\lambda\mathfrak{J}.$$

235. — Potentiel d'un feuillet magnétique déduit du potentiel électrique. — Contradiction apparente. — C'est surtout quand nous traiterons de l'Électro-magnétisme et de l'Électrodynamique, que l'on verra la simplification apportée dans la solution de beaucoup de problèmes par la considération des feuillets magnétiques. Mais nous pouvons dès à présent l'appliquer à une question que nous avons déjà résolue par d'autres moyens, et la comparaison des résultats obtenus nous permettra de nous faire dès à présent une opinion sur les avantages de la nouvelle méthode et de montrer qu'il ne faut pas l'appliquer sans certaines précautions.

Nous avons vu que la capacité C d'un condensateur, la quantité Q d'électricité répartie sur chaque armature et la différence de potentiel V des deux armatures, sont liées par l'équation

$$Q = CV \qquad \text{d'où} \qquad V = \frac{Q}{C}.$$

Lorsque le condensateur est formé de deux plans parallèles de surface S, séparés par une lame d'air d'épaisseur très faible λ, on a

$$C = \frac{S}{4\pi\lambda},$$

d'où on tire, en remplaçant C par cette valeur dans l'équation qui donne V

$$V = 4\pi\lambda \frac{Q}{S}.$$

Or le rapport $\frac{Q}{S}$ est précisément la quantité d'électricité dont est chargée l'unité de surface de chaque armature, et qui correspond dans le feuillet magnétique, à la *densité magnétique* que nous avons désignée par $\mathfrak{J}$.

L'identité algébrique des lois du magnétisme et de celles de l'électricité statique, identité que nous avons signalée plus haut avec insistance, nous autorise donc à écrire en remplaçant $\frac{Q}{S}$ par $\mathfrak{J}$

$$V = 4\pi\lambda\mathfrak{J},$$

tandis que nous venons de trouver

$$V = 2\pi\lambda\mathfrak{J}.$$

Il est nécessaire d'expliquer cette contradiction.

Pour cela reportons-nous à la démonstration de la formule relative au condensateur sphérique (79), et remarquons que la valeur de V est obtenue en amenant la masse-unité d'une très grande distance jusqu'à la sphère intérieure et en lui faisant traverser l'intervalle compris entre les deux sphères. Or dans le condensateur sphérique, cet intervalle est la seule région de l'espace dans laquelle la masse-unité développe un travail mécanique, l'action mécanique extérieure, d'un condensateur à sphère concentrique, étant nulle.

Nous avons ainsi trouvé (82) l'équation

$$Q_1 = \frac{V}{4\pi\delta} \qquad \text{ou} \qquad V = 4\pi\delta Q_1,$$

dans laquelle δ représente la distance des deux armatures (λ dans le feuillet magnétique), et Q_1 la charge par unité de surface ($\mathfrak{J}$ dans le feuillet magnétique).

Lorsque nous avons étendu nos formules au cas où les deux sphères concentriques devenant de plus en plus grandes, on peut considérer comme plane une portion limitée de leur surface et appliquer ainsi ces formules au condensateur formé de deux plans, nous avons admis implicitement que le potentiel V de l'ensemble des deux armatures, était le travail développé par la masse-unité lorsqu'elle traverse l'espace compris entre les deux armatures. Or, la valeur de ce travail est indépendante du trajet suivi par la masse-unité, pour passer d'une armature à l'autre, puisque chaque armature étant formée d'un corps bon conducteur, possède un potentiel de valeur constante dans toute son étendue. Donc, si la masse-unité se rend d'une des armatures à l'autre, soit par le chemin le plus court, soit en suivant un trajet *abcde* tel que celui indiqué sur la figure 130, le travail V sera le même. Supposons donc qu'elle suive ce second trajet, et qu'elle s'éloigne d'abord de l'armature A jusqu'à une très grande distance *b*.

Pendant ce déplacement *ab*, le travail développé sera, en vertu de l'équation que nous avons démontrée en parlant du feuillet magnétique et qui s'applique aussi au condensateur,

$$\Phi \times 2\pi,$$

dans laquelle Φ doit être remplacé par le produit de la densité électrique $\frac{Q}{S}$, par l'écart des armatures δ.

La masse-unité étant arrivée au point *b* duquel on voit l'armature

A sous un angle solide ω extrêmement petit, on lui fait décrire une seconde portion *bcd* du trajet total dont la forme est quelconque mais qui est assez éloignée du condensateur pour que ce dernier soit vu

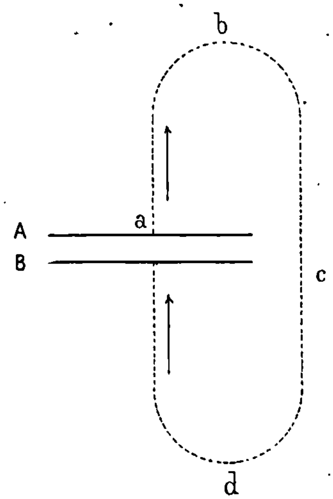


Fig. 130

constamment sous un angle très petit, de sorte que le travail développé par la masse-unité pendant cette seconde portion du trajet, soit négligeable.

A partir du point *d*, la masse unité suit un trajet rectiligne qui l'amène sur l'armature B, pendant lequel le travail développé est égal et de *même signe* que dans la première portion *ab* du trajet, de sorte que le travail total développé, ou différence de potentiel des deux armatures, a pour valeur

$$V = 2 \times 2\pi\Phi = 4\pi\Phi,$$

c'est-à-dire précisément ce que nous devons trouver pour faire disparaître la contradiction apparente signalée plus haut.

236. — Ces considérations rétrospectives sur les condensateurs nous montrent que si l'action extérieure d'un condensateur à lame d'air composé de deux sphères concentriques, est nulle, il n'en est pas de même de celle d'un condensateur plan, car le potentiel de ce dernier ayant pour valeur, lorsque la masse-unité reste constamment du même côté du condensateur,

$$V = \Phi\omega = \frac{Q}{S}\,\delta\omega,$$

il en résulte que la masse-unité est sollicitée par une force que nous pourrions calculer en appliquant l'équation

$$f = \frac{dV}{dx},$$

dans laquelle dx représente un déplacement infiniment petit imprimé à la masse-unité suivant une direction quelconque que l'on se donne d'avance, et dV la variation correspondante du potentiel calculée au moyen de l'équation

$$V = \frac{Q}{S}\,\delta\omega.$$

Il faudrait donc, pour trouver la valeur de f, connaître la relation qui existe entre x et l'angle solide ω sous lequel on voit les deux armatures, ce qui est une question de géométrie pure.

En supposant cette relation connue, on arrive facilement à l'expression suivante de f

$$f = \frac{Q\delta}{S}\,\frac{d\omega}{dx},$$

qui montre que lorsque la masse-unité se déplace sur une surface de tous les points de laquelle on voit le feuillet magnétique ou le condensateur, sous un angle constant, la force f mesurée tangentiellement à la surface est constamment nulle. Une telle surface est donc équipotentielle (60).

237. — On voit, et nous revenons encore sur ce point, combien le choix des variables d'un problème a d'influence sur la simplicité ou même la possibilité de la solution. En cherchant la valeur de f en fonction des coordonnées de la masse-unité, nous serions arrivé à une expression d'une extrême complication dont il aurait été difficile, sinon impossible, de conclure rien d'utile, tandis que la substitution de l'angle solide ω, aux coordonnées ordinaires, conduit à une équation d'une grande simplicité et évite des intégrations qui seraient impossibles avec les coordonnées ordinaires. La même observation s'applique aux flux de force dont l'emploi simplifie énormément certains calculs qui, sans eux, seraient inextricables, et possède en même temps, comme celui de l'angle solide, l'avantage de se prêter à une représentation matérielle frappante.

238. — Energie intrinsèque d'un feuillet magnétique. — L'identité des équations qui représentent le potentiel d'un feuillet magnétique et celui d'un condensateur, va nous permettre de trouver immédiatement la valeur de l'énergie potentielle d'un feuillet magnétique. L'énergie potentielle d'un condensateur a pour valeur (108) l'une des 3 expressions :

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}, \qquad W = \frac{1}{2}CV^2, \qquad W = \frac{1}{2}QV,$$

et nous avons vu que cette énergie potentielle peut se manifester de deux manières différentes : soit par une décharge électrique, en réunissant les deux armatures par un conducteur (procédé inapplicable avec le feuillet magnétique, puisqu'on ne connaît pas de corps conducteur du magnétisme), soit par un travail mécanique, en permettant aux armatures de se rapprocher et en utilisant leur attraction mutuelle pour vaincre une résistance.

Lorsque les armatures sont chargées d'une quantité constante d'électricité et isolées de toute espèce de source capable de leur en fournir, le travail mécanique qu'elles peuvent développer par leur rapprochement, a précisément pour valeur $\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$, à la condition que le travail s'accomplisse entièrement pendant que la capacité passe de la valeur C à une valeur infinie qui est atteinte lorsque les armatures se touchent et arrivent au même potentiel, exactement comme si on les réunissait par un conducteur.

Pour appliquer cette expression au feuillet magnétique, il faut exprimer $\frac{Q^2}{C}$ en fonction de la quantité qui, dans un condensateur à lame d'air, est l'équivalent de Φ, c'est-à-dire $\frac{Q}{S}\delta$. Nous aurons ainsi en remplaçant C par sa valeur $\frac{S}{4\pi\delta}$.

$$\frac{Q^2}{C} = \frac{4\pi\delta Q^2}{S} = 4\pi\delta\left(\frac{Q^2}{S^2}\right) S.$$

Mais $\frac{Q^2}{S^2}$ devient, lorsqu'il s'agit d'un feuillet magnétique, le carré de la densité magnétique $\mathfrak{I}^2$, et δ doit être remplacé par λ. Le travail mécanique développé par le rapprochement jusqu'au contact, des deux faces d'un feuillet magnétique, a donc pour valeur

$$W = \frac{1}{2} 4\pi\lambda\mathfrak{I}^2 S$$

ou, à cause de la relation $\Phi = \mathfrak{I}\lambda$,

$$W = 2\pi \frac{S\Phi^2}{\lambda}.$$

La première valeur de W, $2\pi\lambda\mathfrak{I}^2 S$, peut se mettre sous une forme utile dans plusieurs cas. En remarquant que le volume U du feuillet est égal à λS, on voit que l'on a

$$2\pi\lambda\mathfrak{I}^2 S = 2\pi U \mathfrak{I}^2.$$

239. — Remarque. — Remarquons en passant que la quantité $\frac{S}{4\pi\lambda}$ peut parfaitement s'appeler la *capacité magnétique* du feuillet, si on convient de donner ce nom au quotient $\frac{Q}{V}$, qui, dans les condensateurs, représente la capacité électrique (81).

En effet, les deux équations

$$Q = \mathfrak{I}S, \qquad V = 4\pi\Phi = 4\pi\mathfrak{I}\lambda$$

dont nous nous sommes déjà servi (235), donnent

$$\frac{Q}{V} = \frac{S}{4\pi\lambda}$$

ce qui est précisément la valeur de C dans un condensateur plan dont les lames sont séparées par une couche d'air d'épaisseur λ.

240. — Flux de force total à l'intérieur d'un feuillet magnétique. — Considérons un plan situé entre les deux faces d'un feuillet, et cherchons à évaluer le flux de force total qui traverse ce plan. Etant extrêmement rapproché de chacune des deux faces, puisqu'elles sont elles-mêmes situées à une très petite distance l'une de l'autre, ce plan est vu de tous les points de chacune d'elles sous un angle infiniment peu différent de 2π. Il en résulte, d'après le théorème de Green, que le flux total reçu sur chacune des faces du plan, a pour valeur numérique

$$2\pi Q = 2\pi \mathfrak{J} S = 2\pi \frac{\Phi S}{\lambda}.$$

Il est facile de voir que le flux total reçu par l'une des faces, est de même signe que celui qui est reçu par l'autre face, car si nous supposons le plan couvert d'une couche magnétique de signe quelconque, cette couche sera attirée par l'une des faces du feuillet et repoussée par l'autre, et ces actions s'ajouteront parce que le plan est situé entre les deux faces du feuillet, tandis qu'elles se retrancheraient s'il était extérieur au feuillet.

Le flux total de force qui traverse le plan, a donc une valeur double de celle que nous venons de trouver et l'on a

$$\mathfrak{F} = 4\pi Q = 4\pi \mathfrak{J} S = 4\pi\Phi \frac{S}{\lambda}.$$

D'autre part, le potentiel total ou plutôt la différence de potentiel des deux faces (comme on dit la différence de potentiel des deux armatures d'un condensateur) est, comme nous l'avons vu (235), donnée par l'équation

$$V = 4\pi\Phi,$$

par conséquent

$$\mathfrak{F} = \frac{SV}{\lambda}.$$

Cette équation est très importante comme on le verra par la suite, mais il ne faut pas oublier qu'elle n'est exacte que si le plan traversé par le flux de forces du feuillet, est réellement vu de chaque point du feuillet sous un angle solide différant très peu de 2π. On peut d'ailleurs toujours remplir cette condition soit, comme nous l'avons dit d'abord, en considérant les deux faces du feuillet comme étant très rapprochées, soit en donnant au plan une surface beaucoup plus grande que celle du feuillet.

L'expression que nous venons de donner conviendrait d'ailleurs aussi bien à un condensateur et donnerait alors le flux total de force électrique qui traverserait un plan situé entre les deux armatures.

241. — Attraction exercée par l'une des faces d'un feuillet magnétique sur l'autre face. — Remarquons que le flux total de force ayant pour valeur le produit d'un nombre abstrait 2π par une quantité de magnétisme ou d'électricité, suivant les cas, *n'est lui-même qu'une quantité de magnétisme ou d'électricité*. Le flux de force n'est donc nullement une force, en dépit du nom qu'on lui a donné.

Pour rendre plus claire la différence qui existe entre la force et le flux de force, nous allons calculer l'attraction exercée par l'une des faces d'un feuillet magnétique sur l'autre face, ou par l'une des armatures d'un condensateur à lame d'air sur l'autre armature (problème que nous avons déjà résolu quant au condensateur), en nous servant pour cela de la définition même du flux de force.

Par définition, le flux de force qui traverse une surface très petite placée dans un champ de forces, a pour valeur la *composante normale* à cette surface, de la force qui *la solliciterait si elle était chargée, par unité de surface de l'unité de quantité électrique*, ou de l'unité de quantité magnétique, ou même de l'unité de masse matérielle suivant que le champ de forces est dû à des masses électriques, magnétiques ou matérielles (pesanteur). Le théorème de Green nous permet de calculer la somme de toutes ces composantes normales, lorsqu'au lieu d'un élément de surface, on considère une surface finie de forme absolument quelconque. Or, dans le cas particulier où cette surface est un plan, toutes les composantes normales sont évidemment parallèles et, en vertu des lois de la statique, leur somme est alors égale à leur résultante.

Il résulte de là, que la composante normale de la résultante de toutes les forces appliquées à un plan placé dans un champ de forces et chargé d'une unité de quantité, électrique, magnétique ou pondérale par unité de surface, est exprimée par le même nombre que le flux total de force qui traverse le plan. Mais, si la charge du plan était de q unités par unité de surface, il est évident que toutes les forces élémentaires et par conséquent la composante normale de la résultante, seraient multipliées par q ; de sorte que, en désignant par F_n cette composante normale et par $\mathcal{F}$ le flux total de force qui traverse le plan, on a l'équation

$$F_n = q\mathcal{F}.$$

Mais q étant la charge du plan par unité de surface, on a, en désignant par S sa surface et par Q la charge totale supposée uniformément répartie :

$$q = \frac{Q}{S} \qquad \text{d'où} \qquad F_n = \frac{Q\mathcal{F}}{S}.$$

Mais le flux de force qui traverse la face attirée, a pour valeur le produit de la charge totale (électrique, magnétique ou pondérale) de la face attirante par l'angle solide 2π sous lequel on voit la face attirée de chacun des points de la face attirante, puisqu'on suppose ces deux faces extrêmement rapprochées. Ce flux reste donc égal à la moitié seulement du flux total ($4\pi Q$) émis dans toutes les directions. Nous avons donc, en remarquant que dans le feuillet magnétique comme dans le condensateur, la charge totale de la face attirante est numériquement égale à celle de la face attirée,

$$\mathcal{F} = 2\pi Q \qquad \text{d'où} \qquad Q = \frac{\mathcal{F}}{2\pi}$$

et

$$F_n = \frac{\mathcal{F}^2}{2\pi S} = \frac{2\pi Q^2}{S} = 2\pi\left(\frac{Q}{S}\right)^2 S.$$

Mais nous avons représenté par $\mathfrak{J}$ la densité magnétique $\frac{Q}{S}$ à la surface du feuillet (231 et 235), de sorte que l'on a

$$F_n = 2\pi\mathfrak{J}^2 S$$

valeur identique à celle que nous avons déjà trouvée (230) pour l'attraction exercée par les deux pôles d'un aimant sur une armature de fer qui est en contact parfait avec eux. Il doit en être ainsi, car cet ensemble équivaut évidemment à deux feuillets magnétiques égaux, puisque les surfaces terminales de l'aimant et de l'armature sont chargées de quantités égales de magnétisme et séparées par un intervalle extrêmement petit. Quant à l'analogie complète de cette expression et de celle qui représente l'attraction des armatures d'un condensateur, nous l'avons déjà démontrée (231).

242. — Ce que nous voulions montrer une fois de plus, c'est l'utilité du symbole géométrique auquel on a donné le nom de flux de force, en même temps que l'erreur que l'on commettrait en le confondant avec les forces réellement développées par les actions électriques, magnétiques ou gravifiques. L'équation

$$F_n = \frac{\mathcal{F}^2}{4\pi S},$$

nous fait voir en effet que les efforts mécaniques développés, dans le problème qui nous occupe, sont *proportionnels au carré* du flux de force. Ce qui nous fait insister sur ce point, c'est qu'on entend dire souvent que certains corps sont *conducteurs du flux de force magnétique*, expression dénuée de sens, puisque le flux de force, comme nous l'avons dit, est un symbole géométrique parfaitement défini et non pas une entité matérielle ; et que, par une singulière contradiction, les corps auxquels on applique cette expression incorrecte, sont précisément ceux à l'intérieur desquels l'effort f_1, exercé par l'unité de quantité magnétique sur une quantité égale placée à l'unité de distance, est plus petit que dans l'air.

Le flux de force est une expression algébrique créée de toutes pièces pour simplifier certains calculs, absolument comme le potentiel, et il est aussi singulier de dire qu'un corps conduit le flux de force, que si l'on disait que les corps conducteurs conduisent le potentiel électrique ou que les diélectriques conduisent le flux de force électrique. Cependant, comme cette expression a été adoptée par beaucoup d'auteurs pour traduire certains faits, nous l'emploierons nous-même à l'occasion, mais sans y attacher aucun sens concret et uniquement pour abréger le langage.

On peut dire que le Potentiel, le Flux de Force et le Feuillet magnétique sont les trois instruments principaux de recherches et de démonstration dans le domaine de l'Electricité et du Magnétisme, et qu'ils permettent de résoudre des problèmes qui, traités par les méthodes ordinaires employées en mécanique, présenteraient des difficultés insurmontables ou conduiraient à des solutions d'une telle complication qu'elles seraient sans aucune utilité.

243. — Travail développé par un Feuillet qui se déplace dans un champ magnétique. — Un champ magnétique ne pouvant exister que grâce à la présence de corps doués de la propriété magnétique, nous supposerons d'abord que le feuillet se meut dans un milieu où se trouvent répartis de tels corps que, pour abréger, nous appelons masses magnétiques, et que nous supposerons sans dimensions. Un système magnétique quelconque peut toujours être considéré en effet, comme composé d'un nombre infiniment grand de ces masses magnétiques, à la condition, comme nous le savons, qu'il contienne autant de masses positives que de masses négatives, de façon que la somme algébrique des quantités de magnétisme qui le composent, soit nulle.

Considérons maintenant une seule de ces masses contenant une quantité de magnétisme égale à q. Supposons que le feuillet situé d'abord à une très grande distance du système magnétique, s'en approche à une distance que nous définirons par l'angle solide ω sous lequel le feuillet est vu du point de masse q. Le travail développé pendant le déplacement, par l'action mutuelle du feuillet et de la masse q, est q fois aussi grand que si cette masse était égale à l'unité, c'est-à-dire q fois aussi grand que le potentiel du feuillet. Mais nous avons vu que ce potentiel a pour valeur $\Phi\omega$. Le travail développé par l'action mutuelle du feuillet et de la masse q, est donc égal à $\Phi\omega q$. Mais le produit ωq de l'angle solide sous lequel on voit le feuillet du point q, par la quantité q de magnétisme contenue dans le point, est précisément le flux de force émané du point et reçu par le feuillet (Théorème de Green). En le désignant par f, nous aurons donc pour la valeur τ du travail cherché

$$\tau = \Phi f.$$

Une seconde masse magnétique q', donnerait lieu à une équation identique

$$\tau' = \Phi f'.$$

On voit immédiatement que, en écrivant cette équation autant de fois qu'il y a de masses magnétiques dans le système magnétique considéré, et en ajoutant membre à membre toutes les équations ainsi obtenues, on aurait

$$\tau + \tau' + \tau'' \dots = \Phi(f + f' + f'' + \cdots),$$

ou pour abréger

$$\Sigma\tau = \Phi\Sigma f.$$

La somme des travaux d'un nombre quelconque de forces qui agissent sur un corps, étant égale au travail de leur résultante, il vient, en désignant par $\mathfrak{T}$ le travail total accompli par le feuillet lorsqu'on l'amène d'une très grande distance à sa position actuelle,

$$\mathfrak{T} = \Phi\Sigma f.$$

Il importe de remarquer que l'on ne peut pas remplacer ici Σf par le flux total de toutes les masses q, q', q'' parce que les angles ω, ω', ω'', ... varient avec la position de chaque masse.

On voit que la position du feuillet par rapport au système magnétique, est définie par les angles solides sous lesquels on le voit de chacune des masses magnétiques agissantes. Cela constitue donc un véritable système de coordonnées qui diffère absolument du système de plans coordonnés ordinairement employé dans les problèmes de mécanique, et permet d'exprimer le travail total $\mathfrak{T}$ sous la forme si simple que nous venons de trouver.

Supposons maintenant que le feuillet passe d'une position à une autre, ce déplacement correspondra à la production d'une certaine quantité de travail et, en vertu d'un principe que nous avons souvent invoqué, ce travail est indépendant du chemin suivi par le feuillet pour passer de la première position à la seconde.

On peut donc supposer que le feuillet retourne d'abord de sa première position jusqu'à une très grande distance du système, pour revenir de là à sa seconde position. La différence des travaux accomplis dans ces deux trajets est précisément égale au travail cherché. Nous aurons donc, en désignant par $\mathfrak{T}_1$ le travail accompli par le feuillet lorsqu'on l'amène de l'infini à sa première position, par $\mathfrak{T}_2$ le travail accompli lorsqu'on l'amène de l'infini à la seconde position et par $\mathfrak{T}$ le travail cherché,

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_1$$

ou, en remplaçant $\mathfrak{T}_2$ et $\mathfrak{T}_1$ par leur valeur en fonction des flux de force reçus par le feuillet dans chacune de ses deux positions successives,

$$\mathfrak{T} = \Phi\Sigma f_2 - \Phi\Sigma f_1 = \Phi(\Sigma f_2 - \Sigma f_1).$$

Ce qu'on exprime en disant que : *Le travail accompli par un feuillet qui se déplace dans un champ magnétique, est égal au produit de la puissance Φ du feuillet par la variation du flux de force qui le traverse.*

244. — Il résulte de là, que si le feuillet se déplace d'une petite quantité, et que pendant ce déplacement, la somme des flux de force qu'il reçoit n'éprouve aucune variation, le travail accompli sera nul. Ceci exige, puisque le déplacement est fini, que la résultante des forces mécaniques (nous employons cette expression pour qu'on ne les confonde pas avec les flux de force) appliquées au feuillet soit nulle. Le feuillet est donc en équilibre dans les positions pour lesquelles un petit déplacement n'entraîne aucune variation du flux total de force qu'il reçoit du champ, c'est-à-dire pour lesquelles ce flux total est un maximum ou un minimum. Abandonné librement à lui-même, le feuillet tend donc toujours à se placer dans une région du champ où le flux total qu'il en reçoit a la plus grande valeur possible.

Toutes ces conséquences du calcul se vérifient parfaitement lorsqu'on observe les mouvements d'une aiguille aimantée placée dans le champ d'un aimant.

245. — Travail dû au déplacement relatif de deux feuillets magnétiques. — Considérons deux feuillets magnétiques que nous désignerons par A et B. Nous pouvons regarder chacun d'eux comme plongé dans un champ magnétique créé par l'autre, et calculer, au moyen de la formule précédente, le travail dû à un déplacement quelconque imprimé au premier.

Si le feuillet A est fixe et si on déplace B, le travail aura donc pour valeur

$$\mathcal{T}_B = \Phi_B(\Sigma f_2 - \Sigma f_1)_B,$$

$(\Sigma f_2 - \Sigma f_1)_B$ représentant la variation du flux *reçu* par B et *émis* par A pendant que B se déplace. Or ce flux est proportionnel à la

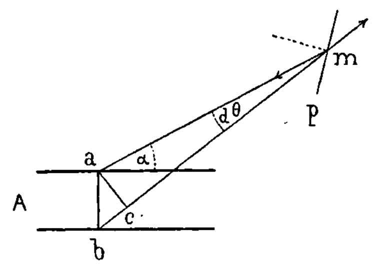


Fig. 131

puissance Φ_A du feuillet par lequel il est émis. Pour le démontrer, nous considérerons le feuillet A comme formé d'une infinité d'aimants égaux entre eux et nous allons chercher l'expression du flux de force émis dans une direction quelconque par l'un d'eux *ab* (fig. 131).

Soit p un élément de la surface du feuillet B, traversé par les flux *am* et *bm* émis par les pôles *a* et *b* ;

θ, l'angle de *am* avec la normale au petit plan p, que nous supposerons chargé de l'unité de quantité magnétique par unité de surface, et dont nous désignerons la surface par ds, de sorte que la quantité de magnétisme qu'il contient est aussi représentée par ds;

α, l'angle de *ma* avec le plan du feuillet A qui est perpendiculaire à l'aimant *ab*.

Le flux de force émané de *a* et mesuré perpendiculairement à l'élément p, a pour valeur, en désignant par q la quantité de magnétisme du pôle a, et par r la distance *am*

$$f_a = \frac{qds}{r^2} \cos \theta.$$

Le flux de force dû au pôle b, a de même pour valeur

$$f_b = -\frac{qds}{(r + dr)^2} \cos (\theta + d\theta),$$

dr représentant l'accroissement infiniment petit de am, qui sur la figure, est représenté par bc, et $d\theta$ désignant l'angle $\widehat{amb}$.

La somme algébrique de ces deux flux est le flux de force réellement reçu par p et perpendiculaire à sa surface. On a donc

$$f = f_a + f_b = -q ds . d\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right).$$

Mais

$$d\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right) = \frac{-r^2 \sin\theta d\theta - 2r\cos\theta dr}{r^4} = -\left(\frac{\sin\theta d\theta}{r^2} + \frac{2\cos\theta dr}{r^3}\right),$$

d'où

$$f = q ds \frac{\sin\theta d\theta}{r^2} + q . ds \frac{2\cos\theta dr}{r^3}.$$

Mais en abaissant une perpendiculaire ac, du pôle a sur le rayon vecteur bm, on a

$$dr = \overline{bc} = \overline{ab} \sin\alpha,$$

$$\overline{ac} = r d\theta,$$

d'où

$$d\theta = \frac{\overline{ac}}{r} = \frac{\overline{ab}\cos\alpha}{r}.$$

Remarquant que la longueur ab de l'aimant est précisément la distance λ des deux faces du feuillet dont l'aimant ab fait partie, et la remplaçant par λ dans les valeurs de dr et de $d\theta$, il vient pour la valeur de f

$$f = \lambda q . ds \frac{\sin\theta\cos\alpha}{r^3} + \lambda q . ds \frac{2\cos\theta\sin\alpha}{r^3}.$$

Si on calculait le flux qui traverse un autre élément de surface de B, les quantités θ, α et r changeraient, mais le nouveau flux contiendrait encore comme facteur le produit λq de la distance ab des pôles, par la quantité de magnétisme q qu'ils contiennent, c'est-à-dire le moment magnétique de ab. De sorte que le flux total reçu par une surface quelconque composé d'un nombre infiniment grand d'éléments ds diversement situés, serait lui-même proportionnel à ce moment magnétique. Par conséquent si le feuillet magnétique fixe A est composé d'aimants identiques entre eux, c'est-à-dire s'il est *simple*, le flux total reçu par B sera proportionnel au moment magnétique d'un quelconque des aimants élémentaires dont la réunion constitue le feuillet, c'est-à-dire proportionnel à Φ_A, car en appelant S la surface du feuillet, Q la quantité de magnétisme qu'elle contient et n le nombre d'aimants élémentaires contenus dans le feuillet, on a les équations suivantes

$$\Phi_A = \frac{Q}{S}\lambda, \qquad Q = nq \qquad \text{d'où} \qquad \Phi_A = \frac{n}{S}\lambda q$$

et

$$\lambda q = \frac{S}{n}\Phi_A.$$

Par conséquent l'expression

$$(\Sigma f_2 - \Sigma f_1)_B$$

obtenue en ajoutant tous les flux de force élémentaires, contient nécessairement en facteur la puissance Φ_A du feuillet fixe duquel ils émanent.

246. — Il résulte de ce que nous venons de démontrer, que quelle que soit la position relative de A et de B, le travail nécessaire pour amener de l'infini jusqu'à la première position le feuillet B, sera représenté par une expression de la forme $M_1\Phi_B\Phi_A$, M_1 étant un facteur numérique du même ordre de grandeur qu'une longueur, comme il est facile de s'en assurer. En effet l'équation

$$\lambda Q = \frac{S}{n}\Phi_A$$

peut s'écrire symboliquement, puisque S est une surface proportionnelle au carré d'une longueur L, et que n est un nombre abstrait

$$\lambda q = L^2\Phi_A.$$

D'autre part, le flux élémentaire

$$f = \frac{\lambda q ds}{r_3}(\sin\theta\cos\alpha + 2\cos\theta\sin\alpha),$$

émis par un élément du feuillet fixe A, et qui traverse normalement un élément du feuillet mobile B, peut (en remplaçant λq par $L^2\Phi_A$; ds qui est une aire infiniment petite, par le carré d'une longueur L^2; r^3 qui est le cube d'une longueur,, par L^3 ; et enfin les sinus et cosinus contenus dans la parenthèse et qui sont de simples nombres, par l'unité) être mis sous la forme symbolique

$$f = L\Phi_A,$$

et il en sera de même de tous les autres flux élémentaires en nombre infiniment grand, dont l'expression contiendra toujours le flux Φ_A multiplié par une longueur, de sorte que la somme Σf_1 de tous ces flux, sera nécessairement égale au produit d'une longueur par la puissance Φ_A du feuillet fixe. Donc le travail nécessaire pour amener de l'infini jusqu'à la première position le feuillet mobile B, est, comme nous le disions, représenté par $M_1\Phi_B\Phi_A$, M_1 étant une longueur qui dépend de la position relative des feuillets A et B.

247. — Intervertissons maintenant les rôles des deux feuillets : fixons B, transportons A à une grande distance et ramenons-le ensuite dans la position qu'il occupait lorsque nous avons immobilisé B ; il est évident que le travail développé par B sur A pendant que nous l'amenons ainsi d'une très grande distance, est égal à celui qui est développé par A sur B, lorsque c'est B qui est mobile, les positions relatives initiales et finales étant les mêmes dans les deux cas.

Cette évidence résulte de ce que, en dernière analyse, toutes les forces mises en jeu sont dues aux actions mutuelles d'une infinité de points qui s'attirent ou se repoussent proportionnellement à leur masse magnétique (qui est supposée invariable) et en raison inverse du carré de leur distance, et que les travaux individuels de toutes ces masses magnétiques élémentaires ont une valeur qui ne dépend que des distances finales de chacune des masses de l'un des feuillets aux masses de l'autre, les distances initiales étant infinies.

Or, cette égalité des travaux développés dans les deux cas, va nous permettre d'établir des théorèmes intéressants.

Reprenons l'équation (245)

$$\mathcal{T}_B = \Phi_B(\Sigma f_2 - \Sigma f_1)_B$$

qui représente le travail développé par le feuillet mobile B sous l'influence du feuillet fixe A, pendant qu'il passe de la position où il est traversé par un flux $(\Sigma f_1)_B$ *émanant de* A, à la position où ce flux devient $(\Sigma f_2)_B$. Supposons pour simplifier que la première position soit à l'infini, de sorte que $\Sigma f_1 = 0$ et l'équation se réduit, en supprimant l'indice de Σf_2, à

$$\mathfrak{T}_B = \Phi_B \Sigma f_B.$$

Mais nous venons de démontrer que ce même travail a pour expression $M_1 \Phi_B \Phi_A$, dans laquelle nous supprimerons également l'indice de M. Nous aurons donc

$$\mathfrak{T}_B = \Phi_B \Sigma f_B = M \Phi_B \Phi_A \qquad \text{d'où} \qquad M = \frac{\Sigma f_B}{\Phi_A}.$$

Si on fixe B et si on éloigne A jusqu'à l'infini pour le ramener ensuite à sa première position, le travail développé pendant le retour sera égal en grandeur et en signe à $\mathfrak{T}_B$, mais il aura une expression différente qu'on obtiendra en changeant l'indice B des quantités Φ_B et Σf_B et en le remplaçant par l'indice A, puisque l'indice appartient au feuillet mobile. Nous aurons donc

$$\mathfrak{T}_A = \Phi_A \Sigma f_A = M' \Phi_A \Phi_B.$$

Nous avons mis M' au lieu de M, parce que les calculs compliqués au moyen desquels on trouve M, ne permettent pas de voir immédiatement qu'on arrive à la même valeur de M, lorsqu'on remplace le feuillet A par le feuillet B et réciproquement, dans la série d'équations précédentes.

Cette égalité ressort d'ailleurs immédiatement de l'égalité $\mathfrak{T}_A = \mathfrak{T}_B$ qui donne

$$\Phi_A \Sigma f_A = \Phi_B \Sigma f_B \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\Sigma f_B}{\Sigma f_A} = \frac{\Phi_A}{\Phi_B}.$$

Cette dernière équation signifie que : lorsque deux feuillets magnétiques sont en présence, les flux de force qui traversent chacun d'eux sont dans un rapport inverse du rapport de leurs puissances respectives.

L'égalité de $\mathfrak{T}_A$ et de $\mathfrak{T}_B$, entraîne comme on le voit, l'égalité de M et de M'. Enfin elle nous donne les équations

$$M = \frac{\Sigma f_A}{\Phi_B} = \frac{\Sigma f_B}{\Phi_A}.$$

Les théorèmes que nous venons de démontrer relativement aux feuillets magnétiques, sont d'une grande utilité pour l'étude des lois de l'Electrodynamique, de l'Electro-magnétisme et de l'Induction. C'est pourquoi nous avons cru devoir leur donner un certain développement, bien qu'ils paraissent au premier abord n'avoir qu'un intérêt purement mathématique puisqu'ils s'appliquent à une abstraction irréalisable, le feuillet magnétique.

CHAPITRE DEUXIÈME

INDUCTION MAGNÉTIQUE

---

§ 1. — GÉNÉRALITÉS. — DÉFINITIONS.

248. — Nous avons vu, en étudiant l'électricité, que lorsqu'un corps conducteur est placé dans le voisinage de corps électrisés, c'est-à-dire dans un champ électrique, il s'électrise à son tour par influence ou, comme on dit dans le langage moderne, par *induction ;* l'une de ses extrémités est électrisée positivement, tandis que l'autre s'électrise négativement sans que la charge totale d'électricité qu'il contenait, avant d'être placé dans le champ, soit altérée. Nous avons montré que ce phénomène est une conséquence naturelle des actions mécaniques exercées à distance par l'électricité, et que l'assimilation de l'électricité à un fluide composé de molécules électrisées d'avance, conduisait à des résultats identiques à ceux qui sont produits par l'induction électro-statique.

Les lois élémentaires des attractions et répulsions magnétiques étant identiques à celles de l'électricité, il est naturel de penser que les corps magnétiques jouissent aussi de la propriété de devenir des aimants lorsqu'ils sont placés dans un champ magnétique et l'expérience confirme complètement ces prévisions. Les phénomènes sont toutefois beaucoup plus complexes que ceux que présentent les corps conducteurs de l'électricité, et sont bien plutôt comparables à ceux que l'on observe dans les corps diélectriques plongés dans un champ électrique.

249. — Susceptibilité magnétique. — Soit AB (fig. 132) un barreau de fer doux placé dans un champ magnétique, parallèlement aux lignes de force ; l'expérience prouve que ce barreau devient un aimant dont la puissance ou, pour parler plus clairement, le moment magnétique, est d'autant plus grande que le champ est lui-même plus intense. Mais l'aimantation ainsi communiquée au barreau n'existe, lorsqu'il est en fer doux, que pendant qu'il est placé dans le champ ; elle s'évanouit *presque* complètement lorsqu'on l'en retire ou lorsqu'on le place perpendiculairement aux lignes de force, pour reparaître, mais en sens contraire, c'est-à-dire avec inversion des pôles, si on fait décrire au barreau un angle plus grand qu'un angle droit. Dans tout ce qui suit nous supposerons que le barreau est placé parallèlement aux lignes de force.

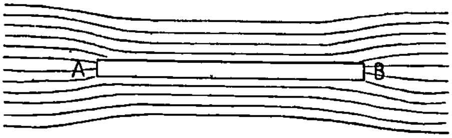


Fig. 132

Le rapport de l'*intensité d'aimantation du barreau* (voir ce mot 213) $\mathfrak{J}$, à l'intensité $\mathcal{H}$ du champ dans lequel il est placé, a reçu le nom de *susceptibilité magnétique*. Si par exemple un barreau placé dans un champ de 10 unités, présente une intensité d'aimantation de 300 unités, on dira que la susceptibilité magnétique est égale à

$$\frac{300}{10} = 30.$$

On désigne généralement ce rapport par la lettre $\varkappa$. On a donc par définition

$$\varkappa = \frac{\mathfrak{J}}{\mathcal{H}}.$$

Ce rapport est un nombre abstrait qui ne dépend pas de la grandeur des unités fondamentales choisies pour exprimer $\mathfrak{J}$ et $\mathcal{H}$.

En effet, l'intensité d'aimantation étant le quotient du moment magnétique du barreau par son volume, on a, en désignant par Q une quantité de magnétisme et par L une longueur

$$\mathfrak{J} = \frac{\text{Moment magnétique}}{\text{Volume}} = \frac{\text{Quantité de magnétisme polaire} \times \text{Longueur du barreau}}{\text{Cube d'une longueur}}$$

ou symboliquement

$$\mathfrak{J} = \frac{QL}{L^3} = \frac{Q}{L^2}$$

équation qui signifie, comme nous l'avons déjà trouvé par d'autres moyens, que $\mathfrak{J}$ est du même ordre de grandeur qu'une densité magnétique, L^2 représentant l'aire d'un carré.

L'intensité $\mathcal{H}$ d'un champ magnétique a pour mesure l'effort f exercé sur l'unité de quantité magnétique placée dans le champ (208), elle est donc proportionnelle au quotient de l'effort F, exercé par le champ sur une quantité de magnétisme Q, par cette quantité de magnétisme. On a donc symboliquement

$$\mathcal{H} = \frac{F}{Q}.$$

Mais on a aussi l'équation fondamentale qui représente la loi de Coulomb

$$F = \frac{Q^2}{L^2} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{F}{Q} \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{H} = \frac{Q}{L^2}.$$

On voit immédiatement que $\mathfrak{J}$ et $\mathcal{H}$ ont la même valeur symbolique $\frac{Q}{L^2}$, c'est-à-dire ne peuvent différer que par des coefficients indépendants du choix des unités fondamentales, la susceptibilité magnétique $\varkappa$ est donc un nombre abstrait.

250. — Saturation magnétique. — La susceptibilité magnétique est loin d'être un nombre constant. Elle est considérable pour les petites valeurs de $\mathcal{H}$ et va constamment en diminuant à mesure que $\mathcal{H}$ augmente. Sa valeur pour un champ de 4 unités différerait peu de 150, tandis qu'elle tomberait à 0,15, c'est-à-dire à une valeur mille fois moindre, lorsqué l'intensité du champ atteint 11 000 unités. Ces nombres n'ont d'ailleurs rien d'absolu et dépendent de la nature du fer, mais la diminution rapide de $\varkappa$, aussi bien pour le fer que pour la fonte et les autres métaux magnétiques, lorsque l'intensité du champ augmente, est un fait constant. On peut même dire, qu'à partir d'une certaine intensité du champ, l'intensité d'aimantation du barreau n'augmente plus que d'une façon inappréciable, comme on le verra dans les tableaux placés plus loin; il semble même qu'elle diminue. Cet état du fer qui le rend insensible aux variations du champ a été désigné par le mot de *saturation magnétique*. La cause de ce phénomène singulier nous est, naturellement, totalement inconnue, puisque nous ignorons le mécanisme des phénomènes magnétiques.

§ 2. — FLUX MAGNÉTIQUE TOTAL.

251. — **Flux magnétique total existant au point neutre d'un barreau aimanté.** — Le barreau AB placé dans un champ magnétique, et devenant lui-même un aimant, donne lieu à des lignes de force qui n'existaient pas avant son introduction dans le champ et modifient par conséquent ce dernier dans une certaine étendue, ainsi que la valeur primitive des flux de force en chacun de ses points.

Il résulte de cette coexistence de deux systèmes de lignes de force, appartenant à deux champs magnétiques différents, un troisième système de lignes que l'on obtiendrait en composant les deux premiers suivant la règle du parallélogramme des forces. C'est le champ résultant ; le seul que l'on puisse constater expérimentalement en appliquant les procédés déjà décrits pour le tracé des lignes de force au moyen d'une aiguille aimantée infiniment petite qui prend en chaque point la direction de la ligne de force passant par son centre.

On trouve ainsi que les lignes résultantes affectent la forme représentée approximativement par la figure 132. On voit qu'à une certaine distance du barreau, les lignes de force du champ conservent leur direction primitive tandis que dans le voisinage du barreau, elles éprouvent une inflexion qui fait dire que les lignes de force « sont déviées de leur trajectoire primitive, parce que le fer est un

« milieu beaucoup plus conducteur que l'air ou le vide dans lequel « elles se propageaient lorsque le barreau de fer doux n'existait « pas ».

On voit que cette manière d'exprimer le fait dont nous venons de donner l'explication, ne constitue en réalité qu'une image qui frappe l'imagination, mais qui n'a qu'un rapport assez éloigné avec les faits très simples que nous venons d'analyser.

Nous allons montrer comment on peut calculer le flux magnétique total qui existe au point neutre du barreau.

Remarquons que les deux moitiés du barreau peuvent être considérées comme deux aimants égaux en contact intime par un de leurs pôles, les deux pôles ainsi en contact étant de nom contraire. Si nous séparons ces deux pôles par un plan sans épaisseur, nous pourrons considérer les deux surfaces polaires et le plan qui les sépare, comme constituant un feuillet magnétique, et lui appliquer l'expression du flux magnétique total que nous avons déjà donnée (240)

$$\mathcal{F} = 4\pi\mathfrak{J}S$$

dans laquelle $\mathfrak{J}$ représente également la charge magnétique par unité de surface polaire ou l'intensité d'aimantation, ainsi que nous avons eu plusieurs fois l'occasion de le répéter, et S la surface de chacun des pôles en contact ou la section droite du barreau. Ce flux de force produit par le barreau sous l'influence du champ magnétique a reçu le nom de *flux d'induction*.

Mais le flux total qui traverse le plan a une valeur plus élevée, car, en vertu du théorème de Green, ce plan reçoit encore le flux de force émanant de toutes les masses magnétiques dont l'ensemble produit le champ magnétique dans lequel est placé le barreau (nous savons qu'un champ magnétique est toujours dû à l'action de corps doués des propriétés magnétiques). Si dans la portion de l'espace occupée par le barreau, le champ peut être considéré comme constant, le flux total $\mathcal{F}_h$ dû à ce champ, traversant une section de surface S ou, en d'autres termes, la force exercée par le champ sur le plan supposé chargé d'une couche magnétique de densité 1 et placé perpendiculairement aux lignes de force, est donnée par l'équation

$$\mathcal{F}_h = \mathcal{H}S.$$

Le flux total de force qui traverse le plan, est donc égal à la somme de ces deux flux. En le désignant par $\mathcal{F}'$, on a

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F} + \mathcal{F}_h = 4\pi\mathfrak{J}S + \mathcal{H}S.$$

Mais en vertu de la définition que nous venons de donner de la susceptibilité magnétique, on a

$$\mathfrak{J} = \varkappa\mathcal{H}.$$

Remplaçant $\mathfrak{J}$ par cette valeur dans l'expression de $\mathcal{F}'$, nous avons

$$\mathcal{F}' = \mathcal{H}S + 4\pi\varkappa\mathcal{H}S \qquad \text{et enfin} \qquad \frac{\mathcal{F}'}{\mathcal{F}_h} = 1 + 4\pi\varkappa.$$

252. — **Perméabilité magnétique.** — Le rapport $\frac{\mathcal{F}'}{\mathcal{F}_h}$ du flux total qui traverse la section droite du barreau en son milieu, au flux qui la traverserait s'il n'était pas magnétique et qui serait dû au champ magnétique seul, a reçu le nom de *perméabilité magnétique*. On voit qu'elle se déduit mathématiquement, en vertu du théorème de Green, de la *susceptibilité* qui, elle, est un nombre que l'expérience seule peut nous faire connaître. On la désigne par la lettre μ. On a donc

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa \qquad \text{ou} \qquad \varkappa = \frac{\mu - 1}{4\pi}$$

et

$$\mathcal{F}' = \mu\mathcal{F}_h = \mu\mathcal{H}S \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathcal{F}'}{S} = \mu\mathcal{H}.$$

Le rapport $\frac{\mathcal{F}'}{S}$ est généralement désigné par la lettre $\mathcal{B}$. C'est la valeur totale du champ magnétique à l'intérieur du fer considéré comme un milieu transmettant la force magnétique, comme l'air ou le vide, et en faisant abstraction de son impénétrabilité.

253. — La connaissance de la valeur de μ correspondante à différentes valeurs de $\mathcal{H}$ est très utile au point de vue pratique, car elle joue un rôle important dans l'étude des machines dynamo-électriques, ainsi que nous le verrons plus tard. On a donc essayé de représenter la relation qui existe entre ces deux quantités, soit par des équations empiriques, soit par des équations dont on se donne *à priori* la forme ; de manière qu'elles donnent pour μ une valeur comprise

entre 2000 et 1, suivant que $\mathcal{H}$ est nul ou extrêmement grand. Aucune de ces formules ne donne la valeur de la perméabilité avec précision. Cependant il est possible, en se basant sur le phénomène auquel nous avons donné le nom de saturation magnétique, de trouver une relation extrêmement simple et suffisamment exacte entre μ et $\mathcal{H}$.

Nous avons dit, en effet, que lorsque l'intensité du champ magnétique va en augmentant, l'intensité d'aimantation $\mathfrak{J}$, nulle en même temps que celle du champ, croît d'abord d'une manière sensiblement proportionnelle à celle-ci, puis beaucoup plus lentement et finit par devenir sensiblement stationnaire.

Appelons A cette valeur stationnaire ; elle doit satisfaire à l'équation

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa$$

dans laquelle $\varkappa = \frac{\mathfrak{J}}{\mathcal{H}}$. Si on fait $\mathfrak{J} = A$, il vient

$$\mu = 1 + \frac{4\pi A}{\mathcal{H}}$$

équation très simple, dans laquelle il suffit de poser $A = 1500$, pour qu'elle représente avec une exactitude suffisante la valeur de μ lorsque $\mathcal{H}$ varie entre 200 et 1000 unités C. G. S.

Pour les valeurs de $\mathcal{H}$ supérieures à 1000 unités, on prendra $A = 1650$ et on trouvera la valeur de μ avec une exactitude remarquable, même lorsque $\mathcal{H}$ dépasse 10000 unités.

Ainsi, par exemple, lorsqu'on a $\mathcal{H} = 11\,200$, les expériences de M. Ewing donnent $\mu = 2{,}89$, tandis que la valeur calculée au moyen de la formule $\mu = 1 + \frac{4\pi \times 1650}{\mathcal{H}}$ donne $\mu = 2{,}85$.

Pour $\mathcal{H} = 3630$, ces mêmes expériences donnent $\mu = 6{,}81$, tandis que la formule donne $\mu = 6{,}71$.

Dans le cas où on avait $\mathcal{H} = 11\,200$, le flux total d'induction dans le barreau atteignait une valeur donnée par l'équation

$$\mathcal{B} = \mu\mathcal{H} = 2{,}89 \times 11\,200 = 32\,368 \quad \text{unités par centimètre carré.}$$

Nous donnons à la fin de ce chapitre un tableau qui résume les nombres obtenus par divers expérimentateurs, au moyen de méthodes que nous ferons connaître en traitant de l'Induction électro-magnétique.

254. — On peut transformer l'équation

$$\frac{\mathcal{F}}{S} = \mu\mathcal{H}$$

et lui donner une forme dont nous nous servirons plus tard en étudiant la théorie des machines dynamo-électriques.

Par définition, la différence de potentiel de deux points de l'espace soumis à l'action de forces magnétiques, est égale au travail développé par la masse-unité, lorsqu'elle passe d'un de ces points au second; il en résulte que la différence de potentiel des deux points du champ magnétique, correspondant aux deux extrémités du barreau de fer doux, a pour valeur le produit de l'intensité $\mathcal{H}$ du champ par la distance L des extrémités. On a donc

$$V = \mathcal{H}L \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{H} = \frac{V}{L} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathcal{F}'}{S} = \frac{\mu V}{L},$$

d'où enfin

$$\mathcal{F}' = \frac{\mu S}{L} V.$$

255. — **Cas où le barreau est coupé en son milieu.** — Supposons maintenant qu'on coupe réellement le barreau en son milieu, et que l'on écarte les deux moitiés coupées d'une quantité (fig. 133) petite par rapport à l'épaisseur du barreau, de façon qu'un plan perpendiculaire à la direction AB et situé entre les

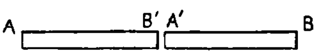


Fig. 133

deux pôles nouveaux B′ et A′ créés par la séparation des deux moitiés, soit vu de tous les points des faces A′ et B′, sous un angle solide très peu différent de 2π. Le flux de force total reçu par ce plan, aura encore pour valeur $4\pi\Sigma Q$, ΣQ désignant la somme de toutes les masses magnétiques agissantes.

Or, la somme de toutes les masses agissantes se compose de deux parties :

1° Les masses magnétiques appartenant à chacun des tronçons AB, A'B', et qui se réduisent *presque complètement*, si ces tronçons sont très longs, à $\mathfrak{J}$ pour le pôle A' et à $-\mathfrak{J}$ pour le pôle B'; de sorte que le flux total de force, émanant de ces deux pôles, est encore égal à $4\pi\mathfrak{J}$, puisque l'intensité d'aimantation $\mathfrak{J}$ ne dépend pas de la longueur du barreau induit.

2° Les masses agissantes extérieures aux barreaux et qui, par leur action, constituent le champ magnétique inducteur. Il est clair que le faible déplacement imprimé aux faces polaires A' et B', ne change pas le flux de force reçu par celles des masses magnétiques extérieures, c'est-à-dire n'altère pas l'intensité du champ produit dans l'intervalle A'B' par les actions extérieures.

Le flux de force total conserve donc la valeur qu'il avait avant la séparation des deux barreaux, à la condition, bien entendu, que ces barreaux soient assez longs pour que l'angle solide sous lequel chacune des faces A', B' est vue des faces A et B, soit négligeable et que les lignes de force aux environs de A' et B' soient parallèles à la direction des barreaux AB', A'B. Il est facile de s'assurer, par l'examen des fantômes magnétiques (205), que cette dernière condition est remplie lorsque le barreau a une longueur suffisante par rapport à son diamètre.

Le flux total de force qui traverse l'espace compris entre les deux faces A', B', a donc la même valeur que lorsque les deux faces se touchaient, mais il faut remarquer que pour obtenir ce résultat, nous avons écarté les extrémités A et B des deux barreaux de la quantité λ et que la différence de potentiel magnétique de ces extrémités a en même temps augmenté de λ, en vertu de l'équation

$$V = \mathcal{H}L$$

qui devient, lorsqu'on change L en $L + \lambda$,

$$V' = \mathcal{H}(L + \lambda)$$

d'où

$$V' - V = \mathcal{H}\lambda.$$

D'ailleurs, l'accroissement du potentiel V_1, nécessaire pour faire franchir au flux total l'intervalle $A'B' = \lambda$, est facile à calculer directement en considérant les deux faces A' et B' comme constituant un feuillet magnétique et en appliquant l'équation du n° 240 qui devient, en remplaçant la lettre $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F}'$, et V par V_1,

$$\mathcal{F}' = \frac{SV_1}{\lambda} \qquad \text{d'où} \qquad V_1 = \frac{\lambda \mathcal{F}'}{S}.$$

De plus, la somme des différences de potentiel des extrémités A et B' d'une part, et A' et B d'autre part, a pour valeur

$$V = \frac{L\mathcal{F}'}{\mu S},$$

de sorte que la différence totale de potentiel des points A et B, est égale à

$$V + V_1 = \left(\frac{L}{\mu S} + \frac{\lambda}{S}\right)\mathcal{F}' \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{F}' = \frac{V + V_1}{\frac{L}{\mu S} + \frac{\lambda}{S}}.$$

256. — **Cas où les faces polaires A' et B' ont une surface plus grande que la section droite du barreau.** — Si les faces polaires correspondantes au milieu du barreau sectionné, sont munies de plaques en fer $A'A'$, $B'B'$ (fig. 134) formant épanouissement, les raisonnements que nous venons de développer s'appliquent évidemment encore ; mais la différence de potentiel des épanouissements $A'A'$, $B'B'$ n'est plus la même que dans le cas précédent, parce que la surface du feuillet magnétique formé par ces épanouissements est différente de la section droite du barreau. Elle est d'ailleurs toujours donnée par la formule générale

Fig. 134

$$V_1 = \frac{\lambda \mathcal{F}'}{S_1}$$

dans laquelle S_1 désigne la surface de chacune des pièces polaires.

La différence totale de potentiel entre A et B, devient dans ce cas

$$V + V_1 = \left(\frac{L}{\mu S} + \frac{\lambda}{S_1}\right)\mathcal{F}' \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{F}' = \frac{V + V_1}{\frac{L}{\mu S} + \frac{\lambda}{S_1}}.$$

On voit que, en résumé, lorsqu'un barreau homogène et de section constante est placé dans un champ magnétique uniforme, son point neutre, ou plus exactement, sa section droite médiane est traversée entièrement par le flux de force dont nous venons de calculer la valeur.

Mais il n'en est pas de même des sections comprises entre le point neutre et les extrémités polaires A et B, parce que les lignes de force ne sont plus parallèles entre elles comme elles le sont au point neutre. C'est ce qui résulte et du calcul, et de l'examen des fantômes magnétiques. Le flux total va donc en s'épanouissant de plus en plus à mesure que l'on s'approche des extrémités A et B, et pour qu'un plan perpendiculaire au barreau et situé près des extrémités fût coupé par la totalité des lignes de force, il devrait avoir des dimensions très supérieures au diamètre du barreau.

L'expression du flux total que nous avons donnée, basée sur la définition même de ce flux et de la propriété du fer à laquelle on a donné le nom de susceptibilité magnétique, est donc vraie lorsque les deux tronçons du barreau sont suffisamment longs par rapport à leur diamètre et elle n'exige pas, comme cela a lieu dans les démonstrations que l'on donne habituellement, que les deux tronçons soient réunis par une barre de fer aboutissant aux pôles A et B et servant, comme on dit, à « fermer le circuit magnétique », ni que l'on admette comme évidente la conservation de la valeur du flux total de force.

257. — **Force magnéto-motrice.** — Si les lignes de force du champ magnétique, au lieu d'être rectilignes, comme nous l'avons supposé, étaient curvilignes (nous verrons plus tard qu'elles peuvent même affecter la forme circulaire), et que le barreau de fer fût courbé précisément suivant la même forme que les lignes de force qui sillonnent l'espace qu'il occupe, l'expression du flux de force

resterait la même et elle serait encore vraie dans le cas extrême où les lignes de force du champ seraient des courbes fermées, comme nous en verrons des exemples dans l'électro-magnétisme. Seulement, dans ce dernier cas, on ne peut plus dire qu'il existe une différence de potentiel magnétique entre deux points d'un canal de force, puisqu'étant fermé sur lui-même, on arriverait à ce résultat absurde que, en partant d'un point quelconque du canal de force et en cheminant le long de ce canal dans le sens des potentiels croissants, on trouverait, en revenant au point de départ après avoir décrit un circuit fermé, un potentiel plus grand que celui que l'on avait d'abord. On trouverait en un mot deux valeurs différentes du potentiel pour un même point.

L'expérience apprend cependant qu'un champ magnétique, composé de canaux de force affectant la forme de courbes fermées, est parfaitement réalisable au moyen d'un solénoïde électrique, et qu'une tige de fer de même forme, plongée dans le canal, s'aimante également dans tous ses points.

Mais tant que cette aimantation est permanente, aucun phénomène ne la révèle au dehors, parce que la tige peut être considérée comme formée d'une infinité de petits aimants se touchant par leurs pôles de noms contraires ; de sorte que toute action extérieure qui pourrait être due à l'un quelconque de ces pôles, est annulée par le pôle

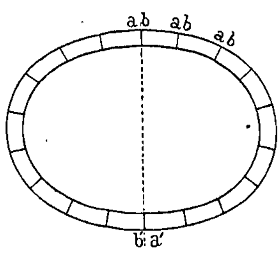


Fig. 135

de nom contraire qui est en contact avec lui (fig. 135). On peut cependant mettre hors de doute l'aimantation produite en coupant la tige en deux points quelconques *ab*, *a'b'*, et en essayant de séparer les deux moitiés *ba'* et *ab* l'une de l'autre ; on constate alors qu'elles s'attirent avec une énergie qui peut être considérable.

La différence de potentiel magnétique n'existant plus comme nous venons de le dire dans ce cas particulier, on est obligé pour expliquer les faits, d'admettre l'existence, dans le milieu qui entoure la tige de fer, d'une force à laquelle on a donné le nom de *force magnéto-motrice.* On peut mesurer cette force par la différence de potentiel magnétique qui produirait sur un barreau de 1 centimètre de longueur, placé dans le sens des lignes de force curvilignes, l'intensité d'aimantation qu'il prend réellement lorsqu'il fait partie de la tige curviligne fermée sur elle-même.

258. — **Calcul de la force magnéto-motrice.** — Pour rendre ceci parfaitement clair, nous allons montrer comment on peut déduire, de l'effort nécessaire pour séparer les deux moitiés de la tige de fer supposée courbée en forme de circonférence (fig. 136),

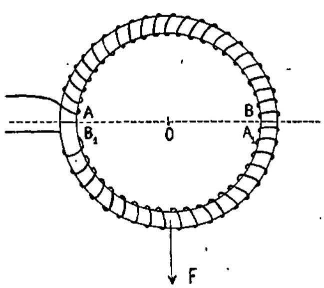


Fig. 136

la valeur de la force magnéto-motrice qui agit sur chaque centimètre de longueur de la tige.

Disons immédiatement que l'on peut obtenir, comme nous le démontrerons dans l'électro-magnétisme, un champ magnétique curviligne parfaitement uniforme, en enroulant sur le barreau de fer en forme d'anneau, une hélice en fil de cuivre qui l'entoure complètement, mais dont les deux spires extrêmes A et B_1 qui ne se touchent pas, communiquent avec une source d'électricité qui y entretient un courant électrique.

Désignons par F la force qu'il faut appliquer à la demi-circonférence inférieure, perpendiculairement au plan diamétral qui passe par les surfaces polaires AB_1, BA_1 en contact, par s la section droite de chaque surface polaire ou de celle du barreau, par $\mathcal{H}$ l'intensité du champ circulaire dans lequel est placé le barreau.

Nous savons que l'intensité d'aimantation $\mathfrak{J}$ du barreau, est représentée par le même nombre que la densité magnétique à la surface des pôles de noms contraires en contact, et nous avons vu (230) que l'effort attractif f développé entre A et B_1 ou entre B et A_1, a pour expression

$$f = 2\pi\mathfrak{J}^2 s.$$

D'autre part, le flux de force induit dans le barreau par l'action du champ, est égal, pour chaque unité de section, à $4\pi\mathfrak{J}$ (240). On tire de là, en remplaçant f par $\frac{F}{2}$

$$4\pi\mathfrak{J} = 2\sqrt{\frac{\pi F}{s}}.$$

Mais, en vertu de la définition de la susceptibilité magnétique $\varkappa$, on a

$$\mathfrak{J} = \varkappa\mathcal{H} \qquad \text{d'où} \qquad 4\pi\mathfrak{J} = 4\pi\varkappa\mathcal{H} = 2\sqrt{\frac{\pi F}{s}}$$

et

$$\varkappa\mathcal{H} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{\pi s}}, \qquad \mathcal{H} = \frac{1}{2\varkappa}\sqrt{\frac{F}{\pi s}} = \text{Force magnéto-motrice.}$$

Cette équation fait connaître $\varkappa$ lorsque la valeur de $\mathcal{H}$ est donnée, et réciproquement. Or, nous verrons dans l'Electro-magnétisme, comment on peut calculer la valeur de $\mathcal{H}$ en fonction du nombre de spires de l'hélice qui entoure le barreau et de l'intensité du courant électrique qui la traverse. Actuellement, si nous supposons connue la valeur de $\varkappa$, on tire de l'équation ci-dessus

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\varkappa}\sqrt{\frac{F}{2\pi s}}$$

et cette valeur de $\mathcal{H}$ qui ne se révèle par aucun phénomène magnétique extérieur, lorsque les spires de l'hélice magnétisante sont exactement identiques entre elles et également espacées, représente ce que nous avons appelé la *Force magnéto-motrice.*

Il est à peine besoin de rappeler que, suivant les conventions adoptées dans le système C.G.S., F doit être exprimé en dynes et s en centimètres carrés. Il représente alors l'effort en dynes qui serait exercé sur un petit plan de 1 centimètre carré, chargé d'une unité de magnétisme, placé dans l'intérieur des spires et situé dans un plan diamétral quelconque perpendiculaire au plan de la figure, le barreau de fer étant supposé enlevé. Ce petit plan serait donc soumis à un effort indépendant de sa position dans l'hélice, et prendrait un mouvement de rotation en produisant un travail mécanique proportionnel à son déplacement angulaire autour du point O. Nous savons d'ailleurs que cette expérience est irréalisable, parce qu'il est impossible de séparer une quantité de magnétisme de la quantité égale et de signe contraire, dont la réunion avec elle, forme un aimant et que ces deux quantités égales et contraires, sollicitées par le champ avec des intensités aussi égales et contraires, ne pourraient donner lieu à aucun mouvement de rotation.

Mais l'existence de l'effort nécessaire pour séparer les deux moitiés circulaires du barreau, met hors de doute l'existence de la force magnéto-motrice du champ et permet en même temps de calculer le flux total de force induit dans le barreau. Ce flux total est en effet égal à $4\pi\mathfrak{J}s$. On a donc en le désignant par $\mathfrak{F}_i$

$$\mathfrak{F}_i = 2\sqrt{\pi \mathrm{F} s}.$$

Nous verrons en étudiant l'induction électro-magnétique, qu'il existe d'autres moyens de mesurer ce flux total.

259. — En admettant l'invariabilité du flux total de force qui existe dans la section plane faite en un point quelconque d'un ensemble de tiges magnétiques, de longueur et de section différentes, reliées entre elles de façon à faire un polygone fermé ADFCKLB, dont un ou plusieurs côtés sont soumis à l'action d'une force magnéto-motrice (fig. 137), et en supposant *qu'il n'existe aucune ligne de force en dehors du fer*, excepté dans la région AB où la continuité est interrompue, on peut trouver la valeur de ce flux total en généralisant l'équation donnée plus haut. Il suffit pour cela de remarquer qu'une tige de longueur L, de section s et de perméabilité μ, exige pour être parcourue par un flux total $\mathfrak{F}$, une force magnéto-motrice ou

une différence de potentiel magnétique égale à

$$\frac{L}{\mu s}\mathfrak{F}$$

Une seconde tige de longueur L′, de section s' et de perméabilité μ',

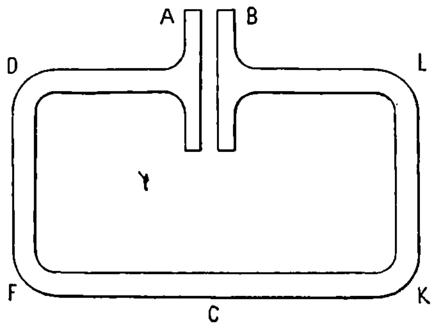


Fig. 137

située à la suite de la première, exigerait, pour la même valeur du flux, une augmentation de force magnéto-motrice égale à

$$\frac{L'}{\mu' s'}\mathfrak{F}$$

et ainsi de suite. On voit donc que la force magnéto-motrice totale devrait, pour que le flux total fût le même dans toutes les sections droites du *circuit magnétique* ADFCKLB, avoir une valeur égale à

$$\left(\frac{L}{\mu s}+\frac{L'}{\mu' s'}+\frac{L''}{\mu'' s''}+\cdots\right)\mathfrak{F}=\mathfrak{M}$$

d'où on tire, en posant

$$\frac{L}{\mu s}+\frac{L'}{\mu' s'}+\frac{L''}{\mu'' s''}=\sum\frac{L}{\mu s}$$

$$\mathfrak{F}=\frac{\mathfrak{M}}{\sum\frac{L}{\mu s}}.$$

La valeur de $\mathfrak{F}$ est, comme nous l'avons déjà dit, identique à celle d'une quantité de magnétisme, c'est-à-dire que, rapportée aux unités fondamentales, elle est exprimée symboliquement par la formule

$$\mathfrak{F}=\frac{M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}}{T}.$$

Il ne faut pas perdre de vue que la valeur du flux total dans les différentes régions du circuit magnétique, telle que nous venons de la donner en fonction de la longueur, de la section et de la perméabilité de chacune des parties du *circuit magnétique*, n'est exacte que s'il n'existe pas de lignes de force magnétique en dehors de ce circuit. La formule n'est plus du tout applicable, par exemple, aux régions polaires d'un barreau rectiligne plongé dans un champ magnétique, ce qui est précisément le cas par lequel nous avons débuté (251).

Il faudrait bien se garder d'introduire dans la somme $\Sigma \frac{L}{\mu s}$, à laquelle certains savants anglais ont donné le nom de *Réluctance*, un terme destiné à représenter la valeur de $\frac{L}{\mu s}$ correspondant au trajet des lignes de force dans l'espace indéfini qui entoure le circuit magnétique, car on s'exposerait à commettre des erreurs considérables. Il suffit pour s'en rendre compte de se reporter à la démonstration que nous avons donnée au numéro 251 de l'expression du flux total au milieu d'un barreau rectiligne très long. Cette expression est identique à celle que nous venons d'appliquer au circuit fermé ne contenant que de faibles lacunes telles que AB, et cependant il y a en apparence une énorme différence entre les deux circuits.

Nous ajouterons que nos expériences personnelles ont confirmé ce que nous venons de dire et ont montré que la *réluctance* d'un circuit magnétique, très long par rapport à sa section transversale, est sensiblement la même dans les deux cas extrêmes représentés (fig. 133 et fig. 137), le flux total étant mesuré en un point où le circuit ne présente qu'une faible solution de continuité (A'B' dans la fig. 133 et AB dans la fig. 137), dans laquelle la perméabilité μ est égale à 1, puisque ces lignes de force sont alors situées dans l'air.

260. — Influence exercée par des masses magnétiques placées dans un champ magnétique, sur les lignes de force de ce champ. — Nous avons déjà fait allusion à l'influence exercée sur les lignes de force d'un champ magnétique, par l'aimantation induite dans un barreau de fer doux placé dans ce champ (251). Nous allons revenir sur cette question et l'examiner de plus près.

Considérons d'abord un aimant isolé dans l'espace ; nous savons qu'on peut, sans erreur sensible, le considérer comme réduit à ses deux pôles, au moins lorsqu'il s'agit de calculer son action sur des points placés à une distance notable, et nous avons vu comment on détermine la forme des courbes équipotentielles et des lignes de force.

Ces dernières affectent la forme de courbes fermées, et cette forme est une conséquence nécessaire des lois élémentaires de l'action magnétique qui s'exerce en ligne droite. Il serait facile de construire par points les lignes de force gravifiques d'un système matériel régi simplement par les lois de l'attraction universelle, et l'on trouverait également que, bien que l'attraction de deux points matériels soit dirigée suivant la droite qui les joint, les lignes de force d'un système composé de deux points matériels fixes agissant sur un troisième point mobile, seraient des courbes et non des droites, excepté dans des cas tout à fait particuliers.

Cette forme courbe des lignes de force n'est donc nullement l'indice de propriétés spéciales aux corps magnétiques et il n'est pas besoin, pour l'expliquer, d'imaginer que le milieu qui transmet les actions magnétiques, est doué de qualités qui ont fait dire à un physicien célèbre, que les lignes de force magnétiques d'une part, tendent à être les plus courtes possibles, et d'autre part, se repoussent mutuellement. Cette matérialité attribuée à des courbes dont la définition et la détermination sont du domaine de l'analyse pure, peut être utile dans certaines circonstances, mais elle est dangereuse et peut conduire à de graves erreurs, lorsqu'on la prend trop à la lettre, comme nous le verrons lorsque nous étudierons les machines dynamo-électriques.

Revenons à notre aimant isolé dans l'espace et entouré de lignes de force symétriques par rapport à deux droites dont l'une est la ligne des pôles, et l'autre une perpendiculaire élevée au milieu de cette ligne des pôles, et supposons qu'on approche de cet aimant un barreau de fer doux. Chacune des lignes de force de l'aimant qui traverse le barreau va déterminer, dans les molécules de fer situées sur son trajet, des propriétés magnétiques. Le barreau va devenir ainsi un système magnétique composé d'un nombre immense d'aimants extrêmement petits, dont les lignes polaires seraient dirigées suivant les lignes de force de l'aimant si ces molécules aimantées ne réagissaient à leur tour les unes sur les autres et ne modifiaient ainsi l'intensité et la direction de l'aimantation due à la seule influence de l'aimant.

On conçoit facilement que le calcul de l'intensité et la direction de l'aimantation produite ainsi en chacun des points d'un corps magnétique soumis à l'influence d'un aimant, ou, pour employer le langage universellement adopté aujourd'hui, placé dans un champ magnétique, soit au-dessus des forces de l'analyse. Cependant il existe certains cas particuliers où cela est possible au moins approximativement. Nous avons donné deux exemples de ce genre : le premier était relatif à l'aimantation d'un barreau cylindrique très long par rapport à son diamètre, placé dans un champ magnétique uniforme, parallèlement aux lignes de force de ce champ; le second exemple était celui du tore de révolution en fer doux entouré d'une hélice magnétisante le recouvrant complètement. On peut ajouter que ce second cas est le seul où le calcul soit rigoureux.

261. — **Répartition des flux de force d'un aimant.** — Soit AB (fig. 138) un aimant dont l'un des canaux de force, construit ainsi que nous l'avons expliqué dans les chapitres précédents, est représenté par deux lignes de force très voisines acb, $a'c'b'$, qui le limitent dans le plan de la figure. Le petit plan carré dont on voit la trace en pp', chargé d'une unité magnétique (de même signe que le pôle A) par unité de surface, est repoussé par l'extrémité A de l'aimant et attiré par l'extrémité B. La résultante mF de ces deux forces, appliquée au milieu m du plan, est constante, puisque nous faisons varier la surface du petit plan carré et par conséquent sa charge totale de façon à obtenir ce résultat, et sa direction, toujours perpendiculaire à pp' et tangente à la ligne de force qui passe en m, tend à entraîner le plan pp' de A vers B.

Tous les flux de force résultants extérieurs à l'aimant sont donc dirigés de A vers B. Voyons maintenant comment sont dirigés les flux de force intérieurs au barreau

Pour cela, coupons-le par un plan $p_1p'_1$ perpendiculaire à AB, limité à la surface extérieure et chargé d'une unité magnétique de même signe que A par unité de section, et cherchons à déterminer le sens du flux de force qui lui est appliqué.

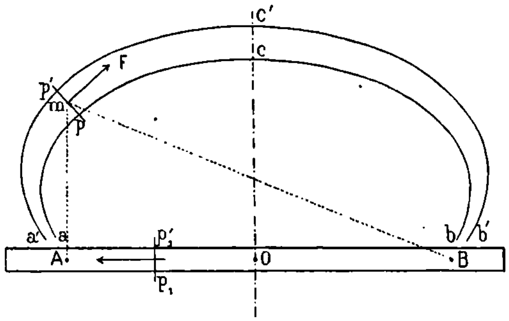


Fig. 138

Les lois fondamentales du magnétisme nous apprennent que les deux tronçons déterminés dans l'aimant par le plan $p_1p'_1$ constituent eux-mêmes des aimants complets dont les pôles, situés de part et d'autre de $p_1p'_1$, sont de noms contraires, de sorte que si la section était réelle au lieu d'être idéale, ces deux tronçons adhéreraient l'un à l'autre. On a donc un pôle boréal à gauche de $p_1p'_1$ et un pôle austral à droite de ce même plan ; ces deux pôles sont beaucoup plus rapprochés de lui que les pôles A et B et ont par conséquent une action prépondérante qui détermine le signe de la résultante des forces qui agissent sur lui. On voit immédiatement que ce signe est contraire à celui de la résultante appliquée au plan pp' lorsqu'il est extérieur à l'aimant. Ce raisonnement est vrai quelle que soit la distance de $p_1p'_1$ à l'extrémité de l'aimant, puisque l'expérience apprend que les deux tronçons d'un aimant s'attirent toujours, même lorsque l'un d'eux est très petit par rapport à l'autre, et il a pour conséquence nécessaire que le flux de force intérieur à l'aimant est de signe contraire au flux de force extérieur.

L'intensité du flux de force intérieur est variable dans toute la longueur du barreau et sa valeur ne peut être calculée exactement que pour le point neutre O, à la condition que le barreau soit assez long pour qu'on puisse négliger le flux de force émanant de ses extrémités et qui, d'après le théorème de Green, est proportionnel à *l'angle solide* sous lequel on verrait le plan $p_1p'_1$ si on se plaçait à ces extrémités. Nous avons donné précédemment l'expression du flux total de force qui traverse un plan mené perpendiculairement à la direction AB, par le milieu du barreau et *limité à sa surface.* Mais il est facile de voir que si le plan était infini, le flux total de force qui le traverse serait algébriquement nul. En effet, la somme de tous les flux de force émanant d'une masse magnétique chargée de q unités est, d'après le théorème de Green, égale à ωq, ω étant l'angle solide sous lequel on voit le plan lorsque l'œil coïncide avec la masse magnétique. Or cet angle est égal à 2π lorsque le plan $p_1p'_1$ est prolongé jusqu'à l'infini, et le flux total de force est en conséquence égal à $2\pi q$. Mais un des principes fondamentaux de la constitution des aimants, exige que toute quantité de magnétisme soit accompagnée d'une quantité égale et de signe contraire située à une très petite distance; le flux de force $2\pi q$ est donc détruit par un autre flux, $-2\pi q$, situé du même côté du plan indéfini $p_1p'_1$. La somme algébrique de tous les flux de force élémentaires qui traversent ce plan est donc nulle.

Mais il faut bien faire attention que tout ce que nous venons de dire s'applique au flux de force induit dans le barreau par l'action du champ magnétique et non au flux de force du champ magnétique lui-même. Or le flux de force total *induit dans le barreau* qui traverse intérieurement la section droite menée par le point O, a pour valeur

$$4\pi\kappa\mathfrak{F}_h,$$

$\mathfrak{F}_h$ étant le flux total dû au champ magnétique seul qui traverserait cette même section si le barreau n'était pas magnétique. Il en résulte que le flux total de sens inverse, qui extérieurement traverse un plan indéfini amené par le point O perpendiculairement au barreau, a une valeur précisément égale et de signe contraire, puisque la somme algébrique de tous les flux de force dus à l'aimant et qui traversent la surface entière du plan indéfini est égale à zéro. Le flux total de force magnétique *dû à l'aimant* AB *seulement,* et qui traverse extérieurement un plan indéfini mené normalement à AB par le point O, est donc égal à

$$-4\pi\varkappa\mathcal{F}_h.$$

262. — **Ecrans magnétiques.** — Dans tout ce qui précède, nous avons admis implicitement que les forces élémentaires émanées de chaque molécule magnétique, se transmettent en ligne droite et ne sont ni déviées ni altérées par l'action des autres forces émanant d'autres molécules. S'il en était autrement, il n'y aurait plus de loi élémentaire du magnétisme, puisque l'action mutuelle de deux molécules deviendrait une fonction du nombre et de la situation relative des autres molécules. Si, dans le voisinage d'un ou de plusieurs aimants, on place une masse de métal magnétique, chacune des molécules de cette masse devient elle-même un aimant, grâce à l'induction magnétique, et tous ces aimants élémentaires produisent des lignes de force individuelles qui traversent l'espace sans se gêner et sans s'influencer, absolument comme les ondes sonores, les ondes lumineuses, les forces gravifiques et en général toutes les actions transmises à distance. Mais nous ne pouvons, en général, constater que la résultante de toutes ces forces, de sorte qu'il nous semble que, contrairement à ce que nous venons de dire, les actions magnétiques de deux aimants, par exemple, sont profondément modifiées par le voisinage d'un corps magnétique placé dans leur sphère d'action.

Prenons par exemple un aimant ACB (fig. 139) et mesurons l'at-

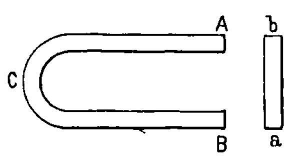


Fig. 139

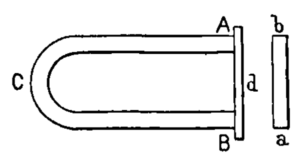


Fig. 140

traction qu'il exerce sur un barreau de fer doux ab placé à une certaine distance de ses pôles A et B. Cette mesure faite, appliquons une lame de fer *d* de faible épaisseur (fig. 140) sur les pôles, de façon qu'elle soit en contact intime avec eux. Elle va, comme nous le savons, se transformer en un aimant dont les pôles seront de signe contraire à celui des pôles A et B avec lesquels ils sont en contact et par conséquent de même signe que les pôles *a* et *b* du barreau *ab*. Cette lame *d* va donc exercer sur *ab* une action mécanique inverse de celle de l'aimant AB, mais plus faible qu'elle, puisque la lame *d* étant de faible épaisseur et ne pouvant prendre qu'une intensité d'aimantation limitée, a un moment magnétique proportionnel à son épaisseur, du moins entre certaines limites. Le barreau *ab* est donc soumis à deux forces de signe contraire et c'est la résultante seule, égale à leur différence, que nous pouvons constater ; il est donc moins attiré que lorsque l'action de l'aimant AB existait seule, ce qui est d'ailleurs confirmé par l'expérience.

On peut s'étonner des détails dans lesquels nous entrons pour expliquer un phénomène aussi simple et dont l'interprétation, telle qu'elle est exposée dans tous les traités d'électricité, est toute différente. Nous admettons en effet que l'action de l'aimant AB sur *ab* s'exerce à travers l'espace, absolument comme si la lame *d* n'existait pas, et que de même l'action de *d* sur *ab* n'est nullement troublée par la présence de AB, mais que ces actions simultanées s'ajoutent algébriquement et donnent une résultante plus faible que l'action primitive de l'aimant AB sur le barreau *ab*. Nous admettons, en un mot, l'indépendance absolue des actions élémentaires des molécules aimantées, actions qui se propagent dans l'espace comme si chacune d'elles existait seule, en attribuant bien entendu à ces molécules le moment magnétique qu'elles possèdent dans la position respective qu'elles occupent et qui est variable avec cette position en vertu de leurs inductions mutuelles. S'il en était autrement, ni la loi de Coulomb, ni le théorème de Green, qui en est une conséquence, n'auraient plus aucun sens, puisqu'il faudrait admettre que l'attraction ou la répulsion de deux masses magnétiques dépend non seulement de la grandeur et de la distance de ces masses, mais aussi de toutes ces masses magnétiques voisines. En un mot, les actions élémentaires des masses magnétiques restent inaltérées tandis que la résultante de ces actions sur une quelconque d'entre elles, peut avoir toutes les valeurs et toutes les directions possibles.

263. — Revenons maintenant à la figure 140 et supposons que l'on applique sur la lame en fer d, une seconde lame identique d', de façon à former une lame d'épaisseur double. Nous pouvons considérer l'ensemble formé par l'aimant AB et la première lame d, comme un aimant plus faible que l'aimant primitif, puisqu'il exerce sur ab une action résultante plus petite que l'action de l'aimant AB tout seul. Cet aimant fictif composé de AB et de d, induira donc dans la seconde lame d', identique à d et superposée à celle-ci, une quantité de magnétisme moindre que celle déjà induite dans d, de sorte que la superposition des deux lames d et d' produira un aimant moins fort que le double de d. L'action de ces deux lames d, d' sur le barreau ab, inverse de celle de l'aimant AB, sera donc moindre que le double de celle de la première lame d, mais cependant la résultante des actions auxquelles il est soumis de la part du système magnétique formé de AB, de d et de d', est plus faible qu'avant l'application de d' sur d.

En continuant ce raisonnement et en supposant que l'on applique sur d 2, 3, 4, 5, etc. lames égales à d, il est facile de voir que la résultante des actions appliquées au barreau ab sera de plus en plus faible, sans cependant devenir rigoureusement nulle, à moins que la lame très mince d ne prenne, sous l'influence de AB, un moment magnétique égal à celui de AB. Or cette condition ne pourrait être remplie que si le coefficient de susceptibilité magnétique de la lame d était infiniment grand.

En réalité, lorsque la lame de fer formée de la superposition des lames élémentaires d, d', d'',... atteint une certaine épaisseur, l'action exercée par AB sur ab devient extrêmement petite et l'on traduit ce fait en disant que les lames de fer d, d', d'',... *font écran* à l'action magnétique de l'aimant AB.

L'explication que l'on donne habituellement du phénomène que nous venons d'analyser, est celle-ci. Le fer étant pour les lignes de force magnétique un conducteur bien supérieur à l'air, la presque totalité du flux de force de l'aimant passe par le faisceau des lames *d*, et il ne reste qu'un très petit nombre de lignes de force qui traversent le barreau éloigné *ab*. Nous préférons l'explication que nous venons de développer, et c'est seulement lorsque nous traiterons de l'induction électro-magnétique que nous pourrons expliquer les motifs de notre préférence et en donner une démonstration expérimentale.

Constantes d'aimantation.

Intensité du champ inducteur $\mathfrak{H}$	Intensité d'aimantation du barreau induit $\mathfrak{J}$	Susceptibilité magnétique $\varkappa = \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{H}}$	Flux magnétique induit dans le barreau par cent. carré $\mathfrak{F} = 4\pi\mathfrak{J}$	Flux magnétique total dans le barreau par cent. carré $\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J}$	Perméabilité magnétique $\mu = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}}$
			Fer doux		
3,9	587	151,0	7 376,47	7 380,3	1 893,9
5,7	735	128,9	9 236	9 241,7	1 621,3
10,3	918	89,1	11 490	11 500,3	1 116,5
17,7	1 083	61,2	13 610	13 630	770,2
22,2	1 147	51,7	14 414	14 436	650,2
30,2	1 197	39,7	15 040	15 070	499,0
40	1 226	30,7	15 400	15 440	386,0
78	1 337	17,1	16 800	16 880	216,5
115	1 370	11,9	17 215	17 330	150,7
145	1 403	9,7	17 630	17 770	122,6
208	1 452	7,0	18 246	18 454	88,7
293	1 474	5,0	18 522	18 815	64,5
362	1 489	4,1	18 711	19 073	52,7
465	1 508	3,2	18 950	19 415	41,7
557	1 517	2,1	19 063	19 620	35,2
			Fer de Lowmoor		
3 630	1 680	0,4628	21 111	24 741	6,81
6 680	1 670	0,2500	20 985	27 665	4,14
8 810	1 630	0,1850	20 483	29 293	3,32
10 840	1 630	0,1503	20 483	31,323	2,88
			Fer de Suède		
6 690	1 692,6	0,2530	21 270	27 960	4,18
8 900	1 657,5	0,1862	20 828	29 728	3,34
9 510	1 695,7	0,1783	21 310	30 820	3,24
10 360	1 692,6	0,1633	21 262	31 622	3,05
10 810	1 663,9	0,1539	20 908	31 718	2,93
11 200	1 683,8	0,1503	21 159	32 359	2,89
			Fonte		
3 900	1 254	0,3215	15 758	19 658	5,02
6 400	1 235,8	0,1930	15 530	21 930	3,42
7 710	1 203.2	0,1560	15 120	22 830	2,96
8 080	1 228,6	0,1520	15 439	23 519	2,91
9 700	1 209,5	0,1246	15 199	24 899	2,56
10 610	1 192,8	0,1124	14 989	25 599	2,41

CHAPITRE TROISIÈME

MAGNÉTOMÉTRIE

§ 1. — MESURE DES FORCES MAGNÉTIQUES.

264. — **Généralités.** — Les actions mécaniques développées par un aimant sur une aiguille aimantée, décroissent très rapidement lorsque la distance de ces deux corps s'accroît notablement; il est donc nécessaire, pour les mesurer, d'avoir recours à des méthodes particulières et à des instruments d'une extrême sensibilité. C'est dans ce but que Coulomb a imaginé la balance de torsion dont nous avons déjà donné la description.

Il existe en mécanique, deux méthodes pour mesurer les forces; la première consiste à faire équilibre à la force inconnue au moyen d'une force connue, telle qu'un poids étalonné, comme dans la balance, ou la réaction élastique d'un ressort gradué, comme dans les dynamomètres. Cette méthode porte le nom de *Méthode statique.*

La seconde méthode, applicable surtout aux forces qui agissent à distance, consiste à mesurer la durée des oscillations d'un mobile tel qu'un pendule ou une aiguille aimantée, qui étant écarté de sa position d'équilibre et abandonné brusquement à lui-même, exécute autour de cette position d'équilibre une série d'oscillations dont on mesure le nombre et la durée. La durée d'une de ces oscillations permet, au moyen de calculs que nous développerons plus loin, de mesurer la valeur de la force qui agit sur le mobile ; c'est la *Méthode dynamique.* Elle permet, lorsqu'on parvient à éliminer toutes les actions étrangères, telles que frottements, résistance de l'air, vibration des supports, etc., de mesurer les forces avec une très grande précision.

265. — Lois de l'élasticité de torsion des fils métalliques. — Avant d'entreprendre la mesure des petites forces magnétiques au moyen de la torsion des fils élastiques, nous allons étudier les lois relatives à l'élasticité de ces fils.

Soit *ab* (fig. 141) une aiguille en métal non magnétique soudée par son milieu *m*, à l'extrémité d'un fil élastique *c*F dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe F.

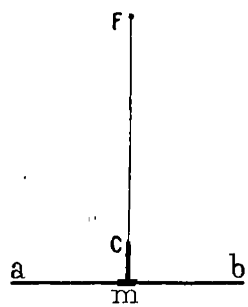


Fig. 141

Si on écarte l'aiguille *ab* de sa position d'équilibre d'un angle α, la torsion du fil *c*F développe un couple C qui tend à ramener l'aiguille *ab* à cette position d'équilibre dont la valeur est donnée par la relation

$$C = \mu \frac{d^4}{l} \alpha.$$

Dans cette expression ; C désigne le moment du couple en dynes-centimètres, c'est-à-dire la valeur de la force en dynes qu'il faudrait appliquer perpendiculairement à *ab*, à un centimètre de distance du point *m*, pour faire équilibre à la torsion du fil ; *d* et *l*, le diamètre et la longueur du fil exprimés également en centimètres ; μ un coefficient qui dépend de la nature du métal employé et dont nous allons donner la valeur dans différents cas.

Le fil devant supporter le poids de l'aiguille *ab*, est soumis à l'action d'une force verticale qui le romprait s'il avait un diamètre trop faible ; il est donc nécessaire de connaître la valeur du poids qui, appliqué à une tige de *un centimètre carré* de section, amènerait sa rupture.

Dans le tableau ci-dessous, ce poids est exprimé en dynes par centimètre carré ; il est désigné par la lettre R.

Nature du métal.	Valeur de μ en milliards.	Valeur de R en milliards.
Aluminium	25,5	2
Argent	26	3
Cuivre	42,4	4,14
Fer ou acier.	74,5	10
Laiton	33,7	3,36
Maillechort	47,3	4,5
Or	27	2,7
Platine	66,7	3,5
Platine-argent. . . .	35,5	»

La grandeur de ces nombres tient à l'emploi du système C. G. S. ; on peut, dans la pratique, les rendre d'un emploi beaucoup plus commode en exprimant la longueur du fil en mètres, son diamètre en millimètres, et la valeur de μ et de R en grammes. Le coefficient μ représentera alors en *grammes*, appliqués à un bras de levier de *un centimètre*, l'effort nécessaire pour tordre d'un angle égal à l'unité (57 degrés 296), un fil de la substance considérée ayant un mètre de long et un millimètre de diamètre.

En renonçant également à l'emploi du système C.G.S., les nombres correspondant à R, exprimeront en grammes, la force nécessaire pour rompre par un effort de traction, un fil de un millimètre de diamètre.

Nous reproduisons ci-dessous le tableau ainsi modifié :

Nature du métal.	Valeur de μ en grammes.	Valeur de R en grammes.
Aluminium	26,5	16 000
Argent.	27,2	24 000
Cuivre.	44	33 000
Fer ou acier	77,3	80 000
Laiton.	35	27 000
Maillechort	49,4	36 000
Or.	28	21 000
Platine	69,3	27 500
Platine-argent	37	»

Il est essentiel de remarquer que les nombres donnés dans ces tableaux, ne comportent pas une grande précision, parce que le coefficient μ et la ténacité R d'un même métal, varient d'un échantillon à l'autre, suivant le mode de fabrication et de transformation du métal.

266. — Exemple numérique. — Nous allons donner un exemple de l'application des nombres contenus dans ce tableau, en admettant que le dyne vaut exactement un milligramme.

On demande quel est l'effort nécessaire pour tordre d'un angle égal à 1, un fil d'argent de $\frac{1}{10}$ de millimètre de diamètre et de 10 centimètres de longueur.

La formule

$$C = \mu \frac{d^4}{l} \alpha$$

donne

$$C = 27{,}2 \frac{\frac{1}{10000}}{\frac{1}{10}} 1 = 27^{\text{milligrammes}}{,}2.$$

Cet effort, qu'il faudra appliquer à un bras de levier de un centimètre, sera donc de 27 milligrammes environ. Si, comme nous le verrons plus tard, l'angle de torsion peut être mesuré à $\frac{1}{100}$ de degré près, ce qui correspond à un angle absolu égal à $\frac{1}{5730}$, la force développée par la torsion du fil, sera connue à moins de $\frac{1}{2000}$ de milligramme près.

267. — Détermination expérimentale du coefficient μ et du couple de torsion d'un fil élastique. — La valeur de μ que nous venons de résumer dans le tableau ci-dessus est variable d'un métal à l'autre ; elle n'est même pas constante pour un même métal et dépend de son degré de pureté, de l'écrouissage qu'il a subi dans la filière, du recuit, de la température ; en un mot de toutes les circonstances qui peuvent modifier son état moléculaire. Il est donc nécessaire, lorsqu'on veut se servir de la torsion pour la mesure exacte des petites forces, de déterminer directement le couple de torsion correspondant à l'unité de déviation angulaire. On emploie pour cela la méthode dynamique ; voici en quoi elle consiste : le fil AB (fig. 142) dont on veut déterminer le coefficient de torsion, est

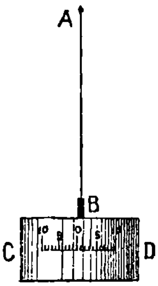


Fig. 142

soudé par l'une de ses extrémités A à une pièce métallique massive fixe, et par l'autre extrémité B à un cylindre homogène en métal CD dont on mesure avec précision la hauteur, le diamètre et le poids. Désignons ces trois quantités par h, d et P, les deux premières étant exprimées en centimètres et la dernière *en grammes*.

Si l'on écarte le cylindre de sa position d'équilibre et qu'on l'abandonne ensuite à l'action du fil AB, il exécute une série d'oscillations isochrones dont on mesure l'amplitude (au moyen d'une graduation gravée sur le cylindre lui-même et dont le zéro est en O) et la durée au moyen d'un chronomètre à secondes en notant le temps qui s'écoule entre deux passages successifs du zéro de la graduation devant un repère correspondant à la position d'équilibre.

Soit t la durée d'une oscillation simple (on dit que le cylindre a accompli une oscillation simple lorsque le zéro étant passé devant le repère, y passe de nouveau, mais en sens contraire), exprimée en secondes, et C_1 le moment de la force élastique développée par le fil lorsqu'il est tordu d'un angle égal à 1 (57° 296). Ce moment, comme nous l'avons déjà dit, représente *en dynes*, la force qu'il faudrait appliquer à une poulie de 1 centimètre de rayon pour équilibrer la force de torsion. On démontre en mécanique que la valeur de C_1 est donnée par l'équation

$$C_1 = \frac{\pi^2 M}{t^2}$$

M étant le moment d'inertie du cylindre ; ce moment d'inertie a pour valeur $\frac{1}{2}Pr^2$. Donc

$$C_1 = \frac{\pi^2}{2}\frac{Pr^2}{t^2},$$

formule dans laquelle la hauteur h du cylindre n'entre pas. Toutefois nous allons voir que cette dimension peut jouer un rôle dans l'exactitude des déterminations. On peut, en effet, pour un poids P donné au cylindre et qui dépend de ce que le fil peut supporter sans se rompre, prendre arbitrairement la hauteur et le rayon, mais il est avantageux à tous les points de vue, comme l'a montré M. Limb, de prendre $h = r\sqrt{3} = 1{,}732r$ ou $h = 0{,}866d$, d étant le diamètre du cylindre.

On prendra par exemple $d = 52$, $h = 45$; le poids P exprimé *en grammes* est donné directement par une pesée ; il doit être choisi de manière à ne pas charger le fil de plus de 5 kilogrammes par millimètre carré de section.

Le choix du métal a une certaine importance, et si tous les métaux pouvaient s'étirer également bien à la filière, l'acier à corde de piano devrait être préféré comme nous allons le démontrer.

Soit en effet deux fils de même longueur l, mais de substances différentes et dont les diamètres d et d' sont calculés de façon qu'ils puissent supporter le même poids P. Appelons p et p' la charge que pourrait supporter chacun d'eux (sans altération de son élasticité) s'il avait un millimètre de diamètre ; on aura alors

$$P = pd^2, \qquad P = p'd'^2 \qquad \text{d'où} \qquad \left(\frac{d'}{d}\right)^2 = \frac{p}{p'}.$$

D'autre part, le couple élastique C correspondant à une torsion angulaire égale à l'unité, aura pour chacun de ces fils la valeur suivante (Loi de Coulomb)

$$C = \frac{\mu d^4}{l}, \qquad C' = \frac{\mu' d'^4}{l} \qquad \text{donc} \qquad \frac{C'}{C} = \frac{\mu'}{\mu}\left(\frac{d'}{d}\right)^4.$$

Mais

$$\left(\frac{d'}{d}\right)^4 = \left(\frac{d'^2}{d^2}\right)^2 = \left(\frac{p}{p'}\right)^2.$$

Donc

$$\frac{C'}{C} = \frac{\mu'}{\mu}\left(\frac{p}{p'}\right)^2.$$

Cette dernière équation nous montre que les couples nécessaires pour tordre d'un angle égal à l'unité deux fils de même longueur et supportant le même poids, ne dépendent pas seulement du rapport $\frac{\mu'}{\mu}$, ainsi qu'on le dit dans la plupart des ouvrages, mais encore du rapport des charges qu'ils peuvent supporter par unité de section sans altération dans leur élasticité, et que ce dernier rapport est bien plus important que le rapport $\frac{\mu'}{\mu}$ puisqu'il est élevé au carré.

Comparons, par exemple, un fil d'argent et un fil d'acier. Pour le premier on a : Charge de rupture par m/m carré : 30 kilogr. ; valeur de μ : 26×10^9. Pour l'acier on a : Charge de rupture, au moins 100 kilogrammes ; valeur de μ : 75×10^9. Donc deux fils, l'un en acier, l'autre en argent, de même longueur et chargés du même poids représentant pour chacun d'eux *la même fraction de l'effort nécessaire pour les rompre*, exigeront, pour être tordus d'un même angle, des couples dont le rapport sera donné par l'égalité

$$\frac{C'}{C} = \frac{74.5}{26} \cdot \left(\frac{30}{100}\right)^2 = 0{,}258.$$

C'est-à-dire que le fil d'acier exigera à peine le quart de l'effort nécessaire pour tordre le fil d'argent du même angle.

268. — Expériences de Coulomb. — Les fils de cocon ont un coefficient de torsion bien inférieur à celui des fils métalliques, et cependant ils peuvent supporter sans se rompre un poids relativement considérable. Coulomb a fait beaucoup d'expériences sur ce sujet. Il a trouvé qu'un fil de cocon tel qu'il sort de la filière du ver à soie, supporte sans se rompre un poids de 10 grammes $\frac{1}{2}$ et développe un couple de torsion qui, mesuré par la méthode dynamique, a donné pour C_1 la valeur 0,0012 ; ce qui signifie que pour le tordre d'un angle égal à l'unité, il faudrait appliquer à une poulie de 1 centimètre de rayon soudée à ce fil, un effort tangentiel de $\frac{1}{800}$

de milligramme. Ce fil avait 27 millimètres de diamètre et la valeur de C_1 a été trouvée sensiblement indépendante de l'amplitude ; il en résulte donc que les fils de cocon, comme les fils métalliques, développent un couple élastique proportionnel à l'angle dont ils ont été tordus.

Un autre fil de soie de 54^{cm} de longueur, composé de 12 fils de cocon simples collés ensemble sans être tordus, supporte sans se rompre un poids de $95^{gr}\frac{1}{2}$ et a donné $C_1 = 0{,}0023$.

Enfin un cheveu de 16 centimètres de longueur, chargé de $18^{gr}\frac{1}{2}$ a donné des oscillations isochrones même quand leur amplitude atteignait 6 ou 7 tours complets par oscillation et a donné pour C_1 la valeur $C_1 = 0{,}166$.

On voit combien ces résultats sont supérieurs à ceux des fils métalliques. Leur conséquence immédiate est que lorsqu'on veut suspendre un corps de manière à lui laisser une liberté absolue d'obéir à des forces contenues dans un plan horizontal, aucun procédé ne peut rivaliser avec l'emploi d'un fil de cocon, si le corps est léger, ou d'un faisceau de ces fils collés ensemble sans avoir été tordu, si son poids excède la résistance d'un fil unique. Ajoutons enfin que le coefficient de torsion n'est pas affecté d'une façon appréciable lorsque la traction longitudinale exercée sur le fil varie dans de grandes limites.

269. — Balance bifilaire. — La balance de torsion est basée sur les lois de l'élasticité, c'est-à-dire d'une force variable avec un certain nombre de circonstances telles que la température, et même avec le temps. Il a toujours paru désirable aux savants de ramener la mesure des forces à celle d'un étalon que l'on puisse considérer comme immuable ; la pesanteur est de toutes les forces connues celle qui s'approche le plus de cet idéal, puisqu'elle ne dépend que de la quantité de matière ou de la *masse* du corps soumis à son action. C'est dans ce but qu'a été créée la *balance bifilaire*. Elle consiste (fig. 143) en une sorte de trapèze ABB'A' formé de deux côtés rigides horizontaux AA', BB' et deux fils inextensibles et supposés dénués de toute élasticité de torsion, AB, A'B'. Les points A et A' sont fixes, les points B et B' appartiennent à une tige rigide aussi légère que possible DD' au milieu C de laquelle est pendu un poids P.

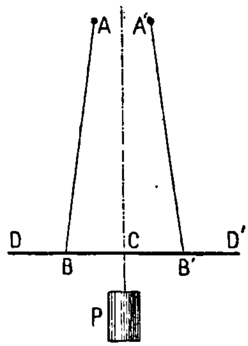


Fig. 143

Si la tige DD' est soumise à l'action d'un couple tendant à la dévier de sa position d'équilibre (qui est celle où le centre de gravité de l'ensemble est le plus bas possible et où les quatre côtés du trapèze sont dans un même plan vertical), on démontre facilement qu'elle tourne d'un angle θ donné par l'équation suivante dans laquelle on désigne par $2a$, $2b$, l, les longueurs AA', BB' et AB, A'B'; par p le poids de tout le système mobile, le poids des fils de suspension étant considéré comme négligeable, et enfin par C le couple qu'il s'agit de mesurer

$$C = \frac{pab \sin \theta}{\sqrt{l^2 - (b-a)^2 - 4ab \sin^2 \theta}}.$$

Dans la plupart des cas, les côtés a et b sont très petits par rapport à la longueur l des fils de suspension, de sorte que cette équation se simplifie et peut s'écrire

$$C = \frac{pab}{l} \sin \theta.$$

Supposons, par exemple, que l'on ait :

$p = 1$ gramme, $\quad a = b = 1$ centimètre, $\quad l = 50$ centimètres.

Le couple C exprimé en dynes-centimètres aura pour valeur

$$C = 981 \times \frac{1 \times 1}{50} \sin \theta = 19{,}62 \sin \theta$$

ou, si l'angle θ n'excède pas 10 degrés

$$C = 19{,}62\theta.$$

Un fil d'argent de même longueur et de $\frac{1}{10}$ de millimètre de diamètre, donnerait lieu, en vertu de son élasticité, à un couple de torsion égal à $5{,}6\,\theta$; il serait donc trois fois et demie plus sensible et cette sensibilité ne dépendrait pas du poids p, tandis que dans la balance bifilaire, elle est au contraire en raison inverse du poids p. Nous voyons donc que la balance bifilaire ne peut rivaliser avec la balance de torsion et que, pour la mesure des forces extrêmement petites, cette dernière seule doit être employée.

Il est essentiel de remarquer que les fils de la suspension bifilaire se tordent d'un angle égal à la déviation θ du côté inférieur BB' du trapèze déformable ABB'A' et que le couple dû à cette torsion vient s'ajouter au couple dû à l'action de la pesanteur et dont nous venons de calculer la valeur, de sorte que si ces deux couples étaient du même ordre de grandeur, l'avantage attribué à la balance bifilaire deviendrait illusoire. Il est donc nécessaire de n'employer comme fils de suspension que des fils de cocon, à moins que les forces que l'on veut mesurer ne soient très supérieures à celles que peut développer la torsion des fils de suspension.

Bien que le couple développé par une déviation déterminée de l'aiguille DD' puisse se calculer d'avance en fonction des quantités p, a, b, l, il est toujours nécessaire de contrôler le résultat du calcul par un tarage direct au moyen de la méthode dynamique employée pour la balance de torsion.

§ 2. — MOMENT MAGNÉTIQUE D'UN AIMANT.

270. — Mesure du moment magnétique d'un aimant. — On a vu le rôle considérable que joue, dans les actions exercées par les aimants, le produit auquel on a donné le nom de moment magnétique.

Nous verrons d'ailleurs qu'il peut servir de base à la mesure de l'intensité des courants électriques, ce qui lui donne une importance particulière au point de vue des applications de l'Électricité. Les méthodes qui permettent de le mesurer exactement présentent donc un intérêt particulier.

Nous allons en faire connaître trois dont nous exposerons d'abord brièvement le principe.

Première méthode. — La plus ancienne et la plus fréquemment employée est celle de Gauss. Étant donné un aimant dont le moment magnétique $\mathcal{M}$ est inconnu et un champ magnétique uniforme d'intensité $\mathcal{H}$, également inconnue, dans lequel l'aimant est placé, si l'on pouvait mesurer le produit $\mathcal{M}\mathcal{H}$ et le rapport $\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{H}}$, on en déduirait immédiatement la valeur de $\mathcal{M}$ et celle de $\mathcal{H}$.

Soit en effet

$$\mathcal{M}\mathcal{H} = P, \qquad \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{H}} = Q.$$

On trouve immédiatement

$$\mathcal{M}^2 = PQ, \qquad \mathcal{H}^2 = \frac{P}{Q}.$$

Deuxième méthode. — On donne deux aimants dont les moments magnétiques $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ sont inconnus et on détermine le produit $\mathcal{M}\mathcal{M}'$ et le rapport $\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}'}$.

On a alors

$$\mathcal{M}\mathcal{M}' = P, \qquad \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}'} = Q \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{M}^2 = PQ, \qquad \mathcal{M}'^2 = \frac{P}{Q}.$$

Troisième méthode. — On a trois aimants dont les moments inconnus sont $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$. On détermine les produits

$$\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2 = P_3, \qquad \mathcal{M}_1\mathcal{M}_3 = P_2, \qquad \mathcal{M}_2\mathcal{M}_3 = P_1$$

et on déduit, en multipliant membre à membre deux quelconques de ces équations et en divisant le produit par la troisième équation

$$\mathcal{M}_1^2 = \frac{P_2P_3}{P_1}, \qquad \mathcal{M}_2^2 = \frac{P_1P_3}{P_2}, \qquad \mathcal{M}_3^2 = \frac{P_1P_2}{P_3}.$$

Nous voyons que ces trois méthodes nécessitent la détermination de deux au moins des quatre quantités

$$\mathfrak{M}\mathcal{H}, \qquad \mathfrak{M}\mathfrak{M}', \qquad \frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{H}}, \qquad \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}'}.$$

Nous allons donc décrire les procédés expérimentaux employés dans ce but.

271.— Détermination de $\mathfrak{M}\mathcal{H}$. — Le champ magnétique employé est généralement celui de la Terre, mais, comme nous le verrons bientôt, les lignes de force de ce champ font avec le plan horizontal un angle auquel on a donné le nom d'*angle d'inclinaison* et qui à Paris diffère peu de 65 degrés. En raison de la disposition adoptée pour la suspension des aimants que l'on soumet à son action, et qui consiste, comme nous le savons, en un fil très fin de soie ou de métal, on ne peut mesurer que la composante horizontale du couple développé par le champ magnétique sur l'aimant. Il en résulte que, en appelant $\mathfrak{M}$, l'intensité réelle du champ terrestre, le couple développé sur l'aiguille mobile autour d'un axe vertical (fil de suspension), a pour mesure le produit du couple $\mathfrak{M}\mathcal{H}$ par le cosinus de l'angle d'inclinaison; on a donc $P = \mathfrak{M}\mathcal{H} \cos \beta$, et si l'on désigne par h le produit $\mathcal{H} \cos \beta$, cette expression devient

$$P = \mathfrak{M}h,$$

h s'appelle la *composante horizontale* du champ magnétique de la Terre. Sa valeur à Paris, mesurée par des procédés que nous allons faire connaître, était au 1er janvier 1892 égale à 0,1955; elle s'est accrue régulièrement depuis cette époque et elle a atteint le 1er janvier 1896 la valeur 0,1967. Ce nombre signifie qu'une masse magnétique égale à l'unité, placée dans le champ magnétique de Paris, serait sollicitée par une force dont la composante horizontale aurait pour valeur $0^{\text{dyne}},1967$, soit $\frac{1}{5}$ de milligramme.

272. — Mesure du produit $\mathfrak{M}h$. — Pour mesurer le produit $\mathfrak{M}h$, prenons une aiguille aimantée AB (fig. 144) au milieu C de laquelle est soudée à angle droit une tige CD dont l'extrémité D est attachée à un fil de cocon, de façon que le centre de gravité de cette aiguille soit situé à quelques centimètres du point D. Cette disposition a pour but de combattre la tendance de l'aiguille à s'incliner notablement par rapport au plan horizontal sous l'influence

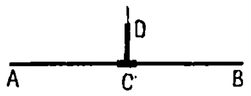


Fig. 144

des lignes de force du champ magnétique terrestre qui font avec ce plan un angle de 65°.

Le couple de torsion du fil de cocon étant absolument négligeable par rapport à la force directrice exercée par la Terre, l'aiguille va se placer suivant la direction du méridien magnétique. Si on l'écarte de cette position, elle y revient en effectuant une série d'oscillations dont l'amplitude diminue très lentement et dont la durée permet de calculer le produit $\mathfrak{M} h$; on a en effet, en appelant t la durée d'une oscillation simple (demi-période),

$$t = \pi \sqrt{\frac{\mathrm{I}}{\mathfrak{M} h}},$$

formule dans laquelle I désigne le moment d'inertie de l'aiguille pris par rapport à un axe qui se confond avec le fil de suspension. On sait que le moment d'inertie a pour mesure la somme des produits obtenus en multipliant la masse de chaque molécule par le carré de sa distance à l'axe de rotation.

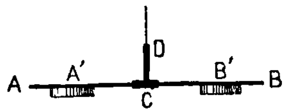


Fig. 145

Si l'aiguille avait une forme géométrique simple, on pourrait calculer la valeur de ce moment d'inertie, mais il est plus exact de la mesurer directement de la façon suivante. En deux points A′ et B′ de l'aiguille situés à des distances égales du centre de figure C (fig. 145), on fixe avec un peu de colle ou de cire deux masses additionnelles égales, en métal non magnétique et ayant la forme de disques ou de cylindres très aplatis. Le rayon r de ces disques, le poids p de chacun d'eux et la distance d de leur centre à l'axe CD doivent être mesurés exactement. Les disques étant placés en A′ et B′, on mesure le temps d'une oscillation simple, ce qui se fait en comptant par exemple avec un chronomètre donnant les cinquièmes de seconde la durée de 20 oscillations et en divisant le résultat par 20.

Soit t la durée de l'oscillation simple lorsque l'aiguille oscille dans les masses additionnelles et t' cette durée lorsqu'elle est munie desdites masses, et soit I′ le moment d'inertie de l'ensemble des masses. On a les deux équations

$$t = \pi\sqrt{\frac{I}{\mathcal{M}h}}, \qquad t' = \pi\sqrt{\frac{I + I'}{\mathcal{M}h}},$$

d'où on tire

$$\mathcal{M}h = \frac{\pi^2 I'}{t'^2 - t^2},$$

Il reste à connaître la valeur de I′. Or, on la déduit immédiatement des quantités p, r et d, car on a

$$I' = 2p\left(\frac{r^2}{2} + d^2\right).$$

Si l'aiguille aimantée et les masses additionnelles étaient trop lourdes pour être supportées par un fil de cocon, on pourrait employer un faisceau de fils collés entre eux sans torsion préalable, car nous avons dit plus haut qu'un faisceau composé même de 12 fils avait un couple de torsion négligeable; il peut cependant supporter plus de cent grammes sans courir aucun risque de rupture.

Mais si le poids de l'aimant que l'on fait osciller devenait considérable, on devrait avoir recours à un fil métallique, de préférence en acier ainsi que nous l'avons déjà dit et alors il serait impossible de négliger le couple élastique produit par la torsion de ce fil et qui s'ajouterait au couple magnétique. Cette correction serait d'ailleurs facile à faire; on déterminerait le couple de torsion C_1 du fil comme nous l'avons expliqué au commencement de ce chapitre (267), puis on mesurerait la durée des oscillations de l'aimant et on aurait alors les équations

$$t = \pi \sqrt{\frac{I}{C_1 + \mathcal{M}h}}, \qquad t' = \pi \sqrt{\frac{I + I'}{C_1 + \mathcal{M}h}},$$

qui feraient connaître la durée de l'oscillation de l'aimant seul et de l'aimant muni des masses additionnelles. On en tirerait

$$C_1 + \mathcal{M}h = \frac{\pi^2 I'}{t'^2 - t^2} \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{M}h = \frac{\pi^2 I'}{t'^2 - t^2} - C_1.$$

Nous répétons encore que dans ces formules toutes les longueurs doivent être exprimées en centimètres, les poids en grammes (parce que les poids représentent ici des *masses* et non des *forces*) et les couples en dynes appliquées à un bras de levier de 1 centimètre.

273. — **Méthode statique.** — On peut aussi appliquer, pour trouver $\mathcal{M}h$, le principe de la balance de torsion de Coulomb, en équilibrant l'action de la Terre sur l'aimant mobile par la torsion du fil de suspension préalablement taré. Mais on doit avant tout, déterminer la direction du méridien magnétique qui passe par le fil, en remplaçant le fil métallique de suspension par un fil de cocon qui n'oppose aucune résistance à l'orientation de l'aimant ou de l'aiguille aimantée. Cette direction étant repérée, on remet en place l'aimant et le fil métallique soudé à la partie supérieure à une alidade munie d'un bouton qui permet de la faire tourner d'un angle déterminé ; on tourne l'alidade jusqu'à ce que la ligne des pôles de l'aimant coïncide avec le méridien magnétique, ce qui ne peut avoir lieu que si le fil n'éprouve aucune torsion, et l'on note la division de l'alidade correspondant à cette position d'équilibre. On la fait ensuite tourner d'un angle tel que l'aimant qui se meut devant un cercle divisé fasse avec le méridien magnétique un angle α très peu différent d'un angle droit (1 à 2° par exemple). Soit β le déplacement angulaire imprimé à l'alidade pour obtenir ce résultat. La torsion du fil sera évidemment égale à $\beta - \alpha$, et le couple correspondant sera, en conservant nos notations précédentes

$$C_1(\beta - \alpha),$$

tandis que le couple développé par l'action magnétique de la Terre, aura pour valeur :

$$\mathcal{M}h \sin \alpha.$$

On aura donc

$$\mathcal{M}h \sin \alpha = C_1(\beta - \alpha) \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{M}h = \frac{C_1(\beta - \alpha)}{\sin \alpha}$$

ou, en supposant que α ne diffère de 90 degrés que de 3 degrés au plus

$$\mathcal{M}h = C_1(\beta - \alpha).$$

274. — **Détermination de $\frac{\mathcal{M}}{h}$.** — Le produit $\mathcal{M}h$ étant connu, il faut déterminer le rapport $\frac{\mathcal{M}}{h}$. La méthode employée par Gauss consiste en ceci. Une aiguille aimantée suspendue à un fil de cocon est placée dans le méridien magnétique OO′ suivant lequel elle se dirige jusqu'à ce que l'on place à une certaine distance et perpendiculairement à OO′ l'aimant AB qui a servi à déterminer le produit $\mathcal{M}h$. Les actions exercées par les deux pôles de cet aimant sur les deux pôles de l'aiguille ab, tendent à la rendre parallèle à l'aimant, mais dès qu'elle est déviée de la direction du méridien magnétique OO′, elle est soumise à l'action d'un couple inverse du premier et proportionnel au sinus de la déviation, de sorte qu'elle prend une position intermédiaire de laquelle on déduit le rapport $\frac{\mathcal{M}}{h}$.

La déviation étant très petite, on peut sans erreur appréciable, considérer les deux pôles a et b comme soumis aux mêmes forces que si ab était resté dans la direction OO′. Or nous avons déjà calculé le couple développé par les actions mutuelles de deux aimants placés dans des conditions identiques à celle qui est représentée ci-contre (fig. 146), mais nous avons, pour simplifier le résultat, admis que le rapport de la longueur de ces aimants à la distance de leurs centres pouvait être négligé. Nous n'admettons pas cette hypothèse dans le cas actuel parce que les conséquences tirées des mesures de ce genre étant très importantes pour la détermination des unités électro-magnétiques fondamentales, on doit les faire avec l'exactitude la plus grande possible.

Désignons par μ et $-\mu$ la quantité de magnétisme libre à chaque pôle de l'aimant AB et par 2λ la distance de ces pôles. Désignons par μ', $-\mu'$ et $2\lambda'$ les mêmes quantités correspondant à l'aiguille ab et par D la distance OO'. En supposant que cette der-

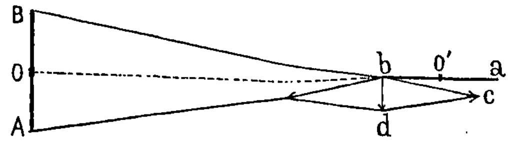


Fig. 146

nière dévie d'une très petite quantité, nous pouvons calculer les moments des forces appliquées à chaque pôle mobile comme si leur position restait la même ; nous aurons alors pour l'expression de la force exercée par B sur b, que nous représenterons par le symbole $f_{(Bb)}$

$$f_{(Bb)} = \frac{\mu\mu'}{\overline{Bb}^2} = \frac{\mu\mu'}{\lambda^2 + (D-\lambda')^2}.$$

La composante de cette force appliquée en b, estimée perpendiculairement à la direction ab, a pour valeur

$$f_{(Bb)} \cos \widehat{cbd}.$$

Mais

$$\cos \widehat{cbd} = \sin \widehat{BbO} = \frac{\overline{OB}}{\overline{Bb}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + (D-\lambda')^2}}.$$

Donc la composante de $f_{(Bb)}$ dirigée suivant bd, a pour valeur

$$f_{(bd)} = \frac{\lambda\mu\mu'}{(\lambda^2 + (D-\lambda')^2)^{\frac{3}{2}}},$$

La force $f_{(Ab)}$ émanée du pôle A, a de même une composante appliquée en b, perpendiculaire à ab et égale à celle que nous venons de calculer. Il en résulte que le pôle b de l'aiguille est sollicité par une force totale dont la composante bd a une valeur double ; on a donc

$$\textit{Composante totale suivant} \quad bd = \frac{2\lambda\mu\mu'}{(\lambda^2 + (D-\lambda')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour trouver le moment de cette force il suffit, puisqu'elle est perpendiculaire à ab, de la multiplier par la distance bO' de son point d'application à l'axe de rotation. On a donc

$$\left.\begin{array}{c}\textit{Moment des forces appliquées en } b\\ \textit{par l'aimant } \mathrm{AB}\end{array}\right\} = \frac{2\lambda\lambda'\mu\mu'}{(\lambda^2+(\mathrm{D}-\lambda')^2)^{\frac{3}{2}}} = \mathrm{C}.$$

Si nous cherchons de même la valeur du moment des forces appliquées au second pôle a de l'aiguille, nous trouverons que le seul changement à apporter à l'expression ci-dessus, est de changer $\mathrm{D}-\lambda'$ en $\mathrm{D}+\lambda'$, de sorte que nous trouvons en ajoutant les deux moments dont la somme est égale au moment total,

$$\left.\begin{array}{c}\textit{Moment total des forces}\\ \textit{émanées de l'aimant } \mathrm{AB}\end{array}\right\} = 2\lambda\mu\lambda'\mu'\left(\frac{1}{(\lambda^2+(\mathrm{D}-\lambda')^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{(\lambda^2+(\mathrm{D}+\lambda')^2)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Développons les carrés $(\mathrm{D}-\lambda')^2$ et $(\mathrm{D}+\lambda')^2$ et mettant en facteur commun $\frac{1}{\mathrm{D}^3}$, nous pouvons écrire cette expression sous la forme

$$\frac{1}{2}\,\frac{2\lambda\mu.2\lambda'\mu'}{\mathrm{D}^3}\left[\frac{1}{\left[\left(\frac{\lambda}{\mathrm{D}}\right)^2+\left(1-\frac{\lambda'}{\mathrm{D}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{\left[\left(\frac{\lambda}{\mathrm{D}}\right)^2+\left(1+\frac{\lambda'}{\mathrm{D}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Si on développe en série les termes contenus entre les crochets et qu'on néglige les puissances de $\frac{1}{\mathrm{D}}$ supérieures à la cinquième, on peut écrire

$$\textit{Moment total des forces appliquées à l'aimant } ab = \frac{2\lambda\mu.2\lambda'\mu'}{\mathrm{D}^3}\left(1+\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{D}^2}\right)$$

en désignant par A un coefficient qui est une fonction du deuxième degré de λ et de λ'.

275. — Si la distance 2λ des pôles de l'aimant AB était connue ainsi que celle des pôles de l'aimant ab, le moment total des forces appliquées à ce dernier pourrait se calculer rigoureusement sans avoir recours au développement en série ; mais il n'en est pas ainsi, et c'est pourquoi il faut, dans la formule transformée qui contient la quantité inconnue A, éliminer celle-ci. On y parvient en mesurant expérimentalement la valeur du moment appliqué à l'aimant mobile *ab* lorsqu'on place successivement l'aimant fixe AB à deux distances différentes D_1 et D_2.

Pour faire cette mesure, on laisse l'aimant mobile *ab* obéir librement aux actions simultanées de l'aimant AB et du magnétisme terrestre. Il se place alors suivant une direction qui fait avec le méridien magnétique OO′ un angle très-petit que nous désignerons par θ. Dans cette position, le moment des forces dues à l'action de AB, a pour valeur

$$\frac{2\lambda\mu . 2\lambda'\mu'}{D^3}\left(1+\frac{A}{D^2}\right)\cos\theta.$$

Le moment dû à l'action de la Terre est, d'autre part, égal à

$$2\lambda'\mu' h \sin\theta.$$

Ces deux moments devant être égaux pour qu'il y ait équilibre, on a

$$2\lambda'\mu' h \sin\theta = \frac{2\lambda\mu . 2\lambda'\mu'}{D^3}\left(1+\frac{A}{D^2}\right)\cos\theta,$$

d'où on tire

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2\lambda\mu}{h}\left(\frac{1}{D^3}+\frac{A}{D^5}\right).$$

Si on répète l'expérience pour deux distances différentes D_1, D_2 de l'aimant fixe AB, on aura deux valeurs différentes θ_1 et θ_2 de la déviation de l'aiguille *ab* qui devront satisfaire à l'équation ci-dessus. On pourra alors éliminer le terme A et on trouvera facilement

$$\frac{2\lambda\mu}{h} = \frac{D_1^5 \operatorname{tg}\theta_1 - D_2^5 \operatorname{tg}\theta_2}{D_1^2 - D_2^2}.$$

Mais comme le terme $2\lambda\mu$ est précisément égal au moment magnétique $\mathfrak{M}$ de l'aimant AB, on voit que cette expression n'est autre chose que le rapport

$$\frac{\mathfrak{M}}{h} = Q.$$

Cette méthode est due à Gauss.

276. — La nécessité de faire deux expériences, l'une en plaçant le milieu de l'aimant AB à la distance D_1 du milieu de l'aiguille, l'autre en prenant une distance différente, tient uniquement à l'ignorance où l'on est de la véritable position des pôles dans l'intérieur de ces deux aimants. Cependant des considérations très simples basées sur les recherches de Coulomb, permettent d'affirmer que la distance λ de chaque pôle au centre de l'aimant est comprise entre les $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{6}$ de la demi-longueur de l'aimant lorsqu'il a la forme d'un barreau de section constante. On ne commettrait donc qu'une erreur relativement petite sur la véritable valeur de $\frac{\lambda}{D}$ en prenant λ égal aux $\frac{3}{4}$ de la demi-longueur du barreau.

Pour que la valeur de $\frac{\mathfrak{M}}{h}$ obtenue par le procédé que nous venons d'indiquer soit aussi exacte que possible, il faut en ce qui concerne les formules, que le rapport $\frac{D}{\lambda}$ soit le plus grand possible, tandis que la précision des mesures est au contraire d'autant plus grande que l'angle θ est lui-même plus grand, c'est-à-dire que $\frac{D}{\lambda}$ est plus petit. Nous retrouverons d'ailleurs cet antagonisme entre les conditions exigées par les formules et celles qui conviennent le mieux aux mesures expérimentales dans toutes les questions relatives à la détermination des unités électriques, et c'est ce qui rend cette détermination si difficile.

277. — On pourrait augmenter de plusieurs manières la grandeur du couple produit par AB (fig. 147) sur l'aiguille aimantée, sans nuire à l'exactitude des calculs.

1° En équilibrant l'action exercée par AB sur l'aiguille *ab* au

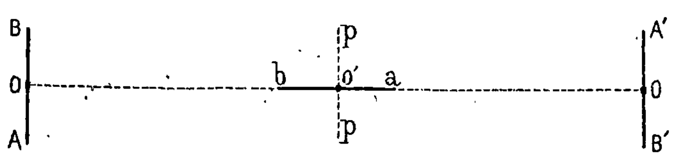


Fig. 147

moyen d'un second aimant A'B' sensiblement égal à AB mais dirigé en sens contraire et occupant de l'autre côté de *ab* une position A'B' symétrique de celle de AB. Les actions de ces deux aimants sur *ab* sont de signe contraire et on peut les rendre rigoureusement égales de manière à ramener *ab* exactement dans le méridien magnétique en faisant varier la distance de A'B' jusqu'à ce que le résultat soit atteint. Puis on retourne A'B' bout pour bout de façon que les actions des deux aimants s'ajoutent au lieu de se retrancher; comme elles sont égales, le couple exercé sur *ab* est double de ce qu'il était lorsque AB agissait seul.

2° On peut encore doubler l'exactitude de la lecture en faisant une première observation lorsque les barreaux sont orientés de façon que leurs actions supposées égales s'ajoutent et en les retournant ensuite *tous les deux* bout pour bout; l'aiguille dévie alors par rapport à OO', d'une quantité égale mais de signe contraire à la première déviation de sorte que, finalement, l'angle total mesuré sera égal à 4θ. On pourrait généraliser ce procédé en plaçant d'autres barreaux sensiblement égaux à AB sur une perpendiculaire PP élevée en O' à l'aiguille *ab*, de façon à quadrupler le couple exercé sur elle d'abord dans un sens, puis dans l'autre et, cela, sans sortir des conditions dans lesquelles les formules établies plus haut sont exactes.

278. — Mais alors la déviation obtenue pourrait devenir trop grande et dans ce cas la formule qui donne la valeur du couple développé par l'aimant AB, deviendrait inexacte, parce qu'elle suppose que l'aiguille *ab* ne dévie pas sous l'action de ce couple, les angles B*b*O, A*b*O (fig. 146) étant supposés toujours égaux. Il faudrait, pour supprimer complètement cette cause d'erreur, ramener à chaque observation l'aiguille *ab* dans le méridien magnétique au moyen d'une torsion du fil de suspension qui devrait alors être métallique et dont la position naturelle correspondrait à la position de l'aiguille *ab* lorsqu'elle n'est soumise qu'à la seule action du magnétisme terrestre. Il est facile de voir que l'emploi de la torsion du fil de suspension permet, avec 2 aimants AB, A'B' agissant comme nous venons de l'indiquer plus haut, d'obtenir dans l'évaluation du couple développé sur *ab*, la même précision qu'avec 4 aimants agissant sur une aiguille suspendue avec un fil de cocon dont la torsion ne peut être utilisée à cause de l'extrême petitesse du couple qui en résulte. Mais il faudrait, après avoir ainsi équilibré les actions dues aux aimants seuls, au moyen de la torsion du fil de suspension, chercher la déviation de l'aiguille capable de produire sous l'action de la Terre seule, un couple précisément égal au couple de torsion. Pour cela on opère de la façon suivante. Appelons θ l'angle dont il faut tordre le fil de suspension pour ramener l'aiguille dans le méridien magnétique malgré l'action de l'aimant AB. Ce dernier étant enlevé, l'aiguille va dévier sous l'influence de la torsion du fil, mais, cette déviation l'écartant de la direction du méridien magnétique, fera naître un couple de sens contraire à celui dû à la torsion du fil; l'aiguille s'arrêtera donc dans une position où elle fera avec le méridien magnétique un angle que nous désignerons par α. L'angle de torsion du fil ne sera donc plus θ mais bien $\theta - \alpha$; et l'équilibre aura lieu lorsque le couple dû au magnétisme terrestre sera égal au couple dû à l'angle de torsion $(\theta - \alpha)$. Or le premier de ces couples a pour valeur comme nous le savons

$$2\lambda'\mu'h \sin \alpha = \mathcal{M}'h \sin \alpha;$$

le second est égal à $C_1(\theta - \alpha)$, C_1 désignant le couple nécessaire pour tordre le fil de suspension d'un angle égal à l'unité (57°,296). On a donc l'équation

$$\mathcal{M}'h \sin \alpha = C_1(\theta - \alpha).$$

D'autre part, lorsque l'action de l'aimant AB est équilibrée par la seule torsion du fil, le couple développé par AB sur *ab* est égal au couple de torsion ou à $C_1\theta$. Cherchons maintenant quelle serait la déviation de l'aiguille capable de donner lieu, *sous la seule influence de la Terre*, à ce même couple $C_1\theta$. Cette déviation que nous désignerons par β sera donnée par l'équation

$$\mathcal{M}'h \sin \beta = C_1\theta.$$

Divisant ces deux équations membre à membre, il vient

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\theta}{\theta - \alpha} \qquad \text{d'où} \qquad \sin \beta = \frac{\theta}{\theta - \alpha} \sin \alpha.$$

Il résulte de là que le couple magnétique produit par la Terre et qui serait capable d'équilibrer le couple dû à l'aimant AB, a pour valeur

$$\mathcal{M}'h \sin \beta = \frac{\theta}{\theta - \alpha} \mathcal{M}'h \sin \alpha.$$

Nous pouvons, grâce à cet artifice, éliminer la détermination du couple C_1 dû à l'unité d'angle de torsion du fil, en admettant seulement que dans une expérience de quelques minutes, il y a proportionnalité entre les angles de torsion et les couples élastiques auxquels ils donnent lieu. Le coefficient C_1 peut donc varier d'un jour à l'autre sans que cette variation entraîne des erreurs.

L'équation qui nous a servi à déterminer le rapport $\frac{\mathcal{M}}{h}$, deviendrait alors si on employait cette méthode :

$$\frac{\mathcal{M}}{h} = \frac{D_1^5\theta_1(\theta_2 - \alpha_2) \sin \alpha_1 - D_2^5\theta_2(\theta_1 - \alpha_1) \sin \alpha_2}{(D_1^2 - D_2^2)(\theta_1 - \alpha_1)(\theta_2 - \alpha_2)},$$

dans laquelle $\mathcal{M}$ désigne le moment magnétique $2\lambda\mu$ de l'aimant AB; α_1, θ_1 la valeur des angles α et θ, lorsqu'on fait une première expérience à la distance D_1; et α_2, θ_2 cette même valeur lorsqu'on opère à la distance D_2.

279. — On voit que la mesure du produit $\mathcal{M}h$ présente beaucoup plus de garanties d'exactitude que celle du rapport $\frac{\mathcal{M}}{h}$, et qu'elle est en outre, plus simple parce que la distribution du magnétisme le long du barreau aimanté a, dans ce dernier cas, une influence qui n'existe pas dans le premier. On peut cependant la diminuer considérablement

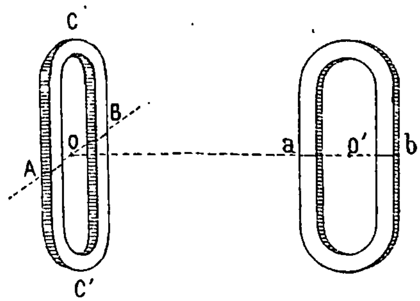


Fig. 148

en donnant aux deux aimants AB et *ab* la forme dite en fer à cheval et en composant chacun d'eux de deux aimants égaux opposés par les pôles de même nom comme le montre la fig. 148 dans laquelle le double aimant fixe ACB, AC′B est représenté en perspective, la ligne polaire AOB étant perpendiculaire à la droite OO′ sur laquelle est située la ligne polaire *a*O′*b* du second double aimant mobile. L'avantage de cette disposition consiste en ce que toutes les masses magnétiques réparties le long des aimants sont à la même distance de l'axe neutre et agissent par conséquent avec le même bras de levier; en outre les régions polaires étant concentrées dans les parties rectilignes des deux aimants, ceux-ci peuvent être considérés sans erreur sensible comme se réduisant à 4 pôles coïncidant avec les centres de gravité des sections circulaires des barreaux que nous supposons de forme cylindrique.

280. — **Quantité totale de magnétisme d'un aimant.** — Une propriété intéressante de ce dispositif, consiste en ce qu'il permet de mesurer la quantité totale de magnétisme de chaque région polaire. En effet, le couple développé par l'action d'un champ magnétique uniforme sur un aimant est égal à la somme de tous les couples dus aux quantités de magnétisme réparties sur chaque élément de surface de l'aimant; il a donc pour valeur en appelant μ, μ', μ''....., toutes ces quantités partielles et λ, λ', λ'' ....., leurs distances respectives à la ligne neutre (qui est aussi l'axe de rotation de l'aimant),

$$h\lambda\mu + h\lambda'\mu' + h\lambda''\mu'' + \dots = h\Sigma\lambda\mu.$$

Cette somme doit être doublée puisque les deux régions de l'aimant situées de part et d'autre de l'axe neutre sont chargées de quantités de magnétisme égales à $-\mu$, $-\mu'$, $-\mu''$ ....., agissant sur des bras de levier $-\lambda$, $-\lambda'$, $-\lambda''$ ..... En supposant toutes les masses μ, μ', μ'' concentrées en un même point qui n'est autre chose que ce qu'on appelle *le pôle*, on aurait, en désignant par λ_1 la distance de ce pôle à l'axe neutre,

$$h\lambda_1(\mu + \mu' + \mu'' + \dots) = h\Sigma\lambda\mu,$$

d'où

$$\lambda_1 = \frac{\Sigma\lambda\mu}{\Sigma\mu}.$$

Or, si toutes les masses magnétiques sont situées à des distances sensiblement égales de l'axe neutre, comme cela a lieu dans un aimant en fer à cheval dont les branches cylindriques ont un rayon petit par rapport à leur écartement $2l$, cette égalité donne

$$\lambda_1 = \frac{l\mu + l\mu' + l\mu'' + \cdots}{\mu + \mu' + \mu''} = l.$$

Mais
$$\Sigma\mu = \frac{\Sigma\lambda\mu}{\lambda_1} = \frac{\Sigma\lambda\mu}{l}.$$

Or $2\Sigma\lambda\mu$ est le moment magnétique de l'aimant et peut être mesuré par les procédés que nous avons décrits, il suffit donc de diviser ce moment magnétique par l'écartement $2l$ des axes géométriques des deux branches pour trouver la masse magnétique *totale* de chaque région polaire de l'aimant.

281. — Détermination du produit $\mathcal{M}\mathcal{M}'$ des moments magnétiques de deux aimants. — L'équation que nous avons donnée au n° 274 donne la solution de ce problème lorsqu'on considère l'aimant mobile comme étant représenté par *ab*, et l'aimant fixe par AB. Mais on peut renverser les rôles et chercher le couple développé *sur* AB *supposé mobile par ab supposé fixe*. Dans ce dernier cas, le moment des forces qui tendent à faire tourner AB autour de son centre O, a pour valeur en conservant les mêmes notations

$$2\lambda\mu\mu'\left(\frac{D-\lambda'}{[\lambda^2+(D-\lambda')^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{D+\lambda'}{[\lambda^2+(D+\lambda')^2]^{\frac{3}{2}}}\right) = M,$$

ou en négligeant le carré $\frac{\lambda}{D}$

$$M = \frac{8\lambda\mu\lambda'\mu'}{D^3} = 2\,\frac{2\lambda\mu . 2\lambda'\mu'}{D^3} = \frac{2\mathcal{M}\mathcal{M}'}{D^3}.$$

On n'aura donc qu'à mesurer le couple produit sur l'un des aimants suspendu à un fil élastique et *orienté d'avance dans le méridien magnétique*, (afin d'éliminer l'influence directrice de la Terre) pour en conclure le produit $\mathcal{M}\mathcal{M}'$ soit par la formule du n° 274 si l'aimant mobile occupe la position *ab*, soit par la formule ci-dessus que l'on rend comparable à la première en le mettant sous la forme

$$M = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{M}'}{2D^3}\left[\left(\frac{D-\lambda'}{\lambda'}\right)\left(\frac{D^2}{\lambda^2+(D-\lambda')^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{D+\lambda'}{\lambda'}\right)\left(\frac{D^2}{\lambda^2+(D+\lambda')^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

qui a l'avantage de se prêter à un calcul *exact* et rapide parce que les termes entre crochets sont tous du degré zéro.

Prenons par exemple

$$\lambda = 1, \qquad D = 10.$$

Nous trouvons

$$M = 1{,}979 \times \frac{2\mathfrak{M}\mathfrak{M}'}{D^3}.$$

On voit que l'emploi de la formule simplifiée

$$M = 2\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{M}'}{D^3}$$

ferait commettre une erreur relative de 1 °/₀ dans la valeur de M.

On peut remarquer qu'en fixant *ab* et en rendant mobile AB, au lieu de faire l'inverse, la valeur du couple moteur est sensiblement doublée.

Il vaut donc mieux dans ces sortes de mesures placer l'aimant fixe de façon que sa ligne polaire prolongée passe par le centre de l'aimant mobile à la direction duquel elle est perpendiculaire.

Enfin, on simplifiera considérablement les calculs en dressant une table des valeurs exactes de l'expression comprise entre crochets dans laquelle, D étant représenté par le nombre 1000, λ varie par exemple de 5 en 5 unités depuis 50 jusqu'à 200.

Cette valeur exacte étant connue et désignée par K, on aura

$$M = \frac{K}{2}\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{M}'}{D^3} \qquad \text{d'où} \qquad \mathfrak{M}\mathfrak{M}' = \frac{2D^3}{K}M.$$

Quant aux valeurs que l'on devra attribuer à λ en valeur absolue (en centimètres), elles seront comprises comme nous l'avons déjà dit entre les $\frac{2}{3}$ et les $\frac{5}{6}$ de la longueur de l'aimant s'il est rectiligne.

282. — Détermination du rapport $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}'}$ des moments magnétiques de deux aimants. — Si les aimants sont tous deux de dimensions assez petites pour qu'on puisse les suspendre à un faisceau de fils de cocon, on trouvera facilement le rapport de leurs moments en les fixant à angle droit l'un par rapport à l'autre (tout en les séparant de quelques centimètres pour qu'ils ne s'influencent pas réciproquement, ce qui altèrerait leur moment magnétique) et en suspendant cet ensemble à un fil dénué d'élasticité. Le couple produit par la Terre sur chacun d'eux, aura pour valeur en désignant par θ et θ' l'angle de leurs lignes polaires avec le méridien magnétique,

$$\mathcal{M}h \sin \theta \quad \text{pour le premier,} \qquad \mathcal{M}'h \sin \theta' \quad \text{pour le second.}$$

Mais on a $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$, parce que leurs lignes polaires sont à angle droit, de sorte que lorsque cet ensemble sera en équilibre, on aura l'équation

$$\mathcal{M}h \sin \theta = \mathcal{M}'h \cos \theta \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathcal{M}'}{\mathcal{M}} = \operatorname{tg} \theta,$$

Cette méthode a été indiquée par M. Bouty qui s'en est servi surtout pour déterminer le moment magnétique des aimants de petite dimension.

Autre méthode. — Si les aimants sont trop lourds pour être suspendus à un fil de soie, on peut les placer sur une circonférence au centre de laquelle se trouve une très petite aiguille aimantée orientée d'avance dans le méridien magnétique et suspendue à un fil de cocon ; les aimants sont dirigés de façon que leurs lignes polaires prolongées passent par le centre de la petite aiguille, et que leurs points neutres occupent sur la circonférence, des positions espacées par un intervalle égal au quart de cette circonférence. On fait mouvoir les deux aimants en les maintenant toujours dirigés vers le centre et toujours espacés d'un quart de circonférence, jusqu'à ce que la petite aiguille aimantée occupe malgré leur présence, la même position que s'ils étaient enlevés, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'elle soit dirigée exactement dans le méridien magnétique. Le rapport des moments magnétiques des deux aimants est alors donné comme précédemment. En appelant θ l'angle que fait l'aimant $\mathcal{M}$ avec le méridien magnétique, l'angle de l'autre avec ce même méridien est égal à $\frac{\pi}{2} - \theta$

et l'on a, lorsque la petite aiguille est dirigée dans le méridien

$$\frac{\mathcal{M}'}{\mathcal{M}} = \operatorname{tg} \theta.$$

Autre méthode. — On peut enfin mettre les deux aimants dans le prolongement l'un de l'autre aux deux extrémités du même diamètre de la circonférence au centre de laquelle se trouve la petite aiguille aimantée, ce diamètre étant perpendiculaire au méridien magnétique, et faire varier la distance du plus puissant des deux jusqu'à ce que l'aiguille aimantée reste dans le méridien magnétique. L'équation approchée du numéro précédent donne alors, en désignant par m le moment de la petite aiguille

$$\frac{2\mathcal{M}m}{D^3} = \frac{2\mathcal{M}'m}{D'^3} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathcal{M}'}{\mathcal{M}} = \left(\frac{D'}{D}\right)^3.$$

§ 3. — MAGNÉTISME TERRESTRE.

283. — Direction et intensité des lignes de force du champ magnétique terrestre. — Ainsi que nous l'avons déjà dit, le Globe terrestre est entouré dans toute son étendue d'un champ magnétique dont les lignes de force ont une direction et une intensité variables d'un lieu à l'autre et même variable dans un même lieu avec le temps. La connaissance exacte de ces éléments est importante, non seulement au point de vue de la Physique du Globe, mais encore pour la détermination des unités électro-magnétiques qui servent de base aux mesures électriques industrielles. Nous avons vu, en effet, que toutes les formules qui permettent de déterminer l'élément important auquel on a donné le nom de moment magnétique d'un aimant, ne sont exactes que si les lignes de force qui agissent sur l'aimant peuvent être considérées comme parallèles. Cette condition ne peut être remplie que par le champ magnétique terrestre à cause de son immensité; aussi les physiciens ont-ils eu recours à son emploi, malgré son peu d'intensité, chaque fois qu'ils ont eu à effectuer des mesures exigeant une certaine précision.

La direction des lignes de force du champ terrestre est définie par deux angles. Le premier auquel on a donné le nom de *Déclinaison* est celui que fait avec le méridien astronomique un plan vertical passant par la ligne de force considérée ; le second ou *Inclinaison* est l'angle de cette ligne de force avec le plan horizontal.

Quant à l'intensité absolue du magnétisme terrestre qui, dans le système C. G. S., est mesurée par l'effort (exprimé en dynes) auquel serait soumise dans la direction des lignes de force une masse magnétique égale à l'unité, elle est d'un emploi assez rare. On se contente de mesurer sa composante horizontale par la méthode de Gauss (270-274), et de cette mesure combinée avec celle de l'angle d'inclinaison, on peut conclure immédiatement la composante verticale et l'intensité totale. On a en effet, en appelant h la composante horizontale, $\mathcal{H}$ l'intensité totale et β l'angle d'inclinaison

$$h = \mathcal{H} \cos \beta \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{H} = \frac{h}{\cos \beta}.$$

L'*Annuaire du Bureau des Longitudes* publie chaque année une table très complète des éléments du Magnétisme terrestre, dans laquelle on trouve l'inclinaison, la déclinaison et la composante horizontale pour les principales villes de France. Nous lui empruntons les nombres suivants relatifs à Paris au 1er janvier 1896 :

Déclinaison occidentale 15° 12′ ;

Inclinaison 65° 3′ ;

Intensité de la composante horizontale 0,1967.

On en déduit :

Intensité de la composante verticale 0,4228 ;

Intensité totale 0,4663.

On voit que la composante verticale est plus que double de la composante horizontale. Dans les Observatoires où ces phénomènes sont l'objet d'une étude continue l'inclinaison et la déclinaison sont enregistrées photographiquement au moyen de dispositifs faciles à imaginer. Quant à l'intensité de la composante horizontale, elle est déterminée à l'aide d'un barreau aimanté vertical suspendu sur couteaux, dont le moment magnétique a été préalablement déterminé et qui est soudé au fléau d'une balance. Le barreau d'acier est monté et installé avant d'être aimanté et la balance est exactement équilibrée. Puis, lorsqu'il est rendu solidaire du fléau, le barreau d'acier est aimanté sur place au moyen de deux solénoïdes parcourus par un courant électrique et que l'on place de part et d'autre du point neutre de l'aimant qui coïncide sensiblement avec le couteau C (fig. 149). On procède alors à la mesure du moment magnétique et, cette mesure faite, on installe l'ensemble sur le support C des couteaux, de manière que le plan déterminé par le fléau et le barreau AB, coïncide avec le

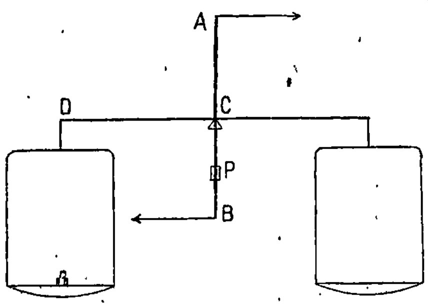


Fig. 149

méridien magnétique. On constate alors que l'équilibre est rompu et qu'il faut ajouter des poids dans l'un des plateaux pour le rétablir. Soit p la valeur de ces poids ; l la longueur du bras de levier DC ; $\mathcal{M}$ le moment magnétique du barreau et h l'intensité de la composante horizontale du magnétisme terrestre. On a, lorsque l'équilibre est établi,

$$pl = \mathcal{M}h \qquad \text{d'où} \qquad h = \frac{pl}{\mathcal{M}},$$

$\mathcal{M}$ étant connu ainsi que p et l, on en déduit h.

Pour déterminer la composante verticale, le même procédé est applicable ; il suffit de modifier la position du barreau AB et de le placer horizontalement.

284. — Cette méthode qui convient lorsqu'on ne veut faire que des observations isolées, ne se prêterait pas à l'enregistrement photographique ; pour parer à cet inconvénient de légères modifications suffisent. Les deux composantes ne varient, pendant le cours d'une

année, que de quelques centièmes de leur valeur ; il en résulte que la variation du poids nécessaire pour établir l'équilibre rigoureux est, en valeur absolue, de quelques milligrammes. On peut dès lors se dispenser de rétablir l'équilibre chaque fois qu'il est rompu ; il suffit de profiter de la propriété que possèdent les balances de se transformer en peson lorsque le centre de gravité du fléau et des pièces qui en sont solidaires est situé au-dessous du couteau C. Le fléau prend alors des positions d'équilibre qui dépendent de l'excès, positif ou négatif, du couple développé par l'aimant, sur le couple pour lequel l'équilibre a été primitivement établi et, dans ces positions, il fait avec l'horizontale des angles proportionnels à cet excès. Il suffit donc d'enregistrer avec un miroir les angles dont il dévie pour en conclure les variations de la composante horizontale.

285. — Nous remarquerons, en terminant l'énumération des procédés employés pour mesurer l'intensité du magnétisme terrestre, que, dans tous, on s'appuie sur la valeur, supposée connue et invariable, du moment magnétique d'un aimant. Or, il est certain que cet élément éprouve des changements fréquents dus à des causes insignifiantes comme : un choc, l'approche momentanée d'une masse de fer ; il vaudrait donc mieux, suivant nous, renoncer pour cet objet à l'emploi des aimants permanents et se servir d'électro-aimants qui auraient l'avantage d'être beaucoup plus puissants et dont le moment magnétique pourrait être très facilement rendu absolument constant. Nous reviendrons d'ailleurs sur ce sujet dans le chapitre relatif à l'Electro-magnétisme.